

Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática

TESE DE DOUTORADO

Análise Matemática de um Modelo de Controle de Populações de Mosquitos

por

Anderson Luis Albuquerque de Araujo

Doutorado em Matemática - Campinas - SP

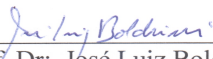
Orientador: Prof. Dr. José Luiz Boldrini

Este trabalho contou com apoio financeiro da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), Brasil, bolsa de doutorado
(processo nº 2007/06638-6).

Análise Matemática de um Modelo de Controle de Populações de Mosquitos

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Anderson Luis Albuquerque de Araujo** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 29 de Julho de 2010


Prof. Dr.: José Luiz Boldrini
Orientador

Banca Examinadora:

Prof. Dr. José Luiz Boldrini (Orientador) IMECC / UNICAMP
Profa. Dra. Bianca Morelli Rodolfo Calsavara – FCA / UNICAMP
Prof. Dr. Luiz Adauto da Justa Medeiros - UFRJ
Prof. Dr. Haroldo Rodrigues Clark - UFF
Prof. Dr. Fagner Dias Araruna - UFPB

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de **DOUTOR em MATEMÁTICA**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**
Bibliotecária: Silvania Renata de Jesus Ribeiro Cirilo – CRB8 /6592

Araujo, Anderson Luis Albuquerque de
Ar15a Análise matemática de um modelo de controle de populações de mosquito/Anderson Luis Albuquerque de Araujo-- Campinas, [S.P. : s.n.], 2010.

Orientador : Jose Luiz Boldrini
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Otimização matemática. 2. Teoria do controle. 3. Mosquito. 4. Equações diferenciais parciais. 5. Semigrupos.. I. Boldrini, José Luiz. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: A mathematical analysis of a model for control of mosquito populations.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Mathematical optimization. 2. Control theory. 3. Mosquito. 4. Partial differential equations. 5. Semigroups.

Área de concentração: Análise Matemática

Titulação: Doutor em Matemática

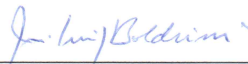
Banca examinadora: Prof. Dr. José Luiz Boldrini (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dra. Bianca Morelli Rodolfo Calsavara (FCA-UNICAMP)
Prof. Dr. Luiz Adauto da Justa Medeiros (UFRJ)
Prof. Dr. Haroldo Rodrigues Clark (UFF)
Prof. Dr. Fagner Dias Araruna (UEPB)

Data da defesa: 29/07/2010

Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática

Tese de Doutorado defendida em 29 de julho de 2010 e aprovada

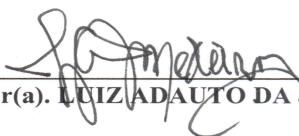
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



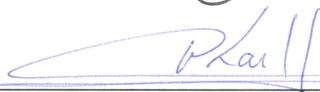
Prof(a). Dr(a). JOSÉ LUIZ BOLDRINI



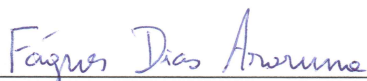
Prof(a). Dr(a). BIANCA MORELLI RODOLFO CALSAVARA



Prof(a). Dr(a). LUIZ ADAUTO DA JUSTA MEDEIROS



Prof(a). Dr(a). HAROLDO RODRIGUES CLARK



Prof(a). Dr(a). FAGNER DIAS ARARUNA

*Dedico este trabalho à minha esposa
Fernanda, pela compreensão,
paciência e apoio incondicional.*

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus por ter dado-me esta oportunidade e guiado-me nesta tese. Sem ele nada disso teria sentido.

À minha esposa, que com muito carinho tem sido uma ótima e compreensiva companheira.

À minha família que fiz em Campinas, eternos companheiros de república. Aos demais companheiros, colegas do futebol, colegas de curso do IMECC/UNICAMP, dentre tantos outros que permanecerão em minha memória.

Sou grato aos professores e funcionários do IMECC-UNICAMP, pela minha formação e por todo o serviço prestado. Em especial meu orientador, José Luiz Boldrini, pela paciência, dedicação, orientação excelente e por toda ajuda que me concedeu com o seu imenso conhecimento matemático. E também em especial à professora Cristina Lúcia Dias Vaz que me proporcionou estudar Análise e principalmente, pela sua contribuição decisiva para minha vinda aqui para a UNICAMP.

Finalmente, agradeço à FAPESP (proc. número 2007/06638 – 6) pelo apoio financeiro indispensável para a realização deste trabalho.

Resumo

A proliferação de mosquitos em regiões habitadas é uma importante questão de saúde pública, uma vez que tais insetos são vetores de várias doenças infecciosas. Assim, o estudo de técnicas de controle de populações de mosquitos tem um papel relevante na busca da eficiência no seu combate; em particular, a compreensão adequada de modelos matemáticos que descrevem tais situações pode auxiliar na tomada de decisão sobre quais seriam os procedimentos mais adequados para atingir este fim.

Com este objetivo, neste trabalho fizemos a análise matemática rigorosa de um certo problema de controle ótimo associado a uma equação diferencial parcial que modela o crescimento e a difusão de uma população de mosquitos em uma região dada. Analisamos o problema de controlar tal população através da aplicação de inseticida por uma unidade volante de pulverização, buscando trajetórias ótimas a serem seguidas por esta unidade a fim de minimizar um certo funcional que envolve tanto a população total quanto os custos da operação.

Abstract

The proliferation of mosquitoes in inhabited regions is an important public health issue since these insects are vectors of several infectious diseases. Thus, the study of techniques for controlling of mosquito populations has an important role in the quest for efficient combat techniques; in particular, the adequate understanding of mathematical models that describe such situations may help in the decision process of finding appropriate procedures to attain that.

With this goal, in this work we performed a rigorous mathematical analysis of a certain optimal control problem associated to a partial differential equation modeling the growth and spreading of the mosquito population in a given region. We analyze the problem of controlling such population through the application of insecticide by a spraying unit; our objective is to search for optimal paths to be followed by this unit in order to minimize a certain functional that involves both the whole mosquito population and the operational costs.

Sumário

Introdução	1
1 Introdução	1
2 Preliminares	7
2.1 Espaços Funcionais e Imersões	7
2.2 Resultados Sobre Algumas Equações Elípticas	13
2.3 Semigrupos Analíticos, Potências Fracionárias de Operadores, Espaços de Interpolação e Problemas de Cauchy	14
2.4 Operadores de Nemytskii	26
2.5 O Formalismo de Dubovitskii e Milyutin	29
2.5.1 Definições e Resultados	30
2.5.2 Cálculo Explícito dos Cones	32
2.5.3 Algumas Ferramentas do Cálculo Diferencial	32
2.5.4 Direções de Descida	35
2.5.5 Direções Factíveis ou Admissíveis	35
2.5.6 Direções Tangentes	36
2.5.7 Cálculo dos Cones Duais	37
2.6 Outros Resultados	38
3 Existência e Unicidade de Soluções	41
3.1 Solução do Problema no Caso de Não-Linearidade do Tipo Verhust	41

3.2	Solução do Problema no Caso de Não-Linearidades Mais Gerais	55
4	Problema de Controle Ótimo com Não-Linearidade do Tipo Verhust	69
4.1	Formulação Matemática do Problema	69
4.2	Formulação como Problema de Otimização e Resultados	71
4.2.1	Existência de Controle Ótimo	73
4.2.2	Cálculo dos Cones Associados	81
4.2.3	Aplicação do Formalismo de Dubovitskii e Milyutin	89
5	Problema de Controle Ótimo com Não-Linearidade Mais Geral	93
5.1	Formulação Matemática do Problema	93
5.2	Formulação como Problema de Otimização e Resultados	95
5.2.1	Existência de Controle Ótimo	96
5.2.2	Cálculo dos Cones Associados	102
5.2.3	Aplicação do Formalismo de Dubovitskii e Milyutin	110
6	Conclusões	115
	Bibliografia	116

Capítulo 1

Introdução

A proliferação de mosquitos em regiões habitadas é uma importante questão de saúde pública, uma vez que tais insetos são vetores de várias doenças infecciosas e consequentemente causam grandes transtornos à população humana dessas regiões. Dessa forma, o estudo de técnicas de controle de populações de mosquitos tem um papel na busca da eficiência no seu combate. Para isto, a compreensão adequada de modelos matemáticos que descrevem tais situações pode lançar alguma luz sobre procedimentos adequados a serem adotados. Neste trabalho, tivemos interesse em fazer uma análise matemática rigorosa de um problema de controle ótimo associado a uma equação diferencial parcial que modela o crescimento e a disseminação de uma população de mosquitos em uma certa região. Pretende-se controlar tal população através da aplicação de inseticida por uma unidade volante de pulverização.

Analizaremos um problema de controle ótimo distribuído correspondente a uma situação onde desejaremos encontrar uma trajetória ótima em um sentido que será esclarecido a seguir. As trajetórias admissíveis começam em um ponto fixado (normalizado para a origem) e cada uma destas trajetórias determina uma função suficientemente regular $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$, com $0 < T < \infty$ um tempo final fixado. Elas são as possíveis trajetórias de um dispositivo que é assumido exercer continuamente um certo custo de inseticida durante o percurso, na tentativa de controlar uma população de mosquitos presente em uma região limitada $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Em termos matemáticos, queremos encontrar uma trajetória $\gamma^* : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$, o requerido

controle ótimo, tal que

$$F(\gamma^*) = \min\{F(\gamma) : \gamma \in \mathcal{A}\}, \quad (1.1)$$

onde

$$\mathcal{A} = \{\gamma \in (H^1(0, T)) \times (H^1(0, T)) : \gamma(0) = 0\}, \quad (1.2)$$

é o conjunto dos controles admissíveis e

$$F(\gamma) = J(\gamma, u) = \mu_0 \int_0^T |\gamma(t)|^2 dt + \mu_1 \int_0^T |\gamma'(t)|^2 dt + \mu_2 \int_Q |u(x, t)|^2 dx dt. \quad (1.3)$$

Em (1.3), $Q = \Omega \times [0, T]$, $\mu_0 \geq 0$, $\mu_1 > 0$ são constantes que estão associadas aos custos da pulverização e $\mu_2 > 0$ é uma constante associada ao peso que se dá à redução da população total de mosquitos, $u = u(x, t)$ é a densidade de mosquitos presentes na posição x no instante t , e satisfaz

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu \Delta u &= g(x, t, u) - bk(x - \gamma(t))u & \text{em } Q = \Omega \times (0, T), \\ (\partial/\partial\eta)(u) &= 0 & \text{em } S = \partial\Omega \times (0, T), \\ u(0, \cdot) &= u_0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (1.4)$$

As principais hipóteses utilizadas na derivação deste modelo são as seguintes:

- (1) Suporemos que a população de mosquitos cresce a uma taxa $g(x, t, u)$ e difunde-se com coeficiente de difusão constante $\nu > 0$.

Primeiramente estudaremos o modelo de crescimento Verhustiano, onde

$$g(x, t, u) = au(1 - u/M),$$

com a, M constantes positivas.

Também estudaremos o modelo com o crescimento dado por uma não-linearidade mais geral.

- (2) Suporemos também que o inseticida mata imediatamente uma fração fixada da população com uma taxa que decresce com a distância do ponto de aplicação inicial; isto é matematicamente realizado assumindo que a taxa de mortandade efetiva em um

certo ponto x obtido por aplicação do inseticida, em uma posição $\gamma(t)$, é dada por $bk(x - \gamma(t))$, onde $0 \leq k(\cdot) \leq 1$ é uma função C^1 de suporte compacto e a constante $b > 0$ é a taxa máxima do inseticida induzir mortalidade;

- (3) Por simplicidade, no modelo acima supõe-se que a população não pode abandonar a região Ω ($\partial/\partial\eta$ representa a derivada normal exterior na fronteira $\partial\Omega$ de Ω);
- (4) u_0 é a população inicial para o modelo, ou seja, a população de mosquitos no instante $t = 0$.
- (5) Também por simplicidade, supõe-se que não existem obstáculos para as possíveis trajetórias.

Observamos que as hipóteses anteriores poderiam ser relaxadas de várias maneiras; comentaremos sobre isto ao final deste trabalho.

Observamos ainda que existem muitos outros trabalhos que consideram modelos matemáticos para a evolução de populações de mosquito. Alguns destes trabalhos analisam modelos mais detalhados do que o trabalho aqui considerado, no sentido de que eles consideram as interações entre várias subpopulações (fase aquática, a fase adulta, etc), agentes patógenos, populações estruturadas e outros aspectos. Exemplos de trabalhos são Atkinson *et al.* [3], Maidana *et al.* [31], Tumwiine *et al.* [44] e Norman *et al.* [36]. Entretanto, a maioria destes trabalhos não levam em conta a distribuição espacial das populações envolvidas. Algumas exceções a esta situação, considerando modelos mais elaborados sobre a interação entre populações de mosquitos, são os trabalhos de Maidana *et al.* [31], Maidana e Yang [28], Maidana e Yang [29], os quais fazem entretanto apenas a análise de soluções do tipo onda viajante. Outro exemplo de modelo de população de mosquitos levando em conta a sua distribuição espacial é o artigo de Trana e Raffy [43]; este artigo apresenta simulações numéricas baseadas em dados realísticos e também considera o efeito da presença de populações de presas.

Quanto aos artigos que consideram a dinâmica de populações e também aspectos de controle ótimo podemos citar Rafikov e Balthazar [39], Kern *et al.* [34], Barbu e Iannelli [7],

Ainseba e Langlais [2], Fister e Lenhart [15], Ouedraogo e Traore [37] e Luo [26]. Os dois primeiros artigos tratam de modelos com EDO's enquanto que, os demais artigos tratam de modelos com difusão.

Neste trabalho, consideraremos o problema (1.1)-(1.4) do ponto de vista da análise matemática; em particular provaremos a existência de uma solução ótima e também a caracterizaremos por sua correspondente condição necessárias de otimalidade.

Tal condição de otimalidade é dada pelo seguinte: denotando por $\gamma^*(\cdot)$ o controle ótimo, e por $u^*(\cdot, \cdot)$ e $p^*(\cdot, \cdot)$, respectivamente, os correspondentes estado ótimo e estado adjunto, que devem satisfazer o sistema abaixo:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u^* - \alpha \Delta u^* = g(x, t, u^*) - b k(x - \gamma^*) u^* & \text{em } Q, \\ (\partial/\partial n)(u^*) = 0 & \text{em } S, \\ u^*(0) = u_0 & \text{em } \Omega, \\ \\ -\partial_t p^* - \alpha \Delta p^* = g_u(x, t, u^*) p^* - b k(x - \gamma^*) p^* - u^* & \text{em } Q, \\ (\partial/\partial n)(p^*) = 0 & \text{em } S, \\ p^*(T) = 0 & \text{em } \Omega, \\ \text{onde } g_u(x, t, u^*) p^* \text{ é a derivada de Gateaux de } g \text{ no ponto } u^* \text{ e na direção } p^*. \\ -\mu_1 \gamma^{*''} + \mu_0 \gamma^* - \mu_2 b \int_{\Omega} p^* u^* \nabla k(x - \gamma^*) dx = 0 & \text{em } (0, T), \\ \gamma^*(0) = 0, \quad \gamma^{*'}(T) = 0. \end{array} \right.$$

Vale ressaltar que um dos objetivos principais deste trabalho não é apenas provar a existência e unicidade de solução para o problema (1.4), mas a existência e unicidade de solução em relação a cada curva γ dada.

Observamos que a obtenção das condições de otimalidade de primeira ordem para um problema de controle ótimo é importante porque elas são úteis para o projeto de controles *feedback* e também na elaboração de algoritmos mais eficientes e rápidos para as simulações numéricas dos controles ótimos.

A prova da existência de controle ótimo será feita interpretando o problema de controle como um problema de minimização com restrições, utilizando, como é usual, sequências minimizantes. Para completar os argumentos envolvidos neste procedimento, uma série de questões técnicas, originadas pelas não-linearidades envolvidas, tiveram que ser antes respondidas.

Quanto à caracterização da condição de otimalidade, ela será obtida usando a metodologia de Dubovitskii e Milyutin (veja por exemplo De Aguiar [11], Girsanov [17] e Lopes [30]). Tal metodologia é uma ferramenta de análise de problemas extremos (máximos e mínimos) e foi originalmente desenvolvida para aplicação em programação matemática; mais tarde se mostrou muito útil para a teoria de controle ótimo de equações diferenciais ordinárias. Uma boa exposição do uso deste formalismo em outras áreas pode ser encontrada em Girsanov [17].

Recentemente, este formalismo tem sido aplicado, de uma forma promissora, para problemas de controle distribuído. Por exemplo, os seguintes artigos usam o formalismo nesse sentido: Boldrini *et al.* [8], Aguiar *et al.* [12], Gayte *et al.* [16], Magalhães *et al.* [27] e Lopes [30].

A idéia básica que fundamenta o formalismo é a seguinte: Em um ponto de minimização local, o conjunto de descida associado ao funcional deve ser disjunto da interseção das restrições do problema. Então, os correspondentes cones desses conjuntos neste ponto ótimo devem ter a mesma propriedade. Portanto, o Teorema de Hahn-Banach e argumentos adicionais implicam que existem elementos nos cones duais associados, não todos nulos, cuja soma é nula. Esta condição algébrica dá as equações de Euler- Lagrange para o problema em questão, e a grande dificuldade é quando podemos identificar tais cones e cones duais.

Para abordar os modelos propostos, estruturamos este trabalho da seguinte maneira:

No Capítulo 2 apresentaremos as notações e os espaços que vão ser usados; destacaremos alguns resultados de imersão do tipo Sobolev e da teoria L^p das equações diferenciais parabólicas lineares (Ladyzhenskaya [19], Capítulo IV). Estudaremos de forma resumida os

espaços de potências fracionárias e algumas propriedades dos semigrupos analíticos; resultados da teoria de regularidade elíptica e princípios do máximo para problemas elípticos; resultados da teoria dos operadores de Nemytskii; também apresentaremos os conceitos e resultados preliminares para a utilização do formalismo de Dubovitskii e Milyutin apresentados por Girsanov em [17].

No Capítulo 3, provaremos a existência, unicidade e regularidade de solução global para os modelos descritos em (1.4). Primeiramente provaremos a existência, unicidade e regularidade de solução para o modelo com não-linearidade do tipo Verhust. Em seguida provaremos os mesmos resultados para o modelo com a não-linearidade mais geral. Para provar os resultados deste capítulo, usaremos a teoria de semigrupos analíticos em conjunto com os resultados auxiliares descritos no Capítulo 2.

No Capítulo 4 procuraremos uma trajetória ótima que ao mesmo tempo reduza a população de mosquitos e os custos operacionais do dispositivo que aplica o inseticida para o modelo com não-linearidade do tipo Verhust. Formularemos o problema de otimização associado; provaremos a existência de mínimo e, em seguida, utilizaremos a teoria de Dubovitskii e Milyutin para caracterizar as correspondentes condições necessárias de otimalidade de primeira ordem para o problema.

No Capítulo 5 procuraremos uma trajetória ótima que ao mesmo tempo reduza a população de mosquitos e os custos operacionais do dispositivo que aplica o inseticida para o modelo com não-linearidade mais geral.

Capítulo 2

Preliminares

Nosso objetivo neste capítulo é relembrar definições e resultados importantes para uma melhor compreensão do texto. Em geral, não apresentaremos as demonstrações, e em alguns casos menos conhecidos, indicaremos as devidas referências bibliográficas.

2.1 Espaços Funcionais e Imersões

Ao longo deste trabalho usaremos coordenadas cartesianas e as seguintes notações:

$\mathbb{R}^n$ representará o espaço euclidiano n -dimensional.

Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com medida de Lebesgue $|\Omega|$ e fronteira $\partial\Omega$.

Q representará o cilindro $\Omega \times (0, T)$.

$S = \partial\Omega \times (0, T)$ representará a superfície lateral do cilindro Q .

$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{i=1}^n$ representará o operador gradiente.

$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ representará o operador Laplaciano.

$|x| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$ e $|\nabla u| = \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right)^{1/2}$ é norma euclidiana de $x \in \mathbb{R}^n$ e do vetor gradiente da função $u = u(x)$.

Necessitaremos também dos seguintes espaços funcionais:

$C^m(\Omega)$ é o espaço das funções com todas as derivadas de ordem $\leq m$ contínuas em Ω (m

inteiro não-negativo ou $m = \infty$). Denotaremos $C^0(\Omega) = C(\Omega)$.

$C_0^m(\Omega)$ é o espaço das funções com todas as derivadas de ordem $\leq m$ contínuas em Ω (m inteiro positivo ou $m = \infty$) e tanto a função quanto todas as suas derivadas com suporte compacto em Ω .

$\mathcal{D}(\Omega)$ é o espaço vetorial das funções em $C^\infty(\Omega)$ com suporte compacto em Ω .

$L^q(\Omega)$ é o espaço de Banach das (classes de) funções $u(\cdot)$ de Ω em $\mathbb{R}$ mensuráveis (no sentido de Lebesgue) e q -integráveis ($q \geq 1$) cuja norma é dada por

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^q dx \right)^{1/q} \quad (1 \leq q < \infty)$$

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)| \quad (q = \infty).$$

$W_q^p(\Omega)$ é o espaço de Banach (com $p \in \mathbb{N}$) das funções $u(\cdot)$ em $L^q(\Omega)$ com derivadas generalizadas de ordem $\leq p$ que pertencem a $L^q(\Omega)$ e cuja norma é dada por

$$\|u\|_{W_q^p(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq p} \|D^\alpha u\|_{L^q(\Omega)}.$$

$\overset{0}{W}_q^p(\Omega)$ representa o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W_q^p(\Omega)$.

Alguns resultados de imersões contínuas, cujas demonstrações podem ser encontradas por exemplo em Adams [1, p.144], são enunciadas no seguinte teorema.

Proposição 2.1.1 (Sobolev). *Sejam Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, Ω de classe C^m e $1 \leq p \leq \infty$. Então as seguintes imersões são contínuas:*

- a) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leq q \leq \frac{np}{n-mp} = p^*$, se $mp < n$
- b) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$, se $mp = n$
- c) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega})$, $k < m - \frac{n}{p} \leq k+1$ se $mp > n$ onde k é um inteiro não negativo.

Neste trabalho, também faremos uso dos espaços de Sobolev $H^s(\Omega)$, também conhecidos como espaços de Sobolev fracionários, onde, s é um número real e Ω é um aberto bem regular de $\mathbb{R}^2$.

O próximo resultado é uma versão do Teorema do Traço em $H^s(\Omega)$, $s \geq 0$ (veja Lions e Magenes [20], p.41). Este resultado será usado para obter as condições de fronteira para as soluções das equações estudadas na tese.

Proposição 2.1.2. *Assuma que Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\partial\Omega$ de classe $C^{\mu+1}$. Então, a aplicação*

$$u \rightarrow \left\{ \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} \Big|_{\partial\Omega}, j = 0, 1, \dots, \mu \right\} \quad (2.1)$$

de $\mathcal{D}(\bar{\Omega}) \rightarrow (\mathcal{D}(\partial\Omega))^m$ estende-se por continuidade para uma aplicação linear e contínua

$$u \rightarrow \left\{ \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} \Big|_{\partial\Omega}, j = 0, 1, \dots, \mu \right\} \quad \text{de } H^s(\Omega) \rightarrow \prod_{j=0}^{\mu} H^{s-j-1/2}(\partial\Omega).$$

onde μ é o maior inteiro, tal que, $\mu < s - \frac{1}{2}$.

A seguir apresentamos um resultado de compacidade para os espaços $H^s(\Omega)$, $s \in \mathbb{R}$ (veja Lions e Magenes [20], p.99).

Proposição 2.1.3. *Assuma que Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^μ , com μ o menor inteiro positivo tal que $\mu > s$ e $s \in \mathbb{R}$. Então, para cada $\epsilon > 0$, a inclusão*

$$H^s(\Omega) \rightarrow H^{s-\epsilon}(\Omega)$$

é compacta.

Vamos precisar de alguns resultados sobre os espaços de Sobolev na reta, ou seja, para $\Omega = (0, T)$, para estudarmos as curvas ótimas envolvidas nos modelos.

Consideremos o espaço de Hilbert $H^1(0, T) = W_2^1(0, T)$ definido por

$$H^1(0, T) = \{u \in L_2(0, T); u' \in L_2(0, T)\},$$

com a norma definida por

$$\|u\|_{H^1(0, T)} = \left(\int_0^T |u(t)|^2 dt \right)^{1/2} + \left(\int_0^T |u'(t)|^2 dt \right)^{1/2}. \quad (2.2)$$

Também vamos precisar do seguinte resultado, cuja demonstração pode ser encontrada por exemplo em Brezis [9, p. 129].

Lema 2.1.1. *Seja $(0, T)$ um intervalo limitado da reta. A imersão $H^1(0, T) \hookrightarrow C([0, T])$ é contínua e compacta.*

Frequentemente, precisaremos dos espaços de funções vetoriais com n componentes em algum dos espaços enunciados acima. Consideraremos esses espaços, quando normados, com a norma do produto usual. Em particular, usaremos as notações:

$$(H^1(0, T))^2 = H^1(0, T) \times H^1(0, T)$$

e

$$(C([0, T]))^2 = C([0, T]) \times C([0, T]).$$

Também vamos supor que estes espaços produtos são equipados com a norma do produto usual dada por

$$\|(\gamma_1, \gamma_2)\|_{(H^1(0, T))^2} = \left(\|\gamma_1\|_{H^1(0, T)}^2 + \|\gamma_2\|_{H^1(0, T)}^2 \right)^{1/2},$$

$$\|(\gamma_1, \gamma_2)\|_{(C([0, T]))^2} = \|\gamma_1\|_{C([0, T])} + \|\gamma_2\|_{C([0, T])}.$$

Para maiores informações e resultados sobre os espaços $H^m(\Omega)$ com m um inteiro, veja Adams [1] e Brezis [9]. Medeiros [32] desenvolveu os espaços $H^s(\Omega)$, $s \geq 0$, via transformada de Fourier. Enquanto que, Lions e Magenes [20] desenvolveu um estudo mais geral sobre tais espaços, no caso $s \in \mathbb{R}$, aplicando a teoria de interpolação. As notações e resultados que usamos sobre os espaços $H^s(\Omega)$ podem ser encontrados em Lions e Magenes [20].

Para funções dependendo de variáveis espaciais e temporais usaremos os seguintes espaços funcionais, cujas notações e definições podem ser encontradas em Ladyzhenskaya [19, pp. 4-5].

$L^{q,r}(Q)$ é o espaço de Banach das (classes de) funções $u(x, t)$ de Q em $\mathbb{R}$ mensuráveis (no sentido de Lebesgue) cuja norma é dada por

$$\|u\|_{q,r,Q} = \left(\int_0^T \left(\int_{\Omega} |u(x, t)|^q dx \right)^{r/q} dt \right)^{1/r}, \quad (q, r \geq 1).$$

Para $q = r$ usaremos a notação $L^{q,q}(Q) = L^q(Q)$.

$W_q^{2,1}(Q)$ o espaço de Banach ($q \geq 1$) das funções $u(.,.) \in L^q(Q)$ com derivadas generalizadas $D_x u, D_x^2 u, D_t u$ em $L^q(Q)$. Consideraremos em $W_q^{2,1}(Q)$ a norma definida por

$$\|u\|_{W_q^{2,1}(Q)} = \|u\|_{L^q(Q)} + \|D_x u\|_{L^q(Q)} + \|D_x^2 u\|_{L^q(Q)} + \|D_t u\|_{L^q(Q)}.$$

Além disso, usaremos os seguintes espaços funcionais abstratos.

Seja B um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|_B$ e $0 < T < \infty$. $L^p(0, T; B)$ é o espaço de Banach das (classes de) funções $u : [0, T] \rightarrow B$, mensuráveis tal que a função $t \in [0, T] \rightarrow \|u(t)\|_B$ (definidas q.t.p) é p -integrável ($1 \leq p \leq \infty$) com norma dada por

$$\|u\|_{L^p(0, T; B)} = \left(\int_0^T \|u(x)\|_B^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leq p < \infty),$$

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; B)} = \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_B \quad (p = \infty).$$

$C([0, T]; B)$ é o espaço de Banach das funções $u : [0, T] \rightarrow B$, contínuas (com relação a topologia forte de B).

$W^{m,p}(0, T; B)$ é o espaço das (classes de) funções em $L^p(0, T; B)$ cujas derivadas generalizadas de ordem $\leq m$ também pertencem a $L^p(0, T; B)$.

$\mathcal{D}'(0, T; L^2(\Omega))$ é o espaço das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0, T)$ em $L^2(\Omega)$. A derivada $df/dt = f'$ de uma distribuição f é definida por $(f')(\varphi) = -f(\varphi')$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}(0, T)$.

O resultado seguinte é um exemplo de uma classe de resultados de imersão conhecidos como imersões do tipo Aubin-Lions. Essa versão foi apresentada por J. Simon em [41, Corolário 4, p.85].

Lema 2.1.2. *Sejam X , B e Y espaços de Banach tais que $X \hookrightarrow B \hookrightarrow Y$ com imersões contínuas e $X \hookrightarrow B$ compacta, $0 < T < \infty$. Tem-se as seguintes imersões compactas:*

$$(i) \quad L^q(0, T; X) \cap \left\{ \phi; \frac{\partial \phi}{\partial t} \in L^1(0, T; Y) \right\} \rightarrow L^q(0, T; B) \quad 1 \leq q \leq \infty$$

$$(ii) \ L^\infty(0, T; X) \cap \left\{ \phi; \frac{\partial \phi}{\partial t} \in L^r(0, T; Y) \right\} \rightarrow C([0, T]; B) \quad 1 < r \leq \infty.$$

O próximo resultado é um caso particular do Lema 3.3 em Ladyzenskaja [19, p.80, com $l = 1, r = s = 0$ e $n = 2$].

Lema 2.1.3. *Seja Ω um domínio do $\mathbb{R}^2$. Suponhamos que a fronteira $\partial\Omega$ tem a propriedade do cone. Então a imersão $W_q^{2,1}(Q) \rightarrow L^p(Q)$ é contínua e existe uma constante M que depende de p, q e Ω tal que*

$$\|u\|_{L^p(Q)} \leq M \|u\|_{W_q^{2,1}(Q)},$$

com p dado por

$$p = \begin{cases} \infty & \text{se } \frac{1}{q} - \frac{1}{2} < 0 \\ \forall p \geq 1 & \text{se } \frac{1}{q} - \frac{1}{2} = 0 \\ \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2}\right)^{-1} & \text{se } \frac{1}{q} - \frac{1}{2} > 0. \end{cases}$$

Observação 2.1.1. Temos ainda as seguintes imersões compactas (veja Lions [23, p.13]).

A injeção $W_2^{2,1}(Q) \hookrightarrow L^p(Q)$ é compacta para $p < 10$ se $n = 3$, qualquer que seja p finito se $n = 2$. ■

No que segue, $H^m(\Omega)$ é o espaço de Sobolev usual, m um inteiro não negativo (veja Evans [13, p.288]).

Proposição 2.1.4. *Suponhamos que Ω é aberto, limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^{m+3} e m é um inteiro não-negativo. Suponhamos também que $u \in L^2(0, T; H^{m+2}(\Omega))$, com $u' \in L^2(0, T; H^m(\Omega))$. Então*

$$(i) \ u \in C([0, T]; H^{m+1}(\Omega)),$$

(ii) *Além disso, vale a estimativa*

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{H^{m+1}(\Omega)} \leq C(\|u\|_{L^2(0, T; H^{m+2}(\Omega))} + \|(\partial/\partial t)u\|_{L^2(0, T; H^m(\Omega))}),$$

a constante C dependendo unicamente de T, Ω e m .

2.2 Resultados Sobre Algumas Equações Elípticas

Necessitaremos dos seguintes importantes resultados sobre regularidade de soluções de problemas elípticos com condição de Neumann homogênea (veja Brezis [9, p. 180 – 181]). Este resultado vai garantir a invertibilidade do operador, $A := -\nu\Delta + I$, envolvido nos problemas.

Proposição 2.2.1. *Seja Ω um aberto limitado de classe C^2 e $\lambda > 0$ fixado. Para toda $f \in L^2(\Omega)$, o problema*

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f & \text{em } \Omega, \\ (\partial/\partial\eta)u = 0 & \text{na } \partial\Omega \end{cases}$$

tem uma única solução fraca, $u \in H^2(\Omega)$, tal que

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)},$$

onde C é uma constante que só depende de Ω .

O próximo resultado, cuja prova pode ser encontrada em Brezis [9, p. 192], é uma consequência do princípio do máximo e será importante nas próximas seções. Este resultado será usado para provar a positividade do operador inverso $(-\nu\Delta + I)^{-1}$.

Proposição 2.2.2 (Princípio de Máximo para um problema de Neumann). *Sejam $f \in L^2(\Omega)$ e $u \in H^1(\Omega)$ uma solução fraca de*

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f & \text{em } \Omega, \\ (\partial/\partial\eta)u = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases}$$

com $\lambda > 0$ fixado. Então, se verifica

$$\inf_{\Omega} f \leq u(x) \leq \sup_{\Omega} f \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega.$$

Observação 2.2.1. Segue da Proposição 2.2.1 que o operador linear $A : D(A) \rightarrow L^2(\Omega)$ definido por

$$A := -\nu\Delta + I$$

com $\nu > 0$ constante e $D(A) = \{u \in H^2(\Omega); (\partial/\partial\eta)u = 0\}$, é invertível.

