

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

MODELOS PARA PLANEJAMENTO DE REDES
DE TRANSMISSÃO TELEFÔNICA

MITSUO SHIBATA

ORIENTADOR: SECUNDINO SOARES FILHO

TESE DE MESTRADO APRESENTADA AO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA
E CIÊNCIA DE COMPUTAÇÃO DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FEVEREIRO - 1981

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

AGRADECIMENTOS

Quero expressar meus agradecimentos a todos aqueles que das mais diversas formas participaram para a realização deste trabalho. Em especial ao Ronaldo e Rodolfo da Divisão de Planejamento de Sistemas da TELESP pelo estímulo à pesquisa; ao hermano e França da F.E.C. e Aquino do CPqD pela colaboração recebida; à M.Júlia pela trabalhosa datilografia, e ao meu orientador Secundino, por sua dedicação, apoio e incentivo.

RESUMO

O planejamento de redes de transmissão telefônica é tratado em duas etapas: longo e curto prazo. Ambas são formuladas como casos particulares do problema de fluxo de custo mínimo em um grafo com multiprodutos.

Um algoritmo aproximado de supressão de arestas para resolver o problema de longo prazo é apresentado e comentado. Para uma classe especial de funções custo denominado "delta-linear" (custo fixo delta mais custo variável linear) é proposto um método baseado na decomposição de Benders, que procura a solução ótima global em problemas de grande dimensão.

A curto prazo procura-se determinar o roteamento de troncos e o aumento da capacidade dos arcos considerando a rede existente e de modo a atender os padrões de transmissão e a demanda de circuitos a mínimo custo. Este problema é formulado como um modelo particular de programação linear que permite um eficiente algoritmo baseado na técnica GUB - "Generalized Upper Bounding". Uma aplicação prática é realizada e comentada.

ÍNDICE

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	02
CAPÍTULO II - PLANEJAMENTO DE TRANSMISSÃO A LONGO PRAZO	05
II.1 - DESCRIÇÃO DO PROBLEMA	05
II.2 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	06
II.3 - MÉTODO DE SUPRESSÃO DE ARESTAS	08
II.4 - MÉTODO DE DECOMPOSIÇÃO DE BENDERS	13
II.5 - TESTES REALIZADOS	20
II.6 - COMENTÁRIOS	25
CAPÍTULO III - PLANEJAMENTO DE TRANSMISSÃO A CURTO PRAZO	27
III.1 - DESCRIÇÃO DO PROBLEMA	27
III.2 - SIMPLIFICAÇÕES	29
III.3 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA COMO MODELO DE PRO GRAMAÇÃO LINEAR	29
III.4 - APLICAÇÃO	33
III.5 - COMENTÁRIOS	48
APÊNDICE A - MÉTODO "BRANCH-AND-BOUND" PARA RESOLUÇÃO DO PRO BLEMA DE LONGO PRAZO	50
APÊNDICE B - MÉTODO "GUB" PARA RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE CURTO PRAZO	56
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	69

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1 - INTRODUÇÃO

O planejamento técnico da expansão de uma rede de tele comunicações visa atender a demanda de terminais num dado perío do, mantendo a qualidade dos serviços num nível satisfatório. De uma maneira bem geral, podemos separá-lo em cinco etapas sucessi vas:

- demanda de terminais (mercado)
- localização de centrais (rede de assinantes)
- projeção de tráfego telefônico ponto a ponto
- encaminhamento e dimensionamento de rotas entre cen trais (entroncamento)
- roteamento de troncos (rede de transmissão)

Este trabalho trata somente da última etapa, ou seja , do problema de planejamento da rede de transmissão, particular mente numa área multi-central, que devido às suas grandes dimen sões e complexidade exige instrumentos computacionais confiáveis e eficientes.

Devido à atual conjuntura econômica, os planejadores têm se preocupado quase que exclusivamente em decisões de políti cas de curto prazo. Todavia, a escolha de uma melhor política de expansão não deveria ser feita sem considerar a situação da rede após um período de tempo suficientemente longo, pelo menos igual à vida útil dos equipamentos e/ou infra-estruturas de transmissão. De sorte que uma solução satisfazendo o problema de curto prazo deveria passar necessariamente pela pesquisa de uma política óti ma de investimentos a longo prazo.

Dentro deste contexto, neste trabalho procuramos for necer instrumentos computacionais de otimização, do planejamento da rede de transmissão de uma área metropolitana nos enfoques de longo e curto prazo. Estes dois problemas são matematicamente for mulados e tratados como dois casos particulares dos problemas da teoria de fluxo em redes com multiprodutos, sob o ponto de vista estático.

O problema de longo prazo que é tratado no Capítulo II procura determinar a topologia da rede que satisfaça a demanda de modo mais econômico, ou seja, a configuração da rede com res

pectivas capacidades dos arcos, que permita escoar simultaneamente todo o fluxo demandado. Consideramos neste caso a função objetivo como soma de duas parcelas, custo fixo devido à abertura de um arco na rede, e custo variável linear com a capacidade dos arcos. Para resolução deste problema, apresentamos o método heurístico de supressão das arestas de Minoux [1], e propomos um método baseado na teoria de decomposição de Benders generalizada que procura a otimização global. No Apêndice A apresentamos um método "branch and bound" de otimalidade global, porém viável somente para problemas de dimensão reduzida, conforme se verificou nos testes realizados e que completam o Capítulo II.

O problema a curto prazo consiste em minimizar o custo de compra de cabos novos mais o custo de roteamento, satisfazendo a demanda de troncos entre centrais, o plano de transmissão e as restrições de capacidade dos cabos disponíveis. No Capítulo III o problema é apresentado e simplificado para que permita sua formulação como modelo de Programação Linear, cuja estrutura particular permite sua resolução pela técnica de decomposição GUB, "Generalized Upper Bounding". Desta forma, o algoritmo descrito no Apêndice A, viabiliza sua programação em linguagem FORTRAN, mostrando-se bastante eficiente nos testes realizados com dados reais de uma fase de expansão da área metropolitana de São Paulo, conforme descrito no item III.4.

CAPÍTULO II

PLANEJAMENTO A LONGO PRAZO

II - PLANEJAMENTO A LONGO PRAZO

II.1 - Descrição do Problema

O problema de longo prazo no planejamento de uma rede de transmissão basicamente consiste em determinar a topologia da rede, que numa área multi-central, seria a configuração das galerias de dutos em que serão alocados os cabos troncos, satisfazendo a demanda de troncos entre todas as centrais para o horizonte de planejamento, a mínimo custo. Em outras palavras, precisamos definir quais galerias devem ser abertas e com que capacidades, de modo que a rede resultante escoe o fluxo demandado e seja de menor custo de implantação.

No caso de telecomunicações o problema de fluxo do grafo associado, engloba multiprodutos, uma vez que a demanda é definida entre cada par de nós. Além disso, como o problema apresenta funções de custo concavas, caracterizando economias de escala na implantação de um arco, aparece a complexidade adicional de possuir vários ótimos locais.

Nestas condições bem gerais, soluções globais somente são obtidas através de algoritmos tipo "branch-and-bound", viáveis somente em problemas de dimensão reduzida, e mesmo assim consumindo excessivo tempo de computação. Métodos heurísticos mais rápidos foram propostos recentemente por Minoux {1}, cuja limitação essencial está em garantir somente a obtenção de ótimos locais.

Para uma classe especial de funções custo denominadas "delta-linear" (custo fixo delta de abertura dos arcos mais custo variável linear com a capacidade dos arcos) que é uma simplificação do problema, os algoritmos de Minoux foram testados, apresentando resultados satisfatórios, como podem ser vistos em {1} e {2}.

Neste capítulo é proposto um método baseado na técnica de projeção de Benders para resolução deste problema com função custo delta-linear, que visa a solução ótima global para problemas de grande dimensão.

No item seguinte formulamos matematicamente o problema, sendo que o método heurístico de Minoux (supressão de arestas) é

apresentado no item 11.3 e o método baseado em Benders é descrito no item 11.4. O método "branch-and-bound" é apresentado no Apêndice A, cujos resultados serviram como referência de otimalidade global dos testes realizados, que englobam o item 11.5.

11.2 - Formulação do Problema

Seja um conjunto X composto de N nós representando os prédios onde estão colocadas as centrais telefônicas. É conhecida a demanda de troncos no horizonte de planejamento entre cada par de nós, assim como o custo de implantação dos arcos (galerias de dutos) ligando estes nós, em função da capacidade a ser instalada. O problema que se deseja resolver é saber quais arcos devem ser implantados e com que capacidades, de modo que a rede resultante satisfaça a demanda de fluxo e apresente o custo mínimo de implantação.

Este problema de planejamento de redes pode ser formulado como um problema de fluxo de custo mínimo em uma rede com multiprodutos. Seja $u_m = (i, j)$, $m=1, 2, \dots, M$, com $i, j \in X$, o conjunto U de arcos candidatos à implantação, e supondo existir K produtos diferentes correspondendo às demandas entre cada par de nós, seja x_m^k o fluxo do produto k no arco u_m (representando a capacidade do arco u_m ocupada pela demanda k); seja $\phi_m(\cdot)$ a função custo associada ao fluxo total no arco u_m (representando o custo de implantação do arco u_m em função da capacidade a ser instalada). O produto k representa a demanda entre a fonte s_k e o sumidouro t_k (a orientação é totalmente arbitrária), de valor igual a d_k .

O problema tratado se escreve portanto

$$\begin{array}{ll}
 \text{MIN} & \sum_{m=1}^M \phi_m \left(\sum_{k=1}^K x_m^k \right) \\
 \text{(P)} & \text{sujeito a:} \\
 & l x^k = r^k \\
 & x^k \geq 0 \quad k=1, \dots, K
 \end{array} \tag{1}$$

$$\tag{2}$$

onde I é a matriz de incidência do grafo $G = [X, U]$, $x^k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_M^k)^T$ é o vetor de fluxos do produto k e r^k é um vetor definido por

$$r_n^k = \begin{cases} d^k & \text{se } n=s_k \\ -d^k & \text{se } n=t_k \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad n=1, 2, \dots, N$$

É preciso ressaltar que (P) é uma formulação particular de um problema de fluxo em rede com multiprodutos, uma vez que não apresenta restrições de capacidade sobre os arcos, geralmente do tipo

$$\sum_{k=1}^K x_m^k \leq b_m \quad m=1, \dots, M \quad (3)$$

$$x_m^k \leq c_m^k \quad m=1, \dots, M ; k=1, \dots, K \quad (4)$$

A caracterização de um problema de fluxo como multiproduto se dá através da competição verificada entre os diversos produtos na utilização da rede. Esta competição pode se expressar por meio de restrições, como no caso de (3), e/ou através da função objetivo, no caso de (1) não ser linear.

Os problemas do tipo (1)-(4) com função objetivo linear foram já bastante estudados como pode ser verificado no trabalho de condensação de Kennington [3]. O problema de planificação de redes aqui analisado (P) se apresenta como um problema de multiprodutos pois as funções custo $\phi_m(\cdot)$ são geralmente côncavas, devido à economias de escala que se verificam em implantação de arcos com capacidade elevada.

A minimização de funções côncavas sobre poliedros convexos (definidos por exemplo por (2)) é um problema complexo devido à existência de vários mínimos locais. Algoritmos de "Separação e Avaliação Progressiva" ("branch-and-bound") são a única maneira conhecida de se obter soluções globais [1,4]. Entretanto, dada a sua natureza enumerativa, estes algoritmos consomem excessivo tempo de computação, só sendo possível o tratamento de pro

blemas de dimensão reduzida. Por este motivo, desenvolveram-se algoritmos aproximados, como os algoritmos de "linearizações sucessivas" e "supressão de arestas" apresentados por Minoux [1]. Este último, em particular, é o que nos interessa.

11.3 - Método de Supressão de Arestas

Trata-se de um método baseado em melhoramentos iterativos a partir de uma solução inicial, causados por modificações locais no grafo, do tipo supressão de arestas, a exemplo de algoritmos semelhantes de adição de arestas, ou troca de arestas. Seus fundamentos teóricos estão resumidos a seguir.

Definição: Uma solução uniroteada para o problema (P) é aquela onde a demanda de fluxo entre quaisquer par de nós é satisfeita através de um único caminho (rota).

Teorema 1: No caso da função objetivo (1) ser linear, uma solução ótima de (P) será uma solução uniroteada.

Sendo (1) linear, o problema (P) torna-se separável em K problemas independentes cuja solução ótima, na ausência de restrições do tipo (4), consiste em satisfazer toda a demanda pelo caminho de custo mínimo.

Teorema 2: Os pontos extremos de (2) correspondem a soluções uniroteadas.

O conjunto de pontos extremos de (2) pode ser gerado a través de resoluções de vários problemas (P) com funções objetivo lineares convenientes. Assim, pelo teorema 1 todos os pontos extremos de (2) são soluções uniroteadas. Na verdade correspondem a soluções básicas pois uma solução qualquer sempre pode ser colocada como combinação convexa de soluções uniroteadas.

Teorema 3: No caso da função objetivo (1) ser côncava, uma solução ótima de (P) será uma solução uniroteada.

Isto se segue do fato de que minimização de função côncava sobre poliedro convexo ocorre pelo menos em um ponto extremo. Na verdade todos os mínimos locais que existirem ocorrerão em pontos extremos.

Teorema 4: Seja Y^0 uma solução uniroteada de (P), associada ao grafo $G = [X, U]$, e seja o arco $u_q = (i, j)$ tal que $Y_q^0 > 0$. Seja L o caminho mínimo, com valor $W(L)$, entre os nós i e j no grafo $G' = G - \{u_q\}$ cujos arcos têm comprimento $\phi_m(Y_m^0 + Y_q^0) - \phi_m(Y_m^0)$. Se para todo arco $u_q \in G$, tal que u_q faz parte de um ciclo e $Y_q^0 > 0$,

$$W(L) - \phi_q(Y_q^0) \geq 0$$

então, Y^0 é solução ótima local de (P).

Prova: Seja uma solução Y^1 qualquer construída a partir de Y^0 , re-roteando a totalidade do fluxo $Y_q^0 > 0$ sobre o caminho L do grafo G' . Esta solução Y^1 será uma solução uniroteada adjacente a Y^0 . Portanto,

$$Y_u^1 = Y_u^0 \quad \forall u \notin L, u \neq u_q$$

$$Y_q^1 = 0$$

$$Y_u^1 = Y_u^0 + Y_q^0 \quad \forall u \in L$$

Obviamente, Y^1 satisfaz as restrições de (P) e

$$\begin{aligned} \phi(Y^1) - \phi(Y^0) &= \left[\sum_{u \in L} \phi_u(Y_u^0 + Y_q^0) \right] - \left[\sum_{u \in L} \phi_u(Y_u^0) + \phi_q(Y_q^0) \right] = \\ &= \underbrace{\sum_{u \in L} \left[\phi_u(Y_u^0 + Y_q^0) - \phi_u(Y_u^0) \right]}_{W(L)} - \phi_q(Y_q^0) \end{aligned}$$

Para que Y^0 seja ótimo local de (P),

$$\phi(Y^1) - \phi(Y^0) \geq 0$$

o que prova o teorema.

Em outras palavras, se para todo arco, que faz parte de um ciclo de uma solução (uniroteada), onde passa fluxo, a re

distribuição desse fluxo no restante do grafo importar um custo maior que o custo de implantação do mesmo, então esta solução é um mínimo local de (P).

Sempre que esta condição não for verificada, existirá uma solução Y^1 tal que $\phi(Y^1) < \phi(Y^0)$, que será a base do algoritmo de supressão de arestas que é apresentado a seguir em sua versão mais simples.

ALGORITMO DE SUPRESSÃO DE ARESTAS

a) inicialização ($p=0$)

Seja Y^0 uma solução uniroteada inicial de (P) onde

$$Y^0 = (Y_1^0, \dots, Y_M^0)^T$$

c

$$Y_m = \sum_{k=1}^K x_m^k$$

é o fluxo total no arco u_m . Seja Q_k^0 o caminho ligando os nós s_k e t_k através do qual se escoar o fluxo d_k nesta solução.

b) Para todos os arcos $u_q = (i, j)$ onde $Y_q^0 > 0$, sucessivamente

b1) Determinar o caminho mínimo L_q entre os nós i e j de $G' = G - \{u_q\}$ cujos arcos têm comprimento $\phi_m(Y_m^0 + Y_q^0) - \phi_m(Y_m^0)$. Seja $W(L_q)$ o comprimento deste caminho.

b2) Calcular $\Delta(q) = W(L_q) - \phi_q(Y_q^0)$.

c) Na iteração p seja Y^p a solução uniroteada corrente.

Determine $u_r = (i, j)$ tal que:

$$\Delta(r) = \min_q \Delta(q)$$

d) Calcule o caminho mínimo L_r entre os nós i e j do grafo $G - \{r\}$ cujos arcos têm comprimento $\phi_m(Y_m^t + Y_r^t) - \phi_m(Y_m^t)$. Seja $W(L_r)$ o comprimento deste caminho. Se

$$W(L_r) - \phi_r(Y_r^t) > \min_{q \neq r} \Delta(q)$$

então, faça

$\Delta(r) = W(L_r) - \phi_r(Y_r^t)$ e volte a c); senão,

c) Se $W(L_r) - \phi_r(Y_r^p) \geq 0$, PARE: a solução Y^p é localmente ótima. Caso contrário, vá até f).

f) Definir Y^{p+1} como o nova solução uniroteada onde cada fluxo d_k se escoar sobre o caminho

$$Q_k^{p+1} = Q_k^p \quad \text{se } u_r \notin Q_k^p$$

$$Q_k^{p+1} = \{Q_k^p \cup L_r\} - \{Q_k^p \cap L_r\} - \{u_r\} \quad \text{se } u_r \in Q_k^p.$$

Faça $\Delta(r) = 0$, $t = t+1$ e volte a c).

A base do algoritmo está no cálculo da tabela $\Delta(q)$ no item b), cujos valores representam a variação de custo consecutiva à supressão de um arco qualquer para todos os arcos de G . Num a iteração p qualquer, após a supressão de alguns arcos e certos $\Delta(q)$ modificados, no item c) obtém-se $\Delta(r)$, sendo que em d) calcula-se o valor mais exato $\Delta^p(r)$, que pode ser diferente de $\Delta(r)$, pois o grafo teve algumas alterações.

Se $\Delta^p(r) > \min_{q \neq r} \Delta(q)$, atualizamos $\Delta(r) \leftarrow \Delta^p(r)$ e voltamos ao passo c).

