

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Tese de Doutorado

Teoria de Conley para Campos Gutierrez-Sotomayor

Autor: Hernán Roberto Montúfar López

montufar@ime.unicamp.br

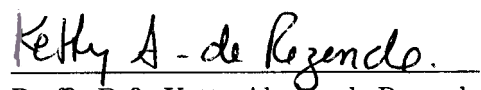
Orientadora: Prof^a. Dr^a. Ketty Abaroa de Rezende

Julho de 2010

Teoria de Conley para Campos Gutierrez-Sotomayor

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por HERNÁN ROBERTO MONTÚFAR LÓPEZ e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 05 de Julho de 2010.


Prof^{ra}. Dr^a. Ketty Abaroa de Rezende

Orientadora

Banca examinadora:

Prof^{ra}. Dr^a. Ketty Abaroa de Rezende

Prof. Dr. Marco Antônio Teixeira

Prof. Dr. Caio José Colletti Negreiros

Prof. Dr. Oziride Manzoli Neto

Prof^{ra}. Dr^a. Mariana Rodrigues da Silveira

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de DOUTOR em Matemática.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

Montúfar López, Hernán Roberto

M769t Teoria de Conley para campos Gutierrez-Sotomayor/Hernán Roberto
Montúfar López -- Campinas, [S.P. : s.n.], 2010.

Orientador : Ketty Abaroa de Rezende

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto
de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Singularidades. 2. Lyapunov, Funções de. 3. Teoria do índice
de Conley. 4. Blocos isolantes.

I. Rezende, Ketty Abaroa de. II. Universidade Estadual de Campinas.
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III.
Título.

Título em inglês: Conley theory for Gutierrez-Sotomayor vector fields

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Singularities. 2. Lyapunov functions. 3. Conley index theory. 4. Isolating bloks.

Área de concentração: Geometria e Topologia

Titulação: Doutor em Matemática

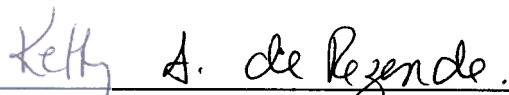
Banca examinadora: Profa. Dra. Ketty Abaroa de Rezende (IMECC – UNICAMP)
Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira (IMECC – UNICAMP)
Prof. Dr. Caio José Colletti Negreiros (IMECC – UNICAMP)
Prof. Dr. Oziride Manzoli Neto (ICMC – USP)
Profa. Dra. Mariana Rodrigues da Silveira (UF - ABC)

Data da defesa: 05/07/2010

Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática

Tese de Doutorado defendida em 05 de julho de 2010 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



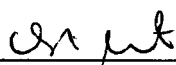
Prof. (a). Dr (a). KETTY ABAROA DE REZENDE



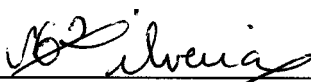
Prof. (a). Dr (a). MARCO ANTONIO TEIXEIRA



Prof. (a). Dr (a). CAIO JOSÉ COLLETTI NEGREIROS



Prof. (a). Dr (a). OZIRIDE MANZOLI NETO



Prof. (a) Dr. (a) MARIANA RODRIGUES DA SILVEIRA

Agradecimentos

Agradeço especialmente a Sonia Sarita, pelo apoio e compreensão durante os últimos dez anos. Aos meus pais e irmãos. Aos amigos da UNICAMP. À CAPES e à UNICAMP, pelo auxílio financeiro recebido.

Aos membros da banca examinadora, pelas valiosas contribuições para esta versão final. De maneira especial agradeço a minha orientadora Ketty A. de Rezende pela paciência e orientação deste trabalho.

Dedico este trabalho às minhas filhas
enxadristas Lesly e Eymi.

Resumo

Em [6] são apresentadas condições necessárias e suficientes para a estabilidade estrutural e o teorema de densidade para campos de vetores em 2-variedades com singularidades simples dos seguintes tipos: cone, guarda-chuva de Whitney, ponto duplo e ponto triplo.

Nesta tese, estudamos os fluxos induzidos por estes campos de vetores, que denominamos fluxos Gutierrez-Sotomayor, do ponto de vista topológico utilizando a teoria de Conley. Apresentamos uma fórmula dinâmico-topológica que relaciona o índice de Conley de uma variedade com singularidades simples M que possui uma estratificação que a decompõe numa união disjunta da sua parte regular e da sua parte singular. Usando essa estratificação mostramos que se a singularidade está na parte singular S de M o seu índice pode ser calculado tanto com respeito a M como com respeito a S .

Definimos uma função de Lyapunov, neste contexto, e mostramos sua existencia para fluxos sem órbitas periódicas e sem ciclos singulares. Em seguida, por uma análise da sequência de homologia longa exata de um par índice determinamos propriedades que um grafo de Lyapunov deve satisfazer para estar associado a um fluxo. Também abordamos a questão da realização de grafos de Lyapunov abstratos. Para isto, primeiramente apresentamos a igualdade de Poincaré-Hopf, para o caso bidimensional, que caracteriza a relação entre o primeiro número de Betti das 1-variedades ramificadas que são fronteiras de um bloco isolante com seu número de componentes de fronteira e o índice numérico de Conley. Em seguida, mostramos que dados números inteiros positivos que satisfazam a condição de Poincaré-Hopf sempre é possível construir um bloco isolante que satisfaz estes dados dinâmicos e homológicos.

Abstract

In [6] a characterization and genericity theorem for C^1 -structurally stable vector fields tangent to a 2-dimensional compact subset M of $\mathbb{R}^k$ are established. Also in [6], new types of structurally stable singularities and periodic orbits are presented.

In this thesis we study the continuous flows associated to these vector fields, which we refer to as the Gutierrez-Sotomayor flows on manifolds M with simple singularities using Conley Index Theory. We consider a stratification of M which decomposes it into a union of its regular and singular strata. We prove certain Euler type formulas which relate topology of M and dynamics on the singular strata.

We show the existence of a Lyapunov function for Gutierrez-Sotomayor flows without periodic orbits and singular cycles in this context. Using long exact sequence analysis of index pairs we determine necessary and sufficient conditions for a Gutierrez-Sotomayor flow to be defined on an isolating block. We organize this combinatorially with the aid of Lyapunov graphs and using a Poincaré-Hopf equality we give necessary conditions for a Lyapunov graph to be associated to a Gutierrez-Sotomayor flow and we also prove these conditions are sufficient.

Sumário

Lista de figuras	x
Introdução	1
1 Campos de Vetores Estáveis	4
1.1 Variedades com Singularidades Simples	4
1.2 Campos de Vetores Tangentes $\mathfrak{X}^r(M)$	5
1.2.1 Pontos Fixos	5
1.2.2 Órbitas Periódicas	6
1.2.3 Ciclos Singulares	10
1.3 Estabilidade Estrutural	11
2 Função de Lyapunov	14
2.1 Caso Local	15
2.2 Caso Global	19
3 O Índice de Conley	25
3.1 Cálculo do Índice de Conley	26
3.2 As relações Dinâmico-Topológico	38
3.2.1 O índice de Conley na variedade estratificada	40
3.2.2 Exemplos de fluxos Gutierrez-Sotomayor	42
4 Blocos Isolantes	45
4.1 A Condição de Poincaré-Hopf	45
4.2 Blocos Isolantes	46

Sumário	viii
4.2.1 Alças Generalizadas	47
4.2.2 A Construção dos Blocos Isolantes	53
5 Grafos de Lyapunov	58
5.1 Variedades com Singularidades Cone	59
5.2 Variedades com Singularidades Simples	60
Conclusão	69
Referências Bibliográficas	70

Lista de Figuras

1.1	Tipos locais dos pontos fixos hiperbólicos	7
1.2	Alguns tipos locais de órbitas periódicas hiperbólicas	9
1.3	Setor $\lambda > 0 > \mu, \nu > 0$	10
1.4	Alguns tipos locais de ciclos limites singulares simples	11
2.1	Discos D_i em N	16
2.2	Construção de B_k	20
2.3	Construção de F_η (uma face)	22
2.4	Curvas fechadas B_i numa variedade com singularidades cone	23
3.1	Índice homotópico de Conley do tipo a em $M(\mathcal{C})$	28
3.2	Índice homotópico de Conley do tipo s em $M(\mathcal{C})$	29
3.3	Índice homotópico de Conley do tipo r em $M(\mathcal{C})$	29
3.4	Índice homotópico de Conley do tipo a em $M(\mathcal{D})$	30
3.5	Índice homotópico de Conley do tipo r em $M(\mathcal{D})$	30
3.6	Índice homotópico de Conley do tipo as em $M(\mathcal{D})$	30
3.7	Índice homotópico de Conley do tipo rs em $M(\mathcal{D})$	31
3.8	Índice homotópico de Conley do tipo ssi em $M(\mathcal{D})$	31
3.9	Índice homotópico de Conley do tipo sse em $M(\mathcal{D})$	31
3.10	Índice homotópico de Conley do tipo a em $M(\mathcal{W})$	32
3.11	Índice homotópico de Conley do tipo r em $M(\mathcal{W})$	32
3.12	Índice homotópico de Conley do tipo si em $M(\mathcal{W})$	32
3.13	Índice homotópico de Conley do tipo se em $M(\mathcal{W})$	32
3.14	Índice homotópico de Conley do tipo a em $M(\mathcal{T})$	33

3.15	Índice homotópico de Conley do tipo r em $M(\mathcal{T})$	33
3.16	Índice homotópico de Conley do tipo ass em $M(\mathcal{T})$	33
3.17	Índice homotópico de Conley do tipo rss em $M(\mathcal{T})$	34
3.18	Fluxos na esfera pinçado e no toro pinçado	42
3.19	Fluxos no Cross-cap e no toro comprimido	43
4.1	Alça regular $h_a^{\mathcal{R}}, h_s^{\mathcal{R}}$ e $h_r^{\mathcal{R}}$	48
4.2	Alça cone $h_a^{\mathcal{C}}, h_s^{\mathcal{C}}$ e $h_r^{\mathcal{C}}$	48
4.3	Alça guarda-chuva $h_a^{\mathcal{W}}, h_{se}^{\mathcal{W}}, h_{si}^{\mathcal{W}}$ e $h_r^{\mathcal{W}}$	49
4.4	Alça dupla $h_a^{\mathcal{D}}, h_{as}^{\mathcal{D}}, h_{ssi}^{\mathcal{D}}, h_{sse}^{\mathcal{D}}, h_{rs}^{\mathcal{D}}$ e $h_r^{\mathcal{D}}$	51
4.5	Alça tripla $h_a^{\mathcal{T}}, h_{ass}^{\mathcal{T}}, h_{rss}^{\mathcal{T}}$ e $h_r^{\mathcal{T}}$	52
4.6	1-variedades ramificadas distinguidas.	52
4.7	Blocos isolantes contendo a alça regular $h_s^{\mathcal{R}}$	54
4.8	Blocos isolantes contendo a alça cone $h_s^{\mathcal{C}}$	55
4.9	Blocos isolantes contendo a alça guarda-chuva $h_{se}^{\mathcal{W}}$	56
4.10	Blocos isolantes contendo a alça guarda-chuva $h_{si}^{\mathcal{W}}$	56
4.11	Blocos isolantes contendo a alça dupla $h_{as}^{\mathcal{D}}$	57
4.12	Blocos isolantes contendo a alça dupla $h_{ssi}^{\mathcal{D}}$	57
4.13	Blocos isolantes com uma alça regular.	57
5.1	Blocos contendo a singularidade cone	61
5.2	Colando blocos segundo o grafo de Lyapunov	68

Introdução

Em [6] C. Gutierrez and J. Sotomayor estendem para variedades com singularidades simples os teoremas de caracterização e genericidade obtidos por M. Peixoto [8] para campos de vetores estruturalmente estáveis tangentes à 2-variedades suaves compactas. As singularidades estudadas são do tipo cone $\mathcal{C} = \{(x, y, z); z^2 - y^2 - x^2 = 0\}$, do tipo guarda-chuva de Whitney $\mathcal{W} = \{(x, y, z); zx^2 - y^2 = 0\}$, do tipo ponto duplo $\mathcal{D} = \{(x, y, z); xy = 0\}$, e do tipo ponto triplo $\mathcal{T} = \{(x, y, z); xyz = 0\}$. O resultado principal em [6] estabelece uma caracterização e um teorema de genericidade para C^1 -campos de vetores estruturalmente estáveis tangente à subconjuntos compactos M de $\mathbf{R}^l$ que são localmente difeomorfos a $\mathbf{R}^2$ ou a uma das singularidades simples mencionadas acima.

Esta caracterização nos permite fazer a seguinte definição de estabilidade. Um campo $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ é estruturalmente estável se:

1. X tem um número finito de pontos fixos e órbitas periódicas, todos hiperbólicos.
2. Os ciclos limites singulares de X são simples e X não tem conexão de selas.
3. O conjunto α - e ω -limite de cada trajetória de X é um ponto fixo, uma órbita periódica ou um ciclo singular.

Nesta tese, estudamos os fluxos induzidos por estes campos de vetores, que denominamos *fluxos Gutierrez-Sotomayor*, do ponto de vista topológico utilizando a teoria de Conley.

No capítulo 1, apresentamos os resultados de C. Gutierrez and J. Sotomayor, [6].

No capítulo 2, definimos uma função de Lyapunov, neste contexto, e mostramos sua existência para fluxos sem órbitas periódicas e sem ciclos singulares. Uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ será chamada uma *função de Lyapunov* se:

1. Para cada estrato $M(\mathcal{G})$ de M :

- (a) $f|_{M(\mathcal{G})}$ é uma função suave e f é contínua em M .
- (b) Os pontos críticos de $f|_{M(\mathcal{G})}$ são não-degenerados e coincidem com as singularidades de X_t .
- (c) $\frac{d}{dt}(f|_{M(\mathcal{G})}(X_t x)) < 0$, se x não é uma singularidade de X_t .

2. Dados p e q singularidades de X_t então $f(p) \neq f(q)$.

Primeiramente fazemos uma construção local, i.e., se $p \in M$ é uma singularidade de um fluxo mostramos a existência da função de Lyapunov numa vizinhança, suficientemente pequena, N de p , em M . Em seguida, abordamos o caso global da construção de f . Para isto no Lema 2.3 mostramos que fazendo cortes em M obtemos uma decomposição em blocos. Em cada bloco podemos construir f segundo o Lema 2.4. Finalmente justapondo estas funções temos uma função de Lyapunov f sobre M .

No capítulo 3, desenvolvemos a teoria clássica de Conley e calculamos o índice homotópico para as singularidades dos fluxos Gutierrez-Sotomayor em M , Teorema 3.1. Portanto, calculando a homologia destes espaços pontuados obtemos o índice homológico de Conley, Corolário 3.1.1. Logo, tomando o rank obtemos o índice numérico de Conley das singularidade $p \in M$ e o denotamos (h_0, h_1, h_2) . Em seguida, apresentamos uma fórmula dinâmico-topológica que relaciona o índice de Conley de uma variedade com singularidades simples M que possui uma estratificação que a decompõe numa união disjunta da sua parte regular $\mathcal{R}$ e da sua parte singular $\mathcal{S}$.

$$(\mathcal{R}_2 - \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_0)|_{M \setminus \mathcal{S}} = \mathcal{S}_1 - \mathcal{S}_0 + \chi(M)$$

Usando essa estratificação mostramos que se as singularidade $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ estão na parte singular S de M , o seu índice pode ser calculado tanto com respeito a M como com respeito a S .

$$\mathcal{R}_0 - \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 = \mathcal{S}_0 - \mathcal{S}_1$$

No capítulo 4, apresentamos a igualdade de Poincaré-Hopf, para o caso bidimensional, que caracteriza a relação entre o primeiro número de Betti das 1-variedades ramificadas que são fronteiras de um bloco isolante (N_1, N_0) para a singularidade $p \in M$ com seu número de componentes de fronteira e o índice numérico de Conley (h_0, h_1, h_2) de p .

$$(h_2 - h_1 + h_0) - (h_2 - h_1 + h_0)^* = e^+ - \mathcal{B}^+ - e^- + \mathcal{B}^-$$

onde $*$ indica o índice do fluxo em tempo-reverso, $e^+(e^-)$ é o número de componentes da fronteira de entrada (saída) de N_1 e $\mathcal{B}^+ = \sum_{k=1}^{e^+} b_k^+$ ($\mathcal{B}^- = \sum_{k=1}^{e^-} b_k^-$) onde $b_k^+(b_k^-)$ é o primeiro número de Betti da k -ésima componente da fronteira de entrada (saída) de N_1 .

Em seguida, mostramos que dados números inteiros positivos e^+ , e^- , $\{b_k^+\}_{k=1}^{e^+}$, $\{b_k^-\}_{k=1}^{e^-}$ que satisfaçam a condição de Poincaré-Hopf sempre é possível construir um bloco isolante N para p que satisfaz estes dados dinâmicos e homológicos.

1. Para $\partial N = \partial N^+ \cup \partial N^-$ temos que e^+ (e^-) é o número de componentes conexas de ∂N^+ (∂N^-), correspondente a fronteira de entrada (saída) do fluxo. Portanto, temos $\partial N^+ = \bigcup_{k=1}^{e^+} \partial N_k^+$ ($\partial N^- = \bigcup_{k=1}^{e^-} \partial N_k^-$).
2. O $rank H_1(\partial N_k^+) = b_k^+$ com $k = 1, \dots, e^+$ e $rank H_1(\partial N_k^-) = b_k^-$ com $k = 1, \dots, e^-$.
3. O $rank H_*(N/\partial N^-) = h_*$ onde (h_0, h_1, h_2) é o índice numérico de Conley de p .

No capítulo 5, adotamos uma abordagem combinatorial. Primeiramente obtemos um grafo de Lyapunov L associado a um fluxo X_t e uma função de Lyapunov f , colapsando a um ponto cada componente conexa de um conjunto de nível de f . Na Proposição 5.1 se mostra que L é um grafo finito, dirigido sem ciclos orientados. Atraves de uma análise da sequência de homologia longa exata de um par índice determinamos propriedades que um grafo de Lyapunov deve satisfazer para estar associado a um fluxo, ver Teorema 5.4. Também abordamos a questão da realização de grafos de Lyapunov abstratos como fluxos Gutierrez-Sotomayor sobre 2-variedades com singularidades simples.

O resultado principal neste trabalho generaliza um resultado de K. de Rezende e R. Franzosa [3] onde classificam fluxos Morse-Smale sobre superficies.

Campinas, maio de 2010

Hernán Montúfar

Capítulo 1

Campos de Vetores Estáveis

Este capítulo contém os resultados de C. Gutierrez e J. Sotomayor na qual estabelecem a caracterização e genericidade de campos de vetores em $\mathbb{R}^l$ que são estruturalmente estáveis, tangentes a 2-variedades, M , com “singularidades simples”. Quando M é uma 2-variedade suave, estes resultados coincidem com o teorema de Peixoto. Este teorema afirma que os campos de vetores estruturalmente estáveis são caracterizados por terem pontos singulares e órbitas periódicas hiperbólicas, nenhuma conexão de selas e conjuntos limites das órbitas sendo singularidades ou órbitas periódicas do campo.

1.1 Variedades com Singularidades Simples

Uma aplicação f de um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, é dita ser de classe C^r , $1 \leq r \leq \infty$, se todas suas derivadas parciais $\partial^j f / \partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_j}$ de ordem $\leq r$ existem e são contínuas. Mais geralmente, uma aplicação $f : K \rightarrow \mathbb{R}^n$, de um subconjunto $K \subset \mathbb{R}^m$, é dito ser de classe C^r se admite uma extensão $\hat{f}$ de classe C^r para uma vizinhança aberta $\hat{K}$ de K . Um homeomorfismo $f : K_1 \rightarrow K_2$ entre subconjuntos $K_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ e $K_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ é dito um difeomorfismo de classe C^r se ambos f e f^{-1} são de classe C^r .

DEFINIÇÃO Um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^l$ é dito uma *2-variedade com singularidades simples* se para cada ponto $p \in M$ existe uma vizinhança V_p de p em M e um C^∞ -difeomorfismo $\Psi : V_p \rightarrow \mathcal{G}$ tal que $\Psi(p) = 0$, onde $\mathcal{G}$ é um dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{R} = \{(x, y, z); z = 0\}, \text{ plano;}$$

$\mathcal{C} = \{(x, y, z); z^2 - y^2 - x^2 = 0\}$, cone;

$\mathcal{D} = \{(x, y, z); xy = 0\}$, pontos duplos;

$\mathcal{W} = \{(x, y, z); zx^2 - y^2 = 0\}$, guarda-chuvas de Whitney;

$\mathcal{T} = \{(x, y, z); xyz = 0\}$, ponto triplo.

O difeomorfismo Ψ é dito uma *carta local* em p . Denotamos por $M(\mathcal{G})$ o conjunto de pontos $p \in M$ tal que $\Psi(p) = 0$ para uma carta local $\Psi : V_p \rightarrow \mathcal{G}$, onde $\mathcal{G} = \mathcal{R}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{W}$ ou $\mathcal{T}$. Assim $M(\mathcal{R})$ é uma 2-variedade suave chamada *parte regular* de M , $M(\mathcal{D})$ é uma 1-variedade suave, enquanto que $M(\mathcal{C})$, $M(\mathcal{W})$ e $M(\mathcal{T})$ são conjuntos discretos.

Exemplos destas variedades com singularidades simples podem ser obtidos via imersões estáveis de superfícies em $\mathbb{R}^3$.

1.2 Campos de Vetores Tangentes $\mathfrak{X}^r(M)$

DEFINIÇÃO Um campo de vetores X de classe C^r sobre $\mathbb{R}^l$ é dito ser *tangente* a uma variedade $M \subset \mathbb{R}^l$ com singularidades simples se é tangente às subvariedades suaves $M(\mathcal{G})$, para toda $\mathcal{G}$.

Denotamos por $\mathfrak{X}^r(M)$ o conjunto dos C^r -campos de vetores tangentes sobre variedades com singularidades simples M .

Seja $M \subset \mathbb{R}^l$ uma 2-variedade com singularidades simples e seja $\Psi : V_p \rightarrow \mathcal{G}$ uma carta local de M em p . Seja $\widehat{\Psi} : \widehat{V}_p \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\widehat{\Psi}^{-1} : \widehat{\mathcal{G}} \rightarrow \mathbb{R}^l$ C^∞ -extensões de Ψ e Ψ^{-1} para conjuntos abertos $\widehat{V}_p$ e $\widehat{\mathcal{G}}$. A $\widehat{\Psi}, \widehat{\Psi}^{-1}$ -expressão local de X é o campo de vetores em $\mathbb{R}^3$ dado por:

$$X_\Psi(q) = D\widehat{\Psi}_p X(p)$$

onde $p = \widehat{\Psi}^{-1}(q)$.

1.2.1 Pontos Fixos

Seja p um ponto fixo (ou singularidade) de $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, para $r \geq 1$, isto é, $X(p) = 0$. O lema 3.2 de [6] estabelece que a matriz da aplicação linear $DX_\Psi(0)$ de $\mathbb{R}^3$ para $\mathbb{R}^3$ com respeito a base canônica é como segue:

$$(a) \text{ Se } p \in M(\mathcal{R}) \text{ então } DX_\Psi(0) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

$$(b) \text{ Se } p \in M(\mathcal{C}) \text{ então } DX_\Psi(0) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ -\beta & \alpha & \delta \\ \gamma & \delta & \alpha \end{pmatrix}$$

$$(c) \text{ Se } p \in M(\mathcal{D}) \text{ então } DX_\Psi(0) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ \delta & \rho & \gamma \end{pmatrix}$$

$$(d) \text{ Se } p \in M(\mathcal{W}) \text{ então } DX_\Psi(0) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha + \frac{1}{2}\beta & 0 \\ 0 & \gamma & \beta \end{pmatrix}$$

$$(e) \text{ Se } p \in M(\mathcal{T}) \text{ então } DX_\Psi(0) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

onde a classe de conjugação da matriz, 2×2 , esquerda superior de (a) e as matrizes, 3×3 , de (b), (c), (d) e (e) não dependem de Ψ , $\widehat{\Psi}$ ou $\widehat{\Psi}^{-1}$.

DEFINIÇÃO Um ponto fixo p de um C^1 -campo de vetores tangente a M é dito *hiperbólico* se, com as notações acima, satisfaz:

- (a) Os autovalores da matriz quadrada, 2×2 , esquerda superior de (a) tem parte real não-zero;
- (b) $\alpha \pm \sqrt{(\delta^2 + \gamma^2 - \beta^2)}$ tem parte real não-zero;
- (c) $\alpha\beta\gamma \neq 0$;
- (d) $\alpha\beta \neq 0$;
- (e) $\alpha\beta\gamma \neq 0$.

A seguir, na Figura 1.1, temos os tipos locais dos pontos fixos hiperbólicos a menos de equivalência topológica e inversão no sentido das trajetórias. Note que: a_1 e a_2 representam pontos fixos em $M(\mathcal{R})$, b_1 e b_2 representam pontos fixos em $M(\mathcal{C})$, c_1 , c_2 e c_3 representam pontos fixos em $M(\mathcal{D})$, d_1 e d_2 representam pontos fixos em $M(\mathcal{W})$ e e_1 e e_2 representam pontos fixos em $M(\mathcal{T})$.

