# DOMINIOS DE HOLOMORFIA
# E
# SUBCONJUNTOS LIMITANTES
# DE UM ESPAÇO DE BANACH

HEBE DE AZEVEDO BIAGIONI

ORIENTADOR

PROF. DR. MARIO CARVALHO DE MATOS

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Este trabalho foi realizado com o auxílio financeiro do Conselho Nacional de Pesquisas (CNPq).

Fevereiro de 1977.

A meus pais, Arthur e Léa

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Mario Carvalho de Matos que, com sua segura orientação, permitiu a realização deste trabalho.

Aos meus pais, professores e colegas por seus estímulos, ensinamentos e discussões.

Ao Conselho Nacional de Pesquisas - CNPq - que, com seu apoio financeiro, tornou possível a realização deste trabalho.

# DOMÍNIOS DE HOLOMORFIA E SUBCONJUNTOS LIMITANTES DE UM ESPAÇO DE BANACH


Introdução.

CAPÍTULO 0. Notações e Terminologias. . . . . . . . . . . . .1

CAPÍTULO 1. Domínios de $\tau$-holomorfia em um espaço de Banach separável. . . . . . . . . . . . . . 4

CAPÍTULO 2. O Teorema de Cartan-Thullen para espaços de Banach. . . . . . . . . . . . . . . . .15

CAPÍTULO 3. Subconjuntos limitantes de um espaço de Banach. . . . . . . . . . . . . . . . . . .31

CAPÍTULO 4. Caracterização de subconjuntos limitantes de um espaço de Banach separável. . . . .47

BIBLIOGRAFIA. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 53

# INTRODUÇÃO

No capítulo 0 resumimos as principais notações e terminologias usadas neste trabalho.

Os domínios de $\tau$-holomorfia num espaço de Banach separável são nosso primeiro assunto. No capítulo I estudamos alguns teoremas sobre domínios de $\tau$-holomorfia, inclusive o Teorema de Cartan-Thullen tipo I para espaços de Banach separáveis. (Principais referências, [8] e [9])

O Teorema de Cartan-Thullen tipos I, II e III são o nosso segundo assunto. No capítulo II, definimos conjuntos U-limitados, denotando por $H_b(U)$ a álgebra das funções holomorfas que são limitadas em conjuntos U-limitados, a envoltória / U (resp. $U_b$)- holomorfa de um subconjunto de U, domínios de holomorfia (resp. b-domínios de holomorfia), domínios de existência (b-domínios de existência), demonstramos alguns lemas fundamentais envolvendo esses conceitos. Em alguns deles H(U) e $H_b(U)$ são munidos de topologias sob as quais são espaços tonelados. Demonstramos finalmente o principal resultado. (Principais referências [3] e [6])

Subconjuntos limitantes são o nosso terceiro assunto. No capítulo III, §1, definimos subconjuntos limitantes e demons tramos algumas proposições gerais. No §2 damos um exemplo de um subconjunto limitante de $\ell_\infty$ fechado, limitado, mas não compacto. (Referências principais [2] e [5])

O último aspecto considerado é a caracterização de subconjuntos limitantes em espaços de Banach separáveis ou reflexivos.

Os resultados relacionando domínios de existência e de holomorfia com domínios pseudo-convexos não são abordados neste trabalho. Tais resultados em dimensão infinita são objetos de inúmeros artigos de pesquisa e a sua descrição seria assunto para uma outra dissertação de mestrado.

# CAPITULO 0

## NOTAÇÕES E TERMINOLOGIAS

$\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ denotarão os conjuntos dos inteiros não negativos, dos números reais e dos números complexos, respectivamente.

E representará um espaço de Banach complexo e U um / subconjunto aberto, não vazio, de E.

As bolas aberta e fechada com centro em $\xi$ e raio $\rho$ serão denotadas por $B_\rho(\xi)$ e $\bar{B}_\rho(\xi)$, respectivamente.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, representaremos por $\mathcal{L}(^mE)$ o espaço de Banach de todas as aplicações m-lineares contínuas de $E^m = E \times \ldots \times E$ (m vezes) em $\mathbb{C}$, com respeito à norma definida por

$$\|A\| = \sup\{\frac{\|A(x_1,\ldots,x_m)\|}{\|x_1\|\ldots\|x_m\|}; x_1 \neq 0,\ldots,x_m \neq 0\},$$

onde $A \in \mathcal{L}(^mE)$ e $x_1,\ldots,x_m \in E$; por $\mathcal{L}_s(^mE)$ o subespaço vetorial fechado de todas as aplicações simétricas m-lineares contínuas / de $E^m$ em $\mathbb{C}$; por $\Delta_m$ a aplicação de E em $E^m$ que leva x em $(x,\ldots x)$ (m vezes). Um polinômio m-homogêneo contínuo é uma aplicação de E em $\mathbb{C}$, que é a composição de $\Delta_m$ com um elemento de $\mathcal{L}(^mE)$. Denotaremos por $\mathcal{P}(^mE)$ o conjunto de todos os polinômios m-homogêneos contínuos em $E$ e notemos que ele forma um espaço de Banach sob a norma

$$\|P\| = \sup\{|P(x)|; \|x\| \leq 1, x \in E\}.$$

<u>Definição 0.1.</u>- Uma <u>função</u> complexa $f$ definida em $U$ é dita <u>holomorfa em $\xi \in U$</u> se existirem uma série de potências

$$\sum_{m=0}^{\infty} P_m(x-\xi)$$

de $E$ em $\mathbb{C}$ e algum $\rho > 0$ tais que $B_\rho(\xi) \subset U$ e

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x-\xi)$$

uniformemente para $x \in B_\rho(\xi)$. A sequência $(P_m)_0^\infty$ é única e cada $P_m$ é denotado por $\frac{1}{m!}\hat{d}^m f(\xi)$.

$f$ é holomorfa em $U$ se for holomorfa em todo $\xi \in U$.

<u>Proposição 0.2.</u>- Uma função $f: U \to C$ é holomorfa em $\xi \in U$ se, e somente se, existe uma sequência $(P_n(\xi))_0^\infty$ (onde $P_n(\xi) \in \mathcal{P}(^m E)$ para cada $n$) tal que

(1) $\limsup_{m \to \infty} \|P_m(\xi)\|^{1/m} < \infty$,

(2) $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(\xi)(x-\xi)$ para todo $x$ numa vizinhança de $\xi$. Como a expansão em (2) é única, escrevemos $\frac{\hat{d}^m f(\xi)}{m!} = P_m(\xi)$ e chamamos (2) a expansão em série de Taylor de $f$ em $\xi$.

<u>Definição 0.3.</u>- Uma função $f: U \to C$ é <u>G-holomorfa</u> se para $x, y \in E$

e $\lambda\in\mathbb{C}$, a função $\lambda\mapsto f(x+\lambda y)$ é analítica em $\lambda$ para os valores de $\lambda$ tais que $x+\lambda y\in E$.

<u>Proposição 0.4.</u>- $f:U\to C$ é holomorfa se, e somente se, $f$ é G-holomorfa e contínua

Para maiores detalhes sobre funções holomorfas, ver [11] e [1].

Dados $x\in E$, $X,Y\subset E$, denotaremos por $d(x,X)=\inf\{\|x-y\|;\ y\in X\}$; por $d(X,Y)=\inf\{\|x-y\|;x\in X,y\in Y\}$ e por $\delta(X)=\sup\{\|x-y\|;x,y\in X\}$.

Usamos durante o texto dois teoremas que enunciaremos a seguir:

<u>Teorema de Montel</u> - Um subconjunto X de H(U) é relativamente compacto se, e somente se, é uniformemente limitado sobre todo subconjunto compacto de U.

<u>Teorema de Baire</u>- Todo espaço métrico completo é um espaço de Baire.

Os conceitos de espaços vetoriais topológicos, ver em [7].

# CAPÍTULO I

## DOMÍNIOS DE $\tau$-HOLOMORFIA EM UM ESPAÇO DE BANACH SEPARÁVEL

E representará um espaço de Banach complexo separável.

Seja $U \neq \emptyset$ um subconjunto aberto de E. Seja $\tau$ uma função positiva contínua em U, tal que $\tau(x) \leq d(x, \partial U)$. $H_\tau(U)$ denota a álgebra de todas as funções complexas holomorfas em U que são limitadas em cada bola fechada de centro x em U e raio $r < \tau(x)$. $\mathcal{B}_\tau(U)$ denota a coleção de todas as uniões finitas de bolas do tipo acima. Em $H_\tau(U)$ é considerada a topologia de Fréchet da convergência uniforme sobre os elementos de $\mathcal{B}_\tau(U)$.

A reunião dos $H_\tau(U)$, para todo $\tau$, é a álgebra $H(U)$ das funções complexas holomorfas em U. De fato, seja $f \in H(U)$ e seja para cada $u \in U$, $\tau(u) = \sup\{\rho > 0; f \text{ é limitada em } \bar{B}_\rho(u)\}$. Como f é localmente limitada em U, $0 < \tau(u) \leq d(u, \partial U)$. Mostremos que

$$|\tau(u) - \tau(v)| \leq \|u - v\|, \ \forall\, u, v \in U. \quad (*)$$

Temos dois casos:

(a) $\|u - v\| < \tau(u)$

(b) $\|u - v\| \geq \tau(u)$.

Em (a), se $\|u - v\| < \rho < \tau(u)$, então $\bar{B}_{\rho - \|u-v\|}(v) \subset \bar{B}_\rho(u)$ e $\rho - \|u - v\| \leq \tau(v)$, pois, como $\rho < \tau(u)$, existe $\rho'$, $\rho < \rho' < \tau(u)$ tal que f é limitada em $\bar{B}_{\rho'}(u)$, logo em $\bar{B}_{\rho - \|u-v\|}(v)$. Portanto

$\rho-||u-v||\leq\tau(v)$. Segue-se que $\tau(u)\leq||u-v||+\tau(v)$. Em (b) esta desigualdade se verifica trivialmente.

Trocando u e v no raciocínio acima, obtém-se (*). Logo $\tau$ é contínua.

Dado $B=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{B}_{\rho_i}(x_i)\in\mathcal{B}_\tau(U)$, para cada $i=1,2,\ldots,n$, existe $\rho_i'$, $\rho_i<\rho_i'<\tau(x_i)$, tal que f é limitada em $\overline{B}_{\rho_i'}(x_i)$, logo, em $\overline{B}_{\rho_i}(x_i)$. Assim, $f\in H_\tau(U)$.

<u>Definição 1.1.</u>- U é um <u>conjunto aberto de $\tau$-holomorfia</u> se for / impossível encontrar dois subconjuntos abertos/ conexos $U_1$ e $U_2$ de E tais que:

(a) $U\cap U_1\supset U_2\neq\emptyset$.

(b) $U_1\not\subset U$

(c) $\forall f\in H_\tau(U)$, $\exists f_1\in H(U_1)$ tal que $f=f_1$ em $U_2$.

Se $X\subset U$, denotamos por $\hat{X}_U^\tau$ o conjunto de todos os x em U tais que $|f(x)|\leq\sup\{|f(t)|; t\in X\}$, $\forall f\in H_\tau(U)$.

As seguintes propriedades são satisfeitas:

1) $\hat{X}_U^\tau$ é fechado em U.

2) Se $X\subset U\subset V$, onde U e V são subconjuntos abertos de E então $\hat{X}_U^\tau\subset\hat{X}_V^\tau$.

3) Se $X\subset Y\subset U$, então $\hat{X}_U^\tau\subset\hat{Y}_U^\tau$.

4) $\sup\{|f(t)|; t\in X\}=\sup\{|f(t)|; t\in\hat{X}_U^\tau\}$, $\forall f\in H_\tau(U)$.

<u>Proposição 1.2.</u>- Se $X\subset E$ então $\hat{X}_E^\tau$ está contido em $\hat{X}$ (a envoltória convexa fechada de X).

Demonstração. Por um teorema de separação, segue-se que $\xi\in\hat{X}$ se, e somente se, $\Phi(\xi)\leq\sup\{\Phi(x);x\in X\}$, para toda forma linear real contínua $\Phi$ em E, considerado como um espaço de Banach / real. A aplicação $\Psi:x\in E\mapsto\Psi(x)=\Phi(x)-i\Phi(ix)\in\mathbb{C}$ é uma forma linear contínua em E e a função $f:x\in E\mapsto\exp\Psi(x)$ está em $H_\tau(E)$. Se $\xi\in\hat{X}^\tau_E$, $|f(\xi)|\leq\sup\{|f(x)|;x\in X\}$, isto é, $\exp\Phi(\xi)\leq\sup\{\exp\Phi(x);x\in X\}$ ou ainda, $\Phi(\xi)\leq\sup\{\Phi(x);x\in X\}$. Logo $\xi\in\hat{X}$.

<u>Corolário 1.3.</u>- Se X é um conjunto limitado contido num subconjunto aberto U de E, então $\hat{X}^\tau_U$ é limitado.

Demonstração. Pela Propriedade 2, $\hat{X}^\tau_U\subset\hat{X}^\tau_E$. Pela Proposição 1.2., / $\hat{X}^\tau_E\subset\hat{X}$. Como X é limitado, $\hat{X}$ também o é. Segue-se então que $\hat{X}^\tau_U$ é limitado.

<u>Teorema 1.4.</u>- Seja U um subconjunto aberto conexo de E. As seguintes condições são equivalentes:

(a) U é um domínio de $\tau$-holomorfia.

(b) Se $A\in\mathfrak{S}_\tau(U)$, $\hat{A}^\tau_U$ é um conjunto limitado fechado em E e $d(\hat{A}^\tau_U,\partial U)>0$.

(c) Existe $f\in H_\tau(U)$ tal que é impossível encontrar subconjuntos abertos conexos $U_1$ e $U_2$ de E tais que:

(i) $U\cap U_1\supset U_2\neq\emptyset$ e $U_1\not\subset U$.

(ii) existe $f_1\in H(U_1)$ tal que $f=f_1$ em $U_2$.

Demonstração. Na definição de conjunto aberto de $\tau$-holomorfia, a condição (c) diz que existe $f\in H_\tau(U)$ (dependendo de $U_1$ e $U_2$) tal que é impossível encontrar $f_1\in H(U_1)$ tal que $f=f_1$ em

$U_2$. Por outro lado, a condição (c) do Teorema 1.4. diz que existe $f \in H_\tau(U)$ (não dependendo de quaisquer $U_1$ e $U_2$) tal que quaisquer $U_1$ e $U_2$ como descritos na Definição 1.1., é impossível encontrar $f_1 \in H(U_1)$ com $f=f_1$ em $U_2$. Logo (c)$\Rightarrow$(a).

