OPERADORES DE CONVOLUÇÃO NO ESPAÇO DE GERMES HOLOMORFOS DE TIPO NUCLEAR

HEBE DE AZEVEDO BIAGIONI

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

CAMPINAS - SÃO PAULO
BRASIL

UNICAMP

COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE PÓS-GRADUAÇÃO

AUTORIZAÇÃO PARA QUE A UNICAMP POSSA FORNECER, A PREÇO DE CUSTO, CÓPIAS DA TESE A INTERESSADOS

Nome do Aluno: Hebe de Azevedo Biagioni
Nº de Identificação: 776043
Endereço para Correspondência: UNICAMP-IMECC-Barão Geraldo 13100 Campinas
Curso: Matemática
Nome do Orientador: Mário Carvalho de Matos
Título da Dissertação ou Tese: Operadores de Convolução no espaço de germes holomorfos de tipo nuclear.

Data proposta para a Defesa: 24/03/81

(O Aluno deverá assinar um dos 3 ítens abaixo)

1) Autorizo a Universidade Estadual de Campinas a partir desta data, a fornecer, a preço de custo, cópias de minha Dissertação ou Tese a interessados.

__/__/__ — **Data**   __________ **assinatura do aluno**

2) Autorizo a Universidade Estadual de Campinas, a fornecer, a partir de dois anos após esta data, a preço de custo, cópias de minha Dissertação ou Tese a interessados.

__/__/__ — **Data**   __________ **assinatura do aluno**

3) Solicito que a Universidade Estadual de Campinas me consulte, dois anos após esta data, quanto à minha autorização para o fornecimento de cópias de minha Dissertação ou Tese, a preço de custo, a interessados.

03/02/81 — **Data**   Hebe de Azevedo Biagioni — **assinatura do aluno**

DE ACORDO

Mário C. Matos

Orientador

Impl.

OPERADORES DE CONVOLUÇÃO NO ESPAÇO DE GERMES

HOLOMORFOS DE TIPO NUCLEAR

HEBE DE AZEVEDO BIAGIONI

ORIENTADOR

PROF. DR. MÁRIO CARVALHO DE MATOS

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

março de 1981

OPERADORES DE CONVOLUÇÃO NO ESPAÇO DE GERMES HOLOMORFOS DE TIPO NUCLEAR

INTRODUÇÃO

Neste trabalho, demonstramos teoremas de existência e aproximação de soluções de equações de convolução no espaço de germes holomorfos de tipo nuclear em um subconjunto compacto absolutamente convexo de um espaço normado complexo e de um espaço localmente convexo, complexo e separado. Estes teoremas generalizam parte dos resultados de Martineau de (7), pois mostramos que, em dimensão finita, o espaço dos germes holomorfos coincide com o espaço dos germes de tipo nuclear. Também em C^I, onde I é um conjunto arbitrário, esses espaços coincidem. Como um terceiro exemplo, mostramos que, num espaço localmente convexo nuclear, os germes holomorfos em torno da origem são de tipo nuclear.

Matos em (8) definiu o espaço de funções holomorfas de tipo nuclear limitado na bola aberta B_R de centro na origem e raio R, onde $R>0$ ou $R=+\infty$, de um espaço normado E, denotando esse espaço por $\mathcal{H}_{Nb}(B_R)$, e demonstrou teoremas de existência e aproximação de soluções de equações de convolução nesse espaço. Esses resultados são mencionados no Capítulo 1.

Sejam K um subconjunto compacto absolutamente convexo de E e $\varepsilon>0$. Se considerarmos em E uma norma equivalente com bola unitária $K+\varepsilon B_1$, valem os resultados de Matos para $\mathcal{H}_{Nb}(K+\varepsilon B_1)$ cuja topologia localmente convexa será denotada por τ_ε.

No Capítulo 2, §1, provamos que a topologia do espaço dos germes de tipo nuclear $H_N(K)$, definida por Aron em (2), é a topologia localmente convexa limite indutivo dos espaços $(\mathcal{H}_{Nb}(K+\varepsilon B_1), \tau_\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, e que $H_N(K)$ é um espaço tonelado, bornológico e (DF).

Sejam agora E um espaço localmente convexo, complexo e separado, SC(E) o conjunto das seminormas contínuas em E, i_α a aplicação quociente $i_\alpha:(E,\alpha) \to E_\alpha=(E,\alpha)/\alpha^{-1}(\{0\})$ e K um subconjunto compacto absolutamente convexo de E. Definimos $H_N(K)$ como a reunião dos espaços $H_N(i_\alpha(K))$, $\alpha\varepsilon SC(E)$, e munimos $H_N(K)$ da topologia localmente convexa limite indutivo das topologias $T_{N,\alpha}$ dos subespaços $H_N(i_\alpha(K))$, $\alpha\varepsilon SC(E)$. Esta definição é dada no Capítulo 2,§2.

Matos em (8) define também a transformada de Borel de um elemento $T\varepsilon \mathcal{H}'_{Nb}(B_R)$, que dá uma bijeção linear entre $\mathcal{H}'_{Nb}(B_R)$ e o conjunto das funções holomorfas em E' que são de tipo exponencial menor do que R, denotado por $Exp_R(E')$.

No Capítulo 3, definimos a transformada de Borel de um elemento $T\varepsilon H'_N(K)$ para os casos normado e localmente convexo. Para o caso normado, a transformada de Borel dá uma bijeção entre $H'_N(K)$ e $Exp_{1,K}(E')=\bigcap_{\varepsilon>0} Exp_1(E,K+\varepsilon B_1)'$, onde $(E,K+\varepsilon B_1)$ indica o espaço normado E com bola unitária $K+\varepsilon B_1$. Aron em (1) provou que a transformada de Borel dá uma bijeção entre $H'_N(K)$ e o conjunto das funções holomorfas em E' que são de tipo exponencial compacto contidas em K. Provamos que esses dois resultados coincidem. Para o caso localmente convexo, a transformada de Borel dá uma bijeção entre $H'_N(K)$ e $Exp_{1,K}(E')=\{F:E'\to C: F\circ(I_\alpha|E'_\alpha)\varepsilon Exp_{1,i_\alpha(K)}(E'), \forall\alpha\varepsilon SC(E)\}$, onde I_α é a aplicação definida por Matos em (10) de $\mathcal{H}(E_\alpha)$ em $\mathcal{H}_u(E)$ por $I_\alpha(f_\alpha)=f_\alpha\circ i_\alpha$, para todo $f_\alpha\varepsilon\mathcal{H}(E_\alpha)$.

No Capítulo 4, demonstramos teoremas de existência e aproximação de soluções de equações de convolução de $H_N(K)$ para os casos normado e localmente convexo.

No Capítulo 5, usando a transformada de Borel de um elemento de $\mathcal{H}'(K)$, onde K é um subconjunto compacto absolutamente convexo de C^n, dada por Martineau em (7), provamos que $\mathcal{H}'(K)=H_N'(K)$ algébrica e topologicamente, e provamos também que $H_N(K)$ é um espaço reflexivo. Logo $\mathcal{H}(K)=H_N(K)$ algébrica e topologicamente. Usando essa igualdade, provamos que, se I for um conjunto arbitrário de índices e K for um subconjunto compacto absolutamente convexo de C^I, $H_N(K)=\mathcal{H}(K)$ algébrica e topologicamente. Como um terceiro exemplo onde germes holomorfos são de tipo nuclear, motivados pela demonstração do Teorema 2.11. de Matos (10), provamos que, se E for um espaço localmente convexo nuclear, $H_N(0)=\mathcal{H}(0)$.

Quero externar aqui os meus agradecimentos ao Prof. Dr. Mário Carvalho de Matos por sua orientação e estímulo, aos colegas do grupo de Holomorfia, pelo constante incetivo e à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) que, através de bolsa de estudos, custeou inicialmente o meu Doutorado.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

1.1. DEFINIÇÃO. Se E for um espaço normado complexo e $m \in N$, $\mathcal{P}(^mE)$ denotará o espaço de Banach dos polinômios m-homogêneos contínuos em E, com valores complexos, com a norma

$$P \in \mathcal{P}(^mE) \mapsto \|P\| = \sup\{|P(x)|;\ x \in E,\ \|x\| \leq 1\}.$$

Se E' for o dual topológico de E, temos que $\phi^m \in \mathcal{P}(^mE)$, para cada $\phi \in E'$. Denotemos por $\mathcal{P}_f(^mE)$ o espaço vetorial dos elementos de $\mathcal{P}(^mE)$ que podem ser representados como uma soma finita $\phi_1^m + \ldots + \phi_r^m$ onde $\phi_j \in E'$ para $j=1,\ldots,r$. Um elemento de $\mathcal{P}_f(^mE)$ é dito de tipo finito.

O espaço de Banach $\mathcal{P}_N(^mE)$ dos polinômios m-homogêneos nucleares pode ser caracterizado pelas seguintes condições:

(1) $\mathcal{P}_N(^mE)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}(^mE)$.

(2) $\mathcal{P}_N(^mE)$ é um espaço de Banach com respeito a uma norma, denotada por $\| \ \|_N$, e chamada norma nuclear.

A norma nuclear é distinguida da norma usual pelas seguintes condições:

(3) $\mathcal{P}_f(^mE)$ está contido e é denso em $\mathcal{P}_N(^mE)$ com respeito à norma nuclear.

(4) Para cada $P \in \mathcal{P}_f(^mE)$ sua norma nuclear é igual ao ínfimo das somas $\|\phi_1\|^m + \ldots + \|\phi_r\|^m$ para todas as possíveis representações

$P=\phi_1^m+\ldots+\phi_r^m$.

A bola unitária em E será denotada por B_1. Se considerarmos em E uma outra norma equivalente, esta vai dar origem a uma nova norma em $\mathcal{P}_N(^mE)$. Assim, se U é a bola unitária de uma nova norma em E, denotaremos a norma correspondente em $\mathcal{P}_N(^mE)$ por $\|\ \|_{N,U}$.

Vamos enunciar agora as definições e resultados dados por Matos em (8) e (9) que usaremos nos próximos capítulos.

E denotará um espaço normado complexo e, para R número real positivo ou $R=+\infty$, B_R denotará a bola aberta em E com centro na origem e raio R e $\mathcal{H}(B_R)$ o espaço vetorial complexo das funções holomorfas complexas em B_R.

1.2. <u>*DEFINIÇÃO*</u>. Um elemento f de $\mathcal{H}(B_R)$ é dito uma <u>função holomorfa nuclear de tipo limitado em B_R</u> se:

(i) $\hat{d}^n f(0)\in\mathcal{P}_N(^mE)$ para todo $m\in N$

(ii) $\limsup_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n!}\|\hat{d}^n f(0)\|_N\right)^{1/n}\leq\frac{1}{R}$.

$\mathcal{H}_{Nb}(B_R)$ denotará o espaço vetorial de todas as funções holomorfas nucleares de tipo limitado em B_R, munido da topologia localmente convexa gerada pelas seminormas

$$\|f\|_{N,\rho}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho^n}{n!}\|\hat{d}^n f(0)\|_N$$

para $f\in\mathcal{H}_{Nb}(B_R)$, com $0<\rho<R$.

1.3. <u>*PROPOSIÇÃO*</u>. *$\mathcal{H}_{Nb}(B_R)$ é um espaço de Fréchet.*

1.4. <u>*PROPOSIÇÃO*</u>. *O subespaço vetorial $\mathcal{S}_R$ de $\mathcal{H}_{Nb}(B_R)$ gerado por todas as funções $\exp\phi|B_R$, $\phi\in E'$, é denso em*

$\mathcal{H}_{Nb}(B_R)$.

1.5. ***PROPOSIÇÃO.*** *Se $a\epsilon E$ e $f\epsilon\,\mathcal{H}_{Nb}(B_R)$, então $\hat{d}^n f(.)a\epsilon\,\mathcal{H}_{Nb}(B_R)$ e*

$$\hat{d}^n f(.)a=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\,\widehat{d^{i+n}f(0).^{i}}\,(a)$$

sendo a convergência da série no sentido da topologia de $\mathcal{H}_{Nb}(B_R)$.

1.6. ***DEFINIÇÃO.*** Se $T\epsilon\,\mathcal{H}'_{Nb}(B_R)$, sua transformada de Borel $\hat{T}$ é definida por $\hat{T}(\phi)=T(\exp\phi|B_R)$, para todo $\phi\epsilon E'$.

1.7. ***DEFINIÇÃO.*** Uma função $f\epsilon\,\mathcal{H}(E')$ é de tipo exponencial menor do que $R>0$ se existir $\rho\epsilon[0,R)$ tal que, para cada $\varepsilon>0$ existe $c(\varepsilon)>0$ satisfazendo

$$|f(\phi)|\leq c(\varepsilon)\exp\left[(\rho+\varepsilon)\|\phi\|\right]$$

para todo $\phi\epsilon E'$.

f é de tipo exponencial zero se for de tipo exponencial menor do que ε, para todo $\varepsilon>0$.

$Exp_R(E')$ denotará o conjunto das funções holomorfas em E' de tipo exponencial menor do que R.

1.8. ***OBSERVAÇÃO.*** Dado $f\epsilon\,\mathcal{H}(E')$, $f\epsilon Exp_R(E')$ se, e somente se,

$$\limsup_{n\to\infty}\|\hat{d}^n f(0)\|^{1/n}<R.$$

1.9. ***PROPOSIÇÃO.*** *A aplicação $T\epsilon\,\mathcal{H}'_{Nb}(B_R)\mapsto\hat{T}\epsilon Exp_R(E')$ é uma bijeção linear bem definida.*

1.10. ***DEFINIÇÃO.*** $T\epsilon\,\mathcal{H}'_{Nb}(B_R)$ é dito de tipo zero se sua transformada de Borel $\hat{T}$ for de tipo exponencial zero.

1.11. OBSERVAÇÃO. Gupta em (6) define $T*f\in \mathcal{H}_{Nb}(E)$ para $T\in \mathcal{H}'_{Nb}(E)$ e $f\in \mathcal{H}_{Nb}(E)$ por $(T*f)(x)=T(\tau_{-x}f)$ para todo $x\in E$, onde $(\tau_{-x}f)(y)=f(y+x)$, para todo $y\in E$. Se $T\in \mathcal{H}'_{Nb}(B_R)$ e $f\in \mathcal{H}_{Nb}(E)$, temos que $T*f\in \mathcal{H}_{Nb}(E)$, pois T pode ser considerado como um elemento de $\mathcal{H}'_{Nb}(E)$.

1.12. PROPOSIÇÃO. *Se $T\in \mathcal{H}'_{Nb}(B_R)$ for de tipo zero, então a aplicação linear*

$$g\in \mathcal{H}_{Nb}(E)\mapsto T*g\in \mathcal{H}_{Nb}(B_R)$$

é bem definida e contínua quando consideramos em $\mathcal{H}_{Nb}(E)$ a topologia induzida por $\mathcal{H}_{Nb}(B_R)$.

1.13. PROPOSIÇÃO. *Dados $T\in \mathcal{H}'_{Nb}(B_R)$ de tipo zero e $f\in \mathcal{H}_{Nb}(B_R)$, a seqüência $\left(T*\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\hat{d}^k f(0)\right)_{n=0}^{\infty}$ é de Cauchy em $\mathcal{H}_{Nb}(B_R)$.*

1.14. DEFINIÇÃO. Dados $T\in \mathcal{H}'_{Nb}(B_R)$ de tipo zero e $f\in \mathcal{H}_{Nb}(B_R)$, a convolução de T e f, denotada por $T*f$, é o limite da sequência $\left(T*\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\hat{d}^k f(0)\right)_{n=0}^{\infty}$ em $\mathcal{H}_{Nb}(B_R)$.

1.15. PROPOSIÇÃO. *Dado $T\in \mathcal{H}'_{Nb}(B_R)$ de tipo zero, a aplicação linear*

$$T*: f\in \mathcal{H}_{Nb}(B_R)\mapsto T*f\in \mathcal{H}_{Nb}(B_R)$$

é contínua.

1.16. PROPOSIÇÃO. *A aplicação linear*

$$f\in \mathcal{H}_{Nb}(B_R)\mapsto df(.)a\in \mathcal{H}_{Nb}(B_R)$$

é contínua, para todo $a\in E$.

1.17. <u>*PROPOSIÇÃO*</u>. *Dado* $T\in \mathcal{H}'_{Nb}(B_R)$ *de tipo zero, temos:*

$$T*(df(.)a)= d(T*f)(.)a$$

para todo $f\in \mathcal{H}_{Nb}(B_R)$ *e* $a\in E$.

1.18. <u>*PROPOSIÇÃO*</u>. *Se* $T\in \mathcal{H}'_{Nb}(B_R)$ *e* $f\in \mathcal{H}_{Nb}(E)$, *então*

$$(T*f)(x)= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} T(\hat{d}^n f(.)x)$$

para todo $x\in B_R$.

1.19. <u>*OBSERVAÇÃO*</u>. Gupta em (6) define $T_1 * T_2 \in \mathcal{H}'_{Nb}(E)$ para $T_1, T_2 \in \mathcal{H}'_{Nb}(E)$ por $(T_1 * T_2)(f) = [T_1 * (T_2 * f)](0)$, para todo $f\in \mathcal{H}_{Nb}(E)$, e ele prova que $\widehat{T_1 * T_2} = \hat{T}_1 . \hat{T}_2$. Portanto, se $T_1, T_2 \in \mathcal{H}'_{Nb}(B_R)$, $T_1 * T_2 \in \mathcal{H}'_{Nb}(B_R)$ se, e somente se, $\hat{T}_1 \hat{T}_2 \in Exp_R(E')$.

1.20. <u>*DEFINIÇÃO*</u>. Uma aplicação $\mathcal{O}$ de $\mathcal{H}_{Nb}(B_R)$ em si mesmo é dita um <u>operador de convolução em $\mathcal{H}_{Nb}(B_R)$</u> se for linear, contínua e satisfizer

$$\mathcal{O}(df(.)a)= d(\mathcal{O}f)(.)a$$

para todo $f\in \mathcal{H}_{Nb}(B_R)$ e $a\in E$.

$\mathcal{A}_R$ denota o conjunto de todos os operadores de convolução em $\mathcal{H}_{Nb}(B_R)$.

Seja γ_R a aplicação de $\mathcal{A}_R$ em $\mathcal{H}'_{Nb}(B_R)$ definida por

$$(\gamma_R \mathcal{O})(f)= (\mathcal{O}f)(0)$$

para todo $f\in \mathcal{H}_{Nb}(B_R)$ e $\mathcal{O} \in \mathcal{A}_R$.

1.21. <u>*DEFINIÇÃO*</u>. $\mathcal{O} \in \mathcal{A}_R$ é de <u>tipo zero</u> se $\gamma_R \mathcal{O} \in \mathcal{H}'_{Nb}(B_R)$ for de tipo zero.

1.22. *EXEMPLOS*. 1) Para cada $n \in N$, consideremos $H_n \in \mathcal{P}'_N({}^nE)$. O operador de convolução $\mathcal{Q}_m \in \mathcal{A}_R$ definido por

$$(\mathcal{Q}_m f)(x) = \sum_{k=0}^{m} H_k(\hat{d}^k f(x)),$$

para todo $f \in \mathcal{H}_{Nb}(B_R)$ e todo $x \in B_R$, é de tipo zero.

2) Se os H_n de 1) forem tais que $\limsup_{n \to \infty} \|H_n\|^{1/n} < \infty$, então o operador de convolução $\mathcal{Q}_H$ definido por

$$(\mathcal{Q}_H f)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} H_k(\hat{d}^k f(x)),$$

para todo $f \in \mathcal{H}_{Nb}(B_R)$ e $x \in B_R$, é de tipo zero.

1.23. *PROPOSIÇÃO*. *γ_R é uma bijeção linear entre $\{\mathcal{Q} \in \mathcal{A}_R : \mathcal{Q}$ é de tipo zero$\}$ e $\{T \in \mathcal{H}'_{Nb}(B_R) : T$ é de tipo zero$\}$, com inversa dada por $\gamma'_R(T) = T*$, para todo $T \in \mathcal{H}'_{Nb}(B_R)$ de tipo zero.*

1.24. *TEOREMA*. *Se $\mathcal{Q} \in \mathcal{A}_R$ for de tipo zero, então o subespaço vetorial de $\mathcal{H}_{Nb}(B_R)$ gerado por $\mathcal{L} = \{P \exp\phi : P \in \mathcal{P}_N({}^nE),\ n \in N,\ \phi \in E',\ \mathcal{Q}(P\exp\phi) = 0\}$ é denso para a topologia de $\mathcal{H}_{Nb}(B_R)$ no subespaço vetorial fechado $\mathcal{K} = \{f \in \mathcal{H}_{Nb}(B_R) : \mathcal{Q}f = 0\}$.*

1.25. *TEOREMA*. *Se $\mathcal{Q} \in \mathcal{A}_R$ for um operador de tipo zero não nulo, então $\mathcal{Q}\mathcal{H}_{Nb}(B_R) = \mathcal{H}_{Nb}(B_R)$.*

Vamos precisar também de alguns resultados de Mujica (11).

1.26. *DEFINIÇÃO*. Seja K um subconjunto compacto de um espaço lo -

calmente convexo complexo E. Consideremos o conjunto $\bigcup_{U\supset K} \mathcal{H}(U)$. Duas funções neste conjunto são ditas equivalentes se elas coincidirem em alguma vizinhança aberta de K. Cada classe de equivalência é o <u>germe de uma função holomorfa em K</u> ou <u>germe holomorfo em K</u>. $\mathcal{H}(K)$ denota o conjunto de todos os germes holomorfos em K.