1.2.2 Órbitas Periódicas

Dado $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, $r = 1, 2, \dots, \infty$, denote por X_t o fluxo induzido por X . Seja p um ponto

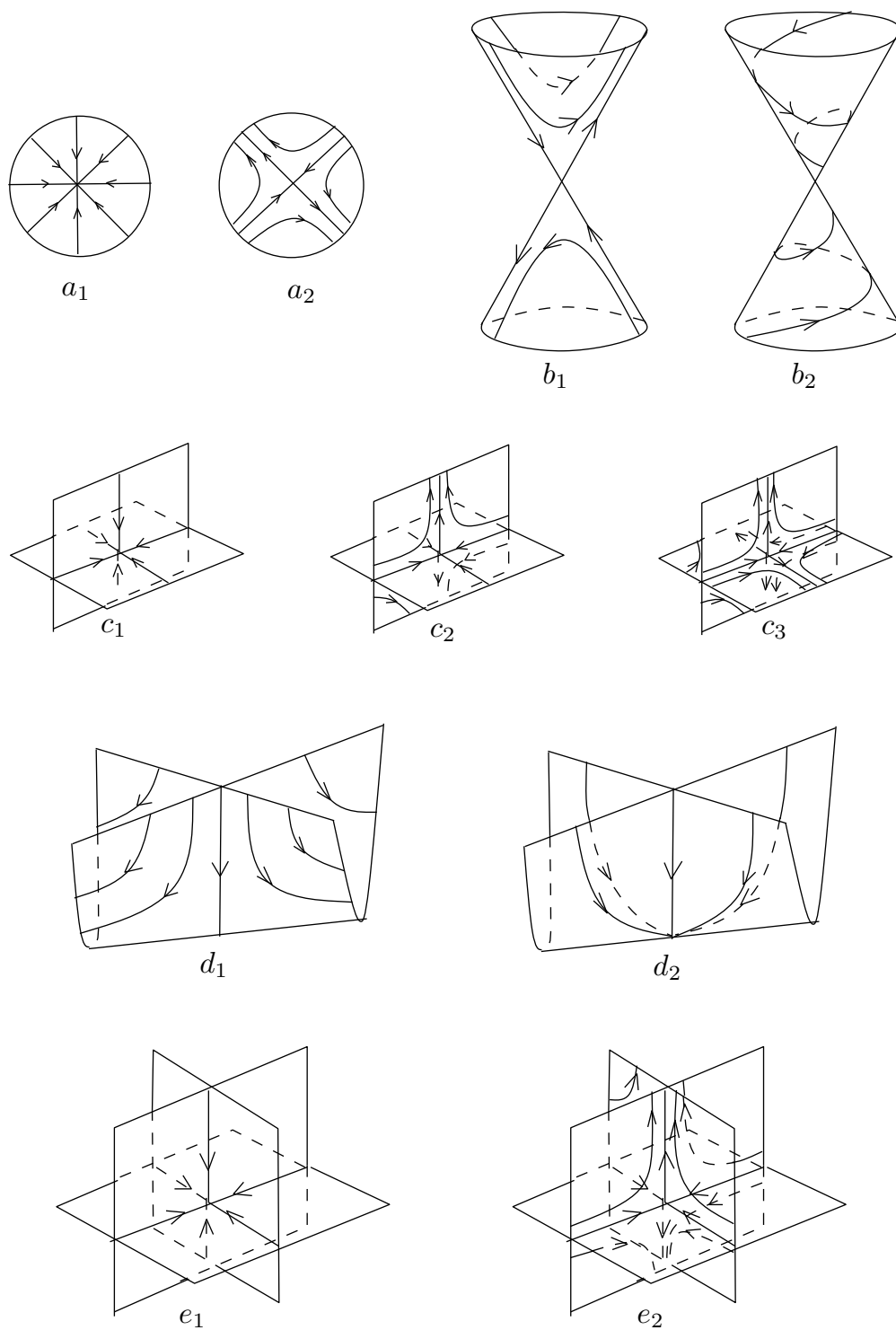


Figura 1.1: Tipos locais dos pontos fixos hiperbólicos

periódico de X de período minimal $\tau > 0$. Isto é, $X_t(p) = p$ somente se $t \in \tau\mathbb{Z}$. Como $M(\mathcal{C})$, $M(\mathcal{W})$ e $M(\mathcal{T})$ são conjuntos discretos então $p \in M(\mathcal{R}) \cup M(\mathcal{D})$ para qualquer ponto periódico p . A órbita de X que passa por p , $\gamma_p = \{X_t(p) : 0 \leq t \leq \tau\}$, é uma órbita periódica de período τ .

Seja $\hat{X}_\tau = \hat{\Psi} \circ X_\tau \circ \hat{\Psi}^{-1}$. Um dos autovalores da aplicação $D\hat{X}_\tau(0)$ é igual a 1 pois $D\hat{X}_\tau(0)X_\Psi(0) = X_\Psi(0)$ e os outros autovalores são ditos os não-triviais.

DEFINIÇÃO Um ponto periódico p é dito *hiperbólico*:

1. Se $p \in M(\mathcal{R})$ e $D\hat{X}_\tau(0)|_{\{z=0\}}$ tem 1 como único autovalor simples de norma igual a um.
2. Se $p \in M(\mathcal{D})$ e $D\hat{X}_\tau(0)$ tem 1 como único autovalor simples de norma igual a um.

Esta definição não depende de Ψ , $\hat{\Psi}$, $\hat{\Psi}^{-1}$ ou do ponto escolhido na órbita γ_p . Assim γ_p é chamada de *órbita periódica hiperbólica*.

Seja $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0, xy = 0\}$. Tome uma pequena vizinhança A_0 de $(0, 0, 0)$ em A tal que A_0 é uma seção transversal de X_Ψ . Seja $\pi = \theta \circ \hat{X}_\tau|_{A_0}$ a aplicação de Poincaré induzida por X , obtida pela composição de $\hat{X}_\tau|_{A_0}$ com a projeção θ ao longo das órbitas de X_Ψ sobre A . Agora como $D\pi(0) = D\hat{X}_\tau(0)|_A$ então a hiperbolicidade de órbitas em $M(\mathcal{D})$ é equivalente a $D\pi(0)$ ter autovalores de modulo diferente de um. Analogamente, para as órbitas periódicas hiperbólicas em $M(\mathcal{R})$ por considerar uma pequena vizinhança B_0 de $(0, 0, 0)$ em $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = y = 0\}$ no lugar de A . Desta forma a aplicação de Poincaré associada a $\gamma \subset M(\mathcal{R})$ é topologicamente conjugada a uma das seguintes aplicações lineares:

$$a_1 : \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad b_1 : \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Para órbitas periódicas hiperbólicas em $M(\mathcal{D})$ se mostra que existem vizinhanças U_0 , V_0 e W_0 de $0 \in \mathbb{R}^3$ em A_0 (com $U_0 \subset V_0$) e um homeomorfismo $h : V_0 \rightarrow W_0$, fixando $0 \in \mathbb{R}^3$, tal que $h \circ \pi \circ h^{-1}|_{U_0}$ ou $h \circ \pi^{-1} \circ h^{-1}|_{U_0}$ é igual a uma das seguintes aplicações lineares restrito a U_0 :

$$\begin{aligned} a_2 : \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad a_3 : \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad b_2 : \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad b_3 : \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ c_1 : \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad c_2 : \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad d_1 : \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad d_2 : \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

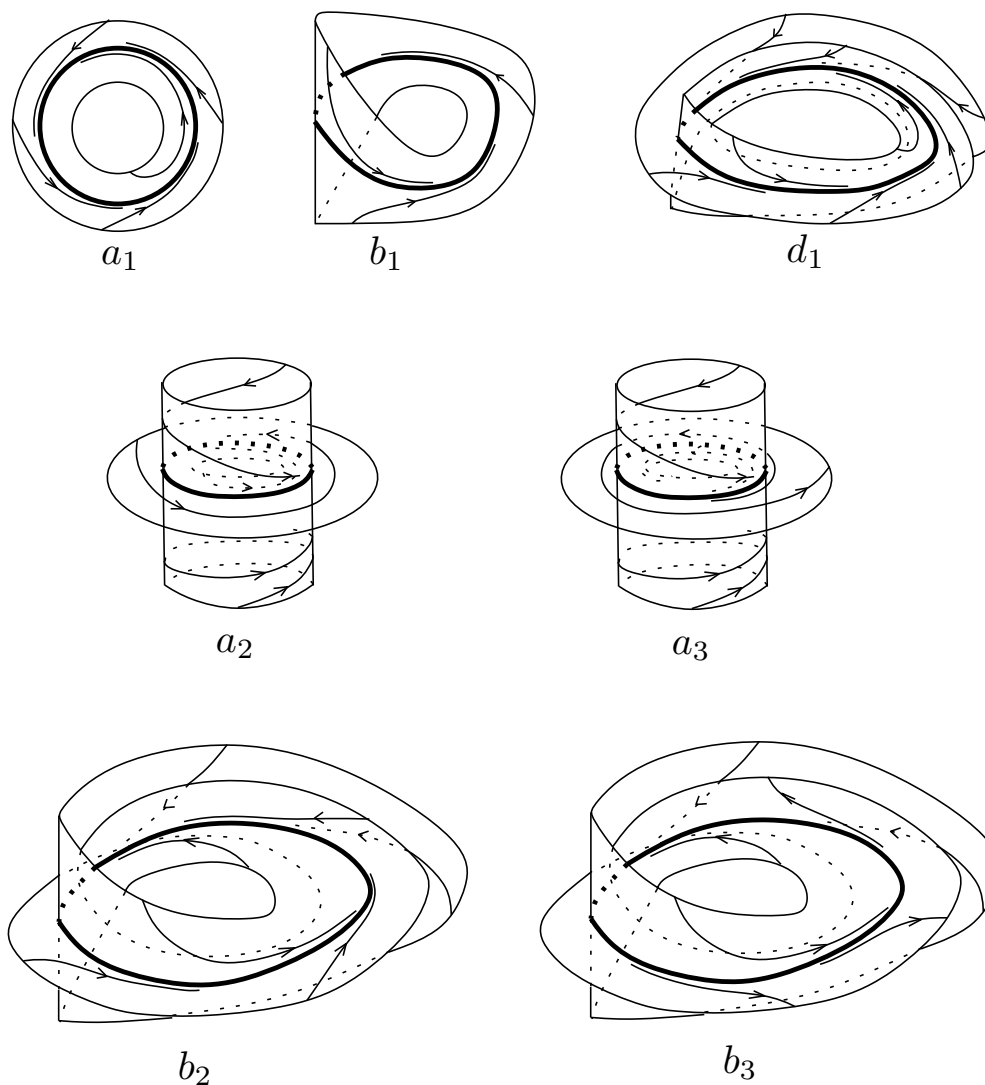
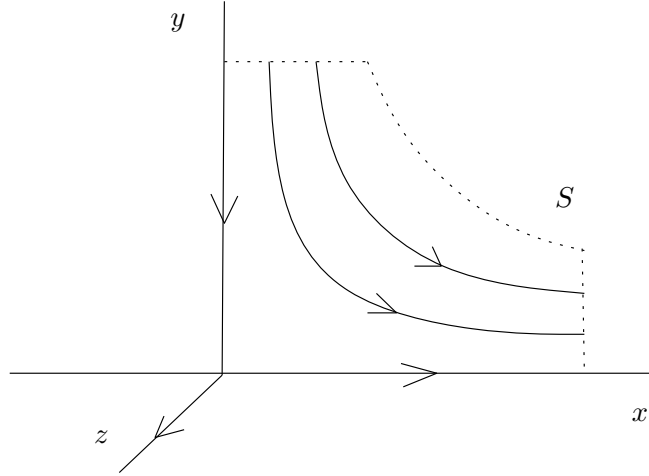


Figura 1.2: Alguns tipos locais de órbitas periódicas hiperbólicas

A seguir, na Figura 1.2, temos alguns tipos locais das órbitas periódicas hiperbólicas: (a_1) anel com uma órbita periódica atratora, (a_2) intersecção transversal de dois anéis com órbitas periódicas atradoras, (a_3) intersecção transversal de dois anéis uma com órbita periódica atratora e a outra repulsora, (b_1) faixa de Mobius com uma órbita periódica atratora, (b_2) intersecção transversal de duas faixas de Mobius com órbitas periódicas atradoras, (b_3) intersecção transversal de duas faixas de Mobius uma com órbita periódica atratora e a outra repulsora, (d_1) anel imerso no $\mathbb{R}^3$ auto-interceptandose numa órbita periódica atratora.

$$X = \lambda x \frac{\partial}{\partial x} + \mu y \frac{\partial}{\partial y} + \nu z \frac{\partial}{\partial z} + \text{termos de ordem maior}$$

Figura 1.3: Setor $\lambda > 0 > \mu, \nu > 0$

1.2.3 Ciclos Singulares

Seja $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, para $r = 1, 2, \dots, \infty$, com um número finito de singularidades, todas hiperbólicas. Seja $p \in M(\mathcal{T})$. Então X em p determina setores parabólicos ou hiperbólicos ⁽ⁱ⁾. Se $\lambda > 0 > \mu$ são os autovalores de $DX(p)$ restrito ao setor hiperbólico S de p , ver Figura 1.3, então definimos $\rho(S) = \rho(X, S, p) = |\mu|/\lambda$.

DEFINIÇÕES

1. Um *ciclo singular* é um conjunto conexo, compacto e não-vazio composto de singularidades $\{p_1, p_2, \dots, p_n, p_{n+1} = p_1\} \subset M(\mathcal{T})$ e trajetórias regulares $\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n = \gamma_0\} \subset M(\mathcal{D})$ tal que para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\omega(\gamma_{i-1}) = p_i = \alpha(\gamma_i)$.
2. Um *ciclo limite singular* $\mathcal{Z}$ é um ciclo singular que é o conjunto α -limite ou o conjunto ω -limite de uma trajetória $\tilde{\gamma} \subset M(\mathcal{R})$.
3. Sejam $S_1, S_2, \dots, S_n$ os setores dos pontos fixos de X contidos em $\mathcal{Z}$ e através do qual $\tilde{\gamma}$ aproxima $\mathcal{Z}$ positivamente (respectivamente negativamente). Dizemos que $\mathcal{Z}$ é *simple* se $\prod_{i=1}^n \rho(S_i) \neq 1$.

⁽ⁱ⁾Intuitivamente um setor hiperbólico S de p é uma região aberta em M tal que o ponto crítico p e suas separatrizes estão na fronteira de S .

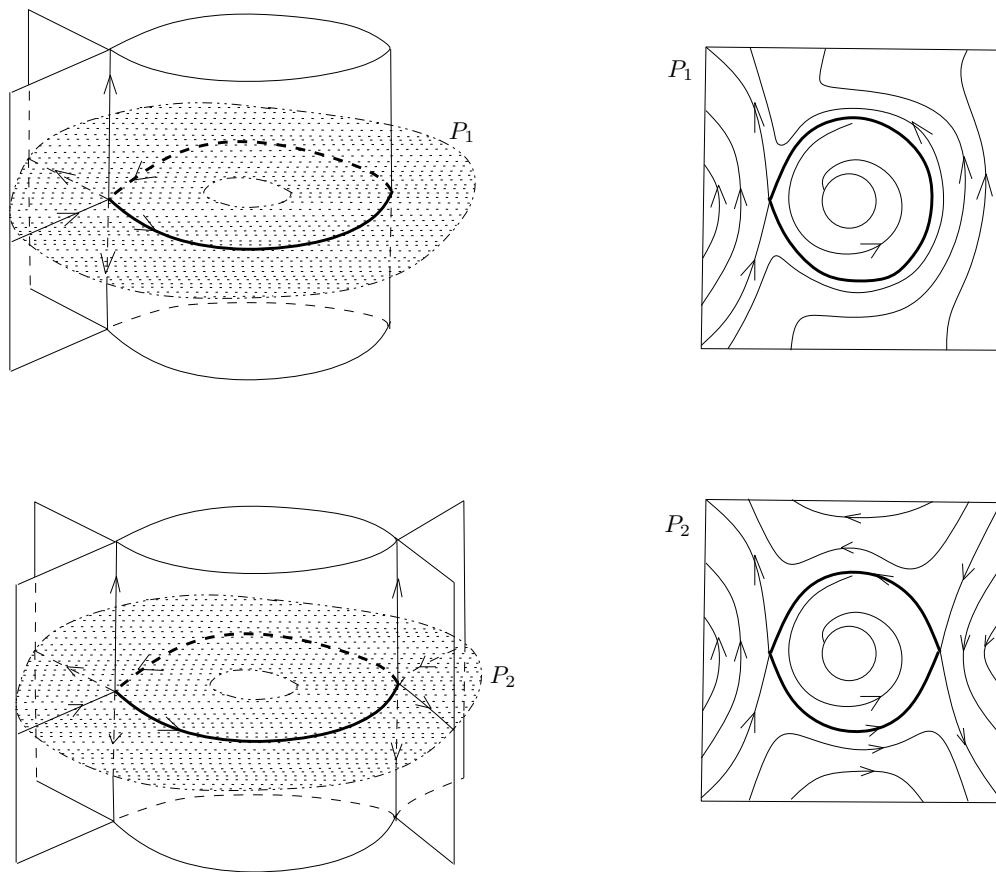


Figura 1.4: Alguns tipos locais de ciclos limites singulares simples

A seguir, na Figura 1.4, temos alguns tipos locais de ciclos limites singulares simples: P_1 e P_2 denotam os anéis horizontais em cada vizinhança dos ciclos. Cada anel é interceptado transversalmente por planos com estrutura de órbitas local topologicamente equivalente a um atrator, sela ou repulsor.

1.3 Estabilidade Estrutural

Se p é um ponto fixo de X , o conjunto

$$W_p^u = \{q \in M : X_t(q) \rightarrow p \text{ quando } t \rightarrow -\infty\}$$

(respectivamente $W_p^s = \{q \in M : X_t(q) \rightarrow p \text{ quando } t \rightarrow \infty\}$) é chamado a *variedade instável* (respectivamente *estável*) de p .

DEFINIÇÃO Dizemos que uma trajetória $\gamma \subset M(\mathcal{R})$ é uma *conexão sela* se existem duas singularidades hiperbólicas p e q de X tal que $\gamma = W^u(p) \cap W^s(q)$ e $W^u(p) \cup W^s(q)$ consiste de um número finito de trajetórias.

DEFINIÇÃO Seja $M \subset \mathbb{R}^l$ uma 2-variedade com singularidades simples. Chamamos $\Sigma^r(M)$ o conjunto de campos de vetores $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ tal que:

1. X tem um número finito de pontos fixos e órbitas periódicas, todos hiperbólicos.
2. Os ciclos limites singulares de X são simples e X não tem conexão sela.
3. O conjunto α - e ω -limite de cada trajetória de X é um ponto fixo, uma órbita periódica ou um ciclo singular.

O fluxo X_t associado ao campo $X \in \Sigma^r(M)$ denominamos por *fluxo Gutierrez-Sotomayor*.

Introduzimos a C^r -topologia compacta aberta no espaço $\mathfrak{X}^r(M)$, isto é, a topologia induzida de $C_c^r(\mathbb{R}^l, \mathbb{R}^l)$ a qual é definido pelas seminormas

$$\|X\|_r^K = \sum_{i=0}^r \sup_{x \in K} \|D^i X(x)\|$$

onde K é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^l$.

DEFINIÇÃO Seja M compacto. Os campos de vetores $X, Y \in \mathfrak{X}^r(M)$, são *topologicamente equivalentes* sobre M se existe um homeomorfismo $h : M \rightarrow M$, levando trajetórias de X em trajetórias de Y .

Os pontos interiores das classes de equivalência topológica de $\mathfrak{X}^r(M)$ são chamados C^r -campos de vetores *estruturalmente estáveis*. Em [6] os campos de vetores estruturalmente estáveis sobre variedades com singularidades simples foram caracterizados.

TEOREMA 1.1 *Em qualquer das seguintes hipóteses sobre $\mathfrak{X}^r(M)$:*

- (a) $r = 1$, ou
- (b) $r = 2, 3, \dots, \infty$ e cada componente conexa de $M(\mathcal{R})$ é uma 2-variedade orientável ou um subconjunto aberto de $P^2 \cup K^2 \cup (T^2 \sharp P^2)$.

Temos que:

1. $\Sigma^r(M)$ é aberto e denso em $\mathfrak{X}^r(M)$, e
2. $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ é estruturalmente estável se, e só se, $X \in \Sigma^r(M)$.

Quando a parte regular $M(\mathcal{R})$ é difeomorfa a um conjunto aberto de uma superfície fechada não-orientável de gênero pelo menos 4 (toro com mais de um cross-cap) existem certos tipos de órbitas recorrentes onde é desconhecido quando ou não estas órbitas podem ser destruídas por C^r —pequenas perturbações ($r \geq 2$). Se $M \subset \mathbb{R}^3$ então a parte regular de M é uma variedade orientável, conseqüentemente tem-se:

COROLÁRIO 1.1.1 *Se $M \subset \mathbb{R}^3$ então $\Sigma^r(M)$, para $r = 1, 2, \dots, \infty$, é aberto e denso e coincide com os campos de vetores estruturalmente estáveis de $\mathfrak{X}^r(M)$.*

Os pontos fixos hiperbólicos, órbitas periódicas hiperbólicas e ciclos limites singulares simples formam o conjunto limite $\mathcal{L}$ de um C^r -campo de vetores estruturalmente estável sobre uma variedade com singularidades simples.

Capítulo 2

Função de Lyapunov

Consideraremos o conjunto M dotado com a partição $\{M(\mathcal{G}), \mathcal{G}\}$, onde $\mathcal{G} = \mathcal{R}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{W}$ ou $\mathcal{T}$, a qual é um conjunto estratificado no sentido de Thom [10]. Vamos considerar funções $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ tais que sua restrição aos estratos seja uma função suave. Neste contexto, um *ponto crítico* de f é qualquer ponto $p \in M$ tal que $df|_{M(\mathcal{G})}(p) = 0$, onde $M(\mathcal{G})$ é o estrato de M que contém p . Um ponto crítico $p \in M$ é *não-degenerado* quando a $\dim(M(\mathcal{G})) \geq 1$ implica que a matriz Hessiana de $f|_{M(\mathcal{G})}$ nesse ponto é não-singular. O fato de um ponto $p \in M$ ser um ponto crítico depende tanto da estratificação de M quando da função f . Por exemplo, cada estrato de dimensão zero de M é um ponto crítico de f .

DEFINIÇÃO Seja M uma 2-variedade com singularidades simples. Se X_t é um fluxo Gutierrez-Sotomayor em M então uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ será chamada uma *função de Lyapunov* se:

1. Para cada estrato $M(\mathcal{G})$ de M :
 - (a) $f|_{M(\mathcal{G})}$ é uma função suave e f é contínua em M .
 - (b) Os pontos críticos de $f|_{M(\mathcal{G})}$ são não-degenerados e coincidem com as singularidades de X_t .
 - (c) $\frac{d}{dt}(f|_{M(\mathcal{G})}(X_t x)) < 0$, se x não é uma singularidade de X_t .
2. Dados p e q singularidades de X_t então $f(p) \neq f(q)$.

Em outras palavras, uma função de Lyapunov em M é uma coleção de funções de Lyapunov sobre os estratos de $M \subset \mathbf{R}^l$. Note, no entanto, que não exigimos que a função de Lyapunov seja

suave globalmente apenas continua. Assim, por exemplo, não exigimos que a função de Lyapunov seja a restrição de alguma função suave $\tilde{f} : \mathbf{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$.

2.1 Caso Local

A seguir fazemos uma construção local da função de Lyapunov f , i.e., construímos f em vizinhanças das singularidades de um fluxo Gutierrez-Sotomayor X_t .

TEOREMA 2.1 *Seja M uma 2-variedade com singularidades simples. Se $p \in M$ é uma singularidade de um fluxo Gutierrez-Sotomayor X_t em M que não seja do tipo sela-cone então existe uma vizinhança, suficientemente pequena, N de p , em M , e uma função f sobre N tal que f é uma função de Lyapunov sobre N .*

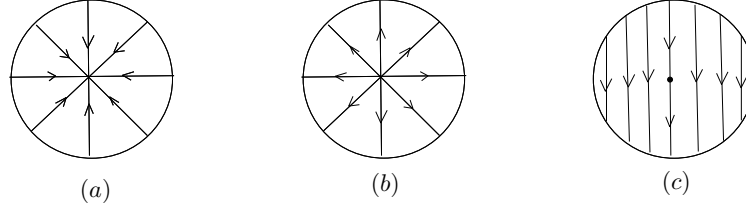
Demonstração.

- Se $p \in M(\mathcal{R})$ então uma vizinhança N de p em M é um disco e em coordenadas locais X tem a forma $\dot{x} = Ax + \phi(x)$ onde $\phi(0) = d\phi(0) = 0$ e os autovalores de A têm parte real diferente de zero. Esta condição é equivalente a equação de Lyapunov: existem matrizes simétricas Q e C com C positivo definido e Q não-singular tal que $A^T Q + QA = -C$. Definimos a função f dada por $f(x) = x^T Qx$. Como

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \dot{x}^T Qx + x^T Q\dot{x} \\ \frac{df}{dt} &= (Ax + \phi(x))^T Qx + x^T Q(Ax + \phi(x)) \\ \frac{df}{dt} &= x^T (A^T Q + QA)x + 2x^T Q\phi(x) \\ \frac{df}{dt} &= -x^T Cx + 2x^T Q\phi(x) \end{aligned}$$

onde $2x^T Q\phi(x)$ contém os termos de ordem maior, então para N suficientemente pequeno temos que f é uma função de Lyapunov sobre N .