$\Delta(r') = \min_{q \neq r} \Delta(q)$ significa que r' é o segundo arco na ordem dos Δ crescentes. Portanto, duas coisas podem acontecer:

- $\Delta^p(r) \leq \Delta(r')$ e $\Delta^p(r) < 0$, então o arco u_r será realmente retirado e atualize $\Delta(r) = 0$; se $0 \leq \Delta^p(r) \leq \Delta(r')$, PARE.
- $\Delta^p(r) > \Delta(r')$ significa que é possível que a supressão do arco u_r , seja melhor. Por isso, não se suprime u_r , e atualiza-se o valor $\Delta(r) \leftarrow \Delta^p(r)$.

Em suma, analisa-se a cada iteração se a eliminação de um arco, e conseqüente redistribuição do seu fluxo pelo caminho de menor custo que o equivale, é vantajosa. Caso não o seja para todos os arcos, pelo teorema 4, a solução corrente é um ótimo local.

Convém observar que o algoritmo é aplicável ao problema (P) com função objetiva côncava qualquer. Em particular para uma classe de funções de custo especial, "delta-linear", do tipo

$$\phi_m(a) = \begin{cases} 0 & \text{se } a = 0 \\ \delta_m + a\alpha_m & \text{se } a > 0 \end{cases} \quad (5)$$

onde δ_m é o custo de implantação do arco u_m e α_m é o custo variável por unidade de capacidade instalada, que é uma simplificação da função "escada", comumente utilizada para problemas desta natureza, este algoritmo apresentou relativa eficiência, como certificado em aplicações na área de comunicações [1] e potência [2].



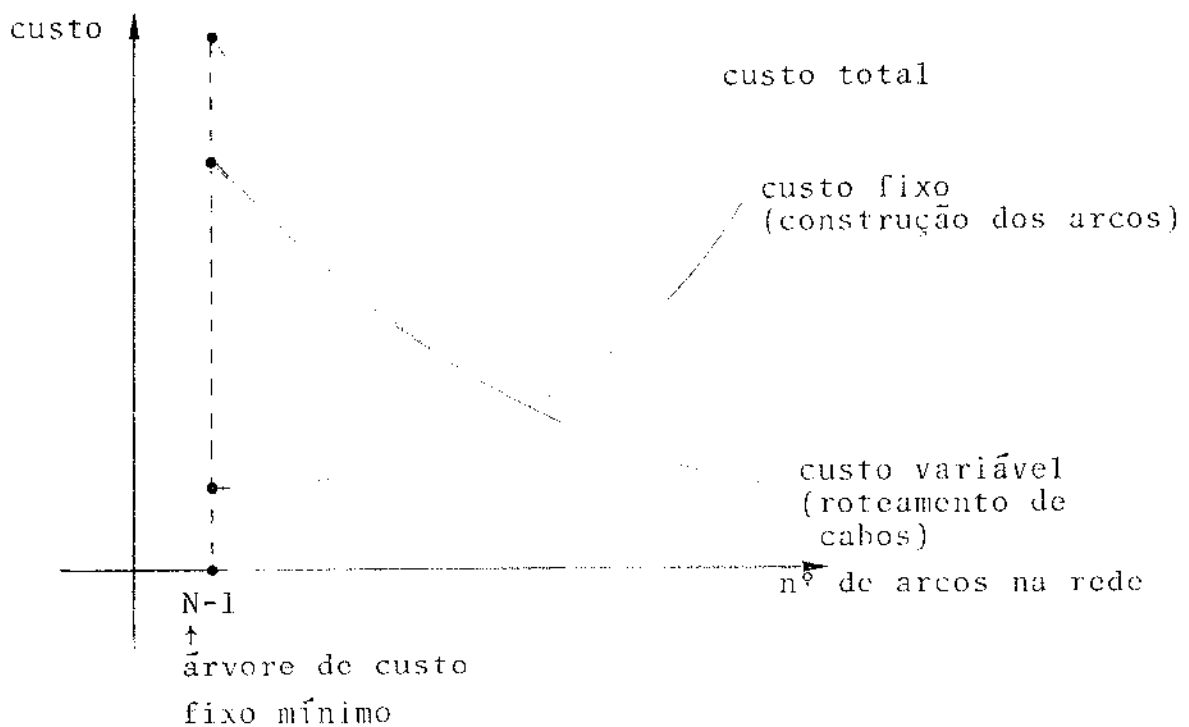
Além do mais, alguns melhoramentos podem torná-lo ainda mais atrativo neste caso, como o cálculo exato da variação de custo a curretada pela eliminação de um arco (item b2) e uma redistribuição mais adequada do seu fluxo pelo grafo (item d). Isto porque quando fixados os arcos de G , ou seja, estabelecido o custo fixo δ associado à presente iteração, o problema de roteamento se decompõe para cada produto individualmente uma vez que a função objetivo restante é linear, só contendo o custo variável α .

Baseado no fato que quando fixados os arcos a serem implantados, o problema de determinar suas capacidades é praticamente trivial, propõe-se no item seguinte um algoritmo de decomposição em dois níveis onde o nível superior se encarrega de escolher os arcos a serem implantados, cada vez de um modo mais econômico, enquanto o nível inferior obtém o roteamento mais ade

quando a rede proposta, determinando a capacidade dos arcos.

11.4 - Método de Decomposição de Benders {6}

É intuitivo que quanto maior o número de arcos da rede, menores os custos de roteamento dos cabos e maiores os custos de construção dos arcos. A solução de compromisso determina o número ideal de arcos, suas localizações e suas capacidades, que apresenta o menor custo total.



Reformulando-se o problema (P) com função objetiva "delta-linear" {5}, através da introdução de novas variáveis de decisão z_m do tipo booleanas, resultando o problema (P')

Deste modo, consegue-se uma separação entre custos fixos e variáveis, os primeiros associados às variáveis $z=(z_m)$, $m=1, \dots, M$, e os segundos associados às variáveis $x=(x_m^k)$, $m=1, \dots, M$, $k=1, \dots, K$.

$$\text{MIN}_{x, z} \left\{ \sum_{m=1}^M \delta_m z_m + \alpha_m \sum_{k=1}^K x_m^k \right\} \quad (6)$$

$$(P') \quad \left. \begin{array}{l} \text{s.a. } Ix^k = r^k \\ x^k \geq 0 \\ (1-z_m)x_m^k = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} k = 1, \dots, K \\ m = 1, \dots, M \end{array} \quad (7)$$

$$z_m = 0 \text{ ou } 1 \quad m = 1, \dots, M \quad (8)$$

Projetando-se (P') sobre os espaços das variáveis z , temos o problema projetado equivalente (PP)

$$(PP) \quad \text{MIN}_z \left\{ \sum_{m=1}^M \delta_m z_m + \text{MIN}_x \left[\sum_{m=1}^M \alpha_m \sum_{k=1}^K x_m^k \text{ s.a. } (7) \right] \right\}$$

O minimizando interior corresponde a um problema em x para um valor fixado em z . O valor ótimo deste problema parametrizado em z , $v(z)$, pode ser obtido através da resolução do subproblema

$$(SP) \quad \begin{array}{l} v(z) = \text{MIN} \sum_{m=1}^M \alpha_m \sum_{k=1}^K x_m^k \\ \text{s.a. } Ix^k = r^k \\ x^k \geq 0 \quad k = 1, \dots, K \\ (1-z_m)x_m^k = 0 \quad m = 1, \dots, M \\ \quad \quad \quad k = 1, \dots, K \end{array}$$

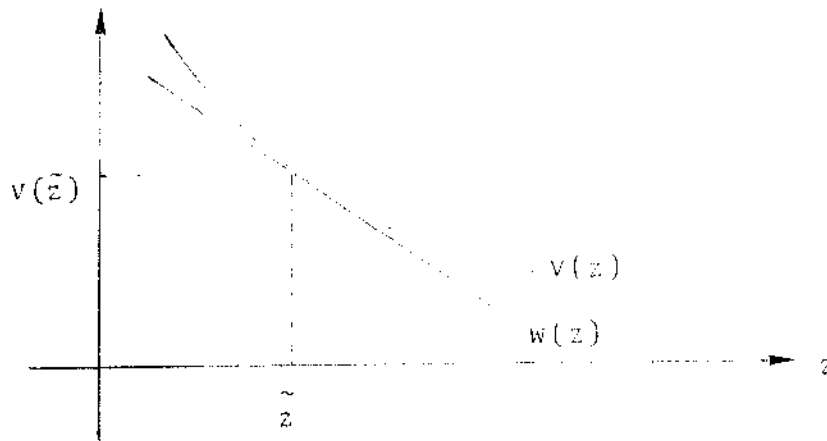
Supõe-se que (SP) sempre tem pelo menos uma solução factível, ou seja, que os z fixados sempre definem um grafo conexo. Esta premissa significa que o conjunto V definido por Geoffrion {6} é não vazio, i.e.,

$$V = \{z / \exists x^k = r^k \text{ e } (1-z_m)x_m^k = 0, m=1, \dots, M; k=1, \dots, K$$

para algum $x \geq 0\} \neq \emptyset$

Resolvido (SP) para um valor particular de z , ($z=\tilde{z}$) e encontrado $v(\tilde{z})$ é possível, baseado na teoria da dualidade {5}, obter um hiperplano suporte a função $v(z)$ no ponto \tilde{z} , dado por

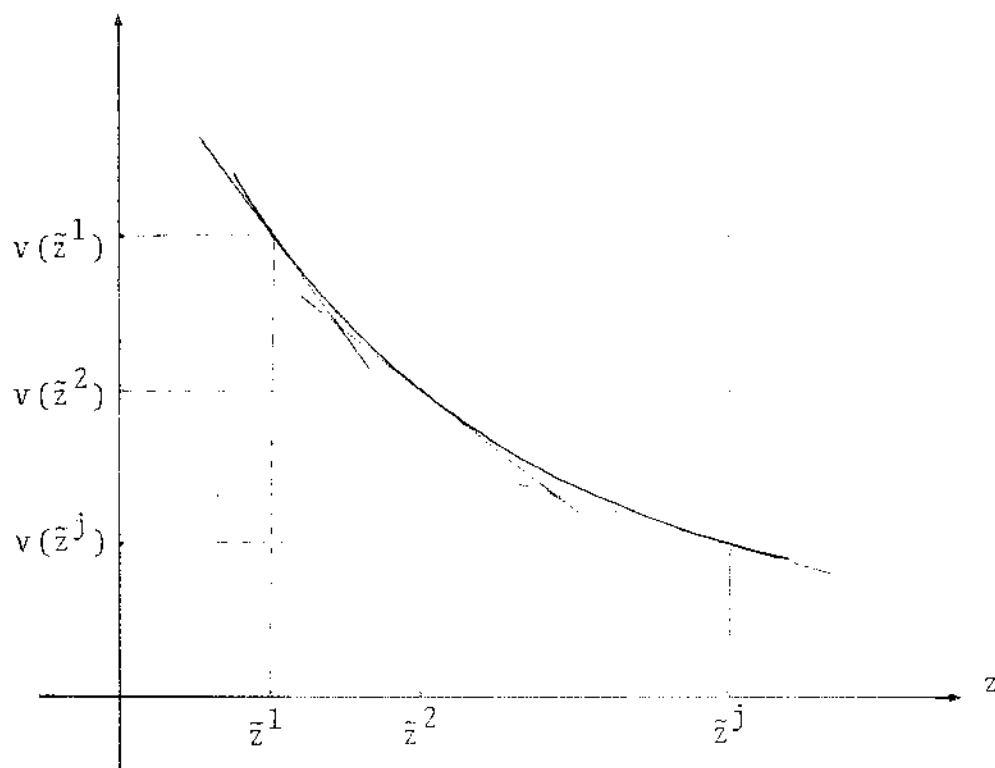
$$w(z) = v(\tilde{z}) + \tilde{\lambda}(z-\tilde{z})$$



Observe que $v(z)$ é convexo se (SP) for cónvexo {5}. No caso aqui tratado $v(z)$ na verdade é discreta, mas por facilidade de compreensão está sendo ilustrada como contínua.

A inclinação deste hiperplano é dada pelo vetor multiplicador $\tilde{\lambda}$ associado às restrições parametrizadas em \tilde{z} . Uma vez que tais restrições não estão explicitadas em (SP) (conexidade da rede), é necessário um trabalho de obtenção desta inclinação λ baseado exclusivamente em uma análise pós-otimização, como descrito adiante. De qualquer modo, conhecidos vários destes hiperplanos $w^j(z)$ é possível aproximar $v(z)$ por sua linearização externa.

$$v(z) = \sup_j \{w^j(z) = v(\tilde{z}^j) + \tilde{\lambda}^j(z-\tilde{z}^j)\}$$



Finalmente, lembrando que o supremo é o menor limitante superior, o problema projetado pode ser aproximado por

$$\begin{array}{ll}
 \text{(PM)} & \begin{array}{l}
 \text{MIN}_{z, \sigma} \quad \left\{ \sum_{m=1}^M \delta_m z_m + \sigma \right\} \\
 \text{s.a.} \quad \sigma \geq v(z^j) + \tilde{\lambda}^j (z - z^j) \quad , \quad \forall j \\
 \\
 z_m = 0,1 \quad , \quad m=1, M
 \end{array}
 \end{array}$$

Este problema mestre (PM) constitui o nível superior do algoritmo proposto. Seu objetivo é escolher uma rede z (conjunto de arcos a serem implantados) e fornecê-la ao sub-problema (SP) que obterá o melhor roteamento das demandas e permitirá, por sua vez, melhorar a linearização externa de $v(z)$, tornando o problema aproximado (PM) cada vez mais realista.

A conveniência deste método reside em grande parte no fato de que (SP) é um problema separável, ou seja,

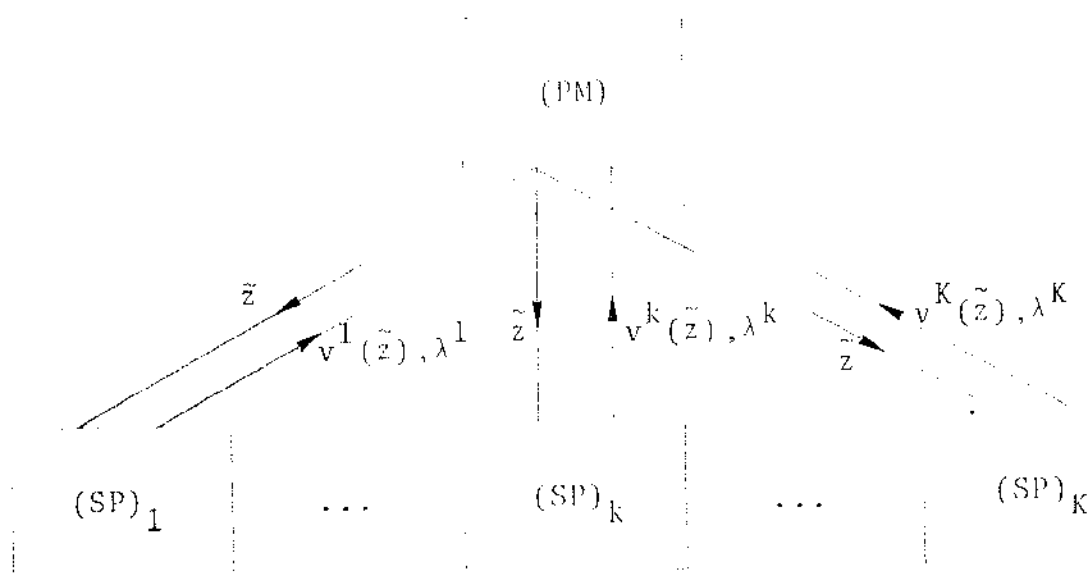
$$v(z) = \sum_{k=1}^K v^k(z)$$

onde

$$\begin{array}{l}
 (SP)_k \quad \left\{ \begin{array}{l}
 v^k(z) = \min \sum_{m=1}^M \alpha_m x_m^k \\
 \text{s.a.} \quad Ix^k = r^k \\
 x^k \geq 0 \\
 (1-z_m) \cdot x_m^k = 0 \quad m=1, \dots, M
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

A solução de $(SP)_k$ é muito simples, bastando encontrar o caminho de custo mínimo ligando s_k e t_k na rede (conexa) definida pelo z fixado, onde os comprimentos dos arcos são dados por α_m .

A estrutura hierárquica de cálculo em dois níveis está esquematizada a seguir:



RESOLUÇÃO DO PROGRAMA MESTRE

O programa mestre é um problema linear misto, com variável σ real e variáveis inteiras $z=(z_m)$, $z_m=0,1$.

$$(PM) \quad \left\{ \begin{array}{l}
 \min \sigma + \delta z \\
 z, \sigma \\
 \text{s.a.} \quad \sigma \geq v(\tilde{z}^j) + \tilde{\lambda}^j (z - \tilde{z}^j) \quad \forall j \\
 z_m = 0, 1 \quad m=1, \dots, M
 \end{array} \right.$$

O artifício usado para a resolução de (PM) é que ao invés de procurarmos otimalidade, buscamos apenas a factabilidade, isto é, uma solução cujo valor seja inferior a $LS-\epsilon$. Desta forma podemos formular o programa mestre como achar um vetor $z=(z_m)$ factível às restrições:

$$\begin{cases} \sigma \geq v(\tilde{z}^j) + \tilde{\lambda}^j(z - \tilde{z}^j) & , \quad \forall j \\ \delta z + \sigma \leq LS - \epsilon \end{cases}$$

Eliminando-se σ temos

$$\delta z + v(\tilde{z}^j) + \tilde{\lambda}^j(z - \tilde{z}^j) \leq LS - \epsilon \quad , \quad \forall j$$

onde LS é o menor valor da função objetivo até então encontrada.