As aplicações canônicas $\mathcal{H}(U)\to\mathcal{H}(K)$, com $U\supset K$ aberto, induzem uma estrutura de espaço vetorial bem definida em $\mathcal{H}(K)$.

O espaço vetorial $\mathcal{H}(K)$ é munido da topologia localmente convexa limite indutivo com respeito às aplicações lineares canônicas

$$(\mathcal{H}(U),\tau_\omega)\to\mathcal{H}(K)$$

com $U\supset K$ aberto, onde τ_ω é a topologia dada por Nachbin em (12). Um elemento de $\mathcal{H}(K)$ será denotado por $\tilde{f}$.

1.27. <u>*PROPOSIÇÃO*</u>. *$\mathcal{H}(K)=\lim\limits_{U\supset K}\mathrm{ind}\,\mathcal{H}^\infty(U)$, onde $\mathcal{H}^\infty(U)$ é o espaço de Banach das funções holomorfas em U que são limitadas, normado com a norma do supremo.*

Dado $\alpha\in SC(E)$, (E,α) denota o espaço vetorial seminormado por α e i_α é a aplicação quociente $i_\alpha:(E,\alpha)\to E_\alpha = (E,\alpha)/\alpha^{-1}(\{0\})$.

1.28. <u>*PROPOSIÇÃO*</u>. *$\mathcal{H}(K)=\lim\limits_{\alpha\in SC(E)}\mathrm{ind}\,\mathcal{H}(i_\alpha(K))$.*

1.29 <u>*OBSERVAÇÃO*</u>. Se K for um subconjunto compacto de C^n, temos, por Grothendieck (5), p. 80, que $\mathcal{H}(K)$ é um espaço (DF) e de Montel.

CAPÍTULO 2

GERMES NUCLEARES

§1. GERMES NUCLEARES NUM ESPAÇO NORMADO

Seja E um espaço normado complexo com bola unitária B_1 e seja K um subconjunto compacto absolutamente convexo de E.

Dado $\varepsilon>0$, $\mathcal{H}_{Nb}(K+\varepsilon B_1)$ é definido como em 1.2., considerando E com bola unitária $K+\varepsilon B_1$.

2.1.1. ***DEFINIÇÃO***. $\mathcal{H}_{Nb}(K)$ é o conjunto dos germes $\tilde{f}\in\mathcal{H}(K)$ tais que existe um representante de $\tilde{f}$ em $\mathcal{H}_{Nb}(K+\varepsilon B_1)$, para algum $\varepsilon>0$.

Para cada $\varepsilon>0$ existe uma aplicação natural

$$u_\varepsilon:(\mathcal{H}_{Nb}(K+\varepsilon B_1),\tau_\varepsilon)\to\mathcal{H}_{Nb}(K)$$

que leva uma função $f\in\mathcal{H}_{Nb}(K+\varepsilon B_1)$ na sua classe de equivalência $\tilde{f}\in\mathcal{H}_{Nb}(K)$, onde τ_ε é a topologia localmente convexa em $\mathcal{H}_{Nb}(K+\varepsilon B_1)$ gerada pelas seminormas

$$\|f\|_{N,\delta,\varepsilon}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\delta^n}{n!}\|\hat{d}^n f(0)\|_{N,K+\varepsilon B_1}\ ,\ 0<\delta<1.$$

A topologia em $\mathcal{H}_{Nb}(K)$ é a topologia localmente convexa limite in dutivo dos espaços $(\mathcal{H}_{Nb}(K+\varepsilon B_1),\tau_\varepsilon)$ sob as aplicações u_ε, para $\varepsilon>0$.

Seja U um subconjunto aberto equilibrado de E e seja $\mathcal{K}(U)$ a família dos subconjuntos compactos absolutamente convexos de U. Por Aron (2), temos as duas seguintes definições:

2.1.2. <u>*DEFINIÇÃO*</u>. $H_N(U)$ é o conjunto das funções $f\in\mathcal{H}(U)$ que satisfazem às duas seguintes condições:

(i) $\hat{d}^n f(0)\in\mathcal{P}_N(^nE)$, para cada $n\in N$

(ii) Para cada $K\in\mathcal{K}(U)$ existe $\varepsilon>0$ tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\|\frac{\hat{d}^n f(0)}{n!}\right\|_{N,K+\varepsilon B_1}<+\infty$$

A topologia $T_{N,U}$ em $H_N(U)$ é a topologia localmente convexa gerada por todas as seminormas p em $H_N(U)$ que são N-portadas por algum $K\in\mathcal{K}(U)$; p é N-portada por $K\in\mathcal{K}(U)$ se, para todo $\varepsilon>0$ existir $c(\varepsilon)>0$ tal que

$$p(f)\leq c(\varepsilon)\sum_{n=0}^{\infty}\left\|\frac{\hat{d}^n f(0)}{n!}\right\|_{N,K+\varepsilon B_1}$$

para todo $f\in H_N(U)$.

2.1.3. <u>*DEFINIÇÃO*</u>. Dado $K\in\mathcal{K}(E)$, seja $\mathcal{U}(K)$ a família das vizinhanças abertas absolutamente convexas de K. $H_N(K)$ é o conjunto dos germes $\tilde{f}\in\mathcal{H}(K)$ tais que existe um representante de f em $H_N(U)$, para algum $U\in\mathcal{U}(K)$.

Para cada $U\in\mathcal{U}(K)$ existe uma aplicação natural

$$\phi_U : (H_N(U), T_{N,U}) \rightarrow H_N(K)$$

que leva uma função $f \in H_N(U)$ na sua classe de equivalência $\tilde{f} \in H_N(K)$. A topologia T_N em $H_N(K)$ é a topologia localmente convexa limite indutivo dos espaços $(H_N(U), T_{N,U})$ sob as aplicações ϕ_U, para $U \in \mathcal{U}(K)$.

2.1.4. __*DEFINIÇÃO*__. Dado $\rho > 0$, seja $\mathcal{H}^{\infty}_{Nb}(B_\rho)$ o conjunto das funções $f \in \mathcal{H}(B_\rho)$ que satisfazem às duas seguintes condições:

(i) $\hat{d}^n f(0) \in \mathcal{P}_N(^nE)$, para cada $n \in N$

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} \|\hat{d}^n f(0)\|_N < +\infty$

A topologia natural em $\mathcal{H}^{\infty}_{Nb}(B_\rho)$ é dada pela norma

$$\|f\|_{N,\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} \|\hat{d}^n f(0)\|_N$$

para todo $f \in \mathcal{H}^{\infty}_{Nb}(B_\rho)$.

2.1.5. __*PROPOSIÇÃO*__. *$\mathcal{H}^{\infty}_{Nb}(B_\rho)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Dada a sequência de Cauchy $(f_k)_{k=0}^{\infty}$ em $\mathcal{H}^{\infty}_{Nb}(B_\rho)$, temos que, para cada $n \in N$, $(\frac{1}{n!} \hat{d}^n f_k(0))_{k=0}^{\infty}$ é uma sequência de de Cauchy no espaço de Banach $\mathcal{P}_N(^nE)$. Seja $P_n \in \mathcal{P}_N(^nE)$ o limite dessa sequência.

Dado $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in N$ tal que

$$\|f_k - f_\ell\|_{N,\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} \|\hat{d}^n f_k(0) - \hat{d}^n f_\ell(0)\|_N < \varepsilon$$

para todo $k, \ell \geq k_0$. Logo, para todo $m \in N$ e $k \geq k_0$,

$$(1)\qquad \sum_{n=0}^{m} \rho^n \left\| \frac{\hat{d}^n f_k(0)}{n!} - P_n \right\|_N \leq \varepsilon$$

Também, temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} \left\| \hat{d}^n f_{k_o}(0) \right\|_N < \infty$$

e, para todo $m \in N$,

$$\sum_{n=0}^{m} \rho^n \|P_n\|_N \leq \sum_{n=0}^{m} \rho^n \left\| P_n - \frac{\hat{d}^n f_{k_o}(0)}{n!} \right\|_N + \sum_{n=0}^{m} \rho^n \left\| \frac{\hat{d}^n f_{k_o}(0)}{n!} \right\|_N$$

Logo $\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \|P_n\|_N < \infty$ e, definindo $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)$ para todo $x \in B_\rho$,

temos que $g \in \mathcal{H}_{Nb}^{\infty}(B_\rho)$ e, por (1)

$$\|g - f_k\|_{N,\rho} < \varepsilon$$

para $k \geq k_o$. Logo $\lim f_k = g$ em $\mathcal{H}_{Nb}^{\infty}(B_\rho)$.

2.1.6. ***OBSERVAÇÃO***. Se considerarmos E com bola unitária $K+\varepsilon B_1$, temos que

$$\mathcal{H}_{Nb}^{\infty}(K+\varepsilon B_1) = \{ f \in \mathcal{H}(K+\varepsilon B_1) : \hat{d}^n f(0) \in \mathcal{P}_N(^nE),\ \forall n \in N,\ \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{\hat{d}^n f(0)}{n!} \right\|_{N,K+\varepsilon B_1} < \infty$$

Denotaremos por $\|\cdot\|_{N,1,\varepsilon}$ a norma em $\mathcal{H}_{Nb}^{\infty}(K+\varepsilon B_1)$.

2.1.7. ***PROPOSIÇÃO***. *Para cada* $\varepsilon > 0$, $\mathcal{H}_{Nb}^{\infty}(K+\varepsilon B_1) \subset \mathcal{H}_{Nb}(K+\varepsilon B_1) \subset H_N(K+\varepsilon B_1)$.

DEMONSTRAÇÃO. A primeira inclusão é clara. Provemos então que $\mathcal{H}_{Nb}(K+\varepsilon B_1) \subset H_N(K+\varepsilon B_1)$. Dado $f \in \mathcal{H}_{Nb}(K+\varepsilon B_1)$, temos que

$\hat{d}^n f(0) \in \mathcal{P}_N({}^nE)$, para cada $n \in N$ e $\limsup_{n\to\infty} \left\| \frac{\hat{d}^n f(0)}{n!} \right\|_{N,K+\varepsilon B_1}^{1/n} \leq 1$.

Dado $L \in \mathcal{K}(K+\varepsilon B_1)$, seja $\rho = \text{dis}(L, \complement K+\varepsilon B_1) = \inf\{\|x-y\| : x \in L,\ y \notin K+\varepsilon B_1\}$. Seja δ, $0<\delta<\rho/2$. Então $L+\delta \overline{B_1} \subset K+\varepsilon B_1$.

Para provar a inclusão, basta encontrar δ_o, $0<\delta_o<1$, tal que $L+\delta B_1 \subset \delta_o (K+\varepsilon B_1)$, pois

$$\limsup_{n\to\infty} \left\| \frac{\hat{d}^n f(0)}{n!} \right\|_{N,L+\delta B_1}^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} \left\| \frac{\hat{d}^n f(0)}{n!} \right\|_{N,\delta_o (K+\varepsilon B_1)}^{1/n}$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \left(\delta_o^n \left\| \frac{\hat{d}^n f(0)}{n!} \right\|_{N,K+\varepsilon B_1} \right)^{1/n} \leq \delta_o < 1.$$

Se não existisse tal δ_o, para cada $n \in N^*$ existiria $x_n \in (L+\delta B_1)$, $x_n \notin \frac{n-1}{n}(K+\varepsilon B_1)$. Sejam, para cada $n \in N^*$, $y_n \in L$ e $z_n \in B_1$, tais que $x_n = y_n + \delta z_n$. Temos que

$$\frac{n}{n-1} y_n + \frac{\delta n}{n-1} z_n = \frac{n}{n-1} x_n \notin K+\varepsilon B_1 \quad \text{e} \quad y_n \in L.$$

Logo

$$\left\| y_n - \frac{n}{n-1} y_n - \frac{\delta n}{n-1} z_n \right\| \geq \rho > 2\delta$$

isto é,

$$2\delta < \left\| \frac{-1}{n-1} y_n - \frac{\delta n}{n-1} z_n \right\| \leq \frac{1}{n-1} \|y_n\| + \frac{\delta n}{n-1} \|z_n\| \leq \frac{1}{n-1} \|y_n\| + \frac{\delta n}{n-1}$$

Assim,

$$\|y_n\| > 2\delta(n-1) - \delta n = \delta(n-2)$$

para todo $n \in N^*$, contradição, pois $(y_n)_{n=0}^{\infty} \subset L$.

2.1.8. <u>*DEFINIÇÃO*</u>. Seja $\mathcal{H}^{\infty}_{Nb}(K)$ o conjunto dos germes $\tilde{f} \in \mathcal{H}(K)$ tais que existe um representante de $\tilde{f}$ em $\mathcal{H}^{\infty}_{Nb}(K+\varepsilon B_1)$ para algum $\varepsilon>0$. Seja, para cada $\varepsilon>0$,

$$u^{\infty}_{\varepsilon}: \mathcal{H}^{\infty}_{Nb}(K+\varepsilon B_1) \to \mathcal{H}^{\infty}_{Nb}(K)$$

a aplicação natural.

$\mathcal{H}^{\infty}_{Nb}(K)$ será munido da topologia localmente convexa limite indutivo com respeito às aplicações

$$u^{\infty}_{\varepsilon}: (\mathcal{H}^{\infty}_{Nb}(K+\varepsilon B_1), \|\cdot\|_{N,1,\varepsilon}) \to \mathcal{H}^{\infty}_{Nb}(K)$$

2.1.9. <u>*TEOREMA*</u>. *$\mathcal{H}^{\infty}_{Nb}(K) = \mathcal{H}_{Nb}(K) = H_N(K)$ algébrica e topologicamente.*

DEMONSTRAÇÃO. Como as aplicações u^{∞}_{ε}, u_{ε} e Φ_U são injetivas, para cada $\varepsilon>0$ e $U \in \mathcal{U}(K)$, podemos escrever

$$\mathcal{H}^{\infty}_{Nb}(K) = \bigcup_{\varepsilon>0} \mathcal{H}^{\infty}_{Nb}(K+\varepsilon B_1), \quad \mathcal{H}_{Nb}(K) = \bigcup_{\varepsilon>0} \mathcal{H}_{Nb}(K+\varepsilon B_1) \text{ e } H_N(K) = \bigcup_{U \in \mathcal{U}(K)} H_N(U).$$

Temos que:

(a) $H_N(K) = \mathcal{H}_{Nb}(K) = \mathcal{H}^{\infty}_{Nb}(K)$ algebricamente.

De fato, dado $f \in H_N(U)$, para algum $U \in \mathcal{U}(K)$ temos que $\hat{d}^n f(0) \in \mathcal{P}_N(^nE)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, e existe $\varepsilon>0$ tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{\hat{d}^n f(0)}{n!} \right\|_{N,K+\varepsilon B_1} < \infty \quad \text{e } K+\varepsilon B_1 \subset U.$$

Logo, $f|(K+\varepsilon B_1) \in \mathcal{H}^{\infty}_{Nb}(K+\varepsilon B_1)$. A Proposição 2.17 completa a prova de (a).

(b) As aplicações identidades $\mathcal{H}^{\infty}_{Nb}(K) \to \mathcal{H}_{Nb}(K) \to H_N(K)$ são contínuas.

Para isso, provemos que as inclusões

$$(\mathcal{H}_{Nb}^{\infty}(K+\varepsilon B_1), \|\cdot\|_{N,1,\varepsilon}) \to (\mathcal{H}_{Nb}(K+\varepsilon B_1), \tau_\varepsilon) \to (H_N(K+\varepsilon B_1), T_{N,K+\varepsilon B_1})$$

são contínuas, para todo $\varepsilon>0$.

A primeira inclusão é claramente contínua pois, dado $f\in \mathcal{H}_{Nb}^{\infty}(K+\varepsilon B_1)$, temos que

$$\|f\|_{N,\rho,\varepsilon} \leq \|f\|_{N,1,\varepsilon} \quad \text{para todo } \rho,\ 0<\rho<1.$$

Seja agora p uma seminorma $T_{N,K+\varepsilon B_1}$-contínua. Então existe $L\in \mathcal{K}(K+\varepsilon B_1)$ tal que p é N-portada por L. Como na prova de 2.17, existem δ e δ_o, $\delta>0$, $0<\delta_o<1$ tais que $L+\delta B_1 \subset \delta_o(K+\varepsilon B_1)$ e existe $c(\delta)>0$ tal que

$$p(f)\leq c(\delta) \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{\hat{d}^n f(0)}{n!} \right\|_{N,L+\delta B_1} \leq c(\delta) \sum_{n=0}^{\infty} \delta_o^n \left\| \frac{\hat{d}^n f(0)}{n!} \right\|_{N,K+\varepsilon B_1}$$

$$= c(\delta)\ \|f\|_{N,\delta_o,\varepsilon}$$

para todo $f\in \mathcal{H}_{Nb}(K+\varepsilon B_1)$.

Logo p é τ_ε-contínua.

(c) A identidade $H_N(K)\to \mathcal{H}_{Nb}^{\infty}(K)$ é contínua.

Dada p seminorma contínua em $\mathcal{H}_{Nb}^{\infty}(K)$, provemos que $p \circ \phi_U$ é $T_{N,U}$-contínua para todo $U\in \mathcal{U}(K)$, isto é, que, dado $\varepsilon>0$, existe $c(\varepsilon)>0$ tal que

$$(*) \qquad p \circ \phi_U(g) \leq c(\varepsilon) \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{\hat{d}^n g(0)}{n!} \right\|_{N,K+\varepsilon B_1}$$

para todo $g\varepsilon H_N(U)$.

Fixemos $U\varepsilon \mathcal{U}(K)$. Temos dois casos a considerar:

(i) Seja $\varepsilon>0$ tal que $K+\varepsilon B_1 \subset U$. Sendo $p \circ u_\varepsilon^\infty$ contínua para a norma $\| \; \|_{N,1,\varepsilon}$, existe $c(\varepsilon)>0$ tal que

$$(p \circ u_\varepsilon^\infty)(f) \leq c(\varepsilon) \; \|f\|_{N,1,\varepsilon}$$

para todo $f\varepsilon \mathcal{H}_{Nb}^\infty(K+\varepsilon B_1)$.

Dado $g\varepsilon H_N(U)$, se $g|K+\varepsilon B_1 \varepsilon \mathcal{H}_{Nb}^\infty(K+\varepsilon B_1)$, temos que

$$u_\varepsilon^\infty(g|K+\varepsilon B_1) = \phi_U(g)$$

e

$$(p \circ \phi_U)(g) \leq c(\varepsilon) \sum_{n=0}^\infty \left\| \frac{\hat{d}^n g(0)}{n!} \right\|_{N,K+\varepsilon B_1};$$

se $g|K+\varepsilon B_1 \notin \mathcal{H}_{Nb}^\infty(K+\varepsilon B_1)$, temos que

$$\sum_{n=0}^\infty \left\| \frac{\hat{d}^n g(0)}{n!} \right\|_{N,K+\varepsilon B_1} = +\infty$$

e (∗) também é satisfeita, qualquer que seja $c(\varepsilon)>0$.

(ii) Seja $\varepsilon>0$ tal que $K+\varepsilon B_1 \not\subset U$. Então existe ε_1, $0<\varepsilon_1<\varepsilon$ tal que $K+\varepsilon_1 B_1 \subset U \cap (K+\varepsilon B_1)$. Dada $g\varepsilon H_N(U)$, novamente, se $g|K+\varepsilon_1 B_1 \in \mathcal{H}_{Nb}^\infty(K+\varepsilon_1 B_1)$ temos

$$(p \circ \phi_U)(g) = (p \circ u_{\varepsilon_1}^\infty)(g|K+\varepsilon_1 B_1) \leq c(\varepsilon_1) \sum_{n=0}^\infty \left\| \frac{\hat{d}^n g(0)}{n!} \right\|_{N,K+\varepsilon_1 B_1}$$
$$< c(\varepsilon_1) \sum_{n=0}^\infty \left\| \frac{\hat{d}^n g(0)}{n!} \right\|_{N,K+\varepsilon B_1};$$

se $g|K+\varepsilon_1 B_1 \notin \mathcal{H}_{Nb}^\infty(K+\varepsilon_1 B_1)$, temos

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\|\frac{\hat{d}^n g(0)}{n!}\right\|_{N,K+\varepsilon B_1} \geqslant \sum_{n=0}^{\infty}\left\|\frac{\hat{d}^n g(0)}{n!}\right\|_{N,K+\varepsilon_1 B_1} = +\infty$$

e (✱) também é satisfeita, qualquer que seja $c(\varepsilon)>0$.

Logo $H_N(K)=\mathcal{H}_{Nb}(K)=\mathcal{H}^{\infty}_{Nb}(K)$ algébrica e topologicamente.

2.1.10. <u>*COROLÁRIO*</u>. *$H_N(K)$ é tonelado e bornológico.*

2.1.11. <u>*PROPOSIÇÃO*</u>. *$H_N(K)$ é o limite indutivo de uma seqüência crescente de espaços de Banach. Em particular, $H_N(K)$ é um espaço (DF).*

DEMONSTRAÇÃO. Seja (ε_n) uma seqüência de números reais positivos decrescendo a zero. Dado $\varepsilon>0$, existe $n_0\in N$ tal que $\varepsilon_n<\varepsilon$ para $n\geqslant n_0$. Logo, a aplicação

$$H_N(K)\to\lim_{\varepsilon_n\downarrow 0}\operatorname{ind}\mathcal{H}^{\infty}_{Nb}(K+\varepsilon_n B_1)$$

é contínua, pois o diagrama abaixo é comutativo.