- Se $p \in M(\mathcal{C})$, singularidade cone do tipo atrator ou repulsor então uma vizinhança N de p em M é formada por dois discos D_1 e D_2 identificados na singularidade p , veja Figura 1.1 (b_2). Podemos assumir, sem perda de generalidade, via um homeomorfismo que os discos D_i , $i = 1, 2$, estão no plano $\mathbb{R}^2$, veja Figura 2.1 (a) e (b). Nos discos D_i a dinâmica é como no

Figura 2.1: Discos D_i em N

caso $p \in M(\mathcal{R})$, portanto, aqui temos uma função de Lyapunov f_i . Agora seja a função f sobre N tal que:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{se } x \in D_1 \\ f_2(x) & \text{se } x \in D_2 \end{cases}$$

Então $f|_{N \setminus \{p\}}$ é uma função de Lyapunov, logo f é uma função de Lyapunov sobre N .

- Se $p \in M(\mathcal{D})$ então uma vizinhança N de p em M é formado por dois discos D_i , $i = 1, 2$, interceptado-se transversalmente mediante dois diâmetros d_1 e d_2 em D_1 e D_2 respectivamente, figura 1.1 (c_1) , (c_2) e (c_3) . Nos discos D_i a dinâmica é como no caso $p \in M(\mathcal{R})$, portanto aqui temos uma função de Lyapunov f_i . Por adicionar constantes apropriadas assumimos $f_1(p) = f_2(p)$ e usando homotetias redefinimos f_i de tal forma que $f_1(x) = f_2(y)$, em limite, com $x \in \partial d_1$ e $y \in \partial d_2$. Desta forma, a intersecção transversal dos discos D_i é feita via os homeomorfismos, nas órbitas γ de d_1 sobre as órbitas ζ de d_2 , dados por $x \rightarrow (f_2|_{\zeta}^{-1} \circ f_1|_{\gamma})(x)$. Assim, se $x \in D_1 \cap D_2$ então $f_1(x) = f_2(x)$. Logo $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{se } x \in D_1 \\ f_2(x) & \text{se } x \in D_2 \end{cases}$$

é uma função de Lyapunov sobre N . De fato, para cada estrato $M(\mathcal{G}) \subset N$, com $\mathcal{G} = \mathcal{R}$ ou $\mathcal{D}$, tem-se que $f|_{M(\mathcal{G})}$ é uma função de Lyapunov sobre $M(\mathcal{G})$.

- Se $p \in M(\mathcal{W})$ então uma vizinhança N de p em M pode ser obtida de um disco D com dois raios distintos r_1 e r_2 identificados, veja Figura 1.1 (d_1) e (d_2) . No disco D a dinâmica é como no caso $p \in M(\mathcal{R})$, portanto, aqui temos uma função de Lyapunov f . Redefinimos f para $N = D / \sim$ onde $\sim$ é dado por:

$$x \sim y \Leftrightarrow x = y \text{ ou } f(x) = f(y) \text{ com } x \in r_1 \subset W^s(p), y \in r_2 \subset W^s(p).$$

Logo $\bar{f} : N \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\bar{f}(\bar{x}) = f(x)$ é uma função de Lyapunov sobre N (na nossa notação posterior estaremos omitindo as barras). De fato, para cada estrato $M(\mathcal{G}) \subset N$, com $\mathcal{G} = \mathcal{R}$ ou $\mathcal{D}$, tem-se que $\bar{f}|_{M(\mathcal{G})}$ é uma função de Lyapunov sobre $M(\mathcal{G})$. De modo semelhante quando consideremos $W^u(p)$ em $\sim$.

- Se $p \in M(\mathcal{T})$ então uma vizinhança N de p em M é formado por três discos D_i , $i = 1, 2, 3$, que se interceptam transversalmente dois a dois ao longo de retas que se interceptam no ponto p , veja Figura 1.1 (e_1) e (e_2). Nos discos D_i a dinâmica é como no caso $p \in M(\mathcal{R})$, portanto, aqui temos uma função de Lyapunov f_i . Se $\tilde{N}$ é formado pelos discos D_i e D_j , interceptado transversalmente, com p um ponto duplo em $\tilde{N}$ então definimos $\tilde{f}$ em $\tilde{N}$, decrescente ao longo das órbitas, como em $p \in M(\mathcal{D})$. Denotemos por $d_i \subset D_i \subset \tilde{N}$ e $d_j \subset D_j \subset \tilde{N}$ as retas em $\tilde{N}$ e por $d_{ki} \subset D_k$ e $d_{kj} \subset D_k$ as retas em D_k respectivamente, por onde $\tilde{N}$ e o disco D_k se interceptam transversalmente. Por adicionar constantes apropriadas assumimos $\tilde{f}(p) = f_k(p)$ e usando homotetias redefinimos f_k de tal forma que $\tilde{f}(x) = f_k(y)$, em limite, com $x \in \partial d_i \cup \partial d_j$ e $y \in \partial d_{ki} \cup \partial d_{kj}$. Desta forma, a intersecção transversal do disco D_k com $\tilde{N}$ é feita via os homeomorfismos, nas órbitas γ de $d_{ki} \cup d_{kj}$ sobre as órbitas ζ de $d_i \cup d_j$, dados por $x \rightarrow (\tilde{f}|_{\zeta}^{-1} \circ f_k|_{\gamma})(x)$. Assim temos:

$$\begin{cases} \text{se } x \in D_1 \cap D_2 \text{ então } f_1(x) = f_2(x) \\ \text{se } x \in D_1 \cap D_3 \text{ então } f_1(x) = f_3(x) \\ \text{se } x \in D_2 \cap D_3 \text{ então } f_2(x) = f_3(x) \end{cases}$$

pois $\tilde{f}|_{D_i} = f_i$ e $\tilde{f}|_{D_j} = f_j$. Logo $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{se } x \in D_1 \\ f_2(x) & \text{se } x \in D_2 \\ f_3(x) & \text{se } x \in D_3 \end{cases}$$

é uma função de Lyapunov sobre N . De fato, para cada estrato $M(\mathcal{G}) \subset N$, com $\mathcal{G} = \mathcal{R}$ ou $\mathcal{D}$, tem-se que $f|_{M(\mathcal{G})}$ é uma função de Lyapunov sobre $M(\mathcal{G})$.

■

PROPOSIÇÃO 2.2 *Seja M uma 2-variedade com singularidades simples. Se $p \in M(\mathcal{C})$ é uma singularidade do tipo sela-cone de um fluxo Gutierrez-Sotomayor X_t em M então existe uma vizinhança, suficientemente pequena, N de p , em M , e uma função f sobre N tal que f é contínua e decresce ao longo das órbitas sobre $N - \{p\}$.*

Demonstração. Se $p \in M(\mathcal{C})$ é a singularidade do tipo sela-cone em M então uma vizinhança N de p em M é formada por dois discos D_1 e D_2 identificados na singularidade p , $D_1 \vee_p D_2$, veja Figura 1.1 (b_1). Podemos assumir, sem perda de generalidade, via um homeomorfismo que os discos D_i , $i = 1, 2$, estão no plano $\mathbb{R}^2$, veja Figura 2.1 (c). Nestas coordenadas locais sua dinâmica é dada por:

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = -x^2 - y^2 \end{cases}$$

Seja f_i a função sobre D_i dada por $f_i(x, y) = y$. Como $\frac{df_i}{dt} = -x^2 - y^2 < 0$ então f_i decresce ao longo das órbitas sobre D_i . Agora seja a função f sobre N tal que:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{se } x \in D_1 \\ f_2(x) & \text{se } x \in D_2 \end{cases}$$

Então $f|_{N \setminus \{p\}}$ é uma função contínua que decresce ao longo das órbitas sobre $N - \{p\}$. ■

TEOREMA 2.3 *Seja M uma 2-variedade com singularidades simples. Se $\gamma \subset M(\mathcal{R})$ é uma órbita periódica de um fluxo Gutierrez-Sotomayor X_t em M então existem uma vizinhança, suficientemente pequena, N de γ , em M , e uma função f sobre N tal que f decresce ao longo das órbitas sobre $N \setminus \gamma$ e é constante em γ .*

Demonstração. Se $\gamma \subset M(\mathcal{R})$ então uma vizinhança N de γ em M é um anel. Podemos assumir, sem perda de generalidade, via um homeomorfismo que o anel N esta no plano $\mathbb{R}^2$, figura 1.2 (a). Então nestas coordenadas locais, sua dinâmica esta dada por:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + y - y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

Definimos a função f sobre N dada por $f(x, y) = \frac{1}{4} \ln^2(x^2 + y^2)$. Como

$$\frac{df}{dt} = \frac{x}{x^2 + y^2} (\ln(x^2 + y^2))(x - y - x(x^2 + y^2)) + \frac{y}{x^2 + y^2} (\ln(x^2 + y^2))(x + y - y(x^2 + y^2))$$

$$= (\ln(x^2 + y^2))(1 - (x^2 + y^2)) < 0$$

então f decresce ao longo das órbitas sobre $N \setminus \gamma$ e é constante em γ . ■

2.2 Caso Global

A seguir estudamos o caso global, i.e., consideramos fluxos Gutierrez-Sotomayor, X_t , sem órbitas periódicas e sem ciclos singulares numa 2-variedade com singularidades simples, compacta e com fronteira ∂M (podendo ser vazia). Consideramos o fluxo X_t transversal a ∂M e denotamos por ∂M^- a fronteira de saída do fluxo e $\partial M^+ = \partial M \setminus \partial M^-$ a fronteira de entrada do fluxo.

Se um ponto p está no estrato S de M então está bem definido o espaço tangente $T_p S$. Mas se M é singular ao longo de S existem muitos “planos tangentes” a M em p e os denominamos por espaços tangentes generalizados. Formalmente, um *espaço tangente generalizado* em $p \in S$ é qualquer plano Q_p da forma $Q_p = \lim_{p_i \rightarrow p} T_{p_i} S'$ onde p_i é uma sequência de pontos num estrato S' cujo limite é p . O *fibrado tangente generalizado* Q à variedade com singularidades simples M é o conjunto de todos os pares (x, v) tais que $x \in M$ e $v \in Q_p$. Fixada uma métrica riemanniana sobre $\mathbb{R}^l$, para cada $p \in S$, o produto interno no subespaço Q_p o decompõe na soma direta $Q_p = T_p S \oplus (T_p S)^\perp$ onde $(T_p S)^\perp$ é o complemento ortogonal de $T_p S$ em Q_p . Isto significa que, localmente, a parte do fibrado tangente generalizado Q que se projeta sobre S se decompõe em um fibrado tangente TS e um *fibrado normal generalizado* $TS^\perp$.

LEMA 2.4 *Seja M uma 2-variedade com singularidades simples. Se X_t é um fluxo Gutierrez-Sotomayor em M então existe uma coleção disjunta de subvariedades ramificadas 1-dimensionais B_i de M , $i = 0, 1, \dots, m$, com as seguintes propriedades:*

1. $B_0 = \partial M^-$, $B_m = \partial M^+$
2. O fluxo X_t é transversal a cada B_i
3. Cada B_k , $k \neq 0, m$, divide M em duas regiões cujos fechos denotamos por G_k e H_k com $G_k \supset G_{k-1}$, $H_k \supset H_{k+1}$ e G_k contém exatamente k singularidades. Definindo $G_0 = B_0$, $H_0 = M$, $G_m = M$ e $H_m = B_m$. Temos que, para $i = 0, \dots, m$, $G_i \cap H_i = B_i$ e $G_i \cup H_i = M$.
4. B_k é a fronteira de entrada do fluxo X_t em G_k .

Demonstração. Por indução em k , tome $B_0 = \partial M^-$ e assumamos que temos construído B_{k-1} com $M = G_{k-1} \cup H_{k-1}$, $G_{k-1} \cap H_{k-1} = B_{k-1}$, G_{k-1} contém $k-1$ singularidades e a fronteira de entrada do fluxo X_t em G_{k-1} é B_{k-1} . Agora construímos B_k .

Seja $B_{k-1} \times [-1, 1]$ uma vizinhança produto ⁽ⁱ⁾ de B_{k-1} (no caso $k = 1$ tome $B_{k-1} \times [0, 1]$) com $B_{k-1} = B_{k-1} \times 0$, $B_{k-1} \times [0, 1] \subset H_{k-1}$ e o fluxo X_t é transversal a $B_{k-1} \times t$ para cada t .

1. Seja $p \in M(\mathcal{G})$, com $\mathcal{G} = \mathcal{R}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{W}$ ou $\mathcal{T}$, uma singularidade atratora de X_t .

Do teorema 2.1 podemos escolher uma vizinhança N de p de forma que X_t é transversal ao bordo. Em seguida fazemos a união disjunta de N com G'_k para obter G_k onde G'_k é obtido por colar em G_{k-1} o colar de B_{k-1} (contido em H_{k-1}), ver Figura 2.2.

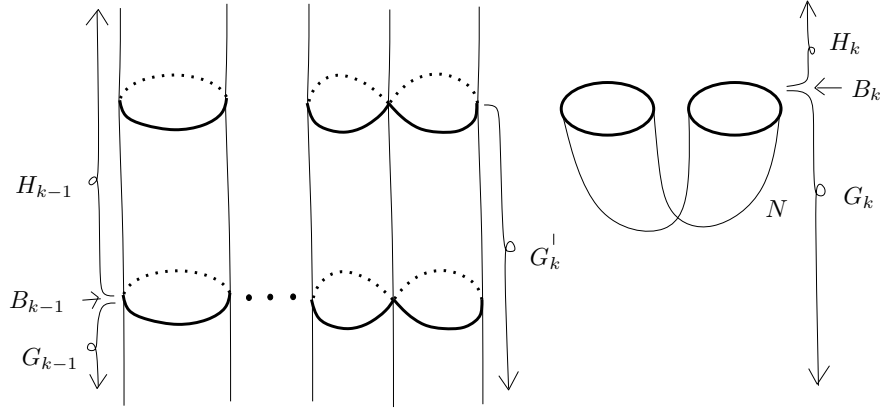


Figura 2.2: Construção de B_k

Portanto, $B_k = \partial G_k$ é uma união disjunta de curvas ramificadas com uma componente a mais que B_{k-1} se $p \in M(\mathcal{G})$ onde $\mathcal{G} = \mathcal{R}, \mathcal{D}, \mathcal{W}$ ou $\mathcal{T}$, e com 2 componentes a mais que B_{k-1} se $p \in M(\mathcal{C})$.

2. Seja $p \in M(\mathcal{G})$, com $\mathcal{G} = \mathcal{R}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{W}$ ou $\mathcal{T}$, uma singularidade de X_t que não é um atrator nem repulsor. Primeramente construímos S_ϵ para cada singularidade $p \in M(\mathcal{G})$.

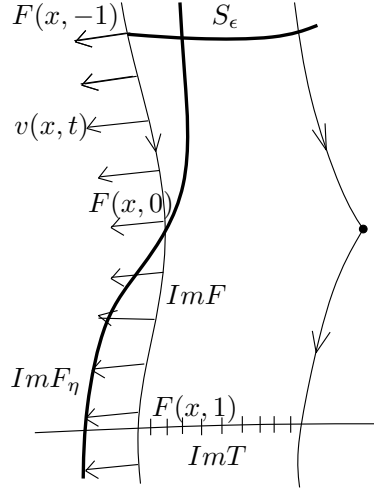
- (a) Se $p \in M(\mathcal{R})$ então do teorema 2.1 podemos escolher uma vizinhança N de p , uma função f sobre N e $\delta > 0$ tal que o disco limitado por $f^{-1}(\delta) \cap W^s(p) = \widetilde{W}$ está em N . Seja E_ϵ o fibrado normal de $W^s(p) \setminus \{p\}$ em $M(\mathcal{R})$ restrito a $\widetilde{W}$ de vetores com magnitude $\leq \epsilon$. Denote por S_ϵ a imagem de E_ϵ pela aplicação exponencial.

⁽ⁱ⁾bicolar de B_{k-1} e colar no caso $k = 1$.

- (b) Se $p \in M(\mathcal{C})$ então da proposição 2.2 podemos escolher uma vizinhança N de p , uma função f sobre N e $\delta > 0$ tal que o disco limitado por $f^{-1}(\delta) \cap W^s(p) = \widetilde{W}$ está em N . Seja E_ϵ o fibrado normal de $W^s(p) \setminus \{p\}$ em $M(\mathcal{R})$ restrito a $\widetilde{W}$ de vetores com magnitude $\leq \epsilon$. Denote por S_ϵ a imagem de E_ϵ pela aplicação exponencial.
- (c) Se $p \in M(\mathcal{W})$ então do teorema 2.1 podemos escolher uma vizinhança N de p , uma função f sobre N e $\delta > 0$ tal que os discos limitado por p e $f^{-1}(\delta) \cap W^s(p) = \widetilde{W}$ estão em N . Seja E_ϵ o fibrado normal generalizado de $W^s(p) \setminus \{p\}$ em M restrito a $\widetilde{W}$ de vetores com magnitude $\leq \epsilon$. Denote por S_ϵ a imagem de E_ϵ pela aplicação exponencial restrita a cada Q_p .
- (d) Se $p \in M(\mathcal{D})$ então do teorema 2.1 podemos escolher uma vizinhança N de p , uma função f sobre N e $\delta > 0$ tal que os discos limitado por $f^{-1}(\delta) \cap W^s(p) \cap \overline{N \setminus W^s(p)} = \widetilde{W}$ estão em N . Seja E_ϵ o fibrado normal generalizado de $W^s(p) \cap \overline{N \setminus W^s(p)}$ em $\overline{N \setminus W^s(p)}$ restrito a $\widetilde{W}$ de vetores com magnitude $\leq \epsilon$. Denote por S_ϵ a imagem de E_ϵ pela aplicação exponencial restrita a cada Q_p .
- (e) Se $p \in M(\mathcal{T})$ então do teorema 2.1 podemos escolher uma vizinhança N de p , uma função f sobre N e $\delta > 0$ tal que os discos limitado por p e $f^{-1}(\delta) \cap W^s(p) \cap \overline{N \setminus W^s(p)} = \widetilde{W}$ estão em N . Seja E_ϵ o fibrado normal generalizado de $W^s(p) \cap \overline{N \setminus W^s(p)}$ em $\overline{N \setminus W^s(p)}$ restrito a $\widetilde{W}$ de vetores com magnitude $\leq \epsilon$. Denote por S_ϵ a imagem de E_ϵ pela aplicação exponencial restrita a cada Q_p .

Assumimos ϵ suficientemente pequeno tal que S_ϵ é transversal a X . Definimos o mergulho $T : S_\epsilon \setminus \widetilde{W} \rightarrow \widetilde{V}$, com $\widetilde{V} = B_{k-1} \times 1$, que mapeia $x \in S_\epsilon \setminus \widetilde{W}$ no ponto da órbita de x que intercepta $\widetilde{V}$.

Agora definimos um mergulho $C^\infty F : \partial S_\epsilon \times [-1, 1] \rightarrow M$ dado por $F(x, -1) = x$, $F(x, 1) = T(x)$ e $F(x, t)$ está na única órbita que liga x e $T(x)$ e a distancia de x é proporcional a t . Então estendemos F para um mergulho C^∞ de $\partial S_\epsilon \times [-2, 2]$ que manda $x \times [-2, 2]$ numa órbita regular, para cada x . Finalmente modificamos F ligeiramente para um novo mergulho C^∞ . Fixado uma métrica riemanniana sobre $M(\mathcal{R})$, seja $v(p, t)$ o campo de vetores normal unitário sobre a imagem de F cuja orientação é dada pelos vetores sobre ∂S_ϵ orientado para fora de $\widetilde{W}$. Para η , constante positiva pequena, seja $F_\eta(p, t)$ o ponto a uma distancia ηt de $F(p, t)$ ao longo da geodésica determinada por $v(p, t)$, ver Figura 2.3.

Figura 2.3: Construção de F_η (uma face)

Escolhemos η pequeno tal que a imagem de F_η , imF_η , é disjunto da imagem de T , imT . Também temos que X_t é transversal a imF_η , e $imF_\eta \cap S_\epsilon$, $imF_\eta \cap \tilde{V}$ são difeomorfos respectivamente a $imF \cap S_\epsilon$, $imF \cap \tilde{V}$.

Desta forma obtemos uma subvariedade 1-dimensional (singular) B'_k em M feito das seguintes peças:

- A parte de S_ϵ limitado por $imF_\eta \cap S_\epsilon$.
- $\tilde{V}$ menos peças limitadas por $imF_\eta \cap \tilde{V}$ que contem $W^u(p) \cap \tilde{V}$.
- A parte de imF_η limitado por $imF_\eta \cap S_\epsilon$ e $imF_\eta \cap \tilde{V}$.

Então temos que X_t é transversal a B'_k . Verifica-se que $M \setminus B'_k = G'_k \cup H'_k$ com G'_k contendo G_{k-1} e o ponto singular p . De fato, G'_k se diferencia de G_k pois $B'_k = \partial G'_k$ não é uma subvariedade diferenciável, i.e., falha a diferenciabilidade ao longo de $imF_\eta \cap S_\epsilon$ e $imF_\eta \cap \tilde{V}$. Isto é suavizado de forma a obter o desejado G_k e B_k . De fato, pegue uma vizinhança U de $imF_\eta \cap S_\epsilon$ (ou $imF_\eta \cap \tilde{V}$) “difeomorfo” a $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, com $\mathbb{R}_+ = \{t; 0 \leq t < \infty\}$, agora mapeie $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ sobre o semiplano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ pela correspondência $(r \cos \theta, r \sin \theta) \xrightarrow{f} (r \cos 2\theta, r \sin 2\theta)$ para $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Assim f é um difeomorfismo, exceto no ponto singular, ver [7].

3. Finalmente, se $p \in M(\mathcal{G})$, com $\mathcal{G} = \mathcal{R}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{W}$ ou $\mathcal{T}$, é uma singularidade repulsora de X_t então pelo teorema 2.1 escolhemos uma vizinhança N de p cujo bordo é transversal a X_t .

Logo $G_k = G_{k-1} \cup B_{k-1} \times [0, 1] \cup N$.

■

Se considerarmos o caso particular de uma 2-variedade com singularidades cone, i.e., variedades que só admitem singularidades do tipo cone, observamos neste caso que no lugar de ter 1-subvariedades ramificadas sempre teremos curvas fechadas. No capítulo 4, lema 5.2 apresentamos este lema para as variedades com singularidades cone.

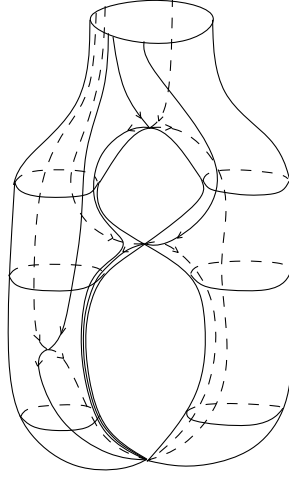


Figura 2.4: Curvas fechadas B_i numa variedade com singularidades cone

LEMA 2.5 *Seja M uma 2-variedade com singularidades simples. Se X_t é um fluxo Gutierrez-Sotomayor com uma única singularidade p que não seja do tipo sela-cone então existe uma função de Lyapunov f sobre M tal que f tem valor $c - \frac{1}{2}$ em ∂M^- , $c + \frac{1}{2}$ em ∂M^+ e $f(p) = c$.*

Demonstração. Primeiro definimos a função desejada numa vizinhança de $W^s(p) \cup W^u(p)$. Seja N uma vizinhança de p e f uma função em N como no teorema 2.1 e assumimos $f(p) = c$ por adicionar constantes apropriadas. Então seja $f^{-1}(c + \delta) \cap N = R^+$, $f^{-1}(c - \delta) \cap N = R^-$, com δ escolhido como no lema prévio ⁽ⁱⁱ⁾, $R_\epsilon^+ = \{(u, v) \in R; \|v\| \leq \epsilon\}$ e $R_\epsilon^- = \{(u, v) \in R^-; \|u\| \leq \epsilon\}$.

Fixemos uma métrica riemanniana sobre $\mathbb{R}^l$ e tomemos $\epsilon = \frac{1}{10}$. Para $x \in R_\epsilon^+$ redefinamos f sobre $X_t(x)$, $t \leq 0$, tal que $f(X_0(x)) = c + \delta$, $f(y) = c + \frac{1}{2}$ onde y é o ponto de $X_t(x)$ que intercepta ∂M^+ , e define-se f nos pontos da órbita que conecta $X_0(x)$ e y , proporcional ao comprimento

⁽ⁱⁱ⁾o disco limitado por $f^{-1}(c + \delta) \cap W^s(p)$ esta em N .

de arco. Assim obtivemos uma função f numa vizinhança de $W^s(p)$ satisfazendo as condições de fronteira adequadas, porém não diferenciável em $f^{-1}(c + \delta)$. Podemos suavizar f , ver 8.1 e 8.2 de [7], de forma a ser C^∞ em $f^{-1}(c + \delta)$.

