ESTRATÉGIAS PARA O DOMÍNIO DA APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA NO CURSO DE ECONOMIA DA UFPE

- ÁREA PROFISSIONAL -

JOÃO BARBOSA DE OLIVEIRA

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO MESTRADO DE ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE NA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS (CONVÊNIO OEA/PREMEN/IMECC).

ORIENTADOR: UBIRATAN D'AMBROSIO

CAMPINAS - 1981

AGRADECIMENTOS

Foi para mim um desafio realizar o Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática na UNICAMP. Realizar este trabalho, foi um desafio maior. No decorrer do tempo, ultrapassei as barreiras de minha formação de professor de matemática, ampliei o meu ponto de vista na esfera educacional. Agora falo a linguagem do educador.

Pelas experiências que vivi, pelos novos amigos do Brasil e de outros países, pertencentes ou não à área de matemática, venho aqui agradecer.

Em especial quero agradecer:

- A Lúcia, que soube compreender o significado deste trabalho;
- Aos colegas da UFPE, que durante todo tempo insistiram para que esse trabalho chegasse ao fim;
- A Patrícia, João Júnior, José Neto e Nicolas que aprenderam a conviver com a minha ausência;
- Ao professor Ubiratan D'Ambrosio, pela convivência e o estímulo, durante o período em Campinas;
- Ao professor Palmeron Mendes, pelo apoio dado durante os últimos anos;
- E finalmente, ao professor Ivan de Albuquerque Loureiro que, diariamente incentivou este trabalho de tese.

R E S U M O

O presente trabalho, relata uma pesquisa sobre um Sistema de Instrução, desenvolvida na disciplina Economia Matemática do Departamento de Ciências Econômicas do Centro de Ciências Sociais da Universidade Federal de Pernambuco.

A pesquisa foi realizada no primeiro semestre de 1981, com um universo de 167 estudantes, sendo 75 no curso diurno e 92 no curso noturno.

O Sistema de Instrução utilizado foi gerado por um problema bastante comum nesta disciplina, ou seja, o seu alto índice de reprovação, que no caso específico atingiu o percentual de 80%. A eficácia deste Sistema foi comprovada, uma vez que, o índice de reprovação caiu para 25%. Entre as inúmeras vantagens deste método podemos citar a não alteração do funcionamento normal das aulas, principalmente no que se refere ao período de duração das mesmas; às normas de avaliação; às condições ambientais das salas de aulas; além de um fator importante que é o baixo custo.

Conforme o resultado obtido no primeiro semestre de 1981, o índice de aproveitamento para a turma diurna alcançou o percentual de 81,14%, enquanto que para o curso noturno, este percentual foi de 78,30% de aprovações. Estes resultados comprovaram a hipótese levantada no início do trabalho e mostraram a eficácia do Sistema de Instrução utilizado. Este Sistema,teve como referência teórica o Sistema de Instrução Personalizada (SIP) ou como é também conhecido, o Método Keller. Mantivemos as características que não alteraram as normas vigentes na UFPE, no que se refere especialmente a salas de aulas, calendário escolar e avaliação. Desenhando, Unidades de Estudo, Roteiros de aulas, aulas em pequenos grupos e aulas de reforço e adotando os princípios filosóficos e psicológicos do S.I.P., obtivemos os resultados acima mencionados.

Comparando os resultados obtidos com resultados de curvas similares, como por exemplo na área II (Tecnologia), no 1º semestre de 1981 o índice de reprovação foi de 61.93 % e consequentemente o índice de aprovação ficou em 38.07 %, que demonstra eficácia do Sistema de Instrução desenvolvido, mostrando que o mesmo torna-se também uma solução para os problemas de outros cursos.

S U M Á R I O

* * * * *

C A P I T U L O I

1. O PROBLEMA

1.1. - Introdução

O presente trabalho é uma dissertação sobre o projeto "ESTRATÉGIAS PARA LOGRAR O DOMÍNIO DE APRENDIZAGEM MATEMÁTICA NO CURSO DE ECONOMIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO - ÁREA PROFISSIONAL" que foi aplicado no Curso de Economia, na disciplina Elementos de Economia Matemática 09 do Centro de Ciências Sociais da Universidade Federal de Pernambuco, no primeiro semestre do ano de 1981.

O problema teve origem pelo número de reprovações que estava alcançando níveis muito altos, em média de 70% a 90%, fato este que acarretou um aumento significativo de alunos que semestralmente se matriculavam na disciplina, chegando a haver turmas com mais de 200 alunos.

Que estratégias de ensino, deveríamos adotar para minimizar o índice de reprovações ?

Este questionamento levou a fazer uma série de reflexões, acerca do que estavamos fazendo e que mudanças deveriam ser adotadas a fim de ter uma solução para o problema.

O nosso ponto de partida, foi sobre o tipo de abordagem que estava sendo aplicada, ou seja, o método expositivo, o que deixou sem respostas questões bastantes constrangedoras.

Como poderíamos desenvolver o máximo e verdadeiramente as potencialidades de cada aluno individualmente ?

Como poderíamos abandonar o sistema centrado no professor e utilizar um sistema centrado no aluno ?

Como poderíamos superar o problema da ignorância cumulativa durante a vida escolar do aluno ?

Como poderíamos superar a crença de que a prendizagem só pode ocorrer em sala de aula ?

Como poderíamos livrar-nos dos perigos do sistema atual de notas, com seus erros de elaboração ?

Tentando obter respostas, e ver como solucionar tais indagações, a nossa primeira constatação foi que o questionamento acima tinha sentido, uma vez que, a instrução ministrada era decalcada nos moldes tradicionais (do ensino do 1º grau). A distribuição do saber único, os exercícios, os trabalhos, a verificação dos conhecimentos eram feitas de tal forma que estávamos considerando ADULTOS como CRIANÇAS.

Segundo Ludojoski "La Escuela para Adultos se diferencia netamente da las escuelas para niños y adolescentes. El Maestro de Adultos difere radicalmente del maestro de la escuela elemental. La causa de la diferenciación se encuentra en la estructura misma de la personalidade de quienesconforman el grupo educativo. Por um lado, la personalidade del adulto; por el otro, la del niñõ. Se la educación no parte de la consederacion de los rasgos personales y distintivos del sujeto-educando, ocorre peligro de perderse en estériles intentos. De lo precedente surge la necesidad de elaborar una ANDRAGOGIA, una ciencia de le educacion del adulto".

A andragogia surge desta forma como uma ciência nova, imposta por pressões de circunstâncias históricas da época que nos obriga a fazer uma planificação especial quando tratamos de ensinar adultos. Desta forma o primeiro passo dado foi a utilização de uma didática do adulto. Esta era a estratégia procurada e que em parte daria respostas aos questionamentos gerados pela abordagem utilizada, ou seja - o método expositivo.

Sabemos que só em condições excepcionais um adulto é arrastado à força para os bancos de uma escola. Em regra geral ele só renunciará aos seus ócios para participar em atividades de natureza educativa se compreende o seu interesse, se percebe a ligação existente entre o que lhe é proposto e as suas ambições, aspirações, curiosidades e prazeres da vida se tal ligação não existir, as consequências são rápidas, ou o adulto permanece indiferente, ou se aventura ou desiste depressa (Legrand)

Como não existe um indivíduo idêntico ao outro , pois cada um tem sua originalidade, a sua maneira de estar na vida, a sua maneira de ser e considerando que a aprendizagem é pessoal, vemos que não existe uma educação, mas tantos processo educacionais quantos indivíduos. Logo, individualizar a educação é um imperativo, pois torna o indivõduo sempre acima de tudo, sujeito de sua própria educação.

Do estudo teórico de ensino individualizado, e da análise de uma série de experiências já realizadas neste campo, é que construimos uma estratégia moldada nos seguintes aspectos:

a) Relacionar o conteúdo matemático com à economia;

b) Dividir o conteúdo do Curso em 15 Unidades de Ensino;

c) Escrever Roteiro de Aula para cada Unidade de Ensino;

d) Para cada unidade de Estudo realizar uma avaliação formativa e diagnóstica;

e) Usar técnicas de Dinâmica de Grupos;

f) Para cada quatro unidades de Estudos realizar uma avaliação somativa;

g) Proporcionar aos deficientes em matemática, aulas de reforço.

Esta foi a estratégia utilizada que resolveu o problema inicial.

1.2. - Delimitação do Problema

O modelo de ensino descrito, foi aplicado no primeiro semestre de 1981 aos 167 alunos, sendo 75 do turno diurno e 92 do turno noturno do Curso de Economia, na disciplina Economia Matemática 09 do Centro de Ciências Sociais da Universidade Federal de Pernambuco.

1.3. - Objetivos

A meta proposta foi de fazer um planejamento de ensino com os seguintes objetivos:

a) Elaborar 15 Unidades de Estudo com a matéria de Economia Matemática - 09;

b) Implementar as unidades no Curso;

c) Elaborar os roteiros de aulas;

d) Avaliar os resultados através de comparação com resultados de cursos anteriores ou paralelos;

e) Analizar as atividades dos estudantes em diferentes situações através de informações dos professores e questionários aos alunos;

f) Fazer recomendações dando modelos para trabalhos da mesma natureza em outros cursos.

1.4. - Justificativa

A popularidade do método expositivo faz com que considerem o mais eficiente para ensinar grande número de alunos, tanto quanto do ponto de vista de tempo quanto do financeiro. O método expositivo pressupõe que todos os alunos sejam igualmente preparados e receptivos a determinados conteudos, no mesmo momento, uma vez que todos recebem o mesmo tratamento. Além do mais, pressupõe que os alunos aprendem melhor na sala de aula do que em qualquer outro lugar.

É fato conhecido e comprovado, que existe uma gama enorme de diferenças individuais em qualquer nível de idade dos alunos. Essas diferenças apresentam-se de um modo geral no desempenho cognitivo, na maneira de resolver problemas, em aptidão específica, na motivação para aprendizagem, na capacidade de auto-crítica e na criatividade.

Estretanto, as diferenças individuais têm sido utilizadas para justificar o fato de que nem todos podem aprender e, que uns podem aprender melhor que outros. Chegamos a utilizar as diferenças individuais como uma escusa para justificar um ensino deficiente.

De um modo geral, quando um professor inicia um novo curso, dá-se por satisfeito se um terço dos alunos aprendem adequadamente, outro terço fracasar e, finalmente que o terço restante aprenda boa parte, mas não o suficiente para ser considerado como bons estudantes. Um raciocínio deste leva 75% dos estudantes a contínuas frustações, humilhações, e, angústias, dando aos mesmos uma sensação de incapacidade para cumprir com os requesitos, chegando a afetar a saúde mental de 25% deles (Bloom 1973).

Pelo fato de existir um grande número de diferenças individuais, torna-se impossivel construir um sistema de ensino realista que possa levar em conta todas as diferenças. A individualização do ensino deve constituir-se uma das metas principais da educação. Até onde seja possivel, o estudante como indivíduo, em lugar da classe como um conjunto, deve concentra-se na unidade operante do processo de ensino.

A cada aluno deve-se estimular o nível adequado de suas potencialidades, ficando assim estimulado a aprender no ritmo adequado.

Estamos consciente que devemos modificar os sistemas de ensino. Essa modificação implica em termos de considerar a escola como local onde se troca experiências e que seu objetivo primordial seja o de formar um indivíduo conscientizado e integrado no seu contesto social, com suficiente flexibilidade e treino para absorver novos conhecimentos técnicos.

A escola vista sob este prisma, justifica cursos com uma abordagem de sistemas, isto é, onde o ensino é preparado e ordenado anteriormente ao seu uso na sala de aula.

C A P Í T U L O II

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1. - O Ensino da Matemática

No Curso de Economia, como em outros cursos da UFPE, onde a matemática é utilizada como "ferramenta" para auxiliar outras disciplinas, o problema básico é o de se ensinar uma matemática "neutra", que tanto serviria para Economia como para Engenharia ou para a formação do matemático (curso de matemática)

Esta desvinculação com a realidade-matemática sem grande número de aplicações na disciplina - faz com que haja desinteresse e o aumento da "matofobia" (medo de matemática) cresça e como consequência um aumento na evasão, além de um alto índice de reprovação.

No caso particular da Economia, o índice de reprovação era tão alto que criou-se movimentos para exclusão desta disciplina do referido curso. Este fato, de certo modo, tinha a aprovação dos professores de Microeconomia e Macroeconomia, pois os mesmos não tinham nenhum preparo matemático - eram em sua maioria bachareis em Direito. Deste modo, era permitido que o aluno chegasse ao final do curso dependendo unicamente de matemática.

Com o número sempre crescente de reprovações, implicando em cada semestre um número maior de alunos matriculados, verificou-se por parte dos professores, ser necessário uma reflexão acerca do problema. Houve coincidência de neste período chegarem alguns professores com mestrado em Métodos Quantitativos , na área concentração microeconomia e macroeconomia, que tornou e criou um ambiente mais favorável ao desenvolvimento ou valorização da matemática.

Através de reuniões com os novos professores, foram introduzidas modificações no curso de matemática que era oferecido naquela época.

As modificações:

a) A disciplina que era anual tornou-se semestral;

b) Passou a chamar-se Economia Matemática, em lugar de Matemática para Economistas;

c) Alterações básicas foram feitas na programação - um número maior de aplicações da matemática à Economia - e exclusão de alguns tópicos de matemática que não tinham aplicação (uso) em economia.

Com estas modificações, o interesse em termos de ensino-aprendizagem aumentou, mas no entanto, o índice de reprovação continuou à niveis não desejados - em torno de 70% a 80%.

Nova análise foi necessária, então foi feita uma pesquisa com os alunos, englobando, a matemática desenvolvida no ciclo básico e no ciclo profissional. A pesquisa englobava tanto as estratégias utilizadas pelo professor como a programação.

O resultado mostrou que a matemática desenvolvida no ciclo básico equivalia a alguns tópicos da matemática desenvolvida no segundo grau. A técnica empregada era (centrada no professor), ou seja, aula expositiva e quanto à aprendizagem,os alunos conseguiram aprovação sem um mínimo de conhecimentos,pois de um modo geral as "avaliações" eram feitas com a maior democracia possível - chegando a ter professor que fazia sua"avaliação" com cinco questões de múltipla-escolha.

Quanto ao ciclo profissional, pelo rigor e o nível das provas a aprovação tornava-se mais difícil, gerando um alto índice de reprovação e evasão. Em termos de estratégias, pouca diferença era encontrada, ou seja, a técnica empregada era de aula expositiva e tudo estava centrado no professor.

Que fazer ? Seguir a orientação do ciclo-básico? Procurar uma solução mais real, sem baixar o nível do curso ?

Tornou-se evidente que o "xis" do problema estava na estratégia utilizada nas aulas. Os estudantes necessitavam de um maior tempo, de um maior direcionamento, de de maior acompanhamento a fim de que o desempenho desejado fosse atingido.

Criar uma estratégia que atendesse o mais possível a situação real do aluno foi a meta dos professores de matemática. Procuramos entre os diversos tipos de instruções, aquela que adaptada às exigências e normas da Universidade resolvesse o problema.

Procuramos então adaptar o sistema de Instrução Personalizada (S.I.P.) ou Método Keller à nossa situação. Desta adaptação resultou para nós a solução do problema. Conseguimos fazer com que o índice de aprovação chegasse a níveis desejados, isto é, entre 65% a 85%.

2.2. - Características do Curso de Matemática para o Ciclo Profissional de Economia da UFPE

Durante o Curso de Economia, o estudante faz quatro semestres de Matemática, sendo dois semestres no ciclo-básico e os dois restantes no ciclo-profissional.

No ciclo-básico é desenvolvido o que se pode chamar de "matemática básica", e como sua programação é feita de modo que atinja outros cursos da área de Ciências Humanas, nenhuma aplicação específica é feita. De modo geral sua programação consta de um semestre em teoria dos conjuntos - ao nível elementar - e no outro semestre algumas noções de álgebra com uma introdução ao cálculo.

No ciclo-profeissional, o programa é essencialmente um curso de cálculo I, para o primeiro semestre. Enquanto que para o segundo semestre é feito cálculo para mais de uma variável e Álgebra Linear.

Para Economia Matemática 09, temos o seguinte programa:

Intervalor - Desigualdades - Valor Absoluto - Relações e Funções - Gráfico de Funções - Funções Economicas mais usadas; Demanda - Oferta - Receita - Custo e Lucro; A função afim - A linha reta- Função de demanda - Função de oferta - Equilíbrio de mercado - Efeito do Imposto sobre o equilíbrio do mercado; A equação quadrática e as cônicas - A circunferência - A elipse; As cânicas - A parabola - A hiperbole; Aplicação das cônicas à Economia - Lei de Pareto - Equilíbrio de Mercado - Curvas de Oferta e demanda - Curvas de indiferença ; Limite de uma função - Definição algébrica da derivada - Derivação das funções algébricas; Derivada da função composta - Derivadas de ordem superior

Derivação implícita; Interpretação geométrica da derivada - Reta tangente à uma curva - Interpretação economica da derivada - Aplicações do conceito de derivada à economia; Teoremas dos valores extremos - Teorema de Rolle - Teorema da valor médio - Máximos e mínimos relativos através da derivada primeira - Gráfico de funções; Aplicações da derivada segunda a determinação de pontos críticos, pontos de inflexão - Cálculo do lucro máximo e do custo mínimo; Derivada das funções transcendentes - Derivada da função logaritmica - Derivada da função exponencial - Derivada da função inversa; A integral definida - Teorema fundamental do cálculo - Integral indefinida - Aplicações a economia; Regra de Barrovu - Cálculo da integral definida - Cálculo de áreas; Aplicações do cálculo integral à Economia - Excedente do produtor - Excedente do consumidor; Métodos de Integração- Por partes - Por decomposição.

O número de alunos que cursam na disciplina é em média de 80 por turno. O Curso de Economia funciona em dois turnos, pela manhã e à noite, sendo oferecidos semestralmente dois cursos de Economia Matemática 09 e Economia Matemática 10 po turno.

No período noturno, o número de alunos matriculadós é maior do que no turno da manhã. É no turno da noite onde também existe uma maior evasão e um maior índice de reprovação. O nível dos cursos é igual, em termos de exercícios e testes para avaliação, ficando indiferente um aluno tomar o curso diurno ou noturno. Algumas vezes o mesmo professor ministra as duas turmas, como é o caso da Economia Matemática 09.

2.3. - Sistema de Instrução Personalizada (S.I.P.)

2.3.1. - História do Sistema de Instrução Personalizada - S.I.P.

A história do Sistema de Instrução Personalizada (S.I.P.), ou como também é conhecido por Método Keller, começou em 1962 na Universidade Federal de Brasília. Ele foi idealizado por quatro psicologos: os brasileiros Rodolfo Azzi, Carolina Martuscelli Bori e os americanos Fred S. Keller, J.Gilmour Sherman, que foram convidados para criar o Departamento de Psicologia da nascente Universidade.

O SIP foi pela primeira vez aplicado em caracter experimental na Universidade da Columbia em um inverno de 1963. Corrigido e enriquecido foi utilizado no ano seguinte na Universidade de Brasília pelos professores Azzi e Martuscelli para 50 estudantes em um Curso de Introdução à Psicologia com bastante êxito. Mudanças no governo interromperam momentaneamente o trabalho que estava realizando na Universidade. Os professores Keller e Sherman regressaram aos E.E.U.U. depois de um só semestre de operação.

Ambos foram contratados pela Universidade Estadual de Arizona e começaram a elaborar cursos baseados nas mesmas linhas da experiência feita em Brasília. Em começos de 1965 a técnica como tal, não tinha nenhum nome formal, porém Sherman descreveu suas características básicas (1971) "Mantivemos as características essenciais da programação de Skinner e incorporamos as influências brasileiras de interação individual contratando tutoras para servir no sistema".

O novo sistema de ensino começou a expandir-se e em 1967, tanto Keller como Sherman e um dos integrantes do grupo original do Brasil, AZZI, apresentaram trabalhos em diferentes congressos. Em 1968 Keller publica o famoso artigo " Goodby Teacher " e, então profissionais em outras disciplinas começaram a interessar-se pelo método. O método espalhou-se por várias Universidades americanas, como, as Universidades de Bucknel, North Carolina, Stone Brook, Portland, Massachusets.

No Brasil, além da Universidade Federal de Brasília, a Universidade Federal de Pernambuco, a Faculdade de Filosofia Ciências e Letras de Taubaté - SP, utilizaram o método, através dos Institutos de Física, Química e Matemática.

2.3.2. - Princípios Básicos do Sistema de Instrução Personalizada.

O SIP apresenta uma série de 6 características que são consideradas como básicas.

1ª Característica - Excelência na Aprendizagem

Ao planejar um curso do SIP, o professor deve tomar uma série de decisões, como qual o conteudo que considera básico para o curso e qual a quantidade de material para um curso com essa duração. Uma vez que resolveu, deve decidir sobre a divisão do conteudo em subdivisões equivalentes. Keller (1968) chamou de "unidades" estas subdivisões. O número e tamanho das unidades podem variar segundo à disciplina e o professor. Empiricamente se estabeleceu que cada unidade seria utilizada aproximadamente para cada semana do curso. O que significa que para um curso de um semestre, teremos em média 15 unidades. Os procedimentos sobre a organização das unidades servem como base para a 1ª característica básica do SIP: Excelência na aprendizagem. Este requesito estabelece que um estudante pode "continuar com novos materiais só depois que tenha demonstrado domínio nos anteriores (Keller - 1968 p. 23).

Isto quer dizer que todos os alunos e não só alguns, devem adquirir os conhecimentos com um critério estabelecido previamente fixado pelo professor. Difere este fato com o que ocorre no sistema tradicional de ensino, onde só poucos alunos terminam o curso com o máximo de rendimento acadêmico.

2ª Característica - Ritmo de Trabalho Individual

Se o objetivo é que todos os estudantes alcancem o domínio na aprendizagem, torna-se óbvio que cada estudante deve ir avançando no material de estudo com um ritmo que se ajuste às suas aptidões, interesses, motivações e tempo disponível, isto é, o aluno desenvolve um ritmo de trabalho individual. No sistema tradicional de ensino, o tempo é fixado e o domínio variável. No SIP o que é fixo é o domínio na aprendizagem. Todos os estudantes (ou quase todos), terminam com conhecimentos fixados previamente pelo professor. Isto é, uns terminam antes do tempo usual e outros tomam um tempo maior.

É importante observar que tanto o conceito de domínio, como o rítmo de trabalho individual do estudante, são características básicas de muitos tipos de Instrução Individualizada, tais como a Instrução Programada, a Instrução assistida pelo computador, e não privativa do sistema de Instrução Personalizada - SIP.

3ª Característica - Ênfase na Comunicação Escrita

Desenvolver o rítmo próprio de sua aprendizagem é um dos objetivos básicos do SIP. O aluno recebe no início do curso o primeiro Guia de Estudo e, em local e tempo convenientes, prepara-se naquela unidade. Quando tiver sentindo dificuldades em alguma parte do assunto voltará à escola, para em horário pré-determinado ser atendido pelo professor, ou monitor, resolvendo assim, as suas dificuldades. Os Guias de Estudo, são materiais dados aos estudantes contendo todas as metas de aprendizagem que são básicas para o que é proposto. Os textos indicados ou anexados, na maioria dos casos, são escritos por outra pessoa que não necessariamente o professor do curso.

4ª Característica - Divisão do Curso em Pequenas Unidades

Uma vez decidido qual o conteudo considerado básico para o curso, ele é dividido em subdivisões equivalentes, chamadas de "Unidades de Estudo".

As "Unidades de Estudo" devem ser tão pequenas quanto possível, sem no entanto perder sua auto-suficiência. Esta suficiência na "Unidade de Estudo", dará ao aluno a satisfação de sentir que domina uma parte do assunto. Uma regra empírica estabelece que a duração para cada Unidade de Estudo, equivale a uma semana. Isto significa que para um curso de um semestre, em média o número de Unidades de Estudos será de quinze.

5ª Característica - Uso de Monitores para Assegurar o Contacto Pessoal e o Reforço Positivo.

A tarefa de avaliar o teste no SIP, necessariamente não cabe ao professor, tal prática passaria a função de um "professor" em nível inferior, que chamamos de monitor. "O monitor é um aluno de graduação instruido e cuidadosamente orientado com uma boa ficha de desempenho em curso sobre o assunto" (Keller - 1970). A função principal do monitor é assegurar o contacto pessoal com os alunos e dar-lhes feedback. Ademais " um sistema de aluno - monitor funciona com efetividade, porque os monitores são alunos que recentemente têm dominado o conteudo, podendo comunicar as sutilezas do conteudo do curso numa forma muito mais com preensível aos outros estudantes" (Ruskin,1979).

6ª Característica - Conferências e Discursões em Grupos como Veículos de Motivação.

Aulas expositivas e demonstrações, no sentido usual são raras quando utilizado o SIP. Quando acontecem, elas têm primordialmente um objetivo motivacional. No planejamento do curso, o professor deve programar palestras, conferências e encorajar a formação de equipes de estudos, afim de discutir os tópicos de maior interesse. Apesar de serem programadas para um número relativamente grande de alunos, estas atividades, são opcionais e com um objetivo exclusivamente motivacional.

2.3.3. - Fundamentos Psicológicos do S.I.P.

De acordo com a Lei do efeito de Thorndike,as respostas seguidas de reforço positivo (recompensa), provocam um aumento no número de respostas. A utilização desta lei foi feita por SKINNER, na Instrução Programada. O SIP, tem seus fundamentos psicológicos nesta lei, pois a um maior número de respostas, corresponderá um maior número de acertos.

Baseado neste fato o SIP, fraciona o curso em pequenas unidades, para aumentar o número de respostas nos exames e portanto o número de acertos e de reforços positivos (recompensa). O SIP, evita o uso do reforço negativo (castigo), uma vez que o castigo inibe o individuo e reduz a possibilidade de respostas. Quando um estudante está fazendo um curso no SIP ele não é castigado por dar respostas erradas. Quem falha em um exame de unidade pode tomar tantos exames quantos necessitem para passar satisfatoriamente.

2.3.4. - Teorias de Aprendizagem Aplicável ao SIP

1 - Aprende-se melhor em pequenas etapas.

Dizemos que uma pessoa aprendeu, se adquiriu um comportamento que antes não tinha. O caminho normal para uma mu dança de comportamento é criar pequenas modificações do comportamento estimulada a cada etapa por reforços positivos (diz-se que um reforço é positivo, quando aumenta a frequência da resposta, e, negativo, quando sua remoção provoca o aumento dessa frequência). É fracionar o curso em Unidades de Estudo, de modo que o estudante possa dominar em um dia ou em uma semana o que foi programado. Esta é a maneira de como se organiza o SIP. Através do exame da unidade o estudante comprovará se adquiriu ou não o novo comportamento. Como ele poderá tomar tantos exames quanto necessitar, o feedback serve de reforço positivo para o estudante.

2 - A eficiência aumenta quando o aluno sabe o que dele se espera.