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{H}^{\infty}_{Nb}(K+\varepsilon B_1) & \to & \mathcal{H}^{\infty}_{Nb}(K+\varepsilon_{n_0} B_1) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H_N(K) & \to & \lim\limits_{\varepsilon_n\downarrow 0}\operatorname{ind}\mathcal{H}^{\infty}_{Nb}(K+\varepsilon_n B_1)
\end{array}$$

2.1.12. <u>*OBSERVAÇÃO*</u>. Se $U\subset E$ for um aberto absolutamente convexo, pela Proposição 3.11 de Aron (3) e Proposição 3, §11, de Nachbin (12) temos que a inclusão

$$(H_N(U),T_{N,U})\to(\mathcal{H}(U),\tau_\omega)$$

é contínua. Assim, dado $K\in\mathcal{K}(E)$, a inclusão

$$H_N(K) \to \mathcal{H}(K)$$

é contínua, quando munimos ambos os espaços das respectivas topologias limites indutivos.

§2. GERMES NUCLEARES NUM ESPAÇO LOCALMENTE CONVEXO

Sejam E um espaço localmente convexo complexo separado e U um subconjunto aberto de E. Dados $f \in \mathcal{H}(U)$ e K um subconjunto compacto de U, por Barroso (4), existem $\alpha \in SC(E)$ e um subconjunto W_α de U α-aberto contendo K tais que

$$f|W_\alpha : W_\alpha \subset (E,\alpha) \to C$$

é holomorfa. Mas isto é equivalente a dizer que existem $\alpha \in SC(E)$, $W_\alpha \subset (E,\alpha)$ aberto contendo K e $f_\alpha \in \mathcal{H}(i_\alpha(W_\alpha))$ tais que $f|W_\alpha = f_\alpha o(i_\alpha|W_\alpha)$. Em outras palavras, Barroso mostrou que

$$\mathcal{H}(K) = \bigcup_{\alpha \in SC(E)} \mathcal{H}(i_\alpha(K))$$

Além disso, Mujica em (11) mostrou que $\mathcal{H}(K) = \lim\limits_{\substack{\longrightarrow \\ \alpha \in SC(E)}} \text{ind}\, \mathcal{H}(i_\alpha K)$ Motivados por isso, damos a seguinte definição:

2.2.1. *__DEFINIÇÃO__*. Dado $K \in \mathcal{K}(E)$, dizemos que o <u>germe</u> $\tilde{f} \in \mathcal{H}(K)$ é <u>de tipo nuclear em K</u> se existirem $\alpha \in SC(E)$, $W_\alpha \subset (E,\alpha)$ aberto equilibrado contendo K e $f_\alpha \in H_N(i_\alpha(W_\alpha))$ tais que

$$\tilde{f} = \widetilde{f_\alpha o(i_\alpha|W_\alpha)}$$

O espaço vetorial dos germes de tipo nuclear em K é denotado por

$H_N(K)$.

Dados $\alpha \in SC(E)$ e $W_\alpha \supset K$ α-aberto equilibrado, consideremos as aplicações lineares

$$I_{\alpha,N,W_\alpha} : f_\alpha \in H_N(i_\alpha(W_\alpha)) \mapsto \widetilde{f_\alpha \circ (i_\alpha | W_\alpha)} \in H_N(K)$$

e

$$I_{\alpha,N} : \widetilde{f_\alpha} \in H_N(i_\alpha(K)) \mapsto I_{\alpha,N,W_\alpha}(f_\alpha) \in H_N(K)$$

onde $f_\alpha \in H_N(i_\alpha(W_\alpha))$ é um representante de $\widetilde{f_\alpha}$.

2.2.2. <u>*OBSERVAÇÃO*</u>. $I_{\alpha,N}$ está bem definida pois, se $f_\alpha \in H_N(i_\alpha(W_\alpha))$ e $g_\alpha \in H_N(i_\alpha(V_\alpha))$ forem representantes de $\widetilde{f_\alpha}$, existe um conjunto α-aberto V, com $i_\alpha(K) \subset V \subset i_\alpha(V_\alpha) \cap i_\alpha(W_\alpha)$ tal que $f_\alpha = g_\alpha$ em V, e então

$$I_{\alpha,N,W_\alpha}(f_\alpha) = \widetilde{f_\alpha \circ (i_\alpha | W_\alpha)} = \widetilde{f_\alpha | V} = \widetilde{g_\alpha | V} = \widetilde{g_\alpha \circ (i_\alpha | V_\alpha)} = I_{\alpha,N,V_\alpha}(g_\alpha).$$

É claro que cada $I_{\alpha,N}$ é injetiva, e podemos escrever

$$H_N(K) = \bigcup_{\alpha \in SC(E)} H_N(i_\alpha(K))$$

2.2.3. <u>*DEFINIÇÃO*</u>. A topologia T_N de $H_N(K)$ é a topologia localmente convexa limite indutivo das topologias $T_{N,\alpha}$ (ver 2.1.3.) dos subespaços $H_N(i_\alpha(K))$.

Por 2.1.9. temos, então

$$(H_N(K), T_N) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \alpha \in SC(E)}} \text{ind} \left[\lim_{\substack{\longrightarrow \\ \varepsilon > 0}} \text{ind} \, (\mathcal{H}_{Nb}(i_\alpha(K) + \varepsilon B_\alpha), \tau_{\varepsilon,\alpha}) \right]$$

onde B_α denota a bola unitária de E_α e $\tau_{\varepsilon,\alpha}$ a topologia em $\mathcal{H}_{Nb}(i_\alpha(K) + \varepsilon B_\alpha)$.

CAPÍTULO 3

TRANSFORMADA DE BOREL

§1. CASO NORMADO

Seja E um espaço normado complexo e seja $K\varepsilon\mathcal{K}(E)$. Como usaremos os resultados de Matos do Capítulo 1, definiremos a transformada de Borel de um elemento de $H_N'(K)$ pensando-o como um elemento de $\mathcal{H}_{Nb}'(K) = (\lim_{\varepsilon>0} \text{ind } (\mathcal{H}_{Nb}(K+\varepsilon B_1),\tau_\varepsilon))'$.

3.1.1. ***DEFINIÇÃO***. Se $T\varepsilon H_N'(K)$ sua <u>transformada de Borel</u> $\mathcal{B}_N(T)$ é definida por

$$[\mathcal{B}_N(T)](\phi) = \widehat{T \circ u_\varepsilon}(\phi)$$

para todo $\phi\varepsilon E'$, onde $\widehat{T \circ u_\varepsilon}$ é definido em 1.6.

3.1.2. ***OBSERVAÇÃO***. $\mathcal{B}_N(T)$ não depende de $\varepsilon>0$ pois, dados ε_1, ε_2, $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2$, seja $i_{\varepsilon_2\varepsilon_1}$ a aplicação de restrição de $\mathcal{H}_{Nb}(K+\varepsilon_2 B_1)$ em $\mathcal{H}_{Nb}(K+\varepsilon_1 B_1)$. Então $u_{\varepsilon_1} \circ i_{\varepsilon_2\varepsilon_1} = u_{\varepsilon_2}$. Logo

$$(T \circ u_{\varepsilon_2})(\exp\phi|K+\varepsilon_2 B_1) = (T \circ u_{\varepsilon_1} \circ i_{\varepsilon_2\varepsilon_1})(\exp\phi|K+\varepsilon_2 B_1)$$

$$= (T \circ u_{\varepsilon_1})(\exp\phi|K+\varepsilon_1 B_1)$$

3.1.3. <u>PROPOSIÇÃO</u>. *Se* $\mathcal{G}_N$ *for o subespaço de* $H_N(K)$ *gerado por* $\{\widetilde{\exp\phi}: \phi\varepsilon E'\}$, *então* $\mathcal{G}_N$ *é denso em* $H_N(K)$.

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $\tilde{f}\varepsilon H_N(K)$ e V uma vizinhança aberta de f em $H_N(K)$. Seja $\varepsilon>0$ tal que exista $f\varepsilon\ \mathcal{H}_{Nb}(K+\varepsilon B_1)$ com $u_\varepsilon(f) = \tilde{f}$. Assim $u_\varepsilon^{-1}(V)$ é vizinhança aberta de f em $(\mathcal{H}_{Nb}(K+\varepsilon B_1), \tau_\varepsilon)$. Por 1.4., existem $\phi_{\varepsilon,j}\varepsilon(E,K+\varepsilon B_1)'$ ($(E,K+\varepsilon B_1)$ indica o espaço normado E com bola unitária $K+\varepsilon B_1$), $\lambda_j\varepsilon C$, $j=1,\ldots,m$, tais que

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \exp(\phi_{\varepsilon,j}|K+\varepsilon B_1) \ \varepsilon\ u_\varepsilon^{-1}(V).$$

Então

$$u_\varepsilon\Big(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \exp(\phi_{\varepsilon,j}|\mathring{K}+\varepsilon B_1)\Big) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j\ \widetilde{\exp\ \phi_{\varepsilon,j}}\ \varepsilon\ V\cap\mathcal{G}_N.$$

3.1.4. <u>OBSERVAÇÃO</u>. Por 1.9, temos que a aplicação

$$T\ \varepsilon\ \mathcal{H}'_{Nb}(K+\varepsilon B_1) \mapsto \hat{T}\ \varepsilon\ Exp_1(E,K+\varepsilon B_1)'$$

é uma bijeção linear bem definida.

Seja $Exp_{1,K}(E') = \bigcap_{\varepsilon>0} Exp_1(E,K+\varepsilon B_1)' \subset \mathcal{H}(E')$

3.1.5. <u>PROPOSIÇÃO</u>. *A aplicação*

$$\mathcal{B}_N: T\ \varepsilon\ H'_N(K) \to \mathcal{B}_N(T)\ \varepsilon\ Exp_{1,K}(E')$$

é uma bijeção linear bem definida.

<u>*DEMONSTRAÇÃO*</u>. Dado $T\varepsilon H'_N(K)$, $\mathcal{B}_N(T) = \widehat{T\circ u_\varepsilon}\ \varepsilon\ Exp_1(E,K+\varepsilon B_1)'$, para

todo $\varepsilon>0$. Logo $\mathcal{B}_N$ é bem definida. $\mathcal{B}_N$ é injetiva por 3.1.3. Provemos que $\mathcal{B}_N$ é sobrejetiva.

Dado $F\varepsilon Exp_{1,K}(E')$ temos que $F\varepsilon Exp_1(E,K+\varepsilon B_1)'$, para todo $\varepsilon>0$. Por 1.9, temos que, para cada $\varepsilon>0$, existe um único $T_\varepsilon \varepsilon \mathcal{H}'_{Nb}(K+\varepsilon B_1)$ tal que $T_\varepsilon = F$, isto é, $T_\varepsilon(\exp \phi|K+\varepsilon B_1) = F(\phi)$, para todo $\phi\varepsilon E'$.

Definamos uma função T de $\mathcal{G}_N$ em C linear e tal que

$$T(\widetilde{\exp \phi}) = T_\varepsilon(\exp \phi|K+\varepsilon B_1) = F(\phi)$$

para todo $\varepsilon>0$.

Como $T \circ u_\varepsilon = T_\varepsilon$, para todo $\varepsilon>0$, temos que T é contínua em $\mathcal{G}_N$, tendo $\mathcal{G}_N$ a topologia induzida por $(H_N(K),T_N)$. Assim, podemos estender T a todo $(H_N(K),T_N)$ continuamente e, denotando essa extensão ainda por T, temos que

$$\mathcal{B}_N(T) = F.$$

3.1.6. <u>*OBSERVAÇÃO*</u>. Aron em (1) provou que a transformada de Borel dá uma bijeção entre $H'_N(K)$ e o conjunto das funções holomorfas em E' que são de tipo exponencial compacto contidas em K, isto é, $\{F\varepsilon \mathcal{H}(E'):\forall\varepsilon>0 \ \exists c(\varepsilon)>0;\ |F(\phi)|\leq c(\varepsilon)\exp(\|\phi\|_K+ +\varepsilon\|\phi\|),\ \phi\varepsilon E'$. Provaremos aqui que o resultado de Aron é o mesmo que o obtido em 3.1.5.

Dado $F\varepsilon Exp_{1,K}(E')$, temos que:

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists A(\varepsilon),\ 0<A(\varepsilon)<1,\ \exists c(\varepsilon)>0:\ |F(\phi)| \leq c(\varepsilon)\exp(A(\varepsilon)\|\phi\|_{K+\varepsilon B_1}, \ \forall\phi\varepsilon E'.$$

Logo F satisfaz à desigualdade

$$|F(\phi)| \leq c(\varepsilon)\exp(\|\phi\|_K + \varepsilon\|\phi\|),$$

para todo $\phi \in E'$.

Reciprocamente, dado $F \in \mathcal{H}(E')$ de tipo exponencial compacto contido em K, temos:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists c(\varepsilon/2) > 0 : |F(\phi)| \leq c(\varepsilon/2)\exp(\|\phi\|_K + \frac{\varepsilon}{2}\|\phi\|)$$

para todo $\phi \in E'$.

Sejam $\delta > 0$ tal que $K \subset \delta B_1$ e $A = \dfrac{\delta + \varepsilon/2}{\delta + \varepsilon} < 1$. Então

$$\|\phi\|_K \leq \delta\|\phi\| \qquad \text{e} \qquad \delta = \frac{2A-1}{1-A} \cdot \frac{\varepsilon}{2}$$

isto é,

$$\|\phi\|_K \leq \frac{2A-1}{1-A} \cdot \frac{\varepsilon}{2}\|\phi\|$$

ou

(1) $$\|\phi\|_K + \frac{\varepsilon}{2}\|\phi\| \leq A\|\phi\|_K + A\varepsilon\|\phi\| = A(\|\phi\|_K + \varepsilon\|\phi\|)$$

Como K é absolutamente convexo, temos

$$\|\phi\|_K + \varepsilon\|\phi\| = \|\phi\|_{K+\varepsilon B_1}$$

Logo, a desigualdade (1) fica:

$$\|\phi\|_K + \frac{\varepsilon}{2}\|\phi\| \leq A\|\phi\|_{K+\varepsilon B_1}$$

e, tomando $d(\varepsilon) = c(\varepsilon/2)$, temos

$$|F(\phi)| \leq d(\varepsilon)\exp(A\|\phi\|_{K+\varepsilon B_1}),$$

para todo $\phi \in E'$ e, portanto, $F \in Exp_{1,K}(E')$.

§2. CASO LOCALMENTE CONVEXO

Seja E um espaço localmente convexo complexo separado e seja $K \in \mathcal{K}(E)$.

3.2.1. DEFINIÇÃO. Se $T \in (H_N(K), T_N)'$, sua transformada de Borel $\mathcal{B}_N(T)$ é definida por

$$[\mathcal{B}_N(T)](\phi) = [\mathcal{B}_N(T \circ I_{\alpha,N})](\phi_\alpha) = (T \circ I_{\alpha,N})(\widetilde{\exp \phi_\alpha}) = T(\widetilde{\exp \phi})$$

para todo $\phi \in E'$ e todo $\alpha \in SC(E)$ tal que $\phi_\alpha \circ i_\alpha = \phi$, com $\phi_\alpha \in E'_\alpha$.

3.2.2. OBSERVAÇÃO. $[\mathcal{B}_N(T)](\phi)$ é bem definida pois, se $\alpha, \beta \in SC(E)$ forem tais que $\phi_\alpha \circ i_\alpha = \phi_\beta \circ i_\beta = \phi$, com $\phi_\alpha \in E'_\alpha$, $\phi_\beta \in E'_\beta$, temos

$$\begin{aligned}
[\mathcal{B}_N(T \circ I_{\alpha,N})](\phi_\alpha) &= (T \circ I_{\alpha,N} \circ u_{\varepsilon,\alpha})(\exp \phi_\alpha | i_\alpha(K)+\varepsilon B_\alpha) \\
&= (T \circ I_{\alpha,N})(\widetilde{\exp \phi_\alpha}) = T(\widetilde{\exp \phi_\alpha \circ i_\alpha}) \\
&= T(\widetilde{\exp(\phi_\alpha \circ i_\alpha)}) = T(\widetilde{\exp(\phi_\beta \circ i_\beta)}) \\
&= [\mathcal{B}_N(T \circ I_{\beta,N})](\phi_\beta).
\end{aligned}$$

onde $u_{\varepsilon,\alpha} : \mathcal{H}_{Nb}(i_\alpha(K)+\varepsilon B_\alpha) \to H_N(i_\alpha(K))$ é a aplicação natural.

3.2.3. PROPOSIÇÃO. *Se $\mathcal{S}_N$ for o subespaço de $H_N(K)$ gerado por $\{\exp \phi : \phi \in E'\}$, então $\mathcal{S}_N$ é denso em $(H_N(K), T_N)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $\tilde{f} \in H_N(K)$ e V uma vizinhança aberta de $\tilde{f}$ em

$(H_N(K),\tau_N)$. Sejam $\alpha \in SC(E)$ e $\widetilde{f_\alpha} \in H_N(i_\alpha(K))$ tais que $I_{\alpha,N}(\widetilde{f_\alpha}) = \widetilde{f}$. Assim, $I_{\alpha,N}^{-1}(V)$ é uma vizinhança aberta de $\widetilde{f_\alpha}$ em $H_N(i_\alpha(K))$. Por 3.1.3, existem $\phi_{\alpha,j} \in E'_\alpha$, $\lambda_j \in C$, $j=1,\dots,m$, tais que

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \widetilde{\exp \phi_{\alpha,j}} \in I_{\alpha,N}^{-1}(V).$$

Então

$$I_{\alpha,N}\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \widetilde{\exp \phi_{\alpha,j}}\right) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \widetilde{\exp(\phi_{\alpha,j} \circ i_\alpha)} \in V \cap \mathcal{G}_N$$

3.2.4. ***DEFINIÇÃO***. Denotemos por $Exp_{1,K}(E')$ o espaço vetorial de todas as funções F de E' em C tais que

$$F \circ (I_\alpha | E'_\alpha) \in Exp_{1,i_\alpha(K)}(E'_\alpha)$$

para todo $\alpha \in SC(E)$ (I_α é a aplicação definida por Matos em (10) de $\mathcal{H}(E_\alpha)$ em $\mathcal{H}_u(E)$ por $I_\alpha(f_\alpha) = f_\alpha \circ i_\alpha$, para todo $f_\alpha \in \mathcal{H}(E_\alpha)$).

3.2.5. ***PROPOSIÇÃO***. *A aplicação*

$$\mathcal{B}_N : T \in H'_N(K) \mapsto \mathcal{B}_N(T) \in Exp_{1,K}(E')$$

é uma bijeção linear bem definida.

DEMONSTRAÇÃO. Dado $T \in H'_N(K)$, $\mathcal{B}_N(T) \circ (I_\alpha | E'_\alpha) = \mathcal{B}_N(T \circ I_{\alpha,N}) \in Exp_{1,i_\alpha(K)}(E'_\alpha)$ para todo $\alpha \in SC(E)$. Logo $\mathcal{B}_N$ é bem definida.

$\mathcal{B}_N$ é injetiva, por 3.2.3. Provemos que $\mathcal{B}_N$ é sobrejetiva. Seja $F \in Exp_{1,K}(E')$; então $F \circ (I_\alpha | E'_\alpha) \in Exp_{1,i_\alpha(K)}(E'_\alpha)$, para todo $\alpha \in SC(E)$. Por 3.1.5 temos que, para cada $\alpha \in SC(E)$, existe um único $T_\alpha \in H'_N(i_\alpha(K))$ tal que $\mathcal{B}_N(T_\alpha) = F \circ (I_\alpha | E'_\alpha)$. Assim,

$$T_\alpha(\widetilde{\exp \phi_\alpha}) = F(\phi_\alpha \circ i_\alpha),$$

para todo $\phi_\alpha \varepsilon E'_\alpha$. Definamos uma função T de $\mathcal{G}_N$ em C linear e tal que

$$T(\widetilde{\exp \phi}) = T_\alpha(\widetilde{\exp \phi_\alpha}) = F(\phi)$$

para todo $\phi \varepsilon E'$ e todo $\alpha \varepsilon SC(E)$ tal que $\phi = \phi_\alpha \circ i_\alpha$, com $\phi_\alpha \varepsilon E'_\alpha$.

Como $T \circ I_{\alpha,N} = T_\alpha$, para todo $\alpha \varepsilon SC(E)$, temos que T é contínua em $\mathcal{G}_N$, tendo $\mathcal{G}_N$ a topologia induzida por $(H_N(K),\tau_N)$. Assim, podemos estender T a todo $(H_N(K),\tau_N)$ continuamente e, denotando essa extensão ainda por T, temos que $\mathcal{B}_N(T) = F$.

CAPÍTULO 4

OPERADORES DE CONVOLUÇÃO EM $H_N(K)$

§1. CASO NORMADO.

Seja E um espaço normado complexo e seja $K\in\mathcal{K}(E)$. Como usaremos os resultados de Matos citados no Capítulo 1, pensaremos em $H_N(K)$ como sendo $(H_N(K),T_N) = \lim\limits_{\substack{\longrightarrow \\ \varepsilon>0}} \text{ind}\ (\mathcal{H}_{Nb}(K+\varepsilon B_1),\tau_\varepsilon)$.