Da mesma forma usando R_ϵ^- , obtemos f definido numa vizinhança Q de $W^u(p)$ assim como na vizinhança de $W^s(p)$, satisfazendo $f(Q \cap \partial M^-) = c - \frac{1}{2}$. Portanto, obtemos a função f desejada numa vizinhança aberta P de $W^s(p) \cup W^u(p)$. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que se $x \in P$ então $X_t(x) \in P$, $\forall t$.

Agora estendemos f para toda a variedade M . Escolha $U \subset \partial M^- \cap P$ uma vizinhança compacta de $W^u(p) \cap \partial M^-$. Então seja λ uma função real C^∞ sobre ∂M^- satisfazendo $0 \leq \lambda \leq 1$ com $\lambda = 1$ em U e $\lambda = 0$ em $\partial M^- \setminus P \cap \partial M^-$. Para $x \in M \setminus (W^s(p) \cup W^u(p))$ seja $l(x)$ o comprimento da órbita passando em x , $v(x)$ o comprimento da órbita ligando $\{X_t(x)\} \cap \partial M^-$ a x e $g(x) = c - \frac{1}{2} + \frac{v(x)}{l(x)}$. Logo a função $\bar{\lambda}f + (1 - \bar{\lambda})g$ sobre M é a função procurada onde $\bar{\lambda}(x) = \lambda(X_t(x) \cap \partial M^-)$ ou 1 se $X_t(x)$ não intercepta ∂M^- . ■

TEOREMA 2.6 *Seja M uma 2-variedade compacta com singularidades simples. Se X_t é um fluxo Gutierrez-Sotomayor em M que não contem singularidades do tipo sela-cone então existe uma função de Lyapunov f sobre M .*

Demonstração. Considere $G_k - G_{k-1}$, $\forall k$, definido no lema 2.4. Seja f_k a função do lema 2.5 definida sobre o fecho de $G_k - G_{k-1}$. Justapondo os f_k obtemos uma função f bem definida sobre M e suave ⁽ⁱⁱⁱ⁾ numa vizinhança de $B_1, \dots, B_{m-1}$. Portanto, a função de Lyapunov desejada é obtida. ■

Para as singularidades do tipo sela-cone do fluxo X_t temos pela proposição 2.2 que existe uma vizinhança, suficientemente pequena, N de p , em M , e uma função f sobre N tal que f é continua e decresce ao longo das órbitas sobre $N - \{p\}$. Usando a mesma construção do lema 2.5 e teorema 2.6 estendemos f para a 2-variedade compacta com singularidades simples.

⁽ⁱⁱⁱ⁾ como na prova do lema 2.5.

Capítulo 3

O Índice de Conley

Neste capítulo calculamos o índice de Conley de fluxos Gutierrez-Sotomayor, X_t , em variedades com singularidades simples M . Posteriormente, apresentamos uma relação entre as singularidades da parte regular e da parte singular do fluxo com a homologia da variedade M .

O índice de Conley está definido para fluxos contínuos em espaços topológicos. Um conjunto compacto $N \subset M$ é uma *vizinhança isolante* se $Inv(N) := \{x \in N; X_t(x) \subset N, \forall t\} \subset int(N)$ onde $int(N)$ denota o interior de N . Λ é um *conjunto invariante isolado* se $\Lambda = Inv(N)$ para alguma vizinhança isolante N .

Se Λ é um conjunto invariante isolado, um par topológico⁽ⁱ⁾ (N, L) é dito *par índice* para Λ se:

1. $\Lambda = Inv(cl(N \setminus L))$ e $N \setminus L$ é uma vizinhança isolante de Λ .
2. L é *positivamente invariante* em N , isto é, dado $x \in L$ e $X_t(x) \subset N$ para $t \in [0, t_0]$ então $X_t(x) \subset L$ para $t \in [0, t_0]$.
3. L é um *conjunto de saída* para N ; isto é, dado $x \in N$ e $t_1 > 0$ tal que $X_{t_1}(x) \notin N$ então existe $t_0 \in [0, t_1]$ tal que $X_t(x) \subset N$, para $t \in [0, t_0]$, e $X_{t_0}(x) \in L$.

Em [2] Conley mostra a existência de um par índice (N, L) para um conjunto invariante isolado Λ . Mostra também que se (N, L) e (N', L') são pares índices para um conjunto invariante isolado Λ então $(N/L, [L])$ tem o mesmo tipo de homotopia de $(N'/L', [L'])$.

DEFINIÇÕES

⁽ⁱ⁾Um *par topológico* é um par ordenado (N, L) de espaços tal que L é um subespaço fechado de N .

1. O *índice homotópico de Conley* de Λ , $h(\Lambda)$, é o tipo de homotopia do espaço pontuado ⁽ⁱⁱ⁾ $(N/L, [L])$ onde (N, L) é qualquer par índice para Λ .
2. O *índice homológico de Conley* de Λ é definido por $CH_*(\Lambda) := H_*(h(\Lambda))$ onde H_* denota a homologia com coeficientes inteiros.
3. O *índice numérico de Conley* de Λ é definido como os ranks do índice homológico de Conley de Λ , $h_* = \dim CH_*(\Lambda)$.

Desta forma o índice homotópico é o tipo de homotopia de um espaço topológico. Como a homologia é um invariante de espaços homotópicos então o índice homológico esta bem definido. Para o cálculo do índice de Conley homológico usaremos o isomorfismo $\tilde{H}_n(X \vee Y) \approx \tilde{H}_n(X) \oplus \tilde{H}_n(Y)$ se os pontos bases de X e Y que são identificados em $X \vee Y$ são retrato de deformações de vizinhanças $U \subset X$ e $V \subset Y$.

3.1 Cálculo do Índice de Conley

Nesta seção calcularemos o índice de Conley para fluxos Gutierrez-Sotomayor. Antes de enunciar o teorema fazemos a seguinte denominação. Seja $p \in M$ uma singularidade de um fluxo Gutierrez-Sotomayor X_t e N uma vizinhança suficientemente pequena, como na demonstração do lema 2.1. Dizemos que p é:

- do tipo **a** se $p \in M(\mathcal{G})$, onde $\mathcal{G} = \mathcal{R}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{W}$ ou $\mathcal{T}$, é uma singularidade atratora.
- do tipo **s** se $p \in M(\mathcal{R}) \cup M(\mathcal{C})$ não é uma singularidade atratora nem repulsora.
- do tipo **r** se $p \in M(\mathcal{G})$, onde $\mathcal{G} = \mathcal{R}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{W}$ ou $\mathcal{T}$, é uma singularidade repulsora.
- do tipo **si** se $p \in M(\mathcal{W})$ é uma singularidade sela num disco bidimensional com sua variedade instável identificada.
- do tipo **se** se $p \in M(\mathcal{W})$ é uma singularidade sela num disco bidimensional com sua variedade estável identificada.

⁽ⁱⁱ⁾Um par topológico (N, L) onde L consiste de um ponto é dito *espaço pontuado*. Dado um par (N, L) definimos o espaço pontuado $(N/L, [L]) := ((N \setminus L) \cup [L], [L])$ onde $[L]$ denota a classe de equivalência de pontos em L na relação: $x \sim y \Leftrightarrow x = y$ ou $x, y \in L$. A topologia no espaço pontuado $(N/L, [L])$ é a topologia quociente. Se $L = \emptyset$ então $(N/L, [L]) := (N \sqcup x_0, x_0)$ onde $x_0 \notin N$.

- do tipo **as** se $p \in M(\mathcal{D})$ e N é formado por um atrator e uma sela.
- do tipo **rs** se $p \in M(\mathcal{D})$ e N é formado por um repulsor e uma sela.
- do tipo **ssi** se $p \in M(\mathcal{D})$ e N é formado por duas selas com interseção ao longo de suas variedades instáveis.
- do tipo **sse** se $p \in M(\mathcal{D})$ e N é formado por duas selas com interseção ao longo de suas variedades estáveis.
- do tipo **ass** se $p \in M(\mathcal{T})$ e N é formado por um atrator e duas selas.
- do tipo **rss** se $p \in M(\mathcal{T})$ e N é formado por um repulsor e duas selas.

TEOREMA 3.1 *Sejam M uma 2-variedade com singularidades simples e X_t um fluxo Gutierrez-Sotomayor em M . Seja p uma singularidade de X_t .*

1. Se $p \in M(\mathcal{R})$ então

- (a) Se p é do tipo **a** então $h(p) = S^0$.
- (b) Se p é do tipo **s** então $h(p) = S^1$.
- (c) Se p é do tipo **r** então $h(p) = S^2$.

2. Se $p \in M(\mathcal{C})$ então

- (a) Se p é do tipo **a** então $h(p) = S^0$.
- (b) Se p é do tipo **s** então $h(p) = S^1$.
- (c) Se p é do tipo **r** então $h(p) = S^2 \vee S^2 \vee S^1$.

3. Se $p \in M(\mathcal{W})$ então

- (a) Se p é do tipo **a** então $h(p) = S^0$.
- (b) Se p é do tipo **r** então $h(p) = S^2 \vee S^2$.
- (c) Se p é do tipo **si** então $h(p) = \bar{0}$ o espaço a um ponto.
- (d) Se p é do tipo **se** então $h(p) = S^1$.

4. Se $p \in M(\mathcal{D})$ então

- (a) Se p é do tipo **a** então $h(p) = S^0$.
- (b) Se p é do tipo **r** então $h(p) = S^2 \vee S^2 \vee S^2$.
- (c) Se p é do tipo **as** então $h(p) = S^1$.
- (d) Se p é do tipo **rs** então $h(p) = S^2$.
- (e) Se p é do tipo **ssi** então $h(p) = S^1$.
- (f) Se p é do tipo **sse** então $h(p) = S^1 \vee S^1 \vee S^1$.

5. Se $p \in M(\mathcal{T})$ então

- (a) Se p é do tipo **a** então $h(p) = S^0$.
- (b) Se p é do tipo **r** então $h(p) = \bigvee_{i=1}^7 S^2$.
- (c) Se p é do tipo **ass** então $h(p) = S^1$.
- (d) Se p é do tipo **rss** então $h(p) = S^2$.

Demonstração. Seja p uma singularidade de X_t . Escolhemos um par índice (N, L) para p em M e calculamos o índice homotópico de Conley $h(p)$.

1. Se $p \in M(\mathcal{R})$, seja N um disco fechado e $L = \partial N^-$ a região de saída de N . Logo o índice homotópico de Conley de p é S^0 (S^1 ou S^2) se p é um atrator (sela ou repulsor).
2. Se $p \in M(\mathcal{C})$ então uma vizinhança N de p em M é formada por dois discos de dimensão dois D_1 e D_2 centrados em p tal que $D_1 \cap D_2 = \{p\}$.
 - (a) Se p é do tipo **a** então $L = \emptyset$ e portanto é identificado a um ponto. Por outro lado, o cone duplo N tem o mesmo tipo de homotopia de um ponto, segue que $h(p) = S^0$. Ver Figura 3.1.

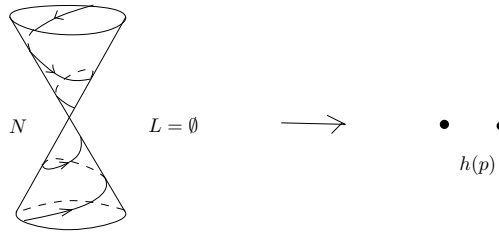


Figura 3.1: Índice homotópico de Conley do tipo **a** em $M(\mathcal{C})$

- (b) Se p é do tipo **s** então $w^u(p) \cap \partial N = \{x_1, x_2\}$ onde $x_i \in \partial D_i$, $i = 1, 2$. Sejam $C_i \subset \partial D_i$, $i = 1, 2$, os dois arcos por onde o fluxo sae então $x_i \in C_i$, $i = 1, 2$ e $L = C_1 \cup C_2$ é o conjunto de sída para N . Colapsando L a um único ponto e fazendo uma retração ao longo da variedade estável em N obtemos que N/L tem o tipo de homotopia de S^1 , i.e., $h(p) = S^1$. Ver Figura 3.2.

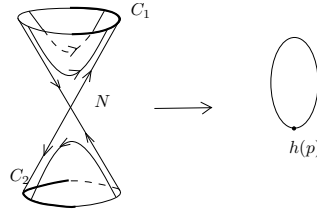


Figura 3.2: Índice homotópico de Conley do tipo **s** em $M(\mathcal{C})$

- (c) Se p é do tipo **r** então $L = \partial N = \partial D_1 \cup \partial D_2$. Colapsando L a um único ponto obtemos que N/L tem o tipo de homotopia de $S^2 \vee S^2 \vee S^1$, i.e., $h(p) = S^2 \vee S^2 \vee S^1$. Ver Figura 3.3.

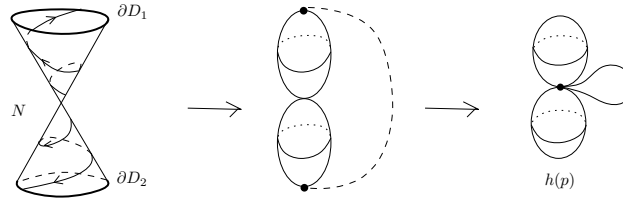


Figura 3.3: Índice homotópico de Conley do tipo **r** em $M(\mathcal{C})$

3. Se $p \in M(\mathcal{D})$ então uma vizinhança N de p em M é formado por dois discos D_i , $i = 1, 2$, interceptado-se transversalmente mediante dois diâmetros d_1 e d_2 em D_1 e D_2 respectivamente.

- (a) Se p é do tipo **a** então $L = \emptyset$ e portanto é identificado a um ponto. Por outro lado, N tem o mesmo tipo de homotopia de um ponto, segue que $h(p) = S^0$. Ver Figura 3.4.
- (b) Se p é do tipo **r** então $L = \partial N = \partial D_1 \cup \partial D_2$ onde ∂D_1 e ∂D_2 se interceptam transversalmente em dois pontos. Colapsando L a um único ponto obtemos que N/L tem o tipo de homotopia de $S^2 \vee S^2 \vee S^2$, i.e., $h(p) = S^2 \vee S^2 \vee S^2$. Ver Figura 3.5.

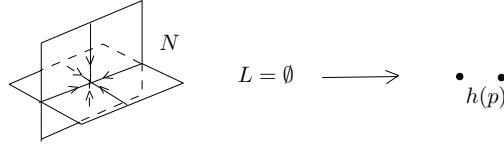


Figura 3.4: Índice homotópico de Conley do tipo **a** em $M(\mathcal{D})$

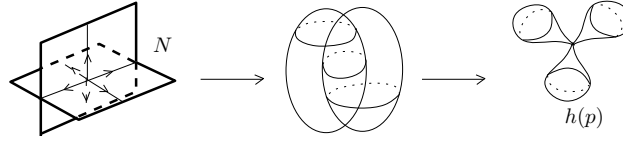


Figura 3.5: Índice homotópico de Conley do tipo **r** em $M(\mathcal{D})$

- (c) Se p é do tipo **as** então $w^u(p) \cap \partial N = \{x_1, x_2\}$ onde $x_1, x_2 \in \partial D_i$ e D_i é o disco que contem a sela. Sejam $C_1, C_2 \subset \partial D_i$ os dois arcos por onde o fluxo sae entao $x_i \in C_i$, $i = 1, 2$ e $L = C_1 \cup C_2$ é o conjunto de sída para N . Colapsando L a um único ponto e fazendo uma retração ao longo da variedade estável em N obtemos que N/L tem o tipo de homotopia de S^1 , i.e., $h(p) = S^1$. Ver Figura 3.6.

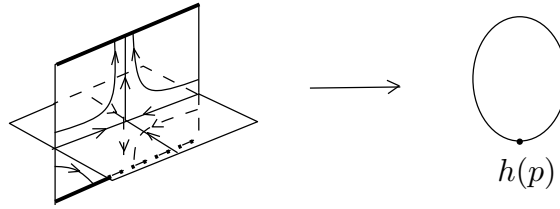


Figura 3.6: Índice homotópico de Conley do tipo **as** em $M(\mathcal{D})$

- (d) Se p é do tipo **rs** então $w^u(p) \cap \partial N = \partial D_i$ onde D_i é o disco que contem o repulsor. Sejam $C_1, C_2 \subset \partial D_j$, $j \neq i$, os dois arcos transversais a ∂D_i por onde o fluxo sae entao $L = \partial D_i \cup C_1 \cup C_2$ é o conjunto de sída para N . Colapsando L a um único ponto e fazendo uma retração ao longo da variedade estável em N obtemos que N/L tem o tipo de homotopia de S^2 , i.e., $h(p) = S^2$. Ver Figura 3.7.
- (e) Se p é do tipo **ssi** então $w^u(p) \cap \partial N = \{x_1, x_2\}$ onde $x_1, x_2 \in \partial D_1$ e $x_1, x_2 \in \partial D_2$. Sejam $B_1, B_2 \subset \partial D_1$ e $C_1, C_2 \subset \partial D_2$ os arcos por onde o fluxo sae então $B_i \cap C_i = \{x_i\}$ e $L = (B_1 \cup C_1) \sqcup (B_2 \cup C_2)$ é o conjunto de sída para N . Colapsando L a um único ponto e fazendo uma retração ao longo da variedade estável em N obtemos que N/L tem o

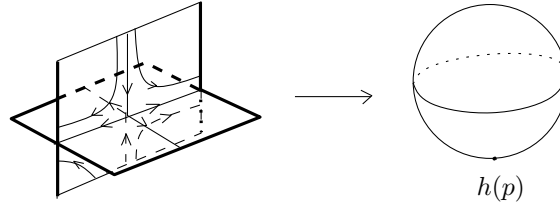


Figura 3.7: Índice homotópico de Conley do tipo **rs** em $M(\mathcal{D})$

tipo de homotopia de S^1 , i.e., $h(p) = S^1$. Ver Figura 3.8.

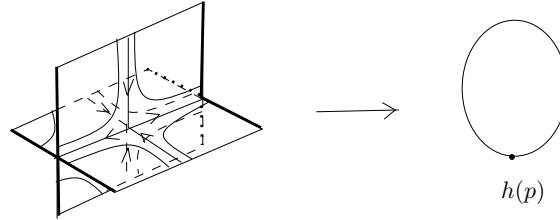


Figura 3.8: Índice homotópico de Conley do tipo **ssi** em $M(\mathcal{D})$

- (f) Se p é do tipo **sse** então $w^u(p) \cap \partial N = \{x_1, x_2, y_1, y_2\}$ onde $x_1, x_2 \in \partial D_1$ e $y_1, y_2 \in \partial D_2$. Sejam $B_1, B_2 \subset \partial D_1$ e $C_1, C_2 \subset \partial D_2$ os arcos por onde o fluxo sae entao $x_i \in B_i$, $i = 1, 2$, $y_i \in C_i$, $i = 1, 2$, e $L = B_1 \sqcup B_2 \sqcup C_1 \sqcup C_2$ é o conjunto de sída para N . Colapsando L a um único ponto e fazendo uma retração ao longo da variedade estável em N obtemos que N/L tem o tipo de homotopia de $S^1 \vee S^1 \vee S^1$, i.e., $h(p) = \bigvee_{i=1}^3 S^1$. Ver Figura 3.9.

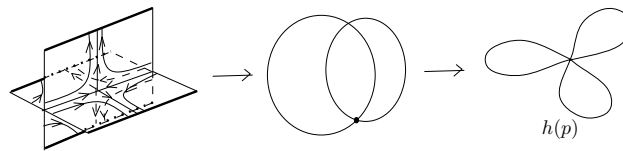


Figura 3.9: Índice homotópico de Conley do tipo **sse** em $M(\mathcal{D})$

4. Se $p \in M(\mathcal{W})$ então uma vizinhança N de p em M é um disco D com dois raios distintos r_1 e r_2 identificados.
 - (a) Se p é do tipo **a** então $L = \emptyset$ e portanto é identificado a um ponto. Por outro lado, N tem o mesmo tipo de homotopia de um ponto, segue que $h(p) = S^0$.
 - (b) Se p é do tipo **r** então $L = \partial N$ é homeomorfa a figura-oito. Colapsando L a um único

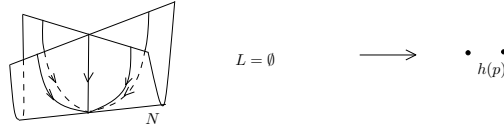


Figura 3.10: Índice homotópico de Conley do tipo **a** em $M(\mathcal{W})$

ponto obtemos que N/L tem o tipo de homotopia de $S^2 \vee S^2$, i.e., $h(p) = S^2 \vee S^2$. Ver Figura 3.11.

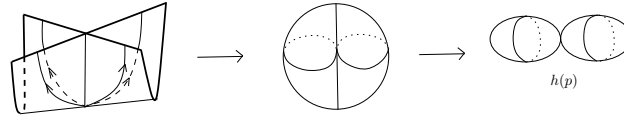


Figura 3.11: Índice homotópico de Conley do tipo **r** em $M(\mathcal{W})$

- (c) Se p é do tipo **si** então $w^u(p) \cap \partial N = \{x\}$. Sejam $C_1, C_2 \subset \partial N$ os arcos por onde o fluxo sae então $C_1 \pitchfork C_2 = \{x\}$ e $L = C_1 \cup C_2$ é o conjunto de sída para N . Colapsando L a um único ponto e fazendo uma retração ao longo da variedade estável em N obtemos que N/L tem o tipo de homotopia de um ponto, i.e., $h(p) = \bar{0}$ o espaço a um ponto. Ver Figura 3.12.

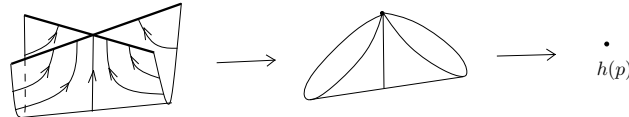


Figura 3.12: Índice homotópico de Conley do tipo **si** em $M(\mathcal{W})$

- (d) Se p é do tipo **se** então $w^u(p) \cap \partial N = \{x_1, x_2\}$. Sejam $C_i \subset \partial N$, $i = 1, 2$, os dois arcos por onde o fluxo sae então $x_i \in C_i$, $i = 1, 2$ e $L = C_1 \cup C_2$ é o conjunto de sída para N . Colapsando L a um único ponto e fazendo uma retração ao longo da variedade estável em N obtemos que N/L tem o tipo de homotopia de S^1 , i.e., $h(p) = S^1$. Ver Figura 3.2.

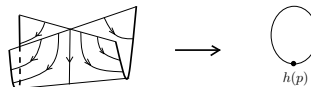


Figura 3.13: Índice homotópico de Conley do tipo **se** em $M(\mathcal{W})$

5. Se $p \in M(\mathcal{T})$ então uma vizinhança N de p em M é formado por três discos D_i , $i = 1, 2, 3$, que se interceptam transversalmente dois a dois segundo retas que se interceptam no ponto p .

- (a) Se p é do tipo **a** então $L = \emptyset$ e portanto é identificado a um ponto. Por outro lado, N tem o mesmo tipo de homotopia de um ponto, segue que $h(p) = S^0$.

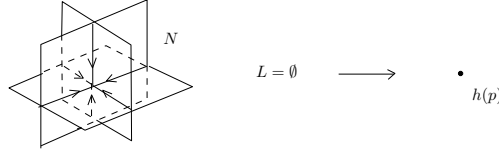


Figura 3.14: Índice homotópico de Conley do tipo **a** em $M(\mathcal{T})$

- (b) Se p é do tipo **r** então $L = \partial N = \partial D_1 \cup \partial D_2 \cup \partial D_3$ onde ∂D_1 , ∂D_2 e ∂D_3 se interceptam transversalmente dois a dois em dois pontos. Colapsando L a um único ponto obtemos que N/L tem o tipo de homotopia de $\vee_{i=1}^7 S^2$, i.e., $h(p) = \vee_{i=1}^7 S^2$. Ver Figura 3.15.

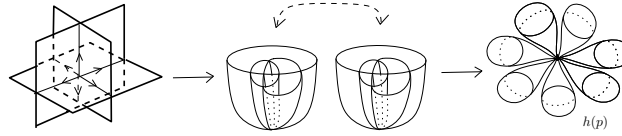


Figura 3.15: Índice homotópico de Conley do tipo **r** em $M(\mathcal{T})$

- (c) Se p é do tipo **ass** então $w^u(p) \cap \partial N = \{x_1, x_2\}$ onde $x_1, x_2 \in \partial D_2$ e $x_1, x_2 \in \partial D_3$. Sejam $B_1, B_2 \subset \partial D_2$ e $C_1, C_2 \subset \partial D_3$ os arcos por onde o fluxo sae então $B_i \pitchfork C_i = \{x_i\}$ e $L = (B_1 \cup C_1) \sqcup (B_2 \cup C_2)$ é o conjunto de sída para N . Colapsando L a um único ponto e fazendo uma retração ao longo da variedade estável em N obtemos que N/L tem o tipo de homotopia de S^1 , i.e., $h(p) = S^1$. Ver Figura 3.16.