Seja $U$ um domínio de $\tau$-holomorfia e seja $A=\bigcup_{i=1}^{n} \overline{B}_{\rho_i}(x_i)$ onde $x_i \in U$, $\rho_i<\tau(x_i)$, $i=1,2,\dots,n$. Se $r>0$ é tal que $r<\inf\{\tau(x_i)-\rho_i;\ i=1,2,\dots,n\}$, $\hat{A}_U^\tau+B_r(0)\subset U$ e $d(\hat{A}_U^\tau,\partial U)>0$. De fato, se $f\in H_\tau(U)$, $f$ é limitada em $\tilde{A}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{B}_{\rho_i+r}(x_i)$. Portanto

$$\left|\frac{1}{j!}\hat{d}^j f(t)\right|\leq Mr^{-j},$$ para todo $t\in A$, $j=1,2,\dots,n$, onde $M = \sup\{|f(x)|;\|x-t\|\leq r, t\in A\}$. Assim,

$$\left|\frac{1}{j!}\hat{d}^j f(z)\right|\leq Mr^{-j},$$ para todo $z\in\hat{A}_U^\tau$. De fato, dado $t\in A$,

$$\left|\frac{1}{j!}\hat{d}^j f(t)\right|=\sup\{\left|\frac{1}{j!}\hat{d}^j f(t)(u)\right|;\|u\|\leq 1\}.$$

Para cada $\|u\|\leq 1$, $j=0,1,\dots,$ definamos

$$g_{u,j}: x\in U\mapsto \frac{1}{j!}\ \hat{d}^j f(x)(u).$$

Temos $g_{u,j}\in H_\tau(U)$. Além disso,

$$|g_{u,j}(t)|\leq Mr^{-j},\ \forall t\in A.$$

Logo, dado $z\in\hat{A}_U^\tau$,

$$|g_{u,j}(z)|\leq\sup\{|g_{u,j}(x)|;x\in A\}\leq Mr^{-j}.$$

Portanto a série de Taylor de $f$ em $z$ converge uniformemente em toda bola $\overline{B}_s(z)$, $s<r$. Isto define uma função $f_1$ em $H(B_r(z))$ que coincide com $f$ na componente conexa de $U\cap B_r(z)\neq\emptyset$ contendo $\{z\}$. Como $U$ é um domínio de $\tau$-holomorfia, $B_r(z)\subset U$ e $d(z,\partial U)\geq r, \forall z\in\hat{A}_U^\tau$.

Logo $d(\hat{A}_U^\tau,\partial U)>0$. $\hat{A}_U^\tau$ é limitado, pelo Corolário 1.3., e fechado / em U, pela Propriedade 1. Como $d(\hat{A}_U,\partial U)>0$, nenhum ponto de $\complement U$ é ponto de acumulação de $\hat{A}_U^\tau$. Logo $\hat{A}_U^\tau$ é fechado em E.

Portanto (a)$\Rightarrow$(b).

<u>Lema 1.5.</u>- Seja X um conjunto enumerável denso em U. Seja $(\xi_n)_1^\infty$ uma seqüência de pontos de X tal que todo ponto x em X aparece infinitas vezes na seqüência. Para cada n=1,2,..., seja

$$B_n=\bigcup_{j=1}^{n} \overline{B}_{(1-\frac{1}{j})\tau(\xi_j)}(\xi_j).$$

Então $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j=U$ e cada A em $\mathscr{B}_\tau(U)$ está contido em algum $B_n$.

Demonstração. Seja $\overline{B}_\rho(x)$ tal que $\rho<\tau(x)$. Considere $\delta=\tau(x)-\rho>0$.

Dado $\overline{B}_{\delta/4}(x)$, existe $\xi\in X\cap\overline{B}_{\delta/4}(x)$ tal que $\tau(\xi)>\tau(x)-\delta/4$, pois X é denso em U e $\tau$ é contínua. Portanto existe uma / subseqüência $(\xi_{n_k})_1^\infty$ de $(\xi_n)_1^\infty$ tal que $\xi_{n_k}=\xi$, $\forall k$ e $\tau(\xi_{n_k})>\tau(x)-\delta/4=\rho+\delta/2+\gamma,\gamma>0$, para todo k=1,2,.... Escolha $n_{k_o}$ tal que

$$\tau(\xi_{n_{k_o}})(1-1/n_{k_o})>\rho+\delta/2.$$

Então

$$\overline{B}_\rho(x)\subset\overline{B}_{\tau(\xi_{n_{k_o}})(1-1/n_{k_o})}(\xi_{n_{k_o}}),$$

pois se $\|y-x\|\leq\rho$, temos:

$$\|y-\xi_{n_{k_o}}\|\leq\|y-x\|+\|x-\xi_{n_{k_o}}\|\leq\rho+\delta/4<\rho+\delta/2<\tau(\xi_{n_{k_o}})(1-1/n_{k_o})$$

e o lema segue.

Suponhamos válida a condição (b) do Teorema. Sejam

$(\xi_n)_1^\infty$ e $(B_n)_1^\infty$ seqüências como as do Lema 1.5.. Por (b), $\hat{B}_{n_U}^\tau$ é limitado e fechado em E. Mais ainda, $d(\hat{B}_{n_U}^\tau, \partial U)>0$. Para cada $\xi_j$, seja $B_{\xi_j}$ a maior bola aberta com centro $\xi_j$ contida em U. Então $B_{\xi_j}\not\subset \hat{B}_{j_U}^\tau$, pois, caso contrário, como $\hat{B}_{j_U}^\tau$ é fechado em E, teríamos $\overline{B_{\xi_j}}$ contido em U, contradição. Seja $z_j\in B_{\xi_j}-\hat{B}_{j_U}^\tau$. Denotemos por $f_j$ uma função em $H_\tau(U)$ tal que $f_j(z_j)=1$ e $\sup\{|f_j(t)|;t\in B_j\}<1$ (como $z_j\notin \hat{B}_{j_U}^\tau$, existe $g_j\in H_\tau(U)$ tal que $|g_j(z_j)|>\sup\{|g_j(z)|;z\in B_j\}$. Fazendo $f_j=\dfrac{g_j}{g_j(z_j)}$, obtemos o resultado). Substituindo $f_j$ por uma sua potência, é possível considerar $f_j(z_j)=1$ e $\sup\{|f_j(z)|;z\in B_j\}<1/2^j$. Em particular, $f_j$ não é identicamente 1 em U.

Definamos $f=\prod_{j=1}^{\infty}(1-f_j)^j$ (usamos aqui as regras elementares:

i) $\prod_{j=1}^{\infty}(1+a_j)$ é convergente se $\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|<\infty$ e

ii) $\prod_{j=1}^{\infty}(1+\phi_j)$ é uniformemente convergente se $\sum_{j=1}^{\infty}\sup|\phi_j|<\infty$).

Aqui $\phi_j=(1-f_j)^j-1$. Mostremos que $\sum_{j=1}^{\infty}\sup_{B_n}|\phi_j|<\infty$ para cada n. Basta mostrar que $\sum_{j\geq n}\sup_{B_n}|\phi_j|<\infty$, para cada n.

Se $j\geq n$, $B_n\subset B_j$. Logo $\sup_{B_n}|\phi_j|\leq\sup_{B_j}|\phi_j|$. Dado $x\in B_j$,

$$|(1-f_j(x))^j-1|=\left|\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}(-f_j(x))^k-1\right|=\left|\sum_{k=1}^{j}\binom{j}{k}(-f_j(x))^k\right|$$

$$\leq\sum_{k=1}^{j}\binom{j}{k}|f_j(x)|^k\leq\sum_{k=1}^{j}2^j|f_j(x)|^j \quad \left(\text{pois } (1+1)^j=\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}\right)$$

$$<j2^{j-j^2}=j(1/2^j)^{j-1}<j/2^j.$$

Logo $\sup_{B_n}|\phi_j|\leq j/2^j$ e como $\sum_{j=1}^{\infty} j/2^j<\infty$, obtemos o resultado.

O produto infinito converge, então, uniformemente a f em cada $B_n$, portanto em cada $A\in\mathcal{B}_\tau(U)$. Logo $f\in H_\tau(U)$. Por outro lado, f não é identicamente zero em U. Para justificar isto, notemos o seguinte fato: se $0<\theta_h<1$, $\sum_{h=1}^{\infty}\theta_h<\infty$ e se $|z_h|\leq\theta_h$ $(h=1,2,\ldots)$ então os produtos infinitos $\prod_{h=1}^{\infty}(1+z_h)$ e $\prod_{h=1}^{\infty}(1-\theta_h)$ convergem e $|\prod_{h=1}^{\infty}(1+z_h)|\geq\prod_{h=1}^{\infty}(1-\theta_h)>0$. Em virtude disso, vemos que, para todo $s=1,2,\ldots$, temos

$$\inf_{B_s}|\prod_{j=s}^{\infty}(1-f_j)^j|\geq\prod_{j=s}^{\infty}(1-1/2^j)^j>0.$$

De fato, façamos

$$z_1=z_2=\ldots=z_s=1-f_s,\ z_{s+1}=\ldots=z_{2s+1}=1-f_{s+1}$$

e assim por diante e

$$\theta_1=\theta_2=\ldots=\theta_s=1-1/2^s,\ \theta_{s+1}=\ldots=\theta_{2s+1}=1-1/2^{s+1}$$

e assim por diante. Temos agora

$$\prod_{j=s}^{\infty}(1-f_j)^j=\prod_{j=1}^{\infty} z_j \text{ e } \prod_{j=s}^{\infty}(1-1/2^j)^j=\prod_{j=1}^{\infty}\theta_j.$$

Para $j\geq s$, $x\in B_s$,

$$|f_j(x)|<1/2^j, \text{ ou, } |1-f_j(x)-1|<1-(1-1/2^j).$$

Logo

$$\inf_{B_s}|\prod_{j=s}^{\infty}(1-f_j)^j|\geq\prod_{j=s}^{\infty}(1-1/2^j)^j>0.$$

Portanto, se $V=B_\rho(x)$, com $\rho<\tau(x)$, existe s tal que $V\subset B_s$ e

$$\inf\{|\prod_{j=s}^{\infty}(1-f_j(x))^j|;x\in V\}>0.$$

Logo $g=\prod_{j=s}^{\infty}(1-f_j)^j\not\equiv0$ em V e portanto $f=\prod_{j=1}^{s-1}(1-f_j)^j g\not\equiv0$ em U, pois, como U é conexo, temos que $H_\tau(U)$ é um domínio de integridade.

Notemos também que $\bar{d}^k f(z_j)=0$, se $k<j$. De fato,

$$f=\prod_{i=1}^{\infty}(1-f_i)^i=(1-f_j)^j\prod_{i\neq j}(1-f_i)^i=(1-f_j)^j h.$$

Para cada $u\in U$, seja

$$h_u : \lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C}; z_j + \lambda u \in U\} \mapsto f(z_j + \lambda u) \in \mathbb{C}.$$

Temos

$$f(z_j+\lambda u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \hat{d}^k f(z_j)(u)\lambda^k$$

Logo $h_u^{(k)}(0) = \hat{d}^k f(z_j)(u)$. Mas,

$$h_u(\lambda) = [1 - f_j(z_j+\lambda u)]^j \, h(z_j+\lambda u).$$

Portanto, se $k<j$, $h_u^{(k)}(0)=0$, $\forall u \in U$, pois $f_j(z_j)=1$.

Como cada $\xi \in X$ aparece infinitas vezes em $(\xi_n)_1^{\infty}$, segue-se que se $\xi \in X$ e $N$ é um inteiro positivo, existem pontos em $B_\xi$, da forma $z_j$, onde todas as diferenciais de $f$ de ordem $m<N$ se anulam. Logo $f$ não pode ser estendida por uma função holomorfa / numa vizinhança de $B_\xi$. De fato, se $f$ pudesse ser analiticamente/ estendida, $f$ teria todas as suas diferenciais em algum ponto de $\partial B_\xi$ iguais a zero. Então $f$ seria zero em $B_\xi$ e, consequentemente, $f$ seria identicamente nula em $U$.

Suponhamos que existam subconjuntos abertos conexos $U_1$ e $U_2$ de $E$ tais que $U_1 \not\subset U$, $U_1 \cap U \supset U_2 \neq \emptyset$ e que exista $f_1 \in H(U_1)$ tal que $f = f_1$ em $U_2$. Seja $\tilde{U}_2$ a componente conexa de $U \cap U_1$ que contém $U_2$. Seja $\xi \in \partial U \cap U_1 \cap \bar{\tilde{U}}_2$. Se $r>0$ é tal que $B_r(\xi) \subset U_1$, escolhamos $\xi_o \in X \cap B_{r/2}(\xi)$. O raio $\rho$ de $B_{\xi_o}$ é tal que $\rho \leq \|\xi - \xi_o\|$. Portanto $B_{\xi_o} \subset B_r(\xi)$ e $\bar{B}_{\xi_o} \subset B_r(\xi) \subset U_1$, o que é uma contradição, pois $f$ não pode ser estendida analiticamente em uma vizinhança de $B_{\xi_o}$. Assim $f$ é uma função como em (c).

<u>Definição 1.6.</u>- Seja $f \in H(U)$ e $\eta \in \partial U$. $\eta$ é um <u>ponto regular para $f$</u> se existirem subconjuntos abertos conexos $U_1$ e $U_2$

de $E$ com $U\cap U_1\supset U_2\neq\emptyset$; $\eta\in U_1$ e $f_1\in H(U_1)$ tal que $f=f_1$ em $U_2$. $\eta$ é um <u>ponto singular para f</u> se não existirem tais $U_1$ e $U_2$. <u>f é singular em toda fronteira $\partial U$ de U</u> se todo $\eta\in\partial U$ for singular para f. Denotemos por $S(\tau,U)$ o conjunto das $f\in H_\tau(U)$ que são singulares / em toda $\partial U$.

<u>Teorema 1.7.</u>- As seguintes condições são equivalentes:

1) $U$ é um aberto de $\tau$-holomorfia.

2) $S(\tau,U)\neq\emptyset$.

3) $H_\tau(U)-S(\tau,U)$ é de 1a. categoria (no sentido de Baire) em $H_\tau(U)$.

Demonstração. 2)$\Rightarrow$1) é clara.

Suponhamos que $S(\tau,U)=\emptyset$. Então $H_\tau(U)=H_\tau(U)-S(\tau,U)$ é de 1a. categoria, o que contradiz o Teorema de Baire, pois $H_\tau(U)$ é um espaço de Fréchet. Logo 3)$\Rightarrow$2).

Suponhamos agora que $U$ seja um aberto de $\tau$-holomorfia. Sejam $U_1$, $U_2$ subconjuntos abertos conexos de $E$ tais que $U\cap U_1\supset U_2\neq\emptyset$ e $U_1\not\subset U$. Denotemos por $H_\tau(U;U_1;U_2)$ o subespaço vetorial de todas / as $f\in H_\tau(U)$ tais que existe $f_1\in H(U_1)$ tal que $f=f_1$ em $U_2$. Se $m\geq 0$ é um inteiro, seja $H^m_\tau(U;U_1;U_2)$ o conjunto de todas as $f\in H_\tau(U;U_1;U_2)$ para os quais a correspondente $f_1\in H(U_1)$ satisfaz $|f_1|\leq m$ em $U_1$. Temos:

a) $H^m_\tau(U;U_1;U_2)$ é fechado em $H_\tau(U)$. De fato, seja $(f_j)_1^\infty$ uma sequência em $H^m_\tau(U;U_1;U_2)$ convergindo para $f\in H_\tau(U)$. Para cada $f_j$, consideremos a correspondente $f_{j_1}\in H(U_1)$ que é igual a $f_j$ em $U_2$. Por hipótese, $|f_{j_1}|\leq m$ em $U_1$, portanto $\{f_{j_1};j=1,2,\dots\}$ é limitado em $H(U_1)$ relativamente à topologia da convergência uniforme sobre subconjuntos compactos de $U_1$. Pelo Teorema de Montel, esse conjunto é relativamente compacto em $H(U_1)$ e portanto é possível extrair uma subsequência de $(f_{j_1})_1^\infty$ convergindo a $f_o \in H(U_1)$ em $H(U_1)$. Temos que $|f_o| \leq m$ em $U_1$. Além disso, como $f_j = f_{j_1}$ em $U_2$, também $f = f_o$ em $U_2$. Logo $f \in H_\tau^m(U;U_1;U_2)$.

b) $H_\tau(U) - H_\tau^m(U;U_1;U_2)$ é denso em $H_\tau(U)$. De fato, por 1), $H_\tau(U;U_1;U_2)$ é subespaço vetorial próprio de $H_\tau(U)$. Mas num / espaço vetorial topológico, o complementar de um subespaço vetorial próprio é sempre denso. Logo $H_\tau(U) - H_\tau(U;U_1;U_2)$ é denso em $H_\tau(U)$. Como $H_\tau(U) - H_\tau(U;U_1;U_2) \subset H_\tau(U) - H_\tau^m(U;U_1;U_2)$, obtemos b).