O SIP exige que o professor, planeje o seu curso e consequentemente, determine os objetivos de cada unidade em termos instrucionais. Tais objetivos estabelecem o desempenho, as condições e os critérios que o estudante deve desempenhar no final de cada Unidade de Estudo.

Tendo conhecimento do que dele é esperado, o estudante direciona a sua aprendizagem aumentando por conseguinte a sua eficiência.

3 - Pedir respostas só se houver oportunidade de estudo.

A filosofia do SIP permite ao estudante prestar exame de uma determinada unidade quando se julgar apto. Tendo em vista que os estudantes normalmente tomam vários cursos simultaneamente, as exigências de exames ficam ao seu critério.

4 - O domínio do assunto.

O conceito de "domínio" requer uma mudança nos procedimentos de avaliação para a grande maioria dos professores. Os estudantes fazem as provas de uma unidade dada, tantas vezes quanto seja necessário, até lograr o domínio do material que a prova mede. E o SIP contrastando com o processo de ensino tradicional, exigindo o domínio da aprendizagem e só permitindo avançar sobre o material novo, se o domínio do anterior for realizado.

5 - A motivação aumenta com o êxito.

Com exames frequentes, e o "feedback" imediato que o aluno obtém, diminuem o erro e estimulam ao estudante, seguir e não abandonar o curso.

6 - Participação ativa do estudante.

Como a ênfase do SIP é dado pela comunicação escrita, o material de auto-aprendizagem, os exercícios de auto-avaliação, as perguntas chaves que estão incluidas em cada unidade garantem a participação ativa do estudante, colocando-o como responsável pelo processo de ensino-aprendizagem.

2.3.5. - Estrutura e Forma de Operar o SIP

O Sistema de Instrução Personalizada, exige que o professor analise previamente e cuidadosamente o que o estudante deve aprender, para que e o por que? Deve fixar os objetivos terminais e intermediários em função das mudanças de comportamento esperadas.

O professor divide a matéria a ser aprendida pelos alunos em "Unidades de Estudo". As Unidades de Estudo devem ser pequenas, sem no entanto perderem sua auto-suficiência, o que dará ao estudante a satisfação de sentir que domina uma parte do assunto.

O estudante estuda as unidades com seu rítmo próprio, quando e onde queira. Quando considerar que está apto e depois de ter coberto toda auto-avaliação, solicita o exame da unidade.

Para cada unidade, o professor prepara um número suficiente de perguntas para tantos exames quanto necessitem os alunos para serem aprovados. As perguntas ou questões são congruentes com os objetivos, de modo que o solicitado no exame possa demonstrar o mesmo comportamento previsto pela Unidade.

O professor designa seus ajudantes - os monitores - em uma razão de um para cada dez que excedam os vinte primeiros alunos. O monitor, que geralmente é um aluno de graduação, instruido e cuidadosamente orientado, com uma boa ficha de desempe nho em curso sobre o assunto, ajuda na ministração do curso, aplicando os exames e qualificando. Pelo fato de ser uma pessoa que em termos de interesses e idade, faz com que o aluno tenha uma maior motivação, deixa o professor em liberdade para desenhar o curso e prestar maior atenção nos problemas individuais dos estudantes.

Muitas vezes é aconselhável que haja aulas em horários previamente estipulados, porém de presença não obrigatória. Neste momento pode se estimular a formação de pequenos grupos de discursão.

O avanço de cada aluno é registrado em uma ficha pessoal e seus exames são guardados em uma pasta individual. Isto permite fazer um assessoramento ao estudante e determinar em que ponto das unidades o fracasso acontece com maior frequência, de modo que, o professor pode modificar as unidades ou recomendar outro material.

Quando o aluno tem êxito em todas as unidades de estudo ele faz um Exame Final para garantir sua qualificação na disciplina.

2.3.6. - As Unidades de Estudo

A soma das Unidades de Estudo constitue o curso. O número de unidades variam em torno de 15, e devem seguir uma ordem sequencial sempre de modo que, a seguinte tome como base a anterior.

A finalidade da Unidade de Estudo é fornecer ao aluno instruções para o estudo e um aprendizado mais eficiente. A Unidade indicará o capítulo e o texto onde será encontrado o assunto, indicará as práticas que devem ser realizadas no decorrer do estudo e apresentará exercícios e problemas elucidativos.

De um modo geral, as unidades de estudo devem conter os seguintes elementos:

1 - Objetivo da Unidade: O objetivo deverá fixar com precisão que comportamento se espera do aluno. Esse comportamento deve ser possível, observável e mensurável.

2 - Justificação da Unidade: Um dos itens da Unidade de Estudo, é fazer com que o estudante se comprometa ativa

mente com o processo de aprendizagem, e isto é feito, procurando-se relacionar o objetivo da unidade com problemas e situações da vida real.

3 - Guia de Estudo: A Unidade de Estudo deve orientar o estudante sobre onde deve buscar os conhecimentos, isto pela própria natureza do SIP. Ainda mais, deve assinalar claramente o que estudar, o que é importante, o que é complementar e o que é supérfluo.

4 - Perguntas Chave: O Estudante deve ser orientado a responder uma série de perguntas, de tal modo que haja necessidade de pesquisar o conhecimento desejado na Unidade de Estudo.

5 - Critérios de Avaliação: Como o aluno é quem decide quando está ápto para prestar o exame da Unidade de Estudo, é necessário que sejam concedidos elementos que permitam avaliar, se os objetivos foram ou não alcançados.

6 -

2.3.7. - Paralelo "Tradicional" - "SIP"

Apresentamos abaixo, uma série de características entre o "Ensino Tradicional" e o "Sistema de Instrução Personalizada". Estas características são apresentadas em "o ensino personalizado - Fernando Sodré (1973, 5-6)".

PARALELO ENTRE ENSINO TRADICIONAL E SISTEMA
DE INSTRUÇÃO PERSONALIZADA

TRADICIONAL	S I P
a) Expositivo passivo	- Experimentação redescoberta
b) Imposto	- Auto regulado
c) Orientação coletiva	- Orientação individual
d) Transmissão de conhecimentos	- Orientação de atividades

TRADICIONAL	S I P
e) Ensinar a transmitir conhecimentos	- Ensinar é ajudar a aprender
f) O aluno como receptor passivo	- O aluno como participante
g) O professor apresenta o método de trabalho	- O método de trabalho é descoberto pelo aluno
h) O aluno tenta acompanhar o desenvolvimento da classe	- O aluno trabalha de acordo com a velocidade, motivos e interesses próprios
i) Recebe conhecimentos já prontos	- Aprende a partir do próprio esforço
j) Despersonalizado, é método considerado pela sua nota	- Personalizado pela auto crítica que o sistema permite
k) Objetivos perdidos, pelo aluno, na quantidade de matéria e ser avaliada	- Avaliação vinculada aos objetivos previamente estabelecidos
l) Necessidade de notas	- Necessidade de domínio do assunto.

2.4. - Tipos de Estratégia Utilizados

Tomando como modelo o Sistema de Instrução Personalizada (S.I.P.) e fazendo as devidas adequações, construímos um Sistema de Instrução, que não alterasse as normas e horários estabelecidos pela Universidade Federal de Pernambuco.

O princípio: Ritmo de trabalho individual, não foi considerado neste modelo, uma vez que ele vai de encontro com o que estabelece o Regimento da Universidade. Apesar deste princípio básico não ser considerado, foi possível desenhar um Sistema de Instrução, que como veremos nos capítulos seguintes, facilitou, motivou e aumentou em muito, o índice de aprovação na disciplina Economia Matemática.

O Sistema de Instrução desenhado, envolve uma série de materias e abordagens diferentes das usuais no processo de ensino - aprendizagem.

Assim é que o curso, teve:

a) 15 Unidades de Estudo;

b) 15 Roteiros de Aula;

c) 4 Exercícios Escolares Individuais;

d) 1 Manual do Estudante;

e) Questionário de Análise do Curso;

f) Aulas de Reforço;

g) Mapa de acompanhamento das Unidades de Estudo.

No capítulo seguinte, descrevemos este material e em anexo, apresentamos modelos.

C A P Í T U L O III

3. METODOLOGIA

3.1. - Descrição do Material

Foram desenvolvidos e utilizados durante o curso, os seguinte materiais:

a) 15 Unidades de Estudos;

b) 15 Roteiros de Aulas;

c) 03 Exercício Escolares Individuais;

d) 01 Exercício Final;

e) Mapas de acompanhamento das UE;

f) Aulas de Reforços;

g) Questionário de Avaliação do Curso;

h) Manual do Estudante.

3.1.1. - Unidades de Estudo

Foram aplicadas 15 Unidades de Estudo, assim destribuídas:

UNIDADE	ASSUNTOS
1ª Unidade	- Desigualdade - Intervalo - Valor Absoluto - Relações e Funções - Funções Economicas mais usadas.
2ª Unidade	- Função afim - Equação Geral da Reta - Função e Curva de demanda - Função e Curva de oferta - Equilíbrio de mercado - Espaço orçamentário.
3ª Unidade	- Equação quadrática - Identificação de uma cônica por uma equação quadrática - a circunferência - A Elipse.
4ª Unidade	- A parábola - A hipérbole - Hipérbole Equilátera - Curvas de níveis.

UNIDADE		ASSUNTOS
5ª Unidade	-	Equilíbrio de Mercado com funções quadráticas- Lei de Pareto para Distribuição de Renda - Mapas de Indiferença - Curvas de Oferta e demanda não lineares.
6ª Unidade	-	Limite de uma função - Teoremas sobre limites- Conceito algebrico de derivada - Derivada das funções algebricas.
7ª Unidade	-	Regra de Cadeia - Derivadas de ordem superior- Regra da função inversa - Derivada da função implícita.
8ª Unidade	-	Interpretação Geométrica da Derivada - Reta tangente a uma curva - Função crescente - Função decrescente - Interpretação Economica da derivada - Aplicações.
9ª Unidade	-	Teorema dos Valores Extremos - Teorema de Rolle - Teorema dos Valores Médios - Máximos e Mínimos Relativos através da derivada primeira.
10ª Unidade	-	Concavidade de uma curva - Relação entre o sinal da derivada segunda e a concavidade - Pontos de inflexão - Máximos e Mínimos Relativos através da derivada segunda - Condições para maximização do Lucro.
11ª Unidade	-	A função potência - Função exponencial - Função Logarítmica - Derivada da função potência - Derivada da função exponencial - Derivada da função logarítmica.
12ª Unidade	-	Área de uma região - Integral definida - Teorema fundamental do cálculo - Integral indefinida - Integrais imediatas.
13ª Unidade	-	Integrais definidas - Regra de Barrow - Cálculo de áreas por Integração.
14ª Unidade	-	Aplicações do cálculo integral à Economia - Excedente do produtor - Excedente do consumidor.

UNIDADE	ASSUNTOS
15ª Unidade	- Métodos de Integração - Integração por partes e Integração por substituição

Uma Unidade de Estudo compõem-se dos seguintes elementos:

I - Assuntos: Refere-se ao conteúdo desenvolvido na aula expositiva.

II - Os Objetivos: Descrição dos comportamentos desejados no final da unidade.

III - Exercícios: São formuladas vinte e cinco questões, práticas ou teóricas, de modo que sejam considerados os objetivos propostos. O conjunto de questões é subdividido em cinco grupos, de modo que em cada subdivisão, apareçam cinco questões similares. Este procedimento foi feito para que nas reuniões ou grupo um estudante ajudasse o outro.

As Unidades de Estudo são desenvolvidas em sessões que se realizam sempre às terças-feiras. Os estudantes formam grupos de no máximo cinco e com a ajuda de dois monitores e do professor resolvem as questões ali propostas.

Em cada Unidade de Estudo há cinco grupos de cinco questões cada. Logo, uma Unidade de Estudo apresenta 25 questões que devem ser resolvidas no dia da reunião do grupo, onde cada estudante resolve uma de cada grupo de questões. No final da sessão as Unidades de Estudo são entregues aos monitores.

Uma das incumbências do monitor é orientar o trabalho feito individualmente por cada participante de cada grupo. Ele anota os erros, faz comentários e no mapa de acompanhamento das Unidades de Estudo, ele anota o número de questões corretas.

3.1.2. - Roteiros de Aula

Foram elaborados 15 roteiros de aula referentes às 15 Unidades de Estudo. Os Roteiros de Aula compõem-se de:

a) Assuntos a serem desenvolvidos;

b) Objetivos comportamentais, afim de que o estudo direcione a sua aprendizagem;

c) Desenvolvimento dos assuntos especificados acima, com demonstrações, definições e exemplos;

d) Bibliografia dos livros utilizados para sua elaboração, bem como a indicação dos capítulos.

Fundamentalmente os roteiros de aula, foram elaborados com a intenção de evitar que o aluno copie o desenvolvimento da aula. As demonstrações, os exemplos são tirados do Roteiro de Aula. Além disto o aluno pode obtê-lo com uma semana de antecedência, tendo oportunidade de dialogar na aula expositiva, apresentando as suas dúvidas.

Como não foi possível ainda mimeografar o Roteiros de Aula, o original é entregue no xerox, e os estudantes compram as cópias. Uma outra finalidade importante do Roteiro do Aula é, que se por algum motivo o estudante faltar à aula, sozinho ou com a ajuda dos colegas, pode facilmente se recuperar.

3.1.3. - Exercícios Escolares Individuais

Depois de realizados em média quatro Unidades de Estudo, os estudantes são submetidos a avaliação formativa - que chamamos de Exercício Escolar, ou Exercício Escolar Individual.

O Exercício Escolar, consta de cinco questões similares ou iguais às encontradas na Unidade de Estudo que compõem a avaliação formativa. Além do nome o aluno deverá colocar o número do grupo, afim de que seja feita a real avaliação das Unidades de Estudo consideradas.

O Exercício Escolar é um dos requisitos exigidos pelo regulamento da Universidade Federal de Pernambuco.

3.1.4. - Exercício Final

Pelas normas estabelecidas pelo Regimento da UFPE, o estudante obterá, aprovação em uma disciplina se obtiver vinte e um pontos nos três Exercícios Escolares. Diz-se então que o estudante passou por "média". Caso isso não se realize e o mesmo tenha pelo menos três pontos de média, será então submetido a um novo Exercício Escolar - que engloba toda a matéria do semestre.

O Exercício Final, consta de dez questões iguais ou similares às encontradas nas quinze Unidades de Estudo, desenvolvidas no semestre.

3.1.5. - Mapas de Acompanhamentos da UE.

Para cada período que corresponde aos Exercícios Escolares, é elaborado um mapa constando de:

a) Número do grupo;

b) Nome dos componentes do grupo;

c) Número de acertos em cada Unidade de Estudo;

d) Observações;

e) Turno.

- Conceito

O julgamento do trabalho em grupo é feito pelo monitor, que anota em colunas separadas os acertos de cada componente do grupo e faz as devidas observações. Deixando os casos particulares, a avaliação é feita em conceitos assim distribuídos:

Conceito A - Aos estudantes que tenham tido um número de acertos superior a 75% do que lhes foi proposto nas Unidades de Estudo;

Conceito B - Aqueles que tenham desenvolvido mais que 50% do que lhe foi proposto nas Unidades de Estudo;

Conceito C - Os estudantes que tenha obtido um número igual ou inferior a 50% do proposto na Unidade de Estudo.

A avaliação formativa das Unidades de Estudo é feita pela nota do Exercício Escolar e uma nota que é tirada das reuniões em grupo. Estabeleceu-se, empiricamente que, se o aluno tiver na reunião de grupo:

Conceito A - Acrescenta-se dois pontos à nota do Exercício Escolar;

Conceito B - Acrescenta-se um ponto à nota do Exercício Escolar;

Conceito C - Nada é acrescentado ao Exercício Escolar.

A avaliação feita para aprovação do estudante - avaliação somativa - é feita considerando as avaliações formativas parciais.

3.1.6. - Aulas de Reforço

Normalmente aos sábados à tarde é feita pelos monitores, uma reunião com os estudantes que têm dificuldades na resolução dos problemas propostos nas Unidades de Estudo.

O monitor tira as dúvidas e resolve com os estudantes todos ou quase todos os exercícios propostos nas Unidades de Estudo. Algumas vezes uma lista complementar de exercícios é utilizada. Estas reuniões aos sábados à tarde, são facultativas, sendo assistidas por estudantes do turno da manhã e do turno da noite. O horário foi pensado para atender a esta clientela.

3.1.7. - Questionário de Avaliação do Curso

No final do curso, é distribuído com os estudantes um questionário para que os mesmos façam a avaliação do curso.

As perguntas elaboradas no questionário estão relacionadas com os seguintes indicadores:

a) Relação com o professor;

b) Aceitação do Sistema de Instrução adotado;

c) Aceitação dos monitores;

d) Mecânica do curso;

e) Aulas de reforço;

f) Dificuldades do curso.

3.1.8. - Manual do Aluno

No início do semestre é entregue ao aluno um manual contendo:

a) Saudação ao aluno;

b) Código da disciplina;

c) Professores;

d) Monitores;

e) Número de créditos;

f) Carga horária;

g) Horário;

h) Objetivos gerais do curso;

i) Sistema de avaliação;

j) Calendário dos Exercícios Escolares;

l) Cronograma - Desenvolvimento por Unidade de Estudo das quinze semanas.

3.2. - Metodologia de Aplicação

O primeiro contacto que os estudantes têm com o professor e os monitores é feito na entrega do "Manual do Aluno". Feitas as apresentações, inicia-se com a leitura do texto dedicado ao aluno que encontra-se no Manual.

Em seguida, são salientados os objetivos, o horário das aulas expositivas e das reuniões em grupo. Feitas considerações que foram vivenciadas no semestre anterior, passa-se para o tópico mais importante para o estudante. a avaliação. Em seguida, enfatiza-se a importância do trabalho em equipe, uma vez que o mesmo é parte integrante da avaliação formativa, juntamente com o Exercício Escolar. O horário dos Exercícios Escolares é salientado, e, finalmente os estudantes são convidados a iniciar a formação de sua equipe de trabalho.

Formadas as equipes, os nomes são encaminhados aos monitores para prepararem o respectivo mapa.

A reunião seguinte, acontece numa quinta-feira, onde começa a ser desenvolvida a primeira Unidade de Estudo. Na semana seguinte, temos então a primeira reunião das equipes.

Neste dia é entregue a Unidade de Estudo nº 1, e os monitores com o professor, orientam as equipes, quanto à maneira de colocarem as respostas e quanto à divisão das questões por equipe.

No final os monitores recebem de volta as Unidades de Estudo, para que na próxima reunião de grupos possa devolver aos estudantes, com as observações e o número de acertos anotados.

No sábado, logo após ser entregue a primeira Unidade de Estudo é feita uma "aula de reforço" com presença não obrigatória. Nesta aula, que é orientada por um dos monitores, as dúvidas, as observações e os problemas propostos, considerados mais difícies, são desenvolvidos. Na semana seguinte, o ciclo se repete.

Logo após a realização de quatro ou cinco Unidades de Estudo é feito o I Exercício Escolar. O mesmo acontecendo nos períodos seguintes.

Modelos de material utilizado em anexo.

C A P Í T U L O IV

4. RESULTADOS

O universo desta pesquisa é composta de 167 estudantes matriculados na disciplina Economia Matemática 09 do Curso de Ciências Econômicas do Centro de Ciências Humanas da Universidade Federal de Pernambuco, no período relativo ao primeiro semestre de 1981.

Durante este período foram desenvolvidas 12 Unidades de Estudo, correspondendo para cada quatro delas, um exercício escolar individual. Neste capítulo, apresentamos os resultados encontrados para o Curso Diurno e para o Curso Noturno.

Convém salientar que, os Exercícios Escolares Individuais às Unidades de Estudo exigiram dos estudantes do Curso Diurno e do Curso Noturno o mesmo nível de desempenho.

4.1. - Análise de Desempenho no Curso Diurno

Matricularam-se no curso diurno 75 estudantes, destes somente 65 compareceram às aulas e fizeram as Unidades de Estudo. Tivemos uma desistência de 10 estudantes. As causas desta evasão são várias, entre as quais a principal é que o estudante toma 8 disciplinas por semestre e consequentemente vai desistindo daquelas que apresentam uma maior dificuldade. Como veremos a evasão continua durante o decorrer do semestre, chegando a 30 % do total de alunos matriculados.

4.2. - Resultados das Unidades de Estudo

Para fins de comparação, utilizamos os seguintes conceitos, para os resultados obtidos nas Unidades de Estudo:

A - Para os que tiveram 100 % de acerto;

B - Para os que tiveram 80 % de acerto;

C - Para os que tiveram menos de 80 % de acerto;

D - Não compareceram.

Consideraremos inicialmente as quatro primeiras unidades, que correspondem ao 1º Exercício Escolar Individual.

1ª U E

CONCEITO	Nºs	%
A	18	27.6
B	21	32.3
C	18	27.6
D	8	12.3

2ª U E

CONCEITO	Nºs	%
A	49	75.3
B	3	4.6
C	3	4.6
D	10	15.4

3ª U E

CONCEITO	Nºs	%
A	51	78.4
B	9	13.8
C	1	1.5
D	4	6.15

4ª U E

CONCEITO	Nºs	%
A	41	63.0
B	8	12.3
C	5	9.2
D	12	18.5

1º EXERCÍCIO ESCOLAR INDIVIDUAL

Nº ALUNOS PRESENTES	Nº ALUNOS AUSENTES	NOTAS											MÉDIA
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
62	13	3	2	3	1	1	8	8	5	9	2	20	6,9

A primeira Unidade de Estudo, apresentou um baixo rendimento em relação às outras. Este resultado, de certo modo, já era esperado, uma vez que muitos estudantes:

a) Não compareceram à primeira aula;

b) Não sabem trabalhar em equipe;

c) Não conhecem o processo de ensino.

No decorrer da segunda Unidade de Estudo, o rendimento (conceito A) torna-se acentuado, significando que começa a existir um entrosamento entre os componentes de cada equipe.

O número de faltosos, nas quatro primeiras Unidades de Estudo (nível D) mantem-se aproximado, permitindo que já, a esta altura, se possa fazer uma projeção do número de prováveis reprovados, que neste caso gira em torno de dez.

O resultado do primeiro Exercício Escolar Individual, mostra que dos 65 estudantes que participam do curso, apenas houve três faltas. Neste exercício verificamos que o número de alunos com nota acima de cinco, fica em torno de 50 o que equivale em média ao número de estudantes que tiveram conceito A ou B nas quatro Unidades Escolar, evidenciando o aproveitamento individual obtido na equipe.

A média do aproveitamento ficou em torno de sete, o que nos diz ser o aproveitamento destas quatro unidades " ótimo ". Observamos também, a influência das aulas de reforço, para que o nível de aproveitamento chegue a tal.

Analisemos as quatro Unidades de Estudo seguintes, isto é, a 5ª, 6ª, 7ª e 8ª Unidades de Estudo, com o respectivo Exercício Escolar Individual.

5ª U E

CONCEITO	Nºs	%
A	43	66.2
B	11	16.9
C	2	3.0
D	9	13.8

6ª U E

CONCEITO	Nºs	%
A	52	80.0
B	6	9.2
C	-	-
D	7	10.8

7ª U E

CONCEITO	Nºs	%
A	49	75.3
B	5	7.7
C	-	-
D	11	16.9

8ª U E

CONCEITO	Nºs	%
A	46	70.7
B	6	9.2
C	2	3.0
D	11	16.9

2º EXERCÍCIO ESCOLAR INDIVIDUAL

Nº ALUNOS PRESENTES	Nº ALUNOS AUSENTES	N O T A S											MÉDIA
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
55	10	2	13	5	0	0	8	5	5	4	6	7	5,2

O aproveitamento da 5ª, 6ª, 7ª e 8ª Unidades de Estudo, novamente fica em torno de 47 estudantes, havendo um decréscimo quanto ao aproveitamento do 2º Exercício Escolar Individual, cuja média atingiu 5.2. Novamente observamos uma relação direta entre o aproveitamento das Unidades de Estudo e o Exercício Escolar Individual. O conceito B e D decresceram, ficando o C em torno de 1 e o D em torno de 10. Fica evidenciado que a média de reprovados será em torno de dez, conforme análise nas quatro primeiras unidades.

Tomemos agora, a 9ª, 10ª, 11ª e 12ª Unidades de Estudo.

9ª U E

CONCEITO	Nºs	%
A	25	38.4
B	23	35.3
C	5	4.6
D	12	18.4

10ª U E

CONCEITO	Nºs	%
A	26	40.0
B	20	30.7
C	6	9.2
D	13	20.0

11ª U E

CONCEITO	Nºs	%
A	21	32.3
B	23	35.3
C	7	10.7
D	14	21.5

12ª U E

CONCEITO	Nºs	%
A	27	41.5
B	19	29.2
C	5	7.7
D	13	20.0

3º EXERCÍCIO ESCOLAR INDIVIDUAL

Nº ALUNOS PRESENTES	Nº ALUNOS AUSENTES	NOTAS											MÉDIA
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
50	15	1	4	1	0	1	7	1	12	8	5	10	[illegible]

Neste conjunto de Unidades de Estudo e 3º Exercício Escolar Individual, verificamos que houve um equilíbrio entre os conceitos A e B. A justificação encontra-se no fato de ser final de curso e o estudante dedicar-se um pouco mais a outras disciplinas que lhe apresentam maiores dificuldades. O resultado do terceiro Exercício Escolar Individual, mostra que em média houve um acréscimo com relação ao segundo exercício.

A quantidade de estudantes que ficaram no conceito D passou para 13. Projetando este fato e considerando o que aconteceu nos dois conjuntos de Unidades, concluimos que entre 10 e 13 será o número de estudantes reprovados.

Computados os dados anteriores, observou-se o seguinte, com relação ao turno da manhã.

Matricularam-se 75 alunos, porém houve uma desistência de 12 alunos, ou por trancamento de matrícula ou por reprovação por falta. Desta forma ficamos com um número real de 53 estudantes que terminaram o curso - participaram de Unidades de Estudo e fizeram os exercícios individuais. Destes 53 tiveram aprovação 43 o que representa um percentual de 81.14% e 10 foram reprovados, que dá um percentual de 18.86%.

Este resultado evidencia a eficácia do sistema de Instrução utilizada, e mostra que os nossos pressupostos foram verdadeiros.

Faremos agora a análise dos dados computados para a turma noturna.

4.3. - Análise de Desempenho no Curso Noturno

Matricularam-se 92 estudantes, neste semestre - 1º semestre de 1981. Destes, compareceram 85 para fazer as Unidades de Estudo e dos 85, fizeram o primeiro Exercício Escolar Individual 71. Temos então uma evasão de 21 estudantes, no decorrer das quatro primeiras Unidades de Estudo e o primeiro Exercício Escolar Individual.

As causas desta evasão que continuará em pequena escala no decorrer do semestre são várias:

a) Todos os estudantes trabalham;

b) Alguns por força do seu emprego, têm que viajar frequentemente e perdem o curso por faltas;

c) O cançaso de um dia de trabalho, com um transporte precário;

d) Tomam 8 disciplinas por semestre.

