
Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado

**Análise Matemática e Controle Ótimo de
um Modelo para Solidificação**

Wellington Vieira Assunção

Mestrado em Matemática - Campinas - SP

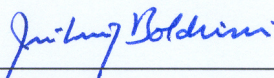
Orientador: Prof. Dr. José Luiz Boldrini

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro da FAPESP

Análise Matemática e Controle Ótimo de um Modelo para Solidificação

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Wellington Vieira Assunção** e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 23 de fevereiro de 2007.



Prof. Dr. José Luiz Boldrini

Orientador

Banca Examinadora:

Prof. Dr. José Luiz Boldrini

Prof. Dr. Arnaldo Simal do Nascimento

Prof. Dr. Marcelo da Silva Montenegro

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**
Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues – CRB8a / 2116

Assunção, Welington Vieira
As79a Análise matemática e controle ótimo de um modelo para solidificação /
Welington Vieira Assunção -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2007.

Orientador : José Luiz Boldrini
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Mecânica de fluidos. 3. Solidificação.
4. Teoria de Controle. I. Boldrini, José Luiz. II. Universidade Estadual de
Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III.
Título.

Título em inglês: Mathematical analysis and optimal control of a model for solidification.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Partial differential equations. 2. Fluid mechanics. 3. Solidification. 4. Control theory.

Área de concentração: Equações Diferenciais Parciais

Titulação: Mestre em Matemática

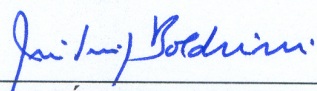
Banca examinadora: Prof. Dr. José Luiz Boldrini (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Marcelo da Silva Montenegro (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Arnaldo Simal do Nascimento (DM-UFSCar)

Data da defesa: 23/02/2007

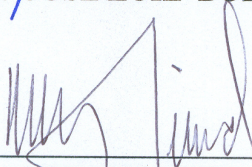
Programa de Pós-Graduação: Mestrado em Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 23 de fevereiro de 2007 e aprovada

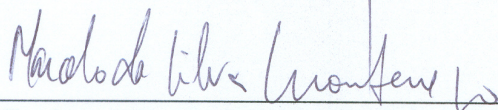
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof. (a). Dr (a). JOSÉ LUIZ BOLDRINI



Prof. (a). Dr (a). ARNALDO SIMAL DO NASCIMENTO



Prof. (a). Dr (a). MARCELO DA SILVA MONTENEGRO

Resumo

Neste trabalho estudaremos um sistema de equações diferenciais parciais parabólicas não lineares que correspondem a um modelo matemático do tipo campo de fases para problemas de solidificação e fusão de materiais puros, estudado em "K. H. Hoffman e L. Jiang, Optimal control of a phase field model for solidification, Numer. Funct. Anal. Optimization 13 (1 & 2), 1992, pp. 11-27". A análise de tal sistema será feita através da colocação do problema em um contexto de espaços funcionais adequados para que as soluções do problema original correspondam a pontos fixos de um certo operador não-linear compacto. Descreveremos resultados sobre existência, regularidade e unicidade de soluções para tal modelo. Estudaremos também um problema de controle ótimo associado ao sistema anterior, na qual obtêm-se existência de um controle ótimo e condições ótimas necessárias na qual tem que ser satisfeitas por cada controle ótimo. Além disso, estudaremos um modelo que é uma generalização do anterior, apresentado em "C. Moroşanu e D. Motreanu, A generalized phase field system, Journal of Math. Analysis and Applic. 237, 1999, pp. 515-540". Para este modelo generalizado, consideraremos questões similares às do modelo anterior e utilizaremos as mesmas técnicas para obter resultados similares.

Abstract

In this work we study a system of nonlinear partial differential equations of parabolic type corresponding to a mathematical model of phase field type for problems of solidification of pure materials. This model is studied in "K. H. Hoffman e L. Jiang, Optimal control of a phase field model for solidification, Numer. Funct. Anal. Optimization 13 (1 & 2), 1992, pp. 11-27". The analysis of such system is done by putting the problem in a context of appropriate functional spaces in such way that the solution of the original problem corresponds to fixed point of a certain compact nonlinear operator. We describe results on existence, regularity and uniqueness of solutions for such model problem. We also study an optimal control problem associated to the previous problem, for which it is possible to obtain the existence of an optimal control and the corresponding necessary optimality conditions. Moreover, we study a model that is a generalization of the previous one and is presented in "C. Moroşanu e D. Motreanu, A generalized phase field system, Journal of Math. Analysis and Applic. 237, 1999, pp. 515-540". For this generalized model, we consider similar questions as in the previous model and use to same tools to study them and get similar results.

Ao meu avô,
Francisco Vieira de Melo

Agradecimentos

Primeiramente agradeço à Deus por sempre estar em minha vida, guiando-me no caminho certo.

Sou muito grato à minha família, pelo amor e apoio dado todos esses anos.

Agradeço ao prof. Boldrini, pela orientação segura e competente de um grande profissional com que tive a oportunidade de trabalhar.

Agradeço também a todos os meus amigos do IMECC, em especial a Fábio Bertoloto, Mateus e João Paulo, pela amizade sincera e ajuda prestada durante esses anos.

Sou grato aos professores e funcionários do IMECC, pela minha formação e por todo serviço prestado.

Finalmente, agradeço à FAPESP (proc. número 04/11186-9) pelo apoio financeiro, fundamental para a realização deste trabalho.

Índice

Introdução	1
1 Preliminares	6
2 Análise de um modelo de campo de fases	9
2.1 Problema auxiliar	9
2.2 Existência, unicidade e regularidade de solução	20
2.3 Propriedades do operador solução	30
3 Um problema de controle ótimo	33
3.1 Existência de um controle ótimo	33
3.2 Condições de otimalidade para o controle ótimo	36
3.3 Um resultado de unicidade	39
4 Análise de um modelo de campo de fases generalizado	44
4.1 Introdução	44
4.2 Problema auxiliar	47
4.3 Existência, unicidade e regularidade de solução	57
4.4 Propriedades do operador solução	68
5 Um problema de controle ótimo para o modelo generalizado	71
5.1 Existência de um controle ótimo	71
5.2 Condições de otimalidade para o controle ótimo	74
Referências Bibliográficas	77

Introdução

Neste trabalho estudaremos dois sistemas de equações diferenciais parciais parabólicas não-lineares que descrevem aspectos importantes de processos de solidificação e fusão de materiais puros. Neste tipo de modelo, o mecanismo de solidificação e fusão é descrito com o auxílio da metodologia do campo de fases (*phase field*), no nosso caso de materiais puros, levando-se também em consideração os mecanismos de condução da energia térmica e a geração ou absorção de calor latente que ocorrem durante o processo. Portanto, utilizaremos um parâmetro de ordem para distinguir as fases, isto é, uma variável auxiliar φ tal que $\varphi \geq 1$ define região sólida, $\varphi \leq 0$ define região líquida e $0 < \varphi < 1$ é uma região chamada *mushy* (região porosa intermediária entre sólido e líquido). A compreensão destes mecanismos e as suas influências no resultado final de processos de solidificação é fundamental para o aprimoramento das técnicas de produção de novos materiais. Em geral, esta é uma tarefa não-trivial e a análise matemática rigorosa dos modelos utilizados é importante na fundamentação de simulações numéricas.

Quando consideramos as influências físicas (super-aquecimento, super-resfriamento, os efeitos da tensão superficial, etc) no material considerado, a descrição matemática do fenômeno nos fornece com maior precisão os aspectos físicos do material. Naturalmente encontramos um tipo de não-linearidade capaz de mostrar a complexidade do fenômeno físico, incluindo as mudanças de fases.

Neste sentido, seguindo Hoffman e Jiang [7] e Moroşanu e Montreanu [10], consideramos a equação de campo de fases dada primeiro por

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta \varphi = a\varphi + b\varphi^2 - \varphi^3 + \theta \quad (1)$$

e depois por

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta \varphi = F(x, t, \varphi) + \theta, \quad (2)$$

onde θ é a temperatura, em (1) a e b são funções positivas limitadas conhecidas e em (2) F é uma função que satisfaz algumas propriedades que serão descritas posteriormente.

Observamos que as funções $g(s) = as + as^2 - s^3$ e $h(z) = F(x, t, z)$, com x e t fixos, utilizadas nas equações (1) e (2) respectivamente, estão relacionadas com o chamado *double-well potential*. O primeiro foi tratado por Hoffman e Jiang e o segundo foi tratado posteriormente por Moroşanu e Montreanu.

Para se obter uma equação para a temperatura, observamos que, quando existe mudança de fase, a energia térmica tem a seguinte expressão:

$$e = \theta + l(1 - \varphi),$$

onde θ e l estão associados respectivamente ao calor sensível e ao calor latente e φ é interpretada como a fração sólida ($(1 - \varphi)$ é, portanto, a fração não-sólida). Escrevendo de forma usual o balanço de energia, chega-se então à seguinte equação:

$$\frac{\partial}{\partial t}[\theta + l(1 - \varphi)] - \Delta \theta = f.$$

O primeiro modelo que analisaremos será então:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta = -l \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f & \text{em } Q = \Omega \times (0, T], \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta \varphi = a\varphi + b\varphi^2 - \varphi^3 + \theta & \text{em } Q, \\ \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 & \text{em } S = \partial\Omega \times (0, T], \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x) & \text{em } \Omega, \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x) & \text{em } \Omega. \end{array} \right. \quad (3)$$

O segundo modelo que analisaremos, que generaliza o anterior, será:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta = -l \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f & \text{em } Q, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta \varphi = F(x, t, \varphi) + \theta & \text{em } Q, \\ \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 & \text{em } S, \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x) & \text{em } \Omega, \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x) & \text{em } \Omega. \end{array} \right. \quad (4)$$

Em ambos os sistemas, Ω é a região física onde se dá o processo de solidificação ou fusão e $0 < T < +\infty$ o tempo máximo de interesse. φ e θ são respectivamente o campo de fases (*phase field*) e a temperatura. O parâmetro l é uma constante positiva relacionada com o calor latente; f está relacionado com a intensidade de fontes e sorvedouros de energia térmica na região do processo. $\partial/\partial\eta$ representa a derivada normal exterior na fronteira $\partial\Omega$ de Ω . No sistema (3), $a(x, t)$ e $b(x, t)$ são funções positivas e limitadas conhecidas; no sistema (4) a função $F : Q \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz algumas hipóteses que serão apresentadas e discutidas posteriormente. Em (3), Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^3$ e, em (4), um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$.

Neste trabalho estudaremos os modelos matemáticos (3) e (4) e obteremos resultados de existência, unicidade e regularidade de soluções para os respectivos modelos. Para isso, projetaremos problemas auxiliares adequados de tal forma que possamos definir um operador cujos pontos fixos sejam soluções do problema original.

Estaremos interessados também em estudar problemas de controle ótimo associados aos sistemas (3) e (4). Para isso, introduzimos o funcional de custo

$$\begin{aligned} J[\theta, \varphi; f] &:= \frac{\alpha_1}{2} \iint_Q |\theta(x, t) - \theta_d(x, t)|^{2k} dx dt \\ &+ \frac{\alpha_2}{2} \iint_Q |\varphi(x, t) - \varphi_d(x, t)|^{2m} dx dt + \frac{N}{2} \iint_Q |f(x, t)|^{2s} dx dt. \end{aligned} \quad (5)$$

Os inteiros $k, m \geq 1$ serão definidos posteriormente e para os pesos α_1 , α_2 e N

assumiremos que $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ e $N \geq 1$. As funções $\theta_d \in L^{2k}(Q)$ e $\varphi_d \in L^{2m}(Q)$ são dadas.

O problema de controle ótimo que vamos considerar é o de encontrar f_{opt} de tal forma que a temperatura θ e o campo de fases φ se tornem o mais próximo possível de θ_d e φ_d , ou seja, que minimizem o funcional (5). Para isso, necessitaremos estudar as propriedades do operador solução, que associa cada termo fonte f da equação na solução correspondente.

Obteremos resultados de existência de um controle ótimo para o funcional (5) associado ao sistema (3) e condições ótimas que devem ser satisfeitas por tal controle ótimo. Além disso, obteremos um resultado de unicidade para o problema de controle ótimo associado ao sistema (3). Apresentamos os mesmos resultados para o funcional (5) associado ao sistema (4).

O texto está organizado da seguinte maneira: no capítulo 1 introduzimos algumas notações e os espaços que serão usados, e destacaremos alguns resultados importantes que serão usados freqüentemente durante o texto.

No capítulo 2, estudaremos um problema auxiliar que será importante para o estudo do problema (3). Obteremos existência, unicidade e regularidade de soluções para o problema auxiliar. Na seção seguinte estudaremos o problema (3), onde obteremos também existência, unicidade e regularidade de soluções. Na última seção, estudaremos as propriedades do operador solução F , que aplica o termo fonte f de (3) na única solução correspondente (θ, φ) do problema (3), cujas propriedades são necessárias para o estudo de controle ótimo.

No capítulo 3, estudaremos um problema de controle ótimo, considerando para isso o funcional de custo (5) associado ao sistema (3). Provaremos a existência de um controle ótimo que minimiza tal funcional. Encontraremos também condições ótimas necessárias que devem ser satisfeitas por cada controle ótimo. Terminamos o capítulo obtendo um resultado de unicidade para tal controle ótimo, sob certas condições.

No capítulo 4, faremos um estudo do problema (4), análogo ao feito no capítulo 2, obtendo os mesmos resultados.

No capítulo 5, apresentaremos um estudo de um problema de controle ótimo

para o problema (4), onde consideraremos o funcional de custo (5). Provaremos a existência de um controle ótimo que minimiza o funcional considerado e condições ótimas necessárias que devem ser satisfeitas por cada controle ótimo.

Capítulo 1

Preliminares

Reservamos este capítulo para introduzir notações, definições e alguns resultados que serão utilizados durante todo o texto.

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um domínio aberto. Denotaremos por Q o cilindro espaço-tempo $\Omega \times (0, T]$ e por S o conjunto $\partial\Omega \times (0, T]$. Representaremos por η o vetor normal exterior de S . Como usual, $L^p(\Omega)$ denota o espaço de Banach das (classes de) funções mensuráveis f , definidas sobre Ω , pela qual

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty,$$

cuja norma é dada por

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

e $L^\infty(\Omega)$ denota o espaço de Banach das (classes de) funções mensuráveis f , definidas sobre Ω , que são essencialmente limitadas, com a norma dada por

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

Ao longo do texto denotaremos por $W_p^m(\Omega)$ o espaço de Banach de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que, para todo $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada no sentido das distribuições, munido da norma

$$\|u\|_{W_p^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Denotaremos por $W_p^{2,1}(Q)$ o espaço de Banach de todas as funções $w \in L^p(Q)$ tais que $D_x w, D_x^2 w, D_t w \in L^p(Q)$, munido da norma

$$\|u\|_{W_p^{2,1}(Q)} = \|u\|_{L^p(Q)} + \|D_x u\|_{L^p(Q)} + \|D_x^2 u\|_{L^p(Q)} + \|D_t u\|_{L^p(Q)}.$$

O teorema à seguir, devido à Lions-Peetre, pode ser encontrado em Lions [9]:

Teorema 1.1 *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira suficientemente suave e $1 \leq q < \infty$. Então:*

$$\begin{aligned} \text{se } \frac{1}{q} - \frac{2}{N+2} < 0, \quad & W_q^{2,1}(Q) \subset L^\infty(Q); \\ \text{se } \frac{1}{q} - \frac{2}{N+2} = 0, \quad & W_q^{2,1}(Q) \subset L^p(Q), \quad \forall p \in [q, \infty); \\ \text{se } \frac{1}{q} - \frac{2}{N+2} > 0, \quad & W_q^{2,1}(Q) \subset L^p(Q), \quad p = \left(\frac{1}{q} - \frac{2}{N+2} \right)^{-1}, \end{aligned}$$

com as imersões compactas.

Necessitaremos de um resultado da teoria L^p de equações diferenciais parabólicas lineares. Para isso, considere o seguinte problema parabólico linear:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(x, t) & \text{em } Q, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{em } S, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (1.1)$$

Teorema 1.2 *Sejam $q > 1$ e Ω um domínio do $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\partial\Omega$ suficientemente suave. Suponha que $f \in L^q(Q)$, $u_0 \in W_\infty^2(\Omega)$ e $\frac{\partial u_0}{\partial \eta} = 0$ em $\partial\Omega$. Então, existe uma única solução $u \in W_q^{2,1}(Q)$ do problema (1.1) satisfazendo a seguinte estimativa:*

$$\|u\|_{W_q^{2,1}(Q)} \leq C(\|f\|_{L^q(Q)} + \|u_0\|_{W_\infty^2(\Omega)}),$$

com C uma constante dependendo de T, q e Ω .

Uma versão mais elaborada deste resultado pode ser encontrada em Ladyzhenskaya *et al* [8], página 351.

Um outro resultado importante que utilizaremos em algumas demonstrações é o teorema do ponto fixo de Leray-Schauder:

Teorema 1.3 (Leray-Schauder) *Sejam X um espaço de Banach e $T : [a, b] \times X \rightarrow X$ uma transformação tal que $y = T(\lambda, x)$ com $x, y \in X$ e $\lambda \in [a, b]$. Suponha que:*

- a) $T(\lambda, x)$ está definida $\forall x \in X$ e $\forall \lambda \in [a, b]$;
- b) Para λ fixo, $T(\lambda, x)$ é contínua em X ;
- c) Para $x \in A$, $A \subset X$ limitado, $T(\lambda, x)$ é uniformemente contínua em λ ;
- d) Para λ fixo, $T(\lambda, x)$ é uma transformação compacta;
- e) Existe uma constante M tal que toda possível solução x de $x = T(\lambda, x)$ satisfaz $\|x\|_X \leq M$;
- f) A equação $x = T(a, x)$ tem uma única solução em X .

Então, existe uma solução da equação $x = T(b, x)$.

O próximo resultado será útil no estudo do problema de controle ótimo. Antes de enunciarmos, vamos relembrar algumas definições. Seja X um espaço topológico. Uma função $\varphi : X \rightarrow (-\infty, \infty]$ é dita *semicontínua inferiormente* se para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, o conjunto

$$\{x \in X; \varphi \leq \lambda\}$$

é fechado. Dizemos que φ é *convexa* se

$$\varphi(tx + (1 - t)y) \leq t\varphi(x) + (1 - t)\varphi(y), \quad \forall x, y \in X, \quad \forall t \in (0, 1).$$

Proposição 1.1 *Seja E um espaço de Banach e $\varphi : E \rightarrow (-\infty, \infty]$ uma função convexa, semicontínua inferiormente (na topologia forte). Então φ é semicontínua inferiormente na topologia fraca. Em particular, se $x_n \rightharpoonup x$ fracamente, então*

$$\varphi(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n).$$

Capítulo 2

Análise de um modelo de campo de fases

Neste capítulo estudaremos o modelo matemático de Hoffman e Jiang, e obteremos resultados de existência, unicidade e regularidade de soluções para tal modelo. Para isto, começamos estudando um problema auxiliar, no qual se obtém existência, unicidade e regularidade de soluções. As principais ferramentas utilizadas são o teorema do ponto fixo de Leray-Schauder, um resultado da teoria L^p de equações parabólicas lineares e argumentos do tipo *bootstrapping*. Terminamos o capítulo estudando o operador solução F , que aplica f na única solução correspondente (θ, φ) do modelo considerado, o qual é fundamental para o estudo de controle ótimo que será feito no capítulo seguinte.

2.1 Problema auxiliar

Consideremos o seguinte problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = av + bv^2 - v^3 + g & \text{em } Q, \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 & \text{em } S, \\ v(x, 0) = v_0(x) & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (2.1)$$

Teorema 2.1 *Suponha que $a, b \in L^\infty(Q)$, $g \in L^q(Q)$, com $q \geq 2$, e $v_0 \in W_\infty^2(\Omega)$ satisfazendo $\frac{\partial v_0}{\partial \eta} \Big|_{\partial\Omega} = 0$. Além disso, seja Ω um domínio com fronteira suficientemente suave. Então o problema (2.1) tem uma solução $v \in W_q^{2,1}(Q)$ que satisfaz*

$$\|v\|_{W_q^{2,1}(Q)} \leq C(1 + \|v_0\|_{W_\infty^2(\Omega)}^3 + \|g\|_{L^q(Q)}^3), \quad (2.2)$$

com C dependendo de $\|a\|_{L^\infty(Q)}$, $\|b\|_{L^\infty(Q)}$ e de Ω .

Demonstração. Aplicaremos o teorema do ponto fixo de Leray-Schauder. Consideremos então o operador T_λ , $0 \leq \lambda \leq 1$, definido sobre o espaço de Banach $B = L^9(Q)$, que leva cada $w \in B$ em v , que é solução do problema

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = \lambda(aw + bw^2 - w^3) + \lambda g & \text{em } Q, \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 & \text{em } S, \\ v(x, 0) = v_0(x) & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (2.3)$$

É claro que $\lambda(aw + bw^2 - w^3) + \lambda g \in L^{\bar{q}}(Q)$, com $\bar{q} := \min(3, q)$. Pelo Teorema 1.2, segue então que existe uma única solução v do problema (2.3) com $v \in W_{\bar{q}}^{2,1}(Q)$.

Do Teorema 1.1, obtemos $v \in L^\mu(Q)$, com μ satisfazendo

$$\mu = \begin{cases} \infty & \text{se } \frac{1}{\bar{q}} - \frac{2}{5} < 0 \\ \text{qualquer número positivo} & \text{se } \frac{1}{\bar{q}} - \frac{2}{5} = 0 \\ \left(\frac{1}{\bar{q}} - \frac{2}{5}\right)^{-1} & \text{se } \frac{1}{\bar{q}} - \frac{2}{5} > 0 \end{cases}$$

Em qualquer caso, pelo fato de $\bar{q} \geq 2$, temos

$$\mu = \frac{1}{\frac{1}{\bar{q}} - \frac{2}{5}} \geq \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{2}{5}} = 10,$$

portanto podemos considerar $v \in L^{10}(Q)$. Isto significa que o operador T_λ está bem definido e ele aplica $L^9(Q)$ em $L^9(Q)$.