4.1.1. ***DEFINIÇÃO***. Dados $\tilde{f}\in H_N(K)$ e $a\in E$, definimos $\hat{d}^n\tilde{f}(.)a$ como sendo o germe em $H_N(K)$ dado por

$$\hat{d}^n\tilde{f}(.)a = u_\varepsilon\left[\hat{d}^n f(.)a\right]$$

onde $\varepsilon>0$ e $f\in\mathcal{H}_{Nb}(K+\varepsilon B_1)$ são tais que $u_\varepsilon(f) = \tilde{f}$.

4.1.2. *OBSERVAÇÃO*. Por 1.5 temos que, se $f\in\mathcal{H}_{Nb}(K+\varepsilon B_1)$ e $a\in E$, então

$$\hat{d}^n f(.)a\in\mathcal{H}_{Nb}(K+\varepsilon B_1)$$

e

$$(*)\qquad \hat{d}^n f(.)a = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\,\widehat{d^{n+i}f(0).^{i}}\,(a)$$

sendo a convergência no sentido de τ_ε.

O germe $\hat{d}^n\tilde{f}(.)a$ está bem definido pois, dados ε_1 e ε_2,

$0<\varepsilon_1<\varepsilon_2$, $f_1 \varepsilon \mathcal{H}_{Nb}(K+\varepsilon_1 B_1)$, $f_2 \varepsilon \mathcal{H}_{Nb}(K+\varepsilon_2 B_1)$ tais que $u_{\varepsilon_1}(f_1)=u_{\varepsilon_2}(f_2)$ $=\tilde{f}$, temos que $f_1 = f_2$ em $K+\varepsilon_1 B_1$. Logo

$$\widehat{d^{i+n} f_1(0).^i} = \widehat{d^{i+n} f_2(0).^i} \quad \text{em } K+\varepsilon_1 B_1$$

para todo $i\varepsilon\mathbb{N}$. Por (*) temos

$$\hat{d}^n f_1(.)a = \hat{d}^n f_2(.)a \quad \text{em } K+\varepsilon_1 B_1,$$

logo

$$u_{\varepsilon_1}(\hat{d}^n f_1(.)a) = u_{\varepsilon_2}(\hat{d}^n f_2(.)a)$$

4.1.3. <u>*DEFINIÇÃO*</u>. Um <u>operador de convolução em $H_N(K)$</u> é uma aplicação $\mathcal{Q}$ de $H_N(K)$ em si mesmo que é linear, contínua e tal que

$$\mathcal{Q}(d\tilde{f}(.)a) = d(\mathcal{Q}\tilde{f})(.)a$$

para todo $\tilde{f}\varepsilon H_N(K)$ e $a\varepsilon E$.

$\mathcal{A}_N(K)$ denota o espaço vetorial complexo de todos os operadores de convolução em $H_N(K)$.

4.1.4. <u>*DEFINIÇÃO*</u>. Definimos a aplicação linear γ de $\mathcal{A}_N(K)$ em $H_N'(K)$ por

$$(\gamma\,\mathcal{Q})(\tilde{f}) = (\mathcal{Q}\tilde{f})(0)$$

para todo $\mathcal{Q}\,\varepsilon\,\mathcal{A}_N(K)$ e $\tilde{f}\varepsilon H_N(K)$.

4.1.5. <u>*DEFINIÇÃO*</u>. $T \in H_N'(K)$ é dito de <u>tipo zero</u> se

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \hat{d}^n \left[\mathcal{B}_N(T)\right](0) \right\|^{1/n} = 0$$

4.1.6. <u>*OBSERVAÇÃO*</u>. $T \in H_N'(K)$ é de tipo zero se, e somente se, $T \circ u_\varepsilon \in \mathcal{H}_{Nb}'(K+\varepsilon B_1)$ é de tipo zero, para todo $\varepsilon>0$, no sentido de 1.10.

De fato, existe $\delta>0$ tal que $K \subset \delta B_1$. Logo

$$\varepsilon B_1 \subset K+\varepsilon B_1 \subset (\delta+\varepsilon) B_1$$

e

$$\varepsilon \lim_{n\to\infty} \left\| \hat{d}^n \left[\mathcal{B}_N(T)\right](0) \right\|^{1/n} \leq \lim_{n\to\infty} \left\| \hat{d}^n (\widehat{T\circ u_\varepsilon})(0) \right\|^{1/n}_{K+\varepsilon B_1} \leq (\delta+\varepsilon) \lim_{n\to\infty} \left\| \hat{d}^n \left[\mathcal{B}_N(T)\right](0) \right\|^{1/n}$$

para todo $\varepsilon>0$.

4.1.7. <u>*DEFINIÇÃO*</u>. $\mathcal{Q} \in \mathcal{A}_N(K)$ é de <u>tipo zero</u> se $\gamma\mathcal{Q} \in H_N'(K)$ for de tipo zero.

4.1.8. <u>*PROPOSIÇÃO*</u>. *γ é uma bijeção linear entre $\{\mathcal{Q} \in \mathcal{A}_N(K): \mathcal{Q}$ é de tipo zero$\}$ e $\{T \in H_N'(K): T$ é de tipo zero$\}$.*

Para demonstrar 4.1.8, precisaremos de alguns lemas e da seguinte definição.

4.1.9. <u>*DEFINIÇÃO*</u>. Dados $T \in H_N'(K)$ de tipo zero e $\tilde{f} \in H_N(K)$, definimos a <u>convolução entre T e $\tilde{f}$</u>, por

$$T * \tilde{f} = u_\varepsilon \left[(T \circ u_\varepsilon) * \tilde{f}\right]$$

onde $\varepsilon>0$ e $f\in\mathcal{H}_{Nb}(K+\varepsilon B_1)$ são tais que $u_\varepsilon(f) = \tilde{f}$.

4.1.10. *OBSERVAÇÃO*. $T*f$ está bem definido pois, dados ε_1 e ε_2, $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2$, $f_1=\sum_{k=0}^{\infty} P_k \in \mathcal{H}_{Nb}(K+\varepsilon_1 B_1)$, $f_2=\sum_{k=0}^{\infty} Q_k \in \mathcal{H}_{Nb}(K+\varepsilon_2 B_1)$, com $P_k, Q_k \in \mathcal{P}_N({}^kE)$, $k\in\mathbb{N}$, $u_{\varepsilon_1}(f_1) = u_{\varepsilon_2}(f_2) = \tilde{f}$, temos que, para todo $k\in\mathbb{N}$, $u_{\varepsilon_1}(P_k) = u_{\varepsilon_2}(Q_k)$ e, como em 4.1.2, temos que, para todo $x\in E$, $n\in\mathbb{N}$,

$$u_{\varepsilon_1}(\hat{d}^n P_k(.)x) = u_{\varepsilon_2}(\hat{d}^n Q_k(.)x).$$

Dado $x\in K+\varepsilon_1 B_1$, por 1.18, temos:

$$\begin{aligned}\left[(Tou_{\varepsilon_1})*P_k\right](x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (Tou_{\varepsilon_1})(\hat{d}^n P_k(.)x)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (Tou_{\varepsilon_2})(\hat{d}^n Q_k(.)x)\\ &= \left[(Tou_{\varepsilon_2})* Q_k\right](x)\end{aligned}$$

Como $(Tou_{\varepsilon_i})*$ é linear, $i=1,2$, temos que:

$$(Tou_{\varepsilon_1})* \sum_{k=0}^{n} P_k = (Tou_{\varepsilon_2})* \sum_{k=0}^{n} Q_k \quad \text{em } K+\varepsilon_1 B_1.$$

Passando ao limite ambos os membros da igualdade acima, quando $n\to+\infty$, temos (ver 1.14):

$$(Tou_{\varepsilon_1})*f_1 = \left[(Tou_{\varepsilon_2})*f_2\right]\big| K+\varepsilon_1 B_1 \quad \text{em } K+\varepsilon_1 B_1$$

Logo $u_{\varepsilon_1}((Tou_{\varepsilon_1})*f_1) = u_{\varepsilon_2}((Tou_{\varepsilon_2})*f_2)$

4.1.11. <u>LEMA</u>. *Dado* $T\varepsilon H_N'(K)$ *de tipo zero, a aplicação linear*

$$T*:\tilde{f}\varepsilon H_N(K) \mapsto T*\tilde{f}\varepsilon H_N(K)$$

é contínua.

DEMONSTRAÇÃO. De fato, para todo $\varepsilon>0$, $(T*)ou_\varepsilon = u_\varepsilon o[(Tou_\varepsilon)*]$ é contínua, como composta de duas aplicações contínuas (ver 1.15).

4.1.12. <u>LEMA</u>. *A aplicação*

$$\tilde{f}\ \varepsilon\ H_N(K) \mapsto d\tilde{f}(.)a\ \varepsilon\ H_N(K)$$

é contínua, para todo $a\varepsilon E$.

DEMONSTRAÇÃO. Análoga à do Lema 4.1.11 (ver 1.16).

4.1.13. <u>LEMA</u>. *Dado* $T\varepsilon H_N'(K)$ *de tipo zero, temos que*

$$T*(d\tilde{f}(.)a) = d(T*\tilde{f})(.)a$$

para todo $\tilde{f}\varepsilon H_N(K)$ *e* $a\varepsilon E$.

DEMONSTRAÇÃO. Dados $\tilde{f}\varepsilon H_N(K)$ e $a\varepsilon E$, sejam $\varepsilon>0$ e $f\varepsilon\ \mathcal{H}_{Nb}(K+\varepsilon B_1)$ tais que $u_\varepsilon(f) = \tilde{f}$. Então temos

$$T*(d\tilde{f}(.)a) = T*[u_\varepsilon(df(.)a)] = u_\varepsilon[(Tou_\varepsilon)*(df(.)a)]$$

$$\overset{(1)}{=} \quad u_\varepsilon\{d((Tou_\varepsilon)*f)(.)a\} = d\{u_\varepsilon((Tou_\varepsilon)*f)\}(.)a$$

$$= \quad d(T*\tilde{f})(.)a,$$

onde a igualdade (1) segue de 1.17.

DEMONSTRAÇÃO DE 4.1.8. Pelos lemas precedentes, se $T\varepsilon H_N'(K)$ for de de tipo zero, então $T*\varepsilon\,\mathcal{A}_N(K)$.

Seja γ' a aplicação definida de $\{T\varepsilon H_N'(K)$: T é de tipo zero$\}$ em $\{\varphi\,\varepsilon\,\mathcal{A}_N(K)$: φ é de tipo zero$\}$ por $\gamma'(T) = T*$, para todo $T\varepsilon H_N'(K)$ de tipo zero.

Dados $T\varepsilon H_N'(K)$ de tipo zero e $\tilde{f}\varepsilon H_N(K)$, sejam $\varepsilon>0$ e $f=\sum_{k=0}^{\infty} P_k$ $\varepsilon\,\mathcal{H}_{Nb}(K+\varepsilon B_1)$ tais que $u_\varepsilon(f) = \tilde{f}$. Temos

$$((\gamma o\gamma')(T))(u_\varepsilon(P_k)) = \{(\gamma'(T))(u_\varepsilon(P_k))\}(0)=(T*(u_\varepsilon(P_k)))(0)$$

$$= \{u_\varepsilon((Tou_\varepsilon)*P_k)\}(0) \qquad =((Tou_\varepsilon)*P_k)(0) = (Tou_\varepsilon)(P_k),$$

onde a última igualdade segue de 1.18.

Logo

$$\{((\gamma o\gamma')(T))ou_\varepsilon\}(\sum_{k=0}^{n} P_k) = (Tou_\varepsilon)(\sum_{k=0}^{n} P_k),$$

para todo $n\varepsilon N$. Passando ao limite a última igualdade, quando $n\to+\infty$, temos:

$$((\gamma o\gamma')(T))(\tilde{f}) = T(\tilde{f})$$

Logo $(\gamma o\gamma')(T) = T$, para todo $T\varepsilon H_N'(K)$ de tipo zero. $T*\varepsilon\,\mathcal{A}_N(K)$

é de tipo zero, pois $\gamma(T_*) = T$.

Reciprocamente, dados $\mathcal{Q} \in \mathcal{A}_N(K)$ de tipo zero e $\tilde{f} \in H_N(K)$, sejam $\varepsilon > 0$ e $f = \sum_{k=0}^{\infty} P_k \in \mathcal{H}_{Nb}(K+\varepsilon B_1)$ tais que $u_\varepsilon(f) = \tilde{f}$. Temos:

$$((\gamma' o \gamma)(\mathcal{Q}))(u_\varepsilon(P_k)) = \gamma\mathcal{Q} * (u_\varepsilon(P_k)) = u_\varepsilon((\gamma\mathcal{Q}\, o u_\varepsilon) * P_k)$$

Dado $x \in K+\varepsilon B_1$, por 1.18 temos:

$$((\gamma\mathcal{Q}\, o u_\varepsilon) * P_k)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\gamma\mathcal{Q}\, o u_\varepsilon)(\hat{d}^n P_k(.)x)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \gamma\mathcal{Q}\{u_\varepsilon(\hat{d}^n P_k(.)x)\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\mathcal{Q}\{u_\varepsilon(\hat{d}^n P_k(.)x)\})(0)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \{\mathcal{Q}(\hat{d}^n(u_\varepsilon(P_k))(.)x)\}(0)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \{\hat{d}^n(\mathcal{Q}(u_\varepsilon(P_k)))(.)x\}(0) \qquad (1)$$

Sejam $\varepsilon_o > 0$ e $g \in \mathcal{H}_{Nb}(K+\varepsilon_o B_1)$ tais que $u_{\varepsilon_o}(g) = \mathcal{Q}(u_\varepsilon(P_k))$; podemos supor $\varepsilon_o < \varepsilon$. Então, para todo $x \in K+\varepsilon_o B_1$, temos

$$\hat{d}^n(\mathcal{Q}(u_\varepsilon(P_k)))(.)x = \hat{d}^n(u_{\varepsilon_o}(g))(.)x = u_{\varepsilon_o}(\hat{d}^n g(.)x)$$

Logo

$$(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \{u_{\varepsilon_o}(\hat{d}^n g(.)x)\}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \hat{d}^n g(0)x = g(x),$$

e então

$$((\gamma\mathcal{Q} o u_\varepsilon)*P_k)|(K+\varepsilon_0^{\circ}B_1) = g.$$

Logo

$$u_{\varepsilon_0}\{(\gamma\mathcal{Q}\, o u_\varepsilon)*P_k)|K+\varepsilon_0 B_1 = u_{\varepsilon_0}(g) = \mathcal{Q}(u_\varepsilon(P_k)),$$

isto é,

$$u_\varepsilon((\gamma\mathcal{Q}\, o u_\varepsilon)*P_k) = \mathcal{Q}(u_\varepsilon(P_k))$$

Assim,

$$((\gamma' o \gamma)\mathcal{Q})(u_\varepsilon(P_k)) = \mathcal{Q}(u_\varepsilon(P_k)).$$

Para todo $n\varepsilon N$, temos

$$\{((\gamma' o\gamma)\mathcal{Q})\ o\ u_\varepsilon\}(\sum_{k=0}^{n} P_k) = (\mathcal{Q} o\ u_\varepsilon)(\sum_{k=0}^{n} P_k)$$

Passando ao limite a última igualdade, quando $n\to+\infty$, temos que

$$((\gamma' o\gamma)\mathcal{Q})(\tilde{f}) = \mathcal{Q}(\tilde{f})$$

e então

$$(\gamma' o\gamma)(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q},$$

para todo $\mathcal{Q}\varepsilon\mathcal{A}_N(K)$ de tipo zero. É claro que $\gamma\mathcal{Q}\varepsilon H_N'(K)$ é de tipo zero.

4.1.14. ***DEFINIÇÃO***. Dados $T_1, T_2 \varepsilon H_N'(K)$ de tipo zero, definimos

$$T_1*T_2 : H_N(K) \to C \text{ por } (T_1*T_2)(\tilde{f}) = (T_1*(T_2*\tilde{f}))(0),$$

para todo $\tilde{f} \in H_N(K)$.

4.1.15. <u>*OBSERVAÇÃO*</u>. Dados $\varepsilon>0$ e $f \in \mathcal{H}_{Nb}(K+\varepsilon B_1)$, temos:

$$T_1 * (T_2 * (u_\varepsilon(f))) = T_1 * \{u_\varepsilon((T_2 o u_\varepsilon) * f)\}$$

$$= u_\varepsilon\{(T_1 o u_\varepsilon) * ((T_2 o u_\varepsilon) * f)\}.$$

Logo, dado $\tilde{f} \in H_N(K)$, temos

$$(T_1 * T_2)(\tilde{f}) = \{(T_1 o u_\varepsilon) * ((T_2 o u_\varepsilon) * f)\}(0) = ((T_1 o u_\varepsilon) * (T_2 o u_\varepsilon))(f)$$

para todo $\varepsilon>0$ e $f \in \mathcal{H}_{Nb}(K+\varepsilon B_1)$ tais que $u_\varepsilon(f) = \tilde{f}$, isto é,

$$(T_1 * T_2) \circ u_\varepsilon = (T_1 o u_\varepsilon) * (T_2 o u_\varepsilon),$$

para todo $\varepsilon>0$. Por 1.19,

$$(T_1 o u_\varepsilon) * (T_2 o u_\varepsilon) \in \mathcal{H}'_{Nb}(K+\varepsilon B_1) \Leftrightarrow \widehat{T_1 o u_\varepsilon}\ \widehat{T_2 o u_\varepsilon} \in Exp_1(E, K+\varepsilon B_1)'.$$

Logo,

$$T_1 * T_2 \in H'_N(K) \Longleftrightarrow \mathcal{B}_N(T_1)\ \mathcal{B}_N(T_2) \in Exp_{1,K}(E').$$

4.1.16. <u>*EXEMPLOS DE OPERADORES DE CONVOLUÇÃO EM $H_N(K)$ DE TIPO ZERO*</u>.

1) Seja $\mathcal{Q}_m \in \mathcal{A}_N(K)$ definido por $\mathcal{Q}_m(\tilde{f}) = (u_\varepsilon o \mathcal{Q}_{m,\varepsilon})(f)$ para todo $\tilde{f} \in H_N(K)$, onde $\varepsilon>0$ e $f \in \mathcal{H}_{Nb}(K+\varepsilon B_1)$ são tais que $u_\varepsilon(f) = \tilde{f}$, e $\mathcal{Q}_{m,\varepsilon}$ é o operador de tipo zero em $\mathcal{H}_{Nb}(K+\varepsilon B_1)$ definido em 1.22.

$\mathcal{Q}_m(\tilde{f})$ está bem definido pois, dados $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2$, $f_1 \in \mathcal{H}_{Nb}(K+\varepsilon_1 B_1)$, $f_2 \in \mathcal{H}_{Nb}(K+\varepsilon_2 B_1)$ tais que $u_{\varepsilon_1}(f_1) = u_{\varepsilon_2}(f_2) = \tilde{f}$, temos que:

$$\hat{d}^k f_1(x) = \hat{d}^k f_2(x)$$

para todo $x \in K+\varepsilon_1 B_1$, pois $f_2|K+\varepsilon_1 B_1 = f_1$. Logo

$$(\mathcal{Q}_{m,\varepsilon_2}(f_2))|(K+\varepsilon_1 B_1) = \mathcal{Q}_{m,\varepsilon_1}(f_1)$$

e

$$u_{\varepsilon_2}(\mathcal{Q}_{m,\varepsilon_2}(f_2)) = u_{\varepsilon_1}(\mathcal{Q}_{m,\varepsilon_1}(f_1)).$$

$\mathcal{Q}_m$ é de tipo zero pois, dados $\varepsilon>0$ e $f \in \mathcal{H}_{Nb}(K+\varepsilon B_1)$, temos

$$(\gamma \mathcal{Q}_m o u_\varepsilon)(f) = (\mathcal{Q}_m(u_\varepsilon(f)))(0) = ((u_\varepsilon o \mathcal{Q}_{m,\varepsilon})(f))(0)$$

$$= (\mathcal{Q}_{m,\varepsilon}(f))(0) = (\gamma_\varepsilon(\mathcal{Q}_{m,\varepsilon}))(f),$$

onde γ_ε é a aplicação dada em 1.20.

Logo $\widehat{\gamma \mathcal{Q}_m o u_\varepsilon} = \widehat{\gamma_\varepsilon(\mathcal{Q}_{m,\varepsilon})}$ é de tipo exponencial zero, para todo $\varepsilon>0$.

2) Analogamente, mostra-se que o operador de convolução $\mathcal{Q}_H \in \mathcal{A}_N(K)$ definido por $\mathcal{Q}_H(\tilde{f}) = (u_\varepsilon o \mathcal{Q}_{H,\varepsilon})(f)$, para todo $\tilde{f} \in H_N(K)$, onde $\varepsilon>0$ e $f \in \mathcal{H}_{Nb}(K+\varepsilon B_1)$ são tais que $u_\varepsilon(f) = \tilde{f}$, e $\mathcal{Q}_{H,\varepsilon}$ é definido em 1.22, é de tipo zero.

4.1.17. ***TEOREMA***. *Se $\mathcal{Q} \in \mathcal{A}_N(K)$ for de tipo zero, então o subespaço vetorial de $H_N(K)$ gerado por $\mathcal{L}=\{P\exp\phi : P \in \mathcal{P}_N({}^nE),\ n \in \mathbb{N},\ \phi \in E';\ \mathcal{Q}(\widetilde{P\exp\phi})=0\}$ é denso para a topologia de $H_N(K)$ no subespaço vetorial fechado $\mathcal{K}=\{\tilde{f} \in H_N(K) : \mathcal{Q}\tilde{f}=0\}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Por 3.1.3, o teorema é verdadeiro para $\mathcal{Q}=0$. Suponhamos então $\mathcal{Q}\neq 0$. Por 4.1.8, existe $T \in H_N'(K)$ de tipo ze ro tal que $\mathcal{Q} = T*$. Seja $X \in H_N'(K)$ tal que $X|\mathcal{L} = 0$, isto é, se $\mathcal{Q}(\widetilde{P\ \exp\phi}) = 0$ então $X(\widetilde{P\ \exp\phi}) = 0$, com $P \in \mathcal{P}_N({}^nE)$, $\phi \in E'$, $n \in \mathbb{N}$.

