

EDUARDO SOUZA MATTOS

**SOBRE ÁLGEBRAS DE CLIFFORD,
GEOMETRIA PROJETIVA E
VISÃO COMPUTACIONAL**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, da Universidade Estadual de Campinas, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Área de concentração: Matemática Aplicada.

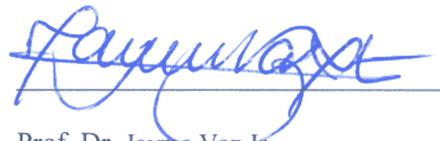
Orientador: Prof. Dr. Jayme Vaz Jr.

**CAMPINAS
2010**

**SOBRE ÁLGEBRAS DE CLIFFORD,
GEOMETRIA PROJETIVA E
VISÃO COMPUTACIONAL**

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por EDUARDO SOUZA MATTOS e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 6 de Agosto de 2010



Prof. Dr. Jayme Vaz Jr.
Orientador

Banca Examinadora:

- 1 Prof. Dr. Jayme Vaz Jr. (IMECC – UNICAMP)
- 2 Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira (IMECC – UNICAMP)
- 3 Prof. Dr. Roldão da Rocha Jr. (CMCC - UFABC)

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**
Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

Mattos, Eduardo Souza

M436s Sobre álgebras de Clifford, geometria projetiva e visão computacional/
Eduardo Souza Mattos-- Campinas, [S.P. : s.n.], 2010.

Orientador : Jayme Vaz Jr.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Clifford, Álgebra de. 2. Geometria projetiva. 3. Análise de
imagem. I. Vaz Jr., Jayme. II. Universidade Estadual de Campinas.
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III.
Título.

Título em inglês: On Clifford algebras, projective geometry and computer vision

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Clifford algebras. 2. Projective geometry.
3. Image analysis.

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Mestre em Matemática Aplicada

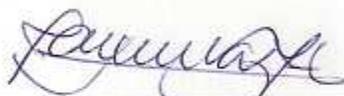
Banca examinadora: Prof. Dr. Jayme Vaz Jr. (IMECC – UNICAMP)
Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira (IMECC – UNICAMP)
Prof. Dr. Roldão da Rocha Jr. (CMCC - UFABC)

Data da defesa: 16/06/2010

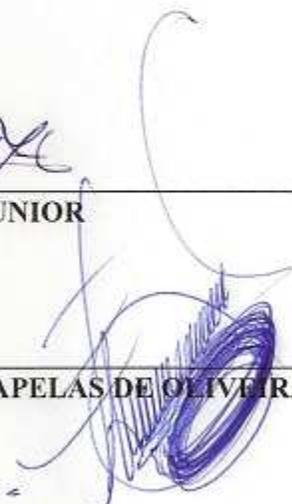
Programa de Pós-Graduação: Mestrado em Matemática Aplicada

Dissertação de Mestrado defendida em 16 de junho de 2010 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof.(a). Dr(a). JAYME VAZ JUNIOR



Prof. (a). Dr (a). EDMUNDO CAPELAS DE OLIVEIRA



Prof. (a). Dr (a). ROLDÃO DA ROCHA JUNIOR

Dedico esta dissertação a minha mãe *Valtemira*, pela paciência nos meus momentos ausentes e pela colaboração constante nas profícuas opiniões.

Agradecimento

Ao meu orientador, Prof. Dr. Jayme Vaz Jr., pela participação ativa e direta neste passo gigantesco a caminho do engrandecimento profissional, meu eterno agradecimento.

Ao Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira e ao Prof. Dr. Roldão da Rocha, que prestaram preciosas informações para a realização deste trabalho, também o meu eterno agradecimento.

Ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, onde tive a oportunidade de dar um importante rumo ao meu crescimento científico e profissional, e a todas as pessoas que contribuíram para realização deste trabalho, direta ou indiretamente, meu eterno agradecimento.

À CAPES, pelo apoio financeiro e por acreditar no meu potencial, minha total gratidão.

Resumo

Atualmente, o estudo das Álgebras de Clifford é utilizado em inúmeras áreas de pesquisa. Uma delas é na área de *Visão Computacional*.

O objetivo central dessa dissertação consiste em exibir noções sobre Álgebras de Clifford e sua utilização na formulação dos conceitos e definições de operações entre objetos da Geometria Projetiva e na formulação algébrica de *câmeras virtuais*, que é um dos assuntos tratados na área de *Visão Computacional*.

Para isso são expostos de forma gradual e coerente os principais aspectos teóricos necessários para atingir os objetivos citados. Como resultado, as Álgebras de Clifford proporcionam uma excelente descrição da Geometria Projetiva e das câmeras virtuais.

Palavras-chave: Álgebras de Clifford, Geometria projetiva, Análise de imagens.

Abstract

Currently, the study of Clifford algebras are used in many research areas. One is in the area of Computer Vision.

The main objective of this dissertation is to display notions of Clifford algebras and their use in formulating the concepts and definitions of transactions between objects of Projective Geometry and algebraic formulation of virtual cameras, which is one of the topics covered in Computer Vision.

For it is exposed gradually and consistently the main theoretical aspects needed to achieve the goals mentioned. As a result, Clifford algebras provide an excellent description of Projective Geometry and virtual cameras.

Keywords: Clifford Algebras, Projective Geometry, Image analysis.

Sumário

1	Introdução	1
2	Álgebras de Clifford e Álgebras Geométricas	3
2.1	Espaços quadráticos	3
2.2	Álgebras	5
2.3	Álgebras exterior e de Grassmann	7
2.4	Orientação e isomorfismo de Hodge	18
2.5	Álgebra de Clifford e álgebra geométrica	21
3	Dual da Álgebra Geométrica e as Relações de Incidência	29
3.1	O dual da álgebra geométrica	29
3.2	Subespaços ortogonais e relações de incidência	34
4	Espaço Projetivo e sua representação em Álgebras Geométricas	39
4.1	Conceitos básicos	39
4.2	Relações de incidência	45
4.3	Princípio de dualidade	49
4.4	Um exemplo de aplicação	51
4.5	Algumas considerações	56
4.5.1	Interseção em $\mathbb{R}P^2$	56
4.5.2	Interseção em $\mathbb{R}P^3$	57
5	Split Projetivo	59
5.1	Definição de split projetivo	59
5.2	Algumas noções de espaço afim sobre \mathbb{R}^n	60
5.3	Relação entre $\mathbb{A}P^n$ com plano e o espaço afim sobre $\mathbb{R}^{n,0}$	63
5.4	Retas paralelas do espaço $\bigwedge_2(\mathbb{R}^{1,2})$	64
5.5	Retas paralelas do espaço $\bigwedge_2(\mathbb{R}^{1,3})$	65

5.6	Planos paralelos do espaço $\bigwedge_3(\mathbb{R}^{1,3})$	66
6	Aplicações das Álgebras de Clifford: Câmeras Virtuais	69
6.1	Introdução	69
6.2	Transformações projetivas	70
6.2.1	A transformação $T : \mathbb{RP}^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$	70
6.2.2	A transformação $T : \mathbb{RP}^n \rightarrow \mathbb{RP}^{n-1}$	71
6.3	Modelo de câmera pinhole	72
6.4	Modelos algébricos de câmeras virtuais	75
6.4.1	Modelo de uma câmera virtual	75
6.4.2	Modelo de duas câmeras virtuais	79
6.4.3	Modelo de três câmeras virtuais	82
6.4.4	Modelo de quatro câmeras virtuais	86
6.4.5	Modelo de “n” câmeras virtuais	91
7	Conclusões	93
	Referências Bibliográficas	95

Capítulo 1

Introdução

A aplicação das Álgebras de Clifford como linguagem para descrever o estudo em várias áreas do conhecimento teve um grande crescimento à partir da segunda metade do século XX.

O objetivo central dessa dissertação consiste em exibir noções sobre Álgebras de Clifford e sua utilização na formulação dos conceitos e definições de operações entre objetos da Geometria Projetiva e na formulação algébrica de *câmeras virtuais*, que é um dos assuntos tratados na área de *Visão Computacional*. A finalidade disso consiste em verificar a eficácia do uso de Álgebras de Clifford, como linguagem matemática, no estudo da Geometria Projetiva e suas aplicações. A necessidade de obter uma linguagem matemática elegante que permita tratar problemas envolvendo assuntos anteriores, justifica a presente dissertação.

Nessa dissertação são apresentados uma revisão sobre os principais conceitos envolvendo Álgebras de Clifford. Em seguida é feito uma distinção entre Álgebras de Clifford e Álgebras Geométricas¹ (a maioria dos textos tratam Álgebras de Clifford e Álgebras Geométricas como sinônimos).

Na sequência, é exibido noções sobre o Dual da Álgebra Geométrica e as relações de incidência. Com isso é apresentado alguns dos principais conceitos dos Espaços Projetivos e sua representação em Álgebras Geométricas.

Também são apresentados os conceitos de Split Projetivo, o qual permite efetuar uma descrição da Geometria Projetiva, em termos de Álgebras Geométricas. Com isso podemos descrever algebricamente os conceitos de transformações projetivas, câmeras virtuais e modelos de câmeras, aonde trabalhamos com mais de uma câmera virtual e obtemos os tensores bifocais, trifocais e quadrifocais, os quais relacionam algebricamente duas, três e quatro câmeras.

¹Ver na página 26

Finalmente, apresentamos as conclusões da dissertação e sugerimos futuros estudos envolvendo Álgebras de Clifford.

Capítulo 2

Álgebras de Clifford e Álgebras Geométricas

O objetivo desse capítulo é fornecer uma exposição gradual e construtiva dos conceitos necessários para a descrição das Álgebras de Clifford. A maioria dos texto tratam Álgebras de Clifford e Álgebras Geométricas como sinônimos, mas nesse texto essas álgebras terão definições diferentes. Além disso, serão exibidos as operações algébricas e as propriedades existentes nas Álgebras Geométricas. Com isso, temos material suficiente para abordagem dos assuntos dos próximos capítulos.

2.1 Espaços quadráticos

Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita, onde $\dim V = n \in \mathbb{N}_*$. De acordo com Lounesto (2001), uma função $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de *forma quadrática*, quando Q satisfaz as seguintes condições :

- $Q(\lambda v) = \lambda^2 Q(v)$ para $\forall \lambda \in \mathbb{R}$;
- $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, definido por $g(u, v) = \frac{1}{2} \{Q(u+v) - Q(u) - Q(v)\}$ é um funcional bilinear simétrico.

Nesse caso, o par (V, Q) é um *espaço quadrático*.

Dado um par (V, \tilde{g}) formado por um espaço vetorial real n - dimensional V e um funcional bilinear simétrico \tilde{g} , consideremos uma função $\tilde{Q} : V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\tilde{Q}(v) = \tilde{g}(v, v).$$

Observe que $\tilde{Q}(\lambda v) = \tilde{g}(\lambda v, \lambda v) = \lambda^2 \tilde{Q}(v)$ para $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. Além disso, se considerarmos uma função $\bar{g} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $\bar{g}(u, v) = \frac{1}{2} \{ \tilde{Q}(u+v) - \tilde{Q}(u) - \tilde{Q}(v) \}$, podemos concluir que $\bar{g} = \tilde{g}$. Com isso, concluímos que o par (V, \tilde{Q}) é um espaço quadrático.

Em outras palavras, podemos dizer que a partir de qualquer funcional bilinear simétrico \tilde{g} podemos construir uma forma quadrática \tilde{Q} . Consequentemente, o par (V, \tilde{g}) descrito anteriormente corresponde a um *espaço quadrático*. Ao longo do texto serão utilizados, de acordo com a conveniência, qualquer uma das duas formas de representar um espaço quadrático (isto é, (V, Q) ou (V, g) , onde $Q(v) = g(v, v)$).

Mencionamos algumas formas quadráticas particulares:

- Q é *anisotrópica* quando $Q(x) = 0 \Rightarrow x = 0$;
- Q é *isotrópica* quando $Q(x) = 0$ para algum $x \neq 0$. Logo, $x \in V$ é chamado de *vetor isotrópico*.

Um funcional bilinear simétrico g é chamado de *não degenerado* se:

$$g(u, v) = 0, \forall v \in V \Rightarrow u = 0.$$

Observe que todo funcional bilinear simétrico não degenerado é obtido através de uma forma quadrática *anisotrópica*. Nesse caso, (V, g) será chamado de *espaço quadrático não degenerado*.

Dado V^* , o dual de V , uma *correlação*, é uma aplicação linear da forma

$$\tau : V \rightarrow V^* \text{ onde } v \rightarrow v_\tau := \tau(v).$$

Observe que $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, definido por $g(u, v) := (u_\tau)(v)$, é um funcional bilinear. Se $(u_\tau)(v) = (v_\tau)(u)$, então g é um funcional bilinear simétrico.

Para finalizar, consideremos como exemplo, o espaço vetorial real $V = \mathbb{R}^n = \text{span} \{e_i : 1 \leq i \leq n\}$ e a aplicação $Q_{p,q} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$Q_{p,q}(v) = (v_1^2 + \dots + v_p^2) - (v_{p+1}^2 + \dots + v_{p+q}^2),$$

onde $p, q \in \mathbb{N}$ tal que $p + q = n$ e $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$.

Observe que $Q_{p,q}$ é uma forma quadrática.

Com isso $\mathbb{R}^{p,q}$ é o espaço vetorial real $\mathbb{R}^n = \text{span} \{e_i : 1 \leq i \leq n\}$, onde

$$Q_{p,q}(e_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } 1 \leq i \leq p \\ -1 & \text{se } (p+1) \leq i \leq n \end{cases}$$

Com isso, concluímos que $(\mathbb{R}^{p,q}, Q_{p,q})$ ou $(\mathbb{R}^{p,q}, g)$, com g definido por

$$g(u, v) = \frac{1}{2} \{Q_{p,q}(u+v) - Q_{p,q}(u) - Q_{p,q}(v)\},$$

é um espaço quadrático não degenerado.

Para maiores detalhes, consultar (LOUNESTO, 2001).

2.2 Álgebras

De acordo com Lounesto (2001), uma *álgebra* (sobre \mathbb{R}) é um par (\mathcal{A}, m) formado por um espaço vetorial real \mathcal{A} e uma aplicação bilinear $m : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, dada por $(u, v) \rightarrow m(u, v) := uv$, onde dados $\forall u, v, w \in \mathcal{A}$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ as propriedades a seguir são satisfeitas:

$$u(v+w) = uv + uw;$$

$$(u+v)w = uw + vw;$$

$$\lambda(uv) = (\lambda u)v = u(\lambda v).$$

A aplicação m , é chamada de *multiplicação em \mathcal{A}* . Além disso,

- \mathcal{A} é associativa, se $u(vw) = (uv)w$ para $\forall u, v, w \in \mathcal{A}$;
- \mathcal{A} é comutativa, se $uv = vu$ para $\forall u, v \in \mathcal{A}$;
- \mathcal{A} é *unitária*, se possui elemento unidade $1_{\mathcal{A}}$, isto é, $u1_{\mathcal{A}} = 1_{\mathcal{A}}u = u$ para $\forall u \in \mathcal{A}$.

Observe, pela definição, que se \mathcal{A} possui elemento unidade, ele é único.

Dadas duas álgebras $(\mathcal{A}, \cdot_{\mathcal{A}})$ e $(\mathcal{A}', \cdot_{\mathcal{A}'})$, dizemos que a aplicação linear $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ é um *homomorfismo de álgebras*, quando a condição a seguir é satisfeita:

$$f(u \cdot_{\mathcal{A}} v) = f(u) \cdot_{\mathcal{A}'} f(v); \text{ para } \forall u, v \in \mathcal{A}.$$

Se $(\mathcal{A}, \cdot_{\mathcal{A}})$ e $(\mathcal{A}', \cdot_{\mathcal{A}'})$ possuem, respectivamente, elemento unidade, dizemos que o homomorfismo f é *unitário*, quando

$$f(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{A}'}$$

De acordo com Garcia (2003), um grupo é o par $(G, *)$ (o qual representaremos, daqui em diante, apenas pelo o conjunto G) formado por um conjunto não vazio G e uma aplicação $*$: $G \times G \rightarrow G$, definida por $*(x, y) := x * y$, o qual satisfaz as condições a seguir:

- G é associativo, ou seja, $(x * y) * z = x * (y * z)$ para $\forall x, y, z \in G$;
- G possui *elemento neutro*, ou seja, $\exists 1_G \in G$ tal que $x * 1_G = 1_G * x = x$ para $\forall x \in G$;
- Cada elemento de G possui *elemento inverso*, ou seja, para $\forall x \in G$, $\exists y \in G$ tal que $x * y = y * x = 1_G$. Nesse caso, escrevemos $x^{-1} := y$.

Observe, pela definição, que o *elemento neutro* de G e o *elemento inverso* de cada elemento de G são únicos. Diremos que G é um *grupo abeliano* quando G é um grupo e, além disso, satisfaz a condição a seguir:

$$x * y = y * x \text{ para } \forall x, y \in G.$$

Dado um grupo abeliano G , uma álgebra \mathcal{A} é chamada *G-graduada*, se existem subespaços vetoriais \mathcal{A}_k ($k \in G$), tais que $\mathcal{A} = \bigoplus_{k \in G} \mathcal{A}_k$ e se dados $x_k \in \mathcal{A}_k$ e $y_l \in \mathcal{A}_l$, temos $x_k y_l \in \mathcal{A}_{k * l}$. Um elemento $a_k \in \mathcal{A}_k$, é chamado *elemento homogêneo*. O grau de um elemento $a_k \in \mathcal{A}_k$, o qual denotaremos por $deg(a_k)$, é o índice k , isto é, $deg(a_k) := k$. Nesse caso, um elemento $a_k \in \mathcal{A}_k$, é chamado *elemento homogêneo de grau k*.

Note que $deg(x_k y_l) = deg(x_k) * deg(y_l)$.

Dada uma álgebra (\mathcal{A}, m) , um subconjunto $S \subset \mathcal{A}$ é dito uma *subálgebra de \mathcal{A}* , se

- S é um subespaço vetorial de \mathcal{A} ;
- $u, v \in S \Rightarrow uv \in S$.

Já o conjunto $I_L \subset \mathcal{A}$ é chamado de *ideal à esquerda de \mathcal{A}* , se $ax \in I_L$ para $\forall a \in \mathcal{A}$ e $\forall x \in I_L$.

Analogamente, o conjunto $I_R \subset \mathcal{A}$ é chamado de *ideal à direita de \mathcal{A}* , se $xb \in I_R$ para $\forall b \in \mathcal{A}$ e $\forall x \in I_R$.

O conjunto $I \subset \mathcal{A}$ é chamado de *ideal bilateral (ou simplesmente um ideal) de \mathcal{A}* , se $axb \in I$ para $\forall a, b \in \mathcal{A}$ e $\forall x \in I$. Com esse ideal, obtemos a relação de equivalência a seguir:

$$a \sim b \iff a - b \in I,$$

onde $a, b \in \mathcal{A}$. Consequentemente, temos a classe de equivalência $[a] = \{b : a \sim b\}$. Assim o conjunto quociente $\frac{\mathcal{A}}{\sim} = \{[a] : a \in \mathcal{A}\}$ forma uma álgebra $\left(\frac{\mathcal{A}}{\sim}, \cdot_{\frac{\mathcal{A}}{\sim}}\right)$ e para $\forall a, b \in \mathcal{A}$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, valem as operações a seguir:

$$[a] + [b] = [a + b];$$

$$[\lambda a] = \lambda [a];$$

$$[ab] = [a] \cdot_{\frac{\mathcal{A}}{\sim}} [b].$$

Nesse caso, $\left(\frac{\mathcal{A}}{\sim}, \cdot_{\frac{\mathcal{A}}{\sim}}\right)$ é chamado de *Álgebra Quociente*.

Para maiores detalhes, consultar (LOUNESTO, 2001).

2.3 Álgebras exterior e de Grassmann

De acordo com Bishop (1980) e Lima (2005), dado um espaço vetorial real n -dimensional V , o conjunto

$$T^k(V) = \left\{ T : \underbrace{V \times \dots \times V}_{k\text{-vezes}} \rightarrow \mathbb{R} : T \text{ é funcional } k\text{-linear} \right\}$$

é um espaço vetorial real, onde $k \in \mathbb{Z}_+$

O *produto tensorial* é a aplicação

$$\otimes : T^k(V) \times T^l(V) \rightarrow T^{k+l}(V) \text{ dada por } \otimes(S, T) = S \otimes T,$$

onde

$$(S \otimes T)(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) = S(v_1, \dots, v_k)T(v_{k+1}, \dots, v_{k+l}).$$

A seguir, são citados as propriedades do produto tensorial:

- $a(S \otimes T) = (aS) \otimes T := S \otimes (aT)$;
- \otimes é uma aplicação bilinear;
- $(S \otimes T) \otimes U = S \otimes (T \otimes U)$;

para $\forall S \in T^k(V), \forall T \in T^l(V), \forall U \in T^m(V)$ e $\forall a \in \mathbb{R}$.

Como $\{\varphi^i : 1 \leq i \leq n\}$ é uma base de V^* , podemos através da definição de produto tensorial, mostrar que

$$\{\varphi^{i_1} \otimes \dots \otimes \varphi^{i_k} \in T^k(V) : 1 \leq i_l \leq n, \text{ onde } l \in \{1, \dots, k\}\} \text{ gera o espaço } T^k(V).$$

Um elemento de $T^k(V)$ é chamado de *elemento covariante*. De forma análoga, o conjunto

$$T_k(V) = \left\{ T : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{k\text{-vezes}} \rightarrow \mathbb{R} : T \text{ é funcional } k\text{-linear} \right\}$$

é um espaço vetorial real e $T_0(V) = \mathbb{R}$. Consequentemente obtemos, de forma análoga, a definição de produto tensorial, suas propriedades, e o conjunto que gera $T_k(V)$. Um elemento de $T_k(V)$ é chamado de *elemento contravariante*.

Dizemos que $T \in T^k(V)$ é *alternado* ou *anti-simétrico*, se

$$T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -T(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k).$$

Um elemento alternado de $T_k(V)$ é definido de forma equivalente.

Agora, seja o conjunto

$$\bigwedge^k(V) := \{T \in T^k(V) : T \text{ é alternado}\}.$$

Observe que $\bigwedge^k(V)$ é um espaço vetorial real e definimos $\bigwedge^0(V) := \mathbb{R}$. O mesmo vale para o conjunto

$$\bigwedge_k(V) = \{\alpha \in T_k(V) : \alpha \text{ é alternado}\}.$$

Agora, consideremos a aplicação

$$Alt : T^k(V) \rightarrow \bigwedge^k(V) \text{ onde } T \rightarrow Alt(T)$$

definida por

$$Alt(T)(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}),$$

para $\forall v_1, \dots, v_k \in V$ e S_k é o conjunto das permutações dos índices, onde $k \in \mathbb{Z}_+$. Tal aplicação é chamada de *operador de anti-simetrização*.

Observe que Alt é bem definida. Além disso, a partir da definição, podemos mostrar o seguinte:

- Alt é linear e sobrejetora;
- $T \in T^k(V) \Rightarrow Alt(T) \in \bigwedge^k(V)$;
- $\omega \in \bigwedge^l(V) \Rightarrow Alt(\omega) = \omega$;
- $Alt \circ Alt = Alt$, onde “o” denota a composição de funções;
- $Alt(S) = 0 \Rightarrow Alt(S \otimes T) = Alt(T \otimes S) = 0$;
- $Alt(Alt(\omega \otimes \eta) \otimes \theta) = Alt(\omega \otimes \eta \otimes \theta) = Alt(\omega \otimes Alt(\eta \otimes \theta))$.

Com isso, definimos o *produto exterior* ou *produto cunha* ou *produto progressivo* como sendo a aplicação

$$\wedge : \bigwedge^k(V) \times \bigwedge^l(V) \rightarrow \bigwedge^{k+l}(V) \text{ onde } \wedge(\omega, \eta) = \omega \wedge \eta,$$

definida da seguinte forma:

$$\omega \wedge \eta = \text{Alt}(\omega \otimes \eta) \in \bigwedge^{k+l}(V),$$

onde $\omega \in \bigwedge^k(V)$ e $\eta \in \bigwedge^l(V)$.

A partir desta definição podemos mostrar o seguinte:

- $a(\omega \wedge \eta) = (a\omega) \wedge \eta := \omega \wedge (a\eta)$;
- \wedge é uma aplicação bilinear;
- $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$;
- $(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta)$;
- $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_m = \text{Alt}(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_m)$;

para $\forall \omega_i \in \bigwedge^k(V)$, $\forall \omega \in \bigwedge^k(V)$, $\forall \eta \in \bigwedge^l(V)$, $\forall \theta \in \bigwedge^m(V)$ e $\forall a \in \mathbb{R}$.

Além disso, para $\forall \omega^{i_1}, \dots, \omega^{i_k} \in \bigwedge^1(V)$ e $\forall v_1, \dots, v_k \in V$ temos

$$(\omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_k})(v_1, \dots, v_k) = \det \begin{pmatrix} \omega^{i_1}(v_1) & \cdots & \omega^{i_1}(v_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega^{i_k}(v_1) & \cdots & \omega^{i_k}(v_k) \end{pmatrix}.$$

Teorema 1.1 De acordo com Lima (2005), dados $\forall \omega^{i_1}, \dots, \omega^{i_k} \in \bigwedge^1(V)$, temos a seguinte equivalência:

$$\{\omega^{i_1}, \dots, \omega^{i_k}\} \text{ é linearmente dependente} \Leftrightarrow \omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_k} = 0.$$

Demonstração:

Se $\{\omega^{i_1}, \dots, \omega^{i_k}\}$ é linearmente dependente, então $\exists \omega^{i_r} \in \bigwedge^1(V)$, com $1 \leq r \leq k$ e

$$\omega^{i_r} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^k \varepsilon_j \omega^{i_j}.$$

Dessa forma, para $\forall v_1, \dots, v_k \in V$ temos

$$(\omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_k})(v_1, \dots, v_k) = \det \begin{pmatrix} \omega^{i_1}(v_1) & \dots & \omega^{i_1}(v_r) & \dots & \omega^{i_1}(v_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega^{i_r}(v_1) & \dots & \omega^{i_r}(v_r) & \dots & \omega^{i_r}(v_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega^{i_k}(v_1) & \dots & \omega^{i_k}(v_r) & \dots & \omega^{i_k}(v_k) \end{pmatrix} = 0.$$

Com isso, concluímos que $\omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_k} = 0$.

Por outro lado, se $\omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_k} = 0$ então, concluímos que $\{\omega^{i_1}, \dots, \omega^{i_k}\}$ é *linearmente dependente*.

Dessa forma, segue o resultado. ■

Teorema 1.2 Dados $\forall \omega^{i_1}, \dots, \omega^{i_k} \in \bigwedge^1(V)$, temos a seguinte equivalência:

$$\omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_k} \neq 0 \Leftrightarrow W = \text{span} \{ \omega^{i_1}, \dots, \omega^{i_k} \} \text{ é um subespaço vetorial real } k\text{-dimensional de } V.$$

Demonstração:

Através do teorema anterior, temos

$$\omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_k} \neq 0 \Leftrightarrow \{ \omega^{i_1}, \dots, \omega^{i_k} \} \text{ é linearmente dependente;}$$

$$\Leftrightarrow W = \text{span} \{ \omega^{i_1}, \dots, \omega^{i_k} \} \text{ é um subespaço vetorial real } k\text{-dimensional de } V.$$

Com isso, segue-se o resultado. ■

Com base no Teorema 1.2, dizemos que A representa um subespaço vetorial real k -dimensional $W = \text{span} \{ \alpha^1, \dots, \alpha^k \}$ do espaço V se, A é escrito da seguinte forma:

$$A = \lambda (\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^k) \neq 0,$$

onde $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $\alpha^1, \dots, \alpha^k \in V - \{0\}$ são todos distintos entre si.

Como $\{ \varphi^i : 1 \leq i \leq n \}$ é uma base de V^* , temos o seguinte:

- $\varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi^{i_k} = \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) \varphi^{i_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes \varphi^{i_{\sigma(k)}};$

- $\mathfrak{B} = \{\varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi^{i_k} : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$ é uma base de $\bigwedge^k(V)$ e

$$\dim_{\mathbb{R}} \bigwedge^k(V) = \dim_{\mathbb{R}} \bigwedge^{n-k}(V) = \binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & k \leq n \\ 0 & k > n \end{cases}.$$

Nesse caso, podemos identificar $\bigwedge^0(V)$ e $\bigwedge^1(V)$ com \mathbb{R} e V^* , respectivamente. Além disso, com base nos últimos resultados, para $\forall \omega^{i_1}, \dots, \omega^{i_k} \in \bigwedge^1(V)$ temos

$$\omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_k} = \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) \omega^{i_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes \omega^{i_{\sigma(k)}} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \varepsilon_{i_1 \dots i_k} \varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi^{i_k},$$

onde $\varepsilon_{i_1 \dots i_k} \in \mathbb{R}$.