Agora provaremos a continuidade de $T_\lambda : L^9(Q) \rightarrow L^9(Q)$, para todo $0 \leq \lambda \leq 1$. Para isso, considere $v_i = T_\lambda w_i$ ($i = 1, 2$) para $w_1, w_2 \in L^9(Q)$ e denote $V := v_1 - v_2$. De (2.3), V satisfaz o problema

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} - \Delta V = \lambda d(w_1 - w_2) & \text{em } Q, \\ \frac{\partial V}{\partial \eta} = 0 & \text{em } S, \\ V(x, 0) = 0 & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

onde $d := a + b(w_1 + w_2) + (w_1^2 + w_1 w_2 + w_2^2) \in L^{9/2}(Q)$. Pelo Teorema 1.2, existe $C > 0$ tal que

$$\|V\|_{W_2^{2,1}(Q)}^2 \leq C \iint_Q |d(x, t)|^2 |w_1(x, t) - w_2(x, t)|^2 dx dt.$$

Pela desigualdade de Hölder, temos

$$\iint_Q |d|^2 |w_1 - w_2|^2 dx dt \leq \|d^2\|_{L^{9/7}(Q)} \|(w_1 - w_2)^2\|_{L^{9/2}(Q)}.$$

Mas

$$\|(w_1 - w_2)^2\|_{L^{9/2}(Q)}^{9/2} = \iint_Q |w_1 - w_2|^9 dx dt = \|w_1 - w_2\|_{L^9(Q)}^9.$$

Logo $\|(w_1 - w_2)^2\|_{L^{9/2}(Q)} = \|w_1 - w_2\|_{L^9(Q)}^2$ e portanto

$$\|V\|_{W_2^{2,1}(Q)}^2 \leq C \|d^2\|_{L^{9/7}(Q)} \|w_1 - w_2\|_{L^9(Q)}^2.$$

Aplicando novamente o Teorema 1.1, obtemos a continuidade de T_λ como um operador de $L^9(Q)$ em $L^9(Q)$, para qualquer parâmetro λ . Este mesmo Teorema nos

diz que a imersão de $W_q^{2,1}(Q)$ em $L^9(Q)$ é compacta. Portanto T_λ é também um operador compacto sobre o espaço de Banach B . Além disso T_λ é contínuo em relação a λ para qualquer $w \in B$. De fato, sejam $0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 1$ e denote $G(x, t) := (aw + bw^2 - w^3) + g$. Pelo Teorema 1.2, temos

$$\|V\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C|\lambda_1 - \lambda_2| \|G(x, t)\|_{L^2(Q)},$$

donde se segue a continuidade de T_λ em relação a λ .

Para $\lambda = 0$ a equação de (2.3) tem uma única solução com relação às condições inicial e de fronteira correspondentes. Assim, podemos completar a prova do teorema estimando o conjunto de todos os pontos fixos de T_λ em B . Cada ponto fixo $v \in B$ satisfaz a seguinte equação parabólica não-linear

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = \lambda(av + bv^2 - v^3) + \lambda g & \text{em } Q \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 & \text{em } S \\ v(x, 0) = v_0(x) & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (2.4)$$

Multiplicando a equação em (2.4) por v e integrando em Ω , obtemos

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial v}{\partial t} dx - \int_{\Omega} v \Delta v dx = \lambda \int_{\Omega} (av^2 + bv^3 - v^4) dx + \lambda \int_{\Omega} v g dx$$

ou ainda, pela desigualdade de Young e o teorema de Green,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} v^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \lambda \int_{\Omega} (v^4 - bv^3 - av^2) dx \leq \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} v^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} g^2 dx.$$

Assim, obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} v^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \lambda \int_{\Omega} (v^4 - bv^3 - (a + \frac{1}{2})v^2) dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} g^2 dx.$$

Seja $\tilde{a}(x, t) := a(x, t) + \frac{1}{2}$. Como $a \in L^\infty(Q)$, temos também que $\tilde{a} \in L^\infty(Q)$.

Considere $C > 0$ tal que $C \geq \max_{\substack{y \in \mathbb{R} \\ (x, t) \in Q}} \left\{ \tilde{a}(x, t)y^2 + b(x, t)y^3 - \frac{1}{2}y^4 \right\}$. Então

$$\tilde{a}v^2 + bv^3 - \frac{1}{2}v^4 \leq C$$

e portanto

$$\frac{1}{2}v^4 - C \leq v^4 - bv^3 - \tilde{a}v^2.$$

Logo

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} v^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \lambda \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} v^4 - C \right) dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} g^2 dx.$$

Integrando em t , obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx dt + \lambda \int_0^t \int_{\Omega} v^4 dx dt \\ \leq C_1 (\|g\|_{L^2(Q)}^2 + \|v_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + 1), \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde C_1 depende de T e de $\max_{\substack{y \in \mathbb{R} \\ (x,t) \in Q}} \left\{ \tilde{a}(x,t)y^2 + b(x,t)y^3 - \frac{1}{2}y^4 \right\}$.

Multiplicando agora a equação em (2.4) por $\frac{\partial v}{\partial t}$ e integrando em Ω , obtemos

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial t} \Delta v dx = \lambda \int_{\Omega} (av + bv^2 - v^3) \frac{\partial v}{\partial t} dx + \lambda \int_{\Omega} g \frac{\partial v}{\partial t} dx,$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \frac{\lambda}{4} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} v^4 dx \\ = \lambda \int_{\Omega} (av + bv^2) \frac{\partial v}{\partial t} dx + \lambda \int_{\Omega} g \frac{\partial v}{\partial t} dx. \end{aligned}$$

Integrando em t ,

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v_0|^2 dx + \frac{\lambda}{4} \int_{\Omega} v^4 dx \\ - \frac{\lambda}{4} \int_{\Omega} v_0^4 dx = \lambda \int_0^t \int_{\Omega} (av + bv^2) \frac{\partial v}{\partial t} dx dt + \lambda \int_0^t \int_{\Omega} g \frac{\partial v}{\partial t} dx dt. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Young, o fato de $a, b \in L^\infty(Q)$ e $L^4(Q) \subset L^2(Q)$, temos

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v_0|^2 dx + \frac{\lambda}{4} \int_\Omega v^4 dx - \frac{\lambda}{4} \int_\Omega v_0^4 dx \\
& \leq \|a\|_{L^\infty(Q)} \left(\epsilon \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_{L^2(Q)}^2 + \delta(\epsilon) \|v\|_{L^2(Q)}^2 \right) \\
& + \|b\|_{L^\infty(Q)} \left(\epsilon \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_{L^2(Q)}^2 + \delta(\epsilon) \|v\|_{L^4(Q)}^4 \right) + \epsilon \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_{L^2(Q)}^2 + \delta(\epsilon) \|g\|_{L^2(Q)}^2 \\
& \leq \|a\|_{L^\infty(Q)} \left(\epsilon \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_{L^2(Q)}^2 + \tilde{C} \delta(\epsilon) \|v\|_{L^4(Q)}^2 \right) \\
& + \|b\|_{L^\infty(Q)} \left(\epsilon \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_{L^2(Q)}^2 + \delta(\epsilon) \|v\|_{L^4(Q)}^4 \right) + \epsilon \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_{L^2(Q)}^2 + \delta(\epsilon) \|g\|_{L^2(Q)}^2.
\end{aligned}$$

Tomando $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e usando (2.5), obtemos

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \lambda \int_\Omega v^4 dx + \int_0^t \int_\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx dt \\
& \leq C_2 (\|g\|_{L^2(Q)}^2 + \|v_0\|_{L^4(\Omega)}^4 + \|\nabla v_0\|_{L^2(\Omega)}^2), \tag{2.6}
\end{aligned}$$

onde C_2 depende de $\|a\|_{L^\infty(Q)}$, $\|b\|_{L^\infty(Q)}$, de T e de C_1 .

Finalmente, multiplicando a equação em (2.4) por Δv e integrando em Ω , obtemos

$$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial t} \Delta v dx - \int_\Omega (\Delta v)^2 dx = \lambda \int_\Omega (av + bv^2 - v^3) \Delta v dx + \lambda \int_\Omega g \Delta v dx,$$

ou ainda

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \int_\Omega (\Delta v)^2 dx - 3\lambda \int_\Omega v^2 |\nabla v|^2 dx \\
& = \lambda \int_\Omega (av + bv^2) \Delta v dx + \lambda \int_\Omega g \Delta v dx.
\end{aligned}$$

Integrando em t ,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v_0|^2 dx + \int_0^t \int_\Omega (\Delta v)^2 dx dt + 3\lambda \int_0^t \int_\Omega v^2 |\nabla v|^2 dx dt \\
& = -\lambda \int_0^t \int_\Omega (av + bv^2) \Delta v dx dt - \lambda \int_0^t \int_\Omega g \Delta v dx dt.
\end{aligned}$$

Pelos mesmos argumentos do caso anterior, obtemos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v_0|^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta v)^2 dx dt + 3\lambda \int_0^t \int_{\Omega} v^2 |\nabla v|^2 dx dt \\
& \leq \int_0^t \int_{\Omega} |a| |v| |\Delta v| dx dt + \int_0^t \int_{\Omega} |b| |v|^2 |\Delta v| dx dt + \int_0^t \int_{\Omega} |g| |\Delta v| dx dt \\
& \leq \|a\|_{L^\infty(Q)} (\delta(\epsilon) \|v\|_{L^2(Q)}^2 + \epsilon \|\Delta v\|_{L^2(Q)}^2) \\
& + \|b\|_{L^\infty(Q)} (\delta(\epsilon) \|v\|_{L^4(Q)}^4 + \epsilon \|\Delta v\|_{L^2(Q)}^2) + \delta(\epsilon) \|g\|_{L^2(Q)}^2 + \epsilon \|\Delta v\|_{L^2(Q)}^2 \\
& \leq \|a\|_{L^\infty(Q)} (C\delta(\epsilon) \|v\|_{L^4(Q)}^2 + \epsilon \|\Delta v\|_{L^2(Q)}^2) \\
& + \|b\|_{L^\infty(Q)} (\delta(\epsilon) \|v\|_{L^4(Q)}^4 + \epsilon \|\Delta v\|_{L^2(Q)}^2) + \delta(\epsilon) \|g\|_{L^2(Q)}^2 + \epsilon \|\Delta v\|_{L^2(Q)}^2.
\end{aligned}$$

Tomando $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, segue então que

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} |\Delta v|^2 dx dt + \lambda \int_0^t \int_{\Omega} v^2 |\Delta v|^2 dx dt \\
& \leq C_3 (\|g\|_{L^2(Q)}^2 + \|v_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla v_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + 1), \tag{2.7}
\end{aligned}$$

com C_3 dependendo de $\|a\|_{L^\infty(Q)}$, $\|b\|_{L^\infty(Q)}$, T e de C_1 .

De (2.5), (2.6) e (2.7) obtemos

$$\|v\|_{L^9(Q)} \leq C \|v\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C',$$

onde C e C' são constantes que independem de λ . Portanto podemos aplicar o teorema de ponto fixo de Leray-Schauder que garante a existência de um ponto fixo v do operador T_1 , isto é, $v = T_1 v$ e $v \in L^9(Q) \cap W_2^{2,1}(Q)$. Esta função é uma solução do problema (2.1). Resta então mostrar que $v \in W_q^{2,1}(Q)$ e satisfaz a estimativa (2.2).

Para isso definimos $G := av + bv^2 - v^3 + g$, analisamos os casos $q \leq 3$ e $q > 3$ e usamos um argumento de *bootstrapping*. Se $q \leq 3$, então $G \in L^q(Q)$ e portanto pelo Teorema 1.2, $v \in W_q^{2,1}(Q)$. Se $q > 3$, temos que $G \in L^3(Q)$ e conseqüentemente $v \in W_3^{2,1}(Q)$. Pelo Teorema 1.1 podemos concluir que $v \in L^\infty(Q)$ e portanto $G \in L^q(Q)$. Segue então que $v \in W_q^{2,1}(Q)$. Vamos provar a desigualdade (2.2)

primeiro para o caso $2 \leq q \leq 3$. Pelo Teorema 1.2 temos

$$\begin{aligned}
\|v\|_{W_q^{2,1}(Q)} &\leq C(\|v_0\|_{W_\infty^2(\Omega)} + \|G\|_{L^q(Q)}) \\
&\leq C(\|v_0\|_{W_\infty^2(\Omega)} + \|v\|_{L^{3q}(Q)} + \|v\|_{L^{3q}(Q)}^2 + \|v\|_{L^{3q}(Q)}^3 + \|g\|_{L^q(Q)}) \\
&\leq C(1 + \|v_0\|_{W_\infty^2(\Omega)} + \|v\|_{L^{3q}(Q)}^3 + \|g\|_{L^q(Q)}) \\
&\leq C(1 + \|v_0\|_{W_\infty^2(\Omega)} + \|v\|_{W_2^{2,1}(Q)}^3 + \|g\|_{L^q(Q)}) \\
&\leq C(1 + \|v_0\|_{W_\infty^2(\Omega)}^3 + \|v\|_{W_2^{2,1}(Q)}^3 + \|g\|_{L^q(Q)}^3).
\end{aligned}$$

Usamos agora as desigualdades (2.5)-(2.7) para obter a estimativa (2.2) no caso em que $2 \leq q \leq 3$. Se $q > 3$, pelo que foi feito acima, temos

$$\|v\|_{W_3^{2,1}(Q)} \leq C(1 + \|v_0\|_{W_\infty^2(\Omega)} + \|g\|_{L^q(Q)}). \quad (2.8)$$

Para $q > 3$, $v \in L^\infty(Q)$ e pelo Teorema 1.1, $W_3^{2,1}(Q) \subset L^\infty(Q)$. Assim, pelo Teorema 1.2,

$$\begin{aligned}
\|v\|_{W_q^{2,1}(Q)} &\leq C(\|v_0\|_{W_\infty^2(\Omega)} + \|G\|_{L^q(Q)}) \\
&\leq C(\|v_0\|_{W_\infty^2(\Omega)} + \|v\|_{L^{3q}(Q)}^3 + \|g\|_{L^q(Q)}) \\
&\leq C(\|v_0\|_{W_\infty^2(\Omega)} + \|v\|_{L^\infty(Q)}^3 + \|g\|_{L^q(Q)}) \\
&\leq C(\|v_0\|_{W_\infty^2(\Omega)} + \|v\|_{W_3^{2,1}(Q)}^3 + \|g\|_{L^q(Q)}) \quad (2.9)
\end{aligned}$$

De (2.8) e (2.9) segue a estimativa (2.2). $\square$

Vamos provar agora um resultado de dependência contínua de soluções em relação ao termo fonte g da equação que garante unicidade do problema (2.1) como um corolário.

Teorema 2.2 *Sejam $g_i \in L^q(Q)$ e $v_i \in W_q^{2,1}(Q)$ ($i = 1, 2$) soluções correspondentes do problema (2.1). Sob as mesmas hipóteses do Teorema 2.1, a seguinte desigualdade de estabilidade é válida:*

$$\|v_1 - v_2\|_{W_q^{2,1}(Q)} \leq C\|g_1 - g_2\|_{L^q(Q)}, \quad (2.10)$$

onde a constante C depende de $\|v_i\|_{W_q^{2,1}(Q)}$ ($i = 1, 2$).

Demonstração. Observe primeiro que $v := v_1 - v_2$ satisfaz o seguinte problema de valor inicial e de fronteira:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = Dv + (g_1 - g_2) & \text{em } Q \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 & \text{em } S \\ v(x, 0) = 0 & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (2.11)$$

onde escrevemos $D := a + b(v_1 + v_2) - (v_1^2 + v_1v_2 + v_2^2)$. Aplicando a desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned} D &\leq a + \frac{b^2}{2} + \frac{1}{2}(v_1 + v_2)^2 - (v_1^2 + v_1v_2 + v_2^2) \\ &= a + \frac{b^2}{2} + \frac{1}{2}(v_1^2 + 2v_1v_2 + v_2^2) - (v_1^2 + v_1v_2 + v_2^2) \\ &\leq a + b^2. \end{aligned}$$

Logo, obtemos

$$\max_Q D \leq \max_Q (a + b^2) =: B. \quad (2.12)$$

Multiplicando a equação do problema (2.11) por $e^{-2Bt}v(x, t)$ e integrando em Ω , temos

$$\int_{\Omega} e^{-2Bt} v \frac{\partial v}{\partial t} dx - \int_{\Omega} e^{-2Bt} v \Delta v dx = \int_{\Omega} e^{-2Bt} D v^2 dx + \int_{\Omega} e^{-2Bt} v (g_1 - g_2) dx$$

ou ainda

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} e^{-2Bt} v^2 dx + B \int_{\Omega} e^{-2Bt} v^2 dx - \int_{\Omega} e^{-2Bt} |\nabla v|^2 dx \\ &= \int_{\Omega} e^{-2Bt} D v^2 dx + \int_{\Omega} e^{-2Bt} v (g_1 - g_2) dx. \end{aligned}$$

Integrando em t , usando a desigualdade de Young e (2.12) obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_{\Omega} e^{-2Bt} v^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} e^{-2Bt} |\nabla v|^2 dx dt \\ &= \int_0^t \int_{\Omega} (D - B) e^{-2Bt} v^2 dx dt + \int_0^t \int_{\Omega} e^{-Bt} (g_1 - g_2) e^{-Bt} v dx dt \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} e^{-2Bt} (g_1 - g_2)^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} e^{-2Bt} v^2 dx dt. \end{aligned}$$

Pelo Lema de Gronwall,

$$\int_{\Omega} e^{-2Bt} v^2 dx + 2 \int_0^t \int_{\Omega} e^{-2Bt} |\nabla v|^2 dx dt \leq e^t \int_0^t \int_{\Omega} e^{-2Bt} (g_1 - g_2)^2 dx dt.$$

Assim, chegamos em

$$\int_{\Omega} v^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx dt \leq C \int_0^t \int_{\Omega} |g_1 - g_2|^2 dx dt. \quad (2.13)$$

Multiplicando a equação em (2.11) por $\frac{\partial v}{\partial t}$ e integrando em Ω , temos

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial t} \Delta v dx = \int_{\Omega} Dv \frac{\partial v}{\partial t} dx + \int_{\Omega} (g_1 - g_2) \frac{\partial v}{\partial t} dx$$

ou ainda, pela desigualdade de Young

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx &= \int_{\Omega} Dv \frac{\partial v}{\partial t} dx + \int_{\Omega} (g_1 - g_2) \frac{\partial v}{\partial t} dx \\ &\leq \int_{\Omega} Dv \frac{\partial v}{\partial t} dx + \int_{\Omega} |g_1 - g_2|^2 dx + \frac{1}{4} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx. \end{aligned}$$

Integrando em t e usando a desigualdade de Hölder, segue que

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx &= \int_0^t \int_{\Omega} (Dv + (g_1 - g_2)) \frac{\partial v}{\partial t} dx dt \\ &\leq \left(\int_0^t \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx dt \right)^{1/2} \left(\int_0^t \int_{\Omega} v^{10/3} dx dt \right)^{3/10} \left(\int_0^t \int_{\Omega} D^5 dx dt \right)^{1/5} \\ &\quad + \int_0^t \int_{\Omega} (g_1 - g_2)^2 dx dt + \frac{1}{4} \int_0^t \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx dt. \end{aligned}$$

Pela definição de D temos ainda

$$\begin{aligned} \|D\|_{L^5(Q)} &\leq \|a\|_{L^5(Q)} + \|b(v_1 + v_2)\|_{L^5(Q)} + \|v_1^2\|_{L^5(Q)} + \|v_1 v_2\|_{L^5(Q)} + \|v_2^2\|_{L^5(Q)} \\ &\leq C \|a\|_{L^\infty(Q)} + C \|b\|_{L^\infty(Q)} (\|v_1\|_{L^{10}(Q)} + \|v_2\|_{L^{10}(Q)}) \\ &\quad + \|v_1\|_{L^{10}(Q)}^2 + \|v_1\|_{L^{10}(Q)} \|v_2\|_{L^{10}(Q)} + \|v_2\|_{L^{10}(Q)}^2 \\ &\leq C' (\|v_1\|_{L^{10}(Q)}^2 + \|v_2\|_{L^{10}(Q)}^2 + 1). \end{aligned}$$

Usando isso e a desigualdade de Young, chegamos em

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx dt \\ \leq C \left(\int_0^t \int_{\Omega} (g_1 - g_2)^2 dx dt + \left(\int_0^t \int_{\Omega} v^{10/3} dx dt \right)^{3/5} \right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Multiplicando a equação em (2.11) por Δv , obtemos de maneira análoga

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta v)^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx dt \\ & \leq C \left(\int_0^t \int_{\Omega} (g_1 - g_2)^2 dx dt + \left(\int_0^t \int_{\Omega} v^{10/3} dx dt \right)^{3/5} \right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Ambas constantes C em (2.14) e (2.15) dependem de $\|v_1\|_{L^{10}(Q)}$ e $\|v_2\|_{L^{10}(Q)}$. Somando as estimativas (2.13)-(2.15) acima, obtemos

$$\|v\|_{W_2^{2,1}(Q)}^2 \leq C(\|v_1\|_{L^{10}(Q)}, \|v_2\|_{L^{10}(Q)}) (\|v\|_{L^{10/3}(Q)}^2 + \|g_1 - g_2\|_{L^2(Q)}^2)$$

Sendo a imersão $W_2^{2,1}(Q)$ em $L^{10/3}(Q)$ compacta, a seguinte desigualdade é válida:

$$\|v\|_{L^{10/3}(Q)}^2 \leq \epsilon \|v\|_{W_2^{2,1}(Q)}^2 + \eta(\epsilon) \|v\|_{L^2(Q)}^2.$$

Tomando $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e considerando (2.13), finalmente chegamos em

$$\|v\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C \|g_1 - g_2\|_{L^2(Q)},$$

o que prova o teorema no caso $q = 2$. Para $2 < q \leq \frac{5}{2}$ sabemos do Teorema 2.1 que $v_i \in W_q^{2,1}(Q) \cap L^{10}(Q)$, $i = 1, 2$. Assim, aplicando o Teorema 1.2 no problema (2.11), obtemos

$$\begin{aligned} \|v\|_{W_q^{2,1}(Q)} & \leq C(\|Dv\|_{L^q(Q)} + \|g_1 - g_2\|_{L^q(Q)}) \\ & \leq C'(\|Dv\|_{L^{5/2}(Q)} + \|g_1 - g_2\|_{L^q(Q)}) \\ & \leq C'(\|D^{5/2}\|_{L^2(Q)}^{5/2} \|v^{5/2}\|_{L^2(Q)}^{5/2} + \|g_1 - g_2\|_{L^q(Q)}) \\ & = C'(\|D\|_{L^5(Q)} \|v\|_{L^5(Q)} + \|g_1 - g_2\|_{L^q(Q)}) \\ & \leq C(\|v_1\|_{L^{10}(Q)}, \|v_2\|_{L^{10}(Q)}) (\epsilon \|v\|_{W_q^{2,1}(Q)} + \eta(\epsilon) \|v\|_{L^2(Q)} + \|g_1 - g_2\|_{L^q(Q)}). \end{aligned}$$

Escolhendo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e usando (2.13) novamente obtemos

$$\|v\|_{W_q^{2,1}(Q)} \leq C \|g_1 - g_2\|_{L^q(Q)}.$$

Se $\frac{5}{2} \leq q < \infty$, do Teorema 1.1 segue que $v_i \in W_q^{2,1}(Q) \cap L^\infty(Q)$ ($i = 1, 2$). Logo

$$\begin{aligned} \|v\|_{W_q^{2,1}(Q)} & \leq C(\|Dv\|_{L^q(Q)} + \|g_1 - g_2\|_{L^q(Q)}) \\ & \leq C(\|D\|_{L^\infty(Q)} \|v\|_{L^q(Q)} + \|g_1 - g_2\|_{L^q(Q)}) \\ & \leq C'(\epsilon \|v\|_{W_q^{2,1}(Q)} + \eta(\epsilon) \|v\|_{L^2(Q)} + \|g_1 - g_2\|_{L^q(Q)}). \end{aligned}$$

Escolhendo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, chegamos no resultado. $\square$

Corolário 2.1 *A solução do problema (2.1) é única.*

2.2 Existência, unicidade e regularidade de solução

Nesta seção voltamos nossa atenção ao problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta \varphi = a\varphi + b\varphi^2 - \varphi^3 + \theta & \text{em } Q, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta = -l \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f & \text{em } Q, \\ \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 & \text{em } S, \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x) & \text{em } \Omega, \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x) & \text{em } \Omega, \end{array} \right. \quad (2.16)$$

e começamos provando o principal resultado deste capítulo.