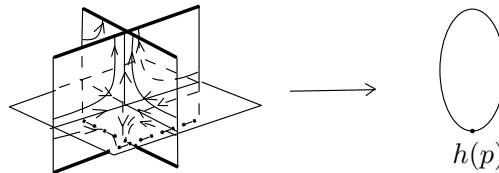


Figura 3.16: Índice homotópico de Conley do tipo **ass** em $M(\mathcal{T})$

- (d) Se p é do tipo **rss** então $w^u(p) \cap \partial N = \partial D_1$ onde D_1 é o disco que contem o repulsor. Sejam $B_1, B_2 \subset \partial D_2$ e $C_1, C_2 \subset \partial D_3$ arcos transversais a ∂D_1 por onde o fluxo sae entao $L = \partial D_1 \cup B_1 \cup B_2 \cup C_1 \cup C_2$ é o conjunto de sída para N . Colapsando L a um único ponto e fazendo uma retração ao longo da variedade estável em N obtemos que N/L tem o tipo de homotopia de S^2 , i.e., $h(p) = S^2$. Ver Figura 3.17. ■

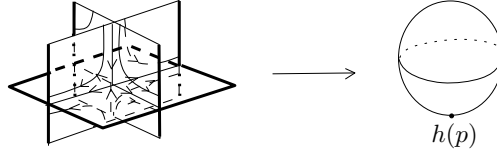


Figura 3.17: Índice homotópico de Conley do tipo **rss** em $M(\mathcal{T})$

COROLÁRIO 3.1.1 *Sejam M uma 2-variedade com singularidades simples e X_t o fluxo Gutierrez-Sotomayor em M . Seja p uma singularidade de X_t .*

1. Se $p \in M(\mathcal{R})$ então

- (a) Se p é do tipo **a** então $CH_0(p) = \mathbb{Z}$ e $CH_i(p) = 0$ se $i = 1, 2$.
- (b) Se p é do tipo **s** então $CH_1(p) = \mathbb{Z}$ e $CH_i(p) = 0$ se $i = 0, 2$.
- (c) Se p é do tipo **r** então $CH_2(p) = \mathbb{Z}$ e $CH_i(p) = 0$ se $i = 0, 1$.

2. Se $p \in M(\mathcal{C})$ então

- (a) Se p é do tipo **a** então $CH_0(p) = \mathbb{Z}$ e $CH_i(p) = 0$ se $i = 1, 2$.
- (b) Se p é do tipo **s** então $CH_1(p) = \mathbb{Z}$ e $CH_i(p) = 0$ se $i = 0, 2$.
- (c) Se p é do tipo **r** então $CH_0(p) = 0$, $CH_1(p) = \mathbb{Z}$ e $CH_2(p) = \oplus_{i=1}^2 \mathbb{Z}$.

3. Se $p \in M(\mathcal{W})$ então

- (a) Se p é do tipo **a** então $CH_0(p) = \mathbb{Z}$ e $CH_i(p) = 0$ se $i = 1, 2$.
- (b) Se p é do tipo **r** então $CH_2(p) = \oplus_{i=1}^2 \mathbb{Z}$ e $CH_i(p) = 0$ se $i = 0, 1$.
- (c) Se p é do tipo **si** então $CH_i(p) = 0$ se $i = 0, 1, 2$.
- (d) Se p é do tipo **se** então $CH_1(p) = \mathbb{Z}$ e $CH_i(p) = 0$ se $i = 0, 2$.

4. Se $p \in M(\mathcal{D})$ então

- (a) Se p é do tipo **a** então $CH_0(p) = \mathbb{Z}$ e $CH_i(p) = 0$ se $i = 1, 2$.
- (b) Se p é do tipo **r** então $CH_2(p) = \oplus_{i=1}^3 \mathbb{Z}$ e $CH_i(p) = 0$ se $i = 0, 1$.
- (c) Se p é do tipo **as** então $CH_1(p) = \mathbb{Z}$ e $CH_i(p) = 0$ se $i = 0, 2$.
- (d) Se p é do tipo **rs** então $CH_2(p) = \mathbb{Z}$ e $CH_i(p) = 0$ se $i = 0, 1$.
- (e) Se p é do tipo **ssi** então $CH_1(p) = \mathbb{Z}$ e $CH_i(p) = 0$ se $i = 0, 2$.
- (f) Se p é do tipo **sse** então $CH_1(p) = \oplus_{i=1}^3 \mathbb{Z}$ e $CH_i(p) = 0$ se $i = 0, 2$.

5. Se $p \in M(\mathcal{T})$ então

- (a) Se p é do tipo **a** então $CH_0(p) = \mathbb{Z}$ e $CH_i(p) = 0$ se $i = 1, 2$.
- (b) Se p é do tipo **r** então $CH_2(p) = \oplus_{i=1}^7 \mathbb{Z}$ e $CH_i(p) = 0$ se $i = 0, 1$.
- (c) Se p é do tipo **ass** então $CH_1(p) = \mathbb{Z}$ e $CH_i(p) = 0$ se $i = 0, 2$.
- (d) Se p é do tipo **rss** então $CH_2(p) = \mathbb{Z}$ e $CH_i(p) = 0$ se $i = 0, 1$.

Demonstração. É uma consequencia imediata do teorema 3.1 verificar que o índice homológico de Conley deste corolario. Basta ver que a homologia $CH_i(p)$ tem um fator $\mathbb{Z}$ para cada S^i do índice homotópico. ■

Resumimos na tabela abaixo o índice numérico de Conley (h_0, h_1, h_2) em cada caso do teorema 3.1:

	a	s	r
$p \in M(\mathcal{R})$	(1,0,0)	(0,1,0)	(0,0,1)

	a	s	r
$p \in M(\mathcal{C})$	(1,0,0)	(0,1,0)	(0,1,2)

	a	se	si	r
$p \in M(\mathcal{W})$	(1,0,0)	(0,1,0)	(0,0,0)	(0,0,2)

	a	as	ssi	sse	rs	r
$p \in M(\mathcal{D})$	(1,0,0)	(0,1,0)	(0,1,0)	(0,3,0)	(0,0,1)	(0,0,3)

	a	ass	rss	r
$p \in M(\mathcal{W})$	(1,0,0)	(0,1,0)	(0,0,1)	(0,0,7)

Os cálculos realizados acima do índice de Conley das singularidades de um fluxo Gutierrez-Sotomayor, X_t , foram efetuadas com respeito ao espaço M . Por outro lado, podemos calcular o índice de Conley das singularidades de X_t com respeito a subespaços de M . Em particular, com respeito a parte singular de uma estratificação de M .

DEFINIÇÃO Uma *estratificação de Whitney* de um espaço topológico A é uma partição localmente finita $\mathcal{E}$ de A em subvariedades suaves de dimensão i , $\{S_i\}$, localmente fechadas e localmente disjuntas denominadas *estratos* de A tais que:

1. $A = \bigcup_i S_i$.
2. $S_i \cap \overline{S_j} \neq \emptyset \Leftrightarrow S_i \subset \overline{S_j}$ (e escrevemos $S_i < S_j$).
3. Seja $S_\alpha < S_\beta$. Suponha que duas sequências $x_i \in S_\beta$ e $y_i \in S_\alpha$ tem limite $y \in S_\alpha$, que o limite de direções $\lim_{i \rightarrow \infty} \overline{x_i y_i} = \lambda$ existe no espaço projetivo e que o limite dos planos tangentes $\lim_{i \rightarrow \infty} T_{x_i} S_\beta = \tau$ existe na grassmaniana correspondente. Então $\lambda \subset \tau$.

Uma variedade M com singularidades simples dotada com uma estratificação de Whitney $\mathcal{E}$ é chamado uma *variedade estratificada*. O significado intuitivo da condição 3 (condição de Whitney) é que a natureza topológica das singularidades do espaço (incluindo as singularidades da estratificação) sejam localmente constantes ao longo de cada estrato.

Uma 2-variedade com singularidades simples M dotada com a partição $\{M(\mathcal{G}), \mathcal{G}\}$ é um variedade estratificada. Podemos refinar esta partição, por considerar uma partição em $M(\mathcal{R})$, de tal forma que M seja um variedade estratificada onde os estratos de dimensão zero e um estejam tanto na parte regular como na parte singular de M .

Para diferenciar a parte regular da parte singular, de uma variedade estratificada, fazemos a seguinte notação:

- $\mathcal{R}$ é a união dos estratos de dimensão 2.
- $\mathcal{S} = M \setminus \mathcal{R}$ é a união dos estratos de dimensão 0 e 1.

Desta forma temos que $M = \mathcal{R} \sqcup \mathcal{S}$, onde $\sqcup$ é a união disjunta. Portanto todo ponto em S é dito um ponto singular da estratificação. Observe que $p \in S$ não necessariamente é ponto singular da variedade nem do fluxo. Da mesma forma que um ponto singular da variedade não é necessariamente ponto singular do fluxo.

Para o cálculo do índice de Conley, $(s_0, s_1) = (\text{rank}H_0(N/L), \text{rank}H_1(N/L))$, de $p \in M$ com relação a parte singular $\mathcal{S}$, escolhemos um par índice (N, L) em $\mathcal{S}$. Por exemplo, para o espaço considerado na figura 3.18(b), o conjunto singular consiste de um círculo. O estrato maior é o complemento deste círculo, i.e., um disco. Embora o círculo é em si não singular, a singularidade cone se destaca pelo fato de ser ponto singular da variedade. Este ponto é um estrato de dimensão zero e o resto do círculo singular é um estrato de dimensão um. Neste espaço temos o fluxo X_t possuindo três singularidades, uma na parte regular e duas na parte singular. A singularidade da parte regular é um repulsor, logo o índice homotópico de Conley é $h(p) = S^2$ e o índice homológico de Conley é

$$CH_i(p) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = 2 \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Portanto, o índice numérico de Conley é $(h_0, h_1, h_2) = (0, 0, 1)$. As singularidades da parte singular $\mathcal{S}$, uma é um repulsor e a outra é um atrator com respeito a parte singular $\mathcal{S}$. Para o repulsor temos que o índice homotópico de Conley é $h(p) = S^1$ e o índice homológico é

$$CH_i(p) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = 1 \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Portanto, o índice numérico de Conley é $(s_0, s_1) = (0, 1)$. Para o atrator temos que o índice homotópico de Conley é $h(p) = S^0$ e o índice homológico de Conley é

$$CH_i(p) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = 0 \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Portanto, o índice numérico de Conley é $(s_0, s_1) = (1, 0)$.

No fluxo polar na esfera (fluxo com um único repulsor e um único atrator), consideramos o conjunto singular $\mathcal{S}$ sendo um círculo meridional contendo o atrator e repulsor, temos que numa vizinhança de $\mathcal{S} = S^1$ as órbitas se afastam e se aproximam de $\mathcal{S}$ ao mesmo tempo. Em nossos

exemplos evitaremos este tipo de estratificação. Concluimos que a estratificação tem que ser compatível com a dinâmica, no sentido que numa vizinhança da parte singular $\mathcal{S}$ de M o fluxo ou afasta-se ou aproxima-se a $\mathcal{S}$ mas não os dois ao mesmo tempo.

DEFINIÇÃO Sejam $\mathcal{E}$ uma estratificação em M e $U_{\mathcal{S}}$ uma vizinhança tubular de $\mathcal{S}$, a parte singular da estratificação $\mathcal{E}$, em M . Definimos a *classe distinguida* $\Sigma_{\mathcal{E}}$ de campos de vetores estáveis, como

$$\Sigma_{\mathcal{E}} = \{X \in \Sigma(M): X \text{ ou aponta para dentro i.e. } \partial U_{\mathcal{S}} \text{ é conjunto de entrada, ou aponta para fora i.e. } \partial U_{\mathcal{S}} \text{ é conjunto de saída, mas não ambos}\}$$

O par $(X, \mathcal{E})$ é dito um *campo distinguido* em M se $X \in \Sigma_{\mathcal{E}}$ para alguma estratificação $\mathcal{E}$ de M . No caso de um fluxo $(X_t, \mathcal{E})$ é dito fluxo distinguido.

3.2 As relações Dinâmico-Topológico

Um *complexo simplicial* K é um conjunto de simplexos, todos contidos num espaço euclidiano R^n , tal que:

- Se σ é um simplexo de K e τ uma face de σ , τ é um simplexo de K .
- Se σ e τ são dois simplexos de K , então $\sigma \cap \tau$ é vazio ou uma face comum de σ e τ .

Denotaremos por $\sigma < \tau$ se o simplexo σ for uma face de τ e por $|K|$ o poliedro associado ao complexo simplicial K . Sendo X um espaço topológico, uma *triangulação* de X é definida por um complexo simplicial K e um homeomorfismo $h: |K| \rightarrow X$. Neste trabalho, consideraremos só complexos simpliciais K finitos, e neste caso, $|K|$ é compacto.

Seja $X = |K|$ um espaço topológico de dimensão n . Definimos α_p como o número de p -simplexos de K . O teorema de Euler-Poincaré afirma que a soma

$$\sum_{p=0}^n (-1)^p \alpha_p$$

é independente do complexo simplicial K , tal que $X = |K|$. Ela é chamada *Característica de Euler-Poincaré* e é denotada por $\chi(X)$. Segundo Poincaré, vale a igualdade

$$\chi(X) = \sum_{p=0}^n (-1)^p \beta_p$$

onde β_p é o posto de $H_p(K)$ e é chamado p -ésimo número de Betti de K .

A característica de Euler-Poincaré da esfera S^2 vale 2, da esfera pinçada vale 3, do toro pinçado vale 1, do Cross-cap vale 2 e do toro comprimido vale 1.

Primeramente apresentamos um caso particular das desigualdades de Morse, para as variedades com singularidades simples. Observe que nesta proposição os índices são calculados respeito a M .

PROPOSIÇÃO 3.2 *Sejam M uma 2-variedade com singularidades simples e X_t o fluxo Gutierrez-Sotomayor em M com conjunto limite $\mathfrak{L} = \bigcup_{i=1}^m L_i$. Se (h_0^i, h_1^i, h_2^i) é o índice de Conley de L_i então*

$$\sum_{i=1}^m (h_0^i - h_1^i + h_2^i) = \chi(M) \quad (3.1)$$

onde $\chi(M)$ é a característica de Euler de M .

Demonstração. Seja f a função de Lyapunov associado a X_t e seja $G_k \subset M$ como na demonstração do teorema 2.6. Temos que $G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_m$ e tal que (G_i, G_{i-1}) é um par índice para L_i . Considere a sequencia longa exata do par (G_i, G_{i-1})

$$\dots \xrightarrow{p_j} H_j(G_i, G_{i-1}) \xrightarrow{\partial_j} H_{j-1}(G_{i-1}) \xrightarrow{i_*} H_{j-1}(G_i) \xrightarrow{p_{j-1}} H_{j-1}(G_i, G_{i-1}) \xrightarrow{\partial_{j-1}} \dots$$

Por exatidão temos

$$\dim \text{Img}(p_j) = \dim \ker(\partial_j) = \dim H_j(G_i, G_{i-1}) - \dim \text{Img}(\partial_j) = \dim H_j(G_i, G_{i-1}) - \dim \ker(i_*)$$

$$\dim \text{Img}(p_{j-1}) = -\dim \ker(p_{j-1}) + \dim H_{j-1}(G_i) = -\dim \text{Img}(i_*) + \dim H_{j-1}(G_i)$$

Portanto

$$\dim \text{Img}(p_j) + \dim \text{Img}(p_{j-1}) = \dim H_j(G_i, G_{i-1}) - \dim \ker(i_*) - \dim \text{Img}(i_*) + \dim H_{j-1}(G_i)$$

$$\dim \text{Img}(p_j) + \dim \text{Img}(p_{j-1}) = \dim H_j(G_i, G_{i-1}) - \dim H_{j-1}(G_{i-1}) + \dim H_{j-1}(G_i)$$

Como $CH_*(L_i) \cong H_*(G_i, G_{i-1})$ então $h_j(L_i) = \dim H_j(G_i, G_{i-1})$ logo

$$\dim \text{Img}(p_j) + \dim \text{Img}(p_{j-1}) = h_j(L_i) - \beta_{j-1}(G_{i-1}) + \beta_{j-1}(G_i)$$

Fixando i consideremos a soma alternada para $j = 0, 1, 2, 3$.

$$0 = \sum_{j=0}^2 (-1)^j h_j(L_i) + \sum_{j=0}^3 (-1)^j (\beta_{j-1}(G_i) - \beta_{j-1}(G_{i-1}))$$

Agora consideramos a soma da expressão acima para $i = 1, \dots, m$

$$0 = \sum_{i,j} (-1)^j h_j(L_i) + \sum_{j=0}^3 (-1)^j (\beta_{j-1}(G_m))$$

Como $G_m = M$ então obtemos o desejado $\chi(M) = \sum_{i,j} (-1)^j h_j^i$. ■

3.2.1 O índice de Conley na variedade estratificada

Nesta subseção calculamos o índice com respeito a estratificação $\mathcal{E}$ de $M = \mathcal{R} \sqcup \mathcal{S}$, isto é, se $p \in \mathcal{R}$ é uma singularidade de X_t então calculamos o índice com respeito a $\mathcal{R}$ e se $p \in \mathcal{S}$ então calculamos o índice com respeito a $\mathcal{S}$. Utilizamos a seguinte notação:

- $\mathcal{R}_0 = \sum_{p \in \mathcal{R}} h_0$, $\mathcal{R}_1 = \sum_{p \in \mathcal{R}} h_1$ e $\mathcal{R}_2 = \sum_{p \in \mathcal{R}} h_2$.
- $\mathcal{S}_0 = \sum_{p \in \mathcal{S}} s_0$ e $\mathcal{S}_1 = \sum_{p \in \mathcal{S}} s_1$.

Como na proposição anterior não estamos tendo em conta a estratificação em M então os índices de Conley são calculados com respeito a M , logo com esta notação (3.1) é:

$$\mathcal{R}_2 - \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_0 = \chi(M) \tag{3.2}$$

Em seguida, apresentamos as relações, entre a parte regular e a parte singular, do índice de Conley de fluxos Gutierrez-Sotomayor X_t em M . O lema a seguir nos mostra que o índice na parte singular $\mathcal{S}$ de M é o mesmo se calculado com respeito a M ou com respeito a $\mathcal{S}$.

LEMA 3.3 *Sejam M uma 2-variedade com singularidades simples e X_t um fluxo Gutierrez-Sotomayor em M . Se M admite uma estratificação $\mathcal{E}$ tal que $(X_t, \mathcal{E})$ é um fluxo distinguido então para as singularidades $\{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subset \mathcal{S}$ temos*

$$\mathcal{R}_0 - \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 = \mathcal{S}_0 - \mathcal{S}_1 \tag{3.3}$$

Demonstração.

$$\mathcal{R}_2 - \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_0 = \chi(\overline{U_S}) = \chi(\mathcal{S}) = -\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_0$$

A primeira igualdade resulta da proposição 3.2, a segunda igualdade vem do fato que $\overline{U_S}$ retrato de deformação de $\mathcal{S}$. Finalmente a terceira igualdade segue da proposição 3.2 adaptada ao caso 1-dimensional. ■

TEOREMA 3.4 *Sejam M uma 2-variedade com singularidades simples e X_t um fluxo Gutierrez-Sotomayor em M . Se M admite uma estratificação $\mathcal{E}$ tal que $(X_t, \mathcal{E})$ é um fluxo distinguido então*

$$(\mathcal{R}_2 - \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_0)|_{M \setminus \mathcal{S}} = \mathcal{S}_1 - \mathcal{S}_0 + \chi(M) \quad (3.4)$$

Demonstração. Consideremos uma vizinhança tubular, suficientemente pequena, $U_{\mathcal{S}}$ da parte singular $\mathcal{S}$ de M que não contenha outras singularidades aparte das que estão em $\mathcal{S}$. Suponhamos que sobre toda $\partial U_{\mathcal{S}}$, X aponta para dentro de $U_{\mathcal{S}}$ e denotemos por $\tilde{M} = M - U_{\mathcal{S}}$ então pela proposição 3.2 temos:

$$(\mathcal{R}_2 - \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_0)|_{\tilde{M}} = \chi(\tilde{M}, \partial \tilde{M}^-) \quad (3.5)$$

Por outro lado, temos que M é um CW-complexo formado pela união dos subcomplexos $\tilde{M}$ e $\overline{U_{\mathcal{S}}}$ então $\chi(M) = \chi(\tilde{M}) + \chi(\overline{U_{\mathcal{S}}}) - \chi(\partial \tilde{M}^-)$ pois $\tilde{M} \cap \overline{U_{\mathcal{S}}} = \partial \tilde{M} = \partial \tilde{M}^-$. Usando a sequencia exata do par $(\tilde{M}, \partial \tilde{M}^-)$ temos que $\chi(\tilde{M}, \partial \tilde{M}^-) = \chi(\tilde{M}) - \chi(\partial \tilde{M}^-)$. Logo

$$\chi(\tilde{M}) + \chi(\overline{U_{\mathcal{S}}}) - \chi(\partial \tilde{M}^-) = \chi(M)$$

$$\chi(\tilde{M}, \partial \tilde{M}^-) + \chi(\overline{U_{\mathcal{S}}}) = \chi(M)$$

$$(\mathcal{R}_2 - \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_0)|_{\tilde{M}} + \chi(S) = \chi(M)$$

Como não existem pontos fixos de $X \in \Sigma_{\mathcal{E}}$ em $U_{\mathcal{S}} \setminus \mathcal{S}$ então $(\mathcal{R}_2 - \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_0)|_{U_{\mathcal{S}} \setminus \mathcal{S}} = 0$, logo da igualdade acima temos:

$$(\mathcal{R}_2 - \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_0)|_{M \setminus \mathcal{S}} + \mathcal{S}_0 - \mathcal{S}_1 = \chi(M)$$

$$(\mathcal{R}_2 - \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_0)|_{M \setminus \mathcal{S}} = \mathcal{S}_1 - \mathcal{S}_0 + \chi(M)$$

■

COROLÁRIO 3.4.1 *Sejam M uma 2-variedade com singularidades simples e X_t um fluxo Gutierrez-Sotomayor em M . Se M admite uma estratificação $\mathcal{E}$ tal que $(X_t, \mathcal{E})$ é um fluxo distinguido então*

$$(\mathcal{R}_2 - \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_0)|_{M \setminus \mathcal{S}} = \chi(M) - \chi(S) \quad (3.6)$$

Demonstração. É consequencia direta do teorema anterior e sua demonstração. ■

3.2.2 Exemplos de fluxos Gutierrez-Sotomayor

A seguir fixamos uma estratificação $\mathcal{E}$ numa variedade com singularidades simples M e consideramos um fluxo Gutierrez-Sotomayor X_t em M tal que o par $(X_t, \mathcal{E})$ seja um fluxo distinguido.

EXEMPLO 3.1 Seja M uma variedade com singularidades cone (e.g. uma esfera pinçada e um toro pinçado) com estratificação $\mathcal{E}$.

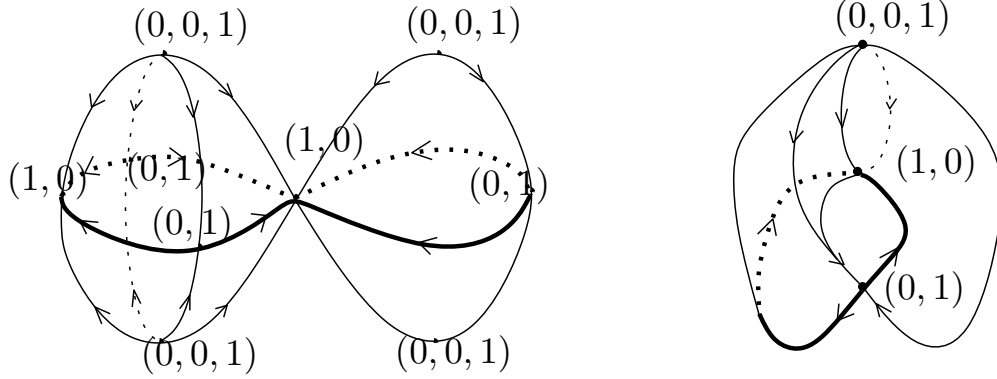


Figura 3.18: Fluxos na esfera pinçada e no toro pinçado

1. Seja X_t um fluxo Gutierrez-Sotomayor dado no caso da esfera pinçada por 9 singularidades: dois atratores, três selas e quatro repulsores em M , ver Figura 3.18(a).

Com respeito a estratificação $\mathcal{E}$ temos que $\mathcal{R}$ tem quatro componentes homeomorfas a um disco, com uma singularidade repulsora no centro de cada disco. Logo cada singularidade tem índice numérico de Conley $(h_0, h_1, h_2) = (0, 0, 1)$ e portanto,

$$\mathcal{R}_0 = 0 + 0 + 0 + 0 = 0, \quad \mathcal{R}_1 = 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \quad e \quad \mathcal{R}_2 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

Na parte singular de M temos 5 singularidades de X_t das quais duas são atratoras e tres repulsoras. Logo tem índice numérico de Conley (s_0, s_1) iguais a $(1, 0)$ e $(0, 1)$ respectivamente. Portanto,

$$\mathcal{S}_0 = 1 + 1 + 0 + 0 + 0 = 2 \quad e \quad \mathcal{S}_1 = 0 + 0 + 1 + 1 + 1 = 3$$

Substituindo estes valores na formula 3.3 temos

$$4 - 0 + 0 = 3 - 2 + \chi(M)$$

De onde $\chi(M) = 3$, que é verdadeiro para qualquer triangulação da esfera pinçada.

2. Seja X_t um fluxo Gutierrez-Sotomayor dado no caso do toro pinçado por 3 singularidades: um atrator, uma sela e um repulsor em M , ver Figura 3.18(b).