Agora, aplicando a Proposição 2.2.2 obtemos que

$$(A)^{-1}f \geq 0,$$

para todo $f \geq 0$ em $L^2(\Omega)$.

O próximo resultado, cuja demonstração pode ser encontrada em Brezis [9, p.38], será importante nas provas de que os problemas de controle ótimo que consideraremos admitem de fato soluções ótimas.

Antes de enunciarmos tal resultado, recordemos algumas definições. Seja X um espaço topológico. Uma função $J : X \rightarrow (-\infty, \infty]$ é dita *semicontínua inferiormente* se para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, o conjunto

$$\{x \in X; J \leq \lambda\}$$

é fechado. Dizemos que J é uma *função convexa* se

$$J(tx + (1-t)y) \leq tJ(x) + (1-t)J(y), \quad \forall x, y \in X, \quad \forall t \in (0, 1).$$

Proposição 2.2.3. *Seja X um espaço de Banach e $J : X \rightarrow (-\infty, \infty]$ uma função convexa, semicontínua inferiormente (na topologia forte). Então J é semicontínua inferiormente na topologia fraca. Em particular, se $x_n \rightharpoonup x$ fracamente, então*

$$J(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J(x_n).$$

2.3 Semigrupos Analíticos, Potências Fracionárias de Operadores, Espaços de Interpolação e Problemas de Cauchy

Nesta seção vamos recordar a definição de potência fracionária para uma certa classe de operadores lineares não limitados e também recordar algumas propriedades dos operadores

resultantes. Tais propriedade, usaremos no tratamento das equações semilineares presentes nos nossos modelos.

Definição 2.3.1. *Um operador linear A em um espaço de Banach X é **setorial** se: A é fechado com $\mathcal{D}(A)$ denso em X e existem constantes $C \in \mathbb{R}$, $m \geq 1$ e $\gamma \in (0, \pi/2)$ tais que o setor aberto*

$$\Sigma = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}; \gamma \leq |\arg(\lambda - C)| \leq \pi, \lambda \neq C \right\}$$

é um subconjunto do resolvente de A e

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq m |\lambda - C|^{-1}, \quad \forall \lambda \in \Sigma$$

Nesta seção vamos supor que:

(H): A é um operador linear fechado com $\mathcal{D}(A)$ denso em X tal que

$$\Sigma^+ = \left\{ \lambda; 0 < \gamma < |\arg(\lambda)| \leq \pi \right\} \cup V \subset \rho(A)$$

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq C (1 + |\lambda|)^{-1}, \quad \forall \lambda \in \Sigma^+$$

com V uma vizinhança de zero e $\gamma \in (0, \pi/2)$.

Definição 2.3.2. *Para um operador A que satisfaz a condição (H) com $0 < \alpha < 1$, podemos definir*

$$A^{-\alpha} = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^\infty t^{-\alpha} (t I + A)^{-1} dt. \quad (2.3)$$

Para mais detalhes veja Henry [18, Theorem 1.4.2, p.25] e Pazy [38, p. 69].

Se A é setorial e satisfaz (H), então por Pazy [38, Theorem 5.2, p.61], $-A$ é o gerador de um semigrupo analítico $S(t)$.

Mas se A é apenas um operador setorial, temos ainda o seguinte resultado, veja Henry [18, Theorem 1.3.4, p.20]

Proposição 2.3.1. *Se A é um operador setorial, então $-A$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $S(t)$.*

O seguinte resultado nos dá um importante exemplo de operador setorial, veja para mais detalhes Pazy [38, Theorem 3.5, p.214].

Proposição 2.3.2. *Se ν é uma constante positiva, então $A = -\nu\Delta + I$, com*

$$D(A) = \{u \in H^2(\Omega); (\partial/\partial\eta)(u) = 0\},$$

é um operador setorial.

Para $\delta > 0$ suficientemente pequeno e A um operador que satisfaz **(H)**, o operador $-A + \delta I$ é o gerador do semigrupo analítico $S_1(t) = e^{\delta t} S(t)$, onde $S(t)$ é o semigrupo analítico gerado por $-A$. Isto implica as seguintes estimativas:

$$\|S(t)\| \leq C e^{-\delta t} \quad (2.4)$$

$$\|A S(t)\| \leq C_1 t^{-1} e^{-\delta t} \quad (2.5)$$

$$\|A^m S(t)\| \leq C_m t^{-m} e^{-\delta t} \quad (2.6)$$

De fato, as estimativas (2.4) e (2.5) são conseqüências das propriedades dos semigrupos analíticos e a estimativa (2.6) do seguinte lema (veja Pazy [38, p. 53])

Lema 2.3.1. *Se $S(t)$ é um C_0 -semigrupo diferenciável e A é o seu gerador então*

$$S^{(n)}(t) = \left(A S \left(\frac{t}{n} \right) \right)^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Combinando a estimativa (2.5) e o Lema 2.3.1, obtemos

$$\begin{aligned} \|A^m S(t)\| &= \left\| \left(A S \left(\frac{t}{m} \right) \right)^m \right\| \leq \left\| A S \left(\frac{t}{m} \right) \right\|^m \\ &\leq \left(C_1 t^{-1} e^{-\delta t/m} \right)^m = C_m t^{-m} e^{-\delta t} \end{aligned}$$

Por outro lado, por (2.4) temos que

$$(tI + A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-st} S(s) ds \quad (2.7)$$

converge uniformemente para $t \geq 0$. Substituindo (2.7) em (2.3) e usando o Teorema de Fubini e também a igualdade $\int_0^\infty z^{-\alpha} e^z dz = \frac{\pi}{\Gamma(\alpha) \operatorname{sen} \pi \alpha}$, concluímos que

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} S(t) dt \quad (2.8)$$

com a integral convergindo para todo $\alpha > 0$.

Os resultados seguintes fornecem algumas propriedades importantes sobre as potências fracionárias de operadores e podem ser encontrados em Pazy [38, Lemmas 6.2, 6.3 e 6.4].

Proposição 2.3.3. *Suponhamos que A é um operador que satisfaz $(\mathbf{H})$.*

- (a) $A^{-(\alpha+\beta)} = A^{-\alpha} A^{-\beta}$, para $\alpha, \beta \geq 0$.
- (b) Existe uma constante $C > 0$ tal que $\|A^{-\alpha}\| \leq C$, $0 \leq \alpha \leq 1$.
- (c) $\lim_{\alpha \rightarrow 0} A^{-\alpha} u = u$ para todo $u \in X$.

O proximo resultado pode ser encontrado em Henry [18, Theorem 1.4.2, p.25]

Proposição 2.3.4. *Se A satisfaz a condição $(\mathbf{H})$ em X então $A^{-\alpha}$ é um operador linear limitado e injetor em X .*

Definição 2.3.3. *Seja A um operador que satisfaz a condição $(\mathbf{H})$ em X . Para $\alpha > 0$ definimos*

$$A^\alpha = \left(A^{-\alpha} \right)^{-1} \quad (2.9)$$

e para $\alpha = 0$ definimos $A^0 = I$.

Temos então as seguintes propriedades, cujas demonstrações podem ser encontradas em Pazy [38, p.72] e Henry [18, Theorem 1.4.8, p. 29].

Proposição 2.3.5.

Seja A definido por (2.9). Então

- (i) A^α é um operador fechado com domínio $\mathcal{D}(A^\alpha) = \mathcal{R}(A^{-\alpha})$, com $\mathcal{R}$ o conjunto imagem do operador $A^{-\alpha}$.

(ii) Para $\alpha \geq \beta > 0$ temos que $\mathcal{D}(A^\alpha)$ é um subespaço denso de $\mathcal{D}(A^\beta)$ com inclusão contínua.

(iii) $\overline{\mathcal{D}(A^\alpha)} = X$ para $\alpha \geq 0$.

(iv) Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ temos que $A^{\alpha+\beta}u = A^\alpha A^\beta u$, $\forall u \in \mathcal{D}(A^\sigma)$ com $\sigma = \max\{\alpha, \beta, \alpha + \beta\}$.

Em Pazy [38, Theorem 6.13, p. 74] encontramos também o seguinte:

Proposição 2.3.6. *Se $-A$ é um gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $S(t)$. Se $0 \in \rho(A)$ então*

(1) $S(t) : X \rightarrow D(A^\alpha)$ para cada $t > 0$ e $\alpha \geq 0$.

(2) Para cada $x \in D(A^\alpha)$ temos que $S(t)A^\alpha x = A^\alpha S(t)x$.

(3) Para cada $t > 0$ o operador $A^\alpha S(t)$ é limitado e

$$\|A^\alpha S(t)\| \leq M_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t}.$$

(4) Seja $0 < \alpha \leq 1$ e $x \in D(A^\alpha)$ então

$$\|S(t)x - x\| \leq C_\alpha t^\alpha \|A^\alpha x\|.$$

O resultado seguinte, cuja prova pode ser encontrada em Pazy [38, Theorem 6.9], fornece uma fórmula explícita para A^α .

Proposição 2.3.7. *Seja $0 < \alpha < 1$. Se $u \in \mathcal{D}(A)$ então*

$$A^\alpha u = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^\infty t^{\alpha-1} A(tI + A)^{-1} u dt \quad (2.10)$$

Segue dos resultados anteriores que A^α pode ser definido para $0 \leq \alpha \leq 1$ e que A^α é um operador linear fechado invertível com domínio $D(A^\alpha)$ denso em X . O fechamento de A^α implica que $D(A^\alpha)$ dotado com a norma do gráfico de A^α , isto é, a norma $\|x\| = \|x\| + \|A^\alpha x\|$, é um espaço de Banach. Desde que A^α é invertível, a norma do gráfico $\|\cdot\|$ é equivalente à norma $\|x\|_\alpha = \|A^\alpha x\|$. Assim, podemos definir:

Definição 2.3.4. *Denotaremos por*

X^α o espaço de Banach $D(A^\alpha)$ equipado com a norma $\|\cdot\|_\alpha$.

- Observação 2.3.1.** 1. Desta definição é claro que $0 < \alpha < \beta$ implica $X^\beta \subset X^\alpha$ e que as imersões são contínuas.
2. Quando $X = L^p(\Omega)$ denotaremos X^α por X_p^α e $\|\cdot\|_\alpha$ por $\|\cdot\|_{\alpha,p}$, onde $\|x\|_{\alpha,p} = \|A^\alpha x\|_{L^p(\Omega)}$.
3. Pode-se mostrar que se A satisfaz a condição **(H)** sem qualquer restrição sobre γ então $-A^\alpha$ com $\alpha \leq 1/2$ é o gerador de um C_0 -semigrupo de operadores lineares limitados. Se $0 < \gamma < \pi/2$ (como assumimos) então $-A^\alpha$ é o gerador de um semigrupo analítico para $0 < \alpha < 1$.

A demonstração do resultado a seguir pode ser encontrada em Pazy [38, p. 243] ou Henry [18, p. 39]. Este resultado fornece importantes imersões dos espaços fracionários nos espaços de Sobolev, estes resultados vão ser aplicados para obter a regularidade das soluções do problema (1.4).

Proposição 2.3.8. *Suponhamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado de classe C^m , $1 \leq p < \infty$, e A é um operador setorial em $X = L^p(\Omega)$ com $D(A) \subset W^{m,p}(\Omega)$ para algum $m \geq 1$. Então para $0 < \alpha \leq 1$*

$$X^\alpha \hookrightarrow W^{k,q}(\Omega) \quad \text{quando} \quad k - \frac{n}{q} < m\alpha - \frac{n}{p}, \quad q \geq p;$$

$$X^\alpha \hookrightarrow C^\nu(\overline{\Omega}) \quad \text{quando} \quad 0 \leq \nu < m\alpha - \frac{n}{p},$$

onde X^α é o espaço de Banach $D(A^\alpha)$ equipado com a norma $\|u\|_\alpha = \|A^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}$.

A demonstração do próximo corolário também pode ser encontrada em Henry [18, ex. 10, p. 40].

Corolário 2.3.1. *Aplicando da Proposição 2.3.8 para $A = -\Delta$ em $L^p(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e*

$D(A) \subset W^{2,p}(\Omega)$ temos que

$$X^\alpha \hookrightarrow C^\nu(\Omega) \quad \text{quando} \quad 0 \leq \nu < 2\alpha - \frac{n}{p},$$

$$X^\alpha \hookrightarrow W^{1,q}(\Omega) \quad \text{quando} \quad \alpha > \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{q} > \frac{1}{p} - \frac{(2\alpha - 1)}{n},$$

$$X^\alpha \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \text{se} \quad \frac{1}{q} > \frac{1}{p} - \frac{2\alpha}{n}, \quad q \geq p.$$

A seguir vamos definir um espaço de interpolação que nos será útil.

Definição 2.3.5. *Dado $0 < \theta < 1$ e $1 \leq p < \infty$, temos que $D(\theta, p)$ denota o espaço de interpolação $(X, D(A))_{\theta, p}$, que consiste dos vetores $u \in X$ tal que*

$$|u|_{D(\theta, p)}^p = \int_0^1 \|t^{1-\theta} S(t)u\|^p \frac{dt}{t}.$$

Para mais detalhes, veja Lunardi [24, seção 2.2.1].

O próximos dois lemas também podem ser encontrados em Lunardi [24, Corollary 2.2.3, p. 47] e Lunardi [25, Theorem 4.3.11] respectivamente. Usaremos estes lemas para provar resultados de regularidade para as soluções da equação (1.4).

Lema 2.3.2. *Para $0 < \theta_1 < \theta_2 < 1$, $1 \leq p < \infty$, temos que*

$$D(\theta_2, p) \hookrightarrow D(\theta_1, p).$$

Para $0 < \theta < 1$ e $1 \leq p_1 < p_2 < \infty$,

$$D(\theta, p_1) \hookrightarrow D(\theta, p_2).$$

Lema 2.3.3. *Seja X um espaço de Hilbert. Para cada $\theta \in (0, 1)$ e para cada $\beta > 0$ real, então*

$$(X, D(A^\beta))_{\theta, 2} = D(A^{\beta\theta}).$$

Consideremos agora o seguinte problema de Cauchy abstrato

$$\begin{cases} \partial_t u(t) + Au(t) = f(t, u(t)), & t \geq 0 \\ u(t_0) = u_0, \end{cases} \quad (2.11)$$

com $u(t) \in D(A)$.

Dizemos que $u(\cdot)$ é uma "mild-solution" do problema de valor inicial (2.11) se ela satisfaz

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s, u(s))ds \quad \text{com} \quad 0 \leq t < T, \quad (2.12)$$

Neste caso, $u(\cdot)$ é automaticamente contínua.

As duas definições que se seguem, podem ser encontradas em Henry [18, p. 53].

Definição 2.3.6. *Seja U um aberto de $\mathbb{R}^+ \times X^\alpha$, dizemos que uma função $f : U \rightarrow X$ é localmente Hölder contínua em t e localmente Lipschitz em $x \in U$ se para cada $(t_1, x_1) \in U$ existe uma vizinhança $V \subset U$ de (t_1, x_1) e constantes $L \geq 0$, $0 < v \leq 1$ tais que*

$$\|f(t, x) - f(s, y)\|_X \leq L(|t - s|^v + \|x - y\|_\alpha), \quad (2.13)$$

para todo $(t, x), (s, y) \in V$.

Definição 2.3.7. *Uma **solução** do problema (2.11) em (t_0, t_1) é uma função contínua $u : [t_0, t_1[\rightarrow X$ tal que $u(0) = u_0$ e em (t_0, t_1) temos $(t, u(t)) \in U$, $u(t) \in D(A)$, u_t existe, $t \mapsto f(t, u(t))$ é localmente Hölder contínua, e*

$$\int_0^\rho \|f(t, u(t))\|_X dt < \infty,$$

para algum $\rho > 0$ e a equação (2.11) está definida em (t_0, t_1) .

O seguinte teorema, será aplicado para obter um resultado de existência e unicidade local (no sentido da Definição 2.3.7) para o problema (1.4) (para mais detalhes, veja Henry [18, Teorema 3.3.3, p.54]).

Proposição 2.3.9. *Suponhamos que A é um operador setorial, $0 \leq \alpha < 1$, e $f : U \rightarrow X$, U um subconjunto aberto de $\mathbb{R} \times X^\alpha$, $f(t, u)$ é localmente Lipschitziana em $u \in U$ e localmente*

Hölder contínua em t , com expoente $0 < v \leq 1$, então para cada dado inicial $(t_0, u_0) \in U$, existe $t_1 = t_1(t_0, x_0) > t_0$ tal que o problema de valor inicial (2.11) tem uma única solução local u em (t_0, t_1) , $u \in C([t_0, t_1]; X^\alpha)$.

O próximo resultado dá algumas condições suficientes para que se possa concluir que a solução, local no tempo, obtida pela Proposição 2.3.9 é de fato global, ou seja, que tal solução existe para todo $t \geq t_0$. Sua demonstração pode ser encontrada em Henry [18, Teorema 3.3.4, p. 55].

Proposição 2.3.10. *Suponha que A e f são como na Proposição 2.3.9 e também que, para cada conjunto limitado e fechado $B \subset U$, a imagem $f(B)$ é limitada em X . Se u é uma solução de (2.11) em (t_0, t_1) e t_1 é maximal, ou seja, não existe solução de (2.11) em (t_0, t_2) se $t_2 > t_1$, então ou $t_1 = +\infty$ ou existe uma sequência $t_n \rightarrow t_1^-$ quando $n \rightarrow +\infty$ tal que $(t_n, u(t_n)) \rightarrow \partial U$. (Se U é ilimitado, o ponto no infinito está incluído em ∂U).*

Necessitaremos também do conceito de espaço de Banach ordenado. Usaremos estes conceitos para provar a positividade da "mild-solution" para (1.4).

Definição 2.3.8. *Dizemos que um espaço de Banach real tem uma ordem ($\geq$) se: Para todo $x, y, z \in X$, temos*

- (a) $x \geq x$,
- (b) Se $x \geq y$ e $y \geq z$, então $x \geq z$,
- (c) Se $x \geq y$, então $x + z \geq y + z$ e $\lambda x \geq \lambda y$, para todo $\lambda \geq 0$ em $\mathbb{R}$,
- (d) O conjunto $\{x \in X; x \geq 0\}$ é fechado.

Neste caso, dizemos que $(X, \geq)$ é um espaço de Banach ordenado.

Exemplo 2.3.1. Seja $X = L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, dizemos que $f \geq g$ se $f(x) \geq g(x)$, para quase todo ponto $x \in \Omega$.

Definição 2.3.9. *Seja $(X, \geq)$ é um espaço de Banach ordenado. Dizemos que uma aplicação $g : X \rightarrow X$ é crescente se $x \geq y$ então $g(x) \geq g(y)$.*

Em particular, se g é linear e crescente, então g é positiva, ou seja, se $x \geq 0$ então $g(x) \geq 0$.

O seguinte lema será importante para auxiliar na obtenção de resultados sobre o sinal das soluções do problema de Cauchy (1.4), veja Henry [18, Exercise 6, p. 60].

Lema 2.3.4. *Suponhamos que A é um operador setorial em um espaço X com uma ordem (satisfazendo (a) – (d) da Definição 2.3.8) e suponhamos que $(\lambda + A)^{-1}$ seja positivo (escreveremos $(\lambda + A)^{-1} \geq 0$) para todo $\lambda \geq 0$, então $S(t) \geq 0$ para cada $t \geq 0$.*

Demonstração: Considere o seguinte resultado, veja Pazy [38, Theorem 8.3, p. 33]

$$S(t)x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I + \frac{t}{n} A \right)^{-n} x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{t} \left(\frac{n}{t} I + A \right)^{-1} \right]^n x.$$

Considere $x \geq 0$. Como $\left[\left(\frac{n}{t} I + A \right)^{-1} \right]^n$ é um operador linear, segue por hipótese que

$$\left[\frac{n}{t} \left(\frac{n}{t} I + A \right)^{-1} \right]^n x \geq 0,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ e para cada $t \geq 0$. Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{t} \left(\frac{n}{t} I + A \right)^{-1} \right]^n x \geq 0,$$

de onde segue o resultado. ■

O próximo lema será importante para estudarmos o sinal de uma solução do problema (1.4).

Lema 2.3.5. *Suponhamos que X é um espaço de Banach com uma ordem, A é setorial com $(\lambda + A)^{-1} \geq 0$ para todo $\lambda > \lambda_0$, $f : [t_0, t_1) \times X^\alpha \rightarrow X$ é localmente Hölder contínua em $t \in [t_0, t_1)$ e localmente Lipschitziana em X^α e em conjuntos limitados*

$$B_r = \{x \in X^\alpha; x \geq 0, \|x\|_\alpha \leq r\},$$

existe $\beta = \beta(B_r)$ tal que $f(t, x) + \beta x \geq 0$ quando $x \in B_r$ e $t_0 \leq t < t_1$. Então, se $x_0 \in X^\alpha$, $x_0 \geq 0$, a solução de

$$\begin{cases} \partial_t u + Au &= f(t, u), \\ u(t_0, \cdot) &= u_0, \end{cases} \quad (2.14)$$

é tal que $u(t) \geq 0$ para $t \in [t_0, t_1)$, em seu intervalo de existência.

Demonstração: A prova deste resultado é análoga à demonstração da Proposição 2.3.9, veja Henry [18, Teorema 3.3.3, p.54].

Considere

$$S = \{u \in C([t_0, t_1], X^\alpha), u \geq 0, \|u(t) - u_0\|_\alpha \leq \delta\} \subset B = \{x \in X^\alpha; x \geq 0, \|x\|_\alpha \leq \delta + \|u_0\|_\alpha\}.$$

Para $u \in S$ definamos $G(u) : [t_0, t_1] \rightarrow X$ por

$$G(u)(t) = S_\beta(t - t_0)u_0 + \int_{t_0}^t S_\beta(t - s)[f(s, u(s)) + \beta u(s)]ds,$$

com $\beta = \beta(B)$ dado por hipótese e $S_\beta(t)$ o semigrupo analítico gerado pelo operador setorial $A + \beta I$.

Tome λ tal que $\lambda + \beta > \lambda_0$, por hipótese temos que $(\lambda I + A + \beta I)^{-1} \geq 0$. Aplicando o Lema 2.3.4 obtemos que $S_\beta(t) \geq 0$. Usando as hipóteses sobre f e u_0 e os resultados do Lema 2.3.4, concluimos que

$$G(u)(t) \geq 0,$$

para todo $u \in S$. E assim, $G : S \rightarrow S$ está bem definido. Seguindo os mesmos passos da demonstração da Proposição 2.3.9 obtemos que G tem um ponto fixo $u \in S$ e este ponto fixo é uma solução do problema

$$\begin{cases} \partial_t u + (A + \beta I)u &= f(t, u) + \beta u, \\ u(t_0, \cdot) &= u_0, \end{cases} \quad (2.15)$$

notemos que encontrar uma solução de (2.14) é equivalente a encontrar uma solução de (2.15). Portanto, o problema (2.15) tem uma solução $u(t) \geq 0$, para $t \in [t_0, t_1)$ em seu intervalo de existência. ■

Observação 2.3.2. Os resultados do Lema 2.3.5 estão propostos como dois exercícios em Henry; para maiores detalhes, veja [18, Exercises 7, 8, p.61].

O próximo resultado pode ser encontrado em Cannarsa e Vespri [10, Theorem 1.7]. Este resultado será usado para obter a regularidade da solução, encontrada usando semigrupo, do problema (1.4). Na proposição seguinte, E é um espaço de Banach e $S(t)$ é o semigrupo analítico gerado por $-A$.

Proposição 2.3.11. *Suponhamos que para algum $q \in [1, \infty)$ e para qualquer $f \in L^q(0, T; E)$, temos que*

$$\left\| A \int_0^t S(t-s)f(x, s)ds \right\|_{L^q(0, T; E)} \leq K_q \|f\|_{L^q(0, T; E)}, \quad (2.16)$$

e que dados $u_0 \in D_A(1 - \frac{1}{p}, p)$, $f \in L^p(0, T; E)$, com $p \in [q, \infty)$, existe uma solução da equação

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \quad u(0) = u_0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Então

$$u', Au \in L^p(0, T; E).$$

Agora, restringindo para E um espaço de Hilbert e $p = 2$, o seguinte resultado encontrado em Lions e Magenes [21, Théorème 3.2], L. de Simon [40], implica a estimativa (2.16).

Proposição 2.3.12. *Suponhamos que H é um espaço de Hilbert e A é um operador setorial. Então para cada $f \in L^2(0, T; H)$, existe uma única função u verificando*

$$u \in L^2(0, T; D(A)), u' + Au = f, u(0) = u_0,$$

onde $u_0 \in (D(A), H)_{\frac{1}{2}, 2}$, e mais,

$$\int_0^T \left\| A \int_0^t S(t-s)f(s)ds \right\|^2 dt \leq C \int_0^T \|f(t)\|^2 dt.$$

2.4 Operadores de Nemytskii

Se Ω é um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$. Dizemos que uma função $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory se: (a) para cada $s \in \mathbb{R}$ fixado a função $x \mapsto f(x, s)$ é (Lebesgue) mensurável em Ω , (b) para $x \in \Omega$ fixado (q.t.p) a função $s \mapsto f(x, s)$ é contínua em $\mathbb{R}$.

Seja $\mathcal{M}$ o conjunto de todas as funções mensuráveis $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Uma função de Carathéodory f define uma aplicação

$$N_f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M},$$

por, $u \mapsto N_f(u)(.) = f(., u(.))$, que é chamada de Aplicação de Nemytskii.

Estamos interessados em propriedades desta aplicação quando N_f aplica um espaço L^p em algum outro espaço L^q . Neste contexto, temos o seguinte resultado importante que pode ser encontrado em Ambrosetti e Prodi [5, Theorem 2.2] ou Figueiredo [14, Theorem 2.3].

Proposição 2.4.1. *Suponhamos que existe uma constante $c > 0$, uma função $b(x) \in L^q(\Omega)$, $1 \leq q \leq \infty$, e $r > 0$ tais que*

$$|f(x, s)| \leq c|s|^r + b(x), \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (2.17)$$

Então

1. N_f aplica L^{qr} em L^q .
2. N_f é contínua e limitada (isto é, ela aplica conjuntos limitados em conjuntos limitados).

O próximo resultado mostra que a condição suficiente (2.17) é também necessária para que uma função de Carathéodory f defina uma aplicação de Nemytskii entre espaços do tipo L^p , e sua demonstração pode ser encontrada em Figueiredo [14, Theorem 2.4].

Proposição 2.4.2. *Suponhamos que N_f aplica $L^p(\Omega)$ em $L^q(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q < \infty$. Então existe uma constante $c > 0$ a $b(x) \in L^q(\Omega)$ tal que*

$$|f(x, s)| \leq c|s|^{p/q} + b(x), \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (2.18)$$

Diferenciabilidade da Aplicação de Nemytskii

Suponhamos que uma função de Carathéodory $f(x, s)$ satisfaça a condição (2.18). Então esta define uma aplicação de $L^p(\Omega)$ em $L^q(\Omega)$. É natural se questionar: se $f(x, s)$ tem uma derivada parcial $f'_s(x, s)$ com relação a s , que é também uma função de Carathéodory, $f'_s(x, s)$ define uma Aplicação de Nemytskii entre alguns espaços L^p .

A resposta desta questão não é verdade em geral, como consequência da Proposição 2.4.2 temos que a razão para isto é que (2.18) pode não possuir restrição para o crescimento da derivada.

Visando a diferenciabilidade da Aplicação de Nemytskii N_f associada com a função de Carathéodory $f(x, s)$, começaremos assumindo que $f'_s(x, s)$ é uma função de Carathéodory e

$$|f'_s(x, s)| \leq c|s|^m + b(x), \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad (2.19)$$

onde $b(x) \in L^n(\Omega)$, $1 \leq n \leq \infty$, $m > 0$. Integrando (2.19) com relação a s obtemos

$$|f(x, s)| \leq \frac{c}{m+1}|s|^{m+1} + b(x)|s| + a(x), \quad (2.20)$$

onde $a(x)$ é uma função arbitrária. Mais a frente iremos impor uma condição em $a(x)$ para termos uma Aplicação de Nemytskii entre espaços L^p . Usando a desigualdade de Young em (2.20) temos

$$|f(x, s)| \leq \frac{c+1}{m+1}|s|^{m+1} + \frac{m}{m+1}b(x)^{(m+1)/m} + a(x).$$

Observamos que a função $b(x)^{(m+1)/m} \in L^q(\Omega)$, onde $q = mn/(m+1)$. Então, se tomarmos $a \in L^q$, segue da Proposição 2.4.1 que (assumindo (2.19)):

$$N_f : L^p \rightarrow L^q \quad p = mn \quad \text{e} \quad q = mn/(m+1) \quad (2.21)$$

$$N_{f'_s} : L^p \rightarrow L^n \quad (2.22)$$

O resultado seguinte, cuja demonstração pode ser encontrada em Ambrosetti e Prodi [5, Theorem 2.6] ou Figueiredo [14, Theorem 2.6], explicita nos condições que garantem a diferenciabilidade da aplicação N_f .

Proposição 2.4.3. *Suponhamos (2.19) e a notação dada em (2.21) e (2.22). Então N_f é continuamente Fréchet diferenciável com $N'_f : L^p(\Omega) \rightarrow L(L^p, L^q)$ definida por*

$$N'_f(u)[v] = N_{f'_s}(u)v = f'_s(x, u(x))v(x), \quad \forall u, v \in L^p.$$

2.5 O Formalismo de Dubovitskii e Milyutin

Nesta seção, para facilitar as referências, apresentaremos as definições e os principais resultados que constituem o método que usaremos para obter sistemas de otimalidade dos problemas de otimização. Tal técnica é conhecida como formalismo de Dubovitskii e Milyutin, veja Girsanov [17].

Vamos considerar inicialmente o problema de minimizar um funcional definido sobre um aberto de um espaço de Banach, sujeito às restrições com interior vazio e não vazio (as chamadas restrições de igualdade e desigualdade, respectivamente); em geral as restrições de igualdade aparecem como núcleos de operadores não lineares. Mais especificamente, sejam X e Y espaços de Banach, $M : X \longrightarrow Y$ um operador e $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional. Consideremos o seguinte problema de otimização:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min J(x) \\ \text{sujeito a} \\ x \in \mathcal{Q} = \bigcap_{i=1}^{n+1} \mathcal{Q}_i \end{array} \right. \quad (2.23)$$

onde $\mathcal{Q}_i, i = 1, \dots, n$, são ditas restrições de desigualdades ($\text{int} \mathcal{Q}_i \neq \emptyset, i = 1, \dots, n$) e $\mathcal{Q}_{n+1} = \{x \in X / M(x) = 0\}$ é uma restrição de igualdade ($\text{int} \mathcal{Q}_{n+1} = \emptyset$).

No trabalho de Dubovitskii e Milyutin, as condições necessárias de otimalidade local em um ponto $x_0 \in X$ foram obtidas a partir da separação das aproximações cônicas aos conjuntos de restrições $\mathcal{Q}_i, i = 1, \dots, n + 1$, e do conjunto $\{x \in X / J(x) < J(x_0)\}$. Neste estudo, as definições foram feitas de tal forma que se os cones aproximantes fossem não vazios e convexos, então x_0 seria mínimo local do problema (2.23) se, e somente se, não existe um ponto comum a todos os cones aproximantes. Os resultados obtidos por Dubovitskii e Milyutin provam que esta propriedade geométrica da otimalidade local do ponto x_0 pode ser equivalentemente descrita em termos das formas lineares dos correspondentes cones duais.

Assim, nesta seção, daremos algumas definições preliminares, seguidas de alguns resultados sobre os cones de direções de descida do funcional objetivo, de direções factíveis e de direções tangentes. Em seguida, apresentaremos o teorema de Dubovitskii e Milyutin, que

nada mais é do que o método dos multiplicadores de Lagrange em uma versão funcional. Para a aplicação prática deste teorema, daremos alguns resultados que nos permitam calcular os cones aproximantes e seus duais. Todos os resultados foram apresentados em sua maioria por Girsanov em [17] e Alexéev, Tikhomirov e Fomine [4].

2.5.1 Definições e Resultados

Nesta seção, apresentaremos os principais resultados que fundamentam a teoria de Dubovitskii e Milyutin.

Definição 2.5.1. Dizemos que um vetor h é uma **direção de descida** do funcional $J(\cdot)$ no ponto x_0 se existe uma vizinhança U de h , $\epsilon_0 > 0$ e um número estritamente negativo $\alpha = \alpha(J, x_0, h)$ tal que, para todo $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ e qualquer $\bar{h} \in U$,

$$J(x_0 + \epsilon \bar{h}) \leq J(x_0) + \epsilon \alpha.$$

Definição 2.5.2. Dizemos que um funcional $J(\cdot)$ é **regularmente de descida** em x_0 se suas direções de descida em x_0 formam um conjunto convexo.

Definição 2.5.3. Sendo Q_i dado por restrições de desigualdade, dizemos que o vetor h é uma **direção factível** para Q_i no ponto $x_0 \in Q_i$ se existe uma vizinhança U de h e $\epsilon_0 > 0$ tal que, para todo $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ e qualquer $\bar{h} \in U$, os vetores

$$x_0 + \epsilon \bar{h} \in Q_i.$$

Definição 2.5.4. Dizemos que uma restrição de desigualdade Q_i é **regular** no ponto $x_0 \in Q_i$ se o conjunto das direções factíveis a Q_i em x_0 é convexo.

Observação 2.5.1. Se Q_i for dado por restrição de igualdade, então a definição anterior não faz sentido. Neste caso, precisamos de uma outra definição para as direções factíveis.