Agora, consideremos os seguintes conjuntos e funções:

- $T(V^*) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} T^k(V)$ e $\otimes : T(V^*) \times T(V^*) \rightarrow T(V^*)$ definido por

$$\otimes(\omega, \eta) = \omega \otimes \eta := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{i+j=k} \omega_i \otimes \eta_j \text{ para } \omega = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \omega_i \text{ e } \eta = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \eta_j;$$

- $\bigwedge(V^*) = \bigoplus_{k=0}^n \bigwedge^k(V)$ e $\wedge : \bigwedge(V^*) \times \bigwedge(V^*) \rightarrow \bigwedge(V^*)$ definida por

$$\wedge(\omega, \eta) = \omega \wedge \eta := \sum_{k=0}^n \sum_{i+j=k} \omega_i \wedge \eta_j.$$

Note que ambos os conjuntos são espaços vetoriais reais e suas respectivas funções são aplicações bilineares.

Mais do que isso, os pares $(T(V^*), \otimes)$ e $(\bigwedge(V^*), \wedge)$ são álgebras associativas e com o mesmo elemento unidade $1 \in \mathbb{R}$.

Além disso, $(T(V^*), \otimes)$ é uma álgebra \mathbb{Z} -graduada.

Chamamos o par $(T(V^*), \otimes)$ de *Álgebra dos Tensores Covariantes*. Já o par $(\wedge(V^*), \wedge)$ é chamado de *Álgebra Exterior*.

Todos os resultados e definições anteriores são válidos no caso dos espaços vetoriais reais $T_k(V)$ e $\wedge_k(V)$, gerando $(T(V), \otimes)$ e $(\wedge(V), \wedge)$, os quais são a *Álgebra de tensores Contravariantes* e a *Álgebra Exterior*.

As próximas construções e resultados são efetuados sobre $T_k(V)$ e $\wedge_k(V)$, e servem também para $T^k(V)$ e $\wedge^k(V)$.

De acordo com Dorst et al. (2007), dados $\alpha \in V^*$ e $A \in \wedge_k(V)$ consideremos a aplicação

$$\alpha \rfloor A : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{(k-1)\text{-vezes}} \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$\alpha \rfloor A (\alpha^1, \dots, \alpha^{k-1}) = A (\alpha, \alpha^1, \dots, \alpha^{k-1}),$$

para $\forall \alpha^1, \dots, \alpha^{k-1} \in V^*$.

Observe que, pela definição, $(\alpha \rfloor v) = \alpha(v)$, se $v \in \wedge_1(V)$.

Assim, chamaremos de *contração à esquerda por $\alpha \in V^*$* a aplicação

$$\alpha \rfloor : \wedge_k(V) \rightarrow \wedge_{k-1}(V) \text{ definida por } (\alpha \rfloor)(A) := (\alpha \rfloor A).$$

Observe que, pela definição da função, para $\forall \alpha, \beta \in V^*$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall A, C \in \wedge_k(V)$ e $\forall B \in \wedge_l(V)$ onde $\hat{A} = (-1)^k A$.

- $\alpha \rfloor (\beta \rfloor A) = -\beta \rfloor (\alpha \rfloor A)$;
- $\alpha \rfloor (\lambda A + C) = \lambda (\alpha \rfloor A) + (\alpha \rfloor C)$;
- $(\lambda \alpha + \beta) \rfloor A = \lambda (\alpha \rfloor A) + (\beta \rfloor A)$;
- $\lambda (\alpha \rfloor A) = (\lambda \alpha) \rfloor A = \alpha \rfloor (\lambda A)$;

- $\alpha \rfloor (A \wedge B) = (\alpha \rfloor A) \wedge B + \hat{A} \wedge (\alpha \rfloor B)$.

Em particular, para $\forall A_1, \dots, A_p \in \bigwedge_1 (V)$ e $\forall \alpha \in V^*$, temos

$$\alpha \rfloor (A_1 \wedge \dots \wedge A_p) = \sum_{i=1}^p (-1)^{i-1} (\alpha \rfloor A_i) (A_1 \wedge \dots \wedge \check{A}_i \wedge \dots \wedge A_p)$$

onde “ \check{A}_i ” na expressão anterior, indica a ausência do elemento no produto exterior.

Além disso, temos

$$\alpha \rfloor A = \alpha \rfloor (A \wedge 1) = (\alpha \rfloor A) \wedge 1 + \hat{A} \wedge (\alpha \rfloor 1) \Rightarrow \hat{A} \wedge (\alpha \rfloor 1) = 0 \Rightarrow (\alpha \rfloor 1) = 0;$$

De acordo com Dorst et al. (2007), dados $\alpha \in V^*$ e $A \in \bigwedge_k (V)$ consideremos a aplicação

$$A \llbracket \alpha : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{(k-1)\text{-vezes}} \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$A \llbracket \alpha (\alpha^1, \dots, \alpha^{k-1}) = A (\alpha^1, \dots, \alpha^{k-1}, \alpha),$$

para $\forall \alpha^1, \dots, \alpha^{k-1} \in V^*$.

Observe que, pela definição, $(v \llbracket \alpha) = \alpha(v)$, se $\alpha \in \bigwedge_1 (V)$.

Assim, chamaremos de *contração à direita por $\alpha \in V^*$* a aplicação

$$\llbracket \alpha : \bigwedge_k (V) \rightarrow \bigwedge_{k-1} (V) \text{ definida por } (\llbracket \alpha) (A) := (A \llbracket \alpha).$$

Também, pela definição, para $\forall \alpha, \beta \in V^*$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall A, C \in \bigwedge_k (V)$ e $\forall B \in \bigwedge_l (V)$ onde $\hat{B} = (-1)^l B$.

- $(A \llbracket \beta) \llbracket \alpha = - (A \llbracket \alpha) \llbracket \beta$;
- $(\lambda A + C) \llbracket \alpha = \lambda (A \llbracket \alpha) + (C \llbracket \alpha)$;
- $A \llbracket (\lambda \alpha + \beta) = \lambda (A \llbracket \alpha) + (A \llbracket \beta)$;

- $\lambda (A \rfloor \alpha) = A \rfloor (\lambda \alpha) = (\lambda A) \rfloor \alpha$;
- $(A \wedge B) \rfloor \alpha = A \wedge (B \rfloor \alpha) + (A \rfloor \alpha) \wedge \hat{B}$.

Em particular, para $\forall A_1, \dots, A_p \in \bigwedge_1(V)$ e $\forall \alpha \in V^*$, temos

$$(A_1 \wedge \dots \wedge A_p) \rfloor \alpha = \sum_{i=1}^p (-1)^{i-1} (A_i \rfloor \alpha) (A_1 \wedge \dots \wedge \check{A}_i \wedge \dots \wedge A_p)$$

onde “ \check{A}_i ” na expressão anterior, indica a ausência do elemento no produto exterior.

Além disso, temos

$$A \rfloor \alpha = (A \wedge 1) \rfloor \alpha = A \wedge (1 \rfloor \alpha) + A \rfloor \alpha \Rightarrow A \wedge (1 \rfloor \alpha) = 0 \Rightarrow (1 \rfloor \alpha) = 0;$$

A relação entre contração à direita e contração à esquerda, por $\alpha \in V^*$ é a seguinte:

$$\alpha \rfloor A = -\hat{A} \rfloor \alpha.$$

Naturalmente, podemos estender a definição de contração à direita e contração à esquerda para

$(\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^p) \in \bigwedge_p(V)$ onde $\alpha^i \in V^*$ e $i \in \{1, \dots, p\}$, da seguinte forma:

$$(\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^p) \rfloor = \alpha^1 \rfloor \alpha^2 \rfloor \dots \rfloor \alpha^p \rfloor;$$

$$\rfloor (\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^p) = \rfloor \alpha^1 \rfloor \alpha^2 \rfloor \dots \rfloor \alpha^p.$$

Dessa maneira, podemos generalizar a relação entre contração à direita e à esquerda, obtendo para

$\forall \Psi \in \bigwedge_q(V)$, $\forall A \in \bigwedge_p(V)$ onde $\tilde{A} = (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} A$, o seguinte:

- $\Psi \rfloor A = (-1)^{p(q-1)} A \rfloor \Psi$, onde $p \leq q$;
- $A \rfloor \Psi = (-1)^{q(p-1)} \Psi \rfloor A$, onde $q \leq p$;
- $\widetilde{\Psi \rfloor A} = \tilde{A} \rfloor \tilde{\Psi}$.

Uma generalização da correlação $\tau : V \rightarrow V^*$, é a aplicação

$$\tau : \bigwedge_k (V) \rightarrow \bigwedge^k (V)$$

definida, para $\forall v_1, \dots, v_k \in V$, da seguinte forma:

$$\tau(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) = v_1 \tau \wedge \dots \wedge v_k \tau.$$

Com isso e a noção de contração à direita e à esquerda, bem como, a noção de produto exterior, podemos construir uma função

$$G_p : \bigwedge_p (V) \times \bigwedge_p (V) \rightarrow \mathbb{R}$$

definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} G_p(u_1 \wedge \dots \wedge u_p, v_1 \wedge \dots \wedge v_p) &:= (\widetilde{u_1 \wedge \dots \wedge u_p})_\tau \rfloor (v_1 \wedge \dots \wedge v_p) \\ &= \det \begin{pmatrix} (u_1)_\tau \rfloor v_1 & \dots & (u_1)_\tau \rfloor v_p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (u_p)_\tau \rfloor v_1 & \dots & (u_p)_\tau \rfloor v_p \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} g(u_1, v_1) & \dots & g(u_1, v_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g(u_p, v_1) & \dots & g(u_p, v_p) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Essa definição pode ser estendida, através da bilinearidade de “ \rfloor ”, da seguinte forma:

$$G_p(A, B) = \widetilde{A}_\tau \rfloor B$$

para $\forall A, B \in \bigwedge_p (V)$.

Pela definição acima e os elementos da base de $\bigwedge_p (V)$, verifica-se que G_p é um funcional bilinear simétrico.

Com isso, definimos a função

$$G : \bigwedge (V) \times \bigwedge (V) \rightarrow \mathbb{R}$$

da seguinte forma:

$$G(A_p, B_q) = \begin{cases} G_p(A_p, B_q) & p = q \\ 0 & p \neq q \end{cases}$$

onde $A_p \in \bigwedge_p(V)$ e $B_q \in \bigwedge_q(V)$.

Consequentemente, para $\forall A, B \in \bigwedge(V)$ temos

$$G(A, B) = \sum_{p=0}^n G_p(A_p, B_p).$$

Por simples verificação, concluímos que $G : \bigwedge(V) \times \bigwedge(V) \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional bilinear simétrico.

Com base nos resultados anteriores e acordo com Dorst et al. (2007), consideremos a aplicação

$$\cdot : \bigwedge_p(V) \times \bigwedge_q(V) \rightarrow \bigwedge_{|p-q|}(V)$$

definida para $\forall A_p \in \bigwedge_p(V)$ e $\forall B_q \in \bigwedge_q(V)$, da seguinte forma:

$$\cdot(A_p, B_q) = A_p \cdot B_q = \begin{cases} (\widetilde{A_p})_{\tau} \rfloor B_q & \text{se } p \leq q, \\ A_p \ll (\widetilde{B_q})_{\tau} & \text{se } p \geq q. \end{cases}$$

Devido a definição, para $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall A \in \bigwedge_p(V)$, $\forall B \in \bigwedge_q(V)$ e $\forall C \in \bigwedge_r(V)$, obtemos os resultados a seguir:

- $\alpha \cdot B = \alpha B$;
- $(A \cdot B) = (B \cdot A)$, se $p = q$;
- $B \cdot \alpha = 0$, se $q > 0$;
- $A \cdot (B \wedge C) = (A \cdot B) \wedge C + (-1)^q B \wedge (A \cdot C)$, se $p = 1$;
- $(A \wedge B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ se $p + q \leq r$;
- $(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$ se $p = q$;

- $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$ se $q = r$;
- $(\alpha A) \cdot B = A \cdot (\alpha B) = \alpha(A \cdot B)$.

Tal aplicação “ \cdot ” é chamada de *produto interno*. Com base nesses resultados, se $p \leq q$ temos

$$A_p \cdot B_q = \sum_{\sigma \in S_q} \text{sgn}(\sigma) \{A_p \cdot (b_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge b_{\sigma(p)})\} b_{\sigma(p+1)} \wedge \cdots \wedge b_{\sigma(q)},$$

onde $A_p = (a_1 \wedge \cdots \wedge a_p) \in \bigwedge_p(V)$, $B_q = (b_1 \wedge \cdots \wedge b_q) \in \bigwedge_q(V)$, sendo que $a_i, b_j \in V$ para $i \in \{1, \dots, p\}$ e $j \in \{1, \dots, q\}$.

Observemos que, para $\forall A, B \in \bigwedge(V)$

$$G(A, B) = \sum_{p=0}^n (A_p \cdot B_p),$$

onde $(A_p \cdot B_p) = G_p(A_p, B_p)$.

Assim, a álgebra exterior $(\bigwedge(V), \wedge)$ equipada com o funcional bilinear simétrico “ G ” (ou “ \cdot ”), isto é, a terna $(\bigwedge(V), \wedge, \cdot)$, é chamada de *Álgebra de Grassmann do espaço vetorial real V* e denota-se por $\mathcal{G}(V)$. Quando $V = \mathbb{R}^{p,q}$, temos $\mathcal{G}(V) = \mathcal{G}_{p,q}$.

Um elemento $A \in \mathcal{G}(V)$ é chamado de *multivetor*. Já $A_k \in \bigwedge_k(V)$ é chamado de *multivetor de grau k* .

Para maiores detalhes, consultar as referências (BISHOP, 1980), (LIMA, 2005) e (DORST et al., 2007).

2.4 Orientação e isomorfismo de Hodge

De acordo com Bishop (1980) e Lima (2005), dado um espaço vetorial real V de dimensão finita, onde $\dim V = n \in \mathbb{N}_*$, consideremos a seguinte relação de equivalência:

$$A \sim \Omega \Leftrightarrow A = \alpha \Omega \text{ para } \alpha \in \mathbb{R}_+^*$$

onde $A, \Omega \in \bigwedge_n(V)$. Assim, para $\forall \Omega \in \bigwedge_n(V)$, temos duas classes de equivalência:

$$[\Omega] = \left\{ A \in \bigwedge_n(V) : A = \alpha\Omega, \alpha > 0 \right\};$$

$$[-\Omega] = \left\{ A \in \bigwedge_n(V) : A = (-\alpha)\Omega = \alpha(-\Omega), \alpha > 0 \right\}.$$

Tais classes de equivalência são chamadas de *orientação de um espaço vetorial*.

Agora, dados $\{e_i : 1 \leq i \leq n\}$ uma base de V e $\{e^i : 1 \leq i \leq n\}$ uma base de V^* , consideremos

$$\Omega_V = e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \in \bigwedge_n(V) \quad \text{e} \quad \Omega_{V^*} = e^1 \wedge \cdots \wedge e^n \in \bigwedge_n(V^*),$$

Agora consideremos a aplicação $\star : \bigwedge_p(V) \rightarrow \bigwedge_{n-p}(V)$, definida por

$$A \wedge \star B = G(A, B) \Omega_V$$

para $\forall A \in \bigwedge_p(V)$ e $\forall B \in \bigwedge_q(V)$.

Com base na definição da aplicação, obtemos os resultados a seguir:

- $\star 1 = \Omega_V$ e $\star A = \left(\widetilde{A} \right)_\tau \lrcorner \Omega_V = (A \cdot \Omega_V)$;
- $\star \circ \star = \star^2 = (-1)^{p(n-p)} I \Rightarrow \star^{-1} = (-1)^{p(n-p)} \star$.

Dessa forma, com base na referência Dorst et al. (2007), concluímos que \star é um isomorfismo linear, chamado de *isomorfismo de Hodge*.

A partir desse isomorfismo definimos um novo produto entre elementos de $\bigwedge(V)$, partindo do produto “ \wedge ”.

Esse produto é chamado de *produto regressivo*, denotado por “ \vee ”, e definido por:

$$A \vee B = \star^{-1}(\star A \wedge \star B) \quad (\text{ou } \star(A \vee B) = \star A \wedge \star B)$$

onde $A \in \bigwedge_p(V)$, $B \in \bigwedge_q(V)$ e $A \vee B \in \bigwedge_{|p+q-n|}(V)$. Além disso, temos o seguinte:

- $A \vee B = (-1)^{(n-p)(n-q)} B \vee A$;

- $\star(A \wedge B) = (\star A) \vee (\star B)$.

Além disso, para $\forall A \in \bigwedge_p(V)$, $\forall B \in \bigwedge_q(V)$ e $\forall C \in \bigwedge_r(V)$, temos o seguinte:

$$\begin{aligned} A \vee (B \vee C) &= A \vee \{ \star^{-1}(\star B \wedge \star C) \} = \star^{-1} \{ \star A \wedge \star [\star^{-1}(\star B \wedge \star C)] \} \\ &= \star^{-1} \{ \star A \wedge (\star B \wedge \star C) \} = \star^{-1} \{ (\star A \wedge \star B) \wedge \star C \} \\ &= \star^{-1} \{ \star [\star^{-1}(\star A \wedge \star B)] \wedge \star C \} = \{ \star^{-1}(\star A \wedge \star B) \} \vee C = (A \vee B) \vee C. \end{aligned}$$

Logo, o *produto regressivo* é associativo.

Teorema 1.3 A aplicação $\star : \bigwedge(V) \rightarrow \bigwedge(V)$, definida por

$$\star A := \sum_{p=0}^n \star A_p,$$

onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ é a base de V , $A = \sum_{p=0}^n A_p$ e $A_p = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \varepsilon^{i_1 \dots i_k} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \in \bigwedge_p(V)$, com $\varepsilon^{i_1 \dots i_k} \in \mathbb{R}$, é um isomorfismo linear

Demonstração:

Observe que \star é bem definida. Além disso, para $\forall A, B \in \bigwedge(V)$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, temos o seguinte:

$$\star(\lambda A + B) = \star \left\{ \sum_{p=0}^n (\lambda A_p + B_p) \right\} := \sum_{p=0}^n \star(\lambda A_p + B_p) = \lambda \star A + \star B.$$

Logo, a aplicação acima é linear. Agora, consideremos $A \in \bigwedge(V)$, um elemento do núcleo da aplicação linear. Então

$$\star A = 0 \Rightarrow A_p = 0 \text{ para } \forall p \in \{0, 1, \dots, n\} \Rightarrow A = 0.$$

Logo, a aplicação linear é injetora. Pelo *Teorema do Núcleo e Imagem*, de acordo com Lima (1996), concluímos que a aplicação anterior é um isomorfismo linear.

Com isso, concluímos a demonstração. ■

Nesse caso, a aplicação anterior corresponde a extensão do isomorfismo de Hodge “ \star ”, por linearidade.

Para maiores detalhes, consultar as referências (LOUNESTO, 2001) e (DORST et al., 2007).

2.5 Álgebra de Clifford e álgebra geométrica

Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita, onde $\dim V = n \in \mathbb{N}_*$, $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional bilinear simétrico, (\mathcal{A}, m) uma álgebra associativa com elemento unidade e $\gamma : V \rightarrow \mathcal{A}$ uma aplicação linear.

Então, com base nas referências Gilbert e Murray (1991) e Perwass (2000), dizemos que o par (\mathcal{A}, γ) é uma *Álgebra de Clifford para o espaço quadrático* (V, g) , quando \mathcal{A} é gerado, como álgebra, pelos conjuntos

$$\{\gamma(v) : v \in V\} \quad \text{e} \quad \{a1_{\mathcal{A}} : a \in \mathbb{R}\}$$

e γ satisfaz

$$\gamma(u)\gamma(v) + \gamma(v)\gamma(u) = 2g(u, v)1_{\mathcal{A}} \quad \text{para } \forall u, v \in V.$$

Nesse caso, γ é denominada de *aplicação de Clifford*.

Observe que, para a forma quadrática $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $Q(v) := g(v, v)$, temos

$$\gamma(v)^2 = Q(v)1_{\mathcal{A}}.$$

Se $\{e_i \in V : 1 \leq i \leq n\}$ é uma base de V , onde $g(e_i, e_j) = 0$ se $i \neq j$, então

$$\gamma(e_i)\gamma(e_j) + \gamma(e_j)\gamma(e_i) = 0 \quad i \neq j;$$

$$\gamma(e_i)^2 = Q(e_i)1_{\mathcal{A}}.$$

Usando essas relações, qualquer produto envolvendo $\gamma(e_i)$ e suas potências pode ser rearranjado e rescrito na forma

$$\gamma(e_1)^{\mu_1} \gamma(e_2)^{\mu_2} \dots \gamma(e_i)^{\mu_i} \dots \gamma(e_n)^{\mu_n} \in \mathcal{A},$$

onde $1 \leq i \leq n$, $\mu_i \in \{0, 1\}$ e $\gamma(e_1)^0 \gamma(e_2)^0 \dots \gamma(e_i)^0 \dots \gamma(e_n)^0 = 1_{\mathcal{A}}$.

Com isso, podemos dizer que

$$\mathcal{A} = \text{span} \{ \gamma(e_1)^{\mu_1} \gamma(e_2)^{\mu_2} \dots \gamma(e_i)^{\mu_i} \dots \gamma(e_n)^{\mu_n} : 1 \leq i \leq n, \mu_i \in \{0, 1\} \}.$$

Nesse caso, podemos dizer que V gera \mathcal{A} . Observe que $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{A} \leq 2^n$.

Com base nos resultados anteriores podemos dizer que o par (\mathcal{A}, γ) é uma *Álgebra de Clifford* (\mathcal{A}, γ) para o espaço quadrático (V, Q) se, e somente se, (\mathcal{A}, m) é uma álgebra associativa com elemento unidade, que contém $\gamma(V)$ e \mathbb{R} , onde $\mathbb{R} = \mathbb{R}1_{\mathcal{A}}$, são subespaços distintos de \mathcal{A} , tal que

1. $\gamma(x)^2 = Q(x)$, para $\forall x \in V$;
2. $\mathcal{A} = \text{span} \{ \gamma(e_1)^{\mu_1} \gamma(e_2)^{\mu_2} \dots \gamma(e_i)^{\mu_i} \dots \gamma(e_n)^{\mu_n} : 1 \leq i \leq n, \mu_i \in \{0, 1\} \}$.

Diremos que uma *Álgebra de Clifford* (\mathcal{A}, γ) para o espaço quadrático (V, g) , é chamada de *Álgebra de Clifford Universal*, se para cada álgebra de Clifford (\mathcal{B}, ρ) para (V, g) , existe um homomorfismo de álgebras

$$\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$$

tal que, $\rho = \phi \circ \gamma$ e $\phi(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{B}}$, onde “ \circ ” é a operação composição de funções.

Denotaremos uma álgebra de Clifford universal, para o espaço quadrático (V, g) , por $\mathcal{C}l(V, g)$.

De acordo com Gilbert e Murray (1991), podemos verificar que uma álgebra de Clifford (\mathcal{A}, γ) para (V, g) é universal, quando $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{A} = 2^n$.

Por outro lado, sabemos que $T(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} T^k(V)$ é uma álgebra associativa com elemento unidade.

Agora, consideremos \mathcal{I}_C um ideal de $T(V)$, o qual, é gerado pelos elementos da forma

$$u \otimes v + v \otimes u - 2g(u, v)1_{T(V)},$$

onde $u, v \in V$. Em outras, podemos dizer que

$$\mathcal{I}_C = \text{span} \{ A \otimes [u \otimes v + v \otimes u - 2g(u, v)1_{T(V)}] \otimes B : A, B \in T(V); \quad u, v \in V \}.$$

Por meio da relação de equivalência

$$A \sim B \Leftrightarrow A - B = x \in \mathcal{I}_C$$

podemos construir a *Álgebra Quociente* $\frac{T(V)}{\mathcal{I}_C}$, cujo produto de elementos é da forma

$$[A][B] = [A \otimes B].$$

Para facilitar as contas, identificamos $[u]$, $[v]$ e $[u \wedge v]$ por u , v e $u \wedge v$, ou seja, consideremos $[u] = u$, $[v] = v$ e $[u \wedge v] = u \wedge v$, para $\forall u, v \in V$. Com isso, temos que o produto de vetores pode ser escrito na forma

$$uv := u \wedge v + g(u, v).$$

Esse produto será chamado de *produto de Clifford entre $u, v \in V$* . Maiores detalhes, ver referência (GILBERT e MURRAY, 1991)

A partir desse produto e identificando $[\omega]$ por ω , ou seja, considerando $[\omega] = \omega$ para $\forall \omega \in \bigwedge_k(V)$ e $1 \leq k \leq p$, podemos escrever os seguintes resultados:

- $vA = v \wedge A + v \lrcorner A$;
- $Av = A \wedge v + A \lrcorner v$;

para $\forall v \in V$ e $\forall A \in \bigwedge_p(V)$, onde $1 \leq p \leq n$.

Com os resultados acima, obtemos o seguinte:

- $v \wedge A = \frac{1}{2} (vA + \widehat{A}v)$;
- $v \lrcorner A = \frac{1}{2} (vA - \widehat{A}v)$.

Pela definição do produto de Clifford entre $u, v \in V$, obtemos a seguinte relação:

$$uv + vu = 2g(u, v).$$

Além disso, considerando as função inclusão $\iota : V \rightarrow T(V)$ e a função projeção $\pi : T(V) \rightarrow \frac{T(V)}{\mathcal{I}_C}$ onde $\pi(A) := [A]$, a composição de funções $\gamma = \pi \circ \iota$ é uma aplicação de Clifford. Com base nas identificações descritas acima, temos $\gamma(v) := v$ para $\forall v \in V$.

Com isso, a álgebra quociente obtida, é uma álgebra de Clifford. Mais do que isso, pode-se provar que $\frac{T(V)}{\mathcal{I}_C}$ é uma álgebra de Clifford universal. Nesse caso denotamos

$$\mathcal{Cl}(V, g) = \frac{T(V)}{\mathcal{I}_C} \text{ (GILBERT e MURRAY, 1991).}$$

Se o conjunto $\{e_i \in V : 1 \leq i \leq n\}$ é uma base ortogonal de V , a partir dos resultados e identificações anteriores e de acordo com Gilbert e Murray (1991), uma base ortogonal de $\mathcal{G}(V)$ é identificada com a base ortogonal de $\mathcal{Cl}(V, g)$ a qual é formada pelos elementos

$$\underbrace{1}_{\text{escalar}}, \underbrace{\dots, e_k, \dots}_{\text{vetores}}, \underbrace{\dots, e_{i_1 i_2}, \dots}_{\text{bivector}}, \dots, \underbrace{\dots, e_{i_1 \dots i_{n-1}}, \dots}_{\text{pseudo vetor}}, \underbrace{I_n = \Omega_V = e_{12 \dots n}}_{\text{pseudo escalar}}$$

onde:

- $e_{i_1 \dots i_k} = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$, onde $\{e_{i_1 \dots i_k} : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$ é a base de $\bigwedge_k(V)$;
- $e_{ij} = e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i, i \neq j$;
- $e_i^2 = e_{ii} = g(e_i, e_i)$.

Maiores informações, ver referência (LOUNESTO, 2001).

Através da base ortogonal anterior, $\mathcal{G}(V)$ e $\mathcal{Cl}(V, g)$ são isomorfos, como espaços vetoriais.

Com isso, considerando $\{e_{i_1 \dots i_k} : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$, $\{e_{j_1 \dots j_l} : 1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq n\}$ e $\{e_{r_1 \dots r_m} : 1 \leq r_1 < \dots < r_m \leq n\}$ as bases de $\bigwedge_k(V)$, $\bigwedge_l(V)$ e $\bigwedge_m(V)$, respectivamente, podemos definir os *operadores de projeção* como sendo as funções da forma :

$$\langle \cdot \rangle_r : \mathcal{Cl}(V, g) \rightarrow \bigwedge_r(V)$$

com $r \leq \dim_{\mathbb{R}} V$, onde:

- $\langle \lambda \rangle_0 = \lambda$, para $\forall \lambda \in \mathbb{R}$;

$$\langle e_{i_1 \dots i_k} e_{j_1 \dots j_l} \rangle_r = \begin{cases} e_{i_1 \dots i_k} \wedge e_{j_1 \dots j_l} & \text{se } r = k + l \\ 0 & \text{se } e_{i_1 \dots i_k} e_{j_1 \dots j_l} \in \bigwedge_s(V) \text{ com } r \neq s ; \\ e_{i_1 \dots i_k} \cdot e_{j_1 \dots j_l} & \text{se } r = |k - l| \text{ com } k \neq 0 \text{ e } l \neq 0 \end{cases}$$

$$\bullet \langle e_{i_1 \dots i_k} + e_{j_1 \dots j_l} \rangle_r = \begin{cases} e_{i_1 \dots i_k} & \text{se } r = k \\ e_{j_1 \dots j_l} & \text{se } r = l \\ 0 & \text{se } r \neq k \text{ e se } r \neq l \end{cases} .$$

Com esses dados, cada uma dessas funções é bem definida. Além disso, concluímos que $A = \sum_{r=0}^n \langle A \rangle_r$ para $\forall A \in Cl(V, g)$.