Em média a evasão noturna deve alcançar 30 a 35% do total de alunos matriculados em cada semestre.

Vejamos a análise das quatro primeiras Unidades de Estudo e do primeiro Exercício Escolar Individual.

1ª U E

CONCEITO	Nºs	%
A	36	42.8
B	31	36.9
C	14	16.6
D	3	3.5

2ª U E

CONCEITO	Nºs	%
A	43	51.1
B	17	20.2
C	14	16.6
D	10	11.9

3ª U E

CONCEITO	Nºs	%
A	26	30.9
B	12	14.2
C	19	22.6
D	27	32.14

4ª U E

CONCEITO	Nºs	%
A	37	44.0
B	14	16.6
C	8	9.5
D	25	29.7

1º EXERCÍCIO ESCOLAR INDIVIDUAL

Nº ALUNOS PRESENTES	Nº ALUNOS AUSENTES	N O T A S											MÉDIA
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
71	14	0	8	5	1	0	8	10	3	13	10	13	7,3

Os alunos do Curso Noturno, são em grande parte veteranos, uma vez que no Ciclo Básico a média de alunos por turma é de quarenta. Vemos que se matricularam 92, porque em média 50% são alunos repetentes. Além do mais, o curso noturno é geralmente prejudicado por qualquer movimento que permita a não realização de aulas. Estes são os motivos de uma variação grande nas participações da Unidades de Estudo e aproveitamento no 1º Exercício Escolar Individual.

A primeira Unidade de Estudo apresenta um aproveitamento de cerca de 79%, o que não difere da segunda Unidade de Estudo, cujo aproveitamento fica em torno de 72%. Na terceira Unidade de Estudo começa a estabilização e o índice de aproveitamento gira em torno de 40% a 50%, sendo o índice nos conceitos C e D em torno de 40%.

Quanto ao aproveitamento do primeiro Exercício Escolar Individual, é considerado "Bom", pois tem uma média de 7.3. Já neste exercício observamos o comparecimento de 71 estudantes e consequentemente a falta de 21, número esse que deve acentuar-se mais no decorrer do semestre.

As oscilações entre a relação das Unidades de Estudo e do aproveitamento no primeiro Exercício Escola Individual aparecem devido às observações feitas no início desta análise.

Consideremos agora à análise das quatro Unidades de Estudo seguintes com o respectivo Exercício Escolar Individual.

5ª U E

CONCEITO	Nºs	%
A	22	25.9
B	16	18.8
C	16	18.8
D	31	36.4

6ª U E

CONCEITO	Nºs	%
A	44	51.7
B	9	10.6
C	4	4.7
D	28	33.0

7ª U E

CONCEITO	Nºs	%
A	27	31.7
B	19	22.3
C	4	4.7
D	35	41.1

8ª U E

CONCEITO	Nºs	%
A	10	11.7
B	12	14.1
C	16	18.8
D	47	55.2

2º EXERCÍCIO ESCOLAR INDIVIDUAL

Nº ALUNOS PRESENTES	Nº ALUNOS AUSENTES	N O T A S											MÉDIA
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
55	30	2	12	4	3	4	7	9	2	1	3	8	4,8

Observando os dados obtidos nas Unidades de Estudo e o resultado do 2º Exercício Escolar Individual, vemos a relação direta entre o grau de aproveitamento na escala individual e na escala de grupo.

A variação com que os estudantes comparecem aos trabalhos de equipe projeta-se no Exercício Escolar Individual. Basta uma análise superficial da 5ª, 6ª, 7ª e 8ª Unidade de Estudos para verificar que a média do 2º Exercício Escolar Individual seria baixa.

A evasão nas Unidades de Estudo (conceito D) chega a média de 35 estudantes, enquanto que a evasão no 2º Exercício Escolar Individual é de 30 estudantes.

Esta flutuação no aproveitamento das Unidades de Estudo, sobretudo na 8ª, deve a fatos como o início de greve - movimentos em uma escola muito politizada, com um diretório muito influente. No turno da manhã, as coisas se processam de um modo diferente, uma vez que Economia Matemática é a primeira aula (7:30 h) e todo movimento se inicia após essa aula.

O rendimento seria muito menor se não acontecesse as aulas de reforço nos sábados que normalmente têm uma frequência de 40 estudantes, tirando dúvidas e refazendo as Unidades de Estudo.

As quatro últimas Unidades de Estudo e a seguir o

Exercício Escolar Individual, estão apresentados abaixo:

9ª U E

CONCEITO	Nºs	%
A	23	27.0
B	16	18.8
C	10	11.7
D	37	43.5

10ª U E

CONCEITO	Nºs	%
A	23	27.0
B	17	20.0
C	7	8.2
D	38	44.8

11ª U E

CONCEITO	Nºs	%
A	15	17.6
B	13	15.3
C	11	13.0
C	46	54.1

12ª U E

CONCEITO	Nºs	%
A	20	23.5
B	15	17.6
C	10	11.7
D	40	47.0

3º EXERCÍCIO ESCOLAR INDIVIDUAL

Nº ALUNOS PRESENTES	Nº ALUNOS AUSENTES	NOTAS											MÉDIA
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
54	31	3	10	4	4	2	3	5	5	6	9	7	5,2

Apesar de pequeno, houve um aumento quanto ao aproveitamento nas quatro últimas Unidades de Estudo. Juntando os conceitos A e B, temos em média 43 estudantes, enquanto que se situa em 40 o número de estudantes que não participaram do trabalho em equipe.

4.4. - Comparação dos Resultados

O curso desenvolvido em Economia Matemática 09, equivale ao que é denominado no ciclo geral de cálculo 1. As di ferenças entre os dois cursos são mais em termos de demonstrações e um número de aplicações as diferentes áreas como Engenharia, Física, Química, Estatística, etc. Enquanto que em Economia os exemplos e aplicações são dirigidas para a própria Economia. No geral os programas se equivalem, só o método de desenvolver a disciplina é que difere. Enquanto que em Economia, em duas turmas matricularam-se 160 estudantes, temos no Ciclo Básico onze (11) turmas com 738 alunos em Cálculo I, com uma média de 67 alunos por turma.

De acordo com o mapa divulgado pela área, o resultado é o seguinte:

Disciplina: Cálculo I
Número de Turmas: 11
Número de Alunos: 738
Aprovados: 281
Reprovados: 457
Índice de Aprovação: 38,07 %

Observamos que o procedimento de como está sendo desenvolvido o curso de Cálculo I não está correto, pois para esta área (área I - de tecnologia) vão os melhores alunos em conhecimentos de matemática.

É grande a diferença existente quanto ao índice de aprovação. Enquanto em Economia tem uma média de 80% de aprovação em turmas de curso diurno e noturno, encontramos em Cálculo I um índice de 38 %.

O resultado da computação dos três Exercícios Escolares Individuais, com o Exercício Escolar Individual Final nos dá o seguinte quadro:

Matriculados - - - - - - - -	92	85
Desistentes (iniciais) - - -	07	
Desistentes (no decorrer do curso) -	25	
Aprovados -	47	
Reprovados -	13	

Desta forma tivemos um percentual de 78,3% de aprovação, o que novamente mostra a eficácia do sistema de Instrução utilizado, enquanto que o índice de reprovação ficou em torno de 21,7 %.

BIBLIOGRAFIA

ALBUQUERQUE, Ivan L. - Matemática para Economia - UFPE - Recife - 1976.

ARAUJO, João B. O. - Tecnologia Educacional. Editora Vozes Ltda. - Rio de Janeiro - 1976.

ASPY, DAVID - Novas Técnicas para Humanizar a Educação. Editora Cultrix - S. Paulo

AURICCHIO, Lígia O. - Manual de Tecnologia Educacional. Livraria Francisco Alves Editora Rio de Janeiro - 1978.

AUSUBEL, David P. - Psicologia Educativa - Um ponto de vista cognostivo - Editorial Trillas - México, 1976.

AWH, Robert Y. - Microeconomia: Teoria e Aplicações - Livraria Técnicas e Científicos - Rio de Janeiro - 1979.

BARRETO, ELB S. S. - Os programas individualizados (C.P.I.s) Recursos ou Soluções - Cadernos de Pesquisas - 1980.

BILAS, Richard A. - Teoria Microeconômica. Uma análise Gráfica - (Forense) Universitária - Rio de Janeiro - 1980.

BLOOM, Benjamim S. - Avaliación del Aprendizaje - Ediciones Troquel - B. Aires - 1975

BLOOM, Benjamim S. - Taxionomia dos Objetivos Educacionais - Domínio Cognitivo - Editora Globo - 1976

BLOOM, Benjamim S. - Taxionomia dos Objetivos Educacionais - Domínio Afetivo - Editora Globo - 1976.

BLOOM, Benjamim S. - Características Humanas e Aprendizagem Escolar. Editora Globo 1981

BONINI, Edmundo E. - Matemática: Exercícios para Economistas - Livraria Nobel S. A. São Paulo - 197

BISHOP, Lloyd K. - Individualização de Sistemas Educacionais. Editora Pedagógica e Universitária Ltda. - S. Paulo - 1977.

BRANSON, William H. - Macroeconomia. Editora Happer e Row do Brasil Ltda - S. Paulo 1978

BRIGGS, Leslie J. - Manual de Planejamento de Ensino - Editora Cultrix - S. Paulo 1976

BROWN, D. W. F. - Activemos las mentes. Editorial Limusa - México - 1975.

BRONER, Jerome - O Processo de Educação. Companhia Editora Nacional - S. Paulo - 1976.

BRONER, Jerome - Uma nova Teoria de Aprendizagem - Edições Bloch - Rio de Janeiro - 1976

CENTRO PARA INVESTIGACION Y INOVACIÓN EN LA CIÊNCIA - Curriculum y Tecnicas de Educacion - Ediciones Marymar - B. Ayres - 1974.

CHIANG, Alpha C. - Fundamental Methods of Mathematical Economics - McGraw - Hill 1974.

...

D'AMBROSIO, Ubiratan - Uma opção para a Formação de Mestres em Ensino de Ciências - Oficina Regional de Ciências Y Tecnologia - Unesco - 1975

D'AMBROSIO, Ubiratan - Desenvolvimento Nacional e Estratégias para Educação Científica - Universidade Estadual de Campinas, Campinas - S.P. 1977

D'AMBROSIO, Ubiratan - Algumas Tendências no Ensino de Ciências - Palestra proferida no Centro de Educação da UFPE. - 1980

DAVIS, Robert H. - Sistema de Aprendizagem: Uma abordagem do desenvolvimento da Instrução - Editora Mc Graw Hill do Brasil - S. Paulo - 1979

DIULIO, Eugene A. - Macroeconomia - Editora Mc Graw - Hill do Brasil - São Paulo - 1977

DORNBUSCH, Rodiger - Macroeconomia - Editora Mac Graw - Hill do Brasil - São Paulo - 1981

DOWLING, Edward T. - Matemática Aplicada à Economia e Administração. Editora Mc Graw - Hill do Brasil - S. Paulo - 1981

FERGUNSON, C. E. - Teoria Microeconômica - Forense Universitária - Rio de Janeiro - 1981

FLAMER, G. H. - A aprendizagem com o constante e o tempo como variável - Engeneering Education - 1971

GAGNE, Robert M. - Como se realiza a Aprendizagem - Livros Técnicos e Científicos - Editora S.A. - Rio de Janeiro - 1976

GAGNE, Robert M. - La planificacion de la ensenanza - sus principios- Editorial Trillas - México - 1977

GAGNE, Robert M. - Principios Essenciais da Aprendizagem para o Ensino - Editora Globo - 1980

GARCIA, Waller E (org) - Educação Brasileira Contemporânea - Organização e funcionamento - Editora Mc Graw - Hill. S. Paulo - 1976.

GARÕFALO, Gilson L. - Análise Microeconômica - Editora Atlas - S. Paulo - 1980

GRONLUND, Norman E. - A formulação de Objetivos comportamentais para as aulas - Editora Rio - Rio de Janeiro - 1975

GRONLUND, Norman E. - A instrução Individualizada na Escola -Livraria Pioneira Editora S. Paulo - 1979.

GOROW, Frank F. - O Jogo da Aprendizagem: Estratégias para professores - Editora Pedagógica e Universitária Ltda. - S. Paulo - 1977

HAMACHEK, Don E. - Encontros com o Self - Iteramericana Ltda. - Rio de Janeiro 1979

HANDERSON, James M. - Teoria Microeconômica: Uma abordagem Matemática - Livraria Pioneira Editora - S. Paulo - 1976

HASSENFORDER, Jean - A Inovação do Ensino- Livros Horizonte Ltda. Portugal - 1974

HEIL BRONER, Robert L. - Elementos de Macroeconomia - Zahar Editores - Rio de Janeiro - 1968.

...

...

HENRY, S. G. B. - Fundamentos de Matemática para Economistas - Editora Vozes Ltda. - Rio de Janeiro - 1972

HILGARD, Ernest R. - Teorias da Aprendizagem - Editora Pedagógica e Universitária S. Paulo - 1973.

HOFFMANN, Laurence D. - Cálculo: Um Curso Moderno e Aplicações. Livros Técnicos e Científicos. Rio de Janeiro - 1971

JOHNSON, Dudley W. - Teoria Macroeconômica - Livros Técnicos e Científicos - Rio de Janeiro - 1980

JUNCO, Horacio G. - SIP - Uma Inovacion en la ensenanza superior. Editorial Lemusa - México - 1974

KAUFMAN, Roger A. - Planificacion de Sistemas Educativos - Ideias Básicas Concretas - Editorial Trillas - México - 1971

KELLER, Fred S. - O Ensino de Ciências será melhor na década de 70 ? - 137º Reunião da American Association for the advancement of science - 1970

KELLER, Fred S. - Adeus Mestre ! - Ciência e Cultura nº 3 - 1972

LAX, Peter - Cálculo - Aplicações e Programação - Guanabara dois S.A. - Rio de Janeiro - 1979

LEITHOLD, Lovis - O cálculo com Geometria Analítica - Editora Haper Row do Brasil Ltda. S. Paulo - 1980

LEMBO, John M. - Porque falham os professores. Editora Pedagógica e Universitária S. Paulo - 1975

LINDEMAN, Richard H - Medidas Educacionais. Editora Globo - Ponto Alegre. 1974

LUDOJOSKI, Roque L. Andragogia o Educacion del Adulto. Editorial Gundalupe. B. Aires - 1972

MAGER, Robert F. - A formulação de Objetivos de Ensino - Editora Globo - Porto Alegre - 1976.

MAGER, Robert F - Análise de Objetivos - Editora Globo - Porto Alegre - 1977.

MARQUES, Juraci C. - Ensinar não é transmitir - Editora Globo - Porto Alegre - 1974

MARQUES, Juraci C - A aula como processo - Editora Globo - Porto Alegre - 1974

MANASSES, Branca - Tecnologia da Educação - Livros Técnicos e Científicos - Rio de Janeiro - 1980.

MENSFIELD, Edwin - Microeconomia: Teoria e Aplicações - Editora Campus - Rio de Janeiro - 1980.

MESSICK, Rosemery G. - Currículo: Análise e Debate - Zahar Editoras - Rio de Janeiro - 1980.

MILLER, Roger L - Microeconomia Toria, questões e aplicações - McGraw Hill do Brasil - S. Paulo - 1980

MORETTIN Pedro A - Métodos Quantitativos para economistas e Administradores - Administradores - Atual Editora Ltda. - 1981.

...

MOTTA, F. S. - O Ensino Personalizado - Metodo Sherman Keller - Universidade Federal de Pernambuco - 1973.

MUCCHIELLI, Roger - A formação de Adultos - Livraria Martins Fontes Editora Ltda. São Paulo - 1980.

NAGES, Thomas - Ensino para a Competência - Estratégias para Eliminar fracassos - Editora Globo - Porto Alegre - 1973.

PARKYN, George - Educação Permanente Modelo conceptual - Livros Horizontes - Portugal - 1976.

PARRA, Nelio - Ensino Individualizado: Programas e Materiais Saraiva S.A. Livreiros e Editores - São Paulo - 1978.

PFEIFFER, John E - Uma visão nova da Educação - Companhia Editora Nacional - São Paulo - 1971

POSNER, Michael I - Cognição - Editora Interamericana Ltda. - Rio de Janeiro - 1980.

POPLLAM, Willian J. - Táticas de Ensino em sala de aula - Editora Globo - Porto Alegre - 1976.

RAMIREZ, G. - Métodos de Educação de Adultos - Edições Loyola - 1975 - S. Paulo

ROGERS, Carl - Tornar-se Pessoa - Livraria Martins Fontes Ltda. - S. Paulo

ROGERS, Carl - Liberdade para aprender - Interlivros - Belo Horizonte - 1973

ROGERS, Jennifer - Ensino de Adultos - Livraria Martins Fontes Editora Ltda. - Lisboa - 1976

RONCA, Antonio C. - Técnicas Pedagógicas - Editora Vozes Ltda. - Rio de Janeiro 1980

RUSKIN, Robert S. - El sistema de Instrucion Personalizada: Uma alternativa Educativa - Revista de Tecnologia Educacional - 1979 - Chile.

SALDANHA, Louremi E. - Planos de Ensino - Edições URGS - Proto Alegre - 1972.

SALDANHA, Louremi E. - Ensino Individualizado - Editora McGraw-Hill do Brasil - São Paulo - 1972.

SALDANHA, Louremi E. - Tecnologia Educacional - Editora Globo - Porto Alegre - 1978.

SALDANHA, Louremi E. - Tarefas Individuais Programadas - Editora Globo - Portó Alegre - 1979

SALVATORE, Dominick - Microeconomia - Editora McGraw - Hill do Brasil - S. Paulo 1978.

SALVATORE, Dominick - Economia Internacional - Editora McGraw - Hill do Brasil - 1978 - S. Paulo.

SAMUELSON, Paul A. - Introdução à Análise Econômica - Livraria Agir Editora - 1979 Rio de Janeiro.

SCHIEFELE, Hans - Ensino Programada. Edições Melhoramentos - S. Paulo - 1968

SHERMAN, J.G. - Uma variação numa Inovação - Psicological Association - 1970.

SHULMAN, Lee S. - Aprendizaje por descubrimiento - evaluacion crítica - Editorial Trillas - México - 1974.

SKINNER, B. F. - Tecnologia do Ensino - Editora Pedagógica e Universitária - S. Paulo - 1972.

SKINNER, B. F. - Ciência e comportamento Humano - Editora EDART - S. Paulo - 1976.

TURRA, Cláudia et alii - Planejamento de Ensino e Avaliação - Editora EMMA - 1975 Porto Alegre.

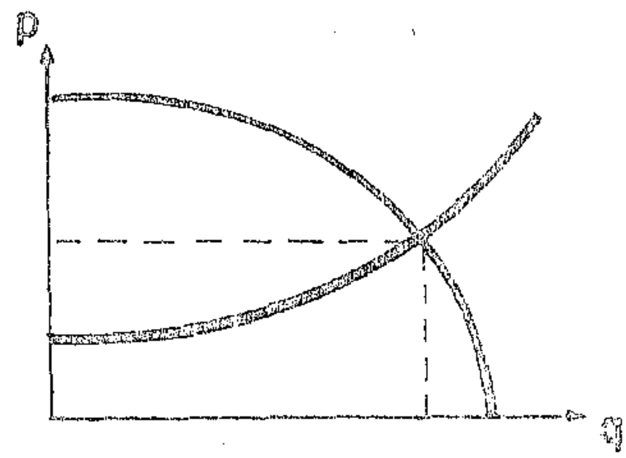
YAMANE, Taro - Matemática para Economistas - Editora ATLAS S.A. - S. Paulo - 1974

WEBER, Jean E. - Matemática para Economia e Administração - Editora Hepper e Row do Brasil - São Paulo - 1976.

ANEXOS

MANUAL DO ESTUDANTE

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA
UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS



ELEMENTOS DE ECONOMIA MATEMÁTICA I
ELEMENTOS DE ECONOMIA MATEMÁTICA II

DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

MANUAL DO ALUNO

RECIFE-

PREZADO ALUNO:

Este curso começa com VOCÊ, o aluno ! Há outras alternativas. Poderíamos começar pelo objeto da Matemática e oferecer-lhe um plano básico, consistindo na estrutura de proposições e fatos identificáveis como científicos. Iniciar-se-ia com o estudo do cálculo, a geometria analítica, etc. São fatos certamente importantes, mas, o dado básico de um curso é o ser humano, a sua existência e o seu ser. É, portanto, justificável que se comece por VOCÊ, como tema fundamental.

Há muitas e variadas facetas de VOCÊ, o estudante. Seus objetivos vocacionais, suas aspirações, seus sentimentos - temores, cóleras, alegrias, lágrimas. Tudo isso são aspectos de VOCÊ. Mas, o dado central é que você existe: Você é um ser; você está aqui sente-se a sua presença.

Um curso tem cinco elementos ou aspectos básicos:

1. Pessoas
2. Interações
3. Processos
4. Conteúdo
5. Pressão Institucional

O chamado "método" de um curso envolve diferentes combinações desses elementos e certa ênfase sobre um ou outro.

Esse curso dá um tanto mais de ênfase às pessoas e às interações, em comparação com o conteúdo e a pressão institucional; e, o faz diferentemente de muitos outros cursos, porque acredita que, afinal de contas, de tal ênfase resulta um modo mais criativo de lidar com o conteúdo, e, ainda, certa maneira mais realista de lidar com a Pressão Institucional.

Uma vez que o curso começa em você, o estudante, e não com o conteúdo da matéria, é importante que você sinta os seus interesses, os seus problemas e os seus objetivos, e se capacite de modo como a disciplina a estudar poderia por estes últimos em execução.

A responsabilidade de tornar o curso interessante é problema individual. Você é responsável pelo seu próprio interesse. Os professores são responsáveis pela manutenção dos seus. Quando dá uma aula expositiva, é porque se trata de algo importante do seu ponto de vista. Não o faz para preencher o tempo de aula ou para entreter os alunos. A seu ver, é algo real. Neste sentido é ele uma pessoal real e autêntica que persegue os seus próprios interesses.

Os estudantes são responsáveis pela demarcação de suas próprias metas, pelo alargamento de seus próprios interesses, qualidade de seu trabalho, criatividade, abandonando o curso se este parece não fornecer os meios pelos quais suas metas podem ser alcançadas.

De tudo isso resulta uma conclusão: A consciência exata e clara de sua situação como aluno. A consciência de auto disciplina, a consciência do dever de aprender, a consciência do dever de ajudar, de colaborar, a consciência do dever de bem servir, a consciência enfim, de estar usufruindo uma oportunidade que deve ser aproveitada ao máximo.

Tal consciência é suficiente para assegurar sucesso absoluto.

Seja benvindo ao curso.

COMO SERÁ NOSSO CURSO

- Disciplinas: Elementos de Economia Matemática I

  e Elementos de Economia Matemática II

- Professores: 1. Ivan Loureiro (coordenador)

  2. João Barbosa (orientador didático)

  3. Frederico Katz

  4. Abraham Benzaquen

- Créditos: 4

- Carga horária: 60 horas

- Horário:

	Diurno	Noturno
Terça-feira:	7:30 às 9:30	18:45 às 20:30
Quinta-feira	7:30 às 9:30	18:45 às 20:30

Objetivos:

a) de informação: Dar uma visão global do cálculo infinitesimal a uma e mais variáveis, e da algebra matricial, necessária a' um enfoque à Economia Matemática.

b) de automatização: Desenvolver a habilidade de resolução de exercícios ' com a concomitante interpretação dos resultados obtidos.

c) de formação: Desenvolver a mentalidade da moderna economia matemática; do senso de responsabilidade nos trabalhos individuais e em grupo; do senso de autocrítica e honestidade de auto avaliação da participação nas aulas e na verificação de aprendizagem.

AVALIAÇÃO:

A aval ação será feita por:

a) Observação direta: Através do interesse, participação e iniciativa.

b) Trabalho em equipe: Será fornecido uma vez por semana (terça-feira) uma bateria de exercícios para resolução e discursão em grupos. Estes exercícios deverão no fim dos trabalhos ser entregues ao professor para correção, julgamento e comentários nos grupos.

c) Exercícios Escolares: Será feito três exercícios escolares sobre matéria estudada em período definido pela coordenação.

d) Prova final: Para aqueles que não obtiverem aprovação por média dentro dos critérios gerais estabelecidos pela Universidade, será feita uma prova, abordando todas as unidades do programa.

UNIDADES DE ESTUDO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA
CURSO DE ECONOMIA   UNIDADE DE ESTUDO Nº 01
ELEMENTOS DE ECONOMIA MATEMÁTICA - I
ALUNO(A): ______________________________
Recife, 17 de março de 1981 - GRUPO: ________ LETRA: ________

Iniciamos hoje o nosso curso, e esperamos que você esteja gostando. Por enquanto as situações matemáticas são conhecidas.

Faça o seu trabalho com responsabilidade, não procure copiar de outro colega. Estamos, professores e monitores prontos para lhe ajudar.

Lembre-se que o exito do curso depende muito do seu trabalho individual e da ajuda que você pode dar ao seu colega.

ASSUNTOS: Variável e Intervalo, Funções, Relações.

OBJETIVOS:
a) Dado uma desigualdade determinar o seu conjunto solução.
b) Determinar o conjunto solução de uma desigualdade, envolvendo a noção de valor absoluto.
c) Dado uma função determinar o seu gráfico.
d) Dados duas funções determinar a função composta das mesmas

EXERCÍCIOS:

1 - Determine o conjunto solução e faça uma representação gráfica das desigualdades:

a) $2x + 3 < 8$

b) $15 - 3x \geq 7$

c) $18 + 10x \leq 0$

d) $17 \leq 13x + 2$

e) $8 \geq 2x + 3$

2 - Determine os valores de x, em caso de existirem, para as quais são válidas as seguintes desigualdades:

a) $\dfrac{x-2}{x+3} < \dfrac{x+1}{x}$ (b) $\dfrac{2-x}{x+1} < \dfrac{3}{2}$ (c) $\dfrac{x+3}{x-2} < 5$

(d) $\dfrac{x-1}{x} < 4$ (e) $\dfrac{x+1}{2x+3} < 4$

3 - Determine os intervalos que satisfazem a desigualdade:

a) $\left|\dfrac{x+1}{3x-2}\right| < 5$ (b) $\left|\dfrac{3-2x}{2+x}\right| < 4$ (c) $\left|\dfrac{x+3}{6-5x}\right| \leq 2$

(d) $\left|\dfrac{x-2}{2x-5}\right| < 1$ (e) $\left|\dfrac{2x-3}{x+1}\right| < 2$

4 - Dadas as funções reais $f(x) = 10x - 3$, $g(x) = x^2 + x$ e
$h(x) = 3x + 4$
determine:

a) $(f o g)(x)$ (b) $(g o f)(x)$ (c) $(f o h)(x)$

(d) $(g o h)(x)$ (e) $(h o f)(x)$

5 - Faça a representação gráfica das seguintes funções reais:

a) $y = 2x - 7$ (b) $y = 3x + 5$ (c) $y = 5 - 4x$

(d) $y = x + 1$ (e) $y = 5x + 6$

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA
CURSO DE ECONMIA

UNIDADE DE ESTUDO Nº 02

ELEMENTOS DE ECONOMIA MATEMÁTICA - I

ALUNO(A): ______________________________

Recife, 24 de março de 1981 ________ GRUPO: ________ LETRA: ______________

ASSUNTO: As funções lineares e a Economia.