Definição 2.5.5. Dizemos que h é um vetor **tangente unilateral** ou simplesmente **direção tangente** a Q_i no ponto $x_0 \in Q_i$ se existe $\epsilon_0 > 0$ tal que, para qualquer $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ existe um ponto $x(\epsilon) \in Q_i$ tal que

$$x(\epsilon) = x_0 + \epsilon h + r(\epsilon) \quad \text{e} \quad \frac{1}{\epsilon} r(\epsilon) \in U,$$

para qualquer $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e qualquer vizinhança U de zero, ou equivalentemente

$$\|r(\epsilon)\| = o(\epsilon).$$

Definição 2.5.6. Uma restrição de igualdade Q_i é **regular** no ponto x_0 se o conjunto de suas direções tangentes a Q_i em x_0 é convexo.

Observação 2.5.2. Quando o conjunto das direções tangentes é um subespaço vetorial, ele é chamado **espaço tangente**.

Definição 2.5.7. Dizemos que um conjunto K é um **cone** com vértice em zero se $\lambda x \in K$ para qualquer $\lambda > 0$ e $x \in K$.

Proposição 2.5.1. (i) As direções de descida geram um cone aberto com vértice em zero.

(ii) As direções factíveis geram um cone aberto com vértice em zero.

(iii) As direções tangentes geram um cone com vértice em zero.

Definição 2.5.8. Se K é um cone em X , seu cone dual denotado por K^* é dado por

$$K^* = \{\varphi \in X' / \varphi(x) \geq 0 \text{ para todo } x \in K\}.$$

Observação 2.5.3. O uso da notação K^* para o cone dual não parece adequado, pois se $K = X$, então $K^* = \{0\} \neq X^*$ (X^* é o dual algébrico de X). Contudo, isto é usual na literatura, não devendo, portanto, causar confusão.

Agora apresentaremos o resultado principal desta seção veja Girsanov [17, Theorem 6.1, p. 40].

Teorema 2.5.1. (Dubovitskii e Milyutin) Suponha que $J(\cdot)$ assume um mínimo local em $Q = \bigcap_{i=1}^{n+1} Q_i$ no ponto x_0 , J é regularmente de descida em x_0 , com direções de descida K_0 , $Q_i, i = 1, \dots, n$, é regular em x_0 , com direções factíveis $K_i, i = 1, \dots, n$, e Q_{n+1} é regular em

x_0 , com direções tangentes K_{n+1} . Então existem funcionais lineares contínuos $f_i \in K_i^*, i = 0, \dots, n+1$, não simultaneamente nulos, tais que

$$f_0 + f_1 + \dots + f_n + f_{n+1} = 0.$$

Observação 2.5.4. Segue do teorema de Dubovitskii e Milyutin que se desejarmos determinar as condições necessárias para um ponto extremo em algum problema específico, devemos resolver os seguintes problemas:

- 1- Determinar as Direções de Descida do Funcional,
- 2- Determinar as Direções Factíveis,
- 3- Determinar as Direções Tangentes,
- 4- Construir os Cones Duais.

Respostas a estas questões são o conteúdo das próximas seções.

2.5.2 Cálculo Explícito dos Cones

Iniciaremos esta seção apresentando algumas definições e resultados que usaremos para a construção dos cones desejados. Em seguida, abordaremos de forma detalhada os itens enunciados na Observação 2.5.4.

2.5.3 Algumas Ferramentas do Cálculo Diferencial

Uma boa referência para os resultados desta seção é Alexéev, Tikhomirov e Fomine [4], § 2.2, Cap. II. Sejam X e Y dois espaços vetoriais normados, U uma vizinhança de um ponto x_0 em X e F uma aplicação de U em Y .

Definição 2.5.9. Dizemos que F tem uma **derivada direcional** no ponto x_0 na direção h , se o limite

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{F(x_0 + \epsilon h) - F(x_0)}{\epsilon}$$

existe. Denotaremos por $F'(x_0, h)$.

Definição 2.5.10. Suponhamos que para todo $h \in X$ a derivada $F'(x_0, h)$ na direção h exista. A aplicação $\delta_+ F(x_0, \cdot) : X \rightarrow Y$ definida por $\delta_+ F(x_0, h) = F'(x_0, h)$ é denominada a **primeira variação** da aplicação F no ponto x_0 .

Definição 2.5.11. Suponhamos que F possui uma primeira variação no ponto x_0 e que existe um operador linear contínuo $\Lambda \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $\delta_+ F(x_0, h) = \Lambda h$. Então o operador Λ é denominado a **derivada de Gâteaux** da aplicação F no ponto x_0 e denotamos por $\nabla_G F(x_0)$.

Assim, $\nabla_G F(x_0)$ é um elemento de $\mathcal{L}(X, Y)$ tal que para cada $h \in X$ temos a relação

$$F(x_0 + \epsilon h) = F(x_0) + \epsilon \nabla_G F(x_0) h + o(\epsilon),$$

quando $\epsilon \rightarrow 0^+$.

Definição 2.5.12. Dizemos que o operador F é **Fréchet-diferenciável** em x_0 se, em uma vizinhança de x_0 , ele pode ser representado sob a forma

$$F(x_0 + h) = F(x_0) + \Lambda h + \alpha(h) \|h\|$$

onde $\Lambda \in \mathcal{L}(X, Y)$ e

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \|\alpha(h)\| = \|\alpha(0)\| = 0.$$

O operador Λ é chamado *derivada de Fréchet* (ou simplesmente *derivada*) da aplicação F no ponto x_0 e é denotado por $F'(x_0)$.

Definição 2.5.13. Dizemos que um operador $F : X \rightarrow Y$ é **estritamente diferenciável** em x_0 se existe $\Lambda \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todos x_1, x_2 verificando $\|x_1 - x_0\| < \delta, \|x_2 - x_0\| < \delta$, temos a seguinte desigualdade

$$\|F(x_1) - F(x_2) - \Lambda(x_1 - x_2)\| \leq \epsilon \|x_1 - x_2\|.$$

Definição 2.5.14. Dizemos que o operador $F : U \subset X \rightarrow Y$ definido sobre um aberto U é **de classe** $C^1(U)$ se ele possui uma derivada em cada ponto $x \in U$ e a aplicação $x \mapsto F'(x)$ é contínua.

Observação 2.5.5. As seguintes conclusões são satisfeitas:

- (i) Se F é Fréchet-diferenciável em x_0 , então F é Gâteaux-diferenciável em x_0 e $F'(x_0) = \nabla_G F(x_0)$.
- (ii) Se F é estritamente diferenciável em x_0 , então F é Fréchet-diferenciável em x_0 e $\Lambda = F'(x_0)$.
- (iii) Se F é estritamente diferenciável em x_0 , então existe uma vizinhança de x_0 onde F é contínua, de fato, é Lipschitz contínua.
- (iv) F pode ser Fréchet-diferenciável em x_0 e não ser estritamente diferenciável em x_0 . Considere por exemplo, $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

F é Fréchet-diferenciável em $x_0 = 0$, mas não é estritamente diferenciável, pois F é contínua somente em $x_0 = 0$.

- (v) Se F é de classe C^1 , então ela é estritamente diferenciável.

O próximo resultado, que enunciaremos na forma de um lema, foi retirado de Alexéev, Tikhomirov e Fomine [4]. Este resultado será de grande importância para caracterizar os cones de direções tangentes. Usaremos a notação Y' para o espaço dos funcionais lineares e contínuos definidos em Y (dual topológico de Y).

Lema 2.5.1. *Sejam X e Y dois espaços normados, $U \subset X$. Se $F : U \rightarrow Y$ é Gâteaux-diferenciável em cada ponto $x \in U$ e a aplicação definida por*

$$x \mapsto \nabla_G F(x)$$

é contínua em x_0 (na topologia de $\mathcal{L}(X, Y)$), então F é estritamente diferenciável em x_0 .

2.5.4 Direções de Descida

Os próximos dois resultados podem ser encontrados em Girsanov [17], pp. 45 e 48.

Teorema 2.5.2. *Seja X um espaço de Banach. Suponha que o funcional $J(\cdot)$ satisfaz uma condição de Lipschitz em uma vizinhança do ponto $x_0 \in X$ e que é Gateaux diferenciável em x_0 em qualquer direção h . Se $J'(x_0, h)$ é convexa como função de h , então $J(\cdot)$ é regularmente de descida em x_0 e seu cone de direções de descida K_0 é dado por*

$$K_0 = \{h \in X; J'(x_0, h) < 0\}.$$

Corolário 2.5.1. *Seja X um espaço de Banach.*

- (i) *Se $J(\cdot)$ é um funcional convexo contínuo, então $J(\cdot)$ é diferenciável em qualquer ponto e , em qualquer direção, $J(\cdot)$ é regularmente de descida em qualquer ponto e*

$$K_0 = \{h \in X; J'(x_0, h) < 0\}.$$

- (ii) *Se $J(\cdot)$ é Fréchet-diferenciável, então $J(\cdot)$ é regularmente de descida em qualquer ponto e*

$$K_0 = \{h \in X; \langle J'(x_0), h \rangle < 0\}.$$

2.5.5 Direções Factíveis ou Admissíveis

Seja Q uma restrição de desigualdade e K_a seu cone de direções factíveis. Observamos que os “pontos interessantes” são os da fronteira de Q . Além disso, admitiremos que Q possui pontos interiores pois, caso contrário, $K_a = \emptyset$.

Trataremos o caso onde Q é definido por um funcional $F(x)$, isto é,

$$Q = \{x \in X; F(x) \leq F(x_0)\}.$$

Se $F(x)$ é contínuo, podemos estudar o caso mais geral

$$Q = \{x \in X; F(x) \leq \lambda, \lambda \neq F(x_0)\}.$$

Aqui o cone de direções de descida do funcional $F(\cdot)$ no ponto x_0 será denotado por K_d .

Observação 2.5.6. Observamos que sempre se verifica $K_d \subset K_a$. A questão que se coloca é: quando $K_a \subset K_d$? Para isto, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.5.3. *Suponha que $F(\cdot)$ é direcionalmente diferenciável em x_0 em qualquer direção. Se existe $\tilde{h}$ tal que $F'(x_0, \tilde{h}) < 0$, então*

$$K_a \subset \{h \in X; F'(x_0, h) < 0\}.$$

Observação 2.5.7. Observe que a condição $F'(x_0, \tilde{h}) < 0$ para algum $\tilde{h}$ é equivalente a dizer que $K_d \neq \emptyset$.

Corolário 2.5.2. *Suponha que qualquer uma das condições abaixo seja satisfeita*

- (i) *X é um espaço de Banach, $F(\cdot)$ satisfaz uma condição de Lipschitz numa vizinhança do ponto $x_0 \in X$ e é direcionalmente diferenciável em x_0 em qualquer direção h , $F'(x_0, h)$ é convexa como função de h e existe $\tilde{h}$ tal que $F'(x_0, \tilde{h}) < 0$;*
- (ii) *$F(\cdot)$ é um funcional convexo contínuo e existe $\tilde{x}$ tal que $F(\tilde{x}) < F(x_0)$;*
- (iii) *$F(\cdot)$ é Fréchet-diferenciável em x_0 e $F'(x_0) \neq 0$.*

Então

$$K_a = K_d = \{h \in X; F'(x_0, h) < 0\}.$$

Proposição 2.5.2. *Se Q é um conjunto convexo, seu cone de direções factíveis no ponto x_0 é dado por*

$$\begin{aligned} K_a &= \{h \in X / h = \lambda(x - x_0), x \in \text{int}Q, \lambda > 0\} \\ &= \{\lambda(\text{int}Q - x_0) / \lambda > 0\}. \end{aligned}$$

2.5.6 Direções Tangentes

O resultado a seguir pode ser encontrado em Alexéev, Tikhomirov e Fomine [4], p. 167.

Teorema 2.5.4. *(Lyusternick) Sejam X, Z espaços de Banach, U uma vizinhança do ponto $x_0 \in X$, $P : U \rightarrow Z$ tal que $P(x_0) = 0$. Se P é estritamente diferenciável no ponto x_0 e*

$P'(x_0)X = Z$ ($P'(x_0)$ é um epimorfismo), então o conjunto

$$Q = \{x \in X / P(x) = 0\}$$

tem no ponto x_0 um espaço tangente

$$T_{x_0}(Q) = \text{Ker} P'(x_0) = \{h \in X / P'(x_0)h = 0\}.$$

Observação 2.5.8. Observamos que o teorema de Lyusternik é uma ferramenta poderosa para se obter o cone de direções tangentes, o qual é feito, basicamente pelo cálculo da derivada estrita do funcional associado. Porém, não é possível utilizá-lo no caso em que o operador associado não é estritamente diferenciável, ou quando a sua derivada não é sobrejetora. Na prática, a dificuldade se concentra na condição de sobrejetividade do operador derivada pois, muitas vezes a condição de o operador ser estritamente diferenciável vem do Lema 2.5.1.

2.5.7 Cálculo dos Cones Duais

Teorema 2.5.5. *Suponha que o cone K é um subespaço vetorial de um espaço normado X . Então*

$$K^* = \{\varphi \in X'; \varphi(x) = 0, \forall x \in K\}.$$

Teorema 2.5.6. *Seja $\varphi \in X'$,*

$$K_1 = \{x \in X; \varphi(x) = 0\},$$

$$K_2 = \{x \in X; \varphi(x) \geq 0\},$$

$$K_3 = \{x \in X; \varphi(x) > 0\}.$$

Então

$$K_1^* = \{\lambda\varphi; -\infty < \lambda < \infty\},$$

$$K_2^* = \{\lambda\varphi; 0 \leq \lambda < \infty\},$$

$$K_3^* = \begin{cases} X^* & \text{se } \varphi = 0, \\ K_2^* & \text{se } \varphi \neq 0. \end{cases}$$

Definição 2.5.15. Um **funcional suporte** para um subconjunto $A \subset X$ em $x_0 \in A$ é uma forma linear contínua $\varphi \in X'$ não nula tal que

$$\varphi(x) \geq \varphi(x_0) \text{ para todo } x \in A.$$

Sejam $Q \subset X, x_0 \in Q, K_a$ o cone de direções factíveis para Q em x_0 , K_T o cone das direções tangentes a Q em x_0 e Q^* o cone dos funcionais lineares suportes para Q em x_0 , isto é,

$$Q^* = \{\varphi \in X^*; \varphi(x) \geq \varphi(x_0), \forall x \in Q\}.$$

Teorema 2.5.7. Se Q é um convexo fechado, então

$$K_T^* = Q^*.$$

Se, além disso, $\text{int}Q \neq \emptyset$, então

$$K_a^* = Q^*.$$

2.6 Outros Resultados

O lema que enunciaremos a seguir está demonstrado em Lions [22, Lema 1.3]. Este resultado será usado para assegurar a convergência fraca dos termos não-lineares nos modelos estudados na tese.

Lema 2.6.1. Seja D um aberto limitado de $\mathbb{R}^{d+1}$, d um inteiro positivo, g_m e g funções de $L^q(D)$, $1 < q < \infty$, tais que

$$\|g_m\|_{L^q(D)} \leq c, \quad (c > 0 \text{ constante})$$

$$g_m \rightarrow g \text{ quase sempre em } D.$$

Então,

$$g_m \rightharpoonup g \text{ em } L^q(D) \text{ fracamente.}$$

O seguinte resultado, cuja demonstração pode ser encontrada em Pazy [38, p. 159], será importante na obtenção de estimativas para as soluções das equações envolvidas na tese.

Lema 2.6.2 (Gronwall). *Seja $\varphi(t, s) \geq 0$ contínua em $0 \leq s < t \leq T$. Se existem constantes positivas A, B e β tal que*

$$\varphi(t, s) \leq A + B \int_s^t (t - \sigma)^{\beta-1} \varphi(\sigma, s) d\sigma,$$

para $0 \leq s < t \leq T$. Então existe uma constante C tal que $\varphi(t, s) \leq C$, para $0 \leq s < t \leq T$.

Capítulo 3

Existência e Unicidade de Soluções

Neste capítulo provaremos a existência e unicidade de soluções globais para os modelos descritos na introdução. Para tornar mais clara a exposição e as ideias empregadas, primeiramente mostraremos tais resultados para o modelo com o termo não linear do tipo de Verhust e em seguida para o modelo com um termo não linear mais geral. Em ambos os casos utilizaremos a teoria de semigrupo para obter tais resultados. Também empregaremos algumas técnicas desenvolvidas por Cannarsa e Vespri (Proposição 2.3.11) e Lions e Magenes (Proposição 2.3.12) para obter as regularidade das soluções em espaços de Sobolev, resultados que vão ser importantes nos capítulos em que trataremos de problemas de controle associados a tais equações.

3.1 Solução do Problema no Caso de Não-Linearidade do Tipo Verhust

Nesta seção, provaremos a existência e unicidade de soluções para o problema (1.4) no caso em que

$$g(x, t, u) = au - \frac{a}{M}u^2 - bk(x - \gamma(t))u.$$

Aqui, são dadas as constantes positivas a , b e M , bem como as funções $\gamma \in (H^1(0, 1))^2$

e $k(\cdot) \in C_0^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, com $0 \leq k(\cdot) \leq 1$. Assim, o problema (1.4) torna-se

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu \Delta u = au - \frac{a}{M} u^2 - bk(x - \gamma(t))u & \text{em } Q = \Omega \times (0, T), \\ (\partial/\partial\eta)(u) = 0 & \text{em } S = \partial\Omega \times (0, T), \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (3.1)$$

Consideremos o seguinte problema equivalente, obtido adicionando u a ambos os lados da primeira equação de (3.1).

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu \Delta u + u = (a+1)u - \frac{a}{M} u^2 - bk(x - \gamma(t))u & \text{em } Q = \Omega \times (0, T), \\ (\partial/\partial\eta)(u) = 0 & \text{em } S = \partial\Omega \times (0, T), \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (3.2)$$

Notemos que encontrar uma solução do problema (3.1) é equivalente a encontrar uma solução do problema (3.2).

Denotando $X = L^2(\Omega)$, consideraremos a seguinte formulação abstrata do problema (3.2).

$$\begin{cases} \partial_t u + Au = \tilde{f}(t, u) & \text{em } Q = \Omega \times (0, T), \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (3.3)$$

onde

$$A = -\nu \Delta + I, \quad (3.4)$$

com domínio

$$D(A) = \{u \in H^2(\Omega); (\partial/\partial\eta)(u) = 0\}, \quad (3.5)$$

e também

$$\tilde{f}(t, u) = f(t, u) + u = (a+1)u - \frac{a}{M} u^2 - bk(x - \gamma(t))u, \quad (3.6)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto limitado de classe C^2 . Temos também que $D(A) \hookrightarrow D(A^{1/2}) = H^1(\Omega)$ e $D(A)$ é denso em $H^1(\Omega)$ veja Lions e Magenes ([20, p. 18]), Milla Miranda ([35], p. 110). Logo, $D(A)$ é denso em $L^2(\Omega)$.

Observação 3.1.1. Reescrevemos o problema original nesta forma porque, pelas técnicas que empregaremos, necessitaremos que o problema abstrato associado tenha um operador

cujo inverso seja compacto. Como em (3.1) as condições de Neumann fazem com que o Laplaciano não seja invertível, adicionamos o operador identidade aos dois lados da equação, obtendo assim a invertibilidade requerida. A compacidade virá então, como é usual, das imersões de Sobolev.

Consideremos o seguinte operador

$$A := -\nu\Delta + I : D(A) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega).$$

Segue da Proposição 2.2.1 que para cada $f \in L^2(\Omega)$, existe um único $u \in D(A)$ tal que $Au = f$. Isto mostra que A é invertível, isto é, $0 \in \rho(A)$ e pelas Proposições 2.3.1 e 2.3.2, $-A$ gera um semigrupo analítico $S(t)$ em $L^2(\Omega)$.

Agora, mostraremos que a não-linearidade $\tilde{f}$ definida em (3.6) é localmente Hölder contínua em t e localmente Lipschitz em $x \in U$, onde U é um aberto de $\mathbb{R}^+ \times X^\alpha$. Como $D(A)$ é denso em X^α (veja a Proposição 2.3.5), podemos considerar U um aberto de $\mathbb{R}^+ \times D(A)$.

Dados $u_1, u_2 \in D(A)$ e $t_1, t_2 \in (0, T)$

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}(t_1, u_1) - \tilde{f}(t_2, u_2)\|_{L^2} &\leq \left\| (a+1)(u_1 - u_2) + \frac{a}{M}(u_1^2 - u_2^2) \right\|_{L^2} \\ &\quad + \|b(k(\cdot - \gamma(t_1))u_1 - k(\cdot - \gamma(t_2))u_2)\|_{L^2} \\ &\leq \|(a+1)(u_1 - u_2)\|_{L^2} + \left\| \frac{a}{M}(u_1^2 - u_2^2) \right\|_{L^2} \\ &\quad + \|b(k(\cdot - \gamma(t_1))u_1 - k(\cdot - \gamma(t_2))u_2)\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Um simples cálculo mostra que

$$\begin{aligned} \|u_1^2 - u_2^2\|_{L^2}^2 &= \int_{\Omega} (u_1^2 - u_2^2)^2 dx = \int_{\Omega} (u_1 - u_2)^2 (u_1 + u_2)^2 dx \\ &\leq C \|u_1 + u_2\|_{\infty}^2 \|u_1 - u_2\|_{L^2}^2 \\ &\leq C (\|u_1\|_{\infty}^2 + \|u_2\|_{\infty}^2) \|u_1 - u_2\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|u_1^2 - u_2^2\|_{L^2} \leq C(\|u_1\|_\infty + \|u_2\|_\infty)\|u_1 - u_2\|_{L^2}.$$

Neste último resultado usamos que $D(A) \subset H^2(\Omega)$ e $H^2(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$ para $n = 2$ (Veja Proposição 2.1.1). Portanto,

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}(t_1, u_1) - \tilde{f}(t_2, u_2)\|_{L^2} &\leq C(1 + \|u_1\|_\infty + \|u_2\|_\infty)\|u_1 - u_2\|_{L^2} \\ &\quad + \|b(k(\cdot - \gamma(t_1))u_1 - k(\cdot - \gamma(t_2))u_2)\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Agora, como $k \in C_0^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, vem que existe N tal que $|\nabla k(\cdot)| \leq N$. Assim, segue do Teorema do Valor Médio que

$$|k(x) - k(y)| \leq N|x - y|, \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}^2. \quad (3.7)$$

Agora, temos que

$$\begin{aligned} \|b(k(\cdot - \gamma(t_1))u_1 - k(\cdot - \gamma(t_2))u_2)\|_{L^2} &\leq \|bk(\cdot - \gamma(t_1))(u_1 - u_2)\|_{L^2} \\ &\quad + \|b(k(\cdot - \gamma(t_1)) - k(\cdot - \gamma(t_2)))u_2\|_{L^2} \\ &\leq b\|u_1 - u_2\|_{L^2} \\ &\quad + \|b(k(\cdot - \gamma(t_1)) - k(\cdot - \gamma(t_2)))u_2\|_{L^2} \\ &\leq b\|u_1 - u_2\|_{L^2} \\ &\quad + bC|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)|\|u_2\|_{L^2} \\ &\leq b\|u_1 - u_2\|_{L^2} \\ &\quad + bC(\Omega)|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)|\|u_2\|_\infty. \end{aligned}$$

Observemos ainda que $\gamma \in (H^1(\Omega))^2$. Logo,

$$|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)| \leq \int_{t_2}^{t_1} |\gamma'(t)| dt \leq \left(\int_{t_2}^{t_1} dt \right)^{1/2} \|\gamma'\|_{L^2(0,T)} = |t_1 - t_2|^{1/2} \|\gamma'\|_{L^2(0,T)}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|b(k(\cdot - \gamma(t_1))u_1 - k(\cdot - \gamma(t_2))u_2)\|_{L^2} &\leq b\|u_1 - u_2\|_{L^2} \\ &\quad + bC(\Omega)|t_1 - t_2|^{1/2} \|\gamma'\|_{L^2(0,T)} \|u_2\|_\infty \\ &= b\|u_1 - u_2\|_{L^2} + C_1|t_1 - t_2|^{1/2}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde $C_1 = bC(\Omega)\|\gamma'\|_{L^2(0,T)}\|u_2\|_\infty$.

Dos últimos resultados, concluímos que

$$\begin{aligned}\|\tilde{f}(t_1, u_1) - \tilde{f}(t_2, u_2)\|_{L^2} &\leq C(1 + \|u_1\|_\infty + \|u_2\|_\infty)\|u_1 - u_2\|_{L^2} \\ &\quad + bC(\Omega)|t_1 - t_2|^{1/2}\|\gamma'\|_{L^2(0,T)}\|u_2\|_\infty. \\ &\leq C(\Omega, \gamma', b)(1 + \|u_1\|_\infty + \|u_2\|_\infty)(|t_1 - t_2|^{1/2} + \|u_1 - u_2\|_{L^2}) \\ &\leq C(\Omega, \gamma', b)(1 + \|u_1\|_\infty + \|u_2\|_\infty)(|t_1 - t_2|^{1/2} + \|u_1 - u_2\|_\alpha).\end{aligned}$$

Por outro lado, sabemos que para $1/2 < \alpha < 1$, $X^\alpha \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$ (veja a Proposição 2.3.8, com $p = n = 2$, $\nu = 0$ e $m = 2$), ou seja, $\|u_1\|_\infty \leq c\|u_1\|_\alpha$ e $\|u_2\|_\infty \leq c\|u_2\|_\alpha$. Portanto,

$$\|\tilde{f}(t_1, u_1) - \tilde{f}(t_2, u_2)\|_{L^2} \leq C(\Omega, \gamma', b)(1 + \|u_1\|_\alpha + \|u_2\|_\alpha)(|t_1 - t_2|^{1/2} + \|u_1 - u_2\|_\alpha).$$

Isso nos diz que $\tilde{f}$ está nas condições da Definição 2.3.6. Com isso, podemos provar o seguinte teorema de existência e unicidade local de solução para o problema (3.3).

Teorema 3.1.1. *Suponhamos A , $\tilde{f}$ e $D(A)$ como em (3.4), (3.6) e (3.5) respectivamente. Então, para cada $u_0 \in D(A^\alpha)$ com $1/2 < \alpha < 1$, a equação*

$$\begin{cases} \partial_t u + Au &= \tilde{f}(t, u), \\ u(0, \cdot) &= u_0, \end{cases}$$

tem uma única solução local em $Q = (0, t_1) \times \Omega$, onde $t_1 = t_1(0, u_0) > 0$.

Demonstração: Basta aplicar a Proposição 2.3.9. ■

Observação 3.1.2. Como já observamos anteriormente, a solução obtida pelo Teorema 3.1.1 é a única solução da equação (3.1) no intervalo $(0, t_1)$.

A proposição seguinte nos informa sobre a regularidade e estimativas da única solução local de (3.3).

Proposição 3.1.1. *Suponhamos as mesmas hipóteses do Teorema 3.1.1, com u_0 satisfazendo*

$$0 \leq u_0(\cdot) \leq M,$$

onde M é o mesmo do problema (3.1). Então a solução u , obtida pelo Teorema 3.1.1, é tal que $u_t, \Delta u \in L^2(0, t_1, L^2(\Omega))$. Além disso,

$$0 \leq u(., .) \leq M$$

em seu domínio de existência.

Demonstração: Seja $u(t)$ a solução do problema (3.2), com $t \in [0, t_1)$, obtida pelo Teorema 3.1.1. Temos então que

$$\partial_t u - \nu \Delta u + u = (a + 1)u - \frac{a}{M}u^2 - bk(x - \gamma(t))u, \quad u(0) = u_0. \quad (3.9)$$

Primeiramente suponhamos $u_0(.) \geq 0$. Consideremos

$$\tilde{f}(t, u) = (a + 1)u - \frac{a}{M}u^2 - bk(x - \gamma(t))u. \quad (3.10)$$

Dado $r > 0$, definamos o seguinte subconjunto de X^α

$$B_r = \{u \in X^\alpha; u \geq 0 \text{ e } \|u\|_\alpha \leq r\}.$$

Nosso objetivo é aplicar os Lemas 2.3.4 e 2.3.5.

Para isso, é suficiente mostrar que existe $\beta = \beta(r)$ tal que

$$\tilde{f}(t, u) + \beta u \geq 0, \quad \text{para todo } u \in B_r.$$

Notemos que $X^\alpha \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ para $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ (Veja Corolário 2.3.1). Logo, existe uma constante $C_\alpha > 0$ tal que $\|u\|_\infty \leq C_\alpha \|u\|_\alpha$. Assim, $|u(x)| \leq C_\alpha r$, para quase todo ponto $x \in \Omega$ e $u \in B_r$, ou seja, $-C_\alpha r \leq u(x) \leq C_\alpha r$.

Para $u \in B_r$ segue de (3.10), das hipóteses sobre k e da observação anterior que

$$\tilde{f}(t, u) \geq (a + 1)u - \frac{a}{M}C_\alpha r u - bu = u \left((a + 1) - \frac{a}{M}C_\alpha r - b \right).$$

Assim,

$$\tilde{f}(t, u) + \beta u \geq u \left(\beta + (a + 1) - \frac{a}{M}C_\alpha r - b \right).$$

Tomando $\beta \geq -\left((a+1) - \frac{a}{M}C_\alpha r - b\right)$, segue que

$$\tilde{f}(t, u) + \beta u \geq 0$$

para todo $u \in B_r$ com r arbitrário. Assim, concluímos o resultado aplicando o Lema 2.3.5, ou seja, $u(t) \geq 0$ para $t \in [0, t_1]$.

Também temos que a solução u está em $L^\infty(0, t_1, X^\alpha)$, veja a Proposição 2.3.9.

Segue do Corolário 2.3.1 (com $p = 2, n = 2$ e $q = \infty$) que $X^\alpha \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$. Portanto,

$$u \in L^\infty(Q_{t_1}) \quad (3.11)$$

e é uma solução da equação integral

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)\tilde{f}(s, u(s))ds. \quad (3.12)$$

Por hipótese temos que $|\tilde{f}(s, u(s))| \leq c(1 + |u|^2)$. Logo, por (3.11) podemos concluir que $\tilde{f}(s, u(s)) \in L^2(0, t_1, L^2(\Omega))$

Segue da Proposição 2.3.12 que

$$\left\| A \int_0^t S(t-s)\tilde{f}(s, u(s))ds \right\|_{L^2(0, t_1, L^2(\Omega))} \leq C \|\tilde{f}(s, u(\cdot))\|_{L^2(0, t_1, L^2(\Omega))}. \quad (3.13)$$

Além disso, segue dos Lemas 2.3.2 e 2.3.3, para $1/2 < \alpha < 1$, que $X^\alpha \hookrightarrow D_A(1 - \frac{1}{2}, 2) = D_A(\frac{1}{2}, 2)$. Portanto, $u_0 \in D_A(\frac{1}{2}, 2)$ e $\tilde{f}(t, u(t)) \in L^2(0, t_1, L^2(\Omega))$.

Disto, juntamente com (3.13), segue da Proposição 2.3.11 que

$$\frac{\partial u}{\partial t}, Au \in L^2(0, t_1, L^2(\Omega))$$

Como $u, \frac{\partial u}{\partial t}, Au \in L^2(Q_{t_1})$ e $Au = -\Delta u + u$, temos que $\Delta u \in L^2(Q_{t_1})$.

Agora, suponhamos $u_0(\cdot) \leq M$.

Como já observamos antes, $u(t)$ satisfaz a equação

$$\partial_t u - \nu \Delta u = g(t, u) - bk(x - \gamma(t))u, \quad u(0) = u_0,$$

onde $g(t, u) = au - \frac{a}{M}u^2$

Notemos que $(u - M) = (u - M)^+ - (u - M)^-$, $\partial_t u = \partial_t(u - M)$ e $\Delta u = \Delta(u - M)$.

Como nosso objetivo é mostrar que $u \leq M$, é suficiente mostrar que $(u - M)^+ \equiv 0$.