Sejam $\mathcal{A}_\varepsilon$ o espaço vetorial dos operadores de convolução em $\mathcal{H}_{Nb}(K+\varepsilon B_1)$, $\gamma_\varepsilon : \{\mathcal{Q} \in \mathcal{A}_\varepsilon : \mathcal{Q}$ é de tipo zero$\} \to \{T \in \mathcal{H}_{Nb}'(K+\varepsilon B_1)$: T é de tipo zero$\}$ a aplicação definida por $(\gamma_\varepsilon \mathcal{Q})(f) = (\mathcal{Q}f)(0)$, pa para todo $f \in \mathcal{H}_{Nb}(K+\varepsilon B_1)$ e γ_ε' sua inversa, com $\varepsilon > 0$.

Temos então que:

(i) $\mathcal{Q} \in \mathcal{A}_N(K)$ é de tipo zero $\Longleftrightarrow$ $(T o u_\varepsilon)* \in \mathcal{A}_\varepsilon$ é de tipo zero, para todo $\varepsilon > 0$. Isto porque

$$\gamma\mathcal{Q} \circ u_\varepsilon = \gamma_\varepsilon((T o u_\varepsilon)*).$$

De fato,

$$\gamma\mathcal{Q}\, o u_\varepsilon = \gamma_\varepsilon(\gamma_\varepsilon'(\gamma\mathcal{Q}\, o u_\varepsilon)) = \gamma_\varepsilon((\gamma\mathcal{Q}\, o u_\varepsilon)*).$$

(ii) $\mathcal{Q}\tilde{f} = 0 \Longleftrightarrow (T o u_\varepsilon)*f = 0$, para todo $\varepsilon > 0$ e $f \in \mathcal{H}_{Nb}(K+\varepsilon B_1)$ tais que $u_\varepsilon(f) = \tilde{f}$.

De fato, $\mathcal{Q}\tilde{f} = T*\tilde{f} = u_\varepsilon((T o u_\varepsilon)*f)$, para todo $\varepsilon > 0$ e $f \in \mathcal{H}_{Nb}(K+\varepsilon B_1)$ tais que $u_\varepsilon(f) = \tilde{f}$; além disso, u_ε é injetiva.

Se X se anula em $\mathcal{L}$ então $X o u_\varepsilon \in \mathcal{H}_{Nb}'(K+\varepsilon B_1)$ se anula em $\mathcal{L}_\varepsilon = \{P\ \exp\phi|(K+\varepsilon B_1) : P \in \mathcal{P}_N({}^nE),\ n \in \mathbb{N},\ \phi \in E';\ (T o u_\varepsilon)*P\ \exp\phi|(K+\varepsilon B_1) = 0\}$ e portanto $X o u_\varepsilon$ se anula em $\mathcal{K}_\varepsilon = \{f \in \mathcal{H}_{Nb}(K+\varepsilon B_1) : (T o u_\varepsilon)*f = 0\}$, por 1.24, para todo $\varepsilon > 0$. Logo X se anula em $\mathcal{K}$. Pelo teorema de Hahn-Banach, temos o resultado.

4.1.18. <u>TEOREMA</u>. *Se $\mathcal{Q} \in \mathcal{A}_N(K)$ for um operador de convolução não nulo de tipo zero, então $\mathcal{Q}H_N(K) = H_N(K)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Dado $\tilde{g}\in H_N(K)$, existem $\varepsilon>0$ e $g\in \mathcal{H}_{Nb}(K+\varepsilon B_1)$ tais que $u_\varepsilon(g) = \tilde{g}$. Por 1.25, existe $f\in \mathcal{H}_{Nb}(K+\varepsilon B_1)$ tal que $(Tou_\varepsilon)*f = g$, onde $\mathcal{Q} = T*$, para algum $T\in H_N'(K)$ de tipo zero (ver parte (i) na demonstração de 4.1.17). Logo

$$\mathcal{Q}(u_\varepsilon(f)) = T*(u_\varepsilon(f)) = u_\varepsilon((Tou_\varepsilon)*f) = u_\varepsilon(g) = \tilde{g}.$$

§2. *CASO LOCALMENTE CONVEXO.*

Seja E um espaço localmente convexo complexo separado e seja $K\in \mathcal{K}(E)$.

4.2.1. <u>*DEFINIÇÃO*</u>. Dados $\tilde{f}\in H_N(K)$ e $a\in E$, definimos $\hat{d}^n\tilde{f}(.)a\in H_N(K)$ por

$$(*)\qquad \hat{d}^n\tilde{f}(.)a = I_{\alpha,N}\{\hat{d}^n\tilde{f}_\alpha(.)i_\alpha(a)\}$$

onde $\alpha\in SC(E)$ e $\tilde{f}_\alpha\in H_N(i_\alpha(K))$ são tais que $I_{\alpha,N}(\tilde{f}_\alpha) = \tilde{f}$.

Seja $f_\alpha\in H_N(i_\alpha(W_\alpha))$ tal que $\tilde{f} = \widetilde{f_\alpha o(i_\alpha|W_\alpha)}$ e seja $\varepsilon>0$ tal que $i_\alpha(K)+\varepsilon B_\alpha\subset i_\alpha(W_\alpha)$ e $f_\alpha|(i_\alpha(K)+\varepsilon B_\alpha)\in\mathcal{H}_{Nb}(i_\alpha(K)+\varepsilon B_\alpha)$. Então

$$I_{\alpha,N}\{\hat{d}^n\tilde{f}_\alpha(.)i_\alpha(a)\} = I_{\alpha,N}\{u_{\varepsilon,\alpha}(\hat{d}^n f_\alpha(.)i_\alpha(a))\} \qquad \text{(def. 4.1.1.)}$$

$$= \widetilde{\hat{d}^n f_\alpha(.)i_\alpha(a)o(i_\alpha|W_\alpha)}$$

$$= \widetilde{\hat{d}^n\{f_\alpha o(i_\alpha|W_\alpha)\}(.)a}$$

Um outro modo de escrever (*) é, então

$$\hat{d}^n\widetilde{f_\alpha o(i_\alpha|W_\alpha)}(.)a = \widetilde{\hat{d}^n\{f_\alpha o(i_\alpha|W_\alpha)\}(.)a}$$

4.2.2. <u>*OBSERVAÇÃO*</u>. $\hat{d}^n f(.)a$ está bem definido pois, dados $\alpha, \beta \in SC(E)$, $f_\alpha \in H_N(i_\alpha(W_\alpha))$, $f_\beta \in H_N(i_\beta(W_\beta))$ tais que $f_\alpha o(i_\alpha | W_\alpha) = f_\beta o(i_\beta | W_\beta)$, existe $W \subset E$ aberto contendo K, $W \subset W_\alpha \cap W_\beta$ tal que

$$f_\alpha o(i_\alpha | W_\alpha) = f_\beta o(i_\beta | W_\beta) \quad \text{em } W.$$

Logo,

$$\widehat{d^{n+i}\{f_\alpha o(i_\alpha | W_\alpha)\}(0).^i} = \widehat{d^{n+i}\{f_\beta o(i_\beta | W_\beta)\}(0).^i} \quad \text{em } W,$$

para todo $i \in N$ e portanto

$$\begin{aligned}\hat{d}^n\{f_\alpha o(i_\alpha | W_\alpha\}(x)a &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \widehat{d^{i+n}\{f_\alpha o(i_\alpha | W_\alpha)\}(0)x^i}\,(a) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \widehat{d^{i+n}\{f_\beta o(i_\beta | W_\beta)\}(0)x^i}\,(a) \\ &= \hat{d}^n\{f_\beta o(i_\beta | W_\beta)\}(x)a,\end{aligned}$$

para todo $x \in W$.

4.2.3. <u>*DEFINIÇÃO*</u>. Um <u>operador de convolução em $H_N(K)$</u> é uma aplicação $\mathcal{O}$ de $H_N(K)$ em si mesmo que é linear, contínua e tal que

$$\mathcal{O}(d\tilde{f}(.)a) = d(\mathcal{O}\tilde{f})(.)a,$$

para todo $\tilde{f} \in H_N(K)$ e $a \in E$.

$\mathcal{A}_N(K)$ denotará o espaço vetorial de todos os operadores de convolução em $H_N(K)$.

4.2.4. *DEFINIÇÃO*. Seja γ a aplicação linear de $\mathcal{A}_N(K)$ em $H_N'(K)$ definida por

$$(\gamma\, \mathcal{Q})(\tilde{f}) = (\mathcal{Q}\tilde{f})(0)$$

para todo $\mathcal{Q} \in \mathcal{A}_N(K)$ e $\tilde{f} \in H_N(K)$.

4.2.5. *DEFINIÇÃO*. Se $\mathcal{Q} \in \mathcal{A}_N(K)$, $\mathcal{Q}$ é de tipo zero se $\gamma\mathcal{Q} \circ I_{\alpha,N} \in H_N'(i_\alpha(K))$ for de tipo zero, para todo $\alpha \in SC(E)$, segundo 4.1.7.

Se $T \in H_N'(K)$, T é de tipo zero se $T \circ I_{\alpha,N} \in H_N'(i_\alpha(K))$ for de tipo zero, para todo $\alpha \in SC(E)$, segundo 4.1.5.

4.2.6. *PROPOSIÇÃO*. *γ é uma bijeção linear entre $\{\mathcal{Q} \in \mathcal{A}_N(K)$: $\mathcal{Q}$ é de tipo zero$\}$ e $\{T \in H_N'(K)$: T é de tipo zero$\}$.*

Para demonstrar 4.2.6, precisaremos de alguns lemas e da seguinte definição:

4.2.7. *DEFINIÇÃO*. Dados $T \in H_N'(K)$ de tipo zero e $\tilde{f} \in H_N(K)$, definimos a convolução entre T e $\tilde{f}$ por

$$T * \tilde{f} = I_{\alpha,N}\{(T \circ I_{\alpha,N}) * \tilde{f}_\alpha\}$$

onde $\alpha \in SC(E)$ e $\tilde{f}_\alpha \in H_N(i_\alpha(K))$ são tais que $I_{\alpha,N}(\tilde{f}_\alpha) = \tilde{f}$.

4.2.8. *OBSERVAÇÃO*. Dados $\alpha, \gamma \in SC(E)$, $\gamma \geq \alpha$, seja $i_{\gamma\alpha}$ a aplicação de E_γ sobre E_α. Temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, "i_\gamma"'] \arrow[dr, "i_\alpha"] & \\ E_\gamma \arrow[rr, "i_{\gamma\alpha}"] & & E_\alpha \end{tikzcd}$$

Temos que $i_{\gamma\alpha}(i_\gamma(K)+\varepsilon B_\gamma)\subset i_\alpha(K)+\varepsilon B_\alpha$. Consideremos, para cada $\varepsilon>0$, a aplicação

$$u_{\varepsilon,\alpha\gamma}: f_\alpha \in \mathcal{H}_{Nb}(i_\alpha(K)+\varepsilon B_\alpha) \mapsto f_\alpha o(i_{\gamma\alpha}|i_\gamma(K)+\varepsilon B_\gamma) \in \mathcal{H}_{Nb}(i_\gamma(K)+\varepsilon B_\gamma)$$

Seja $I_{\alpha\gamma}$ a aplicação de $H_N(i_\alpha(K))$ em $H_N(i_\gamma(K))$ definida por

$$I_{\alpha\gamma}(\tilde{f}_\alpha) = u_{\varepsilon,\gamma}(u_{\varepsilon,\alpha\gamma}(f_\alpha)),$$

para todo $\tilde{f}_\alpha \in H_N(i_\alpha(K))$, onde $\varepsilon>0$ e $f_\alpha \in \mathcal{H}_{Nb}(i_\alpha(K)+\varepsilon B_\alpha)$ são tais que $u_{\varepsilon,\alpha}(f_\alpha) = \tilde{f}_\alpha$. $I_{\alpha\gamma}$ é claramente bem definida. Temos, então, o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}_{Nb}(i_\alpha(K)+\varepsilon B_\alpha) \arrow[r, "u_{\varepsilon,\alpha\gamma}"] \arrow[d, "u_{\varepsilon,\alpha}"'] & \mathcal{H}_{Nb}(i_\gamma(K)+\varepsilon B_\gamma) \arrow[d, "u_{\varepsilon,\gamma}"] \\ H_N(i_\alpha(K)) \arrow[r, "I_{\alpha\gamma}"] & H_N(i_\gamma(K)) \end{tikzcd}$$

Dado $\tilde{f}_\alpha \in H_N(i_\alpha(K))$, sejam $\varepsilon>0$ e $f_\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} P_{k,\alpha} \in \mathcal{H}_{Nb}(i_\alpha(K)+\varepsilon B_\alpha)$ tais que $u_{\varepsilon,\alpha}(f_\alpha) = \tilde{f}_\alpha$. Seja $T\in H_N'(K)$ de tipo zero.

Provemos que

$$I_{\alpha\gamma}\{(ToI_{\alpha,N})*\tilde{f}_\alpha\} = (ToI_{\gamma,N})*(I_{\alpha\gamma}(\tilde{f}_\alpha))$$

Como o seguinte diagrama é comutativo,

$$\begin{array}{ccc} H_N(i_\alpha(K)) & \xrightarrow{I_{\alpha\gamma}} & H_N(i_\gamma(K)) \\ & {\scriptstyle I_{\alpha,N}}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle I_{\gamma,N}} & \\ & H_N(K) & \end{array}$$

basta provar que, fazendo $S = T \circ I_{\gamma,N} \in H_N'(i_\gamma(K))$,

$$I_{\alpha\gamma}\{(S\circ I_{\alpha\gamma})*\widetilde{f}_\alpha\} = S*(I_{\alpha\gamma}(\widetilde{f}_\alpha)).$$

Temos que

$$\begin{aligned} I_{\alpha\gamma}\{(S\circ I_{\alpha\gamma})*\widetilde{f}_\alpha\} &= (I_{\alpha\gamma}\circ u_{\varepsilon,\alpha})\{(S\circ I_{\alpha\gamma}\circ u_{\varepsilon,\alpha})*f_\alpha\} \\ &= (u_{\varepsilon,\gamma}\circ u_{\varepsilon,\alpha\gamma})\{(S\circ u_{\varepsilon,\gamma}\circ u_{\varepsilon,\alpha\gamma})*f_\alpha\} \\ &= u_{\varepsilon,\gamma}\{((S\circ u_{\varepsilon,\gamma}\circ u_{\varepsilon,\alpha\gamma})*f_\alpha)\circ(i_{\gamma\alpha}|i_\gamma(K)+\varepsilon B_\gamma)\} \end{aligned}$$

Dados $x\in i_\gamma(K)+\varepsilon B_\gamma$, $k\in N$, temos, fazendo $U=S\circ u_{\varepsilon,\gamma}\in \mathcal{H}_{oNb}(i_\gamma(K)+$ $+\varepsilon B_\gamma)$:

$$\{(U\circ u_{\varepsilon,\alpha\gamma})*P_{k,\alpha}\}(i_{\gamma\alpha}(x)) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(U\circ u_{\varepsilon,\alpha\gamma})(\hat{d}^nP_{k,\alpha}(.)i_{\gamma\alpha}(x))$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}U\{(\hat{d}^nP_{k,\alpha}(.)i_{\gamma\alpha}(x))\circ(i_{\gamma\alpha}|i_\gamma(K)+\varepsilon B_\gamma)\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}U\{\hat{d}^n(P_{k,\alpha}\circ(i_{\gamma\alpha}|i_\gamma(K)+\varepsilon B_\gamma))(.)x\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}U\{\hat{d}^n(u_{\varepsilon,\alpha\gamma}(P_{k,\alpha}))(.)x\}$$

$$= \{U*u_{\varepsilon,\alpha\gamma}(P_{k,\alpha})\}(x)$$

Logo, para todo $n\in N$,

$$\{(U\circ u_{\varepsilon,\alpha\gamma})*\sum_{k=0}^{n}P_{k,\alpha}\}\circ i_{\gamma\alpha}=\{U*u_{\varepsilon,\alpha\gamma}(\sum_{k=0}^{n}P_{k,\alpha})\} \text{ em } i_\gamma(K)+\varepsilon B_\gamma.$$

Passando ao limite ambos os membros da igualdade acima, quando $n\to+\infty$, temos:

$$\{(U\circ u_{\varepsilon,\alpha\gamma})*f_\alpha\}\circ(i_{\gamma\alpha}|i_\gamma(K)+\varepsilon B_\gamma) = U*u_{\varepsilon,\alpha\gamma}(f_\alpha)$$

isto é,

$$u_{\varepsilon,\alpha\gamma}\{(U\circ u_{\varepsilon,\alpha\gamma})*f_\alpha\} = U*u_{\varepsilon,\alpha\gamma}(f_\alpha)$$

Logo

$$I_{\alpha\gamma}\{(S\circ I_{\alpha\gamma})*\widetilde{f_\alpha}\} = (u_{\varepsilon,\gamma}\circ u_{\varepsilon,\alpha\gamma})\{(S\circ u_{\varepsilon,\gamma}\circ u_{\varepsilon,\alpha\gamma})*f_\alpha\}$$

$$= u_{\varepsilon,\gamma}\{(S\circ u_{\varepsilon,\gamma})*u_{\varepsilon,\alpha\gamma}(f_\alpha)\} = S*\{(u_{\varepsilon,\gamma}\circ u_{\varepsilon,\alpha\gamma})(f_\alpha)\}$$

$$= S*\{(I_{\alpha\gamma}\circ u_{\varepsilon,\alpha})(f_\alpha)\} = S*\{I_{\alpha\gamma}(f_\alpha)\}$$

Provemos agora que, dados $\widetilde{f}\in H_N(K)$ e $T\in H_N'(K)$ de tipo zero, $T*\widetilde{f}$ está bem definido.

Dados $\alpha,\beta\in SC(E)$, $\widetilde{f_\alpha}\in H_N(i_\alpha(K))$ e $\widetilde{f_\beta}\in H_N(i_\beta(K))$ tais que $I_{\alpha,N}(\widetilde{f_\alpha}) = I_{\beta,N}(\widetilde{f_\beta}) = \widetilde{f}$, existe $\gamma\in SC(E)$ com $\gamma\geq\alpha$ e $\gamma\geq\beta$.

Temos que $I_{\alpha,N} = I_{\gamma,N}\circ I_{\alpha\gamma}$ e $I_{\beta,N} = I_{\gamma,N}\circ I_{\beta\gamma}$. Logo $I_{\gamma,N}(I_{\alpha\gamma}(\widetilde{f_\alpha})) = I_{\gamma,N}(I_{\beta\gamma}(\widetilde{f_\beta}))$. Como $I_{\gamma,N}$ é injetiva, temos que $I_{\alpha\gamma}(\widetilde{f_\alpha}) = I_{\beta\gamma}(\widetilde{f_\beta})$. Logo

$$I_{\alpha,N}\{(T\circ I_{\alpha,N})*\widetilde{f_\alpha}\} = (I_{\gamma,N}\circ I_{\alpha\gamma})\{(T\circ I_{\alpha,N})*\widetilde{f_\alpha}\}$$

$$= I_{\gamma,N}\{(T\circ I_{\gamma,N})*(I_{\alpha\gamma}(\widetilde{f_\alpha}))\} = I_{\gamma,N}\{(T\circ I_{\gamma,N})*(I_{\beta\gamma}(\widetilde{f_\beta}))\}$$

$$= I_{\beta,N}\{(T\circ I_{\beta,N})*\widetilde{f_\beta}\}$$

4.2.9. ***LEMA.*** *Se $T\in H_N'(K)$ for de tipo zero, então a aplicação linear*

$$T* : \tilde{f} \in H_N(K) \to T*\tilde{f} \in H_N(K)$$

é contínua.

DEMONSTRAÇÃO. De fato, para todo $\alpha \in SC(E)$, $(T*) o I_{\alpha,N} = I_{\alpha,N} o \{(ToI_{\alpha,N})*\}$ é contínua, como composta de duas aplicações contínuas (ver 4.1.12).

4.2.10. *LEMA. A aplicação* $\tilde{f} \in H_N(K) \to d\tilde{f}(.)a \in H_N(K)$ *é contínua, para todo* $a \in E$.

DEMONSTRAÇÃO. Análoga à de 4.2.9 (ver 4.1.13).

4.2.11. *LEMA. Dado* $T \in H_N'(K)$ *de tipo zero, temos que*

$$T*(d\tilde{f}(.)a) = d(T*\tilde{f})(.)a,$$

para todo $\tilde{f} \in H_N(K)$ *e* $a \in E$.