OBJETIVOS: Ao final desta unidade o aluno deverá estar apto a:

a) Dados dois pontos, determinar a equação da reta que passa por eles.

b) Dado uma equação do 1º grau com duas variáveis, verificar se a mesma pode representar uma função de demanda ou uma função de oferta.

c) Dado uma equação de uma reta determinar se a mesma representa uma função crescente ou uma função decrescente.

d) Dados dois pontos determinar o coeficiente angular, da reta que passa pelos pontos dados.

EXERCÍCIOS:

1 - Para cada par de pontos abaixo determine:

i) a declividade da reta que passa pelos pontos.

ii) a equação da reta.

iii) faça o gráfico da reta.

a) $(-2,-3)$ e $(-5,-6)$ (b) $(0, 0)$ e $(6, 3)$

c) $(3, -2)$ e $(3, 5)$ (d) $(-1, -2)$ e $(4, 1)$

(d) $(3, -2)$ e $(3, 5)$

2 - Quais das seguintes equações representam curvas de demanda, quais representam curvas de oferta e quais não representam curvas de oferta nem demanda?
(Assuma que o eixo y representa o preço e o eixo x a quantidade). Justifique.

a) $2x + 5y + 4 = 0$ (b) $x - 2y = 0$

c) $3x + 4y - 10 = 0$ (d) $y - 4 = 0$

(e) $5x - y - 10 = 0$

3 - A curva de demanda para um artigo é $x = 10 - \frac{y}{4}$. Suponha que y representa o preço e x, a quantidade demandada.

a) - Ache a quantidade, se o preço é:

i) 4 ; ii) 16 ; iii) 25

b) - Qual o preço mais alto que poderá ser pago por este artigo?

c) - Que quantidade poderá ser demandada se o artigo fosse liberado gratuitamente?

d) - Faça o gráfico da curva.

e) - Determine o preço se a quantidade demandada é:

i) 9 ; ii) 7 ; iii) 2

4 - Para cada um dos seguintes pares de reta determine:

i) a curva de demanda.

ii) a curva de oferta.

iii) faça o gráfico das duas curvas e determine o ponto comum.

a) $y = 10 - 2x$ e $y = \frac{3}{2}x + 1$

b) $2y + 3x = 10$ e $x = 4y - 6$

c) $x = 15 - 3y$ e $x = 2y - 3$

d) $y = 6 - 2x$ e $x = 3y - 3$

e) $y = 5 - 3x$ e $y = 5x - 2$

5 - Determine qual das seguintes retas é uma função crescente ou decrescente.

a) $2x + 3y - 5 = 0$

b) $5y + 2x - 4 = 0$

c) $5y - 3x + 7 = 0$

d) $x - 4y + 2 = 0$

e) $\frac{1}{2}x - 6y + 12 = 0$

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA
CURSO DE ECONOMIA
ELEMENTOS DE ECONOMIA MATEMÁTICA - I

UNIDADE DE ESTUDO Nº 03

ALUNO(A): ______________________________

Recife, 31 de março de 1981   GRUPO: __________ LETRA: __________

ASSUNTO: Curva de demanda - Curva de oferta - Equilíbrio - Cônicas Circunferência.

OBJETIVOS: No final desta unidade o aluno estará apto a:

a) Dado uma equação de oferta ou de demanda, determinar sua curva e identificar seus elementos.
b) Dados um par de curva onde uma é de demanda e a outra é de oferta, determinar o ponto de equilíbrio de mercado.
c) Dado uma função do 2º grau com duas variáveis, identificar qual o tipo de cônica que a curva representa.
d) Dado uma equação de uma circunferência em sua forma geral, determinar a mesma em sua forma canonica e fazer seu gráfico.
e) Dados um par de retas representados por suas equações, determinar se as mesmas são paralelas ou não.

EXERCÍCIOS:

1 - a) A equação de oferta de um artigo é $x = ay - b$, onde a e b são constantes positivas, y representa o preço e x, a quantidade oferecida.
   i) Encontre o preço se a quantidade oferecida é $5a - b$.
   ii) Encontre a quantidade oferecida se o preço é $5b/a$.
   iii) Qual o preço mais baixo pelo qual este artigo pode ser oferecido?

b) A equação de demanda de um artigo é $x = A - By$, onde A e B são constantes positivas, y representa o preço e x representa a quantidade demandada.
   i) Determine o preço se a quantidade demandada é $A/3$.
   ii) Determine a quantidade demandada se o artigo for liberado, gratuitamen
   iii) Qual o preço mais alto que poderá ser pago por este artigo.

c) A curva de oferta de um artigo é $x = 1{,}1y - 0{,}1$ (o eixo y representa o preço e o eixo x, a quantidade demandada).
   i) Determine a quantidade oferecida, se o preço é 0,5.
   ii) Qual o preço mais baixo que este artigo poderá ser oferecido?
   iii) Trace a curva.

d) A curva de demanda para um artigo é $x = 40 - y/5$ (eixo-x quantidade demandada, eixo -y preço)
   i) Determine o preço se a quantidade demandada é 25.
   ii) Qual o preço mais alto que poderá ser pago por este artigo?
   iii) Trace a curva.

- A curva de demanda para um artigo é $2y + 3x = 30$. (eixo - x quantidade demandada, eixo - y preço)
  i) Determine a quantidade demandada se o preço é 5.
  ii) Que quantidade poderá ser demandada se o artigo fosse liberado gratuitamente?
  iii) Trace a curva.

- Para cada um dos seguintes pares de retas, trace o gráfico e calcule o preço e quantidade de equilíbrio de mercado.
  a) $x - 2y = 0$ e $3x + 4y - 10 = 0$
  b) $x + y = 5$ e $2x - y = 5,5$
  c) $x - 3y + 3 = 0$ e $y = 6$
  d) $2y + 3x - 10 = 0$ e $x = 4y - 6$
  e) $x = 5 - y$ e $3x = 6y - 9$

- Para cada uma das seguintes equações identifique a curva representada, identifique os parâmetros.
  a) $xy - 4y = -4$
  b) $3x^2 + 3y^2 - 6x + 4y = 1$
  c) $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 6 = 0$
  d) $x^2 - y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$
  e) $y^2 - 6y + 9 = 0$

- Ponha as seguinte equações na forma canônica da circunferência, verifique se o lugar geométrico é vazio ou degenerado e faça o gráfico.
  a) $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 6 = 0$
  b) $3x^2 + 3y^2 - 6x + 4y = 1$
  c) $16x^2 + y^2 - 32x - 6x + 25 = 0$
  d) $9x^2 + 25y^2 + 18x + 150y + 9 = 0$
  e) $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 6 = 0$

- Verifique se os pares de retas abaixo são paralelas ou não. Justifique sua resposta. (Lembre-se do coeficiente angular)
  a) $y - 2x - 4 = 0$ e $y - x - 2 = 0$
  b) $4y - 8x - 16 = 0$ e $5y - 10x - 4 = 0$
  c) $2x - 5y + 6 = 0$ e $10x + 4y - 5 = 0$
  d) $3x + 4y - 2 = 0$ e $12x - 9y + 2 = 0$
  e) $9x + 12y + 7 = 0$ e $2x + y - 6 = 0$

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

CURSO DE ECONOMIA UNIDADE DE ESTUDO Nº 04

ELEMENTOS DE ECONOMIA MATEMÁTICA - I

ALUNO(A): ____

Recife, 07 de abril de 1981 - GRUPO: ________ LETRA: ________

ASSUNTOS: a) Equação quadrática e as cônicas.

b) Parábola.

c) Hipérbole.

d) Hipérbole Equilátera.

e) Curvas de níveis.

OBJETIVOS: Ao final desta unidade de estudo, o aluno deverá, sem o uso de livros ou notas de aulas, ser capaz de:

a) Identificar uma cônica pela sua equação quadrática.

b) Identificar a equação canônica de uma circunferência, e fazer seu gráfico.

c) Identificar a equação de uma elípse em sua forma canônica, e fazer seu gráfico.

d) Identificar a equação de uma parábola em sua forma canônica, e fazer seu gráfico.

e) Identificar a equação de uma hipérbole em sua forma canônica, e fazer seu gráfico.

f) Dado uma família de duas variáveis, determinar a família de curvas de níveis gerada pela mesma.

E X E R C Í C I O S

1 - Traçar a família de curvas de níveis para as relações definidas por:

a) $z = 2x + y$

b) $z = x^2 - y^2$

c) $z = 25 - x^2 - y^2$

d) $z = x$

e) $z = (x - 2)(y - 3)$

2 - Determine a equação canônica, e verifique se o lugar geométrico é vazio ou degenerado para as equações quadráticas. Faça um gráfico:

a) $x^2 + y^2 - 2x + 10y + 19 = 0$

b) $9x^2 + 9y^2 + 6x - 6y + 5 = 0$

c) $36x^2 + 36y^2 - 48x + 36y - 119 = 0$

d) $4x^2 + 4y^2 + 24x - 4y + 1 = 0$

e) $3x^2 + 3y^2 + 4y - 7 = 0$

3 - Transforme as equações quadráticas abaixo em equações canônicas, e faça o gráfico:

a) $3x^2 + 4y^2 - 30x + 16y + 100 = 0$

b) $5x^2 + 3y^2 + 20x - 33y + 89 = 0$

c) $6x^2 + 9y^2 - 24x - 54y + 51 = 0$

d) $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$

e) $5x^2 + 3y^2 - 3y - 12 = 0$

4 - Determine a equação canônica, e verifique se o lugar geométrico é degenerado ou vazio. Faça um gráfico:

a) $4y^2 - 9x^2 + 16y + 18x = 29$

b) $3y^2 - 4x^2 - 8x - 24y - 40 = 0$

c) $9x^2 - 18y^2 + 54x - 36y + 79 = 0$

d) $4x^2 - y^2 + 56x + 2y + 195 = 0$

e) $y^2 - x^2 + 2y - 2x - 1 = 0$

5 - Para cada uma das seguintes equações, identificar a curva representada, coloque a equação na forma canônica apropriada e traça os gráficos:

a) $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 6 = 0$

b) $3x^2 + 3y^2 - 6x + 4y = 1$

c) $16x^2 + y^2 - 32x - 6y + 25 = 0$

d) $9x^2 + 25y^2 + 18x + 150y + 9 = 0$

e) $3x^2 - y^2 - 12x - 6y = 0$

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA
CURSO DE ECONOMIA . UNIDADE DE ESTUDO Nº 05
ELEMENTOS DE ECONOMIA MATEMÁTICA - I
ALUNO(A): ____________________
Recife, 28 de ABRIL ~~maio~~ de 1981 - GRUPO: ________ LETRA: ________

ASSUNTOS: As cônicas (continuação)
Função derivada.

OBJETIVOS: No final desta unidade o aluno estará apto a:

1) Identificar a equação de uma parábola em sua forma geral ou econômica.
2) Conhecendo a equação de uma parábola fazer sua representação gráfica.
3) Identificar a equação de uma hipérbole em sua forma geral ou canonica.
4) Conhecendo a equação de uma hipérbole fazer sua representação gráfica.
5) Identificar quando uma cônica representa uma função de demanda ou oferta.
6) Determinar algebricamente o ponto de equilíbrio de mercado em problemas envolvendo cônicas.
7) Determinar usando a definição a derivada de uma dada função.

EXERCÍCIOS:

1 - Coloque as equações na forma canônica apropriada da hipérbole, verifique se determimm lugares geométricos degenerado, e traçe o gráfico.

a) $xy - 4y = -4$

b) $3x^2 - y^2 - 12x - 6y = 0$

c) $y^2 - 3x^2 = 27$

d) $y^2 - 4x^2 - 4y + 4 = 0$

e) $xy + 3y = x + 6$

2 - Coloque as equações abaixo na forma canônica apropriada da parábola, verifique se determinan lugares geometricos degenerados, e traçe o gráfico.

a) $y = 3 + 2x = x^2$

b) $5x^2 + 4y = 12$

c) $y^2 - 2y - 8x + 25 = 0$

d) $y^2 - 12y + 46 = 0$

e) $3x^2 + 2x = 0$

- Para cada um dos seguintes pares de equações: determine qual equação representa a curva de demanda e qual representa a curva de oferta; determine algebricamente o preço e a quantidade de equilíbrio de mercado, e comprove geometricamente os pontos equilíbrio algebricamente determinados:

a) $x = 16 - 2y$ e $4x = 4y + y^2$

b) $y = 16 - x^2$ e $y = 4 + x$

c) $y = 9x + 12$ e $y = 39 - 3x^2$

d) $(x + 16)(y + 12) = 480$ e $y = 2x + 4$

e) $xy = 30$ e $3y - x = 9$

4 - Calcule usando a definição (Regra das 5 etapas) a derivada das funções:

a) $f(x) = x^2 + 2x - 5$

b) $f(x) = 3x^2 + x + 10$

c) $f(x) = \frac{5}{3}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{10}{7}$

d) $f(x) = x^3 - x^2 + x$

e) $f(x) = 3x^3 + 7$

5 - Defina e exemplifique graficamente:

a) Elípse

b) Parábola

c) Hipérbole

d) Hipérbole equilatera

e) Derivada de uma função.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA
CURSO DE ECONOMIA — UNIDADE DE ESTUDO Nº 07
ELEMENTOS DE ECONOMIA MATEMÁTICA - I
ALUNO(A): ______________________________
Recife, 12 de maio de 1981 — GRUPO: ______ LETRA: ______

ASSUNTOS: a) Regra da cadeia.
b) Derivada de ordem superior.
c) Regra da função inversa.
d) Derivada da função implícita.

OBJETIVOS: O aluno, ao fim desta unidade de estudo, deverá sem o uso de livros ou notas de aulas, ser capaz de:

a) Aplicar a regra da cadeia, ao determinar a derivada de uma função composta.

b) Dada uma função algébrica, determinar as derivadas sucessivas da mesma.

c) Determinar a derivada de uma função implícita, quando conhecida a equação que relaciona x com y.

E X E R C Í C I O S

1 - Encontre a função derivada de:

a) $f(x) = (x^3 + 2x - 3 + x^{-2})^4$

b) $f(x) = (x^2 + 2 - x^{-2})^{-1}$

c) $f(x) = (x^4 + 5x - 6x^{-1})^3$

d) $f(x) = (3x^3 + 2x^2 - 6x^{-4})^{-4}$

e) $f(x) = (x^3 + 2x^2 - 6x + 5)^4$

2 - Nos problemas abaixo, encontrar $\frac{dy}{dx}$ em função de y e x mediante derivação implícita supondo que y é uma função derivável de x.

a) $x^5 - 2x^3y^2 + 3xy^4 - y^6 = 5$

b) $x^6 + 2x^3y - xy^7 = 10$

c) $x^4 + 2x^2y^2 + xy^3 + 2y^4 = 6$

d) $2x^3 - 3x^2y + 2xy^2 - y^3 = 2$

e) $x^3 + 2x^2y - xy^2 + 2y^3 = 4$

3 - Encontre todas as derivadas sucessivas das funções abaixo, nos pontos indicados:

a) $y = x^3 - 3x + 2$ para $x = 1$

b) $y = (x - 3)^3$ para $x = -2$

c) $y = x^4 - 3x + 8$ para $x = -1$

d) $y = x^5 - 4x^3 + 10$ para $x = 0$

e) $y = x^4 - 3x^3 + 2x + 10$ para $x = 1$

4 - Usando a regra da cadeia, determine a derivada das funções:

a) $y = \sqrt{(x^2 + 3x - 5)}$

b) $y = (x^3 + 5x^2 - 10x + 7)^7$

c) $y = \left(\dfrac{2x + 1}{x}\right)^5$

d) $y = \left(\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)^{10}$

e) $y = (x^2 + 3x)^5 \cdot (x - 3)^3$

5 - Determine $\dfrac{dy}{dx}$ para cada uma das seguintes funções, pelo método da diferenciação implícita:

a) $x^3y^2 + y^2 = 1$

b) $x^2y^2 + 4x = 1$

c) $x^3y^3 + x^2y^2 = a$

d) $x^2 + x^2y^2 + y^2 = b$

e) $x^5 + 4x^2y^3 - 3y^5 = 2$

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

CURSO DE ECONOMIA UNIDADE DE ESTUDO Nº 08

ELEMENTOS DE ECONOMIA MATEMÁTICA - I

ALUNO(A): ______________________________

Recife, 19 de maio de 1981 - GRUPO: ________ LETRA: ________

ASSUNTOS: a) Interpretação geométrica da derivada.

b) Reta tangente à uma curva.

c) Aplicações da derivada à economia.

OBJETIVOS: Ao fim desta unidade de estudo, o aluno deverá, sem o uso de livros ou notas de aulas, ser capaz de:

a) Determinar a equação da reta tangente a uma curva em um ponto indicado.

b) Determinar os intervalos nos quais uma curva é crescente e aqueles em que é decrescente.

c) Usando a interpretação geométrica da derivada, fazer o gráfico de uma dada curva.

d) Aplicado o conceito de derivada em economia, determinar o conceito de "marginal" para o custo total.

EXERCÍCIOS

1 - Para as curvas indicadas abaixo, encontrar a equação da reta tangente no ponto correspondente ao valor dado de x_o.

a) $y = -x^3 + 3x + 1 \quad x_o = 2$ (b) $y = x^3 + x + 1 \quad x_o = -1$

c) $y = x^3 - 3x^2 + 2x \quad x_o = 2$ (d) $y = x^2 - 2x \quad x_o = 1$

(e) $y = x^2 - x + 1 \quad x_o = -1$

2 - Para as funções indicadas abaixo, determine os intervalos em que f(x) é crescente e aqueles em que é decrescente. Faça o gráfico. Indique os pontos de máximos e mínimos relativos:

a) $f(x) = x^2 - 4x + 5$

b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x$

c) $f(x) = 1 + 2x - x^2$

(d) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2$

(e) $f(x) = x^3 + 3x - 2$

3 - a) O número de cruzeiros do custo total da fabricação de x relógios em uma certa fábrica é dada por $Q(x) = 1.500 + 30x + \frac{2}{x}$. Encontre:

i) a função custo marginal.

ii) o custo marginal quando x = 40

iii) o custo de fabricação do quadragésimo primeiro relógio.

b) Se Q(x) cruzeiros é o custo total da fabricação de x brinquedos e $Q(x) = 100 + 4x + 0,02x^2$. Encontre:

i) a função custo marginal.

ii) o custo marginal quando $x = 10$

iii) o custo da fabricação do décimo primeiro brinquedo.

c) O número de cruzeiros do custo total de produção de x unidades de uma mercadoria é $Q(x) = x^2 + 4x + 8$. Encontre a equação que define:

i) o custo médio.

ii) o custo marginal.

iii) o custo marginal quando $x = 5$.

d) O número de cruzeiros do custo total da produção de x unidade de certa mercadoria é $Q(x) = 40 + 3x + 9\ 2x$. Encontre:

i) o custo marginal quando 50 unidades são produzidas.

ii) o número de unidades produzidas quando o custo marginal for de Cr$ 4.50

e) Se Q(x) cruzeiros é o custo total da produção de x unidades de uma mercadoria e $Q(x) = 3x^2 - 8x + 4$. Encontre:

i) a função custo médio.

ii) a função custo marginal.

iii) o custo marginal quando $x = 10$

- Determine a derivada das funções indicadas abaixo:

a) $f(x) = \sqrt[3]{(2x^2 + 3)^2}$ (b) $f(x) = \sqrt[3]{(x^3 + 2x - 1)^2}$

c) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x + 1}{x - 1}}$ (d) $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 + 1)(x + \text{[illegible]})^2}$

(e) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{x - 1}}$

- Determine a função declividade de todas as retas tangente a curva:

a) $y = x^3 + 2x^2 + 10x$ (b) $y = 3x^5 + 4x^2 - x$

c) $y = x^7 + 2x^6 - 4x^5 + 10x - 7$ (d) $y = x^2 + 5x - 7$

(e) $y = 31x^4 + 4x^3 - 2x^2 + x - 1$

Não é paradoxo dizer que nos nossos
momentos de inspiração mais teórica,
podemos estar o mais próximo possível
de novas aplicações mais práticas.

Whitehead

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA
CURSO DE ECONOMIA

UNIDADE DE ESTUDO Nº 09

ELEMENTOS DE ECONOMIA MATEMÁTICA - I

ALUNO(A): ______________________________

Recife, 14 de outubro de 1982 - GRUPO: ________ LETRA: ________

ASSUNTOS: a) Teorema dos valores extremos.

b) Teorema de Rolle.

c) Teorema dos valores média.

d) Máximos e mínimos relativos através da derivada primeira.

OBJETIVOS: O aluno que entender esta unidade de estudo, deverá sem o uso de livros ou notas de aulas, ser capaz de:

a) Determinar o ponto de máximo ou ponto de mínimo para uma dada função definida em um intervalo dado.

b) Usar o teorema de Rolle para determinada função dada.

c) Dado uma função, encontrar os valores que satisfazem o teorema do valor médio.

d) Fazer o gráfico de uma função utilizando os sinais da derivada primeira.

E X E R C Í C I O S

1 - Aplicar o teorema de Rolle às funções definida por:

a) $f(x) = x^2 - 3x$ no intervalo $[0, 3]$

b) $f(x) = x^3 - 4x$ no intervalo $[-2, 2]$

c) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2$ no intervalo $[0, \sqrt{6}]$

d) $f(x) = x^2 - 5x + 6$ no intervalo $[2, 3]$

e) $f(x) = x^2 - 6x + 5$ no intervalo $[1, 5]$

2 - Encontrar todos os valores de x_o entre a e b que satisfaçam a equação

$$f'(x_o) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

a) $f(x) = \frac{x - 1}{x + 0}$, $a = 0$, $b = 3$

(b) $f(x) = \frac{2x + 3}{3x - 2}$, $a = 1$, $b = -4$

c) $f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x + 5}$, $a = -1$, $b = 4$

(d) $f(x) = x^3 + x^2 - x$, $a = -2$, $b = 1$

(e) $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$, $a = 1$, $b = 3$

3 - Encontrar o ponto de máximo e o ponto de mínimo para as funções abaixo, nos intervalos indicados:

a) $f(x) = 3x^2 + 6x + 0$ no intervalo $0 \leq x \leq 3$

b) $f(x) = 5x^2 - 3x + 2$ no intervalo $1 \leq x \leq 5$

c) $f(x) = x^2 - 4x + 4$ no intervalo $0 \leq x \leq 4$

d) $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$ no intervalo $\frac{1}{2} \leq x \leq 3$

e) $f(x) = 3x^2 - 11x + 6$ no intervalo $0 \leq x \leq 3$

4 - Estudar a derivada da função abaixo e utilizar o resultado como ajuda para fazer o gráfico da função no intervalo $(-\infty, +\infty)$

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x$

b) $f(x) = -2x^2 + 5x - 6$

c) $f(x) = -x^2 + 3x + 4$

d) $f(x) = x^2 + 3x - 8$

e) $f(x) = x^2 + 4x + 2$

5 - Defina ou enuncie, exemplificando:

a) Teorema do valor médio.

b) Teorema de Rolle.

c) Função crescente ou função decrescente em um intervalo.

d) Máximo e mínimo relativos.

e) Teorema do valores extremos.

+ O abandono da Matemática traz dano a todo o conhecimento, pois aquele que a ignora não pode conhecer as outras ciênciais ou as coisas deste mundo.

Roger Bacun

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA
CURSO DE ECONOMIA   UNIDADE DE ESTUDO Nº 10
ELEMENTOS DE ECONOMIA MATEMÁTICA - I
ALUNO(A): ____________________
Rec Fe,02 de junho de 1981 - GRUPO: ______ LETRA: ______

ASSUNTO: a) Lei de Pareto.
b) Lucro máximo.
c) Custo total, médio e marginal.
d) A função exponencial.
e) A função logaritímica.

OBJETIVOS: No final desta unidade, o aluno estará apto a:

a) Dado a lei de Pareto de distribuição de rendas, determinar os elementos concernentes a referida lei.
b) Dado uma função logaritímica, determinar sua derivada.
c) Dada uma função exponencial, determinar sua derivada.
d) Sabendo uma função de demanda e uma função custo, determinar o lucro máximo.
e) Dado uma função de custo, determinar a função de custo médio e marginal.

EXERCÍCIOS:

1 - A lei de Pareto de distribuição de rendas para um grupo particular é:

$$N = \frac{8 \times 10^8}{x^{3/2}}$$

a) i) Quantas pessoas tem rendas acima de cr$ 1.600,00?
ii) Quantas tem renda entre cr$ 1.600,00 e cr$ 3.600,00?
iii) Qual a renda mais baixa das 800 pessoas que possuem rendas mais altas?

b) $N = \frac{1,9 \times 10^{12}}{x^{1,70}}$

i) Quantas pessoas tem renda acima de cr$ 50.000?
ii) Quantas tem renda entre cr$ 25.00 e cr$ 50,00?
iii) Qual é a renda mais baixa do milhão de pessoas que tem as rendas mais altas?

c) $N = \frac{100.000}{x^2}$

i) Quantas pessoas tem rendas acima de cr$ 15.000?
ii) Quantas pessoas tem renda entre cr$ 50.000 e cr$ 75.00?
iii) Qual a ren mais baixa das 5 pessoas que têm as rendas mais al

d) $N = \dfrac{32 \times 10^{10}}{x^{1/3}}$

i) Quantas pessoas tem renda entre cr$ 125.000 e cr$ 1.000.000?

ii) Qual é a renda mais baixa das 200 pessoas que posauem as rendas mais altas?

e) $N = \dfrac{6 \times 10^{9}}{x^{3/2}}$

i) Quantas pessoas tem renda acima de cr$ 2.500?

ii) Quantas tem renda entre cr$ 2.500,00 e cr$ 10.000,00?

iii) Qual a renda mais baixa das 6 pessoas que tem as rendas mais alt

2 - Ache a primeira derivada de cada uma das funções:

a) $y = \log(1 - 2t)$

b) $y = \log_a(a^2 - x^2)^3$

c) $y = \log(x^3 - 3x)^{1/3}$

d) $y = \log(x^3 + x^2)^6$

e) $y = \log(x - x^2)^4$

3 - Ache a primeira derivada de cada uma das seguintes funções:

a) $y = e^x \ln x$ (b) $y = e^{\ln x}$ (c) $y = e^{-1/x}$

d) $y = x^{e^{x^2-1}}$ (e) $e^{\ln(x + 3)}$

4 - Para cada um dos seguintes pares de funções de demanda e de custo (médio ou total) ache o lucro máximo que um monopolista poderá obter:

a) $p = 24 - 2q$ e $\bar{Q} = 6 - q$ ($\bar{Q}$ = custo médio)

b) $p = 26 - 3q^2$ e $Q = 3q^2 - 2q + 14$

c) $p = 12 - 4q$ e $Q = 8q - q^2$

d) $p = 33 - 5q^2$ e $\bar{Q} = 3q^2$ ($\bar{Q}$ = custo médio)

e) $p = 72 - 7q^2$ e $\bar{Q} = q^2$ ($\bar{Q}$ = custo médio)

- Para cada uma das funções de custo total, determine o custo médio (($\bar{Q}$ (x)) e o custo marginal:

a) $Q(x) = x^2 + 3x - 5$

b) $Q(x) = x^3 + 3x^2 - 7x$

c) $Q(x) = x^4 - 4x^2 + 3x$

d) $Q(x) = x^5 - 4x^3 + 2x^2 - 5x$

e) $Q(x) = x + 5$

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

CURSO DE ECONOMIA — UNIDADE DE ESTUDO Nº 11

ELEMENTOS DE ECONOMIA MATEMÁTICA - I

ALUNO(A): ______________________

Recife, 08 de junho de 1981 - GRUPO: __________ LETRA: ________

ASSUNTOS: a) Diferencial.

b) Integral indefinida.

c) Aplicações de integral indefinidas a economia.