Temos

$$\partial_t(u - M) - \nu \Delta(u - M) = g(t, u) - bk(x - \gamma(t))u.$$

Multiplicando esta equação por $(u - M)^+$ e integrando em Ω , vem

$$\int_{\Omega} \partial_t(u - M)(u - M)^+ - \nu \int_{\Omega} \Delta(u - M)(u - M)^+ = \int_{\Omega} g(t, u)(u - M)^+ - b \int_{\Omega} k(x - \gamma(t))u(u - M)^+.$$

Desta equação, usando que $M > 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|(u - M)^+(t)\|_{L^2}^2 &+ \nu \|\nabla(u - M)^+(t)\|_{L^2}^2 \\ &\leq \int_{\Omega} g(t, u)(u - M)^+ - b \int_{\Omega} k(x - \gamma(t))u(u - M)^+ \\ &+ b \int_{\Omega} k(x - \gamma(t))M(u - M)^+ \\ &= \int_{\Omega} g(t, u)(u - M)^+ \\ &- b \int_{\Omega} k(x - \gamma(t))(u - M)(u - M)^+ \\ &= \int_{\Omega} g(t, u)(u - M)^+ - b \int_{\Omega} k(x - \gamma(t))[(u - M)^+]^2 \\ &\leq \int_{\Omega} g(t, u)(u - M)^+ \\ &= \int_{\Omega_1^t} g(t, u)(u - M)^+ + \int_{\Omega_2^t} g(t, u)(u - M)^+ \\ &+ \int_{\Omega_3^t} g(t, u)(u - M)^+, \end{aligned}$$

onde,

$$\Omega_1^t = \Omega \cap \{x; u(t) \leq 0\},$$

$$\Omega_2^t = \Omega \cap \{x; 0 \leq u(t) \leq M\},$$

$$\Omega_3^t = \Omega \cap \{x; u(t) \geq M\}.$$

Notemos agora que, como $g(t, u) = au - (a/M)u^2$, temos que

$$\int_{\Omega_1^t} g(t, u)(u - M)^+ = \int_{\Omega_2^t} g(t, u)(u - M)^+ = 0$$

e

$$\int_{\Omega_3^t} g(t, u)(u - M)^+ \leq 0,$$

pois $g(t, u) \leq 0$ em Ω_3^t . Assim, obtemos

$$\frac{d}{dt} \|(u - M)^+(t)\|_{L^2}^2 \leq 0,$$

o que integrado em $(0, t)$, com $0 \leq t \leq t_1$, implica

$$\|(u - M)^+(t)\|_{L^2}^2 - \|(u - M)^+(0)\|_{L^2}^2 \leq 0.$$

Assim,

$$\|(u - M)^+(t)\|_{L^2}^2 \leq \|(u - M)^+(0)\|_{L^2}^2 = \|(u_0 - M)^+\|_{L^2}^2 = 0,$$

pois por hipótese $u_0 \leq M$. Portanto,

$$\|(u - M)^+(t)\|_{L^2}^2 = 0, \quad \forall t \in [0, t_1],$$

e, consequentemente,

$$(u - M)^+ \equiv 0.$$

Ou seja,

$$u(t) - M = -(u - M)^-(t) \leq 0, \quad \text{para todo } 0 \leq t \leq t_1,$$

e concluímos que $u(.,.) \leq M$. ■

Observação 3.1.3. O modelo com crescimento Verhustiano e $k(x - \gamma(t)) = 0$, ou seja, $k = 0$ e $0 \leq u_0 \leq M$, já foi estudado por vários autores na literatura, por exemplo Henry [18], Pazy [38], Smoller [42], etc. Em Smoller [42, Chapter 10, p. 93] o autor utiliza o método de comparação para mostrar que se $0 \leq u_0 \leq M$, então a solução do problema (1.4) também satisfaz $0 \leq u \leq M$.

Baseados nestes resultados anteriores, mostraremos a seguir que a solução local do problema (3.1), obtida pelo Teorema 3.1.1, é de fato global, isto é, a solução existe para todo $t \geq 0$. Em particular, também mostraremos um resultado de regularidade para esta solução em $Q = \Omega \times (0, T)$, com $0 < T < +\infty$.

Teorema 3.1.2. *Consideremos as mesmas hipóteses do Teorema 3.1.1 e suponhamos*

$0 \leq u_0(\cdot) \leq M$. Então, a única solução $u(t) \in D(A)$ do problema

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu \Delta u &= au - \frac{a}{M} u^2 - bk(x - \gamma(t))u, \\ u(0, \cdot) &= u_0, \end{cases}$$

existe para todo $t \geq 0$. Também, considerando $0 < T < \infty$, temos que $u \in W_2^{1,2}(Q)$ e valem

$$\|u\|_{W_2^{1,2}(Q)} \leq C(T, \Omega)(1 + \|u_0\|_\alpha),$$

$$0 \leq u(t) \leq M \quad \text{para todo } t \in [0, T].$$

Demonstração: A existência e unicidade de solução, em um intervalo $[0, T)$, é obtida pelo Teorema 3.1.1. Como estamos supondo $0 \leq u_0(\cdot) \leq M$, segue da Proposição 3.1.1 que a solução

$$0 \leq u(t) \leq M \quad \text{para todo } t \in [0, T), \quad (3.14)$$

onde $T = T(0, u_0)$ e ainda pela Proposição 3.1.1 temos que $u, u_t, \Delta u \in L^2(0, T, L^2(\Omega))$.

Para concluir o resultado de que a solução é global é suficiente mostrar que $\|u(t)\|_\alpha$ permanece limitada quando $t \rightarrow T^-$.

Multiplicando

$$\partial_t u - \nu \Delta u = au - \frac{a}{M} u^2 - bk(x - \gamma(t))u$$

por u e integrando em Ω , obtemos

$$\int_{\Omega} u \partial_t u dx - \nu \int_{\Omega} u \Delta u dx = \int_{\Omega} (au - \frac{a}{M} u^2) u dx - b \int_{\Omega} k(x - \gamma(t)) u^2 dx.$$

Agora, usando (3.14) e observando que

$$\left(au - \frac{a}{M} u^2 \right) u \geq 0, \quad \text{para } 0 \leq u(t) \leq M;$$

$$\left(au - \frac{a}{M} u^2 \right) u < 0, \quad \text{para } u(t) > M.$$

Concluimos que existe uma constante $C \geq 0$ tal que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2}^2 + \nu \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 \leq C.$$

Integrando em $(0, t)$, com $t \in (0, T)$, obtemos que

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla u(s)\|_{L^2}^2 ds \leq tC + \|u(0)\|_{L^2}^2 \leq TC + \|u_0\|_{L^2}^2 \leq TC + \|u_0\|_\alpha^2,$$

para todo $t \in [0, T)$. Portanto,

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \|\nabla u\|_{L^2(Q)}^2 \leq \max\{TC, 1\}(1 + \|u_0\|_\alpha)^2, \quad (3.15)$$

para todo $t \in [0, T)$.

Em particular,

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq (\max\{TC, 1\})^{1/2}(1 + \|u_0\|_\alpha), \quad (3.16)$$

Agora, notemos que a solução $u(t)$ satisfaz a seguinte equação integral

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)\tilde{f}(s, u(s))ds.$$

Aplicando o operador A^α e usando a Proposição 2.3.6 item (2), resulta

$$A^\alpha u(t) = S(t)A^\alpha u_0 + \int_0^t A^\alpha S(t-s)f(s, u(s))ds + \int_0^t A^\alpha S(t-s)u(s)ds.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|A^\alpha u(t)\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|S(t)\| \|A^\alpha u_0\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|A^\alpha S(t-s)\| \|f(s, u(s))\|_{L^2(\Omega)} ds \\ &\quad + \int_0^t \|A^\alpha S(t-s)\| \|u(s)\|_{L^2(\Omega)} ds \\ &\leq M \|A^\alpha u_0\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|A^\alpha S(t-s)\| \|f(s, u(s))\|_{L^2(\Omega)} ds \\ &\quad + \int_0^t \|A^\alpha S(t-s)\| \|u(s)\|_{L^2(\Omega)} ds. \end{aligned}$$

Segue da Proposição 2.3.6 item (3) que

$$\|A^\alpha S(t-s)\| \leq M_\alpha (t-s)^{-\alpha} e^{-\delta(t-s)} \leq C_\alpha (t-s)^{-\alpha}.$$

Agora notemos que $u(s) \in D(A) \subset H^2(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ (Veja Proposição 2.1.1) e $0 \leq k \leq 1$.

Logo

$$\begin{aligned}
\|f(s, u(s))\|_{L^2(\Omega)} &= \left\| au(s) - \frac{a}{M}u^2(s) - bk(x - \gamma(t))u(s) \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \left\| \left(a - \frac{a}{M}u(s)\right)u(s) \right\|_{L^2(\Omega)} + b\|u(s)\|_{L^2} \\
&\leq \left\| a + \frac{a}{M}u(s) \right\|_{\infty} \|u(s)\|_{L^2(\Omega)} + bT^{1/2}C \\
&\leq C(a, M)\|1 + u(s)\|_{\infty}\|u(s)\|_{L^2(\Omega)} + bT^{1/2}C \\
&\leq C(a, M)T^{1/2}(1 + \|u(s)\|_{\infty}) + bT^{1/2}C \\
&\leq C(a, M)T^{1/2}(1 + \|u(s)\|_{\alpha}) + bT^{1/2}C.
\end{aligned}$$

Onde também usamos que para $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, $X^{\alpha} \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ (Veja Corolário 2.3.1). Logo

$$\begin{aligned}
\|A^{\alpha}u(t)\|_{L^2(\Omega)} &\leq M\|A^{\alpha}u_0\|_{\alpha} + \int_0^t C_{\alpha}(t-s)^{-\alpha}[C(a, M)T^{1/2}(1 + \|u(s)\|_{\alpha}) + bT^{1/2}C]ds \\
&+ \int_0^t C_{\alpha}(t-s)^{-\alpha}\|u(s)\|_{\alpha}ds \\
&\leq M\|A^{\alpha}u_0\|_{\alpha} + C_{\alpha}(a, M)T^{1/2} \int_0^t (t-s)^{-\alpha}(1 + \|u(s)\|_{\alpha})ds \\
&+ bT^{1/2}C \int_0^t (t-s)^{-\alpha}ds + \int_0^t C_{\alpha}(t-s)^{-\alpha}\|u(s)\|_{\alpha}ds \\
&\leq M\|A^{\alpha}u_0\|_{\alpha} + C_{\alpha}(a, b, M)T^{1/2} \int_0^t (t-s)^{-\alpha}ds \\
&+ C(\alpha, a, M)T^{1/2} \int_0^t (t-s)^{-\alpha}\|u(s)\|_{\alpha}ds \\
&= M\|A^{\alpha}u_0\|_{\alpha} + C_{\alpha}(a, b, M)T^{1/2} \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \\
&+ C(\alpha, a, M)T^{1/2} \int_0^t (t-s)^{-\alpha}\|u(s)\|_{\alpha}ds.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\|u(t)\|_{\alpha} \leq M\|A^{\alpha}u_0\|_{\alpha} + C_{\alpha}(a, b, M, \|u_0\|_{\alpha}) \frac{T^{1/2+1-\alpha}}{1-\alpha} + C(\alpha, a, M)T^{1/2} \int_0^t (t-s)^{-\alpha}\|u(s)\|_{\alpha}ds.$$

Portanto, pelo Lema de Gronwall (Lema 2.6.2) temos

$$\|A^{\alpha}u(t)\|_{L^2} = \|u(t)\|_{\alpha} \leq C, \quad \text{para todo } t \in [0, T].$$

Portanto, para qualquer sequência (t_n) em $[0, T)$ tal que, $t_n \rightarrow T^-$ temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u(t_n)\|_{\alpha} \leq C < \infty,$$

e aplicando a Proposição 2.3.10 concluímos a primeira parte do resultado, ou seja, a solução é global.

Agora, multiplicando a equação

$$\partial_t u - \nu \Delta u = au - \frac{a}{M} u^2 - bk(x - \gamma(t))u$$

por $\partial_t u$ e integrando em Ω , e observando que

$$h(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^{u(x,t)} h(\tau) d\tau \right), \quad (x, t) \in Q,$$

pois $h(\tau) = a\tau - \frac{a}{M}\tau^2 \in C^1(\mathbb{R})$ e $u(x, \cdot) \in W_2^1(0, T)$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\partial_t u)^2 dx - \nu \int_{\Omega} \Delta u \partial_t u dx &= \int_{\Omega} \left(au - \frac{a}{M} u^2 \right) \partial_t u dx - b \int_{\Omega} k(x - \gamma(t)) u \partial_t u dx \\ &= \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \int_0^{u(t)} \left(as - \frac{a}{M} s^2 \right) ds dx - b \int_{\Omega} k(x - \gamma(t)) u \partial_t u dx. \end{aligned}$$

Logo, obtemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\partial_t u(t))^2 dx &+ \frac{\nu}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \int_0^{u(t)} \left(as - \frac{a}{M} s^2 \right) ds dx - b \int_{\Omega} k(x - \gamma(t)) u(t) \partial_t u(t) dx \\ &\leq \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \int_0^{u(t)} \left(as - \frac{a}{M} s^2 \right) ds dx + b^2 \frac{1}{2} \int_{\Omega} u(t)^2 dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\partial_t u(t))^2 dx, \end{aligned}$$

de onde vem que

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{2} \right) \int_{\Omega} (\partial_t u(t))^2 dx + \frac{\nu}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \int_0^{u(t)} \left(as - \frac{a}{M} s^2 \right) ds dx \\ &+ b^2 \frac{1}{2} \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Agora, integrando no intervalo $(0, t)$, para $0 < t \leq T$ e usando que $0 \leq u(t) \leq M$, para $0 \leq t \leq T$, vem

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} (\partial_s u(s))^2 dx ds + \frac{\nu}{2} \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \int_{\Omega} \int_0^{u(t)} \left(as - \frac{a}{M} s^2 \right) ds dx \\
&- \int_{\Omega} \int_0^{u(0)} \left(as - \frac{a}{M} s^2 \right) ds dx \\
&+ b^2 \frac{1}{2} \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\nu}{2} \|\nabla u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\leq 2 \int_{\Omega} \int_0^M \left| as - \frac{a}{M} s^2 \right| ds dx \\
&+ b^2 \frac{1}{2} \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)}^2,
\end{aligned}$$

para todo $0 \leq t \leq T$. Segue do Corolário 2.3.1 que $X^\alpha \hookrightarrow H^1(\Omega)$, para $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, deste resultado de imersão e usando (3.16) aplicado nesta última desigualdade implica que

$$\int_0^t \int_{\Omega} (\partial_s u(s))^2 dx ds + \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C((1 + \|u_0\|_\alpha)^2 + \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)}^2) \leq \tilde{C}(1 + \|u_0\|_\alpha)^2,$$

para todo $0 \leq t \leq T$, ou seja,

$$\int_0^T \int_{\Omega} (\partial_s u(s))^2 dx ds + \sup_{0 \leq t \leq T} \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \tilde{C}(1 + \|u_0\|_\alpha)^2. \quad (3.17)$$

Assim, segue de (3.16), (3.17) e a Proposição (3.1.1) que, para cada $0 < t \leq T$, $u(t)$ satisfaz o problema elíptico

$$-\Delta u(t) + \frac{1}{\nu} u(t) = \frac{1}{\nu} \left[-\partial_t u(t) + (a+1)u(t) - \frac{a}{M} u(t)^2 - bk(x - \gamma(t))u(t) \right] =: h(t) \in L^2(\Omega)$$

e

$$(\partial/\partial\eta)u(t) = 0 \text{ em } \Omega.$$

Portanto, segue da teoria de regularidade elíptica que $u(t) \in H^2(\Omega)$ e

$$\|u(t)\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|h(t)\|_{L^2(\Omega)},$$

para todo $0 < t \leq T$.

Portanto, segue dos resultados anteriores que

$$\int_0^T \|u(t)\|_{H^2(\Omega)}^2 dt \leq C \int_0^T \|h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq C(T, |\Omega|, M)(1 + \|u_0\|_\alpha)^2 < \infty.$$

Assim, concluímos junto com (3.17) que $u \in W_2^{1,2}(Q)$ e

$$\|u\|_{W_2^{1,2}(Q)} \leq C(T, |\Omega|, M)(1 + \|u_0\|_\alpha). \quad (3.18)$$

■

3.2 Solução do Problema no Caso de Não-Linearidades Mais Gerais

Nesta seção, abordaremos o problema (1.4) no caso em que a não-linearidade é dada pela expressão:

$$f(x, t, u) = g(x, t, u) - bk(x - \gamma(t))u.$$

Aqui, Como antes, b é uma constante positiva, $\gamma \in (H^1(0, 1))^2$, $0 \leq k(\cdot) \leq 1$ é uma função de classe $C_0^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

Por outro lado, nesta seção analisaremos o caso em que condições mais gerais para a expressão de g , que é a responsável pelo crescimento da população de mosquitos, é considerada.

Vamos supor que $g : Q \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory, ou seja, para cada $z \in \mathbb{R}$, a função $g(\cdot, \cdot, z)$ é mensurável em Q e, para cada $(x, t) \in Q$, a função $g(x, t, \cdot) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Além disso, vamos supor que também valem as seguintes hipóteses sobre g :

(H1) Para cada $(x, t) \in Q$, $g(x, t, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é de Classe C^1 ,

(H2) $g(x, t, 0) = 0$ e existe $M > 0$ em $\mathbb{R}$ tal que

$$g(x, t, u) \leq 0 \quad \text{se } u \geq M,$$

(H3) Existem constantes $C_0 > 0$, $0 < v \leq 1$ e $r \geq 1$ tal que $\forall (x, t_1), (x, t_2) \in Q$ e $\forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}$

$$|g(x, t_1, u_1) - g(x, t_2, u_2)| \leq G(t_1, t_2, u_1, u_2)(|u_1 - u_2| + |t_1 - t_2|^v),$$

$$\text{onde } |G(t_1, t_2, u_1, u_2)| \leq C_0(1 + |u_1|^{r-1} + |u_2|^{r-1}).$$

A seguir damos alguns exemplos de funções que satisfazem as condições anteriores.

Exemplo 3.2.1. $g(x, t, u) = au - \frac{a}{M}u^2$, com $a > 0$, $M > 0$ constantes. Aqui, $r = 2$.

Exemplo 3.2.2. $g_m(x, t, u) = a_1u - a_{2m}u^{2m}$, com $m \in \mathbb{N}$, $a_1 > 0$ e $a_{2m} > 0$ constantes, $M = \left(\frac{a_1}{a_{2m}}\right)^{\frac{1}{2m-1}}$ e $r = 2m$.

Exemplo 3.2.3. Um exemplo mais geral é considerar um polinômio da forma

$$g(x, t, u) = a_1u + a_2u^2 + \dots + a_{2k}u^{2k},$$

onde $a_{2k} < 0$ e $k \in \mathbb{N}$.

Estamos interessados em provar um resultado de existência e unicidade de soluções para o seguinte problema

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu \Delta u = f(x, t, u) & \text{em } Q = \Omega \times (0, T), \\ (\partial/\partial\eta)(u) = 0 & \text{em } S = \partial\Omega \times (0, T), \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (3.19)$$

onde $f(x, t, u) = g(x, t, u) - bk(x - \gamma(t))u$ e $0 < T < +\infty$ é dado.

Pelas mesmas razões da seção anterior, consideramos o problema reescrito na forma:

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu \Delta u + u = f(x, t, u) + u & \text{em } Q = \Omega \times (0, T), \\ (\partial/\partial\eta)(u) = 0 & \text{em } S = \partial\Omega \times (0, T), \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (3.20)$$

Observação 3.2.1. Notemos que encontrar uma solução do problema (3.19) é equivalente a encontrar uma solução do problema (3.20).

Denotando $X = L^2(\Omega)$, consideramos a seguinte formulação abstrata para o problema (3.20).

$$\begin{cases} \partial_t u + Au &= \bar{f}(t, u) & \text{em } Q = \Omega \times (0, T), \\ u(0, \cdot) &= u_0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (3.21)$$

onde

$$A = -\nu\Delta + I, \quad (3.22)$$

com domínio

$$D(A) = \{u \in H^2(\Omega); (\partial/\partial\eta)(u) = 0\}, \quad (3.23)$$

e também

$$\bar{f}(t, u)(x) = f(x, t, u) + u = g(x, t, u) + u - bk(x - \gamma(t))u, \quad (3.24)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto limitado de classe C^2 .

Agora, mostraremos que a não-linearidade $\bar{f}$ definida em (3.24) é localmente Hölder contínua em t e localmente Lipschitz em $x \in U$, onde U é um aberto de $\mathbb{R}^+ \times X^\alpha$. Por densidade é suficiente mostrar para U um aberto de $\mathbb{R}^+ \times D(A)$.

Dados $u_1, u_2 \in D(A) \subset H^2(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$ e $t_1, t_2 \in (0, T)$, segue de **(H3)** que

$$\begin{aligned} \|g(x, t_1, u_1) - g(x, t_2, u_2)\|_{L^2} &\leq \| |G(t_1, t_2, u_1, u_2)| (|u_1 - u_2| + |t_1 - t_2|^v) \|_{L^2} \\ &\leq C_0 \|(1 + |u_1|^{r-1} + |u_2|^{r-1})|u_1 - u_2|\|_{L^2} + |\Omega|^{1/2} |t_1 - t_2|^v \\ &\leq C_0(1 + \|u_1\|_\infty^{r-1} + \|u_2\|_\infty^{r-1}) \|u_1 - u_2\|_{L^2} + |\Omega|^{1/2} |t_1 - t_2|^v \\ &\leq C_0(1 + \|u_1\|_\infty^{r-1} + \|u_2\|_\infty^{r-1}) \|u_1 - u_2\|_\alpha + |\Omega|^{1/2} |t_1 - t_2|^v. \end{aligned}$$

Logo, da estimativa (3.8) vem

$$\begin{aligned}
\|\bar{f}(t_1, u_1) - \bar{f}(t_2, u_2)\|_{L^2} &\leq \|g(\cdot, t_1, u_1) - g(\cdot, t_2, u_2)\|_{L^2} + \|u_1 - u_2\|_{L^2} \\
&+ \|b(k(\cdot - \gamma(t_1))u_1 - k(\cdot - \gamma(t_2))u_2)\|_{L^2} \\
&\leq C_0(1 + \|u_1\|_\infty^{r-1} + \|u_2\|_\infty^{r-1})\|u_1 - u_2\|_\alpha + |\Omega|^{1/2}|t_1 - t_2|^v \\
&+ \|u_1 - u_2\|_\alpha + \|b(k(\cdot - \gamma(t_1))u_1 - k(\cdot - \gamma(t_2))u_2)\|_{L^2} \\
&\leq C_0(1 + \|u_1\|_\infty^{r-1} + \|u_2\|_\infty^{r-1})\|u_1 - u_2\|_\alpha + |\Omega|^{1/2}|t_1 - t_2|^v \\
&+ \|u_1 - u_2\|_\alpha + b\|u_1 - u_2\|_{L^2} + bC(\Omega)|t_1 - t_2|^{1/2}\|\gamma'\|_{L^2(0,T)}\|u_2\|_\infty \\
&\leq C_0(1 + \|u_1\|_\infty^{r-1} + \|u_2\|_\infty^{r-1})\|u_1 - u_2\|_\alpha + |\Omega|^{1/2}|t_1 - t_2|^v \\
&+ (1 + b)\|u_1 - u_2\|_\alpha + bC(\Omega)|t_1 - t_2|^{1/2}\|\gamma'\|_{L^2(0,T)}\|u_2\|_\infty.
\end{aligned}$$

Por outro lado, sabemos que para $1/2 < \alpha < 1$, $X^\alpha \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$ (veja a Proposição 2.3.8, com $p = n = 2$, $\nu = 0$ e $m = 2$). Segue então que

$$\begin{aligned}
\|\bar{f}(t_1, u_1) - \bar{f}(t_2, u_2)\|_{L^2} &\leq \widetilde{C}_0(1 + \|u_1\|_\alpha^{r-1} + \|u_2\|_\alpha^{r-1})\|u_1 - u_2\|_\alpha + |\Omega|^{1/2}|t_1 - t_2|^v \\
&+ (1 + b)\|u_1 - u_2\|_\alpha + b\widetilde{C}(\Omega)|t_1 - t_2|^{1/2}\|\gamma'\|_{L^2(0,T)}\|u_2\|_\alpha.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\bar{f}(t_1, u_1) - \bar{f}(t_2, u_2)\|_{L^2} \leq L(\|u_1 - u_2\|_\alpha + |t_1 - t_2|^v + |t_1 - t_2|^{1/2}),$$

onde $L = \max\{\widetilde{C}_0(1 + \|u_1\|_\alpha^{r-1} + \|u_2\|_\alpha^{r-1}), |\Omega|^{1/2}, (1 + b), b\widetilde{C}(\Omega)\|\gamma'\|_{L^2(0,T)}\|u_2\|_\alpha\}$.

Com isso, mostramos que $\bar{f}$ está nas condições da Definição 2.3.6. Assim, podemos provar o seguinte teorema que prova um resultado de existência e unicidade de solução local para o problema (3.21).

Teorema 3.2.1. *Suponhamos A e $D(A)$ como em (3.22) e (3.23) respectivamente, $\bar{f}$ como em (3.24) e suponhamos que g satisfaz apenas **(H3)**. Então, para cada $u_0 \in D(A^\alpha)$ com $1/2 < \alpha < 1$, a equação*

$$\begin{cases} \partial_t u + Au &= \bar{f}(t, u), \\ u(0, \cdot) &= u_0, \end{cases}$$

tem uma única solução local em $Q = [0, t_1) \times \Omega$, onde $t_1 = t_1(0, u_0) > 0$.

Demonstração: Basta aplicar a Proposição 2.3.9. ■

Observação 3.2.2. A solução obtida pelo Teorema 3.2.1 é a única solução da equação (3.19) em $[0, t_1)$.

Agora, vamos provar um resultado de regularidade e uma estimativa para a única solução local de (3.21).

Proposição 3.2.1. *Suponhamos as mesmas hipóteses do Teorema 3.2.1, **(H2)** e também suponhamos que u_0 satisfaz*

$$0 \leq u_0(\cdot) \leq M,$$

*para $M > 0$ dado em **(H2)**. Então a solução $u(\cdot, \cdot)$ obtida pelo Teorema 3.2.1 é tal que*

$$u_t, \Delta u \in L^2(0, t_1, L^2(\Omega)).$$

Além disso,

$$0 \leq u(\cdot, \cdot) \leq M$$

em seu domínio de existência.

Demonstração: Seja $u(t)$ a solução do problema (3.19), para $t \in [0, t_1)$, obtida pelo Teorema 3.2.1. Temos então que

$$\partial_t u - \nu \Delta u = g(x, t, u) - bk(x - \gamma(t))u, \quad u(0) = u_0. \quad (3.25)$$

Primeiramente suponhamos $u_0(\cdot) \geq 0$. Temos

$$\bar{f}(t, u)(x) = f(x, t, u) + u = u + g(x, t, u) - bk(x - \gamma(t))u. \quad (3.26)$$

Dado $s > 0$, definamos o subconjunto de X^α

$$B_s = \{u \in X^\alpha; u \geq 0 \text{ e } \|u\|_\alpha \leq s\}.$$

Nosso objetivo é aplicar os Lemas 2.3.4 e 2.3.5.

Para isso, é suficiente mostrar que existe $\beta = \beta(s)$ tal que

$$\bar{f}(t, u) + \beta u \geq 0, \quad \text{para todo } u \in B_s.$$

Notemos que $X^\alpha \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ para $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. Logo, existe uma constante $C_\alpha > 0$ tal que $\|u\|_\infty \leq C_\alpha \|u\|_\alpha$. Assim, $|u(x)| \leq C_\alpha s$, $q.t.p$ $x \in \Omega$, ou seja, $-C_\alpha s \leq u(x) \leq C_\alpha s$.

Para $u \in B_s$ segue de (3.26) que

$$\bar{f}(t, u) \geq u + g(x, t, u) - bu,$$

pois por hipótese $0 \leq k(\cdot) \leq 1$. Assim,

$$\bar{f}(t, u) + \beta u \geq \beta u + u + g(x, t, u) - bu = u(1 + \beta - b) + g(x, t, u).$$

Segue de **(H1)** e do Teorema do Valor Médio que existe $\xi_u \in (0, u)$, com $0 \leq u \leq C_\alpha s$, tal que, aplicando **(H2)** temos para cada $t \in [0, t_1]$ que

$$g(x, t, u) = g(x, t, u) - g(x, t, 0) = g_u(x, t, \xi_u)(u - 0) = g_u(x, t, \xi_u)u.$$

Notemos também que de **(H3)** segue que

$$|g(x, t, u + h) - g(x, t, u)| \leq C_0(1 + |u + h|^{r-1} + |u|^{r-1})|u + h - u|.$$

E portanto, para $h \neq 0$

$$\left| \frac{g(x, t, u + h) - g(x, t, u)}{h} \right| \leq C_0(1 + |u + h|^{r-1} + |u|^{r-1}),$$

que passando ao limite com $h \rightarrow 0$ vem

$$|g_u(x, t, u)| \leq C_0(1 + 2|u|^{r-1}) \leq C_0(1 + 2C_\alpha s^{r-1}).$$

Em particular isso nos mostra que

$$-C_0(1 + 2C_\alpha s^{r-1}) \leq \inf_{\substack{x \in \Omega, t \in [0, t_1] \\ u \in [0, C_\alpha s]}} g_u(x, t, u) \leq C_0(1 + 2C_\alpha s^{r-1}).$$

Assim, concluímos que

$$\begin{aligned} \bar{f}(t, u) + \beta u \geq u(1 + \beta - b) + g_u(x, t, \xi_u)u &= u(1 + \beta - b + g_u(x, t, \xi_u)) \\ &\geq u(1 + \beta - b + \inf_{\substack{x \in \Omega, t \in [0, t_1] \\ u \in [0, C_\alpha s]}} g_u(x, t, u)). \end{aligned}$$

Logo, tomando $\beta \geq b - 1 - \inf_{\substack{x \in \Omega, t \in [0, t_1] \\ u \in [0, C_\alpha s]}} g_u(x, t, u)$, segue que

$$\bar{f}(t, u) + \beta u \geq 0,$$

para todo $u \in B_s$ com s arbitrário e $t \in [0, t_1]$. Assim, concluimos o resultado aplicando o Lema 2.3.5, ou seja, $u(t) \geq 0$ para $t \in [0, t_1]$.

Também temos que a solução u está em $L^\infty(0, t_1, X^\alpha)$, veja a Proposição 2.3.9.

Segue do Corolário 2.3.1 (com $p = 2, n = 2$ e $q = \infty$) que $X^\alpha \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$. Portanto, $u \in L^\infty(Q_{t_1})$ e é uma solução do problema

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)\bar{f}(s, u(s))ds. \quad (3.27)$$

Por hipótese temos que $|\bar{f}(s, u(s))| \leq c(1 + |u|^r)$. Logo, podemos concluir que $\bar{f}(s, u(s)) \in L^2(0, t_1, L^2(\Omega))$

Segue da Proposição 2.3.12 que

$$\left\| A \int_0^t S(t-s)\bar{f}(s, u(s))ds \right\|_{L^2(0, t_1, L^2(\Omega))} \leq C \|\bar{f}(s, u(\cdot))\|_{L^2(0, t_1, L^2(\Omega))}. \quad (3.28)$$

Além disso, segue dos Lemas 2.3.2 e 2.3.3, para $1/2 < \alpha < 1$, que $X^\alpha \hookrightarrow D_A(1 - \frac{1}{2}, 2) = D_A(\frac{1}{2}, 2)$. Portanto, $u_0 \in D_A(\frac{1}{2}, 2)$ e $\bar{f}(t, u(t)) \in L^2(0, t_1, L^2(\Omega))$, segue de (3.28) juntamente com a Proposição 2.3.11 que

$$\frac{\partial u}{\partial t}, Au \in L^2(0, t_1, L^2(\Omega))$$

Como $u, \frac{\partial u}{\partial t}, Au \in L^2(Q_{t_1})$ e $Au = -\Delta u + u$, temos que $\Delta u \in L^2(Q_{t_1})$.

Agora, suponhamos $u_0(\cdot) \leq M$. Como já observamos antes $u(t)$ satisfaz a equação

$$\partial_t u - \nu \Delta u = g(x, t, u) - bk(x - \gamma(t))u, \quad u(0) = u_0.$$

Notemos que $(u - M) = (u - M)^+ - (u - M)^-$, $\partial_t u = \partial_t(u - M)$ e $\Delta u = \Delta(u - M)$.

Como nosso objetivo é mostrar que $u \leq M$, é suficiente mostrar que $(u - M)^+ \equiv 0$.

Temos

$$\partial_t(u - M) - \nu \Delta(u - M) = g(x, t, u) - bk(x - \gamma(t))u.$$

Multiplicando esta equação por $(u - M)^+$ e integrando em Ω , vem

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \partial_t(u - M)(u - M)^+ - \nu \int_{\Omega} \Delta(u - M)(u - M)^+ \\ &= \int_{\Omega} g(x, t, u)(u - M)^+ - b \int_{\Omega} k(x - \gamma(t))u(u - M)^+. \end{aligned}$$

Como já sabemos que $u(t) \geq 0$ para $t \in [0, t_1)$. Segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|(u - M)^+(t)\|_{L^2}^2 &+ \nu \|\nabla(u - M)^+(t)\|_{L^2}^2 \\ &= \int_{\Omega} g(x, t, u)(u - M)^+ - b \int_{\Omega} k(x - \gamma(t))u(u - M)^+ \\ &\leq \int_{\Omega} g(x, t, u)(u - M)^+ \\ &\leq \int_{\Omega_1^t} g(x, t, u)(u - M)^+ + \int_{\Omega_2^t} g(x, t, u)(u - M)^+, \end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned} \Omega_1^t &= \Omega \cap \{x; u(t) < M\} \\ \Omega_2^t &= \Omega \cap \{x; u(t) \geq M\}. \end{aligned}$$

Por **(H2)** temos

$$\int_{\Omega_1^t} g(x, t, u)(u - M)^+ = 0$$

e

$$\int_{\Omega_2^t} g(x, t, u)(u - M)^+ \leq 0.$$

Assim obtemos que

$$\frac{d}{dt} \|(u - M)^+(t)\|_{L^2}^2 \leq 0,$$

que integrando em $(0, t)$, com $0 \leq t \leq t_1$ vem

$$\|(u - M)^+(t)\|_{L^2}^2 - \|(u - M)^+(0)\|_{L^2}^2 \leq 0,$$

ou seja,

$$\|(u - M)^+(t)\|_{L^2}^2 \leq \|(u - M)^+(0)\|_{L^2}^2 = \|(u_0 - M)^+\|_{L^2}^2 = 0,$$

pois por hipótese $u_0 \leq M$. Portanto

$$\|(u - M)^+(t)\|_{L^2}^2 = 0$$

e conseqüentemente

$$(u - M)^+ \equiv 0,$$

ou seja,

$$u(t) - M = -(u - M)^-(t) \leq 0, \text{ para todo } 0 \leq t \leq t_1.$$

Assim, concluimos que $u(.,.) \leq M$. ■

Como antes, com estes resultados mostraremos que a solução do problema (3.19) é global, isto é, a solução existe para todo $t \geq 0$.

