

Dissertação de Mestrado

Equações diferenciais parabólicas e
soluções que se anulam em tempo finito

Orientador: Marcelo da Silva Montenegro

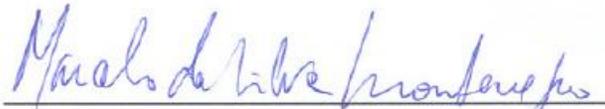
Aluno: Rafael Rodrigo Ottoboni



Equações diferenciais parabólicas e soluções que se anulam em tempo finito

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Rafael Rodrigo Ottoboni** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 02 de Março de 2007.



Prof. Dr. Marcelo da Silva Montenegro

Banca examinadora:

Prof. Dr. Marcelo da Silva Montenegro.

Prof. Dr. José Luiz Boldrini.

Prof. Dr. Sérgio Henrique Monari Soares.

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática.**

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecária: Miriam Cristina Alves – CRB8a / 5094

Ottoboni, Rafael Rodrigo

Ot7e Equações diferenciais parabólicas e soluções que se anulam em tempo finito/Rafael Rodrigo Ottoboni -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2007.

Orientador : Marcelo da Silva Montenegro

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1.Análise matemática. 2. Equações diferenciais parciais. 3. Equações diferenciais parabólicas. I. Montenegro, Marcelo da Silva. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

(mca/imecc)

Título em inglês: Differential equations of parabolic type and solutions quenching in finite time

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Mathematical analysis. 2. Partial differential equations. 3. Differential equations of parabolic type.

Área de concentração: Equações diferenciais parciais

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Marcelo da Silva Montenegro (IMECC-Unicamp)
Prof. Dr. José Luiz Boldrini (IMECC-Unicamp)
Prof. Dr. Sérgio Henrique Monari Soares (ICMC-USP)

Data da defesa: 02/03/2007

Programa de Pós-Graduação: Mestrado em Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 02 de março de 2007 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof. (a). Dr (a). MARCELO DA SILVA MONTENEGRO



Prof. (a). Dr (a). SÉRGIO HENRIQUE MONARI SOARES



Prof. (a). Dr (a). JOSÉ LUIZ BOLDRINI

À minha família

Agradecimentos

Durante nossas vidas precisamos sempre de um braço amigo para nos ajudarmos. Nossa mãe nos ensina a comer, a andar e a saber o que é certo e o que é errado. Na escola a professora nos ensina a escrever e a saber sobre o que ocorreu e o que ocorre no mundo. Na vida os amigos nos ensinam a viver em sociedade e a respeitar o próximo. Não diferente disso, nesta minha dissertação de mestrado, existiram várias pessoas que contribuíram para que ela fosse feita. Em virtude disso gostaria de agradecer primeiramente aos meus pais, que me deram uma educação boa para que eu pudesse chegar onde estou. Agradecer também ao IMECC-UNICAMP e todo seu corpo docente, que me proporcionaram a aprimoração de meus conhecimentos e finalmente aos meus amigos, que me deram força para enfrentar as etapas durante esse mestrado.

Resumo

O objetivo desse trabalho é estudar o problema de valor inicial e de fronteira:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in (0, 1), t > 0, \\ u_x(0, t) = 0, u_x(1, t) = -[u(1, t)]^{-\beta}, & t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) > 0, & x \in [0, 1], \end{cases}$$

onde $\beta > 0$ e u_0 é suficientemente suave.

Existe uma solução u definida em $[0, 1] \times [0, T]$ e existe um único ponto x , tal que $u(x, t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow T^-$ e ainda u_t explode. Obtemos o perfil assintótico dessa solução u quando $t \rightarrow T^-$. Através da análise de soluções aproximadas de u , é possível estender $u(x, t)$ para $t \geq T$. Usamos o programa computacional Maple para obter aproximações numéricas de T .

Abstract

The aim of this work is to study the initial-boundary value problem:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in (0, 1), t > 0, \\ u_x(0, t) = 0, u_x(1, t) = -[u(1, t)]^{-\beta}, & t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) > 0, & x \in [0, 1], \end{cases}$$

where $\beta > 0$ and u_0 is sufficiently smooth.

There is a solution u defined in $[0, 1] \times [0, T]$, where T is a finite time, and there is a unique point x , such that $u(x, t) \rightarrow 0$ as $t \rightarrow T^-$ and furthermore u_t blows-up. We obtain the asymptotic profile of this solution u as $t \rightarrow T^-$. By means approximate solutions, it is possible to extend $u(x, t)$ for $t \geq T$. We use the software Maple to get numerical approximations of T .

Notações

- $\mathcal{C}(D)$, espaço das funções reais contínuas em D .
- $\mathcal{C}^n(D)$, espaço das funções que possuem todas as derivadas de ordem n contínuas em D .
- $\mathcal{C}_n^m(D)$, espaço das funções que possuem todas as derivadas de ordem m com relação a primeira variável contínuas em D e todas as derivadas de ordem n com relação a segunda variável contínuas em D .
- $\mathcal{C}^{0,\beta}(D)$, espaço das funções Hölder contínuas com expoente β , isto é, o conjunto das u tais que

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{0,\beta}} := \sup\{|u(x)|, x \in D\} + \sup\left\{\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\beta}, x, y \in D \text{ e } x \neq y\right\}$$

é finita.

- $\mathcal{C}^{m,\beta}(D)$, espaço das funções que são $\mathcal{C}^m(D)$ e suas m -ésimas derivadas são Hölder contínua de expoente β , isto é, o conjunto das u tais que

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{m,\beta}} := \sum_{|\alpha| \leq m} \sup\{|D^\alpha u(x)|, x \in D\} + \sum_{|\alpha|=m} \sup\left\{\frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x - y|^\beta}, x, y \in D \text{ e } x \neq y\right\}$$

é finita.

Conteúdo

1	Introdução	2
1.1	História e Motivações	2
1.2	O Problema estudado	8
2	Existência de Solução	13
2.1	Existência e Regularidade	13
2.2	Subsolução e Supersolução	30
3	Propriedades da Solução	33
4	Existência Global	55
5	Visualização Computacional	62
5.1	Caso $\beta = 4$ e $\varepsilon = 0,5$	64
5.2	Caso $\beta = 4$ e $\varepsilon = 0,1$	67
5.3	Caso $\beta = 1$ e $\varepsilon = 0,5$	70
5.4	Caso $\beta = 1$ e $\varepsilon = 0,1$	73
5.5	Análise dos Gráficos	76
6	Apêndice	77

Capítulo 1

Introdução

Tem-se estudado problemas de equações diferenciais parciais cujas soluções se anulam em tempo finito, a exemplo dos trabalhos [5], [15], [16], e [26]. De maneira geral, dizemos que uma solução se anula em tempo finito ou tende a zero se a solução é limitada e definida até um tempo $T < \infty$, enquanto uma derivada da solução se torna ilimitada para tempos próximos t de T , mais precisamente quando $t \rightarrow T^-$. Para problemas parabólicos tal anulamento é causado quando suas condições de fronteira são singulares ou quando suas soluções atingem algum valor crítico.

1.1 História e Motivações

O conceito de anulamento em tempo finito aparece em [26], no ano de 1975, com o estudo do problema de valor inicial e de fronteira:

$$(1.1) \quad \begin{cases} u_t - u_{xx} = -(1 - u)^{-1}, & x \in (-a, a), t > 0, \\ u(-a, t) = 0 = u(a, t), & t > 0, \\ u(x, 0) = 0, & x \in [-a, a], \end{cases}$$

onde a é uma constante positiva. A equação (1.1) surge em fenômenos de polarização em condutores iônicos. Em [26] foi mostrado que se a é suficientemente grande, existe um tempo

finito T tal que o problema (1.1) admite solução em $[-a, a] \times [0, T]$; $u(0, t) \rightarrow 1$, quando $t \rightarrow T^-$; e $u_t(x, t) \rightarrow \infty$, quando $t \rightarrow T^-$, $\forall x \in [-a, a]$. O tempo T é chamado de tempo de “quenching” e o ponto $x = 0$ é chamado de ponto de “quenching”.

Um problema em dimensões maiores foi estudado em 1989 em [4]:

$$(1.2) \quad \begin{cases} u_t - \Delta u = f(u), & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, & x \in \Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado com fronteira suave e f é uma função com as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} f & \text{ em } \mathcal{C}^2([0, 1)), \\ f(0) & > 0, \\ f(s) & \rightarrow \infty, \text{ quando } s \rightarrow 1^- \text{ e} \\ f & \text{ crescente.} \end{aligned}$$

Um exemplo é $f(s) = \frac{1}{(1-s)^2}$.

Em 1992, no artigo [17], foram estudados os problemas:

$$(1.3) \quad \left. \begin{cases} u_t(x, t) - (\phi(u_x(x, t)))_x = -(u(x, t))^{-\beta}, & x \in (0, a), \quad t > 0, \\ u_x(0, t) > 0, u(a, t) = 1, & t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) > 0, & x \in (0, a) \end{cases} \right\}$$

e

$$(1.4) \quad \left. \begin{cases} u_t(x, t) - (\phi(u_x(x, t)))_x = -(u(x, t))^{-\beta}, & x \in (0, a), \quad t > 0, \\ u_x(0, t) = 0, u_x(a, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) > 0, & x \in (0, a) \end{cases} \right\}$$

Quando $\phi(s) = s$, a equação diferencial do problema (1.3) e de (1.4) transforma-se na equação:

$$(1.5) \quad u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = -(u(x, t))^{-\beta}$$

e quando $\phi(s) = \arctg(s)$ obtém-se a equação:

$$(1.6) \quad u_t(x, t) - \frac{u_{xx}(x, t)}{1 + (u(x, t))^2} = -(u(x, t))^{-\beta}.$$

A equação (1.6) exerce um papel importante na descrição do fluxo curvatura média e tem motivado muitos autores a estudar equações quasilineares gerais como as dos problemas (1.3) e (1.4). É conhecido que soluções das equações dos problemas (1.3) e (1.4) podem não existir globalmente no tempo. Elas tendem a zero em tempo finito e onde isso ocorre u_t explode, isto é, temos um fenômeno chamado “quenching” ocorrendo neste problema.

Uma motivação física para a equação (1.6) é encontrada em [7]. Uma superfície que se encontra entre os estados físicos, líquido e sólido, movendo-se a uma velocidade v proporcional à curvatura média. Se esta superfície for convexa, então em [24] foi mostrado que permanece convexa para tempos positivos, e se encolhe em um ponto. Entretanto, uma superfície não-convexa pode se dividir em outras duas. Por exemplo, quando constituída de duas esferas grandes e um tubo ligando-as. Em [22] foi mostrado que as duas esferas se encolhem mais devagar que o tubo que as liga, conforme ilustração abaixo:

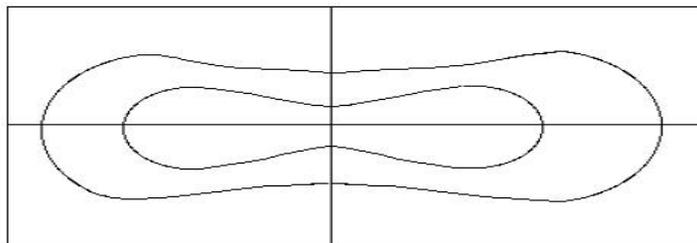


Figura 1.1: Encolhimento de duas esferas e o tubo que as liga

A obtenção da equação (1.6) se dá da seguinte forma: seja x a coordenada espacial, t a coordenada do tempo e $u(x, t)$ a distância radial da superfície ao seu eixo de rotação, então a velocidade normal v da superfície é $u_t(1 + (u_x)^2)^{-\frac{1}{2}}$ e a velocidade na direção radial é u_t . Tais velocidades são ilustradas na figura (1.2):

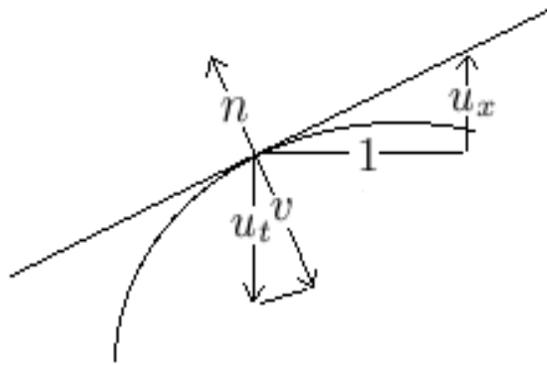


Figura 1.2: Velocidades

A curvatura principal da superfície é dada por $-u_{xx}(1 + (u_x)^2)^{-\frac{3}{2}}$ na direção espacial e $u(1 + (u_x)^2)^{\frac{1}{2}}$ na direção tempo. Como u deve satisfazer

$$u_t = -2H.n,$$

onde H é a curvatura média da superfície e n é o vetor normal, tem-se que u satisfaz (1.6) com $\beta = 1$:

$$(1.7) \quad u_t - \frac{u_{xx}}{1 + (u_x)^2} = -\frac{1}{u},$$

onde $u > 0$.

Em [8], tem-se como propósito achar uma função $u(., t) : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que para algum $T > 0$, u satisfaz o problema de valor inicial:

$$(1.8) \quad \begin{cases} u_t - \Delta_{S(t)}u = 0, & \text{em } (0, T) \times \Omega \\ u(\cdot, 0) = u_0, \end{cases}$$

onde $\Delta_{S(t)}$ representa o operador de Laplace-Beltrami em $S(t)$, onde $S(t) = u(\Omega, t)$ e $S(0)$ é uma superfície compacta sem bordo de dimensão 2, suavemente mergulhada em \mathbb{R}^3 , a qual é representada localmente por um difeomorfismo $u_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Usando o fato de que $u(\cdot, t) = id_{S(t)}$ em $S(t)$ tem-se a equação:

$$(1.9) \quad -\Delta_{S(t)}u(\cdot, t) = 2H(\cdot, t).n(\cdot, t),$$

onde H é a curvatura média de $S(t)$ e n o vetor normal, reduzindo assim a equação diferencial parcial do problema (1.8) à equação:

$$(1.10) \quad u_t = -2H.n,$$

O exemplo mais simples de solução de (1.8) é o encolhimento da esfera

$$S(t) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = R(t)\},$$

com raio $R(t) = ((R(0))^2 - 4t)^{\frac{1}{2}}$ e raio inicial $R(0)$.

Em [24], foi provado que para uma superfície uniformemente convexa inicial $S(0)$, a equação (1.8) possui uma solução suave em um intervalo de tempo finito $(0, T)$ e $S(t)$ converge a um ponto quando $t \uparrow T$.

Em 2005, tomando-se por base as referências [9] e [10], estuda-se o problema:

$$(1.11) \quad \begin{cases} u_t - \Delta u = \chi_{\{u>0\}} g_\lambda(u) & \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(0) = u_0 & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

onde $g_\lambda(u) = -u^{-\beta} + \lambda f(u)$, $\lambda > 0$ é um parâmetro (aqui f só depende de u) e $\chi_{\{u>0\}}$ é a função característica. Os trabalhos [19] e [25] tratam de uma equação singular diferente, com o termo singular $u^{-\beta}$ no lugar de $-u^\beta$. A existência de solução definida localmente numa vizinhança de $t = 0$ não é garantida pelos teoremas usuais de existência uma vez que g_λ é singular em $u = 0$.

Fixado θ tal que $1 < \theta < \alpha = 2/(2 + \beta)$. O problema (1.11) possui uma solução local u definida em um intervalo $(0, T)$, se o dado inicial u_0 for limitado e $u_0 \geq c\delta^\theta$ para alguma constante $c > 0$ e $\delta(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega)$. Além disso, u está em $L^\infty(\Omega \times (0, T)) \cap C^1(\Omega \times (0, T))$ e satisfaz $u \geq c'\delta^\theta$ em $(0, T)$ para alguma constante $c' > 0$ (T e c' dependem apenas de c e θ).

Mostra-se em [10] que se $u_0 \geq u$, onde u é uma solução do problema estacionário:

$$(1.12) \quad \begin{cases} -\Delta u = g_\lambda(u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

então $u(t)$ está definida para todo t e é positiva (isto só ocorre quando $\lambda > \lambda^*$ para um determinado λ^*). Um resultado complementar, diz que se $\lambda < \lambda^*$, o problema (1.11) não possui solução positiva globalmente definida, e esta se anula para algum $t < \infty$. Isto é consequência do fato da solução maximal de (1.12) se anular em um conjunto de medida positiva.

Em [10] estuda-se (1.11) quando $u_0(x) = 0$ para algum $x \in \Omega$, inclusive sem a exigência de que $u_0 \geq c\delta$. Se $u_0 > 0$ e as condições de fronteira são positivas, esse tipo de problema foi estudado em [16], [17] e [21], daí o interesse em [10] de se investigar o que ocorre se o dado inicial se anula e se os dados de fronteira também se anulam.

Os resultados descritos em [10] têm por base a perturbação de $g(u)$, dada por $g_\varepsilon(u) = \frac{u}{(u+\varepsilon)^{1+\beta}} - \lambda f(u)$.

Aproximando o problema (1.11) por

$$(1.13) \quad \begin{cases} u_t - \Delta u + g_\varepsilon(u) = 0 & \text{em } \Omega \\ u(x, t) = 0 & x \in \partial\Omega, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \Omega, \end{cases}$$

temos que a solução u^ε de (1.13) converge em subconjuntos compactos de Ω quando $\varepsilon \rightarrow 0$, isto é, tomando $u = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u^\varepsilon$, u é uma solução do problema (1.11). Esta convergência e a regularidade da solução u são obtidas a partir de algumas estimativas independentes de ε , que muito se assemelham a outras obtidas em [11]. Por exemplo, uma estimativa importante é a seguinte: seja $u_0 \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ tal que $u_0 = 0$ em $\partial\Omega$, e $u^\varepsilon(x, t)$ a solução de (1.13), então existem constantes C, M, k independentes de u_0 e ε tais que se u_0 satisfaz

$$|\nabla u_0(x)|^2 \leq C\varphi^{-k} \left(\frac{u_0(x)^{1-\beta}}{1-\beta} + Mu_0(x) \right) \quad \forall x \in \Omega,$$

então

$$(1.14) \quad |\nabla u^\varepsilon(x, t)|^2 \leq C\varphi^{-k} \left(\frac{u^\varepsilon(x, t)^{1-\beta}}{1-\beta} + Mu^\varepsilon(x, t) \right) \quad \forall x \in \Omega, t > 0.$$

Aqui, $\varphi = \varphi_1^2$, onde φ_1 é a primeira autofunção de $-\Delta$, cujo valor na fronteira $\partial\Omega$ é zero. Essa estimativa é o ponto de partida também para a obtenção da regularidade, isto é, u é $\mathcal{C}^{1/(1+\beta)}$ em t e $\mathcal{C}^{(1-\beta)/(1+\beta)}$ em x .

Nesta dissertação, estudaremos nos capítulos 2 e 3, problemas que se assemelham aos problemas (1.1), (1.2), (1.3), (1.4), (1.5), (1.6), (1.7) e (1.11). No capítulo 4, usaremos uma perturbação parecida com (1.13) que permitirá estender a nossa solução globalmente em t . No capítulo 5, usaremos o programa Maple na visualização da nossa solução. No capítulo 6, recordamos alguns resultados sobre princípios de máximo e teoria de semigrupos, que são usados ao longo deste trabalho.

1.2 O Problema estudado

O objetivo do nosso trabalho é estudar o problema de valor inicial e de fronteira de [18]:

$$(1.15) \quad \begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in (0, 1), t > 0, \\ u_x(0, t) = 0, u_x(1, t) = -[u(1, t)]^{-\beta}, & t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) > 0, & x \in [0, 1], \end{cases}$$

onde $\beta > 0$ e $u_0 > 0$ é uma função suficientemente suave.

Em primeiro lugar, vamos abordar a questão de existência de solução.

Definição 1.2.1 *Uma solução para o problema de valor inicial e de fronteira (1.15) é uma função u que tem derivadas parciais contínuas u_t e u_{xx} , e satisfaz $u_t = u_{xx}$ e suas condições de fronteira e inicial.*

No capítulo 2 obtemos a existência de solução do problema (1.15) em $[0, 1] \times [0, T]$, onde T é um tempo finito. Esse fato se segue do caso geral estudado no mesmo capítulo. Fazendo-se uso das referências [13] e [29], mostramos a existência de solução para o problema:

$$(1.16) \quad \begin{cases} u_t(x, t) = L(u(x, t)), & \Omega \times (0, T], \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) = g(x, t, u), & \partial\Omega \times (0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), & \bar{\Omega}, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio, $L(u(x, t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x, t)$, g é uma função contínua em $\partial\Omega \times (0, T] \times J$ e J é um setor entre uma supersolução \bar{u} e uma subsolução \underline{u} do problema (1.16). Devemos supor que g satisfaz a propriedade (1.19) abaixo.

Definição 1.2.2 *Uma função $\bar{u} \in \mathcal{C}(\bar{\Omega} \times (0, T]) \cap \mathcal{C}_1^2(\Omega \times (0, T])$ é chamada de supersolução de (1.16) se satisfaz:*

$$(1.17) \quad \begin{cases} \bar{u}_t \geq L(\bar{u}), & \Omega \times (0, T], \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} \geq g(x, t, \bar{u}), & \partial\Omega \times (0, T], \\ \bar{u}(x, 0) \geq u_0(x), & \bar{\Omega}. \end{cases}$$

Definição 1.2.3 Uma função $\underline{u} \in \mathcal{C}(\bar{\Omega} \times (0, T]) \cap \mathcal{C}_1^2(\Omega \times (0, T])$ é chamada de subsolução de (1.16) se satisfaz:

$$(1.18) \quad \begin{cases} \underline{u}_t \leq L(\underline{u}), & \Omega \times (0, T], \\ \frac{\partial \underline{u}}{\partial \nu} \leq g(x, t, \underline{u}), & \partial\Omega \times (0, T], \\ \underline{u}(x, 0) \leq u_0(x), & \bar{\Omega}. \end{cases}$$

Propriedade 1.2.4 Existem funções não-negativas \bar{b} e \underline{b} , as quais estão em $\mathcal{C}(\partial\Omega \times (0, T])$ e satisfazem a desigualdade:

$$(1.19) \quad -\underline{b}(u_1 - u_2) \leq g(x, t, u_1) - g(x, t, u_2) \leq \bar{b}(u_1 - u_2),$$

onde $u_2 \leq u_1$ e u_1 e u_2 estão em J .

O método utilizado para mostramos a existência de solução para o problema de valor inicial e de fronteira (1.16) é descrito, usando a referência [29], no capítulo 2 e é chamado método de subsolução e supersolução, o qual consiste em obter uma sequência de subsoluções e outra sequência de supersoluções do problema (1.16). Tais sequências convergirão uniformemente para uma mesma solução do problema de valor inicial e de fronteira (1.16). Esse é o conteúdo do teorema 2.1.5, cuja a demonstração será feita no capítulo 2.

Para a obtenção das sequências de subsolução e supersolução partimos de uma subsolução e uma supersolução iniciais do problema (1.16), através de um processo de iteração. Para que as sequências de subsolução e supersolução estejam bem definidas, devemos estudar a existência do problema com condição de fronteira independente de u :

$$(1.20) \quad \begin{cases} u_t(x, t) = L(u(x, t)), & \Omega \times (0, T], \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) + \beta_0(x, t)u(x, t) = g(x, t), & \partial\Omega \times (0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), & \bar{\Omega}, \end{cases}$$

onde g e β_0 são funções contínuas.

No apêndice, baseado na referência [13], há resultados sobre a existência do problema (1.20), especificamente o teorema 6.0.2.

O capítulo 3, baseado nas referências [18] e [29], vem com o estudo de algumas propriedades da solução do problema (1.15) obtida no capítulo 2. Obtemos, usando a teoria de semigrupos, que se $u_0'' \leq 0$ então toda solução de (1.15) se anula em algum tempo finito T , ou seja a proposição 3.0.2. De acordo com [18] e usando-se o princípio do máximo 6.0.6, existe um único ponto x , neste caso $x = 1$, tal que $u(x, T) \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow T^-$ (proposição 3.0.1). Usamos o princípio do máximo 6.0.6, assumindo que u_0' e u_0'' são não-positivas, para obtermos uma estimativa da nossa solução perto do ponto $x = 1$ no tempo $t = T$ (proposições 3.0.1 e 3.0.3):

$$C_1(1-x)^2 \leq u(x, t) \leq C_2(1-x)^{2\lambda},$$

onde C_1 e C_2 são constantes positivas e

$$\lambda = \frac{1}{2(\beta+1)}.$$

Novamente usando o princípio do máximo 6.0.6 e assumindo as não-positividades de $u_0^{(i)}$, $i = 1, \dots, 5$ obtemos no capítulo 3 as seguintes estimativas (lemas 3.0.4 e 3.0.5):

$$C_3(T-t)^\lambda \leq u(1, t) \leq C_5(T-t)^\lambda,$$

onde C_3 e C_5 são constantes positivas. Além disso, concluímos que $u_t(x, t) \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow T^-$, através de

$$-(T-t)^{1-\lambda} u_t(x, t) \leq C_6 \text{ para } x \in [0, 1] \text{ e } t \in [0, T),$$

onde C_6 é constante positiva, e uma estimativa inferior para o tempo T :

$$(1.21) \quad T \geq \frac{[u_0(1)]^{\frac{1}{\lambda}}}{2\beta(\beta+1)}$$

Concluindo o capítulo 3, obtemos o comportamento assintótico de u quando x está próximo de 1 e t próximo de T através do teorema 3.0.8.

No capítulo 2 provamos que o problema (1.15) tem solução em $[0, 1] \times [0, T]$. Uma pergunta natural é se existe solução além do tempo T de “quenching”. Respondemos essa questão no capítulo 4, através do estudo do problema aproximado:

$$(1.22) \quad \begin{cases} (u_\varepsilon)_t = (u_\varepsilon)_{xx}, & x \in (0, 1), t > 0, \\ (u_\varepsilon)_x(0, t) = 0, u_\varepsilon(1, t) = -\frac{(u_\varepsilon)(1, t)}{(u_\varepsilon + \varepsilon)^{\beta+1}}, & t > 0, \\ (u_\varepsilon)(x, 0) = u_0(x) > 0, & x \in [0, 1], \end{cases}$$

A existência de solução do problema (1.22), bem como propriedades básicas de u_ε , advêm da referência [15]. A sequência de soluções (u_ε) do problema (1.22) convergirá para uma extensão da solução do problema (1.15) além do tempo de “quenching” quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

No capítulo 5, esboçamos computacionalmente as aproximações u_ε da solução u de (1.15). Graficamente, é possível estimar o tempo de “quenching” T e compararmos com (1.21).

Capítulo 2

Existência de Solução

2.1 Existência e Regularidade

Para estudarmos o problema (1.15), primeiramente precisamos saber sobre a existência de solução. Por todo este capítulo faremos uso da referência [29] para estudar a existência do problema também em dimensões maiores que 1:

$$\begin{cases} u_t(x, t) = L(u(x, t)), & \Omega \times (0, T], \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) = g(x, t, u), & \partial\Omega \times (0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), & \bar{\Omega}, \end{cases}$$

onde g é contínua em $\partial\Omega \times (0, T] \times J$, em que J é um setor entre a subsolução \underline{u} e a super solução \bar{u} , e satisfaz a propriedade (1.19) em $\partial\Omega \times (0, T]$.

Vamos mostrar a existência de solução, através de uma subsolução e uma supersolução. É um processo iterativo em que criaremos uma sequência de funções a partir de uma subsolução e outra a partir de uma supersolução. Provaremos que estas sequências estão bem definidas e que elas convergirão para uma mesma solução do problema.

Por enquanto, para este caso geral, iremos supor a existência de uma subsolução \underline{u} e de uma supersolução \bar{u} para o problema (1.16). Posteriormente iremos provar, na seção 2.2, a existência de uma subsolução e uma supersolução para o problema (1.15), validando assim

o processo iterativo para a obtenção de uma solução do problema (1.15).

Agora iremos descrever o processo de iteração, o qual pode ser encontrado em [29], para se obter as seqüências tendo como ponto de partida uma subsolução e uma supersolução.

Seja

$$G(x, t, u) = \underline{b}(x, t)u + g(x, t, u)$$

então, usando a propriedade (1.19), chegamos à seguinte desigualdade:

$$G(x, t, u_1) - G(x, t, u_2) \geq 0,$$

para $u_2 \leq u_1$ e $u_1, u_2 \in J$. De fato,

$$\begin{aligned} G(x, t, u_1) - G(x, t, u_2) &= \underline{b}(x, t)u_1 + g(x, t, u_1) - \underline{b}(x, t)u_2 - g(x, t, u_2) \\ &\geq \underline{b}(x, t)(u_1 - u_2) - \underline{b}(x, t)(u_1 - u_2) = 0. \end{aligned}$$

Além disso, usando o fato de g satisfazer a propriedade 1.19 obtemos outra desigualdade:

$$|G(x, t, u_1) - G(x, t, u_2)| \leq k(x, t)|u_1 - u_2|,$$

onde $k(x, t) = |\underline{b}(x, t) + \bar{b}(x, t)|$.

Supondo a existência de subsolução e supersolução para o problema (1.16), obtemos as seqüências iterativas.

Seja \underline{u} uma subsolução do problema (1.16). Considere o problema abaixo:

$$(2.1) \quad \begin{cases} \underline{u}_t^{(1)} = L(\underline{u}^{(1)}), & \Omega \times (0, T], \\ \frac{\partial \underline{u}^{(1)}}{\partial \nu} + \underline{b}\underline{u}^{(1)} = G(x, t, \underline{u}), & \partial\Omega \times (0, T], \\ \underline{u}^{(1)}(x, 0) = u_0(x), & \bar{\Omega}. \end{cases}$$

Como \underline{u} , \underline{b} e g são contínuas em $\bar{\Omega} \times (0, T]$, temos que a função G é contínua em $\bar{\Omega} \times (0, T]$. Assim, pelo teorema 6.0.2 encontrado no apêndice, existe $\underline{u}^{(1)}$.

Usando sucessivamente o teorema 6.0.2 obtemos uma sequência $\underline{u}^{(k)}$ de funções, a qual formará uma sequência não-decrescente, e neste caso obtida através da subsolução e que satisfazem:

$$(2.2) \quad \begin{cases} \underline{u}_t^{(k)} = L(\underline{u}^{(k)}), & \Omega \times (0, T], \\ \frac{\partial \underline{u}^{(k)}}{\partial \nu} + \underline{b} \underline{u}^{(k)} = G(x, t, \underline{u}^{(k-1)}), & \partial\Omega \times (0, T], \\ \underline{u}^{(k)}(x, 0) = u_0(x), & \bar{\Omega}, \end{cases}$$

Também, usando o teorema 6.0.2 sucessivamente, obtemos uma outra sequência $\bar{u}^{(k)}$ não-crescente de funções, partindo-se da supersolução e tal que:

$$(2.3) \quad \begin{cases} \bar{u}_t^{(k)} = L(\bar{u}^{(k)}), & \Omega \times (0, T], \\ \frac{\partial \bar{u}^{(k)}}{\partial \nu} + \underline{b} \bar{u}^{(k)} = G(x, t, \bar{u}^{(k-1)}), & \partial\Omega \times (0, T], \\ \bar{u}^{(k)}(x, 0) = u_0(x), & \bar{\Omega}, \end{cases}$$

onde $\underline{u}^{(0)} = \underline{u}$ e $\bar{u}^{(0)} = \bar{u}$.

Notemos que essas sequências estão bem definidas e além disso possuem expressões analíticas. Isto é devido a um teorema clássico de equações diferenciais parciais parabólicas, teorema 6.0.2, o qual encontra-se no apêndice. O lema seguinte, encontrado em [29], descreve as expressões analíticas das sequências encontradas pelo método iterativo.

Lema 2.1.1 *As duas sequências $\{\bar{u}^{(k)}\}$ e $\{\underline{u}^{(k)}\}$ estão bem definidas e estão em $\mathcal{C}_1^2(\Omega \times (0, T])$, para cada k .*

Prova: Notemos que, por hipótese, \underline{u} e \underline{b} são contínuas em $\partial\Omega \times (0, T]$. Daí $G(x, t, \underline{u}) = \underline{b}(x, t) \underline{u} + g(x, t, \underline{u})$ é contínua em $\partial\Omega \times (0, T]$, pois g é contínua em $\partial\Omega \times (0, T] \times J$. Também por hipótese u_0 é contínua em $\bar{\Omega}$. Logo estamos nas hipóteses do teorema 6.0.2 e então temos que o problema (2.1) tem solução $\underline{u}^{(1)}$, a qual pode ser representada por:

$$\underline{u}^{(1)}(x, t) = \int_{\Omega} \Gamma(x, t, \xi, 0) u_0(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{\partial\Omega} \Gamma(x, t, \xi, \tau) \underline{\psi}^{(1)}(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

onde $\underline{\psi}^{(1)}$ é dada por:

$$\underline{\psi}^{(1)}(x, t) = 2\underline{H}^{(1)}(x, t) + 2 \int_0^t \int_{\partial\Omega} \left[\sum_{j=1}^{\infty} Q_j(x, t, \xi, \tau) \right] \underline{H}^{(1)}(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

com

$$\underline{H}^{(1)}(x, t) = \int_{\partial\Omega} Q(x, t, \xi, 0) u_0(\xi) d\xi - G(x, t, \underline{u}),$$

$$Q_1(x, t, \xi, \tau) = Q(x, t, \xi, \tau) = 2 \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x, t, \xi, \tau) + 2\underline{b}(x, t) \Gamma(x, t, \xi, \tau)$$

e

$$Q_{j+1}(x, t, \xi, \tau) = \int_0^t \int_{\partial\Omega} Q(x, t, y, s) Q_j(y, s, \xi, \tau) dy ds.$$

Sucessivamente, usando o teorema 6.0.2, obtemos:

$$\underline{u}^{(k)}(x, t) = \int_{\Omega} \Gamma(x, t, \xi, 0) u_0(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{\partial\Omega} \Gamma(x, t, \xi, \tau) \underline{\psi}^{(k)}(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

onde $\underline{\psi}^{(k)}$ é dada por:

$$\underline{\psi}^{(k)}(x, t) = 2\underline{H}^{(k)}(x, t) + 2 \int_0^t \int_{\partial\Omega} \left[\sum_{j=1}^{\infty} Q_j(x, t, \xi, \tau) \right] \underline{H}^{(k)}(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

com

$$\underline{H}^{(k)}(x, t) = \int_{\partial\Omega} Q(x, t, \xi, 0) u_0(\xi) d\xi - G(x, t, \underline{u}^{(k-1)}).$$

Analogamente, usando o teorema 6.0.2, obtemos uma expressão para $\bar{u}^{(k)}$:

$$\bar{u}^{(k)}(x, t) = \int_{\Omega} \Gamma(x, t, \xi, 0) u_0(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{\partial\Omega} \Gamma(x, t, \xi, \tau) \bar{\psi}^{(k)}(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

onde $\bar{\psi}^{(k)}$ é dada por:

$$\bar{\psi}^{(k)}(x, t) = 2\bar{H}^{(k)}(x, t) + 2 \int_0^t \int_{\partial\Omega} \left[\sum_{j=1}^{\infty} Q_j(x, t, \xi, \tau) \right] \bar{H}^{(k)}(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

com

$$\overline{H}^{(k)}(x, t) = \int_{\Omega} Q(x, t, \xi, 0) u_0(\xi) d\xi - G(x, t, \overline{u}^{(k-1)}).$$

□

Finalmente, temos em mãos as seqüências de funções. A partir desse momento vamos nos concentrar na convergência para uma solução do problema (1.16), o que implica a existência do problema (1.15) fazendo $n = 1$. Começaremos com um lema de [29] que diz respeito à monotonicidade das seqüência obtidas através do método de iteração, via subsolução e supersolução.

Lema 2.1.2 *Se g satisfaz a propriedade (1.19), então as seqüências $\{\underline{u}^{(k)}\}$ e $\{\overline{u}^{(k)}\}$ são monótonas e satisfazem*

$$\underline{u} \leq \dots \leq \underline{u}^{(k)} \leq \underline{u}^{(k+1)} \leq \dots \leq \overline{u}^{(k+1)} \leq \overline{u}^{(k)} \leq \dots \leq \overline{u}.$$

Além disso, $\underline{u}^{(k)}$ e $\overline{u}^{(k)}$ são subsolução e supersolução de (1.16), respectivamente.

Prova: Iremos fazer um processo de indução, isto é primeiro vamos provar que

$$\underline{u} = \underline{u}^{(0)} \leq \underline{u}^{(1)} \leq \overline{u}^{(1)} \leq \overline{u}^{(0)} = \overline{u},$$

depois vamos supor que

$$\underline{u} \leq \dots \leq \underline{u}^{(k-1)} \leq \underline{u}^{(k)} \leq \overline{u}^{(k)} \leq \overline{u}^{(k-1)} \leq \dots \leq \overline{u}$$

e em seguida provaremos que

$$\underline{u} \leq \dots \leq \underline{u}^{(k)} \leq \underline{u}^{(k+1)} \leq \overline{u}^{(k+1)} \leq \overline{u}^{(k)} \leq \dots \leq \overline{u}.$$

Seja $w = \overline{u}^{(0)} - \overline{u}^{(1)} = \overline{u} - \overline{u}^{(1)}$. Daí temos

$$w_t - Lw = \overline{u}_t - L\overline{u} - [(\overline{u}^{(1)})_t - L\overline{u}^{(1)}] \geq 0 - 0 = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \nu} + \underline{b}w &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} + \underline{b}\bar{u} - \frac{\partial \bar{u}^{(1)}}{\partial \nu} - \underline{b}\bar{u}^{(1)} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} + \underline{b}\bar{u} - G(x, t, \bar{u}) \\ &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} - [G(x, t, \bar{u}) - \underline{b}\bar{u}] = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} - g(x, t, \bar{u}) \geq 0 \end{aligned}$$

e

$$w(x, 0) = \bar{u}(x, 0) - \bar{u}^{(1)}(x, 0) \geq u_0(x) - u_0(x) = 0.$$

Pelo lema 6.0.8, encontrado no apêndice, temos que $w \geq 0$, isto é

$$\bar{u} = \bar{u}^{(0)} \geq \bar{u}^{(1)}.$$

Seja $v = \underline{u}^{(1)} - \underline{u}^{(0)} = \underline{u}^{(1)} - \underline{u}$. Assim,

$$v_t - Lv = \underline{u}^{(1)}_t - L\underline{u}^{(1)} - [\underline{u}_t - L\underline{u}] \geq 0 - 0 = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \nu} + \underline{b}v &= \frac{\partial \underline{u}^{(1)}}{\partial \nu} + \underline{b}\underline{u}^{(1)} - \frac{\partial \underline{u}}{\partial \nu} - \underline{b}\underline{u} \\ &= G(x, t, \underline{u}) - \underline{b}\underline{u} - \frac{\partial \underline{u}}{\partial \nu} = g(x, t, \underline{u}) - \frac{\partial \underline{u}}{\partial \nu} \geq 0 \end{aligned}$$

e

$$v(x, 0) = \underline{u}^{(1)}(x, 0) - \underline{u}(x, 0) = u_0(x) - \underline{u}(x, 0) \geq u_0(x) - u_0(x) = 0 \geq 0.$$

Pelo lema 6.0.8 temos $v \geq 0$ e conseqüentemente

$$\underline{u}^{(1)} \geq \underline{u}^{(0)} = \underline{u}.$$

Seja $z^{(1)} = \bar{u}^{(1)} - \underline{u}^{(1)}$. Daí

$$z_t^{(1)} - Lz^{(1)} = \bar{u}_t^{(1)} - L\bar{u}^{(1)} - [\underline{u}^{(1)}_t - L\underline{u}^{(1)}] = 0 - 0 = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z^{(1)}}{\partial \nu} + \underline{b}z^{(1)} &= \frac{\partial \bar{u}^{(1)}}{\partial \nu} + \underline{b}\bar{u}^{(1)} - \frac{\partial \underline{u}^{(1)}}{\partial \nu} - \underline{b}\underline{u}^{(1)} \\ &= G(x, t, \bar{u}^{(0)}) - G(x, t, \underline{u}^{(0)}) = G(x, t, \bar{u}) - G(x, t, \underline{u}) \geq 0 \end{aligned}$$

e

$$z^{(1)}(x, 0) = \bar{u}^{(1)}(x, 0) - \underline{u}^{(1)}(x, 0) = u_0(x) - u_0(x) = 0 \geq 0.$$

Daí, pelo lema 6.0.8 teremos $z^{(1)} \geq 0$, ou seja $\bar{u}^{(1)} \geq \underline{u}^{(1)}$.

Logo teremos

$$\underline{u} = \underline{u}^{(0)} \leq \underline{u}^{(1)} \leq \bar{u}^{(1)} \leq \bar{u}^{(0)} = \bar{u}.$$

Suponhamos que

$$\underline{u} \leq \dots \leq \underline{u}^{(k-1)} \leq \underline{u}^{(k)} \leq \bar{u}^{(k)} \leq \bar{u}^{(k-1)} \leq \dots \bar{u}.$$

Seja $w^{(k)} = \bar{u}^{(k)} - \bar{u}^{(k+1)}$. Notemos que

$$w_t^{(k)} - Lw^{(k)} = \bar{u}_t^{(k)} - L\bar{u}^{(k)} - [\bar{u}_t^{(k+1)} - L\bar{u}^{(k+1)}] = 0 - 0 = 0$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial w^{(k)}}{\partial \nu} + \underline{b}w^{(k)} &= \frac{\partial \bar{u}^{(k)}}{\partial \nu} + \underline{b}\bar{u}^{(k)} - \frac{\partial \bar{u}^{(k+1)}}{\partial \nu} - \underline{b}\bar{u}^{(k+1)} = \frac{\partial \bar{u}^{(k)}}{\partial \nu} + \underline{b}\bar{u}^{(k)} - G(x, t, \bar{u}^{(k)}) \\ &= \frac{\partial \bar{u}^{(k)}}{\partial \nu} - [G(x, t, \bar{u}^{(k)}) - \underline{b}\bar{u}^{(k)}] = \frac{\partial \bar{u}^{(k)}}{\partial \nu} - g(x, t, \bar{u}^{(k)}). \end{aligned}$$

Observemos que se $\bar{u}^{(k)}$ é supersolução de (1.16), temos que

$$\frac{\partial \bar{u}^{(k)}}{\partial \nu} - g(x, t, \bar{u}^{(k)}) \geq 0$$

e como

$$w^{(k)}(x, 0) = \bar{u}^{(k)}(x, 0) - \bar{u}^{(k+1)}(x, 0) = u_0(x) - u_0(x) = 0,$$

pelo lema 6.0.8, temos $w^{(k)} \geq 0$, ou seja $\bar{u}^{(k)} \geq \bar{u}^{(k+1)}$. Agora provaremos de fato que $\bar{u}^{(k)}$ é supersolução de (1.16). Notemos que:

$$\bar{u}_t^{(k)} - L\bar{u}^{(k)} = 0 \geq 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}^{(k)}}{\partial \nu} &= G(x, t, \bar{u}^{(k-1)}) - \underline{b}\bar{u}^{(k)} = \underline{b}\bar{u}^{(k-1)} + g(x, t, \bar{u}^{(k-1)}) - \underline{b}\bar{u}^{(k)} \\ &= \underline{b}(\bar{u}^{(k-1)} - \bar{u}^{(k)}) - 0 + g(x, t, \bar{u}^{(k)}) \\ &\geq \underline{b}(\bar{u}^{(k-1)} - \bar{u}^{(k)}) - \underline{b}(\bar{u}^{(k-1)} - \bar{u}^{(k)}) + g(x, t, \bar{u}^{(k)}) \\ &= g(x, t, \bar{u}^{(k)}). \end{aligned}$$

e

$$\bar{u}^{(k)}(x, 0) = u_0(x) \geq u_0(x).$$

Assim $\bar{u}^{(k)}$ é uma supersolução de (1.16).

Seja $v^{(k)} = \underline{u}^{(k)} - \underline{u}^{(k+1)}$. Daí, temos

$$v_t^{(k)} - Lv^{(k)} = \underline{u}_t^{(k)} - L\underline{u}^{(k)} - [\underline{u}_t^{(k+1)} - L\underline{u}^{(k+1)}] = 0 - 0 = 0 \geq 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^{(k)}}{\partial \nu} + \underline{b}v^{(k)} &= \frac{\partial \underline{u}^{(k+1)}}{\partial \nu} + \underline{b}\underline{u}^{(k+1)} - \frac{\partial \underline{u}^{(k)}}{\partial \nu} - \underline{b}\underline{u}^{(k)} = G(x, t, \underline{u}^{(k)}) - \frac{\partial \underline{u}^{(k)}}{\partial \nu} - \underline{b}\underline{u}^{(k)} \\ &= G(x, t, \underline{u}^{(k)}) - \underline{b}\underline{u}^{(k)} = - \left[\frac{\partial \underline{u}^{(k)}}{\partial \nu} - g(x, t, \underline{u}^{(k)}) \right] \end{aligned}$$

Notemos que $\underline{u}^{(k)}$ é subsolução, então

$$\frac{\partial \underline{u}^{(k)}}{\partial \nu} - g(x, t, \underline{u}^{(k)}) \geq 0$$

e como

$$v^{(k)}(x, 0) = \underline{u}^{(k+1)} - \underline{u}^{(k)} = u_0(x) - u_0(x) = 0 \geq 0,$$

pelo lema 6.0.8 temos $v^{(k)} \geq 0$. Logo

$$\underline{u}^{(k+1)} \geq \underline{u}^{(k)}.$$

Agora provaremos que $\underline{u}^{(k)}$ é subsolução. De fato:

$$\underline{u}^{(k)} - L\underline{u}^{(k)} = 0 \leq 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{u}^{(k)}}{\partial \nu} &= G(x, t, \underline{u}^{(k-1)}) - \underline{b} \underline{u}^{(k)} = \underline{b} \underline{u}^{(k-1)} + g(x, t, \underline{u}^{(k-1)}) - \underline{b} \underline{u}^{(k)} \\ &= \underline{b}(\underline{u}^{(k-1)} - \underline{u}^{(k)}) - 0 + g(x, t, \underline{u}^{(k)}) \\ &\leq \underline{b}(\underline{u}^{(k-1)} - \underline{u}^{(k)}) - \underline{b}(\underline{u}^{(k-1)} - \underline{u}^{(k)}) + g(x, t, \underline{u}^{(k)}) \\ &= g(x, t, \underline{u}^{(k)})0 \end{aligned}$$

e

$$\underline{u}^{(k)}(x, 0) = u_0(x) \leq u_0(x)$$

Portanto $\underline{u}^{(k)}$ é subsolução.

Finalmente provaremos que $\underline{u}^{(k+1)} \leq \bar{u}^{(k+1)}$. Seja $z^{(k+1)} = \bar{u}^{(k+1)} - \underline{u}^{(k+1)}$. Assim,

$$z_t^{(k+1)} - Lz^{(k+1)} = \bar{u}_t^{(k+1)} - L\bar{u}^{(k+1)} - \underline{u}_t^{(k+1)} - L\underline{u}^{(k+1)} = 0 - 0 = 0 \geq 0,$$

$$\frac{\partial z^{(k+1)}}{\partial \nu} + \underline{b}z^{(k+1)} = \frac{\partial \bar{u}^{(k+1)}}{\partial \nu} + \underline{b}\bar{u}^{(k+1)} - \left[\frac{\partial \underline{u}^{(k+1)}}{\partial \nu} - \underline{b}\underline{u}^{(k+1)} \right] = G(x, t, \bar{u}^{(k)}) - G(x, t, \underline{u}^{(k)}) \geq 0$$

e

$$z^{(k+1)}(x, 0) = \bar{u}^{(k+1)}(x, 0) - \underline{u}^{(k+1)}(x, 0) = u_0(x) - u_0(x) = 0 \geq 0.$$

Assim, pelo lema 6.0.8 $z^{(k+1)} \geq 0$, isto é

$$\underline{u}^{(k+1)} \leq \bar{u}^{(k+1)}.$$

Logo $\{\underline{u}^{(k)}\}$ e $\{\bar{u}^{(k)}\}$ são seqüências de subsolução e supersolução respectivamente e vale a seguinte desigualdade:

$$\underline{u} \leq \dots \leq \underline{u}^{(k)} \leq \underline{u}^{(k+1)} \leq \dots \leq \bar{u}^{(k+1)} \leq \bar{u}^{(k)} \leq \dots \leq \bar{u}$$

□

Sabendo que as seqüências de subsolução e supersolução são monótonas então os limites dessas seqüências existem. Teremos que, de fato, essas seqüências vão convergir para a chamada solução da equação (1.16). Primeiramente, começaremos com um lema de [29] que diz a respeito dos limites satisfazerem uma equação integral.

Lema 2.1.3 *Os limites $u_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{u}^{(k)}$ e $u_2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{u}^{(k)}$ são contínuos em $\bar{\Omega} \times (0, T]$ e satisfazem a equação integral:*

$$(2.4) \quad u(x, t) = \int_{\Omega} \Gamma(x, t, \xi, 0) u_0(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{\partial\Omega} \Gamma(x, t, \xi, \tau) \psi(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

onde

$$\psi(x, t) = 2H(x, t) + 2 \int_0^t \int_{\partial\Omega} \left[\sum_{j=1}^{\infty} Q_j(x, t, \xi, \tau) \right] H(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

$$H(x, t) = \int_{\Omega} Q(x, t, \xi, 0) u_0(\xi) d\xi - G(x, t, u),$$

$$Q(x, t, \xi, \tau) = 2 \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x, t, \xi, \tau) + 2\underline{b}(x, t) \Gamma(x, t, \xi, \tau)$$

$$Q_{j+1}(x, t, \xi, \tau) = \int_0^t \int_{\partial\Omega} Q(x, t, y, s) Q_j(y, s, \xi, \tau) dy ds,$$

$$Q_1 = Q$$

Prova: Notemos que $\{\underline{u}^{(k)}\}$ é uma sequência de funções contínuas que satisfaz:

$$\underline{u}^{(k)}(x, t) = \int_{\Omega} \Gamma(x, t, \xi, 0) u_0(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{\partial\Omega} \Gamma(x, t, \xi, \tau) \underline{\psi}^{(k)}(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

onde $\underline{\psi}^{(k)}$ é dada por:

$$\underline{\psi}^{(k)}(x, t) = 2\underline{H}^{(k)}(x, t) + 2 \int_0^t \int_{\partial\Omega} \left[\sum_{j=1}^{\infty} Q_j(x, t, \xi, \tau) \right] \underline{H}^{(k)}(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

onde

$$\underline{H}^{(k)}(x, t) = \int_{\Omega} Q(x, t, \xi, 0) u_0(\xi) d\xi - G(x, t, \underline{u}^{(k-1)}).$$

Como $\underline{u}^{(k)}(x, t)$ é uma sequência monótona para (x, t) fixado, teremos que $\underline{u}^{(k)}(x, t) \rightarrow u_1(x, t)$. Assim $\{\underline{H}^{(k)}\}$ é uma sequência de funções contínuas tal que $\underline{H}^{(k)}(x, t) \rightarrow \underline{H}(x, t)$ para qualquer (x, t) fixado, onde \underline{H} é dada por:

$$\underline{H}(x, t) = \int_{\Omega} Q(x, t, \xi, 0) u_0(\xi) d\xi - G(x, t, u_1).$$

Pelo lema 6.0.5 obtemos $\underline{\psi}^{(k)} \rightarrow \underline{\psi}$, onde

$$\underline{\psi}(x, t) = 2\underline{H}(x, t) + 2 \int_0^t \int_{\partial\Omega} \left[\sum_{j=1}^{\infty} Q_j(x, t, \xi, \tau) \right] \underline{H}(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

Pelo teorema da convergência dominada temos

$$u_1(x, t) = \int_{\Omega} \Gamma(x, t, \xi, 0) u_0(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{\partial\Omega} \Gamma(x, t, \xi, \tau) \psi(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

e do lema 2.1.4 concluiremos a continuidade de u_1 em $\bar{\Omega} \times (0, T]$.

Analogamente obtemos resultados para u_2 :

$$u_2(x, t) = \int_{\Omega} \Gamma(x, t, \xi, 0) u_0(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{\partial\Omega} \Gamma(x, t, \xi, \tau) \bar{\psi}(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

onde

$$\bar{\psi}(x, t) = 2\bar{H}(x, t) + 2 \int_0^t \int_{\partial\Omega} \left[\sum_{j=1}^{\infty} Q_j(x, t, \xi, \tau) \right] \bar{H}(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

e

$$\bar{H}(x, t) = \int_{\Omega} Q(x, t, \xi, 0) u_0(\xi) d\xi - G(x, t, \xi, u_2)$$

e do lema 2.1.4, u_2 também é uma função contínua.

Notemos que, usando o teorema 6.0.9, obtemos que as convergências

$$\underline{u}^{(k)} \rightarrow u_1$$

e

$$\bar{u}^{(k)} \rightarrow u_2$$

são uniformes em $\bar{\Omega} \times (0, T]$. □

Agora, com o lema 2.1.4, temos dados sobre a continuidade da solução da equação (1.16).

Lema 2.1.4 *Seja $V(x, t) = \int_0^t \int_{\partial\Omega} \Gamma(x, t, \xi, \tau) \psi(\xi, \tau) d\xi d\tau$. Então V é contínua em $\bar{\Omega} \times (0, T]$.*

Prova: Notemos que a solução fundamental dada pela expressão:

$$\Gamma(x, t, \xi, \tau) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^n} \frac{1}{(t - \tau)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\sum (x_i - \xi_i)^2}{4(t - \tau)}},$$

tem a seguinte estimativa

$$\left| \Gamma(x, t, \xi, \tau) \right| \leq \frac{K_0}{(t - \tau)^\mu} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2+\mu}}, \quad 0 \leq \mu \leq 1.$$

Assim

$$\left| \int_0^t \int_{\partial\Omega} \Gamma(x, t, \xi, \tau) \psi(\xi, \tau) d\xi d\tau \right| \leq K_0 \|\psi\|_\infty \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^\mu} d\tau \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2+\xi}} d\xi$$

e então V converge absoluta e uniformemente

Mostremos que $V(x, t)$ é contínua. Seja $\varepsilon > 0$. Como V converge absoluta e uniformemente, existe $\eta > 0$ tal que

$$\left| \int_{t-\eta}^t \Gamma(x, t, \xi, \tau) \psi(\xi, \tau) \right| < \frac{\varepsilon}{4}, \forall (x, t) \in \bar{\Omega} \times (0, T].$$

Como $\Gamma(x, t, \xi, \tau) \psi(x, t, \xi, \tau)$ é contínua para $t \neq \tau$, existe $\delta < \frac{\eta}{2}$ tal que se $|h| \leq \delta$ e $|s| \leq \delta$, então

$$\left| \int_0^{t-\eta} \int_{\partial\Omega} [\Gamma(x+h, t+s, \xi, \tau)] \psi(\xi, \tau) d\xi d\tau \right| < \frac{\varepsilon}{4},$$

e ainda temos que

$$\left| \int_{t-\eta}^{t+s-\eta} \int_{\partial\Omega} \Gamma(x+h, t+s, \xi, \tau) \psi(\xi, \tau) d\xi d\tau \right| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 |V(x+h, t+s) - V(x, t)| &= \left| \int_0^{t+s} \int_{\partial\Omega} \Gamma(x+h, t+s, \xi, \tau) \psi(\xi, \tau) d\xi d\tau \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^t \int_{\partial\Omega} \Gamma(x, t, \xi, \tau) \psi(\xi, \tau) d\xi d\tau \right| \\
 &= \left| \int_0^{t+s-\eta} \int_{\partial\Omega} \Gamma(x+h, t+s, \xi, \tau) \psi(\xi, \tau) d\xi d\tau \right. \\
 &\quad + \int_{t+s-\eta}^{t+s} \int_{\partial\Omega} \Gamma(x+h, t+s, \xi, \tau) \psi(\xi, \tau) d\xi d\tau \\
 &\quad - \int_0^{t-\eta} \int_{\partial\Omega} \Gamma(x, t, \xi, \tau) \psi(\xi, \tau) d\xi d\tau \\
 &\quad \left. - \int_{t-\eta}^t \int_{\partial\Omega} \Gamma(x, t, \xi, \tau) \psi(\xi, \tau) d\xi d\tau \right| \\
 &\leq \left| \int_0^{t-\eta} \int_{\partial\Omega} [\Gamma(x+h, t+s, \xi, \tau) - \Gamma(x, t, \xi, \tau)] \psi(\xi, \tau) d\xi d\tau \right| \\
 &\quad + \left| \int_{t-\eta}^{t+s-\eta} \int_{\partial\Omega} \Gamma(x+h, t+s, \xi, \tau) \psi(\xi, \tau) d\xi d\tau \right| \\
 &\quad + \left| \int_{t+s-\eta}^{t+s} \int_{\partial\Omega} \Gamma(x+h, t+s, \xi, \tau) \psi(\xi, \tau) d\xi d\tau \right| \\
 &\quad + \left| \int_{t-\eta}^t \int_{\partial\Omega} \Gamma(x, t, \xi, \tau) \psi(\xi, \tau) d\xi d\tau \right| \\
 &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon
 \end{aligned}$$

□

Concluiremos a questão de existência de solução para o problema (1.16) através do teorema 2.1.5, encontrado em [29], e que mostra que os limites das duas seqüências de funções, uma de subsoluções e outra de supersoluções, convergem para a mesma função, e esta é solução da equação (1.16). Notemos que a continuidade de tal solução já foi provada no lema 2.1.3 com a ajuda do lema 2.1.4.

Teorema 2.1.5 *Se \bar{u} e \underline{u} são, respectivamente, supersolução e subsolução do problema (1.16) e g satisfaz a propriedade (1.19), então as sequências*

$$\{\bar{u}^{(k)}\} \text{ e } \{\underline{u}^{(k)}\}$$

convergem monotonicamente para uma mesma solução de (1.16).

Prova: Como u_1 é contínua, temos que $G(x, t, u_1(x, t))$ é uma função contínua em $\partial\Omega \times (0, T]$. Assim, pelo teorema 6.0.2, a função u_1 é solução do problema de valor inicial e de fronteira:

$$(2.5) \quad \begin{cases} (u_1)_t(x, t) = L(u_1(x, t)), & \Omega \times (0, T], \\ \frac{\partial u_1}{\partial \nu}(x, t) + \underline{b}(x, t)u_1(x, t) = G(x, t, u_1(x, t)), & \partial\Omega \times (0, T], \\ u_1(x, 0) = u_0(x), & \bar{\Omega}. \end{cases}$$

Observemos que

$$G(x, t, \xi, u_1(x, t)) = \underline{b}(x, t)u_1(x, t) + g(x, t, u_1(x, t)).$$

Assim o problema (2.5) nada mais é que o problema:

$$(2.6) \quad \begin{cases} (u_1)_t(x, t) = L(u_1(x, t)), & \Omega \times (0, T], \\ \frac{\partial u_1}{\partial \nu}(x, t) = g(x, t, u_1), & \partial\Omega \times (0, T], \\ u_1(x, 0) = u_0(x), & \bar{\Omega}. \end{cases}$$

Analogamente chegamos que u_2 é solução para o problema:

$$(2.7) \quad \begin{cases} (u_2)_t(x, t) = L(u_2(x, t)), & \Omega \times (0, T], \\ \frac{\partial u_2}{\partial \nu}(x, t) + \underline{b}(x, t)u_2(x, t) = G(x, t, u_2(x, t)), & \partial\Omega \times (0, T], \\ u_2(x, 0) = u_0(x), & \bar{\Omega}. \end{cases}$$

2.1. EXISTÊNCIA E REGULARIDADE CAPÍTULO 2. EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO

Notemos que u_1 e u_2 são soluções do problema (1.16). Agora iremos mostrar que u_1 e u_2 são uma mesma função, a qual denotamos por u . Seja $w = u_1 - u_2$. Assim

$$w(x, t) = \int_0^t \int_{\partial\Omega} \Gamma(x, t, \xi, \tau) [\underline{\psi}(\xi, \tau) - \bar{\psi}(\xi, \tau)] d\xi d\tau,$$

com

$$\underline{\psi}(x, t) = 2\underline{H}(x, t) + 2 \int_0^t \int_{\partial\Omega} \left[\sum_{j=1}^{\infty} Q_j(x, t, \xi, \tau) \right] \underline{H}(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

e

$$\bar{\psi}(x, t) = 2\bar{H}(x, t) + 2 \int_0^t \int_{\partial\Omega} \left[\sum_{j=1}^{\infty} Q_j(x, t, \xi, \tau) \right] \bar{H}(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

Daí,

$$|\underline{H}(x, t) - \bar{H}(x, t)| = |G(x, t, u_1) - G(x, t, u_2)| \leq |\underline{b}(x, t) + \bar{b}(x, t)| |u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq K_1 \|w\|_t,$$

onde

$$K_1 = \sup\{|\underline{b}(\xi, \tau) + \bar{b}(\xi, \tau)|, 0 \leq \tau \leq t \text{ e } \xi \in \bar{\Omega}\}$$

e

$$\|w\|_t = \sup\{|w(\xi, \tau)|; 0 \leq \tau \leq t, \xi \in \bar{\Omega}\}.$$

Logo,

$$|\underline{\psi}(x, t) - \bar{\psi}(x, t)| \leq 2K_1 \|w\|_t \left[1 + \int_0^t \int_{\partial\Omega} \left| \sum_{j=1}^{\infty} Q_j(x, t, \xi, \tau) \right| d\xi d\tau \right] \leq K_2 \|w\|_t,$$

onde K_2 é uma constante independente de (x, t) em $\bar{\Omega} \times (0, T]$. Então:

$$|w(x, t)| \leq K_2 \|w\|_t \int_0^t \int_{\partial\Omega} |\Gamma(x, t, \xi, \tau)| d\xi d\tau.$$

Sabe-se que

$$|\Gamma(x, t, \xi, \tau)| \leq K_0(t - \tau)^{-\mu} |x - \xi|^{-(n-2+\mu)}, \quad (0 < \mu < 1).$$

Assim w satisfaz a estimativa

$$|w(x, t)| \leq K_3 \int_0^t (t - \tau)^{-\mu} d\tau \|w\|_t \leq K_4 t^{1-\mu} \|w\|_t,$$

onde K_3 e K_4 são constantes independentes de t . Seja $t_1 > 0$ tal que $K_4 t_1^{1-\mu} < 1$. Como $\|w\|_t$ decresce em t , temos para $t \in [0, t_1]$:

$$|w(x, t)| \leq K_4 t^{1-\mu} \|w\|_t \leq K_4 t_1^{1-\mu} \|w\|_{t_1}.$$

Assim

$$\|w\|_{t_1} \leq K_4 t_1^{1-\mu} \|w\|_{t_1},$$

mas $K_4 t_1^{1-\mu} < 1$, logo

$$\|w\|_{t_1} = 0,$$

isto é, $u_1 = u_2$ em $\bar{\Omega} \times [0, t_1]$.

Considerando o problema

$$(2.8) \quad \left\{ \begin{array}{ll} v_t = Lv, & \Omega \times (t_1, T] \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = g(x, t, v), & (t_1, T], \\ u(x, t_1) = u_1(x, t_1) > 0, & \bar{\Omega}. \end{array} \right.$$

Usando o argumento acima obtemos $u_1 = u_2$ até um tempo t_2 . Continuando o processo temos $u_1 = u_2$ em $\bar{\Omega} \times (0, T]$, isto é, os limites das sequências de subsoluções e supersoluções são iguais.

□

2.2 Subsolução e Supersolução

O problema (1.15) é um caso particular do problema (1.16). Como a existência de solução para (1.16) foi provada na seção anterior 2.1, colocando-se algumas hipóteses sobre a condição de fronteira e sobre a existência de subsolução e supersolução, então nesta seção nos encargamos de provar a existência de uma subsolução e uma supersolução para o problema (1.15) e que a condição de fronteira de (1.15) satisfaz a propriedade (1.19).

Primeiramente encontraremos uma supersolução. Notemos que isto é trivialmente encontrado, já que $\bar{u}(x, t) = K = \max\{u_0(x), x \in [0, 1]\}$ é supersolução para o problema (1.15). De fato,

$$\bar{u}_t = 0 = \bar{u}_{xx},$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu}(0, t) = 0,$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu}(1, t) = 0 \geq -K^{-\beta} = -(\bar{u}(x, t))^{-\beta}$$

e

$$\bar{u}(x, 0) = K \geq u_0(x).$$

Procuramos uma subsolução para o problema (1.15). Seja $\theta = \min\{u_0(x), x \in [0, 1]\}$ e definamos $\underline{u}(x, t) = -\frac{\theta}{2}x^n + \theta - \sigma t$, onde n e σ serão tomados de forma a \underline{u} ser uma subsolução para o problema (1.15).

Fazendo cálculos chegamos a

$$\underline{u}_t - \underline{u}_{xx} = -\sigma + \frac{\theta}{2}n(n-1)x^{n-2} \leq -\sigma + \frac{\theta}{2}n(n-1).$$

Tomando $\sigma = \frac{\theta}{2}n(n-1)$ temos que

$$\underline{u}_t - \underline{u}_{xx} \leq 0.$$

Notemos também que

$$\underline{u}(x, 0) = -\frac{\theta}{2}x^n + \theta \leq \theta \leq u_0(x),$$

para $x \in [0, 1]$. Agora usando as condições de fronteira temos:

$$\underline{u}_x(0, t) = 0$$

e

$$\underline{u}_x(1, t) = -\frac{\theta}{2}n.$$

Escolhemos n de forma que $-\frac{\theta}{2}n \leq -\left(\frac{\theta}{4}\right)^{-\beta}$. Daí, $\underline{u}(1, t) = -\frac{\theta}{2} + \theta - \frac{\theta}{2}n(n-1)t = \frac{\theta}{2} - \frac{\theta}{2}n(n-1)t$. Tomando $t_1 = \frac{1}{2n(n-1)} > 0$. Se segue, para $0 \leq t \leq t_1$:

$$\frac{\theta}{4} \leq \underline{u}(1, t) \Rightarrow \left(\frac{\theta}{4}\right)^{-\beta} \geq [\underline{u}(1, t)]^{-\beta} \Rightarrow -[\underline{u}(1, t)]^{-\beta} \geq -\left(\frac{\theta}{4}\right)^{-\beta} \geq -\frac{\theta}{2}n = \underline{u}_x(1, t).$$

Logo, provamos que existe subsolução para o problema (1.15) em $[0, 1] \times [0, t_1]$.

Como há subsolução e supersolução até o tempo t_1 , partindo destas obtemos duas seqüências de funções que convergirão para uma mesma solução do problema:

$$(2.9) \quad \begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in (0, 1), t \in (0, t_1], \\ u_x(0, t) = 0, u_x(1, t) = -[u(1, t)]^{-\beta}, & t \in (0, t_1], \\ u(x, 0) = u_0(x) > 0, & x \in [0, 1] \end{cases}$$

e esta solução, pelo lema 2.1.3, satisfaz uma equação integral para $0 \leq t \leq t_1$.

Se $u(x, t_1) > 0$, pelo mesmo método conseguiremos uma solução para o problema:

$$(2.10) \quad \begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in (0, 1), t \in (t_1, t_2], \\ u_x(0, t) = 0, u_x(1, t) = -[u(1, t)]^{-\beta}, & t \in (t_1, t_2], \\ u(x, t_1) = u(x, t_1) > 0, & x \in [0, 1] \end{cases}$$

2.2. SUBSOLUÇÃO E SUPERSOLUÇÃO CAPÍTULO 2. EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO

que satisfaz a mesma equação integral para $t_1 \leq t \leq t_2$. Saberemos futuramente que existe um tempo T tal que $u(1, T) = 0$, portanto enquanto $u(x, t_j) > 0$, para algum j conseguiremos solução para o problema (1.15), a qual satisfaz a equação integral descrita no lema 2.1.3. Desta forma podemos concluir que se g satisfaz a propriedade 1.19, para $\underline{u} \leq u_2 \leq u_1 \leq \bar{u}$, temos a existência de solução até um tempo T .

Vamos mostrar a propriedade (1.19) para $g(x, t, u) = -u^{-\beta}$, para $\underline{u} \leq u_2 \leq u_1 \leq \bar{u}$. Notemos que g é C^∞ para $u > 0$, ou seja g é $C^\infty([\underline{u}, \bar{u}])$. Assim dadas funções u_1 e u_2 tais que $\underline{u} \leq u_2 \leq u_1 \leq \bar{u}$, pelo Teorema do Valor Médio, temos que existe uma função $u_3 \in [u_2, u_1]$ tal que

$$g(x, t, u_1) - g(x, t, u_2) = g_u(x, t, u_3)(u_1 - u_2).$$

Como $g_u(x, t, u)$ é uma função não crescente em u temos que

$$-g_u(x, t, \bar{u})(u_1 - u_2) \leq g_u(x, t, u_3) \leq g_u(x, t, \underline{u})(u_1 - u_2).$$

Logo, existem $\underline{b}(x, t) = g_u(x, t, \bar{u})$ e $\bar{b}(x, t) = g_u(x, t, \underline{u})$ funções contínuas não-negativas satisfazendo

$$-\underline{b}(u_1 - u_2) \leq g(x, t, u_1) - g(x, t, u_2) \leq \bar{b}(u_1 - u_2).$$

Pela teoria geral regularidade de equações parabólicas em [3], [13] (página 144) e [14] (página 141) concluímos que $u \in C^\infty((0, 1) \times (0, T])$, se a nossa condição inicial $u_0 \in C^\infty([0, 1])$.

Capítulo 3

Propriedades da Solução

No capítulo precedente foi mostrada a existência de solução para o problema (1.15), o qual é o objeto de nosso estudo. Já sabendo que existe solução e esta é tão regular quanto nossa condição inicial, iremos neste capítulo, baseados nas referências [1], [2], [6], [15], [16], [18], [23] e [27], mostrar algumas propriedades da solução de (1.15). Inicialmente, mostraremos que qualquer solução do problema de valor inicial e de fronteira (1.15) se anula em tempo finito T , isto é, a existência de solução positiva do problema (1.15) se dá em $[0, 1] \times [0, T)$. Também iremos mostrar que o ponto $x = 1$ é o único ponto de “quenching” para soluções do problema (1.15), ou seja $u(x, t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow T^-$, somente para $x = 1$. Posteriormente descreveremos o comportamento desta solução perto do tempo de anulamento T e do ponto $x = 1$.

Para mostrar que a solução se anula em tempo finito é preciso saber alguns resultados da Teoria de Semigrupos encontrados na referência [27]. No Apêndice apresentamos uma pequena introdução à Teoria de Semigrupo e o enunciado de um teorema usado para provar o anulamento em tempo finito T da solução do problema (1.15).

Primeiramente, já supondo que a nossa solução se anula em algum tempo (este sendo finito ou infinito) e fazendo uso do princípio do máximo 6.0.6 e de [18], mostraremos através da proposição seguinte que há um único ponto em que $u(x, t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow T^-$.

Por todo este capítulo notemos que $u_0 > 0$.

Proposição 3.0.1 *Se assumirmos que u se anula em tempo T (finito ou infinito) e $u'_0 < 0$. Então o único ponto de quenching é $x = 1$. Mais ainda,*

$$u(x, t) \geq C_1(1 - x)^{2\lambda},$$

para $x \in [0, 1]$, $t \in [0, T)$, onde C_1 é uma constante positiva a qual depende de u_0 e β e $\lambda = \frac{1}{2(\beta+1)}$.

Prova: Seja $\varphi \in C^2([0, 1])$ uma função com as seguintes propriedades:

- (i) $\varphi(0) = 0$,
- (ii) $0 < \varphi(1) < 1$,
- (iii) $\varphi, \varphi' \varphi'' \geq 0$,
- (iv) $\varphi(x) \leq (k - u'_0(x))[u_0(x) + k(1 - x)]^\beta$ para $x \in [0, 1]$, onde

$$k = \max\{|u'_0(x)|, 0 \leq x \leq 1\}.$$

Um exemplo de φ é dada por $\varphi(x) = Cx$, onde

$$C = \min\{1, \min\{(k - u'_0(x))[u_0(x) + k(1 - x)]^\beta, x \in [0, 1]\}\}.$$

Definamos

$$(3.1) \quad J(x, t) = u_x(x, t) - k + \varphi(x)[u(x, t) + k(1 - x)]^{-\beta}$$

Notemos que J está bem definida em $[0, 1] \times [0, T)$, pois u é estritamente positiva neste domínio.

Usando (iv), temos

$$\begin{aligned} J(x, 0) &= u'_0(x) - k + \varphi(x)[u_0(x) + k(1 - x)]^{-\beta} \\ &\leq u'_0(x) - k + k + u'_0(x) = 0. \end{aligned}$$

Agora, usando a condição de fronteira do problema (1.15), (i) e (ii), temos

$$J(0, t) = u_x(0, t) - k + \varphi(0)[u(0, t) + k]^{-\beta} = -k \leq 0$$

e

$$J(1, t) = u_x(1, t) - k + \varphi(1)[u(1, t)]^{-\beta} \leq u_x(1, t) - k + [u(1, t)]^{-\beta} = -k \leq 0.$$

Assim $J \leq 0$ na fronteira parabólica.

Fazendo alguns cálculos obtemos,

$$\begin{aligned} J_t(x, t) - J_{xx}(x, t) = & - \varphi''(x)[u(x, t) + k(1 - x)]^{-\beta} \\ & - 2\beta\varphi'(x)[u(x, t) + k(1 - x)]^{\beta-1}[k - u_x(x, t)] \\ & - \beta(\beta - 1)\varphi[u(x, t) + k(1 - x)]^{-\beta-2}[k - u_x(x, t)]^2. \end{aligned}$$

Como por hipótese temos $u'_0 \leq 0$ e sabendo que u_x satisfaz

$$(3.2) \quad \begin{cases} w_t = w_{xx}, & x \in (0, 1), t > 0, \\ w(0, t) = 0, w(1, t) = -[u(1, t)]^{-\beta}, & t > 0, \\ w(x, 0) = u'_0(x) \leq 0, & x \in [0, 1], \end{cases}$$

usando o princípio do máximo 6.0.6, temos que $u_x \leq 0$ e então $k \geq u_x(x, t)$ em $[0, 1] \times [0, T)$. Portanto teremos que $J_t - J_{xx} \leq 0$ em $[0, 1] \times [0, T)$. Novamente utilizando o princípio do máximo 6.0.6 temos que

$$(3.3) \quad J \leq 0,$$

em $[0, 1] \times [0, T)$.

Seja $v(x, t) = u(x, t) + k(1 - x)$ temos que $v > 0$ em $[0, 1] \times [0, T)$ e de (3.1) e (3.3) concluímos que

$$v^\beta(x, t)v_x(x, t) \leq -\varphi(x).$$

Agora integrando de x a 1 e usando o fato de v ser estritamente positiva temos

$$v^{\beta+1}(x, t) > (\beta + 1) \int_x^1 \varphi(r) dr.$$

Pelo teorema do valor intermediário existe x_0 tal que $\varphi(x_0) = \frac{1}{2}\varphi(1)$. Assim usando fato de φ ser não-decrescente, devido a (iii), temos

$$v^{\beta+1}(x, t) > \frac{1}{2}(\beta + 1)\varphi(1)(1 - x),$$

para $x_0 \leq x < 1$. E então, usando a definição de v , temos

$$u(x, t) \geq \left[\frac{1}{2}(\beta + 1)\varphi(1)(1 - x) \right]^{2\lambda} - k(1 - x),$$

para $x_0 \leq x < 1$. Como $1 - x \leq 1$ e $2\lambda \leq 1$, então existe um x_1 tal que

$$k(1 - x) \leq \left[\frac{1}{4}(\beta + 1)\varphi(1)(1 - x) \right]^{2\lambda}, \text{ para todo } x_1 \leq x < 1.$$

Logo existe uma constante

$$C_1 = \left[\frac{1}{2}(\beta + 1)\varphi(1) \right]^{2\lambda} - \left[\frac{1}{4}(\beta + 1)\varphi(1) \right]^{2\lambda} > 0$$

tal que

$$u(x, t) \geq C_1(1 - x)^{2\lambda}, \text{ para } x \in [x_1, 1] \text{ e } t \in [0, T].$$

Como $u_x \leq 0$, temos para t fixado que $u(x, t)$ é uma função não crescente em x . Assim, para $x_2 \geq x_1$, obtemos

$$u(x_2, t) \geq u(x_1, t) \geq C_1(1 - x_1)^{2\lambda} \geq C_1(1 - x_2)^{2\lambda},$$

para $t \in [0, T]$.

Daí, podemos afirmar que

$$u(x, t) \geq C_1(1 - x)^{2\lambda},$$

para $x \in [0, 1]$ e $t \in [0, T)$.

E então se u tem um ponto de quenching a única possibilidade é $x = 1$.

□

Agora vamos provar um resultado, usando os teoremas 6.0.6 e 6.0.18 e a referência [18], o qual diz que sobre certas condições as soluções de (1.15) se anulam em tempo finito.

Proposição 3.0.2 *Se $u_0'' \leq 0$, toda solução de (1.15) se anula em tempo finito T .*

Prova: Pelo princípio do máximo 6.0.6, como u satisfaz a equação do calor, o máximo de u é atingido na fronteira parabólica. Notemos que o Lema de Hopf 6.0.7 nos diz que se (x_0, t_0) é máximo então $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0, t_0) > 0$. Como $u_x(x, 0) = 0$ e $u_x(1, t) = -[u(1, t)]^{-\beta}$, concluiremos que o máximo de u é o máximo de u_0 , isto é, nossa solução u é limitada superiormente pelo $\max\{u_0(x), x \in [0, 1]\}$.

Suponhamos que u é uma solução para o problema (1.15) para todo $t > 0$ e suponhamos por contradição $u(x, t) > 0$, para todo (x, t) .

Se existe $\delta > 0$ tal que $u(x, t) \geq \delta$, para $x \in [0, 1]$ e $t \geq 0$. Definimos $X = \{u_0 \in \mathcal{C}([0, 1]), u_0 > \delta\}$ munido da métrica obtida através da norma do supremo, e seja

$$\begin{aligned} V_t : X &\longrightarrow X, \\ u_0(x) &\mapsto u(x, t) \end{aligned}$$

onde u é solução do problema de valor inicial (1.15):

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in (0, 1), t > 0, \\ u_x(0, t) = 0, u_x(1, t) = -[u(1, t)]^{-\beta}, & t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) > 0, & x \in [0, 1], \end{cases}$$

Observemos que

$$V_{t_1}(V_{t_2}(u_0(x))) = V_{t_1}(u(x, t_2)) = u(x, t_1 + t_2) = V_{t_1+t_2}(u_0(x)).$$

Sabemos que $\gamma^+(u_0) = \{u(\cdot, t), t > 0\}$, como $|u(x, t)| \leq \max\{u_0(x), 0 \leq x \leq 1\}$ para qualquer t , temos que $\gamma^+(u_0)$ é limitado. Mostramos que V_t é compacto para cada t .

Considere $B \subset X$ e B limitado. Seja $B' = V_t(B)$, notemos que $B' \subset C^2((0, 1))$, uma vez que $u \in C_1^2((0, 1) \times (0, \infty))$.

Pela referência [6] temos que $C^2((0, 1)) \hookrightarrow C((0, 1))$ (compacta). Assim $B' \hookrightarrow C((0, 1))$ e então $B' \hookrightarrow X$ e ainda B' é limitado, pois a limitação de u é a mesma de u_0 pelo princípio do máximo 6.0.6. Logo se $B \subset X$ é limitado, então temos $V_t(B)$ pré-compacta em X e portanto concluiremos que V_t é um operador compacto.

Observemos que se

$$J(u_0) := \frac{1}{2} \int_0^t (u_0)_x^2(x) dx + \frac{1}{1-\beta} [u_0(1)]^{1-\beta},$$

então

$$\frac{d}{dt}(J(u(x, t))) = - \int_0^1 u_t^2(x, t) dx.$$

Assim temos um funcional de Liapunov para o semigrupo $\{V_t\}$. Logo, pelo teorema 6.0.18 e usando a positividade de u_0 , a união dos ω -limite de u_0 consiste no conjunto de soluções positivas do problema (3.4):

$$(3.4) \quad \begin{cases} v_{xx} = 0, x \in (0, 1), \\ v_x(0) = 0, v_x(1) = -[v(1)]^{-\beta}, \end{cases}$$

porém o problema (3.4) não tem solução positiva e então temos uma contradição, usando o teorema 6.0.18, visto que a união dos ω -limite é não vazia.

Se u não é limitada inferiormente por uma constante positiva existe um x tal que $u(x, t) \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$. Pela proposição 3.0.1 teremos que $x = 1$. Desde que $u''_0 \leq 0$ obteremos que $u_t \leq 0$. De fato, seja $v = -u_t$, então v é solução do seguinte problema:

$$\begin{cases} v_t = v_{xx}, & x \in (0, 1), t > 0, \\ v_x(0, t) = 0, v_x(1, t) = \beta[u(1, t)]^{-(\beta+1)}v(1, t), & t > 0, \\ v(x, 0) = -u_0''(x), & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Para $\varepsilon > 0$ seja $\varphi(x) = 1 - \frac{x^{n(\varepsilon)}}{2}$ com $n(\varepsilon)$ suficientemente grande para que $\beta[u(1, t)]^{-(\beta+1)} + \varphi'(1) < 0$. Definiremos $w = e^{\varphi(x)}v$. Assim w é solução do problema:

$$(3.5) \quad \begin{cases} w_t - w_{xx} + 2\varphi'w_x + [\varphi'' - (\varphi')^2]w = 0, & x \in (0, 1), t > 0, \\ -w_x(0, t) + \varphi'(0)w(0, t) = 0, & t > 0, \\ w_x(1, t) - \{\beta[u(1, t)]^{-(\beta+1)} + \varphi'(1)\}w(1, t) = 0, & t > 0, \\ w(x, 0) = -e^{\varphi(x)}u_0''(x) \leq 0, & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Logo concluímos, pelo lema 6.0.8, que $w \geq 0$, ou seja $u_t \leq 0$. Desta forma $u(x, t)$ é uma função decrescente no tempo e portanto converge para uma função $v(x)$ que satisfaz

$$v_{xx} = 0, \text{ para } x \in (0, 1) \text{ e } v(1) = 0$$

Pela proposição 3.0.1 concluímos que v satisfaz a seguinte desigualdade:

$$(3.6) \quad v(x) \geq h(x),$$

onde $h(x) = C_1(1 - x)^{2\lambda}$. Observemos que $h'(x) = -2\lambda C_1(1 - x)^{2\lambda-1}$ e $h''(x) = 2\lambda(2\lambda - 1)C_1(1 - x)^{2\lambda-2} \leq 0$. Notemos agora que v é uma reta a qual no ponto $x = 1$ vale zero e h é uma função com concavidade voltada para baixo tal que também vale zero no ponto $x = 1$. Logo não existe v reta, onde vale zero em $x = 1$, tal que a desigualdade (3.6) é satisfeita. Logo podemos concluir que u se anula em tempo finito. \square

Já demonstradas a existência e unicidade de ponto de “quenching”, iremos fazer algumas suposições sobre o sinal das derivadas de nossa condição inicial u_0 , e então provaremos algumas estimativas da solução de (1.15), ou seja iremos, usando as referências [1] e [18],

descrever o comportamento de uma solução de (1.15) perto deste ponto de “quenching”. Os resultados já foram listados no capítulo introdução 1, iremos enunciá-los novamente provando-os.

A primeira estimativa conseguiremos através da proposição seguinte, cuja demonstração faz uso das referências [1] e [18].

Proposição 3.0.3 *Se assumirmos que $u_0'' \leq 0$, então a seguinte desigualdade é válida:*

$$u(x, t) \leq C_2(1 - x)^{2\lambda},$$

para x próximo de 1 e t próximo de T , onde C_2 é uma constante positiva dependendo apenas de β .

Prova: Notemos que $U_\mu := \mu(k_\mu - x)$, com $\mu > 0, k_\mu = 1 + \mu^{-\frac{\beta+1}{\beta}}$ satisfaz o problema com condição de fronteira abaixo:

$$(3.7) \quad \begin{cases} U_\mu'' = 0, \text{ em } (0, 1), \\ U_\mu'(1) = -U_\mu^{-\beta}(1). \end{cases}$$

Observemos que se tomarmos μ grande o suficiente, mais especificamente μ tal que satisfaz as seguintes desigualdades:

$$\mu - \mu^{-\frac{1}{\beta}} > u_0(0),$$

$$\mu^{-\frac{1}{\beta}} < u_0(1)$$

e

$$-\mu \leq \min\{u_0'(x), x \in [0, 1]\},$$

teremos então que u_0 e U_μ intersectam exatamente uma vez. De fato, as desigualdades

$$U_\mu(0) = \mu - \mu^{-\frac{1}{\beta}} > u_0$$

e

$$U_\mu(1) = \mu^{-\frac{1}{\beta}} < u_0(1)$$

implicam na existência da interseção entre U_μ e u_0 . Observemos que $-\mu \leq \min\{u'_0(x), x \in [0, 1]\}$ nos diz que a interseção é única.

Como $u(1, t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow T^-$ temos que existe um t_μ (próximo de T) tal que

$$u(1, t_\mu) = \mu^{-\frac{1}{\beta}} = U_\mu(1).$$

Daí $u(\cdot, t_\mu) - U_\mu$ tem uma raiz em $x = 1$. Notemos também que

$$u_x(1, t_\mu) = -[u(1, t_\mu)]^{-\beta} = -[\mu^{-\frac{1}{\beta}}]^{-\beta} = -\mu = U'_\mu(1),$$

ou seja $u_x(\cdot, t_\mu) - U'_\mu$ também tem $x = 1$ como raiz.

Segundo o teorema 6.0.10, temos que o número de zeros de $u(\cdot, 0) - U_\mu$ é estritamente maior que o número de zeros $u(\cdot, t) - U_\mu$, para $t > t_\mu$ e x próximo de 1.

Sabendo que $u(1, t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow T^-$, $U_\mu(1) = \mu^{-\frac{1}{\beta}} > 0$ e u e U_μ são funções contínuas teremos que

$$u(x, t) \leq U_\mu(x),$$

para x próximo de 1 e t próximo de T .

Agora notemos que a função M , definida por:

$$M(\mu) = U_\mu(x)$$

admite mínimo em $\mu_0 = \beta^{-\frac{\beta}{\beta+1}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\beta+1}}$ e $U_{\mu_0}(x) = M(\mu_0) = C_2(1-x)^{2\lambda}$, onde $C_2 = (\beta+1)\beta^{-\frac{\beta}{\beta+1}}$.

Logo

$$u(x, t) \leq C_2(1 - x)^{2\lambda},$$

para x próximo de 1 e t próximo de T .

□

Agora vamos apresentar um primeiro lema, encontrado em [18] e cuja a demonstração faz uso do lema 6.0.8, que ajudará na demonstração do teorema 3.0.8, o qual diz a respeito do perfil da solução quando $t \rightarrow T^-$.

Lema 3.0.4 *Se assumirmos que $u_0^{(i)} \leq 0$, $i = 1, \dots, 5$, então:*

$$(i) \quad (T - t)^{-\lambda} u(x, t) \geq C_3 \text{ para } x \in [0, 1] \text{ e } t \in [0, T),$$

$$(ii) \quad -(T - t)^{-\lambda + \frac{1}{2}} u_x(x, t) \leq C_4 \text{ para } x \in [0, 1] \text{ e } t \in [0, T),$$

onde C_3, C_4 são constantes positivas dependendo de β e u_0 .

Prova: Seja $v = -u_t$. Então v é solução do seguinte problema:

$$(3.8) \quad \begin{cases} v_t = v_{xx}, & x \in (0, 1), t > 0, \\ v_x(0, t) = 0, v_x(1, t) = \beta[u(1, t)]^{-(\beta+1)} v(1, t), & t > 0, \\ v(x, 0) = -u_0''(x), & x \in [0, 1] \end{cases}$$

Notemos que $v \geq 0$. De fato, para $\varepsilon > 0$ seja $\varphi(x) = 1 - \frac{x^{n(\varepsilon)}}{2}$ com $n(\varepsilon)$ suficientemente grande para que $\beta[u(1, t)]^{-(\beta+1)} + \varphi'(1) < 0$ e $w = e^{\varphi(x)}v$. Assim w é solução do problema:

$$(3.9) \quad \begin{cases} w_t - w_{xx} + 2\varphi' w_x + [\varphi'' - (\varphi')^2]w = 0, & x \in (0, 1), t \in (0, T - \varepsilon), \\ -w_x(0, t) + \varphi'(0)w(0, t) = 0, & t \in (0, T - \varepsilon), \\ w_x(1, t) - \{\beta[u(1, t)]^{-(\beta+1)} + \varphi'(1)\}w(1, t) = 0, & t \in (0, T - \varepsilon), \\ w(x, 0) = -e^{\varphi(x)}u_0''(x) \leq 0, & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Logo, pelo lema (6.0.8) temos que $w \geq 0$ em $[0, 1] \times [0, T - \varepsilon)$, para qualquer ε . Logo, $w \geq 0$ em $[0, 1] \times [0, T)$, provando assim que $v \geq 0$ em $[0, 1] \times [0, T)$.

Notemos também que as funções v_t e v_{xt} também são não-negativas. De fato, seja $w_1 = e^{\varphi(x)}v_t$ e $w_2 = e^{\varphi(x)}v_{xt}$, com φ tomada como anteriormente. Assim w_1 e w_2 são soluções dos problemas (3.10) e (3.11)

$$(3.10) \quad \begin{cases} (w_1)_t - (w_1)_{xx} + 2\varphi'(w_1)_x + [\varphi'' - (\varphi')^2]w_1 = 0, & x \in (0, 1), t \in (0, T - \varepsilon), \\ -(w_1)_x(0, t) + \varphi'(0)w_1(0, t) = 0, & t \in (0, T - \varepsilon), \\ (w_1)_x(1, t) - \{\beta[u(1, t)]^{-(\beta+1)} + \varphi'(1)\}w_1(1, t) \geq 0, & t \in (0, T - \varepsilon), \\ w_1(x, 0) = -e^{\varphi(x)}u_0^{(4)}(x) \geq 0, & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

$$(3.11) \quad \begin{cases} (w_2)_t = (w_2)_{xx} - 2\varphi'(w_2)_x - [\varphi'' - (\varphi')^2]w_2, & x \in (0, 1), t \in (0, T - \varepsilon), \\ w_2(0, t) = 0, & t \in (0, T - \varepsilon), \\ w_2(1, t) = \{\beta[u(1, t)]^{-(\beta+1)}\}w_1 + \beta(\beta + 1)e^{\varphi(1)}v^2, & t \in (0, T - \varepsilon), \\ w_2(x, 0) = -e^{\varphi(x)}u_0^{(5)}(x) \geq 0, & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Assim, pelo lema (6.0.8), temos $w_1 \geq 0$ em $[0, 1] \times [0, T)$ e $w_2 \geq 0$ em $[0, 1] \times [0, T)$ pelo princípio do máximo. Logo v_t e v_{xt} são funções não negativas em $[0, 1] \times [0, T)$.

Da condição de fronteira de (3.8) e usando integração por partes e a não-negatividade das funções v , v_t e v_{xt} temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\beta^2[u(1, t)]^{-2(\beta+1)}[v(1, t)]^2 &= \frac{1}{2}v_x^2(1, t) \\ &= \int_0^1 v_x(x, t)v_{xx}(x, t)dx \\ &= \int_0^1 v_x(x, t)v_t(x, t)dx \\ &= v(1, t)v_t(1, t) - v(0, t)v_t(1, t) - \int_0^1 v_{tx}v(x, t)dx \\ &\leq v(1, t)v_t(1, t). \end{aligned}$$

Usando novamente o fato de v ser uma função não negativa temos:

$$(3.12) \quad -u_{tt}(1, t) \geq -\frac{1}{2}\beta^2[u(1, t)]^{-2(\beta+1)}u_t(1, t)$$

Agora integrando (3.12) de 0 à t , obtemos:

$$(3.13) \quad u_t(1, t) \leq -\frac{\beta^2}{2(2\beta+1)}[u(1, t)]^{-(2\beta+1)} + \frac{\beta^2}{2(2\beta+1)}[u_0(1)]^{-(2\beta+1)} + u_0(1).$$

Como $u(1, t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow T^-$ existe um $\varepsilon > 0$ tal que

$$u_t(1, t) \leq -\frac{\beta^2 - \varepsilon}{2(2\beta+1)}u^{-(2\beta+1)}(1, t),$$

ou seja

$$[u(1, t)]^{2\beta+1}u_t(1, t) \leq -\frac{\beta^2 - \varepsilon}{2(2\beta+1)}$$

Logo para t próximo de T e integrando de t a T temos

$$u(1, t) \geq 2(\beta+1) \left[\frac{\beta^2 - \varepsilon}{2(2\beta+1)} \right]^\lambda (T-t)^\lambda.$$

Como $u_x \leq 0$ teremos que, se fixarmos t próximo de T , a função $u(x, t)$ é não-crescente em x . Daí

$$u(x, t) \geq u(1, t) \geq C_3(T-t)^\lambda,$$

para t próximo de T .

Como $u_t \leq 0$ teremos

$$u(x, t) \geq C_3(T-t)^\lambda,$$

para $x \in [0, 1]$ e $t \in [0, T)$

(ii) segue do fato que $u_{xx} = u_t \leq 0$ e do item (i). De fato

$$u_{xx} \leq 0 \Rightarrow -u_x(x, t) \leq -u_x(1, t) = u^{-\beta}(1, t) \leq C_3(T - t)^{-\lambda\beta},$$

onde $\lambda\beta = -\lambda + \frac{1}{2}$ e $C_4 = C_3^{-\beta}$.

□

A proposição seguinte, onde o lema 6.0.8 e a referência [18] ajudam na sua demonstração, além de auxiliar no conhecimento do perfil da solução de (1.15) quando $t \rightarrow T^-$, nos diz que u_t explode quando $t \rightarrow T^-$, uma vez que $1 - \lambda < 1 \Rightarrow (T - t)^{1-\lambda} \rightarrow 0$ e $u_t \leq 0$ quando $u''_0 < 0$.

Lema 3.0.5 *Se assumirmos que $u'_0 < 0$ em $[0, 1]$ e $-\frac{1}{\beta+1}(u_0^{\beta+1})'(1) \geq 1$, então:*

(i) $(T - t)^{-\lambda}u(1, t) \leq C_5$ para $t \in [0, T)$.

Se u_0 satisfaz as condições do lema (3.0.4), então Então:

(ii) $-(T - t)^{1-\lambda}u_t(x, t) \leq C_6$ para $x \in [0, 1]$ e $t \in [0, T)$,

onde C_5, C_6 são constantes positivas dependendo apenas de β .

Prova: Escolheremos uma função $\varphi \in C^2([0, 1])$ tal que

i) φ, φ' e φ'' são funções não negativas.

ii) $\varphi(0) = 0, \varphi(1) \leq 1$ e $\varphi \leq -u_0^\beta u'_0$

Um exemplo de φ é $\varphi(x) = Kx$, onde

$$K = \min\{1, \min\{-u_0^\beta(x)u'_0(x), x \in [0, 1]\}\}.$$

Definimos $J(x, t) = u_x(x, t) + \varphi(x)[u(x, t)]^{-\beta}$. Usando (i) e (ii) e as condições de fronteira de (1.15) temos

$$J(x, 0) = u'_0(x) + \varphi(x)(u_0(x))^{-\beta} \leq 0,$$

$$J(0, t) = 0$$

e

$$J(1, t) = u_x(1, t) + [u(1, t)]^{-\beta} = 0.$$

Portanto $J \leq 0$ na fronteira parabólica.

Usando o fato que $u_x \leq 0$ temos

$$\begin{aligned} J_t(x, t) - J_{xx}(x, t) &= -\beta(\beta + 1)\varphi(x)[u(x, t)]^{-(\beta+2)}[u_x(x, t)]^2 \\ &\quad + 2\beta\varphi'(x)[u(x, t)]^{-(\beta+1)}u_x(x, t) - \varphi''(x)[u(x, t)]^{-\beta} \leq 0 \end{aligned}$$

Logo, pelo princípio do máximo 6.0.6, temos que $J \leq 0$ em $[0, 1] \times [0, T)$. Como $J_x(1, t) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{J(1+h, t) - J(1, t)}{h}$ e $J(1, t) = 0$, teremos $J_x(1, t) \geq 0$ para $t \in [0, T)$. Então

$$\begin{aligned} J_x(1, t) &= u_t(1, t) - \beta\varphi(1)[u(1, t)]^{-(\beta+1)}u_x(1, t) + \varphi'(1)[u(1, t)]^{-\beta} \\ &= u_t(1, t) + \beta[u(1, t)]^{-(2\beta+1)} + \varphi'(1)[u(1, t)]^{-\beta} \geq 0. \end{aligned}$$

Assim

$$(3.14) \quad u_t(1, t) + \beta[u(1, t)]^{-(2\beta+1)} \geq -\varphi'(1)[u(1, t)]^{-\beta} \geq 0,$$

ou seja

$$u(1, t)^{2\beta+1}u_t(1, t) \geq -\beta,$$

a qual integrando de t a T obtemos

$$u(1, t) \leq C_5(T - t)^\lambda,$$

onde $C_5 = (2\beta + 2)^\lambda \beta^\lambda$

Para a parte (ii) observemos que u_{tx} satisfaz o problema (3.15)

$$(3.15) \quad \begin{cases} w_t = w_{xx}, & x \in (0, 1), t > 0, \\ w(0, t) = 0, w(1, t) = \beta[u(1, t)]^{-(\beta+1)}u_t(1, t) \leq 0, & t > 0, \\ w(x, 0) = u_0^{(3)}(x) \leq 0 & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Daí, pelo princípio do máximo 6.0.6, temos que $u_{tx} \leq 0$ em $[0, 1] \times [0, T)$. Conseqüentemente teremos que $u_t(x, t) \geq u_t(1, t)$. Assim $-(T-t)^{1-\lambda}u_t(x, t) \leq -(T-t)^{1-\lambda}u_t(1, t)$

Usando (i) do lema 3.0.4 e (3.14) obtemos

$$-(T-t)^{1-\lambda}u_t(x, t) \leq C_6,$$

onde $C_6 = \beta C_3^{-(2\beta+1)}$. □

O lema seguinte, cuja demonstração tem por base as referências [2] e [23], fornecerá uma função a qual será importante na demonstração do teorema 3.0.8, o qual permitirá sabermos o perfil exato da solução de (1.15) perto do tempo T .

Lema 3.0.6 *Existe uma única solução z_0 do problema:*

$$(3.16) \quad \begin{cases} w'' - \frac{y}{2}w' + \lambda w = 0, & y > 0, \\ w'(0) = w^{-\beta}(0), \end{cases}$$

a qual é não trivial e tem a forma

$$z_0(y) = Ky^{2\lambda}[1 + O(y^{-2})], \text{ quando } y \rightarrow +\infty,$$

onde K é constante positiva. Existe uma outra solução não trivial do problema (3.16) da forma

$$Ce^{\frac{y^2}{4}}y^{-2\lambda-1}[1 + O(y^{-2})], \text{ quando } y \rightarrow +\infty,$$

onde C é uma constante positiva.

Prova: Seja $z(r) = \sqrt{2}r^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{r}{2}}w(2r^{\frac{1}{2}})$, $r = \frac{y^2}{4}$. Fazendo alguns cálculos temos

$$z''(r) = -\sqrt{2}r^{-\frac{3}{4}}e^{-\frac{r}{2}}\lambda w(2r^{\frac{1}{2}}) - \frac{\sqrt{2}}{4}r^{-\frac{3}{4}}e^{-\frac{r}{2}}w(2r^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{4}\sqrt{2}r^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{r}{2}}w(2r^{\frac{1}{2}}) - \frac{3}{16}\sqrt{2}r^{-\frac{7}{4}}e^{-\frac{r}{2}}w(2r^{\frac{1}{2}}).$$

Escrevendo de uma forma mais simples

$$\begin{aligned} z''(r) &= \left[-\lambda - \frac{1}{4} \right] \underbrace{\sqrt{2}r^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{r}{2}}w(2r^{\frac{1}{2}})}_z \frac{1}{r} + \frac{1}{4} \underbrace{\sqrt{2}r^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{r}{2}}w(2r^{\frac{1}{2}})}_z \\ &\quad - \frac{1 - 4(-\frac{1}{4})^2}{4r^2} \underbrace{\sqrt{2}r^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{r}{2}}w(2r^{\frac{1}{2}})}_z. \end{aligned}$$

Então z satisfaz

$$(3.17) \quad z'' + \left[-\frac{1}{4} + \frac{k}{r} + \frac{1 - 4\mu^2}{4r^2} \right] z = 0,$$

onde $k = \frac{1}{4} + \lambda$ e $\mu = -\frac{1}{4}$.

Esta equação pode ser resolvida explicitamente e as soluções fundamentais são dadas pelas fórmulas:

$$z_1(r) = e^{-\frac{r}{2}}r^{\frac{1}{2}+\mu}U\left(\frac{1}{2} + \mu - k, 1 + 2\mu, r\right)$$

e

$$z_2(r) = e^{-\frac{r}{2}}r^{\frac{1}{2}+\mu}M\left(\frac{1}{2} + \mu - k, 1 + 2\mu, r\right),$$

onde

$$M(a, b, r) = 1 + \frac{ar}{b} + \frac{a(a+1)r^2}{b(b+1)2!} + \dots + \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)r^n}{b(b+1)\dots(b+n-1)n!} + \dots$$

e

$$U(a, b, r) = \frac{\pi}{\text{sen}(\pi b)} \left(\frac{M(a, b, r)}{\Gamma(1+a-b)\Gamma(b)} - r^{1-b} \frac{M(1+a-b, 2-b, r)}{\Gamma(a)\Gamma(2-b)} \right),$$

isto pode ser visto página 504 de [2]

Pela referência [2], página 504, temos que

$$M(a, b, r) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^r r^{a-b} (1 + O(r^{-1})),$$

quando $r \rightarrow \infty$.

Daí

$$w_2(y) = C e^{\frac{y^2}{4}} r^{-2\lambda-1} (1 + O(y^{-2})),$$

quando $y \rightarrow \infty$ e onde $C = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(-\lambda) 4^{-\lambda-\frac{1}{2}}}$.

Teremos também que

$$w_1(y) = \frac{1}{\sqrt{2}} U(-\lambda, \frac{1}{2}, \frac{y^2}{4}).$$

Como estamos interessados na solução de (3.16) que não cresce como $C e^{\frac{y^2}{4}} y^{-2\lambda-1}$, quando $y \rightarrow \infty$, temos que $z_0(y) = d_0 w_1(y) = d_0 U(-\lambda, \frac{1}{2}, \frac{y^2}{4})$. Pela referência [2], página 507, temos que $U'(a, b, c) = \lambda U(a+1, b+1, c)$. Daí

$$z_0'(y) = d_0 \lambda \frac{y}{2} U(-\lambda+1, 1 + \frac{1}{2}, \frac{y^2}{4}).$$

Usando a expressão de U e a condição de fronteira temos

$$d_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{1}{\lambda} \Gamma(-\lambda+1) \Gamma^\beta \left(-\lambda + \frac{1}{2} \right) \right]^{2\lambda}.$$

Notemos que $z_0'(y) = \frac{d_0 \lambda \sqrt{\pi}}{\Gamma(-\lambda+1)} = \lambda^{2\lambda+1} \Gamma^{2\lambda-1} (1-\lambda) \Gamma^{-2\lambda+1} \left(\frac{1}{2} - \lambda \right) > 0$

Da referência [2], página 505, obtemos

$$U(a, b, r) = r^{-a} [1 + O(r^{-1})], \text{ quando } r \rightarrow \infty.$$

Assim

$$z_0(y) = Ky^{2\lambda}[1 + O(y^{-2})],$$

quando $y \rightarrow \infty$ e onde $K = \frac{d_0}{4^\lambda}$. □

A seguir descreveremos uma mudança de variável, que será importante na demonstração do teorema 3.0.8.

Observação 3.0.7 *Definamos*

$$w(y, s) = (T - t)^{-\lambda}u(x, t),$$

onde

$$y = \frac{1 - x}{\sqrt{T - t}}$$

$$s = -\log(T - t).$$

Observe que quando $s \rightarrow \infty$ temos $T \rightarrow T_-$. Assim $w(y, s) = e^{s\lambda}u(1 - ye^{-\frac{s}{2}}, T - e^{-s})$, então

$$w_s = e^{s\lambda}ye^{-\frac{s}{2}}u_x(x, t) + e^{s\lambda}e^{\frac{s}{2}}u_t(x, t) + \lambda e^{s\lambda}u(x, t) = w_{yy}(y, s) - \frac{y}{2}w_y(y, s) + \lambda w(y, s),$$

isto é, w satisfaz a equação:

$$w_s = w_{yy} - \frac{y}{2}w_y + \lambda w$$

em $W = \{(y, s) : 0 \leq y \leq e^{\frac{s}{2}}, s > -\log T\}$, com condição de fronteira

$$w_y(0, s) = w^{-\beta}(0, s), w_y(e^{\frac{s}{2}}, s) = 0, s > -\log T,$$

$$w(y, -\log T) = T^{-\lambda}u_0(1 - y\sqrt{T}), 0 \leq y \leq \sqrt{T}.$$

Daí temos o seguinte problema:

$$(3.18) \quad \begin{cases} w_s - w_{yy} = -\frac{y}{2}w_y + \lambda w, & (0, e^{\frac{s}{2}}) \times (0, \sqrt{T}), \\ w_y(y, s)(0, s) = w^{-\beta}(0, s), w_y(e^{\frac{s}{2}}, s) = 0, & (-\log T, \infty), \\ w(y, -\log T) = T^{-\lambda}u_0(1 - y\sqrt{T}), & \left(0, \frac{1}{\sqrt{T}}\right). \end{cases}$$

A seguir repetimos o enunciado do teorema 3.0.8 provando-o, concluindo assim a descrição do comportamento do perfil exato de uma solução de (1.15) perto do seu ponto de “quenching”.

Teorema 3.0.8 *Se $u_0^{(i)} \leq 0$, $i = 1, \dots, 5$, então $w(y, s) \rightarrow z_0(y)$ quando $s \rightarrow \infty$ uniformemente para y em um intervalo compacto $[0, d]$, $d > 0$, onde z_0 é a mesma do lema 3.0.6*

Prova: Do lema 3.0.4, obtemos

$$(3.19) \quad w(y, s) = (T - t)^{-\lambda}u(x, t) \geq C_3.$$

Como

$$(3.20) \quad w_y(y, s) = -(T - t)^{-\lambda + \frac{1}{2}}u_x(x, t),$$

temos, pelo lema 3.0.4

$$(3.21) \quad w_y(y, s) \leq C_4.$$

Sabendo que

$$w_{yy}(y, s) = (T - s)^{1-\lambda}u_{xx}(x, t) \leq 0,$$

temos, do lema 3.0.5 e pela expansão de Taylor, que

$$(3.22) \quad w(y, s) \leq w(0, s) + w_y(0, s)y \leq C_5 + C_4y$$

Provemos agora que $w(y, s) \rightarrow w_\infty(y)$ quando $s \rightarrow \infty$ num intervalo $[0, d]$, onde w_∞ é solução (3.16). Antes disso, podemos ver que (3.19) implica que w_∞ é não-nula e (3.22) implica que w_∞ não cresce como $Ce^{\frac{y^2}{4}}y^{-2\lambda-1}$. Assim se provarmos que w_∞ é solução de (3.16) teremos que $w_\infty = z_0$.

Notemos que w é limitada, logo

$$w_j(y, s) = w(y, s + s_j)$$

é uma sequência uniformemente limitada para $y \in [0, d]$. Notemos também que w é uniformemente contínua em $[0, d]$. Daí, w_j é uma sequência equicontínua de funções. Pelo teorema de Arzelá–Ascoli, existe uma subsequência $w_j(y, s) \rightarrow w_\infty(y, s)$ uniformemente em um $[0, d]$.

Observe que $(w_j)_y = \{(w_y)_j\}$ é uniformemente limitada e como w_y é uniformemente contínua então $\{(w_y)_j\}$ é equicontínua. Pelo teorema de Arzelá–Ascoli teremos que existe uma subsequência $(w_j)_y$ convergindo uniformemente. Daí, como $w_j \rightarrow w_\infty$ em $[0, d]$, então $(w_y)_j \rightarrow (w_\infty)_y$ em $[0, d]$.

Vamos mostrar que w_∞ independe de s , isso fará com que w_∞ seja uma solução do problema (3.16). Primeiramente temos

$$w_s - w_{yy} + \frac{y}{2}w_y - \lambda w = 0.$$

Multiplicando por $p(y) = e^{-\frac{y^2}{4}}$, obtemos

$$pw_s - pw_{yy} + \frac{y}{2}pw_y - \lambda pw = 0.$$

Multiplicando por w_s temos

$$pw_s^2 - pw_{yy}w_s + \frac{y}{2}pw_yw_s - \lambda ww_s p = 0.$$

Assim,

$$\int_0^R p(y)w_s^2(y, s)dy = \int_0^R \left[p(y)w_{yy}(y, s)w_s(y, s) - yw_y(y, s)w_s(y, s) + \lambda w(y, s)w_s(y, s) \right] dy$$

$$\begin{aligned} \int_0^R p(y)w_{yy}(y, s)w_s(y, s)dy &= p(y)w_s(y, s)w_y(y, s) \Big|_0^R + \int_0^R \frac{y}{2} w_y(y, s)w_s(y, s) \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \int_0^R |w_y|^2 dy \end{aligned}$$

Definamos

$$E_R[w](s) = \int_0^R \frac{1}{2} |w_y|^2 p(y) dy - \frac{\lambda}{2} \int_0^R w^2(y, s) p(y) dy$$

Daí

$$\int_0^R p(y)w_s^2(y, s)dy - p(y)w_s(y, s)w_y(y, s) \Big|_0^R = -\frac{d}{ds} E_R[w](s)$$

$$\int_0^R w_s^2(y, s) p(y) dy = -\frac{d}{ds} E_R[w](s) + p(y)w_s(y, s)w_y(y, s) \Big|_0^R$$

Agora integrando temos

$$\int_a^b \int_0^R w_s^2(y, s) p(y) dy ds = E_R[w](a) - E_R[w](b) + \int_a^b p(y)w_s(y, s)w_y(y, s) \Big|_0^R ds$$

Fazendo $w = w_j$, $a = m$ e $b = m + s_{j+1} - s_j$ temos

$$\begin{aligned} \int_m^{m+s_{j+1}-s_j} \int_0^R (w_j)_s^2(y, s) p(y) dy ds &= E_R[w_j](m) - E_R[w_j](m + s_{j+1} - s_j) \\ &\quad + \int_m^{m+s_{j+1}-s_j} p(y)(w_j)_s(y, s)w_y(y, s) \Big|_0^R ds, \end{aligned}$$

ou seja

$$\int_m^{m+s_{j+1}-s_j} \int_0^R (w_j)_s^2(y, s) p(y) dy ds = E_R[w_j](m) - E_R[w_{j+1}](m) + \int_m^{m+s_{j+1}-s_j} p(y) (w_j)_s(y, s) w_y(y, s) \Big|_0^R ds.$$

Como $\frac{\partial w_j}{\partial y}(y, m) \rightarrow \frac{\partial w_\infty}{\partial y}(y, m)$ e $|\frac{\partial w_j}{\partial y}|$ é limitada, independente de j temos pelo teorema da convergência dominada que $E_R[w_j](m) \rightarrow E_R[w_\infty](m)$ quando $j \rightarrow \infty$.

Agora fazendo $R \rightarrow \infty$, $s_{j+1} - s_j \rightarrow \infty$ e $(w_j)_s$ converge fracamente para $(w_\infty)_s$ teremos

$$\int \int_m^M |(w_\infty)_s|^2 p dy ds = 0.$$

Como m e M são arbitrárias, $(w_\infty)_s = 0$, então $w_\infty(y, s)$ independe de s .

Observe que w_∞ resolve (3.18) e independe de s . Assim w_∞ se traduz na solução z_0 do problema (3.16).

□

Capítulo 4

Existência Global

Vimos nos capítulos anteriores que a solução de (1.15) existe até um tempo finito T . Neste capítulo estudamos a possibilidade de estender, de alguma forma, a existência de solução além desse tempo T .

Com base nas referências [1] e [15], primeiro definiremos, para cada $\varepsilon > 0$, uma sequência de funções f_ε com determinadas propriedades e depois iremos ver que a sequência de soluções u_ε do problema (1.22), descrito novamente abaixo:

$$(4.1) \quad \begin{cases} (u_\varepsilon)_t = (u_\varepsilon)_{xx}, & x \in (0, 1), t > 0, \\ (u_\varepsilon)_x(0, t) = 0, u_\varepsilon(1, t) = f_\varepsilon(u_\varepsilon(1, t)), & t > 0, \\ (u_\varepsilon)(x, 0) = u_0(x) > 0, & x \in [0, 1], \end{cases}$$

irá convergir para uma extensão da solução de (1.15), a qual satisfaz o problema abaixo:

$$(4.2) \quad \begin{cases} v_t = v_{xx}, & x \in (0, 1), t > 0, \\ v_x(0, t) = 0, & t > 0 \\ v_x(1, t) = -v^{-\beta}(1, t), & t \in (0, T), \\ v(1, t) = 0, & t > T, \\ v(x, 0) = u_0(x), & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

e esta coincide com a solução u do problema de valor inicial e de fronteira (1.15), para $t \leq T$. E assim teremos uma extensão que vai além do tempo de T , fechando assim o objetivo do capítulo.

Agora definimos a tal sequência f_ε . Seja $f_\varepsilon(s) = -\frac{s}{(s+\varepsilon)^{\beta+1}}$. Notemos que f_ε tem as seguintes propriedades

$$f_\varepsilon(0) = 0$$

e

$$-s^{-\beta} \leq f_{\varepsilon_1} \leq f_{\varepsilon_2},$$

para $s > 0$ e $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$.

Há três lemas que demonstram o fato de se poder estender a solução de (1.15) além de T .

Este primeiro lema nos diz sobre existência global das soluções de (1.22) e as compara com a solução u do problema (1.15).

Lema 4.0.9 *Assumamos que $0 < \varepsilon < u_0(1)$. Então existe uma única solução u_ε em $[0, 1] \times [0, \infty)$ do problema (1.22) tal que $u_\varepsilon \in \mathcal{C}_1^2([0, 1] \times [0, \tau])$, para qualquer τ e*

(i) $u_\varepsilon > 0$, para $(x, t) \in [0, 1] \times [0, \infty)$,

(ii) $u_{\varepsilon_1} \leq u_{\varepsilon_2}$, para $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ em $[0, 1] \times [0, \infty)$,

(iii) $u_\varepsilon \geq u$, para $(x, t) \in [0, 1] \times [0, T]$, onde u é solução do problema (1.15).

Prova:

(i) Se $u_\varepsilon(x_0, t_0) = 0$, para algum (x_0, t_0) . Podemos assumir sem perda de generalidade que $u_\varepsilon > 0$, para $t < t_0$ (isto porque $u_\varepsilon(x, 0) = u_0(x) > 0$ e u_ε é contínua).

Notemos que se $x_0 \in (0, 1)$ teremos uma contradição com o princípio do máximo 6.0.6, pois o mínimo ocorre na fronteira parabólica segundo o princípio do máximo 6.0.6.

Notemos também que se $x_0 = 0$. Pelo lema de Hopf 6.0.7 teremos que $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu}(0, t_0) < 0$, que é uma contradição, já que as condições de fronteira nos fornecem $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu}(0, t_0) = f_\varepsilon(u_\varepsilon(0, t_0)) = f_\varepsilon(0) = 0$.

Notemos ainda que se $x_0 = 1$. Analogamente, pelo lema de Hopf teremos $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu}(1, t_0) < 0$, o que contradiz o fato de que $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu}(1, t_0) = f_\varepsilon(u_\varepsilon(1, t_0)) = f_\varepsilon(0) = 0$.

Logo, para todo $x_0 \in [0, 1]$, temos uma contradição e assim podemos concluir que $u_\varepsilon > 0$ em $[0, 1] \times [0, \infty)$.

(ii) Definimos $w = u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}$, onde $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$. Então w satisfaz

$$(4.3) \quad \begin{cases} w_t = w_{xx}, & x \in (0, 1), t > 0, \\ w_x(0, t) = 0, w_x(1, t) = f_{\varepsilon_1}(u_{\varepsilon_1}(1, t)) - f_{\varepsilon_2}(u_{\varepsilon_2}(1, t)), & t > 0, \\ w(x, 0) = 0, & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Notemos que $w_x(1, t) = f_{\varepsilon_1}(u_{\varepsilon_1}(1, t)) - f_{\varepsilon_1}(u_{\varepsilon_2}(1, t)) + f_{\varepsilon_1}(u_{\varepsilon_2}(1, t)) - f_{\varepsilon_2}(u_{\varepsilon_2}(1, t))$. Usando o fato que f_ε é não-crescente em ε obtemos

$$w_x(1, t) \leq f_{\varepsilon_1}(u_{\varepsilon_1}(1, t)) - f_{\varepsilon_1}(u_{\varepsilon_2}(1, t)).$$

Usando o teorema do valor médio

$$w_x(1, t) \leq f'_{\varepsilon_1}(\theta(1, t))w(1, t),$$

para algum $\theta(1, t)$ entre $u_{\varepsilon_1}(1, t)$ e $u_{\varepsilon_2}(1, t)$.

Definimos $z = e^{\varphi(x)}w$, com $\varphi \in \mathcal{C}^2((0, 1))$. Notemos que z é solução de

$$(4.4) \quad \begin{cases} z_t - z_{xx} + 2\varphi_x z_x + \left[\varphi_{xx} - (\varphi_x)^2 - \varphi_t \right] z = 0, & x \in (0, 1), t > 0, \\ -z_x(0, t) + \varphi_x(0, t)z(0, t) = 0, & t > 0, \\ z_x(1, t) - \left[f'_{\varepsilon_1}(\theta(1, t)) + \varphi_x(1, t) \right] z(1, t) \leq 0, & t > 0, \\ z(x, 0) = e^{\varphi(x, 0)}w(x, 0) = 0, & x \in [0, 1], \end{cases}$$

Tomando φ tal que $\varphi_x(0, t) > 0$ e $\varphi_x(1, t) \leq -f'_{\varepsilon_1}(\theta(1, t))$. Podemos usar o lema (6.0.8) para z e concluir que $z \leq 0$. E assim, $w \leq 0$, isto é $u_{\varepsilon_1} \leq u_{\varepsilon_2}$.

(iii) Definimos $w = u - u_\varepsilon$. Então v satisfaz

$$(4.5) \quad \begin{cases} w_t = v_{xx}, & x \in (0, 1), t > 0, \\ w_x(0, t) = 0, w_x(1, t) = f(u(1, t)) - f_\varepsilon(u_\varepsilon(1, t)), & t > 0, \\ w(x, 0) = 0, & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Notemos que

$$w_x(1, t) = f(u(1, t)) - f_\varepsilon(u(1, t)) + f_\varepsilon(u(1, t)) - f_\varepsilon(u_\varepsilon(1, t))$$

Usando o fato que as f_ε são não crescente com relação a ε teremos

$$w_x(1, t) \leq f_\varepsilon(u(1, t)) - f_\varepsilon(u_\varepsilon(1, t)).$$

Usando o teorema do valor médio

$$w_x(1, t) \leq f'_\varepsilon(\xi(1, t))w(1, t),$$

para algum $\xi(1, t)$ entre $u(1, t)$ e $u_\varepsilon(1, t)$.

Definimos $y = e^{\varphi(x,t)}w$. Analogamente obtemos $y \leq 0$, então $w \leq 0$, ou seja $u \leq u_\varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$.

□

Como u_ε é uma sequência monótona e que u_ε satisfaz uma equação integral do mesmo tipo da equação integral (6.1) de u solução de (1.15), pelo teorema da convergência monótona temos a convergência de u_ε quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Então existe uma função $v(x, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(x, t)$, a qual pelo lema anterior satisfaz $0 \leq v \leq K = \max\{u_0(x), x \in [0, 1]\}$. Pela teoria da regularidade de equações parabólicas aplicada a essa equação integral, como em [13], temos $v \in \mathcal{C}_1^2((0, 1) \times (0, \infty))$. Pelo teorema de Dini 6.0.9 temos que u_ε converge uniformemente

para v , assim v satisfaz a equação do calor em $(0, 1) \times (0, \infty)$. Também podemos ver que $v_x(0, t) = 0$, pois $(u_\varepsilon)_x(0, t) = 0$.

Agora vamos provar, usando [15], que v satisfaz uma outra condição de fronteira, através do seguinte lema:

Lema 4.0.10 *Se $t \in (0, T)$, então $v_x(1, t) = -[v(1, t)]^{-\beta}$.*

Prova:

Escolhemos $t_0 \in (t, T)$. Então existe $\delta, K > 0$ tal que $\delta \leq u_\varepsilon \leq K$ em $[0, 1] \times [0, t_0]$.

De fato

$$u_\varepsilon \leq K = \max\{u_0(x), x \in [0, 1]\}$$

$$\delta = \min\{u(x, t), x \in [0, 1] \text{ e } t \in [0, t_0]\} \leq u_\varepsilon.$$

Observemos que K e δ independem de ε . Mostramos agora que $((u_\varepsilon)_x)$ é uma sequência não decrescente em ε , para ε 's pequenos.

Seja $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ e $z = (u_{\varepsilon_1})_x - (u_{\varepsilon_2})_x$. Notemos que

$$(4.6) \quad \begin{cases} z_t = z_{xx}, & x \in (0, 1), t > 0, \\ z(0, t) = 0, z(1, t) = -f'_{\varepsilon_1}(u_{\varepsilon_1}(1, t)) + f_{\varepsilon_2}(u_{\varepsilon_2}(1, t)) \leq 0, & t > 0, \\ z(x, 0) = 0, & x \in [0, 1], \end{cases}$$

Usando o fato que f_ε é não crescente em ε e o Teorema do Valor Médio, temos

$$\begin{aligned} z(1, t) &= -f_{\varepsilon_1}(u_{\varepsilon_1}(1, t)) + f_{\varepsilon_2}(u_{\varepsilon_2}(1, t)) + f_{\varepsilon_1}(u_{\varepsilon_2}(1, t)) - f_{\varepsilon_1}(u_{\varepsilon_2}(1, t)) \\ &= f_{\varepsilon_1}(u_{\varepsilon_2}(1, t)) - f_{\varepsilon_1}(u_{\varepsilon_1}(1, t)) + f_{\varepsilon_2}(u_{\varepsilon_2}(1, t)) - f_{\varepsilon_1}(u_{\varepsilon_1}(1, t)) \\ &\geq f_{\varepsilon_1}(u_{\varepsilon_2}(1, t)) - f_{\varepsilon_1}(u_{\varepsilon_1}(1, t)) = f'_{\varepsilon_1}(\theta(1, t)), \end{aligned}$$

para algum $\theta(1, t)$ entre $u_{\varepsilon_1}(1, t)$ e $u_{\varepsilon_2}(1, t)$.

Observemos que $f'_\varepsilon(s) = \frac{-(s+\varepsilon)^{\beta+1} + s(\beta+1)(s+\varepsilon)^\beta}{(s+\varepsilon)^{2(\beta+1)}}$ e que para ε pequeno temos $f'_\varepsilon(s) > 0$. Assim $z(1, t) \geq 0$ e então pelo princípio do máximo teremos $(u_{\varepsilon_1})_x \geq (u_{\varepsilon_2})_x$ e então existe. Daí existe C , independente de ε tal que $|(u_\varepsilon)_x| \leq C$. Usando o teorema 13.16, encontrado na referência [28], existe $\alpha = \alpha(\delta, K, C, \beta)$ tal que a norma $\mathcal{C}^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}([0, 1] \times [0, t_0])$ de $(u_\varepsilon)_x$ é uniformemente limitada em ε . Dessa forma, como $(u_\varepsilon)_x \rightarrow v_x(1, t)$, temos que $(u_\varepsilon)_x(1, t) \rightarrow v_x(1, t)$ e como f_ε é contínua obtemos

$$v_x(1, t) = -v^{-\beta}(1, t).$$

□

Segue do lema 4.0.10 que v é solução do problema (1.15). Mostremos que $v = u$ em $[0, 1] \times [0, T)$. Com efeito, seja $\zeta = v - u$, então ζ satisfaz:

$$(4.7) \quad \begin{cases} \zeta_t = \zeta_{xx}, & x \in (0, 1), t \in (0, T], \\ \zeta_x(0, t) = 0, \zeta_x(1, t) = f(v(1, t)) - f(u(1, t)), & t \in (0, T], \\ \zeta(x, 0) = 0, & x \in [0, 1], \end{cases}$$

onde $f(s) = -s^{-\beta}$. Notemos que $\zeta_x(1, t) = f(v(1, t)) - f(u(1, t))$. Assim pelo Teorema do Valor Médio temos que $\zeta_x(1, t) = f'(\sigma(1, t))w$, para $t \in (0, T)$ e algum $\sigma(1, t)$ entre $u(1, t)$ e $v(1, t)$. Observe que σ não se anula, pois $v(1, t) \geq u(1, t) > 0$ para $t \in (0, T)$. Logo, usando o mesmo raciocínio usando na demonstração do fato que $u_{\varepsilon_1} \leq u_{\varepsilon_2}$ no lema 4.0.9, concluímos que $\zeta \leq 0$, ou seja que $v \leq u$. Como tínhamos por este mesmo lema 4.0.9 que $v \geq u$, concluímos que $v = u$ em $[0, 1] \times [0, T]$.

Outro lema adicional, encontrado em [15], que diz que a extensão de u é nula no ponto de “quenching” e em qualquer tempo maior que o tempo de T .

Lema 4.0.11 $v(1, t) = 0$, para $t \geq T$.

Prova: Notemos que a função $U(x) = \mu^{-\beta}(1-x) + \mu$ satisfaz $U'' = 0, U'(1) = -[U(1)]^{-\beta}, U(1) = \mu$. Escolhemos $\mu < u_0(1)$ e tal que $-\mu^{-\beta} < \min\{u'_0(x), x \in [0, 1]\}$ e $\mu^{-\beta} > u_0(0)$. Observe-mos que $u_0(0) < \mu^{-\beta} \leq \mu + \mu^{-\beta} = U(0)$ e $u_0(1) > \mu = U(1)$. Assim $(u_0 - U)(0) < 0$ e

$(u_0 - U)(1)$. Logo, pelo teorema do valor intermediário, existe pelo menos uma interseção entre U e u_0 .

Como $-\mu u^{-\beta} < u'_0(x)$ para todo $x \in [0, 1]$, então U e u_0 interceptam exatamente em um ponto e temos que $u_\varepsilon(1, t) \rightarrow 0$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$ e $t \rightarrow T$, então existe t_0 tal que $u_\varepsilon(1, t_0) = \mu = U(1)$. Notemos também que $(u_\varepsilon)_x(1, t_0) = -[u_\varepsilon(1, t_0)]^{-\beta} = -\mu^{-\beta} = U'(1)$.

Daí $(1, t_0)$ satisfaz a hipótese do teorema 6.0.10 e então o número de zeros de $u(., t) - U$ é estritamente maior do que o número de zeros de $u(., 0) - U$, para $t > t_0$. Logo temos $u_\varepsilon(1, t) < \mu$, para $t \geq t_0$. Como ε e μ são arbitrariamente pequenos, obteremos:

$$v(1, t) = 0,$$

para $t \geq T$.

□

Destes lemas podemos concluir o teorema 4.0.12, enunciado novamente abaixo. Assim, estendemos a solução de (1.15) para além do tempo de “quenching”.

Teorema 4.0.12 *A função $v = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon$ satisfaz (1.22) e coincide como a solução de (1.15) u para $t \leq T$.*

Capítulo 5

Visualização Computacional

Este capítulo será dedicado a dar uma aproximação visual da solução do problema (1.15). Além disso, como a solução existe até um determinado tempo finito T , obteremos algumas estimativas para este tempo de “quenching” e como a solução numérica se apresenta próximo desse tempo.

Primeiramente iremos estimar o tempo de “quenching” através de resultados que obtivemos no capítulo 3. Observemos, pelo lema 3.0.5 item (i), que:

$$T - t \geq \frac{[u(1, t)]^{\frac{1}{\lambda}}}{2\beta(\beta + 1)}.$$

Assim, fazendo $t \rightarrow 0$ temos a estimativa:

$$(5.1) \quad T \geq \frac{[u_0(1)]^{\frac{1}{\lambda}}}{2\beta(\beta + 1)}.$$

Usando o software matemático Maple, iremos aproximar o problema (1.15) pelo problema (1.22) e então resolver numericamente, dando valores a β , a u_0 e ε .

```

> g(x):=coloque um valor para g;

> e:=coloque um valor para e;

> b:=coloque um valor para b;

> pde1:=diff(u(x,t),t)-diff(u(x,t),x$2)= 0;

> ibc1:={u(x,0) = g(x), D[1](u)(0,t) = 0,(e+u(1,t))^(b+1)*D[1](u)(1,t) = -u(1,t)};

> pds1:=pdsolve(pde1,ibc1,numeric);

> pds1:-plot3d(x=primeiro numero..segundo numero,t=primeiro numero..segundo numero);
> pds1:-plot(x=1,t=primeiro numero..segundo numero)

```

Em todos os casos abaixo temos $u_0 = -x^{10} + \frac{3}{2}$.

5.1 Caso $\beta = 4$ e $\varepsilon = 0,5$

A desigualdade (5.1) afirma que

$$(5.2) \quad T \geq 0,024.$$

Esboçaremos graficamente três representações:

A primeira figura 5.1 descreve o comportamento de u_ε antes do tempo de “quenching”, estimado pela desigualdade (5.2).

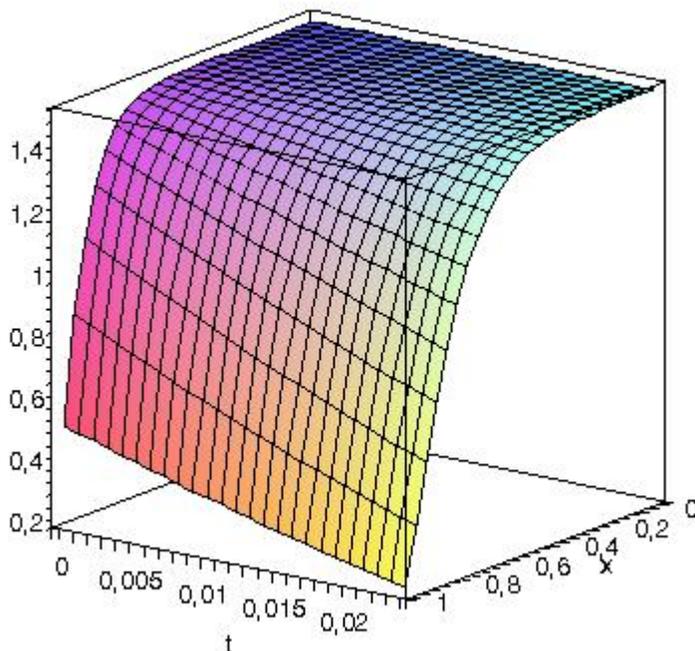


Figura 5.1: u_ε antes do tempo de “quenching” para $\beta = 4$, $\varepsilon = 0,5$ e $u_0 = -x^{10} + \frac{3}{2}$.

A segunda figura 5.2 mostra o comportamento da solução u_ε para tempos um pouco além da cota inferior para T , tempo de “quenching”.

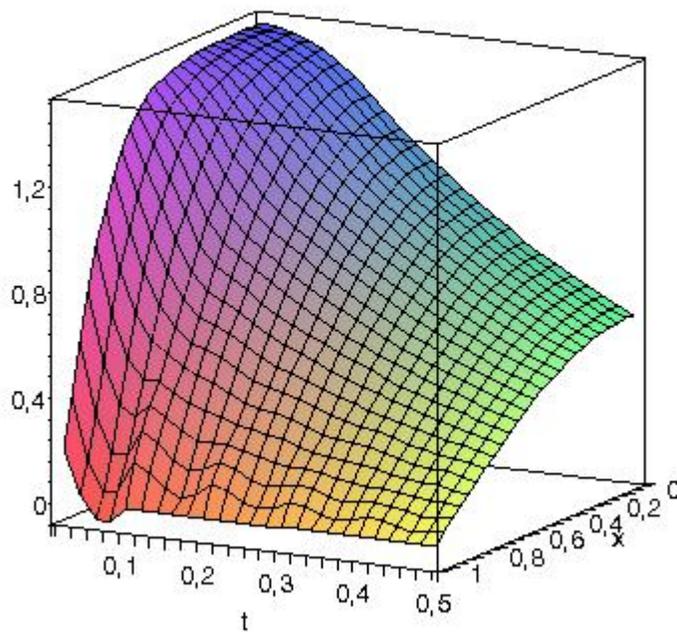


Figura 5.2: u_ε para tempos posteriores à cota inferior de T , $\beta = 4$, $\varepsilon = 0,5$ e $u_0 = -x^{10} + \frac{3}{2}$.

A terceira figura 5.3 representa o comportamento do corte $x = 1$ de u_ε para tempos anteriores e posteriores à cota inferior de T .

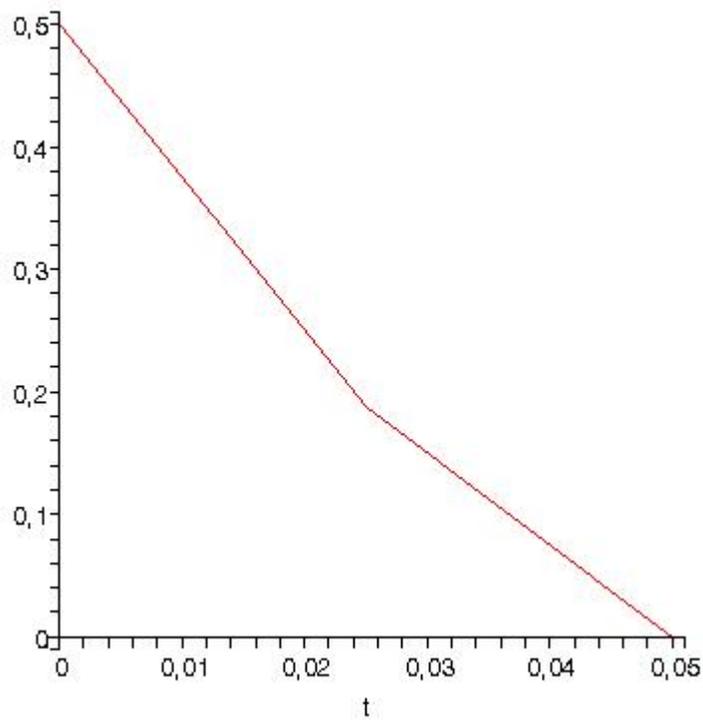


Figura 5.3: corte $x = 1$ de u_ε para tempos anteriores e posteriores à cota inferior de T , $\beta = 4$, $\varepsilon = 0,5$ e $u_0 = -x^{10} + \frac{3}{2}$

5.2 Caso $\beta = 4$ e $\varepsilon = 0,1$

A desigualdade (5.1) afirma que:

$$(5.3) \quad T \geq 0,024.$$

Esboçaremos graficamente para $\varepsilon = 0,1$, usando o software Maple, outros três gráficos:

O primeiro gráfico 5.4 descreve o comportamento de u_ε antes do tempo de “quenching”, estimado pela desigualdade (5.3).

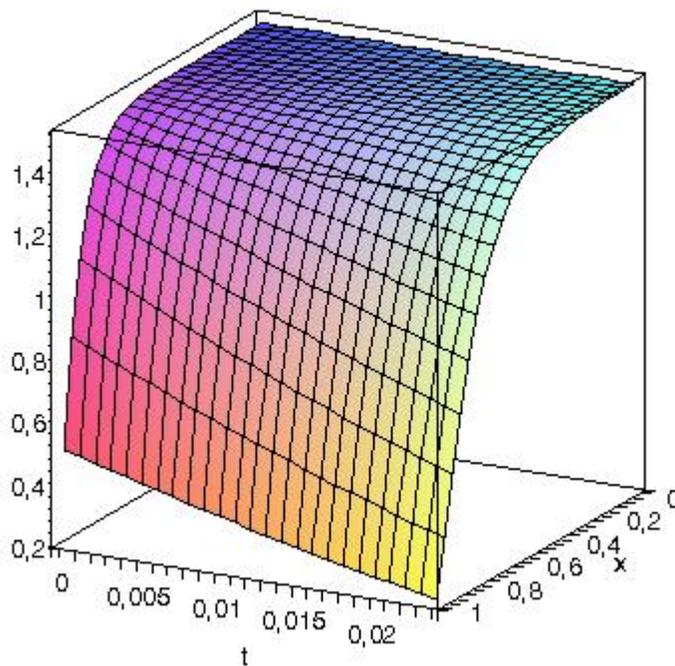


Figura 5.4: u_ε antes do tempo de “quenching” para $\beta = 4$, $\varepsilon = 0,1$ e $u_0 = -x^{10} + \frac{3}{2}$.

O segundo gráfico 5.5 mostra o comportamento de u_ε para tempos um pouco além da cota inferior para T , tempo de “quenching”.

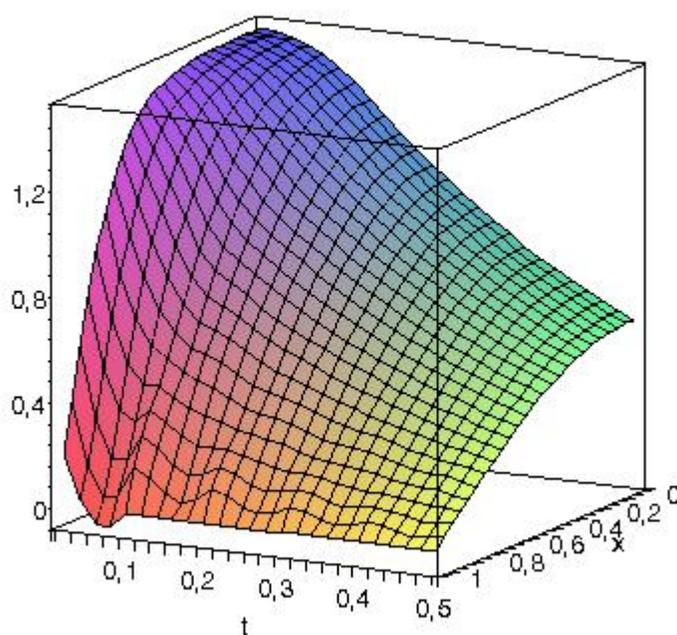


Figura 5.5: u_ε para tempos posteriores à cota inferior de T , $\beta = 4$, $\varepsilon = 0,1$ e $u_0 = -x^{10} + \frac{3}{2}$.

Já o terceiro gráfico 5.6 representa o comportamento do corte $x = 1$ de u_ε para tempos posteriores à cota inferior de T .

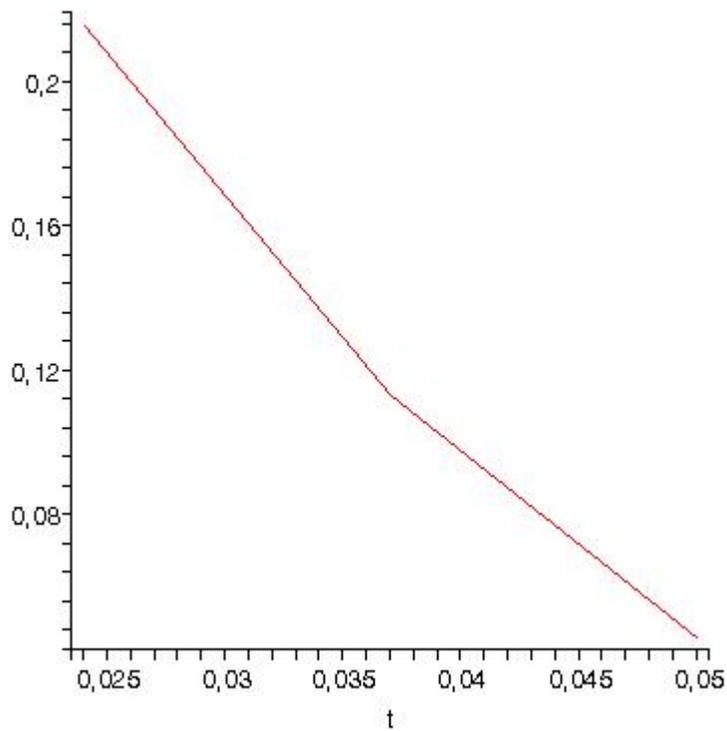


Figura 5.6: corte $x = 1$ de u_ε para tempos posteriores à cota inferior de T , $\beta = 4$, $\varepsilon = 0,1$ e $u_0 = -x^{10} + \frac{3}{2}$

5.3 Caso $\beta = 1$ e $\varepsilon = 0,5$

A desigualdade (5.1) afirma que

$$(5.4) \quad T \geq 0,24.$$

Esboçaremos graficamente três representações:

A primeira figura 5.7 descreve o comportamento de u_ε antes do tempo de “quenching”, estimado pela desigualdade (5.4).

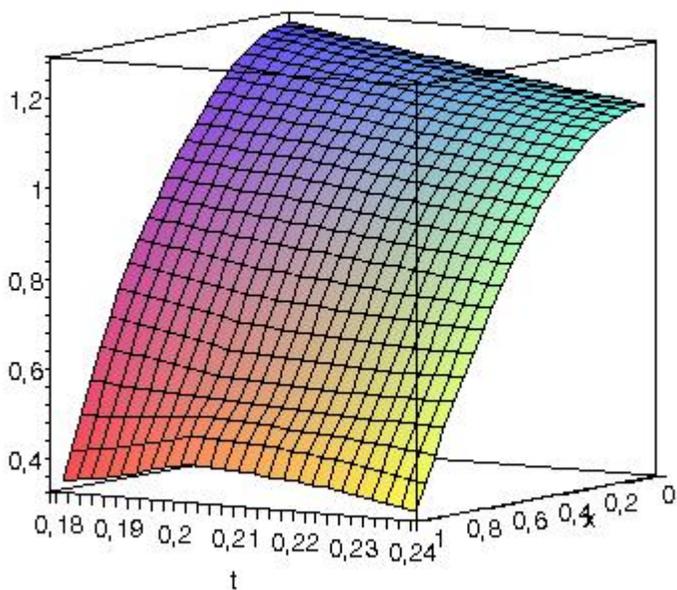


Figura 5.7: u_ε antes do tempo de “quenching” para $\beta = 1$, $\varepsilon = 0,5$ e $u_0 = -x^{10} + \frac{3}{2}$.

A segunda figura 5.8 mostra o comportamento da solução u_ε para tempos um pouco além da cota inferior para T , tempo de “quenching”.

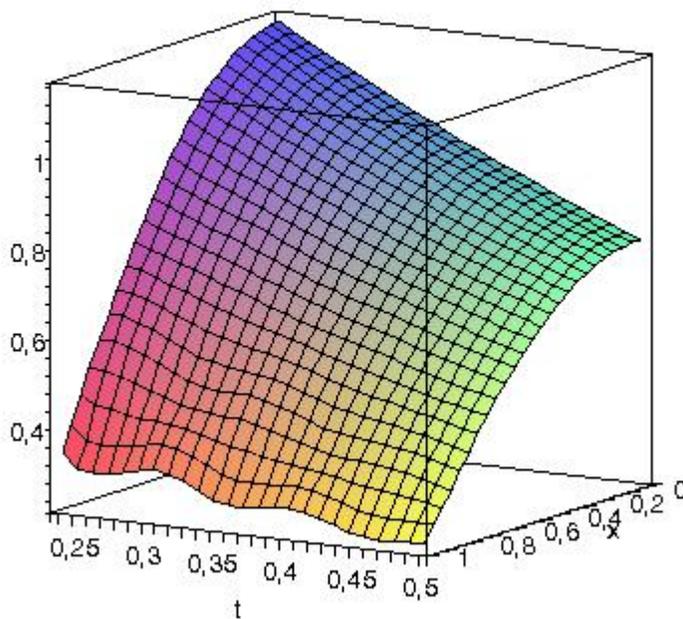


Figura 5.8: u_ε para tempos posteriores à cota inferior de T , $\beta = 1$, $\varepsilon = 0,5$ e $u_0 = -x^{10} + \frac{3}{2}$.

A terceira figura 5.9 representa o comportamento do corte $x = 1$ de u_ε para tempos anteriores e posteriores à cota inferior de T .

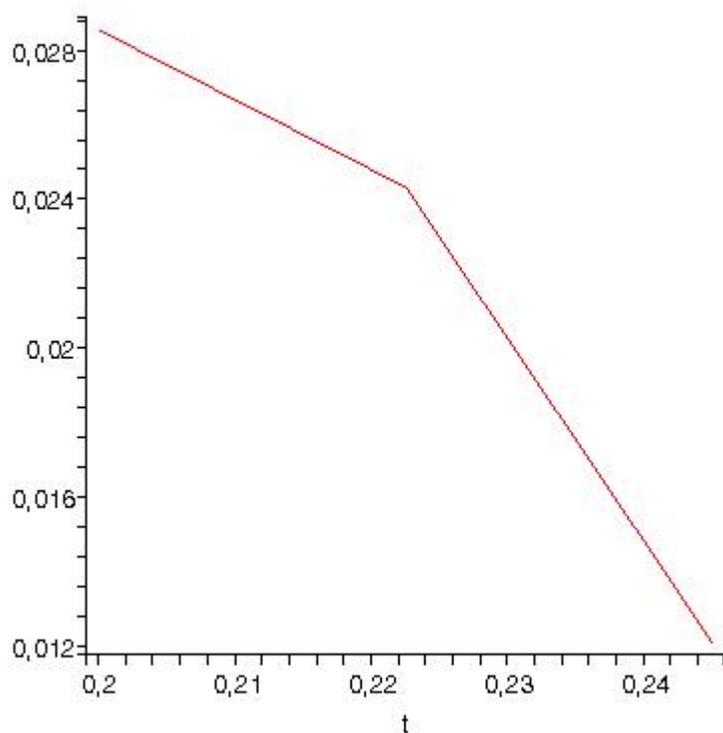


Figura 5.9: corte $x = 1$ de u_ε para tempos anteriores e posteriores à cota inferior de T , $\beta = 1$, $\varepsilon = 0,5$ e $u_0 = -x^{10} + \frac{3}{2}$

5.4 Caso $\beta = 1$ e $\varepsilon = 0,1$

A desigualdade (5.1) afirma que:

$$(5.5) \quad T \geq 0,24.$$

Esboçaremos graficamente, usando o software Maple, outros três gráficos:

O primeiro gráfico 5.10 descreve o comportamento de u_ε antes do tempo de “quenching”, estimado pela desigualdade (5.5).

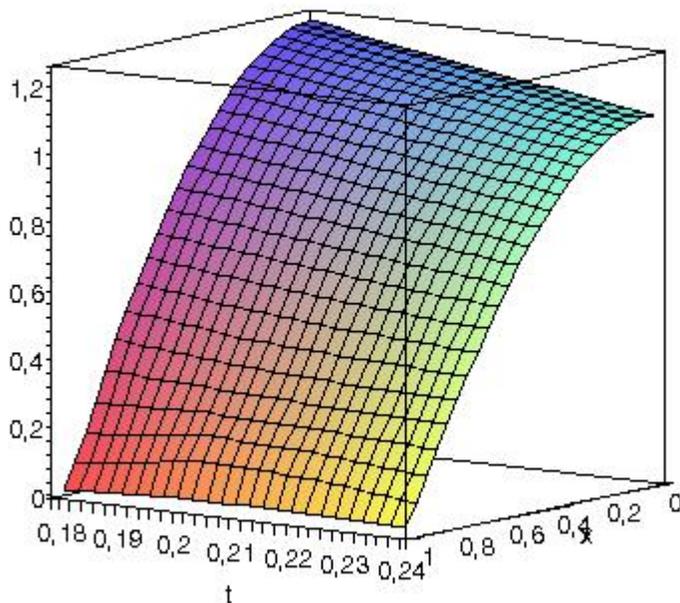


Figura 5.10: u_ε antes do tempo de “quenching” para $\beta = 1$, $\varepsilon = 0,1$ e $u_0 = -x^{10} + \frac{3}{2}$.

O segundo gráfico 5.11 mostra o comportamento de u_ε para tempos anteriores e tempos um pouco além da cota inferior para T , tempo de “quenching”.

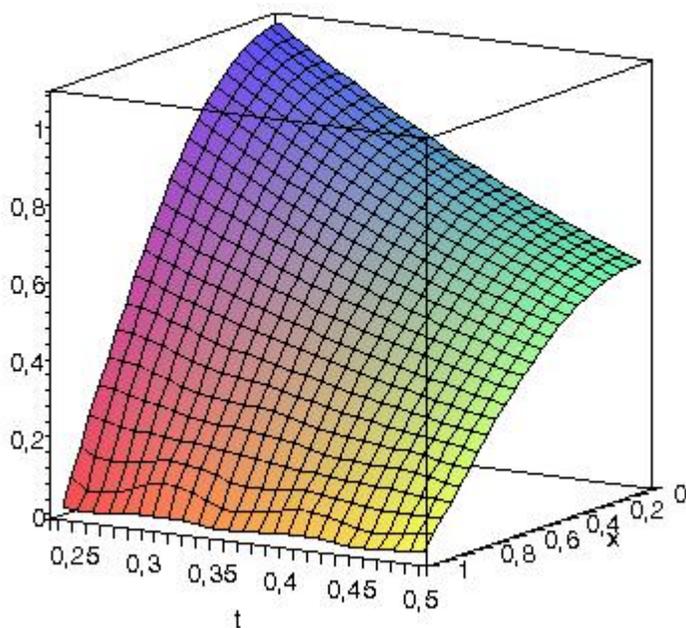


Figura 5.11: u_ε para tempos anteriores e posteriores à cota inferior de T , $\beta = 1$, $\varepsilon = 0,1$ e $u_0 = -x^{10} + \frac{3}{2}$.

Já o terceiro gráfico 5.12 representa o comportamento do corte $x = 1$ de u_ε para tempos anteriores e posteriores a cota inferior de T .

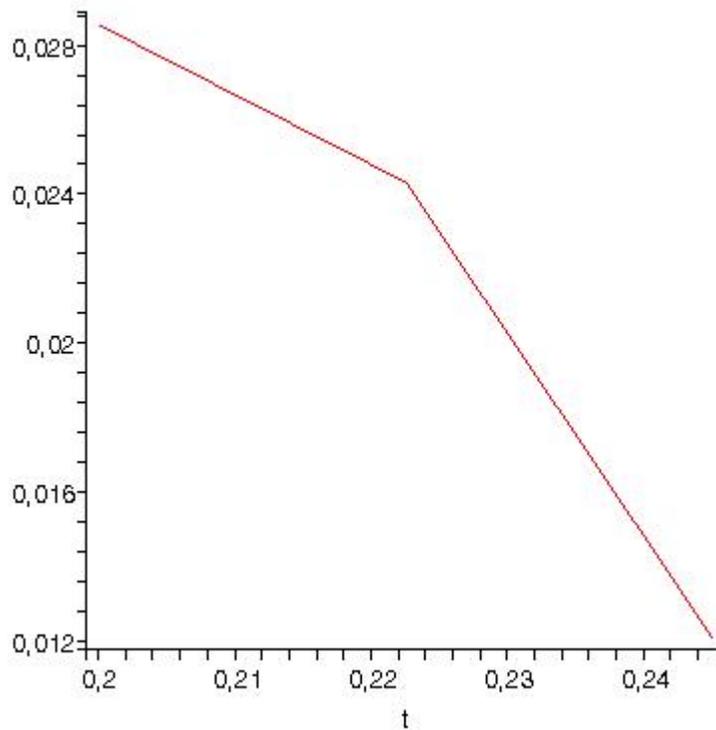


Figura 5.12: corte $x = 1$ de u_ε para tempos anteriores e posteriores à cota inferior de T , $\beta = 1$, $\varepsilon = 0,1$ e $u_0 = -x^{10} + \frac{3}{2}$

5.5 Análise dos Gráficos

Para finalizar este capítulo faremos uma análise dos gráficos. Na tabela abaixo relacionamos a cota inferior para o tempo de “quenching”, com o tempo de “quenching” aproximado que obtivemos através das figuras 5.3, 5.6, 5.9 e 5.12.

Caso	Cota inferior para T	Tempo de “quenching” aproximado
$\beta = 4$ e $\varepsilon = 0,05$	0,024	0,05
$\beta = 4$ e $\varepsilon = 0,1$	0,024	0,05
$\beta = 1$ e $\varepsilon = 0,05$	0,24	0,246
$\beta = 1$ e $\varepsilon = 0,1$	0,24	0,246

Concluimos que nos casos em que $\beta = 4$ a cota inferior de T , dada pela desigualdade (5.1), está longe do tempo de “quenching” aproximado. Já nos casos em que $\beta = 1$ temos uma aproximação melhor do tempo de “quenching” comparado à cota inferior de T .

Capítulo 6

Apêndice

Este apêndice apresenta resultados importantes para o desenvolvimento dos capítulos anteriores decidimos coloca-los separadamente por questões de estética do texto. Primeiramente vamos apresentar resultados os quais são importantes para se mostrar a existência de solução para o capítulo 2. Para se mostrar, no capítulo 2, a existência de uma sequência de sub-solução e outra de supersolução, os teoremas a seguir encontrados nas referências [13] e [29] são necessários:

Teorema 6.0.1 *Para quaisquer funções contínuas g e β_0 em $\partial\Omega \times (0, T]$ e u_0 em $\bar{\Omega}$, as quais satisfazem $\beta_0(x, 0)u_0(x) = g(x, 0)$ em Ω o problema:*

$$\begin{cases} u_t(x, t) = L(u(x, t)), & \Omega \times (0, T], \\ \beta_0(x, t)u(x, t) = g(x, t), & \partial\Omega \times (0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), & \bar{\Omega}, \end{cases}$$

onde $L(u(x, t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_i}(x, t)$ tem uma solução única em $\mathcal{C}_1^2(\Omega \times (0, T))$.

Teorema 6.0.2 *Para quaisquer funções contínuas g e β_0 em $\partial\Omega \times (0, T]$, e u_0 em $\bar{\Omega}$. O problema de valor inicial e de fronteira:*

$$\begin{cases} u_t(x, t) = L(u(x, t)), & \Omega \times (0, T], \\ \alpha_0(x, t) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) + \beta_0(x, t)u(x, t) = g(x, t), & \partial\Omega \times (0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), & \bar{\Omega}, \end{cases}$$

onde $L(u(x, t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_i}(x, t)$ e α_0 e β_0 funções contínuas, tem uma única solução. Mais ainda, u pode ser representada pela fórmula:

$$(6.1) \quad u(x, t) = \int_{\Omega} \Gamma(x, t, \xi, 0)u_0(\xi)d\xi + \int_0^t \int_{\partial\Omega} \Gamma(x, t, \xi, \tau)\psi(\xi, \tau)d\xi d\tau,$$

onde ψ é uma função contínua e é solução da equação integral

$$(6.2) \quad \psi(x, t) = 2 \int_0^t \int_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x, t, \xi, \tau) + \beta_0(x, t)\Gamma(x, t, \xi, \tau) \right] \psi(\xi, \tau)d\xi d\tau + 2H(x, t),$$

onde

$$H(x, t) = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x, t, \xi, 0) + \beta_0(x, t)\Gamma(x, t, \xi, 0) \right] u_0(\xi)d\xi - g(x, t).$$

Aqui, Γ é a solução fundamental da equação do calor dada pela expressão:

$$\Gamma(x, t, \xi, \tau) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^n} \frac{1}{(t - \tau)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\sum (x_i - \xi_i)^2}{4(t - \tau)}}.$$

Prova: Como a prova desse teorema é uma tanto extensa e pode ser encontrada na referência [13] faremos aqui um resumo da demonstração.

Considere a função

$$H(x, t) = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x, t, \xi, 0) + \beta_0(x, t)\Gamma(x, t, \xi, 0) \right] u_0(\xi)d\xi - g(x, t),$$

em $\partial\Omega \times (0, T]$.

Notemos que H é contínua pois g e β_0 o são, e vale as seguintes desigualdades:

$$|\Gamma(x, t, \xi, \tau)| \leq \frac{K}{(t - \tau)^\nu} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2\nu}},$$

K é constante positiva e $0 < \nu < 1$, e

$$\left| \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x, t, \xi, \tau) \right| \leq \frac{K}{(t - \tau)^\mu} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2\mu}},$$

onde $0 < \mu < 1$.

Usando o lema (6.0.3), apresentado a seguir, existe ψ , uma função contínua, tal que resolve a equação integral (6.2).

Para provarmos que de fato u , dada pela expressão (6.1), é solução do problema (1.20) observemos:

O fato da solução fundamental $\Gamma(x, t, \xi, \tau)$ satisfazer $\Gamma_t(x, t, \xi, \tau) = L(\Gamma(x, t, \xi, \tau))$, para (ξ, τ) fixados, implica que $u_t(x, t) = L(u(x, t))$. Pelo teorema 6.0.4, enunciado abaixo, temos $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) = g(x, t)$. E o fato de que $\lim_{t \rightarrow \tau} \int_{\Omega} \Gamma(x, t, \xi, \tau) u_0(\xi) = u_0(x)$ implica que $u(x, 0) = u_0(x)$. \square

Vejam que no próprio enunciado do teorema a solução de (1.20) depende da solução de uma equação integral de Volterra. A solução dessa equação integral de Volterra é confirmada no lema (6.0.3), o qual pode ser encontrado em [13] e [27].

Lema 6.0.3 *Dada quaisquer funções contínuas H e β_0 em $\partial\Omega \times (0, T)$. A equação integral*

$$\psi(x, t) = 2 \int_0^t \int_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x, t, \xi, 0) + \beta_0 \Gamma(x, t, \xi, \tau) \right] \psi(\xi, \tau) d\xi d\tau + 2H(x, t),$$

onde

$$H(x, t) = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x, t, \xi, 0) + \beta_0(x, t) \Gamma(x, t, \xi, 0) \right] u_0(\xi) d\xi - g(x, t),$$

tem uma única solução contínua ψ dada por:

$$\psi(x, t) = 2H(x, t) + 2 \int_0^t \int_{\partial\Omega} \left[\sum_{j=1}^{\infty} Q_j(x, t, \xi, \tau) \right] H(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

onde

$$Q_{j+1}(x, t, \xi, \tau) = \int_0^t \int_{\partial\Omega} Q(x, t, y, s) Q_j(y, s, \xi, \tau) dy ds$$

e

$$Q_1(x, t, \xi, \tau) = Q(x, t, \xi, \tau) = 2 \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x, t, \xi, \tau) + 2\beta_0(x, t) \Gamma(x, t, \xi, \tau).$$

Mais ainda existe um inteiro $j_0 \geq 0$ tal que $\forall j > j_0$ e $\forall (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T]$ a função $Q_j(x, t, \xi, \tau)$ é contínua em $(\xi, \tau) \in \partial\Omega \times (0, T]$ e a série $\sum_{j=j_0+1}^{\infty} Q_j(x, t, \xi, \tau)$ converge uniformemente e absolutamente em $\partial\Omega \times (0, T]$.

Prova: Encontrada em [13](página 145) e [29]

Enunciamos agora outro resultado que é usado na demonstração do Teorema 6.0.2, para provarmos que u solução do problema (1.20) satisfaz sua condição de fronteira.

Teorema 6.0.4 *Se $\partial\Omega$ é de classe $C^{1,\lambda}$ para algum $0 < \lambda < 1$ e ψ uma função contínua em $\partial\Omega \times (0, T)$. Sendo*

$$U(x, t) = \int_0^t \int_{\partial\Omega} \Gamma(x, t, \xi, \tau) \psi(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

temos

$$\frac{\partial U}{\partial \nu}(x, t) = -\frac{1}{2} \psi(x, t) + \int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x, t, \xi, \tau) \psi(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

Prova: Também encontrada em [13].

Agora enunciaremos o lema 6.0.5, encontrado em [13], o qual é necessário para demonstrar que as sequências de subsolução e supersolução são monótonas e satisfazem a equação integral (2.4).

Lema 6.0.5 *Seja $\{H^{(k)}\}$ uma sequência de funções contínuas que converge pontualmente para uma função H e sejam $\psi^{(k)}$ soluções da equação integral:*

$$(6.3) \quad \psi^{(k)}(x, t) = 2 \int_0^t \int_{\partial\Omega} Q(x, t, \xi, \tau) \psi^{(k)}(\xi, \tau) d\xi d\tau - 2H^{(k)}(x, t)$$

e ψ solução da equação integral:

$$(6.4) \quad \psi(x, t) = 2 \int_0^t \int_{\partial\Omega} Q(x, t, \xi, \tau) \psi(\xi, \tau) d\xi d\tau - 2H(x, t).$$

Então $\{\psi^{(k)}\}$ converge pontualmente para ψ . Mais ainda, se H é contínua então ψ o é.

Prova: Pelo lema (6.0.3) as únicas soluções de (6.3) e (6.4) são dadas por:

$$\psi^{(k)}(x, t) = 2H^{(k)}(x, t) + \int_0^t \int_{\partial\Omega} \left[\sum_{j=1}^{\infty} Q_j(x, t, \xi, \tau) \right] H^{(k)}(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

e

$$\psi(x, t) = 2H(x, t) + \int_0^t \int_{\partial\Omega} \left[\sum_{j=1}^{\infty} Q_j(x, t, \xi, \tau) \right] H(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

Assim

$$[\psi^{(k)} - \psi](x, t) = 2[H^{(k)} - H](x, t) + \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t \int_{\partial\Omega} Q_j(x, t, \xi, \tau) [H^{(k)} - H](\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

Seja $j_0 \geq 0$ o inteiro do lema (6.0.3) e escrevemos

$$[\psi^{(k)} - \psi](x, t) = S_1^{(k)}(x, t) + S_2^{(k)}(x, t),$$

onde

$$S_1^{(k)}(x, t) = 2[H^{(k)} - H](x, t) + \int_0^t \int_{\partial\Omega} \left[\sum_{j=1}^{\infty} Q_j(x, t, \xi, \tau) \right] [H^{(k)} - H](\xi, \tau) d\xi d\tau$$

e

$$S_2^{(k)}(x, t) = [H^{(k)} - H](x, t) + \int_0^t \int_{\partial\Omega} \left[\sum_{j=j_0+1}^{\infty} Q_j(x, t, \xi, \tau) \right] [H^{(k)} - H](\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

Por hipótese $H^{(k)} \rightarrow H$ quando $k \rightarrow \infty$. O teorema da convergência dominada implica que $S_1^{(k)} \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. Desde que a série converge uniformemente então $S_2^{(k)} \rightarrow 0$. Isto mostra o que queríamos

□

Agora descreveremos outros resultados clássicos no estudo de equações diferenciais parciais. Eles são usados para provar a não-negatividade de algumas funções nos lemas 3.0.4 e 3.0.5, além de outras desigualdades.

Primeiramente, encontrado em [12] página 52, se tem o princípio do máximo para equações parabólicas:

Teorema 6.0.6 *Se uma função $u \in \mathcal{C}_1^2(\Omega \times (0, T]) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega} \times (0, T])$ é solução da equação do calor $u_t(x, t) = L(u(x, t)) = \sum_{j=1}^n a_j(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x, t) + \sum_{j=1}^n b_j(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x, t)u(x, t)$ em $\Omega \times (0, T]$, com a_j, b_j e c funções contínuas. Então o máximo de u em $\bar{\Omega} \times (0, T]$ é igual ao máximo de u em $\Gamma_T = \bar{\Omega} \times (0, T] - \Omega \times (0, T]$.*

Outro resultado clássico, que também pode ser encontrado em [12] página 330, é o Lema de Hopf:

Lema 6.0.7 *Seja $u \in \mathcal{C}_1^2(\Omega \times (0, T])$ tal que*

$$u_t(x, t) - L(u(x, t)) \geq 0,$$

para $(x, t) \in \Omega \times (0, T]$. Se u atinge um valor mínimo m_0 em $\Omega \times (0, T]$, então $u(x, t) = m_0$, para $(x, t) \in \Omega \times (0, T]$. Se existe $(x_0, t_0) \in \partial\Omega \times (0, T]$ tal que existe uma bola contida em $\Omega \times (0, T]$, onde (x_0, t_0) pertence a fronteira da bola, e u assume valor mínimo em (x_0, t_0) , então $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0, t_0) < 0$ sempre que u não é uma constante.

Ainda temos o próximo lema, lema da positividade, o qual pode ser encontrado em [29].

Lema 6.0.8 *Seja $w \in \mathcal{C}(\bar{\Omega} \times (0, T]) \cap \mathcal{C}_1^2(\Omega \times (0, T])$ não constante tal que*

$$(6.5) \quad \begin{cases} w_t(x, t) \geq L(w(x, t)), & \Omega \times (0, T], \\ \frac{\partial w}{\partial \nu}(x, t) + \beta_0(x, t)w \geq 0, & \partial\Omega \times (0, T], \\ w(x, 0) \geq 0, & \bar{\Omega}, \end{cases}$$

onde $\beta_0 \geq 0$ em $\partial\Omega \times (0, T]$. Então $w \geq 0$ em $\bar{\Omega} \times (0, T]$.

Prova: Se w não fosse não negativa, existiria um ponto $(x_0, t_0) \in \Omega \times (0, T]$ tal que $w(x_0, t_0)$ é o mínimo negativo. Como o mínimo é atingido na fronteira parabólica e $w(x_0, 0) \geq 0$, então (x_0, t_0) deve estar em $\partial\Omega \times (0, T]$, já que w é não constante.

Tinhamos que

$$\frac{\partial w}{\partial \nu}(x_0, t_0) + \beta_0(x_0, t_0)w(x_0, t_0) \geq 0,$$

ou seja

$$\frac{\partial w}{\partial \nu}(x_0, t_0) \geq -\beta_0(x_0, t_0)w(x_0, t_0) \geq 0,$$

o que contradiz o princípio do máximo que diz que $\frac{\partial w}{\partial \nu}(x_0, t_0) < 0$.

□

O próximo resultado é usado para garantir que as convergências da sequência de sub-solução e da sequência de subsolução são uniformes.

Teorema 6.0.9 (Dini): *Seja (f_n) uma sucessão de funções reais contínuas definidas em um intervalo fechado e limitado I . Se (f_n) for monótona e (f_n) convergir pontualmente para um função contínua. Então a convergência é uniforme.*

Agora, com base na referência [1] página 81, vamos enunciar um resultado importante na demonstração da existência de “quenching”, lema 3.0.2, e na demonstração na existência de uma possibilidade de extensão de solução para o problema (1.15), teorema 4.0.12.

Teorema 6.0.10 *Seja $u : [0, 1] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ solução limitada da equação do calor ($u_t = u_{xx}$), a qual satisfaz uma condição de fronteira de Dirichlet, Neumann ou periódica. Seja $z(t)$ o número de zeros de $u(.,.)$ em $[0, 1]$. Então*

(i) $z(t)$ é finito, para $t > 0$.

(ii) se (x_0, t_0) é zero múltiplo de $u(u(x_0, t_0) = 0 \text{ e } u_x(x_0, t_0) = 0)$ então para todo $t_1 < t_0 < t_2$ temos que $z(t_1) > z(t_2)$.

Finalizando este apêndice, iremos fazer um apanhado da Teoria de Semigrupos. Usamos esta teoria no capítulo 3 para mostrar a proposição 3.0.2, ou seja, para mostrar que a solução de (1.15) se anula em tempo finito. Todo este capítulo tem como base a referência [27](página 3 até página 11)

Definição 6.0.11 *Seja X um espaço vetorial métrico completo e seja $V_t : X \rightarrow X$ uma família de operadores contínuos. Dizemos que $\{V_t\}$ é uma semigrupo se*

$$V_{t_1}(V_{t_2}(x)) = V_{t_1+t_2}(x),$$

para todo $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$ e $x \in X$.

Definição 6.0.12 *O conjunto $\gamma^+(x) = \{y \in X | y = V_t(x), t \in \mathbb{R}^+\}$ é chamado de semi-trajetória positiva de x e o conjunto $\gamma_t^+(x) = \{y \in X | y = V_\tau(x), \tau \in [t, \infty)\}$ é chamado de semi-trajetória positiva de x a partir do tempo t .*

Definição 6.0.13 *Dizemos que A atrai M , com $A, M \subset X$, se para todo $\varepsilon > 0$ existe um $t_1 = t_1(\varepsilon, M) \in \mathbb{R}^+$ tal que $V_t(M) \subset O_\varepsilon(A)$, para todo $t \geq t_1$. Sendo $O_\varepsilon(A)$ a união de todas as bolas abertas de raio ε centradas em pontos de A .*

Se A atrai cada ponto de $x \in X$, então A é chamado atrator global.

Definição 6.0.14 *O conjunto ω -limite $\omega(x)$ é o conjunto de todos $y \in X$ tal que $y = \lim_{t_k \rightarrow \infty(x)} V_{t_k}(x)$, para uma sequência $t_k \rightarrow \infty$.*

Lema 6.0.15

$$\omega(x) = \bigcap_{t \geq 0} [\gamma_t^+(x)]_X$$

e

$$\omega(A) = \bigcap_{t \geq 0} [\gamma_t^+(A)]_X,$$

onde o símbolo \square_X é o fecho em X .

Definição 6.0.16 Dizemos que um semigrupo $\{V_t\}$ pertence a classe \mathcal{K} se para cada $t > 0$ o operador V_t é compacto, ou seja, para qualquer conjunto limitado $B \subset X$ tem sua imagem $V_t(B)$ precompacta.

Definição 6.0.17 Um funcional de Liapunov é uma função contínua $\mathcal{L} : X \rightarrow \mathbb{R}$, o qual decresce ao longo de cada trajetória $\gamma^+(x)$, isto é $\mathcal{L}(V_t(x)) \searrow$ quando $t \nearrow$ (exceto nos pontos estacionários $z = V_t(z)$).

Teorema 6.0.18 Suponha que o semigrupo $\{V_t\}$ pertença a classe \mathcal{K} e $\gamma_+(x)$ é um conjunto limitado para todo $x \in X$. Se para este semigrupo existir um funcional de Liapunov \mathcal{L} , então a união dos ω -limite $\omega(x)$ é não vazia e coincide com o conjunto \mathcal{Z} de todos os pontos estacionários.

Bibliografía

- [1] S. Angenent, *The zeroset of a solution of a parabolic equation*. J. Reine Angew. Math., **390**(1988), 79–96.
- [2] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions*. National Bureau of Standards, 1964.
- [3] N. D. Alikakos, *Regularity and asymptotic behavior for the second order parabolic equation with nonlinear boundary conditions in L^p* . J. Diff. Equations, **39**(1981), 311–344.
- [4] A. F. Acker and B. Kawohl, *Remarks on quenching*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, **13**(1989), 53–61.
- [5] A. Acker and W. Walter, *On the global existence of solutions of parabolic differential equations with a singular nonlinear term*. Nonlinear Analysis, **2**(1978), 499–505.
- [6] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*. New York: Academic, 1975.
- [7] K.A. Brakke, *The motion of a surface by its mean curvature*. Math. Notes, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1978.
- [8] G. Dziuk and B. Kawohl, *On rotationally symmetric mean curvature flow*. J. Diff. Equations, **93**(1991), 142–149.
- [9] J. Dávila and M. Montenegro, *A singular equation with positive and free boundary solutions*. RACSAM Rev. R. Acad. Cienc. Exactas F. Nat. España Ser. A Mat. **97** (2003), no. 1, 107–112.
- [10] J. Dávila and M. Montenegro, *Existence and asymptotic behavior for a singular parabolic equation*. Trans. Amer. Math. Soc. **357** (2005), 1801–1828.

-
- [11] J. Dávila and M. Montenegro, *Positive versus free boundary solutions to a singular elliptic equation*. J. Anal. Math. **90** (2003), 303–335.
- [12] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 1998.
- [13] A. Friedman, *Partial differential equations of parabolic types*. Prentice-Hall, 1964.
- [14] A. Friedman, *Partial differential equations*. Holt, Rinehart and Winston, Inc, 1969.
- [15] M. Fila and J. S. Guo, *Complete blow-up and incomplete quenching for the heat equation with a nonlinear boundary condition*. Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, **48**(2002), 995–1002.
- [16] M. Fila and B. Kawohl, *Asymptotic analysis of quenching problems*. Rocky Mountain J. Math, **22**(1992), 563–577.
- [17] M. Fila, B. Kawohl and H. Levine, *Quenching for quasilinear equations*. Comm. Partial Differential Equations, **17**(1992), 593–614.
- [18] M. Fila and H. Levine, *Quenching on the boundary*. Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, **21**(1993), 795–802. Inst. Henri. Poincaré Analyse Non Linéaire, **15** (1998), 233–252.
- [19] W. Fulks and J. S. Maybee, *A singular non-linear equation*, Osaka Math. J., **12**(1960), 1–19.
- [20] M. Fila and P. Quittner, *The blow-up rate for the heat equation with a nonlinear boundary condition*, Math. Methods Appl. Sci, **14**(1991)
- [21] M. Fila, H. A. Levine and J. L. Vázquez, *Stabilization of solutions of weakly singular quenching problems*, Proc. Amer. Math. Soc, **119**(1993), 555–559.
- [22] M. Grayson, *A short note on the evolution of surfaces via mean curvature*. Duke Math., **58**(1989), 555–558.
- [23] Y. Giga and R. V. Kohn, *Asymptotically self-similar blow-up of semilinear heat equations*. Comm. Pure and Appl. Math, **38**(1985), 297–319.
- [24] G. Huisken, *Flow by mean curvature of convex surface into spheres*. J. Diff. Geom., **20**(1984), 237–266.

- [25] J. Hernández, F. J. Mancebo and J. M. Vega, *On the linearization of some singular, nonlinear elliptic problems and applications*. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, **19**(2002), 777–813.
- [26] H. Kawaiada, *On the solutions of initial boundary value problem for $u_t = u_{xx} + 1/(1-u)$* . Publ. Res. Inst. Math. Sci, **10**(1975), 729–736.
- [27] O. A. Ladyzhenskaya, *Attractors for semigroups and evolution equations*. Cambridge University Press, 1991.
- [28] G. M. Lieberman, *Second order parabolic differential equations*. World Scientific, 1996.
- [29] C. V. Pao, *Nonlinear parabolic and elliptic equations*. Plenum, 1992.