Teorema 2.3 *Suponha que $a, b \in L^\infty(Q)$, $f \in L^q(Q)$ ($q \geq 2$) e $\theta_0, \varphi_0 \in W_\infty^2(\Omega)$ com $\frac{\partial \theta_0}{\partial \eta} \Big|_{\partial \Omega} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} \Big|_{\partial \Omega} = 0$. Além disso, suponha que $l > 0$ seja uma constante e Ω um domínio limitado com fronteira suficientemente suave. Então existe uma solução $(\theta, \varphi) \in W_q^{2,1}(Q) \times W_p^{2,1}(Q)$ do problema (2.16), onde*

$$p = \begin{cases} \left(\frac{1}{q} - \frac{2}{5} \right)^{-1} & \text{se } 2 \leq q < \frac{5}{2} \\ \text{qualquer número positivo} & \text{se } \frac{5}{2} \leq q < \infty \end{cases} \quad (2.17)$$

Mais ainda, a seguinte estimativa é válida:

$$\|\theta\|_{W_q^{2,1}(Q)} + \|\varphi\|_{W_p^{2,1}(Q)} \leq C(1 + \|\theta_0\|_{W_\infty^2(Q)}^3 + \|\varphi_0\|_{W_\infty^2(Q)}^3 + \|f\|_{L^q(Q)}^3), \quad (2.18)$$

com C dependendo de $\|a\|_{L^\infty(Q)}$, $\|b\|_{L^\infty(Q)}$, T , l .

Demonstração. Aplicaremos o teorema de ponto fixo de Leray-Schauder no espaço de Banach

$$B = \{(\theta, \varphi); \theta \in L^3(Q), \varphi \in L^9(Q)\}.$$

Para isso, consideremos o operador $T_\lambda : B \rightarrow B$, $0 \leq \lambda \leq 1$, que leva cada $(\nu, \psi) \in B$ na solução correspondente (θ, φ) do problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta = \lambda \left(-l \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f \right) & \text{em } Q, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta \varphi + (\varphi^3 - b\varphi^2 - a\varphi) = \lambda \nu & \text{em } Q, \\ \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 & \text{em } S, \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x) & \text{em } \Omega, \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x) & \text{em } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.19)$$

De acordo com os resultados do Teorema 2.1 existe uma solução $\varphi \in W_3^{2,1}(Q) \cap L^\infty(Q)$ da segunda equação de (2.19). Então para a primeira equação de (2.19), do fato de termos do lado direito $-l \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f \in L^{\bar{q}}(Q)$, $\bar{q} = \min\{3, q\} \geq 2$, temos, pelo Teorema 2.1 e o Teorema 1.1, que $\theta \in W_{\bar{q}}^{2,1}(Q) \cap L^{10}(Q)$. Portanto a aplicação T_λ está bem definida de B em B . Para provar a continuidade de T_λ , sejam $(\nu_i, \psi_i) \in B$ ($i = 1, 2$) e (θ_i, φ_i) as soluções correspondentes de (2.19). Pelo Teorema 2.2, sabemos que

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{W_3^{2,1}(Q)} \leq C \|\nu_1 - \nu_2\|_{L^3(Q)}$$

e do Teorema 1.2

$$\begin{aligned} \|\theta_1 - \theta_2\|_{W_3^{2,1}(Q)} &\leq C \left\| \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \right\|_{L^3(Q)} \\ &\leq C \|\nu_1 - \nu_2\|_{L^3(Q)} \end{aligned}$$

Portanto T_λ é contínuo em (ν, ψ) para todo $0 \leq \lambda \leq 1$. Sejam agora $0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 1$ e (θ_1, φ_1) e (θ_2, φ_2) as soluções correspondentes. Pelo Teorema 2.2, temos para a segunda equação de (2.19)

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{W_3^{2,1}(Q)} \leq C|\lambda_1 - \lambda_2|\|\nu\|_{L^3(Q)}. \quad (2.20)$$

Para a segunda equação de (2.19), usando o Teorema 1.2 e (2.20), obtemos

$$\begin{aligned} \|\theta_1 - \theta_2\|_{W_3^{2,1}(Q)} &\leq C \left(\left\| -\lambda_1 l \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \lambda_2 l \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \right\|_{L^3(Q)} + |\lambda_1 - \lambda_2| \|f\|_{L^3(Q)} \right) \\ &\leq C|\lambda_1 - \lambda_2| \left(\left\| \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \right\|_{L^3(Q)} + \lambda_2 \left\| \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \right\|_{L^3(Q)} + |\lambda_1 - \lambda_2| \|f\|_{L^3(Q)} \right) \\ &\leq C|\lambda_1 - \lambda_2| \left(\left\| \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \right\|_{L^3(Q)} + \|\nu\|_{L^3(Q)} + \|f\|_{L^3(Q)} \right). \end{aligned} \quad (2.21)$$

A continuidade de T_λ em relação a λ segue de (2.20) e (2.21).

Pelo Teorema 1.1 concluímos também que T_λ é um operador compacto.

Para $\lambda = 0$, (2.19) tem uma única solução satisfazendo as condições iniciais e de fronteira. Resta agora estimar o conjunto de todos os pontos fixos de T_λ . Seja $(\theta, \varphi) \in B$ um tal ponto fixo. Este ponto fixo é uma solução do problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta = \lambda \left(-l \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f \right) & \text{em } Q, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta \varphi = (a\varphi + b\varphi^2 - \varphi^3) + \lambda \theta & \text{em } Q, \\ \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 & \text{em } S, \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x) & \text{em } \Omega, \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x) & \text{em } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.22)$$

Multiplicando a primeira equação de (2.22) por $(\theta + \lambda l \varphi)$ e integrando em Ω obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \theta \frac{\partial \theta}{\partial t} dx + \lambda l \int_{\Omega} \varphi \frac{\partial \theta}{\partial t} dx - \int_{\Omega} \theta \Delta \theta dx - \lambda l \int_{\Omega} \varphi \Delta \theta dx = -\lambda l \int_{\Omega} \theta \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx \\ - \lambda^2 l^2 \int_{\Omega} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx + \lambda \int_{\Omega} (\theta + \lambda l \varphi) f dx \end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \theta^2 dx + \lambda l \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \theta \varphi dx + \frac{\lambda^2 l^2}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varphi^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla \theta|^2 dx \\ + \lambda l \int_{\Omega} \nabla \theta \nabla \varphi dx = \lambda \int_{\Omega} (\theta + \lambda l \varphi) f dx \end{aligned}$$

Integrando em t ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\theta + \lambda l \varphi)^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\theta_0 + \lambda l \varphi_0)^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla \theta|^2 dx dt \\ + \lambda l \int_0^t \int_{\Omega} \nabla \theta \nabla \varphi dx dt = \lambda \int_0^t \int_{\Omega} (\theta + \lambda l \varphi) f dx dt. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Multiplicando agora a segunda equação de (2.22) por φ e integrando em Ω obtemos

$$\int_{\Omega} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx - \int_{\Omega} \varphi \Delta \varphi dx = \int_{\Omega} (a\varphi^2 + b\varphi^3 - \varphi^4) dx + \lambda \int_{\Omega} \theta \varphi dx$$

ou ainda

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varphi^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx = \int_{\Omega} (a\varphi^2 + b\varphi^3 - \varphi^4) dx + \lambda \int_{\Omega} \theta \varphi dx.$$

Integrando em t ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varphi^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varphi_0^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx dt \\ + \int_0^t \int_{\Omega} (\varphi^4 - b\varphi^3 - a\varphi^2) dx dt = \lambda \int_0^t \int_{\Omega} \theta \varphi dx dt \end{aligned} \quad (2.24)$$

Multiplicando (2.24) por A , somando com (2.23) e usando a desigualdade de Young, obtemos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{\Omega} ((\theta + \lambda l \varphi)^2 + A \varphi^2) dx + \int_0^t \int_{\Omega} (|\nabla \theta|^2 + l \lambda \nabla \theta \nabla \varphi + A |\nabla \varphi|^2) dx dt \\
& \quad + \int_0^t \int_{\Omega} A (\varphi^4 - b \varphi^3 - a \varphi^2) dx dt = \frac{1}{2} \int_{\Omega} A \varphi_0^2 dx \\
& \quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\theta_0 + \lambda l \varphi_0)^2 dx + \lambda \int_0^t \int_{\Omega} A \theta \varphi dx dt + \lambda \int_0^t \int_{\Omega} (\theta + \lambda l \varphi) f dx dt \\
& \leq \frac{A}{2} \int_{\Omega} \varphi_0^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\theta_0 + \lambda l \varphi_0)^2 dx + \frac{A}{2} \int_0^t \int_{\Omega} \theta^2 dx dt + \frac{A}{2} \int_0^t \int_{\Omega} \varphi^2 dx dt \\
& \quad + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} (\theta + \lambda l \varphi)^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} f^2 dx dt,
\end{aligned}$$

onde $A > 0$ é um número arbitrário. Escolhendo $A := 1 + \frac{1}{2} \lambda^2 l^2$, temos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left((\theta + \lambda l \varphi)^2 + \left(1 + \frac{1}{2} \lambda^2 l^2 \right) \varphi^2 \right) dx \\
& = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{6} \theta^2 + 3 \left(\frac{1}{3} \theta + \frac{1}{2} \lambda l \varphi \right)^2 + \frac{1}{2} \varphi^2 \right) dx \\
& \geq \int_{\Omega} \left(\frac{1}{6} \theta^2 + \frac{1}{2} \varphi^2 \right) dx
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_{\Omega} \left(|\nabla \theta|^2 + \lambda l \nabla \theta \nabla \varphi + \left(1 + \frac{1}{2} \lambda^2 l^2 \right) |\nabla \varphi|^2 \right) dx dt = \\
& = \int_0^t \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla \theta|^2 + \frac{1}{2} (\nabla \theta + \lambda l \nabla \varphi)^2 + |\nabla \varphi|^2 \right) dx dt \\
& \geq \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} (|\nabla \theta|^2 + |\nabla \varphi|^2) dx dt.
\end{aligned}$$

Considerando agora $C_1 > 0$ tal que $C_1 \geq \max_{\substack{y \in \mathbb{R} \\ (x,t) \in Q}} \left\{ a(x,t)y^2 + b(x,t)y^3 - \frac{y^4}{2} \right\}$, obtemos como antes

$$\frac{1}{2} \varphi^4 - C_1 \leq \varphi^4 - b \varphi^3 - a \varphi^2.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\varphi^2 + \theta^2) dx + \int_0^t \int_{\Omega} (|\nabla \theta|^2 + |\nabla \varphi|^2) dx dt + \int_0^t \int_{\Omega} \varphi^4 dx dt &\leq C(\|\varphi_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &+ \|\theta_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \int_{\Omega} \theta^2 dx dt + \int_0^t \int_{\Omega} \varphi^2 dx dt + \int_0^t \int_{\Omega} f^2 dx dt + 1). \end{aligned}$$

Pelo Lema de Gronwall,

$$\int_{\Omega} \theta^2 dx + \int_{\Omega} \varphi^2 dx + \int_0^T \int_{\Omega} (|\nabla \theta|^2 + |\nabla \varphi|^2 + \varphi^4) dx dt \leq C. \quad (2.25)$$

Multiplicando agora a segunda equação em (2.22) por $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ e integrando em Ω , temos

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 dx - \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Delta \varphi dx = \int_{\Omega} (a\varphi + b\varphi^2 - \varphi^3) \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx + \lambda \int_{\Omega} \theta \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx + \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varphi^4 dx &= \int_{\Omega} (a\varphi + b\varphi^2) \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx \\ &+ \lambda \int_{\Omega} \theta \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx. \end{aligned}$$

Integrando em t e usando a desigualdade de Young,

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \varphi_0|^2 dx + \frac{1}{4} \int_{\Omega} \varphi^4 dx - \frac{1}{4} \int_{\Omega} \varphi_0^4 dx \\ = \int_0^t \int_{\Omega} a\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx dt + \int_0^t \int_{\Omega} b\varphi^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx dt + \lambda \int_0^t \int_{\Omega} \theta \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx dt \\ \leq \|a\|_{L^\infty(Q)} \int_0^t \int_{\Omega} \left(\epsilon \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + \eta(\epsilon) \varphi^2 \right) dx dt \\ + \|b\|_{L^\infty(Q)} \int_0^t \int_{\Omega} \left(\epsilon \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + \eta(\epsilon) \varphi^4 \right) dx dt \\ + \int_0^t \int_{\Omega} \left(\epsilon \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + \eta(\epsilon) \theta^2 \right) dx dt. \end{aligned}$$

Escolhendo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e usando (2.25), obtemos

$$\int_0^t \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 dx dt + \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx + \int_{\Omega} \varphi^4 dx \leq C. \quad (2.26)$$

Multiplicando a primeira equação de (2.22) por $\frac{\partial \theta}{\partial t}$ e integrando em Ω , obtemos

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 dx - \int_{\Omega} \frac{\partial \theta}{\partial t} \Delta \theta dx = -\lambda l \int_{\Omega} \frac{\partial \theta}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx + \lambda \int_{\Omega} f \frac{\partial \theta}{\partial t} dx$$

ou ainda

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla \theta|^2 dx = -\lambda l \int_{\Omega} \frac{\partial \theta}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx + \lambda \int_{\Omega} f \frac{\partial \theta}{\partial t} dx.$$

Integrando em t e usando a desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \theta|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \theta_0|^2 dx \\ &= -\lambda l \int_0^t \int_{\Omega} \frac{\partial \theta}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx dt + \lambda \int_0^t \int_{\Omega} f \theta dx dt \\ &\leq l \int_0^t \int_{\Omega} \left(\epsilon \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + \eta(\epsilon) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right) dx dt \\ &\quad + \int_0^t \int_{\Omega} \left(\epsilon \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + \eta(\epsilon) f^2 \right) dx dt. \end{aligned}$$

Escolhendo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e usando (2.26), obtemos

$$\int_0^t \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 dx dt + \int_{\Omega} |\nabla \theta|^2 dx \leq C. \quad (2.27)$$

Somando (2.26) e (2.27), obtemos

$$\int_{\Omega} (\varphi^4 + |\nabla \varphi|^2 + |\nabla \theta|^2) dx + \int_0^T \int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 \right) dx dt \leq C \quad (2.28)$$

Agora, multiplicando a primeira equação em (2.22) por $\Delta \theta$ e integrando em Ω , obtemos

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \theta}{\partial t} \Delta \theta dx - \int_{\Omega} (\Delta \theta)^2 dx = -\lambda l \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Delta \theta + \lambda \int_{\Omega} f \Delta \theta dx$$

ou ainda

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla \theta|^2 dx - \int_{\Omega} (\Delta \theta)^2 dx = -\lambda l \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Delta \theta + \lambda \int_{\Omega} f \Delta \theta dx$$

Integrando em t e usando a desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \theta|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \theta_0|^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta \theta)^2 dx dt \\
& = \lambda l \int_0^t \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx dt - \lambda \int_0^t \int_{\Omega} f \Delta \theta dx dt \\
& \leq l \int_0^t \int_{\Omega} \left(\epsilon (\Delta \theta)^2 + \eta(\epsilon) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right) dx dt + \int_0^t \int_{\Omega} (\epsilon (\Delta \theta)^2 + \eta(\epsilon) f^2) dx dt
\end{aligned}$$

Escolhendo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e usando (2.28), obtemos

$$\int_{\Omega} |\nabla \theta|^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta \theta)^2 dx dt \leq C \quad (2.29)$$

Multiplicando a segunda equação de (2.22) por $\Delta \varphi$ e integrando em Ω , obtemos

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Delta \theta dx - \int_{\Omega} (\Delta \theta)^2 dx = \int_{\Omega} (a\varphi + b\varphi^2 - \varphi^3) \Delta \varphi dx + \lambda \int_{\Omega} \theta \Delta \varphi dx$$

ou ainda

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx - \int_{\Omega} (\Delta \varphi)^2 dx - 3 \int_{\Omega} \varphi^2 |\nabla \varphi|^2 dx \\
& = \int_{\Omega} (a\varphi + b\varphi^2) \Delta \varphi dx + \lambda \int_{\Omega} \theta \Delta \varphi dx
\end{aligned}$$

Integrando em t e usando a desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \varphi_0|^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta \varphi)^2 dx dt + 3 \int_0^t \int_{\Omega} \varphi^2 |\nabla \varphi|^2 dx dt \\
& = - \int_0^t \int_{\Omega} a\varphi \Delta \varphi dx dt - \int_0^t \int_{\Omega} b\varphi^2 \Delta \varphi dx dt - \lambda \int_0^t \int_{\Omega} \theta \Delta \varphi dx dt \\
& \leq \|a\|_{L^\infty(Q)} \int_0^t \int_{\Omega} (\epsilon (\Delta \varphi)^2 + \eta(\epsilon) \varphi^2) dx dt \\
& \quad + \|b\|_{L^\infty(Q)} \int_0^t \int_{\Omega} (\epsilon (\Delta \varphi)^2 + \eta(\epsilon) \varphi^4) dx dt \\
& \quad + \int_0^t \int_{\Omega} (\epsilon (\Delta \varphi)^2 + \eta(\epsilon) \theta^2) dx dt.
\end{aligned}$$

Escolhendo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e usando novamente (2.28), obtemos

$$\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta \varphi)^2 dx dt + \int_0^t \int_{\Omega} \varphi^2 |\nabla \varphi|^2 dx dt \leq C. \quad (2.30)$$

Somando agora (2.29) e (2.30) obtemos

$$\int_{\Omega} (|\nabla \theta|^2 + |\nabla \varphi|^2) dx + \int_0^T \int_{\Omega} (|\Delta \theta|^2 + |\Delta \varphi|^2 + \varphi^2 |\nabla \varphi|^2) dx dt \leq C. \quad (2.31)$$

As possíveis constantes diferentes C dependem de $\|\theta_0\|_{L^2(\Omega)}$, $\|\nabla \theta_0\|_{L^2(\Omega)}$, $\|\varphi_0\|_{L^2(\Omega)}$, $\|\nabla \varphi_0\|_{L^2(\Omega)}$, $\|a\|_{L^\infty(Q)}$, $\|b\|_{L^\infty(Q)}$, $\|f\|_{L^2(Q)}$ e T .

Das estimativas (2.25)-(2.28), temos então

$$\|\theta\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|\varphi\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C \quad (2.32)$$

Do Teorema 1.1, já usado várias vezes, obtemos uma limitação para todos os pontos fixos de T_λ em B independente de λ . Portanto, pelo teorema do ponto fixo de Leray-Schauder, T_λ possui um ponto fixo em $\lambda = 1$, isto é, existe uma solução $(\theta, \varphi) \in B$ de (2.16) tal que $(\theta, \varphi) \in W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$. Pelo Teorema 1.1 sabemos que $\theta \in L^{10}(Q)$. Então

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{W_{10}^{2,1}(Q)} &\leq C(1 + \|\theta\|_{L^{10}(Q)}^3 + \|\varphi_0\|_{W_\infty^2(\Omega)}^3) \\ &\leq C(1 + \|\theta\|_{W_2^{2,1}(Q)}^3 + \|\varphi_0\|_{W_\infty^2(\Omega)}^3) \leq C, \end{aligned}$$

por (2.32). Portanto $\varphi \in W_{10}^{2,1}(Q)$ e da segunda equação de (2.16) obtemos

$$\|\theta\|_{W_{\bar{q}}^{2,1}(Q)} \leq C \left(\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\|_{L^{10}(Q)} + \|f\|_{L^q(Q)} + \|\theta_0\|_{W_\infty^2(\Omega)} \right) \leq C$$

onde $\bar{q} = \min\{q, 10\}$. Por interação desse processo segue então que $(\theta, \varphi) \in W_{\bar{q}}^{2,1}(Q) \times W_p^{2,1}(Q)$, onde p satisfaz (2.17). A estimativa (2.18) é obtida desse processo de interação, somando os resultados obtidos. $\square$

Em nosso próximo resultado provaremos dependência contínua de soluções em relação ao termo fonte f do sistema, do qual se segue unicidade.