DEMONSTRAÇÃO. Dados $\tilde{f} \in H_N(K)$ e $a \in E$, sejam $\alpha \in SC(E)$ e $\tilde{f}_\alpha \in H_N(i_\alpha(K))$ tais que $I_{\alpha,N}(\tilde{f}_\alpha) = \tilde{f}$. Temos:

$$\begin{aligned}
T*(d\tilde{f}(.)a) &= T*\{I_{\alpha,N}(d\tilde{f}_\alpha(.)i_\alpha(a))\} \\
&= I_{\alpha,N}\{(ToI_{\alpha,N})*d\tilde{f}_\alpha(.)i_\alpha(a)\} \\
&\overset{(1)}{=} I_{\alpha,N}\{d((ToI_{\alpha,N})*\tilde{f}_\alpha)(.)i_\alpha(a)\} \\
&= d\{I_{\alpha,N}((ToI_{\alpha,N})*\tilde{f}_\alpha)\}(.)a \\
&= d(T*\tilde{f})(.)a
\end{aligned}$$

onde a igualdade (1) segue de 1.17.

DEMONSTRAÇÃO DE 4.2.6. Pelos lemas precedentes, se $T\epsilon H_N^{'}(K)$ for de tipo zero, então $T*\epsilon \mathcal{a}_N(K)$.

Seja $\gamma^{'}$ a aplicação linear definida de $\{T\epsilon H_N^{'}(K): T$ é de tipo zero$\}$ em $\{\mathcal{l}\epsilon\, \mathcal{a}_N(K): \mathcal{l}$ é de tipo zero$\}$ por $\gamma^{'}(T) = T*$, para todo $T\epsilon H_N^{'}(K)$ de tipo zero.

Dados $T\epsilon H_N^{'}(K)$ de tipo zero e $f\epsilon H_N(K)$, sejam $\alpha\epsilon SC(E)$ e $f_\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} P_{k,\alpha}\ \epsilon\ H_N(i_\alpha(W_\alpha))$ tais que $I_{\alpha,N}(\widetilde{f_\alpha}) = \tilde{f}$. Seja $\varepsilon>0$ tal que

$i_\alpha(K)+\varepsilon B_\alpha \subset i_\alpha(W_\alpha)$ e $f_\alpha|(i_\alpha(K)+\varepsilon B_\alpha)\ \epsilon\ \mathcal{H}_{Nb}(i_\alpha(K)+\varepsilon B_\alpha)$.

Então

$$\{(\gamma o\gamma ')(T)\}(\widetilde{P_{k,\alpha} o\ i_\alpha}) = \{T*\widetilde{P_{k,\alpha} o\ i_\alpha}\}(0)$$

$$= I_{\alpha,N}\{(ToI_{\alpha,N})*\widetilde{P_{k,\alpha}}\}(0) = \{(ToI_{\alpha,N})*\widetilde{P_{k,\alpha}}\}(0)$$

$$= u_{\varepsilon,\alpha}\{(ToI_{\alpha,N}ou_{\varepsilon,\alpha})*P_{k,\alpha}\}(0) = \{(ToI_{\alpha,N}o\ u_{\varepsilon,\alpha})*P_{k,\alpha}\}(0)$$

$$\overset{(1)}{=} (ToI_{\alpha,N}o\ u_{\varepsilon,\alpha})(P_{k,\alpha})$$

onde a igualdade (1) segue de 1.18.

Logo

$$\{((\gamma o\gamma ')(T))oI_{\alpha,N}o\ u_{\varepsilon,\alpha}\}(P_{k,\alpha}) = (ToI_{\alpha,N}o\ u_{\varepsilon,\alpha})(P_{k,\alpha})$$

Para todo $n\epsilon N$, temos então

$$\{((\gamma o\gamma ')(T))\ oI_{\alpha,N}o\ u_{\varepsilon,\alpha}\}(\sum_{k=0}^{n} P_{k,\alpha}) = (ToI_{\alpha,N}o\ u_{\varepsilon,\alpha})(\sum_{k=0}^{n} P_{k,\alpha})$$

Passando ao limite a última igualdade, quando $n\to+\infty$, temos:

$\{(\gamma o \gamma')(T)\}(\widetilde{f}) = T(\widetilde{f})$

Logo, $(\gamma o \gamma')(T) = T$, para todo $T \varepsilon H'_N(K)$ de tipo zero; $T* \varepsilon \mathcal{A}_N(K)$ é de tipo zero, pois $\gamma(T*) = T$.

Reciprocamente, dados $\mathcal{Q} \varepsilon \mathcal{A}_N(K)$ de tipo zero e $\widetilde{f} \varepsilon H_N(K)$ como acima, temos:

$$\{(\gamma' o \gamma)(\mathcal{Q})\}(\widetilde{P_{k,\alpha} o\, i_\alpha}) = \gamma\mathcal{Q} * \widetilde{P_{k,\alpha} o\, i_\alpha} = \gamma\mathcal{Q} * I_{\alpha,N}(\widetilde{P_{k,\alpha}})$$

$$= I_{\alpha,N}\{(\gamma\mathcal{Q}\, o I_{\alpha,N}) * \widetilde{P_{k,\alpha}}\} = (I_{\alpha,N} o\, u_{\varepsilon,\alpha})\{(\gamma\mathcal{Q}\, o I_{\alpha,N} o\, u_{\varepsilon,\alpha}) * P_{k,\alpha}\}$$

Dado $x \varepsilon K + \varepsilon B'_\alpha$, onde $B'_\alpha = \{x \varepsilon E : \alpha(x) < 1\}$, por 1.18 temos:

$$\{(\gamma\mathcal{Q}\, o I_{\alpha,N} o\, u_{\varepsilon,\alpha}) * P_{k,\alpha}\}(i_\alpha(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\gamma\mathcal{Q}\, o I_{\alpha,N} o\, u_{\varepsilon,\alpha})(\hat{d}^n P_{k,\alpha}(.) i_\alpha(x))$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\{\mathcal{Q}((I_{\alpha,N} o\, u_{\varepsilon,\alpha})(\hat{d}^n P_{k,\alpha}(.) i_\alpha(x)))\}(0)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\{\mathcal{Q}(I_{\alpha,N}(\widetilde{\hat{d}^n P_{k,\alpha}}(.) i_\alpha(x)))\}(0)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\{\mathcal{Q}(\hat{d}^n(\widetilde{P_{k,\alpha} o\, i_\alpha})(.)x)\}(0)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\{\hat{d}^n(\mathcal{Q}\widetilde{P_{k,\alpha} o\, i_\alpha})(.)x\}(0) \qquad (2)$$

Sejam $\alpha_o \varepsilon SC(E)$ e $\widetilde{F_{\alpha_o}} \varepsilon H_N(i_{\alpha_o}(K))$ tais que $I_{\alpha_o,N}(\widetilde{F_{\alpha_o}}) = \mathcal{Q}(\widetilde{P_{k,\alpha} o i_\alpha})$; podemos supor $\alpha_o \geq \alpha$. Existem também ε_o, $0 < \varepsilon_o < \varepsilon$ e $F_{\alpha_o} \varepsilon \mathcal{H}_{Nb}(i_{\alpha_o}(K) + \varepsilon_o B_{\alpha_o})$ tais que $u_{\varepsilon_o,\alpha_o}(F_{\alpha_o}) = \widetilde{F_{\alpha_o}}$.

Dado $x \varepsilon K + \varepsilon_o B'_{\alpha_o}$,

$$(2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \{\hat{d}^n (I_{\alpha_0,N}(\widetilde{F_{\alpha_0}}))(.)x\}(0)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \{I_{\alpha_0,N}(\hat{d}^n \widetilde{F_{\alpha_0}}(.)i_{\alpha_0}(x))\}(0)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \{\hat{d}^n \widetilde{F_{\alpha_0}}(.)i_{\alpha_0}(x)\}(0)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \{u_{\varepsilon_0,\alpha_0}(\hat{d}^n F_{\alpha_0}(.)i_{\alpha_0}(x))\}(0)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \hat{d}^n F_{\alpha_0}(0)\; i_{\alpha_0}(x)$$

$$= F_{\alpha_0}(i_{\alpha_0}(x)).$$

Assim,

$$\{((\gamma\mathcal{Q} \circ I_{\alpha,N} \circ u_{\varepsilon,\alpha}) * P_{k,\alpha}) \circ \{i_\alpha | (K+\varepsilon_0 B'_{\alpha_0})\} = F_{\alpha_0} \circ \{i_{\alpha_0} | (K+\varepsilon_0 B'_{\alpha_0})\}$$

e portanto,

$$(I_{\alpha,N} \circ u_{\varepsilon,\alpha})\{(\gamma\mathcal{Q} \circ I_{\alpha,N} \circ u_{\varepsilon,\alpha}) * P_{k,\alpha}\} = \mathcal{Q}(\widetilde{P_{k,\alpha} \circ i_\alpha})$$

isto é,

$\{(\gamma' \circ \gamma)(\mathcal{Q})\}(\widetilde{P_{k,\alpha} \circ i_\alpha}) = \mathcal{Q}(\widetilde{P_{k,\alpha} \circ i_\alpha})$ e, para todo $n \in N$, temos:

$$(3) \quad \gamma\mathcal{Q} * \sum_{k=0}^{n} \widetilde{P_{k,\alpha} \circ i_\alpha} = \mathcal{Q}\left(\sum_{k=0}^{n} \widetilde{P_{k,\alpha} \circ i_\alpha}\right)$$

Analogamente ao que foi feito na primeira parte da demonstração, passando ao limite ambos os membros da igualdade (3), quando $n \to +\infty$, temos:

$$\gamma\mathcal{Q} * \tilde{f} = \mathcal{Q}\tilde{f}.$$

Logo, $(\gamma'o\gamma)(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}$, para todo $\mathcal{Q}\varepsilon\mathcal{A}_N(K)$ de tipo zero. É claro que $\gamma\mathcal{Q}\varepsilon H_N'(K)$ é de tipo zero.

4.2.12. <u>*DEFINIÇÃO*</u>. Dados $T_1, T_2\varepsilon H_N'(K)$ de tipo zero, definimos

$$T_1 * T_2 : H_N(K) \to C \text{ por } (T_1*T_2)(\tilde{f}) = \{T_1*(T_2*\tilde{f})\}(0)$$

para todo $\tilde{f}\varepsilon H_N(K)$.

4.2.13. <u>*OBSERVAÇÃO*</u>. Dados $\alpha\varepsilon SC(E)$ e $\tilde{f}_\alpha\varepsilon H_N(1_\alpha(K))$, temos:

$$T_1*\{T_2* I_{\alpha,N}(\tilde{f}_\alpha)\} =$$

$$T_1*\{I_{\alpha,N}((T_2 o I_{\alpha,N})*\tilde{f}_\alpha)\} = I_{\alpha,N}\{(T_1 o I_{\alpha,N})*[(T_2 o I_{\alpha,N})*\tilde{f}_\alpha)\}$$

Logo

$$(T_1*T_2)\{I_{\alpha,N}(\tilde{f}_\alpha)\} = (I_{\alpha,N}\{(T_1 o I_{\alpha,N})*((T_2 o I_{\alpha,N})*\tilde{f}_\alpha)\})(0)$$

$$= \{(T_1 o I_{\alpha,N})*((T_2 o I_{\alpha,N})*\tilde{f}_\alpha)\}(0) = \{(T_1 o I_{\alpha,N})*(T_2 o I_{\alpha,N})\}(\tilde{f}_\alpha)$$

onde a última igualdade segue de 4.1.14.

Assim, para todo $\alpha\varepsilon SC(E)$,

$$(T_1*T_2)\ o\ I_{\alpha,N} = (T_1\ o\ I_{\alpha,N})*(T_2\ o\ I_{\alpha,N})$$

Por 4.1.15, temos que

$$(T_1\ o\ I_{\alpha,N})*(T_2\ o\ I_{\alpha,N})\ \varepsilon\ H_N'(K) \Longleftrightarrow \mathcal{B}_N(T_1\ o\ I_{\alpha,N}).\ \mathcal{B}_N(T_2\ o\ I_{\alpha,N})\ \varepsilon\ Exp_{1,i_\alpha(K)}(E').$$

Como $\mathcal{B}_N(T_i)\ o\ (I_\alpha|E_\alpha') = \mathcal{B}_N(T_i\ o\ I_{\alpha,N})$, i=1,2 (ver 3.2.1), temos que

$$T_1 * T_2 \in H_N'(K) \Longleftrightarrow \{\mathcal{B}_N(T_1) o (I_\alpha | E_\alpha')\} o \{\mathcal{B}_N(T_2) o (I_\alpha | E_\alpha')\} \in Exp_{1,i_\alpha(K)}(E'),$$

para todo $\alpha \in SC(E)$.

Mas $\{\mathcal{B}_N(T_1) o (I_\alpha | E_\alpha')\} \cdot \{\mathcal{B}_N(T_2) o (I_\alpha | E_\alpha')\} = \{\mathcal{B}_N(T_1) . \mathcal{B}_N(T_2)\} o (I_\alpha | E_\alpha')$

Logo,

$$T_1 * T_2 \in H_N'(K) \Longleftrightarrow \mathcal{B}_N(T_1) \cdot \mathcal{B}_N(T_2) \in Exp_{1,K}(E').$$

4.2.14. EXEMPLOS DE OPERADORES DE CONVOLUÇÃO EM $H_N(K)$ DE TIPO ZERO

1) Seja, para cada $n \in N$, $\mathcal{P}_{uN}(^nE) = \bigcup_{\alpha \in SC(E)} I_\alpha(\mathcal{P}_N(^nE_\alpha))$. Munamos $\mathcal{P}_{uN}(^nE)$ da topologia localmente convexa limite indutivo dos espaços de Banach $(\mathcal{P}_N(^nE_\alpha), \| \ \|_{N,\alpha})$ sob as aplicações $I_\alpha | \mathcal{P}_N(^nE_\alpha)$, $\alpha \in SC(E)$.

Seja $\mathcal{Q}_m \in \mathcal{A}_N(K)$ definido por $\mathcal{Q}_m(\tilde{f}) = (I_{\alpha,N} o\ u_{\varepsilon,\alpha} o\ \mathcal{Q}_{m,\alpha,\varepsilon})(f_{\alpha,\varepsilon})$ para todo $\tilde{f} \in H_N(K)$, onde $\alpha \in SC(E)$, $\varepsilon > 0$ e $f_{\alpha,\varepsilon} \in \mathcal{H}_{Nb}(i_\alpha(K) + \varepsilon B_\alpha)$ são tais que $(I_{\alpha,N} o\ u_{\varepsilon,\alpha})(f_{\alpha,\varepsilon}) = \tilde{f}$ e $\mathcal{Q}_{m,\alpha,\varepsilon} \in \mathcal{A}_N(i_\alpha(K) + \varepsilon B_\alpha)$ é definido por

$$\{\mathcal{Q}_{m,\alpha,\varepsilon}(f_{\alpha,\varepsilon})\}(x) = \sum_{k=0}^{m} H_k o I_\alpha(\hat{d}^k f_{\alpha,\varepsilon}(x))$$

para todo $f_{\alpha,\varepsilon} \in \mathcal{H}_{Nb}(i_\alpha(K) + \varepsilon B_\alpha)$ e $x \in i_\alpha(K) + \varepsilon B_\alpha$, onde $H_n \in \mathcal{P}_{uN}'(^nE)$, $n = 0, 1, \ldots, m$.

Já vimos em 4.1.16, exemplo 1, que o operador $\mathcal{Q}_{m,\alpha} \in \mathcal{A}_N(i_\alpha(K))$ definido por

$$\mathcal{Q}_{m,\alpha}(\tilde{f}_\alpha) = (u_{\varepsilon,\alpha} o\ \mathcal{Q}_{m,\alpha,\varepsilon})(f_{\alpha,\varepsilon})$$

para todo $\tilde{f}_\alpha \in H_N(i_\alpha(K))$, onde $\varepsilon > 0$ e $f_{\alpha,\varepsilon} \in \mathcal{H}_{Nb}(i_\alpha(K) + \varepsilon B_\alpha)$ são tais que $u_{\varepsilon,\alpha}(f_{\alpha,\varepsilon}) = \widetilde{f}_\alpha$ e $\mathcal{Q}_{m,\alpha,\varepsilon}$ é como acima, é bem definido e de tipo zero.

Logo, para provar que $\mathcal{Q}_m(\widetilde{f})$ é bem definido, basta provar que, dados $\alpha,\beta\in SC(E)$, $\widetilde{f}_\alpha \in H_N(i_\alpha(K))$ e $\widetilde{f}_\beta \in H_N(i_\beta(K))$ tais que $I_{\alpha,N}(\widetilde{f}_\alpha) = I_{\beta,N}(\widetilde{f}_\beta) = \widetilde{f}$, então $(I_{\alpha,N} \circ \mathcal{Q}_{m,\alpha})(\widetilde{f}_\alpha) = (I_{\beta,N} \circ \mathcal{Q}_{m,\beta})(\widetilde{f}_\beta)$.

Sejam $\alpha,\gamma \in SC(E)$ tais que $\gamma \geq \alpha$. Temos as seguintes aplicações, já definidas em 4.2.8:

$$i_{\gamma\alpha}: E_\gamma \to E_\alpha$$

e, dado $\varepsilon>0$,

$$u_{\varepsilon,\alpha\gamma}: f_\alpha \in \mathcal{H}_{Nb}(i_\alpha(K)+\varepsilon B_\alpha) \mapsto f_\alpha \circ (i_{\gamma\alpha}|i_\gamma(K)+\varepsilon B_\gamma) \in \mathcal{H}_{Nb}(i_\gamma(K)+\varepsilon B_\gamma)$$

Seja $P_{\alpha\gamma}$ a aplicação definida por

$$P_{\alpha\gamma}: P_\alpha \in \mathcal{P}_N(^nE_\alpha) \to P_\alpha \circ i_{\gamma\alpha} \in \mathcal{P}_N(^nE_\gamma).$$

Temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}_N(^nE_\alpha) \arrow[rr, "P_{\alpha\gamma}"] \arrow[dr, "I_\alpha|\mathcal{P}_N(^nE_\alpha)"'] & & \mathcal{P}_N(^nE_\gamma) \arrow[dl, "I_\gamma|\mathcal{P}_N(^nE_\gamma)"] \\
& \mathcal{P}_{uN}(^nE) &
\end{tikzcd}$$

Seja $H_{n,\alpha} = H_n \circ \{I_\alpha|\mathcal{P}_N(^nE_\alpha)\} \in \mathcal{P}'_N(^nE_\alpha)$ com $n=0,\ldots,m$ e $\alpha \in SC(E)$.

Provemos que, dado $\varepsilon>0$,

$$\mathcal{Q}_{m,\gamma,\varepsilon} \circ u_{\varepsilon,\alpha\gamma} = u_{\varepsilon,\alpha\gamma} \circ \mathcal{Q}_{m,\alpha,\varepsilon}$$

De fato, dados $f_\alpha \in \mathcal{H}_{Nb}(i_\alpha(K)+\varepsilon B_\alpha)$ e $x \in i_\gamma(K)+\varepsilon B_\gamma$, temos:

$$\{\mathcal{Q}_{m,\gamma,\varepsilon}(u_{\varepsilon,\alpha\gamma}(f_\alpha))\}(x) = \sum_{k=0}^{m} H_{k,\gamma}\{\hat{d}^k(u_{\varepsilon,\alpha\gamma}(f_\alpha))(x)\}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} H_{k,\gamma}\{\hat{d}^k(f_\alpha o(i_{\gamma\alpha}|i_\gamma(K)+\varepsilon B_\gamma))(x)\}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} H_{k,\gamma}\{\hat{d}^k f_\alpha(i_{\gamma\alpha}(x))o\ i_{\gamma\alpha}\}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} (H_{k,\gamma}\,o\,P_{\alpha\gamma})\{\hat{d}^k f_\alpha(i_{\gamma\alpha}(x))\}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} H_{k,\alpha}\{\hat{d}^k f_\alpha(i_{\gamma\alpha}(x))\}$$

$$= \{\mathcal{Q}_{m,\alpha,\varepsilon}(f_\alpha)\}(i_{\gamma\alpha}(x))$$

Logo,

$$(\mathcal{Q}_{m,\gamma,\varepsilon}\,o\,u_{\varepsilon,\alpha\gamma})(f_\alpha)=\{\mathcal{Q}_{m,\alpha,\varepsilon}(f_\alpha)\}o(i_{\gamma\alpha}|i_\gamma(K)+\varepsilon B_\gamma)=u_{\varepsilon,\alpha\gamma}(\mathcal{Q}_{m,\alpha,\varepsilon}(f_\alpha))$$

para todo $f_\alpha \in \mathcal{C}_{Nb}(i_\alpha(K)+\varepsilon B_\alpha)$ e, então,

$$\mathcal{Q}_{m,\gamma,\varepsilon}\,o\,u_{\varepsilon,\alpha\gamma} = u_{\varepsilon,\alpha\gamma}\,o\,\mathcal{Q}_{m,\alpha,\varepsilon}.$$

Θ

A aplicação $I_{\alpha\gamma}$: $H_N(i_\alpha(K)) \to H_N(i_\gamma(K))$ também já foi definida em 4.2.8. Ela satisfaz, para cada $\varepsilon>0$, à seguinte igualdade:

$$I_{\alpha\gamma}\,o\,u_{\varepsilon,\alpha} = u_{\varepsilon,\gamma}\,o\,u_{\varepsilon,\alpha\gamma}.$$

Provemos agora que

$$I_{\alpha\gamma}\,o\,\mathcal{Q}_{m,\alpha} = \mathcal{Q}_{m,\gamma}\,o\,I_{\alpha\gamma}$$