Com respeito a estratificação $\mathcal{E}$ temos que $\mathcal{R}$ tem uma componente homeomorfa a um disco, com uma singularidade repulsora no centro do disco. Logo a singularidade tem índice numérico de Conley $(h_0, h_1, h_2) = (0, 0, 1)$ e portanto,

$$\mathcal{R}_0 = 0, \quad \mathcal{R}_1 = 0 \quad e \quad \mathcal{R}_2 = 1$$

Na parte singular de M temos duas singularidades de X_t das quais uma é atratora e a outra é repulsora. Logo, tem índice numérico de Conley (s_0, s_1) iguais a $(1, 0)$ e $(0, 1)$ respectivamente. Portanto,

$$\mathcal{S}_0 = 1 + 0 = 1 \quad e \quad \mathcal{S}_1 = 0 + 1 = 1$$

Substituindo estes valores na formula 3.3 temos

$$1 - 0 + 0 = 1 - 1 + \chi(M)$$

De onde $\chi(M) = 1$, que é verdadeiro para qualquer triangulação do toro pinçado. ■

EXEMPLO 3.2 Seja M uma variedade com singularidades guarda-chuvas de Whitney (e.g. um cross-cap e um toro comprimido) com estratificação $\mathcal{E}$.

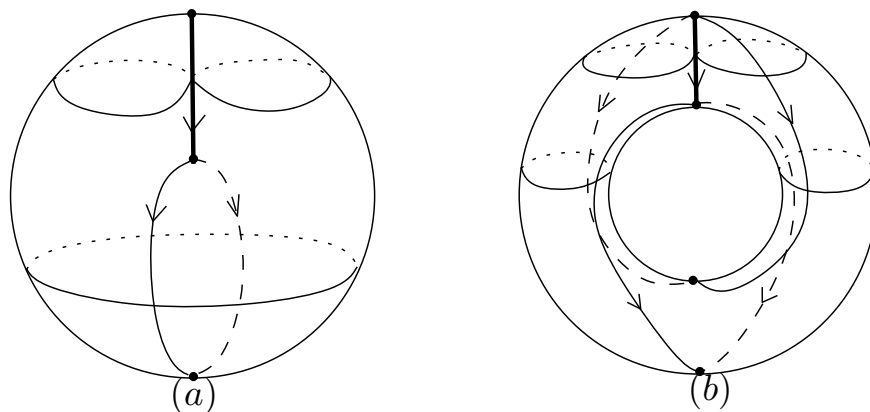


Figura 3.19: Fluxos no Cross-cap e no toro comprimido

1. Seja X_t um fluxo Gutierrez-Sotomayor dado no caso do cross-cap por 3 singularidades: um atrator, uma sela e um repulsor em M , ver Figura 3.19(a).

Com respeito a estratificação $\mathcal{E}$ temos que $\mathcal{R}$ tem uma componente homeomorfa a um disco, com uma singularidade atratora no centro do disco. Logo $(h_0, h_1, h_2) = (1, 0, 0)$ e portanto,

$$\mathcal{R}_0 = 1, \quad \mathcal{R}_1 = 0 \quad e \quad \mathcal{R}_2 = 0$$

Na parte singular de M temos duas singularidades de X_t das quais uma é atratora e a outra é repulsora. Logo tem índice numérico de Conley (s_0, s_1) iguais a $(1, 0)$ e $(0, 0)$ respectivamente. Portanto,

$$\mathcal{S}_0 = 1 + 0 = 1 \quad e \quad \mathcal{S}_1 = 0 + 0 = 0$$

Substituindo estes valores na formula 3.3 temos

$$0 - 0 + 1 = 0 - 1 + \chi(M)$$

De onde $\chi(M) = 2$, que é verdadeiro para qualquer triangulação do cross-cap.

2. Seja X_t um fluxo Gutierrez-Sotomayor dado no caso do toro comprimido por 4 singularidades: um atrator, duas selas e um repulsor em M , ver Figura 3.19(b).

Com respeito a estratificação $\mathcal{E}$ temos que $\mathcal{R}$ tem uma componente homeomorfa a um cilindro, com duas singularidade no interior, uma sela e um atrator. A sela tem índice numérico de Conley $(h_0, h_1, h_2) = (0, 1, 0)$ e o atrator tem índice numérico de Conley $(h_0, h_1, h_2) = (1, 0, 0)$. Portanto,

$$\mathcal{R}_0 = 0 + 1 = 1, \quad \mathcal{R}_1 = 1 + 0 = 1 \quad e \quad \mathcal{R}_2 = 0 + 0 = 0$$

Na parte singular de M temos duas singularidades de X_t das quais uma é atratora e a outra é repulsora. O atrator tem índice numérico de Conley (s_0, s_1) igual a $(1, 0)$ e o repulsor tem índice numérico de Conley $(0, 0)$ respectivamente. Portanto,

$$\mathcal{S}_0 = 0 + 1 = 1 \quad e \quad \mathcal{S}_1 = 0 + 0 = 0$$

Substituindo estes valores na formula 3.3 temos

$$0 - 1 + 1 = 0 - 1 + \chi(M)$$

De onde $\chi(M) = 1$, que é verdadeiro para qualquer triangulação do toro comprimido. ■

Capítulo 4

Blocos Isolantes

Neste capítulo, apresentamos um procedimento para construir fluxos Gutierrez-Sotomayor, com um único ponto singular, em subvariedades com fronteira de M respeitando certos dados dinâmicos e homológicos. Tais fluxos devem ser transversais à fronteira da subvariedade a qual denominaremos “bloco isolante”.

DEFINIÇÃO Um *bloco isolante* é uma vizinhança isolante N tal que

$$N^- = \{x \in N \mid \varphi([0, T], x) \not\subseteq N, \forall T > 0\}$$

é fechado.

A existência do bloco isolante para fluxos Gutierrez-Sotomayor é uma consequência imediata da existência de funções de Lyapunov. Se p é um ponto singular com $f(p) = c$ e $\epsilon > 0$ tal que não existem valores críticos em $[c - \epsilon, c + \epsilon]$ então definimos um bloco isolante de p , N , como a componente de $f^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon])$ que contém p e $N^- = f^{-1}(c - \epsilon) \cap N$. Além disso (N, N^-) é um par índice para $inv(N) = \{p\}$.

4.1 A Condição de Poincaré-Hopf

O seguinte teorema caracteriza a relação entre o primeiro número de Betti das 1-subvariedades ramificadas que são fronteiras do bloco isolante contendo p , com o número de componentes de fronteira e o índice numérico de Conley (h_0, h_1, h_2) . Observe que a condição do teorema é dada para o caso bidimensional.

TEOREMA 4.1 *Seja (N_1, N_0) um par-índice para a singularidade $p \in M$ de $X \in \Sigma^r(M)$ e (h_0, h_1, h_2) o índice numérico de Conley de p . Então*

$$(h_2 - h_1 + h_0) - (h_2 - h_1 + h_0)^* = e^+ - \mathcal{B}^+ - e^- + \mathcal{B}^- \quad (4.1)$$

onde $*$ indica o índice do fluxo em tempo-reverso, $e^+(e^-)$ é o número de componentes da fronteira de entrada (saída) de N_1 e $\mathcal{B}^+ = \sum_{k=1}^{e^+} b_k^+$ ($\mathcal{B}^- = \sum_{k=1}^{e^-} b_k^-$) onde $b_k^+(b_k^-)$ é o primeiro número de Betti da k -ésima componente da fronteira de entrada (saída) de N_1 .

Demonstração. A proposição 3.2 afirma que $h_2 - h_1 + h_0 = \chi(N_1, N_0)$. Pela sequência exata do par (N_1, N_0) temos que $\chi(N_1, N_0) = \chi(N_1) - \chi(N_0)$. Mas $N_0 = \partial N_1^-$ logo

$$h_2 - h_1 + h_0 + \chi(\partial N_1^-) = \chi(N_1)$$

Usando os mesmos argumentos para o fluxo reverso temos

$$(h_2 - h_1 + h_0)^* + \chi(\partial N_1^+) = \chi(N_1)$$

Fazendo a operação da diferença entre estas duas equações temos

$$\begin{aligned} (h_2 - h_1 + h_0) - (h_2 - h_1 + h_0)^* &= \chi(\partial N_1^+) - \chi(\partial N_1^-) \\ (h_2 - h_1 + h_0) - (h_2 - h_1 + h_0)^* &= \sum_{k=1}^{e^+} (1 - b_k^+) - \sum_{k=1}^{e^-} (1 - b_k^-) \\ (h_2 - h_1 + h_0) - (h_2 - h_1 + h_0)^* &= e^+ - \mathcal{B}^+ - e^- + \mathcal{B}^- \end{aligned}$$

■

Na próxima seção mostramos que dados números inteiros positivos que satisfazem a condição de Poincaré-Hopf (4.1), existe um bloco isolante que satisfaz estes dados dinâmicos e homológicos.

4.2 Blocos Isolantes

Como os pontos fixos de $X \in \Sigma^r(M)$ estão em $M(\mathcal{G})$, com $\mathcal{G} = \mathcal{R}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{W}$ ou $\mathcal{T}$, consideraremos os diferentes tipos de “alças generalizadas” bidimensionais contendo tais pontos fixos.

4.2.1 Alças Generalizadas

Nesta seção, definiremos a noção de alça generalizada e sua região de colagem. Como na teoria clássica de alças esta região de colagem produz espaços de diferentes tipos topológicos dependendo da forma como a alça é colada.

Uma alça generalizada $h_x^{\mathcal{G}}$ é um subespaço com uma dinâmica na qual a singularidade se encontra em $M(\mathcal{G})$, isto é, a singularidade pode estar na parte suave, no cone, no guarda-chuva de Whitney, nos pontos duplos ou nos pontos triplos. Portanto, teremos alças regulares, alças cones, alças guarda-chuvas, alças duplas e alças triplas.

Para isto consideramos no plano $\mathbb{R}^2$ as seguintes dinâmicas:

- | | |
|----------------------------|---------------------------------|
| (a) $X(x, y) = (-2x, -2y)$ | (b) $X(x, y) = (x, -y)$ |
| (c) $X(x, y) = (2x, 2y)$ | (d) $X(x, y) = (0, -x^2 - y^2)$ |

Formalmente temos:

DEFINIÇÕES Uma alça regular é formada por um disco D centrado em p com um fluxo definido conforme os casos abaixo. Ver Fig 4.1.

1. Uma *alça regular* $h_a^{\mathcal{R}}$ possui um fluxo definido pelo campo do item (a). A região de colagem da alça é o vazio.
2. Uma *alça regular* $h_s^{\mathcal{R}}$ possui um fluxo definido pelo campo do item (b). A região de colagem da alça é homeomorfa a $\partial D^1 \times D^1$.
3. Uma *alça regular* $h_r^{\mathcal{R}}$ possui um fluxo definido pelo campo do item (c). A região de colagem da alça é homeomorfa a $\partial D^2 \times D^0$.

DEFINIÇÕES Uma alça cone é formada por dois discos D_1 e D_2 centrados em p tais que $D_1 \cap D_2 = \{p\}$ com um fluxo definido conforme os casos abaixo. Ver Figura 4.2.

1. Uma *alça cone* $h_a^{\mathcal{C}}$ possui um fluxo definido pelo campo do item (a) onde a região de colagem da alça é o vazio.
2. Uma *alça cone* $h_s^{\mathcal{C}}$ possui um fluxo definido pelo campo do item (d) onde a região de colagem da alça é uma união disjunta de dois arcos em ∂D_1 e ∂D_2 respetivamente, por onde o fluxo sai.

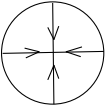
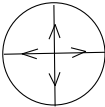
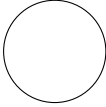
	alça	região de colagem
$h_a^{\mathcal{R}}$		$\emptyset$
$h_s^{\mathcal{R}}$		
$h_r^{\mathcal{R}}$		

Figura 4.1: Alça regular $h_a^{\mathcal{R}}$, $h_s^{\mathcal{R}}$ e $h_r^{\mathcal{R}}$.

3. Uma *alça cone* $h_r^{\mathcal{C}}$ possui um fluxo definido pelo campo do item (c) onde a região de colagem da alça são duas circunferências correspondendo a ∂D_i , por onde o fluxo sai.

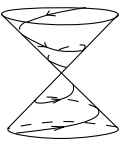
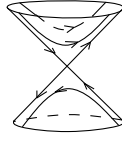
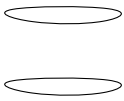
	alça	região de colagem
$h_a^{\mathcal{C}}$		$\emptyset$
$h_s^{\mathcal{C}}$		
$h_r^{\mathcal{C}}$		

Figura 4.2: Alça cone $h_a^{\mathcal{C}}$, $h_s^{\mathcal{C}}$ e $h_r^{\mathcal{C}}$.

DEFINIÇÕES Uma alça guarda-chuva é formada por um disco D com duas orbitas regulares identificadas conforme os casos abaixo. Ver Figura 4.3.

1. Uma *alça guarda-chuva* $h_a^{\mathcal{W}}$ possui um fluxo em D definido pelo campo do item (a), com duas órbitas regulares identificadas onde a região de colagem da alça é o vazio.

2. Uma *alça guarda-chuva* $h_{se}^{\mathcal{W}}$ possui um fluxo em D definido pelo campo do item (b), com as órbitas regulares da variedade estável identificadas. A região de colagem da alça é uma união disjunta de arcos em ∂D , por onde o fluxo sai.
3. Uma *alça guarda-chuva* $h_{si}^{\mathcal{W}}$ possui um fluxo definido em D pelo campo do item (b), com as órbitas regulares da variedade instável identificadas. A região de colagem da alça é formado por dois segmentos que se interseptam transversalmente e é por onde o fluxo sai.
4. Uma *alça guarda-chuva* $h_r^{\mathcal{W}}$ possui um fluxo em D definido pelo campo do item (c), com duas órbitas regulares identificadas. A região de colagem da alça é a fronteira da alça a qual é homeomorfa a figura-oito.

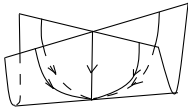
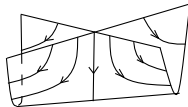
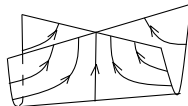
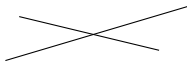
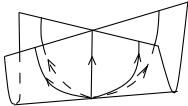
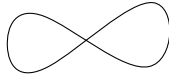
	alça	região de colagem
$h_a^{\mathcal{W}}$		$\emptyset$
$h_{se}^{\mathcal{W}}$		
$h_{si}^{\mathcal{W}}$		
$h_r^{\mathcal{W}}$		

Figura 4.3: Alça guarda-chuva $h_a^{\mathcal{W}}$, $h_{se}^{\mathcal{W}}$, $h_{si}^{\mathcal{W}}$ e $h_r^{\mathcal{W}}$.

DEFINIÇÕES Uma alça dupla é formada por dois discos D_1 e D_2 centrados em p e interceptando-se transversalmente ao longo de dois diamentos d_1 e d_2 em D_1 e D_2 respectivamente, onde tais diamentos são formados por uma união de órbitas, com um fluxo definido conforme os casos abaixo. Ver Fig 4.4.

1. Uma *alça dupla* $h_a^{\mathcal{D}}$ possui um fluxo definido pelo campo do item (a) em D_1 e D_2 onde a região de colagem da alça é o vazio.

2. Uma *alça dupla* $h_{as}^{\mathcal{D}}$ possui um fluxo definido pelo campo do item (a) em D_1 e item (b) em D_2 onde d_2 é a variedade estável em D_2 . A região de colagem da alça é homeomorfa a $\partial D^1 \times D^1$.
3. Uma *alça dupla* $h_{ssi}^{\mathcal{D}}$ possui um fluxo definido pelo campo do item (b) em D_1 e D_2 onde d_1 e d_2 são as variedades instáveis. A região de colagem da alça é homeomorfa a duas copias de dois segmentos D^1 interceptado-se transversalmente.
4. Uma *alça dupla* $h_{sse}^{\mathcal{D}}$ possui um fluxo definido pelo campo do item (b) em D_1 e D_2 onde d_1 e d_2 são as variedades estáveis. A região de colagem da alça é homeomorfa a quatro copias de segmentos D^1 .
5. Uma *alça dupla* $h_{rs}^{\mathcal{D}}$ possui um fluxo definido pelo campo do item (c) em D_1 e item (b) em D_2 onde d_2 é a variedade instável de D_2 . A região de colagem da alça é homeomorfa a ∂D^2 a qual estão interceptados transversalmente dois segmentos D^1 .
6. Uma *alça dupla* $h_r^{\mathcal{D}}$ possui um fluxo definido pelo campo do item (c) em D_1 e D_2 onde a região de colagem da alça é homeomorfa a duas copias de ∂D^2 interceptados transversalmente em dois pontos distintos.

DEFINIÇÕES Uma *alça tripla* é formada por três discos D_1 , D_2 e D_3 centrados em p que interceptam transversalmente dois a dois segundo diametros $d_1 \subset D_1$, $d_2 \subset D_2$ e $d_3 \subset D_3$ que se interceptam em p , onde tais diametros são formados por uma união de órbitas, com um fluxo definido conforme os casos abaixo. Ver Fig 4.5.

1. Uma *alça tripla* $h_a^{\mathcal{T}}$ possui um fluxo definido pelo campo do item (a) em D_1 , D_2 e D_3 onde a região de colagem da alça é o vazio.
2. Uma *alça tripla* $h_{ass}^{\mathcal{T}}$ possui um fluxo definido pelo campo do item (a) em D_1 e do item (b) em D_2 e D_3 onde d_2 e d_3 são as variedades estáveis de D_2 e D_3 respectivamente. A região de colagem da alça é homeomorfo a duas copias de dois segmentos D^1 interceptado-se transversalmente.
3. Uma *alça tripla* $h_{rss}^{\mathcal{T}}$ possui um fluxo definido pelo campo do item (c) em D_1 e do item (b) em D_2 e D_3 onde d_2 e d_3 são as variedades instáveis de D_2 e D_3 respectivamente. A região de colagem da alça é homeomorfo a ∂D^2 a qual estão interceptados transversalmente quatro segmentos D^1 .

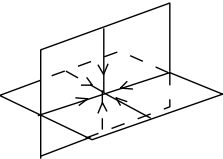
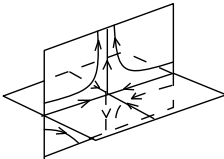
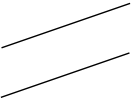
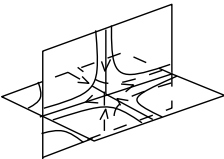
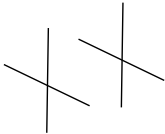
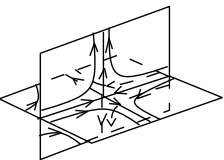
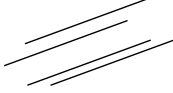
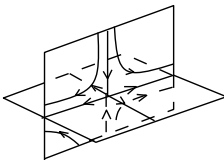
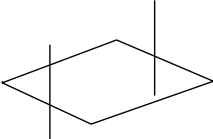
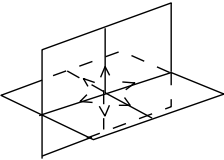
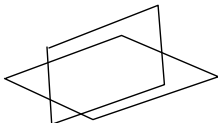
	alça	região de colagem
$h_a^{\mathcal{D}}$		$\emptyset$
$h_{as}^{\mathcal{D}}$		
$h_{ssi}^{\mathcal{D}}$		
$h_{sse}^{\mathcal{D}}$		
$h_{rs}^{\mathcal{D}}$		
$h_r^{\mathcal{D}}$		

Figura 4.4: Alça dupla $h_a^{\mathcal{D}}$, $h_{as}^{\mathcal{D}}$, $h_{ssi}^{\mathcal{D}}$, $h_{sse}^{\mathcal{D}}$, $h_{rs}^{\mathcal{D}}$ e $h_r^{\mathcal{D}}$.

4. Uma *alça tripla* $h_r^{\mathcal{T}}$ possui um fluxo definido pelo campo do item (c) em D_1 , D_2 e D_3 . A região de colagem da alça é homeomorfo a três circunferências ∂D^2 que se interceptam transversalmente dois a dois em dois pontos.

O bloco isolante será construído a partir de uma alça generalizada $h_x^{\mathcal{G}}$ e uma “1-variedade ramificada distinguida” N^- , colando a alça generalizada no colar da 1-variedade ramificada distinguida $N^- \times [0, 1]$.

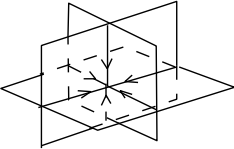
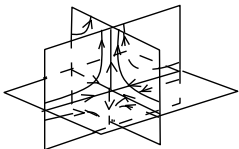
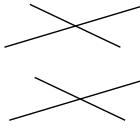
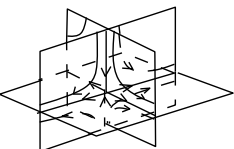
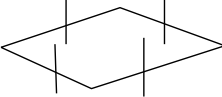
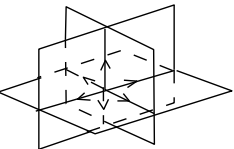
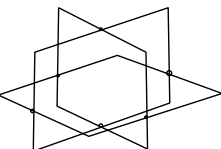
	alça	região de colagem
h_a^T		$\emptyset$
h_{ass}^T		
h_{rss}^T		
h_r^T		

Figura 4.5: Alça tripla h_a^T , h_{ass}^T , h_{rss}^T e h_r^T .

DEFINIÇÃO Uma *1-variedade ramificada distinguida* é um espaço topológico, tendo no máximo 4 componentes conexas, construído localmente a partir de um número finito ≥ 0 de cartas ramificadas. Cada *carta ramificada* é uma interseção transversal de dois arcos no plano.

Na Figura 4.6, apresentamos alguns exemplos de 1-variedades ramificadas distinguidas.

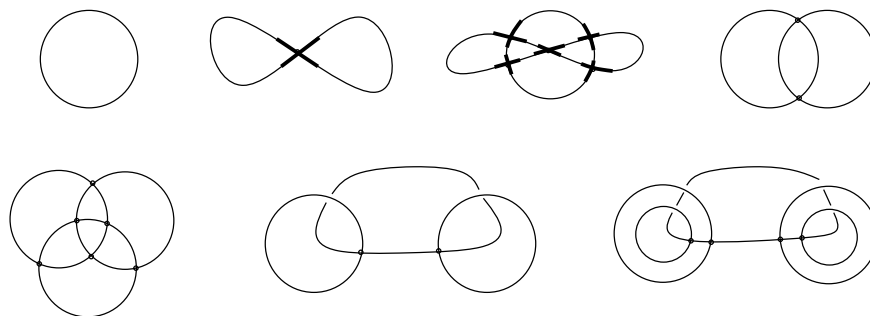


Figura 4.6: 1-variedades ramificadas distinguidas.

Na próxima seção, observaremos que diferentes colagens de uma mesma alça generalizada pro-

duzem blocos isolantes N não-homeomorfos porem com N/N^- tendo o mesmo tipo de homotopia.

4.2.2 A Construção dos Blocos Isolantes

TEOREMA 4.2 *Seja M uma variedade com singularidades simples. Seja p uma singularidade de um fluxo Gutierrez-Sotomayor X_t e suponha que p satisfaz as condições de Poincaré-Hopf para números positivos e^+ , e^- , $\{b_k^+\}_{k=1}^{e^+}$, $\{b_k^-\}_{k=1}^{e^-}$. Então existe um fluxo Gutierrez-Sotomayor em M com um bloco isolante N para p tal que*

1. *Para $\partial N = \partial N^+ \cup \partial N^-$ temos que e^+ (e^-) é o número de componentes conexas de ∂N^+ (∂N^-), correspondente a fronteira de entrada (saída) do fluxo. Portanto, temos $\partial N^+ = \bigcup_{k=1}^{e^+} \partial N_k^+$ ($\partial N^- = \bigcup_{k=1}^{e^-} \partial N_k^-$).*
2. *O $\text{rank} H_1(\partial N_k^+) = b_k^+$ com $k = 1, \dots, e^+$ e $\text{rank} H_1(\partial N_k^-) = b_k^-$ com $k = 1, \dots, e^-$.*
3. *O $\text{rank} H_*(N/\partial N^-) = h_*$ onde (h_0, h_1, h_2) é o índice numérico de Conley de p .*

Demonstração. Para cada atrator e repulsor de X_t temos um unico bloco isolante dado pela própria alça generalizada $h_a^{\mathcal{G}}$ onde $\mathcal{G} = \mathcal{R}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{W}$ ou $\mathcal{T}$. Para as selas de X_t temos diferentes tipos topológicos de blocos isolantes dependendo da 1-variedades ramificadas distinguidas e do tipo de colagem da alça a seu colar.

Considere uma 1-variedade ramificada distinguida $N^- = \bigcup_{k=1}^{e^-} N_k^-$ com e^- componentes e cada N_k^- tendo b_k^- como seu primeiro número de Betti. Sejam a alça generalizada $h_x^{\mathcal{G}}$ com região de colagem A_k e o colar $\bigcup_{k=1}^{e^-} (N_k^- \times I)$ de N_k^- . Colamos a alça generalizada a 1-variedade ramificada distinguida via um mergulho $f : A_k \rightarrow \bigcup_{k=1}^{e^-} (N_k^- \times 1)$. ■

A seguir, ver Figura 4.7, 4.8, 4.9, 4.10, 4.11 e 4.12, apresentamos uma construção básica nos casos especificos de blocos isolantes para selas de um fluxo Gutierrez-Sotomayor X_t .