Teorema 2.4 *Sejam $f_i \in L^q(Q)$, $q \geq 2$ ($i = 1, 2$) e (θ_i, φ_i) as soluções correspondentes do problema (2.16). Suponha que as mesmas condições do Teorema 2.3 sejam satisfeitas. Então*

$$\|\theta_1 - \theta_2\|_{W_{\bar{q}}^{2,1}(Q)} + \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{W_p^{2,1}(Q)} \leq C \|f_1 - f_2\|_{L^q(Q)},$$

onde C depende de $\|\theta_i\|_{W_{\bar{q}}^{2,1}(Q)}$, $\|\varphi_i\|_{W_p^{2,1}(Q)}$ ($i = 1, 2$) e p satisfaz (2.17).

Demonstração. Denote $\theta := \theta_1 - \theta_2$ e $\varphi := \varphi_1 - \varphi_2$. Estas funções satisfazem o sistema

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \theta}{\partial t} + l \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Delta \theta + (f_1 - f_2) & \text{em } Q, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta \varphi = D \varphi + \theta & \text{em } Q, \\ \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 & \text{em } S, \\ \theta(x, 0) = \varphi(x, 0) = 0 & \text{em } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.33)$$

Aqui novamente escrevemos $D := a + b(\varphi_1 + \varphi_2) - (\varphi_1^2 + \varphi_1 \varphi_2 + \varphi_2^2)$ e note que vale a desigualdade $D \leq \max_{\bar{Q}}(a + b^2) \leq \|a\|_{L^\infty(Q)} + \|b\|_{L^\infty(Q)}^2$. Da primeira equação de (2.33) obtemos

$$\begin{aligned} \|\theta\|_{W_q^{2,1}(Q)} &\leq C \left(\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\|_{L^q(Q)} + \|f_1 - f_2\|_{L^q(Q)} \right) \\ &\leq C(\|\varphi\|_{W_q^{2,1}(Q)} + \|f_1 - f_2\|_{L^q(Q)}). \end{aligned}$$

Em vista do Teorema 2.2 e da desigualdade de interpolação

$$\|\theta\|_{L^q(Q)} \leq \epsilon \|\theta\|_{W_q^{2,1}(Q)} + \eta(\epsilon) \|\theta\|_{L^2(Q)},$$

continuamos com

$$\begin{aligned} \|\theta\|_{W_q^{2,1}(Q)} &\leq C(\|\theta\|_{L^q(Q)} + \|f_1 - f_2\|_{L^q(Q)}) \\ &\leq C(\epsilon \|\theta\|_{W_q^{2,1}(Q)} + \eta(\epsilon) \|\theta\|_{L^2(Q)} + \|f_1 - f_2\|_{L^q(Q)}) \end{aligned}$$

e escolhendo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno obtemos

$$\|\theta\|_{W_q^{2,1}(Q)} \leq C(\|\theta\|_{L^2(Q)} + \|f_1 - f_2\|_{L^q(Q)}) \quad (2.34)$$

Para a segunda equação de (2.33) usando o Teorema 2.2 e (2.34) temos

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{W_p^{2,1}(Q)} &\leq C\|\theta\|_{L^p(Q)} \leq C\|\theta\|_{W_q^{2,1}(Q)} \\ &\leq C(\|\theta\|_{L^2(Q)} + \|f_1 - f_2\|_{L^2(Q)}). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Para obtermos uma estimativa para $\|\theta\|_{L^2(Q)}$ retornamos às equações em (2.33) e procedemos como no teorema anterior:

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\theta + l\varphi)^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} (|\nabla \theta|^2 + l \nabla \theta \nabla \varphi) dx dt = \int_0^t \int_{\Omega} (f_1 - f_2)(\theta + l\varphi) dx dt$$

e

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \varphi^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx dt = \int_0^t \int_{\Omega} D\varphi^2 dx dt + \int_0^t \int_{\Omega} \varphi \theta dx dt.$$

E então

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} ((\theta + l\varphi)^2 + A\varphi^2) dx + \int_0^t \int_{\Omega} (|\nabla \theta|^2 + l \nabla \theta \nabla \varphi + A|\nabla \varphi|^2) dx dt \\ \leq C \left(\int_0^t \int_{\Omega} (\theta^2 + \varphi^2) dx dt + \int_0^t \int_{\Omega} (f_1 - f_2)^2 dx dt \right) \end{aligned}$$

onde $A \in \mathbb{R}$ é um parâmetro arbitrário. Tomando $A = 1 + l^2$ e usando o Lema de Gronwall, obtemos:

$$\int_{\Omega} (\theta^2 + \varphi^2) dx + \int_0^t \int_{\Omega} (|\nabla \theta|^2 + |\nabla \varphi|^2) dx dt \leq C \|f_1 - f_2\|_{L^2(Q)}^2. \quad (2.36)$$

Substituindo (2.36) em (2.34) e (2.35) obtemos o resultado. $\square$

Corolário 2.2 *A solução do problema (2.16) é única*

2.3 Propriedades do operador solução

Nesta seção vamos estudar o operador $F : L^q(Q) \rightarrow W_q^{2,1}(Q) \times W_p^{2,1}(Q)$, na qual aplica o termo fonte $f \in L^q(Q)$ de (2.16) na solução correspondente $(\theta, \varphi) \in W_q^{2,1}(Q) \times W_p^{2,1}(Q)$. As propriedades deste operador serão úteis para o estudo do problema de controle ótimo. Provaremos que F é Fréchet diferenciável. Pelo Teorema 2.3 F aplica $L^q(Q)$ em $W_q^{2,1}(Q) \times W_p^{2,1}(Q)$ com p satisfazendo (2.17). Além disso no Teorema 2.4 foi provado que F é Lipschitz contínua. Suponha $f \in L^q(Q)$ e considere $h \in L^q(Q)$.

Teorema 2.5 *Sejam $f, h \in L^q(Q)$ com $F(f)$ e $F(f + h)$ sendo as soluções correspondentes de (2.16). Então*

$$\|F(f + h) - F(f) - F'(f)h\|_{W_q^{2,1}(Q) \times W_p^{2,1}(Q)} \leq C\|h\|_{L^q(Q)}^2 \quad (2.37)$$

onde $F'(f) : L^q(Q) \rightarrow W_q^{2,1}(Q) \times W_p^{2,1}(Q)$ é um operador linear e $(\theta^*, \varphi^*) = F'(f)h$ é a solução do problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \theta^*}{\partial t} + l \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} = \Delta \theta^* + h & \text{em } Q, \\ \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} = \Delta \varphi^* + (a + 2b\varphi - 3\varphi^2)\varphi^* + \theta^* & \text{em } Q, \\ \frac{\partial \theta^*}{\partial \eta} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \eta} = 0 & \text{em } S, \\ \varphi^*(x, 0) = \theta^*(x, 0) = 0 & \text{em } \Omega, \end{array} \right. \quad (2.38)$$

onde φ é a segunda componente de $F(f)$.

Demonstração. Pelo que já foi feito antes não é difícil ver que (2.38) tem uma única solução $(\theta^*, \varphi^*) \in W_q^{2,1}(Q) \times W_p^{2,1}(Q)$ e p satisfazendo (2.17). Pelo Teorema 2.4 sabemos que

$$\|\varphi_h - \varphi\|_{W_p^{2,1}(Q)} + \|\theta_h - \theta\|_{W_q^{2,1}(Q)} \leq C\|h\|_{L^q(Q)}$$

Pelo Teorema 1.1, temos $W_p^{2,1}(Q) \subset L^\infty(Q)$ e portanto

$$\|\varphi_h - \varphi\|_{L^\infty(Q)} \leq C\|h\|_{L^q(Q)} \quad (2.39)$$

Denotemos $\widehat{\theta} := \theta_h - \theta - \theta^*$ e $\widehat{\varphi} := \varphi_h - \varphi - \varphi^*$. Não é difícil ver que $(\widehat{\theta}, \widehat{\varphi})$ satisfaz

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \widehat{\theta}}{\partial t} + l \frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial t} = \Delta \widehat{\theta} & \text{em } Q, \\ \frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial t} = \Delta \widehat{\varphi} + (a + 2b\varphi - 3\varphi^2)\widehat{\varphi} + \widehat{\theta} + \widehat{f} & \text{em } Q, \\ \frac{\partial \widehat{\theta}}{\partial \eta} = \frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial \eta} = 0 & \text{em } S, \\ \widehat{\varphi}(x, 0) = \widehat{\theta}(x, 0) = 0 & \text{em } \Omega, \end{array} \right. \quad (2.40)$$

onde $\widehat{f}$ está definida como

$$\widehat{f} := (\varphi_h - \varphi)^2(b - 3\varphi) - (\varphi_h - \varphi)^3. \quad (2.41)$$

De (2.39), obtemos

$$\|\widehat{f}\|_{L^\infty(Q)} \leq C\|\varphi_h - \varphi\|_{L^\infty(Q)}^2 \leq C\|h\|_{L^q(Q)}^2 \quad (2.42)$$

com constantes C dependendo de $\|f\|_{L^q(Q)}$ e $\|h\|_{L^q(Q)}$. Para o problema linear (2.40) obtemos de maneira análoga ao Teorema 2.3 a estimativa

$$\|\widehat{\theta}\|_{W_q^{2,1}(Q)} + \|\widehat{\varphi}\|_{W_p^{2,1}(Q)} \leq C\|\widehat{f}\|_{L^q(Q)}$$

para qualquer $p \in [2, \infty)$. Isto junto com (2.42) provam a desigualdade (2.37). $\square$

Observação 2.1 *De acordo com a definição da derivada de Fréchet o operador $F'(f) : L^q(Q) \rightarrow W_q^{2,1}(Q) \times W_p^{2,1}(Q)$, introduzido no Teorema 2.5 é a derivada de F .*

Capítulo 3

Um problema de controle ótimo

Neste capítulo estudaremos um problema de controle ótimo, considerando para isso um funcional de custo associado ao sistema de campo de fases do capítulo anterior. Começamos provando a existência de um controle ótimo f_{opt} que minimiza o funcional considerado e depois encontramos condições ótimas necessárias que devem ser satisfeitas por cada controle ótimo, chamadas condições de otimalidade. Encerramos este capítulo provando um resultado de unicidade para tal controle ótimo, sob certas condições.

3.1 Existência de um controle ótimo

Considere o seguinte funcional de custo:

$$\begin{aligned} J[\theta, \varphi; f] &:= \frac{\alpha_1}{2} \iint_Q |\theta(x, t) - \theta_d(x, t)|^{2k} dx dt \\ &+ \frac{\alpha_2}{2} \iint_Q |\varphi(x, t) - \varphi_d(x, t)|^{2m} dx dt + \frac{N}{2} \iint_Q |f(x, t)|^{2s} dx dt, \end{aligned} \quad (3.1)$$

com $\theta_d \in L^{2k}(Q)$ e $\varphi_d \in L^{2m}(Q)$ funções dadas, α_1, α_2 e N satisfazendo $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $N \geq 1$ e $k, m \geq 1$, com

$$k = \begin{cases} 1, 2 \text{ ou } 3 & \text{se } s = 1 \\ \text{qualquer inteiro} & \text{se } s \geq 2 \end{cases}$$

e $m \in \mathbb{N}$. O problema de controle ótimo que vamos considerar é o de encontrar um controle ótimo que minimize o funcional (3.1) associado ao sistema (2.16).

Suponha que $\mathcal{U}_{ad}$ seja um subconjunto convexo fechado e não vazio do espaço de Banach $L^q(Q)$ com $q = 2s$, $s \in \mathbb{N}$. Denote por F o operador solução de (2.16) como na Seção 2.3.

Teorema 3.1 *Suponha que as mesmas afirmações do Teorema 2.3 sejam satisfeitas e suponha além disso que $\theta_d \in L^{2k}(Q)$, $\varphi_d \in L^{2m}(Q)$, $(k, m \geq 1)$ com*

$$k = \begin{cases} 1, 2 \text{ ou } 3 & \text{se } s = 1 \\ \text{qualquer inteiro} & \text{se } s \geq 2 \end{cases} \quad (3.2)$$

e $m \in \mathbb{N}$. Então existe um controle ótimo $f_{opt} \in \mathcal{U}_{ad}$ minimizando o funcional (3.1), isto é,

$$J[\theta, \varphi; f_{opt}] = \inf_{f \in \mathcal{U}_{ad}} J[\nu, \psi; f]$$

onde $(\theta, \varphi) = F(f_{opt})$ e $(\nu, \psi) = F(f)$.

Demonstração. Seja $(\theta_n, \varphi_n; f_n)$, $(\theta_n, \varphi_n) = F(f_n)$, uma seqüência minimizante. Como $J[\theta_n, \varphi_n; f_n] \leq C$ e pela estrutura particular de J obtemos

$$\|f_n\|_{L^{2s}(Q)} \leq C$$

($s \geq 1$) e em vista do Teorema 2.3 obtemos também a estimativa

$$\|\theta_n\|_{W_{2s}^{2,1}(Q)} + \|\varphi_n\|_{W_{2m}^{2,1}(Q)} \leq C,$$

válida para todo $n \geq 1$. Portanto podemos extrair uma subsequência de $\{f_n\}$ e $\{(\theta_n, \varphi_n)\}$, $(\theta_n, \varphi_n) = F(f_n)$, que denotaremos novamente por $\{(\theta_n, \varphi_n; f_n)\}$ tal que

$$\begin{aligned} f_n &\rightharpoonup f && \text{fracamente* em } L^{2s}(Q) \\ \theta_n &\rightharpoonup \theta && \text{fracamente* em } W_{2s}^{2,1}(Q) \\ \varphi_n &\rightharpoonup \varphi && \text{fracamente* em } W_{2m}^{2,1}(Q). \end{aligned}$$

Como $L^{2s}(Q)$, $W_{2s}^{2,1}(Q)$ e $W_{2m}^{2,1}(Q)$ são reflexivos (para $s, m \geq 1$), segue que

$$\begin{aligned} f_n &\rightharpoonup f && \text{fracamente em } L^{2s}(Q) \\ \theta_n &\rightharpoonup \theta && \text{fracamente em } W_{2s}^{2,1}(Q) \\ \varphi_n &\rightharpoonup \varphi && \text{fracamente em } W_{2m}^{2,1}(Q). \end{aligned}$$

Pelo Teorema 1.1 obtemos

$$\begin{aligned} \theta_n &\rightarrow \theta && \text{fortemente em } L^{2k}(Q) \\ \varphi_n &\rightarrow \varphi && \text{fortemente em } L^{2m}(Q), \end{aligned}$$

onde k é definido por (3.2).

Tomando a formulação fraca do problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \varphi_n}{\partial t} - \Delta \varphi_n = a\varphi_n + b\varphi_n^2 - \varphi_n^3 + \theta_n & \text{em } Q, \\ \frac{\partial \theta_n}{\partial t} - \Delta \theta_n = -l \frac{\partial \varphi_n}{\partial t} + f_n & \text{em } Q, \\ \frac{\partial \theta_n}{\partial \eta} = \frac{\partial \varphi_n}{\partial \eta} = 0 & \text{em } S, \\ \varphi_n(x, 0) = \varphi_0(x) & \text{em } \Omega, \\ \theta_n(x, 0) = \theta_0(x) & \text{em } \Omega, \end{array} \right. \quad (3.3)$$

e usando as convergências fortes obtidas acima e o Teorema da Convergência Dominada na parte não-linear, tomando o limite em (3.3) vemos que $(\theta, \varphi) = F(f)$. Além disso, como J é convexo, pela Proposição 1.1 temos

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} J[\theta_n, \varphi_n; f_n] \geq J[\theta, \varphi; f].$$

Logo $f_{opt} := f$ é uma solução ótima de (3.1). □

Observação 3.1 Para um funcional de custo dado por

$$\begin{aligned} J[\theta, \varphi; f] &:= \frac{\alpha_1}{2} \int_{\Omega} |\theta(x, T) - \theta_d(x)|^{2k} dx \\ &+ \frac{\alpha_2}{2} \int_{\Omega} |\varphi(x, T) - \varphi_d(x)|^{2m} dx + \frac{N}{2} \iint_Q f^{2s} dx dt \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde $\theta_d \in L^{2k}(\Omega)$, $\varphi_d \in L^{2m}(\Omega)$ e k, m resultando do Teorema 1.1, podemos provar também existência de um controle ótimo usando os mesmos métodos.

3.2 Condições de otimalidade para o controle ótimo

Nesta seção estabeleceremos condições de otimalidade para cada controle ótimo f , isto é, condições necessárias que cada controle ótimo f deve satisfazer.

Teorema 3.2 *Seja f um controle ótimo do funcional (3.1) associado ao sistema (2.16). Então existe uma quántupla de funções $(\theta, \varphi, p, q; f)$ satisfazendo*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \theta}{\partial t} + l \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Delta \theta + f & \text{em } Q, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Delta \varphi + (a\varphi + b\varphi^2 - \varphi^3) + \theta & \text{em } Q, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \Delta p + q = -\alpha_1 k(\theta - \theta_d)^{2k-1} & \text{em } Q, \\ \frac{\partial q}{\partial t} + l \frac{\partial p}{\partial t} + \Delta q \\ + (a + 2b\varphi - 3\varphi^2)q = -\alpha_2 m(\varphi - \varphi_d)^{2m-1} & \text{em } Q, \\ \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \frac{\partial p}{\partial \eta} = \frac{\partial q}{\partial \eta} = 0 & \text{em } S, \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x) & \text{em } \Omega, \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x) & \text{em } \Omega, \\ p(T) = q(T) = 0 & \text{em } \Omega \end{array} \right. \quad (3.5)$$

e

$$\iint_Q (p + sNf^{2s-1})(g - f)dxdt \geq 0, \quad \text{para todo } g \in \mathcal{U}_{ad}. \quad (3.6)$$

Observação 3.2 A condição (3.6) nos fornece uma estimativa para o controle ótimo f_{opt} à partir da função de coestado p , ao se resolver o problema (3.5). As condições acima são conhecidas como *Princípio do mínimo (máximo) de Pontryagin*. Se $\mathcal{U}_{ad} = L^{2s}(Q)$, de (3.6) obtemos exatamente quem é o controle ótimo:

$$f_{opt} = \left(-\frac{1}{sN} p \right)^{1/2s-1}. \quad (3.7)$$

Mais ainda, a condição (3.7) é obtida se $\mathcal{U}_{ad}$ é aberto.

Demonstração. Seja $f := f_{opt}$ e $(\theta, \varphi) = F(f)$. Pelo Teorema 2.5 e Observação 2.1 sabemos que F é Fréchet diferenciável. Portanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} J[F(f + \lambda(g - f)); f + \lambda(g - f)] \Big|_{\lambda=0} &= \alpha_1 k \iint_Q (\theta - \theta_d)^{2k-1} \theta^* dxdt \\ &+ \alpha_2 m \iint_Q (\varphi - \varphi_d)^{2m-1} \varphi^* dxdt + sN \iint_Q f^{2s-1} (g - f) dxdt \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde $(\theta^*, \varphi^*) = F'(f)(g - f)$ é solução do seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \theta^*}{\partial t} + l \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} = \Delta \theta^* + g - f & \text{em } Q, \\ \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} = \Delta \varphi^* + (a + 2b\varphi - 3\varphi^2) \varphi^* + \theta^* & \text{em } Q, \\ \frac{\partial \theta^*}{\partial \eta} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \eta} = 0 & \text{em } S, \\ \varphi^*(x, 0) = \theta^*(x, 0) = 0 & \text{em } \Omega \end{array} \right. \quad (3.9)$$

(compare com o problema (2.38)). Além disso, como f é uma solução ótima temos

$$\frac{d}{d\lambda} J[F(f + \lambda(g - f)); f + \lambda(g - f)] \Big|_{\lambda=0} \geq 0$$

para toda $g \in \mathcal{U}_{ad}$, isto é,

$$\begin{aligned} \alpha_1 k \iint_Q (\theta - \theta_d)^{2k-1} \theta^* dxdt + \alpha_2 m \iint_Q (\varphi - \varphi_d)^{2m-1} \varphi^* dxdt \\ + sN \iint_Q f^{2s-1} (g - f) dxdt \geq 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

para toda $g \in \mathcal{U}_{ad}$. Vamos simplificar (3.10) introduzindo as variáveis de custo (p, q) como solução do problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial p}{\partial t} - \Delta p - q = \alpha_1 k(\theta - \theta_d)^{2k-1} & \text{em } Q, \\ -\frac{\partial q}{\partial t} - l\frac{\partial p}{\partial t} - \Delta q \\ -(a + 2b\varphi - 3\varphi^2)q = \alpha_2 m(\varphi - \varphi_d)^{2m-1} & \text{em } Q, \\ \frac{\partial p}{\partial \eta} = \frac{\partial q}{\partial \eta} = 0 & \text{em } S, \\ p(T) = q(T) = 0 & \text{em } \Omega. \end{array} \right. \quad (3.11)$$

O problema (3.11) é obtido à partir do problema (3.9) multiplicando a primeira equação por p , a segunda equação por q e somando o resultado. Multiplicando a primeira equação em (3.11) por θ^* e a segunda por φ^* , usando a fórmula de Green e somando obtemos

$$\iint_Q p(g - f) dxdt = \iint_Q (k\alpha_1(\theta - \theta_d)^{2k-1}\theta^* + m\alpha_2(\varphi - \varphi_d)^{2m-1}\varphi^*) dxdt.$$

Portanto de (3.10) concluimos que

$$\iint_Q (p + sNf^{2s-1})(g - f) dxdt \geq 0,$$

para todo $g \in \mathcal{U}_{ad}$. □

Observação 3.3 *O problema (3.11) é um sistema linear. Ele certamente tem uma solução única (p, q) . Se $\theta_d, \varphi_d \in L^\infty(Q)$, então $(p, q) \in W_\mu^{2,1}(Q) \times W_\mu^{2,1}(Q)$, $\mu \geq 2$,*

$$\mu = \begin{cases} \frac{10}{2k-1} & \text{se } s = 1 \\ \text{qualquer número positivo} & \text{se } s \geq 2 \end{cases}$$

pois, para $s = 1$, $\theta \in W_2^{2,1}(Q)$ e $\varphi \in W_{10}^{2,1}(Q)$, e portanto $\theta \in L^{10}(Q)$ e $\varphi \in L^\infty(Q)$ pelo Teorema 1.1; e para $s \geq 2$, $\theta, \varphi \in L^\infty(Q)$.

Observação 3.4 Para o outro funcional de custo (3.4) a condição ótima que deve ser satisfeita é a seguinte:

$$e \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \theta}{\partial t} + l \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Delta \theta + f & \text{em } Q, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Delta \varphi + (a\varphi + b\varphi^2 - \varphi^3) + \theta & \text{em } Q, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \Delta p + q = 0 & \text{em } Q, \\ \frac{\partial q}{\partial t} + l \frac{\partial p}{\partial t} + \Delta q + (a + 2b\varphi - 3\varphi^2)q = 0 & \text{em } Q, \\ \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \frac{\partial p}{\partial \eta} = \frac{\partial q}{\partial \eta} = 0 & \text{em } S, \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x) & \text{em } \Omega, \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x) & \text{em } \Omega, \\ p(T) = \alpha_1 k(\theta(T) - \theta_d)^{2k-1} & \text{em } \Omega \\ q(T) = \alpha_2 m l(\varphi(T) - \varphi_d)^{2m-1} - \alpha_1 k l(\theta(T) - \theta_d)^{2k-1} & \text{em } \Omega \end{array} \right.$$

$$\iint_Q (p + sNf^{2s-1})(g - f)dxdt \geq 0 \quad \text{para todo } g \in \mathcal{U}_{ad}.$$

3.3 Um resultado de unicidade

O problema de controle ótimo considerado neste capítulo não é convexo, pois o sistema (2.16) é não linear. Portanto não podemos garantir unicidade da solução. Entretanto em uma situação especial podemos provar unicidade local. Vamos assumir que

$$s = k = m = 1 \tag{3.12}$$

e que

$$\mathcal{U}_{ad} = L^2(Q). \quad (3.13)$$

Teorema 3.3 *Suponha que $\theta_d, \varphi_d \in L^\infty(Q)$ e que (3.12) e (3.13) são satisfeitos. Então existe um instante de tempo $T_0 < \infty$ tal que para $T \leq T_0$ o problema de controle ótimo tem uma única solução.*

Demonstração. De acordo com a Observação 3.2 o controle ótimo tem a forma $f_{opt} = -\frac{1}{N}p$. Substituindo esta relação na primeira equação do problema (3.5), precisamos provar que as equações resultantes tem uma única solução. Suponha que existam duas soluções $(\theta_i, \varphi_i, p_i, q_i)$ ($i = 1, 2$) e denote por

$$\theta := \theta_1 - \theta_2, \quad \varphi := \varphi_1 - \varphi_2, \quad p := p_1 - p_2 \quad e \quad q := q_1 - q_2.$$

A quádrupla (θ, φ, p, q) satisfaz

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \theta}{\partial t} + l \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Delta \theta - \frac{1}{N}p & \text{em } Q, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Delta \varphi + (a + b(\varphi_1 - \varphi_2) - (\varphi_1^2 + \varphi_1 \varphi_2 + \varphi_2^2))\varphi + \theta & \text{em } Q, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \Delta p + q = \alpha_1 \theta & \text{em } Q, \\ \frac{\partial q}{\partial t} + l \frac{\partial p}{\partial t} + \Delta q + (a + 2b\varphi_1 - 3\varphi_1^2)q + q_2(2b - 3(\varphi_1 + \varphi_2))\varphi = \alpha_2 \varphi & \text{em } Q, \\ \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \frac{\partial p}{\partial \eta} = \frac{\partial q}{\partial \eta} = 0 & \text{em } S, \\ \varphi(x, 0) = 0 & \text{em } \Omega, \\ \theta(x, 0) = 0 & \text{em } \Omega, \\ p(T) = q(T) = 0 & \text{em } \Omega \end{array} \right. \quad (3.14)$$

Sabemos que $\varphi_i \in W_p^{2,1}(Q)$ para todo $2 \leq p < \infty$ e pela observação 5.2, $q_i \in W_{10}^{2,1}(Q)$ ($i = 1, 2$). Isto significa que em qualquer caso temos $\varphi_i, q_i \in L^\infty(Q)$ ($i = 1, 2$), pelo Teorema 1.1. Agora multiplicando as equações em (3.14) por $e^{-2Bt}(\theta + l\varphi)$, $e^{-2Bt}\varphi$, $e^{2At}p$ e $e^{2At}(q + lp)$ respectivamente e usando as fórmulas de Green obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} e^{-2Bt}(\theta + l\varphi)^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} e^{-2Bt}(|\nabla\theta|^2 + l\nabla\theta\nabla\varphi) dxdt \\ & \quad + \int_0^t \int_{\Omega} B e^{-2Bt}(\theta + l\varphi)^2 dxdt + \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} e^{-2Bt}\varphi^2 dx \\ & \quad + \alpha \int_0^t \int_{\Omega} e^{-2Bt}|\nabla\varphi|^2 dxdt + \alpha \int_0^t \int_{\Omega} B e^{-2Bt}\varphi^2 dxdt \\ & = \alpha \int_0^t \int_{\Omega} (a + (\varphi_1 - \varphi_2) - (\varphi_1^2 + \varphi_1\varphi_2 + \varphi_2^2))\varphi^2 e^{-2Bt} dxdt \\ & \quad + \alpha \int_0^t \int_{\Omega} e^{-2Bt}\theta\varphi dxdt - \frac{1}{N} \int_0^t \int_{\Omega} e^{-2Bt}p(\theta + l\varphi) dxdt \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} e^{2At}(\beta p^2 + (q + lp)^2) dx + \int_t^T \int_{\Omega} e^{2At}(\beta|\nabla p|^2 + l\nabla p\nabla q + |\nabla q|^2) dxdt \\ & \quad + \int_t^T \int_{\Omega} e^{2At}(\beta A p^2 + A(q + lp)^2) dxdt = \beta \int_t^T \int_{\Omega} e^{2At}(qp - \alpha_1\theta p) dxdt \\ & \quad + \int_t^T \int_{\Omega} e^{2At}(\alpha_2\varphi - (a + 2b\varphi_1 - 3\varphi_1^3)q - q_2(2b - 3(\varphi_1 - \varphi_2))\varphi)(q + lp) dxdt \end{aligned}$$

onde α e β são constantes arbitrárias. Pela desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} e^{-2Bt}(\theta^2 + (\alpha + l^2)\varphi^2) dx + \int_0^t \int_{\Omega} e^{-2Bt}(|\nabla\theta|^2 + l\nabla\theta\nabla\varphi) dxdt \\ & \quad + \int_0^t \int_{\Omega} B e^{-2Bt}(\theta + l\varphi)^2 dxdt \\ & \quad + \alpha \int_0^t \int_{\Omega} e^{-2Bt}|\nabla\varphi|^2 dxdt + \alpha \int_0^t \int_{\Omega} B e^{-2Bt}\varphi^2 dxdt \\ & \leq C \int_{\Omega} e^{-2Bt}(\epsilon\theta^2 + \eta(\epsilon)\varphi^2) dx + \alpha C \int_0^t \int_{\Omega} e^{-2Bt}\varphi^2 dxdt \\ & \quad + \frac{\alpha}{2} \int_0^t \int_{\Omega} e^{-2Bt}(\theta^2 + \varphi^2) dxdt + C \int_0^t \int_{\Omega} e^{-2Bt}(p^2 + (\theta + l\varphi)^2) dxdt \end{aligned} \quad (3.15)$$

e

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{\Omega} e^{2At} (q^2 + (\beta + l^2)p^2) dx + \int_t^T \int_{\Omega} e^{2At} (\beta |\nabla p|^2 + l \nabla p \nabla q + |\nabla q|^2) dx dt \\
& + \int_t^T \int_{\Omega} e^{2At} (\beta A p^2 + A(q + lp)^2) dx dt \leq C' \int_{\Omega} e^{2At} (\delta q^2 + \eta(\delta) p^2) \\
& + \beta C' \int_t^T \int_{\Omega} e^{2At} (q^2 + p^2) dx dt + \beta C' \int_t^T \int_{\Omega} e^{2At} (\theta^2 + p^2) dx dt \\
& + C' \int_t^T \int_{\Omega} e^{2At} (\varphi^2 + (q + lp)^2) dx dt + C' \int_t^T \int_{\Omega} e^{2At} (q^2 + (q + lp)^2) dx dt \\
& + C' \int_t^T \int_{\Omega} e^{2At} (\varphi^2 + (q + lp)^2) dx dt. \tag{3.16}
\end{aligned}$$

Escolhendo $\epsilon, \delta > 0$ suficientemente pequenos e A, B, α, β suficientemente grandes, obtemos de (3.15) e (3.16):

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} e^{-2Bt} (\theta^2 + \varphi^2) dx + \int_0^t \int_{\Omega} e^{-2Bt} (|\nabla \theta|^2 + |\nabla \varphi|^2) dx dt \\
& \leq C \int_0^t \int_{\Omega} e^{-2Bt} (p^2 + \theta^2) dx dt
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} e^{2At} (p^2 + q^2) dx + \int_t^T \int_{\Omega} e^{2At} (|\nabla p|^2 + |\nabla q|^2) dx dt \\
& \leq C \int_0^t \int_{\Omega} e^{2At} (q^2 + \theta^2 + \varphi^2) dx dt.
\end{aligned}$$

Resulta então que

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\theta^2 + \varphi^2 + p^2 + q^2) dx \leq C_1 \int_0^t \int_{\Omega} (p^2 + \theta^2) dx dt \\
& + C_2 \int_t^T \int_{\Omega} (q^2 + \theta^2 + \varphi^2) dx dt
\end{aligned}$$

e portanto

$$\iint_Q (\theta^2 + \varphi^2 + p^2 + q^2) dx dt \leq TC_3 \iint_Q (p^2 + q^2 + \theta^2 + \varphi^2) dx dt.$$

Escolhendo $T_0 > 0$ tal que

$$T_0 C_3 < 1$$

obtemos

$$\theta = \varphi = p = q = 0 \quad \text{em } Q$$

com $T \leq T_0$.

□

Capítulo 4

Análise de um modelo de campo de fases generalizado

Neste capítulo estudaremos o modelo de Moroşanu e Motreanu, que é um modelo de campo de fases que generaliza o de Hoffman e Jiang. As técnicas utilizadas são as mesmas usadas no modelo matemático anterior. Obteremos resultados de existência, unicidade e regularidade de soluções. Além disso, estudaremos novamente o operador solução A , que aplica o termo fonte f na única solução (θ, φ) do sistema considerado, para podermos fazer no capítulo seguinte um estudo de controle ótimo relacionado ao modelo generalizado.

4.1 Introdução

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suficientemente suave e $T > 0$. Consideremos o problema parabólico não linear:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta = -l \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f & \text{em } Q, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta \varphi = F(x, t, \varphi) + \theta & \text{em } Q, \\ \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 & \text{em } S, \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x) & \text{em } \Omega, \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x) & \text{em } \Omega, \end{array} \right. \quad (4.1)$$

onde $f \in L^q(Q)$, $q \geq 2$, $\theta_0, \varphi_0 \in W_\infty^2(\Omega)$, com $\frac{\partial \theta_0}{\partial \eta} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} = 0$ sobre $\partial\Omega$, e $l > 0$ constante.

Vamos supor que a função $F : Q \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz as seguintes condições:

- 1) Existe uma constante $a_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$(F(x, t, z_1) - F(x, t, z_2))(z_1 - z_2) \leq a_0(z_1 - z_2)^2, \quad \forall (x, t) \in Q, z_1, z_2 \in \mathbb{R};$$

- 2) Existe uma função $\tilde{F} : Q \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as relações

$$\begin{aligned} (F(x, t, z_1) - F(x, t, z_2))^2 &\leq \tilde{F}(x, t, z_1, z_2)(z_1 - z_2)^2, \\ \forall (x, t) &\in Q, z_1, z_2 \in \mathbb{R}, \\ |\tilde{F}(x, t, z_1, z_2)| &\leq c_0(1 + |z_1|^{2r-2} + |z_2|^{2r-2}) \\ \forall (x, t) &\in Q, z_1, z_2 \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

para constantes $c_0 > 0$ e $r \geq 1$, desde que

$$r < \frac{N+2}{N-2} \quad \text{se } N > 2. \quad (4.2)$$

- 3) $F(x, t, z) = k(x, t, z) - h(z)$, $\forall (x, t) \in Q, z \in \mathbb{R}$, onde $k : Q \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função (de Carathéodory) com $k(\cdot, \cdot, z)$ mensurável sobre Q , $\forall z \in \mathbb{R}$, $k(x, t, \cdot) \in C(\mathbb{R})$, $\forall (x, t) \in Q$, $k(\cdot, \cdot, 0) \in L^\infty(Q)$ e $h \in C^1(\mathbb{R})$ tal que

$$(i) \quad k(x, t, z)^2 \leq a_1 h(z)z + a_2(1 + z^2), \quad \forall (x, t) \in Q, z \in \mathbb{R},$$

$$(ii) \quad -b_0 \leq h'(z) \leq b_1(1 + |z|^{r-1}), \quad \forall z \in \mathbb{R},$$

para constantes positivas a_1, a_2, b_0, b_1 .

Lema 4.1 (a) A condição 2) implica que F satisfaz a condição de crescimento

$$|F(x, t, z)| \leq a(1 + |z|^r), \quad \forall (x, t) \in Q, z \in \mathbb{R}. \quad (4.3)$$

(b) A condição 3)(i) implica as relações

$$k(x, t, z)z \leq \frac{1}{2}h(z)z + b_2(1 + z^2), \quad \forall (x, t) \in Q, z \in \mathbb{R} \quad (4.4)$$

$$h(z)z \geq -b_3 - b_4 z^2, \quad \forall z \in \mathbb{R}. \quad (4.5)$$

(c) As funções $k(x, t, z)$ e $h(z)$ satisfazem a condição de crescimento

$$\max\{|k(x, t, z)|, |h(z)|\} \leq C(1 + |z|^r), \quad \forall (x, t) \in Q, z \in \mathbb{R}. \quad (4.6)$$

Aqui a, b_2, b_3, b_4 e C são constantes positivas.

Demonstração. (a) Considerando $z_1 = z$ e $z_2 = 0$ obtemos de 2)

$$\begin{aligned} |F(x, t, z)| &\leq |F(x, t, 0)| + (\tilde{F}(x, t, z, 0))^{1/2}|z| \\ &\leq |F(x, t, 0)| + c_0^{1/2}(1 + |z|^{2r-2})^{1/2}|z|, \quad \forall z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Do fato de $F(\cdot, \cdot, 0) \in L^\infty(Q)$ e da desigualdade de Young, segue (4.3).

(b) A desigualdade de Young junto com a condição 3)(i) mostram que

$$\begin{aligned} k(x, t, z)z &\leq \frac{1}{2a_1}k(x, t, z)^2 + \frac{a_1}{2}z^2 \\ &\leq \frac{1}{2}h(z)z + b_2(1 + z^2), \quad \forall (x, t) \in Q, z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Disso obtemos (4.4). A condição (4.5) segue de 3)(i).

(c) De 3), (4.3) e da desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned} |h(z)| &\leq |F(x, t, z)| + |k(x, t, z)| \\ &\leq a(1 + |z|^r) + (a_1|h(z)z|)^{1/2} + [a_2(1 + |z|^2)]^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{2}|h(z)| + C(1 + |z|^r). \end{aligned}$$

Logo $|h(z)| \leq C(1 + |z|^r)$ e pela definição de F e por (4.3), segue (4.6). $\square$

Observação 4.1 Tomando $N = 3$, $k(x, t, z) = a(x, t)z + b(x, t)z^2$, com $a, b \in L^\infty(Q)$ e $h(z) = z^3$, o problema (4.1) se reduz ao problema (2.16).

4.2 Problema auxiliar

Consideremos o problema de valor de fronteira parabólico não linear:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = F(x, t, v) + g & \text{em } Q, \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 & \text{em } S, \\ v(x, 0) = v_0(x) & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (4.7)$$

onde $g \in L^q(Q)$, com $q \geq 2$, e $v_0 \in W_\infty^2(\Omega)$ satisfazendo $\frac{\partial v_0}{\partial \eta} = 0$ sobre $\partial\Omega$.

Teorema 4.1 *Suponha 2), 3). Então o problema (4.7) tem uma solução $v \in W_q^{2,1}(Q)$ satisfazendo a estimativa*

$$\|v\|_{W_q^{2,1}(Q)} \leq C(1 + \|v_0\|_{W_\infty^2(\Omega)}^r + \|g\|_{L^q(Q)}^r), \quad (4.8)$$

onde $C > 0$ é uma constante que depende de $|\Omega|, T, q, r, a_1, a_2, b_0, c_0, \|F(\cdot, \cdot, 0)\|_{L^\infty(Q)}$.

Demonstração. Usaremos o Teorema de ponto fixo de Leray-Schauder. Defina o operador não linear $T : L^p(Q) \times [0, 1] \rightarrow L^p(Q)$ como

$$T(w, \lambda) = v = v(w, \lambda), \quad \forall w \in L^p(Q), \forall \lambda \in [0, 1], \quad (4.9)$$

onde v é a solução do problema linear :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = \lambda(k(x, t, w) - h(w) + g(x, t)) & \text{em } Q, \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 & \text{em } S, \\ v(x, 0) = v_0(x) & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (4.10)$$

e com p satisfazendo

$$p = \begin{cases} \text{qualquer número positivo } \geq 2r & \text{se } N = 1 \text{ ou } 2, \\ \text{qualquer número positivo em } \left[2r, \frac{2(N+2)}{N-2}\right) & \text{se } N > 2. \end{cases} \quad (4.11)$$

Note que (4.11) faz sentido por (4.2).

Vamos verificar que T está bem definida. De acordo com (4.3) temos $F(\cdot, \cdot, w) \in L^{p/r}(Q)$, $\forall w \in L^p(Q)$. Então $F(\cdot, \cdot, w) + g \in L^{\bar{q}}(Q)$, onde

$$\bar{q} = \min \left\{ q, \frac{p}{r} \right\} \geq 2. \quad (4.12)$$

Usando agora o Teorema 1.2, existe uma única solução v do problema (4.10), com

$$v = v(w, \lambda) \in W_{\bar{q}}^{2,1}(Q). \quad (4.13)$$

O Teorema 1.1 garante a continuidade da inclusão

$$W_{\bar{q}}^{2,1}(Q) \subset L^{\mu}(Q), \quad (4.14)$$

onde

$$\mu = \begin{cases} \infty & \text{se } \frac{1}{\bar{q}} - \frac{2}{N+2} < 0 \\ \text{qualquer número } \geq p & \text{se } \frac{1}{\bar{q}} - \frac{2}{N+2} = 0 \\ \left(\frac{1}{\bar{q}} - \frac{2}{N+2} \right)^{-1} & \text{se } \frac{1}{\bar{q}} - \frac{2}{N+2} > 0. \end{cases}$$

Como $\frac{2(N+2)}{N-2} \leq \frac{\bar{q}(N+2)}{N+2-2\bar{q}} = \left(\frac{1}{\bar{q}} - \frac{2}{N+2} \right)^{-1}$, temos

$$p < \mu. \quad (4.15)$$

Por (4.13), (4.14) e (4.15), segue então que $v = v(w, \lambda) \in L^p(Q)$.