OBJETIVOS: Apos resolver todas as exercícios perguntas nesta unidade, o aluno estará apto a:

a) Dado uma integral indefinida, determinar a sua função.

b) Dado a declividade de uma curva e um ponto, determinar a equação da reta que passa pelo ponto.

c) Conhecendo a receita marginal, determinar a função de receita total e a função de demanda.

EXERCÍCIOS:

1 - Calcule as seguintes integrais:

a) $\int (x^2 - \sqrt{x} + 4)\, dx$

b) $\int (x^3 + 2x^2 - 4x + 5)\, dx$

c) $\int (\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 1)\, dx$

d) $\int (5x^3 - 4x^2 + 7x - 10)\, dx$

e) $\int (6x^2 + 3x + 1)\, dx$

2 - Determine a equação da curva que tem a declividade:

a) $\frac{dy}{dx} = 2x - 5$ e passa pelo ponto (5, 4)

b) $\frac{dy}{dx} = 5x - 2$ e passa pelo ponto (1, 3)

c) $\frac{dy}{dx} = 3x$ e passa pelo ponto (2, 5)

d) $\frac{dy}{dx} = x + 1$ e passa pelo ponto (3, 6)

e) $\frac{dy}{dx} = 3x - 2$ e passa pelo ponto (2, 4)

3 - Calcule as seguintes integrais:

a) $\int \frac{3x\,dx}{\sqrt{1 - x^2}}$ (b) $\int \frac{(x + 1)\,dx}{\sqrt[3]{x^2 + 2x + 2}}$ (c) $\int (5x^2 - 3)^{10} x\,dx$

(d) $\int x\sqrt{2x^2 + 1}\,dx$ (e) $\int \frac{(1 - 2x)^2 dx}{\sqrt{2x}}$

4 - a) Se a receita marginal é $R' = 15 - 9x - 3x^2$, ache as funções de receita e de demanda.

b) Se a receita marginal é $R' = \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x}$, ache as funções de receita e de demanda.

c) Se a receita marginal é $R' = 10 - 5x$, ache as funções de receita e de demanda.

d) Se a receita marginal é $R' = 20 - 3x^2$, ache as funções de receita e de demanda.

e) Se a receita marginal é $R' = 7 - 2x^2$, ache as funções de receita e de demanda.

5 - Determine a diferencial das funções:

a) $y = (2x^2 + 3)^5$

b) $y = \sqrt{x^2 - 25}$

c) $y = \sqrt[3]{x^3 - 27}$

d) $y = e^{(2x + 3)}$

e) $y = e^{(5x^2 + 5x - 2)}$

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA
CURSO DE ECONOMIA

UNIDADE DE ESTUDO Nº 12

ELEMENTOS DE ECONOMIA MATEMÁTICA - I
ALUNO(A): ______________________________
Recife, 16 de junho de 1981 - GRUPO: ______ LETRA: ______

ASSUNTOS: a) Integral definida
b) Regra de Barrow
c) Cálculo de áreas por integração
d) Excesso do consumidor
e) Excesso do produtor.

OBJETIVOS: Após resolver todos os exercícios propostos nesta unidade, o aluno estará apto a:

a) Dado uma integral definida do tipo apresentado na unidade, determinar o seu valor aplicando a regra de Barrow.
b) Dado uma função calcular a área compreendida entre a função o eixo dos x e retas estabelecidas.
c) Dado uma função de demanda e um ponto x_0, determinar o excesso do consumidor.
d) Dado funções de demanda e oferta, determinar o excesso do consumidor e do produtor.

EXERCÍCIOS:

1 - Calcular as integrais definidas:

a) $\displaystyle\int_0^4 \frac{x\,dx}{x^2+5}$ (b) $\displaystyle\int_1^4 (\sqrt{x}-x)^2\,dx$ (c) $\displaystyle\int_0^2 (4x+1)^{1/2}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_1^8 \left(1+\sqrt[3]{x}\right)dx$ (e) $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)dx$

2 - a) Ache a área limitada pelo parábola $y = x^2 - 7x + 6$, o eixo dos x e as retas $x = 2$ e $x = 6$.

b) Achar a área situada abaixo da curva $y = x^3 + 3x^2$, o eixo dos x e as ordenadas $x = 0$ e $x = 2$.

c) Achar a área sob a curva $y = 2x + x^2 - x^3$, compreendida entre o eixo dos x e as retas $x = -1$ e $x = 1$.

d) Encontre a área da curva $y = x^3 - 4x$, limitada pelo eixo dos x.

e) Achar a área situada acima do eixo dos x e sob a parábola $y = 4x - x^2$.

Se a função de demanda é $y = \sqrt{9 - x}$ e $x_o = 5$, ache o excesso de consumidores.

Se a função de demanda é $y = 39 - x^2$, ache o excesso de consumidores se $x_o = 5/2$

Se a função de demanda é $y = 45 - x^2$ determine o excesso de consumidores se $x_o = 5$.

Se a função de demanda é $y = 85 - 4x - x^2$, ache o excesso de consumidores quando $x_o = 5$.

Se a função de demanda é $y = 20 - 4x^2$, ache o excesso de consumidores quando $x_o = 3$.

A quantidade demandada e o preço correspondente sob uma competição pura são determinadas pela função da demanda e da oferta $y = 16 - x^2$ e $y = 4 + x$, respectivamente. Determine o excesso de produtores correspondentes.

A quantidade demandada e o preço correspondente sob forma de competição pura são determinados pela função da demanda e da oferta $y = 36 - x^2$ e $y = 6 + \frac{x^2}{4}$ respectivamente. Determine o excesso de produtores correspondentes.

Se a função de demanda é $y = 16 - x^2$ e a função de oferta é $2x + 1$, determine o excesso de produtores.

A função de demanda é $y = 20 - 3x^2$ e a função de oferta é $y = x^2$, determine o excesso de produtores.

Se a lei da oferta é $y = (x + 2)^2$, e o preço é fixado em $y_o = 25$, ache o excesso de produtores.

Se a função de receita marginal é: $R'(x) = 12 - 8x + x^2$ determine as funções:

i) Receita total (ii) demanda (iii) qual a limitação a ser imposta a x.

Se a receita marginal é dada pela função $R' = 15 - 9x - 3x^2$ ache as funções da receita e da demanda.

Se a receita marginal é $R' = \frac{3}{x^2} - x$, determine as funções da receita e da demanda se $R(1) = 6$

Se a receita marginal é $R' = 20 - 3x^2$, ache as funções da receita total e da demanda.

Se a receita marginal é $R' = 20 - 3x^2$, ache as funções de receita total e da demanda.

EXERCÍCIOS ESCOLAR INDIVIDUAL

NIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
EPARTAMENTO DE ECONOMIA (DR)
URSO DE ECONOMIA
º EXERCÍCIO DE ELEMENTOS DE ECONOMIA MATEMÁTICA - I
LUNO(A)____
ecife, 14 de abril de 1981 - GRUPO:__________

O T A:__________

- Determine os intervalos que satisfazem a desigualdade:

$$\left| \frac{x + 3}{x - 5x} \right| \leq 2$$

- Para o par de pontos (-1,-2) e (4, 1), determine:

  i) a declividade da reta que passa pelos pontos.
  ii) a equação da reta que passa pelos pontos.
  iii) faça o gráfico da reta.

- A equação de demanda de um artigo é $x = A - By$, onde A e B são constantes positivas, y representa o preço e x representa a quantidade demandada.

  i) determine o preço se a quantidade demandada é $A/3$.
  ii) determine a quantidade demandada se o artigo for liberado gratuitamente.
  iii) qual o preço mais alto que poderá ser pago por este artigo.

- Encontre o centro, o eixo maior, o eixo menor, e faça um esboço de gráfico da elipse de equação:

$$6x^2 + 9y^2 - 24x - 54y + 51 = 0$$

- Defina equilíbrio de mercado e exemplifique graficamente abordando casos que tenha significância e não significância para economia.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA
CURSO DE ECONOMIA - 1º EXERCÍCIO
ELEMENTOS DE ECONOMIA MATEMÁTICA - I
ALUNO(A):
Recife, 14 de abril de 1981 - GRUPO:

---

1 - Determine os valores de x, em caso de existirem, para os quais é válida a desigualdade:

$$\frac{2-x}{x+1} < \frac{3}{2}$$

---

2 - Para o par de pontos (-2,-3) e (-5, 6), determine:

i) a declividade da reta que passa pelos pontos.
ii) a equação da reta que passa pelos pontos.
iii) faça o gráfico da reta.

---

3 - A equação de oferta de um artigo é $x = ay - b$, onde a e b são constantes positivas. (y representa o preço e x a quantidade demandada.

i) encontre o preço se a quantidade oferecida é $5a - b$.
ii) encontre a quantidade oferecida se o preço é $5b/a$.
iii) qual o preço mais baixo pelo qual este artigo pode ser oferecido?

---

4 - Encontre o centro, o eixo maior, eixo menor, e faça um esboço do gráfico da elípse da equação:

$$5x^2 + 3y^2 - 3y - 12 = 0$$

---

5 - Defina parábola e mostre em um sistema de eixo cartesiano, o foco, a reta diretriz, sua equação canonica no caso mais geral.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA
CURSO DE ECONOMIA (AD)
3º EXERCÍCIO DE ELEMETOS DE ECONOMIA MATEMÁTICA - I
ALUNO(A): ______________________________
Recife,25 de junho de 1981 - GRUPO: ________

N O T A: ________

---

1 - Calcule a integral definida:

$$\int_{1}^{8} \left(1 + \sqrt[3]{x}\right) dx$$

---

2 - Se a função de demanda é $y = 16 - x^2$ e a função de oferta é $2x + 1$, determine o excesso de produtores.

---

3 - Se a receita marginal é dada pela função $R' = 15 - 9x - 3x^2$, determine as funções de receita e da demanda.

---

4 - Para as funções de demanda e de custo, determine o lucro máximo que um monopolista poderá obter:

$$p = 12 - 4q \quad e \quad Q = 8q - q^2$$

---

5 - A lei de Pareto de distribuição de rendas para um grupo particular é:

$$N = \frac{100.000}{x^2}$$

i) Quantas pessoas tem rendas acima de cr$ 15.00 ?
ii) Quantas pessoas tem rendas entre cr$ 50.00 e cr$ 75.00 ?
iii) Qual a renda mais baixa das 5 pessoas que tem as rendas mais altas ?

---

duração: 2 horas

IV_RSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
PARTAMENTO DE ECONOMIA
RSO DE ECONOMIA (BD)

EXERCÍCIO DE ELEMENTOS DE ECONOMIA MATEMÁTICA - I

UNO(A): ____________________

cife, 25 de junho de 1981 - GRUPO: ________

O T A: ________

- A lei de Pareto de distribuição de rendas para um grupo particular é:

$$N = \frac{6 \times 10^9}{x^{3/2}}$$

i) Quantas pessoas tem rendas acima de cr$ 2.500,00 ?
ii) Quantas tem rendas entre cr$ 2.500,00 e cr$ 10.000,00
iii(Qual a renda mais baixa das 6 pessoas que tem as rendas mais altas?

- Para as funções de demanda e de custo, determine o lucro máximo que um monopolásta poderá obter:

$$p = 26 - 3q^2 \quad \text{e} \quad Q = 3q^2 - 2q + 14$$

- Se a receita marginal é $R' = 20 - 3x^2$, ache as funções da receita total e da demanda.

- A quantidade demandada e o preço correspondente sob uma competição pura são determinadas pela função da demanda e da oferta:

$$y = 16 - x^2 \quad \text{e} \quad y = 4 + x$$

Determine o excesso de produtores correspondentes.

- Calcule a integral definida

$$\int_{-3}^{-1} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) dx$$

---

duração: 2 horas

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA
CURSO DE ECONOMIA (BD)
3º EXERCÍCIO DE ELEMENTOS DE ECONOMIA MATEMÁTICA - I
ALUNO(A): ____________________
Recife, 25 de junho de 1981 - GRUPO: ________

N O T A: ________

1 - A lei de Pareto de distribuição de rendas para um grupo particular é:

$$N = \frac{6 \times 10^9}{x^{3/2}}$$

i) Quantas pessoas tem rendas acima de cr$ 2.500,00 ?
ii) Quantas tem rendas entre cr$ 2.500,00 e cr$ 10.000,00
iii(Qual a renda mais baixa das 6 pessoas que tem as rendas mais altas?.

2 - Para as funções de demanda e de custo, determine o lucro máximo que um monopolista poderá obter:

$$p = 26 - 3q^2 \quad \text{e} \quad Q = 3q^2 - 2q + 14$$

3 - Se a receita marginal é $R' = 20 - 3x^2$, ache as funções da receita total e da demanda.

4 - A quantidade demandada e o preço correspondente sob uma competição pura são determinadas pela função da demanda e da oferta:

$$y = 16 - x^2 \quad \text{e} \quad y = 4 + x$$

Determine o excesso de produtores correspondentes.

5 - Calcule a integral definida

$$\int_{-3}^{-1} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) dx$$

duração: 2 horas

IVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
PARTAMENTO DE ECONOMIA
RSO DE ECONOMIA
OVA DE ELEMENTOS DE ECONOMIA MATEMÁTICA - I - NOTURNO
cife,07 de julho de 1981
JNO(A):____

) T A:__________

Determine a equação da reta que passa pelo ponto (3, 5) e tem declividade 2.

Determine os valores de x para os quais a desigualdade é verdadeira:

$$3x - 5 \leq 7$$

Para as retas abaixo, determine qual a curva de oferta e demanda, e faça o gráfico:

$$y = 10 - 2x \quad e \quad y = \frac{3}{2}x + 1$$

Determine o ponto de equilíbrio de mercado e faça o gráfico para as curvas:

$$x + y = 5 \qquad e \qquad 2x - y = 5,5$$

Defina parábola.

Coloque a equação abaixo na forma canônica, determine o tipo de cônica e faça seu gráfico:

$$y^2 - 8y + 17 = 0$$

Determine a derivada da função:

$$y = (3x^2 + 5x - 2)^{10}$$

---

8 - Ache o lucro máximo que um monopolista poderá obter, para as funções de demanda e custo:

$$p = 24 - 2q \quad e \quad Q = 6q - q^2$$

---

9 - Defina derivada de uma função em um ponto x_o e faça a interpretação gráfica.

---

10 - Calcule a integral

$$\int_0^2 (3x^2 - 5)x\,dx$$

---

duração: 2 horas

ROTEIRO DE AULAS

ROTEIRO DE AULA PARA A UNIDADE DE ESTUDO NÚMERO UM (1)

ASSUNTOS - Intervalos
Desigualdades
Valor Absoluto
Relações e Funções
Gráfico de Funções
Funções Econômicas

OBJETIVOS -

Ao fim desta Unidade de Estudos o aluno deverá, sem o uso de livros ou notas de aulas, ser capaz de :

a) Dado uma desigualdade, determinar o seu conjunto solução
b) Determinar o conjunto solução de uma desigualdade, envolvendo a noção de valor absoluto
c) Dado uma função, determinar (desenhando) seu gráfico
d) Determinar a função composta de duas funções dadas
e) Dado uma função, determinar a função inversa da mesma
f) Definir e fazer representação gráfica das curvas de demanda e oferta
g) Definir as funções - Receita total, Receita média, a custo médio, Custo total e a Função lucro.

1

1.1 - Variável e intervalo.

Variável é um símbolo que representa indistintamente cada elemento de um conjunto de números.

Quando os elementos do conjunto pertencem aos números reais ela é chamada de VARIÁVEL REAL. É convencional representarmos a variável real pelas letras x,y ou t.

Quando os elementos pertencentes ao conjunto são números complexos ela será uma VARIÁVEL COMPLEXA.

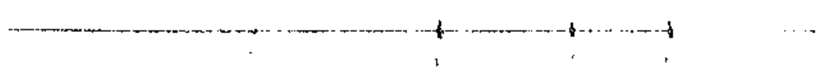
O conjunto de valores aos quais a variável representa,chamamos de DOMINIO da variável.

Se chamarmos "x" uma variável real e dois números tambem reais "a" e "b", sendo $a < b$ então quando $a < x < b$ teremos um INTERVALO da variável (fig.1-01).

Os números "a" e "b" são denominados de estremidades do intervalo.

O intervalo indica ainda o DOMINIO da variável.

Fig. 1-01



Inicialmente consideremos dois tipos de intervalos ABERTO e FECHADO.

O intervalo é chamado aberto quando os elementos extremos não pertencem ao intervalo,isto é, estes elementos não fazem parte do domínio da variável.

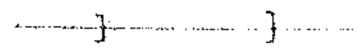
O intervalo é fechado quando os valores extremos do intervalo pertencem ao mesmo intervalo. Assim para :

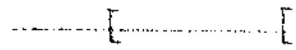
$a < x < b$ int. ABERTO ———]—————[———

$a \leq x \leq b$ int. FECHADO ———[—————]

que tambem poderá ser indicado pela notação $]a,b[$ e $[a,b]$.

Ainda podemos considerar intervalos SEMI-ABERTO e SEMI-FECHADO os seguintes intervalos:

$a < x \leq b$ ou $]a,b]$ 

$a \leq x < b$ ou $[a,b[$ 

Observe, ainda que os intervalos :

$a < x < a$ é VAZIO

$a \leq x \leq a$ é o elemento $\{a\}$

Na representação da fig.1-01 o intervalo

$$a < x < b$$

é indicado pelo conjunto de todos os pontos do segmento finito ab cujos extremos têm as abscissas <u>a</u> e <u>b</u> .

Diz-se que o conjunto de todos os números reais "x" tais que $a < x$ formam um intervalo infinito $a < x < +\infty$ e analogamente o conjunto de todos os números $x < b$ formam o intervalo $-\infty < x < b$.

Todos os números reais estão inclusos no intervalo $-\infty < x < +\infty$.

Geometricamente representa o primeiro uma semi-reta real F à direita da origem <u>a</u> , e o segundo uma semi-reta à esquerda de b e o terceiro toda a reta. figs. 1-02 , 1-03 e 1-04.

Fig. 1-02

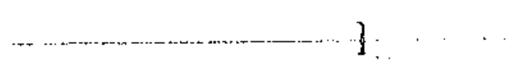


Fig.1-03

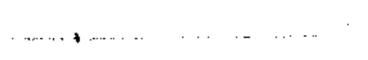


Fig.1-04

Quando x só admite um único valor indicado pelo conjunto $\{ x \}$, isto é, a quantidade se mantem fixa, chamamos de CONSTANTE.

A constante pode ser ABSOLUTA ou NUMÉRICA, quando tem o mesmo valor em todos os problemas e constante ARBITRÁRIA ou PARÂMETRO quando ela é constante para um determinado problema, mas pode adquirir valores diferentes em outros problemas.

<u>Exemplo 1</u> : Na equação da reta

$$ax + by + c = 0$$

a, b, c são parâmetros e x e y são variáveis.

<u>Exemplo 2</u> : Na equação da parabola

$$y^2 = 2px$$

é uma constante numerica , p é uma constante parametrica(parâmetro) x é a variável.

<u>Exemplo 3</u> : Na equação da área do circulo

$$A = \pi r^2$$

é uma constante numerica cujo valor aproximado é 3,1416 e r é o raio do circulo (variável)

Usualmente representamos as constantes pelas primeiras letras do alfabeto a,b,c... .

Tomaremos como representação para a variável em problemas econômicos a primeira letra da palavra que ela indica,como preço (p) , quantidade(q), utilidade(u), custo (c) , renda(r) , etc.

- Desigualdades.

Dados dois números <u>a</u> e <u>b</u> , temos :

i) se <u>a</u> é menor do que <u>b</u> , então a-b é negativo e indicamos :

$a < b$ ou $a-b < 0$

ii) se <u>a</u> é maior do que <u>b</u> , então a − b é positivo $a-b < 0$.

Os sinais > e < são chamados sinais de desigualdade.

Na representação sobre o eixo,no caso de $a < b$, então <u>a</u> está situado a direita de <u>b</u> (Fig 1-04a).

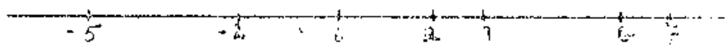


Fig.1-04

Assim : $a < b$ $3 < 7$ $-2 < 3$ $-5 < -2$

$3 > -2$ $-2 > -5$ $3 > -5$

Para as desigualdades,observa-se as seguintes regras :

1. Se $a \neq b$ então $a < b$ ou $a > b$
2. Se $a < b$ e $b < c$ então $a < c$
3. Se $a < b$ e <u>c</u> é um número real,então $a+c < b+c$
4. Se $a < b$ e $c > 0$, então $ac < bc$
5. Se $a < b$ e $c < 0$, então $ac > bc$
6. Se $0 < a < b$, então $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0$ onde a e b são diferentes de zero .

Podemos combinar os sinais de igualdade e desigualdade,assim :

$a > b$

significa que $\underline{a}$ é maior ou igual a $\underline{b}$.

Do mesmo modo, escrevemos :

$$a < b \leqslant c$$

para indicar que $\underline{b}$ é maior do que $\underline{a}$, mas é menor ou igual a $\underline{c}$.

VALOR ABSOLUTO de um número real $\underline{a}$ é definido por :

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geqslant 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

a notação $|a|$ se lê " valor absoluto de a" . Assim, podemos escrever:

$|3| = 3$ $\qquad |-5| = 5$ $\qquad \left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$

De acordo com a definição, podemos facilmente estabelecer as regras :

1. $|a| = 0$ somente quando $a = 0$
2. $|a| = |-a|$
3. $|ab| = |a| \cdot |b|$
4. $|a+b| \leqslant |a| + |b|$
5. $|a+b| \geqslant |a| - |b|$

Ao operarmos com igualdades e desigualdades convém lembrar que o quociente $\frac{a}{b}$ não é definido quando $b=0$. Em outras palavras não podemos dividir por zero e não tem significado $\frac{a}{0}$. Entretanto, se "a" é um número real, o produto $0.a$ é definido e igual a zero.

3 - Função .

Suponhamos que A e B sejam conjuntos de números reais.

Uma função é uma associação ou aplicação de cada elementos de um conjunto A dado com um elemento de outro conjunto B.

O conjunto A é chamado de DOMINIO da função D(f). Os elementos de B que estão associados a um elemento de A constitue um outro conjunto' chamado de IMAGEM da função e representado por f(A) ou simplesmente ' f.A.

A fig. 1-05 esquematiza a definição.

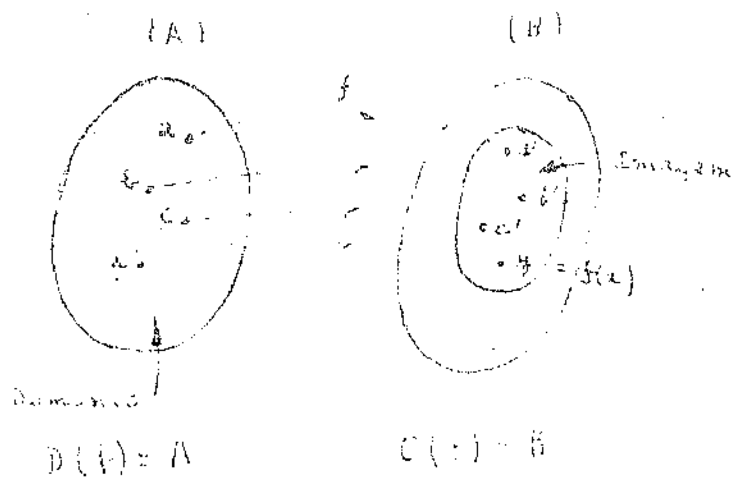


Fig. 1-05

Uma função é indicada por f,g,F ou G.

Pela definição dada, verifica-se que uma função f é um conjunto de pares ordenados (x,y) sendo x um elemento do conjunto domínio A e y elemento do conjunto B chamado de conjunto imagem, de modo que não haja dois pares com o mesmo primeiro elemento, representados na fig 1-05 por areas achureadas (reticuladas).

Para cada x em A, indicaremos a imagem por f(x).

Este valor é representado por y em B, isto é, $y = f(x)$.

A cada número real x associado ao seu quadrado x^2, teremos uma função que indicamos por f, então

$$y = f(x) = x^2$$

Ou então podemos dizer que a função f é definida pela equação da forma :

$$y = x^2$$

Quando o dominio não está indicado, consideramos como sendo o conjunto de todos os reais. Quando entretanto desejamos restringir o dominio, então indicaremos .

Assim : $y = x^2$ para $1 < x < 5$

indica uma função cujo dominio é o intervalo $[1,5]$.

A definição da função por uma formula, lhe determina o dominio mais amplo, assim a equação

$$y = +\sqrt{x+2}$$

(uma função só está definida quando conhecemos o dominio)

para os numeros reais, teria o dominio dado por $x+2 \geq 0$, consequentemente $-2 \leq x \leq 0$ ou o intervalo $[-2,0]$

Na pratica no decorrer deste livro indicaremos uma função por $y = f(x)$ ou $f(x)$ ou ainda $y(x)$.

O primeiro elemento dos pares ordenados pertencente a f chamamos de VARIAVEL INDEPENDENTE da função e o segundo elemento y de VARIAVEL DEPENDENTE.

O gráfico de uma função real ou representação gráfica, consiste na indicação de todos os pares (x,y) no plano cartesiano R^2 que satisfazem a condição de definição da função.

O gráfico de uma função é tambem chamado de CURVA representativa da função.

Como cada valor de x (abscissa) existe um único y(ordenada), toda reta vertical no plano R^2 encontra a curva da função somente num ponto.

Exemplo 1 : Fazer o gráfico da curva que representa a função definida por :

$$y = x^2$$

$$f(x) = x^2$$

obtem-se procurando grafar todos os pares (x,x^2) num sistema de eixos coordenados.