Teorema 3.2.2. *Consideremos as mesmas hipóteses do Teorema 3.2.1 e suponhamos $0 \leq u_0(.) \leq M$. Então, a única solução, $u(t) \in D(A)$, do problema*

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu \Delta u &= g(x, t, u) - bk(x - \gamma(t))u, \\ u(0, .) &= u_0, \end{cases}$$

existe para todo $t \geq 0$. Também, considerando $0 < T < \infty$, temos que $u \in W_2^{1,2}(Q)$,

$$\|u\|_{W_2^{1,2}(Q)} \leq C(T, |\Omega|, M)(1 + \|u_0\|_\alpha)$$

e

$$0 \leq u(t) \leq M \text{ para todo } t \in [0, T]$$

Demonstração: A existência e unicidade de solução é obtida pelo Teorema 3.2.1 em um intervalo $[0, T)$, com $T = T(0, u_0) > 0$. Como estamos supondo $0 \leq u_0(.) \leq M$, segue da Proposição 3.2.1 que

$$0 \leq u(t) \leq M \text{ para todo } t \in [0, T). \quad (3.29)$$

Segue então que

$$\|u(t)\|_{L^2} \leq C \text{ para todo } t \in [0, T). \quad (3.30)$$

Para concluir o resultado é suficiente mostrar que $\|u(t)\|_\alpha$ permanece limitada quando $t \rightarrow T^-$.

Agora, notemos que a solução $u(t)$ satisfaz a seguinte equação integral

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)\bar{f}(s, u(s))ds.$$

Aplicando o operador A^α e usando a Proposição 2.3.6 item (2), resulta

$$A^\alpha u(t) = S(t)A^\alpha u_0 + \int_0^t A^\alpha S(t-s)f(s, u(s))ds + \int_0^t A^\alpha S(t-s)u(s)ds.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|A^\alpha u(t)\|_{L^2} &\leq \|S(t)\| \|A^\alpha u_0\|_{L^2} + \int_0^t \|A^\alpha S(t-s)\| \|f(s, u(s))\|_{L^2} ds \\ &\quad + \int_0^t \|A^\alpha S(t-s)\| \|u(s)\|_{L^2} ds \\ &\leq M \|A^\alpha u_0\|_{L^2} + \int_0^t \|A^\alpha S(t-s)\| \|f(s, u(s))\|_{L^2} ds \\ &\quad + \int_0^t \|A^\alpha S(t-s)\| \|u(s)\|_{L^2} ds. \end{aligned}$$

Segue da Proposição 2.3.6 item (3) que

$$\|A^\alpha S(t-s)\| \leq M_\alpha (t-s)^{-\alpha} e^{-\delta(t-s)} \leq C_\alpha (t-s)^{-\alpha}.$$

Agora notemos que $u(s) \in D(A) \subset H^2(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$ (Veja Proposição 2.1.1) e por hipótese $0 \leq k \leq 1$. Logo

$$\begin{aligned} \|f(s, u(s))\|_{L^2} &= \|g(t, u(s)) - bk(\cdot - \gamma(s))u(s)\|_{L^2} \\ &\leq \|g(t, u(s))\|_{L^2} + b\|u(s)\|_{L^2} \\ &\leq \|g(t, u(s))\|_{L^2} + bC. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|A^\alpha u(t)\|_{L^2} &\leq \|S(t)\| \|A^\alpha u_0\|_{L^2} + C_\alpha \int_0^t (t-s)^{-\alpha} (\|g(s, u(s))\|_{L^2} + bC) ds \\
&+ C_\alpha \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \|u(s)\|_{L^2} ds \\
&\leq M \|A^\alpha u_0\|_{L^2} + C_\alpha \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \|g(s, u(s))\|_{L^2} ds + C_\alpha \int_0^t (t-s)^{-\alpha} bC ds \\
&+ C_\alpha \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \|u(s)\|_{L^2} ds \\
&\leq M \|A^\alpha u_0\|_{L^2} + C_\alpha \frac{T^{1-\alpha}}{1-\alpha} bC + C_\alpha \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \|g(s, u(s))\|_{L^2} ds \\
&+ C_\alpha \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \|u(s)\|_{L^2} ds.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Agora, notemos que por **(H2)** e **(H3)** vem

$$\begin{aligned}
\|g(t, u(t))\|_{L^2} &= \|g(t, u(t)) - g(t, 0)\|_{L^2} \\
&\leq \left(\int_\Omega |g(t, u(t)) - g(t, 0)|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq C \left(\int_\Omega (1 + |u(t)|^{2r-2}) |u(t)|^2 \right)^{1/2} \\
&= C \left(\int_\Omega (|u(t)|^2 + |u(t)|^{2r}) \right)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Notemos que $u(t) \in D(A) \subset X^\alpha$. Como $X^\alpha \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para $q \geq 2$, (veja a Proposição 2.3.8 e Corolário 2.3.1). Temos $u(t) \in L^q(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, para $q \geq 2$. Logo,

$$\begin{aligned}
\|g(t, u(t))\|_{L^2} &= C \left(\int_\Omega (|u(t)|^2 + |u(t)|^{2r}) \right)^{1/2} \\
&\leq C \left(\int_\Omega |u(t)|^2 dx \right)^{1/2} + C \left(\int_\Omega |u(t)|^{2r} \right)^{1/2} \\
&\leq C_1 \|u(t)\|_\infty + C_2 \|u(t)\|_{L^{2r}}^r.
\end{aligned}$$

Como $1/2 < \alpha < 1$, segue que $X^\alpha \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$, ou seja,

$$\|u(t)\|_\infty \leq C \|u(t)\|_\alpha. \tag{3.33}$$

Por outro lado, segue do teorema de imersão de Sobolev (veja Proposição 2.1.1) que

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

para $1 \leq q < \infty$. Como $r \geq 1$, segue que $2r \geq 2$. Logo, existe $C > 0$ tal que

$$\|u(t)\|_{L^{2r}} \leq C\|u(t)\|_{H^1}.$$

Assim, por (3.33) temos que

$$\|g(t, u(t))\|_{L^2} \leq C_1\|u(t)\|_\infty + C_2\|u(t)\|_{H^1}^r \leq C_1\|u(t)\|_\alpha + C_2\|u(t)\|_{H^1}^r. \quad (3.34)$$

Testando

$$\partial_t u - \nu \Delta u = g(t, u) - bk(x - \gamma(t))u$$

contra $\partial_t u$ e integrando em Ω , também usando que $0 \leq k \leq 1$ vem

$$\int_{\Omega} (\partial_t u(t))^2 dx - \nu \int_{\Omega} \Delta u(t) \partial_t u(t) dx = \int_{\Omega} g(t, u(t)) \partial_t u(t) dx - b \int_{\Omega} k(x - \gamma(t)) u(t) \partial_t u(t) dx.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\partial_t u(t))^2 dx + \frac{\nu}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 &\leq \int_{\Omega} \frac{(g(t, u(t)))^2}{2\epsilon} dx + \int_{\Omega} \frac{\epsilon}{2} (\partial_t u(t))^2 dx \\ &+ \frac{b^2}{2\epsilon} \int_{\Omega} u(t)^2 dx + \frac{\epsilon}{2} \int_{\Omega} (\partial_t u(t))^2 dx. \end{aligned}$$

Tomando $\epsilon > 0$ tal que $1 - \epsilon > 0$ e usando que $0 \leq u(t) \leq M$, para $0 \leq t \leq T$, e usando (3.36) vem

$$\begin{aligned} (1 - \epsilon) \int_{\Omega} (\partial_t u(t))^2 dx + \frac{\nu}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 &\leq \frac{1}{2\epsilon} \|g(t, u(t))\|_{L^2}^2 + \frac{b^2}{2\epsilon} \|u(t)\|_{L^2}^2 \\ &\leq C|\Omega| \frac{1}{2\epsilon} (M^2 + M^{2r}) + \frac{b^2}{2\epsilon} M|\Omega|^{1/2} = R. \end{aligned}$$

Logo,

$$(1 - \epsilon) \int_{\Omega} (\partial_t u(t))^2 dx + \frac{\nu}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 \leq R.$$

Integrando em $(0, t)$ obtemos

$$(1 - \epsilon) \int_0^t \int_{\Omega} (\partial_s u(s))^2 dx ds + \frac{\nu}{2} \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 \leq \frac{\nu}{2} \|\nabla u(0)\|_{L^2}^2 + tR \leq \frac{\nu}{2} \|\nabla u_0\|_{L^2}^2 + TR,$$

para todo $0 \leq t \leq T$. Assim,

$$(1 - \epsilon) \int_0^T \int_{\Omega} (\partial_t u(t))^2 dx dt + \frac{\nu}{2} \sup_{0 \leq t \leq T} \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 \leq C(T, \Omega)(1 + \|\nabla u_0\|_{L^2}^2). \quad (3.35)$$

Em particular, este resultado junto com (3.30) mostra que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|u(t)\|_{H^1(\Omega)} \leq C.$$

Assim, segue de (3.34) junto com esta última estimativa que

$$\|g(t, u(t))\|_{L^2} \leq C_1 \|u(t)\|_\alpha + C_2. \quad (3.36)$$

Voltando a (3.31) temos

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_\alpha &\leq M \|A^\alpha u_0\|_{L^2} + C_\alpha \frac{T^{1-\alpha}}{1-\alpha} bC + C_\alpha \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \|g(s, u(s))\|_{L^2} ds \\ &\quad + C_\alpha \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \|u(s)\|_{L^2} ds \\ &\leq M \|A^\alpha u_0\|_{L^2} + C_\alpha \frac{T^{1-\alpha}}{1-\alpha} bC + C_\alpha \int_0^t (t-s)^{-\alpha} (C_1 \|u(t)\|_\alpha + C_2) ds \\ &\quad + C_\alpha \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \|u(s)\|_{L^2} ds \\ &= M \|A^\alpha u_0\|_{L^2} + C_\alpha \frac{T^{1-\alpha}}{1-\alpha} bC + C_\alpha \int_0^t (t-s)^{-\alpha} C_2 ds + C_\alpha \int_0^t (t-s)^{-\alpha} C_1 \|u(t)\|_\alpha ds \\ &\quad + C_\alpha \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \|u(s)\|_{L^2} ds \\ &\leq M \|A^\alpha u_0\|_{L^2} + C_\alpha \frac{T^{1-\alpha}}{1-\alpha} bC + C_\alpha \frac{T^{1-\alpha}}{1-\alpha} C_2 + C_\alpha (C_1 + 1) \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \|u(t)\|_\alpha ds. \end{aligned}$$

Segue do Lema de Gronwall (Lema 2.6.2) que

$$\|u(t)\|_\alpha \leq C < \infty,$$

ou seja, $\lim_{t \rightarrow T^-} \|u(t)\|_\alpha \leq C < \infty$. Isto conclui a primeira parte do resultado, ou seja, a solução é global.

Por outro lado, segue desta última estimativa, (3.36), **(H2)** e **(H3)** que

$$\|g(t, u(t))\|_2 \leq C, \quad (3.37)$$

para todo $0 \leq t \leq T$.

Por (3.35), $\partial_t u \in L^2(Q)$ e

$$\|\partial_t u\|_{L^2(Q)} \leq C(T, \Omega)(1 + \|\nabla u_0\|_{L^2}) \leq C(T, \Omega)(1 + \|u_0\|_{H^1(\Omega)}).$$

Agora, segue do Corolário 2.3.1 que $X^\alpha \hookrightarrow H^1(\Omega)$, para $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ e portanto

$$\|\partial_t u\|_{L^2(Q)} \leq \tilde{C}(T, \Omega)(1 + \|u_0\|_\alpha). \quad (3.38)$$

Assim, segue de (3.37) e (3.38) que, para cada $0 < t \leq T$, $u(t)$ satisfaz o problema elíptico

$$-\Delta u(t) + \frac{1}{\nu} u(t) = \frac{1}{\nu} [-\partial_t u(t) + g(t, u(t)) + u(t) - bk(x - \gamma(t))u(t)] =: h(t) \in L^2(\Omega)$$

e

$$(\partial/\partial\eta)u(t) = 0.$$

Portanto, segue da teoria de regularidade elíptica que $u(t) \in H^2(\Omega)$ e

$$\|u(t)\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|h(t)\|_{L^2(\Omega)},$$

para todo $0 < t \leq T$.

Portanto, segue dos resultados anteriores que

$$\int_0^T \|u(t)\|_{H^2(\Omega)}^2 dt \leq C \int_0^T \|h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq C(T, \Omega)(1 + \|u_0\|_\alpha)^2 < \infty.$$

Assim, concluimos desta última estimativa junto com (3.38) que $u \in W_2^{1,2}(Q)$ e

$$\|u\|_{W_2^{1,2}(Q)} \leq C(T, \Omega)(1 + \|u_0\|_\alpha). \quad (3.39)$$

■

Capítulo 4

Problema de Controle Ótimo com Não-Linearidade do Tipo Verhust

Neste capítulo, trataremos de um problema de controle ótimo associado a uma equação diferencial parcial semilinear; tal problema modela matematicamente uma situação em que se quer controlar uma população de mosquitos presentes em uma certa região via pulverização de inseticida. Nossa abordagem consiste em repensar tal problema de controle em um problema de otimização abstrato para, em seguida, mostrar a existência de solução ótima e as respectivas condições necessárias de otimalidade de primeira ordem via o formalismo de Dubovitskii e Milyutin.

4.1 Formulação Matemática do Problema

Ao longo deste capítulo consideraremos Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^2$, com fronteira $\partial\Omega$ pelo menos de classe C^3 , e uma constante $0 < T < +\infty$.

Definição 4.1.1. *Ao longo deste capítulo denotaremos o conjunto dos **controles admissíveis** por*

$$\mathcal{A} = \{\gamma \in (H^1(0, T))^2 \mid \gamma(0) = 0\}, \quad (4.1)$$

o qual é subespaço fechado de $(H^1(0, T))^2$, com a topologia induzida pela norma

$$\|\gamma\|_{(H^1(0, T))^2} = \left(\int_0^T |\gamma'(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.2)$$

Observação 4.1.1. Na definição anterior a expressão dada por (4.2) é de fato uma norma pois, para cada curva $\gamma \in \mathcal{A}$ temos que $\gamma(0) = 0$.

Consideremos o funcional $J : \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$J(\gamma, u) = \mu_0 \int_0^T |\gamma(t)|^2 dt + \mu_1 \int_0^T |\gamma'(t)|^2 dt + \mu_2 \int_0^T \int_{\Omega} |u(x, t)|^2 dx dt, \quad (4.3)$$

onde $\mu_0 \geq 0, \mu_1 > 0, \mu_2 > 0$ são constantes, γ é o controle que atua na equação e $u(x, t)$ é o estado tomado como solução da seguinte equação diferencial parcial que governa a população de mosquitos:

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu \Delta u = au - \frac{a}{M} u^2 - bk(x - \gamma(t))u & \text{em } Q = \Omega \times (0, T), \\ (\partial/\partial\eta)(u) = 0 & \text{em } S = \partial\Omega \times (0, T), \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (4.4)$$

onde ν, a, M e b são constantes positivas, $u_0 \in X^\alpha$, para $1/2 < \alpha < 1$ (ver Definição 2.3.3).

O problema de controle ótimo que estudaremos neste capítulo é o de encontrar uma par $(\gamma^*, u^*) \in \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q)$ tal que, (γ^*, u^*) seja um mínimo do funcional (4.3) sujeito a (4.4).

A seguir, apresentaremos os teoremas que justificam a existência e unicidade de solução das equações de estado e co-estado.

A demonstração do próximo teorema segue diretamente do Teorema 3.1.2.

Teorema 4.1.1. *Dadas as funções $k \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R})$ tal que $0 \leq k(\cdot) \leq 1$, $u_0 \in X^\alpha$, com $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ e satisfazendo $0 \leq u_0 \leq M$ e $\gamma \in (H^1(0, T))^2$. Além disso, $\nu > 0$, $a > 0$ e $b > 0$ são constantes e Ω é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2 . Então existe uma única solução $u \in W_2^{2,1}(Q)$ do problema (4.4) satisfazendo, $0 \leq u(t) \leq M$ e a seguinte estimativa*

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq \widetilde{M}_1(1 + \|u_0\|_\alpha),$$

com $\widetilde{M}_1$ uma constante que depende apenas de T, ν, a, b, M e $|\Omega|$.

O seguinte resultado é um caso particular, simplificado para as necessidades deste trabalho, da teoria L^p (clássica) para equações diferenciais parciais parabólicas lineares com condições de Neumann na fronteira (Ladyzenskaja [19, Teorema 9.1, p.341], o qual vale para condições de Dirichlet, devidamente modificado pela observação ao final da Seção 9 do Capítulo 4 para a condição de Neumann) .

Teorema 4.1.2. *Sob as mesmas hipóteses do Teorema 4.1.1, sendo $\beta \in (H^1(0, T))^2$ e $v \in L^4(Q)$ dadas, existe uma única solução $p \in W_2^{2,1}(Q)$ para a equação*

$$\begin{cases} -\partial_t p - \nu \Delta p = g'(v)p - b k(x - \beta)p - v & \text{em } Q = \Omega \times (0, T], \\ (\partial/\partial\eta)(p) = 0 & \text{em } S = \partial\Omega \times (0, T], \\ p(T) = 0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (4.5)$$

onde $g'(v)p = ap - \frac{a}{M}vp$. Além disso, vale a seguinte estimativa

$$\|p\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq \widetilde{M}_2 \|v\|_{L^4(Q)}$$

com $\widetilde{M}_2$ uma constante que depende apenas de T, ν, a, M, b e $|\Omega|$.

4.2 Formulação como Problema de Otimização e Resultados

O problema de controle anunciado anteriormente pode ser equivalentemente representado pelo problema de otimização definido por

$$\min_{(\gamma, u) \in \mathcal{U}_{ad}} J(\gamma, u), \quad (4.6)$$

onde $\mathcal{U}_{ad}$ é definido a seguir.

Definição 4.2.1. Fixado $u_0 \in X^\alpha$, para $1/2 < \alpha < 1$, o conjunto admissível $\mathcal{U}_{ad}$ é dado por uma restrição de igualdade definida por

$$\mathcal{U}_{ad} = \{(\gamma, u) \in \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q); \mathcal{M}(\gamma, u) = 0\},$$

com $\mathcal{M} : \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q) \rightarrow L^2(Q) \times X^\alpha$, o operador definido de tal forma que $\mathcal{M}(\gamma, u) = (\psi, \varphi)$, se (ψ, φ) satisfaz a equação definida por

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu \Delta u - au + \frac{a}{M} u^2 + bk(x - \gamma(t))u = \psi & \text{em } Q = \Omega \times (0, T], \\ (\partial/\partial\eta)(u) = 0 & \text{em } S = \partial\Omega \times (0, T], \\ u(x, 0) - u_0(x) = \varphi & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (4.7)$$

Definição 4.2.2. $(\gamma, u) \in \mathcal{U}_{ad}$ é chamado uma **solução ótima (local)** de (4.6), se existir $\epsilon > 0$ tal que

$$J(\gamma, u) \leq J(\beta, v),$$

para todo $(\beta, v) \in \mathcal{U}_{ad}$ satisfazendo

$$\|\beta - \gamma\|_{(H^1(0,T))^2} + \|v - u\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq \epsilon.$$

Precisaremos do seguinte resultado técnico.

Lema 4.2.1. Dadas $\gamma \in (C([0, T]))^2$ e $k \in C_0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Consideremos a função $K : \mathbb{R}^2 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $K(x, t) := k(x - \gamma(t))$. Então, K é uma função contínua de suporte compacto e se $(\gamma_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência em $(C([0, T]))^2$ tal que $\gamma_n \rightarrow \gamma$ fortemente em $(C([0, T]))^2$. Então, segue que $K_n(x, t) := k(x - \gamma_n(t))$ converge uniformemente para $K(x, t) := k(x - \gamma(t))$ em $\mathbb{R}^2 \times [0, T]$.

Demonstração: Para detalhes da demonstração veja Araujo [6, Lema 3.2.3, p. 34].

Observação 4.2.1. O resultado do Lema 4.2.1 ainda continua válido substituindo $(C([0, T]))^2$ por $(H^1(0, T))^2$ e a demonstração ocorre de maneira análoga, visto que, a imersão $H^1(0, T) \hookrightarrow C([0, T])$ é contínua.

4.2.1 Existência de Controle Ótimo

Nesta seção, provaremos que o problema (4.6) tem solução. Para isso, tomaremos uma sequência minimizante $((\gamma_n, u_n))_{n=1}^{\infty}$ associada ao problema (4.6) e, aplicando alguns resultados auxiliares descritos no Capítulo 2, mostraremos que essa sequência admite uma subsequência convergente para um limite (γ^*, u^*) que será uma solução ótima do problema (4.6).

Teorema 4.2.1. *Sob as hipóteses do Teorema 4.1.1, o problema (4.6) possui uma solução.*

Por ser extensa, a prova deste teorema será feita em várias etapas.

Demonstração do Teorema 4.2.1:

Primeira etapa: $\mathcal{U}_{ad} \neq \emptyset$. De fato, dado $\xi \in \mathcal{A}$, segue do Teorema 4.1.1 a existência de uma única solução $z \in W_2^{2,1}(Q)$ para a equação (4.4), em particular $M(\xi, z) = 0$ e

$$J(\xi, z) = \mu_0 \int_0^T |\xi(t)|^2 dt + \mu_1 \int_0^T |\xi'(t)|^2 dt + \mu_2 \int_0^T \int_{\Omega} |z(x, t)|^2 dx dt. \quad (4.8)$$

Agora, tomando $C = \max\{\mu_0, \mu_1, \mu_2\} > 0$, obtemos

$$J(\xi, z) \leq C(\|\xi\|_{(H^1(0,T))^2}^2 + \|z\|_{L^2(Q)}^2) < \infty.$$

Logo, $(\xi, z) \in \mathcal{U}_{ad}$. Assim $\mathcal{U}_{ad} \neq \emptyset$.

Segunda etapa: Agora provaremos que cada sequência minimizante possui subsequência convergente para um limite $(\gamma^*, u^*) \in (H^1(0, T))^2 \times W_2^{2,1}(Q)$.

Consideremos uma sequência $((\gamma_n, u_n))_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{U}_{ad}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(\gamma_n, u_n) = \inf_{(\gamma, u) \in \mathcal{U}_{ad}} J(\gamma, u),$$

isto é, uma sequência minimizante.

Logo, existe uma constante $C_0 > 0$ tal que

$$0 \leq J(\gamma_n, u_n) \leq C_0,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, segue da definição de $J(., .)$ que

$$J(\gamma_n, u_n) = \mu_0 \int_0^T |\gamma_n(t)|^2 dt + \mu_1 \int_0^T |\gamma'_n(t)|^2 dt + \mu_2 \int_0^T \int_{\Omega} |u_n(x, t)|^2 dx dt \leq C_0$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Assim, concluímos que

$$\|\gamma_n\|_{(H^1(0,T))^2}^2 \leq \frac{C_0}{\mu_1} \quad (4.9)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, como a imersão $H^1(0, T) \hookrightarrow C([0, T])$ é contínua e compacta e $H^1(0, T)$ é reflexivo, existe $\gamma^* \in (H^1(0, T))^2$ e uma subsequência, que continuaremos denotando por $(\gamma_n)_{n=1}^\infty$, tal que

$$\gamma_n \rightarrow \gamma^* \text{ fortemente em } (C([0, T]))^2$$

e

$$\gamma_n \rightharpoonup \gamma^* \text{ fracamente em } (H^1(0, T))^2.$$

Além disso, para cada $n \in \mathbb{N}$, $(\gamma_n, u_n) \in \mathcal{U}_{ad}$, em particular $\mathcal{M}(\gamma_n, u_n) = 0$. Também segue do Teorema 4.1.1 que existe uma constante $C_2 > 0$ tal que

$$\|u_n\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C_2,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Agora, aplicando o resultado de imersão dado pela Observação 2.1.1 obtemos que, a imersão $W_2^{2,1}(Q) \hookrightarrow L^2(Q)$ é compacta e mais, da reflexividade de $W_2^{2,1}(Q)$, podemos extrair uma subsequência, que continuaremos denotando por $(u_n)_{n=1}^\infty$, tal que

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u^* \text{ fracamente em } W_2^{2,1}(Q); \\ u_n &\rightarrow u^* \text{ fortemente em } L^2(Q). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Terceira etapa: Mostremos que $\gamma^* \in \mathcal{A}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\gamma_n(0) = 0$ e segue da segunda etapa que $\gamma_n \rightarrow \gamma^*$ em $(C([0, T]))^2$. Logo,

$$\gamma^*(0) = 0.$$

Quarta etapa: Provemos agora que o ponto $(\gamma^*, u^*) \in \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q)$, obtido na segunda etapa, satisfaz a equação

$$\partial_t u^* - \alpha \Delta u^* = a u^* - \frac{a}{M} u^{*2} - b k(x - \gamma^*(t)) u^*.$$

Sabemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M}(\gamma_n, u_n) = 0$, ou seja,

$$\begin{cases} \partial_t u_n - \nu \Delta u_n = a u_n - \frac{a}{M} u_n^2 - b k(x - \gamma_n(t)) u_n & \text{em } Q = \Omega \times (0, T], \\ (\partial/\partial\eta)(u_n) = 0 & \text{em } S = \partial\Omega \times (0, T], \\ u_n(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Agora, como a sequência $(u_n)_{n=1}^\infty$ é limitada em $W_2^{2,1}(Q)$, resulta que

$$\|u_n\|_{L^2(Q)} + \|D_x u_n\|_{L^2(Q)} + \|D_x^2 u_n\|_{L^2(Q)} + \|\partial_t u_n\|_{L^2(Q)} \leq C_0.$$

Logo, obtemos que

$$\begin{aligned} \partial_t u_n & \text{ é limitada em } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \\ \Delta u_n & \text{ é limitada em } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Agora, da reflexividade de $L^2(0, T; L^2(\Omega))$, e a compacidade da imersão $W_2^{2,1}(Q) \hookrightarrow L^p(Q)$, $p \geq 1$ (Veja Observação 2.1.1), podemos extrair uma subsequência, que continuaremos denotando por $(u_n)_{n=1}^\infty$, tal que

$$\begin{aligned} \partial_t u_n & \rightharpoonup u_1 \text{ fracamente em } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \\ \Delta u_n & \rightharpoonup u_2 \text{ fracamente em } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \\ u_n & \rightarrow u^* \text{ em } L^4(0, T; L^4(\Omega)) \text{ fortemente e quase sempre em } Q. \end{aligned}$$

Logo

$$u_n^2 \rightarrow u^{*2} \text{ quase sempre em } Q. \quad (4.11)$$

Também

$$u_n \text{ é limitada em } L^4(0, T; L^4(\Omega)).$$

Como $\|u_n^2\|_{L^2(Q)} = \|u_n\|_{L^4(Q)}^2$, temos também que

$$u_n^2 \text{ é limitada em } L^2(Q). \quad (4.12)$$

Passando a uma subsequência se necessário, temos que

$$u_n^2 \rightharpoonup v \text{ fracamente em } L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Daí, usando as seguintes imersões:

$$L^2(0, T; L^2(\Omega)) \equiv (L^2(0, T; L^2(\Omega)))' \hookrightarrow H^{-1}(0, T; L^2(\Omega)) \hookrightarrow \mathcal{D}'(0, T; L^2(\Omega))$$

e também como $u_n \rightarrow u^*$ fortemente em $L^2(0, T; L^2(\Omega))$, segue que

$$u_n \rightarrow u^* \text{ em } \mathcal{D}'(0, T; L^2(\Omega)).$$

Logo, da teoria de distribuição, vem

$$\begin{aligned} \partial_t u_n &\rightarrow \partial_t u^* \text{ em } \mathcal{D}'(0, T; L^2(\Omega)), \\ \Delta u_n &\rightarrow \Delta u^* \text{ em } \mathcal{D}'(0, T; L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Mas, da unicidade dos limites obtemos que

$$u_1 = \partial_t u^* \text{ e } u_2 = \Delta u^*.$$

Assim, concluímos que

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u^* \text{ fortemente em } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \\ \partial_t u_n &\rightharpoonup \partial_t u^* \text{ fracamente em } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \\ \Delta u_n &\rightharpoonup \Delta u^* \text{ fracamente em } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Agora mostremos que $v = u^{*2}$.

Temos de (4.11) e (4.12) junto com o Lema 2.6.1 que

$$u_n^2 \rightharpoonup u^{*2} \text{ fracamente em } L^2(Q).$$

Por outro lado, dado $w \in L^2(Q)$ arbitrário mas fixado, temos que

$$|(u^{*2} - v, w)_{L^2(Q)}| \leq |(u^{*2} - u_n^2, w)_{L^2(Q)}| + |(u_n^2 - v, w)_{L^2(Q)}|.$$

Assim, por passagem ao limite concluímos que

$$(u^{*2} - v, w)_{L^2(Q)} = 0,$$

para todo $w \in L^2(Q)$. Fazendo $w = u^{*2} - v$, segue que $v = u^{*2}$. Portanto, concluímos que

$$u_n^2 \rightarrow u^{*2} \text{ fracamente em } L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Agora provemos que

$$k(x - \gamma_n)u_n \rightarrow k(x - \gamma^*)u^* \text{ fracamente em } L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Pelo teorema de representação de Riesz é suficiente provar que

$$\int_0^T \int_{\Omega} k(x - \gamma_n(t))u_n(x, t)\varphi(x, t)dxdt \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} k(x - \gamma^*(t))u^*(x, t)\varphi(x, t)dxdt,$$

para todo $\varphi \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ pois, $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ é um espaço de Hilbert.

Assim, consideremos a sequência de funções, $K_n(., .) : \mathbb{R}^2 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$K_n(x, t) := k(x - \gamma_n(t)).$$

Segue do Lema 4.2.1 que a sequência K_n converge uniformemente para K , ou seja, dado $\epsilon > 0$, existe n_0 tal que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2, t \in [0, T]} |k(x - \gamma_n(t)) - k(x - \gamma^*(t))| < \epsilon,$$

para todo $n \geq n_0$. Logo,

$$\begin{aligned} & \left| \int_Q k(x - \gamma_n(t))u_n(x, t)\varphi(x, t)dxdt - \int_Q k(x - \gamma^*(t))u^*(x, t)\varphi(x, t)dxdt \right| \\ & \leq \int_Q |k(x - \gamma_n(t))u_n(x, t)\varphi(x, t) - k(x - \gamma^*(t))u_n(x, t)\varphi(x, t)|dxdt \\ & \quad + \int_Q |k(x - \gamma^*(t))u_n(x, t)\varphi(x, t) - k(x - \gamma^*(t))u^*(x, t)\varphi(x, t)|dxdt \\ & \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^2, t \in [0, T]} |k(x - \gamma_n(t)) - k(x - \gamma^*(t))| \int_Q |u_n(x, t)\varphi(x, t)|dxdt \\ & \quad + \sup_{x \in \mathbb{R}^2, t \in [0, T]} |k(x - \gamma^*(t))| \int_Q |u_n(x, t) - u^*(x, t)| |\varphi(x, t)|dxdt \\ & \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^2, t \in [0, T]} |k(x - \gamma_n(t)) - k(x - \gamma^*(t))| \|u_n\|_{L^2(Q)} \|\varphi\|_{L^2(Q)} \\ & \quad + \sup_{x \in \mathbb{R}^2, t \in [0, T]} |k(x - \gamma^*(t))| \|u_n - u^*\|_{L^2(Q)} \|\varphi\|_{L^2(Q)} \end{aligned}$$

e o resultado segue tomando o limite em n pois, u_n converge fortemente para u^* em $L^2(Q)$ e consequentemente $\|u_n\|_{L^2(Q)}$ é limitada. Assim, concluímos que

$$k(x - \gamma_n)u_n \rightarrow k(x - \gamma^*)u^* \quad \text{fracamente em } L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Agora, consideremos a equação definida por

$$\partial_t u_n - \alpha \Delta u_n = a u_n - \frac{a}{M} u_n^2 - b k(x - \gamma_n(t)) u_n. \quad (4.13)$$

Resulta dos limites obtidos anteriormente que

$$\partial_t u^* - \alpha \Delta u^* = a u^* - \frac{a}{M} u^{*2} - b k(x - \gamma^*(t)) u^*,$$

mediante a passagem ao limite fracamente em $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ na equação (4.13).

Quinta etapa: Agora, provemos as condições de fronteira, ou seja,

$$(\partial/\partial)(u^*) = 0 \text{ em } S = \partial\Omega \times (0, T].$$

Definamos

$$\Gamma(.) = \text{rest}|_S : L^2(0, T; H^s(\Omega)) \rightarrow L^2(0, T; H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)),$$

o operador traço dado pela Proposição 2.1.2, com $\frac{1}{2} < s < 1$.