Vamos verificar agora a continuidade de T . Sejam $w_n \rightarrow w$ em $L^p(Q)$ e $\lambda_n \rightarrow \lambda$ em $[0, 1]$. Denote $v_n^{\lambda_n} = T(w_n, \lambda_n)$, $v_n^{\lambda} = T(w_n, \lambda)$, $v^{\lambda} = T(w, \lambda)$. Por (4.9) e (4.10)

obtemos

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(v_n^{\lambda_n} - v_n^\lambda) - \Delta(v_n^{\lambda_n} - v_n^\lambda) = (\lambda_n - \lambda)(k(x, t, w_n) - h(w_n) + g(x, t)) & \text{em } Q, \\ \frac{\partial}{\partial \eta}(v_n^{\lambda_n} - v_n^\lambda) = 0 & \text{em } S, \\ v_n^{\lambda_n} - v_n^\lambda = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Do Teorema 1.2 obtemos a estimativa:

$$\|v_n^{\lambda_n} - v_n^\lambda\|_{W_{\bar{q}}^{2,1}(Q)} \leq C|\lambda_n - \lambda|(\|k(x, t, w_n) - h(w_n)\|_{L^{\bar{q}}(Q)} + \|g\|_{L^{\bar{q}}(Q)}).$$

A sequência (w_n) é limitada em $L^p(Q)$, assim $k(\cdot, \cdot, w_n) - h(w_n)$ é limitado em $L^{p/r}(Q)$ de acordo com a propriedade (4.3). Em virtude de (4.12), obtemos a limitação de $k(\cdot, \cdot, w_n) - h(w_n)$ em $L^{\bar{q}}(Q)$. Logo, tem-se $\|v_n^{\lambda_n} - v_n^\lambda\|_{W_{\bar{q}}^{2,1}(Q)} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Novamente por (4.9) e (4.10) obtemos

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(v_n^\lambda - v^\lambda) - \Delta(v_n^\lambda - v^\lambda) = \lambda(F(x, t, w_n) - F(x, t, w)) & \text{em } Q, \\ \frac{\partial}{\partial \eta}(v_n^\lambda - v^\lambda) = 0 & \text{em } S, \\ v_n^\lambda - v^\lambda = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Como antes, o Teorema 1.2 implica a estimativa:

$$\|v_n^\lambda - v^\lambda\|_{W_{\bar{q}}^{2,1}(Q)} \leq C\|F(x, t, w_n) - F(x, t, w)\|_{L^{\bar{q}}(Q)}.$$

Como $p \geq \bar{q}$, por 2) temos

$$\|F(x, t, w_n) - F(x, t, w)\|_{L^{\bar{q}}(Q)} \leq C\|(1 + |w_n|^{r-1} + |w|^{r-1})(w_n - w)\|_{L^p(Q)}.$$

Sendo (w_n) limitada, segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que $\|F(x, t, w_n) - F(x, t, w)\|_{L^{\bar{q}}(Q)} \rightarrow 0$, e portanto $\|v_n^\lambda - v^\lambda\|_{W_{\bar{q}}^{2,1}(Q)} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Agora, usando a imersão contínua (4.14) (com (4.15)), obtemos a continuidade da aplicação T descrita em (4.9). Além disso, a aplicação T dada por (4.9) é compacta. Isto pode ser visto escrevendo a composição

$$T : L^p(Q) \times [0, 1] \rightarrow W_{\bar{q}}^{2,1}(Q) \subset L^p(Q),$$

onde a segunda inclusão é compacta em vista da desigualdade (4.15).

Para $\lambda = 0$, (4.10) tem uma única solução com relação às condições inicial e de fronteira correspondentes. Resta então estimar o conjunto de todos os pontos fixos de T . Seja $v \in L^p(Q)$ solução do problema

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = \lambda(k(x, t, v) - h(v) + g(x, t)) & \text{em } Q, \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 & \text{em } S, \\ v(x, 0) = v_0(x) & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (4.16)$$

Denote $Q_t := \Omega \times (0, t)$, $t \in (0, T]$.

Multiplicando a primeira equação em (4.16) por v , integrando em Q_t , usando o teorema de Green, a desigualdade de Young e (4.4),

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} v^2 dx + \int_{Q_t} |\nabla v|^2 dx ds + \lambda \int_{Q_t} h(v) v dx ds = \\ & = \lambda \int_{Q_t} k(x, t, v) v dx ds + \lambda \int_{Q_t} g v dx ds + \frac{1}{2} \int_{\Omega} v_0^2 dx \\ & \leq b_2 \int_{Q_t} (1 + v^2) dx ds + \frac{1}{2} \int_{Q_t} g^2 dx ds + \frac{1}{2} \int_{Q_t} v^2 dx ds + \frac{1}{2} \int_{\Omega} v_0^2 dx, \end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} v^2 dx + \int_{Q_t} |\nabla v|^2 dx ds + \lambda \int_{Q_t} h(v) v dx ds \\ & \leq C(a_1, a_2) \left(1 + \int_{Q_t} v^2 dx ds \right) \end{aligned} \quad (4.17)$$

De (4.5) e (4.17), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} v^2 dx + \int_{Q_t} |\nabla v|^2 dx ds - b_3 \int_{Q_t} dx ds - b_4 \int_{Q_t} v^2 dx ds \\ \leq C(a_1, a_2) \left(1 + \int_{Q_t} v^2 dx ds \right), \end{aligned}$$

ou

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} v^2 dx + \int_{Q_t} |\nabla v|^2 dx ds \leq C(T, a_1, a_2) \left(1 + \int_{Q_t} v^2 dx ds \right).$$

Pela desigualdade de Gronwall,

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} v^2 dx + \int_{Q_t} |\nabla v|^2 dx ds \leq C(T, a_1, a_2), \quad \forall t \in (0, T]. \quad (4.18)$$

Combinando com (4.17) obtemos

$$\int_{Q_t} h(v) v dx ds \leq C(T, a_1, a_2), \quad (4.19)$$

e

$$\int_{Q_t} v^2 dx ds \leq C(T, a_1, a_2). \quad (4.20)$$

Multiplicando agora a primeira equação em (4.16) $\frac{\partial v}{\partial t}$, integrando sobre Q_t , usando o teorema de Green e a desigualdade de Young, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{Q_t} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx ds + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \\ \leq C + \int_{Q_t} k^2(x, t, v) dx ds + \frac{1}{2} \int_{Q_t} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx ds - \lambda \int_{Q_t} h(v) \frac{\partial v}{\partial t} dx ds. \end{aligned}$$

Usando o fato de que

$$\frac{\partial}{\partial s} \int_0^{v(x,s)} h(\tau) d\tau = h(v(x, s)) \frac{\partial v}{\partial s}(x, s), \quad q.t.p - s \in (0, T],$$

obtemos

$$\begin{aligned} \int_{Q_t} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx ds + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \\ \leq C + \int_{Q_t} k^2(x, t, v) dx ds + \frac{1}{2} \int_{Q_t} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx ds - \lambda \int_{\Omega} \int_0^{v(x,s)} h(\tau) \frac{\partial v}{\partial t} d\tau dx. \end{aligned}$$

Por 3)(i), temos

$$\int_{Q_t} k^2(x, t, v) dx ds \leq a_1 \int_{Q_t} h(v) v dx ds + a_2 \int_{Q_t} (1 + v^2) dx ds \leq C(T, a_1, a_2).$$

Logo, por (4.18) e (4.19),

$$\begin{aligned} & \int_{Q_t} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx ds + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \\ & + \lambda \int_{\Omega} \int_0^{v(x,s)} h(\tau) \frac{\partial v}{\partial t} d\tau dx \leq C(T, a_1, a_2), \quad \forall t \in (0, T]. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Além disso, por 3)(ii), (4.19) e (4.20),

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_0^{v(x,t)} h(\tau) d\tau dx & \leq C(T, b_0) \left(\int_{Q_t} v^2 dx ds + \int_{Q_t} h(v) v dx ds \right) \\ & \leq C(T, a_1, a_2, b_0) \end{aligned}$$

e portanto, por (4.21),

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_{L^2(Q)} \leq C(T, a_1, a_2, b_0). \quad (4.22)$$

Finalmente, multiplicando a primeira equação em (4.16) por Δv , integrando sobre Q_t , usando a fórmula de Green e a desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \int_{Q_t} (\Delta v)^2 dx ds &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v_0|^2 dx - \lambda \int_{Q_t} k(x, s, v) \Delta v dx ds \\ & \quad + \lambda \int_{Q_t} h(v) \Delta v dx ds - \lambda \int_{Q_t} g \Delta v dx ds \\ & \leq C + \frac{1}{2} \int_{Q_t} (\Delta v)^2 dx ds + \int_{Q_t} k^2(x, s, v) dx ds + \lambda \int_{Q_t} h(v) \Delta v dx ds. \end{aligned}$$

A seguinte propriedade é válida:

$$\nabla(h(v(\cdot, t))) = h'(v(\cdot, t)) \nabla v(\cdot, t), \quad \forall t \in (0, T]. \quad (4.23)$$

De fato, pelo teorema de imersão de Sobolev, sabemos que $W^{1,q}(\Omega) \subset L^{q^*}(\Omega)$, com $q^* = \frac{2N}{N-2}$ se $N > 2$. Logo $v(\cdot, t) \in L^{q^*}(\Omega)$ e $\nabla v(\cdot, t) \in (L^{q^*}(\Omega))^N$, $\forall t \in (0, T]$.

Sejam $t \in (0, T]$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, e $\omega \subset\subset \Omega$ com $\text{supp} \varphi \subset \omega$. Usando um resultado de aproximação (veja Adams [1] ou Brézis [3]), existe uma sequência $(v_n) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$

tal que $v_n \rightarrow v(\cdot, t)$ em $L^q(\Omega)$, q.t.p. em Ω , e $\nabla v_n \rightarrow \nabla v(\cdot, t)$ em $L^q(\omega)$, q.t.p. em ω . Então para todo $n \geq 1$ e $1 \leq i \leq N$, temos

$$\int_{\omega} h(v_n) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\omega} h'(v_n) \frac{\partial v_n}{\partial x_i} \varphi dx. \quad (4.24)$$

Considerando 3)(ii), a relação (4.6), e que $h \in C^1(\mathbb{R})$, podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue em (4.24), obtendo

$$\int_{\omega} h(v) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\omega} h'(v) \frac{\partial v}{\partial x_i} \varphi dx,$$

donde segue (4.23).

De (4.23), temos então

$$\begin{aligned} \int_{Q_t} h(v) \Delta v dx ds &= - \int_{Q_t} \nabla h(v) \nabla v \\ &= - \int_{Q_t} h'(v) |\nabla v|^2 dx ds, \quad \forall t \in (0, T]. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Assim,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{Q_t} (\Delta v)^2 dx ds \\ &\leq C + \int_{Q_t} k^2(x, s, v) dx ds - \lambda \int_{Q_t} h'(v) |\nabla v|^2 dx ds. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Usando 3)(i) podemos escrever (4.26) como

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{Q_t} (\Delta v)^2 dx ds + \lambda \int_{Q_t} h'(v) |\nabla v|^2 dx ds \\ &\leq C + a_1 \int_{Q_t} h(v) v dx ds + a_2 \int_{Q_t} v^2 dx ds, \quad \forall t \in (0, T]. \end{aligned}$$

Por (4.19) e (4.20) temos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{Q_t} (\Delta v)^2 dx ds \\ &+ \lambda \int_{Q_t} h'(v) |\nabla v|^2 dx ds \leq C(T, a_1, a_2), \quad \forall t \in (0, T]. \end{aligned} \quad (4.27)$$

De (4.27), 3)(ii) e (4.18) obtemos

$$\|\Delta v\|_{L^2(Q)} \leq C(T, a_1, a_2, b_0). \quad (4.28)$$

Aplicamos agora o Teorema 1.2 (para $p = 2$) no problema (4.16), obtendo

$$\begin{aligned}\|v\|_{W_2^{2,1}(Q)} &\leq C(\|v_0\|_{W_\infty^2(\Omega)} + \|k(\cdot, \cdot, v) - h(v) + g\|_{L^2(Q)}) \\ &= C\left(\|v_0\|_{W_\infty^2(\Omega)} + \left\|\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v\right\|_{L^2(Q)}\right).\end{aligned}\quad (4.29)$$

Usando (4.22) e (4.28) em (4.29), obtemos

$$\|v\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C(|\Omega|, T, a_1, a_2, b_0). \quad (4.30)$$

O Teorema 1.1 garante a inclusão contínua $W_2^{2,1}(Q) \subset L^{\tilde{\mu}}(Q)$, onde

$$\tilde{\mu} = \begin{cases} \infty & \text{se } N = 1 \\ \text{qualquer número positivo} & \text{se } N = 2 \\ \frac{2(N+2)}{N-2} & \text{se } N > 2. \end{cases}$$

Como, por (4.11), $\tilde{\mu} = \frac{2(N+2)}{N-2} > p$, para $N > 2$, temos a imersão contínua

$$W_2^{2,1}(Q) \subset L^p(Q). \quad (4.31)$$

De (4.30) e (4.31), segue então que

$$\|v\|_{L^p(Q)} \leq C(|\Omega|, T, a_1, a_2, b_0).$$

Aplicando o Teorema do ponto fixo de Leray-Schauder, obtemos um ponto fixo de T_λ em $\lambda = 1$, isto é, $T_1 v = v$, com $v \in L^p(Q) \cap W_2^{2,1}(Q)$.

Vamos mostrar agora que $v \in W_q^{2,1}(Q)$. Se $q \leq \frac{p}{r}$, então $q = \bar{q}$ e portanto $v \in W_q^{2,1}(Q)$. Se $q > \frac{p}{r}$, usaremos um argumento de *bootstrap*. Temos $F(\cdot, \cdot, v) + g \in L^{p/r}(Q)$, logo pelo Teorema 1.2 e (4.14), temos $v \in W_{p/r}^{2,1}(Q) \subset L^\mu(Q)$ com $\mu > p$ (por (4.15)). Se $q \leq \frac{\mu}{r}$, então $v \in W_q^{2,1}(Q)$. Se $q > \frac{\mu}{r}$, aplicamos o mesmo argumento, até chegar na condição $q \leq \frac{p}{r}$. Assim $v \in W_q^{2,1}(Q)$.

Vamos mostrar agora a desigualdade (4.8). Começamos observando que o argumento anterior permite nos restringir ao caso $2 \leq q \leq \frac{p}{r}$. Das estimativas (4.18), (4.21) e (4.27), escritas com as funções v_0 e g , junto com (4.30) e (4.31), obtemos

$$\|v\|_{L^p(Q)} \leq C(|\Omega|, T, a_1, a_2, b_0, q, r)(1 + \|v_0\|_{W_\infty^2(\Omega)} + \|g\|_{L^q(Q)}) \quad (4.32)$$

De (4.3), também temos

$$\begin{aligned}
\|F(x, t, v)\|_{L^q(Q)}^q &= \int_Q |F(x, t, v)|^q f x dt \leq \int_Q |a(1 + |v|^r)|^q dx dt \\
&\leq C \int_Q (1 + |v|^{rq}) dx dt \leq C(1 + \|v^r\|_{L^q(Q)}^q) \leq C(1 + \|v^r\|_{L^{p/r}(Q)}^q) \\
&\leq C(|\Omega|, T, c_0, r, \|F(\cdot, \cdot, 0)\|_{L^\infty(Q)})(1 + \|v\|_{L^p(Q)}^{rq})
\end{aligned}$$

Logo

$$\|F(x, t, v)\|_{L^q(Q)} \leq C(|\Omega|, T, c_0, r, \|F(\cdot, \cdot, 0)\|_{L^\infty(Q)})(1 + \|v\|_{L^p(Q)}^r) \quad (4.33)$$

Do Teorema 1.2 aplicado em (4.7), de (4.32) e (4.33) obtemos então, para qualquer solução $v \in W_q^{2,1}(Q)$, que

$$\begin{aligned}
\|v\|_{W_q^{2,1}(Q)} &\leq C(|\Omega|, T, a_1, a_2, b_0, q, r)(\|v_0\|_{W_\infty^2(\Omega)} + \|F(x, t, v)\|_{L^q(Q)} + \|g\|_{L^q(Q)}) \\
&\leq C(|\Omega|, T, a_1, a_2, b_0, q, r)(\|v_0\|_{W_\infty^2(\Omega)} \\
&\quad + C(|\Omega|, T, c_0, r, \|F(\cdot, \cdot, 0)\|_{L^\infty(Q)})(1 + \|v\|_{L^p(Q)}^r) + \|g\|_{L^q(Q)})
\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. $\square$

Como antes, vamos provar um resultado que garante dependência contínua de soluções em relação ao termo g da equação, donde se seguirá unicidade.

Teorema 4.2 *Suponha 1) e 2) e seja $M > 0$. Se $g_1, g_2 \in L^q(Q)$, $q \geq 2$, e $v_1, v_2 \in W_q^{2,1}(Q)$ são soluções correspondentes do problema (4.7) com $\|v_1\|_{L^\mu(Q)}, \|v_2\|_{L^\mu(Q)} \leq M$, então*

$$\|v_1 - v_2\|_{W_q^{2,1}(Q)} \leq C\|g_1 - g_2\|_{L^q(Q)}, \quad (4.34)$$

onde $C > 0$ é uma constante que depende de $|\Omega|, T, q, r, a_0, M$.

Demonstração. Denote $v := v_1 - v_2$. Então v satisfaz o seguinte problema:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = F(x, t, v_1) - F(x, t, v_2) + g_1 - g_2 & \text{em } Q, \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 & \text{em } S, \\ v(x, 0) = 0 & \text{em } \Omega, \end{array} \right. \quad (4.35)$$

Multiplicando a primeira equação em (4.35) por v , integrando sobre Q_t , usando a fórmula de Green e a desigualdade de Young, obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} v^2 dx ds + \int_{Q_t} |\nabla v|^2 dx ds \\ &= \int_{Q_t} (F(x, t, v_1) - F(x, t, v_2)) v dx ds + \int_{Q_t} (g_1 - g_2) v dx ds \\ &\leq \int_{Q_t} (F(x, t, v_1) - F(x, t, v_2)) v dx ds + \frac{1}{2} \int_{Q_t} (g_1 - g_2)^2 dx ds + \frac{1}{2} \int_{Q_t} v^2 dx ds. \end{aligned}$$

Usando agora 1), obtemos

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} v^2 dx ds + \int_{Q_t} |\nabla v|^2 dx ds \leq C(a_0) \int_{Q_t} v^2 dx ds + \frac{1}{2} \int_{Q_t} (g_1 - g_2)^2 dx ds$$

o que implica, pela desigualdade de Gronwall,

$$\|v\|_{L^2(Q)}^2 \leq C(|\Omega|, T, a_0) \|g_1 - g_2\|_{L^2(Q)}^2 \leq C(|\Omega|, T, a_0) \|g_1 - g_2\|_{L^q(Q)}^2. \quad (4.36)$$

A definição de μ permite considerarmos $\mu \geq qr$. Com isso, temos $v \in L^\mu(Q) \subseteq L^{qr}(Q)$, o que junto com (4.3) garante que $F(\cdot, \cdot, v_1) - F(\cdot, \cdot, v_2) \in L^q(Q)$. Podemos então aplicar o Teorema 1.2, obtendo a estimativa

$$\begin{aligned} \|v\|_{W_q^{2,1}(Q)}^2 &\leq C(|\Omega|, T, N) (\|F(x, t, v_1) - F(x, t, v_2)\|_{L^q(Q)}^2 \\ &\quad + \|g_1 - g_2\|_{L^q(Q)}^2). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Com a desigualdade $\mu \geq qr$ podemos também fixar um número p tal que

$$2 \leq q \leq \frac{\mu q}{\mu + q - qr} \leq p \leq \mu. \quad (4.38)$$

Logo, temos a seguinte seqüência de imersões:

$$W_q^{2,1}(Q) \subset L^\mu(Q) \subset L^p(Q) \subset L^q(Q) \subset L^2(Q). \quad (4.39)$$

De 2), (4.38) e da desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned} \|F(x, t, v_1) - F(x, t, v_2)\|_{L^q(Q)} &\leq \|(\tilde{F}(x, t, v_1, v_2))^{1/2} |v|\|_{L^q(Q)} \\ &= \left(\int_Q (\tilde{F}(x, t, v_1, v_2))^{q/2} |v|^q dx dt \right)^{1/q} \\ &\leq (\|(\tilde{F}(x, t, v_1, v_2))^{q/2}\|_{L^{p/(p-q)}(Q)} \|v^q\|_{L^{p/q}(Q)})^{1/q} \\ &= \left(\int_Q |\tilde{F}(x, t, v_1, v_2)|^{\alpha/2} \right)^{1/\alpha} \|v\|_{L^p(Q)}, \end{aligned} \quad (4.40)$$

com $\alpha := \frac{pq}{p-q}$. Os cálculos acima fazem sentido pois $\tilde{F}(x, t, v_1, v_2) \in L^{\alpha/2}(Q)$. De fato, levando em consideração a condição de crescimento em 2), $\tilde{F}(x, t, v_1, v_2) \in L^{\mu/2(r-1)}(Q)$ quando $v_1, v_2 \in L^\mu(Q)$ e por (4.38), temos

$$\frac{\mu}{r-1} \geq m > 2 \quad (4.41)$$

Combinando (4.37) e (4.40), temos

$$\begin{aligned} \|v\|_{W_q^{2,1}(Q)}^2 &\leq C(|\Omega|, T, N)(\|\tilde{F}(x, t, v_1, v_2)\|_{L^{m/2}(Q)}\|v\|_{L^p(Q)}^2 \\ &\quad + \|g_1 - g_2\|_{L^q(Q)}^2). \end{aligned} \quad (4.42)$$

Pelo fato de $\|v_1\|_{L^\mu(Q)}, \|v_2\|_{L^\mu(Q)} \leq M$, por 2), (4.41) e (4.42), obtemos

$$\begin{aligned} \|v\|_{W_q^{2,1}(Q)}^2 &\leq C(|\Omega|, T, r, q, N)(1 + 2M^{2(r-1)})(\|v\|_{L^p(Q)}^2 \\ &\quad + \|g_1 - g_2\|_{L^q(Q)}^2). \end{aligned} \quad (4.43)$$

A desigualdade de interpolação aplicada em (4.39) nos diz que para todo $\epsilon > 0$, existe $C(\epsilon) > 0$ tal que

$$\|v\|_{L^p(Q)} \leq \epsilon \|v\|_{W_q^{2,1}(Q)} + C(\epsilon) \|v\|_{L^2(Q)}. \quad (4.44)$$

De (4.43), (4.44) e (4.36) temos então

$$\begin{aligned} \|v\|_{W_q^{2,1}(Q)}^2 &\leq C(|\Omega|, T, r, q, N, M)(\epsilon \|v\|_{W_q^{2,1}(Q)}^2 \\ &\quad + C(\epsilon)C(|\Omega|, T, a_0)\|g_1 - g_2\|_{L^q(Q)}^2 + \|g_1 - g_2\|_{L^q(Q)}^2). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Tomando $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, (4.45) implica (4.34). $\square$

Corolário 4.1 *O problema (4.7) tem solução única.*

4.3 Existência, unicidade e regularidade de solução

Vamos provar agora o principal resultado no estudo do problema (4.1).

Teorema 4.3 *Se a função $F : Q \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz 1) - 3), então o problema (4.1) tem uma solução $(\theta, \varphi) \in W_q^{2,1}(Q) \times W_\mu^{2,1}(Q)$, com μ satisfazendo*

$$\mu = \begin{cases} \infty & \text{se } N + 2 - 2q < 0 \\ \text{qualquer número positivo } \geq qr & \text{se } N + 2 - 2q = 0 \\ \frac{q(N+2)}{N+2-2q} & \text{se } N + 2 - 2q > 0. \end{cases} \quad (4.46)$$

Além disso, a solução (θ, φ) satisfaz

$$\|\theta\|_{W_q^{2,1}(Q)} + \|\varphi\|_{W_\mu^{2,1}(Q)} \leq C(1 + \|\theta_0\|_{W_\infty^2(\Omega)}^r + \|\varphi_0\|_{W_\infty^2(\Omega)}^r + \|f\|_{L^q(Q)}^r), \quad (4.47)$$

onde a constante C depende de $|\Omega|, T, q, r, a_1, a_2, b_0, c_0$ e $\|F(\cdot, \cdot, 0)\|_{L^\infty(Q)}$.

Demonstração. Aplicaremos novamente o teorema do ponto fixo de Leray-Schauder, desta vez no espaço de Banach

$$B := \{(\theta, \varphi); \theta \in L^q(Q), \varphi \in L^p(Q)\},$$

com p satisfazendo (4.11).

Consideremos então o operador $T : B \times [0, 1] \rightarrow B$ que leva cada $(\nu, \psi) \in B$ na solução (θ, φ) do problema

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta = \lambda \left(-l \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f \right) & \text{em } Q, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta \varphi = F(x, t, \varphi) + \lambda \nu & \text{em } Q, \\ \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 & \text{em } S, \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x) & \text{em } \Omega, \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x) & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (4.48)$$

Vamos mostrar que T está bem definido. De acordo com o Teorema 4.1, sabemos que existe uma solução $\varphi \in W_q^{2,1}(Q)$ da segunda equação de (4.48). Além disso, ela é única, pelo Teorema 4.2. O Teorema 1.1 garante a continuidade da inclusão $W_q^{2,1}(Q) \subset W_2^{2,1}(Q) \subset L^p(Q)$. Logo $\varphi \in L^p(Q)$. Além disso, como $-l \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f \in L^q(Q)$, do Teorema 1.2, segue que a primeira equação de (4.48) tem uma única solução $\theta \in W_q^{2,1}(Q) \subset L^q(Q)$. Portanto T está bem definido.

Para provar a continuidade, consideremos primeiro $(\nu_1, \psi_1), (\nu_2, \mu_2) \in B$ e $(\theta_1, \varphi_1), (\theta_2, \varphi_2)$ as soluções correspondentes. Temos então

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial t}(\theta_1 - \theta_2) - \Delta(\theta_1 - \theta_2) = -\lambda l \frac{\partial}{\partial t}(\varphi_1 - \varphi_2) & \text{em } Q, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\varphi_1 - \varphi_2) - \Delta(\varphi_1 - \varphi_2) = F(x, t, \varphi_1) - F(x, t, \varphi_2) \\ + \lambda(\nu_1 - \nu_2) & \text{em } Q, \\ \frac{\partial}{\partial \eta}(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\partial}{\partial \eta}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 & \text{em } S, \\ (\varphi_1 - \varphi_2)(x, 0) = 0 & \text{em } \Omega, \\ (\theta_1 - \theta_2)(x, 0) = 0 & \text{em } \Omega. \end{array} \right. \quad (4.49)$$

Aplicando o Teorema 4.2 na segunda equação em (4.49) obtemos

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{W_q^{2,1}(Q)} \leq C \|\nu_1 - \nu_2\|_{L^q(Q)}. \quad (4.50)$$

Aplicando agora o Teorema 1.2 na primeira equação em (4.49), segue que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|\theta_1 - \theta_2\|_{W_q^{2,1}(Q)} \leq C \left\| \frac{\partial}{\partial t}(\varphi_1 - \varphi_2) \right\|_{L^q(Q)}$$

Desta desigualdade e (4.50) temos uma nova constante $C > 0$ tal que

$$\|\theta_1 - \theta_2\|_{L^q(Q)} \leq C \|\nu_1 - \nu_2\|_{L^q(Q)}. \quad (4.51)$$

Das relações (4.50) e (4.51) segue então a continuidade de T em relação à (ν, ψ) .

Considere agora $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$ e $(\theta_1, \varphi_1), (\theta_2, \varphi_2)$ as soluções correspondentes. Temos

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial t}(\theta_1 - \theta_2) - \Delta(\theta_1 - \theta_2) = -l \left(\lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \right) \\ \quad + (\lambda_1 - \lambda_2)f & \text{em } Q, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\varphi_1 - \varphi_2) - \Delta(\varphi_1 - \varphi_2) = F(x, t, \varphi_1) - F(x, t, \varphi_2) \\ \quad + (\lambda_1 - \lambda_2)\nu & \text{em } Q, \\ \frac{\partial}{\partial \eta}(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\partial}{\partial \eta}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 & \text{em } S, \\ (\varphi_1 - \varphi_2)(x, 0) = 0 & \text{em } \Omega, \\ (\theta_1 - \theta_2)(x, 0) = 0 & \text{em } \Omega. \end{array} \right. \quad (4.52)$$

O Teorema 4.2 aplicado à segunda equação de (4.52) nos assegura que

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{W_q^{2,1}(Q)} \leq C|\lambda_1 - \lambda_2| \|\nu\|_{L^q(Q)}. \quad (4.53)$$

Do Teorema 1.2 aplicado na primeira equação de (4.52), obtemos

$$\begin{aligned} \|\theta_1 - \theta_2\|_{W_q^{2,1}(Q)} &\leq C \left(\left\| \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \right\|_{L^q(Q)} + |\lambda_1 - \lambda_2| \|f\|_{L^q(Q)} \right) \\ &\leq C \left(|\lambda_1 - \lambda_2| \left(\left\| \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \right\|_{L^q(Q)} + \|f\|_{L^q(Q)} \right) + \lambda_2 \left\| \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \right\|_{L^q(Q)} \right). \end{aligned}$$

Logo, de (4.53), obtemos a estimativa

$$\|\theta_1 - \theta_2\|_{W_q^{2,1}(Q)} \leq C|\lambda_1 - \lambda_2|. \quad (4.54)$$

A continuidade de T em λ segue então de (4.50), (4.51) e (4.54).

Além disso, T é um operador compacto, pelo Teorema 1.1.

Para $\lambda = 0$, o problema (4.48) tem uma única solução em relação as condições iniciais e de fronteira, de acordo com o Teorema 1.2 e o Corolário 4.1. Resta então

estimar o conjunto de todos os pontos fixos de T . Seja então (θ, φ) um ponto fixo de T . Então (θ, φ) satisfaz

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta = \lambda \left(-l \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f \right) & \text{em } Q, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta \varphi = F(x, t, \varphi) + \lambda \theta & \text{em } Q, \\ \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 & \text{em } S, \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x) & \text{em } \Omega, \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x) & \text{em } \Omega. \end{array} \right. \quad (4.55)$$

Multiplicando a primeira equação em (4.55) por $\theta + \lambda l \varphi$, integrando sobre Q_t , usando a fórmula de Green e a desigualdade de Young, obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\theta + \lambda l \varphi)^2 dx + \int_{Q_t} \nabla \theta (\nabla \theta + \lambda l \nabla \varphi) dx ds \\ & \leq C \left(1 + \int_{Q_t} (\theta^2 + \varphi^2) dx ds \right), \quad \forall t \in (0, T]. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Multiplicando a segunda equação em (4.55) por φ , integrando sobre Q_t e usando a fórmula de Green, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varphi^2 dx + \int_{Q_t} |\nabla \varphi|^2 dx ds &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varphi_0^2 dx + \int_{Q_t} (k(x, t \varphi) - h(\varphi)) \varphi dx ds \\ &+ \lambda \int_{Q_t} \theta \varphi dx ds, \quad \forall t \in (0, T]. \end{aligned}$$

Da relação (4.4) e da desigualdade de Young segue então que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varphi^2 dx + \int_{Q_t} |\nabla \varphi|^2 dx ds + \frac{1}{2} \int_{Q_t} h(\varphi) \varphi dx ds \\ & \leq C \left(1 + \int_{Q_t} (\theta^2 + \varphi^2) dx ds \right), \quad \forall t \in (0, T] \end{aligned} \quad (4.57)$$

e portanto, da relação (4.5), obtemos

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \varphi^2 dx + \int_{Q_t} |\nabla \varphi|^2 dx ds \leq C \left(1 + \int_{Q_t} (\theta^2 + \varphi^2) dx ds \right), \quad \forall t \in (0, T]. \quad (4.58)$$

Multiplicando (4.58) por $\frac{1}{2} + \lambda^2 l^2$ e somando o resultado com (4.56), obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\frac{1}{4}(\varphi^2 + \theta^2) + \left(\frac{1}{2}\theta + \lambda l\varphi \right)^2 \right) dx \\ & + \int_{Q_t} \left(\frac{1}{2}|\nabla\theta|^2 + \frac{1}{2}|\nabla\theta + \lambda l\nabla\varphi|^2 + \frac{1}{2}(1 + \lambda^2 l^2)|\nabla\varphi|^2 \right) dx ds \\ & \leq C \left(1 + \int_{Q_t} (\theta^2 + \varphi^2) dx ds \right) \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \int_{\Omega} (\theta^2 + \varphi^2) dx + \frac{1}{2} \int_{Q_t} (|\nabla\theta|^2 + |\nabla\varphi|^2) dx ds \\ & \leq C \left(1 + \int_{Q_t} (\theta^2 + \varphi^2) dx ds \right), \quad \forall t \in (0, T]. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Pelo lema de Gronwall, chegamos em

$$\int_{\Omega} (\theta^2 + \varphi^2) dx \leq C(T, a_1, a_2), \quad \forall t \in (0, T]$$

o que, junto com (4.59), resulta em

$$\int_{\Omega} (\theta^2 + \varphi^2) dx + \int_{Q_t} (|\nabla\theta|^2 + |\nabla\varphi|^2) dx ds \leq C(T, a_1, a_2), \quad \forall t \in (0, T]. \quad (4.60)$$

Combinando (4.57) e (4.60), obtemos

$$\int_{\Omega} \varphi^2 dx + \int_{Q_t} |\nabla\varphi|^2 dx ds \int_{Q_t} h(\varphi)\varphi dx ds \leq C(T, a_1, a_2), \quad \forall t \in (0, T]. \quad (4.61)$$

Multiplicando agora a primeira equação em (4.55) por $(\Delta\theta + \lambda l\Delta\varphi)$, integrando sobre Q_t e usando a fórmula de Green, obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla\theta + \lambda l\nabla\varphi|^2 dx + \int_{Q_t} (\Delta\theta)^2 dx ds + \lambda l \int_{Q_t} \Delta\theta \Delta\varphi dx ds \\ & = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla\theta_0 + \lambda l\nabla\varphi_0|^2 dx - \lambda \int_{Q_t} (\Delta\theta + \lambda l\Delta\varphi) f dx ds, \quad \forall t \in (0, T]. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Multiplicando a segunda equação em (4.55) por $\Delta\varphi$, integrando sobre Q_t e usando a fórmula de Green, temos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta\varphi|^2 dx + \int_{Q_t} (\Delta\varphi)^2 dx ds - \int_{Q_t} h(\varphi)\Delta\varphi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla\varphi_0|^2 dx \\ & - \int_{Q_t} k(x, s, \varphi)\Delta\varphi dx ds - \lambda \int_{Q_t} \theta\Delta\varphi dx ds, \quad \forall t \in (0, T]. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Como $\varphi \in L^p(Q)$, podemos usar a regra da cadeia dada pela expressão (4.25) com $v = \varphi$. Por isto e (4.63), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx + \int_{Q_t} (\Delta \varphi)^2 dx ds + \int_{Q_t} h'(\varphi) |\nabla \varphi|^2 dx ds &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \varphi_0|^2 dx \\ &- \int_{Q_t} k(x, s, \varphi) \Delta \varphi dx ds - \int_{Q_t} \lambda \int_{Q_t} \theta \Delta \varphi dx ds, \quad \forall t \in (0, T]. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Multiplicando (4.64) por $\frac{3}{2}(1 + \lambda^2 l^2)$, somando o resultado com (4.62) e usando a desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(|\nabla \theta + \lambda l \nabla \varphi|^2 + \frac{3}{2}(1 + \lambda^2 l^2) |\nabla \varphi|^2 \right) dx + \int_{Q_t} (\Delta \theta)^2 dx ds \\ &\quad + \lambda l \int_{Q_t} \Delta \theta \Delta \varphi dx ds + \frac{3}{2}(1 + \lambda^2 l^2) \int_{Q_t} (\Delta \varphi)^2 dx ds \\ &\quad + \frac{3}{2}(1 + \lambda^2 l^2) \int_{Q_t} h'(\varphi) |\nabla \varphi|^2 dx ds \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(|\nabla \theta_0 + \lambda l \nabla \varphi_0|^2 + \frac{3}{2}(1 + \lambda^2 l^2) |\nabla \varphi_0|^2 \right) dx \\ &\quad + \frac{3}{2}(1 + \lambda^2 l^2) \int_{Q_t} \left(3k^2(x, s, \varphi) + \frac{1}{12} (\Delta \varphi)^2 \right) dx ds \\ &\quad + \frac{3}{2}(1 + \lambda^2 l^2) \int_{Q_t} \left(3\theta^2 + \frac{1}{12} (\Delta \varphi)^2 \right) dx ds + \int_{Q_t} \left(\frac{1}{2} f^2 + \frac{1}{2} (\Delta \theta)^2 \right) dx ds \\ &\quad + \int_{Q_t} \left(f^2 + \frac{1}{4} \lambda^2 l^2 (\Delta \varphi)^2 \right) dx ds, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(|\nabla \theta + \lambda l \nabla \varphi|^2 + \frac{3}{2}(1 + \lambda^2 l^2) |\nabla \varphi|^2 \right) dx \\ &\quad + \int_{Q_t} \left(\frac{1}{2} (\Delta \theta)^2 + \lambda l \Delta \theta \Delta \varphi + \left(\frac{5}{4} + \lambda^2 l^2 \right) (\Delta \varphi)^2 \right) dx ds \\ &\quad + \frac{3}{2}(1 + \lambda^2 l^2) \int_{Q_t} h'(\varphi) |\nabla \varphi|^2 dx ds \\ &\leq C(T) \left(1 + \int_{Q_t} (k^2(x, s, \varphi) + \theta^2) dx ds \right). \end{aligned}$$

Usando agora 3)(i), (4.60) e (4.61), obtemos a limitação

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(|\nabla \theta + \lambda l \nabla \varphi|^2 + \frac{3}{2} (1 + \lambda^2 l^2) |\nabla \varphi|^2 \right) dx \\ & + \int_{Q_t} \left(\frac{1}{4} (\Delta \theta)^2 + \frac{5}{4} (\Delta \varphi)^2 + \left(\frac{1}{2} \Delta \theta + \lambda l \Delta \varphi \right)^2 \right) dx ds \\ & + \frac{3}{2} (1 + \lambda^2 l^2) \int_{Q_t} h'(\varphi) |\nabla \varphi|^2 dx ds \leq C(T, a_1, a_2), \quad \forall t \in (0, T]. \end{aligned}$$

Da desigualdade acima, de 3)(ii) e de (4.60) concluimos que

$$\int_{Q_t} [(\Delta \theta)^2 + (\Delta \varphi)^2] dx ds \leq C(T, a_1, a_2), \quad \forall t \in (0, T]. \quad (4.65)$$

Finalmente, multiplicando a primeira equação em (4.55) por $\frac{\partial \theta}{\partial t} + \lambda l \frac{\partial \varphi}{\partial t}$, integrando sobre Q_t e usando a fórmula de Green, obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{Q_t} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + \lambda l \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 dx ds + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \theta|^2 dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \theta_0|^2 dx \\ & + \lambda l \int_{Q_t} \Delta \theta \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx ds + \lambda \int_{Q_t} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + \lambda l \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) f dx ds, \quad \forall t \in (0, T]. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Multiplicando a segunda equação em (4.55) por $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ e procedendo como em (4.66), temos

$$\begin{aligned} & \int_{Q_t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 dx ds + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \theta|^2 dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \varphi_0|^2 dx \\ & + \int_{Q_t} (k(x, t, \varphi) - h(\varphi)) \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx ds + \lambda \int_{Q_t} \theta \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx ds, \quad \forall t \in (0, T]. \end{aligned}$$

Observe que

$$h(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^{\varphi(x,t)} h(\tau) d\tau \right), \quad (x, t) \in Q,$$

pois $h \in C^1(\mathbb{R})$ e $\varphi(x, \cdot) \in W_2^1(0, T)$. Resulta então que

$$\begin{aligned} & \int_{Q_t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 dx ds + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 + \int_{\Omega} \int_0^{\varphi(x,t)} h(\tau) d\tau dx \\ & = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \varphi_0|^2 dx + \int_{\Omega} \int_0^{\varphi_0(x)} h(\tau) d\tau dx + \int_{Q_t} k(x, t, \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx ds \\ & \quad + \lambda \int_{Q_t} \theta \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx ds, \quad \forall t \in (0, T]. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Multiplicando (4.67) por $\frac{5}{4} + 4\lambda^2 l^2$, somando com (4.66) e usando a desigualdade de Young, (4.60), (4.61) e (4.65),

$$\begin{aligned}
& \int_{Q_t} \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + 2\lambda l \frac{\partial \theta}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \lambda^2 l^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{5}{4} + 4\lambda^2 l^2 \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right] dx ds \\
& \quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \theta|^2 dx + \frac{1}{2} \left(\frac{5}{4} + 4\lambda^2 l^2 \right) \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx \\
& \quad + \left(\frac{5}{4} + 4\lambda^2 l^2 \right) \int_{\Omega} \int_0^{\varphi(x,t)} h(\tau) d\tau dx \\
& \leq C + \frac{1}{2} \int_{Q_t} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 dx ds + (1 + \lambda^2 l^2) \int_{Q_t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 dx ds, \quad \forall t \in (0, T].
\end{aligned}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
& \int_{Q_t} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial t} + 2\lambda l \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right] dx ds \\
& + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \theta|^2 dx + \frac{A}{2} \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx + A \int_{\Omega} \int_0^{\varphi(x,t)} h(\tau) d\tau dx \\
& \leq C(T, a_1, a_2), \quad \forall t \in (0, T].
\end{aligned} \tag{4.68}$$

Além disso, por 3)(ii), temos

$$\int_0^z h(\tau) d\tau \geq -C'(1 + z^2), \quad \forall z \in \mathbb{R}. \tag{4.69}$$

Das relações (4.60), (4.68) e (4.69) chegamos na seguinte estimativa:

$$\begin{aligned}
& \int_{Q_t} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 dx ds + \int_{Q_t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 dx ds + \int_{\Omega} (|\nabla \theta|^2 + |\nabla \varphi|^2) dx ds \\
& \leq C(T, a_1, a_2, b_0).
\end{aligned} \tag{4.70}$$

Aplicamos agora o Teorema 1.2 nas duas primeiras equações de (4.55), assim como as estimativas (4.65) e (4.70), obtendo assim as seguintes estimativas:

$$\begin{aligned}
\|\theta\|_{W_2^{2,1}(Q)} & \leq C(|\Omega|) \left(\|\theta_0\|_{W_{\infty}^2(\Omega)} + \lambda \left\| -l \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f \right\|_{L^2(Q)} \right) \\
& \leq C(|\Omega|, T, a_1, a_2, b_0)
\end{aligned} \tag{4.71}$$

e

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_{W_2^{2,1}(Q)} &\leq C(|\Omega|) \left(\|\varphi_0\|_{W_\infty^2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta \varphi \right\|_{L^2(Q)} \right) \\ &\leq C(|\Omega|, T, a_1, a_2, b_0)\end{aligned}\quad (4.72)$$

Das imersão contínua (4.31) e das estimativas (4.71) e (4.72), obtemos uma limitação para todos os pontos fixos de T . Logo, o teorema do ponto fixo de Leray-Schauder garante a existência de um ponto fixo para T em $\lambda = 1$. Portanto existe uma solução $(\theta, \varphi) \in B$ de (4.1) tal que $(\theta, \varphi) \in W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$.

Resta agora mostrar que $(\theta, \varphi) \in W_q^{2,1}(Q) \times W_\mu^{2,1}(Q)$, com μ satisfazendo (4.46), e a estimativa (4.47). Usando o Teorema 4.1 na segunda equação de (4.1), temos

$$\|\varphi\|_{W_q^{2,1}(Q)} \leq C(1 + \|\varphi_0\|_{W_\infty^2(\Omega)}^r + \|\theta\|_{L^q(Q)}^r). \quad (4.73)$$

Aplicando o Teorema 1.2 na primeira equação de (4.1), e combinando com as relações (4.31) e (4.73), obtemos

$$\begin{aligned}\|\theta\|_{W_q^{2,1}(Q)} &\leq C \left(\|\theta_0\|_{W_\infty^2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\|_{L^q(Q)} + \|f\|_{L^q(Q)} \right) \\ &\leq C(1 + \|\theta_0\|_{W_\infty^2(\Omega)} + \|\varphi_0\|_{W_\infty^2(\Omega)}^r + \|\theta\|_{L^q(Q)}^r + \|f\|_{L^q(Q)}) \\ &\leq C(1 + \|\theta_0\|_{W_\infty^2(\Omega)} + \|\varphi_0\|_{W_\infty^2(\Omega)}^r + \|\theta\|_{W_2^{2,1}(Q)}^r + \|f\|_{L^q(Q)})\end{aligned}\quad (4.74)$$

Notando que (4.71) pode ser escrito como

$$\|\theta\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C(|\Omega|, T, q, r, a_1, a_2, b_0)(1 + \|\theta_0\|_{W_\infty^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(Q)}),$$

obtemos de (4.74)

$$\|\theta\|_{W_q^{2,1}(Q)} \leq C(1 + \|\theta_0\|_{W_\infty^2(\Omega)}^r + \|\varphi_0\|_{W_\infty^2(\Omega)}^r + \|f\|_{L^q(Q)}^r). \quad (4.75)$$

Do Teorema 4.1 e de (4.39), temos

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_{W_\mu^{2,1}(Q)} &\leq C(1 + \|\varphi_0\|_{W_\infty^2(\Omega)}^r + \|\theta\|_{L^\mu(Q)}^r) \\ &\leq C(1 + \|\varphi_0\|_{W_\infty^2(\Omega)}^r + \|\theta\|_{W_q^{2,1}(Q)}^r).\end{aligned}\quad (4.76)$$

De (4.75) e (4.76) segue que $(\theta, \varphi) \in W_q^{2,1}(Q) \times W_\mu^{2,1}(Q)$ e a estimativa (4.47). $\square$

Teorema 4.4 *Suponha que 1)-3) sejam válidos e seja $M > 0$. Se (θ_1, φ_1) e (θ_2, φ_2) são soluções de (4.1) correspondentes a $f_1, f_2 \in L^q(Q)$ respectivamente, tal que $\|\varphi_1\|_{L^\mu(Q)}, \|\varphi_2\|_{L^\mu(Q)} \leq M$, então*

$$\|\theta_1 - \theta_2\|_{W_q^{2,1}(Q)} + \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{W_\mu^{2,1}(Q)} \leq C\|f_1 - f_2\|_{L^q(Q)}, \quad (4.77)$$

onde $C > 0$ depende de $|\Omega|, T, q, r, a_0, a_1, a_2, M$.

Demonstração. Denote $\theta := \theta_1 - \theta_2$, $\varphi := \varphi_1 - \varphi_2$ e $f := f_1 - f_2$. Então θ e φ satisfazem o problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta = -l \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f & \text{em } Q, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta \varphi = F(x, t, \varphi_1) - F(x, t, \varphi_2) + \theta & \text{em } Q, \\ \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 & \text{em } S, \\ \theta(x, 0) = \varphi(x, 0) = 0 & \text{em } \Omega. \end{array} \right. \quad (4.78)$$

Do Teorema 4.2 temos a seguinte estimativa:

$$\|\varphi\|_{W_q^{2,1}(Q)} \leq C(|\Omega|, T, q, r, a_0, M)\|\theta\|_{L^q(Q)} \quad (4.79)$$

Aplicando o Teorema 1.2 na primeira equação de (4.78) e combinando com (4.79),

$$\begin{aligned} \|\theta\|_{W_q^{2,1}(Q)} &\leq C(|\Omega|, T, q, r, a_0, M) \left(\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\|_{L^q(Q)} + \|f\|_{L^q(Q)} \right) \\ &\leq C(|\Omega|, T, q, r, a_0, M)(\|\theta\|_{L^q(Q)} + \|f\|_{L^q(Q)}). \end{aligned} \quad (4.80)$$

Temos a seguinte desigualdade de interpolação:

$$\|\theta\|_{L^q(Q)} \leq \epsilon \|\theta\|_{W_q^{2,1}(Q)} + C(\epsilon) \|\theta\|_{L^2(Q)}.$$

Logo, escolhendo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, segue de (4.80) que

$$\|\theta\|_{W_q^{2,1}(Q)} \leq C(|\Omega|, T, q, r, a_0, M)(\|\theta\|_{L^2(Q)} + \|f\|_{L^q(Q)}). \quad (4.81)$$

Aplicando o Teorema 4.2 na segunda equação, usando (4.39) e (4.81),

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_{W_\mu^{2,1}(Q)} &\leq C(|\Omega|, T, q, r, a_0, M)\|\theta\|_{L^\mu(Q)} \\
&\leq C(|\Omega|, T, q, r, a_0, M)\|\theta\|_{W_q^{2,1}(Q)} \\
&\leq C(|\Omega|, T, q, r, a_0, M)(\|\theta\|_{L^2(Q)} + \|f\|_{L^q(Q)}). \tag{4.82}
\end{aligned}$$

Para completar a demonstração, vamos obter uma estimativa para $\|\theta\|_{L^2(Q)}$. Para isso, retornamos às equações em (4.78) e procedemos como no teorema anterior:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\theta + l\varphi)^2 dx + \int_{Q_t} (|\nabla \theta|^2 + l\nabla \theta \nabla \varphi) dx ds \\
&\leq C \left(\int_{Q_t} (\theta^2 + \varphi^2) dx ds + \int_{Q_t} f^2 dx ds \right)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_{\Omega} \varphi^2 dx + \int_{Q_t} |\nabla \varphi|^2 dx ds &= \int_{Q_t} (F(x, t, \varphi_1) - F(x, t, \varphi_2)) dx ds + \int_{Q_t} \theta \varphi dx ds \\
&\leq C \left(\int_{Q_t} \varphi^2 dx ds + \int_{Q_t} \theta^2 dx ds \right).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \int_{\Omega} ((\theta + l\varphi)^2 + A\varphi^2) dx + \int_{Q_t} (|\nabla \theta|^2 + l\nabla \theta \nabla \varphi + A|\nabla \varphi|^2) dx ds \\
&\leq C \left(\int_{Q_t} (\theta^2 + \varphi^2) dx ds + \int_{Q_t} f^2 dx ds \right),
\end{aligned}$$

com $A \in \mathbb{R}$ arbitrário. Escolhendo $A = 1 + l^2$, e usando o Lema de Gronwall,

$$\int_{\Omega} (\theta^2 + \varphi^2) dx + \int_{Q_t} (|\nabla \theta|^2 + |\nabla \varphi|^2) dx ds \leq \|f\|_{L^q(Q)}^2. \tag{4.83}$$

De (4.81), (4.82) e (4.83), obtemos (4.77). $\square$

Corolário 4.2 *A solução do problema (4.1) é única.*

4.4 Propriedades do operador solução

Como antes, vamos estudar as propriedades do operador $A : L^q(Q) \rightarrow W_q^{2,1}(Q) \times W_\mu^{2,1}(Q)$ que aplica o termo $f \in L^q(Q)$ de (4.1) na solução correspondente $(\theta, \varphi) \in$

$W_q^{2,1}(Q) \times W_\mu^{2,1}(Q)$. Além das hipóteses 1)-3), suponhamos que $F(x, t, \cdot) \in C^1(\mathbb{R})$, $\forall (x, t) \in Q$.

Teorema 4.5 *Sejam $f, h \in L^q(Q)$ com $A(f), A(f+h)$ sendo as soluções correspondentes de (4.1). Então*

$$\|A(f+h) - A(f) - A'(f)h\|_{W_q^{2,1}(Q) \times W_\mu^{2,1}(Q)} \leq C\|h\|_{L^q(Q)}^2, \quad (4.84)$$

onde $A'(f) : L^q(Q) \rightarrow W_q^{2,1}(Q) \times W_\mu^{2,1}(Q)$ é um operador linear e $(\theta^*, \varphi^*) = A'(f)h$ é a solução do problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \theta^*}{\partial t} - \Delta \theta^* = -l \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} + h & \text{em } Q, \\ \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} - \Delta \varphi^* = F_\varphi(x, t, \varphi) \varphi^* + \theta^* & \text{em } Q, \\ \frac{\partial \theta^*}{\partial \eta} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \eta} = 0 & \text{em } S, \\ \theta^*(x, 0) = \varphi^*(x, 0) = 0 & \text{em } \Omega, \end{array} \right. \quad (4.85)$$

sendo φ a segunda componente de $A(f)$.

Demonstração. Não é difícil ver que (4.85) tem uma única solução $(\theta^*, \varphi^*) \in W_q^{2,1}(Q) \times W_\mu^{2,1}(Q)$ e μ satisfazendo (4.46). Sejam $(\theta, \varphi) = A(f)$ e $(\theta_h, \varphi_h) = A(f+h)$. Pelo Teorema 4.4, temos a estimativa de estabilidade

$$\|\varphi_h - \varphi\|_{W_\mu^{2,1}(Q)} + \|\theta_h - \theta\|_{W_q^{2,1}(Q)} \leq C\|h\|_{L^q(Q)},$$

com μ satisfazendo (4.46). Do Teorema 1.1, temos em particular

$$\|\varphi_h - \varphi\|_{L^\infty(Q)} \leq C\|h\|_{L^q(Q)}. \quad (4.86)$$

Denote $\widehat{\theta} := \theta_h - \theta - \theta^*$ e $\widehat{\varphi} := \varphi_h - \varphi - \varphi^*$.

É fácil ver que $(\widehat{\theta}, \widehat{\varphi})$ satisfaz o seguinte problema:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \widehat{\theta}}{\partial t} - \Delta \widehat{\theta} = -l \frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial t} & \text{em } Q, \\ \frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial t} - \Delta \widehat{\varphi} = F_{\varphi}(x, t, \varphi) \widehat{\varphi} + \widehat{\theta} + \widehat{f} & \text{em } Q, \\ \frac{\partial \widehat{\theta}}{\partial \eta} = \frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial \eta} = 0 & \text{em } S, \\ \widehat{\theta}(x, 0) = \widehat{\varphi}(x, 0) = 0 & \text{em } \Omega, \end{array} \right. \quad (4.87)$$

onde $\widehat{f}$ é definido como

$$\widehat{f} := F(x, t, \varphi_h) - F(x, t, \varphi) - F_{\varphi}(x, t, \varphi)(\varphi_h - \varphi).$$

Por 1), temos $|F_{\varphi}(x, t, \varphi)| \leq a_0$. Disso, de 2) e (4.86), obtemos

$$\|\widehat{f}\|_{L^{\infty}(Q)} \leq C \|\varphi_h - \varphi\|_{L^{\infty}(Q)}^2 \leq C \|h\|_{L^q(Q)}^2, \quad (4.88)$$

com C dependendo de $\|f\|_{L^q(Q)}$ e $\|h\|_{L^q(Q)}$.

Para o problema linear (4.87) obtemos de maneira semelhante à demonstração do Teorema 4.3 a estimativa

$$\|\widehat{\theta}\|_{W_q^{2,1}(Q)} + \|\widehat{\varphi}\|_{W_{\mu}^{2,1}(Q)} \leq C \|\widehat{f}\|_{L^q(Q)},$$

para qualquer $\mu \in [2, \infty)$. Isto junto com (4.88) prova (4.84). $\square$

Capítulo 5

Um problema de controle ótimo para o modelo generalizado

Neste capítulo apresentaremos um estudo de um problema de controle ótimo análogo ao feito no Capítulo 3, considerando para isso o mesmo funcional, porém associado ao sistema de Moroşanu e Motreanu. Provaremos a existência de um controle ótimo que minimiza o funcional considerado e condições ótimas que devem ser satisfeitas por tal controle ótimo.

5.1 Existência de um controle ótimo

Considere novamente o funcional de custo:

$$\begin{aligned} J[\theta, \varphi; f] &:= \frac{\alpha_1}{2} \iint_Q |\theta(x, t) - \theta_d(x, t)|^{2k} dx dt \\ &+ \frac{\alpha_2}{2} \iint_Q |\varphi(x, t) - \varphi_d(x, t)|^{2m} dx dt + \frac{N}{2} \iint_Q |f(x, t)|^{2s} dx dt, \end{aligned} \quad (5.1)$$

com $\theta_d \in L^{2k}(Q)$ e $\varphi_d \in L^{2m}(Q)$ funções dadas, α_1, α_2 e N satisfazendo $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $N \geq 1$ e $k, m \geq 1$, com

$$k = \begin{cases} 1, 2 \text{ ou } 3 & \text{se } s = 1 \\ \text{qualquer inteiro} & \text{se } s \geq 2 \end{cases}$$

e $m \in \mathbb{N}$. O problema de controle ótimo que vamos considerar desta vez é o de encontrar um controle ótimo que minimize o funcional (5.1) associado ao sistema (4.1).

Suponha que $\mathcal{U}_{ad}$ seja um subconjunto fechado, convexo e não vazio do espaço de Banach $L^q(Q)$ com $q = 2s$, $s \in \mathbb{N}$. Denote por A o operador solução de (4.1).

Teorema 5.1 *Suponha que as mesmas afirmações do Teorema 4.2 sejam satisfeitas e suponha que $\theta_d \in L^{2k}(Q)$, $\varphi_d \in L^{2m}(Q)$, $(k, m \geq 1)$ com*

$$k = \begin{cases} 1, 2 \text{ ou } 3 & \text{se } s = 1 \\ \text{qualquer inteiro} & \text{se } s \geq 2 \end{cases} \quad (5.2)$$

e $m \in \mathbb{N}$. Então existe um controle ótimo $f_{opt} \in \mathcal{U}_{ad}$ minimizando o funcional de custo (5.1), isto é,

$$J[\theta, \varphi; f_{opt}] = \inf_{f \in \mathcal{U}_{ad}} J[\nu, \psi; f]$$

onde $(\theta, \varphi) = A(f_{opt})$ e $(\nu, \psi) = A(f)$.

Demonstração. Seja $(\theta_n, \varphi_n; f_n)$, $(\theta_n, \varphi_n) = A(f_n)$, uma seqüência minimizante. Como $J[\theta_n, \varphi_n; f_n] \leq C$ e pela definição de J obtemos

$$\|f_n\|_{L^{2s}(Q)} \leq C$$

($s \geq 1$) e do Teorema 4.3 obtemos a estimativa

$$\|\theta_n\|_{W_{2s}^{2,1}(Q)} + \|\varphi_n\|_{W_{2m}^{2,1}(Q)} \leq C$$

válida para todo $n \geq 1$. Portanto podemos extrair uma subsequência de $\{f_n\}$ e $\{(\theta_n, \varphi_n)\}$, $(\theta_n, \varphi_n) = A(f_n)$, que denotaremos novamente por $\{(\theta_n, \varphi_n; f_n)\}$ tal que

$$\begin{aligned} f_n &\rightharpoonup f && \text{fracamente* em } L^{2s}(Q) \\ \theta_n &\rightharpoonup \theta && \text{fracamente* em } W_{2s}^{2,1}(Q) \\ \varphi_n &\rightharpoonup \varphi && \text{fracamente* em } W_{2m}^{2,1}(Q). \end{aligned}$$

Como $L^{2s}(Q)$, $W_{2s}^{2,1}(Q)$ e $W_{2m}^{2,1}(Q)$ são reflexivos (para $s, m \geq 1$), segue que

$$\begin{aligned} f_n &\rightharpoonup f && \text{fracamente em } L^{2s}(Q) \\ \theta_n &\rightharpoonup \theta && \text{fracamente em } W_{2s}^{2,1}(Q) \\ \varphi_n &\rightharpoonup \varphi && \text{fracamente em } W_{2m}^{2,1}(Q). \end{aligned}$$

Pelo Teorema 1.1 obtemos

$$\begin{aligned} \theta_n &\rightarrow \theta && \text{fortemente em } L^{2k}(Q) \\ \varphi_n &\rightarrow \varphi && \text{fortemente em } L^{2m}(Q), \end{aligned}$$

onde k é definido por (5.2).

Tomando a formulação fraca do problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \theta_n}{\partial t} - \Delta \theta_n = -l \frac{\partial \varphi_n}{\partial t} + f_n & \text{em } Q, \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial t} - \Delta \varphi_n = F(x, t, \varphi_n) + \theta_n & \text{em } Q, \\ \frac{\partial \theta_n}{\partial \eta} = \frac{\partial \varphi_n}{\partial \eta} = 0 & \text{em } S, \\ \varphi_n(x, 0) = \varphi_0(x) & \text{em } \Omega, \\ \theta_n(x, 0) = \theta_0(x) & \text{em } \Omega, \end{array} \right. \quad (5.3)$$

e usando as convergências fortes obtidas acima e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue no termo F , tomando o limite em (5.3) obtemos a igualdade $(\theta, \varphi) = A(f)$. Pela Proposição 1.1, temos também que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} J[\theta_n, \varphi_n; f_n] \geq J[\theta, \varphi; f].$$

Logo $f_{opt} := f$ é uma solução ótima de (5.1). □

Observação 5.1 Para um funcional de custo dado por

$$\begin{aligned} J[\theta, \varphi; f] &:= \frac{\alpha_1}{2} \int_{\Omega} |\theta(x, T) - \theta_d(x)|^{2k} dx \\ &+ \frac{\alpha_2}{2} \int_{\Omega} |\varphi(x, T) - \varphi_d(x)|^{2m} dx + \frac{N}{2} \iint_Q f^{2s} dx dt \end{aligned} \quad (5.4)$$

onde $\theta_d \in L^{2k}(\Omega)$, $\varphi_d \in L^{2m}(\Omega)$ e k, m resultando do Teorema 1.1, podemos provar também existência de um controle ótimo usando os mesmos métodos.

5.2 Condições de otimalidade para o controle ótimo

Novamente encontraremos as condições de otimalidade que devem ser satisfeitas por cada controle ótimo f .

Teorema 5.2 *Seja f um controle ótimo do funcional (5.1) associado ao sistema (4.1). Então existe uma quántupla de funções $(\theta, \varphi, p, q; f)$ satisfazendo*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \theta}{\partial t} + l \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Delta \theta + f & \text{em } Q, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Delta \varphi + F(x, t, \varphi) + \theta & \text{em } Q, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \Delta p + q = -\alpha_1 k(\theta - \theta_d)^{2k-1} & \text{em } Q, \\ \frac{\partial q}{\partial t} + l \frac{\partial p}{\partial t} + \Delta q + F_\varphi(x, t, \varphi)q = -\alpha_2 m(\varphi - \varphi_d)^{2m-1} & \text{em } Q, \\ \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \frac{\partial p}{\partial \eta} = \frac{\partial q}{\partial \eta} = 0 & \text{em } S, \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x) & \text{em } \Omega, \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x) & \text{em } \Omega, \\ p(T) = q(T) = 0 & \text{em } \Omega \end{array} \right. \quad (5.5)$$

e

$$\iint_Q (p + sN f^{2s-1})(g - f) dx dt \geq 0 \quad \text{para todo } g \in \mathcal{U}_{ad}. \quad (5.6)$$

Demonstração. Sejam $f := f_{opt}$ e $(\theta, \varphi) = A(f)$. Pelo Teorema 4.5 e Observação 5.1 sabemos que A é Fréchet diferenciável. Portanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} J[A(f + \lambda(g - f)); f + \lambda(g - f)] \Big|_{\lambda=0} &= \alpha_1 k \iint_Q (\theta - \theta_d)^{2k-1} \theta^* dxdt \\ &+ \alpha_2 m \iint_Q (\varphi - \varphi_d)^{2m-1} \varphi^* dxdt + sN \iint_Q f^{2s-1} (g - f) dxdt \end{aligned} \quad (5.7)$$

onde $(\theta^*, \varphi^*) = A'(f)(g - f)$ é solução do seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \theta^*}{\partial t} + l \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} = \Delta \theta^* + g - f & \text{em } Q, \\ \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} = \Delta \varphi^* + F_\varphi(x, t, \varphi) \varphi^* + \theta^* & \text{em } Q, \\ \frac{\partial \theta^*}{\partial \eta} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \eta} = 0 & \text{em } S, \\ \varphi^*(x, 0) = \theta^*(x, 0) = 0 & \text{em } \Omega. \end{array} \right. \quad (5.8)$$

Além disso, como f é uma solução ótima temos

$$\frac{d}{d\lambda} J[A(f + \lambda(g - f)); f + \lambda(g - f)] \Big|_{\lambda=0} \geq 0$$

para toda $g \in \mathcal{U}_{ad}$, isto é,

$$\begin{aligned} \alpha_1 k \iint_Q (\theta - \theta_d)^{2k-1} \theta^* dxdt + \alpha_2 m \iint_Q (\varphi - \varphi_d)^{2m-1} \varphi^* dxdt \\ + sN \iint_Q f^{2s-1} (g - f) dxdt \geq 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

para toda $g \in \mathcal{U}_{ad}$. Introduzimos as variáveis de custo (p, q) para simplificar (5.9). Multiplicando a primeira equação por p , a segunda por q , utilizando as identidades de Green e somando o resultado, chegamos na condição em que o par (p, q) deve

satisfazer o problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial p}{\partial t} - \Delta p - q = \alpha_1 k(\theta - \theta_d)^{2k-1} & \text{em } Q, \\ -\frac{\partial q}{\partial t} - l\frac{\partial p}{\partial t} - \Delta q \\ -F_\varphi(x, t, \varphi)q = \alpha_2 m(\varphi - \varphi_d)^{2m-1} & \text{em } Q, \\ \frac{\partial p}{\partial \eta} = \frac{\partial q}{\partial \eta} = 0 & \text{em } S, \\ p(T) = q(T) = 0 & \text{em } \Omega. \end{array} \right. \quad (5.10)$$

Multiplicando a primeira equação em (5.10) por θ^* e a segunda por φ^* , usando a fórmula de Green e somando obtemos

$$\iint_Q p(g - f)dxdt = \iint_Q (k\alpha_1(\theta - \theta_d)^{2k-1}\theta^* + m\alpha_2(\varphi - \varphi_d)^{2m-1}\varphi^*)dxdt.$$

Portanto de (5.9) concluimos que

$$\iint_Q (p + sNf^{2s-1})(g - f)dxdt \geq 0$$

para todo $g \in \mathcal{U}_{ad}$. □

Referências Bibliográficas

- [1] R. Adams, *Sobolev Spaces*, Acad. Press, 1975.
- [2] R. G. Bartle, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, John Wiley & Sons, 1995.
- [3] H. Brézis, *Analyse Fonctionnelle: Théorie et Applications*, Masson, Paris, 1983.
- [4] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 1991.
- [5] G. B. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, J. Wiley, New York, 1984.
- [6] A. Friedman, *Partial Differential Equation of Parabolic Type*, Prentice Hall, 1964.
- [7] K. H. Hoffman e L. Jiang, *Optimal control of a phase field model for solidification*, Numer. Funct. Anal. Optimiz. 13 (1 & 2), 1992, pp. 11-27.
- [8] O. Ladyzhenskaya, V. Solonnikov, N. Uraltseva, *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, American Mathematical Society, 1968.
- [9] J. L. Lions, *Control of Distributed Singular Systems*, Gauthier-Villars, Paris, 1985.
- [10] C. Moroşanu e D. Motreanu, *A generalized phase field system*, Journal of Math. Analysis and Applic. 237, 1999, pp. 515-540.