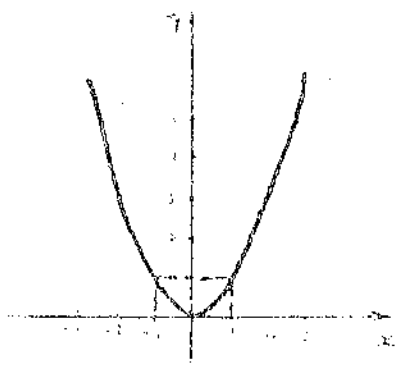


Fig. 1-06

Atribuindo valor inteiros aos elementos do par (x,x^2) obtemos a tabela :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

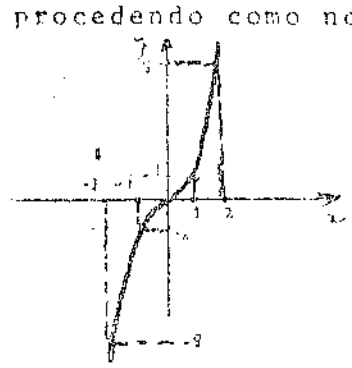
Os pares obtidos$(-3,9)(-2,4),(-1,1),(0,0)(1,1)(2,4)(3,9)$ correspondem a pontos do plano por onde a curva deverá passar (fig.1-06) . Quanto maior o número de pares obtidos melhor as condições para confecção do gráfico.Este é o procedimento do traçado de uma curva por pontos.

Quando o gráfico de curvas com maior precisão,no decorrer do curso abordaremos outras técnicas que nos permitirão um traçado com maior segurança.

Exemplo 1 : Fazer o gráfico da função definida por :

$$y = x^3$$

Os pontos de seu gráfico são os pares definidos por (x,x^3) . Assim procedendo como no caso do exemplo anterior obtemos a tabela :



x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-27	-8	-1	0	1	8	27

A fig.1-07 é o gráfico de $y = x^3$, quando se escolhe os eixos coordenados e uma unidade de medida.

Fig. 1-07

Exemplo 2 : Façamos o gráfico da função definida por :

$$f(x) = |x|$$

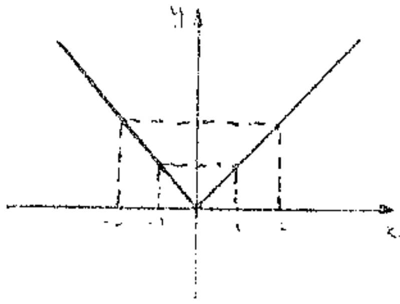
Pela definição de valor absoluto

$$|x| = \begin{cases} x & \text{quando} \quad x > 0 \\ -x & \text{"} \quad x < 0 \end{cases}$$

De modo que :

x	-2	-1	0	1	2
y	2	1	0	1	2

Assim os pares a representar são : (-2,2)(-1,1)(0,0)(1,1)(2,2)



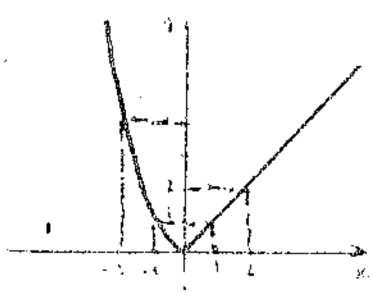
Observe que, qualquer que seja x os valores de y serão $y \geq 0$

Fig. 1-08

<u>Exemplo 3</u> : Fazer o gráfico de uma função f tal que :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{para } x < 0 \\ x & \text{para } x > 0 \end{cases}$$

A tabela dos pares ordenado seria para $x < 0$ (x,x^2) e $x > 0$ (x,x) .

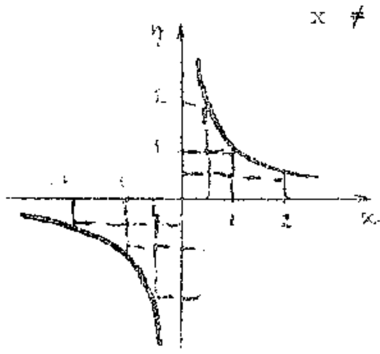


x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	9	4	1	0	1	2	3

Observa-se que para $x < 0$ no gráfico é um arco de parabola e para $x > 0$ uma semi-reta.

Fig. 1-09

<u>Exemplo 4</u> : Traçar a curva definida pela função $y = \frac{1}{x}$ onde $x \neq 0$



A tabela de pares ordenados $(x,\frac{1}{x})$ representados na fig. 1-10 é :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-1/3	-1/2	-1	-	1	1/2	1/3

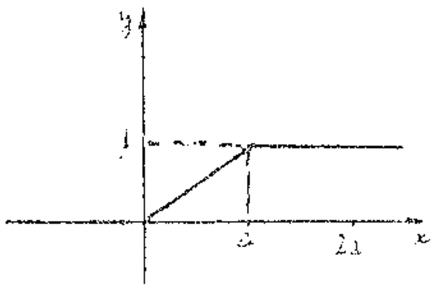
Trata-se de uma curva dividida em dois ramos, conhecida com o nome de HIPERBOLE.

Fig. 1-10

<u>Exemplo 5</u> : Fazer o gráfico da função definida pelas condi -

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad x < 0 \\ \dfrac{x}{a} & \text{para} \quad 0 < x < a \quad \text{sendo } a \\ 1 & \text{para} \quad x > a \end{cases}$$

Para a tabela de pares teríamos



x	-3	-2	-1	0	a/2	a	2a
y	0	0	0	0	1/2	1	1

Esta função tem como gráfico na fig.1-11 sendo conhecida com o nome de função de Dirac.

Fig. 1-11

1.5 - Relação

Chamaremos de relação binária ou simplesmente RELAÇÃO entre duas variáveis , uma equação como :

$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$

Nesta equação y não é função de x , nem tão pouco x função de y. Teríamos contudo duas funções de x, ou melhor duas funções de y se considerarmos y como variável independente. As duas funções são então $y_1 = +\sqrt{4-x^2}$ e $y_2 = -\sqrt{4-x^2}$. As figuras (1-12), (1-13), (1-14) , ilustram a afirmação .

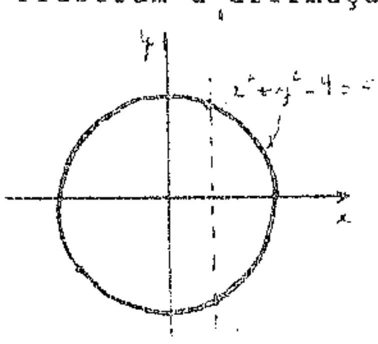


Fig-1-12

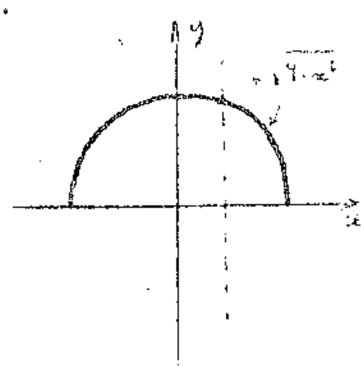


Fig-1-13

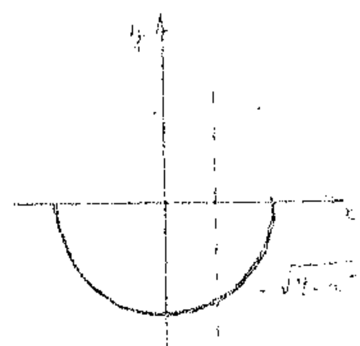


Fig.1-14

Naturalmente na relação nos pares ordenados (x,y) não estão sujeitos a condição imposta pela definição de função, isto é, para cada x existe apenas um y.

De um modo geral a coleção de pares (x,y) que satisfazem uma equação do tipo :

$$f(x,y) = 0$$

é uma relação.

A representação grafica dos pares (x,y) define a CURVA da relação.

Observe ainda uma reta paralela ao eixo dos y pode cortar a curva em mais de um ponto (Fig.1-12).

No exemplo dado existiam "implicitamente" duas funções compodo a relação. Há entretanto casos em que não existe as funções.

Exemplo : $x^2 + y^2 + 5 = 0$

$x^3 y^2 - 9 = 0$

Podemos dar como exemplo de relações desigualdades, como :

$x + 3y - 1 < 0$

$x^2 + y - 5 > 0$

Exemplo 1 : Representar grâficamente a relação definida pela equação

$$y^2 = 4x$$

Tira-se então que :

$$y = \pm \sqrt{4x} = \pm 2\sqrt{x}$$

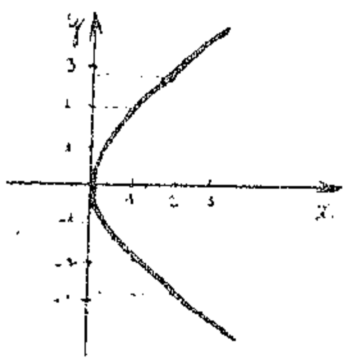


Fig-1-15

A tabela dos pares seria :

x	0	1	2	3	4	...
y	0	± 2	$\pm 2,8$	$\pm 3,5$	$\pm$ 4	...

A fig.1-15 representa a relação, que é uma curva chamada de PARABOLA. Verifica-se que só existe valores para y quando $x > 0$.

Exemplo 2 : Represente graficamente a relação definida por :

$y - x + 1 < 0$

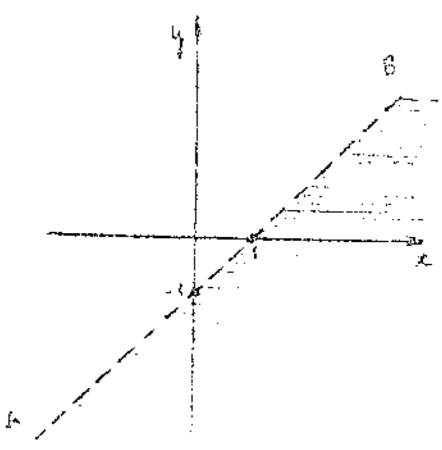


Fig.1-16

Podemos escreve-la :

$y < x - 1$

O grâfico de $y = x-1$ é a reta AB da Fig.(1-16) que divide o plano coordenado em dois semi-planos.

A solução grâfica para a inequação seria um destes semi-planos, isto é, o que está achureado. Para identificação do plano, basta verificar se o par(0,0) que é o ponto origem está no semi-plano. Para o caso $0 < -1$ é absurdo, logo o ponto de origem 0 não pertence ao semi-plano.

Exemplo 2 : Representar graficamente a relação

$|x-2| < 3$

Desta, tira-se

$x < 5$ e $x > -1$

As retas $x=5$ e $x=-1$ são verticais e os pontos que satisfazem a relação estão na faixa das duas retas Fig(1-17)

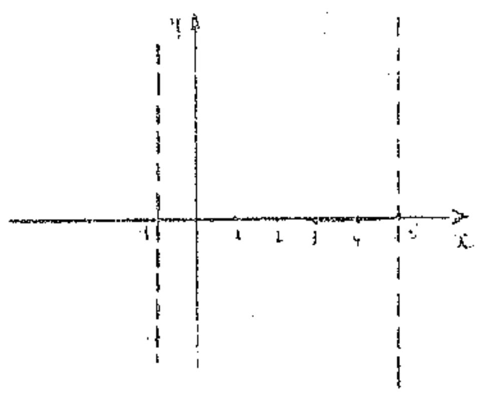


Fig.1-17

Exemplo 3 .: Fazer o gráfico de :

$|x - y| \leqslant 2$

Da relação tiramos que :

$-2 \leqslant x - y \leqslant 2$

Ainda podemos desdobrar em duas :

$-2 \leqslant x - y$ e $x - y \leqslant 2$

Ou : $y \leqslant x + 2$ e $y \geqslant x - 2$

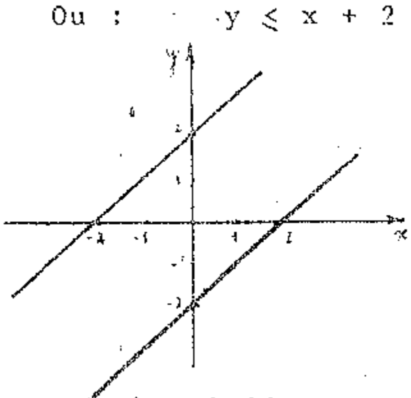


Fig. 1-18

As retas R_1 e R_2 representam $y=x+2$ e $y = x-2$ Fig.(1-18) e a região limitada entre as retas, incluindo os pontos destas retas, representam no plano a relação dada.

1.6 - Função Inversa.

Uma função f admite uma inversa f^{-1} ou FUNÇÃO INVERSA, quando esta outra função tem como imagem o domínio da primeira.

Se f é uma função tal que

$f(x) = y$

e existe uma outra função g tal que :

$g(y) = x$

então g é f^{-1} , isto é , é a inversa de f.

Exemplo, se f é definida por :

$$f(x) = 2x + 3$$

para a obtenção da inversa,temos que :

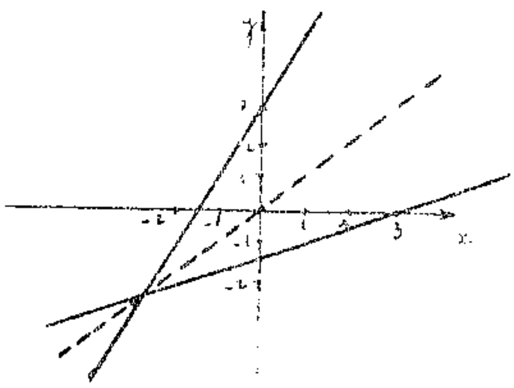
$$y = 2x + 3$$

donde $2x = y - 3$

$$x = \frac{1}{2}(y - 3)$$

Assim , a função inversa seria :

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x-3)$$



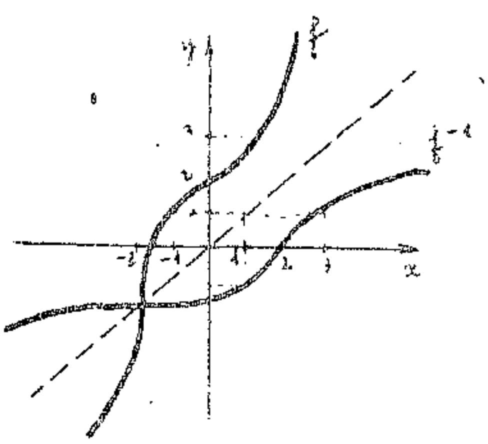
A fig.(1-19) representa duas retas,isto é,os gráficos das funções f e f^{-1}. Observe que a reta y = x bissetriz dos eixos coordenados é também bissetriz do ângulo formado pelas duas retas.

Fig.1-19

Exemplo 1 : Dada a função f pela expressão

$$y = x^3 + 2$$

Determinar sua inversa e fazer o gráfico.



Com efeito :

$$y = x^3 + 2$$

$$x^3 = y - 2$$

$$x = \sqrt[3]{y-2}$$

Assim :

$$f(x) = x^3 + 2$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$$

Na fig(1-20) estão representadas as curvas de f e f^{-1} que são simetricas com o eixo y = x.

Fig. 1-20

Exemplo 2 : Determinar a função inversa de :

$$f(x) = x^2$$

Teremos que , sendo :

$$y = x^2 \quad \text{então} \quad x = \sqrt{y}$$

Assim : $f(x) = x^2$ $\qquad f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

Verificamos então que a função proposta não admite inversa ; pois $f^{-1}(x)$ não é uma função e sim uma relação, como já foi visto na fig(1-15) . Assim podemos constatar que nem toda função admite inversa. Para que uma função tenha inversa é necessário que existam entre os elementos dos pares (x,y) uma correspondencia biunívoca, isto é , para cada x um só y, como tambem para cada y um só x.

Exemplo 3 : Procurar a inversa de f definida por :

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Com efeito :

$$y = \frac{1}{x} \qquad \text{então} \qquad x = \frac{1}{y}$$

de modo que :

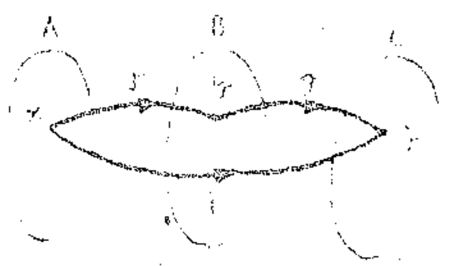
$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad e \qquad f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$$

A fig.(1-10) representa $f(x) = \frac{1}{x}$ e tambem a inversa. Observe-se que $y = x$ é um eixo de simetria da curva.

1.7 - Composição de funções

Consideremos três conjuntos A , B e C cujos elementos destes conjuntos estejam aplicados de acordo com as expressões :

$$f(x) = y \qquad e \ g(y) = z \qquad \ldots(1)$$



As duas aplicações f e g poderão ser substituidas por uma única F que define :

$$F(x) = z$$

A nova função F é chamada FUNÇÃO COMPOSTA ou COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES.

Fig. 1-21

Ora, das expressões (1) tira-se ;

$$z = g\left[f(x)\right] = F(x)$$

A função F poderá ser indicada por (gof), assim :

$$(gof)(x) = g\left[f(x)\right] = F(x)$$

Exemplo 1 : Sendo $z = 3y^2 + 1$ e $y = x+2$ achar a expressão da composta $F(x)$

Substituindo o valor de y :

$$z = 3(x+2)^2 + 1$$

Ou :

$$z = 3(x^2+4x+4) + 1$$
$$z = 3x^2 + 12 + 13$$

Então :

$$F(x) = 3x^2 + 12x + 13$$

Exemplo 2 : Sendo f e g funções definidas por $f(x)=2x+3$ e $g(x) = 5x^2$, escrever as compostas gof e fog.

Temos que :

$(gof)(x) = F(x) = 5(2x + 3)^2 = 20x^2+60x + 45$

$(fog)(x) = G(x) = 2(5x^2) + 3 = 10x^2 + 3$

Verifica-se que $(gof)(x) \neq (fog)(x)$.

Exemplo 3 : Dada a função F por $F(x) = +\sqrt{1-x^2}$ desdobrá-la numa composição de duas funções.

Com efeito, fazendo

$y = 1 - x^2$ onde $-1 \leq x \leq 1$

Temos que :

$f(x) = 1 - x^2$ para $[-1, 1]$

$g(x) = +\sqrt{y}$

Logo :

$(gof)(x) = +\sqrt{1-x^2}$

Exemplo 4 : Sendo f e g definidas por :

$f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = x + 2$

Calcular :

a) $f[g(x)]$; b) $g[f(x)]$; c) $f[g(1)]$; d) $g[f(0)]$

Com efeito :

a) $f[g(x)] = (x+2)^2-1 = x^2+4x+4-1 = x^2+4x+3$

b) $g[f(x)] = (x^2-1)+2 = x^2 + 1$

Verificamos que $f[g(x)] \neq g[f(x)]$

c) $f[g(1)] = 3^2-1 = 8$ pois $g(1) = 3$

ROTEIRO DE AULA PARA A UNIDADE DE ESTUDO
Nº DOIS (02)

ASSUNTOS:

Equação geral da reta

Equação reduzida da reta

Declividade de uma reta

Equação da reta que passa por dois pontos

Função e curva de oferta

Função e curva de demanda

Equilíbrio de Mercado

OBJETIVOS

Ao final desta Unidade de Estudo, o aluno deverá sem o uso de livros ou notas de aulas, ser capaz de:

a) Identificar uma reta pelas suas diversas equações;

b) Descrever e fazer o gráfico de curva de demanda;

c) Descrever e fazer o gráfico da curva de oferta;

d) Determinar o ponto de equilíbrio de mercado, quando conhecido as equações de oferta e de demanda.

1.8 - A linha reta

Passaremos agora a examinar algumas funções que utilizaremos com maior frequencia nos exercícios e aplicações à Economia.

Em primeiro lugar abordaremos a função cujo gráfico é uma linha reta.

A LINHA RETA no plano dos eixos coordenados é definida pela equação :

$$Ax + By + C = 0 \quad .... \qquad (1_*1)$$

para $A \neq 0$ $B \neq 0$ e $C \neq 0$ que é chamada de FORMA COMPLETA.

Ainda podemos escreve-la da forma $y = f(x)$ pois :

$$By = -Ax - C$$

Como : $B \neq 0$ $\quad y = - \frac{A}{B} x - \frac{C}{B}$

para $- \frac{A}{B} = m$ e $- \frac{C}{B} = b$ ficará:

$$y = mx + b \qquad \ldots . \qquad (1_*2)$$

A esta equação chamaremos de forma ORDINARIA ou REDUZIDA da reta.

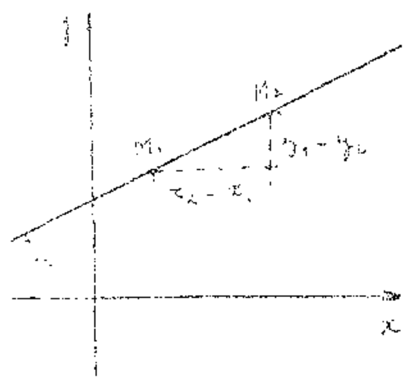


Fig. 1-22

Supondo $(x_1 y_1)$ e $(x_2 y_2)$ dois pontos de uma reta indicados por M_1 e M_2 na fig. 1-22 e como estes pontos pertencem a reta, os dois pares ordenados satisfazem a equação da reta, assim :

$$y_1 = m\, x_1 + b$$

$$y_2 = m\, x_2 + b$$

Subtraindo $y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$

Donde: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \ldots \ (1_*3)$

O valor de m quociente entre a diferença das ordenadas dos dois pontos e as abscissas é chamada de DECLIVIDADE ou COEFICIENTE ANGULAR.

O triângulo M_1PM_2 , fornece que :

$$\frac{M_2P}{M_1P} = m = tg\ \alpha$$

onde α que é o ângulo formado entre a direção positiva do eixo dos x com a própria reta é chamado de INCLINAÇÃO da reta.

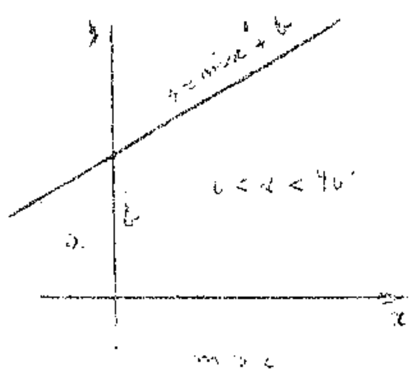


Fig.1-23 a

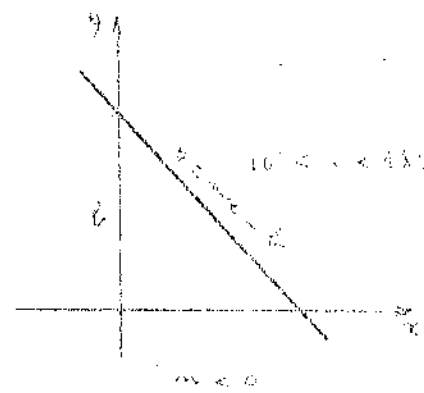


Fig.1-23b

Para $m > 0$, isto é, declividade positiva a reta terá o aspecto da fig. 1-23.a e respectivamente para $m < 0$ ela se apresentará como a fig.1-23b.

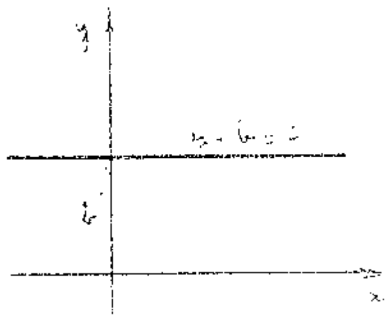
Posições da reta em relação aos eixos coordenados :

I) Reta paralela ao eixo dos x

Para $A = 0 \quad B \neq 0 \quad e \quad C \neq 0$

ou $m = 0$ $\quad y = b$

$y - b = 0$



É o caso da reta de declividade NULA fig. 1-24.

II) Reta perpendicular ao eixo dos x.

$A \neq 0 \qquad B = 0 \qquad C \neq 0$

$$Ax = C$$

Ou : $x = \dfrac{C}{A}$ $\quad$ ou $\quad x = a \qquad x - a = 0$

Fig. 1-24

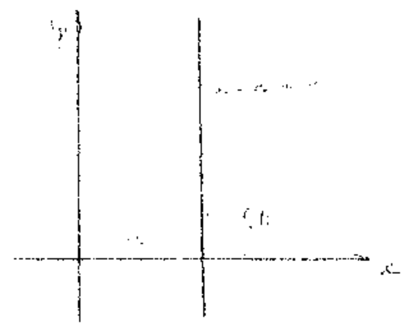


Fig. 1-25

A fig. 1-25 representa a reta nde m= indefinida.

III) Reta passando na origem os eixos coordenados.

$A \neq 0 \quad B \neq 0 \qquad C = 0$

$$Ax + By = 0$$

u : $y = mx$

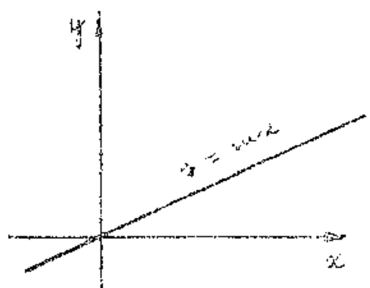


Fig. 1-26

A fig. 1-26 representa esta reta :

IV) Equação dos eixos coordenados .

$y = 0$ equação do eixo dos x.

$x = 0$ equação do eixo dos y.

Exemplo 1 : Traçar a reta definida por :

$$3x + 4y - 12 = 0$$

Interseção com o ixo dos x :

$y = 0$

$3x - 12 = 0$

$x = \dfrac{12}{3} = 4$

Ponto(4,0)

Interseção com o eixo dos y :

$x = 0$

$4y - 12 = 0$

$y = \dfrac{12}{4} = 3$

Ponto (0,3)

Marcados os pontos,obtêm a reta fig.1-27.

A declividade da reta é :

$$m = \frac{0-3}{4-0} = -\frac{3}{4}$$

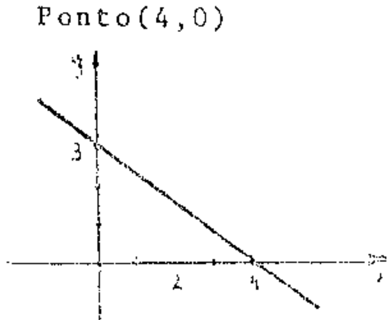
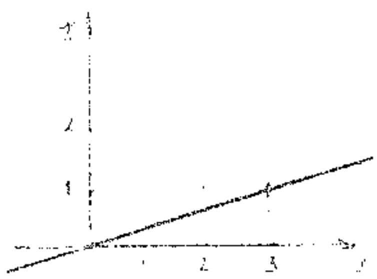


Fig. 1-27

Exemplo 2 : Traçar a reta

$$x - 3y = 0$$

A reta dada é da forma $Ax + By = 0$ logo passa na origem dos eixos coordenados.



Por isso basta marcar um ponto qualquer da reta.