Usando-se o fato de que E é separável, mostra-se que $H_\tau(U) - S(\tau,U) = \bigcup_{U_1;U_2} H_\tau(U;U_1;U_2)$ pode ser escrito como uma reunião enumerável de conjuntos $H_\tau^m(U;V_1;V_2)$.

Logo $H_\tau(U) - S(\tau,U)$ é de 1a. categoria.

Teorema 1.8.- As seguintes condições são equivalentes:

(1) Para todo $A$ em $\mathcal{B}_\tau(U)$, $\hat{A}_U^\tau$ é limitado e $d(\hat{A}_U^\tau, \partial U) > 0$.

(2) Para todo subconjunto fechado $X$ de $U$, se toda $f \in H_\tau(U)$ é limitada em $X$, então $X$ é limitado e $d(X, \partial U) > 0$.

Demonstração.- Suponhamos válido (2). Se $A \in \mathcal{B}_\tau(U)$, $\hat{A}_U^\tau$ é fechado em $U$ e toda $f \in H_\tau(U)$ é limitada em $\hat{A}_U^\tau$. Logo, por (2), $\hat{A}_U^\tau$ é limitado e $d(\hat{A}_U^\tau, \partial U) > 0$.

Suponhamos válido (1). Seja $X \subset U$ fechado tal que ou

$d(X,\partial U)=0$ ou $X$ é ilimitado. Seja $A_1\subset A_2\subset\ldots$ uma seqüência de elementos de $\mathcal{B}_\tau(U)$ tal que todo $A\in\mathcal{B}_\tau(U)$ está contido em algum $A_j$. Definamos $B_1=A_1$. Como ou $X$ é ilimitado ou $d(X,\partial U)=0$, temos que $X\not\subset\hat{B}_{1_U}^{\tau}$. Seja $z_1\in X-\hat{B}_{1_U}^{\tau}$ e definamos $B_2=A_2\cup B_{\rho_1}(z_1)$, onde $0<\rho_1<\tau(z_1)$. Como $X\not\subset\hat{B}_{2_U}^{\tau}$, existe $z_2\in X-\hat{B}_{2_U}^{\tau}$. Definamos $B_3=A_3\cup B_{\rho_1}(z_1)\cup B_{\rho_2}(z_2)$, onde $0<\rho_2<\tau(z_2)$ e assim por diante. Obtivemos assim uma seqüência $B_1\subset B_2\subset\ldots$ de elementos de $\mathcal{B}_\tau(U)$, tal que todo $A\in\mathcal{B}_\tau(U)$ está contido em algum $B_j$, e uma seqüência $z_1, z_2,\ldots$ de pontos de $X$ tal que $z_j\notin\hat{B}_{j_U}^{\tau}$ e $z_j\in B_k$ se $k>j$. Escolhamos $f_j\in H_\tau(U)$ tal que

$$|f_j(z_j)|>1>\sup\{|f_j(t)|;t\in B_j\}.$$

Elevando $f_j$ a uma potência suficientemente grande, podemos supor indutivamente que

$$\sup\{|f_j(t)|;t\in B_j\}\leq 1/2^j \text{ e } |f_j(z_j)|\geq\sum_{k=1}^{j-1}|f_k(z_j)|+j.$$

Então

$$f=\sum_{k=1}^{\infty} f_k\in H_\tau(U),$$

pois esta série converge uniformemente em cada $B_j$. Assim

$$f(z_j)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z_j)=f_j(z_j)+\sum_{k=1}^{j-1} f_k(z_j)+\sum_{k=j+1}^{\infty} f_k(z_j)$$

$$\Longrightarrow |f_j(z_j)|\leq|f(z_j)|+\sum_{k=1}^{j-1}|f_k(z_j)|+\sum_{k=j+1}^{\infty}|f_k(z_j)|$$

Como para $k>j$, $z_j\in B_k$, temos:

$$|f_k(z_j)|\leq 1/2^k \text{ se } k>j, \text{ isto é, } \sum_{k>j}|f_k(z_j)|\leq\sum_{k>j}1/2^k=\frac{1}{2^j}$$

e então

$$|f(z_j)|\geq|f_j(z_j)|-\sum_{k=1}^{j-1}|f_k(z_j)|-\sum_{k>j}|f_k(z_j)|\geq j-\frac{1}{2^j}.$$

Portanto

$$|f(z_j)|\to\infty \text{ quando } j\to\infty \text{ e } f \text{ é ilimitada em } X.$$

-------

# CAPÍTULO II

## O TEOREMA DE CARTAN-THULLEN PARA ESPAÇOS DE BANACH

E representará um espaço de Banach complexo com bola unitária $B_1$ e U um subconjunto aberto conexo de E com fronteira não vazia $\partial U$.

Definição 2.1.- $B \subset E$ é U-limitado se B for um subconjunto limitado de E e $d(B, \complement U) > 0$. Notemos que, se E tem dimensão finita, os conjuntos fechados U-limitados são exatamente os subconjuntos compactos de U.

$H_b(U)$ denota a álgebra de todas as funções holomorfas em U que são limitadas em todos os conjuntos U-limitados. Se $B \subset U$, denotamos por $\tilde{B}_U$ (resp. $\hat{B}_{U,b}$) o conjunto de todos $\xi \in U$ tais que

$|f(\xi)| \leq \sup\{|f(x)|; x \in B\}$, para toda $f \in H(U)$ (resp. $H_b(U)$)

e é chamado a envoltória U (resp. $U_b$)-holomorfa de B.

Definição 2.2.- Um subconjunto aberto conexo U de E é dito um domínio de holomorfia (resp. b-domínio de holomorfia) se for impossível encontrar dois subconjuntos abertos conexos $U_1$ e $U_2$ de E satisfazendo as seguintes condições :

(a) $U\cap U_1\supset U_2\neq\emptyset$, $U_1\not\subset U$.

(b) $\forall f\in H(U)$ (resp. $H_b(U)$), $\exists f_1\in H(U_1)$ tal que $f=f_1$ em $U_2$.

<u>Definição 2.3.</u>- Um subconjunto aberto conexo U de E é dito um <u>domínio de existência</u> (resp. <u>b-domínio de existência</u>) se existir $f\in H(U)$ (resp. $H_b(U)$) tal que é impossível encontrar dois subconjuntos abertos conexos $U_1$ e $U_2$ de E satisfazendo as seguintes condições:

(a) $U\cap U_1\supset U_2\neq\emptyset$, $U_1\not\subset U$.

(b) $\exists f_1\in H(U_1)$ tal que $f=f_1$ em $U_2$.

Dado $V\subset(\mathcal{P}(^mE))'$, denotemos por $\|P\|_V=\sup\{|\phi(P)|;\phi\in V\}$, $\forall P\in\mathcal{P}(^mE)$.

<u>Lema 2.4.</u>- Sejam $B\subset U$ e $V\subset(\mathcal{P}(^mE))'$. Então para todo $\xi\in\hat{B}_U$ (resp. $\hat{B}_{U,b}$) temos:

$\|\hat{d}^mf(\xi)\|_V\leqslant\sup\{\|\hat{d}^mf(x)\|_V;x\in B\}$, para todo inteiro m e toda $f\in H(U)$ (resp. $H_b(U)$).

Demonstração. Sejam $\phi\in V$ e $f\in H(U)$ (resp. $H_b(U)$. Então por definição de envoltória U (resp. $U_b$)-holomorfa, temos

$$|\phi(\hat{d}^mf(\xi))|\leqslant\sup\{|\phi(\hat{d}^mf(x))|;x\in B\}\leqslant\sup\{\|\hat{d}^mf(x)\|_V;x\in B\}.$$

Logo

$$\|\hat{d}^mf(\xi)\|_V\leqslant\sup\{\|\hat{d}^mf(x)\|_V;x\in B\}.$$

<u>Lema 2.5.</u>- Sejam $B\subset U$ e $\alpha>0$ tais que $B+\alpha B_1\subset U$. Se $f\in H(U)$ (resp. $H_b(U)$) é limitada em $B+\alpha B_1$, então f é holomorfa (por continuação analítica, se necessário) em $\hat{B}_U+\alpha B_1$ (resp. $\hat{B}_{U,b}+\alpha B_1$) e

$$|f(x+y)|\leq \sup\{|f(w)|;w\in B+\alpha B_1\}\frac{\alpha}{\alpha-\|y\|},$$

onde $x\in\hat{B}_U$ (resp. $\hat{B}_{U,b}$) e $\|y\|<\alpha$.

Demonstração. Dados $x\in B$, $0<\rho<\alpha$, pelas desigualdades de Cauchy, temos:

$$\left\|\frac{1}{m!}\hat{d}^m f(x)\right\| \leq \frac{1}{\rho^m}\sup\{|f(t)|;\|t-x\|=\rho\}$$

$$\leq \frac{1}{\rho^m}\sup\{|f(t)|;\|t-x\|<\alpha\}.$$

Logo

$$\left\|\frac{1}{m!}\hat{d}^m f(x)\right\| \leq \frac{1}{\alpha^m}\sup\{|f(t)|;\|t-x\|<\alpha\},$$

o que acarreta

$$\sup\{\|\frac{1}{m!}\hat{d}^m f(x)\|;x\in B\}\leq\frac{M}{\alpha^m},$$

onde $M=\sup\{|f(x)|;x\in B+\alpha B_1\}$. Pelo Lema 2.4., para todo $x\in\hat{B}_U$ (resp. $\hat{B}_{U,b}$), temos (tomando $V=B_1$):

$$\left\|\frac{\hat{d}^m f(x)}{m!}\right\|\leq\frac{M}{\alpha^m}.$$

A seqüência $\left(\|\frac{1}{m!}\hat{d}^m f(x)\|^{1/m}\right)_1^\infty$ é então limitada e portanto a série de Taylor $f(x+y)=\sum_{m=0}^{\infty}(1/m!)\hat{d}^m f(x)(y)$, $\|y\|<\alpha$ é convergente para todo $x\in\hat{B}_U$ (resp. $\hat{B}_{U,b}$), isto é, f é holomorfa (por continuação analítica, se necessário) em $\hat{B}_U+\alpha B_1$ (resp. $\hat{B}_{U,b}+\alpha B_1$) e

$$|f(x+y)|\leq\sum_{m=0}^{\infty}\|\frac{1}{m!}\hat{d}^m f(x)\|\,\|y\|^m\leq\sum_{m=0}^{\infty}M(\|y\|/\alpha)^m=\frac{M\alpha}{\alpha-\|y\|}$$

para todo $x\in\hat{B}_U$ (resp. $\hat{B}_{U,b}$) e $\|y\|<\alpha$.

<u>Definição 2.6.</u>- Se $\alpha>0$ e $A\subset E$, dizemos que $A+\alpha B_1$ é uma <u>$\alpha$-vizinhança de A</u>.

<u>Lema 2.7.</u>- Seja U um domínio de existência (resp. b-domínio de existência) e seja B um conjunto U-limitado. Se toda $f\in H(U)$ (resp. $H_b(U)$) é limitada em alguma $\alpha(f)$-vizinhança de B, então $\hat{B}_U$ (resp. $\hat{B}_{U,b}$) é U-limitado.

Demonstração. $\hat{B}_U$ (resp. $\hat{B}_{U,b}$) é um subconjunto limitado de E, pois $\hat{B}_U$ (resp. $\hat{B}_{U,b}$) está contido em $\hat{B}$ (a envoltória convexa fechada de B), cuja demonstração é análoga à da Proposição 1.2.. Suponhamos que $d(\hat{B}_U,\complement U)=0$ (resp. $d(\hat{B}_{U,b},\complement U)=0$). Então existe uma seqüência $(\xi_n)_1^\infty$ em $\hat{B}_U$ (resp. $\hat{B}_{U,b}$) tal que $d(\xi_n,\complement U)\to 0$ quando $n\to\infty$. Como cada $f\in H(U)$ (resp. $H_b(U)$) é limitada em uma $\alpha(f)$-vizinhança de B, Lema 2.5. implica que f tem extensão analítica a uma $\alpha(f)$-vizinhança de $\hat{B}_U$ (resp. $\hat{B}_{U,b}$), em particular a uma $\alpha(f)$-vizinhança de cada $\xi_n$. Como U é um domínio de existência (resp. b-domínio de existência) e $d(\xi_n,\complement U)\to 0$ quando $n\to\infty$, temos uma contradição. Logo $d(\hat{B}_U,\complement U)>0$ (resp. $d(\hat{B}_{U,b},\complement U)>0$).

<u>Lema 2.8.</u>- Seja U um b-domínio de holomorfia de E. Se B é um / conjunto U-limitado, então $\hat{B}_{U,b}$ é U-limitado e $d(B,\complement U)=d(\hat{B}_{U,b},\complement U)$.

Demonstração. Como $B\subset\hat{B}_{U,b}$, segue-se que $d(B,\complement U)\geq d(\hat{B}_{U,b},\complement U)$. Suponhamos que $d(B,\complement U)>d(\hat{B}_{U,b},\complement U)$ (*). Escolhamos/ $\xi_1\in\hat{B}_{U,b}$, $\xi_2\in\complement U$, $\varepsilon_0>0$ tais que $(1-\delta)\xi_2\in\complement U$, $\forall|\delta|\leq\varepsilon_0$ (como ocorre

(*), existem $\xi_1 \in \hat{B}_{U,b}$, $\xi_2 \in \complement U$ tais que $\|\xi_2-\xi_1\| < d(B,\complement U)$ e além disso podemos supor $\xi_2 \in \complement \overline{U}$) e $\alpha>0$ tais que $B+\underline{\xi_2-\xi_1}+\alpha B_1 \subset U$ e seja U-limitado, onde $\underline{\xi_2-\xi_1}$ denota a envoltória absolutamente/ convexa de $\xi_2-\xi_1$ (basta tomar $0<\alpha<\frac{1}{2}\left[d(B,\complement U)-\|\xi_2-\xi_1\|\right]$, pois / dados $x\in B$, $y\in \underline{\xi_2-\xi_1}$, $\|z\|<\alpha$, $t\in \complement U$, tem-se:

$$\|x+y+z+t\| \geq \|x-t\|-\|y\|-\|z\| \geq d(B,\complement U)-\|\xi_2-\xi_1\|-\alpha>\alpha>0,$$

o que implica

$$d(B+\underline{\xi_2-\xi_1}+\alpha B_1,\complement U) \geq \alpha>0.$$

Além disso, $B+\underline{\xi_2-\xi_1}+\alpha B_1$ é limitado).

Precisamos, antes de continuar esta demonstração, / do seguinte resultado:

<u>Lema 2.8.1</u>- Nas condições do Lema 2.8., para cada $f\in H_b(U)$ existe $M>0$ tal que

$$\sup\left\{\left\|\frac{1}{m!}\hat{d}^m f(x)\right\|_{B_1+\frac{1}{\alpha}\underline{\xi_2-\xi_1}} ; x\in \hat{B}_{U,b}\right\} \leq \frac{M}{\alpha^m}, \quad m=0,1,\dots$$

Demonstração. Para cada $x\in B$, $t\in B_1$, $u\in \underline{\xi_2-\xi_1}$, $0<\rho<\alpha$, temos:

$$\frac{1}{m!}\hat{d}^m f(x)\left(t+\frac{1}{\alpha}u\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=\rho}\frac{f(x+\lambda t+(\lambda/\alpha)u)}{\lambda^{m+1}}\,d\lambda$$

$$\Longrightarrow \left|\frac{1}{m!}\hat{d}^m f(x)\left(t+\frac{1}{\alpha}u\right)\right| \leq \frac{1}{\rho^m}\sup\left\{\left|f\left(x+\lambda\left(t+\frac{1}{\alpha}u\right)\right)\right| ; |\lambda|=\rho\right\}$$

$$\Longrightarrow \leq \frac{1}{\rho^m}\sup\left\{\left|f\left(x+\lambda\left(t+\frac{1}{\alpha}u\right)\right)\right| ; |\lambda|<\alpha\right\},$$

$$\Longrightarrow \left\|\frac{1}{m!}\hat{d}^m f(x)\right\|_{B_1+\frac{1}{\alpha}\underline{\xi_2-\xi_1}} \leq \frac{1}{\rho^m}\sup\left\{|f(y)| ; y\in x+\alpha B_1+\underline{\xi_2-\xi_1}\right\},$$

$0<\rho<\alpha$.

$$\Longrightarrow \sup\{\|\frac{\hat{d}^m f(x)}{m!}\|_{B_1+\frac{1}{\alpha}\underline{\xi_2-\xi_1}}; x\in B\}\leq\frac{M}{\alpha^m},$$

onde $M=\sup\{|f(y)|; y\in B+\alpha B_1+\underline{\xi_2-\xi_1}\}$ . Pelo Lema 2.4., segue o resultado.

Continuando a demonstração do Lema 2.8., temos que/ se $\alpha_1<\alpha$, $x\in\hat{B}_{U,b}$, $u\in\underline{\xi_2-\xi_1}$ e $t\in B_1$, vem:

$$f(x+\alpha_1\frac{1}{\alpha}u+\alpha_1 t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\hat{d}^n f(x)((\alpha_1/\alpha)u+\alpha_1 t)$$

$$\Rightarrow |f(x+\alpha_1\frac{1}{\alpha}u+\alpha_1 t)|\leq\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_1^n\|\frac{1}{n!}\hat{d}^n f(x)\|_{\frac{1}{\alpha}\underline{\xi_2-\xi_1}+B_1}$$

$$\leq\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_1/\alpha)^n M<\infty,$$

onde a última desigualdade segue do Lema 2.8.1..

Escolhamos $0<\alpha_1<\alpha$ tal que $0<\delta=1-(\alpha_1/\alpha)<\varepsilon_o$ e $\alpha_1>\delta\|\xi_1\|$. Seja

$$U_1=\bigcup_{\alpha_1<\alpha}(\hat{B}_{U,b}+(\alpha_1/\alpha)\underline{\xi_2-\xi_1}+\alpha_1 B_1).$$

Temos que $U_1$ é aberto. Seja $\tilde{U}_1$ a componente conexa de $U_1$ que contém $\xi_1$. $\tilde{U}_1$ é aberto, Sejam $\alpha_1^{(n)}=\alpha-\frac{1}{n}$, $\delta_n=1-(\alpha-\frac{1}{n})/\alpha$. Temos:

$$(1-\delta_n)\xi_2=\xi_1+(1-\delta_n)(\xi_2-\xi_1)-\delta_n\xi_1\in\hat{B}_{U,b}+((\alpha-\frac{1}{n})/\alpha)\underline{\xi_2-\xi_1}+$$
$$+\delta_n\|\xi_1\|B_1.$$

Como $\delta_n\to 0$ e $\alpha-\frac{1}{n}\to\alpha>0$ quando $n\to\infty$, existe $n_o\in\mathbb{N}$ tal que $n\geq n_o$ implica $\delta_n<\varepsilon_o$ e $\delta_n<(\alpha-\frac{1}{n})/\|\xi_1\|$. Provemos que $(1-\delta_n)\xi_2\in\tilde{U}_1$, para $n\geq n_o$ .

Temos:

$$\xi_1+(1-\delta_n)(\xi_2-\xi_1)\in U_1,\ \forall n.$$

Além disso, $\forall\alpha\in[0,1-\delta_n]$, $\alpha(\xi_2-\xi_1)\in\underline{\xi_2-\xi_1}$, isto é,

$$\xi_1+\alpha(\xi_2-\xi_1)\in U_1,\ \forall\alpha\in[0,1-\delta_n].$$

Logo

$$\xi_1+(1-\delta_n)(\xi_2-\xi_1)\in\tilde{U}_1,\ \forall n.$$

Para $n\geq n_o$ e $\lambda\in[-\delta_n,0]$, $\|\lambda\ \xi_1\|=|\lambda|\ \|\xi_1\|\leq\delta_n\|\xi_1\|<\alpha-\frac{1}{n}=\alpha_1{}^{(n)}$.

Logo

$$\xi_1+(1-\delta_n)(\xi_2-\xi_1)+\lambda\xi_1\in U_1,\ \forall\lambda\in[-\delta_n,0],\ n\geq n_o.$$

Como $\xi_1+(1-\delta_n)(\xi_2-\xi_1)\in\tilde{U}_1$, temos

$$(1-\delta_n)\xi_2\in\overset{\approx}{U}_1.$$

Mas $(1-\delta_n)\xi_2\in\complement U$, pois $\delta_n<\varepsilon_o$. Temos aí uma contradição à hipótese sobre $U$.

Nos dois próximos lemas, denotaremos por $\tau_o$ a topologia compacto-aberta em $H(U)$ e por $\tau$ a topologia bornológica associada a $\tau_o$. Como $(H(U),\tau_o)$ é completo, prova-se que $(H(U),\tau)$ é tonelado.

Lema 2.9.- Seja $x_n\in U$ para $n=1,2,\ldots$ e suponhamos que $\sup_n|f(x_n)|<\infty$ para toda $f\in H(U)$. Então $p(f)=\sup_n|f(x_n)|$ define uma semi-norma contínua em $(H(U),\tau\ )$.

Demonstração. Seja $B_p=\{f\in H(U);p(f)\leq 1\}$. Temos:

a) $B_p$ é absorvente. De fato, dado $f\in H(U)$, existe $\lambda>0$ tal que $p(f)\leq\lambda\Rightarrow p(\frac{1}{\lambda}f)\leq 1\Rightarrow\frac{1}{\lambda}f\in B_p\Rightarrow f\in\lambda B_p$.

b) $B_p=\bigcap_n \{f\in H(U); |f(x_n)|\leq 1\}$. Logo $B_p$ é fechado.

c) $B_p$ é absolutamente convexo. De fato, dados $f,g\in H(U)$ tais que $|f(x_n)|\leq 1$, $|g(x_n)|\leq 1$, para todo $n$, e dados $\lambda,\mu$ tais que $|\lambda|+|\mu|\leq 1$, temos:

$|(\lambda f+\mu g)(x_n)|\leq|\lambda||f(x_n)|+|\mu||g(x_n)|\leq|\lambda|+|\mu|\leq 1$, para todo $n$. Logo $\lambda f+\mu g\in B_p$.

Como $(H(U),\tau)$ é tonelado e $B_p$ é um tonel, segue-se que $B_p$ é uma vizinhança de zero em $(H(U),\tau)$. Logo $p$ é contínua em $(H(U),\tau)$.

<u>Lema 2.10.</u>- Seja $p$ uma semi-norma contínua em $(H(U),\tau)$ e seja $(V_n)_1^\infty$ uma seqüência crescente de subconjuntos abertos de $U$ tal que $\bigcup_{n=1}^\infty V_n=U$. Então existem um inteiro positivo $n_o$ e $c>0$ tais que

$$p(f)\leq c \sup\{|f(x)|; x\in V_{n_o}\}.$$

Demonstração. Suponhamos que o resultado não seja válido. Então, para cada inteiro positivo $n$ existe $g_n\in H(U)$ tal que

$$p(g_n)>n^2 \sup\{|g_n(x)|; x\in V_n\}.$$

Temos, para todo $n$, $\sup\{|g_n(x)|; x\in V_n\}>0$, pois se, para algum $n_o$, tivéssemos $g_{n_o}\equiv 0$ em $V_{n_o}$, como $U$ é conexo, $g_{n_o}$ seria identicamente nula, contradizendo o fato de que $p(g_{n_o})>0$. Seja

$$f_n=\frac{1}{n \sup\{|g_n(x)|; x\in V_n\}}\, g_n\in H(U).$$

Então $p(f_n)>n$ e $\sup\{|f(x_n)|; x_n\in V_n\}\leq\frac{1}{n}$. A sequência $(f_n)_1^\infty$ é uma sub conjunto limitado de $(H(U),\tau_o)$, pois, dado um subconjunto compacto K de U, pela hipótese sobre a sequência $(V_n)_1^\infty$, existe $n_o$ inteiro positivo tal que $K\subset V_{n_o}$. Logo

$$\sup\{|f_n(x)|;x\in K,n\geq n_o\}\leq\sup\{|f_n(x)|;x\in V_{n_o},\ n\geq n_o\}$$

$$\leq\sup\{|f_n(x)|;x\in V_n,n\geq n_o\}\leq\frac{1}{n}\leq\frac{1}{n_o}$$

Além disso, dado $n<n_o$, como K é compacto e $f_n$ é contínua, temos $\sup\{|f_n(x)|;x\in K\}\leq M_n$. Logo $\sup\{|f_n(x)|;x\in K,n<n_o\}\leq M=\max\{M_1,\ldots, M_{n_o-1}\}$. Tomando $\lambda=\min\{n_o,\frac{1}{M}\}$, temos $\sup_n\{|f_n(x)|;x\in K\}\leq\frac{1}{\lambda}$.

Portanto $(f_n)_1^\infty$ é limitada em $(H(U),\tau)$; juntamente com o fato / de que $p(f_n)\to\infty$ quando $n\to\infty$, chegamos a uma contradição.

<u>Teorema 2.11.</u> (<u>Teorema de Cartan-Thullen I</u>) - Seja U um subconjunto aberto conexo do espaço de Banach E. Para as propriedades enumeradas abaixo, temos:

$(1)\Rightarrow(2)\Leftrightarrow(3)\Leftrightarrow(4)\Leftrightarrow(5)\Leftrightarrow(6)$ e $(6)\Rightarrow(1)$, se E for separável.

(1) U é um b-domínio de existência.

(2) Para cada $\xi\in\partial U$, existe $f\in H_b(U)$ com a seguinte propriedade: dados uma vizinhança V de $\xi$, um subconjunto aberto conexo não vazio, $U_2$, de U, tais que $U_2\subset V\cap U$ e que $\xi$ pertença à fronteira da componente conexa de $V\cap U$ contendo $U_2$, não existe $f_1\in H(V)$ tal que $f=f_1$ em $U_2$.

(3) U é um b-domínio de holomorfia.

(4) Se $B$ é U-limitado, então $\hat{B}_{U,b}$ é U-limitado e $d(B,\complement U)=d(\hat{B}_{U,b},\complement U)$.

(5) Se $B$ é U-limitado, então $\hat{B}_{U,b}$ é U-limitado.

(6) Para cada sequência $(\xi_n)_1^\infty$ de elementos de $U$ tal que $\xi_n \to \xi \in \partial U$ quando $n\to\infty$, existe $f\in H_b(U)$ tal que $\sup_n |f(\xi_n)|=\infty$.

Demonstração. $(1)\Rightarrow(2)\Rightarrow(3)$, $(4)\Rightarrow(5)$ e $(6)\Rightarrow(2)$ são claros.

Pelo Lema 2.8., temos $(3)\Rightarrow(4)$.

Suponhamos que (5) valha e (6) não. Então existe uma seqüência $(\xi_n)_1^\infty$ de elementos de $U$, $\xi_n\to\xi\in\partial U$ quando $n\to\infty$ tal que $\sup_n |f(\xi_n)|<\infty$, para toda $f\in H_b(U)$. $H_b(U)$, munido da topologia da convergência uniforme sobre conjuntos U-limitados, é um espaço de Fréchet, logo, tonelado. Demonstração idêntica à do Lema 2.9. nos mostra que $p(f)=\sup_n |f(\xi_n)|$ define uma semi-norma contínua em $H_b(U)$. Logo existem $B\subset U$ U-limitado e $c>0$ tais que

$$p(f)\leq c\ p_B(f),\quad f\in H_b(U),\ \text{onde}\ p_B(f)=\sup\{|f(x)|;x\in B\}.$$

Como $H_b(U)$ é uma álgebra, $c$ pode ser tomado igual a 1. Logo

$$\sup_n |f(\xi_n)|\leq \sup\{|f(x)|;x\in B\},\quad \forall f\in H_b(U),\ \text{isto é},$$

$\xi_n\in\hat{B}_{U,b}$, para todo $n$, contradizendo o fato de $\hat{B}_{U,b}$ ser U-limitado, pois $d(\{\xi_n;n\in N\},\complement U)=0$.

Mostremos que $(4)\Rightarrow(1)$ se $E$ for separável.

Sendo $E$ separável, $U$ contém um subconjunto enumerável denso $M$. Seja $(\xi_n)_1^\infty$ uma seqüência de elementos de $M$ contendo cada ponto de $M$ infinitas vezes. Para cada $\xi_n$, seja $A_n$ a bola de centro $\xi_n$ e raio $d(\xi_n,\complement U)$. Como (4) vale, podemos construir por indução uma seqüência $(B_n)_2^\infty$ de conjuntos U-limitados e uma seqüência $(z_n)_2^\infty$ de pontos de $U$ com as seguintes propriedades -

des:

(1) $B_2=\xi_2=z_2$.

(2) $z_{n+1}\in A_n\cap\complement\hat{B}_{n_{U,b}}$, $z_{n+1}\in B_{n+1}$;

(3) $(B_n)_2^{\infty}$ é uma seqüência crescente e cada conjunto U-limitado está contido em algum $B_n$.

Esta construção é feita do seguinte modo: suponhamos construídos $B_2,\ldots,B_n$, $z_2,\ldots,z_n$. Como $d(A_n,\complement U)=0$ e $d(\hat{B}_{n_{U,b}},\complement U)>0$, temos $A_n\not\subset\hat{B}_{n_{U,b}}$. Logo existe $z_{n+1}\in A_n\cap\complement\hat{B}_{n_{U,b}}$. Sejam $\delta_{n+1}=d(z_{n+1},\complement U)$ e $C_{n+1}=\{x;d(x,\complement U)\geq \min\{\delta_{n+1},\frac{1}{n+1}, d(B_n,\complement U)\}$ e $B_{n+1}=C_{n+1}\cap B_{r_{n+1}}(0)$, onde $r_{n+1}=\max\{n+1,\delta(B_n\cup\{0\})+\frac{1}{n+1},\delta(A_n\cup\{0\})+\frac{1}{n+1}\}$. Então

(a) $z_{n+1}\in B_{n+1}$

(b) $(B_n)_2^{\infty}$ é uma seqüência crescente, pois se $x\in B_n$, $d(x,\complement U)\geq d(B_n,\complement U)$. Logo $x\in C_{n+1}$. Além disso, $\|x\|\leq\delta(B_n\cup\{0\})$ $<\delta(B_n\cup\{0\})+\frac{1}{n+1}\leq r_{n+1}$. Logo $x\in B_{n+1}$.

(c) Dado $B$ um conjunto U-limitado, existe $r>0$ tal que $B\subset B_r(0)$. Existe $n_o\in\mathbb{N}$ tal que $r\leq n_o$. Logo $B\subset B_{r_{n_o}}(0)$. Também / $d(B,\complement U)>0$. Logo existe $n_1\in\mathbb{N}$ tal que $d(B,\complement U)\geq\frac{1}{n_1}$, isto é, $B\subset C_{n_1}$. Tomando $n_2=\min\{n_o,n_1\}$, temos $B\subset B_{n_2}$.

Como $z_{n+1}\notin\hat{B}_{n_{U,b}}$, existe $f_n\in H_b(U)$ tal que

$|f_n(z_{n+1})|>1>\sup\{|f_n(x)|;x\in B_n\}$.

Substituindo $f_n$ por uma sua potência suficientemente grande, podemos supor que

$$|f_n(z_{n+1})|>2^n+|\sum_{j=2}^{n-1} f_j(z_{n+1})| \text{ e } \sup\{|f_n(x)|;x\in B_n\}<\frac{1}{2^n}.$$

Seja $f=\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Como $f_n\in H_b(U)$, para todo n, e

$$\sum_{n>m} \|f_n\|_{B_m}\leq \sum_{n>m} \|f_n\|_{B_n}< \sum_{n>m} \frac{1}{2^n}<\infty,$$

para todo m, temos $f\in H_b(U)$. Também

$$|f(z_n)|=|f_{n-1}(z_n)+\sum_{j=1}^{n-2} f_j(z_n)+\sum_{j=n}^{\infty} f_j(z_n)|$$

$$\geq|f_{n-1}(z_n)|-|\sum_{j=1}^{n-2} f_j(z_n)|-|\sum_{j=n}^{\infty} f_j(z_n)|$$

$$>2^{n-1}-|\sum_{j=n}^{\infty} f_j(z_n)|\geq 2^{n-1}-\sum_{j=n}^{\infty} |f_j(z_n)| \qquad (1)$$

Como $z_n\in B_j$, para $j\geq n$, temos $|f_j(z_n)|<\frac{1}{2^j}$, $\forall j\geq n$. Logo

$$(1)\geq 2^{n-1}-\sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{2^j}=2^{n-1}-\frac{1}{2^{n-1}}\geq 2^{n-2}$$

Logo $|f(z_n)|\to\infty$ quando $n\to\infty$.

Dados $\xi\in\partial U$ e $\varepsilon>0$, existe $\xi_o\in U$ tal que $\|\xi-\xi_o\|<\varepsilon/4$. Existe também $\eta\in M$ tal que $\|\eta-\xi_o\|<\varepsilon/4$, pois $M$ é denso em $U$. Logo, $\|\xi-\eta\|<\varepsilon/2$. Como $\eta\in M$, existe uma subsequência constante $(\xi_{n_k})_1^{\infty}$ / de $(\xi_n)_1^{\infty}$ idêntica a $\eta$.

Temos $z_{n_k+1}\in A_{n_k}$. Logo

$$\|z_{n_k+1}-\xi_{n_k}\|<d(\xi_{n_k},\complement U)\leq\|\xi_{n_k}-\xi\|=\|\eta-\xi\|<\varepsilon/2, \text{ para todo } k.$$

Portanto

$$\|z_{n_k+1}-\xi\|<\varepsilon,\ \forall k \text{ e } |f(z_{n_k})|\to\infty \text{ quando } k\to\infty.$$

Logo

$$\sup\{|f(x)|; x\in\xi+\varepsilon B_1\}\geq \sup_k |f(z_{n_k})|=\infty.$$

Assim, f não possui extensão holomorfa a um subconjunto de E que contenha U propriamente.

A. Hirschowitz dá em [6] um exemplo de um espaço de Banach complexo cuja bola unitária não é domínio de existência de uma função holomorfa complexa. Como a bola unitária satisfaz à condição (5) do Teorema 2.11., fica claro que a implicação (5)⇒(1) não vale se E deixar de ser separável.

Provaremos agora alguns resultados para H(U) semelhantes ao Teorema 2.11.,

Teorema 2.12. (Teorema de Cartan-Thullen II) - Seja U um subconjunto aberto conexo do espaço de Banach separável E. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) U é um domínio de existência.

(2) Existe uma sequência crescente de conjuntos U-limitados, $(B_n)_2^{\infty}$, tal que $B_n=\hat{B}_{n_U}$ e todo conjunto compacto está contido no interior de algum $B_n$.

Demonstração. Suponhamos válido (1). Existe $f\in H(U)$ que tem U como seu domínio natural de existência. Para cada subconjunto compacto K de U, escolhamos $\alpha(K)>0$ tal que f é limitada em $K+2\alpha(K)B_1$. Os conjuntos $K+\alpha(K)B_1$ cobrem U, quando K percorre os subconjuntos compactos de U.

Como $E$ é separável, podemos escolher uma sequência $(K_n)_2^\infty$ de subconjuntos compactos de $U$ tal que $U=\bigcup_{n=2}^{\infty}(K_n+\alpha(K_n)B_1)$. Seja $\beta_n=\inf\{\alpha(K_i);i\leq n\}$ e definamos $B_n=\bigcup_{i=2}^{n}(K_i+\alpha(K_i)B_1)$. Então

$(B_n)_2^\infty$ é uma sequência crescente de subconjuntos $U$-limitados (pois $K_i+2\alpha(K_i)B_1\subset U$ implica $d(K_i+\alpha(K_i)B_1,\complement U)\geq\alpha(K_i)>0$, $\forall i$) e $f$ é limitada em $B_n+\beta_nB_1$ (pois $B_n+\beta_nB_1=\bigcup_{i=2}^{n}(K_i+\alpha(K_i)B_1)+\beta_nB_1\subset$

$\subset\bigcup_{i=2}^{n}K_i+(\alpha(K_i)+\beta_n)B_1\subset\bigcup_{i=2}^{n}K_i+2\alpha(K_i)B_1)$. Pelo Lema 2.5., segue-se

que $f$ é holomorfa, por continuação analítica, se necessário, em $\hat{B}_{n_U}+\beta_nB_1$. Como $f$ tem $U$ por domínio natural de existência,

$\hat{B}_{n_U}+\beta_nB_1\subset U$, ou seja, $d(\hat{B}_{n_U},\complement U)\geq\beta_n>0$. Isto, junto com o fato de $\hat{B}_{n_U}$ ser limitado (pois $B$ é limitado), resulta que $\hat{B}_{n_U}$ é $U$-limitado. Além disso, cada compacto está contido em algum $B_n$ pois como $U=\bigcup_{n=2}^{\infty}B_n$ e cada $B_n$ é aberto, existem $n_1<n_2<\dots<n_k$ tais que $K\subset\bigcup_{i=2}^{k}B_{n_i}=B_{n_k}$.

Fazendo $C_n=\hat{B}_{n_U}$, obtemos $(C_n)_2^\infty$ satisfazendo as condições requeridas:

a) $(C_n)_2^\infty$ é uma sequência crescente, pois $(B_n)_2^\infty$ o é.

b) $K\subset B_n\subset \operatorname{Int}\hat{B}_{n_U}$, para algum $n$.

c) $C_n$ é $U$-limitado.

d) $\hat{C}_{n_U}=\widehat{\hat{B}_{n_U}}_U=\hat{B}_{n_U}=C_n$.

A prova de 2)$\Rightarrow$1) é semelhante à de 4)$\Rightarrow$1) do teore ma anterior. Seja $(B_n)_2^\infty$ a seqüência de conjuntos U-limitados dada por hipótese. Seja $M$ um subconjunto enumerável denso em $U$ e tomemos $(\xi_n)_2^\infty$ como uma seqüência de elementos de $M$ contendo cada ponto de $M$ infinitas vezes. Para cada $\xi_n$, seja $A_n$ a bola aberta de centro $\xi_n$ e raio $d(\xi_n, \complement U)$. Seja $C_2 = B_2$ e escolhamos / $z_2 \in A_2 \cap \complement B_2$. Suponhamos que $C_2, \ldots, C_n$ e $z_2, \ldots, z_n$ tenham sido escolhidos. Escolhamos $k_{n+1} \in \mathbb{N}$ tal que $z_n \in B_{k_{n+1}}$, $C_n \subset B_{k_{n+1}}$. Seja / $C_{n+1} = B_{k_{n+1}}$ e escolhamos $z_{n+1} \in A_{n+1} \cap \complement C_{n+1}$.

Para cada $n$, existe $f_n \in H(U)$ tal que $\sup\{|f_n(x)|; x \in C_n\} < \frac{1}{2^n}$ e $|f_n(z_n)| > 2^n + |\sum_{j=2}^{n-1} f_j(z_n)|$. A função $f = \sum_{n=2}^{\infty} f_n \in H(U)$ e tem $U$ como domínio natural de existência.

O mesmo exemplo de Hirschowitz citado no Teorema 2.11 mostra que a condição de separabilidade é essencial no Teorema 2.12..

<u>Teorema 2.13</u>.(<u>Teorema de Cartan-Thullen III</u>)- Seja $U$ um subconjunto aberto conexo de um espaço de Banach $E$. As seguintes condições são equivalentes:

(I) Para cada $\xi \in \partial U$ existe $f \in H(U)$ com a seguinte propriedade: dados uma vizinhança $V$ de $\xi$ e um subconjunto aberto / conexo, não vazio, $U_2$, de $U$, tais que $U_2 \subset V \cap U$ e tal que $\xi$ pertença à fronteira da componente conexa de $V \cap U$ contendo $U_2$, não existe $f_1 \in H(V)$ tal que $f_1 = f$ em $U_2$.

(2) Para cada seqüência $(\xi_n)_1^\infty$ de elementos de $U$, que converge a algum ponto de $\partial U$, existe $f \in H(U)$ tal que $\sup_n |f(\xi_n)| = \infty$.

Demonstração. 2)$\Rightarrow$1) é claro.

Suponhamos, por absurdo, que exista $(\xi_n)_1^\infty$ seqüência de elementos de $U$ tal que $\xi_n \to \xi \in \partial U$ e $\sup_n |f(\xi_n)| < \infty$, para toda $f \in H(U)$. Pelo Lema 2.9., $p(f) = \sup_n |f(\xi_n)|$ define uma semi-norma contínua em $(H(U), \tau\ )$.

Seja $f \in H(U)$ escolhida arbitrariamente. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sejam

$$U_n = \{x; |f(x)| < n\} \text{ e } V_n = \{x \in U_n; d(x, \partial U) > \frac{1}{n}\}.$$

$(V_n)_1^\infty$ é uma seqüência crescente de abertos de $U$ e $\bigcup_{n=1}^\infty V_n = U$. Pelo Lema 2.10, existem $n_o \in \mathbb{N}$ e $c > 0$ tais que

$$p(f) = \sup_n |f(\xi_n)| \leq c \ \sup\{|f(x)|; x \in V_{n_o}\}.$$

Como $H(U)$ é uma álgebra, podemos tomar $c=1$ e portanto $\xi_n \in \hat{V}_{n_{o_U}}$, $\forall n$. Pela escolha dos $V_n$'s, $V_{n_o} + \frac{1}{n_o} B_1 \subset U_{n_o}$. Logo, para todo $x \in V_{n_o} + \frac{1}{n_o} B_1$, $|f(x)| < n_o$, isto é, $f$ é limitada em $V_{n_o} + \frac{1}{n_o} B_1$. Lema 2.5. implica que $f$ pode ser estendida analiticamente em $\hat{V}_{n_{o_U}} + \frac{1}{n_o} B_1$.

Como $(\xi_n)_1^\infty \subset \hat{V}_{n_{o_U}}$, $f$ pode ser estendida analiticamente numa $\frac{1}{n_o}$ - vizinhança de cada $\xi_n$, e portanto em alguma vizinhança de $\xi$.

## CAPITULO III

## SUBCONJUNTOS LIMITANTES DE UM ESPAÇO DE BANACH

Definição 3.1.- Um subconjunto fechado limitado, A, de um espaço de Banach complexo, E, é dito limitante, se toda função complexa holomorfa em E for limitada em A.

Veremos no Capítulo IV que, para espaços fracamente seqüencialmente compactos (em particular para espaços separáveis), os subconjuntos limitantes são precisamente os subconjuntos compactos. Neste capítulo vamos dar um exemplo de espaço de Banach onde existe um conjunto limitante não compacto.

Proposição 3.1.2.- Seja B um subconjunto limitante de E. Então $p(f)=\sup\{|f(x)|;x\in B\}$ define uma semi-norma contínua em $(H(E),\tau)$.

Demonstração. Análoga à do Lema 2.9..

Proposição 3.1.3.- Um subconjunto fechado B de E é limitante se, e somente se, para cada $f\in H(E)$,

$$\lim_{n\to\infty} \sup \left\|\frac{\hat{d}^n f(0)}{n!}\right\|_B^{\frac{1}{n}} = 0.$$

$\hat{\mathcal{K}}$ denotará o conjunto de todos os subconjuntos compactos absolutamente convexos de E e $c_0^+$ o conjunto de todas as seqüências de números reais positivos que tendem a zero no infinito.

Lema 3.1.4.- A seqüência $(P_n)_0^\infty$ (onde $P_n \in \mathcal{P}(^nE)$) define a série de Taylor de um elemento de H(E) (ou, $f=\sum_{n=0}^{\infty} P_n \in$ H(E)) se, e somente se, para cada $K\in\hat{\mathcal{K}}$ e cada seqüência $(\alpha_n)_0^\infty \in c_0^+$ temos $\lim\limits_{n\to\infty} \sup \|P_n\|_{K+\alpha_n B_1}^{1/n}=0$.

Demonstração. Seja $f=\sum_{n=0}^{\infty} P_n \in H(E)$. Sejam dados $K\in\hat{\mathcal{K}}$ e $(\alpha_n)_0^\infty \in c_0^+$.

$$\|P_m\|_{K+\alpha_m B_1} = \sup\{|P(x)|; x\in K+\alpha_m B_1\}$$

$$= \sup\{\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=\rho} \frac{f(\lambda x)}{\lambda^{m+1}}\, d\lambda\right|; x\in K+\alpha_m B_1\},\ \forall \rho>0.$$

$$\Rightarrow \|P_m\|_{K+\alpha_m B_1} \leq \frac{1}{\rho^m} \sup\{|f(x)|; x\in\rho K+\rho\alpha_m B_1\},\ \forall\rho>0.$$

Seja $\rho>0$ arbitrariamente escolhido. Então $\rho K\in\hat{\mathcal{K}}$ e / portanto existe uma vizinhança V de $\rho K$ tal que f é limitada em V. Também existe $\lambda>0$ tal que $\rho K+\lambda B_1\subset V$. Como $\rho\alpha_m\to 0$ quando $m\to\infty$, existe $m_0\in\mathbb{N}$ tal que $m\geq m_0$ implica $\rho\alpha_m<\lambda$. Logo $\rho K+\rho\alpha_m\subset V$, para $m\geq m_0$. Portanto

$$\|P_m\|_{K+\alpha_m B_1} \leq \frac{M}{\rho^m},\ \text{onde}\ M=\sup\{|f(x)|;\ x\in\rho K+\rho\alpha_m B_1\}<\infty\ ,$$

para $m\geq m_0$. Temos assim

$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\|P_m\|_{K+\alpha_m B_1}^{1/m} \leq \frac{1}{\rho}$. Como $\rho>0$ foi escolhido arbi -

trariamente, $\lim\limits_{m\to\infty} \sup \|P_m\|_{K+\alpha_m B_1}^{1/m} = 0$.

Precisamos, agora, do seguinte

<u>Lema 3.1.4.1.</u>- Nas condições do Lema 3.1.4., se para cada $K \in \hat{\mathcal{K}}$ e cada sequência $(\alpha_n)_0^\infty \in c_0^+$ temos

$$\lim_{n\to\infty} \sup \|P_n\|_{K+\alpha_n B_1}^{1/n} = 0,$$

então existe $\delta > 0$ tal que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|P_n\|_{K+\delta B_1} < \infty$.

Demonstração. Suponhamos que o resultado não seja válido. Então existe $K \in \hat{\mathcal{K}}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$, temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|P_n\|_{K+\varepsilon B_1} = \infty.$$

Seja $\varepsilon = 1$. Então $\lim\limits_{n\to\infty} \sup \|P_n\|_{K+ B_1}^{1/n} \geq 1$. Escolhamos $n_1 \geq 1$ tal que $\|P_{n_1}\|_{K+B_1}^{1/n_1} \geq \frac{1}{2}$. Por indução, escolhamos $n_k > n_{k-1}$ tal que

$$\|P_{n_k}\|_{K+\frac{1}{k}B_1}^{1/n_k} \geq \frac{1}{2}.$$

Defina

$$\alpha_k = \begin{cases} 1 & \text{para } n \leq n_1 \\ \frac{1}{k} & \text{para } n_{k-1} < n \leq n_K. \end{cases}$$

Então $(\alpha_n)_0^\infty \in c_0^+$, mas por construção, $\lim\limits_{n\to\infty} \sup \|P_n\|_{K+\alpha_n B_1}^{1/n} \geq \frac{1}{2}$, contradição.

Continuando a demonstração do Lema 3.1.4., mostre -

mos que $f=\sum_{m=0}^{\infty} P_m$ é holomorfa em todo $x\in E$. Seja $x$ arbitrariamente escolhido e seja $X$ a envoltória absolutamente convexa de $x$. Então $X\in\hat{\mathcal{K}}$ e, por hipótese, existe $\delta>0$ tal que $\sum\|P_n\|_{X+\delta B_1}<\infty$. Logo $\limsup_{m\to\infty}\|P_m\|_{X+\delta B_1}^{1/m}\leq 1$. Assim, $f$ é holomorfa em $X+\delta B_1$, em particular, é uma função holomorfa em $x$.

Portanto $\sum P_n\in H(E)$.

<u>Lema 3.1.5.</u>- Seja $f=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\hat{d}^n f(0)}{n!}\in H(E)$ e seja $(\beta_n)_0^{\infty}$ uma seqüência de números positivos tal que $d=\sup_n\beta_n^{1/n}<\infty$. Então $g=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n\frac{\hat{d}^n f(0)}{n!}\in H(E)$.

Demonstração. Pelo Lema 3.1.4., é suficiente provar que, para cada $K\in\hat{\mathcal{K}}$ e $(\alpha_n)_0^{\infty}\in c_o^+$, tem-se

$$\lim_{n\to\infty}\sup\left\|\beta_n\frac{\hat{d}^n f(0)}{n!}\right\|_{K+\alpha_n B_1}^{1/n}=0.$$

Como $f\in H(E)$, temos, para todo $K\in\hat{\mathcal{K}}$ e $(\alpha_n)_0^{\infty}\in c_o^+$, que

$$\lim_{n\to\infty}\sup\left\|\frac{\hat{d}^n f(0)}{n!}\right\|_{K+\alpha_n B_1}^{1/n}=0.$$

Sendo $\sup_n\beta_n^{1/n}<\infty$, temos:

$$\lim_{n\to\infty}\sup\left\|\beta_n\frac{\hat{d}^n f(0)}{n!}\right\|_{K+\alpha_n B_1}^{1/n}\leq\sup_n\beta_n^{1/n}\lim_{n\to\infty}\sup\left\|\frac{\hat{d}^n f(0)}{n!}\right\|_{K+\alpha_n B_1}^{1/n}=0$$

<u>Definição 3.1.6.</u>- Uma <u>semi-norma</u> $p$ em $H(E)$ é <u>portada por $K\in\hat{\mathcal{K}}$</u> se para cada $\varepsilon>0$ existir $c(\varepsilon)>0$ tal que

$$p(f) \leq c(\varepsilon) \sum_{m=0}^{\infty} \left\| \frac{\hat{d}^m f(0)}{m!} \right\|_{K+\varepsilon B_1}.$$

Denotaremos por $\tau_\omega$ a topologia em $H(E)$ gerada por todas as semi-normas portadas por algum elemento de $\hat{\mathcal{K}}$ e por $\tau_1$ a topologia bornológica associada a $\tau_\omega$.

<u>Lema 3.1.7.</u>- Seja p uma semi-norma contínua em $(H(E),\tau_1)$ e seja $f \in H(E)$. Então

$$\lim_{n\to\infty} p\left(\frac{\hat{d}^n f(0)}{n!}\right)^{1/n} = 0.$$

Demonstração. Seja $(\beta_n)_0^\infty$ uma seqüência de números positivos tal que $\sup_n \beta_n^{1/n} < \infty$. Então pelo Lema 3.1.5.,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \frac{\hat{d}^n f(0)}{n!} \in H(E).$$

Seja $q(g) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{\hat{d}^n g(0)}{n!} \right\|_{K+\alpha_n B_1}$ para todo $g \in H(E)$, onde $K \in \hat{\mathcal{K}}$ e $(\alpha_n)_0^\infty \in c_0^+$. Temos:

$$q\left(\frac{\hat{d}^n g(0)}{n!}\right) = \left\| \frac{\hat{d}^n g(0)}{n!} \right\|_{K+\alpha_n B_1} \to 0 \text{ quando } n\to\infty, \text{ para toda } g \in H(E)$$

$$\Longrightarrow \frac{\hat{d}^n g(0)}{n!} \to 0 \text{ em } (H(E),\tau_\omega).$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{\hat{d}^n g(0)}{n!}\right)_0^\infty \text{ é limitada em } (H(E),\tau_\omega) \text{ e portanto em } (H(E),\tau_1)$$

$$\Longrightarrow \left\{\beta_n \frac{\hat{d}^n g(0)}{n!} ; n \in N\right\} \text{ é um subconjunto limitado em } (H(E),\tau_1),$$

para toda seqüência $(\beta_n)_0^\infty$ tal que $\sup_n \beta_n^{1/n} < \infty$ (*).

Suponha que $p\left(\frac{\hat{d}^n f(0)}{n!}\right)^{1/n} \not\to 0$ quando $n\to\infty$. Então existe /

$\delta>0$ e uma subseqüência $(n_j)_1^\infty$ tal que

$$p\left(\frac{\hat{d}^{n_j} f(0)}{n_j!}\right)^{1/n_j} \geq \delta,\ \forall j.$$

Seja $\beta_n=(\frac{2}{\delta})^n$. Então

$$p\left(\beta_{n_j}\frac{\hat{d}^{n_j} f(0)}{n_j!}\right) \geq \left(\frac{2}{\delta}\right)^{n_j} \delta^{n_j}=2^{n_j}.$$

Portanto

$$\sup_n\ p\left(\beta_n\frac{\hat{d}^n f(0)}{n!}\right)=\infty,$$ o que contradiz (**).

Logo

$$\lim_{n\to\infty} p\left(\frac{\hat{d}^n f(0)}{n!}\right)^{1/n}=0$$

Demonstração da Proposição 3.1.3.. Dado $B$ um subconjunto limitante,

$p(f)=\sup\{|f(x)|;x\in B\}$ define uma semi-norma contínua em $(H(E),\tau_1)$, pois $(H(E),\tau_1)$ é um espaço tonelado. Pelo Lema 3.1.7.,

$$\lim_{n\to\infty} p\left(\frac{\hat{d}^n f(0)}{n!}\right)^{1/n}=0,$$

isto é,

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sup\left\{\left|\frac{\hat{d}^n f(0)}{n!}(x)\right|;x\in B\right\}\right]^{1/n}=0.$$

Logo

$$\lim_{n\to\infty}\sup\left\|\frac{\hat{d}^n f(0)}{n!}\right\|_B^{1/n}=0.$$

Reciprocamente, suponhamos que, para cada $f\in H(E)$, tenhamos

$$\lim_{n\to\infty}\sup\left\|\frac{\hat{d}^n f(0)}{n!}\right\|_B^{1/n}=0,$$

onde $B$ é um subconjunto fechado de $E$. Então para todo $\varepsilon>0$, existe $c>0$ tal que

$$\left\|\frac{\hat{d}^n f(0)}{n!}\right\|_B^{1/n} < c\varepsilon^n, \ \forall f\in H(E), \ \forall n.$$

Logo

$$\sup\{|f(t)|; t\in B\} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sup\{|\frac{\hat{d}^n f(0)}{n!}(t)|; t\in B\} \leq \sum_{n=0}^{\infty} c\varepsilon^n,$$

$\forall f\in H(E)$. Tomando $\varepsilon<1$, obtemos o resultado.

<u>Proposição 3.1.8.</u>- Se $B$ é um subconjunto limitante de $E$ e $C$ é um subconjunto limitado de $(H(E),\tau_o)$, então existe $\varepsilon=\varepsilon(B,C)>0$ tal que

$$\sup\{|f(x)|; f\in C \text{ e } x\in B+\varepsilon B_1\}<\infty.$$

Demonstração. Sejam $U_n=\{x\in E; \sup\{|f(x)|; f\in C\}<n\}$ e seja $V_n=\{x\in U_n; d(x,\complement U_n)>\frac{1}{n}\}$. Temos: $V_n$ aberto, $V_n\subset V_{n+1}$, $\forall n$ e $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n=E$. Pelo Lema 2.10 existem $n_1\in\mathbb{N}$ e $A>0$ tais que

$$p(f)=\|f\|_B<A\|f\|_{V_{n_1}}, \ \forall f\in H(E).$$

Dado $v\in B_1$,

$$\sup\{|f(y+\frac{1}{2n_1}v)|; y\in B\} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sup\{|\frac{\hat{d}^n f(y)}{n!}(\frac{1}{2n_1}v)|; y\in B\}.$$

Fazendo

$$g(y)=\frac{\hat{d}^n f(y)}{n!}(\frac{1}{2n_1}v), \ \forall y\in E,$$

temos $g\in H(E)$. Logo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup\{|g(y)|; y\in B\} < \sum_{n=0}^{\infty} A\|g\|_{V_{n_1}} = \sum_{n=0}^{\infty} A \sup\{|\frac{\hat{d}^n f(y)}{n!}(\frac{1}{2n_1}v)|;$$

$y\in V_{n_1}\}$.

Mas

$$\frac{\hat{d}^n f(y)}{n!}\left(\frac{1}{2n_1}v\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=\frac{3}{2}}\frac{f(y+(\lambda/2n_1)v)}{\lambda^{n+1}}d\lambda$$

$$\Longrightarrow\left|\frac{\hat{d}^n f(y)}{n!}\left(\frac{1}{2n_1}v\right)\right|\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n\sup\{|f(y+(\lambda/2n_1)v)|;|\lambda|=\frac{3}{2}\}$$

$$\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n\sup\{|f(x)|;x\in y+\frac{3}{4n_1}B_1\}$$

$$\Longrightarrow\sup\{\left|\frac{\hat{d}^n f(y)}{n!}\left(\frac{1}{2n_1}v\right)\right|;y\in V_{n_1}\}\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n\sup\{|f(x)|;x\in V_{n_1}+\frac{3}{4n_1}B_1\}$$

Logo

$$\sup\{|f(x)|;x\in B+\frac{1}{2n_1}B_1\}\leq\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n A\sup\{|f(x)|;x\in V_{n_1}+\frac{3}{4n_1}B_1\}=$$

$$=3A\sup\{|f(x)|;x\in V_{n_1}+\frac{3}{4n_1}B_1\}.$$

Mas $V_{n_1}+\frac{3}{4n_1}B_1\subset U_{n_1}$, pois, dados $y\in V_{n_1}$ e $v\in B_1$, temos;

$$d(y+\frac{3}{4n_1}v,\complement U_{n_1})\geq d(y,\complement U_{n_1})-\frac{3}{4n_1}\|v\|>\frac{1}{n_1}-\frac{3}{4n_1}>0.$$

Portanto

$$\sup\{|f(x)|;f\in C\text{ e }x\in B+\frac{1}{2n_1}B_1\}\leq 3An_1.$$

Fazendo $\varepsilon=\frac{1}{2n_1}$, obtemos o resultado desejado.

<u>Lema 3.1.9.</u>- Seja $p(z)=1+\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i z^i+z^n$ um polinômio de uma variável complexa com coeficientes complexos. Então $\sup\{|p(z)|;|z|=1\}\geq 2$.

Demonstração. Sejam $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n=1$ as n raízes distintas da unidade, onde $\xi_k=(\xi_1)^k$.

(1) Se existir $\xi_k$, $k<n$, tal que

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i(\xi_k)^i\right)\geq 0, \text{ então}$$

$$|p(\xi_k)|=\left|2+\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i(\xi_k)^i\right|\geq 2.$$

Se não acontece (1), então

$$\sum_{k=1}^{n-1}\mathrm{Re}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i(\xi_k)^i\right)<0, \text{ ou, } \mathrm{Re}\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\left(\sum_{k=1}^{n-1}(\xi_k)^i\right)<0.$$

Mas

$$\sum_{k=1}^{n-1}(\xi_k)^i = \sum_{k=1}^{n-1}(\xi_i)^k=-1, \text{pois } i<n.$$

Logo

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\right)>0 \text{ e portanto}$$

$$|p(1)|=\left|2+\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\right|\geq 2.$$

§2. Se S é um subconjunto dos inteiros positivos, $\mathbb{N}$, denotamos por $\ell_\infty(S)$ o subespaço de $\ell_\infty$ consistindo dos elementos cujo suporte está em S. Se S é infinito então $\ell_\infty(S)$ é um subespaço fechado de $\ell_\infty$ isomorfo a $\ell_\infty$. Se $f$ é uma função definida em $\ell_\infty$, denotamos por $f_S$ a restrição de $f$ a $\ell_\infty(S)$. Para simplificar a notação escrevemos $\|f\|_S=\sup\{|f(x)|;x\in\ell_\infty(S),\|x\|\leq 1\}$, para toda $f$ definida em $\ell_\infty$.

<u>Proposição 3.2.1.</u>- Sejam $P\in\mathcal{P}(^n\ell_\infty)$ e $\varepsilon>0$ dados arbitrariamente. Então existe um subconjunto infinito S de $\mathbb{N}$ tal que

$$\|P\|_S\leq\varepsilon.$$

Demonstração. Sejam $A\in\mathcal{L}_S({}^n\ell_\infty)$ tal que $\hat{A}=P$ (isto é, $P(x)=A(x,\dots,x)$ (n vezes)). Supondo por absurdo que o resultado não valha, podemos fazer uma partição em $\mathbb{N}$ por uma sequência $(R_n)_1^\infty$ tal que $\|P\|_{R_n}>\varepsilon$, para todo n. Para $i=1,2$ escolhamos $x_i\in\ell_\infty(R_i)$, $\|x_i\|\leq 1$ tal que $P(x_i)=\varepsilon$. Para qualquer $\lambda$ complexo

$$P(x_1+\lambda x_2)=A(x_1+\lambda x_2)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}Ax_1^{n-r}(\lambda x_2)^r$$

$$=\varepsilon+\sum_{r=1}^{n-1}\binom{n}{r}Ax_1^{n-r}(\lambda x_2)^r+\lambda^n\varepsilon.$$

Pelo Lema 3.1.9.,

$$\sup\{|P(x_1+\lambda x_2)|;|\lambda|\leq 1\}\geq 2\varepsilon.$$

Portanto

$$\|P\|_{R_1\cup R_2}\geq 2\varepsilon,\text{ pois } R_1\cap R_2=\emptyset.$$

Analogamente $\|P\|_{R_3\cup R_4}\geq 2\varepsilon$ e usando o método acima mais uma vez temos $\|P\|_{R_1\cup R_2\cup R_3\cup R_4}\geq 4\varepsilon$. Por indução temos

$\|P\|_{R_1\cup\dots\cup R_{2^n}}\geq 2^n\varepsilon$, o que dá uma contradição, pois

$\|P\|_{R_1\cup\dots\cup R_n}\leq\|P\|<\infty$ para todo n.

<u>Lema 3.2.2.</u>- Se $A\in\mathcal{L}({}^nE)$, onde E é um espaço de Banach e $0\leq r\leq n$, então a aplicação

$$\Psi:E\to\mathcal{P}({}^{n-r}E)$$
$$y\mapsto A(y)^r$$

é contínua.

Demonstração. Seja $\phi$ a aplicação

$$E^r \to \mathcal{P}(^{n-r}E)$$

$$(y_1,\ldots,y_r) \mapsto A(y_1,\ldots,y_r).$$

Então $\phi$ é r-linear e

$$\sup\{\|\phi(y_1,\ldots,y_r)\| ; \|y_i\| \leq 1,\ i=1,\ldots,r\}$$

$$\leq \sup\{|A(y_1,\ldots,y_n)| ; \|y_i\| \leq 1,\ i=1,\ldots,n\} \leq \|A\|.$$

Portanto $\phi$ é contínua, pois é limitada e como $\Psi=\phi \circ \Delta_r$, $\Psi$ é contínua.

Seja $u_n=(0,\ldots,0,\overset{n\text{-ésimo lugar}}{1},0,\ldots)\in \ell_\infty$ e seja $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{u_n\}$. A é fechado, limitado e não compacto.

<u>Teorema 3.2.3.</u>- O conjunto A é um subconjunto limitante de $\ell_\infty$.

Demonstração. Suponhamos que o resultado não seja válido. Então, pela Proposição 3.1.3., existe $f\in H(\ell_\infty)$ tal que

$$\limsup_{n\to\infty} \left\|\frac{\hat{d}^n f(0)}{n!}\right\|_A^{1/n} \geq \delta > 0 \quad (*).$$

Existem $n_1\in\mathbb{N}$ e $u_{k_1}\in A$ tais que

$$\left|\frac{\hat{d}^{n_1} f(0)}{n_1!}(u_{k_1})\right|^{1/n_1} > \delta/2$$

Pelo Lema 3.1.4., temos também

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{\hat{d}^n f(0)}{n!}(x)\right|^{1/n} = 0, \text{ para todo } x\in\ell_\infty. \quad (1)$$

Existe $n_1' > n_1$ tal que

$$\left|\frac{\hat{d}^n f(0)}{n!}(u_{k_1})\right|^{1/n} < \delta/4, \text{ para todo } n\geq n_1' \quad (**)$$

Novamente, por (*), existem $n_2 > n_1'$ e $u_{k_2} \in A$, $k_2 \neq k_1$ por (**), tais que

$$\left|\frac{\hat{d}^{n_2} f(0)}{n_2!}(u_{k_2})\right|^{1/n_2} > \delta/2$$

Por (I) existe $n_2' > n_2$ tal que

$$\left|\frac{\hat{d}^{n} f(0)}{n!}(u_{k_2})\right|^{1/n} < \delta/4, \text{ para todo } n \geq n_2' .$$

Por (*) existem $n_3 > n_2'$ e $u_{k_3} \in A$, $k_3 \neq k_i$, $i=1,2$, por (**), tais que

$$\left|\frac{\hat{d}^{n_3} f(0)}{n_3!}(u_{k_3})\right|^{1/n_3} > \delta/2 \quad \text{e assim por diante.}$$

Obtemos assim um conjunto $S=\{k_1, k_2, \ldots\}$ que pode substituir $\mathbb{N}$ (com a identificação $k_n = n$), isto é, podemos substituir $\ell_\infty$ por $\ell_\infty(S)$.

Sejam

$$\beta_{n_j} = \frac{1}{\frac{\hat{d}^{n_j} f(0)}{n_j!}(u_j)}, \quad \beta_k = 0 \text{ se } k \neq n_j, \text{ para todo } j.$$

Seja

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \frac{\hat{d}^k f(0)}{k!}$$

Pelo Lema 3.1.5., $g \in H(E)$, pois $\sup_n |\beta_n|^{1/n} \leq \frac{2}{\delta} < \infty$. Podemos então supor, sem perda de generalidade, que $f = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\hat{d}^{n_j} f(0)}{n_j!}$ e $\frac{\hat{d}^{n_j} f(0)}{n_j!}(u_j) = 1$, para cada $j$.

Para cada $n_j$, seja $A_{n_j} \in \mathcal{L}_S({}^{n_j}\ell_\infty)$ tal que

$$\hat{A}_{n_j} = \frac{\hat{d}^{n_j} f(0)}{n_j!}$$

Temos:

$$\frac{\hat{d}^{n_1} f(0)}{n_1!}(u_1)=1 \quad e \quad \frac{\hat{d}^{n_1} f(0)}{n_1!} \in \mathcal{P}(^{n_1}\ell_\infty).$$

Seja $k_1=1$ e escolha $S_1$ infinito tal que $k_1 \notin S_1$ e

$$\sup\{\sum_{0<r\leq n_1} \binom{n_1}{r} \|A_{n_1}(\lambda u_1)^{n_1-r}\|_{S_1} ; |\lambda|\leq 1; \lambda\in\mathbb{C}\} \leq \frac{1}{n_1!}$$

(isto é possível, pois $A_{n_1}(\lambda u_1)^{n_1-r} \in \mathcal{L}_S(^r\ell_\infty)$, $\|A_{n_1}(\lambda u_1)^{n_1-r}\|_{S_1}$ $\leq \frac{r^r}{r!}\|\widehat{A_{n_1}(\lambda u_1)^{n_1-r}}\|_{S_1}$ e pela Proposição 3.2.1.).

Suponhamos que $k_i \in S_i$ tenham sido escolhidos para $1\leq i\leq \ell-1$. Escolhamos $k_\ell \in S_{\ell-1}$ e seja $C_\ell=\{k_1,\ldots,k_\ell\}$. Tomomos $S_\ell \subset S_{\ell-1}$ tal que $S_\ell$ não contenha $k_1,\ldots,k_\ell$ e

$$(*) \qquad \sup\{\sum_{0<r\leq n_{k_\ell}} \binom{n_{k_\ell}}{r} \|A_{n_{k_\ell}}(y)^{n_{k_\ell}-r}\|_{S_\ell} ; y\in\ell_\infty(C_\ell), \|y\|\leq 1\}$$
$$\leq \frac{1}{n_{k_\ell}!}$$

Seja $\mathcal{S}=\bigcup_{\ell=1}^{\infty}\{k_\ell\}$. Restringindo tudo a $\ell_\infty(\mathcal{S})$, podemos supor $k_\ell=\ell$. Chamando $C_\ell^\perp=\bigcup_{n=\ell+1}^{\infty}\{k_n\}$, temos $\mathcal{S}=C_\ell \cup C_\ell^\perp$. Seja $R_{n_\ell}$ a restrição de $\frac{\hat{d}^{n_\ell} f(0)}{n_\ell!}$ a $\ell_\infty(C_\ell)$ e definamos

$T_{n_\ell} \in \mathcal{P}(^{n_\ell}\ell_\infty(\mathcal{S}))$ por

$T_{n_\ell}(x+y)=R_{n_\ell}(x)$ para todo $x\in\ell_\infty(C_\ell)$ e $y\in\ell_\infty(C_\ell^\perp)$. Então

$$\left\|\frac{\hat{d}^{n_\ell} f(0)}{n_\ell!} - T_{n_\ell}\right\|_{\mathcal{S}} = \sup\{|\frac{\hat{d}^{n_\ell} f(0)}{n_\ell!}(z)-T_{n_\ell}(z)| ; z\in\ell_\infty(\mathcal{S}),$$

$\|z\|\leq 1\}$

$$\leq \sup\{|A_{n_\ell}(x+y)^{n_\ell}-A_{n_\ell}(x)^{n_\ell}|;x\in\ell_\infty(C_\ell),y\in\ell_\infty(C_\ell^\perp),\|x\|\leq 1,$$

$\|y\|\leq 1\}$

$$=\sup\{|\sum_{0\leq r\leq n_\ell}\binom{n_\ell}{r}A_{n_\ell}(x)^{n_\ell-r}(y)^r-A_{n_\ell}(x)^{n_\ell}|;x\in\ell_\infty(C_\ell)\ ,$$

$y\in\ell_\infty(C_\ell^\perp),\|x\|\leq 1,\|y\|\leq 1\}$

$$\leq \sup\{\sum_{0<r\leq n_\ell}\binom{n_\ell}{r}|A_{n_\ell}(x)^{n_\ell-r}(y)^r|;x\in\ell_\infty(C_\ell),y\in\ell_\infty(C_\ell^\perp)\ ,$$

$\|x\|\leq 1,\ \|y\|\leq 1\}$

$$=\sup\{\sum_{0<r\leq n_\ell}\binom{n_\ell}{r}\|A_{n_\ell}(x)^{n_\ell-r}\|_{C_\ell^\perp};x\in\ell_\infty(C_\ell),\|x\|\leq 1\}$$

$$\leq \sup\{\sum_{0<r\leq n_\ell}\binom{n_\ell}{r}\|A_{n_\ell}(x)^{n_\ell-r}\|_{S_\ell};x\in\ell_\infty(C_\ell),\|x\|\leq 1\}\ \text{(pois}$$

$C_\ell^\perp\subset S$ )

$$\leq\frac{1}{n_\ell!}\ \text{por } (*).$$

<u>Lema 3.2.4.</u>- Nas condições do Teorema 3.2.3., temos $\sum_{\ell=1}^{\infty}T_{n_\ell}\in H(\ell_\infty(\mathcal{Y}))$.

Demonstração. De fato , dados $K\in\hat{\mathcal{K}}(\ell_\infty(\mathcal{Y}))$ e $(\alpha_n)_1^\infty\in c_0^+$, temos:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\|T_m\|_{K+\alpha_m B_1}\leq\sum_{m=1}^{\infty}\|T_m-\frac{\hat{d}^m f(0)}{m!}\|_{K+\alpha_m B_1}+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\|\frac{\hat{d}^m f(0)}{m!}\|_{K+\alpha_m B_1}.$$

Existe $M>0$ tal que $K+\alpha_m B_1\subset MB_1$. Temos:

$$\|T_m-\frac{\hat{d}^m f(0)}{m!}\|_{K+\alpha_m B_1}\leq\|T_m-\frac{\hat{d}^m f(0)}{m!}\|_{MB_1}=$$

$$=\sup\{|T_m(z)-\frac{\hat{d}^m f(0)}{m!}(z)|;z\in\ell_\infty(\mathcal{Y}),\|z\|\leq M\}$$

$$=\sup\{|T_m(Mz)-\frac{\hat{d}^m f(0)}{m!}(Mz)|;z\in\ell_\infty(\mathcal{Y}),\|z\|\leq 1\}$$

$$=M^m\|T_m-\frac{\hat{d}^m f(0)}{m!}\|_{\mathcal{Y}}\leq\frac{M^m}{m!}$$

Portanto

$$\sum_{m=1}^{\infty}\|T_m-\frac{\hat{d}^m f(0)}{m!}\|_{K+\alpha_m B_1}\leq\sum_{m=1}^{\infty}\frac{M^m}{m!}<e^m<\infty.$$

Como $\sum_{m=1}^{\infty}\|\frac{\hat{d}^m f(0)}{m!}\|_{K+\alpha_m B_1}<\infty$, temos o resultado do Lema.

Continuando a demonstrar o Teorema 3.2.3., se $v_\ell=(0,\ldots,0,\overset{\ell\text{-ésimo lugar}}{1},0,\ldots)$ $\in\ell_\infty(\mathcal{Y})$, então

$$T_{n_\ell}(v_\ell)=R_{n_\ell}(v_\ell)=\frac{\hat{d}^{n_\ell}f(0)}{n_\ell!}(v_\ell)=\frac{\hat{d}^{n_{k_\ell}}f(0)}{n_{k_\ell}!}(u_{k_\ell})=1$$

Para $\lambda\in\mathbb{C}$ e $y\in\ell_\infty(C_2^1)$, temos $v_1+\lambda v_2\in\ell_\infty(C_2)$. Então

$$T_{n_2}(v_1+\lambda v_2+y)=R_{n_2}(v_1+\lambda v_2)=\frac{\hat{d}^{n_2}f(0)}{n_2!}(v_1+\lambda v_2)=A_{n_2}(v_1+\lambda v_2)^{n_2}$$

$$=\sum_{0\leq r\leq n_2}\binom{n_2}{r}A_{n_2}(v_1)^{n_2-r}(\lambda v_2)^r=\sum_{0\leq r<n_2}\binom{n_2}{r}\lambda^r A_{n_2}(v_1)^{n_2-r}(v_2)^r$$

$$+\lambda^{n_2}A_{n_2}(v_2)^{n_2}=\sum_{0\leq r<n_2}\alpha_r(A_{n_2})\lambda^r+\lambda^{n_2},\text{ onde }\alpha_r(A_{n_2})=\binom{n_2}{r}\cdot$$
$A_{n_2}(v_1)^{n_2-r}(v_1)^r$.

Logo $p(\lambda)=T_{n_2}(v_1+\lambda v_2+y)$ é um polinômio de variável complexa $\lambda$, com coeficientes complexos. Temos:

$$1=p^{(n_2)}(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=1}\frac{p(\lambda)}{\lambda^{n+1}}\,d\lambda.$$

Pelas desigualdades de Cauchy,

$$1\leq\sup\{|p(\lambda)|;|\lambda|=1\}=p(\lambda_2),\ \lambda_2\in\mathbb{C},\ |\lambda_2|=1.$$

Logo existe $\lambda_2\in\mathbb{C}$, $|\lambda_2|=1$ tal que para todo $y\in\ell_\infty(C_2^{\perp})$

$$|T_{n_2}(v_1+\lambda_2 v_2)|=|T_{n_2}(v_1+\lambda_2 v_2+y)|\geq 1.$$

Suponhamos que $\lambda_2,\ldots,\lambda_k\in\mathbb{C}$ tenham sido escolhidos tais que $|\lambda_i|\leq 1$ e

$$|T_{n_i}(v_1+\sum_{j=2}^{i}\lambda_j v_j+y)|\geq 1 \text{ para todo } y\in\ell_\infty(C_i^{\perp}) \text{ e } i=2,\ldots k.$$

Então

$$T_{n_{k+1}}(v+\sum_{j=2}^{k}\lambda_j v_j+\lambda v_{k+1}+y)=T_{n_{k+1}}(v_1+\sum_{j=2}^{k}\lambda_j v_j+\lambda v_{k+1})$$

$$=\sum_{r=0}^{n_{k+1}-1}\alpha_r(A_{n_{k+1}})\lambda^r+\lambda^{n_{k+1}},$$ onde $\alpha_r(A_{n_{k+1}})$ são números complexos independentes de $\lambda$.

Novamente pelas desigualdades de Cauchy, existe $\lambda_{k+1}\in\mathbb{C}$, $|\lambda_{k+1}|\leq 1$ tal que para todo $y\in C_{k+1}^{\perp}$

$$|T_{n_{k+1}}(v_1+\sum_{j=2}^{k+1}\lambda_j v_j+y)|\geq 1,$$

Seja $x=(1,\lambda_2,\lambda_3,\ldots,\lambda_k,\ldots)=v_1+\sum_{j=2}^{k}\lambda_j v_j+y$, $y\in\ell_\infty(C_k^{\perp})$. Temos:

$$|T_{n_k}(x)|^{1/n_k}=|T_{n_k}(v_1+\sum_{j=2}^{k}\lambda_j v_j+y)|^{1/n_k}\geq 1,$$

para todo $k$. Logo $\limsup_{k\to\infty}|T_{n_k}(x)|^{1/n_k}\geq 1$, o que contradiz o fato de que $\sum_{k=1}^{\infty}T_{n_k}\in H(\ell_\infty(U))$.

Portanto $A$ é um subconjunto limitante de $\ell_\infty$.

# C A P Í T U L O  IV

## CARACTERIZAÇÃO DE SUBCONJUNTOS LIMITANTES DE UM ESPAÇO DE BANACH SEPARÁVEL

Proposição 4.1.- Seja $(\phi_n)_1^\infty$ uma seqüência de elementos de E'. Então $\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n{}^n \in H(E)$ se, e somente se, $\phi_n \to 0$ quando $n\to\infty$ na topologia fraca $\sigma(E';E)$ em E'.

Demonstração. Suponhamos que $\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n{}^n \in H(E)$. Então Lema 3.1.4., / implica que

$$\lim_{n\to\infty} \sup \|\phi_n{}^n\|_K^{1/n} = 0 \text{ para todo } K \in \tilde{\mathcal{K}}. \qquad (*)$$

Suponhamos, por absurdo, que exista $x\in E$ tal que $\phi_n(x) \not\to 0$ quando $n\to\infty$. Seja X a envoltória absolutamente convexa de x. Temos $X\in\tilde{\mathcal{K}}$. Existem $\delta>0$ e uma subseqüência $(\phi_{n_k})_1^\infty$ de $(\phi_n)_1^\infty$ tal que $|\phi_{n_k}(x)|\geq\delta$, para todo k. Logo

$$\|\phi_{n_k}{}^{n_k}\|_X^{1/n_k} \geq \delta, \text{ o que contradiz } (*).$$

Suponhamos que $\phi_n\to 0$ quando $n\to\infty$ na topologia fraca. Então $\{\phi_n ; n\in\mathbb{N}\}$ é um subconjunto limitado de E' e $\phi_n\to 0$ uniformemente sobre os subconjuntos compactos de E. Portanto, para $K\in\tilde{\mathcal{K}}$ e $(\alpha_n)_1^\infty \in c_0^+$,

temos:

$$\|\phi_n{}^n\|^{1/n}_{K+\alpha_n B_1} = \|\phi_n\|_{K+\alpha_n B_1} = \sup\{|\phi_n(x+y)|; x\in K, \|y\|<\alpha_n\}$$

$$= \sup\{|\phi_n(x)+\phi_n(y)|; x\in K, \|y\|<\alpha_n\}$$

$$\leq \sup\{|\phi_n(x)|; x\in K\} + \sup\{|\phi_n(y)|; \|y\|<\alpha_n\}$$

$$= \|\phi_n\|_K + \alpha_n \|\phi_n\|$$

Logo

$$\lim_{n\to\infty} \sup \|\phi_n{}^n\|^{1/n}_{K+\alpha_n B_1} \leq \lim_{n\to\infty} \|\phi_n\|_K + \lim_{n\to\infty} \alpha_n \|\phi_n\|$$

Como $\{\phi_n; n\in N\}$ é um subconjunto limitado de E', $(\alpha_n)_1^\infty \in c_o^+$ e $\phi_n \to 0$ uniformemente sobre os compactos de E, temos o resultado (utilizando mais uma vez o Lema 3.1.4.).

Lema 4.2.- Se C é um subconjunto não limitado de E, então existe $f\in H(E)$ tal que $\sup\{|f(x)|; x\in C\} = \infty$.

Demonstração. Como C não é limitado, não é fracamente limitado. Logo existe $\phi\in E'$ tal que $\|\phi\|_C = 0$. Como $E' \subset H(E)$ isto encerra a prova.

Lema.4.3.- Seja C um subconjunto não compacto fechado, limitado de E. Então existem $x_m \in C$, $m\in N$ e $\delta>0$ tais que, sendo $Y_m$ o subespaço vetorial de E gerado por $x_1,\ldots,x_m$, tem-se

$$d(Y_m, x_{m+1}) \geq \delta, \text{ para todo } m\in N.$$

Demonstração. Como C não é compacto, existe uma seqüência $(y_n)_1^\infty$

de elementos de $C$ e existe $\gamma>0$ tais que

(*) $\|y_n - y_m\| \geq \gamma$, para todo $m \neq n$.

Fixemos $\delta$, $0<\delta<\gamma/2$.

Afirmação: Se $S$ é um subespaço vetorial de $E$ de dimensão finita, existe $n\in\mathbb{N}$ tal que

$\|u-y_n\| \geq \delta$, para todo $u\in S$.

Pois caso contrário, existiria uma seqüência $(u_n)_1^\infty$ de elementos de $S$ tal que $\|u_n-y_n\|<\delta$, para todo $n\in\mathbb{N}$. Como $(y_n)_1^\infty$ é limitada, / temos $(u_n)_1^\infty$ limitada. Como $\dim S<\infty$, existem $n_0<n_1<\ldots<n_k$ ... , $n_k\in\mathbb{N}$ e $u\in S$ tais que $u_{n_k}\to u$ quando $k\to\infty$. Logo

$$\|u-y_{n_k}\| \leq \|u-u_{n_k}\| + \|u_{n_k}-y_{n_k}\| < (\tfrac{\gamma}{2}-\delta)+\delta, \text{ para } k \text{ suficientemente grande},$$

contradizendo (*).

Coloquemos $x_0=y_{n_0}$. Suponhamos $x_0,\ldots,x_k$ definidos. Escolhamos / $n_k\in\mathbb{N}$ tal que $\|u-y_{n_k}\|\geq\delta$, para todo $u\in Y_k$. Coloquemos $x_{k+1}=y_{n_k}$. Para a seqüência $(x_n)_1^\infty$ de $C$, valem então

$$\|x_m-x_n\| \geq \delta \quad \text{se } m\neq n \qquad (1)$$

e

$$d(Y_m, x_{m+1}) \geq \delta \text{ para todo } m\in\mathbb{N} \quad (2).$$

<u>Lema 4.4.</u>- Seja $(x_n)_1^\infty$ uma seqüência que satisfaz (1) e (2). Então existe $(\phi_n)_1^\infty$ em $E'$ com as seguintes propriedades:

$$\sup_n \|\phi\|_n < \infty \qquad (3)$$

$$\phi_n(x_m)=0 \quad \text{se } m>n \qquad (4)$$

$$\phi_n(x_n)=1 \text{ para todo } n \text{ .} \quad (5)$$

Demonstração. Como, para cada $n$, $Y_{n-1}$ é subespaço vetorial de E e $d(Y_{n-1},x_n)\geq\delta>0$, pelo Teorema de Hahn-Banach existe $\phi_n\in E'$ tal que

$$\phi_n(x_n)=1,\ \phi_n(Y_{n-1})=0 \ \text{e}\ \|\phi_n\|=\frac{1}{d(Y_n,x_{n-1})}\leq\frac{1}{\delta}.$$

Proposição 4.5.- Se E é um espaço de Banach tal que toda seqüência limitada em E' tem uma subseqüência fracamente convergente, então os subconjuntos limitantes são precisamente os subconjuntos compactos.

Demonstração. Seja C um subconjunto fechado, limitado, não compacto de E. Escolhamos seqüências $(x_n)_1^\infty$ em C e $(\phi_n)_1^\infty$ em E' que satisfazem (1)-(5). Por hipótese, $(\phi_n)_1^\infty$ possui uma subseqüência fracamente convergente. Sem perda de generalidade, podemos supor $\phi_n\to\phi$ na topologia fraca. Seja $\Psi_n=\phi_n-\phi$, para todo $n$. Então $(\Psi_n)_1^\infty$ satisfaz as condições (3),(4) e (5), e $\Psi_n\to 0$ na topologia fraca. Definamos uma seqüência de números reais $(\alpha_n)_1^\infty$ do seguinte modo:

$$\alpha_1=1$$

$$\alpha_n=\begin{cases}1 & \text{se } \operatorname{Re}\left(\sum_{i=1}^{n-1} 2^i\alpha_i\Psi_i{}^i(x_n)\right)\geq 0\\ -1 & \text{de outro modo.}\end{cases}$$

Seja $\beta_n = \alpha_n^{1/n}$ para cada $n$. A Proposição 4.1. mostra que a função $f = \sum_{n=1}^{\infty} (2\beta_n \Psi_n)^n$ satisfaz $f \in H(E)$. Também

$$|f(x_m)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \alpha_n (\Psi_n(x_m))^n\right| = \left|\sum_{n=1}^{m} 2^n \alpha_n (\Psi_n(x_m))^n\right|$$

$$= \left|2^m \alpha_m + \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{m-1} 2^n \alpha_n \Psi_n^{\,n}(x_m)\right) + i\ \mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{m-1} 2^n \alpha_n \Psi_n^{\,n}(x_m)\right)\right|$$

$$\geq \left|2^m \alpha_m + \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{m-1} 2^n \alpha_n \Psi_n^{\,n}(x_m)\right)\right| \geq 2^m$$

Portanto

$$\sup\{|f(x)|\,;\, x \in C\} \geq \sup_n |f(x_n)| = \infty .$$

Logo C não é limitante.

Lema 4.6.- Se E é separável, toda seqüência limitada em E' / tem uma subseqüência fracamente convergente.

Demonstração. Seja $(x_n')_1^{\infty}$ uma seqüência limitada em E' e seja $(x_k)_1^{\infty}$ uma seqüência que é densa em E. Como $(x_n'(x_1))_1^{\infty}$ é uma seqüência limitada de escalares, contém uma subseqüência convergente, que denotamos por $(x_{n_1}'(x_1))_1^{\infty}$. Analogamente $(x_{n_1}'(x_2))$ contém uma subseqüência convergente, que denotamos por $(x_{n_2}'(x_2))$. Continuando por indução, obtemos uma seqüência diagonal $(x_{n_n}')_1^{\infty}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_{n_n}'(x_k)$ existe para cada k, Como $(x_k)_1^{\infty}$ é denso em E, $\lim_{n\to\infty} x_{n_n}'(x)$ existe para todo $x \in E$. Definindo $x'(x) = \lim_{n\to\infty} x'_n(x)$ para todo $x \in E$, temos $x' \in E'$.

Corolário 4.7.- Se $E$ é separável, então os subconjuntos limitantes são os subconjuntos compactos.

Corolário 4.8.- Se $E$ é separável e $U \subset E$ um domínio de existência, então todo conjunto limitante em $U$ é compacto.

Demonstração. É fácil ver que $U$ é um domínio de $\tau$-holomorfia, para algum $\tau$. Dado $X \subset U$ limitante em $U$, pelos Teoremas 1.4. e 1.8., $X$ é fechado em $E$, pois $d(X, \partial U) > 0$. Logo $X$ é limitante em $E$. Pelo Corolário 4.7., $X$ é compacto.

Nota. Se $E$ é reflexivo, temos resultado idêntico ao do Corolário 4.7..

# BIBLIOGRAFIA

[1] ALEXANDER, H., Analytic Functions on a Banach space, Tese, Universidade da Califórnia, Berkeley, USA (1968)

[2] DINEEN, S., Holomorphy types on a Banach space, Studia Mathematica 39 (1971), 241-288.

[3] DINEEN, S., The Cartan-Thullen theorem for Banach spaces, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, 24 (1970), 667-676.

[4] DINEEN, S., Unbounded holomorphic functions on a Banach Space, Journal of the London Mathematical Society, 4 (1972), 461-465.

[5] DINEEN, S., Bounding subsets of a Banach space, Mathematische Annalen, 192 (1971), 61-70.

[6] HIRSCHOWITZ, A., Diverses notions d'ourverts d'analyticité en dimension infinie, Seminaire Pierre Lelong 1970, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Germany 205 (1971), 11-20.

[7] HORVATH, J., Topological vector spaces and distributions, Addison-Wesley (1966).

[8] MATOS, M.C., Holomorphic mappings and domains of holomorphy, Monografias do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro, Brasil 27 (1970).

[9] MATOS, M. C., Domains of $\tau$-holomorphy in separable Banach spaces, Comptes Rendues de l'Académie de Sciences de Paris, 271 (1970), 1165-1166 e Mathematische Annalen 195 (1972), 273-278.

[10] NACHBIN, L., Holomorphic functions, domains of holomorphy and local properties, North-Holland (1970).

[11] NACHBIN, L., Topology on spaces of holomorphic mappings , Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer-Verlag, Germany 47 (1969).

[12] NACHBIN, L., Lectures on the theory of distributions , Universidade de Rochester (1963) . Reproduzida em Textos de Matemática pela Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brasil 15 (1964).

[13] TAYLOR, A. E., Introduction to functional analysis, Wiley, New York (1961).