Temos que a sequência $(u_n)_{n=1}^\infty$ é limitada em $W_2^{2,1}(Q)$. Logo, $(u_n)_{n=1}^\infty$ é limitada em $L^2(0, T; H^2(\Omega))$ pois, usando equivalência de normas podemos considerar

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_2^{2,1}(Q)} &= (\|u\|_{L^2(Q)}^2 + \|D_x u\|_{L^2(Q)}^2 + \|D_x^2 u\|_{L^2(Q)}^2 + \|D_t u\|_{L^2(Q)}^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\geq (\int_Q |u|^2 dx dt + \int_Q |D_x u|^2 dx dt + \int_Q |D_x^2 u|^2 dx dt)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\int_0^T \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_0^T \|D_x u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_0^T \|D_x^2 u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\int_0^T \|u(t)\|_{H^2(\Omega)}^2 dt)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|u\|_{L^2(0, T; H^2(\Omega))}. \end{aligned}$$

Também, $(\partial_t u_n)_{n=1}^\infty$ é limitada em $L^2(0, T; L^2(\Omega))$.

Como

$$H^2(\Omega) \hookrightarrow H^{\frac{3}{2}+\epsilon}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega),$$

são imersões contínuas para $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$, com a imersão $H^2(\Omega) \hookrightarrow H^{\frac{3}{2}+\epsilon}(\Omega)$ compacta pela Proposição 2.1.3. Segue do Lema 2.1.2, a existência de uma subsequência $(u_{n_k})_{k=1}^\infty$ tal que

$$u_{n_k} \rightarrow u^* \text{ fortemente em } L^2(0, T; H^{\frac{3}{2}+\epsilon}(\Omega)),$$

consequentemente,

$$\nabla u_{n_k} \rightarrow \nabla u^* \text{ fortemente em } (L^2(0, T; H^{\frac{1}{2}+\epsilon}(\Omega)))^2.$$

Portanto, segue da continuidade do operador Γ que

$$(\partial/\partial\eta)(u_{n_k})|_S := (\nabla u_{n_k} \cdot \eta)|_S \rightarrow (\nabla u^* \cdot \eta)|_S := (\partial/\partial\eta)(u^*)|_S$$

em $L^2(0, T; H^\epsilon(\partial\Omega)) \hookrightarrow L^2(0, T; L^2(\partial\Omega))$. Como $(\partial/\partial\eta)(u_{n_k})|_S = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Segue que

$$(\partial/\partial\eta)(u^*) = 0 \text{ em } L^2(0, T; L^2(\partial\Omega)).$$

Sexta etapa: Agora provemos as condições iniciais, ou seja, $u^*(x, 0) = u_0$ em Ω .

Como a subsequência $(u_{n_k})_{k=1}^\infty$ está limitada em $W_2^{2,1}(Q)$, temos, em particular, que

$$(u_{n_k})_{k=1}^\infty \text{ está limitada em } L^2(0, T; H^2(\Omega))$$

e

$$(\partial_t u_{n_k})_{k=1}^\infty \text{ está limitada em } L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Daí, pela Proposição 2.1.4, com $m = 0$, vem

$$u_{n_k} \in C([0, T]; H^1(\Omega))$$

e

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u_{n_k}(t)\|_{H^1(\Omega)} \leq C(\|u_{n_k}\|_{L^2(0, T; H^2(\Omega))} + \|\partial_t u_{n_k}\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}),$$

para todo k . Logo, $(u_{n_k})_{k=1}^\infty$ é uma sequência limitada de $L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$. Temos ainda, passando a uma subsequência se necessário, que

$$\partial_t u_{n_k} \rightarrow \partial_t u^* \text{ fracamente em } L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Também sabemos que as imersões

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega),$$

são contínuas, com $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ compacta. Segue do Lema 2.1.2, a existência de uma subsequência, que continuaremos denotando por $(u_{n_k})_{k=1}^\infty$, tal que

$$u_{n_k} \rightarrow u^* \text{ fortemente em } C([0, T]; L^2(\Omega)).$$

Portanto,

$$\|u_{n_k}(0) - u^*(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq \max_{0 \leq t \leq T} \|u_{n_k}(t) - u^*(t)\|_{L^2(\Omega)},$$

fazendo o limite quando $k \rightarrow \infty$, concluímos que

$$\|u_0 - u^*(0)\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Portanto

$$u^*(0) = u_0.$$

Sétima etapa: Conclusão do Teorema 4.2.1.

Das etapas anteriores concluímos que u^* é solução de (4.4). Portanto, o ponto (γ^*, u^*) satisfaz $\mathcal{M}(\gamma^*, u^*) = 0$ e assim obtemos que $(\gamma^*, u^*) \in \mathcal{U}_{ad}$.

Também temos que o funcional $J : \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q) \rightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$J(\gamma, u) = \mu_0 \|\gamma\|_{L^2(0, T)}^2 + \mu_1 \|\gamma'\|_{L^2(0, T)}^2 + \mu_2 \|u\|_{L^2(Q)}^2,$$

é convexo pois, as funções $\|\cdot\|_{L^2(0, T)}^2 : L^2(0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ e $\|\cdot\|_{L^2(Q)}^2 : L^2(Q) \rightarrow \mathbb{R}$ são convexas.

O funcional J é semi-contínuo inferiormente pois, é contínuo. Como já provamos que para uma subsequência apropriada

$$(\gamma_n, u_n) \rightarrow (\gamma^*, u^*) \text{ fracamente em } (H^1(0, T))^2 \times L^2(Q).$$

Segue da Proposição 2.2.3 que

$$J(\gamma^*, u^*) \leq \liminf J(\gamma_n, u_n) = \inf_{(\beta, v) \in \mathcal{U}_{ad}} J(\beta, v).$$

Mais por outro lado, temos

$$\inf_{(\beta, v) \in \mathcal{U}_{ad}} J(\beta, v) \leq J(\gamma^*, u^*).$$

Assim,

$$J(\gamma^*, u^*) = \inf_{(\beta, v) \in \mathcal{U}_{ad}} J(\beta, v),$$

o que demonstra o Teorema 4.2.1. ■

Observação 4.2.2. Recordemos que um espaço de Banach real é chamado **estritamente convexo** se a função norma

$$x \longmapsto \|x\|$$

é estritamente convexa. Observamos também que cada espaço de Hilbert real é estritamente convexo (veja Zeidler [45], Exemplo 5, p.69).

Segue da Observação 4.2.2 que $J : \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q) \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional estritamente convexo pois,

$$J(\gamma, u) = \mu_0 \|\gamma\|_{(L^2(0,T))^2}^2 + \mu_1 \|\gamma'\|_{(L^2(0,T))^2}^2 + \mu_2 \|u\|_{L^2(Q)}^2,$$

e $(L^2(0, T))^2$ e $L^2(Q)$ são espaços de Hilbert. Notemos que mesmo o funcional J sendo estritamente convexo, não podemos garantir de imediato a unicidade do controle, uma vez que, nosso conjunto admissível $\mathcal{U}_{ad}$ não é convexo. ■

4.2.2 Cálculo dos Cones Associados

Antes de provarmos o teorema principal deste capítulo apresentaremos alguns resultados fundamentais para a aplicação do formalismo de Dubovitskii e Milyutin.

Primeiramente, não é difícil verificar que o funcional $J : \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q) \rightarrow \mathbb{R}$ é Fréchet diferenciável em cada ponto (γ^*, u^*) e em qualquer direção (β, v) . Além disso, sua derivada

é definida por

$$J'(\gamma^*, u^*)(\beta, v) = 2\mu_0 \int_0^T \gamma^* \cdot \beta dt + 2\mu_1 \int_0^T \gamma^{*'} \cdot \beta' dt + 2\mu_2 \int_0^T \int_{\Omega} u^* v dx dt.$$

Lema 4.2.2. *O cone de direções de descida associado ao funcional $J(.,.) : \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q) \rightarrow \mathbb{R}$, no ponto (γ^*, u^*) é dado por*

$$C_J(\gamma^*, u^*) = \{(\beta, v) \in \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q); J'(\gamma^*, u^*)(\beta, v) < 0\}$$

e seu cone dual é dado por

$$[C_J(\gamma^*, u^*)]^* = \{g \in [\mathcal{A}]' \times [W_2^{2,1}(Q)]'; g(\beta, v) = -\lambda_1 J'(\gamma^*, u^*)(\beta, v), \text{ para algum } \lambda_1 \geq 0\}.$$

Demonstração: Basta utilizar o Corolário 2.5.1 e o Teorema 2.5.6. ■

No lema a seguir, o operador $\mathcal{M}$ é o mesmo da Definição 4.2.1.

Lema 4.2.3. (i) *A aplicação $\mathcal{M}(.,.) : \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q) \rightarrow L^2(Q) \times X^\alpha$ é Gâteaux - diferenciável e a derivada de Gâteaux de $\mathcal{M}$ no ponto (γ^*, u^*) e na direção (β, v) é definida por*

$$\nabla_G \mathcal{M}(\gamma^*, u^*)(\beta, v) = (\mathcal{M}_1(\gamma^*, u^*), \mathcal{M}_2(\gamma^*, u^*))$$

onde $\mathcal{M}_1(\gamma^*, u^*)$ e $\mathcal{M}_2(\gamma^*, u^*)$ satisfazem a equação

$$\begin{cases} \partial_t v - \nu \Delta v = g'(u^*)v - b k(x - \gamma^*)v + b \nabla k(x - \gamma^*) \cdot \beta u^* + \mathcal{M}_1(\gamma^*, u^*) & \text{em } Q, \\ (\partial/\partial \eta)(v) = 0 & \text{em } S = \partial\Omega \times (0, T], \\ v(0) = \mathcal{M}_2(\gamma^*, u^*) & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (4.14)$$

$$\text{com } g'(u^*)v = av - \frac{2a}{M}u^*v.$$

(ii) *A aplicação $\mathcal{M}(.,.)$ é estritamente diferenciável e o operador $\nabla_G \mathcal{M}(\gamma^*, u^*)$ é sobrejetivo.*

Demonstração:

Primeira etapa: Prova do item (i).

Primeiramente notemos que a aplicação $g : L^4(Q) \rightarrow L^2(Q)$ definida por $g(u) = au - \frac{a}{M}u^2$. Está bem definida, é Gâteaux diferenciável e a derivada de Gâteaux da aplicação g no ponto v e na direção u é dada por $g'(v)u = au - \frac{2a}{M}vu$.

De fato, g está bem definida pois, para $u \in L^4(Q)$, temos que $u^2 \in L^2(Q)$.

Por outro lado, para $h > 0$ em $\mathbb{R}$ e $u, v \in L^4(Q)$, temos que

$$g(v + hu) - g(v) = h \left(au - \frac{2a}{M}vu \right) - \frac{a}{M}h^2u^2 = hg'(v)u + o(h),$$

onde $o(h) = -\frac{a}{M}h^2u^2$. Assim, concluímos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{g(v + hu) - g(v)}{h} - g'(v)u \right\|_{L^2(Q)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \|o(h)\|_{L^2(Q)} = 0, \quad (4.15)$$

o que conclui nossa afirmação.

Vale apenas ressaltar que para $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, com $N = 2$, $W_2^{2,1}(Q)$ está imerso continuamente em $L^q(Q)$, para todo $q \geq 1$. Assim, a solução u^* obtida pelo Teorema 4.2.1 está em $L^4(Q)$.

Para provar (i); devemos verificar que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left\| \frac{\mathcal{M}(\gamma^* + h\beta, u^* + hv) - \mathcal{M}(\gamma^*, u^*)}{h} - (\mathcal{M}_1(\gamma^*, u^*), \mathcal{M}_2(\gamma^*, u^*)) \right\|_{L^2(Q) \times X^\alpha} = 0.$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} [\mathcal{M}(\gamma^* + h\beta, u^* + hv) - \mathcal{M}(\gamma^*, u^*)] \\ &= \frac{1}{h} \left[\left(\partial_t(u^* + hv) - \nu \Delta(u^* + hv) - g(u^* + hv) + bk(x - (\gamma^* + h\beta))(u^* + hv), \right. \right. \\ & \quad \left. \left. (u^* + hv)(0) - u_0 \right) - \left(\partial_t u^* - \nu \Delta u^* - g(u^*) + bk(x - \gamma^*)u^*, u^*(0) - u_0 \right) \right] \\ &= \left(\partial_t v - \nu \Delta v - \left(\frac{g(u^* + hv) - g(u^*)}{h} \right) + b \left(\frac{k(x - (\gamma^* + h\beta)) - k(x - \gamma^*)}{h} \right) u^* \right. \\ & \quad \left. + bk(x - (\gamma^* + h\beta))v, v(0) \right). \end{aligned}$$

Daí, usando a identidade anterior e (4.14) obtemos que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} [\mathcal{M}(\gamma^* + h\beta, u^* + hv) - \mathcal{M}(\gamma^*, u^*)] \\ &= \left[\mathcal{M}_1(\gamma^*, u^*) + bk(x - (\gamma^* + h\beta))v - bvk(x - \gamma^*) + g'(u^*)v - \left(\frac{g(u^* + hv) - g(u^*)}{h} \right) \right. \\ & \quad \left. + bu^* \left(\frac{k(x - (\gamma^* + h\beta)) - k(x - \gamma^*)}{h} \right) + bu^* \nabla k(x - \gamma^*) \cdot \beta, \mathcal{M}_2(\gamma^*, u^*) \right]. \end{aligned}$$

Assim, concluimos que

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\mathcal{M}(\gamma^* + h\beta, u^* + hv) - \mathcal{M}(\gamma^*, u^*)}{h} - (\mathcal{M}_1(\gamma^*, u^*), \mathcal{M}_2(\gamma^*, u^*)) \right\|_{L^2(Q) \times X^\alpha} \\ &= \|bv[k(x - (\gamma^* + h\beta)) - k(x - \gamma^*)] + g'(u^*)v - \left(\frac{g(u^* + hv) - g(u^*)}{h} \right) \\ & \quad + bu^* \left[\frac{k(x - (\gamma^* + h\beta)) - k(x - \gamma^*)}{h} + \nabla k(x - \gamma^*) \cdot \beta \right]\|_{L^2(Q)}. \end{aligned}$$

Agora, nosso objetivo é aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para mostrar que o limite do lado direito desta última igualdade é zero.

Das hipóteses sobre $k(\cdot)$ temos o limite pontual dado por

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{k(x - (\gamma^* + h\beta)) - k(x - \gamma^*)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{k(x - \gamma^* + h(-\beta)) - k(x - \gamma^*)}{h} \\ &= \nabla k(x - \gamma^*) \cdot (-\beta) \\ &= -\nabla k(x - \gamma^*) \cdot \beta. \end{aligned}$$

Assim, vem

$$bu^* \left[\frac{k(x - \gamma^* - h\beta) - k(x - \gamma^*)}{h} + \nabla k(x - \gamma^*) \cdot \beta \right] \rightarrow 0, \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^2.$$

Agora, aplicando o teorema do valor médio, existe $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$k(x - \gamma^* - h\beta) - k(x - \gamma^*) = \nabla k(x - \gamma^* - \theta h\beta) \cdot (-h\beta).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & bu^* \left[\frac{k(x - (\gamma^* + h\beta)) - k(x - \gamma^*)}{h} + \nabla k(x - \gamma^*) \cdot \beta \right] \\ &= bu^* \left[\frac{\nabla k(x - \gamma^* - \theta h\beta) \cdot (-h\beta)}{h} + \nabla k(x - \gamma^*) \cdot \beta \right] \\ &= -bu^* [\nabla k(x - \gamma^* - \theta h\beta) \cdot \beta - \nabla k(x - \gamma^*) \cdot \beta]. \end{aligned}$$

Como por hipótese $\nabla k \in (C^0(\Omega))^2$, se segue do Lema 4.2.1 aplicado à função ∇k que existe uma constante N_1 tal que

$$|bu^* [\nabla k(x - \gamma^* - \theta h\beta) \cdot \beta - \nabla k(x - \gamma^*) \cdot \beta]| \leq 2bN_1 |u^*| |\beta|.$$

Notemos ainda que $2bN_1|u^*||\beta| \in L^2(Q)$.

Da mesma forma, concluimos que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} |k(x - \gamma^* - h\beta) - k(x - \gamma^*)| = 0$$

e

$$|k(x - \gamma^* - h\beta) - k(x - \gamma^*)| \leq N_2.$$

Daí, segue que a função $k(x - \gamma^* - h\beta) - k(x - \gamma^*) \in L^2(Q)$ e

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\mathcal{M}(\gamma^* + h\beta, u^* + hv) - \mathcal{M}(\gamma^*, u^*)}{h} - (\mathcal{M}_1(\gamma^*, u^*), \mathcal{M}_2(\gamma^*, u^*)) \right\|_{L^2(Q) \times H^1(\Omega)} \\ & \leq b \|v[k(x - (\gamma^* + h\beta)) - k(x - \gamma^*)]\|_{L^2(Q)} + \left\| g'(u^*)v - \left(\frac{g(u^* + hv) - g(u^*)}{h} \right) \right\|_{L^2(Q)} \\ & \quad + b \left\| u^* \left[\frac{k(x - (\gamma^* + h\beta)) - k(x - \gamma^*)}{h} + \nabla k(x - \gamma^*) \cdot \beta \right] \right\|_{L^2(Q)}. \end{aligned}$$

Agora, aplicando o teorema da convergência dominada de Lebesgue e (4.15) temos o resultado desejado para o item (i).

Segunda etapa: Prova do item (ii).

Para provar que a aplicação $\mathcal{M} : \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q) \rightarrow L^2(Q) \times X^\alpha$ é estritamente diferenciável em (γ^*, u^*) , é suficiente mostrar que a função $(\gamma, u) \rightarrow \nabla_G \mathcal{M}(\gamma, u)$ é contínua em (γ^*, u^*) e aplicar o item (i) juntamente com o Lema 2.5.1.

Agora, fixemos $(\beta, v) \in \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q)$ arbitrário, tal que

$$\nabla_G \mathcal{M}(\gamma^*, u^*)(\beta, v) = (\mathcal{M}_1(\gamma^*, u^*), \mathcal{M}_2(\gamma^*, u^*)).$$

Consideremos o operador

$$\mathcal{M}_1 : \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q) \rightarrow L^2(Q),$$

definido por

$$\mathcal{M}_1(\gamma^*, u^*) = \partial_t v - \nu \Delta v - g'(u^*)v + bk(x - \gamma^*)v - bu^* \nabla k(x - \gamma^*) \cdot \beta.$$

Enquanto que o operador

$$\mathcal{M}_2 : \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q) \rightarrow X^\alpha$$

satisfaz

$$\mathcal{M}_2(\gamma^*, u^*) = v(0).$$

Esses operadores estão bem definidos e não é difícil verificar que

$$\nabla_G \mathcal{M}(\gamma^*, u^*)(\cdot, \cdot) : \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q) \rightarrow L^2(Q) \times X^\alpha$$

é um operador linear e contínuo. Agora, provaremos a continuidade de $\nabla_G \mathcal{M}$ em (γ^*, u^*) .

Consideremos $(\gamma_n, u_n) \in \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q)$ tal que $(\gamma_n, u_n) \rightarrow (\gamma^*, u^*)$ fortemente em $\mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q)$. Temos que

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{M}_1(\gamma_n, u_n) - \mathcal{M}_1(\gamma^*, u^*)\|_{L^2(Q)} \\ &= \|(\partial_t v - \nu \Delta v - g'(u_n)v + bk(\cdot - \gamma_n)v - bu_n \nabla k(\cdot - \gamma_n) \cdot \beta) \\ &\quad - (\partial_t v - \nu \Delta v - g'(u^*)v + bk(\cdot - \gamma^*)v - bu^* \nabla k(\cdot - \gamma^*) \cdot \beta)\|_{L^2(Q)} \\ &= \|b(k(\cdot - \gamma_n) - k(\cdot - \gamma^*))v + (g'(u^*)v - g'(u_n)v) - b(u_n \nabla k(\cdot - \gamma_n) + u^* \nabla k(\cdot - \gamma^*)) \cdot \beta\|_{L^2(Q)} \\ &\leq b\|(k(\cdot - \gamma_n) - k(\cdot - \gamma^*))v\|_{L^2(Q)} + \|g'(u^*) - g'(u_n)\| \|v\|_{L^4(Q)} \\ &\quad + b\|(u_n \nabla k(\cdot - \gamma_n) - u^* \nabla k(\cdot - \gamma^*)) \cdot \beta\|_{L^2(Q)}. \end{aligned}$$

Agora, temos que

$$\|g'(u^*)v - g'(u_n)v\|_{L^2(Q)} = \left\| av - \frac{2a}{M}u^*v - \left(av - \frac{2a}{M}u_nv \right) \right\|_{L^2(Q)} \leq \frac{2a}{M} \|u^* - u_n\|_{L^4(Q)} \|v\|_{L^4(Q)}.$$

Portanto,

$$\|g'(u^*) - g'(u_n)\| \leq \frac{2a}{M} \|u^* - u_n\|_{L^4(Q)}.$$

Pelas hipóteses sobre k e o Lema 4.2.1, vem

$$k(x - \gamma_n) \rightarrow k(x - \gamma^*) \quad \text{uniformemente em } [0, T] \times \mathbb{R}^2,$$

ou seja, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2, t \in [0, T]} |k(x - \gamma_n(t)) - k(x - \gamma^*(t))| < \epsilon$$

para todo $n \geq n_0$. Assim,

$$\|(k(\cdot - \gamma_n) - k(\cdot - \gamma^*))v\|_{L^2(Q)} \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^2, t \in [0, T]} |k(x - \gamma_n(t)) - k(x - \gamma^*(t))| \|v\|_{L^2(Q)} < \epsilon \|v\|_{L^2(Q)}.$$

Notemos também que pelo Lema 4.2.1 aplicado a ∇k , existe uma constante $C > 0$ tal que, $|\nabla k(x - \gamma_n)| \leq C$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e

$$\nabla k(x - \gamma_n) \rightarrow \nabla k(x - \gamma^*) \quad \text{uniformemente em } [0, T] \times \mathbb{R}^2,$$

ou seja, dado $\epsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2, t \in [0, T]} |\nabla k(x - \gamma_n(t)) - \nabla k(x - \gamma^*(t))| < \epsilon,$$

para todo $n \geq n_1$.

Também existe n_2 tal que

$$\|u_n - u^*\|_{L^2(Q)} < \epsilon \quad \text{e} \quad \|u_n - u^*\|_{L^4(Q)} < \epsilon,$$

para todo $n \geq n_2$, pois $W_2^{2,1}(Q)$ está imerso continuamente em $L^q(Q)$, para todo $q \geq 1$ e $u_n \rightarrow u^*$ em $W_2^{2,1}(Q)$.

Tomando $n_3 = \max\{n_1, n_2\}$ e aplicando a continuidade da imersão $H^1(0, T) \hookrightarrow C([0, T])$, obtemos para $n \geq n_3$ que

$$\begin{aligned} & \|u_n \nabla k(\cdot - \gamma_n) \cdot \beta - u^* \nabla k(\cdot - \gamma^*) \cdot \beta\|_{L^2(Q)} \\ & \leq \max_{0 \leq t \leq T} |\beta(t)| \|u_n \nabla k(\cdot - \gamma_n) - u^* \nabla k(\cdot - \gamma^*)\|_{L^2(Q)} \\ & = \max_{0 \leq t \leq T} |\beta(t)| \|u_n \nabla k(\cdot - \gamma_n) - u^* \nabla k(\cdot - \gamma_n) + u^* \nabla k(\cdot - \gamma_n) - u^* \nabla k(\cdot - \gamma^*)\|_{L^2(Q)} \\ & \leq \max_{0 \leq t \leq T} |\beta(t)| \|\nabla k(\cdot - \gamma_n)(u_n - u^*)\|_{L^2(Q)} \\ & \quad + b \max_{0 \leq t \leq T} |\beta(t)| \|u^*(\nabla k(\cdot - \gamma_n) - \nabla k(\cdot - \gamma^*))\|_{L^2(Q)} \\ & \leq \max_{0 \leq t \leq T} |\beta(t)| \|\nabla k(\cdot - \gamma_n)(u_n - u^*)\|_{L^2(Q)} \\ & \quad + \max_{0 \leq t \leq T} |\beta(t)| \sup_{x \in \mathbb{R}^2, t \in [0, T]} |\nabla k(x - \gamma_n(t)) - \nabla k(x - \gamma^*(t))| \|u^*\|_{L^2(Q)} \\ & \leq \max_{0 \leq t \leq T} |\beta(t)| C \|u_n - u^*\|_{L^2(Q)} + \max_{0 \leq t \leq T} |\beta(t)| \epsilon \|u^*\|_{L^2(Q)} \\ & < \epsilon (C + \|u^*\|_{L^2(Q)}) \max_{0 \leq t \leq T} |\beta(t)| \\ & \leq \epsilon (C + \|u^*\|_{L^2(Q)}) C_1 \|\beta\|_{(H^1(0, T))^2} = \epsilon C_2 \|\beta\|_{(H^1(0, T))^2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\mathcal{M}_1(\gamma_n, u_n) - \mathcal{M}_1(\gamma^*, u^*)\|_{L^2(Q)} \leq \epsilon \left(\|v\|_{L^2(Q)} + \frac{2a}{M} \|v\|_{L^4(Q)} + C_2 \|\beta\|_{(H^1(0, T))^2} \right),$$

para todo $n \geq n_3$.

Para provar a continuidade de $\mathcal{M}_2$ em (γ^*, u^*) , consideremos novamente $(\gamma_n, u_n) \in \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q)$ tal que $(\gamma_n, u_n) \rightarrow (\gamma^*, u^*)$ fortemente em $\mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q)$. Segue da definição de $\mathcal{M}_2$ que

$$\|\mathcal{M}_2(\gamma_n, u_n) - \mathcal{M}_2(\gamma^*, u^*)\|_{X^\alpha} = \|v(0) - v(0)\|_{X^\alpha} = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} & \|\nabla_G \mathcal{M}(\gamma_n, u_n)(\beta, v) - \nabla_G \mathcal{M}(\gamma^*, u^*)(\beta, v)\|_{L^2(Q) \times X^\alpha} \\ &= \|(\mathcal{M}_1(\gamma_n, u_n), \mathcal{M}_2(\gamma_n, u_n)) - (\mathcal{M}_1(\gamma^*, u^*), \mathcal{M}_2(\gamma^*, u^*))\|_{L^2(Q) \times X^\alpha} \\ &= \|\mathcal{M}_1(\gamma_n, u_n) - \mathcal{M}_1(\gamma^*, u^*)\|_{L^2(Q)} + \|\mathcal{M}_2(\gamma_n, u_n) - \mathcal{M}_2(\gamma^*, u^*)\|_{X^\alpha} \\ &= \|\mathcal{M}_1(\gamma_n, u_n) - \mathcal{M}_1(\gamma^*, u^*)\|_{L^2(Q)} \\ &\leq \epsilon(\|v\|_{L^2(Q)} + \frac{2a}{M}\|v\|_{L^4(Q)} + C_2\|\beta\|_{(H^1(0,T))^2}), \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_3$. Portanto, obtemos que

$$\begin{aligned} & \|\nabla_G \mathcal{M}(\gamma_n, u_n) - \nabla_G \mathcal{M}(\gamma^*, u^*)\| \\ &= \sup\{\|\nabla_G \mathcal{M}(\gamma_n, u_n)(\beta, v) - \nabla_G \mathcal{M}(\gamma^*, u^*)(\beta, v)\|_{L^2(Q) \times X^\alpha}, \|(\beta, v)\|_{(H^1(0,T))^2 \times W_2^{2,1}(Q)} \leq 1\} \\ &\leq \epsilon \sup\left\{\|v\|_{L^2(Q)} + \frac{2a}{M}\|v\|_{L^4(Q)} + C_2\|\beta\|_{(H^1(0,T))^2}, \|(\beta, v)\|_{(H^1(0,T))^2 \times L^4(Q)} \leq 1\right\} \\ &\leq \epsilon \left(1 + \frac{2a}{M} + C_2\right). \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_3$. Assim, concluímos que

$$\nabla_G \mathcal{M}(\gamma_n, u_n) \rightarrow \nabla_G \mathcal{M}(\gamma^*, u^*),$$

ou seja, a aplicação $(\beta, v) \mapsto \nabla_G \mathcal{M}(\beta, v)$ é contínua em (γ^*, u^*) . Logo, $\mathcal{M}(\cdot, \cdot) : \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q) \rightarrow L^2(Q) \times X^\alpha$ é estritamente diferenciável em (γ^*, u^*) .

Agora, provaremos que $\nabla_G \mathcal{M}(\gamma^*, u^*)$ é um operador sobrejetor.

Dados $(\varphi_1, \varphi_2) \in L^2(Q) \times X^\alpha$ e $\beta \in \mathcal{A}$, consideremos $(\beta, v) \in \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q)$ a única solução da equação (4.14) com $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) = (\varphi_1, \varphi_2)$, obtida pela aplicação do Teorema 4.1.1. Logo,

$$\nabla_G \mathcal{M}(\gamma^*, u^*)(\beta, v) = (\varphi_1, \varphi_2).$$

Portanto, $\nabla_G \mathcal{M}(\gamma^*, u^*)$ é sobrejetor. Isso conclui a demonstração do lema. ■

Lema 4.2.4. *O cone tangente ao conjunto*

$$W = \{(\beta, v) \in \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q); \mathcal{M}(\beta, v) = 0\},$$

no ponto $(\gamma^*, u^*) \in \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q)$ é o subespaço vetorial dado por

$$T_{(\gamma^*, u^*)}(W) = \{(\gamma, u) \in \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q); \nabla_G \mathcal{M}(\gamma^*, u^*)(\gamma, u) = 0\}$$

e seu cone dual é dado por

$$[T_{(\gamma^*, u^*)}(W)]^* = \{g_2 \in [\mathcal{A}]' \times [W_2^{2,1}(Q)]'; g_2(\gamma, u) = 0, \forall (\gamma, u) \in T_{(\gamma^*, u^*)}(W)\}.$$

Demonstração: A demonstração segue do Lema 4.2.3 e do Teorema de Lyusternick (Teorema 2.5.4), junto com o Teorema 2.5.5. ■

4.2.3 Aplicação do Formalismo de Dubovitskii e Milyutin

Nesta seção, provaremos o teorema principal deste capítulo. Este teorema fornece as condições necessárias de otimalidade para uma solução ótima do problema (4.6).

Teorema 4.2.2. *Seja $(\gamma^*, u^*) \in \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q)$ uma solução ótima do problema (4.6), então existe uma função $p^* \in W_2^{2,1}(Q)$ tais que: (γ^*, u^*) satisfaz*

$$\begin{cases} \partial_t u^* - \nu \Delta u^* = a u^* - \frac{a}{M} u^{*2} - b k(x - \gamma^*) u^* & \text{em } Q = \Omega \times (0, T], \\ (\partial/\partial\eta)(u^*) = 0 & \text{em } S = \partial\Omega \times (0, T], \\ u^*(0) = u_0(x) & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

p^* é solução do problema adjunto, ou seja,

$$\begin{cases} -\partial_t p^* - \nu \Delta p^* = g'(u^*) p^* - b k(x - \gamma^*) p^* - u^* & \text{em } Q = \Omega \times (0, T], \\ (\partial/\partial\eta)(p^*) = 0 & \text{em } S = \partial\Omega \times (0, T], \\ p^*(T) = 0 & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

onde $g'(u^*) p^* = a p^* - \frac{a}{M} u^* p^*$. Além disso, o controle γ^* satisfaz o sistema de equações integro-diferenciais definido por

$$\begin{cases} -\mu_1 \gamma^{*''} + \mu_0 \gamma^* - \mu_2 b \int_{\Omega} p^* u^* \nabla k(x - \gamma^*) dx = 0 & \text{em } (0, T), \\ \gamma^*(0) = 0, \\ \gamma^{*'}(T) = 0, \end{cases}$$

no sentido fraco que será dado em (4.18).

Demonstração: Primeiramente observamos que a existência de uma solução ótima $(\gamma^*, u^*) \in \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q)$ para o problema (4.6) é garantida pelo Teorema 4.2.1.

Agora, segue do teorema de Dubovitskii e Milyutin (veja Teorema 2.5.1) que existem funcionais lineares e contínuos $g_1 \in [C_J(\gamma^*, u^*)]^*$ e $g_2 \in [T_{(\gamma^*, u^*)}(W)]^*$, não simultaneamente nulos, tais que vale a equação de Euler-Lagrange

$$g_1 + g_2 = 0. \quad (4.16)$$

Sabemos que para algum $\lambda_1 \geq 0$,

$$\begin{aligned} g_2(\beta, v) &= -g_1(\beta, v) = \lambda_1 J'(\gamma^*, u^*)(\beta, v) \\ &= 2\lambda_1 \left(\mu_0 \int_0^T \gamma^* \cdot \beta dt + \mu_1 \int_0^T \gamma^{*'} \cdot \beta' dt + \mu_2 \int_0^T \int_{\Omega} u^* v dx dt \right), \end{aligned}$$

para todo $(\beta, v) \in \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q)$ (ver Lema 4.2.2).

Vejamos que $\lambda_1 > 0$. De fato, se $\lambda_1 = 0$ temos que $g_1 \equiv 0$ e da equação (4.16) deduzimos que $g_2 \equiv 0$, o que contradiz o teorema de Dubovitskii e Milyutin. Portanto, $\lambda_1 > 0$.

Seja $\gamma \in \mathcal{A}$ um controle arbitrário e tome w a solução da equação linear dada por

$$\begin{cases} \partial_t w - \nu \Delta w = g'(u^*) w - b k(x - \gamma^*) w + b \nabla k(x - \gamma^*) \cdot \gamma u^* & \text{em } Q = \Omega \times (0, T], \\ (\partial/\partial \eta)(w) = 0 & \text{em } S = \partial\Omega \times (0, T], \\ w(0) = 0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (4.17)$$

onde $g'(u^*)w = aw - \frac{2a}{M}u^*w$. Neste caso, temos que $(\gamma, w) \in T_{(\gamma^*, u^*)}(W)$ e consequentemente $g_2(\gamma, w) = 0$.