Observe que este problema modificado:

Achar $z=(z_m)$, $z_m=0,1$, tal que

$$\delta z + v(\tilde{z}^j) + \tilde{\lambda}^j(z - \tilde{z}^j) \leq LS - \epsilon \quad j=1, \dots, p$$

pode ser resolvido por um algoritmo de programação zero-um puro [9], introduzindo-se uma função objetivo qualquer. Então podemos escrevê-lo como:

$$\begin{aligned} \text{MIN} \quad & \sum_{m=1}^M c_m z_m \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{m=1}^M a_{jm} z_m \leq b_j \quad j=1, \dots, p \\ & z_m = 0,1 \quad m=1, \dots, M \end{aligned}$$

onde $a_{jm} = \delta_m + \tilde{\lambda}_m^j$

e $b_j = LS - v(\tilde{z}^j) + \tilde{\lambda}^j \tilde{z}^j - \epsilon.$

OBTENÇÃO DOS MULTIPLICADORES

Uma considerável parcela do esforço computacional do método aqui proposto consiste na obtenção dos multiplicadores λ . Sejam \tilde{z}_m as variáveis booleanas associadas a cada arco u_m fornecidas pelo programa mestre (PM) e seja $\tilde{G}=[X, \tilde{U}]$ o grafo correspondente a \tilde{z} , onde \tilde{U} é o conjunto dos arcos u_m tal que $\tilde{z}_m=1$. Seja ainda

$$v(\tilde{z}) = \sum_{k=1}^K v^k(\tilde{z}),$$

o custo variável total, obtido pela resolução dos sub-problemas $(SP)_k$, $k=1, \dots, K$. Lembrando que os multiplicadores $\tilde{\lambda}_m$ representam a variação marginal do valor ótimo $v(\tilde{z})$ em relação a uma variação em \tilde{z}_m , e que \tilde{z}_m são variáveis discretas, utilizamos os seguintes multiplicadores:

i) se $\tilde{z}_m=1$ (o arco pertence ao grafo \tilde{G})

$$\tilde{\lambda}_m = v(\tilde{z}) - v(\tilde{z}^{m-})$$

onde $v(\tilde{z}^{m-})$ representa o custo variável total mínimo no grafo $\tilde{G}-\{u_m\}$.

Caso $\tilde{G}-\{u_m\}$ for um grafo desconexo, faça

$$\tilde{\lambda}_m = -\delta_m$$

ii) se $\tilde{z}_m=0$ (o arco u_m não pertence ao grafo \tilde{G})

$$\tilde{\lambda}_m = v(\tilde{z}) - v(\tilde{z}^{m+})$$

onde $v(\tilde{z}^{m+})$ representa o custo variável total mínimo no grafo $\tilde{G}+\{u_m\}$.

ALGORITMO:

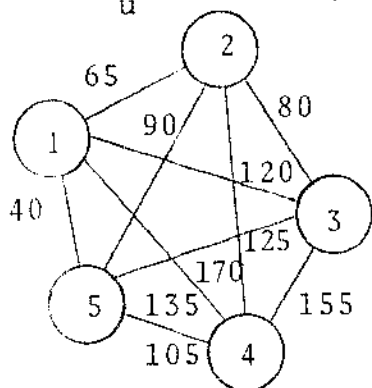
- Escolha um parâmetro de tolerância $\epsilon > 0$; inicialize com qualquer vetor z^0 convenientemente escolhido (grafo conexo). Resolva o sub-problema (SP) para $z=z^0$ e obtenha o vetor multiplicador λ^0 . Faça $p=1$ e o limitante superior $LS=v(z^0)+\epsilon z^0$.
- Resolva o problema mestre corrente. Se o problema mestre não

tem solução, PARE: a solução z^p é ÓTIMA. Caso contrário, seja z^* uma solução ótima e vá para c).

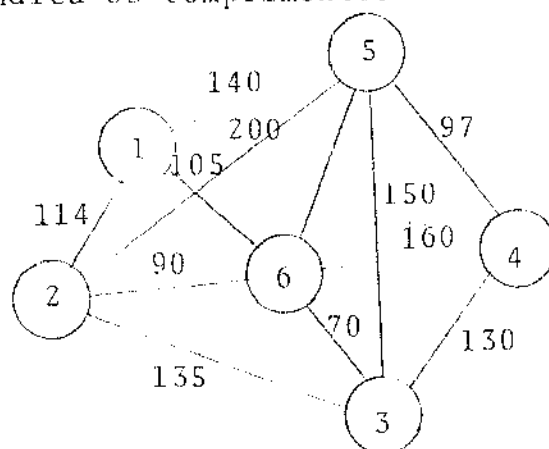
- c) Resolva (SP) para $z=z^*$. Seja x^* uma solução ótima e $v(z^*)$ o valor ótimo da função objetivo. Se $v(z^*)+\delta z^* < LS$, faça $LS = v(z^*)+\delta z^*$ e atualize a solução incumbente, isto é, faça $(\bar{x}, \bar{z}) = (x^*, z^*)$. Faça $p=p+1$, $\tilde{\lambda}^p = \lambda^*$ e $\tilde{z}^p = z^*$; volte a b).

11.5 - Testes Realizados

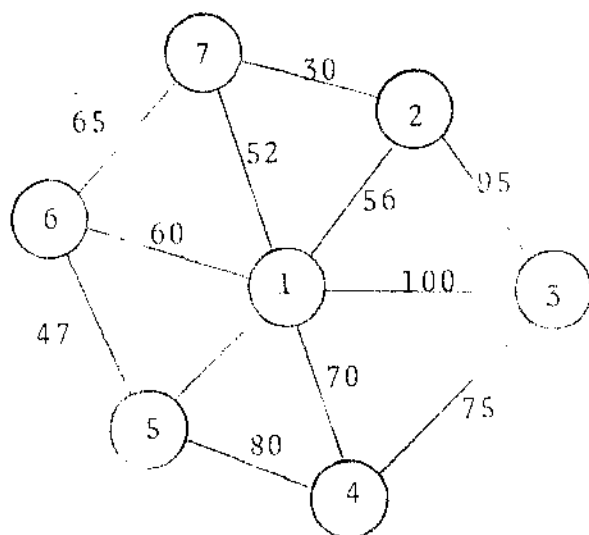
Os testes foram realizados sobre exemplos teóricos, com base nos dados gerados por Minoux [1], a partir de quatro grafos base da figura abaixo (onde se indica os comprimentos de referência \bar{c}_u dos arcos).



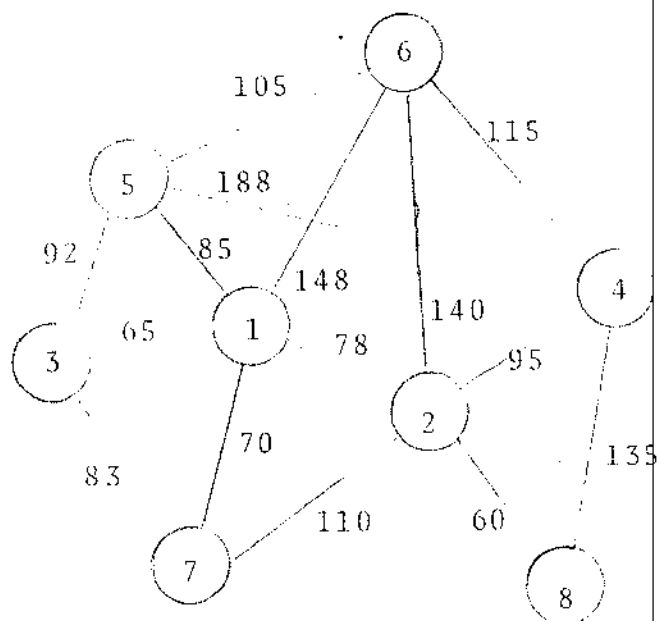
a) Grafo G1



b) Grafo G2



c) Grafo G3



d) Grafo G4

Cada exemplo é então definido pelos dados seguintes:

a) um coeficiente k (coeficiente de correção dos comprimentos) permite calcular os comprimentos ℓ_u de cada aresta pela fórmula $\ell_u = \text{parte inteira } [100k + (1-k)\bar{\ell}_u]$.

b) associa-se a cada nó $x_i \in X$ um número $\pi(x_i)$ (chamado "peso" do nó x_i) e define-se (para $i < j$) as demandas d_{ij} pela fórmula:

$$d_{ij} = \text{parte inteira } \left[K \left[\pi(x_i) \pi(x_j) \right]^{\alpha} / (\omega_{ij})^{\beta} \right]$$

onde α e β são dois coeficientes dados, ω_{ij} é o comprimento do caminho mínimo entre x_i e x_j (em função dos comprimentos ℓ_u) e onde K verifica:

$$K \sum_{\substack{i,j \\ i < j}} \left[\pi(x_i) \pi(x_j) \right]^{\alpha} / (\omega_{ij})^{\beta} = 100 N^2$$

As funções de custo são delta-lineares da forma

$$\phi_u(Y^u) = \ell_u(\delta + Y_u) \quad \text{para } Y_u > 0, \text{ onde } \delta \text{ é o custo fixo.}$$

Características dos diferentes exemplos estudados:

Exemplos	Grafo base	k	Pesos dos diferentes nós (em ordem)	α	β
11	G1 N=5	0	10, 5, 7, 8, 3	1	2
12		0	1, 9, 6, 4, 10	1	2
13		0,5	2, 5, 10, 8, 1	1	2
14		0,5	1, 9, 6, 4, 10	1	-2
15		1	10, 10, 10, 10, 10	1	0
21	G2 N=6	0	5, 10, 2, 7, 8, 1	1	2
22		0	5, 3, 2, 9, 1, 10	1	2
23		-0,4	5, 10, 2, 7, 8, 1	1	2
24		-0,4	1, 5, 8, 2, 6, 4	1	-2
25		1	1, 5, 8, 2, 6, 4	1	-1
31	G3 N=7	0	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	1	2
32		0	7, 1, 6, 5, 4, 3, 2	1	2
33		0	0, 5, 4, 8, 7, 6, 3	1	2
34		1	1, 2, 2, 2, 2, 2, 2	0,5	1
35		1	0, 1, 1, 1, 1, 1, 1	1	0
41	G4 N=8	0	5, 4, 8, 7, 3, 10, 1, 2	1	2
42		0	9, 5, 3, 2, 6, 1, 7, 10	1	2
43		0,5	5, 4, 8, 7, 3, 10, 1, 2	1	2
44		0,5	9, 5, 3, 2, 6, 1, 7, 10	1	2
45		0	2, 8, 7, 1, 6, 4, 3, 5	1	-2

A solução inicial utilizada corresponde a um uniroteamento ao longo dos caminhos de custo mínimo; sobre o grafo completo.

Sendo:

(A1): algoritmo "branch-and-bound" apresentado no apêndice A

(A2): algoritmo de supressão de arestas especializado para funções de custo delta-linear

(A3): algoritmo baseado no método de decomposição de Benders

(M) : algoritmo de supressão de arestas generalizado para funções custo côncava qualquer, apresentado por Minoux [1].

obtivemos os seguintes resultados:

Resultados obtidos

(*) indica que a solução ótima global foi encontrada.

Exemplo	Valor do custo fixo (δ)	(A1)	(M)	(A2)	(A3)
11	10	207 505	*	*	*
	50	232 970	*	*	*
	100	255 265	*	*	*
12	30	242 330	*	*	*
	50	252 655	*	*	*
	200	315 370	*	*	*
13	50	319 676	*	*	*
	100	358 610	*	*	*
	200	420 497	422 238	420 964	420 964
14	50	317 957	318 247	*	*
	300	472 280	475 857	*	*
	500	555 595	*	*	*
15	200	450 000	*	*	*
	250	500 000	*	*	*
	300	520 000	*	*	*
21	50	542 120	543 550	*	*
	200	667 190	*	*	*
	500	859 634	*	*	*
22	50	472 835	*	*	*
	100	517 743	524 385	*	*
	200	588 324	598 874	*	*
23	50	531 914	*	*	*
	200	654 885	658 626	*	*
	500	828 678	*	*	*
24	50	705 589	*	*	*
	100	747 993	750 194	*	*
	200	805 554	812 298	*	*
25	200	611 200	617 400	*	*
	500	805 900	818 000	*	*
	1000	1 055 900	1 058 300	*	*

Exemplo	Valor do custo fixo (δ)	(A1)	(M)	(A2)	(A3)
31	50	336 182	338 011	*	336 586
	500	521 679	*	*	*
	1000	698 810	*	*	*
32	50	334 284	334 885	*	*
	200	412 093	413 479	*	*
	500	509 764	*	*	*
33	50	368 897	371 485	*	*
	200	449 226	463 273	453 758	453 758
	500	566 826	580 151	578 576	578 576
34	318	1 020 600	*	*	*
	331	1 031 000	1 036 200	1 036 200	1 036 200
	1000	1 438 200	*	*	*
35	326	1 075 800	1 173 600	1 173 600	1 173 600
	1000	1 480 200	1 578 000	*	*
	2608	2 445 000	2 542 800	*	*
41	50	763 089	*	*	*
	200	905 341	*	*	*
	1000	1 463 505	*	*	*
42	10	612 368	*	*	*
	50	653 522	*	*	*
	100	696 542	701 222	*	*
43	100	892 905	893 616	*	*
	200	1 001 997	1 007 288	*	*
	500	1 278 525	1 285 816	*	*
44	50	771 850	773 343	772 371	772 371
	100	828 989	829 596	*	*
	200	923 638	931 672	924 314	925 496
45	50	1 173 693	*	*	*
	200	1 314 415	1 323 515	*	*
	500	1 545 147	1 558 557	1 549 435	1 549 435

11.6 - Comentários

Como pode ser visto no quadro dos resultados obtidos , com a especialização do algoritmo de supressão de arestas para funções custo "delta-linear" (A2), obtivemos melhores resultados que os apresentados em {1}, como era esperado. No entanto, ainda assim, a sub-otimalidade deve se deteriorar com a dimensão da rede estudada.

O metodo baseado na decomposição de Benders (A3), não alcançou otimalidade global em todos os casos, como se propunha inicialmente, ou por necessitar de multiplicadores mais precisos, ou por "cortes" melhores na função $v(z)$. Para que estes problemas detectados sejam contornados, se faz necessário uma pesquisa que deixamos em aberto para um trabalho futuro que concretize os resultados esperados do ponto de vista prático.

CAPÍTULO III

PLANEJAMENTO A CURTO PRAZO

III - PLANEJAMENTO A CURTO PRAZO

III.1 - Descrição do Problema

Nesta etapa, a preocupação do planejador consiste em determinar o roteamento de circuitos e a necessidade de cabos no vos em quantidade, tipos e locais adequados da rede, de modo a sa tis fazer a demanda de troncos entre todas as centrais, assim co mo os padrões técnicos de transmissão, ao menor custo possível.

Neste caso, a topologia da rede é pré-fixada pelo pla nejador, ou seja, são conhecidos os nós e arcos do grafo asso ciado para o período do planejamento.

A demanda de troncos entre cada par de prédios é sepa rada entre os diversos tipos de centrais a serem interligados do mesmo par de prédios. Além disto, para atender os padrões técni cos de transmissão, a escolha dos tipos de cabos a serem utiliza dos dependem das características das centrais a serem conectadas e do comprimento do caminho pelo qual será roteado.

DESCRIÇÃO DOS DADOS UTILIZADOS

a) Demanda ponto a ponto - ENTRONCAMENTO

Em telecomunicações a demanda de troncos é personaliza da, de acordo com o tipo de central do nó origem e tipo de cen tral do nó destino, caracterizando o conceito de multi- produ tos da teoria de fluxo em redes.

b) Plano Nacional de Transmissão - P.N.T.

De modo a manter níveis adequados da qualidade das li gações telefônicas entre quaisquer dois assinantes, o P.N.T. estabelece os critérios a serem obedecidos para as li gações entre centrais.

TIPO DE CENTRAL ORIGEM	TIPO DE CENTRAL DESTINO	ATENUAÇÃO (dB)		RESISTÊNCIA DE "LOOP" MÁX. (Ω)
		MIN	MAX	
LOCAL-"CROSSBAR"	LOCAL-PASSO A PASSO	0.0	8.0	1400.0
LOCAL-"CROSSBAR"	TANDEM ORIGEM	0.0	2.7	2000.0
LOCAL-"CROSSBAR"	TANDEM DESTINO	0.0	4.7	2000.0
TRÂNSITO	LOCAL	2.2	4.2	2000.0
.
.
.

c) Características dos meios de transmissão

As características dos cabos utilizados são lineares com o comprimento.

TIPO DE CABO	ATENUAÇÃO (dB/km)	RESISTÊNCIA OHMICA (Ω /km)
26NP	1.59	276.0
24NP	1.29	171.0
22NP	1.00	106.0
24H	0.74	176.0
22H	0.48	111.0

d) Caminhos entre cada par de nós

Os caminhos (trajetórias) entre cada par de nós são conhecidos "a priori" pelo planejador e, devido às restrições de transmissão e outras particularidades, formam um sub - conjunto extremamente pequeno do conjunto total de todos os caminhos possíveis entre origem e destino. Para uma área metropolitana, uma forma alternativa para escolha destes caminhos pode ser feita utilizando-se o algoritmo dos caminhos e - mínimos [7].

e) Exemplo

Seja uma ligação entre duas centrais do tipo local ("crossbar") ao longo de um caminho de 8,0 km. Determinar os tipos de cabo que atendem os padrões de transmissão.

aten.mín. : 0.0 dB

aten.máx. : 8.0 dB

resist."loop" máx : 2000 OHMs

Os cabos factíveis para esta ligação são:

{ 22NP
24H
22H

OBS: Neste trabalho consideraremos apenas o entroncamento utilizando cabo (transmissão analógica), sendo que as demandas atendidas exclusivamente por transmissão digital (PCM) serão comentados posteriormente.

III.2 - Simplificações

Na realidade este problema apresenta não-linearidades, como no custo de aumento de novas facilidades (por exemplo, os cabos não são comercializados em pares, mas por certos módulos que dependem da bitola do cabo).

Apesar da demanda de sistemas PCM ser bem conhecida e que cada sistema (30 canais) utiliza 2 pares de cabo, devido às caixas de regeneradores de pulsos que necessitam de infra-estrutura especial nas galerias de dutos, podemos dizer que a necessidade de pares de cabo para transmissão digital, por motivos operacionais, não é imediata e será excluída deste modelo.

Além disso, na rede de transmissão também concorrem para a utilização dos mesmos cabos as linhas privadas para assinantes (TELEX, PABX, transmissão de dados), cuja demanda é muito mais dinâmica que o entroncamento entre centrais.

Diante dos fatores acima apresentados, e devido às grandes dimensões do problema, no item III.3 formulamos o problema como modelo de programação linear cuja estrutura particular (GUB - "Generalizes Upper Bounding") permite a implementação computacional em linguagem FORTRAN. No item III.4 são feitos alguns comentários sobre esta abordagem e o algoritmo de resolução é descrito no Apêndice B.