De acordo com Conrardt (2000) e Perwass (2000), para $\forall A, B \in Cl(V, g)$ podemos rescrever o produto de Clifford (operação justaposição) da seguinte forma:

$$AB := \langle AB \rangle_{|k-l|} + \langle AB \rangle_{|k-l|+2} + \dots + \langle AB \rangle_{k+l} = \sum_{r=0}^s \langle AB \rangle_{|k-l|+2r}$$

onde $s = 2^{-1} \{D_n(k+l) - |k-l|\}$ sendo que $D_n(i) = \begin{cases} i & 0 \leq i \leq n \\ 2n-i & n \leq i \leq 2n \end{cases} .$

Observe que se $l \geq k+m$ então $||k-l|-m| = (l-k-m) = |k-|l-m||$. Além disso, se $m \geq k+l$ então $|(k+l)-m| = (m-k-l) = |k-|l-m||$. Com essas informações temos o seguinte:

$$\begin{aligned} \bullet (e_{i_1 \dots i_k} \cdot e_{j_1 \dots j_l}) \cdot e_{r_1 \dots r_m} &= \langle e_{i_1 \dots i_k} e_{j_1 \dots j_l} \rangle_{|k-l|} \cdot e_{r_1 \dots r_m} = \langle e_{i_1 \dots i_k} e_{j_1 \dots j_l} e_{r_1 \dots r_m} \rangle_{|k-l-m|} \\ &= e_{i_1 \dots i_k} \cdot (e_{j_1 \dots j_l} \cdot e_{r_1 \dots r_m}) \text{ se } l \geq k+m; \\ \bullet (e_{i_1 \dots i_k} \wedge e_{j_1 \dots j_l}) \cdot e_{r_1 \dots r_m} &= \langle e_{i_1 \dots i_k} e_{j_1 \dots j_l} \rangle_{k+l} \cdot e_{r_1 \dots r_m} = \langle e_{i_1 \dots i_k} e_{j_1 \dots j_l} e_{r_1 \dots r_m} \rangle_{|k-l-m|} \\ &= e_{i_1 \dots i_k} \cdot (e_{j_1 \dots j_l} \cdot e_{r_1 \dots r_m}) \text{ se } m \geq k+l. \end{aligned}$$

Com base nos resultados descritos acima e identificando $[A]$ e $[A][B]$ por A e AB , isto é, considerando $[A] = A$ e $[A][B] = AB$, para $\forall A, B, C \in Cl(V, g)$ temos o seguinte:

$$\begin{aligned} \bullet \langle \lambda A + \delta B \rangle_r &= \lambda \langle A \rangle_r + \delta \langle B \rangle_r; \\ \bullet A \wedge B &= \langle AB \rangle_{k+l}; \\ \bullet A \cdot B &= \langle \tilde{A}B \rangle_{|k-l|} = \langle A\tilde{B} \rangle_{|k-l|}; \\ \bullet (A \wedge B) \cdot C &= A \cdot (B \cdot C), \text{ se } m \geq k+l; \\ \bullet (\langle A \rangle_p \wedge \langle B \rangle_q) \vee \langle C \rangle_r &= \langle A \rangle_p \vee (\langle B \rangle_q \wedge \langle C \rangle_r). \end{aligned}$$

Maiores informações, ver referência (PERWASS, 2000).

No caso particular, quando $k = l$, temos

- $\langle AB \rangle_0 = \langle BA \rangle_0$;
- $\langle AB \rangle_0 I_n = \langle AB I_n \rangle_n$;
- $\langle \tilde{A}B \rangle_0 = \langle B\tilde{A} \rangle_0 = G(A, B)$.

A Álgebra de Clifford Universal $\mathcal{C}l(V, g) = \frac{T(V)}{\mathcal{I}_C}$ com o *produto de Clifford* (operação justaposição), descrita anteriormente, será chamada de *Álgebra Geométrica* em (V, g) e denotada também por $\mathcal{G}(V)$, quando $\mathcal{C}l(V, g)$ for definida para uma base ortonormal (isto é, $e_i^2 = \pm 1$). Observe que podemos definir as operações *produto exterior*, *produto interno* e *produto regressivo* a partir dos *operadores de projeção* e do *produto de Clifford*. Como a Álgebra Geométrica é isomorfa, como espaço vetorial, a $\bigwedge(V)$, podemos identificar os elementos de $\mathcal{G}(V)$ com os elementos de $\bigwedge(V)$. Tal identificação será utilizada daqui em diante.

Daqui em diante, vamos trabalhar somente com Álgebras Geométricas.

Definimos a *norma* $|A|$ de $A \in \bigwedge_k(V)$ como sendo

$$|A|^2 = \langle \tilde{A}A \rangle_0 = \langle A\tilde{A} \rangle_0 = G(A, A).$$

Se $A \in \bigwedge_k(V)$ satisfaz as condições

$$|A|^2 \neq 0 \text{ e } \tilde{A}A = A\tilde{A} = A \cdot A$$

então, existe um elemento não nulo $A^{-1} \in \mathcal{G}(V)$, de forma

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{|A|^2},$$

onde $A^{-1}A = AA^{-1} = 1_{\mathcal{G}(V)}$, o qual é chamado de *elemento inverso de A*.

Com os resultados anteriores, para $\forall A, B \in \bigwedge_k(V)$, temos

$$\bullet \langle B(\star A) \rangle_n = B \wedge \star A = G(B, A) \Omega_V = \langle B\tilde{A} \rangle_0 \Omega_V = \langle B(\tilde{A}\Omega_V) \rangle_n \implies B \wedge \star A = B \wedge (\tilde{A}\Omega_V).$$

Com isso, podemos escrever o *isomorfismo* \star *de Hodge* para qualquer *multivetor* A *de grau* k , em termos de *Álgebras de Clifford*, como

$$\star A = \widetilde{A} \Omega_V.$$

Além disso, considerando a base ortogonal de V podemos utilizar esse isomorfismo para $\mathcal{G}(V)$, construindo a aplicação

$$\star : \mathcal{G}(V) \rightarrow \mathcal{G}(V)$$

definida por

$$\star \left(\sum_{r=0}^n A_r \right) = \sum_{r=0}^n \star A_r \text{ onde } A_r \in \bigwedge_r(V).$$

Tal aplicação, além de bem definida, é um isomorfismo linear. Com isso, obtemos o resultado a seguir:

$$\star \circ \langle \cdot \rangle_k = \langle \cdot \rangle_{n-k} \circ \star.$$

Para finalizar, podemos estabelecer uma relação entre as operações “ \vee ” e “ \cdot ”. Para isso consideremos $\forall A \in \bigwedge_p(V)$ e $\forall B \in \bigwedge_q(V)$, onde $p \leq n$ e $q \leq n$. Então temos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \star(A \vee B) &= (\star A) \wedge (\star B) = \langle (\star A) (\star B) \rangle_{2n-(p+q)} \\ &= \langle (\star A) \widetilde{B} \rangle_{|n-(p+q)|} \Omega_V = [(\star A) \cdot \widetilde{B}] \Omega_V = \widetilde{(A \vee B)} \Omega_V. \end{aligned}$$

Como isso, concluímos que

$$\widetilde{(A \vee B)} = (\star A) \cdot \widetilde{B}.$$

Para maiores detalhes, consultar as referências (DORST et al., 2007) e (PERWASS, 2000).

Capítulo 3

Dual da Álgebra Geométrica e as Relações de Incidência

Nesse capítulo são abordados noções sobre dualidade da Álgebra Geométrica e as relações de incidência. O dual de uma Álgebra Geométrica, é uma álgebra isomorfa à álgebra original. Com isso estabelece-se uma relação entre as operações da Álgebra Geométrica e seu dual, com o objetivo de facilitar o manuseio das expressões algébricas. As relações de incidência, tratam de representar algebricamente as relações de pertinência, inclusão, interseção e as relações geométricas existentes entre subespaços vetoriais, através da Álgebra Geométrica. Tais relações são utilizadas nos próximos capítulos.

3.1 O dual da álgebra geométrica

De acordo com Lounesto (2001), as afirmações exibidas no capítulo anterior, sobre espaços quadráticos não degenerados e o pseudo-escalar de uma álgebra de Clifford, permitem demonstrar o resultado a seguir:

O espaço quadrático (V, g) é não degenerado \iff o pseudo escalar possui elemento inverso.

Agora, consideremos $\mathcal{G}(V)$, onde (V, g) é um *espaço quadrático não degenerado*, com base ortogonal $\{e_1 \cdots e_n\}$. Aplicando o isomorfismo \star , nos elementos da base de $\mathcal{G}(V)$ temos

Tabela 1 - Relações entre elementos da base de $\mathcal{G}(V)$ e suas imagens obtidas pelo isomorfismo \star .

base de $\mathcal{G}(V)$	imagem dos elementos da base
$1 := 1_{\mathcal{G}(V)}$	$\star(1) := \Omega_V \in \bigwedge^n(V)$
e_k	$\star(e_k) = \tilde{e}_k \Omega_V = g_{kk} (-1)^k e_1 \cdots e_{k-1} e_{k+1} \cdots e_n \in \bigwedge_{n-1}(V)$
\vdots	\vdots
$e_{i_1 \cdots i_k}$	$\star(e_{i_1 \cdots i_k}) = \widetilde{e_{i_1 \cdots i_k}} \Omega_V \in \bigwedge_{n-k}(V)$
\vdots	\vdots
Ω_V	$\star(\Omega_V) = \prod_{r=0}^n g_{rr} \in \bigwedge_0(V)$

Fonte: Conradt, 2000.

onde $g_{ii} := g(e_i, e_i) \in \mathbb{R}$.

Observe no quadro acima, que a imagem dos elementos da base de $\mathcal{G}(V)$, ainda são elementos da mesma base, ou seja, obtemos uma descrição diferente do mesmo espaço vetorial.

Assim, de acordo com Conradt (2000), diremos que $\mathcal{G}(V)^-$ é o espaço vetorial real gerado pelos os elementos da base de $\mathcal{G}(V)$, descritos na forma $e_{i_1}^- * \cdots * e_{i_k}^-$, isto é, $\mathcal{G}(V)^- = \star(\mathcal{G}(V)) := \text{span}\{\star(e_{i_1 \cdots i_k}) : 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$. Também denotaremos $\bigwedge_r(V)^- = \star(\bigwedge_r(V)) = \bigwedge_{n-r}(V)$.

Daqui em diante, denotaremos os elementos de $\mathcal{G}(V)$, com um sinal “+”, isto é, se $A \in \mathcal{G}(V)$, então $A = A^+$. Conseqüentemente, denotaremos $\mathcal{G}(V)$ por $\mathcal{G}(V)^+$, ou seja, $\mathcal{G}(V)^+ := \mathcal{G}(V)$.

Agora, definamos o produto a seguir:

$$* : \mathcal{G}(V)^- \times \mathcal{G}(V)^- \rightarrow \mathcal{G}(V)^-$$

dado por $*(\star A, \star B) := (\star A) * (\star B) := \star(AB)$.

Denotando $A^- := \star A$, temos então

$$A^- * B^- = (AB)^-.$$

Além de ser bem definida, o produto “*” satisfaz, para $\forall A \in \bigwedge_p(V)$, $\forall B \in \bigwedge_q(V)$, $\forall C \in \bigwedge_r(V)$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, as seguintes propriedades:

- $A * B = \star(\star^{-1}A) * \star(\star^{-1}B) = (\star^{-1}A\star^{-1}B)^- = (A^-B^-)^-$;
- $(A * B) * C = A * (B * C)$;
- $A * (B + C) = (A * B) + (A * C)$;
- $(A + B) * C = (A * C) + (B * C)$;
- $(\lambda A) * B = A * (\lambda B) = \lambda(A * B)$;
- $1^- * A = A * 1^- = A$;
- $A * A = (A^-A^-)^- = \mu 1^-$ onde μ é um escalar real.

Em particular, temos

- $(e_{i_1} \cdots e_{i_k})^- = e_{i_1}^- * \cdots * e_{i_k}^-$;
- $e_i^- * e_j^- = -e_j^- * e_i^-$;
- $e_i^- * e_i^- = g_{ii} 1^-$.

Dessa forma, concluímos que a operação “*” representa um novo produto de Clifford, em $\mathcal{G}(V)$, o qual será chamado de *produto de Clifford dual*. Com o *produto de Clifford dual*, $\mathcal{G}(V)^-$ torna-se uma Álgebra de Clifford Universal, o qual chamaremos de *Dual da Álgebra Geométrica* $\mathcal{G}(V)$.

Observe que para determinar todos os elementos de uma base de $\mathcal{G}(V)$, basta determinar apenas a metade de todos esses elementos. Os demais são obtidos através do isomorfismo de Hodge “ \star ”.

Utilizando os *operadores de projeção* e o isomorfismo \star , descritos no Capítulo 2, podemos escrever o *produto de Clifford dual* da seguinte forma:

$$A^- * B^- = (AB)^- = \left\{ \sum_{r=0}^m \langle A_p B_q \rangle_{|p-q|+2r} \right\}^- = \sum_{r=0}^m \langle A_p B_q \rangle_{|p-q|+2r}^-$$

$$= \sum_{r=0}^m \langle (A_p B_q)^- \rangle_{|n-(|p-q|+2r)|} = \sum_{r=0}^m \langle A_p^- * B_q^- \rangle_{|n-(|p-q|+2r)|}.$$

Agora, definamos a seguinte operação:

$$\odot : \bigwedge_p (V)^- \times \bigwedge_q (V)^- \rightarrow \bigwedge_{|p-q|} (V)^-$$

dado por $\odot(A^-, B^-) := A^- \odot B^-$, onde

$$A^- \odot B^- := \langle A^- * B^- \rangle_{n-|p-q|} := \langle (AB)^- \rangle_{n-|p-q|} := \langle AB \rangle_{|p-q|}^-.$$

Além de bem definida, a função “ \odot ” é uma aplicação bilinear.

No caso particular $p = q = 1$, temos

$$A_1^- * B_1^- = (A_1 \cdot B_1)^- + (A_1 \wedge B_1)^- = \langle A_1 B_1 \rangle_0^- + (A_1 \wedge B_1)^- = A_1^- \odot B_1^- + A_1^- \vee B_1^-.$$

Dessa maneira, diremos que “ \odot ” e “ \vee ” correspondem ao *produto interno* e ao *produto exterior*, respectivamente, em $\mathcal{G}(V)^-$. Já “ \cdot ” e “ \wedge ”, correspondem ao *produto interno* e ao *produto exterior* (já citados no capítulo anterior), respectivamente, em $\mathcal{G}(V)$. Nesse caso, chamamos \odot de *produto interno dual*, em $\mathcal{G}(V)^-$.

Com base nos resultados anteriores, obtemos em $\mathcal{G}(V)^-$ e $\mathcal{G}(V)^+$, as relações enunciadas a seguir:

Tabela 2 - Relações entre as operações existentes em $\mathcal{G}(V)^-$ e $\mathcal{G}(V)^+$.

$\mathcal{G}(V)^-$		$\mathcal{G}(V)^+$
$A^- * B^- := (A^+ B^+)^-$	\longleftrightarrow	$A^+ * B^+ := k_A k_B (A^- B^-)^-$
$A^- \odot B^- := (A^+ \cdot B^+)^-$	\longleftrightarrow	$A^+ \odot B^+ := k_A k_B (A^- \cdot B^-)^-$
$A^- \wedge B^- := (A^+ \vee B^+)^-$	\longleftrightarrow	$A^+ \wedge B^+ := k_A k_B (A^- \vee B^-)^-$
$A^- \vee B^- := (A^+ \wedge B^+)^-$	\longleftrightarrow	$A^+ \vee B^+ := k_A k_B (A^- \wedge B^-)^-$
$A^- B^- := (A^+ * B^+)^-$	\longleftrightarrow	$A^+ B^+ := k_A k_B (A^- * B^-)^-$
$A^- \cdot B^- := (A^+ \odot B^+)^-$	\longleftrightarrow	$A^+ \cdot B^+ := k_A k_B (A^- \odot B^-)^-$

Fonte: Conradt, 2000.

para $\forall A \in \bigwedge_p(V)$ e $\forall B \in \bigwedge_q(V)$, onde $k_A = (-1)^{p(n-p)}$ e $k_B = (-1)^{q(n-q)}$.

Diremos que uma operação definida em $\mathcal{G}(V)^+$ ou $\mathcal{G}(V)^-$ é uma *operação original*. Já uma operação em $\mathcal{G}(V)^+$ ou $\mathcal{G}(V)^-$, definida a partir de uma operação original de $\mathcal{G}(V)^-$ ou $\mathcal{G}(V)^+$, respectivamente, é chamada de *operação dual*. Com isso e a tabela anterior, podemos montar a tabela a seguir, para classificar as 6 operações comuns a $\mathcal{G}(V)^+$ e $\mathcal{G}(V)^-$:

Tabela 3 - Classificação de operações originais e duais e operações progressivas e regressivas em $\mathcal{G}(V)^+$ ou $\mathcal{G}(V)^-$.

	<i>justaposição</i>	*	·	⊙	∧	∨
$\mathcal{G}(V)^+$	<i>original</i>	<i>dual</i>	<i>original</i>	<i>dual</i>	<i>progressivo</i>	<i>regressivo</i>
$\mathcal{G}(V)^-$	<i>dual</i>	<i>original</i>	<i>dual</i>	<i>original</i>	<i>regressivo</i>	<i>progressivo</i>

Fonte: Conradt, 2000.

Para finalizar, consideremos os *espaços quadráticos não degenerados* (V, g) , onde $\dim_{\mathbb{R}} V = n + 1$, com $n \in \{1, 2, 3\}$, e $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ é sua base ortogonal.

Com isso, temos os exemplos a seguir, onde $k = \frac{1}{G(I_{n+1}, I_{n+1})}$, $k_1 = (-1)^{\frac{(n+1)n}{2}} k$, e $g_{ii} := g(e_i, e_i)$, para $i \in \{1, \dots, n + 1\}$:

- Se $n = 1$, então

Tabela 4 - Descrição e relação entre elementos de $\mathcal{G}(V)^+$ e $\mathcal{G}(V)^-$, para $n = 1$.

$\mathcal{G}(V)^+$	$\mathcal{G}(V)^-$	relação entre os elementos da base de $\mathcal{G}(V)^+$ e $\mathcal{G}(V)^-$
1^+	I_2^-	$1^+ = kI_2^-$
e_1^+	e_1^-	$e_1^+ = k_1 g_{11} e_2^-$
e_2^+	e_2^-	$e_2^+ = -k_1 g_{22} e_1^-$
$I_2^+ = e_1^+ e_2^+$	1^-	$I_2^+ = 1^-$

Fonte: Conradt, 2000.

- Se $n = 2$, então

Tabela 5 - Descrição e relação entre elementos de $\mathcal{G}(V)^+$ e $\mathcal{G}(V)^-$, para $n = 2$.

$\mathcal{G}(V)^+$	$\mathcal{G}(V)^-$	relação entre os elementos da base de $\mathcal{G}(V)^+$ e $\mathcal{G}(V)^-$
1^+	I_3^-	$1^+ = kI_3^-$
e_1^+	l_1^-	$e_1^+ = -k_1 g_{11} l_1^-$
e_2^+	l_2^-	$e_2^+ = -k_1 g_{22} l_2^-$
e_3^+	l_3^-	$e_3^+ = -k_1 g_{33} l_3^-$
$l_1^+ := e_2^+ e_3^+$	e_1^-	$l_1^+ = -k_1 g_{22} g_{33} e_1^-$
$l_2^+ := e_3^+ e_1^+$	e_2^-	$l_2^+ = -k_1 g_{33} g_{11} e_2^-$
$l_3^+ := e_1^+ e_2^+$	e_3^-	$l_3^+ = -k_1 g_{11} g_{22} e_3^-$
$I_3^+ = e_1^+ e_2^+ e_3^+$	1^-	$I_3^+ = 1^-$

Fonte: Conradt, 2000.

- Se $n = 3$, então

Tabela 6 - Descrição e relação entre elementos de $\mathcal{G}(V)^+$ e $\mathcal{G}(V)^-$, para $n = 3$.

$\mathcal{G}(V)^+$	$\mathcal{G}(V)^-$	relação entre os elementos da base de $\mathcal{G}(V)^+$ e $\mathcal{G}(V)^-$
1^+	I_4^-	$1^+ = kI_3^-$
e_1^+	p_1^-	$e_1^+ = -k_1g_{11}p_1^-$
e_2^+	p_2^-	$e_2^+ = k_1g_{22}p_2^-$
e_3^+	p_3^-	$e_3^+ = -k_1g_{33}p_3^-$
e_4^+	p_4^-	$e_4^+ = k_1g_{44}p_4^-$
$l_1^+ := e_2^+e_3^+$	l_1^-	$l_1^+ = -k_1g_{22}g_{33}l_1^-$
$l_2^+ := e_3^+e_1^+$	l_2^-	$l_2^+ = -k_1g_{33}g_{11}l_2^-$
$l_3^+ := e_1^+e_2^+$	l_3^-	$l_3^+ = -k_1g_{11}g_{22}l_3^-$
$l_4^+ := e_4^+e_1^+$	l_4^-	$l_4^+ = -k_1g_{44}g_{11}l_4^-$
$l_5^+ := e_4^+e_2^+$	l_5^-	$l_5^+ = -k_1g_{44}g_{22}l_5^-$
$l_6^+ := e_4^+e_3^+$	l_6^-	$l_6^+ = -k_1g_{44}g_{33}l_6^-$
$p_1^+ := e_2^+e_3^+e_4^+$	e_1^-	$p_1^+ = k_1g_{22}g_{33}g_{44}e_1^-$
$p_2^+ := e_3^+e_4^+e_1^+$	e_2^-	$p_2^+ = -k_1g_{33}g_{44}g_{11}e_2^-$
$p_3^+ := e_4^+e_1^+e_2^+$	e_3^-	$p_3^+ = k_1g_{44}g_{11}g_{22}e_3^-$
$p_4^+ := e_1^+e_2^+e_3^+$	e_4^-	$p_4^+ = -k_1g_{11}g_{22}g_{33}e_4^-$
I_4^+	1^-	$I_4^+ = 1^-$

Fonte: Conradt, 2000.

Outras informações, consultar (CONRADT, 2000) e (CORROCHANO, 2005).

3.2 Subespaços ortogonais e relações de incidência

Consideremos $\mathcal{G}(V)^-$, onde V é um espaço vetorial real com $\dim_{\mathbb{R}} V = n + 1$ e (V, g) é um espaço quadrático não degenerado.

De acordo com Dorst et al. (2007) e Perwass (2000), dizemos que os multivetores $A \in \bigwedge_p(V)$ e $\Phi \in \bigwedge_q(V)$ são *ortogonais* se $A \cdot \Phi = 0$ e podemos denotar isso por $A \perp \Phi$. Essa definição é uma generalização da definição de vetores *ortogonais*. Com essa definição, podemos escrever

$$A^+ \vee \Phi^+ = 0 \iff A^- \perp \Phi^+.$$

Dessa forma concluímos que

$$A^- \cdot A^+ = 0 \iff A^- \perp A^+$$

para $\forall A^+ \in \bigwedge_p(V)$. Agora observemos o seguinte:

$$A = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \neq 0 \iff U = \text{span}\{v_1, \dots, v_k\};$$

$$A^- = v_{k+1} \wedge \cdots \wedge v_n \neq 0 \iff W = \text{span}\{v_{k+1}, \dots, v_{n+1}\}.$$

Como U^\perp é o subespaço vetorial real ortogonal ao subespaço vetorial U , tal que $V = U \oplus U^\perp$, verificamos que

$$a \in W \iff a \wedge A^- = 0 \iff a \cdot A = 0 \iff a \perp v_i, \text{ para } \forall i \in \{1, \dots, k\} \iff a \in U^\perp.$$

Dessa maneira $W = U^\perp$. Consequentemente, A^- representa o subespaço vetorial real ortogonal ao subespaço representado por $A \in \bigwedge_k(V)$. Além disso, U^\perp é chamado de *subespaço ortogonal a U* .

Dados os multivetores $A^+ \in \bigwedge_p(V)$ e $\Phi^+ \in \bigwedge_q(V)$, dizemos que A^+ e Φ^+ são *incidentes* sempre que $A^+ \wedge \Phi^+ = 0$ e $A^+ \vee \Phi^+ = 0$.

O teorema a seguir, relacionará as operações algébricas entre multivetores com as relações de pertinência, inclusão, interseção e soma direta dos respectivos subespaços vetoriais representados.

Teorema 3.1 Sejam $A^+ = u_1 \wedge \cdots \wedge u_p \in \bigwedge_p(V)$ e $\Phi^+ = v_1 \wedge \cdots \wedge v_q \in \bigwedge_q(V)$, dois multivetores não nulos que representam os subespaços vetoriais $\mathbb{A} = \text{span}\{u_1, \dots, u_p\}$ e $\mathbb{B} = \text{span}\{v_1, \dots, v_q\}$, respectivamente. Além disso, A^- e Φ^- são os multivetores não nulos associados, respectivamente, aos subespaços vetoriais \mathbb{A}^\perp e \mathbb{B}^\perp , os complementos ortogonais de \mathbb{A} e \mathbb{B} . Então:

1. $A^+ \wedge \Phi^+ = 0 \iff \mathbb{A} \cap \mathbb{B} \neq \{0\}$;
2. Se A^+ e Φ^+ são *incidentes* e $p \leq q$, então $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$;
3. Se A^+ e Φ^+ são *incidentes* e $q \leq p$, então $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$;
4. Se $X^+ = A^+ \wedge \Phi^+ \neq 0$, então $\mathbb{A} \oplus \mathbb{B}$ é o subespaço vetorial representado pelo o multivetor X^+ ;
5. Se $X^+ = A^+ \vee \Phi^+ \neq 0$ e $p + q \neq n + 1$, então $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$ é o subespaço vetorial representado pelo o multivetor X^+ .

Demonstração:

1. Com as hipóteses, temos a seguinte equivalência:

$$A^+ \wedge \Phi^+ = 0 \Leftrightarrow \{u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q\} \text{ é um conjunto L.D.} \Leftrightarrow \mathbb{A} \cap \mathbb{B} \neq \{0\};$$

2. Como A^+ e Φ^+ são *incidentes*, temos o seguinte:

$$A^+ \vee \Phi^+ = 0 \Leftrightarrow A^- \perp \Phi^+ \text{ e } \Phi^- \perp A^+.$$

Com esses dados e $p \leq q$, concluímos que $\mathbb{B} \not\subseteq \mathbb{A}$. Além disso, se $\forall x \in \mathbb{A}$ onde $x \neq 0$, então $x \wedge A = 0$ e $\Phi^- \cdot A = 0$. Logo $x \notin \mathbb{B}^\perp$. Como $V = \mathbb{B} \oplus \mathbb{B}^\perp$, concluímos que $x \in \mathbb{B}$. Como $\{0\} \subset (\mathbb{A} \cap \mathbb{B})$, concluímos que $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$;

3. Como A^+ e Φ^+ são *incidentes*, temos o seguinte:

$$A^+ \vee \Phi^+ = 0 \Leftrightarrow A^- \perp \Phi^+ \text{ e } \Phi^- \perp A^+.$$

Com esses dados e $q \leq p$, concluímos que $\mathbb{A} \not\subseteq \mathbb{B}$. Além disso, se $\forall x \in \mathbb{B}$ onde $x \neq 0$, então $x \wedge B = 0$ e $A^- \cdot \Phi = 0$. Logo $x \notin \mathbb{A}^\perp$. Como $V = \mathbb{A} \oplus \mathbb{A}^\perp$, concluímos que $x \in \mathbb{A}$. Como $\{0\} \subset (\mathbb{A} \cap \mathbb{B})$, concluímos que $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$;

4. Como $X^+ = A^+ \wedge \Phi^+ \neq 0$, através do item 1, concluímos que $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{0\}$. Com isso, concluímos que $\mathbb{A} \oplus \mathbb{B}$ é o subespaço vetorial representado pelo o multivetor X^+ ;

5. Como $X^+ = A^+ \vee \Phi^+ = z_1 \wedge \dots \wedge z_r \neq 0$, onde $r = |(p+q) - (n+1)| \geq 1$, temos $W = \text{span} \{z_1, \dots, z_r\}$ é o subespaço vetorial representado por X^+ . Para $\forall x \in W$, temos $x \wedge X^+ = 0$. Como $A^+ \vee \Phi^+ \neq 0$, através do item 1, concluímos que $\mathbb{A}^\perp \cap \mathbb{B}^\perp = \{0\}$. Assim, temos as seguintes equivalências:

$$x \in W \Leftrightarrow x \wedge X^+ = 0 \Leftrightarrow x \wedge (A^- \wedge B^-) \neq 0 \Leftrightarrow x \notin (\mathbb{A}^\perp \oplus \mathbb{B}^\perp) \Leftrightarrow x \notin \mathbb{A}^\perp \text{ e } x \notin \mathbb{B}^\perp \Leftrightarrow x \in \mathbb{A} \cap \mathbb{B}.$$

Com isso, concluímos que $W = \mathbb{A} \cap \mathbb{B}$ e segue o resultado.

Com isso, demonstramos o teorema. ■

No Teorema 3.1, quando $A^+ \in \bigwedge_p(V)$ e $\Phi^+ \in \bigwedge_q(V)$ são *incidentes*, dizemos que A^+ *pertence a* Φ^+ (ou A^+ *está contido em* Φ^+) se $p \leq q$, ou, dizemos que A^+ *passa por* Φ^+ (ou A^+ *contêm* Φ^+) se

$q \leq p$.