Agora, segue da equação (4.16) que

$$\begin{aligned} g_1(\gamma, w) &= -\lambda_1 J'(\gamma^*, u^*)(\gamma, w) = \\ &= -2\lambda_1 \left(\mu_0 \int_0^T \gamma^* \cdot \gamma dt + \mu_1 \int_0^T \gamma^{*'} \cdot \gamma' dt + \mu_2 \int_0^T \int_{\Omega} u^* w dx dt \right) = 0. \end{aligned}$$

Como $\lambda_1 > 0$, obtemos que

$$\mu_0 \int_0^T \gamma^* \cdot \gamma dt + \mu_1 \int_0^T \gamma^{*'} \cdot \gamma' dt + \mu_2 \int_0^T \int_{\Omega} u^* w dx dt = 0,$$

para todo $(\gamma, w) \in \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q)$, com w solução de (4.17).

Notemos que, para cada $u \in L^4(Q)$, o operador linear $g'(u) : L^4(Q) \rightarrow L^2(Q)$, definida por $g'(u)v = av - \frac{a}{M}uv$, é tal que

$$(g'(u)v_1, v_2)_{L^2(Q)} = \int_Q (av_1 - \frac{a}{M}uv_1)v_2 dx dt = \int_Q v_1(av_2 - \frac{a}{M}uv_2) dx dt = (v_1, g'(u)v_2)_{L^2(Q)},$$

para todo $v_1, v_2 \in L^4(Q)$.

Consideremos p^* a variável de co-estado, solução da equação adjunta á equação (4.17) (notemos que esta solução existe pelo Teorema 5.1.2), definida por

$$\begin{cases} -\partial_t p - \nu \Delta p = g'(u^*)p - b k(x - \gamma^*)p - u^* & \text{em } Q = \Omega \times (0, T], \\ (\partial/\partial\eta)(p) = 0 & \text{em } S = \partial\Omega \times (0, T], \\ p(T) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Daí, obtemos que

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} u^* w dx dt &= - \int_0^T \int_{\Omega} (-u^*) w dx dt \\ &= - \int_0^T \int_{\Omega} [-\partial_t p^* - \nu \Delta p^* - g'(u^*)p^* + b k(x - \gamma^*)p^*] w dx dt \\ &= - \int_0^T \int_{\Omega} p^* [\partial_t w - \nu \Delta w - g'(u^*)w + b k(x - \gamma^*)w] dx dt \\ &= - \int_0^T \int_{\Omega} b p^* u^* \nabla k(x - \gamma^*) \cdot \gamma dx dt. \end{aligned}$$

Assim, concluimos que

$$\mu_0 \int_0^T \gamma^* \cdot \gamma dt + \mu_1 \int_0^T \gamma^{*'} \cdot \gamma' dt - \mu_2 b \int_0^T \int_{\Omega} p^* u^* \nabla k(x - \gamma^*) \cdot \gamma dx dt = 0, \quad (4.18)$$

para todo $\gamma \in \mathcal{A}$.

Em particular, para todo $\gamma \in (\mathcal{D}(0, T))^2 \subset \mathcal{A}$ vem

$$\left\langle \gamma^{*''}, \gamma \right\rangle_{(\mathcal{D}'(0, T))^2, (\mathcal{D}(0, T))^2} = - \left\langle \gamma^{*'}, \gamma' \right\rangle_{(\mathcal{D}'(0, T))^2, (\mathcal{D}(0, T))^2} = - \int_0^T \gamma^{*'} \gamma' dt.$$

Portanto, restringindo (4.18) a $(\mathcal{D}(0, T))^2$, obtemos no sentido de distribuição que

$$\left\langle \mu_0 \gamma^* - \mu_1 \gamma^{*''} - \mu_2 b \int_{\Omega} p^* u^* \nabla k(x - \gamma^*) dx, \gamma \right\rangle_{(\mathcal{D}'(0, T))^2, (\mathcal{D}(0, T))^2} = 0, \quad \forall \gamma \in (\mathcal{D}(0, T))^2.$$

Logo, obtemos em particular que

$$\mu_0 \gamma^*(t) - \mu_1 \gamma^{*''}(t) - \mu_2 b \int_{\Omega} p^* u^* k'(x - \gamma^*(t)) dx = 0, \quad (4.19)$$

no sentido de distribuição.

Agora, obteremos as condições de contorno para o problema. Segue dos resultados anteriores que

$$\gamma^*(0) = 0, \quad (4.20)$$

pois $\gamma^* \in \mathcal{A}$.

Temos também que

$$\gamma^{*'}(T) = 0 \quad (4.21)$$

no sentido fraco. De fato, se γ^* tivesse mais regularidade de tal forma que $\gamma^{*''}$ fosse integrável, usando integração por partes teríamos que

$$\int_0^T \gamma^{*'}(t) \gamma'(t) dt = \gamma^{*'}(T) \gamma(T) - \int_0^T \gamma^{*''}(t) \gamma(t) dt.$$

De (4.18), vem

$$\left(\mu_0 \gamma^* - \mu_1 \gamma^{*''} - \mu_2 b \int_{\Omega} p^* u^* \nabla k(x - \gamma^*) dx, \gamma \right)_{(L^2(0, T))^2} + \mu_1 \gamma^{*'}(T) \gamma(T) = 0, \quad (4.22)$$

para todo $\gamma \in \mathcal{A}$.

Agora, por (4.19) obtemos que

$$\mu_1 \gamma^{*'}(T) \gamma(T) = 0, \quad \forall \gamma \in \mathcal{A}.$$

Como para $\gamma \in \mathcal{A}$ arbitrário, $\gamma(T)$ não é necessariamente nulo, segue que $\gamma^{*'}(T) = 0$.

De (4.19), (4.20) e (4.21) segue o teorema. ■

Capítulo 5

Problema de Controle Ótimo com Não-Linearidade Mais Geral

Neste capítulo, trataremos do problema de controle ótimo sobre uma equação diferencial parcial semilinear, com uma não-linearidade abstrata, que modela um problema matemático de controle de população de mosquitos. Novamente, vamos transformar o problema de controle em um problema de otimização abstrato, para, em seguida, mostrar a existência de solução ótima e as condições necessárias de otimalidade via o formalismo de Dubovitskii e Milyutin.

5.1 Formulação Matemática do Problema

Ao longo deste capítulo consideraremos Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^2$, com fronteira $\partial\Omega$ pelo menos de classe C^3 e uma constante $0 < T < +\infty$. Denotaremos o conjunto dos **controles admissíveis**, o mesmo da Definição 4.1.1.

Consideremos o funcional $J : \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$J(\gamma, u) = \mu_0 \int_0^T |\gamma(t)|^2 dt + \mu_1 \int_0^T |\gamma'(t)|^2 dt + \mu_2 \int_0^T \int_{\Omega} |u(x, t)|^2 dx dt, \quad (5.1)$$

onde $\mu_0 \geq 0, \mu_1 > 0, \mu_2 > 0$ são constantes, γ é o controle que atua na equação e $u(x, t)$ é o estado tomado como solução da seguinte equação diferencial parcial que governa a população

de mosquitos:

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu \Delta u = g(x, t, u) - bk(x - \gamma(t))u & \text{em } Q = \Omega \times (0, T), \\ (\partial/\partial\eta)(u) = 0 & \text{em } S = \partial\Omega \times (0, T), \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (5.2)$$

onde ν, a, M e b são constantes positivas.

O problema de controle ótimo que estudaremos neste capítulo é o de encontrar uma par $(\gamma^*, u^*) \in \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q)$ tal que, (γ^*, u^*) seja um mínimo do funcional (5.1) sujeito a (5.2).

A seguir, apresentaremos os teoremas que justificam a existência e unicidade de solução das equações de estado e co-estado. As demonstrações dos mesmos seguem diretamente do Teorema 3.2.2.

Teorema 5.1.1. *Dadas as funções g satisfazendo **(H1)** – **(H3)**, $k \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R})$ tal que $0 \leq k(\cdot) \leq 1$, $u_0 \in X^\alpha$, com $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ e satisfazendo $0 \leq u_0 \leq M$ e $\gamma \in (H^1(0, T))^2$. Além disso, $\nu > 0$, $a > 0$ e $b > 0$ são constantes e Ω é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2 . Então existe uma única solução $u \in W_2^{2,1}(Q)$ do problema (5.2) satisfazendo, $0 \leq u(t) \leq M$ e a seguinte estimativa*

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq \widetilde{M}_1(1 + \|u_0\|_\alpha),$$

com $\widetilde{M}_1$ uma constante que depende apenas de T, ν, b, M e $|\Omega|$.

O seguinte teorema da teoria L^p (clássica) para equações diferenciais parciais parabólicas lineares com condições de Neumann na fronteira (Ladyzenskaja [19]; Teorema 9.1, p.341, o qual vale para condições de Dirichlet, devidamente modificado pela observação ao final da Seção 9 do Capítulo 4 para a condição de Neumann) em conjunto com a teoria de operadores de Nemytskii dados na Seção 1.3, justifica a existência e unicidade de solução para a equação de co-estado.

Teorema 5.1.2. *Sob as mesmas hipóteses do Teorema 5.1.1, sendo $\beta \in (H^1(0, T))^2$ e*

$v \in L^{2r}(Q)$ dadas, existe uma única solução $p \in W_2^{2,1}(Q)$ para a equação

$$\begin{cases} -\partial_t p - \nu \Delta p = g_u(x, t, v) p - b k(x - \beta) p - v & \text{em } Q = \Omega \times (0, T], \\ (\partial/\partial\eta)(p) = 0 & \text{em } S = \partial\Omega \times (0, T], \\ p(T) = 0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (5.3)$$

onde $|g_u(x, t, v)| \leq C(1 + |v|^r)$, $\forall v$. Além disso, vale a seguinte estimativa

$$\|p\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq \widetilde{M}_2 \|v\|_{L^{2r}(Q)}$$

com $\widetilde{M}_2$ uma constante que depende apenas de T, ν, a, M, b e $|\Omega|$.

5.2 Formulação como Problema de Otimização e Resultados

O problema de controle anunciado anteriormente pode ser equivalentemente representado pelo problema de otimização definido por

$$\min_{(\gamma, u) \in \mathcal{U}_{ad}} J(\gamma, u), \quad (5.4)$$

onde $\mathcal{U}_{ad}$ é definido a seguir.

Definição 5.2.1. Fixado $u_0 \in X^\alpha$, o conjunto admissível $\mathcal{U}_{ad}$ é dado por uma restrição de igualdade definida por

$$\mathcal{U}_{ad} = \{(\gamma, u) \in \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q); M_g(\gamma, u) = 0\},$$

com $M_g : \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q) \rightarrow L^2(Q) \times X^\alpha$, o operador definido de tal forma que $M_g(\gamma, u) = (\psi, \varphi)$, se (ψ, φ) satisfaz a equação definida por

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu \Delta u - g(x, t, u) + b k(x - \gamma(t)) u = \psi & \text{em } Q = \Omega \times (0, T], \\ (\partial/\partial\eta)(u) = 0 & \text{em } S = \partial\Omega \times (0, T], \\ u(x, 0) - u_0(x) = \varphi & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (5.5)$$

Definição 5.2.2. $(\gamma, u) \in \mathcal{U}_{ad}$ é chamado uma **solução ótima (local)** de (5.4), se existir $\epsilon > 0$ tal que

$$J(\gamma, u) \leq J(\beta, v),$$

para todo $(\beta, v) \in \mathcal{U}_{ad}$ satisfazendo

$$\|\beta - \gamma\|_{(H^1(0,T))^2} + \|v - u\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq \epsilon.$$

Observação 5.2.1. O resultado do Lema 4.2.1 ainda continua válido.

5.2.1 Existência de Controle Ótimo

Nesta seção, provaremos que o problema (5.4) tem solução. Para isso, tomaremos uma sequência minimizante $((\gamma_n, u_n))_{n=1}^\infty$ associada ao problema (5.4) e, aplicando alguns resultados auxiliares descritos no Capítulo 2, mostraremos que essa sequência admite uma subsequência convergente para um limite (γ^*, u^*) que será uma solução ótima do problema (5.4).

Teorema 5.2.1. *Sob as hipóteses do Teorema 5.1.1, o problema (5.4) possui uma solução.*

A demonstração deste teorema segue as mesmas linhas da demonstração do Teorema 4.2.1, por isso algumas partes vão ser omitidas por serem análogas.

Demonstração do Teorema 5.2.1: $\mathcal{U}_{ad} \neq \emptyset$. De fato, dado $\xi \in \mathcal{A}$, segue do Teorema 5.1.1 a existência de uma única solução $z \in W_2^{2,1}(Q)$ para a equação (5.2), em particular $M_g(\xi, z) = 0$. Temos que

$$J(\xi, z) = \mu_0 \int_0^T |\xi(t)|^2 dt + \mu_1 \int_0^T |\xi'(t)|^2 dt + \mu_2 \int_0^T \int_\Omega |z(x, t)|^2 dx dt. \quad (5.6)$$

Agora, tomando $C = \max\{\mu_0, \mu_1, \mu_2\} > 0$, obtemos

$$J(\xi, z) \leq C(\|\xi\|_{(H^1(0,T))^2}^2 + \|z\|_{L^2(Q)}^2) < \infty.$$

Logo, $(\xi, z) \in \mathcal{U}_{ad}$. Assim $\mathcal{U}_{ad} \neq \emptyset$.

Consideremos agora uma sequência $((\gamma_n, u_n))_{n=1}^\infty \subset \mathcal{U}_{ad}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(\gamma_n, u_n) = \inf_{(\gamma, u) \in \mathcal{U}_{ad}} J(\gamma, u),$$

isto é, uma sequência minimizante.

Logo, existe uma constante $C_0 > 0$ tal que

$$0 \leq J(\gamma_n, u_n) \leq C_0,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, segue da definição de $J(.,.)$ que

$$J(\gamma_n, u_n) = \mu_0 \int_0^T |\gamma_n(t)|^2 dt + \mu_1 \int_0^T |\gamma'_n(t)|^2 dt + \mu_2 \int_0^T \int_\Omega |u_n(x, t)|^2 dx dt \leq C_0$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Assim, concluímos que

$$\|\gamma_n\|_{(H^1(0, T))^2}^2 \leq \frac{C_0}{\mu_1} \quad (5.7)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, como a imersão $H^1(0, T) \hookrightarrow C([0, T])$ é contínua e compacta e $H^1(0, T)$ é reflexivo, existe $\gamma^* \in (H^1(0, T))^2$ e uma subsequência, que continuaremos denotando por $(\gamma_n)_{n=1}^\infty$, tal que

$$\gamma_n \rightarrow \gamma^* \text{ fortemente em } (C([0, T]))^2$$

e

$$\gamma_n \rightharpoonup \gamma^* \text{ fracamente em } (H^1(0, T))^2.$$

Além disso, para cada $n \in \mathbb{N}$, $(\gamma_n, u_n) \in \mathcal{U}_{ad}$, em particular $M_g(\gamma_n, u_n) = 0$. Também segue do Teorema 5.1.1 que existe uma constante $C_2 > 0$ tal que

$$\|u_n\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C_2,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Agora, aplicando o resultado de imersão dado pela Observação 2.1.1 obtemos que, a imersão $W_2^{2,1}(Q) \hookrightarrow L^2(Q)$ é compacta e mais, da reflexividade de $W_2^{2,1}(Q)$, podemos extrair uma subsequência, que continuaremos denotando por $(u_n)_{n=1}^\infty$, tal que

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u^* \text{ fracamente em } W_2^{2,1}(Q); \\ u_n &\rightarrow u^* \text{ fortemente em } L^2(Q). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Temos que $\gamma^* \in \mathcal{A}$, pois para cada $n \in \mathbb{N}$, $\gamma_n(0) = 0$ e $\gamma_n \rightarrow \gamma^*$ em $(C([0, T]))^2$. Logo,

$$\gamma^*(0) = 0.$$

Provemos agora que $M_g(\gamma^*, u^*) = 0$. Sabemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $M_g(\gamma_n, u_n) = 0$, ou seja,

$$\begin{cases} \partial_t u_n - \nu \Delta u_n = g(x, t, u_n) - bk(x - \gamma_n(t))u_n & \text{em } Q = \Omega \times (0, T], \\ (\partial/\partial\eta)(u_n) = 0 & \text{em } S = \partial\Omega \times (0, T], \\ u_n(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Agora, como a sequência $(u_n)_{n=1}^\infty$ é limitada em $W_2^{2,1}(Q)$, resulta que

$$\|u_n\|_{L^2(Q)} + \|D_x u_n\|_{L^2(Q)} + \|D_x^2 u_n\|_{L^2(Q)} + \|\partial_t u_n\|_{L^2(Q)} \leq C_0.$$

Logo, obtemos que

$$\partial_t u_n \text{ é limitada em } L^2(0, T; L^2(\Omega)),$$

$$\Delta u_n \text{ é limitada em } L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Agora, da reflexividade de $L^2(0, T; L^2(\Omega))$, e a compacidade da imersão $W_2^{2,1}(Q) \hookrightarrow L^p(Q)$, $p \geq 1$, podemos extrair uma subsequência, que continuaremos denotando por $(u_n)_{n=1}^\infty$, tal que

$$\partial_t u_n \rightharpoonup u_1 \text{ fracamente em } L^2(0, T; L^2(\Omega)),$$

$$\Delta u_n \rightharpoonup u_2 \text{ fracamente em } L^2(0, T; L^2(\Omega)),$$

$$u_n \rightarrow u^* \text{ em } L^4(0, T; L^4(\Omega)) \text{ fortemente e quase sempre em } Q.$$

Além disso,

$$g(x, t, u_n) \rightarrow g(x, t, u^*) \text{ fortemente em } L^2(Q). \quad (5.9)$$

De fato, por **(H3)** e usando a desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned} \int_Q |g(x, t, u_n) - g(x, t, u^*)|^2 dx dt &\leq C_1 \int_Q (1 + |u_n|^{r-1} + |u^*|^{r-1})^2 |u_n - u^*|^2 dx dt \\ &\leq C_1 (1 + \|u_n\|_{L^{4r}(Q)}^{2r} + \|u^*\|_{L^{4r}(Q)}^{2r}) \|u_n - u^*\|_{L^4(Q)}^2 \\ &\leq C_1 (1 + \|u_n\|_{W_2^{2,1}(Q)}^{2r} + \|u^*\|_{W_2^{2,1}(Q)}^{2r}) \|u_n - u^*\|_{L^4(Q)}^2, \end{aligned}$$

de onde segue a afirmação.

Agora, usando as seguintes imersões:

$$L^2(0, T; L^2(\Omega)) \equiv (L^2(0, T; L^2(\Omega)))' \hookrightarrow H^{-1}(0, T; L^2(\Omega)) \hookrightarrow \mathcal{D}'(0, T; L^2(\Omega))$$

e também como $u_n \rightarrow u^*$ fortemente em $L^2(0, T; L^2(\Omega))$, segue que

$$u_n \rightarrow u^* \text{ em } \mathcal{D}'(0, T; L^2(\Omega)).$$

Logo, aplicando a teoria de distribuição, vem

$$\begin{aligned} \partial_t u_n &\rightarrow \partial_t u^* \text{ em } \mathcal{D}'(0, T; L^2(\Omega)), \\ \Delta u_n &\rightarrow \Delta u^* \text{ em } \mathcal{D}'(0, T; L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Mas, da unicidade dos limites obtemos que

$$u_1 = \partial_t u^* \text{ e } u_2 = \Delta u^*.$$

Assim, concluímos que

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u^* \text{ fortemente em } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \\ \partial_t u_n &\rightharpoonup \partial_t u^* \text{ fracamente em } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \\ \Delta u_n &\rightharpoonup \Delta u^* \text{ fracamente em } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Agora provemos que

$$k(x - \gamma_n)u_n \rightharpoonup k(x - \gamma^*)u^* \text{ fracamente em } L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Pelo teorema de representação de Riesz é suficiente provar que

$$\int_0^T \int_{\Omega} k(x - \gamma_n(t))u_n(x, t)\varphi(x, t)dxdt \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} k(x - \gamma^*(t))u^*(x, t)\varphi(x, t)dxdt,$$

para todo $\varphi \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ pois, $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ é um espaço de Hilbert.

Assim, consideremos a sequência de funções, $K_n(., .) : \mathbb{R}^2 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$K_n(x, t) := k(x - \gamma_n(t)).$$

Segue do Lema 4.2.1 que a sequência K_n converge uniformemente para K , ou seja, dado $\epsilon > 0$, existe n_0 tal que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2, t \in [0, T]} |k_n(x - \gamma_n(t)) - k(x - \gamma^*(t))| < \epsilon,$$

para todo $n \geq n_0$. Logo,

$$\begin{aligned} & \left| \int_Q k(x - \gamma_n(t)) u_n(x, t) \varphi(x, t) dx dt - \int_Q k(x - \gamma^*(t)) u^*(x, t) \varphi(x, t) dx dt \right| \\ & \leq \int_Q |k(x - \gamma_n(t)) u_n(x, t) \varphi(x, t) - k(x - \gamma^*(t)) u_n(x, t) \varphi(x, t)| dx dt \\ & \quad + \int_Q |k(x - \gamma^*(t)) u_n(x, t) \varphi(x, t) - k(x - \gamma^*(t)) u^*(x, t) \varphi(x, t)| dx dt \\ & \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^2, t \in [0, T]} |k(x - \gamma_n(t)) - k(x - \gamma^*(t))| \int_Q |u_n(x, t) \varphi(x, t)| dx dt \\ & \quad + \sup_{x \in \mathbb{R}^2, t \in [0, T]} |k(x - \gamma^*(t))| \int_Q |u_n(x, t) - u^*(x, t)| |\varphi(x, t)| dx dt \\ & \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^2, t \in [0, T]} |k(x - \gamma_n(t)) - k(x - \gamma^*(t))| \|u_n\|_{L^2(Q)} \|\varphi\|_{L^2(Q)} \\ & \quad + \sup_{x \in \mathbb{R}^2, t \in [0, T]} |k(x - \gamma^*(t))| \|u_n - u^*\|_{L^2(Q)} \|\varphi\|_{L^2(Q)} \end{aligned}$$

e o resultado segue tomando o limite em n pois, u_n converge fortemente para u^* em $L^2(Q)$ e consequentemente $\|u_n\|_{L^2(Q)}$ é limitada. Assim, concluímos que

$$k(x - \gamma_n) u_n \rightharpoonup k(x - \gamma^*) u^* \quad \text{fracamente em } L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Agora, consideremos a equação definida por

$$\partial_t u_n - \alpha \Delta u_n = g(x, t, u_n) - b k(x - \gamma_n(t)) u_n. \quad (5.10)$$

Resulta dos limites obtidos anteriormente que

$$\partial_t u^* - \alpha \Delta u^* = g(x, t, u^*) - b k(x - \gamma^*(t)) u^*,$$

mediante a passagem ao limite, fracamente em $L^2(0, T; L^2(\Omega))$, na equação (5.10).

Da mesma forma como no Teorema 4.2.1, mostra-se que $(\partial/\partial)(u^*) = 0$ em $S = \partial\Omega \times (0, T]$ e $u^*(0) = u_0$.

Assim, concluímos que u^* é solução de (5.2). Portanto, o ponto (γ^*, u^*) satisfaz $M(\gamma^*, u^*) = 0$ e assim obtemos que $(\gamma^*, u^*) \in \mathcal{U}_{ad}$.

Também temos que o funcional $J : \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q) \rightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$J(\gamma, u) = \mu_0 \|\gamma\|_{L^2(0,T)}^2 + \mu_1 \|\gamma'\|_{L^2(0,T)}^2 + \mu_2 \|u\|_{L^2(Q)}^2,$$

é convexo pois, as funções $\|\cdot\|_{L^2(0,T)}^2 : L^2(0,T) \rightarrow \mathbb{R}$ e $\|\cdot\|_{L^2(Q)}^2 : L^2(Q) \rightarrow \mathbb{R}$ são convexas.

O funcional J é semi-contínuo inferiormente pois, é contínuo. Como já provamos que para uma subsequência apropriada

$$(\gamma_n, u_n) \rightarrow (\gamma^*, u^*) \text{ fracamente em } (H^1(0,T))^2 \times L^2(Q).$$

Segue da Proposição 2.2.3 que

$$J(\gamma^*, u^*) \leq \liminf J(\gamma_n, u_n) = \inf_{(\beta, v) \in \mathcal{U}_{ad}} J(\beta, v).$$

Mais por outro lado, temos

$$\inf_{(\beta, v) \in \mathcal{U}_{ad}} J(\beta, v) \leq J(\gamma^*, u^*).$$

Assim,

$$J(\gamma^*, u^*) = \inf_{(\beta, v) \in \mathcal{U}_{ad}} J(\beta, v),$$

o que demonstra o teorema. ■

Segue da Observação 4.2.2 que $J : \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q) \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional estritamente convexo pois,

$$J(\gamma, u) = \mu_0 \|\gamma\|_{(L^2(0,T))^2}^2 + \mu_1 \|\gamma'\|_{(L^2(0,T))^2}^2 + \mu_2 \|u\|_{L^2(Q)}^2,$$

e $(L^2(0,T))^2$ e $L^2(Q)$ são espaços de Hilbert. Notemos que mesmo o funcional J sendo estritamente convexo, não podemos garantir de imediato a unicidade do controle, uma vez que, nosso conjunto admissível $\mathcal{U}_{ad}$ não é convexo. ■

5.2.2 Cálculo dos Cones Associados

Antes de provarmos o teorema principal deste capítulo apresentaremos alguns resultados fundamentais para a aplicação do formalismo de Dubovitskii e Milyutin.

Primeiramente, vamos verificar que o funcional $J : \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q) \rightarrow \mathbb{R}$ é Fréchet diferenciável em cada ponto (γ^*, u^*) e em qualquer direção (β, v) . Além disso, sua derivada é definida por

$$J'(\gamma^*, u^*)(\beta, v) = 2\mu_0 \int_0^T \gamma^* \cdot \beta dt + 2\mu_1 \int_0^T \gamma^{*'} \cdot \beta' dt + 2\mu_2 \int_0^T \int_{\Omega} u^* v dx dt.$$

Lema 5.2.1. *O cone de direções de descida associado ao funcional $J(.,.) : \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q) \rightarrow \mathbb{R}$, no ponto (γ^*, u^*) é dado por*

$$C_J(\gamma^*, u^*) = \{(\beta, v) \in \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q); J'(\gamma^*, u^*)(\beta, v) < 0\}$$

e seu cone dual é dado por

$$[C_J(\gamma^*, u^*)]^* = \{g \in [\mathcal{A}]' \times [W_2^{2,1}(Q)]'; g(\beta, v) = -\lambda_1 J'(\gamma^*, u^*)(\beta, v), \text{ para algum } \lambda_1 \geq 0\}.$$

Demonstração: Basta aplicar o Corolário 2.5.1 e o Teorema 2.5.6. ■

Lema 5.2.2. (i) *A aplicação $M_g(.,.) : \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q) \rightarrow L^2(Q) \times X^\alpha$ é Gâteaux - diferenciável e a derivada de Gâteaux de M no ponto (γ^*, u^*) e na direção (β, v) é definida por*

$$\nabla_G M_g(\gamma^*, u^*)(\beta, v) = (M_1(\gamma^*, u^*), M_2(\gamma^*, u^*))$$

onde $M_1(\gamma^*, u^*)$ e $M_2(\gamma^*, u^*)$ satisfazem a equação

$$\begin{cases} \partial_t v - \nu \Delta v = g_u(x, t, u^*)v - b k(x - \gamma^*)v + b \nabla k(x - \gamma^*) \cdot \beta u^* + M_1(\gamma^*, u^*) & \text{em } Q, \\ (\partial/\partial \eta)(v) = 0 & \text{em } S = \partial\Omega \times (0, T], \\ v(0) = M_2(\gamma^*, u^*) & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (5.11)$$

onde $g_u(x, t, u^*)v$ é a derivada de Gateaux de g em u^* e na direção v .

(ii) *A aplicação $M_g(.,.)$ é estritamente diferenciável e o operador $\nabla_G M_g(\gamma^*, u^*)$ é sobrejetivo.*

Demonstração:

Primeira etapa: Primeiramente notemos que a aplicação $g(x, t, \cdot) : L^{2r+2}(Q) \rightarrow L^2(Q)$, está bem definida, para cada $(x, t) \in Q$, e é Gâteaux diferenciável.

De fato, g está bem definida pois, segue de **(H2)** e **(H3)** que

$$|g(x, t, z)| \leq C(1 + |z|^r), \quad \forall (x, t) \in Q, \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

Portanto

$$|g(x, t, z)|^2 \leq C(1 + |z|^{2r}), \quad \forall (x, t) \in Q, \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

Como $g(x, t, \cdot) \in C^1(\mathbb{R})$, para $z, h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, temos por **(H3)** que

$$|g(x, t, z + h) - g(x, t, z)| \leq C_0(1 + |z + h|^{r-1} + |z|^{r-1})|h|,$$

de onde podemos concluir que

$$|g_z(x, t, z)| \leq C(1 + |z|^{r-1}) \leq \tilde{C}(1 + |z|^r), \quad \forall (x, t) \in Q, \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

Segue das propriedades do operador de Nemytskii que (veja a Proposição 2.4.3, com $m = r$ e $n = 2 + 2/r$) $N_g : L^{2r+2}(Q) \rightarrow L^2(Q)$ é continuamente Fréchet diferenciável com

$$N'_g : L^{2r+2}(Q) \rightarrow \mathcal{L}(L^{2r+2}(Q), L^2(Q))$$

definido por

$$N'_g(u)(v) = N_{g_u}(u)v(= g_u(x, t, u(x, t))v(x, t)), \quad \forall u, v \in L^{2r+2}(Q).$$

Em particular, isto mostra que $g(x, t, \cdot)$ é Gateaux diferenciável.

Notemos que para $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, com $N = 2$, $W_2^{2,1}(Q)$ está imerso continuamente em $L^q(Q)$, para todo $q \geq 1$. Assim, a solução u^* obtida pelo Teorema 5.2.1 está em $L^{2r+2}(Q)$.

Segunda etapa: Prova do item (i).

Devemos verificar que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left\| \frac{M_g(\gamma^* + h\beta, u^* + hv) - M_g(\gamma^*, u^*)}{h} - (M_1(\gamma^*, u^*), M_2(\gamma^*, u^*)) \right\|_{L^2(Q) \times X^\alpha} = 0.$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{h} [M_g(\gamma^* + h\beta, u^* + hv) - M_g(\gamma^*, u^*)] \\
&= \frac{1}{h} \left[\left(\partial_t(u^* + hv) - \nu \Delta(u^* + hv) - g(x, t, u^* + hv) + bk(x - (\gamma^* + h\beta))(u^* + hv), \right. \right. \\
&\quad \left. \left. (u^* + hv)(0) - u_0 \right) - \left(\partial_t u^* - \nu \Delta u^* - g(x, t, u^*) + bk(x - \gamma^*)u^*, u^*(0) - u_0 \right) \right] \\
&= \left(\partial_t v - \nu \Delta v - \left(\frac{g(x, t, u^* + hv) - g(x, t, u^*)}{h} \right) + b \left(\frac{k(x - (\gamma^* + h\beta)) - k(x - \gamma^*)}{h} \right) u^* \right. \\
&\quad \left. + bk(x - (\gamma^* + h\beta))v, v(0) \right).
\end{aligned}$$

Daí, usando a identidade anterior e (5.11) obtemos que

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{h} [M_g(\gamma^* + h\beta, u^* + hv) - M_g(\gamma^*, u^*)] \\
&= \left[M_1(\gamma^*, u^*) + bk(x - (\gamma^* + h\beta))v - bvk(x - \gamma^*) \right. \\
&\quad \left. + g_u(x, t, u^*)v - \left(\frac{g(x, t, u^* + hv) - g(x, t, u^*)}{h} \right) \right. \\
&\quad \left. + bu^* \left(\frac{k(x - (\gamma^* + h\beta)) - k(x - \gamma^*)}{h} \right) + bu^* \nabla k(x - \gamma^*) \cdot \beta, M_2(\gamma^*, u^*) \right].
\end{aligned}$$

Assim, concluimos que

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{M_g(\gamma^* + h\beta, u^* + hv) - M_g(\gamma^*, u^*)}{h} - (M_1(\gamma^*, u^*), M_2(\gamma^*, u^*)) \right\|_{L^2(Q) \times X^\alpha} \\
&= \|bv[k(x - (\gamma^* + h\beta)) - k(x - \gamma^*)] + g_u(x, t, u^*)v - \left(\frac{g(x, t, u^* + hv) - g(x, t, u^*)}{h} \right) \\
&\quad + bu^* \left[\frac{k(x - (\gamma^* + h\beta)) - k(x - \gamma^*)}{h} + \nabla k(x - \gamma^*) \cdot \beta \right]\|_{L^2(Q)}.
\end{aligned}$$

Agora, das hipóteses sobre $k(\cdot)$ temos o limite pontual dado por

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{k(x - (\gamma^* + h\beta)) - k(x - \gamma^*)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{k(x - \gamma^* + h(-\beta)) - k(x - \gamma^*)}{h} \\
&= \nabla k(x - \gamma^*) \cdot (-\beta) \\
&= -\nabla k(x - \gamma^*) \cdot \beta.
\end{aligned}$$

Assim, vem

$$bu^* \left[\frac{k(x - \gamma^* - h\beta) - k(x - \gamma^*)}{h} + \nabla k(x - \gamma^*) \cdot \beta \right] \rightarrow 0, \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^2.$$

Agora, aplicando o teorema do valor médio, existe $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$k(x - \gamma^* - h\beta) - k(x - \gamma^*) = \nabla k(x - \gamma^* - \theta h\beta) \cdot (-h\beta).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & bu^* \left[\frac{k(x - (\gamma^* + h\beta)) - k(x - \gamma^*)}{h} + \nabla k(x - \gamma^*) \cdot \beta \right] \\ &= bu^* \left[\frac{\nabla k(x - \gamma^* - \theta h\beta) \cdot (-h\beta)}{h} + \nabla k(x - \gamma^*) \cdot \beta \right] \\ &= -bu^* [\nabla k(x - \gamma^* - \theta h\beta) \cdot \beta - \nabla k(x - \gamma^*) \cdot \beta]. \end{aligned}$$

Como por hipótese $\nabla k \in (C^0(\Omega))^2$, se segue do Lema 4.2.1 aplicado à função ∇k que existe uma constante N_1 tal que

$$|bu^* [\nabla k(x - \gamma^* - \theta h\beta) \cdot \beta - \nabla k(x - \gamma^*) \cdot \beta]| \leq 2bN_1|u^*||\beta|.$$

Notemos ainda que $2bN_1|u^*||\beta| \in L^2(Q)$.