Reunindo todos os diagramas comutativos, temos o seguinte:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{H}_{Nb}(i_\gamma(K)+\varepsilon B_\gamma) \arrow[rrr, "u_{\varepsilon,\gamma}"'] & & & H_N(i_\gamma(K)) \\
& Nb(i_\gamma(K)+\varepsilon B_\gamma) \arrow[ul, "\mathcal{O}_{m,\gamma,\varepsilon}"'] \arrow[r, "u_{\varepsilon,\gamma}"'] & H_N(i_\gamma(K)) \arrow[ur, "\mathcal{O}_{m,\gamma}"'] & \\
& \mathcal{H}_{Nb}(i_\alpha(K)+\varepsilon B_\alpha) \arrow[u, "u_{\varepsilon,\alpha\gamma}"'] \arrow[r, "u_{\varepsilon,\alpha}"'] \arrow[dl, "\mathcal{O}_{m,\alpha,\varepsilon}"] & H_N(i_\alpha(K)) \arrow[u, "I_{\alpha\gamma}"] \arrow[dr, "\mathcal{O}_{m,\alpha}"] & \\
\mathcal{H}_{Nb}(i_\alpha(K)+\varepsilon B_\alpha) \arrow[uuu, "u_{\varepsilon,\alpha\gamma}"] \arrow[rrr, "u_{\varepsilon,\alpha}"'] & & & H_N(i_\alpha(K)) \arrow[uuu, "I_{\alpha\gamma}"']
\end{tikzcd}
$$

Dados $\widetilde{f_\alpha}\in H_N(i_\alpha(K))$, $\varepsilon>0$ e $f_{\alpha,\varepsilon}\in \mathcal{H}_{Nb}(i_\alpha(K)+\varepsilon B_\alpha)$ tais que $u_{\varepsilon,\alpha}(f_{\alpha,\varepsilon}) = \widetilde{f_\alpha}$, temos:

$$
\begin{aligned}
(I_{\alpha\gamma}\circ \mathcal{O}_{m,\alpha})(\widetilde{f_\alpha}) &= (I_{\alpha\gamma}\circ u_{\varepsilon,\alpha}\circ \mathcal{O}_{m,\alpha,\varepsilon})(f_{\alpha,\varepsilon}) \\
&= (u_{\varepsilon,\gamma}\circ u_{\varepsilon,\alpha\gamma}\circ \mathcal{O}_{m,\alpha,\varepsilon})(f_{\alpha,\varepsilon}) \\
&= (u_{\varepsilon,\gamma}\circ \mathcal{O}_{m,\gamma,\varepsilon}\circ u_{\varepsilon,\alpha\gamma})(f_{\alpha,\varepsilon}) \\
&= (\mathcal{O}_{m,\gamma}\circ u_{\varepsilon,\gamma}\circ u_{\varepsilon,\alpha\gamma})(f_{\alpha,\varepsilon}) \\
&= (\mathcal{O}_{m,\gamma}\circ I_{\alpha\gamma}\circ u_{\varepsilon,\alpha})(f_{\alpha,\varepsilon}) \\
&= (\mathcal{O}_{m,\gamma}\circ I_{\alpha\gamma})(\widetilde{f_\alpha}).
\end{aligned}
$$

Provemos finalmente que, dados $\alpha,\beta\in SC(E)$, $\widetilde{f_\alpha}\in H_N(i_\alpha(K))$ e $\widetilde{f_\beta}\in H_N(i_\beta(K))$ tais que $I_{\alpha,N}(\widetilde{f_\alpha})=I_{\beta,N}(\widetilde{f_\beta})$,

$$(I_{\alpha,N}\circ \mathcal{O}_{m,\alpha})(\widetilde{f_\alpha}) = (I_{\beta,N}\circ \mathcal{O}_{m,\beta})(\widetilde{f_\beta})$$

Existe $\gamma\varepsilon SC(E)$ tal que $\gamma\geq\alpha$ e $\gamma\geq\beta$. Temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} H_N(i_\alpha(K)) \arrow[r, "I_{\alpha\gamma}"] \arrow[dr, "I_{\alpha,N}"'] & H_N(i_\gamma(K)) \arrow[d, "I_{\gamma,N}"] & H_N(i_\beta(K)) \arrow[l, "I_{\beta\gamma}"'] \arrow[dl, "I_{\beta,N}"] \\ & H_N(K) & \end{tikzcd}$$

Logo $I_{\gamma,N}(I_{\alpha\gamma}(\widetilde{f_\alpha})) = I_{\gamma,N}(I_{\beta\gamma}(\widetilde{f_\beta}))$ e, como $I_{\gamma,N}$ é injetiva, $I_{\alpha\gamma}(\widetilde{f_\alpha}) = I_{\beta\gamma}(\widetilde{f_\beta})$. Então

$$\begin{aligned}(I_{\alpha,N}\circ \mathcal{Q}_{m,\alpha})(\widetilde{f_\alpha}) &= (I_{\gamma,N}\circ I_{\alpha\gamma}\circ \mathcal{Q}_{m,\alpha})(\widetilde{f_\alpha})\\ &= (I_{\gamma,N}\circ \mathcal{Q}_{m,\gamma}\circ I_{\alpha\gamma})(\widetilde{f_\alpha})\\ &= (I_{\gamma,N}\circ \mathcal{Q}_{m,\gamma})(I_{\beta\gamma}(\widetilde{f_\beta}))\\ &= (I_{\beta,N}\circ \mathcal{Q}_{m,\beta})(\widetilde{f_\beta}).\end{aligned}$$

$\mathcal{Q}_m\varepsilon\,\mathcal{A}_N(K)$ é de tipo zero, pois $\gamma\mathcal{Q}_m\circ I_{\alpha,N} = \gamma_\alpha(\mathcal{Q}_{m,\alpha})$, para todo $\alpha\varepsilon SC(E)$, onde γ_α é a aplicação definida em 4.1.4, e $\mathcal{Q}_{m,\alpha}$ ε $\mathcal{A}_N(i_\alpha(K))$ é de tipo zero, para todo $\alpha\varepsilon SC(E)$. De fato, dado $\widetilde{f_\alpha}$ ε $H_N(i_\alpha(K))$, temos:

$$\begin{aligned}(\gamma\mathcal{Q}_m\circ I_{\alpha,N})(\widetilde{f_\alpha}) &= \{\mathcal{Q}_m(I_{\alpha,N}(\widetilde{f_\alpha}))\}(0) = \{(I_{\alpha,N}\circ \mathcal{Q}_{m,\alpha})(\widetilde{f_\alpha})\}(0)\\ &= \{\mathcal{Q}_{m,\alpha}(\widetilde{f_\alpha})\}(0) = \{\gamma_\alpha(\mathcal{Q}_{m,\alpha})\}(\widetilde{f_\alpha})\end{aligned}$$

2) Seja, para cada $n\varepsilon N$, $H_n\varepsilon\,\mathcal{P}'_{uN}({}^nE)$ tal que $\limsup_{n\to\infty}\|H_n\circ(I_\alpha|\mathcal{P}_N({}^nE_\alpha))\|^{1/n}$ $<\infty$, para todo $\alpha\varepsilon SC(E)$. Seja $\mathcal{Q}_H\varepsilon\,\mathcal{A}_N(K)$ definido por

$$\mathcal{Q}_H(\tilde{f}) = (I_{\alpha,N} \circ u_{\varepsilon,\alpha} \circ \mathcal{Q}_{H,\alpha,\varepsilon})(f_{\alpha,\varepsilon})$$

para todo $\tilde{f}\in H_N(K)$, onde $\alpha\in SC(E)$, $\varepsilon>0$ e $f_{\alpha,\varepsilon}\in \mathcal{H}_{Nb}(i_\alpha(K)+\varepsilon B_\alpha)$ são tais que $(I_{\alpha,N}\circ u_{\varepsilon,\alpha})(f_{\alpha,\varepsilon})=\tilde{f}$ e $\mathcal{Q}_{H,\alpha,\varepsilon}\in\mathcal{A}_N(i_\alpha(K)+\varepsilon B_\alpha)$ é definido por

$$\{\mathcal{Q}_{H,\alpha,\varepsilon}(f)\}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} (H_k \circ I_\alpha)(\hat{d}^k f(x))$$

para todo $f\in \mathcal{H}_{Nb}(i_\alpha(K)+\varepsilon B_\alpha)$ e $x\in i_\alpha(K)+\varepsilon B_\alpha$.

Analogamente ao exemplo 1), prova-se que $\mathcal{Q}_H$ é bem definida e é de tipo zero.

4.2.15. ***TEOREMA***. *Se $\mathcal{Q}\in\mathcal{A}_N(K)$ for de tipo zero, então o subespaço vetorial de $H_N(K)$ gerado por*

$$\mathcal{L} =\{\widetilde{P\ exp\phi}: P\in \bigcup_{\alpha\in SC(E)} I_\alpha(\mathcal{P}_N(^nE_\alpha)), n\in N,\ \phi\in E';\ \mathcal{Q}(\widetilde{P\ exp\phi})=0\}$$

é denso para a topologia T_N de $H_N(K)$ no subespaço vetorial fechado $\mathcal{K}=\{\tilde{f}\in H_N(K):\ \mathcal{Q}\tilde{f}=0\}$.

DEMONSTRAÇÃO. Por 3.2.3 o teorema é verdadeiro para $\mathcal{Q}=0$. Suponhamos então $\mathcal{Q}\neq 0$. Por 4.2.6, existe $T\in H_N'(K)$ de tipo zero tal que $\mathcal{Q} = T*$. Seja $X\in H_N'(K)$ tal que $X|\mathcal{L} =0$, isto é, se $\mathcal{Q}(\widetilde{P\ exp\phi}) = 0$, então $X(\widetilde{P\ exp\phi}) = 0$ para $P \in \bigcup_{\alpha\in SC(E)} I_\alpha(\mathcal{P}_N(^nE_\alpha))$, $n\in N$ e $\phi\in E'$.

Temos então que:

(i) $\mathcal{Q}\in\mathcal{A}_N(K)$ é de tipo zero $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{Q}_\alpha = (T\circ I_{\alpha,N})*\in\mathcal{A}_N(i_\alpha(K))$ é de tipo zero, para todo $\alpha\in SC(E)$.

Isto porque $\gamma(\mathcal{Q}\circ I_{\alpha,N} = \gamma_\alpha\circ\{(T\circ I_{\alpha,N})*\}$. De fato, dado $\tilde{f}\in H_N(i_\alpha(K))$, temos:

$$(\gamma \mathcal{Q} o I_{\alpha,N})(\widetilde{f_\alpha}) = \{\mathcal{Q}(I_{\alpha,N}(\widetilde{f_\alpha}))\}(0) = \{T*(I_{\alpha,N}(\widetilde{f_\alpha}))\}(0)$$

$$= \{I_{\alpha,N}((ToI_{\alpha,N})*\widetilde{f_\alpha})\}(0) = \{(ToI_{\alpha,N})*\widetilde{f_\alpha}\}(0) = \gamma_\alpha\{(ToI_{\alpha,N})*\widetilde{f_\alpha}\}$$

(ii) $\mathcal{Q}\widetilde{f} = 0 \Longleftrightarrow (ToI_{\alpha,N})*\widetilde{f_\alpha} = 0$, para todo $\alpha\epsilon SC(E)$ e $\widetilde{f_\alpha}\epsilon H_N(i_\alpha(K))$ tais que $I_{\alpha,N}(\widetilde{f_\alpha}) = \widetilde{f}$.

De fato, $I_{\alpha,N}\{(ToI_{\alpha,N})*\widetilde{f_\alpha}\} = T*\widetilde{f} = \mathcal{Q}\widetilde{f}$ e $I_{\alpha,N}$ é injetiva.

Se X se anula em $\mathcal{L}$, então $XoI_{\alpha,N}\epsilon H_N'(i_\alpha(K))$ se anula em $\mathcal{L}_\alpha = \{\widetilde{P_\alpha exp\phi_\alpha} : P_\alpha\epsilon \mathcal{P}_N({}^nE_\alpha),\ n\epsilon N,\ \phi_\alpha\epsilon E_\alpha';\ (ToI_{\alpha,N})*\widetilde{P_\alpha exp\phi_\alpha} = 0\}$ para todo $\alpha\epsilon SC(E)$, por (ii). Por (i) e por 4.1.17, temos que $XoI_{\alpha,N}$ se anula em $\mathcal{K}_\alpha = \{\widetilde{f_\alpha}\epsilon H_N(i_\alpha(K)) : (ToI_{\alpha,N})*\widetilde{f_\alpha} = 0\}$, para todo $\alpha\epsilon SC(E)$. Logo X se anula em $\mathcal{K}$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, temos o resultado.

4.2.16. <u>TEOREMA</u>. *Se $\mathcal{Q} \in \mathcal{O}_N(K)$ for um operador não nulo de tipo zero, então $\mathcal{Q}H_N(K) = H_N(K)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Dado $\widetilde{g}\epsilon H_N(K)$, existem $\alpha\epsilon SC(E)$ e $\widetilde{g_\alpha}\epsilon H_N(i_\alpha(K))$ tais que $I_{\alpha,N}(\widetilde{g_\alpha}) = \widetilde{g}$. Por 4.1.18, existe $\widetilde{f_\alpha}\epsilon H_N(i_\alpha(K))$ tal que

$$(ToI_{\alpha,N})*\widetilde{f_\alpha} = \widetilde{g_\alpha},$$

onde $\mathcal{Q} = T*$, para algum $T\epsilon H_N'(K)$ de tipo zero (ver parte (i) na demonstração de 4.2.15). Logo

$$\mathcal{Q}(I_{\alpha,N}(\widetilde{f_\alpha})) = I_{\alpha,N}\{(ToI_{\alpha,N})*\widetilde{f_\alpha}\} = I_{\alpha,N}(\widetilde{g_\alpha}) = \widetilde{g}.$$

CAPÍTULO 5

ALGUNS EXEMPLOS EM QUE OS GERMES HOLOMORFOS SÃO DE TIPO NUCLEAR

5.1. <u>EXEMPLO 1</u>. *Se $K\in\mathcal{K}(C^n)$, $n\in N$, então $H_N(K) = \mathcal{H}(K)$ algébrica e topologicamente.*

5.2. <u>LEMA</u>. *Dado $K\in\mathcal{K}(C^n)$, $H_N'(K) = \mathcal{H}'(K)$ algébrica e topologicamente, quando munimos ambos os espaços da topologia forte.*

DEMONSTRAÇÃO. Temos que a inclusão $\mathcal{H}'(K) \to H_N'(K)$ é contínua (ver 2.1.12). Como $\mathcal{H}'(K)$ e $H_N'(K)$ são espaços de Fréchet (ver 1.29 e 2.1.11), pelo teorema de aplicação aberta, basta mostrar que $H_N'(K)\subset\mathcal{H}'(K)$.

Sendo K equilibrado, temos que $K^0 = \{u\in(C^n)' : \sup_{x\in K}|u(x)|\leq 1\}$ $= \{u\in(C^n)' : \sup_{x\in K} \operatorname{Re} u(x) \leq 1\}$. Logo $\sup_{x\in K}|u(x)| = \sup_{x\in K} \operatorname{Re} u(x)$, para todo $u\in(C^n)'$.

O Teorema 6 de Martineau (7) afirma: "Se F, definida sobre $(C^n)'$, satisfizer à majoração

$$|F(u)| \leq c(\varepsilon)\exp(h_K(u) + \varepsilon\|u\|) \quad \text{para todo } \varepsilon>0,$$

onde K é um subconjunto compacto convexo de C^n, $h_K(u)=\sup_{x\in K} \operatorname{Re} u(x)$, então F é a transformada de Borel de um elemento $T\in\mathcal{H}'(K)$".

Dado $S\in H_N'(K)$, por 3.1.5, temos que a transformada de Borel $\mathcal{B}_N(S)$ de S satisfaz à majoração: dado $\varepsilon>0$ existem $0<A<1$ e $c>0$ tais que

$$|\{\mathcal{B}_N(S)\}(u)| \leq c\ \exp(A\|u\|_{K+\varepsilon B_1}) < c\ \exp(\|u\|_{K+\varepsilon B_1})$$

$$= c\ \exp\ (h_K(u) + \varepsilon\|u\|)$$

Logo, $\mathcal{B}_N(S)$ é a transformada de Borel de um elemento T de $\mathcal{H}_{\mathcal{Q}}'(K)\subset H_N'(K)$. Mas a transformada de Borel de T é $\mathcal{B}_N(T)$. Logo $S = T$ e $H_N'(K)\subset \mathcal{H}_{\mathcal{Q}}'(K)$.

5.3. <u>*LEMA*</u>. *Dado $K\in \mathcal{K}(C^n)$, $H_N(K)$ é um espaço de Montel, logo, reflexivo.*

DEMONSTRAÇÃO. Como $H_N(K)$ é tonelado, por 2.1.10, basta mostrar que $H_N(K)$ é semi-Montel.

Seja $\mathfrak{X}\subset H_N(K)$ limitado. Por Aron (2), Teorema 2, existem $U\in \mathcal{U}(K)$ e $X\subset H_N(U)$ $T_{N,U}$-limitado tais que $\phi_U(X) = \mathfrak{X}$. Além disso, Aron provou também em (3), Proposição 4.6, que, se U for conexo, então $X\subset H_N(U)$ é $T_{N,U}$-relativamente compacto se, e somente se, X é $T_{N,U}$-limitado e relativamente compacto em algum $\xi\in U$, isto é, para todo $m\in N$, $\{\hat{d}^m f(\xi):\ f\in X\}$ é relativamente compacto em $\mathcal{P}_N(^mC^n)$.

Como as topologias τ_o e τ_ω coincidem em $\mathcal{H}(U)$, para $U\subset C^n$ aberto e a inclusão $(H_N(U),T_{N,U}) \to (\mathcal{H}(U),\tau_\omega)$ é contínua, segue que X é τ_o-limitado em $\mathcal{H}(U)$, logo, pelo teorema de Montel, relativamente compacto para $\tau_o=\tau_\omega$. Além disso, como a aplicação

$$f\in(\mathcal{H}(U),\tau_\omega) \to \hat{d}^m f(\zeta)\in \mathcal{P}(^mC^n)$$

é contínua, para todo $\zeta\in U$ e $m\in N$, segue que $\{\hat{d}^m f(\zeta):\ f\in X\}$ é relativamente compacto, para todo $\zeta\in U$ e $m\in\mathbb{N}$. Mas $\mathcal{P}_N({}^m C^n)\simeq\mathcal{P}({}^m C^n)$; logo, X é relativamente compacto para $T_{N,U}$ e $\mathfrak{X}=\phi_U(X)$ é relativamente compacto para T_N, pois ϕ_U é contínua.

Portanto $H_N(K)$ é semi-Montel.

DEMONSTRAÇÃO DE 5.1. Sendo $\mathcal{H}(K)$ e $H_N(K)$ reflexivos, temos o resultado.

5.4. ***EXEMPLO 2.*** ***Se $K\in\mathcal{K}(C^I)$, onde I é um conjunto qualquer, então $H_N(K)=\mathcal{H}(K)$ algébrica e topologicamente.***

Seja C^I o produto cartesiano ΠC_λ, de planos complexos C_λ, $\lambda\in I$, onde I é um conjunto qualquer de índices. Um ponto de C^I será denotado por um dos símbolos $\check{\xi}$ ou $\{\xi_\lambda : \lambda\in I\}$. Associado a um conjunto $J\subset I$ temos a projeção Π_J de C^I sobre C^J, onde $\Pi_J\{\xi_\lambda:\lambda\in I\}=$ $=\{\xi_\lambda:\lambda\in J\}$, para todo $\check{\xi}\in C^I$.

Daqui por diante $J\subset I$ será sempre finito.

5.5. *DEFINIÇÃO*. Um conjunto $X\subset C^I$ é dito J-determinado se $\Pi_J^{-1}(\Pi_J X)=X$.

Uma função $f:X\subset C^I\to C$ é dita J-determinada se X for um conjunto J-determinado e $f(\check{\xi})=f(\check{\zeta})$ para $\check{\xi},\check{\zeta}\in X$ tais que $\Pi_J(\check{\xi})=\Pi_J(\check{\zeta})$.

5.6. *OBSERVAÇÃO*. Dada uma função $f:X\to C$ J-determinada, pode-se definir, sem ambigüidade, uma função $f_J:\Pi_J(X)\to C$ por $f_J(\Pi_J(\check{\xi}))=f(\check{\xi})$ para todo $\check{\xi}\in X$.

5.7. *DEFINIÇÃO*. Dado $U_J\subset C^I$ aberto J-determinado, seja

$$\mathcal{H}_J(U_J) = \{f\in \mathcal{H}(U_J):\ f \text{ é J-determinada}\}$$

Dado $K\subset C^I$ compacto, seja

$\mathcal{H}_J(K) = \{\tilde{f}\in \mathcal{H}(K): \exists\, U_J\ K$ aberto J-determinado $\exists f\in \mathcal{H}_J(U_J)$ representante de $\tilde{f}\}$.

5.8. OBSERVAÇÃO. Rickart em (13), Lema 2.1, afirma que, dada uma função h que é holomorfa numa vizinhança G de um compacto K de C^I, existem $J\subset I$ finito e uma vizinhança G_o de K contida em G na qual h é J-determinada.

Logo, $\mathcal{H}(K) = \bigcup\limits_{J\subset I} \mathcal{H}_J(K)$

5.9. LEMA. *Dado $U_J\subset C^I$ aberto J-determinado, a aplicação*

$$\phi_{U_J}: f\in(\mathcal{H}_J(U_J),\tau_o) \to f_J\in(\mathcal{H}(\Pi_J U_J),\tau_o)$$

é um isomorfismo algébrico e topológico.