É claro que existem outros blocos que podem ser construidos apartir destes blocos. Assim por exemplo temos Figura 4.13:

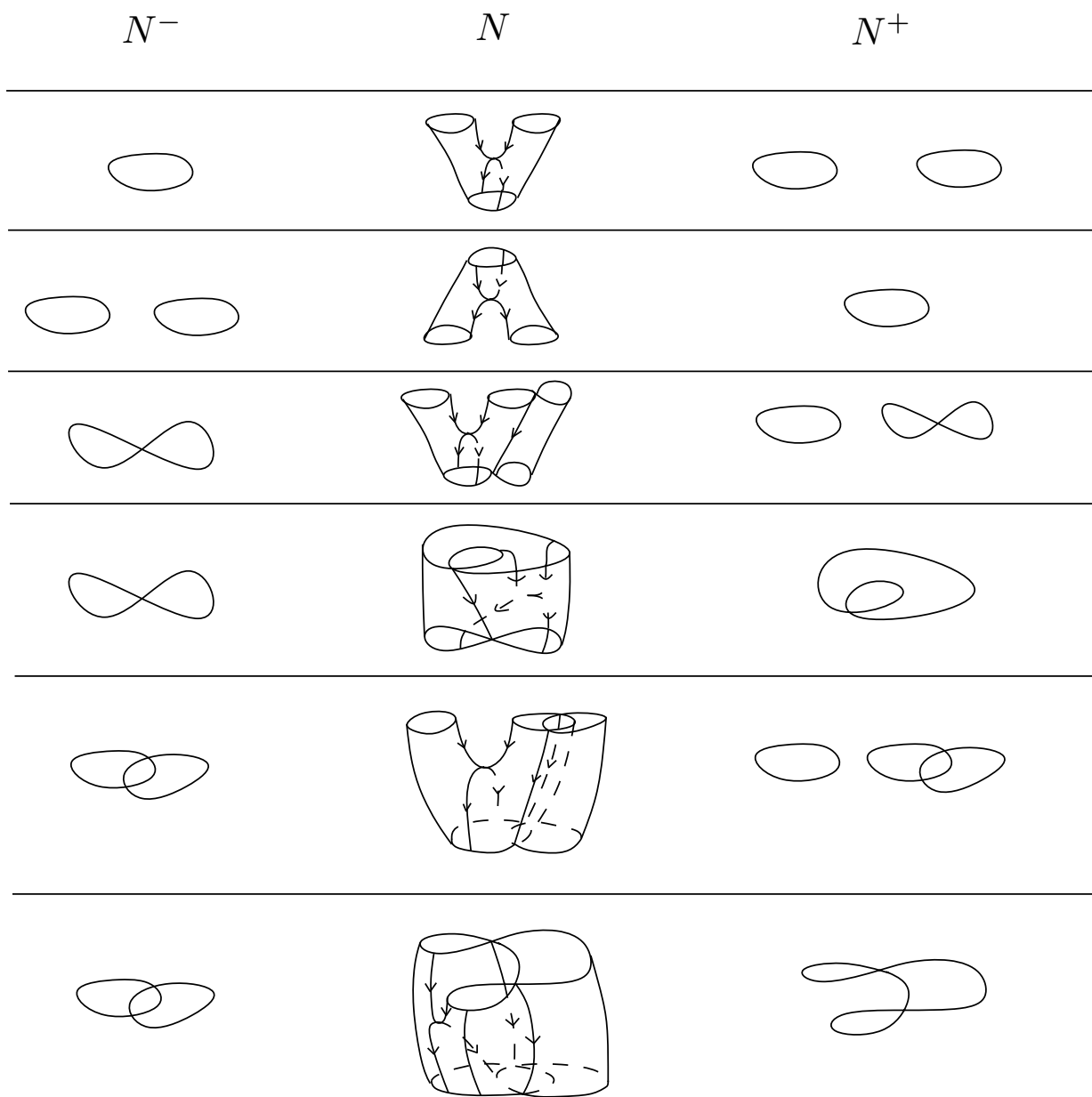


Figura 4.7: Blocos isolantes contendo a alça regular $h_s^{\mathcal{R}}$.

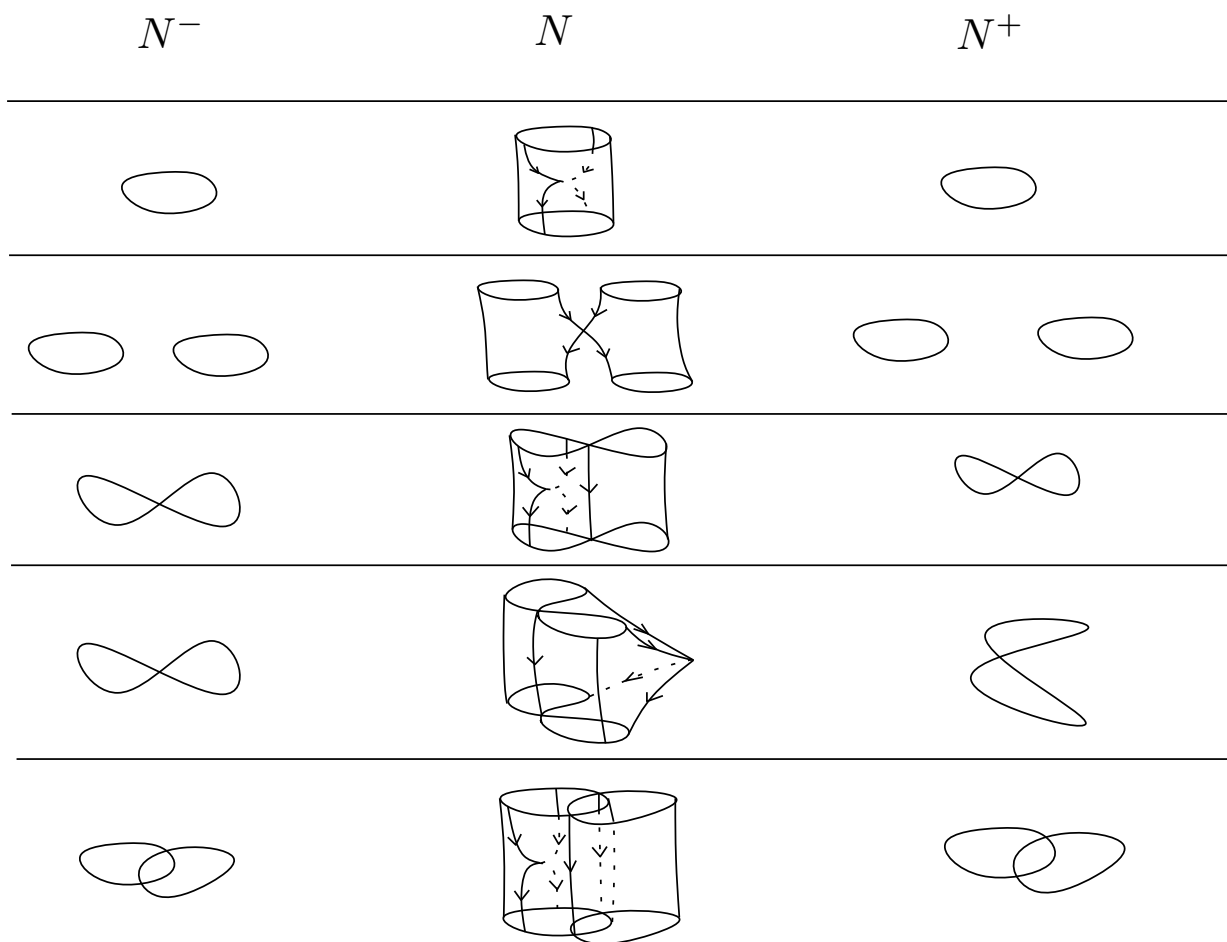
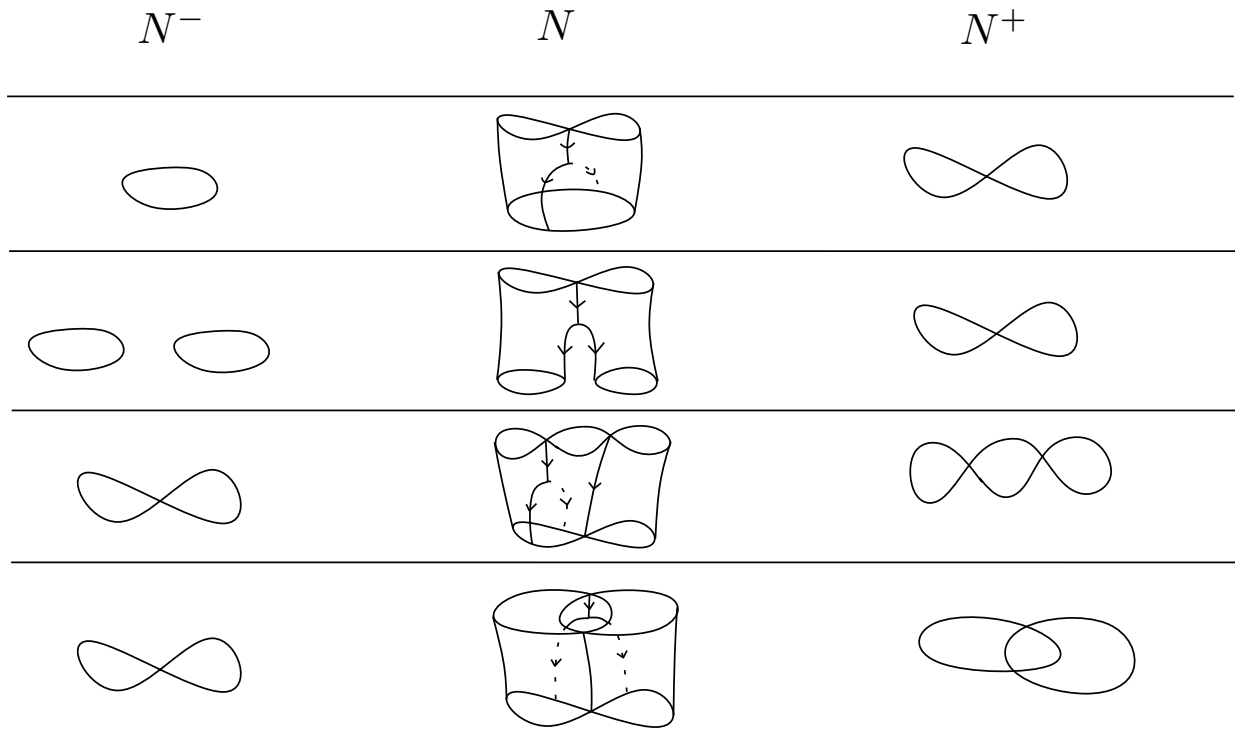
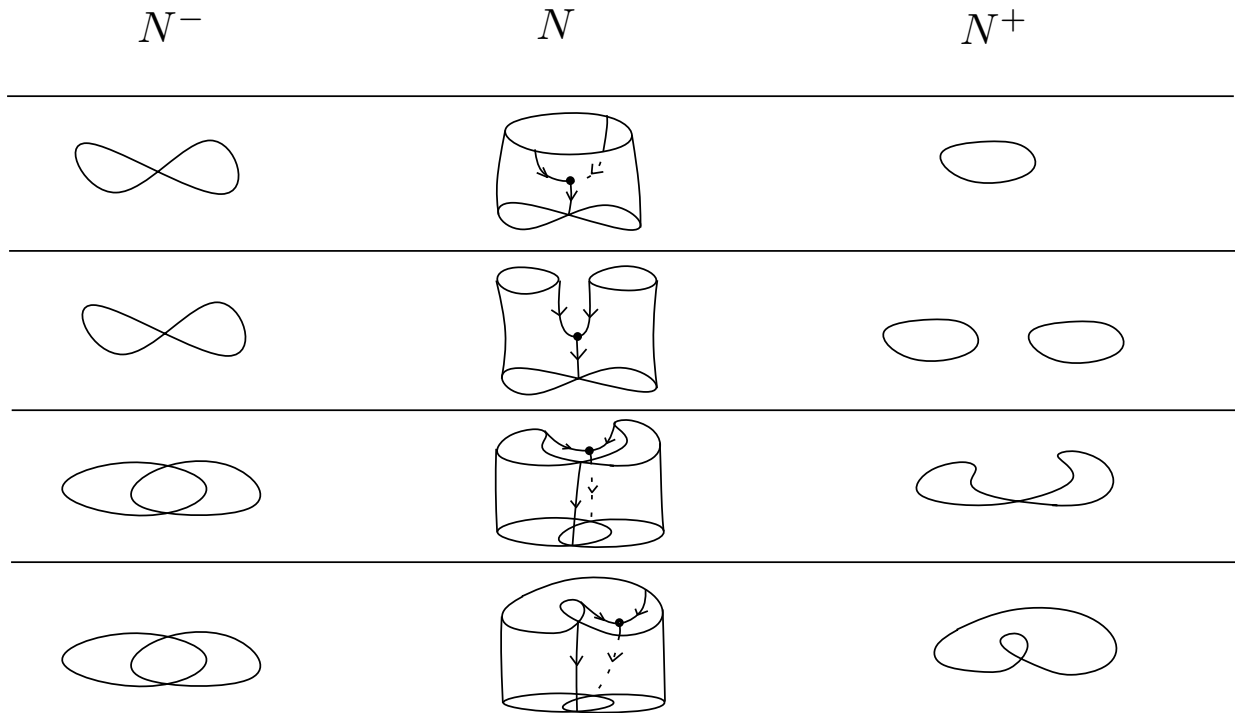


Figura 4.8: Blocos isolantes contendo a alça cone h_s^C .

Figura 4.9: Blocos isolantes contendo a alça guarda-chuva $h_{se}^{\mathcal{W}}$.Figura 4.10: Blocos isolantes contendo a alça guarda-chuva $h_{si}^{\mathcal{W}}$.

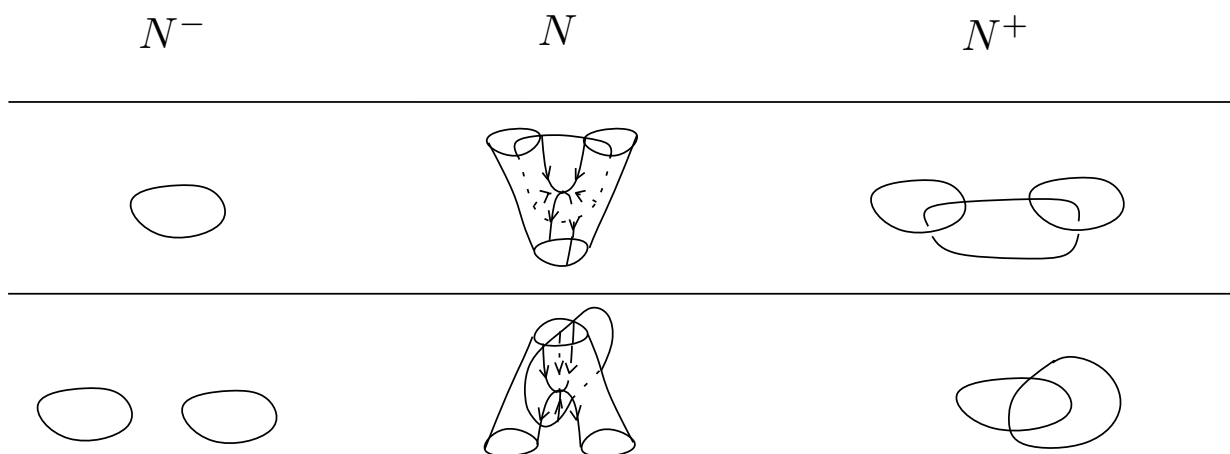


Figura 4.11: Blocos isolantes contendo a alça dupla h_{as}^D .

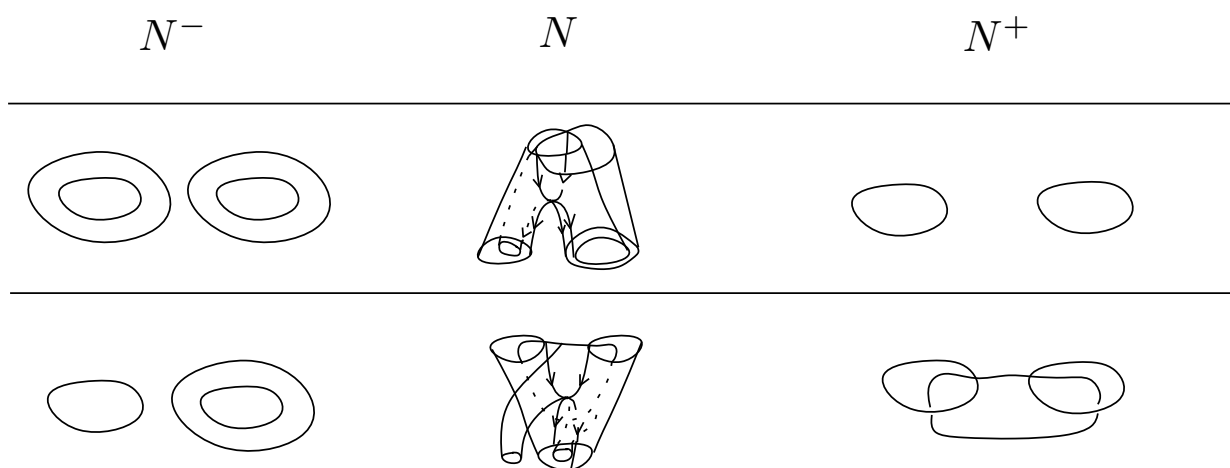


Figura 4.12: Blocos isolantes contendo a alça dupla h_{ssi}^D .

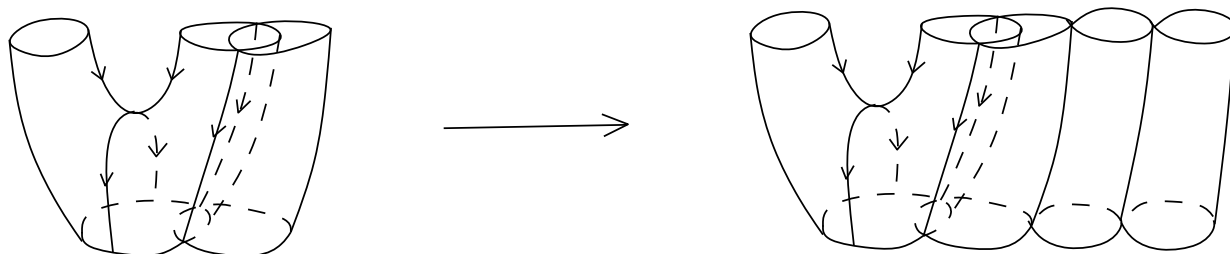


Figura 4.13: Blocos isolantes com uma alça regular.

Capítulo 5

Grafos de Lyapunov

Seja f uma função de Lyapunov associado ao fluxo Gutierrez-Sotomayor X_t sobre a 2-variedade M com singularidades simples. Definimos a seguinte relação de equivalência sobre M :

$$x \sim_f y \Leftrightarrow x \text{ e } y \text{ pertencem à mesma componente conexa de um conjunto nível de } f.$$

Chamamos a $M/\sim_f$ o grafo de Lyapunov associado a X_t e f . Em $M/\sim_f$ cada componente conexa de um conjunto de nível $f^{-1}(c)$ colapsa a um ponto, assim $f^{-1}(c)/\sim_f$ é um conjunto finito de pontos distintos sobre $M/\sim_f$. O ponto sobre $M/\sim_f$ é um vértice se mediante a relação de equivalência corresponde a uma componente de um conjunto de nível contendo uma única singularidade. Os demais pontos são pontos de arestas. Os vertices v de $M/\sim_f$ são rotulados com o índice de Conley da singularidade correspondente e denotamos por e_v^+ o número de arestas de entrada e e_v^- o número de arestas de saída de v .

PROPOSIÇÃO 5.1 *Suponha que $X_t : M \rightarrow M$ é um fluxo Gutierrez-Sotomayor com função de Lyapunov $f : M \rightarrow \mathbf{R}$. Seja $L = M/\sim_f$, então L é um grafo finito, dirigido sem ciclos orientados.*

Demonstração. Da definição de função de Lyapunov temos que os pontos críticos de f consiste das singularidades de X_t . Como X_t tem um número finito de singularidades então existe um número finito de valores críticos de f , $c_1, c_2, \dots, c_n$. Assim $f^{-1}((c_i, c_{i+1}))$ é difeomorfo a $N \times (0, 1)$ onde $N = f^{-1}(c)$ com $c \in (c_i, c_{i+1})$, então pelo lema 2.4, N é uma 1-variedade ramificada com um número finito de componentes.

Também temos que $f^{-1}(c_i)$ tem um número finito de componentes pois caso contrario $f^{-1}(c_i + \epsilon)$ teria infinitas componentes para ϵ suficientemente pequeno. Apenas uma destas componentes, denotada por X_i , contém o ponto crítico de f pois pela definição de função de Lyapunov f separa os pontos críticos.

Agora se $N_0 \subset f^{-1}(c_i)$ não contém pontos críticos de f então a componente de $f^{-1}(c_{i-1}, c_{i+1})$ contendo N_0 é difeomorfa a $N_0 \times (0, 1)$. De fato, $M - \bigcup_i X_i$ é difeomorfa a união disjunta de $N_j \times (0, 1)$ onde cada N_j é uma 1-subvariedade ramificada conexa compacta de M . Assim, se $P : M \rightarrow L$ é a aplicação quociente que identifica cada componente de um conjunto de nível de f a um ponto e $x_i = P(X_i)$ então segue-se que $L - \{x_i\}$ é um conjunto finito de intervalos abertos. Assim, como L é compacto então é um grafo.

Como f decresce ao longo das órbitas então o grafo de Lyapunov L associado a X_t e f não tem ciclos orientados. ■

Por outro lado, para construir um fluxo que satisfaça uma dinâmica desejada é preciso definir um grafo de Lyapunov abstrato.

DEFINIÇÃO Um *grafo de Lyapunov abstrato* é um grafo orientado, conexo, finito L que não possui ciclos orientados e cada vértice v é rotulado com o índice de Conley. Cada aresta a de entrada i.e. incidente positivamente a v (de saída i.e. incidente negativamente a v) será rotulada com um inteiro não-negativo b_a^+ (b_a^-) onde $a \in \{1, \dots, e^+\}$ ($a \in \{1, \dots, e^-\}$), a qual nos referimos como o peso sobre a aresta.

5.1 Variedades com Singularidades Cone

O lema a seguir, é um caso particular do lema 2.4 para os fluxos Gutierrez-Sotomayor X_t , restrito ao caso particular de uma 2-variedade com singularidades cone, i.e., variedades que só admitem as singularidades do tipo cone. Observamos neste caso que no lugar de ter 1-subvariedades ramificadas sempre teremos curvas fechadas. Portanto, o primeiro número de Betti sempre será igual a um e assim não há necessidade de rotular as arestas como veremos no teorema 5.3.

LEMA 5.2 *Seja M uma 2-variedade com singularidades cone. Se X_t é um fluxo Gutierrez-Sotomayor em M então existe uma coleção disjunta de curvas fechadas B_i de M , $i = 0, 1, \dots, m$, com as seguintes propriedades:*

1. $B_0 = \partial M^-$, $B_m = \partial M^+$
2. O fluxo X_t é transversal a cada B_i .
3. Cada B_k , $k \neq 0, m$, divide M em duas regiões cujos fechos denotamos por G_k e H_k com $G_k \supset G_{k-1}$, $H_k \supset H_{k+1}$ e G_k contem exatamente k singularidades. Definindo $G_0 = B_0$, $H_0 = M$, $G_m = M$ e $H_m = B_m$. Temos que, para $i = 0, \dots, m$, $G_i \cap H_i = B_i$ e $G_i \cup H_i = M$.
4. B_k é a fronteira de entrada do fluxo X_t em G_k .

O teorema 5.3, generaliza um teorema em [3] onde os fluxos Morse-Smale em superfícies são classificados utilizando grafos de Lyapunov. Não demonstraremos o teorema 5.3 pois é um caso particular do teorema 5.4.

TEOREMA 5.3 *Um grafo de Lyapunov abstrato L é associado a um fluxo X_t Gutierrez-Sotomayor e uma função de Lyapunov f sobre M , uma 2-variedade com singularidades cone, se e só se as seguintes condições são satisfeitas:*

1. Se o vértice v é rotulado com uma singularidade repulsora (atratora) p então:
 - (a) Se $p \in M(\mathcal{R})$ então o número de arestas de saída e_v^- (entrada e_v^+) é igual a um.
 - (b) Se $p \in M(\mathcal{C})$ então o número de arestas de saída e_v^- (entrada e_v^+) é igual a dois.
2. Se o vértice v é rotulado com uma singularidade sela p então $1 \leq e_v^- \leq 2$ e $1 \leq e_v^+ \leq 2$.

Na figura 5.1, apresentamos pares-índices das singularidades, $p \in M$, de X_t e seus grafos de Lyapunov associados para o caso das variedades com singularidades cone.

5.2 Variedades com Singularidades Simples

TEOREMA 5.4 *Um grafo de Lyapunov abstrato L é associado a um fluxo Gutierrez-Sotomayor X_t e uma função de Lyapunov f sobre M , uma 2-variedade com singularidades simples, se e só se as seguintes condições são satisfeitas:*

1. Se o vértice v é rotulado com uma singularidade repulsora (atratora) p então:
 - (a) Se $p \in M(\mathcal{R})$ então $e_v^- = 1$ e $b_1^- = 1$ ($e_v^+ = 1$ e $b_1^+ = 1$).