III.3 - Formulação do Problema como Modelo de Programação Linear

Seja uma rede de telecomunicações em que os nós representam pontos de comutação (prédios), e os diversos tipos de cabo alocados numa mesma galeria de duto correspondem a arcos paralelos não orientados entre dois nós.

Definindo-se:

$N = \{1, \dots, n, \dots, \hat{n}\}$ conjunto dos pares de nós origem - destino que devem ser ligados.

$T(n) = \{1, \dots, t, \dots, \hat{t}\}$ conjunto dos tipos de ligações (dB, OHMs) de $n \in N$.

A cada dupla (n,t) , $t \in T(n)$, $n \in N$, definimos um produto k , para $k=1, \dots, K$, associado a demanda k .

$J(k) = \{1, \dots, j, \dots, \tilde{j}\}$ conjunto dos caminhos (sequência de galerias de dutos) da rede entre origem e destino pelos quais podem ser escoados o produto k .

$I = \{1, \dots, i, \dots, \tilde{i}\}$ conjunto das galerias de dutos existentes na rede.

$U = \{1, \dots, u, \dots, \tilde{u}\}$ conjunto dos tipos de cabos (meios de transmissão) considerados no estudo.

Portanto, dados k e $j \in J(k)$ define-se:

$U^*(k,j) = \{u \in U / \text{atendem às exigências de transmissão do produto } k \text{ escoados pelo caminho } j \in J(k)\}.$

x_j^{ku} : fluxo do produto k ao longo do caminho $j \in J(k)$, apoiado no cabo $u \in U^*(k,j)$.

z_i^u : quantidade de pares de cabo tipo u a serem comprados na galeria i .

s_i^u : capacidade inicial em pares do cabo tipo u da galeria i .

d^k : quantidade de troncos associado com a demanda k .

c_j^{ku} : custo unitário de roteamento (peso) associado à variável de fluxo x_j^{ku} .

f_i^u : custo do par de cabo novo associado com a variável z_i^u .

a_{ij}^{ku} : quantidade da capacidade do cabo u da galeria i usada por circuito do produto k roteado ao longo do caminho j , $j \in J(k)$.

FUNÇÃO OBJETIVO

Minimizar o custo total da expansão da rede de transmiss

são, que pode ser definido como a soma dos custos de roteamento e compra de pares de cabos novos.

$$\text{MIN} \sum_{k=1}^K \sum_{j \in J(k)} \sum_{u \in U^*(k,j)} c_j^{ku} x_j^{ku} + \sum_{i \in I} \sum_{u \in U} f_i^u z_i^u$$

Estes custos podem ser interpretados como custos de de signação de circuitos (isto é, custos de conexão de circuitos aos enlaces) mais o custo de aumento de capacidade (isto é, infra-es trutura, material e instalação).

RESTRIÇÕES

a) Atendimento a demanda - Para cada produto k , a somatória dos fluxos ao longo dos diversos caminhos utilizando cabos que sa tisfaçam os padrões de transmissão, deve ser igual a demanda:

$$\sum_{j \in J(k)} \sum_{u \in U^*(k,j)} x_j^{ku} = d^k \quad \text{para } k=1, \dots, K$$

Estas restrições também podem ser escritas como:

$$e^k x^k = d^k \quad \text{para } k=1, \dots, K$$

onde $e^k = [1 \dots 1]$ representa um vetor de 1's de dimensão n_k ,

$$n_k = \text{cardinal } [U^*(k,j)] \quad , \quad e \quad x^k = (x_j^{ku})$$

b) Restrições de capacidade por tipo de cabo por galeria (arco)-
A quantidade de pares utilizados de um tipo de cabo, numa ga leria, deve ser inferior ou igual à soma da disponibilidade i nicial e os pares novos comprados no período.

$$\sum_{k \in K} \sum_{j \in J(k)} a_{ij}^{ku} x_j^{ku} + t_i^u - z_i^u = s_i^u \quad i \in I, u \in U$$

OBS: a cada dupla (i,u) existe um arco correspondente no grafo associado.

Na forma matricial, o problema pode ser escrito da se guinte maneira:

$$\text{MIN } c^1 x^1 + c^2 x^2 + \dots + c^K x^K + fz$$

sujeito a

$$A^1 x^1 + A^2 x^2 + \dots + A^K x^K + It - Iz = s \quad M \text{ linhas}$$

$$e^1 x^1 = d^1$$

$$e^2 x^2 = d^2 \quad K \text{ linhas}$$

(P2)

$$c^K x^K = d^K$$

$$x^k \geq 0, k=1, \dots, K; t \geq 0; z \geq 0$$

onde $c^k = (c_j^{ku})$; $f = (f_i^u)$; $A^k = (a_{ij}^{ku})$; $t = (t_i^u)$; $z = (z_i^u)$; $s = (s_i^u)$ e I

é a matriz identidade de ordem M .

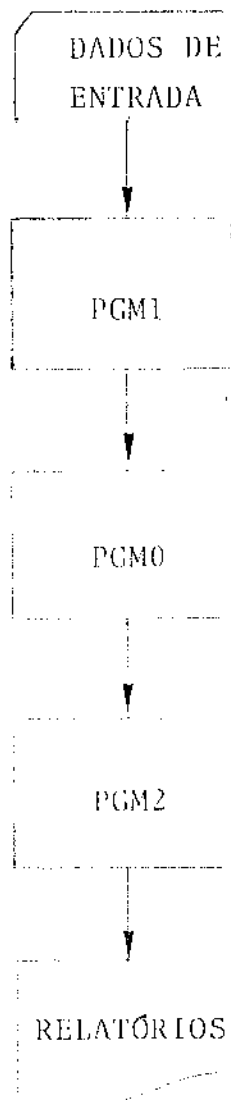
O problema (P2) é um caso particular do problema de fluxo em redes com multi-produtos a custo mínimo, pois:

- apresentam variáveis de aumento de capacidade (z);
- c_j^{ku} não é necessariamente a soma dos custos unitários em cada arco de $j \in J(k)$.
- a matriz A^k pode ter elementos diferentes de 0 ou 1, que representariam (por exemplo) a diferença entre transmissão analógica e digital.
- o conjunto $J(k)$ é um sub-conjunto muito menor que o conjunto de todos os caminhos possíveis entre a origem e o destino do produto k .

Devido à estrutura especial do problema linear (P2), que possui as K restrições de demanda independentes entre si, podemos aplicar a metodologia GUB-"Generalized Upper Bounding" { } que permite resolver (P2) com uma base de trabalho de dimensão M , em vez de $(M+K)$. Esta redução de base e suas particularidades possibilitaram uma implementação computacional em linguagem FORTRAN, como pode ser visto originalmente em [12], e que são comentados no item seguinte.

III.4 - Aplicação

A utilização deste modelo requer dois programas auxiliares. O primeiro (PGM1) converte os dados da rede, da demanda, e do plano de transmissão em coeficientes da função objetivo e das restrições de (P2) e também gera uma solução básica factível inicial para o programa de otimização (PGM0). O segundo (PGM2) transforma a solução ótima em relatórios gerenciais que tornem mais fácil a interpretação dos resultados.



O modelo foi testado numa fase de expansão da área metropolitana de S.Paulo, apresentando uma redução da ordem de 30% dos custos com relação ao método atualmente em uso.

O tempo de execução do programa de otimização (PGM0)

neste teste foi de 6 min. 50 seg. Observamos que este tempo pode ser diminuído, caso se agrupe as demandas de mesma característica (e não por prefixos como realizado neste teste) do mesmo par de prédios, reduzindo o número de variáveis de fluxo e de restrições de demanda.

Apresentamos a seguir alguns relatórios ilustrativos:

DADOS GERAIS DESTA EXPANSÃO

DA MATRIZ DIFERENÇA DE TRONCOS

NUMERO DE LINHAS	119	
NUMERO DE COLUNAS	99	
ENTRONCAMENTO - CABO=	934	10856 TRONCOS
ENTRONCAMENTO - PCM=	545	8295 TRONCOS
ENTRONCAMENTO - FDM=	0	0 TRONCOS
ACRESCIMO TOTAL		19151 TRONCOS
DECRESCIMOS	67	-3656 TRONCOS

OBS.-ESTES VALORES EXCLUEM OS ENLACES INTERNOS AOS PRÉDIOS

DA REDE

CENTROS DE FIOS	43			
ARCOS DA REDE	123			
CABOS CONSIDERADOS	5			
TIPO	26NP	24NP	22NP	24H
CUSTO(PAR.KM)	1950.00	2630.00	3800.00	3900.00
CAMINHOS PERMITIDOS	3			22H
				3960.00

DO MODELO

NOS	43
ARCOS	402
PRODUTOS	934
VARIAVEIS DE FLUXO	5262
VARIAVEIS DE FOLGA	402
VARIAVEIS DE AUMENTO	412
TOTAL DE VARIAVEIS	6036
RESTRICOES DE DEMANDA	934
RESTRICOES DE CAPACIDADE	402
TOTAL DE RESTRICOES	1336

DISPONIBILIDADES *ANTES* DA CONTRATAÇÃO

	RAMO DA REDE	DIST.	26NP	24NP	22NP	24H	22H	PCM	SOMA	PAR-KM
1.	LP - PD	5.9	0	0	50	0	450	0	500	2950.0
2.	LP - PL	8.0	0	0	0	0	0	0	0	0.0
3.	LP - JG	5.4	0	0	0	0	46	0	46	248.4
4.	LP -OCO	9.7	0	0	50	0	300	0	350	3395.0
5.	PD - JD	4.6	0	0	0	0	0	0	0	0.0
6.	PD - PI	5.6	0	0	120	0	19	0	139	778.4
7.	PD - PL	3.3	0	35	21	0	79	0	135	445.5
8.	PD - SI	4.9	0	0	8	0	73	0	81	396.9
9.	PD - CO	4.9	0	0	250	0	500	0	750	3675.0
10.	PD - PA	6.2	0	0	250	0	950	0	1200	7440.0
11.	PD - BG	5.2	0	0	0	0	80	0	80	416.0
12.	PD - BR	9.3	0	0	0	0	40	0	40	372.0
13.	PD - JG	10.0	0	0	250	0	500	0	750	7500.0
14.	PD -ING	6.7	0	0	0	0	0	0	0	0.0
15.	JD - PI	3.6	0	0	1	22	162	0	185	666.0
16.	JD - PL	4.5	0	0	118	0	72	0	190	855.0
17.	JD - CO	4.1	0	0	100	0	100	0	200	820.0
18.	JD - PA	3.6	0	0	100	12	141	0	253	910.8
19.	JD - CB	7.2	0	0	100	0	100	0	200	1440.0
20.	JD - SA	12.3	0	0	0	0	229	0	229	2816.7
21.	JD - BG	4.4	0	0	0	0	0	0	0	0.0
22.	JD - BC	4.6	0	0	0	0	119	0	119	547.4
23.	JD - VM	5.3	0	8	304	0	694	0	1006	5331.8
24.	JD -ING	4.2	0	0	0	0	0	0	0	0.0
25.	PI - PA	7.6	0	0	250	0	500	0	750	5700.0
26.	CV - PL	4.6	0	0	0	0	0	0	0	0.0
27.	CV - ST	4.4	0	0	84	0	10	0	94	413.6
28.	PL - SI	1.7	0	31	363	37	651	0	1082	1839.4
29.	PL - CO	2.8	0	0	200	0	100	0	300	840.0
30.	PL - PA	6.1	0	0	0	0	150	0	150	915.0
31.	PL - AN	3.1	0	0	0	0	8	0	8	24.8
32.	PL - BG	2.6	0	0	0	0	0	0	0	0.0
33.	PL - BC	3.3	0	0	90	74	48	0	212	699.6
34.	PL - BR	7.2	0	0	0	0	174	0	174	1252.8
35.	SI - CO	1.8	0	16	100	0	102	0	218	392.4
36.	SI - PA	3.8	0	0	49	0	184	0	233	885.4
37.	SI - ST	6.5	0	0	0	0	0	0	0	0.0
38.	SI - AN	1.2	0	30	343	18	665	0	1056	1267.2
39.	SI - BG	1.4	0	66	0	21	88	0	175	245.0
40.	SI - BC	2.6	0	0	0	0	40	0	40	104.0
41.	SI - LI	4.2	0	0	7	0	45	0	52	218.4
42.	SI - VM	7.8	0	0	0	0	235	0	235	1833.0
43.	SI - BR	5.5	0	0	0	0	67	0	67	368.5
44.	CO - PA	2.4	0	15	13	30	282	0	340	816.0
45.	CO - AN	3.3	0	0	150	0	238	0	388	1280.4
46.	CO - BG	0.9	274	76	0	0	0	0	350	315.0
47.	CO - BC	1.1	0	148	434	0	491	0	1073	1180.3
48.	CO - LI	2.9	0	15	102	0	23	0	140	406.0
49.	CO - VM	5.4	0	0	77	0	305	0	382	2062.0
50.	CO - BR	4.8	0	0	73	0	88	0	161	772.8
51.	CO -ING	3.2	0	0	0	0	0	0	0	0.0
52.	PA - CB	7.9	0	0	50	0	200	0	250	1975.0
53.	PA - AN	5.3	0	0	0	0	0	0	0	0.0
54.	PA - BG	3.0	0	0	0	0	0	0	0	0.0
55.	PA - BC	3.0	0	21	92	0	0	0	113	339.0
56.	PA - LI	2.8	0	0	51	0	159	0	210	588.0
57.	PA - VM	3.0	0	0	261	0	541	0	802	2406.0
58.	PA - BR	5.9	0	0	15	0	68	0	103	607.7

DISPONIBILIDADES *ANTES* DA CONTRATAÇÃO

	RAMO DA REDE	DIST.	26NP	24NP	22NP	24U	22U	PCM	SOMA	PAR-KM
59.	PA -OCO	17.8	0	0	0	0	0	0	0	0.0
60.	PA -ING	0.5	0	0	1688	0	100	0	1788	894.0
61.	CB - SA	5.0	0	0	0	0	7	0	7	35.0
62.	CB - BC	10.1	0	0	0	0	152	0	152	1535.2
63.	CB - VM	6.3	0	0	250	0	600	0	850	5355.0
64.	CB - JB	5.9	0	0	0	0	0	0	0	0.0
65.	SA - BG	16.0	0	0	0	0	0	0	0	0.0
66.	SA - VM	11.3	0	0	0	0	0	0	0	0.0
67.	SA - PR	12.9	0	0	0	0	250	0	250	3225.0
68.	ST - AN	4.7	0	0	200	0	561	0	761	3576.7
69.	ST - BG	7.3	0	0	0	0	0	0	0	0.0
70.	ST - BC	7.0	0	0	0	0	24	0	24	168.0
71.	ST - BR	7.1	0	0	250	0	443	0	693	4920.3
72.	ST - VG	5.5	0	0	398	0	652	0	1050	5775.0
73.	ST - TR	5.2	0	0	286	0	534	0	820	4264.0
74.	AN - BG	2.0	0	0	27	45	56	0	128	256.0
75.	AN - BC	1.8	0	0	74	14	142	0	230	414.0
76.	AN - BR	4.4	14	0	11	0	82	0	107	470.8
77.	BG - BC	0.9	36	0	0	0	28	0	64	57.6
78.	BG - LI	2.9	0	0	0	0	0	0	0	0.0
79.	BG - VM	5.8	0	0	0	0	80	0	80	464.0
80.	BG - IP	8.3	0	0	0	0	0	0	0	0.0
81.	BG - BR	4.8	0	0	0	0	0	0	0	0.0
82.	BG -GRS	19.3	0	0	0	0	0	0	0	0.0
83.	BG - SM	24.6	0	0	0	0	0	0	0	0.0
84.	BG -SCN	16.6	0	0	0	0	0	0	0	0.0
85.	BG -ING	2.9	0	0	0	0	0	0	0	0.0
86.	BC - LI	2.0	0	95	118	7	195	0	415	830.0
87.	BC - VM	5.4	0	0	20	0	237	0	257	1387.8
88.	BC - IP	6.7	0	0	150	21	697	0	868	5815.6
89.	BC - BR	3.7	28	0	0	190	297	0	515	1905.5
90.	LI - VM	4.2	0	0	250	0	618	0	868	3645.6
91.	LI - IP	5.9	0	0	0	0	0	0	0	0.0
92.	LI - BR	4.6	0	0	86	0	385	0	471	2166.6
93.	LI -ING	3.3	0	0	0	0	0	0	0	0.0
94.	VM - JB	3.8	0	0	250	0	621	0	871	3309.8
95.	VM - IP	5.1	0	0	246	0	758	0	1004	5120.4
96.	VM - BR	9.3	0	0	0	0	41	0	41	381.3
97.	IP - GU	8.0	0	0	0	0	0	0	0	0.0
98.	IP - BR	6.8	0	0	28	0	313	0	341	2318.8
99.	IP -SCN	6.5	0	0	100	0	500	0	600	3900.0
100.	GU - PE	6.3	0	0	0	0	0	0	0	0.0
101.	GU -PHA	10.8	0	0	0	0	0	0	0	0.0
102.	BR - PE	6.9	0	0	51	0	405	0	456	3146.4
103.	BR -GRS	14.8	0	0	0	0	0	0	0	0.0
104.	BR - SM	20.0	0	0	600	0	0	0	600	12000.0
105.	BR -PHA	9.6	0	0	0	0	0	0	0	0.0
106.	PE -GRS	10.4	0	0	0	0	0	0	0	0.0
107.	PE - SM	16.0	0	0	0	0	0	0	0	0.0
108.	PE -PHA	4.5	0	0	0	0	0	0	0	0.0
109.	EM - SM	6.2	0	0	0	0	0	0	0	0.0
110.	GZ - SM	7.7	0	0	0	0	0	0	0	0.0
111.	IT - SM	5.8	0	0	0	0	0	0	0	0.0
112.	SM -PHA	11.7	0	0	600	0	0	0	600	7020.0
113.	SNE -SCN	7.8	0	0	27	0	521	0	548	4274.4
114.	SNE -SBO	6.1	0	0	0	0	66	0	66	402.6
115.	SNE -STH	4.4	0	0	0	0	730	0	730	3212.0
116.	SNE -VRR	5.6	0	0	0	0	622	0	622	3463.2
117.	SNE -MAU	8.5	0	0	0	0	944	0	944	8024.0
118.	SCN -STH	5.6	0	0	0	0	544	0	544	3046.4
119.	SCN -VRR	6.2	0	0	30	0	289	0	319	1977.8