Também, no Teorema 3.1, quando $X^+ = A^+ \vee \Phi^+ \neq 0$, dizemos que X^+ é a *interseção* de A^+ e Φ^+ . Quando $X^+ = A^+ \wedge \Phi^+ \neq 0$, dizemos que X^+ é a *junção* (ou *soma direta*) de A^+ e Φ^+ .

Com base nas definições descritas acima e considerando os multivetores $A^- \in \bigwedge_p(V)^-$, $\Phi^- \in \bigwedge_q(V)^-$, dizemos que A^- e Φ^- são *incidentes*, sempre que $A^- \vee \Phi^- = 0$ e $A^- \wedge \Phi^- = 0$.

Quando $A^- \in \bigwedge_p(V)^-$ e $\Phi^- \in \bigwedge_q(V)^-$ são *incidentes*, dizemos que A^- *pertence a* Φ^- (ou A^- *está contido em* Φ^-) se $q \leq p$, ou, dizemos que A^- *passa por* Φ^- (ou A^- *contêm* Φ^-) se $p \leq q$.

Quando $X^- = A^- \wedge \Phi^- \neq 0$, dizemos que X^- é a *interseção* de A^- e Φ^- . Quando $X^- = A^- \vee \Phi^- \neq 0$, dizemos que X^- é a *junção* (ou *soma direta*) de A^- e Φ^- .

Através das relações descritas na Tabela 2, podemos exibir a tabela a seguir, onde temos a correspondência entre as definições descritas acima, :

Tabela 7 - Correspondência entre as relações existentes em $\mathcal{G}(V)^+$ e $\mathcal{G}(V)^-$.

$\mathcal{G}(V)^+$		$\mathcal{G}(V)^-$
A^+ <i>pertence a</i> Φ^+	\longleftrightarrow	A^- <i>passa por</i> Φ^-
A^+ <i>passa por</i> Φ^+	\longleftrightarrow	A^- <i>pertence a</i> Φ^-
X^+ é a <i>interseção</i> de A^+ e Φ^+	\longleftrightarrow	X^- é a <i>junção</i> de A^- e Φ^-
X^+ é a <i>junção</i> de A^+ e Φ^+	\longleftrightarrow	X^- é a <i>interseção</i> de A^- e Φ^-

Fonte: Conradt, 2000.

Os nomes *pertence a* (ou *está contido em*), *passa por* (ou *contêm*), *interseção* e *junção* (ou *soma direta*), utilizados nas definições descritas na tabela acima, servem para indicar o que ocorre entre os subespaços vetoriais representados pelos os multivetores relacionados, conforme é demonstrado no Teorema 3.1. Com isso, podemos descrever algebricamente as relações de pertinência, inclusão, interseção e soma direta entre subespaços vetoriais.

Quando temos dois multivetores, um *pertence a* $\mathcal{G}(V)^+$ e outro *pertence a* $\mathcal{G}(V)^-$, basta rescrever um deles como multivetor do outro conjunto e aí utilizar as definições descritas acima. Em vez de dizer que dois multivetores A e Φ são *incidentes* podemos escrever que $A \asymp \Phi$, onde

$$A \asymp \Phi \iff A \wedge \Phi = 0 \text{ e } A \vee \Phi = 0.$$

De acordo com Conradt (2000), a relação \asymp é chamada de *relação de incidência*. Dessa maneira, dizer que A e Φ possuem uma *relação de incidência* \asymp é o mesmo que dizer que ambos multivetores são *incidentes*. Com isso, dizemos que a *relação de incidência* \asymp e as relações descritas na tabela acima são as *relações de incidência* dos multivetores de $\mathcal{G}(V)$.

Capítulo 4

Espaço Projetivo e sua representação em Álgebras Geométricas

Nesse capítulo são expostos as noções de espaços projetivos, formas geométricas, princípio de dualidade e algumas propriedades, em termos de Álgebras Geométricas, os quais permitem obter um modelo algébrico que descreve resultados de geometria projetiva, para o plano e para o espaço. Para comprovar tal eficácia, como linguagem algébrica, é exposto um exemplo de aplicação. Com isso, o objetivo nesse capítulo é expor as Álgebras Geométricas como linguagem algébrica para tratar de questões envolvendo geometria projetiva.

4.1 Conceitos básicos

Consideremos a seguinte *relação de equivalência*:

$$u \sim v \iff \text{existe } \alpha \in \mathbb{R}^* \text{ tal que } v = \alpha u$$

onde $u, v \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$.

A classe de equivalência $[v] := \{u \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} : u \sim v\}$, gerada pela relação de equivalência anterior, é uma reta em \mathbb{R}^{n+1} , que passa pelo vetor nulo do espaço vetorial citado, mas não contém o mesmo.

De acordo com Corrochano (2005), o conjunto de todas essas retas é chamado de *Espaço Projetivo Real*, e denotado por \mathbb{RP}^n .

Podemos rescrever cada um desses elementos da seguinte forma:

$$(\alpha_1 : \cdots : \alpha_{n+1}) := [(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n+1})] \in \mathbb{RP}^n \text{ com } (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\},$$

onde $(\alpha_1 : \cdots : \alpha_{n+1}) := [\lambda(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n+1})] = \lambda(\alpha_1 : \cdots : \alpha_{n+1})$, para $\forall \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Assim, podemos representar qualquer elemento de \mathbb{RP}^n por um elemento de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$, ou, qualquer múltiplo não nulo desse mesmo elemento, escrito numa base ortogonal.

Nesse caso, chamaremos as coordenadas desse elemento em $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$, de *coordenadas homogêneas* de um elemento de \mathbb{RP}^n .

Observe que podemos dividir o espaço projetivo em duas partições (partes). São elas :

$$\mathbb{AP}^n := \{(\alpha_1 : \cdots : \alpha_{n+1}) \in \mathbb{RP}^n : \alpha_{n+1} \neq 0\}$$

e

$$(\mathbb{AP}^n)^c := \{(\alpha_1 : \cdots : \alpha_{n+1}) \in \mathbb{RP}^n : \alpha_{n+1} = 0\},$$

onde \mathbb{AP}^n é chamado de *espaço projetivo afim*.

Essas definições podem ser rescritas da seguinte forma :

$$(\alpha_1 : \cdots : \alpha_{n+1}) \in \mathbb{AP}^n \Leftrightarrow \alpha_{n+1} = 1 \quad \text{e} \quad (\alpha_1 : \cdots : \alpha_{n+1}) \in (\mathbb{AP}^n)^c \Leftrightarrow \alpha_{n+1} = 0.$$

Um elemento de \mathbb{AP}^n será chamado de *ponto afim*. Já um elemento de $(\mathbb{AP}^n)^c$ será chamado de *ponto no infinito*.

Um *subespaço projetivo (ou forma geométrica) de \mathbb{RP}^n* é, por definição, um espaço projetivo $W\mathbb{P}^k$, onde W é um subespaço vetorial real de \mathbb{R}^{n+1} , onde $\dim_{\mathbb{R}} W = k + 1$.

A dimensão de \mathbb{RP}^n é, por definição, a igualdade

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{RP}^n := \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{n+1} - 1 = n.$$

Já a dimensão do subespaço projetivo $W\mathbb{P}^k$ é dado por $\dim_{\mathbb{R}} W\mathbb{P}^k := \dim_{\mathbb{R}} W - 1 = k$.

Chamaremos de *k-planos* a um subespaço projetivo de \mathbb{RP}^n , de dimensão igual a “ k ”.

Em particular, um espaço projetivo de dimensão “0” é chamado de *ponto projetivo*, um espaço projetivo de dimensão “1” é chamado de *reta projetiva*, um espaço projetivo de dimensão “2” é chamado de *plano projetivo*.

Agora consideremos os subconjuntos $r_{\alpha, \beta} \subset \mathbb{RP}^n$ e $\pi_{u, v, w} \subset \mathbb{RP}^n$, onde $n \geq 2$ e $\alpha, \beta, u, v, w, z \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$, definidos por

$$r_{\alpha,\beta} := \{[u] \in \mathbb{RP}^n : \alpha \wedge \beta \neq 0 \text{ e } u \wedge \alpha \wedge \beta = 0\},$$

e

$$\pi_{u,v,w} := \{[z] \in \mathbb{RP}^n : u \wedge v \wedge w \neq 0 \text{ e } z \wedge u \wedge v \wedge w = 0\}.$$

No caso de $r_{\alpha,\beta}$, temos o seguinte:

- $\alpha \wedge \beta \neq 0 \Leftrightarrow \{\alpha, \beta\}$ é um conjunto L.I.
- $\Leftrightarrow \mathfrak{P} = \text{span}\{\alpha, \beta\}$ é um plano que passa pelo vetor nulo de \mathbb{R}^{n+1} ;
- $u \wedge \alpha \wedge \beta = 0 \Leftrightarrow \{u, \alpha, \beta\}$ é um conjunto L.D $\Leftrightarrow u \in \mathfrak{P}$.

Com isso, temos o seguinte:

$$u \in r_{\alpha,\beta} \Leftrightarrow \alpha \wedge \beta \neq 0 \text{ e } u \wedge \alpha \wedge \beta = 0 \Leftrightarrow u \in \mathfrak{P} - \{0\}.$$

Dessa forma $r_{\alpha,\beta} = \mathfrak{P} - \{0\}$. Logo, $r_{\alpha,\beta}$ é um plano que contém α e β e passa pelo vetor nulo de \mathbb{R}^{n+1} , mas não contém o mesmo. Já no caso de $\pi_{u,v,w}$, temos o seguinte:

- $u \wedge v \wedge w \neq 0 \Leftrightarrow \{u, v, w\}$ é um conjunto L.I.
- $\Leftrightarrow \mathfrak{W} = \text{span}\{u, v, w\}$ é um espaço que passa pelo vetor nulo de \mathbb{R}^{n+1} ;
- $z \wedge u \wedge v \wedge w = 0 \Leftrightarrow \{z, u, v, w\}$ é um conjunto L.D $\Leftrightarrow z \in \mathfrak{W}$.

Com isso temos o seguinte:

$$z \in \pi_{u,v,w} \Leftrightarrow u \wedge v \wedge w \neq 0 \text{ e } z \wedge u \wedge v \wedge w = 0 \Leftrightarrow z \in \mathfrak{W} - \{0\}.$$

Dessa maneira $\pi_{u,v,w} = \mathfrak{W} - \{0\}$. Logo, $\pi_{u,v,w}$ é um espaço que contém u , v e w e passa pelo vetor nulo de \mathbb{R}^{n+1} , mas não contém o mesmo.

Como $r_{\alpha,\beta} \cup \{0\}$ é um subespaço vetorial de dimensão “2”, concluímos que $r_{\alpha,\beta} \subset \mathbb{RP}^n$ é uma *reta projetiva*. Já $\pi_{u,v,w} \cup \{0\}$ é um subespaço vetorial de dimensão “3”, o qual permite concluir que $\pi_{u,v,w} \subset \mathbb{RP}^n$ é um *plano projetivo*.

Pelos dados anteriores, podemos dizer que toda reta projetiva pode ser descrita por $r_{\alpha,\beta} \subset \mathbb{RP}^n$, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$.

Analogamente, podemos dizer que todo plano projetivo pode ser descrito por $\pi_{u,v,w} \subset \mathbb{RP}^n$, onde $u, v, w \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$.

Procedendo de forma análoga, podemos dizer que todo k -plano projetivo de \mathbb{RP}^n , pode ser descrito por $\pi_{\alpha^1, \dots, \alpha^k} \subset \mathbb{RP}^n$, onde $\alpha^1, \dots, \alpha^k \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$, $n \geq k$ e

$$\pi_{\alpha^1, \dots, \alpha^k} = \{[z] \in \mathbb{RP}^n : \alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^k \neq 0 \text{ e } z \wedge \alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^k = 0\}.$$

Para simplificar a análise, podemos nos referir a $\pi_{\alpha^1, \dots, \alpha^k}$ através de sua expressão algébrica associada $\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^k \neq 0$. Com isso, também podemos nos referir a $[z] \in \pi_{\alpha^1, \dots, \alpha^k}$ através da expressão algébrica $\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^k \wedge z = 0$.

Dessa maneira, para $\alpha, \beta, \delta, \alpha^1, \dots, \alpha^{k+1} \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ podemos dizer, de acordo com Hestenes e Ziegler (1991), o seguinte:

- $\alpha \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ representa um ponto projetivo de \mathbb{RP}^n ;
- $\alpha \wedge \beta \in \bigwedge_2(\mathbb{R}^{n+1})$ representa uma reta projetiva $r_{\alpha, \beta}$, de \mathbb{RP}^n , se $\alpha \wedge \beta \neq 0$;
- $\alpha \wedge \beta \wedge \delta \in \bigwedge_3(\mathbb{R}^{n+1})$ representa um plano projetivo $\pi_{\alpha, \beta, \delta}$, de \mathbb{RP}^n , se $\alpha \wedge \beta \wedge \delta \neq 0$;
- $\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^{k+1} \in \bigwedge_{k+1}(\mathbb{R}^{n+1})$ com $n \geq k+1$, representa um k -plano projetivo $\Psi_{\alpha^1, \dots, \alpha^k}$, de \mathbb{RP}^n , se $\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^{k+1} \neq 0$.

Com base nas descrições acima, todo k -plano projetivo corresponde ao conjunto $\mathfrak{F} - \{0\}$, onde \mathfrak{F} é um subespaço vetorial real, com $\dim \mathfrak{F} = k+1$.

Com isso, podemos concluir que os elementos da base da Álgebra Geométrica $\mathcal{G}(\mathbb{R}^{n+1})$ representam subespaços projetivos de \mathbb{RP}^n , conforme o grau do multivetor analisado. Consequentemente $\mathcal{G}(\mathbb{R}^{n+1})$ representa os elementos e as formas geométricas presentes em \mathbb{RP}^n . Evidentemente, todos os resultados e definições anteriores são válidos no *Dual da Álgebra Geométrica* $\mathcal{G}(\mathbb{R}^{n+1})^-$ (CONRADT, 2000).

Dado $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ uma base ortogonal de \mathbb{R}^{n+1} , as coordenadas homogêneas de um k -plano projetivo, representado por

$$A = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{k+1}=1 \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_{k+1} \leq n+1}} \zeta^{i_1, \dots, i_k} e_{i_1, \dots, i_k} \in \bigwedge_{k+1}(\mathbb{R}^{n+1}),$$

são as coordenadas da forma $(\zeta^1, \dots, \zeta^{i_1, \dots, i_k}, \dots) \in \mathbb{R}^r$, onde $r = \dim \bigwedge_{k+1} (\mathbb{R}^{n+1})$ e $k > 0$.

Dizemos que $A \in \bigwedge_k (\mathbb{R}^{n+1})$ está associado a um subespaço projetivo \mathbb{A} , quando a equivalência a seguir é satisfeita:

$$X \wedge A = 0 \Leftrightarrow X \in \mathbb{A}$$

onde $X \in \mathbb{R}^{n+1}$, com $n \in \mathbb{N}_*$. Observe que, se um multivetor representa um subespaço projetivo então esse multivetor está associado a esse subespaço.

De acordo com Faugeras (1998), da definição dos produtos “ \wedge ” e “ \vee ” e das descrições acima, podemos dar as interpretações geométricas através dos teoremas a seguir.

Teorema 4.1 Sejam $A = u_1 \wedge \dots \wedge u_k \in \bigwedge_k (\mathbb{R}^{n+1})$ e $B = v_1 \wedge \dots \wedge v_l \in \bigwedge_l (\mathbb{R}^{n+1})$, dois multivetores não nulos associados aos subespaços projetivos $\mathbb{A} = \text{span} \{u_1, \dots, u_k\} - \{0\}$ e $\mathbb{B} = \text{span} \{v_1, \dots, v_l\} - \{0\}$, respectivamente. Então:

1. $A \wedge B = 0$ se, e somente se, $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} \neq \emptyset$;
2. Se $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \emptyset$ então $A \wedge B$ é o multivetor associado com o subespaço projetivo gerado por \mathbb{A} e \mathbb{B} .

Demonstração:

1. Com as hipóteses, temos as seguintes equivalências:

$$A \wedge B = 0 \Leftrightarrow \{u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_l\} \text{ é um conjunto L.D.} \Leftrightarrow \mathbb{A} \cap \mathbb{B} \neq \emptyset;$$

2. Como $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \emptyset$, concluímos que $A \wedge B \neq 0$

Com isso, temos a seguinte equivalência:

$$x \wedge A \wedge B = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{C} = [\text{span} \{u_1, \dots, u_k\} \oplus \text{span} \{v_1, \dots, v_l\}] - \{0\}$$

onde \mathbb{C} é o subespaço projetivo gerado por \mathbb{A} e \mathbb{B} .

Logo, concluímos a demonstração. ■

Teorema 4.2 Sejam $A = u_1 \wedge \dots \wedge u_k \in \bigwedge_k (\mathbb{R}^{n+1})$ e $B = v_1 \wedge \dots \wedge v_l \in \bigwedge_l (\mathbb{R}^{n+1})$, dois multivetores não nulos associados aos subespaços projetivos $\mathbb{A} = \text{span} \{u_1, \dots, u_k\} - \{0\}$ e $\mathbb{B} = \text{span} \{v_1, \dots, v_l\} - \{0\}$, respectivamente. Então:

1. Se o subespaço projetivo gerado por $\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$, $\langle \mathbb{A} \cup \mathbb{B} \rangle$, é diferente de \mathbb{RP}^n , ou seja, $\langle \mathbb{A} \cup \mathbb{B} \rangle \neq \mathbb{RP}^n$ então $A \vee B = 0$.

2. Se $\langle \mathbb{A} \cup \mathbb{B} \rangle = \mathbb{RP}^n$ então

(a) Se $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \emptyset$ então $k + l = n + 1$ e $A \vee B \in \bigwedge_0(\mathbb{R}^{n+1}) = \mathbb{R}$,

(b) Se $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} \neq \emptyset$ então $A \vee B$ é o multivetor associado com o subespaço projetivo $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$.

Demonstração:

1. Com as hipóteses, temos as seguintes implicações:

$$\langle \mathbb{A} \cup \mathbb{B} \rangle \neq \mathbb{RP}^n \Rightarrow \exists x \in \mathbb{RP}^n, \text{ tal que } x \notin \langle \mathbb{A} \cup \mathbb{B} \rangle \Rightarrow x \notin \mathbb{A} \text{ e } x \notin \mathbb{B}$$

$$\Rightarrow x \in \mathbb{A}^\perp \text{ e } x \in \mathbb{B}^\perp \Rightarrow \mathbb{A}^\perp \cap \mathbb{B}^\perp \neq \emptyset \Rightarrow A^- \wedge B^- = 0 \Rightarrow A \vee B = 0.$$

2. Considerando $\langle \mathbb{A} \cup \mathbb{B} \rangle = \text{span}\{u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_l\} - \{0\} = \mathbb{RP}^n$, temos $k + l \geq n + 1$.

Então:

(a) Se $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \emptyset$, temos as seguintes implicações:

$$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \emptyset \Rightarrow \mathbb{RP}^n = [\text{span}\{u_1, \dots, u_k\} \oplus \text{span}\{v_1, \dots, v_l\}] - \{0\}$$

$$\Rightarrow n + 1 = k + l \text{ e } A \vee B \in \bigwedge_0(\mathbb{R}^{n+1}) = \mathbb{R},$$

(b) Se $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} \neq \emptyset$, temos as seguintes equivalências:

$$x \in \mathbb{A} \cap \mathbb{B} \Leftrightarrow x \wedge A = 0 \text{ e } x \wedge B = 0 \Leftrightarrow x \wedge A^- \neq 0 \text{ e } x \wedge B^- \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \wedge (A^- \wedge B^-) \neq 0 \Leftrightarrow x \wedge (A \vee B) = 0, \text{ onde } (A \vee B) = (A^- \wedge B^-)^-.$$

Logo, $A \vee B$ é o multivetor associado com o subespaço projetivo $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$.

Logo, concluímos a demonstração. ■

4.2 Relações de incidência

Duas formas geométricas de \mathbb{RP}^n são *distintas* se os subespaços vetoriais que as geram são distintos. Os *pontos projetivos*, *retas projetivas* e *planos projetivos* são exemplos de formas geométricas distintas ou *elementos geométricos distintos*.

Duas formas geométricas são *ortogonais* se os multivetores que os representam são *ortogonais*. Da mesma forma, duas formas geométricas são *incidentes* se os multivetores que os representam são *incidentes*.

Com base no Teorema 3.1, Teorema 4.1, Teorema 4.2 e no fato de podermos representar forma geométrica do espaço projetivo \mathbb{RP}^n por multivetores da álgebra $\mathcal{G}(\mathbb{R}^{n+1})$, dizemos que as *relações de incidência* de formas geométricas no espaço projetivo \mathbb{RP}^n são as *relações de incidência* dos multivetores que os representam. Dessa maneira podemos representar algebricamente as relações de pertinência, inclusão e interseção entre formas geométricas de \mathbb{RP}^n .

Chamamos de *forma geométrica pura*, a forma geométrica que é representada por um multivector que não é *incidente* com os outros multivetores, os quais representam as outras formas geométricas distintas. Para simplificar a definição anterior, diremos que uma *forma geométrica pura* é uma forma geométrica que não é *incidente* com as outras formas geométricas distintas.

Definimos uma *forma geométrica primitiva* como sendo o conjunto composto de formas geométricas que são *incidentes* com uma mesma forma geométrica. Em Conrardt (2000) e Veblen e Young (1910) são citadas e descritas diversas formas geométricas em \mathbb{RP}^n , para $n \geq 1$.

Um multivector A^- em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^{n+1})^-$ descreve uma forma geométrica em \mathbb{RP}^n se, e somente se, a condição a seguir é satisfeita:

$$A^- = B^+, \text{ onde } B^+ \text{ é um multivector em } \mathcal{G}(\mathbb{R}^{n+1})^+, \text{ que descreve a forma geométrica citada}$$

Com isso, as formas geométricas podem ser expressas tanto em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^{n+1})^+$ como em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^{n+1})^-$, através dos elementos de suas bases.

A seguir, são apresentados alguns exemplos, ilustrando as Álgebras Geométricas e os subespaços projetivos obtidos, nos elementos de suas bases, e os resultados anteriormente citados:

- Para $n = 1$, temos

Tabela 8 - Relações entre elementos de $\mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$ e formas geométricas em \mathbb{RP}^1 .

$\mathcal{G}(\mathbb{R}^2)^+$	\mathbb{RP}^1	$\mathcal{G}(\mathbb{R}^2)^-$
1^+		I^-
e_1^+, e_2^+	<i>pontos</i>	e_1^-, e_2^-
$I = I^+ = e_1^+ e_2^+$		1^-

Fonte: Conradt, 2000.

onde:

$$e_1^- = e_2^+,$$

$$e_2^- = -e_1^+.$$

Com isso, para $\forall \mu_i^r \in \mathbb{R}$, onde $i \in \{1, 2\}$ e $r \in \{+, -\}$, temos:

$$\sum_{i=1}^2 \mu_i^+ e_i^+ = \sum_{j=1}^2 \mu_j^- e_j^- \iff \begin{cases} \mu_2^+ = \mu_1^- \\ \mu_1^+ = -\mu_2^- \end{cases}$$

- Para $n = 2$, temos

Tabela 9 - Relações entre elementos de $\mathcal{G}(\mathbb{R}^3)$ e formas geométricas em \mathbb{RP}^2 .

$\mathcal{G}(\mathbb{R}^3)^+$	\mathbb{RP}^2	$\mathcal{G}(\mathbb{R}^3)^-$
1^+		I^-
e_1^+, e_2^+, e_3^+	<i>pontos</i>	l_1^-, l_2^-, l_3^-
l_1^+, l_2^+, l_3^+	<i>retas</i>	e_1^-, e_2^-, e_3^-
$I = I^+ = e_1^+ e_2^+ e_3^+$		1^-

Fonte: Conradt, 2000.

onde:

$$l_1^+ = e_2^+ e_3^+, l_2^+ = e_3^+ e_1^+, l_3^+ = e_1^+ e_2^+,$$

$$l_1^- = e_1^+, l_2^- = e_2^+, l_3^- = e_3^+,$$

$$e_1^- = l_1^+, e_2^- = l_2^+, e_3^- = l_3^+.$$

Com isso, para $\forall \mu_i^r, \lambda_j^s \in \mathbb{R}$, onde $i, j \in \{1, 2, 3\}$ e $r, s \in \{+, -\}$, temos:

$$\sum_{i=1}^3 \mu_i^+ e_i^+ = \sum_{j=1}^3 \mu_j^- l_j^- \iff \begin{cases} \mu_1^+ = \mu_1^- \\ \mu_2^+ = \mu_2^- \\ \mu_3^+ = \mu_3^- \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i^+ l_i^+ = \sum_{j=1}^3 \lambda_j^- e_j^- \iff \begin{cases} \lambda_1^+ = \lambda_1^- \\ \lambda_2^+ = \lambda_2^- \\ \lambda_3^+ = \lambda_3^- \end{cases}$$

- Para $n = 3$, temos

Tabela 10 - Relações entre elementos de $\mathcal{G}(\mathbb{R}^4)$ e formas geométricas em \mathbb{RP}^3 .

$\mathcal{G}(\mathbb{R}^4)^+$	\mathbb{RP}^3	$\mathcal{G}(\mathbb{R}^4)^-$
1^+		I^-
$e_1^+, e_2^+, e_3^+, e_4^+$	<i>pontos</i>	$p_1^-, p_2^-, p_3^-, p_4^-$
$l_1^+, l_2^+, l_3^+, l_4^+, l_5^+, l_6^+$	<i>retas</i>	$l_1^-, l_2^-, l_3^-, l_4^-, l_5^-, l_6^-$
$p_1^+, p_2^+, p_3^+, p_4^+$	<i>planos</i>	$e_1^-, e_2^-, e_3^-, e_4^-$
$I = I^+ = e_1^+ e_2^+ e_3^+ e_4^+$		1^-

Fonte: Conradt, 2000.

onde:

$$l_1^+ = e_2^+ e_3^+, l_2^+ = e_3^+ e_1^+, l_3^+ = e_1^+ e_2^+, l_4^+ = e_4^+ e_1^+, l_5^+ = e_4^+ e_2^+, l_6^+ = e_4^+ e_3^+,$$

$$p_1^+ = e_2^+ e_3^+ e_4^+, p_2^+ = e_3^+ e_4^+ e_1^+, p_3^+ = e_4^+ e_1^+ e_2^+, p_4^+ = e_1^+ e_2^+ e_3^+,$$

$$e_1^- = p_1^+, e_2^- = -p_2^+, e_3^- = p_3^+, e_4^- = -p_4^+,$$

$$p_1^- = -e_1^+, p_2^- = e_2^+, p_3^- = -e_3^+, p_4^- = e_4^+,$$

$$l_1^- = -l_4^+, l_2^- = -l_5^+, l_3^- = -l_6^+,$$

$$l_4^- = -l_1^+, l_5^- = -l_2^+, l_6^- = -l_3^+.$$

Com isso, para $\forall \mu_i^r, \lambda_j^s, \zeta_k^t \in \mathbb{R}$, onde $i, k \in \{1, \dots, 4\}$, $j \in \{1, \dots, 6\}$ e $r, s, t \in \{+, -\}$, temos:

$$\sum_{i=1}^4 \mu_i^+ e_i^+ = \sum_{j=1}^4 \mu_j^- p_j^- \iff \begin{cases} \mu_1^+ = -\mu_1^- \\ \mu_2^+ = \mu_2^- \\ \mu_3^+ = -\mu_3^- \\ \mu_4^+ = \mu_4^- \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^6 \lambda_i^+ l_i^+ = \sum_{j=1}^6 \lambda_j^- l_j^- \iff \begin{cases} \lambda_1^+ = -\lambda_4^- \\ \lambda_2^+ = -\lambda_5^- \\ \lambda_3^+ = -\lambda_6^- \\ \lambda_4^+ = -\lambda_1^- \\ \lambda_5^+ = -\lambda_2^- \\ \lambda_6^+ = -\lambda_3^- \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^4 \zeta_i^+ p_i^+ = \sum_{j=1}^4 \zeta_j^- e_j^- \iff \begin{cases} \zeta_1^+ = \zeta_1^- \\ \zeta_2^+ = -\zeta_2^- \\ \zeta_3^+ = \zeta_3^- \\ \zeta_4^+ = -\zeta_4^- \end{cases}$$

4.3 Princípio de dualidade

De acordo com Conradt (2000), em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^3)$ e $\mathcal{G}(\mathbb{R}^4)$, o dual de um multivetor que representa uma forma geométrica em \mathbb{RP}^2 e \mathbb{RP}^3 , respectivamente, também representa uma forma geométrica. As tabelas a seguir exibem as relações entre os elementos e operações dos espaços projetivos \mathbb{RP}^2 e \mathbb{RP}^3 com os elementos e operações de $\mathcal{G}(\mathbb{R}^3)$ e $\mathcal{G}(\mathbb{R}^4)$ e seus duais, respectivamente, além das relações entre as operações algébricas:

Tabela 11 - Relações existentes entre o plano projetivo \mathbb{RP}^2 e $\mathcal{G}(\mathbb{R}^3)$.