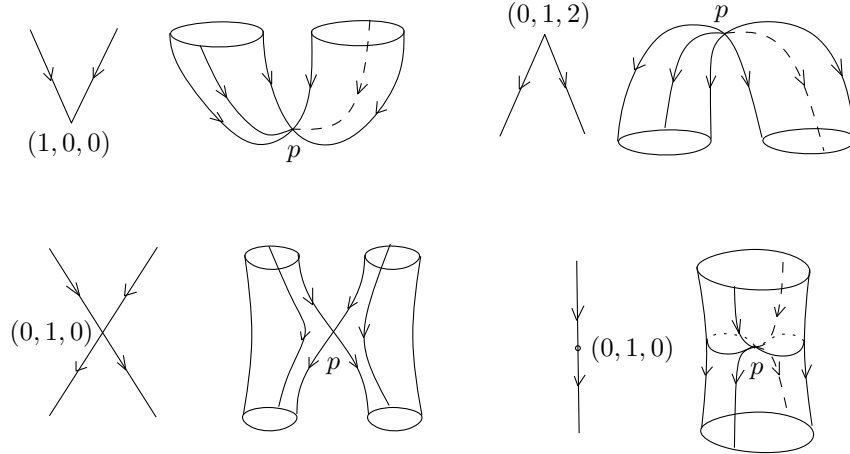


Figura 5.1: Blocos contendo a singularidade cone

(b) Se $p \in M(\mathcal{C})$ então $e_v^- = 2$ e $b_1^- = b_2^- = 1$ ($e_v^+ = 2$ e $b_1^+ = b_2^+ = 1$).

(c) Se $p \in M(\mathcal{W})$ então $e_v^- = 1$ e $b_1^- = 2$ ($e_v^+ = 1$ e $b_1^+ = 2$).

(d) Se $p \in M(\mathcal{D})$ então $e_v^- = 1$ e $b_1^- = 3$ ($e_v^+ = 1$ e $b_1^+ = 3$).

(e) Se $p \in M(\mathcal{T})$ então $e_v^- = 1$ e $b_1^- = 7$ ($e_v^+ = 1$ e $b_1^+ = 7$).

2. Se o vértice v é rotulado com uma singularidade sela p então:

(a) Se $p \in M(\mathcal{R})$ então $1 \leq e_v^- \leq 2$ e $1 \leq e_v^+ \leq 2$. Além disso, os pesos sobre as arestas de entrada e saída de v devem satisfazer: Tabela 1.

(b) Se $p \in M(\mathcal{C})$ então $1 \leq e_v^- \leq 2$ e $1 \leq e_v^+ \leq 2$. Além disso, os pesos sobre as arestas de entrada e saída de v devem satisfazer: Tabela 2.

(c) Se $p \in M(\mathcal{W})$ então

i. Se p é do tipo **si** temos $e_v^- = 1$ e $1 \leq e_v^+ \leq 2$.

ii. Se p é do tipo **se** temos $1 \leq e_v^- \leq 2$ e $e_v^+ = 1$.

Além disso, os pesos sobre as arestas de entrada e saída de v devem satisfazer: Tabela 3.

(d) Se $p \in M(\mathcal{D})$ então

i. Se p é do tipo **as** temos $1 \leq e_v^- \leq 2$ e $e_v^+ = 1$.

ii. Se p é do tipo **rs** temos $e_v^- = 1$ e $1 \leq e_v^+ \leq 2$.

iii. Se p é do tipo **si** temos $1 \leq e_v^- \leq 2$ e $1 \leq e_v^+ \leq 4$.

iv. Se p é do tipo **se** temos $1 \leq e_v^- \leq 4$ e $1 \leq e_v^+ \leq 2$.

Além disso, os pesos sobre as arestas de entrada e saída de v devem satisfazer: Tabela 4.

(e) Se $p \in M(\mathcal{T})$ então

i. Se p é do tipo **ass** temos $1 \leq e_v^- \leq 2$ e $e_v^+ = 1$.

ii. Se p é do tipo **rss** temos $e_v^- = 1$ e $1 \leq e_v^+ \leq 2$.

Além disso, os pesos sobre as arestas de entrada e saída de v devem satisfazer: Tabela 5.

Tabela 1

e_v^-	e_v^+	pesos
1	1	$b_1^- = b_1^+$
1	2	$b_1^- = b_1^+ + b_2^+ - 1$
2	1	$b_1^+ = b_1^- + b_2^- - 1$

Tabela 2

e_v^-	e_v^+	pesos
1	1	$b_1^- = b_1^+$
2	2	$b_1^- + b_2^- = b_1^+ + b_2^+ - 1$

Tabela 3

e_v^-	e_v^+	pesos
1	1	$b_1^- = b_1^+ + 1$
1	2	$b_1^- = b_1^+ + b_2^+$
1	1	$b_1^+ = b_1^- + 1$
2	1	$b_1^+ = b_1^- + b_2^-$

Tabela 4

e_v^-	e_v^+	pesos
1	1	$b_1^+ = b_1^- + 2$
2	1	$b_1^+ = b_1^- + b_2^- + 1$
1	1	$b_1^- = b_1^+ + 2$
1	2	$b_1^- = b_1^+ + b_2^+ + 1$
1	1	$b_1^- = b_1^+ + 2$
1	2	$b_1^- = b_1^+ + b_2^+ + 1$
1	3	$b_1^- = b_1^+ + b_2^+ + b_3^+$
1	4	$b_1^- = b_1^+ + b_2^+ + b_3^+ b_4^+ - 1$
2	1	$b_1^+ = b_1^- + b_2^- - 3$
2	2	$b_1^- + b_2^- = b_1^+ + b_2^+ + 2$
2	3	$b_1^- + b_2^- = b_1^+ + b_2^+ + b_3^+ + 1$
2	4	$b_1^- + b_2^- = b_1^+ + b_2^+ + b_3^+ + b_4^+$
1	1	$b_1^+ = b_1^- + 2$
1	2	$b_1^- = b_1^+ + b_2^+ - 3$
2	1	$b_1^+ = b_1^- + b_2^- + 1$
2	2	$b_1^+ + b_2^+ = b_1^- + b_2^- + 2$
3	1	$b_1^+ = b_1^- + b_2^- + b_3^-$
3	2	$b_1^+ + b_2^+ = b_1^- + b_2^- b_3^- + 1$
4	1	$b_1^+ = b_1^- b_2^- + b_3^- + b_4^- - 1$
4	2	$b_1^+ + b_2^+ = b_1^- + b_2^- + b_3^- + b_4^-$

Tabela 5

e_v^-	e_v^+	pesos
1	1	$b_1^+ = b_1^- + 2$
2	1	$b_1^+ = b_1^- + b_2^- + 1$
1	1	$b_1^- = b_1^+ + 2$
1	2	$b_1^- = b_1^+ + b_2^+ + 1$

Demonstração. (Necessidade) I. Primeramente, mostramos as desigualdades do grau dos vértices v de L .

Seja L um grafo de Lyapunov associado com o fluxo Gutierrez-Sotomayor X_t e a função de Lyapunov f sobre a variedade com singularidades simples M . Se p é uma singularidade tal que $f(p) = c$, denotemos por N_1 a componente de $f^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon])$, com $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, que contém apenas o ponto singular p . Seja também $N_0 = N_1 \cap f^{-1}(c - \epsilon)$. Então (N_1, N_0) é um par-índice para p .

Como p é uma singularidade então $\partial N_1 \neq \emptyset$, logo $H_2(N_1) = 0$. Temos também que N_1 é conexo, logo $\tilde{H}_0(N_1) = 0$. Seja v o vértice de L rotulado com p então $\dim H_0(N_0) = e_v^-$ e se $N_0 \neq \emptyset$ então $\dim \tilde{H}_0(N_0) = e_v^- - 1$.

Para tal N_0 temos a seguinte sequência de homologia longa exata:

$$0 \longrightarrow CH_2(p) \xrightarrow{\partial_2} H_1(N_0) \xrightarrow{i_1} H_1(N_1) \xrightarrow{p_1} CH_1(p) \xrightarrow{\partial_1} \tilde{H}_0(N_0) \longrightarrow 0$$

1. Se v é rotulado com uma singularidade repulsora P então $e_v^+ = 0$ e $N_0 \neq \emptyset$. Usando a sequência de homologia temos:

- (a) Se $p \in M(\mathcal{R})$, $\dim CH_1(p) = 0$ implica que $\dim \tilde{H}_0(N_0) = 0$ e portanto $e_v^- = 1$.
- (b) Se $p \in M(\mathcal{C})$, $\dim CH_1(p) = 1$ implica que $\dim \tilde{H}_0(N_0) = 1$ ($\dim \tilde{H}_0(N_0) = 0$ contradiz a exatidão em $CH_1(p)$) e portanto $e_v^- = 2$.
- (c) Se $p \in M(\mathcal{W})$, $\dim CH_1(p) = 0$ implica que $\dim \tilde{H}_0(N_0) = 0$ e portanto $e_v^- = 1$.
- (d) Se $p \in M(\mathcal{D})$, $\dim CH_1(p) = 0$ implica que $\dim \tilde{H}_0(N_0) = 0$ e portanto $e_v^- = 1$.
- (e) Se $p \in M(\mathcal{T})$, $\dim CH_1(p) = 0$ implica que $\dim \tilde{H}_0(N_0) = 0$ e portanto $e_v^- = 1$.

Tomando o fluxo reverso, segue-se por análise similar que se v é rotulado com uma singularidade atratora p então:

- (a) Se $p \in M(\mathcal{R})$ então $e_v^+ = 1$ e $e_v^- = 0$.
- (b) Se $p \in M(\mathcal{C})$ então $e_v^+ = 2$ e $e_v^- = 0$.
- (c) Se $p \in M(\mathcal{W})$ então $e_v^+ = 1$ e $e_v^- = 0$.
- (d) Se $p \in M(\mathcal{D})$ então $e_v^+ = 1$ e $e_v^- = 0$.
- (e) Se $p \in M(\mathcal{T})$ então $e_v^+ = 1$ e $e_v^- = 0$.

2. Se v é rotulado com uma singularidade sela p então $N_0 \neq \emptyset$ e $e_v^- \geq 1$. Usando a sequência de homologia temos:

- (a) Se $p \in M(\mathcal{R})$, $\dim CH_1(p) = 1$ implica que $\dim \tilde{H}_0(N_0) \leq 1$ e portanto $e_v^- \leq 2$.
- (b) Se $p \in M(\mathcal{C})$, $\dim CH_1(p) = 1$ implica que $\dim \tilde{H}_0(N_0) \leq 1$ e portanto $e_v^- \leq 2$.
- (c) Se $p \in M(\mathcal{W})$ então
 - i. Se é do tipo **si**, $\dim CH_1(p) = 0$ implica $\dim \tilde{H}_0(N_0) = 0$ e portanto $e_v^- = 1$.
 - ii. Se é do tipo **se**, $\dim CH_1(p) = 1$ implica que $\dim \tilde{H}_0(N_0) \leq 1$ e portanto $e_v^- \leq 2$.
- (d) Se $p \in M(\mathcal{D})$ então
 - i. Se é do tipo **as**, $\dim CH_1(p) = 1$ implica que $\dim \tilde{H}_0(N_0) \leq 1$ e portanto $e_v^- \leq 2$.
 - ii. Se é do tipo **rs**, $\dim CH_1(p) = 0$ implica $\dim \tilde{H}_0(N_0) = 0$ e portanto $e_v^- = 1$.
 - iii. Se é do tipo **ssi**, $\dim CH_1(p) = 1$ implica que $\dim \tilde{H}_0(N_0) \leq 1$ e portanto $e_v^- \leq 2$.
 - iv. Se é do tipo **sse**, $\dim CH_1(p) = 3$ implica que $\dim \tilde{H}_0(N_0) \leq 3$ e portanto $e_v^- \leq 4$.
- (e) Se $p \in M(\mathcal{T})$ então
 - i. Se é do tipo **ass**, $\dim CH_1(p) = 1$ implica que $\dim \tilde{H}_0(N_0) \leq 1$ e portanto $e_v^- \leq 2$.
 - ii. Se é do tipo **rss**, $\dim CH_1(p) = 0$ implica $\dim \tilde{H}_0(N_0) = 0$ e portanto $e_v^- = 1$.

Tomando o fluxo reverso, segue-se similarmente que

- (a) Se $p \in M(\mathcal{R})$ então $1 \leq e_v^+ \leq 2$.
- (b) Se $p \in M(\mathcal{C})$ então $1 \leq e_v^+ \leq 2$.
- (c) Se $p \in M(\mathcal{W})$ então
 - i. Se é do tipo **si** temos $1 \leq e_v^+ \leq 2$.
 - ii. Se é do tipo **se** temos $e_v^+ = 1$.
- (d) Se $p \in M(\mathcal{D})$ então
 - i. Se é do tipo **as**, temos $e_v^+ = 1$.
 - ii. Se é do tipo **rs**, temos $1 \leq e_v^+ \leq 2$.
 - iii. Se é do tipo **ssi**, temos $1 \leq e_v^+ \leq 4$.
 - iv. Se é do tipo **sse**, temos $1 \leq e_v^+ \leq 2$.
- (e) Se $p \in M(\mathcal{T})$ então
 - i. Se é do tipo **ass**, temos $e_v^+ = 1$.
 - ii. Se é do tipo **rss**, temos $1 \leq e_v^+ \leq 2$.

II. Agora mostramos as relações dos pesos sobre as arestas incidentes de v .

O teorema 4.1 relaciona o primeiro número de Betti das componentes de fronteira, de entrada e saída, ∂N_1^+ e ∂N_1^- , do bloco isolante (N_1, N_0) de uma singularidade, $p \in M$, de X_t com o número de componentes de fronteira de N_1 e o índice de Conley de $p \in M$. Como o ponto fixo $p \in M$ corresponde a um vértice v no grafo de Lyapunov e ∂N_1^+ (∂N_1^-) corresponde as arestas de entrada (saída) incidentes a v então o teorema 4.1 relaciona o grau (de entrada e saída) de v , os pesos sobre as arestas (de entrada e saída) incidentes a v e o índice de Conley com o qual v é rotulado.

$$(h_2 - h_1 + h_0) - (h_2 - h_1 + h_0)^* = e_v^+ - \mathcal{B}^+ - e_v^- + \mathcal{B}^- \quad (5.1)$$

onde $\mathcal{B}^+ = \sum_{k=1}^{e_v^+} b_k^+$ e onde $\mathcal{B}^- = \sum_{k=1}^{e_v^-} b_k^-$.

1. Se p é uma singularidade repulsora então usando os limites sobre o grau dos vertices v , que obtivemos previamente, a equação acima nos dá as relações dos pesos sobre as arestas incidentes a v :

- (a) Se $p \in M(\mathcal{R})$ então $(1 - 0 + 0) - (0 - 0 + 1) = 0 - 0 - 1 + b_1^-$. Portanto, $b_1^- = 1$.
- (b) Se $p \in M(\mathcal{C})$ então $(2 - 1 + 0) - (0 - 0 + 1) = 0 - 0 - 2 + b_1^- + b_2^-$. Portanto $b_1^- = b_2^- = 1$.
- (c) Se $p \in M(\mathcal{W})$ então $(2 - 0 + 0) - (0 - 0 + 1) = 0 - 0 - 1 + b_1^-$. Portanto, $b_1^- = 2$.
- (d) Se $p \in M(\mathcal{D})$ então $(3 - 0 + 0) - (0 - 0 + 1) = 0 - 0 - 1 + b_1^-$. Portanto, $b_1^- = 3$.
- (e) Se $p \in M(\mathcal{T})$ então $(7 - 0 + 0) - (0 - 0 + 1) = 0 - 0 - 1 + b_1^-$. Portanto, $b_1^- = 7$.

Fazendo cálculos similares para uma singularidade atratora temos:

- (a) Se $p \in M(\mathcal{R})$ então $b_1^+ = 1$.
- (b) Se $p \in M(\mathcal{C})$ então $b_1^+ = b_2^+ = 1$.
- (c) Se $p \in M(\mathcal{W})$ então $b_1^+ = 2$.
- (d) Se $p \in M(\mathcal{D})$ então $b_1^+ = 3$.
- (e) Se $p \in M(\mathcal{T})$ então $b_1^+ = 7$.

2. Se p é uma singularidade sela então nossa fórmula acima se reduz a:

- (a) Se $p \in M(\mathcal{R})$ então $0 = e_v^+ - \mathcal{B}^+ - e_v^- + \mathcal{B}^-$.
- (b) Se $p \in M(\mathcal{C})$ então $0 = e_v^+ - \mathcal{B}^+ - e_v^- + \mathcal{B}^-$.

(c) Se $p \in M(\mathcal{W})$ então

- i. Se p é do tipo **si** então $1 = e_v^+ - \mathcal{B}^+ - e_v^- + \mathcal{B}^-$.
- ii. Se p é do tipo **se** então $-1 = e_v^+ - \mathcal{B}^+ - e_v^- + \mathcal{B}^-$.

(d) Se $p \in M(\mathcal{D})$ então

- i. Se p é do tipo **as** então $-2 = e_v^+ - \mathcal{B}^+ - e_v^- + \mathcal{B}^-$.
- ii. Se p é do tipo **rs** então $2 = e_v^+ - \mathcal{B}^+ - e_v^- + \mathcal{B}^-$.
- iii. Se p é do tipo **ssi** então $2 = e_v^+ - \mathcal{B}^+ - e_v^- + \mathcal{B}^-$.
- iv. Se p é do tipo **sse** então $-2 = e_v^+ - \mathcal{B}^+ - e_v^- + \mathcal{B}^-$.

(e) Se $p \in M(\mathcal{T})$ então

- i. Se p é do tipo **ass** então $-2 = e_v^+ - \mathcal{B}^+ - e_v^- + \mathcal{B}^-$.
- ii. Se p é do tipo **rss** então $2 = e_v^+ - \mathcal{B}^+ - e_v^- + \mathcal{B}^-$.

Considerando todas as possibilidades de e^+ , e^- para as desigualdades do grau dos vértices v , que obtivemos previamente, e usando as equações acima obtemos os pesos relacionados na tabela 1, tabela 2, tabela 3, tabela 4 e tabela 5.

(Suficiencia) Dado um grafo de Lyapunov abstrato satisfazendo as condições do teorema devemos mostrar que existe um fluxo Gutierrez-Sotomayor em uma variedade com singularidades simples M , com função de Lyapunov cujo gráfico de Lyapunov é dado. Isto é feito adequadamente colando blocos isolantes construídos no capítulo 4 de forma a não ter nenhuma conexão de sela, i.e., uma trajetória $\gamma \subset M(\mathcal{R})$ tal que existem duas singularidades hiperbólicas p e q de X tal que $\gamma = W^u(p) \cap W^s(q)$ e $W^u(p) \cup W^s(q)$ consiste de um número finito de trajetórias. ■

EXEMPLO 5.1 Neste exemplo, Figura 5.2, apresentamos a colagem de blocos de acordo com o grafo de Lyapunov dado. ■

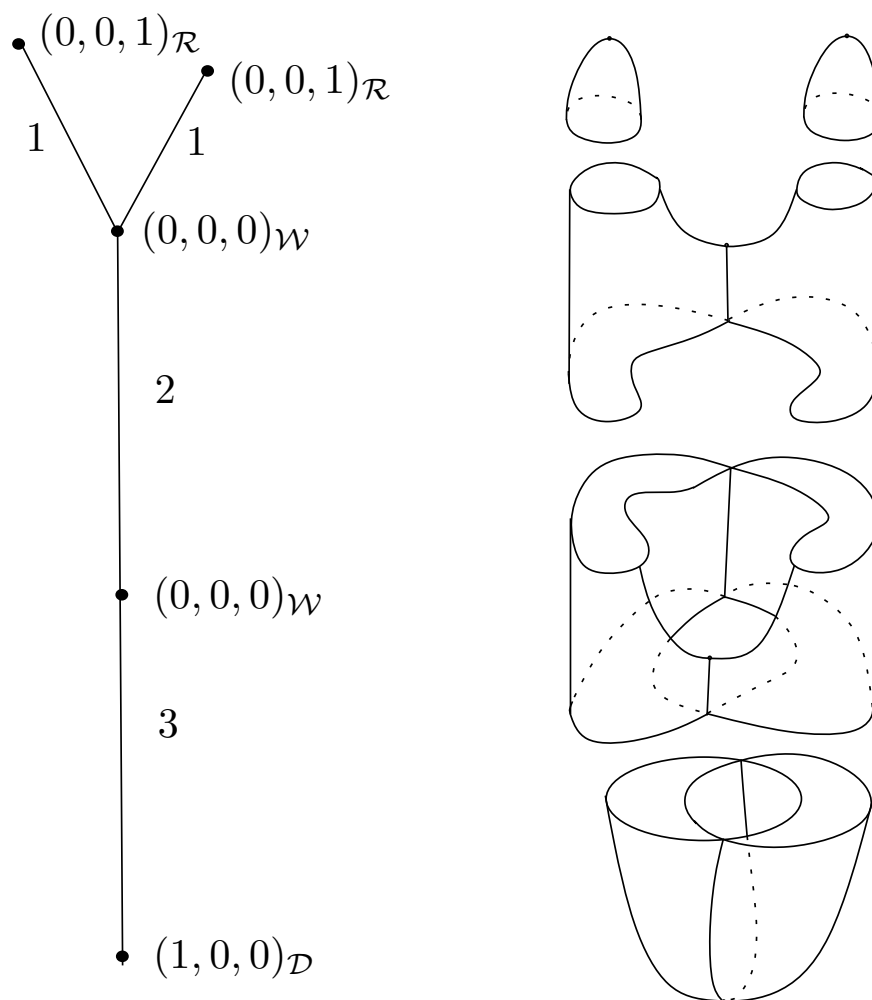


Figura 5.2: Colando blocos segundo o grafo de Lyapunov

Conclusão

Nesta tese estudamos os fluxos Gutierrez-Sotomayor X_t numa 2-variedade com singularidades simples. Provamos a existencia de funções de Lyapunov para fluxos sem órbitas periódicas e sem ciclos, apresentamos uma fórmula dinâmica-topológica para uma estratificação de M compatível com o fluxo, caracterizamos a igualdade de Poincaré-Hopf e contruímos blocos isolantes para estes fluxos e fazemos uma abordagem combinatorial via grafos de Lyapunov. Muitas perguntas decorrentes deste trabalho ficam em aberto.

Para a existência de funções de Lyapunov para um fluxo Gutierrez-Sotomayor contendo orbitas periódicas e ciclos singulares é suficiente mostrar para a parte singular que é um grafo que contém órbitas periodicas e ciclos singulares. Se mostrarmos para este grafo então teremos solucionado o problema, pois pode-se estender facilmente, pelos métodos ja conhecidos, para parte suave. As ligações das partes locais também forma um conjunto de problemas interessantes.

Classificar fluxos Gutierrez-Sotomayor via grafos de Lyapunov para conjuntos limites contendo singularidades, órbitas periodicas e ciclos singulares. Desta forma caracterizar os blocos isolantes para as órbitas periódicas e para os ciclos singulares.

No espirito do trabalho [1] gostaríamos de saber se existe uma continuação de grafos associados a fluxos Gutierrez-Sotomayor com órbitas periódicas e ciclos singulares a grafos associados a fluxos Gutierrez-Sotomayor apenas com singularidades. No caso afirmativo gostaríamos de estabelecer as condições necesarias e suficientes para esta continuação.

Mostrar se a fórmula dinâmico-topológica é satisfeita por outros tipos de fluxos em outros espaços estratificados. Podemos considerar por exemplo as 3-variedades suaves fechadas com alguma estratificação e os fluxos de Smale nela definidas.

Referências Bibliográficas

- [1] BERTOLIM, M. A., MELLO, M. P., DE REZENDE, K. A. *Lyapunov graph continuation*. Ergodic Theory Dynam. Systems, 23, no. 1, 1–58, 2003.
- [2] CONLEY, Charles C. *Isolated invariant sets and the Morse index*. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 38. American Mathematical Society: Providence, R.I., 1978.
- [3] DE REZENDE, K., FRANZOSA, R. *Lyapunov graphs and flows on surfaces*. Trans. Amer. Math. Soc., no. 340, 767-784, 1993.
- [4] FRANKS, J. *Nonsingular Smale flows on S^3* . Topology, 24, no. 3, 265–282. 1985.
- [5] GORESKEY, M., MACPHERSON, R. *Stratified Morse Theory*. Springer-Verlag. 1988.
- [6] GUTIERREZ, C., SOTOMAYOR, J. *Stable Vector Fields on Manifolds with Simple Singularities*. Proceedings of the London Mathematical Society (3) 45 (1982), no. 1, 97-112.
- [7] MILNOR, J. *Differentiable manifolds which are homotopy spheres*. (mimeographed), Princeton 1959.
- [8] PEIXOTO, M. *Structural stability on two-dimensional manifolds*. Topology, no. 1, 101-120, 1962.
- [9] SMALE, Stephen. *On Gradient Dynamical Systems*. Annals of Mathematics., vol. 74. 1961. 199-206.
- [10] THOM, R. *Ensembles et morphismes stratifiés*. Bull. Amer. Math. Soc., 75, 240-284, 1969.