DEMONSTRAÇÃO. ϕ_{U_J} é bem definida, por 5.6, e é claramente linear e injetiva. Sua inversa é dada por $\phi_{U_J}^{-1}(g)=g\ o(\Pi_J|U_J)$, para todo $g\in\mathcal{H}(\Pi_J U_J)$.

ϕ_{U_J} é contínua pois, dado $K\subset\Pi_J U_J$ compacto, podemos considerá-lo como um subconjunto de C^I e $\Pi_J(K) = K\subset\Pi_J(U_J)$, $K\subset\Pi_J^{-1}(\Pi_J U_J)=U_J$, pois U_J é J-determinado. Logo

$$\|f_J\|_K = \|f_J\|_{\Pi_J(K)} = \|f_J o\Pi_J\|_K = \|f\|_K$$

para todo $f\in\mathcal{H}_J(U_J)$.

$\phi_{U_J}^{-1}$ é contínua pois, dado $K\subset U_J$ compacto,

$$\|f_J \circ \Pi_J\|_K = \|f_J\|_{\Pi_J(K)}$$

para todo $f_J \in \mathcal{H}(\Pi_J U_J)$.

5.10. LEMA. *Dado $U_J \subset C^I$ aberto J-determinado, as topologias τ_o e τ_ω coincidem em $\mathcal{H}_J(U_J)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja p uma seminorma em $\mathcal{H}_J(U_J)$ portada por um compacto $K \subset U_J$, isto é, satisfazendo à seguinte propriedade: para cada aberto V de U_J contendo K, existe $c(V)>0$ tal que

$$p(f_J \circ \Pi_J) \leq c(V) \ \|f_J \circ \Pi_J\|_V = c(V) \ \|f_J\|_{\Pi_J(V)}$$

para todo $f_J \in \mathcal{H}(\Pi_J U_J)$.

Definindo a seminorma q em $\mathcal{H}(\Pi_J U_J)$ por

$$q(f_J) = p(f_J \circ \Pi_J),$$

para todo $f_J \in \mathcal{H}(\Pi_J U_J)$, temos que q é portada por $\Pi_J(K)$ pois, dado $W \subset C^J$ aberto, $\Pi_J(K) \subset W \subset \Pi_J(U_J)$, existe $c'(W) = c(\Pi_J^{-1}(W)) > 0$ tal que

$$q(f_J) \leq c(\Pi_J^{-1}(W)) \ \|f_J\|_{\Pi_J(\Pi_J^{-1}W)} = c(\Pi_J^{-1}W) \ \|f_J\|_W$$

Como $\tau_o = \tau_\omega$ em $\mathcal{H}(\Pi_J U_J)$, correspondendo a $\Pi_J(K)$ existem L_J subconjunto compacto de $\Pi_J(U_J)$ e $c>0$ tais que

$$q(f_J) \leq c \ \|f_J\|_{L_J}$$

para todo $f_J \in \mathcal{H}(\Pi_J U_J)$.

Considerando L_J como um subconjunto de C^I temos que $\Pi_J(L_J) = L_J$ e $L_J \subset U_J$. Logo

$$p(f_J o \Pi_J) = q(f_J) \leq c \,\|f_J\|_{L_J} = c \,\|f_J\|_{\Pi_J(L_J)} = c\,\|f_J o \Pi_J\|_{L_J},$$

para todo $f_J \varepsilon \mathcal{H}(\Pi_J U_J)$. Logo p é τ_0-contínua e $\tau_0 = \tau_\omega$ em $\mathcal{H}_J(U_J)$.

5.11. <u>*DEFINIÇÃO*</u>. Seja σ_{U_J} a aplicação natural

$$\sigma_{U_J}: f\varepsilon \mathcal{H}_J(U_J) \mapsto \tilde{f}\varepsilon \mathcal{H}_J(K)$$

$\mathcal{H}_J(K)$ será munido da topologia localmente convexa limite indutivo dos espaços $(\mathcal{H}_J(U_J), \tau_0)$ sob as aplicações σ_{U_J}, com $U_J \supset K$ aberto J-determinado.

5.12. <u>*LEMA*</u>. *A aplicação* β_J*:* $\tilde{f_J}\varepsilon \mathcal{H}(\Pi_J K) \mapsto \widetilde{f_J o \Pi_J} \varepsilon \mathcal{H}_J(K)$ *é um isomorfismo algébrico e topológico, quando são consideradas em ambos os espaços as respectivas topologias limites indutivos.*

DEMONSTRAÇÃO. β_J é bem definida pois, se f_J e g_J forem representantes de $\tilde{f}_J$, existe um aberto $U \supset \Pi_J(K)$ tal que $f_J = g_J$ em U. Temos que

$K \subset \Pi_J^{-1}(\Pi_J K) \subset \Pi_J^{-1}(U)$, $\Pi_J^{-1}(U)$ é J-determinado e $f_J o \Pi_J = g_J o \Pi_J$ em $\Pi_J^{-1}(U)$.

β_J é claramente injetiva e linear. Sua inversa é dada por $\beta_J^{-1}(\tilde{f}) = \widetilde{\phi_{U_J}(f)}$, onde $f\varepsilon \mathcal{H}_J(U_J)$ é um representante de f.

β_J^{-1} é bem definida pois, se $f\varepsilon \mathcal{H}_J(U_J)$ e $g\varepsilon \mathcal{H}_J(V_J)$ forem tais que $\sigma_{U_J}(f) = \sigma_{V_J}(g) = \tilde{f}$, existem únicos $f_J \varepsilon \mathcal{H}(\Pi_J U_J)$ e $g_J \varepsilon \mathcal{H}(\Pi_J V_J)$ tais que $f_J o \Pi_J = g_J o \Pi_J$ em um aberto W, onde $K \subset W \subset U_J \cap V_J$.

Logo $f_J = g_J$ em $\Pi_J(W)$.

β_J e β_J^{-1} são contínuas, pois, pelo diagrama comutativo abaixo

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{H}(\Pi_J K) & \xrightarrow{\ \beta_J\ } & \mathcal{H}_J(K) \\
\cup & & \cup \\
\tilde{f}_J & & \widetilde{f_J \circ (\Pi_J | U_J)} \\
\uparrow{\scriptstyle \tau_{U_J}} & & \uparrow{\scriptstyle \sigma_{U_J}} \\
(\mathcal{H}(\Pi_J U_J), \tau_0) & \xrightarrow{\ \phi_{U_J}^{-1}\ } & (\mathcal{H}_J(U_J), \tau_0) \\
\cup & & \cup \\
f_J & & f_J \circ (\Pi_J | U_J)
\end{array}$$

temos que

$$\beta_J \circ \tau_{U_J} = \sigma_{U_J} \circ \phi_J^{-1} \qquad \text{e} \qquad \beta_J^{-1} \circ \sigma_{U_J} = \tau_{U_J} \circ \phi_{U_J}$$

são contínuas, para todo aberto J-determinado $U_J \supset K$.

DEMONSTRAÇÃO DE 5.4. Temos que $\mathcal{H}(K) = \bigcup_{J\subset I} \mathcal{H}_J(K) = \bigcup_{J\subset I} \mathcal{H}(\Pi_J K)$ e $_{\Theta}H_N(K) = \bigcup_{\alpha\in SC(C^I)} H_N(i_\alpha(K))$. Dado $J\subset I$ finito, existe $\alpha_J \in SC(C^I)$ J-determinada. Então $(C^I)_{\alpha_J} = C^J$, $i_{\alpha_J} = \Pi_J$ e $\mathcal{H}(\Pi_J K) = H_N(\Pi_J K) = H_N(i_{\alpha_J}(K))$. Logo $\mathcal{H}(K) \subset H_N(K)$.

Provemos agora que a topologia em $\mathcal{H}(K)$ é a topologia localmente convexa limite indutivo dos subespaços $\mathcal{H}_J(K)$, $J\subset I$ finito.

Dados $J\subset I$ finito e $U_J \supset K$ aberto J-determinado, temos a seguinte inclusão contínua:

$$(\mathcal{H}_J(U_J), \tau_0) \to (\mathcal{H}(U_J), \tau_\omega)$$

pois $\tau_o = \tau_\omega$ em $\mathcal{H}_J(U_J)$. Logo a inclusão

$$\lim_{J\subset I} \operatorname{ind}\{\lim_{U_J \supset K} \operatorname{ind}(\mathcal{H}_J(U_J),\tau_o)\} \to \mathcal{H}(K)$$

é contínua.

Por 1.27, temos que $\mathcal{H}(K) = \lim_{U\supset K} \operatorname{ind} \mathcal{H}^\infty(U)$. Dado $U\supset K$ aberto, existem $J\subset I$ finito e U_J aberto J-determinado da forma $A_J \times C^{I\setminus J}$, onde $A_J \subset C^J$ é aberto, tal que $K \subset \overset{\circ}{U_J} \subset U$.

Dado $f \in \mathcal{H}^\infty(U)$, temos que $f|U_J \in \mathcal{H}^\infty(U_J)$, logo, pelo teorema de Liouville, $f|U_J \in \mathcal{H}_J(U_J)$. Assim, a aplicação

$$f \in \mathcal{H}^\infty(U) \mapsto f|U_J \in (\mathcal{H}_J(U_J),\tau_o)$$

é bem definida e é contínua pois, dado $L\subset U_J$ compacto, temos que $\|f\|_L \leq \|f\|_U$, para todo $f\in \mathcal{H}^\infty(U)$.

Logo, a inclusão

$$\mathcal{H}(K) \to \lim_{J\subset I} \operatorname{ind} \mathcal{H}_J(K)$$

é contínua.

Como $\mathcal{H}_J(K) = \mathcal{H}(\Pi_J K) = H_N(\Pi_J K)$ algébrica e topologicamente, temos que

$$\mathcal{H}(K) = \lim_{J\subset I} \operatorname{ind} (H_N(\Pi_J K),T_{N,J}).$$

Logo, $H_N(K) = \mathcal{H}(K)$ algébrica e topologicamente.

5.13. <u>EXEMPLO 3</u>. *Se E for nuclear, temos que $\mathcal{H}(0)=H_N(0)$ algébrica e topologicamente.*

5.14. <u>LEMA</u>. *Sejam E_1 e E_2 espaços normados complexos e $j:E_1 \to E_2$*

uma aplicação nuclear. Dados $U_2 \subset E_2$ aberto equilibrado e $f \in \mathcal{H}(U_2)$, existe $\delta > 0$ tal que $B_{\delta,1} = \{x \in E_1 : \|x\|_{E_1} < \delta\} \subset j^{-1}(U_2)$ e tal que

$f \circ (j|B_{\delta,1}) \in H_N(B_{\delta,1})$. Além disso, a aplicação

$$f \in (\mathcal{H}(U_2), \tau_o) \mapsto f \circ (j|B_{\delta,1}) \in (H_N(B_{\delta,1}), T_{N,B_{\delta,1}})$$

é contínua.

DEMONSTRAÇÃO. Como j é nuclear, existem seqüências $(y_n) \subset E_2$, $(x_n') \subset E_1'$ e $(\lambda_n) \subset C$ tais que, para todo $x \in E_1$, temos

$$(*) \qquad j(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \, x_n'(x) \, y_n$$

com

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leq c, \quad \sup_n \|x_n'\|_{E_1'} \leq c, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = 0,$$

para algum $c>0$. Como U_2 é aberto contendo zero, podemos supor $(y_n) \subset U_2$.

Seja K_o a envoltória equilibrada de $\{y_n : n \in N\} \cup \{0\}$. Seja $M = \|f\|_{K_o}$. Pelas desigualdades de Cauchy, temos:

$$\sup\{|\frac{1}{m} d^m f(0)(z_1, \ldots, z_m)| : z_j \in K_o\} \leq \frac{m^m}{m!} M$$

Por $(*)$, temos:

$$\frac{1}{m} d^m(f \circ j)(0)(x_1, \ldots, x_m) =$$

$$= \sum_{q_k} \lambda_{q_1} \ldots \lambda_{q_m} x'_{q_1}(x_1) \ldots x'_{q_m}(x_m) \frac{1}{m!} d^m f(0)(y_{q_1}, \ldots, y_{q_m}),$$

para todo $x_1, \ldots, x_m \in E_1$. Logo

$$\frac{1}{m} d^m(f \circ j)(0) = \sum_{q_k} \lambda_{q_1}\cdots\lambda_{q_m}\frac{1}{m!}d^m f(0)(y_{q_1},\ldots,y_{q_m})x'_{q_1}\times\ldots\times x'_{q_m}$$

Seja $\delta>0$ tal que $B_{\delta,1}\subset j^{-1}(U_2)$, $\delta<\frac{1}{c^2(e+1)^2}$. Então, dado $K\in\mathcal{K}(B_{\delta,1})$, existe $\varepsilon>0$ tal que $K+\varepsilon B_{1,1}\subset B_{\delta,1}$. Temos

$$\left\|\frac{1}{m!} d^m(f\circ j)(0)\right\|_{N,K+\varepsilon B_{1,1}} \leq \sum_{q_k} |\lambda_{q_1}|\ldots|\lambda_{q_m}| M \frac{m^m}{m!} (\delta c)^m$$

$$\leq M \frac{m^m}{m!}\left[\frac{c}{c^2(e+1)^2}\right]^m (\sum_n|\lambda_n|)^m$$

$$\leq M \frac{m^m}{m}\frac{1}{(e+1)^{2m}}$$

Logo,

$$\limsup_{m\to\infty}\left\|\frac{1}{m!} d^m(f\circ j)(0)\right\|^{1/m}_{N,K+\varepsilon B_{1,1}} \leq \limsup_{m\to\infty}\{M^{1/m}\frac{m}{\sqrt[m]{m!}}\frac{1}{(e+1)^2}\}=\frac{e}{(e+1)^2}$$

e

$$\limsup_{m\to\infty}\left\|\frac{1}{m!} \hat{d}^m(f\circ j)(0)\right\|^{1/m}_{N,K+\varepsilon B_{1,1}} < \limsup_{m\to\infty}\{\frac{m^m}{m!}\left\|\frac{1}{m!}d^m(f\circ j)(0)\right\|_{N,K+\varepsilon B_{1,1}}\}^{\frac{1}{m}}$$

$$= \frac{e^2}{(e+1)^2} <1.$$

Assim, $f \circ j \in H_N(B_{\delta,1})$.

Dada p seminorma $T_{N,B_{\delta,1}}$-contínua, N-portada por $K\in\mathcal{K}(B_{\delta,1})$, seja $\varepsilon>0$ tal que $K+\varepsilon B_{1,1}\subset B_{\delta,1}$. Então, existe $c(\varepsilon)>0$ tal que

$$p(f\circ(j|B_{\delta,1})) \leq c(\varepsilon) \sum_{n=0}^{\infty}\left\|\frac{\hat{d}^n(f\circ j)(0)}{n!}\right\|_{N,K+\varepsilon B_{1,1}}$$

$$\leq c(\varepsilon)\ \|f\|_{K_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n^n}{n!}\right)^2 \frac{1}{(e+1)^{2n}},$$

para todo $f \in \mathcal{H}(U_2)$.

Como $\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right)^2 \frac{1}{(e+1)^2} = \frac{e^2}{(e+1)^2} < 1$, seja

$$D = c(\varepsilon) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n^n}{n!}\right)^2 \frac{1}{(e+1)^{2n}} < \infty \text{ . Logo}$$

$$p(f\circ(j|B_{\delta,1})) \leq D\ \|f\|_{K_0},$$

para todo $f \in \mathcal{H}(U_2)$.

DEMONSTRAÇÃO DE 5.13. Dado $\tilde{f} \in \mathcal{H}(0)$, existem $\alpha \in SC(E)$, $W_\alpha \subset (E,\alpha)$ aberto equilibrado e $f_\alpha \in \mathcal{H}(i_\alpha(W_\alpha))$ tais que $\widetilde{f_\alpha \circ (i_\alpha | W_\alpha)} = \tilde{f}$.

Como E é nuclear, existe $\beta \in SC(E)$ tal que a aplicação $i_{\alpha\beta}: E_\beta \to E_\alpha$ é nuclear. Por 5.14, existe $\delta > 0$ tal que $B_{\delta,\beta} = \{i_\beta(x) : \beta(x) < \delta\} \subset i_{\alpha\beta}^{-1}(i_\alpha(W_\alpha))$ e tal que $f_\beta = f_\alpha \circ (i_{\alpha\beta}|B_{\delta,\beta}) \in H_N(B_{\delta,\beta})$. Temos que $B_{\delta,\beta} = i_\beta(B'_{\delta,\beta})$, onde $B'_{\delta,\beta} = \{x \in E : \beta(x) < \delta\}$ e $i_{\alpha\beta}(B_{\delta,\beta}) \subset i_\alpha(W_\alpha)$.

Temos os seguintes diagramas comutativos:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{H}(0) & \\
\mathcal{H}(i_\alpha(0)) \ni \tilde{f}_\alpha \arrow[ur, "I_\alpha"] \arrow[rr, "I_{\alpha\beta}"] & & \tilde{f}_\beta \in \mathcal{H}(i_\beta(0)) \arrow[ul, "I_\beta"'] \\
\mathcal{H}(i_\alpha(W_\alpha)) \ni f_\alpha \arrow[u, "I_{\alpha,W_\alpha}"] \arrow[rr, "I_{\alpha,\beta,W\alpha,B'_{\delta,\beta}}"] & & \mathcal{H}(i_\beta(B'_{\delta,\beta})) \ni f_\alpha \circ (i_{\alpha\beta}|B_{\delta,\beta}) = f_\beta \arrow[u, "I_{\beta,B'_{\delta,\beta}}"']
\end{tikzcd}$$

Logo $\widetilde{f_\alpha o(i_\alpha|W_\alpha)} = \widetilde{f_\beta o(i_\beta|B'_{\delta,\beta})} = I_{\beta,N}(\widetilde{f_\beta})$ e, então $\tilde{f} \in H_N(0)$.

Temos também o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}_\ell(0) \arrow[r, "I_N"] & H_N(0) \\
\rotatebox{90}{$\in$} & \rotatebox{90}{$\in$} \\
\widetilde{f_\alpha o(i_\alpha|W_\alpha)} & \widetilde{f_\beta o(i_\beta|B'_{\delta,\beta})} \\
(\mathcal{H}_\ell(i_\alpha(W_\alpha)),\tau_\omega) \arrow[u, "I_{\alpha,W_\alpha}"] \arrow[r, "I_{\alpha,\beta,W_\alpha,B'_{\delta,\beta}}"] & (H_N(i_\beta(B'_{\delta,\beta})),T_{N,B_{\delta,\beta}}) \arrow[u, "I_{\beta,N,B'_{\delta,\beta}}"'] \\
\rotatebox{90}{$\in$} & \rotatebox{90}{$\in$} \\
f_\alpha & f_\beta = f_\alpha o(i_{\alpha\beta}|B_{\delta,\beta})
\end{tikzcd}$$

Dados $\alpha \in SC(E)$, W_α α-aberto equilibrado, por 5.14, $I_{\alpha,\beta,W_\alpha,B'_{\delta,\beta}}$ é contínua. Logo

$$I_N o I_{\alpha,W_\alpha} = I_{\beta,N,B'_{\delta,\beta}} \; o \; I_{\alpha,\beta,W_\alpha,B'_{\delta,\beta}}$$

é contínua, para todo $\alpha \in SC(E)$ e W_α α-aberto equilibrado, e então $\mathcal{H}_\ell(0) = H_N(0)$ algébrica e topologicamente.

BIBLIOGRAFIA

1. Aron, R.M. - Topological properties of the space of holomorphic mappings - Tese, Rochester, 1970.

2. Aron, R.M. - Holomorphic functions on balanced subsets of a Banach space - *Bulletin of the American Mathematical Society* 78 (1972), 624-627.

3. Aron, R.M. - Holomorphy types for open sets of a Banach space - *Studia Mathematica* 45 (1973), 273-289.

4. Barroso, J.A. - Topologias nos espaços de aplicações holomorfas entre espaços localmente convexos - *Anais da Academia Brasileira de Ciências* 43 (1971), 527-546.

5. Grothendieck, A. - Sur les espaces (F) et (DF) - *Summa Brasiliensis Mathematicae 3(1954), 57-122.*

6. Gupta, C.P. - Malgrange theorem for nuclearly entire functions of bounded type on a Banach space - *Notas de Matemática, nº 37, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, Brasil, 1968.*

7. Martineau,A. - Equations différentielles d'ordre infini - *Bulletin de la Societé Mathematique de France*, 95(1967), 109-154.

8. Matos, M.C. - On Malgrange theorem for nuclear holomorphic functions in open balls of a Banach space - *Mathematische Zeitschrift*, 162(1978), 113-123.

9. Matos,M.C. - Correction to "On Malgrange theorem for nuclear holomorphic functions in open balls of a Banach space" - *Mathematische Zeitschrift, 171(1980),p.289.*

10. Matos,M.C. - Convolution operators in spaces of uniform nuclear entire functions - *Advances in Functional Analysis, Holomorphy and Approximation Theory (Atas de Seminário realizado na UFRJ em 1979), Marcel Dekker (a aparecer).*

11. Mujica,J. - Spaces of germs of holomorphic functions - *Studies in Analysis, Advances in Mathematics Supplementary Studies*, vol.4 (1979), 1-41.

12. Nachbin,L. - *Topology on spaces of holomorphic mappings* - Springer-Verlag, Berlim, 1969.

13. Rickart,C.E. - Analytic functions of an infinite number of variables - *Duke Mathematical Journal*,36(1969), 581-597.