\mathbb{RP}^2	$\mathcal{G}(\mathbb{R}^3)^+$	$\mathcal{G}(\mathbb{R}^3)^-$	\mathbb{RP}^2
	A_0^+	A_0^-	
<i>pontos</i>	A_1^+	A_1^-	<i>retas</i>
<i>retas</i>	A_2^+	A_2^-	<i>pontos</i>
	A_3^+	A_3^-	
<i>pertence a</i>	$A^+ e B^+$	$A^- e B^-$	<i>passa por</i>
	<i>são incidentes</i>	<i>são incidentes</i>	
<i>passa por</i>	$A^+ e B^+$	$A^- e B^-$	<i>pertence a</i>
	<i>são incidentes</i>	<i>são incidentes</i>	
<i>junção</i>	\wedge	\vee	<i>interseção</i>
<i>interseção</i>	\vee	\wedge	<i>junção</i>
	\cdot	\odot	
	\odot	\cdot	
	<i>justaposição</i>	$*$	
	$*$	<i>justaposição</i>	

Fonte: Conradt, 2000.

Observe na tabela acima, A_1^+ e A_2^- representam pontos projetivos existentes no plano projetivo \mathbb{RP}^2 ; A_2^+ e A_1^- representam retas projetivas existentes no plano projetivo \mathbb{RP}^2 .

Além disso, as relações *pertence a* e *passa por* estão relacionados com multivetores incidentes (ver Teorema 3.1); a relação *junção* e *interseção* estão relacionados com as operações algébricas \wedge e \vee na álgebra $\mathcal{G}(\mathbb{R}^3)^+$, e, estão relacionados com as operações algébricas \vee e \wedge na álgebra $\mathcal{G}(\mathbb{R}^3)^-$ (ver Teorema 3.1).

Tabela 12 - Relações entre o espaço projetivo \mathbb{RP}^3 e $\mathcal{G}(\mathbb{R}^4)$.

\mathbb{RP}^3	$\mathcal{G}(\mathbb{R}^4)^+$	$\mathcal{G}(\mathbb{R}^4)^-$	\mathbb{RP}^3
	A_0^+	A_0^-	
<i>pontos</i>	A_1^+	A_1^-	<i>planos</i>
<i>retas</i>	A_2^+	A_2^-	<i>retas</i>
<i>planos</i>	A_3^+	A_3^-	<i>pontos</i>
	A_4^+	A_4^-	
<i>pertence a</i>	$A^+ e B^+$	$A^- e B^-$	<i>passa por</i>
	<i>são incidentes</i>	<i>são incidentes</i>	
<i>passa por</i>	$A^+ e B^+$	$A^- e B^-$	<i>pertence a</i>
	<i>são incidentes</i>	<i>são incidentes</i>	
<i>junção</i>	\wedge	\vee	<i>interseção</i>
<i>interseção</i>	\vee	\wedge	<i>junção</i>
	\cdot	\odot	
	\odot	\cdot	
	<i>justaposição</i>	$*$	
	$*$	<i>justaposição</i>	

Fonte: Conradt, 2000.

Observe na tabela acima, A_1^+ e A_3^- representam pontos projetivos existentes no espaço projetivo \mathbb{RP}^3 ; A_2^+ e A_2^- representam retas projetivas existentes no espaço projetivo \mathbb{RP}^3 ; A_3^+ e A_1^- representam planos projetivos existentes no espaço projetivo \mathbb{RP}^3 .

Além disso, as relações *pertence a* e *passa por* estão relacionados com multivetores incidentes (ver Teorema 3.1); a relação *junção* e *interseção* estão relacionados com as operações algébricas \wedge e \vee na álgebra $\mathcal{G}(\mathbb{R}^4)^+$, e, estão relacionados com as operações algébricas \vee e \wedge na álgebra $\mathcal{G}(\mathbb{R}^4)^-$ (ver Teorema 3.1).

De acordo com Conradt (2000) e nas tabelas descritas acima, podemos estabelecer que o *dual* S' de uma equação, teorema ou definição S obtida em $\mathcal{G}(V)^+$ ou $\mathcal{G}(V)^-$ é obtido trocando *justaposição* com $*$, \wedge com \vee , \cdot com \odot e revertendo o sinal dos elementos, onde $V = \mathbb{R}^3$ ou $V = \mathbb{R}^4$. Dessa forma S' é também uma equação, teorema ou definição em $\mathcal{G}(V)^-$ ou $\mathcal{G}(V)^+$, respectivamente.

Com isso podemos fornecer uma descrição algébrica do *princípio de dualidade* tanto de \mathbb{RP}^2 como de \mathbb{RP}^3 .

De acordo com Conradt (2000), o *princípio de dualidade* de \mathbb{RP}^2 afirma que todas as definições e teoremas envolvendo *pontos* e *retas* são relacionados com definições e teoremas envolvendo *retas* e *pontos*, respectivamente. Já o *princípio de dualidade* de \mathbb{RP}^3 afirma que todas as definições e teoremas envolvendo *pontos* e *planos* são relacionados com definições e teoremas envolvendo *planos* e *pontos*, respectivamente.

Algebricamente, o *princípio de dualidade* de \mathbb{RP}^2 corresponde em obter o *dual* S' de uma equação, teorema ou definição S em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^3)^+$ ou $\mathcal{G}(\mathbb{R}^3)^-$. Analogamente, o *princípio de dualidade* de \mathbb{RP}^3 corresponde em obter o *dual* S' de uma equação, teorema ou definição S em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^4)^+$ ou $\mathcal{G}(\mathbb{R}^4)^-$.

Dessa forma podemos enunciar o teorema a seguir:

(Teorema do Princípio de Dualidade): Toda afirmação S , deduzida em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^{n+1})^+$ ou em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^{n+1})^-$ é verdadeira se, e só se, a afirmação S' , o *dual* S' de S , é verdadeira em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^{n+1})^-$ ou $\mathcal{G}(\mathbb{R}^{n+1})^+$.

4.4 Um exemplo de aplicação

De acordo com Hestenes e Ziegler (1991), como exemplo de aplicação dos resultados anteriores, vamos expor a formulação em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^3)$ do *Teorema de Desargues* no plano, descrito a seguir

(Teorema de Desargues) Sejam dois triângulos coplanares e distintos \triangle e $\tilde{\triangle}$ formados pelos conjuntos de pontos não colineares $\{A, B, C\}$ e $\{A', B', C'\}$ respectivamente, onde $\triangle \cap \tilde{\triangle} = \emptyset$. Agora consideremos p, q, r as retas que passam pelos pontos A e A' , B e B' , C e C' , respectivamente. O ponto P é a interseção das retas que passam pelos pontos B e C , B' e C' ; o ponto Q é a interseção das retas que passam pelos pontos A e C , A' e C' ; o ponto R é a interseção das retas que passam pelos pontos A e B , A' e B' . Então as retas p, q, r passam por um mesmo ponto se, e somente se, os pontos P, Q, R pertencem a uma mesma reta.

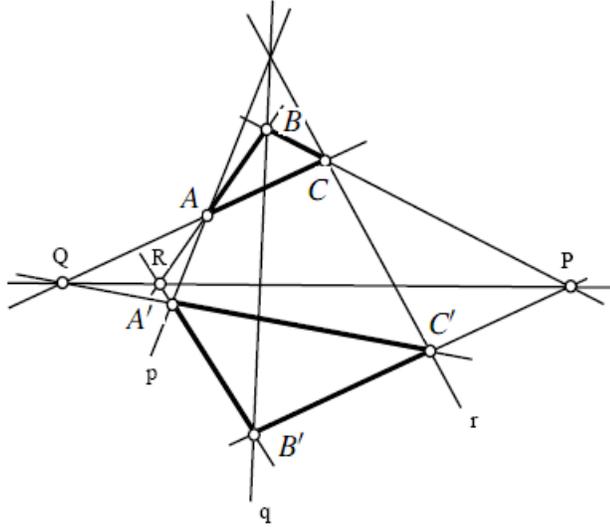


Figura 1 - Dois triângulos distintos e disjuntos.
 Fonte: Hestenes e Ziegler, 1991.

Agora demonstremos alguns resultados existentes no espaço $\mathcal{G}(\mathbb{R}^3)^+$.

Teorema 4.3 As afirmações a seguir são equivalentes:

1. Os pontos representados por P_1^+, Q_1^+, R_1^+ são *colineares*, isto é, pertencem a uma mesma reta;
2. $(P_1^+ \wedge Q_1^+) \vee R_1^+ = 0$;
3. $\langle P_1^+ * Q_1^+ * R_1^+ \rangle_3^+ = 0$.

Demonstração:

(1) \iff (2) :

Os pontos representados por P_1^+, Q_1^+, R_1^+ são *colineares*.

Isso equivale a dizer que $(P_1^+ \wedge Q_1^+) \wedge R_1^+ = 0$. Com isso, temos as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned} \bullet (P_1^+ \wedge Q_1^+) \wedge R_1^+ = 0 &\implies I^2[(P_1^+ \wedge Q_1^+) \wedge R_1^+]^- = I^2\langle (P_1^+ \wedge Q_1^+) R_1^+ \rangle_3^+ I = 0 \\ &\implies \langle (P_1^+ \wedge Q_1^+)^- R_1^- \rangle_3^+ I = [(P_1^+ \wedge Q_1^+)^- \wedge (R_1^+)^-]^- = 0 \implies (P_1^+ \wedge Q_1^+) \vee R_1^+ = 0; \end{aligned}$$

$$\bullet (P_1^+ \wedge Q_1^+) \vee R_1^+ = 0 \implies I^2[(P_1^+ \wedge Q_1^+) \wedge R_1^+]^- = 0 \implies (P_1^+ \wedge Q_1^+) \wedge R_1^+ = 0.$$

(2) \iff (3) :

Considerando as expressões algébricas $(P_1^+ \wedge Q_1^+) \vee R_1^+$ e $\langle P_1^+ * Q_1^+ * R_1^+ \rangle_3^+$, temos as seguintes equivalências:

$$(P_1^+ \wedge Q_1^+) \vee R_1^+ = \langle (P_1^+ \wedge Q_1^+) * R_1^+ \rangle_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \langle \langle P_1^- Q_1^- \rangle_2^- * R_1^+ \rangle_3^- = 0$$

$$\Leftrightarrow \langle \langle P_1^+ * Q_1^+ \rangle_1 * R_1^+ \rangle_3^- = \langle P_1^+ * Q_1^+ * R_1^+ \rangle_3^- = 0.$$

Logo, concluímos a demonstração. ■

Teorema 4.4 As afirmações a seguir são equivalentes:

1. As retas representadas por P_1^-, Q_1^-, R_1^- são *concorrentes*;
2. $(P_1^- \vee Q_1^-) \wedge R_1^- = 0$;
3. $\langle P_1^- Q_1^- R_1^- \rangle_3^- = 0$.

Demonstração:

Como P_1^-, Q_1^-, R_1^- representam retas, então P_1^+, Q_1^+, R_1^+ representam pontos. Dessa maneira, aplicando o *Teorema do Princípio de Dualidade* em cada item do Teorema 4.3, obtemos o resultado enunciado acima. ■

Teorema 4.5 As afirmações a seguir são equivalentes:

1. As retas representadas por p_2^+, q_2^+, r_2^+ são *concorrentes*, isto é, passam por um mesmo ponto;
2. $(p_2^+ \vee q_2^+) \wedge r_2^+ = 0$;
3. $\langle p_2^+ q_2^+ r_2^+ \rangle^+ = 0$.

Demonstração:

Considerando $P_1^- = p_2^+$, $Q_1^- = q_2^+$ e $R_1^- = r_2^+$ e aplicando o Teorema 4.4, obtemos o resultado enunciado acima. ■

Teorema 4.6 As afirmações a seguir são equivalentes:

1. Os pontos representados por p_2^-, q_2^-, r_2^- são *colineares*;
2. $(p_2^- \wedge q_2^-) \vee r_2^- = 0$;
3. $\langle p_2^- * q_2^- * r_2^- \rangle^- = 0$.

Demonstração:

Considerando $p_2^- \equiv P_1^+$, $q_2^- \equiv Q_1^+$ e $r_2^- \equiv R_1^+$ e aplicando o Teorema 4.3, obtemos o resultado enunciado acima. ■

Agora, consideremos em \mathbb{RP}^2 , dois triângulos distintos Δ e $\tilde{\Delta}$ cujos vértices são representados, respectivamente, pelos conjuntos distintos $\{A_1^+, B_1^+, C_1^+\} \subset \mathbb{R}^3$ e $\{\dot{A}_1^+, \dot{B}_1^+, \dot{C}_1^+\} \subset \mathbb{R}^3$ onde

$$A = A_1^+ \quad B = B_1^+ \quad C = C_1^+;$$

$$A' = \dot{A}_1^+ \quad B' = \dot{B}_1^+ \quad C' = \dot{C}_1^+.$$

Além disso, cada um desses conjuntos são formados por elementos L.I e ortogonais entre si.

Considerando $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ uma base ortogonal de \mathbb{R}^3 e $I = \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3$, temos os resultados a seguir:

$$J^+ := \langle J^+ \rangle_3^+ = A \wedge B \wedge C = \mu I \implies (J^+)^2 := \mu^2, \text{ onde } \mu \in \mathbb{R} - \{0\};$$

$$\bar{J}^+ := \langle \bar{J}^+ \rangle_3^+ = A' \wedge B' \wedge C' = \dot{\mu} I \implies (\bar{J}^+)^2 := \dot{\mu}^2, \text{ onde } \dot{\mu} \in \mathbb{R} - \{0\};$$

$$a_2^+ := B \wedge C \quad b_2^+ := C \wedge A \quad c_2^+ := A \wedge B;$$

$$\dot{a}_2^+ := B' \wedge C' \quad \dot{b}_2^+ := C' \wedge A' \quad \dot{c}_2^+ := A' \wedge B';$$

$$p = p_2^+ := A \wedge A' \quad q = q_2^+ := B \wedge B' \quad r = r_2^+ := C \wedge C';$$

$$P = P_1^+ := a_2^+ \vee \dot{a}_2^+ \quad Q = Q_1^+ := b_2^+ \vee \dot{b}_2^+ \quad R = R_1^+ := c_2^+ \vee \dot{c}_2^+.$$

Com essas informações, temos:

$$a_2^+ J^+ := -(B \wedge C)(C \wedge B \wedge A) = -(B)^2 (C)^2 A;$$

$$b_2^+ J^+ := -(A)^2 (C)^2 B;$$

$$c_2^+ J^+ := -(A)^2 (B)^2 C;$$

$$\dot{a}_2^+ \bar{J}^+ := -(B')^2 (C')^2 A';$$

$$\dot{b}_2^+ \bar{J}^+ := -(A')^2 (C')^2 B';$$

$$\dot{c}_2^+ \bar{J}^+ := -(A')^2 (B')^2 C'.$$

Com isso, podemos escrever:

$$PJ^+ = (a_2^+ \vee \dot{a}_2^+) J^+ = \frac{1}{\bar{\mu}} \langle a_2^+ J^+ \dot{a}_2^+ \bar{J}^+ \rangle_2^+ = \frac{1}{\bar{\mu}} (B)^2 (C)^2 (B')^2 (C')^2 p;$$

$$QJ^+ = \frac{1}{\bar{\mu}} (C)^2 (A)^2 (C')^2 (A')^2 q;$$

$$RJ^+ = \frac{1}{\bar{\mu}} (A)^2 (B)^2 (A')^2 (B')^2 r.$$

Agora demonstremos os teoremas a seguir.

Teorema 4.7 Consideremos os pontos representados por P_1^+, Q_1^+, R_1^+ e as retas representadas por p_2^+, q_2^+, r_2^+ , onde $P_1^- = p_2^+, Q_1^- = q_2^+$ e $R_1^- = r_2^+$. Então temos a seguinte equivalência:

$$\langle P_1^+ * Q_1^+ * R_1^+ \rangle_3^+ = 0 \iff \langle p_2^+ q_2^+ r_2^+ \rangle^+ = 0.$$

Demonstração:

Com base nos teoremas descritos anteriormente, temos a equivalência a seguir:

$$\begin{aligned}\langle P_1^+ * Q_1^+ * R_1^+ \rangle_3^+ = 0 &\iff \langle (P_1^- Q_1^- R_1^-)^- \rangle_3^+ = \frac{1}{\mu^3} \langle P_1^+ J^+ Q_1^+ J^+ R_1^+ J^+ \rangle_0^+ I \\ &= \frac{(J^+ J^+)^2}{\mu^3 \bar{\mu}^3} \langle p_2^+ q_2^+ r_2^+ \rangle_0^+ I = 0 \iff \langle p_2^+ q_2^+ r_2^+ \rangle^+ = 0.\end{aligned}$$

Logo, concluímos a demonstração. ■

Maiores detalhes, consultar (CONRADT, 2000).

Teorema 4.8 Consideremos os pontos representados por P_1^+, Q_1^+, R_1^+ e as retas representadas por p_2^+, q_2^+, r_2^+ , onde $P_1^- = p_2^+, Q_1^- = q_2^+$ e $R_1^- = r_2^+$. Então temos a seguinte equivalência:

$$\langle P_1^- Q_1^- R_1^- \rangle_3^- = 0 \iff \langle p_2^- * q_2^- * r_2^- \rangle^- = 0.$$

Demonstração:

Basta aplicar o *Teorema do Princípio de Dualidade* no Teorema 4.7 e segue-se o resultado. ■

Com isso, concluímos que os resultados anteriores demonstram o *Teorema de Desargues* no plano, representado através da álgebra geométrica $\mathcal{G}(\mathbb{R}^3)^+$. Maiores detalhes, consultar (CONRADT, 2000).

4.5 Algumas considerações

Consideremos $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ uma base ortonormal de \mathbb{R}^{n+1} . Com essa base, veremos os casos $n = 2$ e $n = 3$ para $\mathcal{G}(\mathbb{R}^{n+1})^+$.

4.5.1 Interseção em $\mathbb{R}P^2$

De acordo com Corrochano (2001), no caso $n = 2$ temos $\mathcal{G}(\mathbb{R}^3)$, a representação algébrica de $\mathbb{R}P^2$. Dados $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \bigwedge_1(\mathbb{R}^3)$, onde $A = X_1 \wedge X_2 \neq 0$ e $B = Y_1 \wedge Y_2 \neq 0$ são elementos distintos de

$\bigwedge_2(\mathbb{R}^3)$, temos o seguinte:

$$A \vee B = A^- \cdot \tilde{B} = -(A^- \cdot Y_1) Y_2 + (A^- \cdot Y_2) Y_1 \in \bigwedge_1 (\mathbb{R}^3),$$

onde $I_3 = e_1 e_2 e_3 \in \bigwedge_3 (\mathbb{R}^3)$ e $A^- = AI_3$.

Com isso, concluímos que a interseção de duas retas distintas é um ponto, em \mathbb{RP}^2 .

4.5.2 Interseção em \mathbb{RP}^3

De acordo com Corrochano (2001), no caso $n = 3$ temos $\mathcal{G}(\mathbb{R}^4)$, a representação algébrica de \mathbb{RP}^3 . Dessa maneira, dados $X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3 \in \bigwedge_1 (\mathbb{R}^4)$, onde $A = X_1 \wedge X_2 \neq 0$ e $B = Y_1 \wedge Y_2 \neq 0$ são elementos distintos de $\bigwedge_1 (\mathbb{R}^4)$; $\Phi_1 = X_1 \wedge X_2 \wedge X_3 \neq 0$ e $\Phi_2 = Y_1 \wedge Y_2 \wedge Y_3 \neq 0$ são elementos distintos de $\bigwedge_2 (\mathbb{R}^4)$, temos o seguinte:

$$A \vee \Phi = A^- \cdot \tilde{\Phi} = -\{[A^- \cdot (Y_2 \wedge Y_3)] Y_1 + [A^- \cdot (Y_3 \wedge Y_1)] Y_2 + [A^- \cdot (Y_1 \wedge Y_2)] Y_3\} \in \bigwedge_1 (\mathbb{R}^4);$$

$$\Phi_1 \vee \Phi_2 = (\Phi_1^- \cdot Y_1) Y_2 \wedge Y_3 + (\Phi_1^- \cdot Y_2) Y_3 \wedge Y_1 + (\Phi_1^- \cdot Y_3) Y_1 \wedge Y_2 \in \bigwedge_2 (\mathbb{R}^4);$$

onde $\Phi = \Phi_2$, $I_4 = e_1 e_2 e_3 e_4$, $A^- = AI_4$ e $\Phi_1^- = \Phi_1 I_4$. Diremos que Φ encontra-se entre X_1 e X_2 ; se $A = X_1 \wedge X_2 \neq 0$, X_1 e X_2 não pertencem a Φ e $X_a = A \vee \Phi \neq 0$. Isso significa que a interseção da reta projetiva representada por $X_1 \wedge X_2$ e do plano projetivo representado por Φ , que não contém os pontos projetivos representados por X_1 e X_2 , é um ponto projetivo.

Com isso, a interseção de dois planos distintos é uma reta, em \mathbb{RP}^3 . A interseção de uma reta e um plano, que não contém essa mesma reta, é um ponto, em \mathbb{RP}^3 .

No entanto, o caso $A \vee B$ merece um tratamento especial, pois $A \vee B \in \bigwedge_0 (\mathbb{R}^4)$.

Teorema 4.9 Sejam $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \bigwedge_1 (\mathbb{R}^4)$, onde $A = X_1 \wedge X_2 \neq 0$ e $B = Y_1 \wedge Y_2 \neq 0$ são elementos distintos de $\bigwedge_1 (\mathbb{R}^4)$. Se A e B representam retas projetivas distintas e coplanares então a interseção dessas retas é um ponto projetivo de \mathbb{RP}^3 .

Demonstração:

Como A e B representam retas projetivas distintas e coplanares, temos que $A \wedge B = 0$ e $A \vee B \neq 0$.

Dessa maneira concluímos, através dos Teoremas 4.1 e 4.2, que $A \vee B$ é o multivetor associado ao subespaço projetivo $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} \neq \emptyset$, onde

$$\mathbb{A} = \text{span} \{X_1, X_2\} - \{0_{\mathbb{R}^4}\} \quad \text{e} \quad \mathbb{B} = \text{span} \{Y_1, Y_2\} - \{0_{\mathbb{R}^4}\}.$$

Mas $A \vee B \in \bigwedge_0(\mathbb{R}^4)$, o que impede de sabermos se $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} \neq \emptyset$ corresponde a um ponto projetivo ou reta projetiva do espaço projetivo $\mathbb{R}P^3$.

Suponhamos que $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$ seja uma reta projetiva do espaço projetivo $\mathbb{R}P^3$. Logo, temos as seguintes implicações:

$$\mathbb{A} = \mathbb{B} \Rightarrow A = \lambda B, \text{ onde } \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow A \vee B = 0.$$

Mas, por hipótese, $A \vee B \neq 0$. Logo, $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$ não pode ser uma reta projetiva do espaço projetivo $\mathbb{R}P^3$. Dessa maneira, concluímos que $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$ é um ponto projetivo do espaço projetivo $\mathbb{R}P^3$.

Como $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$ é a interseção das retas projetivas distintas e coplanares, concluímos a demonstração. ■

Para os capítulos a seguir, identifiquemos $A \vee B$ da seguinte forma:

$$A \vee B \equiv [-(AI_3) \cdot (Y_1 \wedge e_4)]Y_2 + [(AI_3) \cdot (Y_2 \wedge e_4)]Y_1.$$

Além disso, através do Teorema 4.9, verificamos que um multivetor associado a um subespaço projetivo pode não representar o mesmo subespaço. Maiores detalhes, consultar referência (CORROCHANO, 2001).

Capítulo 5

Split Projetivo

No capítulo anterior, verificamos que os elementos da base de $\mathcal{G}(\mathbb{R}^{n+1})$ corresponde a representação algébrica dos elementos e formas geométricas de $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$. Além disso, através de $\mathcal{G}(\mathbb{R}^{n+1})$, as *relações de incidência* descrevem relações de pertinência, inclusão, inclusão entre as formas geométricas de $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$. Contudo, as relações de paralelismo ainda não foram expressas, em termos de Álgebras Geométricas.

Nesse capítulo é exposta a definição de Split Projetivo e também é exibido noções básicas sobre espaço afim, seus elementos e formas geométricas. Logo depois, utilizamos o Split Projetivo para obtermos uma identificação entre os elementos e *formas geométricas* de $\mathbb{A}\mathbb{P}^n$ (isto é, formas geométricas de $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$, escritos com elementos de $\mathbb{A}\mathbb{P}^n$), obtidas através do espaço quadrático não degenerado $(\mathbb{R}^{1,n}, g)$, com os elementos e formas geométricas do plano e o espaço afim sobre $\mathbb{R}^{n,0}$, para $n \in \{2, 3\}$. Em seguida identificamos a noção de paralelismo presente no *plano afim* sobre $\mathbb{R}^{2,0}$ e no *espaço afim* sobre $\mathbb{R}^{3,0}$, com expressões algébricas de $\mathbb{A}\mathbb{P}^2$ e $\mathbb{A}\mathbb{P}^3$.

O objetivo desse capítulo é adicionar, através do split projetivo, as noções de paralelismo aos resultados do capítulo anterior. Com isso, podemos dizer que a Álgebra Geométrica utilizada no texto é de fato uma linguagem álgebra adequada para descrever a geometria projetiva.

5.1 Definição de split projetivo

Com base em Corrochano (2001), consideremos um espaço quadrático não degenerado (V, g) , onde $V = \mathbb{R}^{1,n}$, $\dim_{\mathbb{R}} V = n + 1$, com $n \in \mathbb{Z}^+$ e $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n+1}\}$ uma base ortogonal, onde

$$g(\sigma_i, \sigma_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j = n+1 \\ 0 & \text{se } i \neq j \\ -1 & \text{se } i = j \text{ e } i \neq n+1 \end{cases}$$

e $W := \text{span}\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ um subespaço vetorial real.

Além disso, se considerarmos $\gamma_l := \sigma_l \sigma_{n+1}$, para $\forall l \in \{1, \dots, n\}$, então podemos identificar W com o espaço quadrático $(\mathbb{R}^{n,0}, \tilde{g})$, onde

1. $\mathbb{R}^{n,0} := \text{span}\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$,
2. $\tilde{g}(\gamma_k, \gamma_l) := g(\sigma_k, \sigma_l)$, para $\forall k, l \in \{1, \dots, n\}$.

Agora, consideremos $S \subset \mathbb{R}^{1,n}$, onde

$$S = \{\alpha = \dot{\alpha} + \alpha_{n+1} \sigma_{n+1} \in \mathbb{R}^{1,n} : \alpha_{n+1} \neq 0 \text{ (ou } \alpha_{n+1} = 1) \text{ e } \dot{\alpha} \in W\}.$$

Observe que podemos identificar S com $\mathbb{A}\mathbb{P}^n$, em termos de *coordenadas homogêneas*. Então a aplicação $\psi : S \rightarrow \mathbb{R}^{n,0}$, definida por

$$\psi(A) := \frac{A \wedge \sigma_{n+1}}{A \cdot \sigma_{n+1}},$$

é chamada de *split¹ projetivo*. Daqui em diante, identificamos S como sendo o conjunto $\mathbb{A}\mathbb{P}^n$.

5.2 Algumas noções de espaço afim sobre \mathbb{R}^n

De acordo com Sernesi (1993), um *Espaço Afim* é a terna $(\mathcal{H}, \mathcal{P}, \Upsilon)$, onde \mathcal{H} é um espaço vetorial real, \mathcal{P} é um conjunto chamado *espaço dos pontos*, e Υ é uma aplicação que associa cada par formado por elementos de \mathcal{P} , chamados de *pontos*, um elemento de \mathcal{H} ,

$$\Upsilon : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{H} \\ (A, B) \rightarrow \vec{AB}$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

¹ *split* é uma palavra do idioma inglês e significa *divisão*.

- Para $\forall A \in \mathcal{P}$, a aplicação $\Upsilon_A : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{H}$ é uma bijeção;

$$B \rightarrow \vec{AB}$$
- Para quaisquer terna de pontos $A, B, C \in \mathcal{P}$, a relação a seguir, chamada de *relação triangular* e indicada na figura a seguir, é satisfeita:

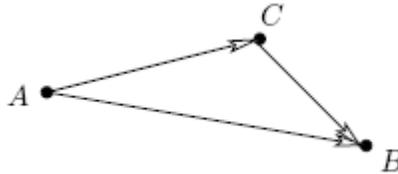


Figura 2 - Relação triangular: $\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$.

A *relação triangular* tem como consequência que

$$\vec{AA} = 0 \quad \text{e} \quad \vec{AB} = -\vec{BA},$$

onde $0 \in \mathcal{H}$ é o vetor nulo.

A *dimensão* do Espaço Afim é a dimensão do espaço vetorial \mathcal{H} .

Da definição de Espaço Afim, um *referencial* é o conjunto $\{\vec{O}_1, \dots, \vec{O}_n, O\}$, formado por $O \in \mathcal{P}$ e um conjunto L.I $\{\vec{O}_1, \dots, \vec{O}_n\}$, onde existem $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}$, tais que $\vec{O}_i = \Upsilon_O(A_i)$ para $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, e $Im \Upsilon_O = \mathcal{H} = span\{\vec{O}_1, \dots, \vec{O}_n\}$. Observe que podemos representar o espaço vetorial real \mathcal{H} através de qualquer referencial.

Um *subespaço afim* (ou *forma geométrica*) sobre o Espaço Afim, é um subconjunto \mathcal{Q} de \mathcal{P} , aonde existe um elemento $O \in \mathcal{Q}$, tal que $\Upsilon_O(\mathcal{Q})$ é um subespaço vetorial de \mathcal{H} .

A *dimensão* do subespaço afim \mathcal{Q} é a dimensão do subespaço vetorial $\Upsilon_O(\mathcal{Q})$. Todo subespaço afim é um espaço afim.

Dados dois espaços afins $(\mathcal{H}, \mathcal{P}, \Upsilon)$ e $(\mathcal{H}', \mathcal{P}', \Upsilon')$, a aplicação $\varphi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ é uma *aplicação afim* se, e somente se, existe $O \in \mathcal{P}$ e uma aplicação linear $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ tais que

$$\overline{\varphi(O) \varphi(A)} = T(\vec{OA}), \quad \text{para } \forall A \in \mathcal{P}.$$

Observe que a aplicação linear T não depende da escolha de $O \in \mathcal{P}$. Uma aplicação afim leva pontos colineares para pontos colineares.

Agora, dado qualquer espaço vetorial real \mathcal{H} , podemos construir um espaço afim, através da aplicação

$$\Upsilon : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \\ (q,p) \rightarrow \vec{u} := p - q$$

onde $\mathcal{P} = \mathcal{H}$. Nesse caso, de acordo com Gomes (2008), chamamos esse espaço afim de *Espaço Afim* sobre \mathcal{H} , e denotamos pelo par (\mathcal{H}, Υ) . Nesse espaço, denotaremos os pontos por letra minúsculas e os vetores por letras minúsculas com uma “seta” em cima.

Através do *Espaço Afim* sobre \mathcal{H} podemos definir a aplicação

$$+ : \mathcal{V} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$$

por $+(\vec{u}, p) := \vec{u} + p := q$.

Com essa aplicação e um *referencial* qualquer $\mathcal{F} := \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n, o\}$ temos

$$p = \sum_{i=1}^n c_i \vec{v}_i + o \in \mathcal{P} \quad \text{para } \forall p \in \mathcal{P} = \mathcal{H}.$$

Como a expressão anterior e considerando $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ um conjunto ortogonal, podemos representar $\forall p \in \mathcal{P}$ como sendo o elemento a seguir:

$$(c_1, \dots, c_n, 1) \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}.$$

Além disso, dados $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}$, temos

$$\sum_{i=1}^n c_i p_i = \sum_{i=1}^n c_i (p_i - o) + \left(\sum_{i=1}^n c_i \right) o$$

onde $o \in \mathcal{P}$ e $(p_i - o) \in \mathcal{V}$, para $\forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Com a informação acima temos o seguinte:

$$\bullet \sum_{i=1}^n c_i p_i \in \mathcal{H} \iff \sum_{i=1}^n c_i = 0;$$

$$\bullet \sum_{i=1}^n c_i p_i \in \mathcal{P} \iff \sum_{i=1}^n c_i = 1;$$

Além disso, podemos representar qualquer *subespaço afim* não vazio, \mathcal{Q} , do *Espaço Afim* sobre \mathcal{H} da seguinte forma:

$$\Upsilon_o(\mathcal{Q}) = \text{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\} \Leftrightarrow \vec{v}_1 \wedge \dots \wedge \vec{v}_k \neq 0;$$

onde $o \in \mathcal{Q}$, $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ é um conjunto L.I e existem $a_1, \dots, a_k \in \mathcal{Q}$, tais que $\Upsilon_o(a_i) = \vec{v}_i$ para $\forall i \in \{1, \dots, k\}$.

Mais informações, consultar as referências (GOMES, 2008) e (SERNESI, 1993).

A seguir, serão estabelecidas as relações algébricas entre $\mathbb{A}\mathbb{P}^n$ com Plano e o Espaço Afim sobre $\mathbb{R}^{n,0}$, quando $n \in \{2, 3\}$.

5.3 Relação entre $\mathbb{A}\mathbb{P}^n$ com plano e o espaço afim sobre $\mathbb{R}^{n,0}$

Com base em Corrochano (2001), dados quaisquer elementos $A = \dot{A} + A_{n+1}\sigma_{n+1}$, $B = \dot{B} + B_{n+1}\sigma_{n+1}$, $C = \dot{C} + C_{n+1}\sigma_{n+1}$ de $\mathbb{A}\mathbb{P}^n$ onde $\dot{A}, \dot{B}, \dot{C} \in W$, $a := \psi(A) = \frac{A \wedge \sigma_{n+1}}{A \cdot \sigma_{n+1}}$, $b := \psi(B) = \frac{B \wedge \sigma_{n+1}}{B \cdot \sigma_{n+1}}$ e $c := \psi(C) = \frac{C \wedge \sigma_{n+1}}{C \cdot \sigma_{n+1}}$, verificamos o seguinte:

- $A \wedge B = \langle AB \rangle_2 = A_{n+1}B_{n+1} \langle (1+a)(1-b) \rangle_2 = A_{n+1}B_{n+1} \{(a-b) - (a \wedge b)\};$
- $A \wedge B \wedge C = \langle ABC \rangle_3 = A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1} \langle (1+a)(1-b)(1+c) \sigma_{n+1} \rangle_3$
 $= A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1} \{(a-b) \wedge (c-b) + (a \wedge b \wedge c)\} \wedge \sigma_{n+1}.$

No caso $n = 2$, através das expressões anteriores e fixando qualquer referencial, podemos relacionar os elementos e formas geométricas em $\mathbb{A}\mathbb{P}^2$ com os elementos e formas geométricas do *Plano Afim* sobre $\mathbb{R}^{2,0}$. Já no caso $n = 3$, podemos relacionar os elementos e formas geométricas em $\mathbb{A}\mathbb{P}^3$ com os elementos e formas geométricas do *Espaço Afim* sobre $\mathbb{R}^{3,0}$.

Dessa maneira, quando $n \in \{2, 3\}$, dizemos que uma forma geométrica de $\mathbb{A}\mathbb{P}^n$ *representa* uma forma geométrica do *Espaço Afim* sobre $\mathbb{R}^{n,0}$ se, essas formas geométricas estão relacionadas através das expressões descritas anteriormente.

5.4 Retas paralelas do espaço $\bigwedge_2(\mathbb{R}^{1,2})$

Dizemos que duas retas distintas, representadas pelos vetores \vec{u} e \vec{v} , no *Plano Afim* sobre $\mathbb{R}^{2,0}$ são *paralelas* e denotaremos por $\vec{u} \parallel \vec{v}$ se, e somente se, $\vec{u} = \lambda \vec{v}$, onde $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$. Observe que a relação \parallel é uma *relação de equivalência*.

Além disso, dizemos que um elemento A de $\bigwedge_2(\mathbb{R}^{1,2})$ representa uma *reta gerada por elementos de* $(\mathbb{A}\mathbb{P}^2)^c$ se, e somente se, $A = Z_1 \wedge Z_2 \neq 0$, onde $Z_1, Z_2 \in (\mathbb{A}\mathbb{P}^2)^c$. Analogamente, dizemos que um elemento A de $\bigwedge_2(\mathbb{R}^{1,2})$ representa uma *reta gerada por elementos de* $(\mathbb{A}\mathbb{P}^2)$ se, e somente se, $A = Z_1 \wedge Z_2 \neq 0$, onde $Z_1, Z_2 \in (\mathbb{A}\mathbb{P}^2)$.

Definimos que duas retas distintas representadas por $A, B \in \bigwedge_2(\mathbb{R}^{1,2})$ e geradas por elementos de $\mathbb{A}\mathbb{P}^2$ são *paralelas* no espaço $\mathbb{A}\mathbb{P}^2$ e denotada por $A \parallel B$ se, e somente se, essas retas representam retas paralelas no *Plano Afim* sobre $\mathbb{R}^{2,0}$. Com base nessas definições e sabendo que a interseção de retas distintas de $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ corresponde a um ponto pertencente a $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$, consideremos o caso em que $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathbb{A}\mathbb{P}^2$ onde $A = X_1 \wedge X_2 \neq 0$ e $B = Y_1 \wedge Y_2 \neq 0$ representam retas distintas e $A \vee B \in (\mathbb{A}\mathbb{P}^2)^c$. Supondo que $X_i = \dot{X}_i + \alpha_i \sigma_3$, $Y_i = \dot{Y}_i + \beta_i \sigma_3 \in \bigwedge_1(\mathbb{R}^{1,2})$, $x_i = \psi(X_i)$, $y_i = \psi(Y_i) \in \mathbb{R}^{2,0}$ e $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R} - \{0\}$, com $i \in \{1, 2\}$, $I_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ e $I_2 = \gamma_1 \gamma_2$, obtemos através do *split projetivo* as equivalências descritas a seguir:

$$A \vee B = -(A^- \cdot Y_1) Y_2 + (A^- \cdot Y_2) Y_1 \in (\mathbb{A}\mathbb{P}^2)^c \Leftrightarrow \beta_2 (A^- \cdot Y_1) - \beta_1 (A^- \cdot Y_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow A^- \cdot (\beta_2 Y_1 \sigma_3 - \beta_1 Y_2 \sigma_3) \sigma_3 = 0 \Leftrightarrow \beta_1 \beta_2 \{A^- \cdot (y_1 - y_2) \sigma_3\} = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 \{[(x_1 - x_2) I_3 \cdot (y_1 - y_2) \sigma_3] - [(x_1 \wedge x_2) I_3 \cdot (y_1 - y_2) \sigma_3]\} = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 \{\langle (x_1 - x_2) I_3 (y_1 - y_2) \sigma_3 \rangle_0 - \langle (x_1 \wedge x_2) I_3 (y_1 - y_2) \sigma_3 \rangle_0\} = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 \{\langle (x_1 - x_2) I_2 (y_1 - y_2) \rangle_0 - \langle (x_1 \wedge x_2) I_2 (y_1 - y_2) \rangle_0\} = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 \{(x_1 - x_2) I_2 \cdot (y_1 - y_2)\} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2) \vee (y_1 - y_2) = 0 \text{ e } (x_1 - x_2) \wedge (y_1 - y_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2) \parallel (y_1 - y_2),$$

onde $(x_1 - x_2)^- \cdot (y_1 - y_2) = (y_1 - y_2) \cdot (x_1 - x_2)^-$ e $(x_1 - x_2) \wedge (y_1 - y_2) = [(y_1 - y_2) \cdot (x_1 - x_2)^-] I_2$.

Com base no resultado anterior e de acordo com Veblen e Young (1946), podemos definir que as duas retas distintas representadas por $A, B \in \bigwedge_2(\mathbb{R}^{1,2})$ e geradas por elementos de $\mathbb{A}\mathbb{P}^2$ são *paralelas* no espaço $\mathbb{A}\mathbb{P}^2$ se a interseção dessas retas é um ponto pertencente a $(\mathbb{A}\mathbb{P}^2)^c$. Em outras palavras:

$$A \parallel B \Leftrightarrow A \vee B \in (\mathbb{A}\mathbb{P}^2)^c.$$

Evidentemente, a relação \parallel , em $\bigwedge_2(\mathbb{R}^{1,2})$, é uma *relação de equivalência*.

5.5 Retas paralelas do espaço $\bigwedge_2(\mathbb{R}^{1,3})$

Dizemos que duas retas distintas, representadas pelos vetores \vec{u} e \vec{v} , no *Espaço Afim* sobre o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{3,0}$ são *paralelas* e denotamos por $\vec{u} \parallel \vec{v}$ se, e somente se, \vec{u} e \vec{v} representam retas *coplanares* e $\vec{u} = \lambda \vec{v}$, onde $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$. Além disso, as definições de *reta gerada por elementos de $(\mathbb{A}\mathbb{P}^n)^c$* e *reta gerada por elementos de $(\mathbb{A}\mathbb{P}^n)$* , quando $n = 3$, são análogas ao caso $n = 2$.

Definimos que duas retas distintas e *coplanares* representadas por $A, B \in \bigwedge_2(\mathbb{R}^{1,3})$ e geradas por elementos de $\mathbb{A}\mathbb{P}^3$ são *paralelas* no espaço $\mathbb{A}\mathbb{P}^3$ e denotada por $A \parallel B$ se, e somente se, essas retas representam retas paralelas no *Espaço Afim* sobre o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{3,0}$. Com base nessas definições e sabendo que a interseção de retas distintas *coplanares* de $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$ corresponde a um ponto pertencente a $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$, consideremos o caso em que $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathbb{A}\mathbb{P}^3$ onde $A = X_1 \wedge X_2 \neq 0$ e $B = Y_1 \wedge Y_2 \neq 0$ representam retas distintas e *coplanares* e $A \vee B \in (\mathbb{A}\mathbb{P}^3)^c$. Como $\{\sigma_1 \sigma_4, \sigma_2 \sigma_4, \sigma_3 \sigma_4\}$ é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^{3,0}$ e $X_1 \wedge \sigma_4, X_2 \wedge \sigma_4, Y_1 \wedge \sigma_4, Y_2 \wedge \sigma_4 \in \bigwedge_1(\mathbb{R}^{3,0})$, onde $X_i = \dot{X}_i + \alpha_i \sigma_4, Y_i = \dot{Y}_i + \beta_i \sigma_4 \in \mathbb{A}\mathbb{P}^3$, $x_i = \psi(X_i), y_i = \psi(Y_i) \in \mathbb{R}^{3,0}$ e $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R} - \{0\}$, com $i \in \{1, 2\}$; através do *split projetivo* obtemos as equivalência descritas a seguir:

$$A \vee B \equiv [-(AI_3) \cdot (Y_1 \wedge \sigma_4)] Y_2 + [(AI_3) \cdot (Y_2 \wedge \sigma_4)] Y_1 \in (\mathbb{A}\mathbb{P}^3)^c$$

$$\Leftrightarrow \beta_1 \beta_2 \{AI_3 \cdot (y_1 - y_2)\} = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 \{[(x_1 - x_2) - x_1 \wedge x_2] I_3 \cdot (y_1 - y_2)\} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2) \vee (y_1 - y_2) = 0 \text{ e } (x_1 - x_2) \wedge (y_1 - y_2) = 0 \text{ e } (x_1 \wedge x_2) \vee (y_1 - y_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2) \parallel (y_1 - y_2),$$

onde $I_4 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4$, $I_3 = -I_4$ e $(x_1 \wedge x_2) \vee (y_1 - y_2) = -[(x_1 \wedge x_2) \wedge (y_1 - y_2)] I_3$.

Com base no resultado anterior e de acordo com Veblen e Young (1946), podemos definir que duas retas distintas e *coplanares* representadas por $A, B \in \bigwedge_2(\mathbb{R}^{1,3})$ e geradas por elementos de $\mathbb{A}\mathbb{P}^3$ são *paralelas* no espaço $\mathbb{A}\mathbb{P}^3$ se a interseção dessas retas é um ponto pertencente a $(\mathbb{A}\mathbb{P}^3)^c$. Em outras palavras:

$$A \parallel B \Leftrightarrow A \vee B \in (\mathbb{A}\mathbb{P}^3)^c \text{ e } A \wedge B = 0.$$

Evidentemente, a relação \parallel , em $\bigwedge_2(\mathbb{R}^{1,3})$, é uma *relação de equivalência*.

5.6 Planos paralelos do espaço $\bigwedge_3(\mathbb{R}^{1,3})$

Dizemos que dois planos distintos, representados por $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$ e $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$, no *Espaço Afim* sobre o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{3,0}$ são *paralelos* e denotamos por $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 \parallel \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$ se, e somente se, $(\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2)^- \cdot \vec{v}_1 = 0$ e $(\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2)^- \cdot \vec{v}_2 = 0$, onde $(\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2)^-$ corresponde ao *vetor normal* a $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$, isto é, um vetor do *Espaço Afim* sobre o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{3,0}$, *ortogonal* a \vec{u}_1 e *ortogonal* a \vec{u}_2 .

Definimos que $\Phi_1, \Phi_2 \in \bigwedge_3(\mathbb{R}^{1,3})$ representam *planos paralelos* do espaço $\mathbb{A}\mathbb{P}^3$ e denotado por $\Phi_1 \parallel \Phi_2$ se, e somente se, esses planos representam planos paralelos no *Espaço Afim* sobre o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{3,0}$. Sabendo que a interseção de planos distintos de $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$ corresponde a uma reta pertencente a $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$, consideremos o caso em que $X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3 \in \mathbb{A}\mathbb{P}^3$, onde $\Phi_1 = X_1 \wedge X_2 \wedge X_3 \neq 0$

e $\Phi_2 = Y_1 \wedge Y_2 \wedge Y_3 \neq 0$ representam planos distintos e $\Phi_1 \vee \Phi_2 \in \bigwedge_2 (\mathbb{R}^{1,3})$ corresponde a uma reta gerada por elementos de $(\mathbb{A}\mathbb{P}^3)^c$. Através do *split projetivo* obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned}
\Phi_1^- \cdot Y_i &= \{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 [(x_1 - x_2) \wedge (x_3 - x_2) + x_1 \wedge x_2 \wedge x_3] \wedge \sigma_4\} I_4 \cdot Y_i \\
&= \{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 [(x_1 - x_2) \wedge (x_3 - x_2) + x_1 \wedge x_2 \wedge x_3] \wedge \sigma_4\} I_4 \cdot (\dot{Y}_i + \beta_i \sigma_4) \\
&= \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \beta_i [(x_1 - x_2) \wedge (x_3 - x_2) + x_1 \wedge x_2 \wedge x_3] I_3 \cdot y_i \\
&= \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \beta_i [(x_1 - x_2) \wedge (x_3 - x_2)] I_3 \cdot y_i \\
&= \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \beta_i [(x_1 - x_2) \wedge (x_3 - x_2)] \vee y_i,
\end{aligned}$$

onde $X_i = \dot{X}_i + \alpha_i \sigma_4$, $Y_i = \dot{Y}_i + \beta_i \sigma_4 \in \bigwedge_1 (\mathbb{R}^{1,3})$, $x_i = \psi(X_i)$, $y_i = \psi(Y_i) \in \mathbb{R}^{3,0}$ e $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R} - \{0\}$, com $i \in \{1, 2, 3\}$, $I_4 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4$ e $I_3 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$.

Dessa forma temos a seguinte igualdade:

$$(\Phi_1^- \cdot Y_i) (Y_j \wedge Y_k) = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \beta_1 \beta_2 \beta_3 \{[(x_1 - x_2) \wedge (x_3 - x_2)] I_3 \cdot y_i\} [(y_j - y_k) - (y_j \wedge y_k)],$$

onde $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$, com $i \neq j$, $i \neq k$, $j \neq k$, $y_j \wedge y_k = \langle y_j y_k \rangle_2 \in \text{span}\{\sigma_1 \sigma_2, \sigma_2 \sigma_3, \sigma_3 \sigma_1\}$ e $(y_j - y_k) \in \text{span}\{\sigma_1 \sigma_4, \sigma_2 \sigma_4, \sigma_3 \sigma_4\}$.

Dizemos que um elemento A de $\bigwedge_2 (\mathbb{R}^{1,3})$ representa uma *reta gerada por elementos de* $(\mathbb{A}\mathbb{P}^3)^c$ se, e somente se, $A = Z_1 \wedge Z_2 \neq 0$, onde $Z_1, Z_2 \in (\mathbb{A}\mathbb{P}^3)^c$. Analogamente, dizemos que um elemento A de $\bigwedge_2 (\mathbb{R}^{1,3})$ representa uma *reta gerada por elementos de* $(\mathbb{A}\mathbb{P}^3)$ se, e somente se, $A = Z_1 \wedge Z_2 \neq 0$, onde $Z_1, Z_2 \in (\mathbb{A}\mathbb{P}^3)$.

Com isso temos o seguinte:

$$\begin{aligned}
\Phi_1 \vee \Phi_2 \in \bigwedge_2 (\mathbb{R}^{1,3}) \text{ corresponde a uma reta gerada por elementos de } (\mathbb{A}\mathbb{P}^3)^c \\
\Leftrightarrow \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \beta_1 \beta_2 \beta_3 \{[(x_1 - x_2) \wedge (x_3 - x_2)] I_3 \cdot y_i\} (y_j - y_k) = 0
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow [(x_1 - x_2) \wedge (x_3 - x_2)]^- \cdot (y_i - y_j) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2) \wedge (x_3 - x_2) \parallel (y_1 - y_2) \wedge (y_3 - y_2),$$

onde

$$\{[(x_1 - x_2) \wedge (x_3 - x_2)] I_3 \cdot y_i\} (y_j - y_k) = - \{[(x_1 - x_2) \wedge (x_3 - x_2)] I_3 \cdot (y_j - y_k)\} y_i.$$

Com base no resultado anterior e de acordo com Veblen e Young (1946), podemos definir que $\Phi_1, \Phi_2 \in \bigwedge_3 (\mathbb{R}^{1,3})$ representam *planos paralelos* no espaço $\mathbb{A}\mathbb{P}^3$ se $\Phi_1 \vee \Phi_2 \in \bigwedge_2 (\mathbb{R}^{1,3})$ corresponde a uma reta gerada por elementos de $(\mathbb{A}\mathbb{P}^3)^c$. Em outras palavras:

$$\Phi_1 \parallel \Phi_2 \Leftrightarrow \Phi_1 \vee \Phi_2 \in \bigwedge_2 (\mathbb{R}^{1,3}) \text{ corresponde a uma reta gerada por elementos de } (\mathbb{A}\mathbb{P}^3)^c.$$

Evidentemente, a relação \parallel para $\bigwedge_3 (\mathbb{R}^{1,3})$, é uma *relação de equivalência*.

Mais detalhes sobre *split projetivo*, consultar a referência (CORROCHANO, 2001).

Capítulo 6

Aplicações das Álgebras de Clifford: Câmeras Virtuais

Uma vez fixada a linguagem algébrica para descrever os conceitos de geometria projetiva, nesse capítulo são exibidos os conceitos de transformações projetivas, incluindo algumas transformações importantes, e finalmente é exibido o conceito de câmera virtual. Com isso, o objetivo desse capítulo consiste, através das Álgebras Geométricas, descrever a câmera virtual e obter os tensores bifocais, trifocais e quadrifocais, os quais relacionam algebricamente duas, três e quatro câmeras virtuais.

6.1 Introdução

De acordo com Gomes (2008, p.1), a *Computação Gráfica* é a área de pesquisa composta por um “conjunto de métodos e técnicas para transformar dados em imagem, através de um dispositivo gráfico”. Tal área de pesquisa pode ser subdividida em outras áreas. São elas:

- *Modelagem geométrica*
- *Síntese de imagens*
- *Processamento de imagens*
- *Análise de imagens*

A *Modelagem geométrica* é a área que “trata do problema de descrever e estruturar dados geométricos no computador” (GOMES, 2008, p.2).

A área de *Síntese de imagens*, também chamada pelo nome de *Visualização*, consiste em utilizar informações geradas por um sistema de modelagem geométrica para gerar uma imagem a qual é exibida através de algum dispositivo de saída gráfica, como monitores e impressoras (GOMES, 2008, p.2).

A área de *Processamento de imagens* consiste em processar uma imagem registrada, produzindo na sequência, uma nova imagem. Como exemplo temos o processamento de imagens obtidas por um satélite, com a finalidade de colorizar ou realçar detalhes (GOMES, 2008, p.3).

De acordo com Gomes (2008), a área de *Análise de imagens*, também chamada pelo nome de *Visão Computacional*, é a área que tem como objetivo obter de uma ou mais imagens, suas informações geométricas, topológicas ou físicas. Além disso, de acordo com Gomes (2008, p.3), “as técnicas dessa área têm grande interesse em robótica, com o objetivo de prover o sentido da visão aos robôs, e em áreas se utilizam da composição de cenários reais com cenários sintéticos.” As imagens são obtidas através de um modelo de câmera real, chamada de câmera virtual. Pode-se utilizar mais de uma câmera virtual, para obter informações mais precisas sobre uma mesma imagem.

A seguir, serão desenvolvidos os aspectos teóricos necessários para tratar do problema envolvendo câmeras virtuais, utilizando-se de Álgebras de Clifford.

6.2 Transformações projetivas

Consideremos a aplicação $T : \mathbb{RP}^r \rightarrow \mathbb{RP}^s$, onde $r, s \in \mathbb{N}_*$. Nesse caso, dizemos que T é uma *transformação projetiva* se, e somente se, em termos de *coordenadas homogêneas*, $T : \mathbb{R}^{r+1} \rightarrow \mathbb{R}^{s+1}$ é uma *transformação linear*. Observe que $T(\lambda u) = T(u)$, para $\forall \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $\forall u \in \mathbb{RP}^r$.

A *matriz associada* a transformação projetiva $T : \mathbb{RP}^r \rightarrow \mathbb{RP}^s$ é a matriz associada a transformação linear $T : \mathbb{R}^{r+1} \rightarrow \mathbb{R}^{s+1}$. A seguir, veremos alguns casos especiais de transformações projetivas importantes.

6.2.1 A transformação $T : \mathbb{RP}^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$

De acordo com Corrochano (2005) e Gomes (2008), consideremos a transformação projetiva $T : \mathbb{RP}^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$ que corresponde, em termos de *coordenadas homogêneas*, a transformação linear $T : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ cuja matriz associada é da forma $M = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ onde $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $t \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. Nesse caso T transforma elementos de \mathbb{AP}^n em elementos de \mathbb{AP}^n , e T transforma elementos de $(\mathbb{AP}^n)^c$ em elementos de $(\mathbb{AP}^n)^c$. Com isso podemos rescrever T na forma

$$T(\tilde{u}) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}(u) + u_{m+1}t \\ u_{m+1} \end{bmatrix},$$

onde $\tilde{u} = \begin{bmatrix} u \\ u_{m+1} \end{bmatrix} \in \mathbb{RP}^n$ com $u \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ e $u_{m+1} \in \mathbb{R}$.

Verificamos através do *split projetivo*, que as coordenadas de u correspondem as coordenadas de um elemento de $\mathbb{R}^{n,0}$. Dessa forma, dizemos que T é uma *translação* se, e somente se, $\mathcal{A} = I_{n \times n}$ é a matriz identidade e $t \neq 0$. Além disso, dizemos que T é uma *rotação* se, e somente se, \mathcal{A} é uma *matriz de rotação* e $t = 0$.

Nesse caso, dizemos que $T : \mathbb{RP}^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$ é uma *colineação* ou *transformação de perspectiva* se, e somente se, em termos de *coordenadas homogêneas*, essa transformação corresponde a transformação linear $T : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ cuja matriz associada é da forma $M = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ a qual é chamada de *matriz mudança de base* e é uma combinação de uma *rotação* e uma *translação*, onde $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma *matriz de rotação* e $t \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ corresponde a uma *translação*. Observemos que $M^{-1} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}^{-1} & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, onde $h = -\mathcal{A}^{-1}(t)$, é uma matriz associada a uma transformação de perspectiva $\tilde{T} : \mathbb{RP}^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$, onde $M^{-1}M = MM^{-1} = I_{n \times n}$. Logo, $T^{-1} = \tilde{T}$ é chamada de *inversa* da transformação de perspectiva. Podemos, nesse caso, dizer que toda *transformação de perspectiva* possui uma *inversa*. Além disso, uma transformação de perspectiva $T : \mathbb{RP}^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$ representa uma *transformação afim* do *espaço afim* sobre $\mathbb{R}^{n,0}$ (CORROCHANO, 2005).

6.2.2 A transformação $T : \mathbb{RP}^n \rightarrow \mathbb{RP}^{n-1}$

Dizemos que uma *câmera projetiva* é a transformação projetiva $T : \mathbb{RP}^n \rightarrow \mathbb{RP}^{n-1}$ onde $n > 1$ a qual, em termos de *coordenadas homogêneas*, corresponde a transformação linear $T : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ cuja matriz associada é da forma $M = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times (n+1)}$ de posto igual a n (isto é, $\text{posto}(M) = n$), onde $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $t \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ corresponde a uma *translação* e $h \in \mathbb{R}^{n+1}$, tal que $Mh = 0$, é chamado de *centro focal*. Com isso podemos rescrever T na forma

$$T(\tilde{u}) = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & t \end{bmatrix} (\tilde{u}) = \mathcal{A}(u) + u_{n+1}t,$$

onde $\tilde{u} = \begin{bmatrix} u \\ u_{n+1} \end{bmatrix} \in \mathbb{RP}^n$ com $u \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ e $u_{n+1} \in \mathbb{R}$.

Com base em Corrochano (2005), existem alguns modelos particulares de *câmeras projetivas*, quando $n = 3$, determinados a partir de $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ e $t \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$. São eles:

1. **Câmera Perspectiva (ou Câmera Central):** É uma câmera projetiva onde

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{f} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \text{ e } t = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{3 \times 1} \quad \text{onde } f > 0.$$

2. **Câmera Afim:** É uma câmera projetiva onde

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

3. **Câmera Perspectiva Fraca:** É um caso particular de câmera afim onde

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \text{ e } t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{Z}{f} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1} \quad \text{onde } f > 0.$$

4. **Câmera Ortográfica:** É um caso particular câmera perspectiva fraca onde

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \text{ e } t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}.$$

Na próxima seção, veremos como um modelo de câmera fotográfica pode ser representado por uma câmera projetiva.

6.3 Modelo de câmera pinhole

De acordo com Corrochano (2005), o sistema ótico usado como modelo matemático de uma câmera fotográfica é chamado de *câmera pinhole*¹.

Esse sistema consiste de uma pequena caixa, com um furo C em um dos seus lados, o qual recebe o nome de *ponto focal*. No lado oposto do furo, encontra-se o chamado *plano de imagem*, o qual incide a imagem do objeto de coordenadas (X, Y, Z) , onde $Z > 0$.

Observe que o ponto C corresponde a origem de um sistemas de coordenadas ortogonais e_x, e_y, e_z . Nesse caso, podemos dizer que $(X, Y, Z) := Xe_x + Ye_y + Ze_z$.

¹ *pinhole* é a junção das palavras *pin* e *hole*, do idioma inglês, e significa *buraco de alfinete*.

A figura a seguir representa esse sistema ótico.

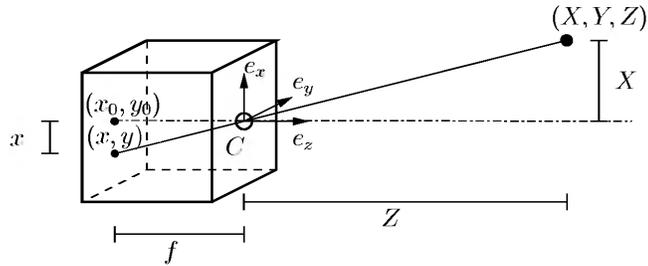


Figura 3 - Modelo de câmera pinhole.
Fonte: Corrochano, 2005.

A distância entre o ponto C e o *plano de imagem* é chamado de *distância focal*, e é representada pela letra $f > 0$.

A imagem do objeto de coordenadas (X, Y, Z) no *plano de imagem* é uma figura de coordenadas (x, y) .

Observe que a *projeção ortogonal* do ponto C , no *plano de imagem*, é representada pelas coordenadas $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Essas coordenadas correspondem a origem de um sistema de coordenadas do *plano de imagem*.

Por semelhança de triângulos, temos os seguintes resultados:

- $\frac{x}{f} = \frac{X}{Z} \implies \lambda x = fX$, onde $\lambda = Z > 0$;
- $\frac{y}{f} = \frac{Y}{Z} \implies \lambda y = fY$, onde $\lambda = Z > 0$.

Representando os resultados anteriores em termos matriciais, temos

$$\lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix},$$

Onde denotamos

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{A}\mathbb{P}^2, \dot{X} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{A}\mathbb{P}^3, P_0 = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{S}_0 & 0 \end{bmatrix}$$

e $\mathcal{S}_0 = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Com isso obtemos a equação na forma $\lambda \dot{x} = P_0 \dot{X}$. Observe que o modelo de câmera pinhole corresponde a uma câmera de perspectiva.

No modelo de câmera pinhole descrito na figura acima, o plano de imagem corresponde ao espaço gerado pelas coordenadas ortogonais e_x, e_y e supomos que as imagens nesse plano não sofrem nenhuma distorção. No caso geral, as imagens nesse plano podem sofrer alguma deformação e deslocamento de posição. De acordo com Corrochano (2005), isso pode ser representado matricialmente através da matriz não singular abaixo:

$$K = \begin{bmatrix} \gamma & s & \alpha_0 \\ 0 & 1 & \beta_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ com } \gamma \neq 0.$$

Nesse caso, essa matriz transforma as coordenadas da imagem de um objeto no plano de imagem descrito na figura anterior, nas coordenadas da imagem desse mesmo objeto mas com distorções e deslocamento de posição. Os parâmetros $f, \gamma, s, \alpha_0, \beta_0$ presentes nessa matriz são chamados de *parâmetros intrínsecos*, onde $\gamma \neq 0$. Quando conhecemos os valores dos *parâmetros intrínsecos*, dizemos que a câmera é *calibrada*. Caso contrário, a câmera é *descalibrada*. Para maiores informações sobre esse assunto ver referência (CORROCHANO, 2005).

Agora, consideremos uma matriz $P \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$, escrita na forma

$$P = KP_0 \mathcal{M}_{4 \times 4}$$

onde

- $P = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$;
- $\mathcal{M}_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{3 \times 3} & t_{3 \times 1} \\ 0_{1 \times 3}^T & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz associada a transformação projetiva $T : \mathbb{RP}^4 \rightarrow \mathbb{RP}^4$.

Quando $\mathcal{A}_{3 \times 3}$ é uma *matriz de rotação*, temos

$$\begin{aligned} PX &= \{K \mathcal{S}_0 \mathcal{M}_{4 \times 4}\} X = \left\{ K \begin{bmatrix} \mathcal{S}_0 \mathcal{A}_{3 \times 3} & P_0 t_{3 \times 1} \end{bmatrix} \right\} X \\ &= \begin{bmatrix} K \mathcal{S}_0 \mathcal{A}_{3 \times 3} & K P_0 t_{3 \times 1} \end{bmatrix} X; \end{aligned}$$

onde $X \in \mathbb{A}\mathbb{P}^3$, $KP_0 \mathcal{A}_{3 \times 3} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ é uma matriz não singular.

De acordo com Gomes (2008), chamamos $\mathcal{A}_{3 \times 3}$ e $t_{3 \times 1}$, da matriz $\mathcal{M}_{4 \times 4}$, de *parâmetros extrínsecos*. Se $\text{posto}(P) = 3$ e $\exists h \in \mathbb{R}^4$, tal que $Ph = 0$, então a equação matricial da forma $\lambda x = PX$, onde $x \in \mathbb{R}\mathbb{P}^2$ e $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, é chamada de *equação da câmera* e a matriz P é chamada de *matriz da câmera*.

A equação matricial da forma $\lambda x = PX$ representa uma generalização da *câmera pinhole*; formada por uma *colinação*, uma *câmera de perspectiva* e uma matriz composta por *parâmetros intrínsecos*. Devido aos dados descritos acima, a matriz P é associada a uma *câmera projetiva* $T : \mathbb{R}\mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^2$, a qual chamaremos de *câmera virtual*. Na próxima seção, esse assunto será abordado através de uma descrição algébrica.

6.4 Modelos algébricos de câmeras virtuais

Podemos identificar o modelo da *câmera virtual* como o processo de *tirar uma foto*, isto é, o ponto focal corresponde à localização do fotógrafo, o objeto corresponde à um objeto do mundo real a ser fotografado e o *plano de imagem* corresponde o filme da câmera fotográfica. Observe que a projeção da imagem de um objeto no *plano de imagem* encontra-se invertida. A fim de obter um modelo matemático da *câmera virtual*, de uma forma mais simples possível e sem alterar suas características, deslocamos o *plano de imagem* posicionando-o entre o *ponto focal* e o objeto a ser visualizado. Do ponto de vista da geometria, o modelo de câmera se reduz portanto a uma *projeção cônica* (ou também chamado de *projeção de perspectiva*), onde o *ponto focal* será chamado de *centro ótico*. A seguir vamos descrever algebricamente essa projeção de perspectiva, através da Álgebra Geométrica e em seguida relacionar algebricamente os casos em que existe mais de uma projeção. Finalmente, conclui-se que o modelo matemático descrito corresponde ao modelo de uma ou mais câmeras envolvidas no estudo.

6.4.1 Modelo de uma câmera virtual

Consideremos a base ortogonal do Capítulo 5 e os resultados descritos nos Capítulos 4 e 5.

Além disso, de acordo com Corrochano (2001) e Perwass (2000), consideremos o conjunto $\mathfrak{A} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ de elementos de $\mathbb{A}\mathbb{P}^3$, linearmente independentes e ortogonais entre si, onde $\Phi_A = A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \neq 0$ é considerado um *plano de imagem* e consideremos $A_4 \in \mathbb{A}\mathbb{P}^3$ como o *centro ótico*, onde A_4 não pertence a Φ_A . Com isso, podemos obtemos as retas a seguir:

$$L_1^A := A_2 \wedge A_3 \quad L_2^A := A_3 \wedge A_1 \quad L_3^A := A_1 \wedge A_2$$

Agora consideremos um ponto projetivo representado por $X \in \mathbb{A}\mathbb{P}^3$, onde X não pertence a Φ_A e Φ_A encontra-se entre X e A_4 . Dessa forma $A_4 \wedge X$ é uma reta que atravessa Φ_A em um ponto X_a o qual é denominado de *imagem de X no plano Φ_A* . Com isso, obtemos o modelo de projeção de perspectiva, denominado *modelo de uma câmera*, descrito pela figura a seguir:

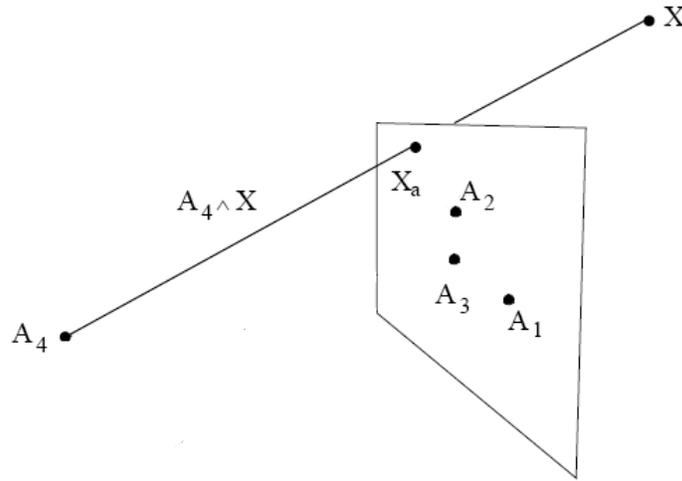


Figura 4 - Modelo de uma câmera.
Fonte: Perwass, 2000.

Agora consideremos os planos a seguir, denominados de *planos óticos*:

- $\Phi_1^A := A_4 \wedge A_2 \wedge A_3 = A_4 \wedge L_1^A \neq 0$,
- $\Phi_2^A := A_4 \wedge A_3 \wedge A_1 = A_4 \wedge L_2^A \neq 0$,
- $\Phi_3^A := A_4 \wedge A_1 \wedge A_2 = A_4 \wedge L_3^A \neq 0$.

Com isso obtemos

$$X_a := (A_4 \wedge X) \vee \Phi_A = \sum_{i=1}^3 [-(A_4 \wedge X) \vee L_i^A] A_i = \sum_{i=1}^3 (X \vee \Phi_i^A) A_i,$$

pois $-(A_4 \wedge X) \vee L_i^A = X \vee \Phi_i^A$ é um escalar, ou seja, $X \vee \Phi_i^A \in \mathbb{R}$.

Dessa maneira, temos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
X_a &:= (A_4 \wedge X) \vee \Phi_A = \sum_{i=1}^3 (X \vee \Phi_i^A) A_i = \sum_{i=1}^3 [- (\Phi_i^A \vee X)] A_i \\
&= \sum_{i=1}^3 [- (\widetilde{\Phi_i^A \vee X})] A_i = \sum_{i=1}^3 [- (\Phi_i^A)^- \cdot \widetilde{X}] A_i = \sum_{i=1}^3 [- (\Phi_i^A)^- \cdot X] A_i \\
&= \sum_{i=1}^3 \alpha^i A_i,
\end{aligned}$$

onde $\alpha^i = - (\Phi_i^A)^- \cdot X$. Considerando

$$- (\Phi_1^A)^- = t_{11} \sigma_1 + t_{12} \sigma_2 + t_{13} \sigma_3 + t_{14} \sigma_4 = - \langle A_4 A_2 A_3 \rangle_3^- = -A_1,$$

$$- (\Phi_2^A)^- = t_{21} \sigma_1 + t_{22} \sigma_2 + t_{23} \sigma_3 + t_{24} \sigma_4 = - \langle A_4 A_3 A_1 \rangle_3^- = -A_2,$$

$$- (\Phi_3^A)^- = t_{31} \sigma_1 + t_{32} \sigma_2 + t_{33} \sigma_3 + t_{34} \sigma_4 = - \langle A_4 A_1 A_2 \rangle_3^- = -A_3,$$

$$X = x_1 \sigma_1 + x_2 \sigma_2 + x_3 \sigma_3 + x_4 \sigma_4,$$

onde $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4 = A_1 A_2 A_3 A_4 = \lambda I_4$, $I_4 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4$ e $t_{ij}, x_j \in \mathbb{R}$, com $i \in \{1, 2, 3\}$ e $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, podemos escrever os resultados descritos acima, em termos de coordenadas homogêneas, obtendo a expressão matricial a seguir:

$$\begin{bmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix},$$

$$\text{onde } P = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 4}, \text{ com } \text{posto}(P) = 3 \text{ e } P A_4 = 0.$$

Com isso, podemos dizer que P é a *matriz de câmera* e a equação

$$\lambda \widetilde{X}_a = P X,$$

onde $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $\lambda \widetilde{X}_a = X_a$ representa um ponto projetivo pertencente a \mathbb{RP}^2 , é a equação da câmera da câmera pinhole. Além disso, concluímos que o centro ótico A_4 corresponde ao centro focal da matriz de câmera P . Através da matriz de câmera é possível relacionar pontos pertencentes a \mathbb{AP}^3 com pontos pertencentes a \mathbb{RP}^2 .

Note que o modelo matemático obtido corresponde ao modelo de câmera citado anteriormente. Daqui em diante, diremos que um modelo de uma câmera corresponde ao modelo matemático descrito anteriormente. Observe que com a Álgebra Geométrica é possível, a partir de uma interpretação geométrica de um modelo de câmera, obtermos uma interpretação matemática desse mesmo modelo. Maiores detalhes, ver as referências (CORROCHANO, 2001) e (PERWASS, 2000).

Dado o modelo de uma câmera, consideremos uma reta projetiva representada por $L = X \wedge Y$, onde $X, Y \in \mathbb{AP}^3$, e as imagens desses pontos projetivos representados por

$$X_a = (A_4 \wedge X) \vee \Phi_A = \sum_{i=1}^3 [-(A_4 \wedge X) \vee L_i^A] A_i;$$

$$Y_a = (A_4 \wedge Y) \vee \Phi_A = \sum_{j=1}^3 [-(A_4 \wedge Y) \vee L_j^A] A_j.$$

Como $-(A_4 \wedge X) \vee L_i^A = X \vee \Phi_i^A$ e $-(A_4 \wedge Y) \vee L_j^A = Y \vee \Phi_j^A$, concluímos que

$$X_a = \sum_{i=1}^3 (X \vee \Phi_i^A) A_i \quad \text{e} \quad Y_a = \sum_{j=1}^3 (Y \vee \Phi_j^A) A_j.$$

Consideremos a reta projetiva de \mathbb{RP}^2 representada por

$$l = X_a \wedge Y_a = l_{23}L_1^A + l_{31}L_2^A + l_{12}L_3^A,$$

onde $l_{ij} = (X \vee \Phi_i^A) (Y \vee \Phi_j^A) - (X \vee \Phi_j^A) (Y \vee \Phi_i^A) = \left[(\Phi_i^A \vee \Phi_j^B)^- \cdot L \right] \in \mathbb{R}$.

Também, consideremos

$$(\Phi_1^A \vee \Phi_2^B)^- = u_{31}\sigma_1\sigma_2 + u_{32}\sigma_2\sigma_3 + u_{33}\sigma_3\sigma_1 + u_{34}\sigma_1\sigma_4 + u_{35}\sigma_2\sigma_4 + u_{36}\sigma_3\sigma_4;$$

$$(\Phi_3^A \vee \Phi_1^B)^- = u_{21}\sigma_1\sigma_2 + u_{22}\sigma_2\sigma_3 + u_{23}\sigma_3\sigma_1 + u_{24}\sigma_1\sigma_4 + u_{25}\sigma_2\sigma_4 + u_{26}\sigma_3\sigma_4;$$

$$(\Phi_2^A \vee \Phi_3^B)^- = u_{11}\sigma_1\sigma_2 + u_{12}\sigma_2\sigma_3 + u_{13}\sigma_3\sigma_1 + u_{14}\sigma_1\sigma_4 + u_{15}\sigma_2\sigma_4 + u_{16}\sigma_3\sigma_4;$$

$$L = X \wedge Y = p_{12}\sigma_1\sigma_2 + p_{23}\sigma_2\sigma_3 + p_{31}\sigma_3\sigma_1 + p_{14}\sigma_1\sigma_4 + p_{24}\sigma_2\sigma_4 + p_{34}\sigma_3\sigma_4,$$

onde $\sigma_{ij}, p_{12}, p_{23}, p_{31}, p_{14}, p_{24}, p_{34} \in \mathbb{R}$, com $i \in \{1, 2, 3\}$ e $j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Escrevendo os resultados descritos acima, em coordenadas homogêneas, temos a seguinte expressão matricial:

$$\begin{bmatrix} l_{23} \\ l_{31} \\ l_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & u_{15} & u_{16} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & u_{25} & u_{26} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & u_{35} & u_{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{23} \\ p_{31} \\ p_{14} \\ p_{24} \\ p_{34} \end{bmatrix},$$

onde as coordenadas homogêneas da reta projetiva representada por L ,

$$\begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{23} \\ p_{31} \\ p_{14} \\ p_{24} \\ p_{34} \end{bmatrix},$$

são denominadas de

coordenadas de Plücker.

Observe que $L \wedge L = (p_{12}p_{34} + p_{23}p_{14} + p_{31}p_{24})I_4 = 0$, onde $I_4 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4 \neq 0$. Logo, a relação entre as *coordenadas de Plücker* é dada por

$$(p_{12}p_{34} + p_{23}p_{14} + p_{31}p_{24}) = 0.$$

Com esses resultados, concluímos que o *modelo de uma câmera* possibilita representar pontos e retas projetivas do espaço projetivo \mathbb{RP}^3 , por ponto e retas projetivas no plano de imagens. Maiores detalhes, ver as referências (CORROCHANO, 2001) e (PERWASS, 2000).

6.4.2 Modelo de duas câmeras virtuais

Suponhamos que um fotógrafo queira tirar uma foto de um mesmo objeto só que se posicionando em dois lugares diferentes, isto é, dois *centros focais* distintos. Como resultado obtemos duas fotos

distintas, isto é, duas imagens distintas onde cada uma delas pertence a *planos de imagem* distintos, de uma mesmo objeto. Algebricamente, podemos representar essa situação da forma a seguir.

De acordo com Corrochano (2001) e Perwass (2000), consideremos $\mathfrak{A}_1 = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ e $\mathfrak{A}_2 = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ dois conjuntos formados por elementos de $\mathbb{A}\mathbb{P}^3$, linearmente independentes e ortogonais entre si, onde $\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2 = \emptyset$, $\Phi_A = A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \neq 0$ e $\Phi_B = B_1 \wedge B_2 \wedge B_3 \neq 0$, A_4 e B_4 não pertencem nem a Φ_A e nem a Φ_B , tanto Φ_A como Φ_B encontram-se entre A_4 e B_4 . Nesse caso, consideremos que A_4 e B_4 representam dois *centros focais* distintos.

Em cada plano podemos obter as retas linearmente independentes a seguir:

$$L_1^A := A_2 \wedge A_3 \quad L_2^A := A_3 \wedge A_1 \quad L_3^A := A_1 \wedge A_2,$$

$$L_1^B := B_2 \wedge B_3 \quad L_2^B := B_3 \wedge B_1 \quad L_3^B := B_1 \wedge B_2.$$

Dados dois *modelos de câmeras*, uma *epipole*² corresponde a *imagem* do *centro focal* de um modelo de câmera no plano de imagem de outro modelo de câmera. Evidentemente, para obtermos uma *epipole* é necessário mais de um modelo de câmera. Como $A_4 \wedge B_4 \neq 0$ obtemos as *epipoles* E_{ab} e E_{ba} , definidas nas formas abaixo:

$$E_{ab} := (A_4 \wedge B_4) \vee \Phi_A = \sum_{i=1}^3 \mu^i A_i,$$

$$E_{ba} := (B_4 \wedge A_4) \vee \Phi_B = \sum_{j=1}^3 \nu^j B_j,$$

onde $\mu^i = [(A_4 \wedge B_4)^- \cdot L_i^A]$ e $\nu^j = [(B_4 \wedge A_4)^- \cdot L_j^B]$ pertencem a \mathbb{R} .

O ponto E_{ab} corresponde a imagem de B_4 no plano Φ_A . Já o ponto E_{ba} corresponde a imagem de A_4 no plano Φ_B . Observemos o seguinte:

$$\begin{aligned} \bullet E_{ab} \wedge E_{ba} &= [\Phi_A \vee (A_4 \wedge B_4)] \wedge [\Phi_B \vee (B_4 \wedge A_4)] = [(\Phi_A)^- \cdot (A_4 \wedge B_4)] \wedge [(\Phi_B)^- \cdot (B_4 \wedge A_4)] \\ &= \{[(\Phi_A)^- \cdot A_4] B_4 - [(\Phi_A)^- \cdot B_4] A_4\} \wedge \{[(\Phi_B)^- \cdot B_4] A_4 - [(\Phi_B)^- \cdot A_4] B_4\} \\ &= \{[(\Phi_A)^- \cdot B_4] [(\Phi_B)^- \cdot A_4] - [(\Phi_A)^- \cdot A_4] [(\Phi_B)^- \cdot B_4]\} A_4 \wedge B_4 \end{aligned}$$

² *epipole* é a junção das palavras *epi*, do idioma grego, e *pole*, do idioma inglês, e significa *ponto do segmento de reta*.

$$\begin{aligned}
&= -\det \left(\begin{bmatrix} ((\Phi_A)^- \cdot A_4) & ((\Phi_A)^- \cdot B_4) \\ ((\Phi_B)^- \cdot A_4) & ((\Phi_B)^- \cdot B_4) \end{bmatrix} \right) (A_4 \wedge B_4) \\
&= -\{ [(\Phi_A)^- \wedge (\Phi_B)^-] \cdot (A_4 \wedge B_4) \} (A_4 \wedge B_4) = -\{ (\Phi_A \vee \Phi_B)^- \cdot (A_4 \wedge B_4) \} (A_4 \wedge B_4).
\end{aligned}$$

Se supormos que $E_{ab} \wedge E_{ba} \neq 0$ então $(\Phi_A \vee \Phi_B)^- \cdot (A_4 \wedge B_4) \in \mathbb{R} - \{0\}$. Com isso, concluimos que $A_4 \wedge B_4 \wedge E_{ab} \wedge E_{ba} = 0$.

Dessa forma concluimos que

$$(A_4 \wedge B_4 \wedge E_{ab} \wedge E_{ba}) I_4 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \mu^i \nu^j F_{ij} = 0 \in \mathbb{R}$$

onde $F_{ij} = (A_4 \wedge B_4 \wedge A_i \wedge B_j) I_4$ para $\forall i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Definindo $F := (F_{ij})_{3 \times 3} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ concluimos que $E_{ab}^T F E_{ba} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \mu^i \nu^j F_{ij} = 0$, onde $E_{ab} = \sum_{i=1}^3 \mu^i A_i$ e

$E_{ba} = \sum_{j=1}^3 \nu^j B_j$ representam elementos de \mathbb{RP}^2 .

Com isso e identificando os conjuntos $\{A_1, A_2, A_3\}$ e $\{B_1, B_2, B_3\}$ com uma base ortogonal do espaço euclidiano $\mathbb{R}^{3,0}$, podemos definir um funcional bilinear $\mathcal{F} : \mathbb{R}^{3,0} \times \mathbb{R}^{3,0} \rightarrow \mathbb{R}$, por

$$\mathcal{F}(X_a, X_b) = (A_4 \wedge B_4 \wedge X_a \wedge X_b) I_4 = x^T F y = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \alpha^i \beta^j F_{ij}$$

onde

$$\mathcal{F}(A_i, B_j) = F_{ij} = (A_4 \wedge B_4 \wedge A_i \wedge B_j) I_4 \quad \mathcal{F}(E_{ab}, E_{ba}) = 0,$$

$$X_a = \sum_{i=1}^3 \alpha^i A_i \quad X_b = \sum_{j=1}^3 \beta^j B_j.$$

Se X pertencente a $\mathbb{A}\mathbb{P}^3$ e os pontos projetivos X_a e X_b representam as *imagens* de X nos planos Φ_A e Φ_B , então

$$\mathcal{F}(X_a, X_b) = (A_4 \wedge B_4 \wedge X_a \wedge X_b) I_4.$$

Dessa maneira, supondo satisfeita todas as condições descritas acima, obtemos um modelo matemático representado pelo *modelo de câmera A* e o *modelo de câmera B*. Tal modelo, denominado de *modelo de duas câmeras*, é representado pela a figura a seguir:

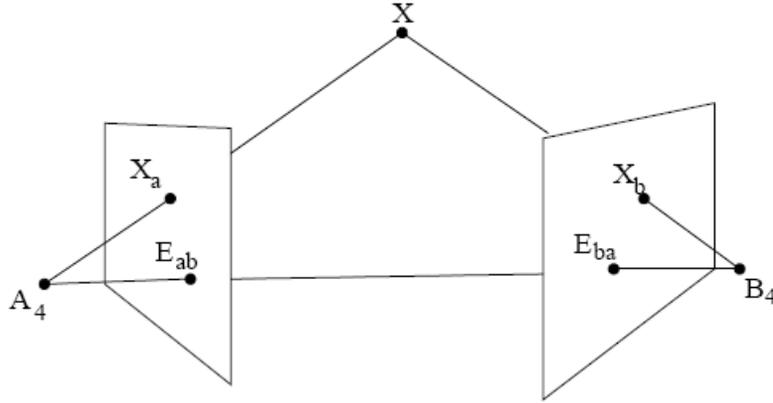


Figura 5 - Modelo de duas câmeras.
Fonte: Perwass, 2000.

A matriz F é chamada de *matriz fundamental* ou *tensor bifocal*. Novamente, com a Álgebra Geométrica é possível, a partir de uma interpretação geométrica de um modelo de duas câmeras, obtermos uma interpretação matemática desse mesmo modelo. Maiores detalhes, ver as referências (CORROCHANO, 2001) e (PERWASS, 2000).

6.4.3 Modelo de três câmeras virtuais

De acordo com Corrochano (2001) e Perwass (2000), consideremos $\mathfrak{A}_1 = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, $\mathfrak{A}_2 = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ e $\mathfrak{A}_3 = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ três conjuntos formados por elementos de $\mathbb{A}\mathbb{P}^3$, linearmente independentes e ortogonais entre si, onde $\mathfrak{A}_i \cap \mathfrak{A}_j = \emptyset$ para $\forall i, j \in \{1, 2, 3\}$ com $i \neq j$.

Os planos representados por $\Phi_A = A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \neq 0$, $\Phi_B = B_1 \wedge B_2 \wedge B_3 \neq 0$ e $\Phi_C = C_1 \wedge C_2 \wedge C_3 \neq 0$ são distintos entre si, e não contêm nenhum dos pontos representados por A_4, B_4 e C_4 . Além disso, tanto Φ_A como Φ_B encontram-se entre A_4 e B_4 , e tanto Φ_B como Φ_C encontram-se entre B_4 e C_4 .

Nesse caso, A_4, B_4 e C_4 representam três *centros focais* distintos. Como consequência obtemos as *epipoles* a seguir:

$$E_{ab} := (A_4 \wedge B_4) \vee \Phi_A = - [(\Phi_A)^- \cdot A_4] B_4 + [(\Phi_A)^- \cdot B_4] A_4,$$

$$E_{ba} := (B_4 \wedge A_4) \vee \Phi_B = - [(\Phi_B)^- \cdot B_4] A_4 + [(\Phi_B)^- \cdot A_4] B_4,$$

$$E_{bc} := (B_4 \wedge C_4) \vee \Phi_B = - [(\Phi_B)^- \cdot B_4] C_4 + [(\Phi_B)^- \cdot C_4] B_4,$$

$$E_{cb} := (C_4 \wedge B_4) \vee \Phi_C = - [(\Phi_C)^- \cdot C_4] B_4 + [(\Phi_C)^- \cdot B_4] C_4,$$

$$E_{ac} := (A_4 \wedge C_4) \vee \Phi_A = - [(\Phi_A)^- \cdot A_4] C_4 + [(\Phi_A)^- \cdot C_4] A_4,$$

$$E_{ca} := (C_4 \wedge A_4) \vee \Phi_C = - [(\Phi_C)^- \cdot C_4] A_4 + [(\Phi_C)^- \cdot A_4] C_4.$$

Além disso, para cada um dos planos Φ_A , Φ_B e Φ_C temos as respectivas retas linearmente independentes e ortogonais entre si:

$$L_1^A := A_2 \wedge A_3 \quad L_2^A := A_3 \wedge A_1 \quad L_3^A := A_1 \wedge A_2,$$

$$L_1^B := B_2 \wedge B_3 \quad L_2^B := B_3 \wedge B_1 \quad L_3^B := B_1 \wedge B_2,$$

$$L_1^C := C_2 \wedge C_3 \quad L_2^C := C_3 \wedge C_1 \quad L_3^C := C_1 \wedge C_2.$$

Observemos o seguinte:

$$A_4 \wedge E_{ac} = A_4 \wedge \{(A_4 \wedge C_4) \vee \Phi_A\} = - [(\Phi_A)^- \cdot A_4] (A_4 \wedge C_4),$$

$$B_4 \wedge E_{ba} = B_4 \wedge \{(B_4 \wedge A_4) \vee \Phi_B\} = - [(\Phi_B)^- \cdot B_4] (B_4 \wedge A_4),$$

$$C_4 \wedge E_{ca} = C_4 \wedge \{(C_4 \wedge A_4) \vee \Phi_C\} = - [(\Phi_C)^- \cdot C_4] (C_4 \wedge A_4).$$

Supondo que todas as *epipoles* são distintas entre si, os planos distintos $\Phi'_B = B_4 \wedge E_{ba} \wedge E_{bc} \neq 0$ e $\Phi'_C = C_4 \wedge E_{ca} \wedge E_{cb} \neq 0$ são rescritos da seguinte forma:

$$\Phi'_B = - [(\Phi_B)^- \cdot B_4] \{(B_4 \wedge A_4) \wedge E_{bc}\} = [(\Phi_B)^- \cdot B_4]^2 (B_4 \wedge A_4 \wedge C_4),$$

$$\Phi'_C = - [(\Phi_C)^- \cdot C_4] \{(C_4 \wedge A_4) \wedge E_{cb}\} = [(\Phi_C)^- \cdot C_4]^2 (C_4 \wedge A_4 \wedge B_4).$$

Então concluímos que $L_{12} := \Phi'_B \vee \Phi'_C = 0$. Dessa forma, para as retas $L_1 := A_4 \wedge E_{ab}$ e $L_2 := A_4 \wedge E_{ac}$, obtemos

$$L_1 \wedge L_{12} = 0 \quad e \quad L_2 \wedge L_{12} = 0.$$

Por outro lado, observemos o seguinte:

$$\begin{aligned} L_B &:= E_{ba} \wedge E_{bc} = [(B_4 \wedge A_4) \vee \Phi_B] \wedge [(B_4 \wedge C_4) \vee \Phi_B] \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^3 [(B_4 \wedge A_4)^- \cdot L_i^B] B_i \right\} \wedge \left\{ \sum_{j=1}^3 [(B_4 \wedge C_4)^- \cdot L_j^B] B_j \right\} = \sum_{i=1}^3 \vartheta_B^i L_i^B \end{aligned}$$

onde temos para $\forall i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ onde $i \neq k$ e $j \neq k$,

$$\mu_B^j = - [(B_4 \wedge A_4)^- \cdot L_k^B] \quad \nu_B^k = - [(B_4 \wedge C_4)^- \cdot L_k^B] \quad \vartheta_B^i = \mu_B^j \nu_B^k - \mu_B^k \nu_B^j.$$

De forma análoga obtemos $L_C := E_{ca} \wedge E_{cb} = \sum_{i=1}^3 \vartheta_C^i L_i^C$. Com isso temos o seguinte:

$$L_1 = A_4 \wedge E_{ab} = A_4 \wedge \left\{ - \sum_{i=1}^3 [(A_4 \wedge B_4)^- \cdot L_i^A] A_i \right\} = \sum_{i=1}^3 \mu_A^j (A_4 \wedge A_i),$$

$$L_2 = A_4 \wedge E_{ac} = A_4 \wedge \left\{ - \sum_{i=1}^3 [(A_4 \wedge C_4)^- \cdot L_i^A] A_i \right\} = \sum_{i=1}^3 \nu_A^k (A_4 \wedge A_i),$$

$$\Phi'_B = \sum_{i=1}^3 \vartheta_B^i (B_4 \wedge L_i^B),$$

$$\Phi'_C = \sum_{i=1}^3 \vartheta_C^i (C_4 \wedge L_i^C),$$

onde $\mu_A^j = -[(A_4 \wedge B_4)^- \cdot L_k^A]$ e $\nu_A^k = -[(A_4 \wedge C_4)^- \cdot L_k^A]$, para $\forall j, k \in \{1, 2, 3\}$. Com isso, podemos escrever $(L_1 \wedge L_{12})I_4$ e $(L_2 \wedge L_{12})I_4$ da seguinte forma:

$$(L_1 \wedge L_{12})I_4 = \sum_{i,j,k=1}^3 \mu_A^i \vartheta_B^j \vartheta_C^k T_i^{j,k} = 0,$$

$$(L_2 \wedge L_{12})I_4 = \sum_{i,j,k=1}^3 \nu_A^i \vartheta_B^j \vartheta_C^k T_i^{j,k} = 0,$$

onde $T_i^{j,k} := \left\{ (A_4 \wedge A_i) \wedge \left[(B_4 \wedge L_j^B) \vee (C_4 \wedge L_k^C) \right] \right\} I_4$, para $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$.

Identificando os conjuntos linearmente independentes e ortogonais $\{A_1, A_2, A_3\}$, $\{L_1^B, L_2^B, L_3^B\}$ e $\{L_1^C, L_2^C, L_3^C\}$ como uma base ortogonal de $\mathbb{R}^{3,0}$, podemos definir o funcional trilinear $\mathcal{T} : \mathbb{R}^{3,0} \times \mathbb{R}^{3,0} \times \mathbb{R}^{3,0} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\mathcal{T}(X_a, L_b, L_c) = \{(A_4 \wedge X_a) \wedge [(B_4 \wedge L_b) \vee (C_4 \wedge L_c)]\} I_4 = \sum_{i,j,k=1}^3 \alpha^i \beta^j \gamma^k T_i^{j,k}$$

onde

$$\mathcal{T}(A_i, L_j^B, L_k^C) = T_i^{j,k} \quad \mathcal{T}(E_{ac}, L_b, L_c) = 0 \quad \mathcal{T}(E_{ab}, L_b, L_c) = 0,$$

$$X_a = \sum_{i=1}^3 \alpha^i A_i \quad L_b = \sum_{j=1}^3 \beta^j L_j^B \quad L_c = \sum_{k=1}^3 \gamma^k L_k^C.$$

Se $L = X \wedge Y$ representa uma reta projetiva, onde $X, Y \in \mathbb{A}\mathbb{P}^3$, o ponto projetivo X_a representa a *imagem* de X no plano Φ_A e as retas projetivas L_b e L_c representam as *imagens* de L nos planos Φ_B e Φ_C , então

$$\mathcal{T}(X_a, L_b, L_c) = \{(A_4 \wedge X_a) \wedge [(B_4 \wedge L_b) \vee (C_4 \wedge L_c)]\} I_4.$$

Supondo satisfeita todas as condições descritas acima, podemos representar as contas anteriores através do modelo, denominado de *modelo de três câmeras*, descrito na figura seguir:

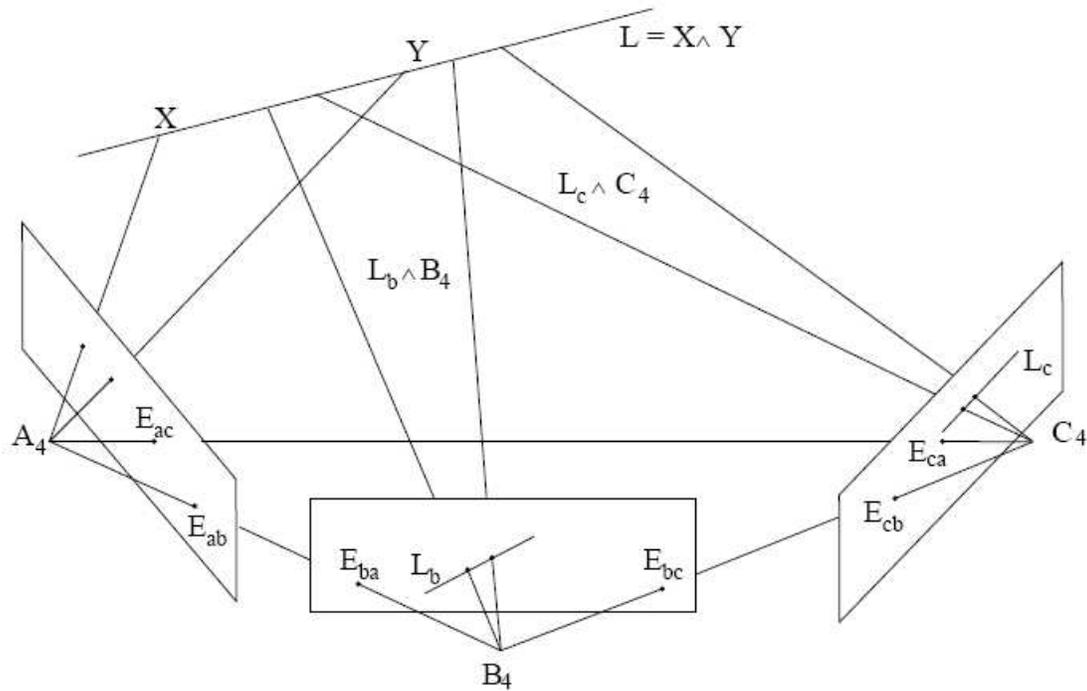


Figura 6 - Modelo de três câmeras.
 Fonte: Perwass, 2000.

O funcional trilinear \mathcal{T} , obtido anteriormente é chamado de *tensor trifocal*. Portanto, com a Álgebra Geométrica é possível, a partir de uma interpretação geométrica de um modelo de três câmeras, obtermos uma interpretação matemática desse mesmo modelo. Maiores detalhes, ver as referências (CORROCHANO, 2001) e (PERWASS, 2000).

6.4.4 Modelo de quatro câmeras virtuais

De acordo com Corrochano (2001) e Perwass (2000), consideremos os quatro conjuntos formados por elementos de $\mathbb{A}\mathbb{P}^3$, linearmente independentes e ortogonais entre si, $\mathfrak{A}_1 = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, $\mathfrak{A}_2 = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$, $\mathfrak{A}_3 = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ e $\mathfrak{A}_4 = \{D_1, D_2, D_3, D_4\}$, onde $\mathfrak{A}_i \cap \mathfrak{A}_j = \emptyset$ para $\forall i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ com $i \neq j$.

Os planos $\Phi_A = A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \neq 0$, $\Phi_B = B_1 \wedge B_2 \wedge B_3 \neq 0$, $\Phi_C = C_1 \wedge C_2 \wedge C_3 \neq 0$, $\Phi_D = D_1 \wedge D_2 \wedge D_3 \neq 0$ são distintos entre si, e não contêm nenhum dos pontos representados por A_4, B_4, C_4 e D_4 . Além disso, tanto Φ_A como Φ_B encontram-se entre A_4 e B_4 , tanto Φ_B como Φ_C encontram-se entre B_4 e C_4 e tanto Φ_C como Φ_D encontram-se entre C_4 e D_4 . Nesse caso A_4, B_4, C_4 e D_4 representam quatro *centros focais* distintos.

Como consequência obtemos as *epipoles* a seguir:

$$E_{ab} := (A_4 \wedge B_4) \vee \Phi_A = - [(\Phi_A)^- \cdot A_4] B_4 + [(\Phi_A)^- \cdot B_4] A_4,$$

$$E_{ba} := (B_4 \wedge A_4) \vee \Phi_B = - [(\Phi_B)^- \cdot B_4] A_4 + [(\Phi_B)^- \cdot A_4] B_4,$$

$$E_{bc} := (B_4 \wedge C_4) \vee \Phi_B = - [(\Phi_B)^- \cdot B_4] C_4 + [(\Phi_B)^- \cdot C_4] B_4,$$

$$E_{cb} := (C_4 \wedge B_4) \vee \Phi_C = - [(\Phi_C)^- \cdot C_4] B_4 + [(\Phi_C)^- \cdot B_4] C_4,$$

$$E_{ac} := (A_4 \wedge C_4) \vee \Phi_A = - [(\Phi_A)^- \cdot A_4] C_4 + [(\Phi_A)^- \cdot C_4] A_4,$$

$$E_{ca} := (C_4 \wedge A_4) \vee \Phi_C = - [(\Phi_C)^- \cdot C_4] A_4 + [(\Phi_C)^- \cdot A_4] C_4,$$

$$E_{ad} := (A_4 \wedge D_4) \vee \Phi_A = - [(\Phi_A)^- \cdot A_4] D_4 + [(\Phi_A)^- \cdot D_4] A_4,$$

$$E_{da} := (D_4 \wedge A_4) \vee \Phi_D = - [(\Phi_D)^- \cdot D_4] A_4 + [(\Phi_D)^- \cdot A_4] D_4,$$

$$E_{bd} := (B_4 \wedge D_4) \vee \Phi_B = - [(\Phi_B)^- \cdot B_4] D_4 + [(\Phi_B)^- \cdot D_4] B_4,$$

$$E_{db} := (D_4 \wedge B_4) \vee \Phi_D = - [(\Phi_D)^- \cdot D_4] B_4 + [(\Phi_D)^- \cdot B_4] D_4,$$

$$E_{cd} := (C_4 \wedge D_4) \vee \Phi_C = - [(\Phi_C)^- \cdot C_4] D_4 + [(\Phi_C)^- \cdot D_4] C_4,$$

$$E_{dc} := (D_4 \wedge C_4) \vee \Phi_D = - [(\Phi_D)^- \cdot D_4] C_4 + [(\Phi_D)^- \cdot C_4] D_4.$$

Além disso, para cada um dos planos Φ_A , Φ_B , Φ_C e Φ_D temos as respectivas retas linearmente independentes e ortogonais entre si

$$L_1^A := A_2 \wedge A_3 \quad L_2^A := A_3 \wedge A_1 \quad L_3^A := A_1 \wedge A_2,$$

$$L_1^B := B_2 \wedge B_3 \quad L_2^B := B_3 \wedge B_1 \quad L_3^B := B_1 \wedge B_2,$$

$$L_1^C := C_2 \wedge C_3 \quad L_2^C := C_3 \wedge C_1 \quad L_3^C := C_1 \wedge C_2,$$

$$L_1^D := D_2 \wedge D_3 \quad L_2^D := D_3 \wedge D_1 \quad L_3^D := D_1 \wedge D_2.$$

Supondo que todas as epipoles são distintas consideremos os planos a seguir:

$$\Phi'_A = A_4 \wedge E_{ac} \wedge E_{ad} \neq 0,$$

$$\Phi'_B = B_4 \wedge E_{bc} \wedge E_{bd} \neq 0,$$

$$\Phi'_C = C_4 \wedge E_{cd} \wedge E_{cb} \neq 0,$$

$$\Phi'_D = D_4 \wedge E_{da} \wedge E_{dc} \neq 0.$$

Como $E_{ac} \wedge E_{ad} \neq 0$ podemos verificar que

$$E_{ac} \wedge E_{ad} = [(\Phi_A)^- \cdot A_4]^2 (C_4 \wedge D_4) + [(\Phi_A)^- \cdot A_4] [(\Phi_A)^- \cdot D_4] (A_4 \wedge C_4) +$$

$$[(\Phi_A)^- \cdot A_4] [(\Phi_A)^- \cdot C_4] (D_4 \wedge A_4).$$

Consequentemente obtemos $\Phi'_A = \lambda_A (A_4 \wedge C_4 \wedge D_4)$, onde $\lambda_A = [(\Phi_A)^- \cdot A_4]^2$ pertence a $\mathbb{R} - \{0\}$.

Repetindo o mesmo processo para $E_{bc} \wedge E_{bd} \neq 0$, $E_{cd} \wedge E_{cb} \neq 0$ e $E_{da} \wedge E_{dc} \neq 0$, obtemos

$$\Phi'_B = \lambda_B (B_4 \wedge C_4 \wedge D_4),$$

$$\Phi'_C = \lambda_C (C_4 \wedge D_4 \wedge B_4),$$

$$\Phi'_D = \lambda_D (D_4 \wedge A_4 \wedge C_4),$$

onde $\lambda_B = [(\Phi_B)^- \cdot B_4]^2$, $\lambda_C = [(\Phi_C)^- \cdot C_4]^2$ e $\lambda_D = [(\Phi_D)^- \cdot D_4]^2$ pertencem a $\mathbb{R} - \{0\}$.

Com isso obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
\Phi'_A \vee \Phi'_B &= \lambda_A \lambda_B \{ (A_4 \wedge C_4 \wedge D_4)^- \wedge (B_4 \wedge C_4 \wedge D_4)^- \}^- \\
&= \lambda_A \lambda_B \{ \langle (A_4 \wedge C_4 \wedge D_4)^- (B_4 \wedge C_4 \wedge D_4)^- \rangle_2 \}^- = \lambda_A \lambda_B \{ \langle (A_4 C_4 D_4)_3^- (B_4 C_4 D_4)_3^- \rangle_2 \}^- \\
&= -\lambda_A \lambda_B \langle A_4 C_4 D_4 B_4 C_4 D_4 \rangle_2^- = \lambda_A \lambda_B C_4^2 D_4^2 \langle A_4 B_4 \rangle_2^- \\
&= -\lambda_A \lambda_B A_4^2 B_4^2 C_4^2 D_4^2 \lambda^{-1} (C_4 \wedge D_4),
\end{aligned}$$

onde $A_4 B_4 C_4 D_4 = \lambda I_4$, com $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$. Repetindo o mesmo processo para $\Phi'_C \vee \Phi'_D$, obtemos $\Phi'_C \vee \Phi'_D = \lambda_A \lambda_B A_4^2 B_4^2 C_4^2 D_4^2 \lambda^{-1} (C_4 \wedge D_4)$. Com isso, concluímos que

$$(\Phi'_A \vee \Phi'_B) \wedge (\Phi'_C \vee \Phi'_D) = 0.$$

Observe que podemos escolher as epipoles para criar novos planos Φ'_A , Φ'_B , Φ'_C e Φ'_D com a finalidade de se obter a expressão algébrica $(\Phi'_A \vee \Phi'_B) \wedge (\Phi'_C \vee \Phi'_D) = 0$. Dessa forma, com a utilização das contas anteriores e identificando os conjuntos $\{L_1^A, L_2^A, L_3^A\}$, $\{L_1^B, L_2^B, L_3^B\}$, $\{L_1^C, L_2^C, L_3^C\}$ e $\{L_1^D, L_2^D, L_3^D\}$ com uma base ortogonal do espaço euclidiano $\mathbb{R}^{3,0}$, podemos definir o funcional quadrilinear $\mathcal{Q} : \mathbb{R}^{3,0} \times \mathbb{R}^{3,0} \times \mathbb{R}^{3,0} \times \mathbb{R}^{3,0} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}(L_A, L_B, L_C, L_D) &= \{ [(A_4 \wedge L_A) \vee (B_4 \wedge L_B)] \wedge [(C_4 \wedge L_C) \vee (D_4 \wedge L_D)] \} I_4 \\
&= \sum_{i,j,k,l=1}^3 \alpha^i \beta^j \gamma^k \delta^l Q^{ijkl}
\end{aligned}$$

onde

$$\mathcal{Q}(L_i^A, L_j^B, L_k^C, L_l^D) = Q^{ijkl} = \left\{ \left[(A_4 \wedge L_i^A) \vee (B_4 \wedge L_j^B) \right] \wedge \left[(C_4 \wedge L_k^C) \vee (D_4 \wedge L_l^D) \right] \right\} I_4,$$

$$\mathcal{Q}(E_{ac} \wedge E_{ad}, E_{bc} \wedge E_{bd}, E_{cd} \wedge E_{cb}, E_{da} \wedge E_{dc}) = 0,$$

$$L_A = \sum_{i=1}^3 \alpha^i L_i^A \quad L_B = \sum_{j=1}^3 \beta^j L_j^B \quad L_C = \sum_{k=1}^3 \gamma^k L_k^C \quad L_D = \sum_{l=1}^3 \delta^l L_l^D.$$

Se $L = X \wedge Y$ representa uma reta projetiva, onde $X, Y \in \mathbb{A}P^3$, as retas projetivas L_A, L_B, L_C e L_D representam as *imagens* de L nos planos Φ_A, Φ_B, Φ_C e Φ_D , então

$$\mathcal{Q}(L_A, L_B, L_C, L_D) = \{[(A_4 \wedge L_A) \vee (B_4 \wedge L_B)] \wedge [(C_4 \wedge L_C) \vee (D_4 \wedge L_D)]\} I_4.$$

Supondo satisfeita todas as condições descritas acima, podemos representar as contas anteriores através do modelo, denominado de *modelo de quatro câmeras*, descrito na figura seguir:

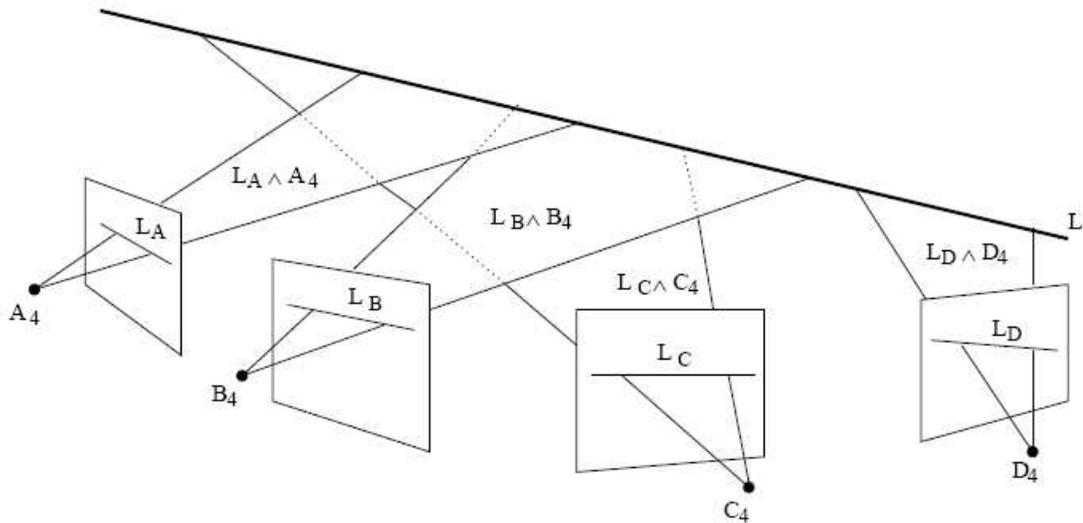


Figura 7 - Modelo de quatro câmeras.
Fonte: Perwass, 2000.

O funcional quadrilinear \mathcal{Q} é chamado de *tensor quadrifocal*. Com um processo similar as contas anteriores, podemos obter um outro funcional quadrilinear (outro *tensor quadrifocal*) similar ao anterior, a saber

$$Q_{ijkl} = \{[(A_4 \wedge A_i) \vee (B_4 \wedge B_j)] \wedge [(C_4 \wedge C_k) \vee (D_4 \wedge D_l)]\} I_4.$$

Dessa forma, com a Álgebras Geométrica é possível, a partir de uma interpretação geométrica de um modelo de quatro câmeras, obtermos uma interpretação matemática desse mesmo modelo. Maiores detalhes, ver as referências (CORROCHANO, 2001) e (PERWASS, 2000).

Podemos dizer que é possível visualizar qualquer objeto com a ajuda de, pelo menos, quatro câmeras.

6.4.5 Modelo de “n” câmeras virtuais

Observe que, no máximo, 4 planos distintos são representados por elementos da base do espaço $\bigwedge_3(\mathbb{R}^{3,1})$. Assim, para $n > 4$, alguns planos são combinações lineares dos elementos da base de $\bigwedge_3(\mathbb{R}^{3,1})$. Como consequência, isso inviabiliza a obtenção de tensores associados a modelos de 5 ou mais câmeras através da Álgebra Geométrica.

Portanto nossa análise limita-se em investigar modelos envolvendo 4 câmeras, no máximo.

Capítulo 7

Conclusões

O objetivo central dessa dissertação consiste em exibir noções sobre Álgebras de Clifford e sua utilização na formulação dos conceitos e definições de operações entre objetos da Geometria Projetiva e na formulação algébrica de *câmeras virtuais*, que é um dos assuntos tratados na área de *Visão Computacional*.

Nos Capítulos 2 e 3 são fornecidas algumas das principais informações sobre o conceito de Álgebras de Clifford, Álgebras Geométricas e sua representação dual.

O Capítulo 4 fornece informações sobre os conceitos básicos e definições, de operações entre objetos geométricos, da Geometria Projetiva e sua representação através das Álgebras de Clifford, como as *relações de incidência* e o *princípio da dualidade*, bem como um exemplo de suas aplicações (o *Teorema de Desargues*).

Em seguida, no Capítulo 5, são apresentados o conceito de *split projetivo* permitindo estabelecer uma correspondência entre as formas geométricas presentes em $\mathbb{A}\mathbb{P}^n$ com os elementos do espaço afim de $\mathbb{R}^{n,0}$. Com isso, podemos descrever as noções de paralelismo na Geometria Projetiva.

No Capítulo 6 é apresentada uma formulação algébrica de uma *câmera pinhole* e, conseqüentemente, uma *câmera virtual*. Na sequência, são exibidos tensores, obtidos através de uma descrição algébrica, que relacionam dois ou mais *modelos de câmeras virtuais* de forma que podemos relacionar as imagens de um mesmo ponto ou reta. Esse processo pode ser utilizado em métodos de reconstrução de imagens em 3 dimensões, isto é, a partir das imagens de uma figura registradas pelos modelos de câmeras, podemos reconstruir a figura original, através dos tensores relacionados. É evidente que essas figuras têm que ser formadas, por apenas, pontos e retas, uma vez que utilizam-se métodos desenvolvidos com o uso da geometria projetiva.

Com todos os resultados expostos, podemos concluir que a Álgebra de Clifford é de fato, uma ferra-

menta extremamente útil na descrição algébrica dos conceitos e definições de operações entre objetos geométricos na Geometria Projetiva, e conseqüentemente, uma ferramenta poderosa no estudo e desenvolvimento de novas técnicas na área de *Visão Computacional*.

Alguns outros resultados importantes, como calibração de câmeras , não foram abordados mas constituem uma fonte interessante de análise e pesquisa (CORROCHANO, 2005).

Além disso, podemos futuramente estudar e comprovar a eficácia da Álgebra de Clifford na descrição da Geometria Conforme, com aplicação em Computação Gráfica e Visão Computacional, e em outras áreas de conhecimento (CORROCHANO, 2005), (HESTENES, 1991), (DORST et al., 2007) e (WAREHAM, 2006).

Referências Bibliográficas

- BISHOP, R. L.; GOLDBERG, S. I. **Tensor Analysis on Manifolds**. New York: Dover Publications, 1980. 280 p.
- CONRADT, O. The Principle of Duality in Clifford Algebra and Projective Geometry. In: **Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics: Algebra and Physics**. Boston: Birkhäuser, v.1. 2000. p. 157-191.
- CORROCHANO, E. B. **Handbook of Geometry Computer: Applications in Pattern Recognition, Computer Vision, Neuralcomputing, and Robotics**. Berlin: Springer-Verlag, 2005. 779 p.
- CORROCHANO, E. B.; LASENBY, L. The Geometry Algebra of Computer Vision. In: **Geometric algebra with applications in science and engineering**, Boston: Birkhäuser, 2001. p. 123-146.
- DORST, L.; FONTIJNE, D.; MANN, S. **Geometric Algebra for Computer Science: An object-oriented Approach to Geometry**, San Francisco: Elsevier, 2007. 626 p.
- FAUGERAS, O.; PAPADOPOULO, T. Grassmann - Cayley algebra for modelling systems of cameras and algebraic equation for the manifold of trifocal tensors. **Phil. Trans. R. Soc. London. A**, London, v. 356, 1998. p. 1123-1152.
- GARCIA, A.; LEQUAIN, Y. **Elementos de Álgebra**. Rio de Janeiro: IMPA, 2003. 326 p.
- GILBERT, J. E.; MURRAY, M. A. M. **Clifford Algebras and Dirac Operators in Harmonic Analysis**. Cambridge: Cambridge University Press, v.26. 1991. 334 p.
- GOMES, L.; VELHO, L. **Fundamentos da Computação Gráfica**. Rio de Janeiro: IMPA, 2008. 603 p.
- HESTENES, David. The design of linear algebra and geometry. **Acta Applicandae Mathematicae**, Netherlands, v. 23. 1991. p. 65-93.

- HESTENES, D.; ZIEGLER, R. Projective Geometry with Clifford Algebra. In: **Acta Applicandae Mathematicae**, Netherlands, v. 23. 1991. p. 25-63.
- LIMA, E. L. **Álgebra Exterior**. Rio de Janeiro: IMPA, 2005. 97 p.
- LIMA, E. L. **Álgebra Linear**. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1996. 357 p.
- LOUNESTO, P. **Clifford Algebras and Spinors**, 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, v. 286. 2001. 338 p.
- PERWASS, C. B. U. **Applications of Geometric Algebra in Computer Vision**: The geometry of multiple view tensors and 3D-reconstruction. 2000. 160 p. Thesis- University of Cambridge, Cambridge, 2000.
- SERNESI, E. **Linear Algebra**: A geometric approach. Florida: CRC Press, 1993. 369 p.
- VEBLEN, O.; YOUNG, J. W. **Projective Geometry**. Boston: Ginn and Company, v. 1. 1910. 345 p.
- VEBLEN, O.; YOUNG, J. W. **Projective Geometry**. Boston: Ginn and Company, v. 2. 1946. 511 p.
- WAREHAM, R. J. **Computer Graphics Using Conformal Geometric Algebra**. 2006. 210 p. Thesis- Department of Engineering, University of Cambridge, Cambridge, 2006.