Assim para $x = 3$ será $y = 1$, logo $(3,1)$ é um desses pontos. A fig.1-28 representa a reta

Fig. 1-28

Exemplo 3 : Determinar o ponto de intersecção das retas determinadas pelas equações :

$$3x - y + 6 = 0$$

$$2x + 3y + 4 = 0$$

Da primeira tiramos

$$y = 3x + 6$$

Substituindo na segunda

$$2x + 3(3x+6) + 4 = 0$$

$$2x + 9x + 18 + 4 = 0$$

$$11x = -22$$

$$x = -\frac{22}{11} = -2$$

Substituindo em (1) , vem :

$$y = 3.(-2) + 6 = -6 + 6 = 0$$

Assim o ponto de intersecção é $(-2,0)$

Façamos o gráfico das duas retas.

1ª reta :

Intersecção com o eixo dos x

$y=0 \quad 3x+6=0$

$x=-\dfrac{6}{3} = -2$

Ponto: $(-2,0)$

Intersecção com o eixo dos y

$x=0 \quad -y+6 = 0$

$y = 6$

Ponto : $(0,6)$

2ª reta :

Intersecção com o eixo dos x :

$y=0 \quad 2x+4=0$

$x=-\dfrac{4}{2} = -2$

Ponto : $(-2,0)$

Intersecção com o eixo dos y :

$x=0 \quad 3y+4=0$

$y = -\dfrac{4}{3}$

Ponto : $(0, -\dfrac{4}{3})$

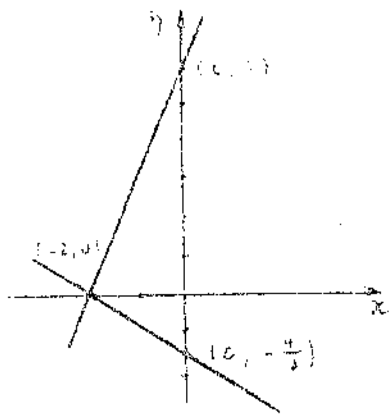


Fig. 1-29

A fig. 1-27 representa a intersecção das duas retas.

Exemplo 4 : Traçar as retas

$$2x + y - 1 = 0$$

$$4x + 2y + 3 = 0$$

1^a reta :

Intersecção com o eixo dos x :

$x=0 \qquad y-1=0$

$y=1$

Ponto: $(0,1)$

Intersecção com o eixo dos y :

$y=0 \qquad 2x-1=0$

$x=\frac{1}{2}$

Ponto : $(\frac{1}{2}, 0)$

2^a reta :

Intersecção com o eixo dos x :

$x=0 \qquad 2y + 3 = 0$

$y = -\frac{3}{2}$

Ponto : $(0, -\frac{3}{2})$

Intersecção com o eixo dos y:

$y=0 \qquad 4x + 3 = 0$

$x = -\frac{3}{4}$

Ponto : $(-\frac{3}{4}, 0)$

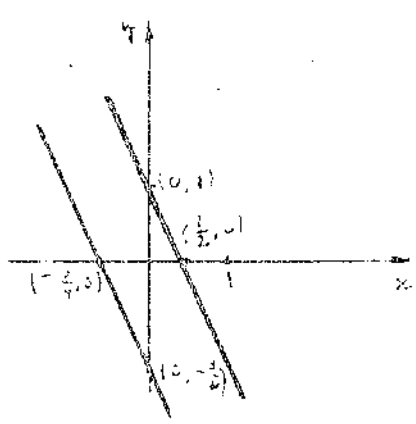


Fig. 1-30

Estas duas retas estão traçadas na fig. 1-30.

Verificamos que as retas são paralelas.

Com efeito, os coeficientes de x e y são proporcionais.

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Para que duas retas :

$$Ax + By + C = 0$$

$$A'x + B'y + C' = 0$$

sejam paralelas é necessário que :

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$$

Os parametros que aparecem nas expressões que definem estas unções são dados pelos fatores que influenciam o mercado, mas se supõe sejam constantes.

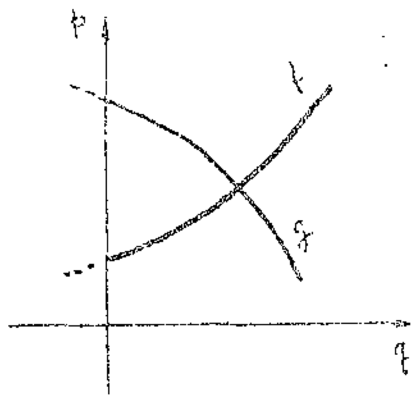


Fig.1-33

Sabe-se que nas curvas de PROCURA, quanto mais alto o preço, tanto menor será normalmente a quantidade procurada e consequentemente na maioria das curvas de procura são DECRESCENTES, isto é, quando q cresce p decresce.

No caso da curva de OFERTA, normalmente ocorre o contrário, isto é, num dado periodo os produtores estarão dispostos a fornecer maior quantidade de um bem a um preço mais alto, logo a curva é CRESCENTE. (Fig. 1-33)

No caso destas funções serem representadas por equações do 1º rau, teremos que :

$$p \geqslant 0 \qquad e \qquad q \geqslant 0$$

$p = b - mq$ ... PROCURA ... (consumidor)

$p = mq + b$ ... OFERTA ... (produtor)

Os gráficos destas retas representam a curva de PROCURA tendo declividade negativa, isto é, inclinada para baixo da esquerda para direita e a curva de OFERTA $0 < \alpha < 90^{\circ}$ com declividade positiva, reta inclinada para cima da esquerda para direita. Fig.1-34a e fig. 1-34b.

$0 < \alpha < 180^{\circ}$

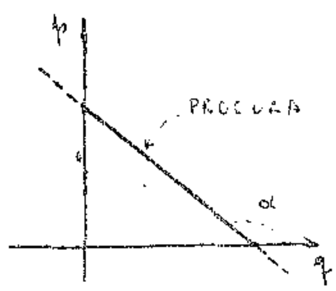


Fig. 1-34a

$0 < \alpha < 90^{\circ}$

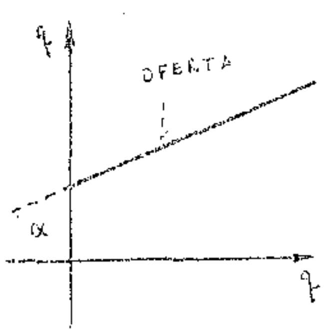


Fig. 1-34b

Em casos especiais ainda temos os gráficos das figs. 1-35 e 1-36 que podem representar demanda ou oferta.

No primeiro caso a declividade é nula $m = 0$ reta paralela ao eixo das quantidades e no segundo a reta é perpendicular ao eixo da quantidade.

Exemplo 1 : Quando o preço de um radio transitorizado é de Cr$ 50,00; 50 rádios são lançados no mercado. Quando o preço passa para Cr$ 75,00 são lançados 100 dos mesmos radios. Supondo a oferta linear qual a equação que a representa.

ou tenham a mesma declividade

$$m = m'$$

Estas retas definem um feixe dado por :

$$Ax + By + C + k(A'x + B'y + C') = 0$$

Ou :

$$R + kR' = 0$$

Onde : $R \equiv 0$ e $R' \equiv 0$ são as retas e k é um número real.

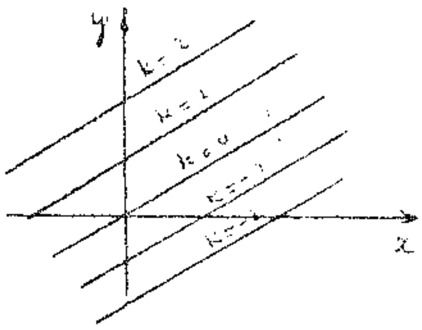


Fig. 1-31

Outro feixe de retas concorrentes fig.1-32 é definido pela equação

$$y-y_1 = m(x-x_1)$$

onde m é a declividade de cada reta do feixe.

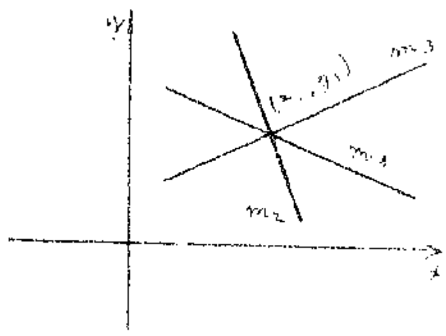


Fig. 1-32

1.9 - Aplicações da linha reta a problemas econômicos.

Nos primeiros exercícios consideraremos um mercado e duas funções chamadas de PROCURA(Demanda) e OFERTA.

Estas funções indicam uma relação entre a quantidade e o preço de um bem.

A função de PROCURA indica as quantidades de um bem que seriam procuradas num intervalo de tempo,em qualquer mercado à diferentes preços pelo CONSUMIDOR, enquanto a função OFERTA indica quanto de um bem os PRODUTORES (fornecedores) ofereceriam à venda no mercado num dado período,incentivado por varios preços.

É possivel pesquizando um mercado estabelecermos o tipo de função que representa a demanda e oferta de um determinado bem;

Assim,sendo "p" o preço unitário e "q" a quantidade procurada ou ofertada,as funções f(procura) e g(oferta) seriam conhecidas pelas equações :

$$p = f(q) \qquad e \qquad p = g(q)$$

Fig. 1-35

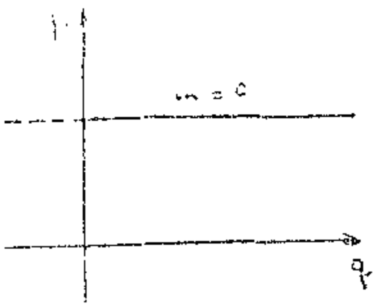
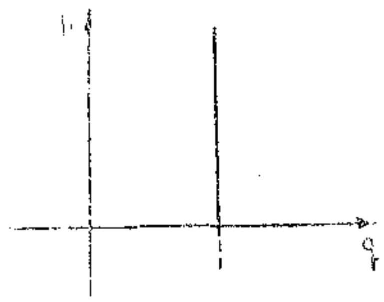


Fig. 1-36



Solução : Temos os pares :

$p_1 = 50 \qquad q_1 = 50$

$p_2 = 75 \qquad q_2 = 100$

A declividade será :

$$m = \frac{75 - 50}{100 - 50} = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}$$

A equação da reta que passa por um ponto é

$$y - y_1 = m\ (x - x_1)$$

Para o caso, temos :

$$p - 50 = \frac{1}{2}\ (q - 50)$$

$$q - 2p + 50 = 0$$

Ou :

$$p = \frac{1}{2}\ q + 25$$

Exemplo 2 : De acordo com os termos de contrato entre uma Companhia de Aluminio e a CHESF, esta promete fornecer ao preço de Cr$ 2,00 kwh energia durante um ano. Qual a função de oferta.

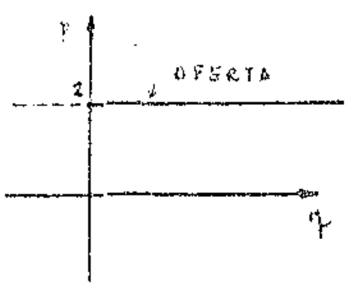


Fig. 1-37

Solução :

Sendo o preço constante para qualquer quantidade fornecida a curva será :

$p = 2 \qquad$ ou $\qquad p - 2 = 0$

A figura 1-37 representa o caso

ROTEIRO DE AULA PARA A UNIDADE DE ESTUDO NÚMERO TRÊS (3)

ASSUNTOS :

Equação Quadrática
Identificação de uma cônica por uma equação quadrática
A circunferência
A Elipse

OBJETIVOS :

Ao final desta Unidade de Estudo o aluno deverá, sem o uso de livros ou notas de aulas, ser capaz de :

Identificar uma cônica por uma equação quadrática
Identificar a equação de uma circunferência e fazer o seu gráfico
Definir circunferência e seus elementos
Identificar a circunferência pela sua equação conônica
Definir elipse e seus elementos
Identificar a equação de uma elipese e fazer o seu gráfico.

1.9 - As cônicas

Chamamos de CÔNICAS curvas obtidas geralmente pela intersecção de um plano com uma superficie cônica, sendo definida pela relação :

$Ax^2 + 2\,Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ ....(1) onde A, B, C, D, E, F são constantes e A, B, C diferentes de zero (figs. 1-38a, 1-38b, 1-38c)

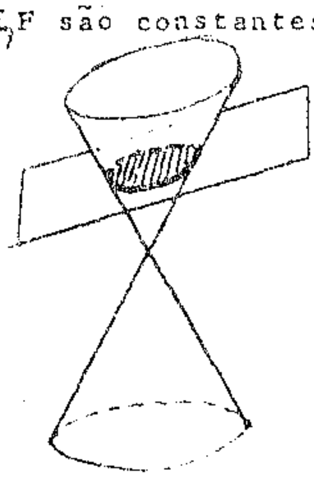


Fig- 1-38a

Para estudo destas curvas, podemos admitir três hipoteses :

Se :

$B^2 - AC < 0$ a cônica será ELIPSE

$B^2 - AC = 0$ a cônica será PARABOLA

$B^2 - AC > 0$ a cônica será HIPERBOLE

Ainda como caso particular da ELIPSE, podemos verificar que para $B = 0$ a equação (1) ficaria :

Fig. 1-38b

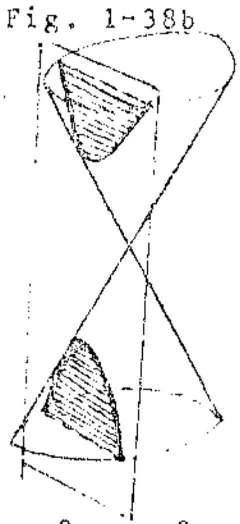
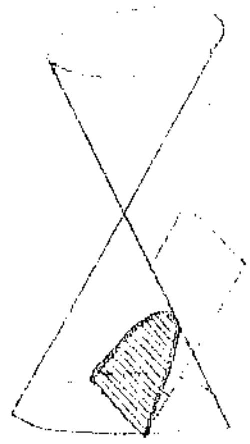


Fig. 1-38c



$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ ... (2)

Então , para

$A = C$ teriamos um CÍRCULO

$A \neq C$ mas A e C tendo o mesmo sinal teremos uma ELIPSE

$A = 0$ ~~ou~~ $C = 0$
ou   é o caso de uma HIPÉRBOLE
$C \neq 0$ $A \neq 0$

1.9.1. - O círculo

A relação (2) poderá ser escrita da forma :

$$Ax^2 + Ay^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

porque $C = A$. Ou ainda de forma mais redusida :

$$x^2 + y^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad ..(3)$$

que é a equação do CÍRCULO.

Podemos tambem escreve-la da forma :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \quad ...(4)$$

onde o par (a,b) representa as coordenadas do centro e r o raio.

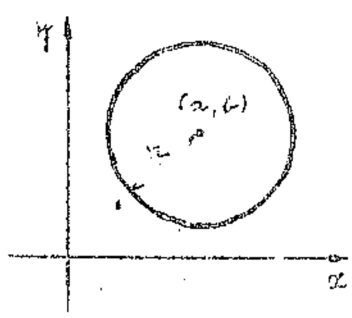


Fig. 1-29

Podemos comparar as formas (3) e (4) completando os quadrados da forma (3), assim:

$$(x^2 + 2Dx + D^2) + (y^2 + 2Ey + E^2) - D^2 - E^2 + F = 0$$

Ou ainda :

$$(x+D)^2 + (y+E)^2 = D^2 + E^2 - F$$

Veremos então que :

a) O centro tem por coordenadas : $(-D , -E)$

b) O raio será então : $r^2 = D^2 + E^2 - F$

$$r = \sqrt{D^2 + E^2 - F}$$

Então se :

$D^2 + E^2 - F > 0$ teremos um círculo de raio r (real)

$D^2 + E^2 - F = 0$ teremos um círculo de raio nulo (evanescente)

$D^2 + E^2 - F < 0$ não existe círculo em R^2.

Exemplo 1 : Determinar o raio e as coordenadas do centro do círculo

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$$

Solução : Coordenadas do centro C(2,1)

Raio $r = \sqrt{2^2 + 1^2 + 4} = \sqrt{9} = 3$

A figura 1-30, representa o círculo.

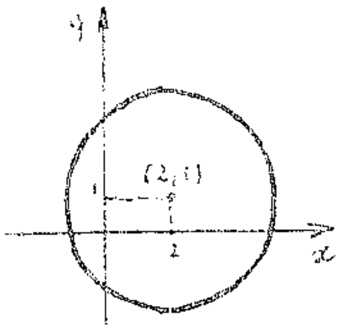


Fig. 1-30

Exemplo 2 : Traçar o círculo definido pela equação :

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5 = 0$$

As coordenadas do centro C(2,-1)

Raio $r = \sqrt{2^2 + (-1)^2 - 5} = 0$

O círculo se degenerá num ponto de coordenadas (2,-1) (evanescente)

Exemplo 3 : Achar as coordenadas do centro e o raio do círculo:

$$x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$$

completando os quadrados da equação.

Solução :

$$(x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 8y + 16) - 9 - 16 = 0$$

Ou :

$$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$$

Logo :

$$C(-3,4) \text{ e } r = \sqrt{25} = 5$$

Exemplo 4 : Estudar a equação do círculo da forma (4) quando admitimos dois dos parametros constantes e o terceiro variavel.

Solução : São 3 os casos possiveis :

1º caso : a = const , r = const e b = variável

2º caso : b = const , r = const e a = variável

3º caso : a = const , b = const e r = variável

As figs. 1-31a , 1-31b. e 1-31c representa, os três casos.

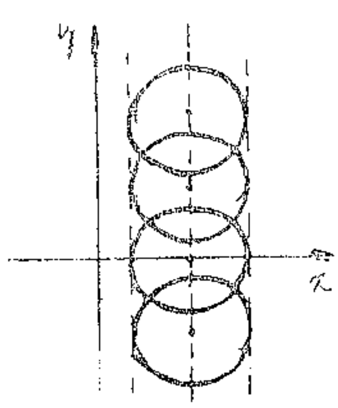


Fig. 1-31a

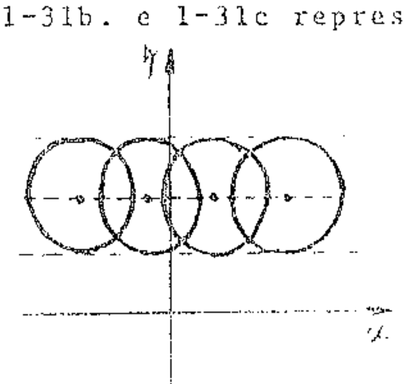


Fig. 1-31b

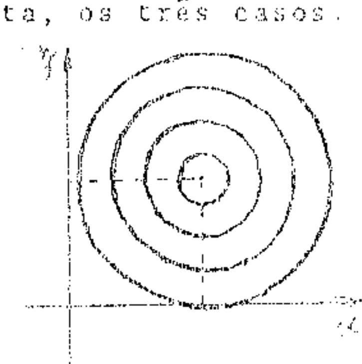


Fig.1-31c

Temos três familias de círculos; nos dois primeiros casos, onde o raio é constante os centros estão situados nas retas $x-a = 0$ e $y-b=0$ e limitados por duas retas paralelas distando entre si de $2r$; e no terceiro caso temos uma familia de circulos concentricos.

1.9.2. - A elípse.

A equação (2) para $A \neq C$ onde A e C têm o mesmo sinal, representa uma ELIPSE

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

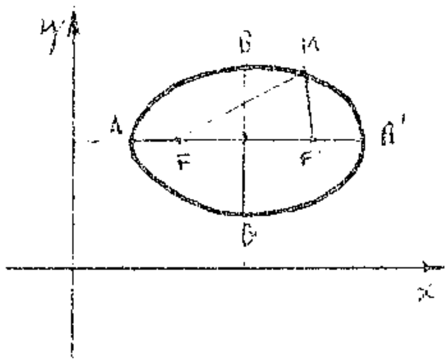


Fig. 1-32

que poderá ser definida geometricamente como um conjunto de pontos no plano tais que a soma de suas distâncias a dois pontos fixos. chamados de FOCOS é constante (fig.1-32)

A reta que passa pelos focos F e F' se chama eixo MAIOR . A mediatriz do segmento FF' é chamado de eixo MENOR . A intersecção dos dois eixos é chamado de centro "C".

Os pontos em que a curva corta os eixos são chamados de vértices A, A', B e B' . A distância entre êles AA' = 2a é chamado de COMPRIMENTO DO EIXO MAIOR , ou simplesmente EIXO MAIOR e entre BB' = 2b COMPRIMENTO DO EIXO MENOR ou apenas EIXO MENOR.

Sendo (k,k) as coordenadas do centro C a equação (2) poderá ser escrita :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \dots (5)$$

e quando o centro está na origem $h = 0$, $k = 0$, a elípse poderá ser expressa por :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots (6)$$

<u>Exemplo 1</u> : Dada a equação $9x^2 + 16y^2 = 144$ encontrar os comprimentos dos eixos..

Solução : Dividindo toda a equação por 144 temos :

$$\frac{9x^2}{144} + \frac{16y^2}{144} = 1$$

Ou, implicando :

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Pela formula (6) , temos :

$a^2 = 16 \qquad a = \pm 4 \qquad$ ou $\qquad 2a = 8$

$b^2 = 9 \qquad b = \pm 3 \qquad\qquad 2b = 6$

O eixo maior igual a 8 e o menor 6.

Exemplo 2 : Dada a equação

$$9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$$

encontrar os comprimentos dos eixos e as coordenadas do centro.

Solução : Agrupando os têrmos de modo a completar os quadrados da forma (5).

$$9x^2 - 18x + 4y^2 + 16y - 11 = 0$$
$$9(x^2-2x+1) + 4(y^2+4y+4) - 9 - 16 - 11 = 0$$
$$9(x-1)^2 + 4(y+2)^2 = 36$$

ou :

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

Assim : $k = 1$ $\qquad k = 2$

$a^2 = 4 \qquad a = \pm 2 \qquad$ comprimento $\qquad 2a = 4$

$b^2 = 9 \qquad b = \pm 3 \qquad$ dos eixos $\qquad 2b = 6$

Coordenadas do centro $(1,-2)$

Exemplo 3 : Qual a equação de uma elipse cujo centro é o ponto $(-2,0)$ e o comprimento dos eixos 10 e 6.

Solução : Os dados do exemplo nos fornece

$k = -2 \qquad 2a = 10$

$k = 0 \qquad 2b = 6$

Assim :

$$\frac{(x+2)^2}{5^2} + \frac{(y-0)^2}{3^2} = 1$$

Ou :

$$\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Ainda :

$$9x^2 + 25y^2 + 36x - 189 = 0$$

Exemplo 4 : Estudar a equação da elipse quando o comprimento do eixo são iguais-

Solução : Com efeito, sendo $b = a$, temos :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Ou :

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$$

que é a equação de um círculo de coordenadas (k,k) e raio igual a $\underline{a}$ da forma (4).

ROTEIRO DE AULA PARA A UNIDADE DE ESTUDO
Nº QUATRO (04)

ASSUNTOS:

A Parábola

A Hipérbole

A Hipérbole Equilátera

Aplicações das Cônicas à Economia

OBJETIVOS

Ao final desta Unidade de Estudo, o aluno deverá sem o uso de Livros ou notas de aulas, ser capaz de:

a) Dado a equação de uma parábola em sua forma geral, determinar sua forma canônica e fazer seu gráfico;

b) Dada a equação de uma hipérbole na sua forma geral, determinar sua forma canônica e fazer seu gráfico;

c) Definir parábola e seus elementos;

d) Definir hipérbole e seus elementos;

e) Dadas uma função de demanda e uma função de oferta em sua forma quadrada, determinar o preço e a quantidade de equilíbrio de mercado.

1.9.3.- A hiperbole .

A equação (2) para $A \neq C$ onde A e C têm sinais contrários, representa uma hiperbole, que analogamente poderá ser definida geometricamente como o conjunto de pontos no plano tais que a diferença de suas distâncias a dois pontos fixos chamados focos é constante (fig.1-33) positiva.

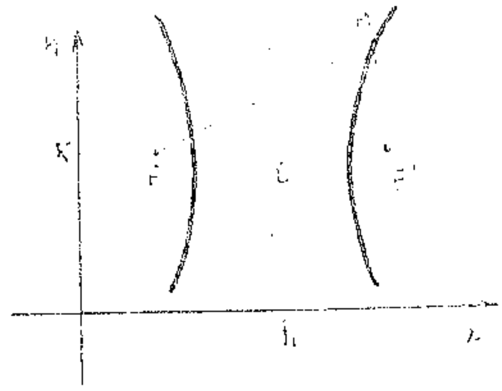


Fig. 1-33

A reta que passa pelos pontos F e F' é chamado de EIXO TRANSVERSO , a mediatriz do segmento FF' é chamada de EIXO CONJUGADO ou IMAGINÁRIO e a intersecção desses eixos se chama de CENTRO.

Tendo o centro C coordenadas (h,k), podemos expressa-la de forma analoga da elipse, assim:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad \ldots(7)$$

ou quando o centro está na origem :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \ldots(8)$$

Exemplo 1 : Traçar a hiperbole dada a equação $2x^2-3y^2-6=0$

Solução : Faltando os têrmos do primeiro grau a curva tem o centro na origem, assim dividindo toda a equação por 6 :

$$\frac{2x^2}{6} - \frac{3y^2}{6} - 1 = 0$$

Ou :

$$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$$

Assim :

$a^2 = 3$ $\quad a = \sqrt{3} = \pm 1,73 \quad 2a = 3,46$

$b^2 = 2$ $\quad b = \sqrt{2} = \pm 1,41 \quad 2b = 2,82$

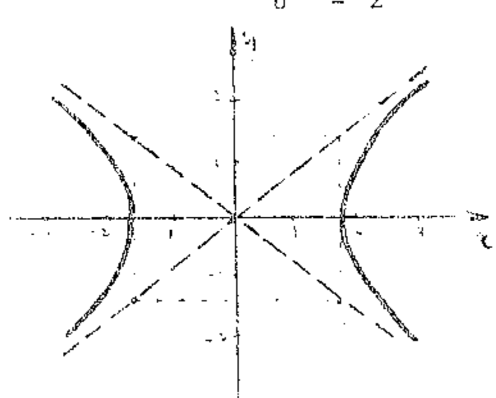


Fig. 1-34

Traça-se inicialmente o retângulo central de dimensões 2a=3,46 e 2b=2,82 que determina pelas suas diagonais as ASSINTOTAS da curva. A fig. 1-34 é o gráfico da hipérbole.