DISPONIBILIDADES *ANTES* DA CONTRATAÇÃO

RAMO DA REDE	DIST.	26NP	24NP	22NP	24H	22H	PCM	SOMA	PAR-KM
120. SBO -VRR	6.5	0	0	17	0	203	0	220	1430.0
121. VRR -DDA	7.7	0	0	302	0	492	0	794	6113.8
122. MAU -RPS	8.3	0	0	32	0	49	0	81	672.3
123. RPS -RGS	6.0	0	0	0	0	0	0	0	0.0
TOTAL								35390	187746.7

TIPO DE CABO	CUSTO UNIT. (PAR.KM)	PARES	PARES.KM	CRUZEIROS (MILHOES)
26NP	1950.00 CRUZEIROS	352	444.2	0.866
24NP	2630.00 CRUZEIROS	556	931.5	2.450
22NP	3800.00 CRUZEIROS	10617	56128.4	213.288
24H	3900.00 CRUZEIROS	491	1525.4	5.949
22H	3960.00 CRUZEIROS	23374	128717.4	509.720
PCM	0.0 CRUZEIROS	0	0.0	0.0
TOTAL GERAL		35390	187746.9	732.273

ROTEAMENTO DE TRONCOS CONSIDERANDO DISPONIBILIDADES

DE	SI	220	222	5	TRONCOS	MEIO	KM		C A M I N H O
/PARA									
1	VG	201	202	10		22H	11.4	SI	AN ST VG
2	TR	203	204	3		22H	11.1	SI	AN ST TR
3	ST	290	298 299 267	10		22NP	5.9	SI	AN ST
5	PL	66	67	12		22NP	1.7	SI	PL
6	PL	825	826	9		22NP	1.7	SI	PL
12	CO	255		7		24NP	2.3	SI	BG CO
14	JD	282		7		22NP	6.2	SI	PL JD
17	PA	284	289 287 288	11		24NP	4.2	SI	CO PA
18	PA	285		4		24NP	4.2	SI	CO PA
19	PA	283	286 251 252	7		22NP	3.8	SI	PA
22	LP	260	261	8		24H	9.7	SI	PL LP
24	LP	832		19	14	22H	10.8	SI	PD LP
					5	24H	9.7	SI	PL LP
25	PD	62		9		22H	6.6	SI	BG PD
26	PD	65		5	4	24NP	5.0	SI	PL PD
					1	22H	6.6	SI	BG PD
27	PD	262	263 864	9		22H	6.6	SI	BG PD
28	CV	265	266 857	10		22NP	6.3	SI	PL CV
29	JG	268	869	9		22H	14.9	SI	PD JG
30	OCO	801	802	6		PCM			
31	GRS	208	209	12		PCM			
35	BR	264		8		22H	5.5	SI	BR
36	PE	293	294 295 296	10		22H	12.4	SI	BR PE
37	PE	217		3		22H	12.4	SI	BR PE
43	CB	240	542 241 543	10		22H	11.7	SI	PA CB
46	SA	246	247 523	6		PCM			
48	VM	70	71	11		22NP	7.2	SI	CO VM
51	VM	572		13		22NP	7.2	SI	CO VM
53	GU	271	216	12		PCM			
55	IP	63		3		22H	9.0	SI	BG BC IP
57	JB	275	276 577 578	6		22H	10.6	SI	PA VM JB
58	LI	270	278 279	10		24NP	4.3	SI	BG BC LI
59	IP	914		20		22H	9.0	SI	BG BC IP
60	JB	579		13		22H	10.6	SI	PA VM JB
64	SCN	442	441 453	6		22H	15.8	SI	BC IP SCN
66	SBO	458	414	11		PCM			
73	LOC	11X		-2					

ROTEAMENTO DE TRONCOS CONSIDERANDO DISPONIBILIDADES

DE	SI	221	223	6	TRONCOS	MEIO	KM		C	A	M	I	N	H	O
	/PARA														
1	VG	201	202	5		22H	11.4	SI	AN	ST	VG				
2	TR	203	204	3		22H	11.1	SI	AN	ST	TR				
3	ST	290	298 299 267	9		22NP	5.9	SI	AN	ST					
5	PL	66	67	11		22NP	1.7	SI	PL						
6	PL	825	826	8		22NP	1.7	SI	PL						
12	CO	255		7		24NP	2.3	SI	BG	CO					
14	JD	282		3		22NP	6.2	SI	PL	JD					
17	PA	284	289 287 288	9		22NP	3.8	SI	PA						
18	PA	285		3		22NP	3.8	SI	PA						
24	LP	832		17		22H	10.9	SI	PL	PD	LP				
25	PD	62		4		24NP	5.0	SI	PL	PD					
26	PD	65		4		24NP	5.0	SI	PL	PD					
27	PD	262	263 864	8		22H	6.6	SI	BG	PD					
28	CV	265	266 857	9		22NP	6.3	SI	PL	CV					
29	JG	268	869	8		22H	14.9	SI	PD	JG					
30	OCO	801	802	5		PCM									
31	GRS	208	209	9		PCM									
33	BR	92	93	7		22H	5.5	SI	BR						
35	BR	264		7		22H	5.5	SI	BR						
36	PE	293	294 295 296	9		22H	12.4	SI	BR	PE					
46	SA	246	247 523	5		PCM									
48	VM	70	71	5		22NP	7.2	SI	CO	VM					
53	GU	271	216	10		PCM									
55	IP	63		3		22H	9.0	SI	BG	BC	IP				
58	LI	270	278 279	9		24NP	4.3	SI	BG	BC	LI				
59	IP	914		19		22H	9.3	SI	BC	IP					
64	SCN	442	441 453	3		22H	15.8	SI	BC	IP	SCN				
73	LOC	11X		-2											
83	VM	VM2		10		22H	6.8	SI	PA	VM					

ROTEAMENTO DE TRONCOS CONSIDERANDO DISPONIBILIDADES

DE	PL	66	67	7	TRONCOS	MEIO	KM		C	A	M	T	N	H	O
	/PARA														
7	AN	227	229	228		10	22NP	2.9	PL	SI				AN	
8	CO	230	234	231	235	23	22	22NP	2.8	PL	CO				
						1	24NP	3.5	PL	SI			CO		
9	BC	32	34	35	36	37	-66								
10	BC	239					7	22NP	3.3	PL	BC				
11	CO	256	258	257	259		24	22NP	2.8	PL	CO				
12	CO	255					8	22NP	2.8	PL	CO				
13	JD	852	853	280	881		16	22NP	4.5	PL	JD				
14	JD	282					7	22NP	4.5	PL	JD				
17	PA	284	289	287	288		10	3	22NP	5.2	PL	CO		PA	
							7	22NP	5.5	PL	SI			PA	
19	PA	283	286	251	252		22	12	22H	5.2	PL	CO		PA	
							10	22NP	5.2	PL	CO			PA	
20	PI	210	211	212	813		10	22H	8.9	PL	PD			PI	
21	PT	814	815				12	22H	8.9	PL	PD			PI	
22	LP	260	261				6	22NP	8.0	PL	LP				
23	LP	831					3	22NP	8.0	PL	LP				
24	LP	832					16	22NP	8.0	PL	LP				
28	CV	265	266	857			13	26NP	4.6	PL	CV				
29	JG	268	869				13	PCM							
30	OCO	801	802				8	PCM							
33	BR	92	93				15	24H	7.0	PL	BC			BR	
34	BR	291	292				9	24H	7.0	PL	SC			BR	
36	PE	293	294	295	296		24	PCM							
43	CB	240	542	241	543		11	22H	11.7	PL	JD			CS	
56	IP	272	215	273	274		9	22H	10.0	PL	BC			IP	
57	JB	275	276	577	578		14	4	22H	12.0	PL	CO		VM	JB
							10	22H	12.0	PL	CO			PA	VM
58	LI	270	278	279			22	22NP	5.3	PL	BC			LI	
85	SNE	SN2					18	PCM							
86	SI	SI1					-21								

ROTEAMENTO DE TRONCOS CONSIDERANDO DISPONIBILIDADES

DE	BC	32	34	35	36	37	13												
/PARA							TRONCOS	MEIO	KM										
1	VG	201	202				35	22H	12.0	BC	AN	ST	VG						
2	TR	203	204				13	22H	12.2	BC	ST	TR							
3	ST	290	298	299	267		21 18	22NP	6.5	BC	AN	ST							
							3	22NP	7.6	BC	BG	AN	ST						
6	PL	825	826				26	22NP	3.3	BC	PL								
12	CO	255					38	24NP	1.0	BC	CO								
13	JD	852	853	280	881		57 50	26NP	4.8	BC	JD								
							7	22NP	5.1	BC	CO	JD							
14	JD	282					30	22NP	5.1	BC	CO	JD							
16	JD	883					17	26NP	4.8	BC	JD								
17	PA	284	289	287	288		58	22NP	3.0	BC	PA								
18	PA	285					35 25	22H	3.4	BC	CO	PA							
							10	22NP	3.0	BC	PA								
19	PA	283	286	251	252		33	22H	3.4	BC	CO	PA							
20	PI	210	211	212	813		21	22H	8.7	BC	CO	JD	PI						
21	PI	814	815				18	22H	8.7	BC	CO	JD	PI						
22	LP	260	261				18	22H	11.8	BC	CO	PD	LP						
23	LP	831					21	22H	11.8	BC	CO	PD	LP						
24	LP	832					38	22H	11.8	BC	CO	PD	LP						
27	PD	262	263	864			28	22NP	5.9	BC	CO	PD							
28	CV	265	266	857			18	22NP	7.9	BC	PL	CV							
29	JG	268	869				15	PCM											
30	OCO	801	802				17	PCM											
31	GRS	208	209				23	PCM											
32	GRS	913					17	PCM											
33	BR	92	93				27 16	26NP	3.7	BC	BR								
							11	22H	3.7	BC	BR								
34	BR	291	292				17 5	24H	3.7	BC	BR								
							12	26NP	3.7	BC	BR								
35	BR	264					32	24H	3.7	BC	BR								
36	PE	293	294	295	296		41	22H	10.6	BC	BR	PE							
37	PE	217					15	22H	10.6	BC	BR	PE							
44	CB	531	532				33	22H	10.1	BC	CB								
46	SA	246	247	523			19	PCM											
47	PR	520					11	PCM											
49	VM	549					36	22NP	6.2	BC	LI	VM							
51	VM	572					67	22H	5.4	BC	VM								
53	GU	271	216				13	PCM											
54	GU	918					26	PCM											
57	JB	275	276	577	578		32	22H	9.2	BC	VM	JB							
58	LI	270	278	279			53	24NP	2.0	BC	LI								
59	IP	914					55	22NP	6.7	BC	IP								
60	JB	579					57	22H	9.2	BC	VM	JB							
61	SNE	444	449				17	PCM											
62	SNE	440	454				21	PCM											
64	SCN	442	441	453			24	PCM											
65	SBO	443	448	452			13	PCM											
66	SBO	458	414				23	PCM											
67	STH	446	447				13	PCM											
68	VRR	455	457				10	PCM											
70	MAU	450	416				13	PCM											
87	CO	CO1					36	24NP	1.0	BC	CO								

RELATORIO DE PARES DE CABO **NAO DISPONIVEIS**

	RAMO DA REDE	DIST.	26NP	24NP	22NP	24H	22H	PCM	SDMA	PAR-KM
1.	LP - PD	5.9	0	121	0	43	0	0	164	967.6
2.	LP - PL	8.0	0	0	56	37	226	0	319	2552.0
5.	PD - JD	4.6	0	0	0	43	16	0	59	271.4
6.	PD - PI	5.6	0	0	0	0	152	0	152	851.2
15.	JD - PI	3.6	12	0	0	0	98	0	110	396.0
17.	JD - CO	4.1	54	0	0	7	0	0	61	250.1
18.	JD - PA	3.6	0	0	0	140	0	0	140	504.0
21.	JD - BG	4.4	0	0	0	6	72	0	78	343.2
22.	JD - BC	4.6	76	0	0	6	0	0	82	377.2
26.	CV - PL	4.6	20	0	131	0	171	0	322	1481.2
27.	CV - ST	4.4	0	0	0	0	25	0	25	110.0
35.	SI - CO	1.8	0	0	0	10	0	0	10	18.0
39.	SI - BG	1.4	0	0	0	0	116	0	116	162.4
46.	CO - BG	0.9	0	0	0	0	13	0	13	11.7
61.	CB - SA	5.0	0	0	0	0	285	0	285	1425.0
74.	AN - BG	2.0	14	0	0	0	0	0	14	28.0
75.	AN - BC	1.8	0	21	42	0	186	0	249	448.2
77.	BG - BC	0.9	0	19	27	18	69	0	133	119.7
91.	LI - IP	5.9	0	0	0	0	11	0	11	64.9
94.	VM - JB	3.8	130	0	0	0	155	0	285	1083.0
97.	IP - GU	8.0	0	0	88	0	125	0	213	1704.0
100.	GU - PE	6.3	0	0	83	0	28	0	111	699.3
103.	BR -GRS	14.8	0	0	0	0	19	0	19	281.2
106.	PE -GRS	10.4	0	0	0	87	0	0	87	904.8
114.	SNE -SBO	6.1	0	40	0	0	0	0	40	244.0
TOTAL									3098	15298.1

TIPO DE CABO	CUSTO UNIT. (PAR.KM)	PARES	PARES.KM	CRUZEIROS (MILHOES)
26NP	1950.00 CRUZEIROS	306	1228.2	2.395
24NP	2630.00 CRUZEIROS	201	1012.8	2.664
22NP	3800.00 CRUZEIROS	427	2377.4	9.034
24H	3900.00 CRUZEIROS	397	2273.2	8.865
22H	3960.00 CRUZEIROS	1767	8406.5	33.290
PCM	0.0 CRUZEIROS	0	0.0	0.0
TOTAL GERAL		3098	15298.1	56.248

RELATORIO DE PARES *UTILIZADOS*

	RAMO DA REDE	DIST.	26NP	24NP	22NP	24H	22H	PCM	SOMA	PAR-KM
1.	LP - PD	5.9	0	121	50	43	450	0	664	3917.6
2.	LP - PL	8.0	0	0	56	37	226	0	319	2552.0
3.	LP - JG	5.4	0	0	0	0	46	0	46	248.4
4.	LP -OCO	9.7	0	0	0	0	30	0	30	291.0
5.	PD - JD	4.6	0	0	0	43	16	0	59	271.4
6.	PD - PI	5.6	0	0	42	0	171	0	213	1192.8
7.	PD - PL	3.3	0	35	21	0	79	0	135	445.5
8.	PD - SI	4.9	0	0	8	0	73	0	81	396.9
9.	PD - CO	4.9	0	0	168	0	379	0	547	2680.3
10.	PD - PA	6.2	0	0	44	0	210	0	254	1574.8
11.	PD - BG	5.2	0	0	0	0	41	0	41	213.2
12.	PD - BR	9.3	0	0	0	0	40	0	40	372.0
13.	PD - JG	10.0	0	0	0	0	176	0	176	1760.0
15.	JD - PI	3.6	12	0	1	22	260	0	295	1062.0
16.	JD - PL	4.5	0	0	69	0	72	0	141	634.5
17.	JD - CO	4.1	54	0	100	7	100	0	261	1070.1
18.	JD - PA	3.6	0	0	44	152	141	0	337	1213.2
19.	JD - CB	7.2	0	0	6	0	26	0	32	230.4
21.	JD - BG	4.4	0	0	0	6	72	0	78	343.2
22.	JD - BC	4.6	76	0	0	6	119	0	201	924.6
23.	JD - VM	5.3	0	0	75	0	131	0	206	1091.8
25.	PI - PA	7.6	0	0	44	0	71	0	115	874.0
26.	CV - PL	4.6	20	0	131	0	171	0	322	1481.2
27.	CV - ST	4.4	0	0	31	0	35	0	66	290.4
28.	PL - SI	1.7	0	31	162	37	219	0	449	763.3
29.	PL - CO	2.8	0	0	200	0	100	0	300	840.0
30.	PL - PA	6.1	0	0	0	0	26	0	26	158.6
33.	PL - BC	3.3	0	0	90	45	48	0	183	603.9
34.	PL - BR	7.2	0	0	0	0	9	0	9	64.8
35.	SI - CO	1.8	0	16	100	10	102	0	228	410.4
36.	SI - PA	3.8	0	0	49	0	184	0	233	885.4
38.	SI - AN	1.2	0	18	185	0	321	0	524	628.8
39.	SI - BG	1.4	0	33	0	18	204	0	255	357.0
40.	SI - BC	2.6	0	0	0	0	40	0	40	104.0
41.	SI - LI	4.2	0	0	7	0	45	0	52	218.4
43.	SI - BR	5.5	0	0	0	0	59	0	59	324.5
44.	CO - PA	2.4	0	15	13	34	267	0	325	780.0
46.	CO - BG	0.9	14	14	0	0	13	0	41	36.9
47.	CO - BC	1.1	0	74	218	0	491	0	783	861.3
48.	CO - LI	2.9	0	13	14	0	0	0	27	78.3
49.	CO - VM	5.4	0	0	77	0	256	0	333	1798.2
50.	CO - BR	4.8	0	0	28	0	42	0	70	336.0
52.	PA - CB	7.9	0	0	21	0	131	0	152	1200.8
55.	PA - BC	3.0	0	21	92	0	0	0	113	339.0
56.	PA - LI	2.8	0	0	51	0	136	0	187	523.6
57.	PA - VM	3.0	0	0	261	0	541	0	802	2406.0
58.	PA - BR	5.9	0	0	15	0	88	0	103	607.7
60.	PA -ING	0.5	0	0	0	0	80	0	80	40.0
61.	CB - SA	5.0	0	0	0	0	292	0	292	1460.0
62.	CB - BC	10.1	0	0	0	0	68	0	68	686.8
63.	CB - VM	6.3	0	0	85	0	337	0	422	2658.6
67.	SA - PR	12.9	0	0	0	0	68	0	68	877.2
68.	ST - AN	4.7	0	0	200	0	471	0	671	3153.7
70.	ST - BC	7.0	0	0	0	0	24	0	24	168.0
71.	ST - BR	7.1	0	0	32	0	171	0	203	1441.3
72.	ST - VG	5.5	0	0	25	0	210	0	235	1292.5
73.	ST - TR	5.2	0	0	24	0	123	0	147	764.4
74.	AN - BG	2.0	14	0	27	6	56	0	103	206.0

RELATÓRIO DE PARES *UTILIZADOS*

	RAMO DA REDE	DIST.	26NP	24NP	22NP	24H	22H	PCM	SOMA	PAR-KM
75.	AN - BC	1.8	0	21	116	14	328	0	479	862.2
76.	AN - BR	4.4	0	0	0	0	57	0	57	250.8
77.	3G - BC	0.9	0	19	27	18	97	0	161	144.9
79.	BG - VM	5.8	0	0	0	0	80	0	80	464.0
86.	BC - LI	2.0	0	84	97	7	159	0	347	694.0
87.	BC - VM	5.4	0	0	20	0	237	0	257	1387.8
88.	BC - IP	6.7	0	0	150	21	455	0	626	4194.2
89.	BC - BR	3.7	28	0	0	58	297	0	413	1528.1
90.	LI - VM	4.2	0	0	192	0	144	0	336	1411.2
91.	LI - IP	5.9	0	0	0	0	11	0	11	64.9
92.	LI - BR	4.6	0	0	62	0	105	0	167	768.2
94.	VM - JB	3.8	130	0	250	0	776	0	1156	4392.8
95.	VM - IP	5.1	0	0	132	0	492	0	624	3182.4
97.	IP - GU	8.0	0	0	88	0	125	0	213	1704.0
98.	IP - BR	6.8	0	0	23	0	229	0	252	1713.6
99.	IP - SCN	6.5	0	0	12	0	148	0	160	1040.0
100.	GU - PE	6.3	0	0	83	0	28	0	111	699.3
102.	BR - PE	6.9	0	0	23	0	376	0	399	2753.1
103.	BR -GRS	14.8	0	0	0	0	19	0	19	281.2
106.	PE -GRS	10.4	0	0	0	87	0	0	87	904.8
113.	SNE -SCN	7.8	0	0	27	0	111	0	138	1076.4
114.	SNE -SBO	6.1	0	40	0	0	66	0	106	646.6
115.	SNE -STH	4.4	0	0	0	0	81	0	81	356.4
116.	SNE -VRR	5.6	0	0	0	0	176	0	176	985.6
117.	SNE -MAU	8.5	0	0	0	0	74	0	74	629.0
118.	SCN -STH	5.6	0	0	0	0	56	0	56	313.6
119.	SCN -VRR	6.2	0	0	23	0	162	0	185	1147.0
120.	SBO -VRR	6.5	0	0	17	0	203	0	220	1430.0
121.	VRR -DDA	7.7	0	0	6	0	33	0	39	300.3
122.	MAU -RPS	8.3	0	0	0	0	5	0	5	41.5

TOTAL 19301 87574.0

TIPO DE CABO	CUSTO UNIT. (PAR.KM)	PARES	PARES.KM	CRUZEIROS (MILHOES)
26NP	1950.00 CRUZEIROS	348	1344.4	2.622
24NP	2630.00 CRUZEIROS	555	1676.3	4.409
22NP	3800.00 CRUZEIROS	4214	17051.0	64.794
24H	3900.00 CRUZEIROS	697	3221.7	12.565
22H	3950.00 CRUZEIROS	13487	64281.0	254.553
PCM	0.0 CRUZEIROS	0	0.0	0.0
TOTAL GERAL		19301	87574.4	338.941

DISPONIBILIDADES *DEPOIS* DO ROTEAMENTO

	RAMO DA REDE	DIST.	26NP	24NP	22NP	24H	22H	PCM	SOMA	PAR-KM
1.	LP - PD	5.9	0	0	0	0	0	0	0	0.0
2.	LP - PL	8.0	0	0	0	0	0	0	0	0.0
3.	LP - JG	5.4	0	0	0	0	0	0	0	0.0
4.	LP - OCO	9.7	0	0	50	0	270	0	320	3104.0
5.	PD - JD	4.6	0	0	0	0	0	0	0	0.0
6.	PD - PI	5.6	0	0	78	0	0	0	78	436.8
7.	PD - PL	3.3	0	0	0	0	0	0	0	0.0
8.	PD - SI	4.9	0	0	0	0	0	0	0	0.0
9.	PD - CO	4.9	0	0	82	0	121	0	203	994.7
10.	PD - PA	6.2	0	0	206	0	740	0	946	5865.2
11.	PD - BG	5.2	0	0	0	0	39	0	39	202.8
12.	PD - BR	9.3	0	0	0	0	0	0	0	0.0
13.	PD - JG	10.0	0	0	250	0	324	0	574	5740.0
14.	PD - ING	6.7	0	0	0	0	0	0	0	0.0
15.	JD - PI	3.6	0	0	0	0	0	0	0	0.0
16.	JD - PL	4.5	0	0	49	0	0	0	49	220.5
17.	JD - CO	4.1	0	0	0	0	0	0	0	0.0
18.	JD - PA	3.6	0	0	56	0	0	0	56	201.6
19.	JD - CB	7.2	0	0	94	0	74	0	168	1209.6
20.	JD - SA	12.3	0	0	0	0	229	0	229	2816.7
21.	JD - BG	4.4	0	0	0	0	0	0	0	0.0
22.	JD - BC	4.6	0	0	0	0	0	0	0	0.0
23.	JD - VM	5.3	0	8	229	0	563	0	800	4240.0
24.	JD - ING	4.2	0	0	0	0	0	0	0	0.0
25.	PI - PA	7.6	0	0	206	0	429	0	635	4826.0
26.	CV - PL	4.6	0	0	0	0	0	0	0	0.0
27.	CV - ST	4.4	0	0	53	0	0	0	53	233.2
28.	PL - SI	1.7	0	0	201	0	432	0	633	1076.1
29.	PL - CO	2.8	0	0	0	0	0	0	0	0.0
30.	PL - PA	6.1	0	0	0	0	124	0	124	756.4
31.	PL - AN	3.1	0	0	0	0	8	0	8	24.8
32.	PL - BG	2.6	0	0	0	0	0	0	0	0.0
33.	PL - BC	3.3	0	0	0	29	0	0	29	95.7
34.	PL - BR	7.2	0	0	0	0	165	0	165	1188.0
35.	SI - CO	1.8	0	0	0	0	0	0	0	0.0
36.	SI - PA	3.8	0	0	0	0	0	0	0	0.0
37.	SI - ST	6.5	0	0	0	0	0	0	0	0.0
38.	SI - AN	1.2	0	12	158	18	344	0	532	638.4
39.	SI - BG	1.4	0	33	0	3	0	0	36	50.4
40.	SI - BC	2.6	0	0	0	0	0	0	0	0.0
41.	SI - LI	4.2	0	0	0	0	0	0	0	0.0
42.	SI - VM	7.8	0	0	0	0	235	0	235	1833.0
43.	SI - BR	5.5	0	0	0	0	8	0	8	44.0
44.	CO - PA	2.4	0	0	0	0	15	0	15	36.0
45.	CO - AN	3.3	0	0	150	0	238	0	388	1280.4
46.	CO - BG	0.9	260	62	0	0	0	0	322	289.0
47.	CO - BC	1.1	0	74	216	0	0	0	290	319.0
48.	CO - LI	2.9	0	2	88	0	23	0	113	327.7
49.	CO - VM	5.4	0	0	0	0	49	0	49	264.6
50.	CO - BR	4.8	0	0	45	0	46	0	91	436.8
51.	CO - ING	3.2	0	0	0	0	0	0	0	0.0
52.	PA - CB	7.9	0	0	29	0	69	0	98	774.2
53.	PA - AN	5.3	0	0	0	0	0	0	0	0.0
54.	PA - BG	3.0	0	0	0	0	0	0	0	0.0
55.	PA - BC	3.0	0	0	0	0	0	0	0	0.0
56.	PA - LI	2.8	0	0	0	0	23	0	23	64.4
57.	PA - VM	3.0	0	0	0	0	0	0	0	0.0
58.	PA - BR	5.9	0	0	0	0	0	0	0	0.0

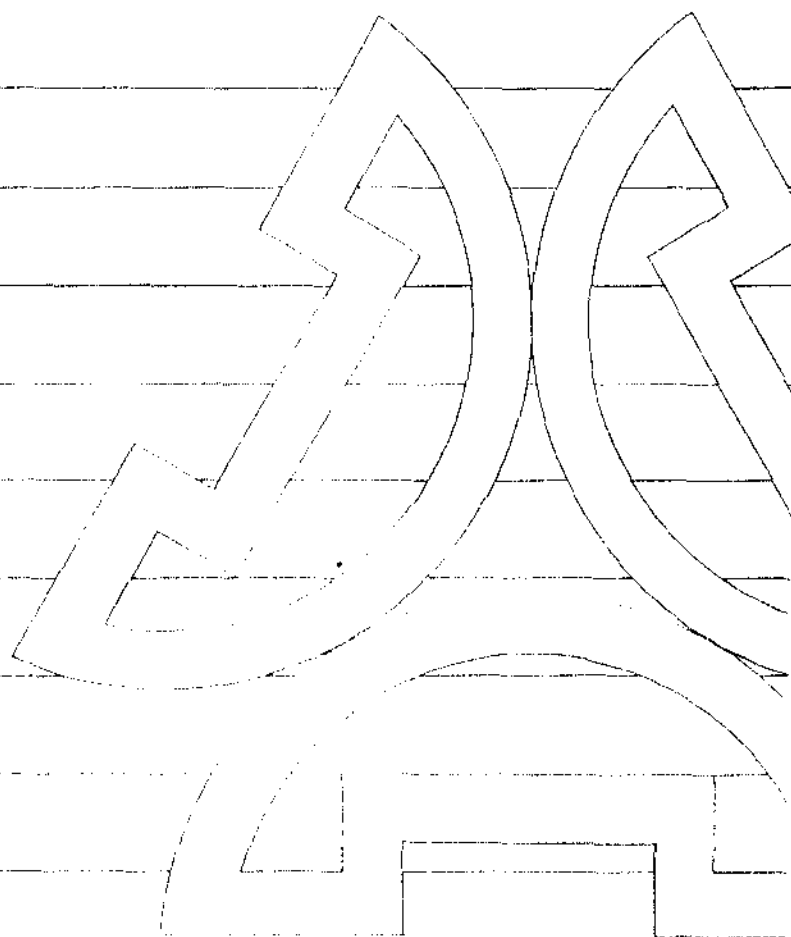
DISPONIBILIDADES *DEPOIS* DO ROTEAMENTO

	RAMO DA REDE	DIST.	26NP	24NP	22NP	24H	22H	PCM	SOMA	PAR-KM
59.	PA -OCO	17.8	0	0	0	0	0	0	0	0.0
60.	PA -ING	0.5	0	0	1688	0	20	0	1708	854.0
61.	CB - SA	5.0	0	0	0	0	0	0	0	0.0
62.	CB - BC	10.1	0	0	0	0	84	0	84	848.4
63.	CB - VM	6.3	0	0	165	0	263	0	428	2696.4
64.	CB - JB	5.9	0	0	0	0	0	0	0	0.0
65.	SA - BG	16.0	0	0	0	0	0	0	0	0.0
66.	SA - VM	11.3	0	0	0	0	0	0	0	0.0
67.	SA - PR	12.9	0	0	0	0	182	0	182	2347.8
68.	ST - AN	4.7	0	0	0	0	90	0	90	423.0
69.	ST - BG	7.3	0	0	0	0	0	0	0	0.0
70.	ST - BC	7.0	0	0	0	0	0	0	0	0.0
71.	ST - BR	7.1	0	0	218	0	272	0	490	3479.0
72.	ST - VG	5.5	0	0	373	0	442	0	815	4482.5
73.	ST - TR	5.2	0	0	262	0	411	0	673	3499.6
74.	AN - BG	2.0	0	0	0	39	0	0	39	78.0
75.	AN - BC	1.8	0	0	0	0	0	0	0	0.0
76.	AN - BR	4.4	14	0	11	0	25	0	50	220.0
77.	BG - BC	0.9	36	0	0	0	0	0	36	32.4
78.	BG - LI	2.9	0	0	0	0	0	0	0	0.0
79.	BG - VM	5.8	0	0	0	0	0	0	0	0.0
80.	BG - IP	8.3	0	0	0	0	0	0	0	0.0
81.	BG - BR	4.8	0	0	0	0	0	0	0	0.0
82.	BG -GRS	19.3	0	0	0	0	0	0	0	0.0
83.	BG - SM	24.6	0	0	0	0	0	0	0	0.0
84.	BG -SCN	16.6	0	0	0	0	0	0	0	0.0
85.	BG -ING	2.9	0	0	0	0	0	0	0	0.0
86.	BC - LI	2.0	0	11	21	0	36	0	68	136.0
87.	BC - VM	5.4	0	0	0	0	0	0	0	0.0
88.	BC - IP	6.7	0	0	0	0	242	0	242	1621.4
89.	BC - BR	3.7	0	0	0	102	0	0	102	377.4
90.	LI - VM	4.2	0	0	58	0	474	0	532	2234.4
91.	LI - IP	5.9	0	0	0	0	0	0	0	0.0
92.	LI - BR	4.6	0	0	24	0	280	0	304	1398.4
93.	LI -ING	3.3	0	0	0	0	0	0	0	0.0
94.	VM - JB	3.8	0	0	0	0	0	0	0	0.0
95.	VM - IP	5.1	0	0	114	0	266	0	380	1938.0
96.	VM - BR	9.3	0	0	0	0	41	0	41	381.3
97.	IP - GU	8.0	0	0	0	0	0	0	0	0.0
98.	IP - BR	6.8	0	0	5	0	84	0	89	605.2
99.	IP -SCN	6.5	0	0	88	0	352	0	440	2860.0
100.	GU - PE	6.3	0	0	0	0	0	0	0	0.0
101.	GU -PHA	10.8	0	0	0	0	0	0	0	0.0
102.	BR - PE	6.9	0	0	28	0	29	0	57	393.3
103.	BR -GRS	14.8	0	0	0	0	0	0	0	0.0
104.	BR - SM	20.0	0	0	600	0	0	0	600	12000.0
105.	BR -PHA	9.6	0	0	0	0	0	0	0	0.0
106.	PE -GRS	10.4	0	0	0	0	0	0	0	0.0
107.	PE - SM	16.0	0	0	0	0	0	0	0	0.0
108.	PE -PHA	4.5	0	0	0	0	0	0	0	0.0
109.	EM - SM	6.2	0	0	0	0	0	0	0	0.0
110.	GZ - SM	7.7	0	0	0	0	0	0	0	0.0
111.	IT - SM	5.8	0	0	0	0	0	0	0	0.0
112.	SM -PHA	11.7	0	0	600	0	0	0	600	7020.0
113.	SNE -SCN	7.8	0	0	0	0	410	0	410	3198.0
114.	SNE -SBO	6.1	0	0	0	0	0	0	0	0.0
115.	SNE -STH	4.4	0	0	0	0	649	0	649	2855.6
116.	SNE -VRR	5.6	0	0	0	0	446	0	446	2497.6
117.	SNE -MAU	8.5	0	0	0	0	870	0	870	7395.0
118.	SCN -STH	5.6	0	0	0	0	488	0	488	2732.8
119.	SCN -VRR	6.2	0	0	7	0	127	0	134	830.8

DISPONIBILIDADES *DEPOIS* DO ROTEAMENTO

RAMO DA REDE	DIST.	26NP	24NP	22NP	24H	22H	PCM	SOMA	PAR-KM
120. SBO -VRR	6.5	0	0	0	0	0	0	0	0.0
121. VRR -DDA	7.7	0	0	296	0	459	0	755	5813.5
122. MAU -RPS	8.3	0	0	32	0	44	0	76	630.8
123. RPS -RGS	6.0	0	0	0	0	0	0	0	0.0
TOTAL								19187	115470.8

TIPO DE CABO	CUSTO UNIT.(PAR.KM)	PARES	PARES.KM	CRUZEIROS(MILHOES)
26NP	1950.00 CRUZEIROS	310	328.0	0.640
24NP	2630.00 CRUZEIROS	202	268.0	0.705
22NP	3800.00 CRUZEIROS	6830	41454.8	157.528
24H	3900.00 CRUZEIROS	191	576.9	2.250
22H	3960.00 CRUZEIROS	11654	72843.5	288.460
PCM	0.0 CRUZEIROS	0	0.0	0.0
TOTAL GERAL		19187	115471.1	449.582



III.5 - Comentários

a) Da Resolução

Obviamente, o problema (P2) pode ser resolvido pela aplicação direta dos "pacotes" de programação linear existentes no mercado, tais como MPSX, APEX, etc., conforme trabalho feito por Reis [13].

Todavia, estes pacotes não exploram as particularidades de um problema de redes e nem todos possuem a opção GUB, que o tornam mais eficientes. Além disso, as concessionárias de serviços telefônicos em geral, não possuem estes "pacotes", o que torna interessante um programa em linguagem FORTRAN que garanta otimalidade e eficiência na resolução. Desta forma, tem-se total liberdade para possíveis modificações, ou para acoplá-los a sistemas mais complexos que o utilizem como sub-programa.

Os detalhes do algoritmo de resolução baseado na técnica GUB é apresentado no Apêndice B.

b) Da Formulação

Apesar das limitações da formulação de (P2) já descritas, é possível resolver o problema da compra de cabos em "módulos", com uma heurística baseada nos multiplicadores ótimos associados às restrições e nas necessidades de pares de cabo (z_i^u), obtidos pela resolução de (P2) da seguinte forma:

PASSO 0 - fazer uma lista dos tipos de cabo em ordem decrescente de custos; $u=1$.

PASSO 1 - resolver (P2).

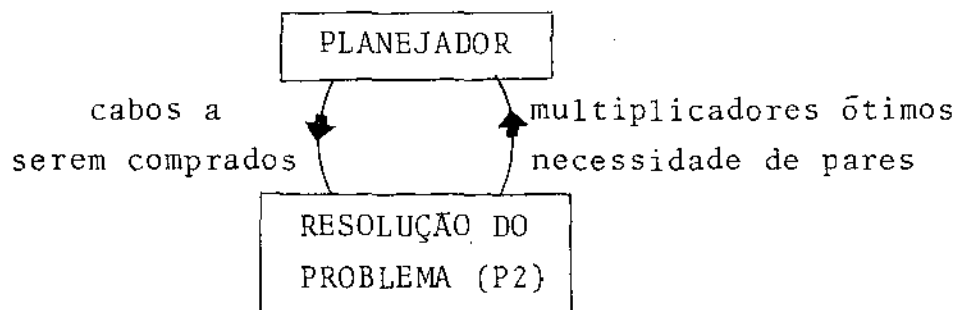
PASSO 2 - de acordo com os multiplicadores ótimos, os valores ótimos (z_i^u) e sua sensibilidade, o planejador fixa as necessidades, em módulos δ_i^u , de todos os cabos do tipo u .

PASSO 3 - se toda a lista foi percorrida - PARE, senão vá para o passo seguinte.

PASSO 4 - faça $s_i^u = s_i^u + \delta_i^u$ e atribua custos bastante altos f_i^u aos cabos fixados.

PASSO 5 - faça $u = u+1$ e volte ao passo 1.

Esquemáticamente, temos:



Este esquema assegura que a compra dos cabos mais caros será a mínima possível, isto é, onde realmente se é exigido para atender a demanda.

3894

APÊNDICE A

MÉTODO "BRANCH AND BOUND" PARA RESOLUÇÃO DO
PROBLEMA DE LONGO PRAZO

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

Reescrevendo o problema de longo prazo com função objetivo "delta-linear", temos:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(P')} & \begin{array}{l}
 \text{MIN}_{x,z} \quad \sum_{m=1}^M \{ \delta_m z_m + \alpha_m \sum_{k=1}^K x_m^k \} \\
 \text{s.a.} \quad Ix^k = r^k \quad k=1, \dots, K \\
 \quad \quad x^k \geq 0 \quad k=1, \dots, K \\
 \quad \quad (1-z_m)x_m^k = 0 \quad k=1, \dots, K ; m=1, \dots, M \\
 \quad \quad z_m = 0 \text{ ou } 1 \quad m=1, \dots, M
 \end{array}
 \end{array}$$

onde $x^k = (x_m^k)$, $m=1, \dots, M$

Seja D o conjunto de vetores $Y=(Y_m)$, $m=1, \dots, M$, tal que Y_m representa a capacidade do arco $u_m \in U$, isto é,

$$Y_m = \sum_{k=1}^K x_m^k.$$

Um vetor de fluxos Y pertencente a D é tal que permite escoar simultaneamente sobre G todo o fluxo demandado.

Desta forma podemos escrever (P') como sendo:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(PA)} & \begin{array}{l}
 \text{MIN } \phi(Y) = \sum_{u_m \in \text{supp}(Y)} (\delta_m + \alpha_m Y_m) \\
 \text{s.a. } Y \in D
 \end{array}
 \end{array}$$

onde $\text{supp}(Y) = \{u_m \in U / Y_m > 0\}$.

TEOREMA: Seja $S \subset U$ um sub-conjunto de arestas de G tal que o grafo parcial $G_S = [X, S]$ seja convexo. Se Y^0 é um ponto extremo de D solução de:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{MIN } \alpha \cdot Y = \sum_{u_m \in U} \alpha_m Y_m \\
 \text{s.a. } Y \in D \text{ e } \text{supp}(Y) \subset S
 \end{array} \right.$$

então Y^0 é um ótimo local de (PA).

PROVA: Seja Y^1 um ponto qualquer de D , $Y^1 \neq Y^0$; para $\lambda \in (0,1)$ seja $Y = Y^0 + \lambda(Y^1 - Y^0)$, e façamos $S^1 = \text{supp}(Y^1)$ e $S^0 = \text{supp}(Y^0)$.

Portanto, dois casos podem ocorrer:

- S^1 está contido em S^0 .

Por definição de Y^0 , $\alpha Y^1 \geq \alpha Y^0$ e como $\text{supp}(Y) = S^0$, então $\phi(Y) \geq \phi(Y^0)$.

- S^1 não está contido em S^0 .

Neste caso, $\forall \lambda \in (0,1)$, $S = \text{supp}(Y) = S^0 \cup S^1$ e existe pelo menos um $v \in S^1 - S^0$. Então,

$$\phi(Y) = \phi(Y^0) + \lambda \alpha(Y^1 - Y^0) + \sum_{u_m \in S^1 - S^0} \delta_m$$

$$\phi(Y) \geq \phi(Y^0) + \lambda \alpha(Y^1 - Y^0) + \delta_v$$

Se $\alpha(Y^1) \geq \alpha(Y^0)$ então $\phi(Y) \geq \phi(Y^0)$.

Se $\alpha(Y^1) < \alpha(Y^0)$ então é possível escolher $\lambda < \delta_v / -\alpha(Y^1 - Y^0)$.

$$\Rightarrow \phi(Y) \geq \phi(Y^0).$$

De acordo com teorema acima, pode-se associar a todo grafo parcial conexo G_S de G um ótimo local de (PA) - fluxo ao longo dos caminhos de custo mínimo.

Assim sendo, para todo conjunto $S \subset U$, definimos

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha(S) = \text{MIN } \alpha Y = \sum_{m=1}^M \alpha_m Y_m \\ \text{s.a. } Y \in D \\ \text{supp}(Y) \subset S \end{array} \right.$$

$$\delta(S) = \sum_{u_m \in S} \delta_m$$

Então o problema (PA) é equivalente a encontrar $S^* \subset U$, solução de:

$$(PA) \quad \alpha(S^*) + \delta(S^*) = \min_{S \subset C} \{\alpha(S) + \delta(S)\}$$

Como S é um sub-conjunto de U , percebe-se a natureza combinatória do problema, pois o número de partes de U é 2^M .

O conjunto de soluções de (PA') corresponde ao conjunto das partes de U .

A árvore de decisão τ associado ao problema (PA') é o grafo orientado sem ciclos, definido da seguinte forma:

- os nós t de τ , $t=1, \dots, 2^M$, correspondem às partes de U , e denominamos $U(t)$ como sendo a parte de U correspondendo ao nó t de τ ;
- (t, t') é um arco de τ se e somente se
 $U(t') \subset U(t)$ e $|U(t')| = |U(t)| - 1$
 onde t é chamado predecessor (único) de t' e t' é o sucessor direto de t ;
- a raiz de arborencência é o nó $t=1$, tal que $U(1)=U$.

Denominamos $|U(t)|$ o nível do nó t na árvore τ . Se existe um caminho orientado de t a t' em τ , t' é chamado sucessor de t . Temos ainda que

$$\begin{array}{l} U \\ t' \text{ sucessor} \\ \text{direto de } t \end{array} \quad U(t') = U(t)$$

Uma função de avaliação ("bound"), ou função minorante sobre τ , é uma função g tal que:

$$i) \quad g(t) \leq \min_{S \subset U(t)} \{\alpha(S) + \delta(S)\}, \quad \forall t \in \tau$$

- mínimo tomado sobre todos subconjuntos $S \subset U(t)$, tal que $G_S = [X, S]$ seja conexo.

$$ii) \quad t' \text{ sucessor de } t \Rightarrow g(t') \geq g(t)$$

Verifica-se que a função de avaliação

$$g(t) = \alpha(U(t)) + \min_{\substack{S \subset U(t) \\ G_S \text{ conexo}}} \{\delta(S)\}$$

satisfaz as duas condições acima.

ALGORITMO

Para um nó $t \in \tau$, denominamos $\text{pred}(t)$ o predecessor imediato de t e $w(t)$ a aresta de G tal que:

$$U(t) = U(t') - \{w(t)\} \text{ onde } t' = \text{pred}(t)$$

Numa iteração qualquer, denominamos T o conjunto dos nós de τ examinados, e $T^0 \subset T$ o conjunto dos nós pendent_{es} (de grau 1). Façamos $\bar{T} = |T|$.

a) Seja Y^0 uma solução de (PA) e $z_0 = \phi(Y^0)$. Faça $T = \{1\}$; $T^0 = \{1\}$; $\bar{T} = 1$; $g(1) = 0$; $\text{pred}(1) = 0$; $w(1) = 0$

b) Determinar o nó t_0 tal que

$$g(t_0) = \min_{t \in T^0} \{g(t)\}$$

Se $g(t_0) > z_0$, FIM; Y^0 é solução ótima global de custo z_0 . Caso contrário vá a c).

c) $U(t_0) = U$

$$t = t_0$$

d) $t' = \text{pred}(t)$

$$\text{faça } U(t_0) = U(t_0) - \{w(t)\}$$

- se $t' \neq 0$, faça $t = t'$ e retorne em d).

- se $t' = 0$, vá para e).

e) Para todos os arcos $u_m \in U(t_0)$, sucessivamente,

- faça $U' = U(t_0) - \{u_m\}$

- se $G' = [X, U']$ não é conexo, retorne em e); senão,

- calcular \bar{Y} , solução ótima de

$$\begin{cases} \text{MIN } \alpha Y \\ \text{s.a. } Y \in D \\ \text{supp}(Y) \subset U' \end{cases}$$

- seja $\bar{z} = \alpha \bar{Y} + \delta(\text{supp}(\bar{Y}))$;

se $\bar{z} < z_0$, faça $z_0 = \bar{z}$ e $Y^0 = \bar{Y}$ e continue; senão,

- calcule $\bar{g} = \alpha \bar{Y} + \min_{\substack{S \subset U' \\ G_S \text{ conexo}}} \{\delta(S)\}$

se $\bar{g} \geq z_0$, retorne em e); senão,

- faça $\bar{t} = \bar{t} + 1$

$$T = T \cup \{\bar{t}\} ; g(\bar{t}) = \bar{g} ; T^0 = T^0 \cup \{\bar{t}\}$$

$$\text{pred}(\bar{t}) = t_0 ; w(\bar{t}) = u$$

volte a e).

f) faça $T^0 = T^0 - \{t_0\}$ e retorne a b).

APÊNDICE B

MÉTODO GUB PARA RESOLUÇÃO DO PROBLEMA
DE CURTO PRAZO

Reescrevendo o problema (P2) em forma matricial:

$$\text{MIN } c^1 x^1 + c^2 x^2 + \dots + c^K x^K + fz$$

sujeito a

$$(1) \quad \begin{array}{ccccccc} A^1 x^1 + A^2 x^2 + \dots + A^K x^K + I_t t - I_z z & = & s & & & & \text{M linhas} \\ e^1 x^1 & & & & & & = d^1 \\ & e^2 x^2 & & & & & = d^2 \\ & & \ddots & & & & \vdots \\ & & & e^K x^K & & & = d^K \\ \underbrace{\hspace{1cm}}_{S_1} & \underbrace{\hspace{1cm}}_{S_2} & \dots & \underbrace{\hspace{1cm}}_{S_K} & \underbrace{\hspace{1cm}}_{S_t} & \underbrace{\hspace{1cm}}_{S_z} & \text{K linhas} \end{array}$$

$$x^k \geq 0, k=1, \dots, K; t \geq 0; z \geq 0$$

onde:

$x^k = (x_j^k)$, sendo que o índice j , $j=1, \dots, N(k)$ representa implicitamente duas informações: caminho e meio de transmissão; ou seja, $N(k)$ é o número total de fluxos alternativos que podem atender a demanda do produto k .

$s = (s_i)$ representa a capacidade inicial dos arcos.

Seja S_i , $i=1, \dots, K$, o conjunto de colunas com coeficiente "1" na posição $(M+i)$; S_t o conjunto de colunas com a matriz $+I$ de dimensão M e zeros nas posições $(M+1)$ até $(M+K)$; S_z o conjunto de colunas com a matriz $-I$ de dimensão M e zeros nas posições $(M+1)$ até $(M+K)$.

Pelo teorema 1 do Capítulo 6.4 de [8], sabemos que pelo menos uma variável $x_j^k \in S_k$ será básica, em qualquer base de (1), para cada demanda k , $k=1, \dots, K$. Chamemos esta variável de "variável-chave" e representemo-la por $x_{h_k}^k$, para diferenciá-la das demais variáveis (x_j^k) do conjunto S_k . A coluna de M ou $M+K$ componentes correspondente a $x_{h_k}^k$ denominamos "coluna-chave".

Definindo o M -vetor $A_j^k = (a_{ij}^k)$ e $A^{h_k} = (a_{ij}^{h_k})$ como sendo a coluna-chave de S_k , $k=1, \dots, K$, e uma vez que S_t e S_z não possuem colunas-chave, podemos escrever uma base factível \underline{B} de (1) em ter

mos de suas colunas-chave e colunas básicas não-chave.

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} A^{h_1} & A^{h_2} & \dots & A^{h_K} & A_N & I_t & -I_z \\ 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & C & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} M \text{ linhas} \\ \\ \\ \\ K \text{ linhas} \end{matrix} \quad (2)$$

onde: $A_N = (A_j^k)$ é formado pelas colunas básicas não-chave de x_j^k , para algum k, j .

I_t é formado por vetores unitários e_i de dimensão M , correspondendo às variáveis de folga que são básicas.

$-I_z$ é formado por vetores unitários $-e_i$ de dimensão M , correspondendo às variáveis de compra de pares que são básicas.

C é uma matriz cujas colunas são vetores unitários de dimensão K . $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow k$

Define-se r_v , $1 \leq r_v \leq K$, como a linha de C cuja coluna v de C tem um "1". Isto é, a linha r_v representa a demanda que é servida por um fluxo não-chave correspondendo a coluna v .

Seja $R(k) = \{v/r_v = k\}$, $k=1, \dots, K$, tal que $R(k)$ dá o conjunto das colunas de C cujas índices k_j correspondem aos fluxos não-chave, onde $1 \leq j \leq N(k)$, i.e., conjunto das colunas de C com valor unitário na k -ésima linha.

Reescrevendo-se a matriz base completa \underline{B} de (2), numa forma condensada, temos:

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} A_{M \times K} & \hat{B}_{M \times M} \\ I_{K \times K} & \hat{C}_{K \times M} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Então, se cada coluna-chave de \underline{B} for subtraída de todas as colunas básicas não-chave correspondentes a mesma demanda, a

matriz $\hat{C}_{K \times M}$ (e então C) será transformada em matriz nula, tornando \underline{B} na forma bloco triangular superior.

Seja T a matriz que, quando se multiplicar \underline{B} pela direita, efetue esta subtração. Como

$$\underline{B}T = \begin{bmatrix} A_{M \times K} & B_{M \times M} \\ I_{K \times K} & O_{K \times M} \end{bmatrix} \quad \text{então, } T = \begin{bmatrix} I_{K \times K} & -\hat{C}_{K \times M} \\ O_{M \times K} & I_{M \times M} \end{bmatrix}$$

Logo, a inversa da base total é $\underline{B}^{-1} = T(\underline{B}T)^{-1}$,

$$\underline{B}^{-1} = \left[\begin{array}{cc|cc} -\hat{C}_{K \times M} & B_{M \times M}^{-1} & I_{K \times K} + \hat{C}_{K \times M} B_{M \times M}^{-1} & A_{M \times K} \\ \hline & B_{M \times M}^{-1} & -B_{M \times M}^{-1} & A_{M \times K} \end{array} \right] \quad (4)$$

onde $B_{M \times M}$, chamada "matriz de trabalho", é dada por

$$B = B_{M \times M} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_N & I_t & -I_z \end{bmatrix} \quad (5)$$

e a coluna v de \tilde{A}_N é $(A_j^k - A_j^{h_k})$ se a coluna v de A_N é A_j^k que pertence a S_k .

Para facilidade de notação, obreviaremos (3) e (4).

$$\underline{B} = \left[\begin{array}{c|c} A_K & \hat{B} \\ \hline I & \hat{C} \end{array} \right] \quad (6)$$

$$\underline{B}^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} -\hat{C}\hat{B}^{-1} & I + \hat{C}\hat{B}^{-1}A_K \\ \hline \hat{B}^{-1} & -\hat{B}^{-1}A_K \end{array} \right] \quad (7)$$

Para nos referirmos a uma coluna qualquer de (1), seguiremos a notação:

\underline{p}^q : a coluna q de dimensão (M+K)

p^q : a coluna q de dimensão M

Podem ocorrer três casos envolvendo estas colunas:

i) se q corresponde a uma variável de fluxo x_j^k , escrevemos $q=kj$ que é uma abreviação para

$$q = \sum_{m=1}^{k-1} N(m) + j$$

$$\underline{p}^q = \begin{bmatrix} A_j^k \\ \hline e_k \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad p^q = \begin{bmatrix} A_j^k \end{bmatrix}, \quad p^q \in S_k, \quad k=1, \dots, K$$

$$\text{onde } A_j^k = (a_{ij}^k), \quad e_k = \begin{bmatrix} 0, \dots, 1, \dots, 0 \end{bmatrix}^T$$

\uparrow
 k

ii) se q corresponde a variável de folga t_i , $q=t_i$

$$q = \sum_{k=1}^K N(k) + i$$

$$\underline{p}^q = \begin{bmatrix} e_i \\ \hline 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad p^q = \begin{bmatrix} e_i \end{bmatrix}, \quad p^q \in S_t$$

iii) se q corresponde a variável de aumento z_i , $q=z_i$

$$q = \sum_{k=1}^K N(k) + M + i$$

$$\underline{p}^q = \begin{bmatrix} -e_i \\ \hline 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad p^q = \begin{bmatrix} -e_i \end{bmatrix}, \quad p^q \in S_z$$

Note que \underline{p}^q (ou p^q) é uma coluna-chave de uma matriz base se e somente se $q=kj$ e x_j^k é uma variável-chave.

A obtenção de uma solução básica inicial factível está descrita na última parte deste apêndice.

CÁLCULO DO VALOR DAS VARIÁVEIS BÁSICAS

Seja \bar{b}_i , $i=1, \dots, K+M$, os valores das variáveis básicas

e $d=(d^k)$. Então $\bar{b}=(\bar{b}_i)$ é dado por

$$\bar{b} = \underline{B}^{-1} \begin{bmatrix} s \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d - \hat{C} \underline{B}^{-1} (s - A_K d) \\ \underline{B}^{-1} (s - A_K d) \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$\bar{b}_i = (\underline{B}^{-1})_{v.} (s - A_K d) \quad , \text{ para } i=K+v, 1 \leq v \leq M \quad (8)$$

$$\bar{b}_i = d^k - \sum_{v \in R(k)} \bar{b}_{K+v} \quad , \text{ para } i=k \quad , 1 \leq k \leq K \quad (9)$$

onde $A_{i.}(A_{.j})$ representa a i -ésima linha (j -ésima coluna) de uma matriz A .

CÁLCULO DOS MULTIPLICADORES

Seja

π_i : multiplicador associado com a i -ésima restrição de capacidade, $i=1, \dots, M$.

μ_k : multiplicador associado com a k -ésima restrição de demanda, $k=1, \dots, K$.

$$(\pi, \mu) = \underline{c}_{\underline{B}} \underline{B}^{-1} = \left[c_{h_1} \dots c_{h_K} \mid \underline{c}_N \mid 0 \mid f_z \right] \cdot \underline{B}^{-1} =$$

$$= \left[\begin{array}{c} (\tilde{c}_N \ 0 \ f_z) \underline{B}^{-1} \\ \hline c_K - \pi A_K \end{array} \right]^T$$

onde $c_K=(c_{h_i})$, $i=1, \dots, K$; \underline{c}_N é um vetor linha de custos das variáveis de fluxo básicas não-chave ; $\tilde{c}_N = (\tilde{c}_{N_i})$ com $\tilde{c}_{N_i} = (c_j^k - c_{h_k})$ se $\tilde{c}_{N_i} = c_j^k$ e f_z é o vetor linha de custos das variáveis de aumento básicas.

Portanto,

$$\pi_i = (\tilde{c}_N \ 0 \ f_z) \underline{B}^{-1} \cdot i \quad , \text{ para } i=1, \dots, M \quad (10)$$

$$\mu_k = c_{h_k} - \sum_{i=1}^M \pi_i A_i^{h_k} \quad , \text{ para } k=1, \dots, K \quad (11)$$

DETERMINAÇÃO DA VARIÁVEL A ENTRAR NA BASE

Uma variável não básica entra na base caso verifique uma das condições abaixo, de acordo com seu tipo. Genericamente,

$$\bar{c}_q = c_q - (\pi \mu) \underline{p}^q < 0 \quad (12)$$

$$i) \text{ fluxo } x_j^k : c_j^k - \sum_{i=1}^M \pi_i a_{ij}^k - \mu_k < 0 \quad \begin{matrix} j=1, \dots, J(k) \\ k=1, \dots, K \end{matrix} \quad (13)$$

$$ii) \text{ folga } t_i : \pi_i > 0 \quad i=1, \dots, M \quad (14)$$

$$iii) \text{ aumento } z_i : f_i + \pi_i < 0 \quad i=1, \dots, M \quad (15)$$

Caso nenhuma dessas condições seja verificada, então o critério de otimalidade está satisfeito. Seja

$$\bar{c}_s = \min \bar{c}_q \quad (16)$$

REPRESENTAÇÃO DA COLUNA ENTRANTE EM TERMOS DA BASE ATUAL

Seja \underline{p}^s a coluna entrante (s-ésima coluna do sistema (1)). A coluna atualizada é $\bar{\underline{p}}^s = \underline{B}^{-1} \underline{p}^s$. Existem três casos, de acordo com seu tipo:

$$i) \text{ variável de fluxo : } s = \hat{j} \hat{k} \quad , \quad \underline{p}^s \in S_{\hat{k}} \quad , \quad \hat{k}=1, \dots, K$$

$$\underline{p}^s = \begin{bmatrix} A_{\hat{j}}^{\hat{k}} \\ \hline e_{\hat{k}} \end{bmatrix} \quad , \quad \text{então} \quad \bar{\underline{p}}^s = \begin{bmatrix} e_{\hat{k}} - \underline{CB}^{-1} \tilde{A}_{\hat{j}}^{\hat{k}} \\ \hline \underline{B}^{-1} \tilde{A}_{\hat{j}}^{\hat{k}} \end{bmatrix} \quad (17)$$

escrevendo $\bar{\underline{p}}^s = (\bar{\underline{p}}_n^s)$, $n=1, \dots, M+K$, temos

$$\begin{aligned} \bar{\underline{p}}_n^s &= (\underline{B}^{-1})_{v*} \tilde{A}_{\hat{j}}^{\hat{k}} && \text{para } n=K+v \quad , \quad 1 \leq v \leq M \\ \bar{\underline{p}}_n^s &= \begin{cases} - \sum_{v \in R(k)} \bar{\underline{p}}_{-K+v}^s & \text{para } k \neq \hat{k} \quad , \quad n=k \quad , \quad 1 \leq k \leq K \\ 1 - \sum_{v \in R(k)} \bar{\underline{p}}_{-K+v}^s & \text{para } k=\hat{k} \end{cases} \end{aligned}$$

ii) variável de folga: $s=t_{\hat{i}}$, $\underline{p}^s \in S_t$

$$\underline{p}^s = \begin{bmatrix} e_{\hat{i}} \\ \hline 0 \end{bmatrix}, \text{ então } \underline{\bar{p}}^s = \begin{bmatrix} -\bar{C}B^{-1}e_{\hat{i}} \\ \hline B^{-1}e_{\hat{i}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{C}B^{-1}_{\cdot \hat{i}} \\ \hline B^{-1}_{\cdot \hat{i}} \end{bmatrix} \quad (18)$$

iii) variável de aumento: $s=z_{\hat{i}}$, $\underline{p}^s \in S_z$

$$\underline{p}^s = \begin{bmatrix} -e_{\hat{i}} \\ \hline 0 \end{bmatrix}, \text{ então } \underline{\bar{p}}^s = \begin{bmatrix} \bar{C}B^{-1}_{\cdot \hat{i}} \\ \hline -B^{-1}_{\cdot \hat{i}} \end{bmatrix} \quad (19)$$

ESCOLHA DA COLUNA A SAIR DA BASE

Se a coluna a entrar na base tiver componentes $\bar{p}^s \leq 0$, $i=1, \dots, M+K$, então o problema tem solução ilimitada. Caso contrário, calcular

$$\min_{\substack{\bar{p}^s > 0}} \frac{\bar{b}_i}{\bar{p}^s_i} = \frac{\bar{b}_r}{\bar{p}^s_r} = \theta$$

A r -ésima coluna de \underline{B} deixa a base, ou seja, a coluna \underline{p}^{q_r} do sistema (1).

ATUALIZAÇÃO DOS VALORES DAS VARIÁVEIS BÁSICAS

Os novos valores são dados por:

$$(\bar{b}_i)_{\text{novo}} = (\bar{b}_i)_{\text{velho}} - \theta \bar{p}^s_i \quad \text{para } i=1, \dots, K+M, i \neq r$$

$$(\bar{b}_r)_{\text{novo}} = \theta$$

Estes valores também podem ser calculados diretamente da inversa da base de trabalho, que será atualizada a seguir.

ATUALIZAÇÃO DA INVERSA DA BASE DE TRABALHO

Verificaremos as alterações na base de trabalho \underline{B} , devi

do as mudanças na base total \underline{B} , pela entrada da s -ésima coluna \underline{p}^s de (1) e saída da r -ésima coluna da base \underline{B} (q_r -ésima coluna de (1)). Existem dois casos a serem considerados:

CASO 1 - \underline{p}^{q_r} não é uma coluna-chave

Neste caso, a coluna sainte é uma das M -últimas colunas de \underline{B} , isto é, $r=K+i_2$, $i \leq i_2 \leq M$. Então, substituir \underline{p}^{q_r} por \underline{p}^s na base \underline{B} implica em substituir a coluna i_2 de \underline{B} por $\tilde{\underline{p}}^s$, onde

$$\tilde{\underline{p}}^s = \begin{cases} \underline{p}^s & \text{se } s=t_i \text{ ou } s=z_i \quad (\text{se } s \text{ é coluna de variável de folga ou aumento}) \\ \underline{A}_j^{\hat{k}} - \underline{A}^{h\hat{k}} & \text{se } s=\hat{j} \hat{k} \quad (\text{se } s \text{ é coluna de variável de fluxo}) \end{cases}$$

Analogamente, a coluna a sair de \underline{B} será:

$$\tilde{\underline{p}}^{q_r} = \begin{cases} \underline{p}^{q_r} & \text{se } q_r=t_i \text{ ou } z_i \\ \tilde{\underline{A}}_j^{k'}, & \text{se } q_r=j'k' \end{cases}$$

Então, para atualizar \underline{B}^{-1} necessitamos de

$$\tilde{\underline{p}}^s = \underline{B}^{-1} \tilde{\underline{p}}^s$$

e realizar uma operação de pivoteamento, usando elemento i_2 de $\tilde{\underline{p}}^s$. Perceba que $\tilde{\underline{p}}^s$ já foi calculado anteriormente, e são os M -últimos componentes da coluna entrante atualizada $\tilde{\underline{p}}^s$.

O pivoteamento no elemento i_2 de $\tilde{\underline{p}}^s$ pode ser feito na forma produto:

$$(\underline{B}^{-1})_{\text{novo}} = \underline{E}(\underline{B}^{-1})_{\text{velho}},$$

onde \underline{E} é uma matriz elementar de ordem M , cuja coluna i_2 é dada por:

$$\text{coluna } i_2 \text{ de } \underline{E} = \begin{cases} -\tilde{\underline{p}}_i^s / \tilde{\underline{p}}_{i_2}^s & i=1, \dots, M, i \neq i_2 \\ 1 / \tilde{\underline{p}}_{i_2}^s & i=i_2 \end{cases}$$

Os elementos -1 aparecem nas colunas correspondentes $p^q \in S_k$. Desde que os elementos 1's na k' -ésima linha de \hat{C} também aparecem nestas posições, a linha i_2 de E_1 é a negativa da linha k' de \hat{C} . A matriz B^{-1} é então substituída por

$$B^{-1} \leftarrow E_1^{-1} B^{-1}$$

Como as transformações representadas por E_1 , se realizadas duas vezes, retorna a matriz original B ,

$$E_1^{-1} = E_1$$

então,

$$B^{-1} \leftarrow E_1 B^{-1}$$

Portanto, substituindo-se a coluna-chave $A^{h_{k'}}$ por p^{q_p} em A_K , o processo de troca de colunas-chave estará completo e a situação será idêntica a do caso 1. Aplicando-se os procedimentos do caso 1 à saída deste subcaso, completa-se a atualização.

SUBCASO (b): p^{q_r} e p^s pertencem ao mesmo conjunto, isto é, $k' = \hat{k}$.

Se existir alguma coluna básica não-chave p de \underline{B} , então $p = K + i_2$, $1 \leq i_2 \leq M$, tal que $q_p = j_p k'$, $1 \leq j_p \leq N(k')$, devemos trocar p^{q_r} com p^{q_p} conforme descrito no subcaso (a) e realizar as operações do caso 1. Se não existirem colunas básicas não-chave pertencentes ao conjunto S_k , então p^s substitui p^{q_r} como coluna-chave $A^{h_{k'}}$ de \underline{B} . Como as últimas M colunas de B não contêm colunas de S_k , a matriz de trabalho B permanece inalterada. Portanto, a única alteração necessária será substituir a coluna-chave p^{q_r} por p^s em A_K , o que implica em que os valores das variáveis básicas \underline{b} devem ser atualizados, pois $(s - A_K d)$ torna-se:

$$(s - A_K d) + (A^{h_{k'}} - A_j^{k'}) d^{k'}$$

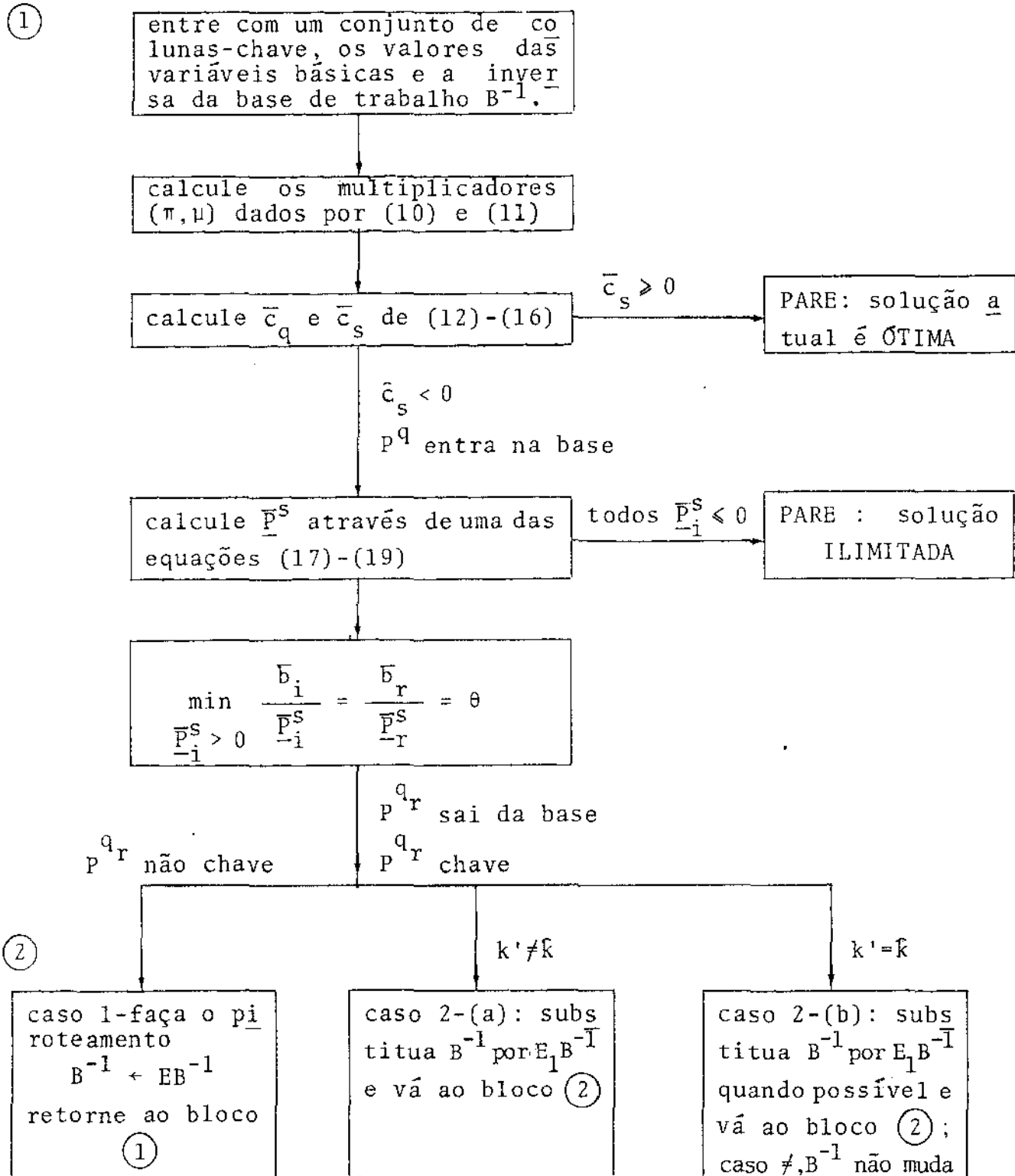
Desde que B^{-1} permanece inalterado, π e μ não mudam exceto para $\mu^{k'}$, que se torna:

$$\mu^{k'} = C_j^{k'} - \sum_{i=1}^M \pi_i a_{ij}^{k'}$$

e $R(k')$ permanece igual ao conjunto vazio.

RESUMO DO ALGORITMO

Após o término da atualização da inversa da base de trabalho B^{-1} , podemos iniciar uma nova iteração até que as condições de otimalidade sejam satisfeitas, como pode ser visto no fluxograma abaixo.



Fluxograma do Algoritmo

OBTENÇÃO DE UMA SOLUÇÃO INICIAL BÁSICA FACTÍVEL

Uma forma de obtenção de uma solução inicial básica factível seria através da fase I do método simplex. No entanto, devido às particularidades de (1) podemos obter uma solução inicial do seguinte modo:

- i) para cada demanda k , encontre a variável de fluxo associada que possui o menor custo de roteamento, isto é, ao longo do caminho mínimo utilizando o cabo factível mais barato; seja esta a variável-chave x_{h_k} .
- ii) faça $x_{h_k} = d^k$, $k=1, \dots, K$
- iii) para cada arco i , se o fluxo total que circular pelo arco for menor que sua capacidade inicial, faça a variável de folga t_i ser básica; caso contrário, faça a variável de compra z_i ser básica.

Obviamente, a matriz base total B é factível. Além disso, como a base de trabalho B é simples, pois não contém variáveis de fluxo não-chave, sendo formada por vetores unitários e_i e $-e_i$.

$$B = \begin{bmatrix} I_t & -I_z \end{bmatrix}$$

Portanto, a inversa de B não envolve cálculos adicionais

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} I_t^T \\ -I_z^T \end{bmatrix}$$

BIBLIOGRAFIA

- {1} - M.MINOUX, "Multiflots de Coût Minimal avec Fonctions de Coût Concaves", Ann. Télécommunic., França (Março-Abril 1976), 31, nº 3-4, pp. 77-92.
- {2} - C.C.C.RIBEIRO, "Aplicação de Algoritmos Aproximados ao Planejamento Automático de Sistemas de Transmissão de Potência", Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, 1978.
- {3} - J.L.KENNINGTON, "A Survey of Linear Cost Multicommodity Network Flows", ORSA, Vol.26, nº 2, Março-Abril 1978.
- {4} - M.MINOUX, "Planification à Court et à Moyen Terme d'un Réseau de Télécommunications", Ann. Télécommunic., França, 1974, 29, nº 11-12.
- {5} - A.M.GEOFFRION, "Duality in Nonlinear Programming: A Simplified Applications-Oriented Development", in Perspectives on Optimization", SIAM, Review 13, 1971.
- {6} - A.M.GEOFFRION, "Generalized Benders Decomposition", Journal of Optimization Theory and Applications, Vol.10, nº 4, 1972.
- {7} - G.AUTHIÉ, "Otimização em Grafos", Publicação Convênio UNICAMP/METRÔ, 1976.
- {8} - L.S.LASDON, "Optimization Theory for Large Systems", MacMillan, 1970.
- {9} - A.M.GEOFFRION, "Integer Programming by Implicit Enumeration and Balas' Method", SIAM Review nº 2, 178-190 (1967).
- {10} - P.M.FRANÇA, "Problemas de Localização: Solução por Decomposição", Tese de Doutorado, FEC-UNICAMP, 1979.

.../.

- {11} - J.K.HARTMAN e L.S.LASDON, "A Generalized Upper Bounding Algorithm for Multicommodity Network Flow Problems", Networks, 1:333-354, 1972.

- {12} - C.J.McCALLUM,Jr., "A Generalized Upper Bounding Approach to a Communications Network Planning Problem", Networks, 7:1.23, 1977.

- {13} - A.C.F.REIS, "Aplicações de Modelos de Programação Combinatória ao Problema de Expansão de Redes Telefônicas", Tese de Mestrado, COPPE-UFRJ, 1977.

- {14} - R.W.KLESSIG, "An Algorithm for Nonlinear Multicommodity Flow Problems", Networks, 4:343-355, 1974.