Da mesma forma, concluimos que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} |k(x - \gamma^* - h\beta) - k(x - \gamma^*)| = 0$$

e

$$|k(x - \gamma^* - h\beta) - k(x - \gamma^*)| \leq N_2.$$

Daí, segue que a função $k(x - \gamma^* - h\beta) - k(x - \gamma^*) \in L^2(Q)$ e

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{M_g(\gamma^* + h\beta, u^* + hv) - M_g(\gamma^*, u^*)}{h} - (M_1(\gamma^*, u^*), M_2(\gamma^*, u^*)) \right\|_{L^2(Q) \times H^1(\Omega)} \\ & \leq b \|v[k(x - (\gamma^* + h\beta)) - k(x - \gamma^*)]\|_{L^2(Q)} + \left\| g_u(\cdot, \cdot, u^*)v - \left(\frac{g(\cdot, \cdot, u^* + hv) - g(\cdot, \cdot, u^*)}{h} \right) \right\|_{L^2(Q)} \\ & \quad + b \left\| u^* \left[\frac{k(x - (\gamma^* + h\beta)) - k(x - \gamma^*)}{h} + \nabla k(x - \gamma^*) \cdot \beta \right] \right\|_{L^2(Q)}. \end{aligned}$$

Agora, aplicando o teorema da convergência dominada de Lebesgue e a Gateaux diferenciabilidade de $g(x, t, \cdot)$, temos o resultado desejado para o item (i).

Terceira etapa: Prova do item (ii).

Para provar que a aplicação $M_g : \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q) \rightarrow L^2(Q) \times X^\alpha$ é estritamente diferenciável em (γ^*, u^*) , é suficiente mostrar que a função $(\gamma, u) \rightarrow \nabla_G M_g(\gamma, u)$ é contínua em (γ^*, u^*) e aplicar o item (i) juntamente com o Lema 2.5.1.

Agora, fixemos $(\beta, v) \in \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q)$ arbitrário, tal que

$$\nabla_G M_g(\gamma^*, u^*)(\beta, v) = (M_1(\gamma^*, u^*), M_2(\gamma^*, u^*)).$$

Consideremos o operador

$$M_1 : \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q) \rightarrow L^2(Q),$$

definido por

$$M_1(\gamma^*, u^*) = \partial_t v - \nu \Delta v - g_u(x, t, u^*)v + bk(x - \gamma^*)v - bu^* \nabla k(x - \gamma^*) \cdot \beta.$$

Enquanto que o operador

$$M_2 : \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q) \rightarrow X^\alpha$$

satisfaz

$$M_2(\gamma^*, u^*) = v(0).$$

Esses operadores estão bem definidos e não é difícil verificar que

$$\nabla_G M_g(\gamma^*, u^*)(\cdot, \cdot) : \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q) \rightarrow L^2(Q) \times X^\alpha$$

é um operador linear e contínuo. Agora, provaremos a continuidade de $\nabla_G M_g$ em (γ^*, u^*) .

Consideremos $(\gamma_n, u_n) \in \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q)$ tal que $(\gamma_n, u_n) \rightarrow (\gamma^*, u^*)$ fortemente em $\mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q)$. Temos que

$$\begin{aligned} & \|M_1(\gamma_n, u_n) - M_1(\gamma^*, u^*)\|_{L^2(Q)} \\ &= \|(\partial_t v - \nu \Delta v - g_u(x, t, u_n)v + bk(\cdot - \gamma_n)v - bu_n \nabla k(\cdot - \gamma_n) \cdot \beta) \\ &\quad - (\partial_t v - \nu \Delta v - g_u(x, t, u^*)v + bk(\cdot - \gamma^*)v - bu^* \nabla k(\cdot - \gamma^*) \cdot \beta)\|_{L^2(Q)} \\ &= \|b(k(\cdot - \gamma_n) - k(\cdot - \gamma^*))v + (g_u(x, t, u^*)v - g_u(x, t, u_n)v) - b(u_n \nabla k(\cdot - \gamma_n) \\ &\quad + u^* \nabla k(\cdot - \gamma^*)) \cdot \beta\|_{L^2(Q)} \\ &\leq b\|(k(\cdot - \gamma_n) - k(\cdot - \gamma^*))v\|_{L^2(Q)} + \|g_u(x, t, u^*) - g_u(x, t, u_n)\| \|v\|_{L^{2r}(Q)} \\ &\quad + b\|(u_n \nabla k(\cdot - \gamma_n) - u^* \nabla k(\cdot - \gamma^*)) \cdot \beta\|_{L^2(Q)}. \end{aligned}$$

Agora, segue da Proposição 2.4.1 a continuidade de $g_u(x, t, \cdot) : L^{2r}(Q) \rightarrow L^2(Q)$. Logo, dado $\epsilon > 0$, existe n_1 tal que, para $n > n_1$

$$\|g_u(x, t, u^*) - g_u(x, t, u_n)\| < \epsilon,$$

para $n > n_1$.

Agora, das hipóteses sobre k e o Lema 4.2.1, vem

$$k(x - \gamma_n) \rightarrow k(x - \gamma^*) \text{ uniformemente em } [0, T] \times \mathbb{R}^2,$$

ou seja, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2, t \in [0, T]} |k(x - \gamma_n(t)) - k(x - \gamma^*(t))| < \epsilon$$

para todo $n \geq n_0$. Assim,

$$\|(k(\cdot - \gamma_n) - k(\cdot - \gamma^*))v\|_{L^2(Q)} \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^2, t \in [0, T]} |k(x - \gamma_n(t)) - k(x - \gamma^*(t))| \|v\|_{L^2(Q)} < \epsilon \|v\|_{L^2(Q)}.$$

Notemos também que pelo Lema 4.2.1 aplicado a ∇k , existe uma constante $C > 0$ tal que, $|\nabla k(x - \gamma_n)| \leq C$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e

$$\nabla k(x - \gamma_n) \rightarrow \nabla k(x - \gamma^*) \text{ uniformemente em } [0, T] \times \mathbb{R}^2,$$

ou seja, dado $\epsilon > 0$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2, t \in [0, T]} |\nabla k(x - \gamma_n(t)) - \nabla k(x - \gamma^*(t))| < \epsilon,$$

para todo $n \geq n_2$.

Também existe n_3 tal que

$$\|u_n - u^*\|_{L^2(Q)} < \epsilon,$$

para todo $n \geq n_3$.

Tomando $n_4 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$ e aplicando a continuidade da imersão $H^1(0, T) \hookrightarrow C([0, T])$, obtemos para $n \geq n_4$ que

$$\begin{aligned}
& \|u_n \nabla k(\cdot - \gamma_n) \cdot \beta - u^* \nabla k(\cdot - \gamma^*) \cdot \beta\|_{L^2(Q)} \\
& \leq \max_{0 \leq t \leq T} |\beta(t)| \|u_n \nabla k(\cdot - \gamma_n) - u^* \nabla k(\cdot - \gamma^*)\|_{L^2(Q)} \\
& = \max_{0 \leq t \leq T} |\beta(t)| \|u_n \nabla k(\cdot - \gamma_n) - u^* \nabla k(\cdot - \gamma_n) + u^* \nabla k(\cdot - \gamma_n) - u^* \nabla k(\cdot - \gamma^*)\|_{L^2(Q)} \\
& \leq \max_{0 \leq t \leq T} |\beta(t)| \|\nabla k(\cdot - \gamma_n)(u_n - u^*)\|_{L^2(Q)} \\
& \quad + b \max_{0 \leq t \leq T} |\beta(t)| \|u^*(\nabla k(\cdot - \gamma_n) - \nabla k(\cdot - \gamma^*))\|_{L^2(Q)} \\
& \leq \max_{0 \leq t \leq T} |\beta(t)| \|\nabla k(\cdot - \gamma_n)(u_n - u^*)\|_{L^2(Q)} \\
& \quad + \max_{0 \leq t \leq T} |\beta(t)| \sup_{x \in \mathbb{R}^2, t \in [0, T]} |\nabla k(x - \gamma_n(t)) - \nabla k(x - \gamma^*(t))| \|u^*\|_{L^2(Q)} \\
& \leq \max_{0 \leq t \leq T} |\beta(t)| C \|u_n - u^*\|_{L^2(Q)} + \max_{0 \leq t \leq T} |\beta(t)| \epsilon \|u^*\|_{L^2(Q)} \\
& < \epsilon (C + \|u^*\|_{L^2(Q)}) \max_{0 \leq t \leq T} |\beta(t)| \\
& \leq \epsilon (C + \|u^*\|_{L^2(Q)}) C_1 \|\beta\|_{(H^1(0, T))^2} = \epsilon C_2 \|\beta\|_{(H^1(0, T))^2}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|M_1(\gamma_n, u_n) - M_1(\gamma^*, u^*)\|_{L^2(Q)} \leq \epsilon (\|v\|_{L^2(Q)} + \|v\|_{L^{2r}(Q)} + C_2 \|\beta\|_{(H^1(0, T))^2}),$$

para todo $n \geq n_4$.

Para provar a continuidade de M_2 em (γ^*, u^*) , consideremos $(\gamma_n, u_n) \in \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q)$ tal que $(\gamma_n, u_n) \rightarrow (\gamma^*, u^*)$ fortemente em $\mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q)$. Segue da definição de M_2 que

$$\|M_2(\gamma_n, u_n) - M_2(\gamma^*, u^*)\|_{X^\alpha} = \|v(0) - v(0)\|_{X^\alpha} = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
& \|\nabla_G M_g(\gamma_n, u_n)(\beta, v) - \nabla_G M_g(\gamma^*, u^*)(\beta, v)\|_{L^2(Q) \times X^\alpha} \\
& = \|(M_1(\gamma_n, u_n), M_2(\gamma_n, u_n)) - (M_1(\gamma^*, u^*), M_2(\gamma^*, u^*))\|_{L^2(Q) \times X^\alpha} \\
& = \|M_1(\gamma_n, u_n) - M_1(\gamma^*, u^*)\|_{L^2(Q)} + \|M_2(\gamma_n, u_n) - M_2(\gamma^*, u^*)\|_{X^\alpha} \\
& = \|M_1(\gamma_n, u_n) - M_1(\gamma^*, u^*)\|_{L^2(Q)} \\
& \leq \epsilon (\|v\|_{L^2(Q)} + \|v\|_{W_2^{2,1}(Q)} + C_2 \|\beta\|_{(H^1(0, T))^2}),
\end{aligned}$$

para todo $n \geq n_4$. Portanto, obtemos que

$$\begin{aligned}
& \|\nabla_G M_g(\gamma_n, u_n) - \nabla_G M_g(\gamma^*, u^*)\| \\
&= \sup\{\|\nabla_G M_g(\gamma_n, u_n)(\beta, v) - \nabla_G M_g(\gamma^*, u^*)(\beta, v)\|_{L^2(Q) \times X^\alpha}, \|(\beta, v)\|_{(H^1(0,T))^2 \times W_2^{2,1}(Q)} \leq 1\} \\
&\leq \epsilon \sup\{\|v\|_{L^2(Q)} + \|v\|_{W_2^{2,1}(Q)} + C_2 \|\beta\|_{(H^1(0,T))^2}, \|(\beta, v)\|_{(H^1(0,T))^2 \times W_2^{2,1}(Q)} \leq 1\} \\
&\leq \epsilon(2 + C_2).
\end{aligned}$$

para todo $n \geq n_4$. Assim, concluímos que

$$\nabla_G M_g(\gamma_n, u_n) \rightarrow \nabla_G M_g(\gamma^*, u^*),$$

ou seja, a aplicação $(\beta, v) \mapsto \nabla_G M_g(\beta, v)$ é contínua em (γ^*, u^*) . Logo,

$$M_g(., .) : \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q) \rightarrow L^2(Q) \times X^\alpha$$

é estritamente diferenciável em (γ^*, u^*) .

Agora, provaremos que $\nabla_G M_g(\gamma^*, u^*)$ é um operador sobrejetor. Dados $(\varphi_1, \varphi_2) \in L^2(Q) \times X^\alpha$ e $\beta \in \mathcal{A}$, consideremos $(\beta, v) \in \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q)$ a única solução da equação (4.14) com $(M_1, M_2) = (\varphi_1, \varphi_2)$, obtida pela aplicação do Teorema 5.1.1. Logo,

$$\nabla_G M_g(\gamma^*, u^*)(\beta, v) = (\varphi_1, \varphi_2).$$

Portanto, $\nabla_G M_g(\gamma^*, u^*)$ é sobrejetor. Isso conclui a demonstração do lema. ■

Lema 5.2.3. *O cone tangente ao conjunto*

$$W = \{(\beta, v) \in \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q); M_g(\beta, v) = 0\},$$

no ponto $(\gamma^*, u^*) \in \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q)$ é o subespaço vetorial dado por

$$T_{(\gamma^*, u^*)}(W) = \{(\gamma, u) \in \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q); \nabla_G M_g(\gamma^*, u^*)(\gamma, u) = 0\}$$

e seu cone dual é dado por

$$[T_{(\gamma^*, u^*)}(W)]^* = \{g_2 \in [\mathcal{A}]' \times [W_2^{2,1}(Q)]'; g_2(\gamma, u) = 0, \forall (\gamma, u) \in T_{(\gamma^*, u^*)}(W)\}.$$

Demonstração: A demonstração segue do Lema 5.2.2 e do Teorema de Lyusternick (Teorema 2.5.4), junto com o Teorema 2.5.5. ■

5.2.3 Aplicação do Formalismo de Dubovitskii e Milyutin

Nesta seção, provaremos o teorema principal deste capítulo. Este teorema dá as condições necessárias de otimalidade para uma solução ótima do problema (5.4).

Teorema 5.2.2. *Seja $(\gamma^*, u^*) \in \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q)$ uma solução ótima do problema (5.4), então existe uma função $p^* \in W_2^{2,1}(Q)$ tais que: (γ^*, u^*) satisfaz*

$$\begin{cases} \partial_t u^* - \nu \Delta u^* = g(x, t, u^*) - b k(x - \gamma^*) u^* & \text{em } Q = \Omega \times (0, T], \\ (\partial/\partial\eta)(u^*) = 0 & \text{em } S = \partial\Omega \times (0, T], \\ u^*(0) = u_0(x) & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

p^* é solução do problema adjunto, ou seja,

$$\begin{cases} -\partial_t p^* - \nu \Delta p^* = g_u(x, t, u^*) p^* - b k(x - \gamma^*) p^* - u^* & \text{em } Q = \Omega \times (0, T], \\ (\partial/\partial\eta)(p^*) = 0 & \text{em } S = \partial\Omega \times (0, T], \\ p^*(T) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Além disso, o controle γ^* satisfaz o sistema de equações integro-diferenciais definido por

$$\begin{cases} -\mu_1 \gamma^{*''} + \mu_0 \gamma^* - \mu_2 b \int_{\Omega} p^* u^* \nabla k(x - \gamma^*) dx = 0 & \text{em } (0, T), \\ \gamma^*(0) = 0, \\ \gamma^{*'}(T) = 0, \end{cases}$$

no sentido fraco que será dado em (5.14).

Demonstração: Primeiramente observamos que a existência de uma solução ótima $(\gamma^*, u^*) \in \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q)$ para o problema (5.4) é obtida pelo Teorema 5.2.1.

Agora, segue do teorema de Dubovitskii e Milyutin (veja Teorema 2.5.1) que existem funcionais lineares e contínuos $g_1 \in [C_J(\gamma^*, u^*)]^*$ e $g_2 \in [T_{(\gamma^*, u^*)}(W)]^*$, não simultaneamente nulos, tais que vale a equação de Euler-Lagrange

$$g_1 + g_2 = 0. \quad (5.12)$$

Sabemos que para algum $\lambda_1 \geq 0$,

$$\begin{aligned}
g_2(\beta, v) &= -g_1(\beta, v) = \lambda_1 J'(\gamma^*, u^*)(\beta, v) \\
&= 2\lambda_1 \left(\mu_0 \int_0^T \gamma^* \cdot \beta dt + \mu_1 \int_0^T \gamma^{*'} \cdot \beta' dt + \mu_2 \int_0^T \int_{\Omega} u^* v dx dt \right),
\end{aligned}$$

para todo $(\beta, v) \in \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q)$.

Vejam os que $\lambda_1 > 0$. De fato, se $\lambda_1 = 0$ temos que $g_1 \equiv 0$ e da equação (5.12) deduzimos que $g_2 \equiv 0$, o que contradiz o teorema de Dubovitskii e Milyutin. Portanto, $\lambda_1 > 0$.

Seja $\gamma \in \mathcal{A}$ um controle arbitrário e tome w a solução da equação linear dada por

$$\begin{cases} \partial_t w - \nu \Delta w = g_u(x, t, u^*) w - b k(x - \gamma^*) w + b \nabla k(x - \gamma^*) \cdot \gamma u^* & \text{em } Q = \Omega \times (0, T], \\ (\partial/\partial \eta)(w) = 0 & \text{em } S = \partial\Omega \times (0, T], \\ w(0) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (5.13)$$

Neste caso, temos que $(\gamma, w) \in T_{(\gamma^*, u^*)}(W)$ e conseqüentemente $g_2(\gamma, w) = 0$.

Agora, segue da equação (5.12) que

$$\begin{aligned}
g_1(\gamma, w) &= -\lambda_1 J'(\gamma^*, u^*)(\gamma, w) = \\
&= -2\lambda_1 \left(\mu_0 \int_0^T \gamma^* \cdot \gamma dt + \mu_1 \int_0^T \gamma^{*'} \cdot \gamma' dt + \mu_2 \int_0^T \int_{\Omega} u^* w dx dt \right) = 0.
\end{aligned}$$

Como $\lambda_1 > 0$, obtemos que

$$\mu_0 \int_0^T \gamma^* \cdot \gamma dt + \mu_1 \int_0^T \gamma^{*'} \cdot \gamma' dt + \mu_2 \int_0^T \int_{\Omega} u^* w dx dt = 0,$$

para todo $(\gamma, w) \in \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q)$, com w solução de (5.13).

Notemos que, para cada $u \in L^{2r}(Q)$, o operador linear

$$g_u(x, t, u) : L^{2r}(Q) \rightarrow L^2(Q)$$

é tal que

$$(g_u(x, t, u)v_1, v_2)_{L^2(Q)} = \int_Q g_u(x, t, u)v_1 v_2 dx dt = \int_Q v_1 g_u(x, t, u)v_2 dx dt = (v_1, g_u(x, t, u)v_2)_{L^2(Q)},$$

para todo $v_1, v_2 \in L^{2r}(Q)$.

Consideremos p^* a variável de co-estado, solução da equação adjunta á equação (5.13), definida por

$$\begin{cases} -\partial_t p - \nu \Delta p = g_u(x, t, u^*) p - b k(x - \gamma^*) p - u^* & \text{em } Q = \Omega \times (0, T], \\ (\partial/\partial\eta)(p) = 0 & \text{em } S = \partial\Omega \times (0, T], \\ p(T) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Daí, obtemos que

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} u^* w dx dt &= - \int_0^T \int_{\Omega} (-u^*) w dx dt \\ &= - \int_0^T \int_{\Omega} [-\partial_t p^* - \nu \Delta p^* - g_u(x, t, u^*) p^* + b k(x - \gamma^*) p^*] w dx dt \\ &= - \int_0^T \int_{\Omega} p^* [\partial_t w - \nu \Delta w - g_u(x, t, u^*) w + b k(x - \gamma^*) w] dx dt \\ &= - \int_0^T \int_{\Omega} b p^* u^* \nabla k(x - \gamma^*) \cdot \gamma dx dt. \end{aligned}$$

Assim, concluimos que

$$\mu_0 \int_0^T \gamma^* \cdot \gamma dt + \mu_1 \int_0^T \gamma^{*'} \cdot \gamma' dt - \mu_2 b \int_0^T \int_{\Omega} p^* u^* \nabla k(x - \gamma^*) \cdot \gamma dx dt = 0, \quad (5.14)$$

para todo $\gamma \in \mathcal{A}$.

Em particular, para todo $\gamma \in (\mathcal{D}(0, T))^2 \subset \mathcal{A}$ vem

$$\left\langle \gamma^{*''}, \gamma \right\rangle_{(\mathcal{D}'(0, T))^2, (\mathcal{D}(0, T))^2} = - \left\langle \gamma^{*'}, \gamma' \right\rangle_{(\mathcal{D}'(0, T))^2, (\mathcal{D}(0, T))^2} = - \int_0^T \gamma^{*'} \gamma' dt.$$

Portanto, restringindo (5.14) a $(\mathcal{D}(0, T))^2$, obtemos no sentido de distribuição que

$$\left\langle \mu_0 \gamma^* - \mu_1 \gamma^{*''} - \mu_2 b \int_{\Omega} p^* u^* \nabla k(x - \gamma^*) dx, \gamma \right\rangle_{(\mathcal{D}'(0, T))^2, (\mathcal{D}(0, T))^2} = 0.$$

Logo, obtemos em particular que

$$\mu_0 \gamma^*(t) - \mu_1 \gamma^{*''}(t) - \mu_2 b \int_{\Omega} p^* u^* \nabla k(x - \gamma^*(t)) dx = 0, \quad (5.15)$$

no sentido de distribuição.

A seguir, encontraremos as condições de contorno para o problema. Segue dos resultados anteriores que

$$\gamma^*(0) = 0, \quad (5.16)$$

pois $\gamma^* \in \mathcal{A}$.

Temos também que

$$\gamma^{*'}(T) = 0 \quad (5.17)$$

no sentido fraco. De fato, se γ^* tivesse mais regularidade de tal forma que $\gamma^{*''}$ fosse integrável, usando integração por partes teríamos que

$$\int_0^T \gamma^{*'}(t) \gamma'(t) dt = \gamma^{*'}(T) \gamma(T) - \int_0^T \gamma^{*''}(t) \gamma(t) dt.$$

De (5.14), vem

$$\left(\mu_0 \gamma^* - \mu_1 \gamma^{*''} - \mu_2 b \int_{\Omega} p^* u^* \nabla k(x - \gamma^*) dx, \gamma \right)_{(L^2(0,T))^2} + \mu_1 \gamma^{*'}(T) \gamma(T) = 0, \quad (5.18)$$

para todo $\gamma \in \mathcal{A}$.

Agora, por (5.15) obtemos que

$$\mu_1 \gamma^{*'}(T) \gamma(T) = 0, \quad \forall \gamma \in \mathcal{A}.$$

Como para $\gamma \in \mathcal{A}$ arbitrário, concluímos que $\gamma^{*'}(T) = 0$.

De (5.15), (5.16) e (5.17) segue o teorema. ■

Capítulo 6

Conclusões

Neste trabalho apresentamos resultados de controle ótimo para um modelo que descreve a trajetória ótima a ser seguida por um dispositivo que irá fazer a aplicação de inseticida em uma certa região Ω , cujo objetivo principal é o de controlar a proliferação de mosquitos e ao mesmo tempo reduzir os custos da pulverização. Usamos como ferramenta principal o formalismo de Dubovitskii e Milyutin.

Vale ressaltar que o modelo estudado ainda não está nas condições mais próximas de uma situação real do cotidiano. Por se tratar de um modelo inicial, algumas hipóteses substanciais não foram consideradas, tais como: a fuga de uma parcela da população de mosquitos da região Ω durante o processo de pulverização; matematicamente queremos dizer $((\partial/\partial\eta)(u) \neq 0)$; também não consideramos o efeito residual do inseticida, ou seja, no modelo que estudamos não foi considerada a hipótese de que após a aplicação o inseticida continua agindo; também não foi tomada nenhuma restrição na região Ω , em forma de obstáculos, sobre o conjunto dos controles admissíveis; etc.

De modo geral, é de nosso interesse aprofundar os estudos sobre as possíveis estratégias para abordar os problemas propostos.

Dando continuidade em nossas pesquisas, estamos em fase de elaboração do problema com restrição no controle, ou seja,

$$\mathcal{A} = \{\gamma \in (H^1(0, T))^2; \gamma(0) = 0 \text{ e } \|\gamma\|_{(H^1(0, T))^2} \leq R_0\},$$

onde $R_0 > 0$ é uma constante.

Também estamos estudando o problema com obstáculos sobre os controles, podemos escrever matematicamente o problema da seguinte forma: Seja Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^2$, com fronteira de classe C^2 , $W \subset \Omega$ um conjunto aberto, podendo ser uma união finita de componentes conexas, tal que, $0 \notin W$, $\emptyset \neq W \subset \overline{W} \subset \Omega$ e $T > 0$. Considere

$$\mathcal{A}_W = \{\gamma \in (H^1(0, T))^2 \mid \gamma(0) = 0 \text{ e } \text{Im}\gamma \cap W = \emptyset\}.$$

Bibliografia

- [1] Adams, R.A., Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975.
- [2] Ainseba, B., Langlais, M., On a Population Dynamics Control Problem with Age Dependence and Spatial Structure, Journal of Mathematical Analysis and Applications 248, 455-774 (2000).
- [3] Atkinson, M.P., Su, Z., Alphey, N., Alphey, L.S., Coleman, P.G., Wein, L.M., Analyzing the Control of Mosquito-Borne Diseases by a Dominant Lethal Genetic System, Proceedings of the National Academy of Sciences, Vol. 104 no. 22, (2007), 9540-9545.
- [4] Alexeév, V., Fomine, S., Tikomirov, V., Commande Optimale. Moscou, Mir, 1982.
- [5] Ambrosetti, A., Prodi, G., A primer of nonlinear analysis. Cambridge University Press, 1993.
- [6] Araujo, A. L. A., Análise Matemática de um Modelo de Controle de Populações de Mosquitos, Dissertação de Mestrado, IMECC-Unicamp, 2008.
- [7] Barbu, V., Iannelli, M., Optimal Control of Population Dynamics, Journal of optimization theory and Applications: Vol. 102. No. 1, JULY 1999, pp. 1 14.
- [8] Boldrini, J.L., Cara, E. F., Rojas-Medar, M.A., A mathematical analysis of an optimal control problem for a generalized Boussinesq model for viscous incompressible flows, Relatório de Pesquisa RP 53/05, 2005.
- [9] Brezis, H.. Análisis Funcional. Teoría y Aplicaciones. Masson, Paris. 1983.

- [10] Cannarsa, P. and Vespri, V., On maximal L^p regularity for the abstract Cauchy problem. Boll. Un. Mat. Ital. B (6) 5 (1986), no. 1, 165–175.
- [11] De Aguiar, R., Contribuições em Controle Ótimo Distribuído Via Formalismo de Dubovitskii-Milyutin. Aspectos Teóricos, Numéricos e Aplicados, Tese de Doutorado, Unicamp-IMECC, 2002.
- [12] De Aguiar, R., Ortega, J., Rojas-Medar, M.D., Rojas-Medar, M.A., Optimal control problem for the generalized bioconvective flow, pre-print, Univesidade Estadual de Campinas (IMECC), Brasil, 2004.
- [13] Evans, L.C., Partial Differential Equations, American Mathematical Society, 1998.
- [14] De Figueiredo, D. G., Lectures on the Ekeland Variational Principle with Aplications and Detours , Tata Institute, Springer Verlag, N. Y., 1989.
- [15] Fister, K. R., Lenhart, S., Optimal control of a competitive system with age-structure, J. Math. Anal. Appl. 291 (2004) 526-537.
- [16] Gayte, I., Guillén-González, F., Rojas-Medar, M.A., El formalismo de Dubovitskii-Milyutin aplicado a un problema de control óptimo con restricción la ecuación del calor retrógrada con control distribuido, pre-print, Universidade de Sevilha, Espanha, 2002.
- [17] Girsanov, I.V., Lectures on mathematical theory of extremum problem., Lectures notes in Economics and mathematical systems, 67, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [18] Henry, D.. Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations. Springer- Verlag, Berlin Heidelberg. 1981.
- [19] Ladyzhenskaya, O., Solonnikov, V., Uraltseva, N., Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type, American Mathematical Society, 1968.
- [20] Lions, J. L., Magenes, M., Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications, Vol. 1, Springer Verlag, 1972.

- [21] Lions, J. L. and Magennes, E. Problèmes aux limites non homogènes et application II, Dunod, Paris, 1968.
- [22] Lions, J. L., Quelques Méthodes de Resolution des Problèmes aux Limites non Linéaires - Dunod, Gauthier - Villars, 1969.
- [23] Lions, J.L., Contrôle des Systèmes Distribués Singuliers, Méthodes Mathématiques de l'Informatique, Gautier-Villars, 1983.
- [24] Lunardi, A., Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems, Birkhäuser, Basel (1995).
- [25] Lunardi, A., Interpolation Theory, Publications of the Scuola Normale Superiore / Lecture Notes, (2009).
- [26] Luo, Z., Optimal control for a population dynamics with age-dependent and diffusion in a periodic environment, J Appl Math Comput (2008) 27: 77-84.
- [27] Magalhães, P.M.D., Brandão, A.J.V., Rojas-Medar, M.A., Fernández-Cara, E., Optimal control for the FitzHugh-Nagumo equations, em perparação, 2005.
- [28] Maidana, N.A., Yang, H.M., A Spatial Model to Describe the Dengue Propagation, Mat. Apl. Comput., 8, No. 1 (2007), 83-92.
- [29] Maidana, N.A., Yang, H.M., Describing the geographic spread of dengue disease by traveling waves, Mathematical Biosciences 215 (2008) 64 -77.
- [30] Marques-Lopes, F.P., Alguns Problemas de Controle Multiobjetivos Governados por Equações Diferenciais Parciais, Tese de Doutorado, Unicamp-IMECC, 2005.
- [31] Maidana, N.A., Yang, H.M., Takahashi, L.T., Ferreira Jr, W.C., Pulino, P., Mathematical models for the Aedes aegypti dispersal dynamics: travelling waves by wing and wind, Bulletin of Mathematical Biology 67 (2005), 509-528.

- [32] Medeiros, L. A., Rivera, P. H., Espaços de Sobolev e Equações Diferenciais Parciais, Textos de Métodos Matemáticos nº9, Instituto de Matemática - UFRJ, 1975.
- [33] Medeiros, L. A., Miranda, M. M., Espaços de Sobolev e Iniciação aos Problemas Elípticos Não Homogêneos, Rio de Janeiro, UFRJ. IM, 2000.
- [34] Kern, D. L., Lenhart, S., Miller, R., Yong, J., Optimal control applied to native-invasive population dynamics, Journal of Biological Dynamics, Vol. 1, No. 4, October 2007, 413-426.
- [35] Milla Miranda, M., Análise Espectral em Espaços de Hilbert, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1990.
- [36] Norman, R. A., Chan, M. S., Srividya, A., Pani, S. P., Ramaiah, K. D., Vanamail, P., Michael, E., Das, P.K., Bundy, D. A. P., The development of an age-structured model for describing the transmission dynamics and control of lymphatic e transmission dynamics and control of lymphatic filariasis, Epidemiol. Infect. (2000), 124, 529-541.
- [37] Ouedraogo, A., Traore, O., Optimal Control for a Nonlinear Population Dynamics Problem, Portugaliae Mathematica, Vol. 62 Fasc. 2-2005.
- [38] Pazy, A., Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Springer- Verlag, New York, v.44. 1983.
- [39] Rafikov, M., Balthazar, J. M., Optimal pest control problem in population dynamics, Computational and Applied Mathematics, Volume 24, N. 1(2005) pp. 65-81.
- [40] Simon, L. de, Un'applicazione della teoria degli integrali singolari allo studio delle equazioni differenziali lineari astratte del primo ordine. Rend. Sem. Mat Univ. Padova, 34(1964), 205-232.
- [41] Simon, J., Compact sets in the space $L^p(0, T; B)$, Annali Mat. Pura Appli., Serie IV, v.146 (1987), 65-96.

- [42] Smoller, J., Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations(Grundlehren der mathematischen Wissenschaften), New York: Springer, 1994.
- [43] Trana, A., Raffy, M., On the dynamics of dengue epidemics from large-scale information, Theoretical Population Biology 69 (2006), 3-12.
- [44] Tumwiine, J., Mugisha, J.Y.T., Luboobi, L.S., A mathematical model for the dynamics of malaria in a human host and mosquito vector with temporary immunity, Applied Mathematics and Computation 189 (2007), 1953-1965.
- [45] Zeidler, E., Applied Functional Analysis, Springer Verlag, 1995.