Exemplo 2 : Determine o comprimento dos eixos e as coordenadas do centro da hiperbole.

$$4x^2 - 3y^2 - 6x + 9y - 5 = 0$$

olução : Agrupando os têrmos de modo a completar os quadrados :

$$4x^2 - 6x - 3y^2 + 9y - 5 = 0$$

u :

$$4(x^2 - \frac{6}{4}x + \frac{9}{16}) - 3(y^2 - 3y + \frac{9}{4}) - \frac{9}{4} + \frac{27}{4} - 5 = 0$$

$$4(x - \frac{3}{4})^2 - 3\,(y - \frac{3}{2})^2 - \frac{2}{4} = 0$$

$$8(x - \frac{3}{4})^2 - 6(y - \frac{3}{2})^2 - 1 = 0$$

$$\frac{(x - \frac{3}{4})^2}{\frac{1}{8}} - \frac{(y - \frac{3}{2})^2}{\frac{1}{6}} = 1$$

ssim :

$a^2 = \frac{1}{8}$ $\qquad a = \sqrt{\frac{1}{8}}$ $\qquad a = \pm\, 0,35$

$b^2 = \frac{1}{6}$ $\qquad b = \sqrt{\frac{1}{6}}$ $\qquad b = \pm\, 0,41$

Comprimento dos eixos $\quad 2a = 0,71$

$\qquad 2b = 0,82$

Coordenadas do centro $\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)$

Xemplo 3 : Traçar o gráfico da curva definida pela equação :

$$3y^2 - x^2 - 3 = 0$$

olução : Podemos escreve-la :

$$\frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{3} = 1$$

onde , tira-se que :

$b^2 = 1$ $\qquad b = \pm\, 1$

$a^2 = 3$ $\qquad a = \pm\, \sqrt{3}$

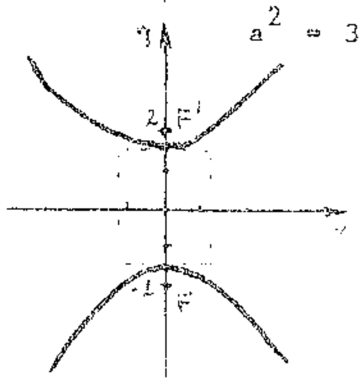


Fig. 1-35

Observa-se que a hiperbole tem como eixo ,o eixo dos y .

A fig. 1-35 representa a curva.

Exemplo 4 : Estudar a equação da hiperbole quando os eixos são iguais

Solução : Sendo b = a , temos :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

u : $(x-h)^2 - (y-k)^2 = a^2$

Esta hiperbole é chamada de EQUILATERA porque o centro está na rigem dos eixos . A equação se reduz a :

$$x^2 - y^2 = a^2$$

Exemplo 5 : Verifique qual a curva que é a equação (1) representa no caso particular em que $A = C = D = E = 0$.

Solução : A equação se reduz a :

$$2Bxy + F = 0$$

que poderá ser escrita da forma.

$$xy = c^2$$

representa um hiperbole de eixos obliquos. A fig, 1-36 é o gráfico do caso.

$$xy = 1 \quad e \quad xy = -1$$

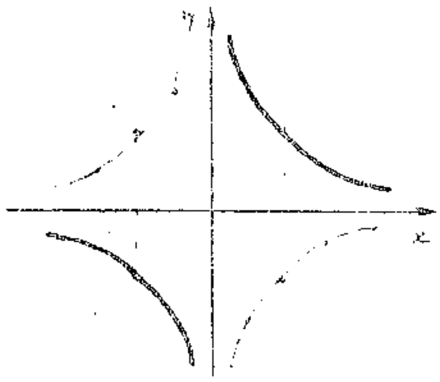


Fig. 1-36

Exemplo 6 : Mostre que a forma

$$(x-h)(y-k) = c^2$$

é uma hiperbole.

Solução : Com efeito, podemos escrevê-la :

$$xy-kx-hy+hk-c^2 = 0$$

comparando com a equação (1) vemos :

$A = 0$ $2B=1$ e $C = 0$ logo :

$$B^2-AC = (\tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{1}{4} \quad \text{ou} \quad B^2-AC > 0 \text{ Hiperbole.}$$

1.9.4. - A Parabola.

A equação (2) quando $A=0$ ou $C=0$ representa uma PARABOLA e pode ser escrita das formas :

$$Ax^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad \ldots(9)$$

$$Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad \ldots(10)$$

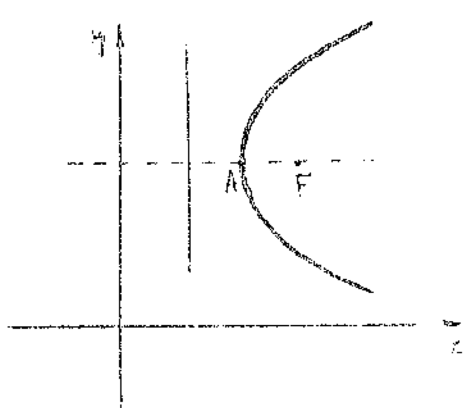


Fig. 1-37

Geometricamente podemos defini-la como um conjunto de pontos cuja distância a um ponto fixo chamado de foco "F" e reta fixa chamada de diretriz "D" são iguais (fig. 1-37).

Chamando (h,k) as coordenadas do vértice podemos escrever as formas (9) e (10) assim :

$$(x-h)^2 = 2p(y-k) \quad \ldots.(11)$$

Quando o eixo da curva é paralelo ao eixo dos y , ou :

$$(y-k)^2 = 2p\ (x-h) \quad \ldots(12)$$

Se o eixo da curva é paralelo ao eixo dos x . A distância do foco a diretriz é o parâmetro "p".

Ainda a forma (9) poderá ser expressa pela forma quadrática.

$$y = ax^2 + bx + c$$

Fig.1-38a

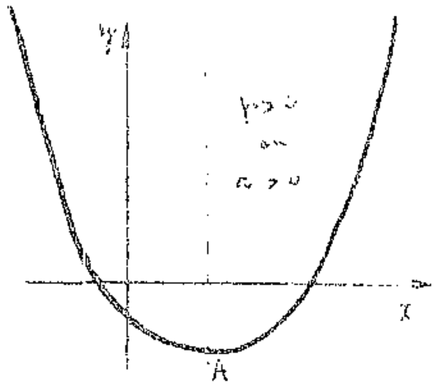
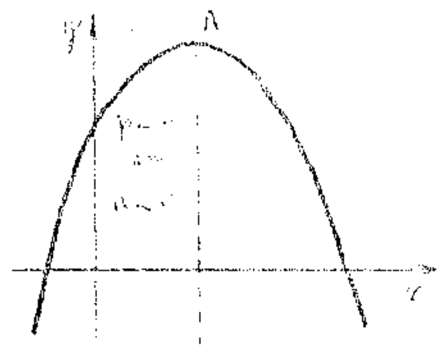


Fig.1-38b



É representada pelos gráficos figs. 1-38a e 1-38b quando $a>0$ u $a<0$ que traduz as curvas terem concavidade para cima ou para baixo.

Ainda na formula (12) quando o vértice está na origem $h=0$ e =0 a equação se tornará :

$$y^2 = 2px$$

A representação gráfica desta forma é indicada pelas figs. 1-9a e 1-39b . Sendo o sentido da curvatura indicado pelo sinal do arâmetro.

Fig. 1-39a

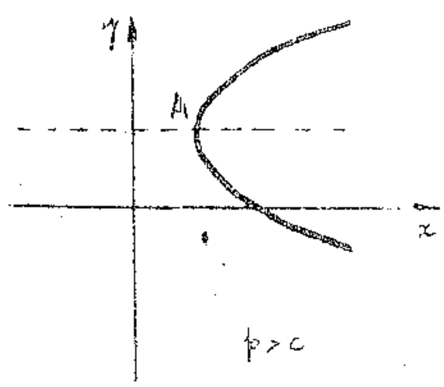
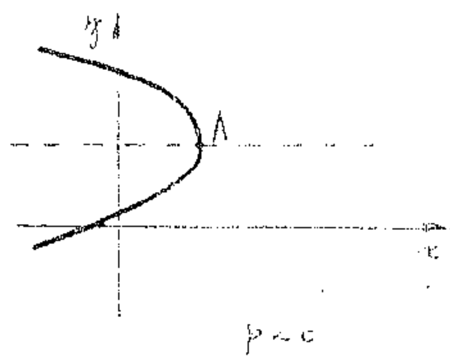


Fig. 1-39b



xemplo 1 : Dada a equação da parabola

$$y = 3 + 2x - x^2$$

eterminar as coordenadas do vértice e fazer uma figura ilustrativa.

olução : Podemos representá-la da forma (11)

$$x^2 - 2x + 1 = 3 + 1 - y$$

u :

$$(x-1)^2 = 4 - y$$

Podemos escrever ainda :

$$(x-1)^2 = -(y-4)$$

Ou : $3q^2 + 5q - 8 = 0$

Donde tira-se : $q = 1 \qquad q' = -\frac{8}{3}$

Assim : $q_E = 1$ e $p_E = 9 - 2 = 7$

Temos ainda que a procura é uma parabola de eixo vertical de concavidade para cima tendo como eixo o dos preços e a oferta outra parabola tambem de eixo vertical paralelo ao eixo dos p com a concavidade para baixo. A intersecção das duas curvas se dá no ponto E(1,7) que são as coordenadas de equilibrio do mercado .

Exemplo 2 : Determinar para um estado de equilibrio o preço e produção do mercado definido pelo modelo

$$(q+10)(p+20) = 300$$

e

$$q = 2p - 8$$

Solução : A curva de demanda é uma hiperbole e a oferta uma reta. Tirando p de ambas as equações, temos

$$p = \frac{300}{q + 10} - 20$$

$$p = \frac{q}{2} + 4$$

No ponto de equilibrio :

$$\frac{300}{q + 10} - 20 = \frac{q}{2} + 4$$

Ou :

$$q^2 + 58q - 120 = 0$$

Donde se obtem : $q_E = -29 + \sqrt{961} = 2$

$$p_E = \frac{2}{2} + 4 = 5$$

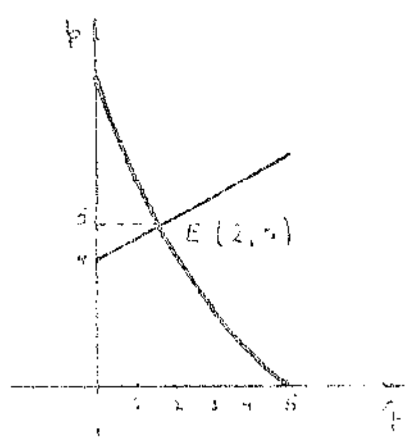


Fig. 1-45

A fig. 1-45 representa o modelo. A reta tem declividade $m = \frac{1}{2} > 0$ por isso representa a oferta e a hiperbole é um trecho da curva onde

$$0 \leq q \leq 5$$

correspondente a um dos ramos da hiperbole equilatera de eixos obliquos.

Exemplo 3 : Dadas as equações :

$$q = 16 - 2p$$

e

$$4q = 4p + p^2$$

determinar qual a que representa procura ou oferta e as coordenadas do onto de equilibrio do mercado que elas indicam. Fazer um gráfico ilustrativo.

Solução : As equações são respectivamente uma reta e uma parábola de eixo horizontal. A reta pode ser escrita :

$$2p = -q + 16 \quad \text{ou} \quad p = -\frac{1}{2}q + 8$$

Assim $m = -\frac{1}{2} < 0$ declividade negativa.(procura) e a parábola no trecho onde $p \geq 0$ e $q \geq 0$ representa a oferta.

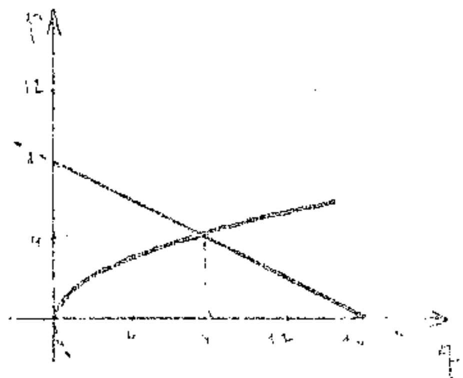


Fig. 1-46

Para as coordenadas do ponto de equilibrio. $4p+p^2 = 64 - 8p$

ou : $p^2 + 12p - 64 = 0$

$$p = -6 \pm \sqrt{36+64} = -6 \pm \sqrt{100}$$

Assim : $p_E = 4$ $\quad q_E = 16-8=8$

Os gráficos são dados por :

A reta :

$p = 0$	$q = 16$
$q = 0$	$p = 8$

A parabola :

p	0	2	4	6	...
q	0	3	8	14	

Exemplo 4 :Dadas as equações $pq = 15$ e $q^2 = \frac{9}{5}p$ que representam demanda e oferta,determinar as coordenadas do ponto de equilibrio e um gráfico ilustrativo.

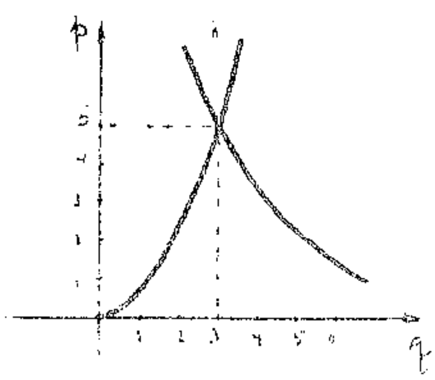


Fig. 1-47

Solução : Temos que :

$p = \frac{15}{q}$ $\qquad p = \frac{5q^2}{9}$

ou : $\frac{15}{q} = \frac{5q^2}{9}$

ou : $q^3 = 27$ $\qquad q = \sqrt[3]{27} = 3$

Ainda : $p = \frac{15}{3} = 5$

Assim : $q_E = 3$ e $p_E = 5$

As equações representam uma hiperbole equilatera(procura) e uma parábola de eixo vertical (oferta) fig. 1-47.

Exemplo 5 : Determinar graficamente e analiticamente o preço e a quantidade de equilibrio de mercado para as equações de procura oferta.

$$q = \sqrt{36 - p} \qquad p = 6 + \frac{q^2}{4}$$

Assim, o vértice tem por coordenadas (1,4) sendo a parabola de eixo vertical com concavidade para baixo. Fig. 1-40

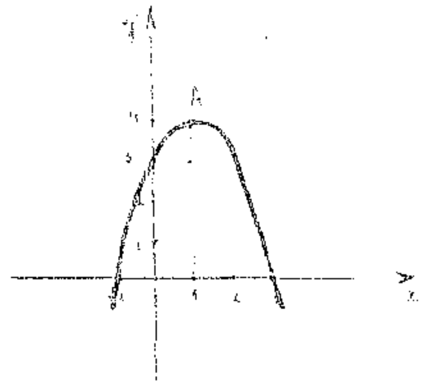


Fig. 1-40

Exemplo 2 : Estudar a parabola

$$y^2 = 5y - 2x$$

Solução : Podemos escrevê-la

$$y^2 - 5y + \frac{25}{4} = \frac{25}{4} - 2x$$

Ou :

$$(y - \frac{5}{2})^2 = -2\ (x - \frac{25}{8})$$

Trata-se de uma parabola cujo vertice $(\frac{25}{8}, \frac{5}{2})$ e p < o, logo tendo eixo horizontal e concavidade para esquerda .

Exemplo 3 : Dada a parabola $x^2 = 4y - 3x + 2$ encontrar as coordenadas do vértice, do foco e a equação da diretriz.

Solução : Completando os quadrados para escrevê-la da forma (11)

$$x^2 + 3x + \frac{9}{4} = 4y + 2 + \frac{9}{4}$$

Ou :

$$(x + \frac{3}{2})^2 = 4\ (y + \frac{17}{16})$$

Assim as coordenadas do vértice é :

$$h = -\frac{3}{2} \qquad e \qquad k = -\frac{17}{16}$$

Como $2p = 4$. $p = 2$, assim a ordenada do foco será :

$$y = k + \frac{p}{2} = 1 - \frac{17}{16} = -\frac{1}{16}$$

Da diretriz $y = k - \frac{p}{2} = -\frac{17}{16} - 1 = -\frac{33}{16}$

A fig. 1-41 é o gráfico da parabola.

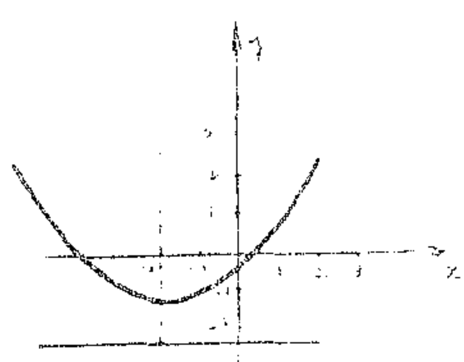


Fig. 1

Exemplo 4 : Estudar a familia de parabolas da forma

$$y^2 = 2px$$

Solução : Neste caso supondo p = variavel temos parabolas tendo os eixos coincidindo e os focos sobre o eixo das abscissas. A medida que p cresce o foco se afasta da origem e mais "fechada" será a curva. Quanto mais proximo o foco do vértice (0,0) mais "aber-

' será a curva . A fig. 1-42 ilustra a família

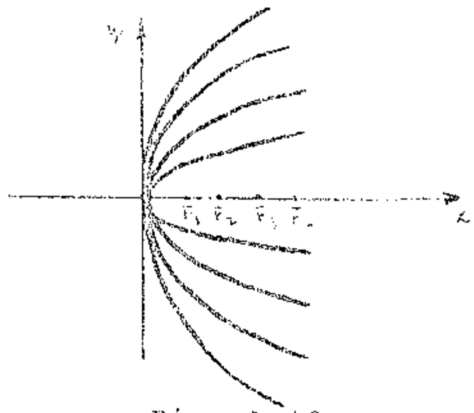


Fig. 1-42

0 - Aplicações das cônicas a problemas econômicos.

Conforme dissemos anteriormente (1.9) as equações $p_1 = f(q)$ e g(q) poderiam representar procura e oferta num mercado fig.1-43

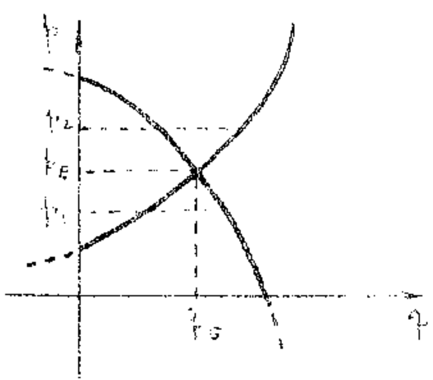


Fig. 1-43

Observa-se que estas curvas intercep tam-se num ponto E de coordenadas (q_E, p_E) que são chamadas de quantida de e preço de equilíbrio respectivamente.

Admitindo-se que o preço no mercado de equilíbrio p_E aumente para p_2, neste caso a quantidade oferecida é maior que a quantidade procurada, havendo um EXCESSO de oferta no merca-. Do mesmo modo se o preço baixa para p_1 a quantidade procurada seria ior que a quantidade ofertada, havendo uma EXCASSEZ no mercado.

Pela fig.1-43 observa-se que no ponto E a quantidade ofertada é orvida pelo mercado onde há um equilíbrio nos preços, isto é, $p_1 = p_2$

Algebricamente a resolução simultanea das duas equações obtêm-' p_E e q_E admitindo naturalmente p e q expressas cada uma na mesma uni te de medida. Normalmente o ponto E deverá está situado no quadrante' ie $p \geq 0$ e $q \geq 0$

mplo 1 : Dadas as curvas de procura e oferta pelas equações :

$p = 9 - 2q^2$ e $p = q^2 + 5q + 1$

traçar as curvas e determinar o ponto de equilíbrio de mercado.

Solução : As duas equações constituem um "modelo" do mercado.

Resolvendo por comparação

$$9 - 2q^2 = q^2 + 5q + 1$$

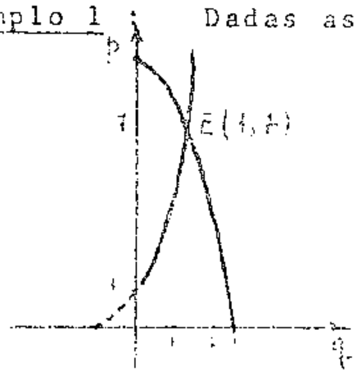


Fig. 1-44-

Solução : As duas equações são parabolas de eixo vertical. As coordenadas do ponto de equilibrio são obtidas do sistema

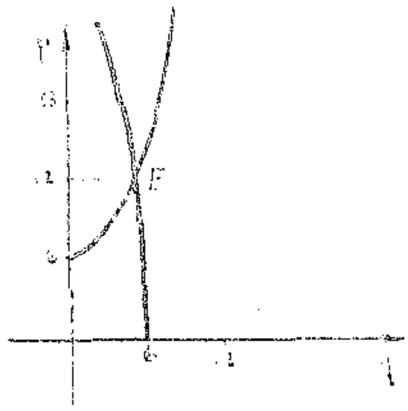


Fig. 1-48

$$p = 36 - q^2$$

e

$$p = 6 + \frac{q^2}{4}$$

Ou : $6 + \frac{q^2}{4} = 36 - q^2$

$$5q^2 = 120$$

$$q = \sqrt{24} = \pm\ 2\sqrt{6}$$

$$p = 6 + \frac{24}{4} = 12$$

Assim , temos : $q_E \approx 4,9$

$$p_E = 12$$

ÍNDICE DE APROVAÇÃO NA ÁREA II

1º SEMESTRE DE 1981

DISCIPLINAS	TURMAS	Nº DE ALUNOS	APROVADOS	REPROVADOS P/MÉD.	REPROVADOS P/FREQ.	ÍNDICE DE APROVAÇÃO
CALCULO I	11	738	281	320	137	38,07%
CÁLCULO II	09	581	262	200	119	45,00%
CÁLCULO III	07	442	228	129	085	51,58%
CÁLCULO IV	05	276	077	129	070	27,89%
CÁLCULO V	01	033	024	002	007	72,72%
ÁLGEBRA LINEAR	06	358	160	128	070	44,69%
GEOMETRIA ANALÍTICA	13	871	361	316	194	41,44%
FÍSICA GERAL I	12	732	231	378	123	31,55%
FÍSICA GERAL II	07	380	075	247	060	19,21%
FÍSICA GERAL III	06	369	192	117	060	52,03%
FÍSICA GERAL IV	04	206	111	069	026	53,88%
FÍSICA GERAL V	01	046	034	008	004	73,91%
INT. AO DESENHO	10	566	326	121	119	57,59%
GEOM. DESCRITIVA	06	374	160	155	059	42,78%
QUÍMICA GERAL I	10	539	348	123	063	64,56%
QUÍMICA GERAL II	04	261	230	013	018	88,12%
CÁL. NUMÉRICO	05	241	147	054	040	60,99%
INT. A COMPUTAÇÃO	07	415	268	070	077	64,57%
ESTATÍSTICA	06	320	177	100	045	55,31%
MECANICA GERAL I	06	374	273	053	048	72,99%
MECANICA GERAL II	05	290	197	055	038	67,93%

(CONTINUAÇÃO)

DISCIPLINAS	TURMAS	Nº DE ALUNOS	APROVADOS	REPROVADOS		ÍNDICE DE APROVAÇÃO
				P/MÉD.	P/FREQ.	
ELEM.DE SOCIOLOGIA	01	254	216	003	035	85,03%
INGLES TÉCNICO I	01	034	029	-	005	85,29%
ECOLOGIA	01	293	254	018	021	86,68%

MAPA PARA AS UNIDADES DE ESTUDO

Q U E S T I O N Á R I O

NIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
EPARTAMENTO DE ECONOMIA
URSO DE ECONOMIA
LEMENTOS DE ECONOMIA MATEMÁTICA - I

Prezado aluno

O presente questionário tem como objetivo obter em forma rdenada, alguns dados referentes a sua reação com respeito aos cursos de lementos de Economia Matemática I.

Agradecemos muito desde agora a colaboração que você restará respondendo sinceramente o questionário que segue.

Responda de acordo com o seu interesse e suas respostas nôminas serão utilizadas com o fim de melhorar os cursos dos anos seguintes. Agradecemos sua valiosa colaboração.

João Barbosa de Oliveira

1 - Recomendaria você um curso individualizado como o de Matemática Econômica a um amigo que tem dificuldades nos cursos tradicionais?

( ) Sim ( ) Não

2 - O contacto pessoal que tem tido você com sua professor tem sido?

( ) Bastante menor que nos cursos tradicionais. ( ) Igual a eles. ( ) Muito maior que eles.

3 - Recomendaria você um curso individualizado como o de Matemática Econônica a um amigo que tem se destacado nos cursos tradicionais?

( ) Sim ( ) Não

4 - Em média, você investio mais tempo de estudo no curso Matemática Econômica de que em algum curso equivalente?

( ) Bastante tempo. ( ) Aproximadamente o mesmo tempo. ( ) Muito mais tempo.

5 - Comparando com seus companheiros que cursam a mesma matéria em um plano tradicinal (curso básico), crer você que aprendeu.

( ) Bastante menos que o curso tradicional. ( ) Aproximadamente o mesmo ( ) Bastante mais que o curso tradicional.

06 - Em que tipo de curso crer você que desenvolve mais sua própria habilidade para aprender por você mesmo?

( ) Muito mais em um curso tradicional ( ) De igual modo em ambos os tipos de cursos ( ) Muito mais no curso em unidade de estudo (Mat.Ec.)

07 - Logrou compreender os objetivos do curso, assim como sua importância e significação dentro de sua carreira?

( ) Sim ( ) Não

08 - Em que tipo de curso logrou compreender com maior clareza os objetivos do curso, a importância e significação do mesmo dentro de sua carreira?

( ) No plano tradicional ( ) Em unid. de Est.(Mat.Ec.)

09 - Se você tiver que fazer um outro curso de Matemática, escolheria.

( ) No plano tradicional ( ) Em unid. de Est. (Mat. Ec.)

10 - Acha você que as questões dos exames mensais coincidem os propostos das unidades de estudos?

( ) Sim ( ) Não

11 - O tempo concedido para os exames foi?

( ) Pouco ( ) Adquado ( ) Excessivo

12 - Encontrou utilidade nas Unidades de Estudos que se dava em cada semana?

( ) Sim ( ) Não

13 - O interesse do professor para que você apreddesse foi?

( ) Menor que nos cursos tradicionais. ( ) Igual que em todos os cursos. ( ) Maior que nos cursos tradicion

14 Você acha que os cursos de Matemática do básico deveriam ser?

( ) Como está sendo ministrada. ( ) Através das Unid. de Estudo (Mat. Econômica)

15 - De que maneira se modificaram seus hábitos de estudos pelo fato de esta tomando o curso de Matemática através das Unidades de Estudos?

( ) Para piorar ( ) Sem consequência ( ) Para melhorar

16 - Encontrou você os monitores dispostos a ajudar-lhe?

( ) Nunca ( ) Com baixa frequência ( ) Com bastante frequênci

17 - O Conhecimento que o monitor tinha sobre a material do curso era?

( ) Mínimo ( ) Adquado ( ) Alto

18 - A correção do monitor das unidades de estudos foram?

( ) injusta ( ) Justa

19 - O número de unidades em que se organizou o curso para você foi:

( ) Muito pequeno ( ) Adquado ( ) Excessivamente grande.

20 - Que sugestões você tem afim de que o Curso de Elementos de Economia Matemática I melhore: