Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica - IMECC
Departamento de Matemática

Transformada de Nahm de Fibrados de Higgs sobre superfícies de Riemann de gênero ao menos dois†

Pedro Frejlich
frejlich@gmail.com

Tese de Mestrado

Orientador: **Marcos Jardim**

11 de janeiro de 2007
Campinas - SP

† Este trabalho contou com financiamento do CNPq (130226/2005-0).

Transformada de Nahm de Fibrados de Higgs sobre superfícies de Riemann de gênero ao menos dois

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Pedro Frejlich** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 11 de janeiro de 2007.

Prof. Dr. **Marcos Jardim**
Orientador

Banca Examinadora:
Prof. Alexander Anani'n IMECC - UNICAMP
Prof. Michael Forger IME - USP

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, **UNICAMP**, como requisito parcial para obtenção de Título de **Mestre em Matemática**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Bibliotecária: Miriam Cristina Alves - CRB8a / 5094

Frejlich, Pedro Walmsley Frejlich F884t Transformada de Nahm de Fibrados de Higgs sobre superfícies de Riemann de gênero ao menos dois. Pedro Walmsley Frejlich – Campinas, [S.P.:s.n.], 2006. Orientador: Marcos Jardim Tese (mestrado) -

Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. 1. Curvas algébricas. 2. Espaços fibrados. 3. Variedades abelianas

(Matemática). I. Marcos Jardim. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Nahm Transform of Higgs bundles on Riemann surfaces of genus at least two

Palavras-chave em inglês (keywords): 1. Algebraic curves. 2. Fibre spaces. 3. Abelian variety

Área de concentração: Geometria diferencial/Geometria algébrica
Titulação: Mestre em matemática

Banca examinadora:
1. Prof. Dr. Marcos Jardim
2. Prof. Dr. Alexander Anani'n
3. Prof. Dr. Michael Forger

Data da defesa: 11/12/2006

Programa de Pós-Graduação : Mestrado em Matemática

Título: Transformada de Nahm de Fibrados de Higgs sobre superfícies de Riemann de gênero ao menos dois
Autor: Pedro Frejlich

Tese de Mestrado defendida em 11 de dezembro de 2006 e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof. Dr. **Marcos Jardim**

Departamento de Matemática - IMECC - UNICAMP

Prof. Dr. **Alexander Anani'n**

Departamento de Matemática - IMECC - UNICAMP

Prof. Dr. **Michael Forger**

Departamento de Matemática - IME - USP

Introdução

A presente dissertação tem por fito construir a Transformada de Nahm de certos fibrados de Higgs estáveis sobre superfícies de Riemann que não sejam elípticas (ou $\mathbb{C}P^1$). Outro objetivo, já algo implícito na distribuição de tópicos, é prover uma exposição concisa das ferramentas empregadas na construção da Transformada – que quiçá será útil aos alunos que desejem ser introduzidos à área. Alguns tópicos receberam tratamento mais detalhado (como as seções 1.1, 1.4, 2.1, 3.3 e 4.2) enquanto outros merceram, por inépcia minha, uma breve descrição dos seus resultados que efetivamente empregamos na Transformada (como 3.1, 5.3, 5.4, 6.2 e 6.3).

O público-alvo deste texto são alunos de Matemática com alguma familiariedade com os rudimentos da Topologia Algébrica e da Geometria Diferencial. Espero assim que ele seja acessível a quaisquer alunos (quer do final da graduação ou do início da pós) que porventura se interessem por este assunto com tantas, e tamanhas, conexões com os mais distintos ramos da Matemática, como Geometria Algébrica e problemas de *moduli*, Teoria de Calibre e Fibrados Estáveis.

O conceito de fibrado de Higgs tem sua origem (simultânea) na teoria de deformações de estruturas geométricas [45] e na redução dimensional das equações de Yang-Mills [21]; é esta última a abordagem que damos ao assunto, e que provê o contexto do problema que nos propomos a resolver.

Fixado um fibrado Hermitiano E sobre 4-variedade Riemanniana M, podemos considerar o funcional de Yang-Mills

$$\nabla \mapsto -\int_M \mathsf{Tr}\,(F_\nabla \wedge *F_\nabla)$$

cujos pontos críticos são chamados de *ínstantons*. O caso $M = \mathbb{R}^4$ é de particular interesse por ser o modelo local de 4-variedades; podemos nos perguntar então pela existência de ínstantons que sejam invariantes por subgrupos Λ de $\mathbb{R}^4$, os quais são da forma $\mathbb{Z}^k \times \mathbb{R}^{4-k}$. Invariância por Λ nos permite reescrever as equações de Euler-Lagrange para o funcional de Yang-Mills como uma equação para uma conexão *e* para um campo de endomorfismos num fibrado sobre uma k-variedade. Para cada escolha de $\Lambda \subset \mathbb{R}^4$ é possível estabelecer uma correspondência entre ínstantons em $\mathbb{R}^4$ que são invariantes por Λ e ínstantons em $(\mathbb{R}^4)^\vee$ que são invariantes pelo subgrupo dual $\Lambda^\vee = \mathsf{Hom}(\Lambda, \mathbb{Z})$; esse é o princípio geral da *Transformada de Nahm* (cf. [27] para uma exposição detalhada).

Essencialmente, um fibrado de Higgs $\mathcal{E}$ sobre uma superfície de Riemann Σ consiste de um fibrado holomorfo E, munido de uma 1-forma holomorfa θ a valores nos endomorfismos de E. Quando consideramos E munido de uma conexão unitária que satisfaz uma determinada relação com o *campo de Higgs* θ, $\mathcal{E}$ pode ser visto como uma solução das equações de Hitchin, como definidas em [21], sendo assim o objeto geométrico obtido da redução dimensional das equações de anti-autodualidade para a dimensão 2.

Embora em princípio a *existência* da Transformada de Nahm seja conhecida para qualquer subgrupo, suas propriedades analíticas variam drasticamente com a escolha particular de Λ. Em [24],[25] e [26], Marcos Jardim estudou o caso $\Lambda = \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^2$, no qual a transformada de Nahm relaciona ínstantons duplamente periódicos e fibrados de Higgs sobre superfícies de Riemann de gênero 1. Nesta dissertação, consideramos uma generalização das construções de Jardim para superfícies de Riemann de gênero pelo menos 2.

Como todos os objetos em questão são *algébricos*, nós nos valemos de inúmeras construções da Geometria Algébrica; em particular, a escolha de um ponto em Σ permite mergulhá-la holomorficamente em seu toro Jacobiano J. Uma observação crucial neste ponto é a de que J admite uma descrição natural como espaço de *moduli* de fibrados de linha holomorfos e topologicamente triviais em Σ. Se $J^\vee$ denota a variedade abeliana dual a J, J também pode ser pensado como o *moduli* de tais fibrados em $J^\vee$, e vice-versa. Esta dualidade entre J e $J^\vee$ se codifica no feixe de Poincaré $\mathcal{P} \longrightarrow J \times J^\vee$: a restrição de $\mathcal{P}$ a $J \times \{\eta\}$ coincide com o fibrado de linha $\eta \longrightarrow J$, enquanto a restrição a $\{\xi\} \times J^\vee$ é o fibrado $\xi^{-1} \longrightarrow J^\vee$.

Através desse feixe nós podemos considerar uma família de fibrados de Higgs estáveis sobre Σ parametrizados pelo fibrado cotangente de $J^\vee$:

$$T^*J^\vee \ni \zeta \mapsto \mathcal{E}_\zeta \tag{1}$$

Fixadas estruturas spinoriais compatíveis em Σ e J, a cada tal fibrado $\mathcal{E}_\zeta$ associamos um operador diferencial elíptico de primeira ordem $\mathcal{D}_\zeta$, que se obtém 'perturbando' o operador de Dirac canônico. Voltamo-nos então a uma descrição algébrico-homológica de estabilidade para concluir que, quando $\mathcal{E}$ tem grau nulo, cada $\mathcal{D}_\zeta$ é *injetor*. Esse *vanishing theorem*, aliado à maquinaria do Índice de Atiyah-Singer, permite concluir que o quasi-fibrado $\ker(\mathcal{D}_\zeta)$ é de fato um *fibrado* $\widehat{E}$ sobre $T^*J^\vee$, que possui uma conexão natural $\widehat{\nabla}$, algumas de cujas propriedades nos pomos a estudar. Mais especificamente, nosso principal resultado é o seguinte :

Teorema Principal. *A Transformada de Nahm de um fibrado de Higgs estável de grau nulo sobre uma superfície de Riemann de gênero pelo menos 2 é um fibrado Hermitiano munido de uma conexão unitária hiperholomorfa que não tem fatores planos, e estende a um fibrado holomorfo sobre* $\mathbb{P}(T^*J^\vee \times \mathbb{C})$.

Um precedente ilustre para as considerações que empreendemos nesta dissertação se encontra na tese de doutoramento de García-Prada ([12, Seção 4.4]), que pela primeira vez conjecturou que a transformada de Nahm de uma conexão Hermitian-Einstein em Σ deveria ser também Hermitian-Einstein, conjectura essa que é resolvida pela primeira vez neste texto. É imprescindível mencionar que, além da intuição impressionante e das idéias excelentes do Marcos, nos guiaram nesta dissertação (e conseqüente artigo, ainda por submeter) os trabalhos de doutoramento [24]-[26], pela inspiração analítica, e o trabalho recém publicado por Bonsdorff ([7]), que é na verdade uma versão geometrico-algébrica do presente trabalho, cujos resultados recuperamos – com a vantagem adicional de nossa Transformada ter uma conexão natural com propriedades que apontam, via Transformada de Fourier-Mukai como considerada por Donaldson [10, Ch. 3], para a possibilidade de inverter essa construção. Se isso for de fato possível (cf. conjectura ao fim da tese), seria imediata a demonstração de que *fibrados estáveis de grau nulo sobre uma superfície de Riemann estendem (holomorficamente) a sua Jacobiana* – o que proveria uma considerável generalização da descrição de J como *moduli* simultâneo de fibrados de linha holomorfos e topologicamente triviais para Σ e $J^\vee$. Mas por ora não existe argumento algum que corrobore esse devaneio...

Encorajamos (eventuais) leitores que desejem discutir o conteúdo desta exposição, fazer sugestões ou apontar erros (que seguramente há) a escrever para frejlich@gmail.com.

Agradecimentos

„PLEASE DO NOT SHOOT THE PIANIST.
HE IS DOING HIS BEST.“

(Aviso sobre o piano num *saloon* em Leadville, Colorado, segundo relato de Oscar Wilde em *Impressions of America*, 1883)

Agradeço a todos que, direta ou indiretamente, ajudaram a escrever e conceber esta dissertação, muitos dos quais repreensivelmente deixarei de mencionar. Em especial ao Marcos, que é o melhor orientador concebível e de trato pessoal agradabilíssimo; ao Sasha, por existir e em Campinas; ao Daniel e ao Ivan pela amizade e ajuda nos momentos críticos; à Thaís pelo porto sempre seguro e acolhedor; ao Carlos e ao Ricardinho, pelo exemplo e amizade; ao Franco, pela co-responsabilidade e ao Rigas, que esperemos que venha a dizer algum dia:

> And anon, methought, The wood began to move.

Ao Dudu, com todo meu carinho.

O Palácio da Ventura

Sonho que sou um cavaleiro errante.
Por desertos, por sóis, por noite escura,
Paladino do amor, busco anelante
O palácio encantado da Ventura!

Mas já desmaio, exausto e vacilante,
Quebrada a espada já, rota a armadura...
E eis que súbito o avisto, fulgurante
Na sua pompa e aérea formosura!

Com grandes golpes bato à porta e brado:
Eu sou o Vagabundo, o Deserdado...
Abri-vos, portas d'ouro, ante meus ais!

Abrem-se as portas d'ouro, com fragor...
Mas dentro encontro só, cheio de dor,
Silêncio e escuridão - e nada mais!

Antero de Quental

Conteúdo

Resumo - Abstract

Resumo

Construímos a transformada de Nahm de um fibrado de Higgs estável de grau nulo sobre uma superfície de Riemann de gênero pelo menos 2. Para tanto, empregamos a Teoria do Índice de Atiyah-Singer e um *vanishing theorem* que segue da hipótese de estabilidade do fibrado.

O principal resultado é que o fibrado transformado é hiperholomorfo e sem fatores planos. Desse modo não só recuperamos os resultados algébricos de [7] e os de [12] para o caso $\theta = 0$ como também provamos uma descrição mais detalhada da estrutura geométrica da transformada – o que, aliada às técnicas de [10] sugere que ela possa ser *invertida*.

Palavras-chave: Superfícies de Riemann, Fibrados Estáveis, Teoria do Índice, Transformada de Nahm, Transformada de Fourier-Mukai, Variedades Hiper-Kähler, Variedades Abelianas, Conexões Hiperholomorfas.

Abstract

We construct the Nahm transform of a stable, degree-zero Higgs bundle on a Riemann surface of genus at least 2. Atiyah-Singer's index theorem is the basic tool employed, along with a vanishing theorem which is due to the stability hypothesis.

Our main result is that the transformed bundle is hyperholomorphic and without flat factors. This not only recovers the algebraic results of [7] and that of [12] for the case $\theta = 0$, but also provides a more detailed description of the geometric structure of the transformed bundle. Such results suggest that this Nahm transform can be *inverted*, cf. [10].

Key-words:Riemann surfaces, Stable bundles, Index Theory, Nahm Transform, Fourier-Mukai Transform, Hyperkähler manifolds, Abelian varieties, Hyperholomorphic connections.

Capítulo 1

Fibrados I : Holonomia e Universalidade

1.1 Holonomia em Fibrados Principais

Seja G um grupo de Lie que age suave e livremente à direita numa variedade P, com quociente $\pi : P \longrightarrow P/G \simeq M$, onde M é variedade diferencial. Diremos que $\pi : P \longrightarrow M$ é *fibrado G-principal* sobre M se existir cobertura aberta $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$ de M e difeomorfismos G-equivariantes $\pi^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\psi_\alpha} U_\alpha \times G$ que cobrem a identidade. Isto é, temos diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
U_\alpha \times G \arrow[r, "\psi_\alpha", "\simeq"'] \arrow[dr, "pr_1"'] & \pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[r, hook, "\circ"'] \arrow[d, "\pi"] & P \arrow[d, "\pi"] \\
& U_\alpha \arrow[r, hook, "\circ"'] & M
\end{tikzcd}$$

com

$$\psi_\alpha(p) = (\pi(p), \phi(p)) \tag{1.1}$$
$$\phi(pg) = \phi(p)g \tag{1.2}$$

Um morfismo entre um fibrado G-principal $P \longrightarrow M$ e um fibrado G'-principal $P' \longrightarrow M'$ é uma tripla de setas $P \xrightarrow{F} P'$, $G \xrightarrow{\varphi} G'$ e $M \xrightarrow{f} M'$, com

$$F(pg) = F(p)\varphi(g)$$
$$\pi' \circ F = f \circ \pi$$

Se fixamos φ como a identidade de G, ganhamos $\mathrm{Prin}(G)$, a categoria de fibrados G-principais. Fixando $f = 1_M$, obtemos a subcategoria $\mathrm{Prin}_M(G)$ de fibrados G-principais sobre M. Se $P \xrightarrow{f} P'$ é um morfismo em $\mathrm{Prin}_M(G)$, observamos que $f|_{P_x}$ define isomorfismo não-natural $P_x \simeq G \simeq P'_x$: dado $p_0 \in P_x$, todo $p' \in P'_x$ é escrito unicamente na forma $p' = f(p_0)g_{p'} = f(p_0 g_{p'})$; a regra $p' \longmapsto g_{p'}$ é contínua e portanto $p' \longmapsto p_0 g_{p'}$ inverte $f|_{P_x}$. Portanto todo morfismo em $\mathrm{Prin}_M(G)$ é isomorfismo. De modo análogo, toda seção global de um fibrado principal o trivializa. Um exemplo emblemático de fibrado principal é dado pelo revestimento universal $\widetilde{M}$ de uma variedade M, que é $\pi_1(M)$-principal. Um campo vetorial X em G é dito *invariante à esquerda* se a traslação à esquerda por qualquer elemento o preserva : $L_{g*}X = X$. Cada tal campo é determinado por seu valor em $g = 1$, e portanto o subespaço linear de campos invariantes à esquerda, $L(G) \subset \mathfrak{X}(G)$, tem a mesma dimensão de G. Se $X \in L(G)$ é o gerador infinitesimal do grupo a 1-parâmetro de difeomorfismos φ_t, então invariância à esquerda significa apenas que

$$L_g \circ \varphi_t = \varphi_t \circ L_g$$

para cada t. Portanto se Y é outro campo invariante à esquerda, temos

$$L_{g*}[X,Y] = L_{g*}\left(\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(Y-\varphi_{t*}Y\right)\right) = \left(\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(L_{g*}Y - L_{g*}\varphi_{t*}Y\right)\right)$$
$$= \left(\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(L_{g*}Y - \varphi_{t*}L_{g*}Y\right)\right) = [X,Y]$$

de onde se conclui que $[\cdot,\cdot]$ dá a $L(G)$ uma estrutura de álgebra de Lie. Temos a aplicação exponencial

$$\exp : L(G) \longrightarrow G$$

através da qual definimos aplicação $\sigma : L(G) \longrightarrow \mathfrak{X}(P)$ por

$$p \longmapsto \frac{d}{dt}\left(p\exp\left(tX\right)\right)_{t=0}$$

que se vê ser linear já que

$$\exp\left(t\left(A+B\right)\right) - \exp(tA)\exp(tB)$$

é da ordem de t^2. Dados p em P e X em $L(G)$, $\sigma(X)(p) = 0$ significa que p é fixado por cada $\exp(tX)$; como supomos a ação livre, isso equivale a dizer que $\exp(tX) = 1$ para cada t, ou seja, que $X = 0$. Assim obtemos isomorfismos lineares

$$\sigma_p : L(G) \longrightarrow T_p\left(\pi^{-1}\left(\pi p\right)\right)$$

para cada $p \in P$. Esses isomorfismos lineares determinam isomorfismos de álgebras de Lie, pela seguinte razão : se Y é o gerador infinitesimal de ψ_t e ϕ é um difeomorfismo, então $\phi_* Y$ é o gerador infinitesimal de $\phi\circ\psi_t\circ\phi^{-1}$. Em particular,

$$p \longmapsto pg\exp(tX)g^{-1} = R_g R_{\exp(tX)} R^{-1}_{g^{-1}}$$

é gerado por

$$p \longmapsto \frac{d}{dt}\left(p\exp\left(t\,\mathrm{Ad}(g^{-1})X\right)\right)_{t=0}$$

onde $\mathrm{Ad}(g^{-1}) : L(G) \longrightarrow L(G)$ denota a diferencial da conjugação por g^{-1}, $h \longmapsto g^{-1}hg$. Chamamos a imagem de σ_p de *subespaço vertical* em p, e a atribuição $p \longmapsto \sigma_p(L(G))$ de *distribuição vertical* v. Uma *conexão* Γ em um fibrado G-principal $P \longrightarrow M$ é uma escolha de uma distribuição regular (dita *horizontal*) G-invariante em P que em cada ponto p seja um complemento direto à distribuição vertical : $\Gamma_p \oplus v_p = T_pP$. Essa decomposição induz decomposição única de campos em P em suas componentes vertical e horizontal : $X = vX + hX$. Fixada uma conexão Γ em P, podemos usar os isomorfismos σ_p para definir uma 1-forma ω em P a valores em $L(G)$, através da regra

$$\omega(X)(p) = \sigma_p^{-1}(vX(p))$$

Observamos que (1) $\omega\circ\sigma = 1_{L(G)}$, que (2) o núcleo de ω tem posto constante igual a $\dim M$(e neste caso define precisamente a distribuição Γ), e que tomando $\omega(X) = \sigma(A)$ $(R_{g*}\omega)(X) = (R_{g*}\omega)(\sigma(A)) = \omega(\sigma(\mathrm{Ad}(g^{-1})A))$, i.e., vale a relação (3) $R_{g*}\omega = \mathrm{Ad}(g^{-1})\omega$. Reciprocamente, dada uma 1-forma ω que satisfaça as condições $(1)-(3)$ listadas acima, a atribuição $p \longmapsto \ker\omega_p$ define uma distribuição suave que complementa a vertical (por (1) e (2)), e que é G-invariante por (3). Uma terceira maneira de descrever conexões é notando que a restrição de π_* a Γ_p define um isomorfismo linear sobre $T_{\pi p}M$, e portanto uma bijeção entre campos vetoriais em M e campos vetoriais em P que estão no núcleo de ω (ditos *horizontais*). Nestes termos, uma curva $\alpha : I \longrightarrow P$ é dita *horizontal* se sua velocidade é localmente restrição de um campo horizontal em P, e nesse caso, α se diz *levantamento horizontal da curva* $\pi\circ\alpha$ *começando em* $\alpha(0)$. Pelo Teorema Fundamental das Equações Diferenciais Ordinárias, toda curva suave por partes $a : (I,0) \longrightarrow (M,\pi p)$ possui um único levantamento horizontal que principia em p. Portanto a conexão Γ determina em cada p uma aplicação[1]

$$LH_p : (M,\pi p)^{(I,0)} \longrightarrow (P,p)^{(I,0)}$$

[1] Ainda que a notação não explicite, consideramos *apenas* curvas suaves por partes quando escrevemos exponenciais.

cujas velocidades geram a distribuição Γ ao variarmos p. Ressaltamos que (1) $\pi \circ LH_p = 1$, que (2) $LH_p(\pi(\operatorname{Im} LH_p)) = \operatorname{Im} LH_p$ e que (3) $R_g \circ LH_p = LH_{pg}$. Novamente, uma qualquer tal aplicação que verifique essas três propriedades define uma conexão em P. Dada qualquer $a \in C(x) = (M,x)^{(I,0)}$, definimos o *transporte paralelo* entre x e $a(1)$ ao longo de a,

$$\tau(a) : \pi^{-1}(x) \longrightarrow \pi^{-1}(a(1))$$

por $\tau(a)(\cdot) = LH_{(\cdot)}(a)(1)$. Se $b \in C(a(1))$, denotamos por ab o caminho obtido ao concatenar a e b. Segue da unicidade de curvas integrais de EDOs que

$$LH_p(ab) = LH_p(a)LH_{a(1)}(b)$$

e em particular que

$$\begin{aligned} p = LH_p(aa^{-1}) &= LH_p(a)LH_{a(1)}(a^{-1}) \\ \Longrightarrow LH_p(a)^{-1} &= LH_{a(1)}(a^{-1}) \end{aligned}$$

Portanto $\tau(a)$ define isomorfismo $\pi^{-1}(x) \longrightarrow \pi^{-1}(a(1))$ para cada escolha de a. Ao restringirmos o domínio de τ ao grupo de laços em x, $\Omega(x) = (M,x)^{(I,\partial I)}$, temos $\tau(a) \in \operatorname{Aut}(\pi^{-1}(x))$, sendo este último isomorfo (não-naturalmente) a G. Podemos realizar $\tau(\Omega(x)) = \Phi(x)$ (dito *grupo de holonomia* em x) como subgrupo de G através da escolha de um ponto em $\pi^{-1}(x)$ (o que corresponde a fixar a unidade dessa fibra) : escrevemos τ_p para a aplicação

$$\Omega(\pi p) \longrightarrow G$$

determinada por

$$p\tau_p(a) = LH_p(a)(1)$$

A escolha de outro qualquer ponto q na mesma fibra de p, digamos $p = R_g q$, implica por $R_g \circ LH_p(a) = LH_{R_g p}(a)$ a identidade

$$\tau_{pg} = \operatorname{Ad}(g^{-1})\tau_p$$

Em outras palavras, construímos uma correspondência entre fibrados G-principais com conexão sobre M e tipos de isomorfismo de representações de $\Omega(x)$ em G. No que segue, analisaremos essa correspondência em maior detalhe.

Um primeiro incômodo aparente da construção apresentada é a escolha arbitrária de um ponto base x. Dedicamo-nos a mostrar que tal escolha (assim como outras que discutiremos mais adiante) é imaterial : suponhamos dados pontos p e q sobre fibras distintas, e um caminho λ entre πp e πq. É evidente então que

$$\begin{aligned} \Omega(\pi q) &\longrightarrow \Omega(\pi p) \\ a &\longmapsto \lambda a \lambda^{-1} \end{aligned}$$

determina um isomorfismo entre esses dois grupos. Consideremos $\tau_p(\lambda) \in \pi^{-1}(\pi q)$, que é da forma qg para algum $g \in G$. Então

$$LH_p(\lambda a \lambda^{-1}) = gLH_q(a)g^{-1}$$

i.e., vale

$$\tau_q = \operatorname{Ad}(\tau_p(\lambda)^{-1})\tau_p$$

o que mostra que o tipo de isomorfismo de τ_p é constante sobre P. Um outro tipo de invariância que deveríamos ser capazes de mostrar é sobre o tipo de isomorfismo de (P,Γ). Mais especificamente : se (P',Γ') é um outro fibrado G-principal com conexão sobre M, e construímos representações $\tau, \tau' : \Omega(x) \longrightarrow G$ a partir dos dados de (P,Γ) e (P',Γ'), respectivamente, terão τ e τ' o mesmo tipo de isomorfismo ? A resposta é *sim*; se $(F,\varphi) : P \longrightarrow P'$ é um isomorfismo de fibrados G-principais com conexão (i.e., além de ser um isomorfismo de fibrados principais, (F,φ) mapeia a distribuição Γ sobre a distribuição Γ') e $a \in C(x)$, é fácil ver que

$$LH'_{\varphi(p)}(a) = F \circ LH_p(a)$$

e portanto

$$\tau'_{\varphi(p)} = \varphi \circ \tau_p$$

onde φ é um automorfismo de G, o que termina de mostrar que nossa correspondência desce a tipos de isomorfismo de fibrados G-principais com conexão. Desejamos mostrar que essa correspondência é, em realidade, *biunívoca*. Comecemos nossas considerações pela ação óbvia de $\Omega(x)$ em $C(x)$:

$$\begin{aligned} C(x) \times \Omega(x) &\longrightarrow C(x) \\ (\lambda, a) &\longmapsto a^{-1}\lambda \end{aligned}$$

Essa ação é claramente livre[2], e temos

$$\begin{aligned} \mathsf{ev}_1 : C(x) &\longrightarrow M \\ \mathsf{ev}_1 : \lambda &\mapsto \lambda(1) \end{aligned}$$

que é preservada pela ação de $\Omega(x)$. Trata-se de um fibrado $\Omega(x)$-principal, cf. [16]. Tomemos então uma representação (contínua)

$$\rho : \Omega(x) \longrightarrow G$$

e definamos o quociente

$$\begin{aligned} P_\rho &= C(x) \times G / \sim \\ (\lambda, g) &\sim (a^{-1}\lambda, \rho(a)g) \end{aligned}$$

onde a percorre $\Omega(x)$. Essa é uma variedade diferencial em que G age naturalmente à direita :

$$\begin{aligned} P_\rho \times G &\longrightarrow P_\rho \\ ([(\lambda, g)], h) &\longmapsto [(\lambda, gh)] \end{aligned}$$

Como $(\lambda, gh) = (a^{-1}\lambda, \rho(a)g) \Longrightarrow a = 1 \Longrightarrow h = 1$, essa ação é livre, com quociente P_ρ/G precisamente M. Observemos que se nos é dado ponto $[(\lambda, g)] \in \pi^{-1}(y)$ (e portanto λ é caminho entre x e y), todos os pontos de $\pi^{-1}(y)$ se atingem mediante a ação de G, e $P_\rho \longrightarrow M$ é localmente um produto G-equivariante (decorrência imediata de ser $C(x) \longrightarrow M$ fibrado $\Omega(x)$-principal). Definimos pois fibrado G-principal $P_\rho \longrightarrow M$, em que podemos definir uma conexão Γ_ρ determinando que levantamentos de curvas em M chamamos de *horizontais*. O procedimento é o seguinte : suponhamos que γ seja curva em M ligando y a z, e fixemos um qualquer λ em $C(x)$ que termine em y. Então $[(\lambda, g)]$ determina qualquer ponto em $\pi^{-1}(y)$ mediante escolha adequada de g. Se denotamos por γ_t (a reparametrização d') o caminho γ restrito a $[0, t]$, se $t > 0$, e $\gamma_0 = y$, definimos $LH^\rho_{[(\lambda,g)]}(\gamma)$ por

$$LH^\rho_{[(\lambda,g)]}(\gamma) : t \longmapsto [(\lambda\gamma_t, g)]$$

Essa definição claramente independe do representante $[(\lambda, g)]$ escolhido; dado um qualquer outro $[(a^{-1}\lambda, \rho(a)g)]$ os 'levantamentos horizontais' $t \longmapsto [(\lambda\gamma_t, g)]$ e $t \longmapsto [(a^{-1}\lambda\gamma_t, \rho(a)g)]$ coincidem. Essa construção de fato determina uma conexão porque estabelece correspondência biunívoca entre curvas 'horizontais' que principiam num dado ponto p da fibra, e curvas quaisquer que começam em πp, e porque $R_h \circ LH^\rho_{[(\lambda,g)]} = LH^\rho_{[(\lambda,gh)]}$. Portanto construímos, a partir de uma representação $\rho : \Omega(x) \longrightarrow G$, um fibrado G-principal com conexão $P_\rho \longrightarrow M$. Uma primeira observação importante é a de que o tipo de isomorfismo de (P_ρ, Γ_ρ) só depende do tipo de isomorfismo de ρ. Pois se ao invés de tomarmos ρ escolhêssemos $\rho' = h\rho h^{-1}$, nossos fibrados (P_ρ, Γ_ρ) e $(P_{\rho'}, \Gamma_{\rho'})$ seriam isomorfos, já que

$$\begin{aligned} \psi : C(x) \times G &\longrightarrow C(x) \times G \\ \psi(\lambda, g) &= (\lambda, hgh^{-1}) \end{aligned}$$

determina aplicação $P_\rho \longrightarrow P_{\rho'}$:

$$\psi\left([(\lambda, g)]\right) a = (a^{-1}\lambda, \rho'(a)hgh^{-1}) = (a^{-1}\lambda, h\rho(a)gh^{-1}) = \psi([(\lambda, g)]a)$$

[2]Existe uma questão tecnicamente mais sofisticada quanto a essas duas variedades de dimensão infinita. Para obter uma estrutura diferencial em $C(x)$ precisamos identificar dois caminhos se eles diferem por reparametrização, i.e., se diferem por um homeomorfismo orientado $I \longrightarrow I$; cf. [16]

que é evidente isomorfismo de fibrados G-principais, e que ψ é compatível com as conexões envolvidas por conta da identidade :

$$LH^{\rho}_{\psi([\lambda,g])}(\gamma)(t) = [(\lambda\gamma_t, hgh^{-1})] = \psi\left(LH^{\rho'}_{([\lambda,g])}(\gamma)(t)\right)$$

E se tivéssemos começado com uma representação de $\Omega(y)$ ao invés de uma de $\Omega(x)$? Poderíamos gerar fibrados com conexão com tipo de isomorfismo distinto ? A verificação de que isso não ocorre passa pelas constatações que seguem. Em primeiro lugar, concatenação à esquerda por um caminho λ entre x e y define um difeomorfismo $\Lambda : C(y) \longrightarrow C(x)$ que preserva o ponto final, e conjugação por λ define isomorfismo $\mathrm{Ad}(\lambda) : \Omega(y) \longrightarrow \Omega(x)$. Observemos que $\Lambda(b^{-1}\gamma) = \lambda b^{-1}\gamma = \left(\lambda b\lambda^{-1}\right)^{-1}\lambda\gamma = \Lambda(\gamma)\,(\mathrm{Ad}(\lambda)b)$, i.e., $(\Lambda, \mathrm{Ad}(\lambda)) : C(y) \longrightarrow C(x)$ é isomorfismo de fibrados principais sobre M. Supondo que construímos $(P_{\rho'}, \Gamma_{\rho'})$ a partir de uma representação $\rho' : \Omega(y) \longrightarrow G$, definimos $\rho : \Omega(x) \longrightarrow G$ por

$$\rho(a) = \rho'(\lambda^{-1}a\lambda)$$

Então observamos que $\Lambda \times 1$ desce a morfismo de fibrados principais $P_{\rho'} \longrightarrow P_\rho$, pois

$$\begin{aligned}\Lambda \times 1([\gamma, g]_{\rho'}) = ([\lambda\gamma, g]_\rho) &= ([(\mathrm{Ad}(\lambda)b)^{-1}\lambda\gamma, \rho(\mathrm{Ad}(\lambda)b)g]_\rho) = \\ &= \Lambda \times 1([b^{-1}\gamma, \rho'(b)g]_{\rho'})\end{aligned}$$

que é compatível com as conexões :

$$(\Lambda \times 1) \circ LH^{\rho'}_{[\gamma,g]_{\rho'}}(\delta) = LH^{\rho}_{[\lambda\gamma,g]_\rho}(\lambda\delta)$$

de onde se infere que (P_ρ, Γ_ρ) e $(P_{\rho'}, \Gamma_{\rho'})$ têm o mesmo tipo de isomorfismo. Desejamos agora mostrar que as correspondências que estabelecemos entre tipos de isomorfismo de fibrados G-principais com conexão sobre M e tipos de isomorfismo de representações de $\Omega(\mathrm{pt}) \longrightarrow G$ são mutuamente inversas. Comecemos com uma tal representação $\rho : \Omega(\mathrm{pt}) \longrightarrow G$, e construamos (P_ρ, Γ_ρ). Pelo que expusemos, é suficiente mostrar que a holonomia de (P_ρ, Γ_ρ) num dado ponto é isomorfa a ρ. Fixemos então $p = [(\mathrm{pt}, g)]$ na fibra sobre pt, tomemos laço $a \in \Omega(\mathrm{pt})$ e percebamos que seu levantamento horizontal é

$$t \longmapsto [(a_t, g)]$$

donde

$$\begin{aligned}p\tau_p(a) = [(a, g)] &= [(\mathrm{pt}, \rho(a)g)] \\ &\Longrightarrow g\tau_p(a)g^{-1} = \rho(a)\end{aligned}$$

e desse fato recuperamos (o tipo de isomorfismo de) ρ. Se começamos com (P, Γ), dele construímos a holonomia $\rho : \Omega(\mathrm{pt}) \longrightarrow G$ e então geramos (P_ρ, Γ_ρ), é simples construir um isomorfismo ψ entre (P_ρ, Γ_ρ) e (P, Γ). Para tanto basta fixar um ponto p em P sobre pt e impor

$$\psi\left([(\lambda, g)]\right) = LH_{pg}(\lambda)(1)$$

A boa-definição dessa aplicação segue de

$$\begin{aligned}LH_{p\rho(a)g}(a^{-1}\lambda) &= LH_p(a^{-1})LH_{p\rho(a)^{-1}}(\lambda)\rho(a)g \\ &\Longrightarrow LH_{p\rho(a)g}(a^{-1}\lambda)(1) = LH_{pg}(\lambda)\end{aligned}$$

É evidente que ψ define então sobrejeção suave sobre P, e ψ é também injetora pois se

$$\psi\left([(\lambda, g)]\right) = \psi\left([(\lambda', g')]\right)$$

temos que $\lambda'\lambda^{-1} \in \Omega(\mathrm{pt}) \Longrightarrow \psi\left([(\lambda, g)]\right) = \psi\left([(\lambda', \rho(\lambda'\lambda^{-1})g)]\right)$ e portanto os levantamentos horizontais de λ', iniciados em pg' e em $p\rho(\lambda'\lambda^{-1})g$ coincidem; i.e., $g' = \rho(\lambda'\lambda^{-1})g$ e logo $[(\lambda, g)] = [(\lambda', g')]$. Que ψ determina um isomorfismo de fibrados G-principais segue imediatamente da identidade

$$LH_{pg}(\gamma) = LH_p(\gamma)g$$

e a compatibilidade com as conexões envolvidas provém da relação

$$\psi\left([(\gamma_t, g)]\right) = LH_{pg}(\gamma_t)$$

i.e., ψ mapeia curvas horizontais em curvas horizontais. Em resumo :

Teorema 1. *Dada variedade M, existe correspondência biunívoca entre tipos de isomorfismo de fibrados G-principais com conexão sobre M, e tipos de isomorfismo de representações do espaço de laços $\Omega(\mathrm{pt})$ (pt um qualquer ponto de M) em G.*■

O belo livro de Kobayashi e Nomizu [29] traz um estudo detalhado e acessível sobre fibrados principais e associados e suas conexões. As questões delicadas envolvendo a estrutura diferencial de $C(x)$ são discutidas, por exemplo, no artigo de Hamilton [16].

1.2 Teoremas de Integrabilidade e Conexões Planas

Uma distribuição (regular) D de posto n em uma variedade $(n+k)$-dimensional M é uma atribuição suave de subespaços n-dimensionais tangentes a M. Ou seja : para casa $p \in M$ temos um n-plano $D_p \subset T_pM$, e a regra $p \longmapsto D_p$ é suave. Localmente, D é gerado por n campos vetoriais $X_1, ..., X_n$ de M, i.e., cada p está num aberto onde são definidos n tais campos, e o subespaço linear que eles geram em cada q de U é precisamente D_q. Dualmente, uma distribuição D é sempre localmente descritível como o núcleo de uma 1-forma de posto constante $\omega \in \Gamma\left(T^*M \otimes V\right)$, para algum espaço vetorial V.

Uma subvariedade N de M é dita *integral* para a distribuição D se $T_pN = D_p$ para cada p em N, e *integral maximal* se N não é subvariedade própria de uma outra subvariedade integral para D. A distribuição se diz *integrável* se todo $p \in M$ mora numa subvariedade integral maximal.

Evidentemente, 1-distribuições nada mais são que campos vetoriais suaves, e o teorema clássico das EDOs diz que, por cada ponto de uma 1-distribuição X passa uma e uma única subvariedade integral maximal. Em outras palavras, toda 1-distribuição é integrável. Outro exemplo de distribuição são conexões em fibrados principais. No entanto, à diferença de 1-distribuições, distribuições de posto mais alto nem sempre são integráveis.

Exemplo 2. *Consideremos o campo vetorial X em $\mathbb{R}^3$, onde*

$$X(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 1 \end{pmatrix}$$

e D a 2-distribuição $D_p = X(p)^{\perp}$. Então não existe variedade integral de D passando por 0, pois se N fosse uma tal variedade, poderíamos encontrar um laço pequeno γ em N que circunde o eixo de simetria z — mas a componente z da velocidade de γ deve ser positiva em cada ponto, e portanto γ não pode 'fechar'.□

Uma condição evidentemente necessária para a existência de subvariedades integrais para uma distribuição D é involutividade : se D é gerada por $X_1, ..., X_n$ num aberto U, os colchetes de Lie $[X_i, X_j]$ se devem escrever como combinação linear dos X_i's. Na realidade, essa condição é também suficiente para que D seja integrável:

Proposição 3. *D é integrável quando é involutiva, e nesse caso apenas.*

Demonstração. De fato, a propriedade de uma distribuição ser ou não integrável é obviamente local, e podemos portanto nos restringir ao caso $M = \mathbb{R}^{n+k}$. Observemos que $D = \mathsf{Span}\{X_1, ..., X_n\}$ ser integrável num entorno da origem significa que aí existe um sistema de coordenadas $x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+k}$ em que $D = \mathsf{Span}\{\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\}$. Supondo a distribuição involutiva, construiremos tais coordenadas por indução sobre o posto de D. O caso $n = 1$ é, como já dissemos, o Teorema das EDOs. Para o caso $n > 1$, aplicamos o teorema para supor que $X_n = \frac{\partial}{\partial x_n}$. Podemos supor que a coordenada x_n é constante na direção dos campos $X_1, ..., X_{n-1}$, pois do contrário corrigimos os X_i's ($i < n$) por meio da regra

$$X_i \longmapsto X_i - X_i(x_n)X_n \text{ para } i < n$$

Segue daí que x_n é constante na direção de $[X_i, X_j]$ sempre que i e j forem menores que n, pois $[X_i, X_j]x_n = X_i\,(X_j x_n) - X_j\,(X_i x_n)$. Se D' denota $\mathsf{Span}\{X_1, ..., X_{n-1}\}$, concluímos que, módulo D',

$$[X_i, X_j] = f_{ij} X_n$$

novamente para $i, j < n$; como $[X_i, X_j]x_n = 0$ segue que $f_{ij} = 0$ para tais i, j. Portanto a distribuição D' também é involutiva. Pela hipótese indutiva, existe sistema de coordenadas $y_1, ..., y_{n+k}$ em que $X_1 = \frac{\partial}{\partial y_1}, ..., X_{n-1} = \frac{\partial}{\partial y_{n-1}}$. Pensando x_n agora como função $x_n = x_n(y_1, ..., y_{n+k})$, a relação $X_i(x_n) = 0$ para $i < n$ implica que

$$\frac{\partial x_n}{\partial y_i} = 0 \text{ se } i < n$$

Escrevemos então X_n em termos das novas coordenadas :

$$X_n = A_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + ... + A_{n+k} \frac{\partial}{\partial y_{n+k}}$$

Sabemos que se $i < n$, $[X_i, X_n] = f_i X_n$ módulo D' para alguma função f_i; mas nas novas coordenadas

$$[X_i, X_n] = \frac{\partial A_1}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial y_1} + ... + \frac{\partial A_{n+k}}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial y_{n+k}}$$

e de $\frac{\partial x_n}{\partial y_i} = 0$ se $i < n$ segue então que tais f_i's são todos nulos. Isso significa que cada colchete $[X_i, X_n]$ $(i < n)$ está em D', e portanto

$$\frac{\partial A_n}{\partial y_i} = ... = \frac{\partial A_{n+k}}{\partial y_i} \text{ para } i < n$$

i.e., as funções $A_n, ..., A_{n+k}$ não dependem das coordenadas $y_1, ..., y_{n-1}$. Não sabemos se o mesmo ocorre com $A_1, ..., A_{n-1}$, mas se esse não for o caso trocamos X_n por

$$X'_n = X_n - \left(A_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + ... + A_{n-1} \frac{\partial}{\partial y_{n-1}} \right)$$

o que é lícito já que $\mathsf{Span}\{X_1, ..., X_{n-1}, X'_n\}$ continua a ser D. Mas agora

$$X'_n = A_n(y_n, ..., y_{n+k}) \frac{\partial}{\partial y_n} + ... + A_{n+k}(y_n, ..., y_{n+k}) \frac{\partial}{\partial y_{n+k}}$$

é um campo que não se anula numa vizinhança da origem em $\mathbb{R}^{k+1}$, e novamente pela hipótese indutiva é possível escolher sistema de coordenadas $z_n, ..., z_{n+k}$ em $\mathbb{R}^{k+1}$ em que $X'_n = \frac{\partial}{\partial z_n}$. Declaramos

$$w_i = y_i \text{ se } i < n$$
$$w_i = z_i \text{ se } i \geqslant n$$

e agora nas novas coordenadas $w_1, ..., w_{n+k}$ temos $D = \mathsf{Span}\{\frac{\partial}{\partial w_1}, ..., \frac{\partial}{\partial w_n}\}$, i.e., D é integrável. ■

Recorde que a derivada exterior de uma p-forma η pode ser expressa por

$$d\eta(X_0, ..., X_p) = \sum_i (-1)^i X_i \eta(X_0, ..., \widehat{X_i}, ...X_p) +$$
$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \eta([X_i, X_j], X_0, ..., \widehat{X_i}, ..., \widehat{X_j}, ..., X_p)$$

Em particular, $d\omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y])$. Portanto, se X e Y pertencem à distribuição D, $d\omega(X, Y) + \omega([X, Y]) = 0$, e a condição de integrabilidade para D se converte em

$$\ker \omega \text{ integrável } \iff [\omega(X) = 0 = \omega(Y) \implies d\omega(X, Y) = 0]$$

Uma conexão Γ num fibrado G-principal $P \longrightarrow M$ é dita *plana* se sua 2-forma de curvatura F_Γ é identicamente nula; i.e., se

$$\begin{aligned} F_\Gamma(X,Y) &= d\omega(X,Y) + \omega \wedge \omega(X,Y) = d\omega(X,Y) + \omega(X)\omega(Y) - \omega(Y)\omega(X) \\ &= d\omega(X,Y) + [\omega(X), \omega(Y)] = 0 \end{aligned}$$

para todos X, Y campos em P. Se tomamos X e Y campos horizontais, temos $\omega(X) = \omega(Y) = 0$, e $\Omega(X,Y) = 0$ significa então que $d\omega(X,Y) = 0$ – ou seja, a distribuição Γ é integrável se e só se é plana. Seja então

$$\rho : \Omega(\mathrm{pt}) \longrightarrow G$$

a representação associada a Γ. Se $H : I \times I \longrightarrow M$ é uma homotopia $\mathsf{rel}\ \partial I$ entre γ e o caminho constante em pt, podemos levantar γ a $LH_p(\gamma)$ e pt a p, e a existência de uma variedade integral N para Γ passando por p diz que também a homotopia H pode ser levantada horizontalmente, ou seja, que a homotopia se dá em N, e em particular $\tau_p(\gamma)$ e $\tau_p(\mathrm{pt})$ coincidem. Isso significa que ρ fatora por homotopia $\mathsf{rel}\ \partial I$, e é portanto da forma

$$\rho : \pi_1(M, \mathrm{pt}) \longrightarrow G$$

Conseqüência imediata é o

Teorema 4. *Dada variedade M, existe correspondência biunívoca entre tipos de isomorfismo de fibrados G-principais com conexão plana sobre M, e tipos de isomorfismo de representações de $\pi_1 M$ em G.*■

> A exposição desta seção se baseia naquela apresentada em [41], de onde também foi retirado o exemplo.

1.3 Fibrados Universais

Consideremos um fibrado vetorial $E \xrightarrow{\pi} M$ com fibra $\mathbb{C}^n$, e seja $f : M' \longrightarrow M$ uma aplicação de uma outra variedade M' em M. Definimos f^*E por

$$f^*E = \{(e, m') \in E \times M' : \pi e = fm'\}$$

e aplicações $\pi' : f^*E \longrightarrow M'$, $F : f^*E \longrightarrow E$ por restrição a f^*E das projeções $E \longleftarrow E \times M' \longrightarrow M'$. É fácil ver que também $\pi' : f^*E \longrightarrow M'$ é um fibrado vetorial sobre M', de mesmo posto que $E \longrightarrow M$, que o diagrama

$$\begin{tikzcd} f^*(E) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi'"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ M' \arrow[r, "f"] & M \end{tikzcd}$$

é comutativo, e que qualquer outro fibrado vetorial $E' \longrightarrow M'$ que torne o diagrama acima comutativo passa unicamente por $f^*E \longrightarrow M'$:

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\ & f^*(E) \arrow[r, "F"'] \arrow[d, "\pi'"] & E \arrow[d, "\pi"] \\ & M' \arrow[r, "f"] & M \end{tikzcd}$$

Chamamos $f^*E \longrightarrow M'$ de *pullback* , ou *fibrado induzido*, de E por f. A caracterização universal acima mostra que $f^*E \longrightarrow M'$ é único módulo isomorfismos de fibrados vetoriais sobre M' pelos argumentos categóricos que correm à boca pequena. Feita essa observação, é imediato que se temos $M'' \longrightarrow M' \longrightarrow M$ e induzimos a partir dessa composição um fibrado em M'', ele é isomorfo ao fibrado obtido puxando E a M'

pelo segundo mapa, e depois puxando o resultado a M'' pelo segundo. É evidente também que id : $M \longrightarrow M$ puxa um fibrado $E \longrightarrow M$ para si mesmo. Em suma, temos correspondência

$$\begin{aligned} M^{M'} &\longrightarrow \mathrm{Vect}(M')^{\mathrm{Vect}(M)} \\ f &\longmapsto f^* \end{aligned}$$

functorial contravariante. Afirmamos que :

Proposição 5. *Essa correspondência fatora por $M^{M'} \longrightarrow [M', M]$, i.e., duas aplicações homotópicas $M' \longrightarrow M$ induzem fibrados isomorfos.*

Demonstração. Suponhamos então que $H : M' \times I \longrightarrow M$ seja homotopia entre f e f'.

(A) *Dado $E \in \mathrm{Vect}(M)$, $H^*E \in \mathrm{Vect}(M' \times I)$ admite cobertura trivializante por abertos da forma $U_\alpha \times I$.*

Seja $\{U_\alpha\}$ cobertura de M' tal que, para cada α, há cobertura do intervalo I por intervalos abertos V^α_β em que $H^*E|_{U_\alpha \times V^\alpha_\beta}$ é trivial. Por compacidade de I, fixado um tal α só precisamos considerar um número finito de tais β's; digamos, $V_0, V_1, ..., V_n$. Também é simples ver que podemos encontrar um intervalo fechado F_i dentro de cada V_i que cobrem I, e que sem perda de generalidade podemos supor $F_0 = [0, r]$ e $F_1 = [r, s]$. Então

$$U_\alpha \times F_i \times \mathbb{C}^n \underset{\simeq}{\xrightarrow{\varphi_i}} H^*E|_{U_\alpha \times F_i}$$

são as correspondentes trivializações, percebemos que

$$\varphi_1^{-1} \circ \varphi_0 : U_\alpha \times \{r\} \times \mathbb{C}^n \longrightarrow U_\alpha \times \{r\} \times \mathbb{C}^n$$

é automorfismo do fibrado trivial, e portanto é da forma

$$\varphi_1^{-1} \circ \varphi_0 : (x, r, v) \longmapsto (x, r, g(x)v)$$

para alguma $g : U_\alpha \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$, e portanto é restrição de um automorfismo

$$\begin{aligned} \varphi : U_\alpha \times [0, s] \times \mathbb{C}^n &\longrightarrow U_\alpha \times [0, s] \times \mathbb{C}^n \\ (x, r, v) &\longmapsto (x, r, g(x)v) \end{aligned}$$

Assim, coincidem em $U_\alpha \times \{r\}$ as trivializações

$$\begin{aligned} \varphi_0 : U_\alpha \times [0, r] \times \mathbb{C}^n &\longrightarrow H^*E|_{U_\alpha \times [0,r]} \\ \varphi_1 \circ \varphi : U_\alpha \times [r, s] \times \mathbb{C}^n &\longrightarrow H^*E|_{U_\alpha \times [r,s]} \end{aligned}$$

e portanto colam a trivialização de $H^*E|_{U_\alpha \times [0,s]}$.

Repetindo esse procedimento com os demais F_j (tomar F_2 que intercepta $[0, s]$ só em s etc.) acabamos por produzir trivialização de $H^*E|_{U_\alpha \times I}$.

(B) Como M' se supõe paracompacto, podemos tomar cobertura localmente finita $\{U_\alpha \times I\}$ sobre a qual H^*E se trivializa e partição da unidade $\{\rho_\alpha\}$ associada à cobertura $\{U_\alpha\}$. Com isso queremos dizer que : (1) cada $\rho_\alpha : M' \longrightarrow I$ é contínua e tem suporte em U_α; (2) Para cada $x \in M'$, $\rho_\alpha(x)$ só é não-nulo para um número finito de α's; e (3) $\sum\limits_\alpha \rho_\alpha = 1$ (o que faz sentido por conta de (2)). Em virtude de M' ter base enumeravel, podemos supor que o índice α varia sobre $\mathbb{N}$, o que nos permite definir

$$\begin{aligned} \psi_0 &:= 0 \\ \psi_n &:= \sum_{\alpha \leqslant n} \rho_\alpha \\ \mathrm{Graph}\,(\psi_n) &= \{(x, \psi_n(x)) \in M' \times I\} \end{aligned}$$

Notemos que existe aplicação natural

$$\mathrm{Graph}\,(\psi_n) \longrightarrow \mathrm{Graph}\,(\psi_{n-1})$$

e que se trata de um homeomorfismo. Como também ψ_n coincide com ψ_{n-1} em $M'\backslash U_n$, segue que

$$H^*E|_{\mathrm{Graph}(\psi_n)\backslash U_n\times I} = H^*E|_{\mathrm{Graph}(\psi_{n-1})\backslash U_n\times I}$$

Mas $H^*E|_{U_n\times I}$ é trivial, de modo que existe isomorfismo

$$\begin{tikzcd} H^*E|_{\mathrm{Graph}(\psi_n)\cap U_n\times I} \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & H^*E|_{\mathrm{Graph}(\psi_{n-1})\cap U_n\times I} \arrow[d] \\ \mathrm{Graph}\,(\psi_n)\cap U_n\times I \arrow[r] & \mathrm{Graph}\,(\psi_{n-1})\cap U_n\times I \end{tikzcd}$$

e portanto podemos colar

$$H^*E|_{\mathrm{Graph}(\psi_n)\backslash U_n\times I} = H^*E|_{\mathrm{Graph}(\psi_{n-1})\backslash U_n\times I}$$

e

$$H^*E|_{\mathrm{Graph}(\psi_n)\cap U_n\times I} = H^*E|_{\mathrm{Graph}(\psi_{n-1})\cap U_n\times I}$$

num único isomorfismo

$$\begin{tikzcd} H^*E|_{\mathrm{Graph}(\psi_n)} \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & H^*E|_{\mathrm{Graph}(\psi_{n-1})} \arrow[d] \\ \mathrm{Graph}\,(\psi_n) \arrow[r] & \mathrm{Graph}\,(\psi_{n-1}) \end{tikzcd}$$

(C) Quando M' é compacta, $\psi_n = 1$ para algum n, e então $h = h_1\circ ...\circ h_n$ define isomorfismo

$$H^*E|_{M'\times\{0\}} = H^*E|_{\mathrm{Graph}(\psi_0)} \simeq H^*E|_{\mathrm{Graph}(\psi_n)} = H^*E|_{M'\times\{1\}}$$

Se M' não é compacta, observamos que cada seu ponto x tem uma vizinhança V que só intercepta um número finito de U_α, digamos, $U_{\alpha_1}, ..., U_{\alpha_n}$, e portanto

$$h(e) = (h_{\alpha_1}|_V)\circ ...\circ (h_{\alpha_n}|_V)$$

define h para e em fibra sobre x. ■

Definamos $\mathrm{Grass}_n(\mathbb{C}^{n+k})$, a Grassmanianna de n-planos em $\mathbb{C}^{n+k}$, como a coleção dos subespaços lineares de dimensão n em $\mathbb{C}^{n+k}$ (que passam ela origem), munida da topologia induzida pelo mapa que a cada conjunto de n vetores linearmente independentes em $\mathbb{C}^{n+k}$ determina o subespaço que eles determinam. Pomos

$$\gamma^n(k) = \{(l,v)\in \mathrm{Grass}_n(\mathbb{C}^{n+k})\times\mathbb{C}^{n+k} : v\in l\}$$

e definimos $\gamma^n(k)\longrightarrow \mathrm{Grass}_n(\mathbb{C}^{n+k})$ pela restrição da projeção no primeiro fator. Esse é o fibrado *tautológico* sobre $\mathrm{Grass}_n(\mathbb{C}^{n+k})$. Observemos as inclusões naturais

$$\mathrm{Grass}_n(\mathbb{C}^{n+k})\hookrightarrow \mathrm{Grass}_n(\mathbb{C}^{n+k+1})$$
$$\gamma^n(k)\hookrightarrow\gamma^n(k+1)$$

através das quais podemos definir

$$\mathrm{Grass}_n(\mathbb{C}) = \varinjlim \mathrm{Grass}_n(\mathbb{C}^{n+k})$$
$$\gamma^n = \varinjlim \gamma^n(k)$$

a que se dá a topologia do limite direto.

Afirmamos que :

Proposição 6. *$\gamma^n \longrightarrow \mathrm{Grass}_n(\mathbb{C})$ é um fibrado universal no seguinte sentido : se $E\longrightarrow M$ é um fibrado vetorial complexo de posto n, então E é isomorfo a $f^*(\gamma^n)$ para algum $f: M\longrightarrow \mathrm{Grass}_n(\mathbb{C})$.*

Demonstração. Suponhamos que nos sejam dados n-fibrado vetorial $E \longrightarrow M$ e aplicação contínua $g : E \longrightarrow \mathbb{C}^m$ que é injetora em cada fibra. Então $g(E_x) \in \mathrm{Grass}_n(\mathbb{C}^m)$. A regra $f : x \longmapsto g(E_x)$ define aplicação contínua $M \longrightarrow \mathrm{Grass}_n(\mathbb{C}^m)$ que é recoberta por

$$\begin{gathered} E \longrightarrow \gamma^n(m-n) \\ E_x \ni e \longmapsto (f(x), g(e)) \end{gathered}$$

Podemos agora considerar $f^*\left(\gamma^n(m-n)\right)$, que é então isomorfo a E. Portanto todos os n-fibrados vetoriais que admitem injeção linear fibra-a-fibra em $\mathbb{C}^m$ são induzidos de $\gamma^n(m-n)$ por alguma aplicação $M \longrightarrow \mathrm{Grass}_n(\mathbb{C}^m)$. Mostremos então que todo n-fibrado vetorial sobre M (paracompacta) admite uma tal injeção quando tomamos $m \longrightarrow \infty$.

O primeiro caso a considerar é quando E é trivial; nesse caso se obtém uma óbvia g tomando $m = n$. O segundo caso é o de quando existe cobertura trivializante finita $U_1, ..., U_k$ de $E \longrightarrow X$; uma partição da unidade subordinada a essa cobertura permite definir g com $m = nk$. No caso geral, a cobertura $\{U_i\}$ é infinita e g se define em $\bigoplus_i \mathbb{C}^n$.

Portanto

$$[M, \mathrm{Grass}_n(\mathbb{C})] \ni f \longmapsto f^*\gamma^n \in \mathrm{Vect}(M)$$

é uma bijeção. Também é simples ver que se temos $h : M \longrightarrow M'$, os morfismos induzidos

$$\mathrm{Vect}(M)' \longrightarrow \mathrm{Vect}(M)$$

e

$$[M', \mathrm{Grass}_n(\mathbb{C})] \longrightarrow [M, \mathrm{Grass}_n(\mathbb{C})]$$

se correspondem através da bijeção que definimos, de modo que se trata de uma bijeção natural. ■

Dizemos então que $\gamma^n \longrightarrow \mathrm{Grass}_n(\mathbb{C})$ é o *fibrado de n-planos universal*.

Observação 7. *O argumento permanece inalterado se, ao longo de cada passo, substituirmos $\mathbb{C}$ por $\mathbb{R}$.*

Trata-se na verdade de um fato muito mais geral. Dado um grupo de Lie G, construímos um fibrado G-principal $EG \longrightarrow BG$ com a propriedade de que todo fibrado G-principal $P \longrightarrow M$ é induzido de $EG \longrightarrow BG$ por uma aplicação $M \longrightarrow BG$. Dados espaços topológicos X e Y, sua junção $X * Y$ é

$$X * Y = \frac{X \times Y \times I}{\sim}$$

onde $\{x\} \times Y \times \{0\} \sim \{x'\} \times Y \times \{0\}$ e $X \times \{y\} \times \{1\} \sim X \times \{y'\} \times \{1\}$. A principal utilidade do produto de junção é a seguinte : se X e Y forem complexos CW $n-$ e $m-$conexos, respectivamente, então $X * Y$ é $(n+m+1)$-conexo. No caso de um grupo de Lie conexo G, sua n-ésima junção $G_{*(n)} = G * G * ... * G$ é $(n-1)$-conexa, e possui óbvia ação à direita por G. Definimos EG por

$$EG = \varinjlim G_{*(n)}$$

que é então contráctil e carrega ação natural à direita por G. Então pomos $BG = EG/G$ e temos fibrado G-principal natural $EG \longrightarrow BG$. O fato que esse fibrado é universal segue da contractibilidade de EG : se $P \longrightarrow M$ é um fibrado G-principal, é possível encontrar uma aplicação G-equivariante $P \longrightarrow EG$ (cf. seção sobre teoria de obstrução), e portanto um diagrama da forma

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi'"'] & EG \arrow[d, "\pi"] \\ M' \arrow[r, "f"] & BG \end{tikzcd}$$

e portanto P recobre (G-equivariantemente) f^*EG, e a ele é isomorfo (já que define isomorfismo fibra-a-fibra). Observamos ainda que EG ser contráctil significa que, na seqüência exata longa de fibração

$$... \longrightarrow \pi_k G \longrightarrow \pi_k EG \longrightarrow \pi_k BG \longrightarrow \pi_{k-1} G \longrightarrow ...$$

temos isomorfismos $\pi_k BG \xrightarrow{\simeq} \pi_{k-1} G$ para cada k. Portanto, se G é n-conexo, BG é $(n+1)$-conexo. Em particular, se G é contráctil, BG é contráctil (e portanto todo fibrado G-principal é trivial).

Detalhes mais precisos podem ser encontrados em [23], [33], [46] e [32].

1.4 Fibrado de Poincaré

Seja V um espaço vetorial real de dimensão par (com a estrutura complexa e métrica usuais) e Λ um seu reticulado maximal. Definamos o reticulado dual por $\Lambda^\vee = \{\eta \in V^\vee : \eta(\Lambda) \in \mathbb{Z}\}$, e J e $J^\vee$ por V/Λ e $V^\vee/\Lambda^\vee$, de maneira que as projeções $V \longrightarrow J$ e $V^\vee \longrightarrow J^\vee$ sejam isometrias locais. Claramente $J \simeq (S^1)^{\dim_{\mathbb{R}} V} \simeq J^\vee$ como variedades diferenciais, e ambas têm estrutura de variedade complexa. Tome $L \longrightarrow J$ um fibrado de linha (complexo) plano, com 1-forma de conexão ω. Observemos que tanto J como $J^\vee$ são grupos de Lie e admitem portanto uma trivialização natural $TJ \simeq J \times V$ (analogamente, $TJ^\vee \simeq J^\vee \times V^\vee$ e $T^\vee J \simeq J \times V^\vee$ etc) e que sob essa identificação cada $\eta \in V^\vee$ determina 1-forma a coeficientes constantes em J (dualmente, cada $\xi \in V$ define 1-forma a coeficientes constantes em $J^\vee$). Já essas 1-formas são holomorfas e paralelizam T^*J; por razões dimensionais, toda 1-forma holomorfa em J é cohomóloga a uma tal forma. Cada uma dessas 1-formas determina uma estrutura holomorfa em L, como notamos acima. Os fibrados de linha holomorfos planos sobre J são portanto triviais com conexão da forma $\bigtriangledown^\eta = d + 2\pi i\eta$; se η e η' diferem por um elemento μ do reticulado dual $\Lambda^\vee$, temos a transformação de calibre

$$\begin{aligned} g_\mu &: J \longrightarrow U(1) \\ [\xi] &\longmapsto \exp(-2\pi i < \mu, \xi >) \end{aligned}$$

de $L \longrightarrow J$ que leva ∇^η em $\nabla^{\eta+\mu}$. Portanto $J^\vee$ parametriza fibrados de linha holomorfos planos sobre J, e reciprocamente (pela dualidade óbvia). Por conveniência, denotamos por $L_\eta \longrightarrow J$ o fibrado $\mathbb{C} \times J \longrightarrow J$ com conexão $d + 2\pi i\eta$ e por $L^*_\xi \longrightarrow J^\vee$ o fibrado $\mathbb{C} \times J^\vee \longrightarrow J^\vee$ com conexão $d + 2\pi i\xi$. Um modo conveniente de agrupar essa informação é o chamado *fibrado de Poincaré* : trata-se de um fibrado holomorfo $\mathcal{P} \longrightarrow J \times J^\vee$ com as seguintes propriedades :

1. $\mathcal{P}|_{J\times\{[\eta]\}} \simeq L_\eta$
2. $\mathcal{P}|_{\{[\xi]\}} \simeq L^*_{-\xi}$

Consideramos em $\mathbb{C} \times J \times V^\vee \longrightarrow J \times V^\vee$ a 1-forma de conexão

$$J \times V^\vee \ni ([\xi], \eta) \longmapsto 2\pi i\eta$$

e a ação (livre) de $\Lambda^\vee$ nesse fibrado :

$$\mu \cdot ([\xi], \eta, \alpha) = ([\xi], \eta + \mu, g_\mu([\xi])\alpha)$$

Observamos que, cada $([\xi], [\eta])$ em $J \times J^\vee$ possui vizinhança pequena U (e.g., a imagem do produto de bolas abertas de raio $\frac{1}{2}$ de representantes pela isometria canônica $V \times V^\vee \longrightarrow J \times J^\vee$) que levanta em $J \times V^\vee$ a uma união disjunta de abertos isométricos a U,

$$\coprod_{\mu\in\Lambda^\vee} U_\mu$$

e a ação de $\Lambda^\vee \ni \mu'$ mapeia U_μ difeomorficamente sobre $U_{\mu+\mu'}$. A ação é claramente compatível (nessa parte aberta e $\Lambda^\vee$-invariante) com as transições de cartas de $\mathbb{C} \times J \times V^\vee \longrightarrow J \times V^\vee$, o que mostra que o quociente desse fibrado pela ação que acabamos de definir resulta num fibrado de linha complexo $P \longrightarrow J \times J^\vee$. Desejamos agora constatar que também a conexão definida em $\mathbb{C} \times J \times V^\vee \longrightarrow J \times V^\vee$ desce a conexão em $P \longrightarrow J \times J^\vee$. Para isso, observamos que se $(E, \nabla) \longrightarrow Y \times Z$ é um fibrado vetorial com conexão, então ∇ se recupera a partir do conhecimento de $\nabla^y = \nabla|_{\{y\}\times Z}$ e $\nabla^z = \nabla|_{Y\times\{z\}}$, para cada par $(y, z) \in Y \times Z$, pela fórmula

$$\left(\nabla_{(V_Y,V_Z)}\sigma\right)(y, z) = \left(\nabla^y_{V_Z}\sigma^y\right)(z) + \left(\nabla^z_{V_Y}\sigma^z\right)(y)$$

Tomemos então seção σ da restrição de P a $J \times \{[\eta]\}$, numa vizinhança pequena U de $[\xi]$. A cada tal seção corresponde uma única seção

$$\sigma \in \Gamma\left(\coprod_{\mu\in\Lambda^\vee} U_\mu \times \{\eta + \mu\}, \underline{\mathbb{C}}\right)$$

com a propriedade

$$g_\mu \sigma_\eta = \sigma_{\eta+\mu}$$

Por outro lado, como já notamos, vale

$$g_\mu \cdot \nabla^\eta = \nabla^{\eta+\mu}$$

donde segue que

$$\nabla^{\eta+\mu}\sigma_{\eta+\mu} = (g_\mu \cdot \nabla^\eta)\, g_\mu \sigma_\eta = g_\mu \left(\nabla^\eta \sigma_\eta\right)$$

o que significa que a coleção $\{\nabla^\eta \sigma_\eta\}_{\Lambda^\vee}$ determina seção local de 1-formas com valores em P. Portanto ∇^η desce a $\nabla^{[\eta]}$, e, nessas trivializações locais escolhidas,

$$\nabla^{[\eta]} = d + \omega_\eta$$

Por outro lado, tomemos seção σ da restrição de P a $\{[\xi]\} \times J^\vee$ no entorno de um ponto $[\eta]$ e a seção de $\mathbb{C} \times \{[\xi]\} \times V^\vee \longrightarrow \{[\xi]\} \times V^\vee$. Obtemos assim coleção $\{\sigma_{\eta+\mu} =$ seção de $\mathbb{C} \times \{[\xi]\} \times V^\vee \longrightarrow \{[\xi]\} \times V^\vee$ no entorno de $\eta + \mu\}$, relacionadas por $g_\mu \sigma_\eta = \sigma_{\eta+\mu}$. A regra de derivação covariante sobre $\{[\xi]\} \times J^\vee$ provém então de

$$\begin{aligned} g_\mu(\xi)\nabla^\xi \sigma &= \nabla^\xi g_\mu(\xi)\sigma \\ &\Longrightarrow \nabla^\xi = d - 2\pi i \xi \end{aligned}$$

o que nos fornece a descrição local

$$\begin{aligned} (\nabla\sigma)([\xi],[\eta]) &= d\sigma + 2\pi i\,(\eta - \xi) \\ &= d\sigma + 2\pi i \sum (\eta_j d\xi_j - \xi_j d\eta_j) \end{aligned}$$

Vemos daí que P não é plano (e em particular, não é topologicamente trivial); de fato, sua curvatura é dada por

$$\begin{aligned} F_\nabla([\xi],[\eta]) &= 2\pi i \sum (d\eta_j \wedge d\xi_j - d\xi_j \wedge d\eta_j) \\ &= 4\pi i \sum d\xi_j \wedge d\eta_j \end{aligned}$$

(cf. seção sobre classes de Chern).

É evidente então que $\mathcal{P} = (P, \nabla) \longrightarrow J \times J^\vee$ tem as propriedades que buscávamos.

Capítulo 2

Álgebras de Clifford

2.1 Generalidades sobre Álgebras de Clifford

Seja V espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{k}$ munido de uma forma bilinear simétrica $\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{k}$. Por conveniência notacional, $\varphi(x,x)$ será escrito como $\varphi(x)$.

Definimos a álgebra de Clifford associada ao par (V,φ) por $Cl(V,\varphi) = T(V)/I_V(\varphi)$, onde

$$T(V) = \bigoplus_{k \geqslant 0} V^{\otimes k}$$

denota a álgebra tensorial de V, e $I_V(\varphi)$ é o ideal bilateral gerado por todos os elementos da forma

$$v \otimes v - \varphi(v)1$$

onde $v \in V$. Denotamos a imagem de $v \otimes w \in T(V)$ em $Cl(V,\varphi)$ por vw; então

$$\begin{aligned} Cl(V,\varphi) \times Cl(V,\varphi) &\longrightarrow Cl(V,\varphi) \\ (x,y) &\longmapsto xy \end{aligned}$$

dá a $Cl(V,\varphi)$ estrutura de $\mathbb{k}$-álgebra associativa.

Observação 8. *Se $v, w \in V$, então*

$$vw + wv = 2\varphi(v,w) \tag{2.1}$$

Em particular, se $\{e_1, ..., e_n\}$ é $\mathbb{k}$-base φ-ortonormal de V, então $Cl(V,\varphi)$ é gerado como $\mathbb{k}$-módulo pelos produtos $e_{i_1}e_{i_1}...e_{i_k}$ $(1 \leqslant i_1 < ... < i_k \leqslant n)$ com relações

$$e_i e_j = -e_j e_i \text{ se } i \neq j \tag{2.2}$$

$$e_i^2 = 1 \tag{2.3}$$

Observemos que se $f : V \longrightarrow A$ é morfismo linear para álgebra associativa A, e $f(v)^2 = \varphi(v)$ para cada v em V, então $f(v)f(w) + f(w)f(v) = 2\varphi(v,w)$ para cada par v, w em V, e portanto a extensão linear da atribuição $v_1...v_k \longmapsto f(v_1)...f(v_k)$ define homomorfismo de $\mathbb{k}$-álgebras $f' : Cl(V,\varphi) \longrightarrow A$ por que f fatora, $f = f' \circ i$, onde i denota a composição $V \hookrightarrow T(V) \xrightarrow{\Pi} Cl(V,\varphi)$. A unicidade de f' segue do fato que seus valores em toda a álgebra $Cl(V,\varphi)$ se determinam a partir de seus valores em V. Portanto $V \xrightarrow{i} Cl(V,\varphi)$ é universal no seguinte sentido : fatora por i unicamente todo morfismo $\mathbb{k}$-linear $f : V \longrightarrow A$ com codomínio uma $\mathbb{k}$-álgebra associativa que cumpre $f(v)^2 = \varphi(v)$. Em linguagem de diagramas,

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & Cl(V,\varphi) \arrow[dl, dashed] \\ A & \end{tikzcd}$$

$$f(v)^2 = \varphi(v)$$

Notemos que essa caracterização de $(V, \varphi) \longmapsto Cl(V, \varphi)$ por uma propriedade universal garante de imediato que : (1) $Cl(V, \varphi)$ é única módulo isomorfismos de $\Bbbk$-álgebras; (2) Se $f : V_1 \longrightarrow V_2$[1] é linear e φ_2 é produto interno em V_2, f induz $f_* : Cl(V_1, f^*\varphi_2) \longrightarrow Cl(V_2, \varphi_2)$ e (3) essa correspondência é functorial, i.e., $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$, $1_* = 1$.

As observações (2) e (3) acima implicam, em particular, que $O(\varphi)$, o grupo de automorfismos de (V, φ), estende a grupo de automorfismos de $Cl(V, \varphi)$.

Existem dois 'morfismos' canônicos numa álgebra de Clifford $Cl(V, \varphi)$. O primeiro, dito *automorfismo canônico* α, é obtido pela propriedade universal tomando $A = Cl(V, \varphi)$ e $f = -i$. O segundo, dito *antiautomorfismo canônico* t, se obtém por $A = Cl(V, \varphi)^{op}$ e $f = i$ (Se A é uma $\Bbbk$-álgebra associativa com produto $(a, b) \longmapsto ab$, definimos A^{op}, a *álgebra oposta* a A, como sendo igual a A como $\Bbbk$-módulo e definindo o produto oposto $a * b = ba$). No nível de elementos fatoráveis em $T(V)$, α e t correspondem respectivamente às operações

$$v_1 \otimes v_2 \otimes ... v_n \longmapsto (-1)^n v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n \tag{2.4}$$

$$v_1 \otimes v_2 \otimes ... v_n \longmapsto v_n \otimes v_{n-1} \otimes ... \otimes v_1 \tag{2.5}$$

O automorfismo α nos permite definir a *paridade* de elementos da álgebra de Clifford. Definamos

$$Cl^0(V, \varphi) = \{x \in Cl(V, \varphi) : \alpha(x) = x\}$$

e

$$Cl^1(V, \varphi) = \{x \in Cl(V, \varphi) : \alpha(x) = -x\}$$

Evidentemente, temos decomposição $Cl(V, \varphi) = Cl^0(V, \varphi) \oplus Cl^1(V, \varphi)$, e observamos que essa decomposição dá a $Cl(V, \varphi)$ a estrutura de $\Bbbk$-superálgebra.

Recordamos que uma $\Bbbk$-álgebra A é dita $\Bbbk$-*superálgebra* se existe decomposição de A em submódulos $A^0 \oplus A^1$ com $A^i A^j \subseteq A^{i+j}$ $(i, j \in \mathbb{Z}_2)$, e que o produto tensorial de superálgebras $\hat{\otimes}$ é definido do seguinte modo : dadas superálgebras $A^0 \oplus A^1, B^0 \oplus B^1$, pomos

$$(A \hat{\otimes} B)^0 = \left(A^0 \otimes B^0\right) \oplus \left(A^1 \otimes B^1\right)$$

e

$$(A \hat{\otimes} B)^1 = \left(A^0 \otimes B^1\right) \oplus \left(A^1 \otimes B^0\right)$$

e definimos

$$A \hat{\otimes} B = (A \hat{\otimes} B)^0 \oplus (A \hat{\otimes} B)^1$$

com $(a' \otimes b)(a \otimes b') = (-1)^{\dim a \dim b}(a'a) \otimes (bb')$; isso dá a $A \hat{\otimes} B$ estrutura de superálgebra. Notemos que se $V = V_1 \oplus V_2$ e $\varphi(v_1, v_2) = 0$ sempre que $(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$, então o mapa

$$f : V \longrightarrow Cl(V_1, \varphi_1) \hat{\otimes} Cl(V_2, \varphi_2) \tag{2.6}$$

$$(v_1, v_2) \longmapsto v_1 \otimes 1 + 1 \otimes v_2 \tag{2.7}$$

induz isomorfismo de superálgebras entre $Cl(V, \varphi)$ e $Cl(V_1, \varphi_1) \hat{\otimes} Cl(V_2, \varphi_2)$, onde φ_i denota a restrição de φ a V_i. A verificação dessa afirmação é imediata : $f(v_1, v_2)^2 = \varphi_1(v_1) + \varphi_2(v_2)$, f é claramente epimorfismo linear e as dimensões de $Cl(V, \varphi)$ e $Cl(V_1, \varphi_1) \hat{\otimes} Cl(V_2, \varphi_2)$ são iguais.

Suponhamos doravante que V tem dimensão finita e φ é não-degenerada. Recordemos da Álgebra Linear que se V é módulo de dimensão finita, existe base ortogonal de autovetores $\{e_1, .., e_n\}$ de φ, $\varphi(e_i) = \lambda_i e_i$, para $\lambda_i \in \Bbbk$. Numa tal base φ assume a forma ('Teorema de Lagrange') :

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

[1] Esta notação subentende que φ_i é forma bilinear simétrica no $\Bbbk$-módulo V_i, $f : V_1 \longrightarrow V_2$ é $\Bbbk$-linear e $f^*\varphi_2 = \varphi_1$, i.e., que f é *morfismo de espaços de produto interno*.

À luz desse fato percebemos que

$$Cl(V,\varphi) \simeq \overset{\wedge}{\bigotimes_{i\in\{1,...,n\}}} Cl(V_i,\varphi_i) \tag{2.9}$$

onde V_i denota a reta de e_i e $\varphi_i = \varphi|_{V_i}$. Quando V é unidimensional, é claro da definição que $T(V) \simeq \Bbbk[e_1]$ (a álgebra polinomial livre gerada por e_1) e $I_V(\varphi) = \Bbbk(e_1^2 - 1) \Longrightarrow Cl(V,\varphi) = \Bbbk 1 \oplus \Bbbk e_1$. Portanto é 2-dimensional a álgebra de Clifford associada a um espaço de produto interno unidimensional. Resulta então do Teorema de Lagrange que $\dim_{\Bbbk} V = n \Longrightarrow \dim_{\Bbbk} Cl(V,\varphi) = 2^n$. Quando $\Bbbk = \mathbb{R}$, podemos tomar $\lambda_i = \pm 1$, e sabemos que os únicos invariantes de formas bilineares simétricas reais são posto e assinatura. Falamos então em $Cl_{p,q}$ para nos referirmos a $Cl(\mathbb{R}^{p+q}, x_1^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_{p+q}^2)$. Por outro lado, o único invariante de formas bilineares simétricas sobre corpo algebricamente fechado é o posto, e em vista disso denotamos por $\mathbb{C}l_n$ a álgebra $(\mathbb{C}^n,\varphi)$ onde φ é qualquer forma bilinear simétrica não-degenerada.

Observação 9. *Um cálculo elementar mostra que temos isomorfismos de $\Bbbk$-superálgebras $Cl_{1,0} \simeq \mathbb{C}$, $Cl_{0,1} \simeq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $Cl_{1,1} \simeq \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$, $Cl_{2,0} \simeq \mathbb{H}$, $Cl_{1,1} \simeq \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$.*

Acrescendo a hipótese de $\Bbbk$ ter característica nula, para cada r a aplicação

$$\underbrace{V\times V\times ...\times V}_{r} \longrightarrow Cl(V,\varphi) \tag{2.10}$$

$$(v_1,...,v_r) \longmapsto \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in S_r} \mathsf{sgn}(\sigma) v_{\sigma(1)}v_{\sigma(2)}...v_{\sigma(r)} \tag{2.11}$$

define aplicação $\Lambda^r V \longrightarrow Cl(V,\varphi)$ cuja imagem está contida na imagem de $\bigoplus_{k=0}^{r} V^{\otimes k}$ por Π. Além disso, a composição

$$\Lambda^r V \longrightarrow \Pi\left(\bigoplus_{k=0}^{r} V^{\otimes k}\right) \diagup \Pi\left(\bigoplus_{k=0}^{r-1} V^{\otimes k}\right) \tag{2.12}$$

é simplesmente

$$v_1\wedge v_2\wedge ...\wedge v_r \longmapsto v_1v_2...v_r + \Pi\left(\bigoplus_{k=0}^{r-1} V^{\otimes k}\right) \tag{2.13}$$

que é evidentemente sobrejetora. Portanto temos sobrejeção linear

$$\Lambda^* V \longrightarrow \bigoplus_{n}\left(\Pi\left(\bigoplus_{k=0}^{n} V^{\otimes k}\right) \diagup \Pi\left(\bigoplus_{k=0}^{n-1} V^{\otimes k}\right)\right) \simeq Cl(V,\varphi) \tag{2.14}$$

Por razões de dimensão, vemos que quando $\Bbbk$ é corpo de característica nula e (V,φ) for espaço de produto interno finito e não-degenerado, $\Lambda^* V \simeq Cl(V,\varphi)$. Esse isomorfismo nos leva a concluir que não há outras relações entre os geradores de $Cl(V,\varphi)$ exceto $e_ie_j + e_je_i = 2\varphi(e_i,e_j)$. Dito de outro modo : $Cl(V,\varphi)$ é a $\Bbbk$-álgebra associativa mais livre com essas relações, $\Bbbk[e_1,...,e_n]\diagup\{e_ie_j + e_je_i = 2\varphi(e_i,e_j)\}$. Concentremo-nos agora nos casos que nos são mais caros; a saber, $\Bbbk = \mathbb{R}$ ou $\Bbbk = \mathbb{C}$. Recorde inicialmente que $v\rfloor(w_1\wedge ...\wedge w_r)$ denota a contração de $w_1\wedge ...\wedge w_r$ por v; explicitamente

$$v\rfloor(w_1\wedge ...\wedge w_r) = \sum_i (-1)^i w_1\wedge ...\wedge \varphi(w_i,v)\wedge ...\wedge w_r$$

Definamos então no espaço linear $\Lambda^* V$ um produto $\bullet$ definido pela fórmula

$$v\bullet(w_1\wedge ...\wedge w_r) = v\wedge w_1\wedge ...\wedge w_r - v\rfloor(w_1\wedge ...\wedge w_r) \tag{2.15}$$

para $v\in V$. Se sabemos a expressão para $(v_1\wedge ...\wedge v_s)\bullet(w_1\wedge ...\wedge w_r)$ para $s<k$, observamos que

$$v_1\wedge ...\wedge v_k = v\bullet(v_2\wedge ...\wedge v_k) + v\rfloor(v_2\wedge ...\wedge v_k)$$

e então

$$v\bullet(v_2\wedge ...\wedge v_k)\bullet(w_1\wedge ...\wedge w_r) + (v\rfloor(v_2\wedge ...\wedge v_k))\bullet(w_1\wedge ...\wedge w_r)$$

provê a expressão explicita para $(v_1\wedge ...\wedge v_k)\bullet(w_1\wedge ...\wedge w_r)$.

Proposição 10. *$Cl(V,\varphi) \simeq (\Lambda^*, \bullet)$ como álgebras associativas.*

Demonstração. Notamos que temos

$$f : V \longrightarrow \Lambda^* V$$
$$f(v) = v \wedge -v\rfloor$$

e

$$\begin{aligned} f(v)^2 w_1 \wedge ... \wedge w_r &= -v \wedge (v\rfloor w_1 \wedge ... \wedge w_r) - v\rfloor (v \wedge w_1 \wedge ... \wedge w_r) + v\rfloor (v\rfloor w_1 \wedge ... \wedge w_r) \\ &= -\{v\wedge, v\rfloor\} w_1 \wedge ... \wedge w_r = \varphi(v) w_1 \wedge ... \wedge w_r \end{aligned}$$

Logo f estende a homomorfismo $Cl(V,\varphi) \longrightarrow (\Lambda^*, \bullet)$ unicamente, que se vê não ter núcleo; trata-se pois de um isomorfismo de álgebras por conta da coincidência de dimensões. Portanto $Cl(V,\varphi)$ é tão-somente a álgebra $\Lambda^* V$ munida do produto 'alternativo' $\bullet$, e sob o isomorfismo acima $\Lambda^{par} V \simeq Cl^0(V,\varphi)$ *e* $\Lambda^{ímpar} V \simeq Cl^1(V,\varphi)$.

De por $Cl^*(V,\varphi)$ o grupo multiplicativo de unidades de $Cl(V,\varphi)$. Definimos a *representação adjunta*

$$\mathrm{Ad} : Cl^*(V,\varphi) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\Bbbk}(Cl(V,\varphi)) \tag{2.16}$$
$$\mathrm{Ad}_x : y \longmapsto xyx^{-1} \tag{2.17}$$

É fácil ver que se $v \in V \cap Cl^*(V,\varphi)$ (o que equivale a dizer que $v \in V$ e $\varphi(v) \neq 0$) então

$$-\mathrm{Ad}_v(w) = w - 2\frac{\varphi(v,w)}{\varphi(v)} v,\ w \in V \tag{2.18}$$

ou seja, $-\mathrm{Ad}_v$ age em V como reflexão pelo hiperplano $\ker \varphi(v,\cdot)$; em particular Ad_v deixa V invariante. Nada mais natural então que definir a *representação adjunta torcida* (*twisted*),

$$\mathrm{TAd} : Cl^*(V,\varphi) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\Bbbk}(Cl(V,\varphi)) \tag{2.19}$$
$$\mathrm{TAd}_x : y \longmapsto \alpha(x) y x^{-1} \tag{2.20}$$

que age por $v \in V$ em V como reflexão por $\ker \varphi(v,\cdot)$. Verificação direta mostra que

$$\varphi(\mathrm{Ad}_v(w), \mathrm{Ad}_v(w')) = \varphi(w,w') \tag{2.21}$$

se $\varphi(v) \neq 0$, de modo que a imagem da restrição de Ad a $P(V,\varphi)$, está contida em $O(\varphi)$. (O mesmo para TAd_x). Definimos $TP(V,\varphi)$ como o grupo dos $x \in Cl^*(V,\varphi)$ cuja adjunta torcida deixa V invariante. Para coroar a (longa) cadeia de definições, chamaremos de $Pin(V,\varphi)$ o subgrupo de $P(V,\varphi)$ gerado pelos v com $\varphi(v) = \pm 1$, e $Spin(V,\varphi)$ sua intersecção com $Cl^0(V,\varphi)$.

Observação 11. *Tantos são os nomes que não é excesso de zelo lembrar que :*

$$Cl(V,\varphi) \supseteq Cl^*(V,\varphi) \supseteq TP(V,\varphi) \supseteq P(V,\varphi) \supseteq Pin(V,\varphi) \supseteq Spin(V,\varphi) \tag{2.22}$$

Proposição 12. *O núcleo da restrição da adjunta torcida a $TP(V,\varphi)$,*

$$\mathrm{TAd} : TP(V,\varphi) \longrightarrow \mathrm{End}_{\Bbbk}(V)$$

é só $\Bbbk^* 1$.

Demonstração. Um x está no núcleo da adjunta torcida se $\alpha(x)v = vx$ para todo $v \in V$. Decompomos x em suas partes par e ímpar $x = x_0 + x_1$ e fixamos base $v_1, ..., v_n$ de V com a propriedade $\varphi(v_i, v_j) = 0$ e $\varphi(v_i) \neq 0$. Então x_0 pode ser escrito como $p + v_1 q$ onde p e q são polinômios em $v_2, ..., v_n$, com p par e q ímpar. Mas $\alpha(x_0)v = vx_0$ com $v = v_1$ mostra que $v_1^2 p = 0$ e daí que $p = 0$; i.e., x_0 não contém termos envolvendo v_1. Procedemos de forma indutiva para concluir que x_0 não contém termos envolvendo $v_2, ..., v_n$ e portanto é um múltiplo da identidade. O mesmo argumento se emprega para x_1, assim concluindo que $x \in \Bbbk^* 1$. ■

Concluímos que a expressão $N(x) = x\alpha(x^t)$ (x em $TP(V,\varphi)$) toma valores em $\Bbbk^*$ (pois $\alpha(x^t)x$ está no núcleo da adjunta torcida). Como $N(v) = \varphi(v)$ quando $v \in V$, de maneira que não é de todo insensato chamar N de *norma*. Observemos que nós já sabemos que as unidades da forma $v_1 v_2 ... v_k$ (i.e., elementos de $P(V,\varphi)$) são mapeadas pela adjunta torcida em transformações φ-ortogonais. Na verdade, a adjunta torcida de *todo* elemento em $TP(V,\varphi)$ é uma transformação φ-ortogonal (quando restrita a V) (basta usar a norma N para verificar que $N(\mathrm{TAd}_x\, v) = N(v)$ para $x \in TP(V,\varphi)$ e $v \in V$). É simples perceber também que $\mathrm{TAd}_{gv} = g \circ \mathrm{TAd}_v \circ g^{-1}$ para todo $v \in V$ e $g \in O(\varphi)$, do que segue que a imagem de $Pin(V,\varphi)$ (e portanto de $Spin(V,\varphi)$) pela adjunta torcida é *normal* em $O(\varphi)$. Entretanto, um resultado clássico devido a Cartan-Dieudonné diz que todo $g \in O(\varphi)$ pode ser escrito como a composição $\rho_{v_1} \circ \rho_{v_2} \circ ... \circ \rho_{v_r}$ de $r \leqslant \dim V$ reflexões (Cf. [Ar]). Portanto a restrição da adjunta torcida a $P(V,\varphi)$ sobrejeta em $O(\varphi)$ (e assim a restrição a $SP(V,\varphi) = P(V,\varphi) \cap Cl^0(V,\varphi)$ sobrejeta em $SO(\varphi)$). Observamos que há muitos exemplos em que $SO(\varphi)$ é um grupo simples (i.e., sem subgrupos normais próprios, em cujo caso normalidade da imagem de $Pin(V,\varphi)$ em $O(\varphi)$ implica sobrejetividade : toda transformação ortogonal é a adjunta torcida de algum 'pinor'), e, por outro lado, escrevendo $g = \rho_{v_1} \circ \rho_{v_2} \circ ... \circ \rho_{v_r}$, e notando que $\rho_{tv} = \rho_v$ para todo $t \in \Bbbk$, vemos que $g = \mathrm{TAd}_x$ para algum x em $Pin(V,\varphi)$ se cada $N(v_i)$ for invertível em $\Bbbk$. (Nesse caso,

$$\left(\prod v_i\right)\left(\prod N(v_i)\right)^{-\frac{1}{2}} \in Pin(V,\varphi)$$

e sua imagem é g).

Dizemos que um corpo $\Bbbk$ é *spin* se para cada $t \in \Bbbk$, pelo menos uma das equações $x^2 = \pm t$ é solúvel em $\Bbbk$. São spin, por exemplo, $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$ para p primo côngruo a 3 mod 4. Supondo que $\Bbbk$ é $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, temos seqüências exatas

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow Spin(V,\varphi) \longrightarrow SO(V,\varphi) \longrightarrow 0 \tag{2.23}$$

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow Pin(V,\varphi) \longrightarrow O(V,\varphi) \longrightarrow 0 \tag{2.24}$$

onde $F = \mathbb{Z}_2$ se $\mathbb{R} = \Bbbk$ e $F = \mathbb{Z}_4$ se $\mathbb{C} = \Bbbk$.

A importância fundamental de *Spin* em geometria se dá por realizar $Spin(n)$ o revestimento universal de $SO(n)$ se $n > 2$. De fato, recorde que temos fibração 'primeira coluna'

$$SO_{n-1} \longrightarrow SO_n \longrightarrow S^n$$

que induz isomorfismos $\pi_k(SO_n) \simeq \pi_{k-1}(SO_{n-1})$ sempre que $n > k$, e que $SO(3) \simeq \mathbb{R}P^3$. Portanto $\pi_1(SO_n) = \mathbb{Z}_2$ para todo $n > 2$. O revestimento universal de SO_n, $n \geqslant 3$, tem portanto duas folhas, e tais revestimentos são triviais se e só se são desconexos. Neste caso os elementos 1 e -1 têm de estar em folhas distintas, de modo que $Spin_n$ será o revestimento universal de SO_n se houver caminho em ligando 1 a -1 em $Spin_n$. Mas

$$\gamma(t) = -\cos(\pi t) - \sin(\pi t) e_1 e_2$$

provê um tal caminho. Assim $Spin_n$ é 1-conexo para $n \geqslant 3$.

2.2 Classificação das Álgebras de Clifford

Através da propriedade universal das álgebras de Clifford, podemos construir os *isomorfismos fundamentais* listados abaixo :

- $Cl_{p,q} \simeq Cl^0_{p+1,q}$

Tome base φ-ortonormal $e_1, ..., e_{p+q+1}$ com

$$\varphi(e_i) = \begin{pmatrix} +1 \text{ se } 1 \leqslant i \leqslant p+1 \\ -1 \text{ se } i > p+1 \end{pmatrix}$$

identifique $\mathbb{R}^{p+q}$ com o subespaço gerado por $e_1, ..., \widehat{e_{p+1}}, ..., e_{p+q+1}$ e definamos

$$f : \mathbb{R}^{p+q} \longrightarrow Cl^0_{p+1,q}$$
$$f(e_i) = e_{p+1} e_i$$

- $Cl_{n,0} \otimes Cl_{0,2} \simeq Cl_{0,n+2}$

Se $e_1, ..., e_{n+2}$ são os geradores padrão de $Cl_{0,n+2}$, $e'_1, ..., e'_n$ os de $Cl_{n,0}$ e e''_1, e''_2 os de $Cl_{0,2}$, definamos

$$f : \mathbb{R}^{n+2} \longrightarrow Cl_{n,0} \otimes Cl_{0,2}$$
$$f(e_i) = \begin{pmatrix} e'_i \otimes e''_1 e''_2 \text{ se } 1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \otimes e''_{i-n} \text{ se } i > n \end{pmatrix}$$

- $Cl_{0,n} \otimes Cl_{2,0} \simeq Cl_{n+2,0}$

(Análogo ao caso anterior)

- $Cl_{p,q} \otimes Cl_{1,1} \simeq Cl_{p+1,q+1}$

(Tome $e_1, ..., e_{p+q+2}$ base de $Cl_{p+1,q+1}$ por $\varphi(e_i) = \left(\begin{smallmatrix} +1 \text{ se } i<p+2 \\ -1 \text{ se } i>p+1 \end{smallmatrix}\right)$ e analogamente para $e'_1, ..., e'_{p+q}$ base de $Cl_{p,q}$ e e''_1, e''_2 base de $Cl_{1,1}$. Definamos então

$$f : \mathbb{R}^{p+q+2} \longrightarrow Cl_{p,q} \otimes Cl_{1,1}$$

por

$$f(e_i) = \begin{pmatrix} e'_i \otimes e''_1 e''_2 \text{ se } 1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \otimes e''_1 \text{ se } i = p+1 \\ e'_{i-1} \otimes e''_1 e''_2 \text{ se } p+2 \leqslant i \leqslant p+q+1 \\ 1 \otimes e''_2 \text{ se } i = p+q+2 \end{pmatrix}$$

Segue imediatamente que existem *isomorfismos de periodicidade*

$$Cl_{n+8,0} \simeq Cl_{n,0} \otimes Cl_{8,0} \tag{2.25}$$
$$Cl_{0,n+8} \simeq Cl_{0,n} \otimes Cl_{0,8} \tag{2.26}$$

e, como $Cl_{p,q} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}l_{p+q}$ (como $\mathbb{C}$-álgebra), temos também

$$\mathbb{C}l_{n+2} = \mathbb{C}l_n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}l_2 \tag{2.27}$$

Exerciicio 13. *Mostre que* $Cl_{8,0} = Cl_{0,8} = \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{16})$ *e que* $\mathbb{C}l_2 = \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2)$*. Escolha também alguma entrada da tabela abaixo para verificar :*

	1	***2***	***3***	***4***
$Cl_{n,0}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H}^2$	$\mathrm{End}_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^2)$
$Cl_{0,n}$	$\mathbb{R}^2$	$\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$	$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2)$	$\mathrm{End}_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^2)$
$\mathbb{C}l_n$	$\mathbb{C}^2$	$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2)$	$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2)^2$	$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^4)$
	5	***6***	***7***	***8***
$Cl_{n,0}$	$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^4)$	$\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^8)$	$\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^8)^2$	$\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{16})$
$Cl_{0,n}$	$\mathrm{End}_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^2)^2$	$\mathrm{End}_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^4)$	$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^8)$	$\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{16})$
$\mathbb{C}l_n$	$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^4)^2$	$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^8)$	$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^8)^2$	$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{16})$

Em vista de : (1) a tabela acima; (2) os isomorfismos fundamentais de álgebras de Clifford reais e complexas e (3) os isomorfismos $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m) \simeq \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{nm})$, $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \otimes \Bbbk \simeq \mathrm{End}_{\Bbbk}(\Bbbk^n)$ se $\Bbbk = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$, $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \simeq \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2)$ e $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \simeq \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$, percebemos que as álgebras de Clifford reais e complexas se reduzem a álgebras da forma $\mathrm{End}_{\Bbbk}(\Bbbk^n)$ ou $\mathrm{End}_{\Bbbk}(\Bbbk^n)^2$ para $\Bbbk = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$.

Seja K um corpo contendo $\Bbbk$. Um homomorfismo de $\Bbbk$-álgebras

$$\rho : Cl(V, \varphi) \longrightarrow \mathrm{End}_K(W, W) \tag{2.28}$$

é dito K-representação de $Cl(V, \varphi)$, ou que W *é* K*-módulo de* $Cl(V, \varphi)$. W é dito *irredutível* se não cinde como soma direta de dois K-submódulos não-triviais de $Cl(V, \varphi)$. Todo K-módulo de $Cl(V, \varphi)$ é soma direta de K-submódulos irredutíveis de $Cl(V, \varphi)$, como conseqüência da seguinte observação :

Consideremos F o grupo livre em geradores $\{e_1, ..., e_n, (-1)\}$ e G_n seu quociente pelas relações $e_i^2 = 1$, $e_ie_j = (-1)e_je_i$ se $i \neq j$ e $(-1)^2 = 1$, dito *grupo de Clifford* . Observemos que entre a álgebra do grupo G_n e a álgebra Cl_n temos a relação

$$Cl_n = \frac{\mathbb{R}G_n}{\mathbb{R}\{(-1)+1\}}$$

e portanto as representações de Cl_n são aquelas representações de $\mathbb{R}G_n$ onde (-1) age por $-id$. Como G_n é um grupo finito, podemos tomar médias sobre G_n como em [43]. Isso nos permite construir, dado um K-módulo W de $Cl(V,\varphi)$ munido de produto interno $\langle,\rangle_W$, um novo produto interno $\langle,\rangle$ em que multiplicação de Clifford por vetor unitário é $\langle,\rangle$-ortogonal; produtos internos em spinores serão sempre normalizados dessa maneira. É também através desse instrumento de tomar médias que podemos encontrar submódulo complementar a qualquer submódulo de um Cl_n-módulo. Para nossa sorte, a única representação real irredutível de $\mathrm{End}_{\Bbbk}(\Bbbk^n)$ em $\Bbbk^n$ (a menos de isomorfismo) é a canônica (Cf. [5]), e as duas únicas representações reais irredutíveis de $\mathrm{End}_{\Bbbk}(\Bbbk^n) \oplus \mathrm{End}_{\Bbbk}(\Bbbk^n)$ em $\Bbbk^n$ a menos de isomorfismo agem como a representação irredutível de $\mathrm{End}_{\Bbbk}(\Bbbk^n)$ em $\Bbbk^n$ no primeiro ou no segundo fator. Se

- $\nu_{p,q}$ (resp., $\nu_n^{\mathbb{C}}$) denota o número de tipos de isomorfismo $\mathbb{R}$-módulos irredutíveis para $Cl_{p,q}$ (resp., de $\mathbb{C}$-módulos irredutíveis para $\mathbb{C}l_n$)
- d_n (resp., $d_n^{\mathbb{C}}$) a dimensão de uma representação real (resp., complexa) irredutível de $Cl_{n,0}$ (resp., de $\mathbb{C}l_n$)
- $K_n = \mathbb{H}$ se $Cl_{n,0} = Cl_n$ tem estrutura quaterniônica, $K_n = \mathbb{C}$ se Cl_n não tem estrutura quaterniônica mas tem estrutura complexa e $K_n = \mathbb{R}$ se Cl_n só possui estrutura real

vemos da tabela anterior que $\nu_{p,q} = \binom{2 \text{ se } r+1-s\equiv 0 \bmod 4}{1 \text{ caso contrário}}$, $\nu_n^{\mathbb{C}} = \binom{2 \text{ se } n \text{ é ímpar}}{1 \text{ se } n \text{ é par}}$ e podemos montar as seguintes tabelas

	Cl_n	ν_n	d_n	K_n		$\mathbb{C}l_n$	$\nu_n^{\mathbb{C}}$	$d_n^{\mathbb{C}}$
1	$\mathbb{C}$	1	2	$\mathbb{C}$	**1**	$\mathbb{C}^2$	2	1
2	$\mathbb{H}$	1	4	$\mathbb{H}$	**2**	$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2)$	1	2
3	$\mathbb{H}^2$	2	4	$\mathbb{H}$	**3**	$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2)^2$	2	2
4	$\mathrm{End}_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^{2)}$	1	8	$\mathbb{H}$	**4**	$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^4)$	1	4
5	$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^4)$	1	8	$\mathbb{C}$	**5**	$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^4)^2$	2	4
6	$\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^8)$	1	8	$\mathbb{R}$	**6**	$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^8)$	1	8
7	$\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^8)^2$	2	8	$\mathbb{R}$	**7**	$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^8)^2$	2	8
8	$\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{16})$	1	16	$\mathbb{R}$	**8**	$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{16})$	1	16

$$\begin{aligned}
&\nu_{n+8k} = \nu_n \\
&\nu_{n+2k}^{\mathbb{C}} = \nu_n^{\mathbb{C}} \\
&d_{n+8k} = 2^{4k} d_n \\
&d_{n+2k}^{\mathbb{C}} = 2^k d_n^{\mathbb{C}} \\
&K_{n+8k} = K_n
\end{aligned}$$

Seja $\{e_1, ..., e_n\}$ base φ-ortonormal de $(\mathbb{R}^n, \sum x_i^2)$ o elemento $\omega = e_1e_2...e_n$ (a *forma volume real*) independe da escolha do referencial ortonormal $\{e_i\}$, e $\omega^2 = 1$ se $n \equiv 3$ ou 0 mod 4. Nesses casos, ω induz decomposição $Cl_n = Cl_n^+ \oplus Cl_n^-$ onde $Cl_n^{\pm} = (1 \pm \omega)Cl_n$, e sob o isomorfismo $\Lambda^*\mathbb{R}^n \simeq Cl_n$, $\omega = * =$ estrela de Hodge, de modo que Cl_n^+ corresponde às formas auto-duais, e Cl_n^- às anti-autoduais.

Observação 14. *Se $n \equiv 3$ mod 4, a imagem de ω por uma representação real irredutível de Cl_n tem de ser $+1$ ou -1. Essas duas possibilidades ocorrem e discernem entre os dois tipos de isomorfismo distintos de módulos reais para Cl_n. Se $n \equiv 0$ mod 4, e $\rho : Cl_n \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(W)$ é módulo real irredutível de Cl_n, então $W^{\pm} = (1 \pm \rho(\omega))W$ são irredutíveis pela ação de $Cl_n^0 \simeq Cl_{n-1}$, e correspondem às duas representações inequivalentes de Cl_{n-1}.*

Observação 15. *Observemos que $Spin_n \subseteq Cl_n^0 \simeq Cl_{n-1}$. Então :*

- *Se $n \equiv 3$ mod 4, as duas representações reais irredutíveis inequivalentes restringem à mesma representação sobre $Spin_n$;*

- *Se $n \equiv 1$ ou 2 mod 8, a restrição da representação real irredutível de Cl_n a $Spin_n$ quebra como soma de duas representações irredutíveis equivalentes;*

- *Se $n \equiv 5$ ou 6 mod 8, a restrição da representação real irredutível de Cl_n a $Spin_n$ é irredutível*;

- *Se $n \equiv 0$ mod 4, a restrição da representação real irredutível de Cl_n a $Spin_n$ quebra como soma de duas representações irredutíveis inequivalentes.*

Da mesma maneira que usamos a forma volume real para estudar representações reais irredutíveis de Cl_n, podemos usar a forma de volume complexa $\omega_{\mathbb{C}}$ para estudar representações irredutíveis de $\mathbb{C}l_n$. Definamos

$$\omega_{\mathbb{C}} = i^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}\omega^2 \tag{2.29}$$

Então $\omega_{\mathbb{C}}$ independe da escolha de referencial ortonormal e $\omega_{\mathbb{C}}^2 = 1$ para todo n. Obtemos portanto decomposição $\mathbb{C}l_n = \mathbb{C}l_n^+ \oplus \mathbb{C}l_n^-$ (onde $\mathbb{C}l_n^\pm = (1 \pm \omega_{\mathbb{C}})\mathbb{C}l_n$). Se n é ímpar, $\alpha(\mathbb{C}l_n^\pm) = \mathbb{C}l_n^\mp$, e toda representação complexa irredutível de $\mathbb{C}l_n$ mapeia $\omega_{\mathbb{C}}$ em $+1$ ou em -1. Essas duas possibilidades ocorrem e exaurem os diferentes tipos de representações complexas irredutíveis (inequivalentes) de $\mathbb{C}l_n$.

Se n é par, multiplicação por qualquer vetor não-nulo dá isomorfismo $\mathbb{C}l_n^\pm \simeq \mathbb{C}l_n^\mp$. Se ρ é representação complexa irredutível de $\mathbb{C}l_n$ em W, forme $W^\pm = (1 \pm \rho(\omega_{\mathbb{C}}))W$ e observemos que $W^\pm$ é invariante pela ação de $\mathbb{C}l_n^0 \simeq \mathbb{C}l_{n-1}$. As duas representações assim obtidas são aquelas descritas no parágrafo anterior. Seja então $\rho : \mathbb{C}l_n \longrightarrow \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(W)$ irredutível. Se n é ímpar, $\rho|_{Spin_n}$ é irredutível. Se n é par, $\rho|_{Spin_n}$ quebra como soma de duas representações irredutíveis inequivalentes. Concluímos que, a menos de isomorfismo, existe uma única representação complexa $\Delta : Spin_n \longrightarrow \operatorname{End}_{\mathbb{C}} W$ que estende a representação complexa irredutível de $\mathbb{C}l_n$. Tal representação será chamada de *representação spinorial complexa* Δ; em dimensão ímpar, Δ é irredutível; em dimensão par, ela cinde como $\Delta^+ \oplus \Delta^-$, onde $\Delta^\pm$ são as representações spinoriais inequivalentes (em codimensão 1).

Definamos agora $Spin_n^c$ como o subgrupo multiplicativo de $\mathbb{C}l_n$ gerado por $S^1 (\subset \mathbb{C} \subset \mathbb{C}l_n)$ e por $Spin_n$. Observemos que os únicos elementos centrais de $\mathbb{C}l_n$ que moram em $Spin_n$ são $\{\pm 1\}$, de modo que o núcleo do epimorfismo

$$Spin_n \times S^1 \longrightarrow Spin_n^c \tag{2.30}$$
$$(x, y) \longmapsto xy \tag{2.31}$$

é exatamente $\mathbb{Z}_2$; logo $Spin_n^c \simeq Spin_n \times S^1/\mathbb{Z}_2$. Temos o seguinte diagrama comutativo com linhas e colunas exatas :

$$\begin{tikzcd}
& & 1 \arrow[d] & & \\
& & S^1 \arrow[d, hook] \arrow[dr, "z\mapsto z^2"] & & \\
1 \arrow[r] & Spin_n \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\xi"] & Spin_n^c \arrow[r] \arrow[d, "\xi^c"] & S^1 \arrow[r] & 1 \\
& & SO_n \arrow[d] & & \\
& & 1 & &
\end{tikzcd}$$

de cuja exatidão (e da 1-conexidade de $Spin_n$) segue que $\pi_1(Spin_n^c) \longrightarrow \pi_1(S^1)$ é um isomorfismo, Também se conclui do diagrama que o mapa $z \longmapsto z^2$ induz em grupo fundamental o mapa de multiplicação por 2 e que se $\tau \in \pi_1(SO_n), \beta \in \pi_1(S^1)$ e $\eta \in \pi_1(Spin_n^c)$ são geradores dos seus respectivos grupos, sua imagem por $\pi_1(\xi^c)$ é precisamente $\beta + \tau$. Notemos também que a condição necessária e suficiente para que uma representação complexa de $Spin_n$ levante a (única) representação complexa de $Spin_n^c$ é que mapeie -1 em

-1. Em vista do que discutimos, se n é par,

$$\Delta = \Delta^+ \oplus \Delta^- \tag{2.32}$$

$$\Longrightarrow \Delta_c = \Delta_c^+ \oplus \Delta_c^- \tag{2.33}$$

onde $\Delta_c^\pm$ são os (únicos) levantamentos das representações spinoriais irredutíveis inequivalentes de $Spin_n$ que discutimos; já se n é ímpar, o levantamento Δ_c da representação spinorial é irredutível. Faz sentido então falar na *representação spinorial*^{c} .

Consideremos agora o 2-revestimento $Spin_n^c \xrightarrow{\xi^c} SO_n \times S^1$. Dizemos que um k-fibrado vetorial real orientado $E \longrightarrow M$ **admite estrutura spin**^{c} se existem fibrado U_1-principal $P_{U_1} \longrightarrow M$ e $Spin_n^c$-principal $P_{Spin^c} \longrightarrow M$ junto com 2-revestimento $P_{Spin^c} \xrightarrow{\Xi^c} P_{SO}(E) \times P_{U_1}$ que torna comutativo e com linhas exatas o seguinte diagrama de fibrações :

$$\begin{tikzcd}
 & & Spin_n^c \arrow[r, "\xi"] \arrow[dd] & SO_n \times S^1 \arrow[dd] \arrow[dr] & \\
1 \arrow[r] & Z_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & 1 \\
 & & P_{Spin^c} \arrow[r, "\Xi"] & P_{SO_n}(E) \times P_{U_1} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Observemos que, associado a um fibrado $Spin_n^c$-principal P_{Spin^c} temos fibrado U_1-principal $P_{Spin^c}/Spin_n$, que é chamado de (fibrado) **determinante** da estrutura spin^c $P_{Spin^c} \longrightarrow P_{SO}(E) \times P_{U_1}$.

Se a estrutura spin^c P_{Spin^c} é dada pelo cociclo $\{U_\alpha, \zeta_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow Spin_n^c\}$, representamos $\zeta_{\alpha\beta}$ por $\pm(\phi_{\alpha\beta} \times z_{\alpha\beta})$, $\phi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow Spin_n$ e $z_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow S^1\}$, onde

$$\phi_{\alpha\beta}\phi_{\beta\gamma}\phi_{\gamma\alpha} = z_{\alpha\beta}z_{\beta\gamma}z_{\gamma\alpha} \in \mathbb{Z}_2$$

Então a cocadeia $\{U_\alpha, z_{\alpha\beta}^2\}$ satisfaz a condição do cociclo, e define precisamente o fibrado U_1-principal $\det P_{Spin^c}$. Assim como no caso de estruturas spin, existe uma obtrução cohomológica bem-determinada para que um dado n-fibrado $E \longrightarrow M$ admita estrutura spin^c. Temos sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow Spin_n^c \longrightarrow SO_n \times U_1 \longrightarrow 0$$

que induz seqüência exata

$$\begin{aligned}
H^1(M;\mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^1(M; Spin_n^c) \longrightarrow & H^1(M; SO_n) \oplus H^1(M; U_1) \xrightarrow{\delta} H^2(M;\mathbb{Z}_2) \\
\delta(s,t) = & \, w_2(s) + c_1 t \bmod 2
\end{aligned}$$

portanto provêm de $H^1(M; Spin_n^c)$ os pares $(s,t) \in H^1(M; SO_n) \oplus H^1(M; U_1)$ que verificam $w_2(s) + c_1 t \bmod 2 = 0$; i.e, que verificam $w_2(s) = c_1 t \bmod 2$, pois estamos em coeficientes mod 2. Portanto a condição para que $E \longrightarrow M$ admita estrutura spin^c é que $w_2 E$ seja redução de uma classe cohomológica inteira $S \in H^2(M;\mathbb{Z})$. Também, $(s,t) = \xi^c(u)$ implica claramente $(s,t) = \xi^c(u+v)$ para cada $v \in H^1(M;\mathbb{Z}_2)$. Portanto $2H^2(B;\mathbb{Z}) \oplus H^1(B;\mathbb{Z}_2)$ parametriza as distintas estruturas spin^c que $E \longrightarrow M$ admite, caso admita alguma.

Suponhamos agora $E \longrightarrow M$ admita estrutura spin $P_{Spin} \longrightarrow P_{SO}(E)$. Então existe uma estrutura spin^c canônica (para essa *fixa* estrutura spin) construída como

$$P_{Spin^c}^{can} = \frac{P_{Spin} \times \underline{U_1}}{\{(p,z) \sim (-p,-z)\}} = P_{Spin} \times_{\mathbb{Z}_2} \underline{U_1}$$

(Notemos que, a rigor, a notação $P_{Spin^c}^{can}$ deveria mencionar a estrutura spin específica que é subentendida) onde $\underline{U_1}$ denota o fibrado U_1-principal trivial. Então

$$\Xi^c : [(p,z)] \longmapsto (\Xi(p), z^2)$$

é o 2-revestimento equivariante de $SO_n \times S^1$. Se a estrutura spin $P_{Spin} \longrightarrow P_{SO}(E)$ corresponde a uma classe cohomológica $\tau \in H^1(M;\mathbb{Z}_2)$, a estrutura spin^c canonicamente associada a ela corresponde à classe $(0,\tau) \in H^2(M;\mathbb{Z}) \oplus H^1(M;\mathbb{Z}_2)$. Se fixarmos um fibrado U_1-principal $P_{U_1}(\kappa)$ cuja primeira classe de Chern (cf. capítulo 4) é $\kappa \in H^2(M;\mathbb{Z})$, podemos construir a partir de P_{Spin} a estrutura spin^c que corresponde a $(\tau, 2\kappa)$ por

$$P^{\kappa}_{Spin^c} = \frac{P_{Spin} \times P_{U_1}(\kappa)}{\{(p,z) \sim (-p,-z)\}} = P^{can}_{Spin^c} \times_{\mathbb{Z}_2} P_{U_1}(\kappa)$$

e observemos que temos ação $Spin^c_n$-equivariante

$$P^{\kappa}_{Spin^c} \longrightarrow P_{SO}(E) \times P_{U_1}(2\kappa) \tag{2.34}$$

$$[(p,z)] \longmapsto (\Xi^c(p), z^2) \tag{2.35}$$

(Observemos que aparece 2κ em vez de κ porque o mapa de P_{Spin^c} ao fibrado determinante é um revestimento duplo) que chamamos de κ-ésima estrutura spin^c sobre τ. Um outro modo de construir essa estrutura spin^c é através da Teoria de Čech : represente a estrutura spin em $E \longrightarrow M$ através de $\{U_\alpha, \phi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow Spin_n\}$; então consideremos a inclusão $Spin_n \overset{i}{\hookrightarrow} Spin^c_n$ e notemos que $\{U_\alpha, i \circ \phi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow Spin^c_n\}$ define estrutura spin^c em E, cujo determinante é o fibrado de linha complexo trivial. Analisemos também neste contexto a passagem à κ-ésima estrutura spin^c sobre uma estrutura spin : represente o fibrado L_κ por $\{U_\alpha, z_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow S^1\}$ e associe a ele o cociclo $\{U_\alpha, \zeta_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow Spin^c_n\}$, onde

$$\zeta_{\alpha\beta}(p) = [(\phi_{\alpha\beta}(p), z_{\alpha\beta}(p))] \in \frac{P_{Spin} \times S^1}{\{(p,z) \sim (-p,-z)\}} = Spin^c_n$$

Evidentemente, o determinante da κ-ésima estrutura spin^c $\{U_\alpha, \zeta_{\alpha\beta}\}$ sobre a estrutura spin $\{U_\alpha, \phi_{\alpha\beta}\}$ é simplesmente $L^2_\kappa = \{U_\alpha, z^2_{\alpha\beta}\} = L_{2\kappa}$.

Também quando (M,J) é uma variedade quasi-complexa existe uma estrutura spin^c canonicamente associada a $TM \longrightarrow M$. De fato, consideremos $j : U_n \longrightarrow Spin^c_{2n}, i : U_n \longrightarrow SO_{2n} \times U_1$ construídos do seguinte modo : Se g é unitário, tome λ um seu autovalor e consideremos a decomposição induzida pelo autoespaço correspondente a $\lambda : \mathbb{C}^n = L_\lambda \oplus L^\perp_\lambda$. A restrição de g à reta complexa L_λ é unitária, e portanto g age aí como multiplicação por número complexo unimodular, digamos, $e^{i\theta}$. Aplicando o mesmo raciocínio ao espaço invariante $L^\perp_\lambda$, chegamos à forma em questão para g. Portanto para cada $g \in U_n$ podemos fixar base unitária $\{e_1, ..., e_n\}$ de $\mathbb{C}^n$ em que g se escreve como

$$g = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & & \\ & e^{i\theta_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix} \tag{2.36}$$

Pomos então

$$j(g) = \prod_1^n \left(\cos(\frac{\theta_i}{2}) + \sin(\frac{\theta_i}{2}) e_i J e_i \right) \times e^{\frac{i}{2}\sum_i \theta_i} \tag{2.37}$$

$$i(g) = (g, \det g) \tag{2.38}$$

de maneira que o diagrama abaixo é comutativo :

$$\begin{tikzcd} & Spin^c_{2n} \arrow[dd, "\xi^c"] \\ U_n \arrow[ur, "j"] \arrow[dr, "i"'] & \\ & SO_{2n} \times S^1 \end{tikzcd}$$

O fibrado $Spin_n^c$-principal $P_{Spin^c}(E) = P_{U_n}(E) \times_j Spin_{2n}^c$ é a estrutura spin^c canonicamente associada à estrutura quasi-complexa J. Como de costume, esse fato é mais fácil de expressar na linguagem de Čech : tome $\{U_\alpha, t_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow U_n\} = P_{U_n}(TM)$. Então $\{U_\alpha, j \circ t_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow Spin_{2n}^c\}$ define fibrado $Spin_{2n}^c$-principal cujo determinante é dado pelo cociclo $\{U_\alpha, \det t_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow S^1\}$.

Capítulo 3

Fibrados II : Feixes e sua Hipercohomologia

3.1 Generalidades sobre feixes e sua cohomologia

Seja X um espaço topológico. Um *pré-feixe* $\mathcal{F}$ em X (a valores numa categoria abeliana $\mathfrak{A}$, que em geral será a categoria de anéis comutativos) é uma atribuição de objeto $\mathcal{F}(U)$ para cada aberto U de X, e de morfismos (chamados *restrições*)

$$r_V^U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$$

para cada inclusão $V \hookrightarrow U$, de maneira que $r_W^V r_V^U = r_W^U$. Ou seja, trata-se de um *functor* entre a categoria oposta a Top_X e a categoria $\mathfrak{A}$. Um morfismo φ entre os pré-feixes $\mathcal{F}'$ e $\mathcal{F}$ é uma coleção

$$\varphi_U : \mathcal{F}'(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$$
$$\text{com } \varphi_V r_V^U = r_V'^U \varphi_U$$

ou, em termos mais categóricos, uma *transformação natural* entre os pré-feixes $\mathcal{F}'$ e $\mathcal{F}$. O núcleo e o conúcleo de φ são os respectivos pré-feixes

$$\mathsf{Ker}\,(\varphi)\,(U) = \ker\,(\varphi_U)$$
$$\mathsf{Co}\,(\varphi)\,(U) = \mathrm{co}\,(\varphi_U)$$

Observemos que há morfismos naturais $\mathsf{Ker}\,(\varphi) \longrightarrow \mathcal{F}'$ e $\mathcal{F} \longrightarrow \mathsf{Co}\,(\varphi)$.

Os pré-feixes sobre X formam uma categoria, PSh_X, que também possui produtos e coprodutos.

Para cada ponto p de X definimos a *fibra* de $\mathcal{F}$ sobre p pelo limite direto

$$\mathcal{F}_p = \varinjlim_{p \in U} \mathcal{F}(U)$$

onde U percorre o sistema direcionado de abertos que contém p. O *suporte* de um pré-feixe $\mathcal{F}$ é

$$\mathsf{Supp}\,(\mathcal{F}) = \{p \in X : \mathcal{F}_p \neq 0\}$$

Uma seqüência de pré-feixes

$$\mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}''$$

é *exata* em $\mathcal{F}$ se cada seqüência induzida

$$\mathcal{F}'_p \longrightarrow \mathcal{F}_p \longrightarrow \mathcal{F}''_p$$

for exata em $\mathfrak{A}$.

Um pré-feixe $\mathcal{F}$ é dito um *feixe* se, dada uma coleção de abertos $\{U_\alpha\}$ de X :

Localização Se $\sigma \in \mathcal{F}\left(\bigcup_\alpha U_\alpha\right)$ é não-nula, alguma restrição $\mathcal{F}\left(\bigcup_\alpha U_\alpha\right) \longrightarrow \mathcal{F}\left(U_\alpha\right)$ não é nula;

Globalização Se $\sigma_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha)$ e cada σ_α coincide com σ_β sobre $U_\alpha \cap U_\beta$, então existe $\sigma \in \mathcal{F}\left(\bigcup_\alpha U_\alpha\right)$ cuja restrição a U_α é σ_α.

Existe um feixe $\widetilde{\mathcal{F}}$ canonicamente associado a cada pré-feixe $\mathcal{F}$, definido assim : $\widetilde{\mathcal{F}}(U)$ é o conjunto das aplicações

$$s : U \longrightarrow \coprod_{p\in U} \mathcal{F}_p$$

que mapeiam cada ponto p de U na fibra $\mathcal{F}_p$ sobre ele, e tal que existe cobertura aberta $\{V_i\}$ de U e elementos $t_i \in \mathcal{F}(V_i)$ com

$$(t_i)_q = s(q) \text{ para cada } q \in V_i$$

$\mathcal{F}$ é claramente um feixe, e notamos o morfismo natural de pré-feixes

$$\mathcal{F} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{F}}$$

que goza da seguinte propriedade universal : por ele fatora unicamente todo morfismo de pré-feixes de $\mathcal{F}$ a um feixe $\mathcal{G}$:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & \widetilde{\mathcal{F}} \arrow[dl, dashed, "\widetilde{\varphi}"] \\ \mathcal{G} & \end{tikzcd}$$

A unicidade de $\widetilde{\mathcal{F}}$ assegurada por essa propriedade universal permite chamá-lo de *a feixificação* do pré-feixe $\mathcal{F}$.

Um morfismo $\varphi : \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F}$ entre feixes é simplesmente um morfismo entre os pré-feixes subjacentes. Na categoria de feixes sobre X, Sh_X, o núcleo de um tal morfismo (na sua acepção categórica, i.e., a seta por que fatora unicamente cada morfismo de feixes $\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}'$ cujo produto com φ é nulo) coincide com o núcleo de φ na categoria de pré-feixes (percebamos que $\mathsf{Ker}(\varphi)$ é um feixe se $\mathcal{F}', \mathcal{F}$ são feixes). No entanto, isso não ocorre em geral com o conúcleo de φ em Sh_X : nesse caso, $\mathsf{Co}(\varphi)$ é a feixificação do conúcleo de φ na categoria de pré-feixes. Por conta disso, definimos o quociente de um feixe $\mathcal{F}$ por um seu subfeixe $\mathcal{F}'$, denotado $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$ como o conúcleo (em Sh_X) da inclusão $\mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F}$.

De qualquer modo, para verificar se um $\varphi \in \mathsf{Sh}_X(\mathcal{F}', \mathcal{F})$ é mono- ou epimórfico, basta verificar essa propriedade em cada um dos morfismos induzidos

$$\mathcal{F}'_p \longrightarrow \mathcal{F}_p$$

de modo que uma seqüência de feixes é exata se é exata como seqüência de pré-feixes.

Dado um anel comutativo A, definimos o *feixe (localmente) constante* $\mathcal{A}$ por

$$\mathcal{A}(U) = \{s : U \longrightarrow A \text{ contínuas}\}$$

onde a A é dada a topologia discreta.

Exemplo 16. *Se X é variedade diferencial, são feixes (com as restrições óbvias) :*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^\infty_X(U) = \Lambda^0_X(U) &= \{s : U \longrightarrow \mathbb{C} \textit{ diferenciável}\} \\ \Lambda^p_X(U) &= \{p\textit{-formas em } U\} \\ \mathcal{Z}^p_X(U) &= \{p\textit{-formas fechadas em } U\} \\ \mathcal{B}^p_X(U) &= \{p\textit{-formas exatas em } U\} \\ \Gamma(U, E|_U) &= \{\textit{seções suaves sobre } U \textit{ do fibrado } E \longrightarrow X\} \end{aligned}$$

Exemplo 17. *Se X é variedade complexa, são feixes :*

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_X(U) &= \{s : U \longrightarrow \mathbb{C} \text{ holomorfa}\}\\ \mathcal{O}_X^*(U) &= \{s : U \longrightarrow \mathbb{C} \text{ holomorfa e nunca nula}\}\\ \mathcal{M}_X(U) &= \{s : U \longrightarrow \mathbb{C} \text{ meromorfa}\}\\ \Omega_X^p(U) &= \{p\text{-formas holomorfas em } U\}\\ \mathcal{Z}_X^{p,q}(U) &= \left\{(p,q)\text{-formas } \overline{\partial}\text{-fechadas em } U\right\}\\ \mathcal{B}_X^{p,q}(U) &= \left\{(p,q)\text{-formas } \overline{\partial}\text{-exatas em } U\right\}\\ \mathcal{I}_p(U) &= \{s \in \mathcal{O}_X(U) : s(p) = 0\}\end{aligned}$$

Exemplo 18. *São exatas as seqüências de feixes*

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_p \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_p \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}} \overset{\exp(2\pi i)}{\longrightarrow} \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^* \longrightarrow 0$$

*onde $\mathbb{Z}$ denota o feixe constante em $\mathbb{C}$. Observemos também que é semiexata, mas **não** exata, a seqüência*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) \overset{\exp(2\pi i)}{\longrightarrow} \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^*(\mathbb{C}) \longrightarrow 0$$

Fixado um feixe de anéis $\mathcal{O}$, um *módulo* $\mathcal{F}$ sobre $\mathcal{O}$ é uma atribuição de um $\mathcal{O}(U)$-módulo $\mathcal{F}(U)$ para cada aberto U, junto com restrições

$$\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$$

correspondendo a cada inclusão $V \hookrightarrow U$, compatíveis com as estruturas de módulos $\mathcal{O}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$ e $\mathcal{O}(V) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$. $\mathcal{O}$-módulos formam uma categoria, $\mathsf{Mod}_{\mathcal{O}}$, que claramente tem núcleos, conúcleos, produtos e coprodutos. Definimos também $\mathcal{F}' \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{F}$ em $\mathsf{Mod}_{\mathcal{O}}$ como a feixificação do pré-feixe

$$U \longmapsto \mathcal{F}'(U) \otimes_{\mathcal{O}(U)} \mathcal{F}(U)$$

Um $\mathcal{O}$-módulo $\mathcal{F}$ é dito *de tipo finito* se existe cobertura de X por abertos U com seqüências exatas

$$\mathcal{O}^{n_U}|_U \longrightarrow \mathcal{F}|_U \longrightarrow 0$$

$\mathcal{F}$ é dito *coerente* se para cada aberto U e epimorfismo como acima, existe cobertura aberta de U por abertos V que participam em seqüências exatas da forma

$$\mathcal{O}^{m_V}|_V \longrightarrow \mathcal{O}^{n_U}|_V \longrightarrow \mathcal{F}|_V$$

e tais módulos formam a categoria $\mathsf{Coh}_{\mathcal{O}}$.

Um submódulo de tipo finito de um módulo coerente é coerente, e se $\varphi : \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F}$ é um morfismo entre $\mathcal{O}$-módulos coerentes, então são coerentes os módulos $\mathsf{Ker}(\varphi)$ e $\mathsf{Co}(\varphi)$.

Um feixe $\mathcal{F}$ de $\mathcal{O}$-módulos é *localmente livre* se cada ponto p em X tem vizinhança U em que $\mathcal{F}|_U \simeq \mathcal{O}^r|_U$; é simples ver que, sobre uma variedade complexa X, feixes localmente livres de $\mathcal{O}_X$-módulos correspondem a fibrados holomorfos.

Denotemos por $\Gamma(X, \cdot)$ o functor de seções globais de um feixe. O exemplo da seqüência exponencial acima mostra que esse functor não é exato, embora seja simples perceber que ele é exato à esquerda. A cohomologia de X a valores num feixe $\mathcal{F}$ será então definida em termos dos *functores derivados à direita* do functor de seções globais.

Recordemos da álgebra homológica que uma *resolução* de um objeto A de $\mathfrak{A}$ é uma seqüência exata

$$\begin{aligned}&0 \longrightarrow A \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow ...\\ &= 0 \longrightarrow A \longrightarrow I^\bullet\end{aligned}$$

Uma resolução tem uma propriedade P=(ser injetiva, projetiva, acíclica) se cada I^j tem essa propriedade. Por exemplo : numa categoria abeliana $\mathfrak{A}$ um objeto I é *injetor* se é exato o functor $\mathrm{Hom}(\cdot, I)$ (que normalmente só é exato – contravariantemente – à esquerda); a resolução $0 \longrightarrow A \longrightarrow I^\bullet$ é então *injetora* quando cada I^j é injetor. Em todos os casos em que temos interesse (a saber, Sh_X e $\mathsf{Mod}_{\mathcal{O}}$) todo objeto de $\mathfrak{A}$ tem uma resolução injetiva, que fixamos de uma vez por todas.

Se

$$F : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}'$$

é um functor entre categorias abelianas, definimos seus functores derivados à direita como a seqüência de functores $\left\{R^i F\right\}_{i \geqslant 0}$

$$R^i F : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}'$$
$$R^i F (A) = H^i (F (I^\bullet))$$

onde $H^i (F (I^\bullet))$ significa tomar a homologia em dimensão i do complexo

$$F I^0 \longrightarrow F I^1 \longrightarrow F I^2 \longrightarrow ...$$

Então os functores $R^i F$ são aditivos e tais que : (1) se

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

é exata, existem morfismos naturais

$$\delta^i : R^i F (A'') \longrightarrow R^{i+1} F (A')$$

que participam na seqüência exata longa

$$R^0 F (A') \longrightarrow R^0 F (A) \longrightarrow R^0 F (A'') \xrightarrow{\delta^0} R^1 F (A') \longrightarrow R^1 F (A) \longrightarrow ...$$

onde (2) $R^0 F \simeq F$ e portanto (3) se F é exato à esquerda, é mono o morfismo $R^0 F (A') \longrightarrow R^0 F (A)$. A escolha de outra resolução injetiva

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow J^\bullet$$

determina functores derivados de F naturalmente isomorfos a $\left\{R^i F\right\}_{i \geqslant 0}$ e (4) um morfismo entre seqüências exatas curtas

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

e

$$0 \longrightarrow B' \longrightarrow B \longrightarrow B'' \longrightarrow 0$$

induz quadrados comutativos

$$\begin{tikzcd} R^i F(A'') \arrow[r, "\delta^i"] \arrow[d] & R^{i+1} F(A') \arrow[d] \\ R^i F(B'') \arrow[r, "\delta^i"] & R^{i+1} F(B') \end{tikzcd}$$

Observemos ainda que se $0 \longrightarrow A \longrightarrow J^\bullet$ é uma resolução de A que é *acíclica* para F (o que significa que $R^i F \left(J^j\right) = 0$ para $i > 0$) então o resultado de calcular cohomologias usando $J^\bullet$ é naturalmente isomorfo aos $R^i F(A)$'s.

Definição 19. *A cohomologia de X a valores num pré-feixe $\mathcal{F}$ é definida como*

$$\mathsf{H}^i (X; \mathcal{F}) := R^i \Gamma (X, \mathcal{F})$$

Por um resultado de Serre ([44]), $\mathsf{H}^i (X; \mathcal{F}) = 0$ sempre que $i > \dim X$.

Um feixe é dito *flácido* quando seus morfismos de restrição são todos sobrejetores. Dado um feixe de anéis $\mathcal{F}$, podemos construir um feixe flácido (de seções descontínuas) $\mathsf{A}^0 \mathcal{F}$ por

$$\mathsf{A}^0 \mathcal{F} (U) = \left\{ s : U \longrightarrow \coprod_{p \in U} \mathcal{F}_p : s(p) \in \mathcal{F}_p \right\}$$

Notemos que temos monomorfismo natural de feixes $\mathcal{F} \longrightarrow \mathsf{A}^0\mathcal{F}$ e que A^0 é functor aditivo; assim ganhamos seqüencias exatas functoriais em $\mathcal{F}$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathsf{A}^0\mathcal{F} \longrightarrow \mathsf{X}^1\mathcal{F} \longrightarrow 0$$

Definindo então

$$\begin{aligned} \mathsf{A}^1\mathcal{F} &:= \mathsf{A}^0\left(\mathsf{X}^1\mathcal{F}\right) \\ \mathsf{X}^2\mathcal{F} &:= \mathsf{X}^1\left(\mathsf{A}^1\mathcal{F}\right) \\ \mathsf{A}^i\mathcal{F} &:= \mathsf{A}^0\left(\mathsf{X}^i\mathcal{F}\right) \\ \mathsf{X}^{i+1}\mathcal{F} &:= \mathsf{X}^1\left(\mathsf{A}^i\mathcal{F}\right) \end{aligned}$$

temos resolução flácida

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathsf{A}^0\mathcal{F} \longrightarrow \mathsf{A}^1\mathcal{F} \longrightarrow \mathsf{A}^2\mathcal{F} \longrightarrow ...$$

dita *canônica*. É simples ver que a resolução canônica é $\Gamma(X,\cdot)$-acíclica, e portanto podemos empregá-la para calcular $\mathsf{H}^i(X;\mathcal{F})$.

3.2 Teoria de Čech e hipercohomologias

Há duas variantes principais da teoria de Čech que desejamos descrever. A primeira é uma versão cohomológica feixificada, com coeficientes num dado feixe abeliano. A segunda, especialmente útil para lidar com problemas de redução de grupo estrutural em fibrados principais, toma coeficientes num grupo de Lie, não necessariamente abeliano.

Sejam $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$ uma cobertura aberta de X e $\mathcal{F}$ um feixe em X. Para cada aberto V e inteiro $k \geqslant 0$, definimos grupos

$$\mathcal{C}^k(\mathfrak{U},\mathcal{F})(V) = \prod_{|\{\alpha_0,\ldots,\alpha_{k-1}\}|=k} \mathcal{F}\left(U_{\alpha_0} \cap .. \cap U_{\alpha_{k-1}} \cap V\right)$$

É então evidente que a atribuição

$$V \longmapsto \mathcal{C}^k(\mathfrak{U},\mathcal{F})(V)$$

determina um feixe em X, que chamamos de feixe de k-cocadeias de X com valores em $\mathcal{F}$ relativos à cobertura $\mathfrak{U}$. A regra

$$\mathcal{C}^k(\mathfrak{U},\mathcal{F})(V) \ni \varphi_V \longmapsto d_V^k\varphi_V$$

determina então morfismo de feixes

$$\mathcal{C}^k(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{C}^{k+1}(\mathfrak{U},\mathcal{F})$$

onde

$$\left(d_V^k\varphi_V\right)_{U_{\alpha_0}\cap..\cap U_{\alpha_k}} = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i r_{U_{\alpha_0}\cap\ldots\cap U_{\alpha_i}\cap\ldots\cap U_{\alpha_k}}^{U_{\alpha_0}\cap\ldots\cap\widehat{U_{\alpha_i}}\cap\ldots\cap U_{\alpha_k}} \circ (\varphi_V)_{U_{\alpha_0}\cap\ldots\cap\widehat{U_{\alpha_i}}\cap\ldots\cap U_{\alpha_k}}$$

Observamos que

$$\ker d^0 \simeq \mathcal{F}$$

que

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{C}^\bullet(\mathfrak{U},\mathcal{F})$$

é uma resolução de $\mathcal{F}$, e que se aplicamos o functor de seções globais $\Gamma(X,\cdot)$, temos complexo de grupos abelianos

$$C^0(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \longrightarrow C^1(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \longrightarrow C^2(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \longrightarrow$$

cuja homologia em dimensão i denotamos por

$$\check{H}^i(\mathfrak{U},\mathcal{F})$$

o i-ésimo *grupo de cohomologia de Čech* de X com valores em $\mathcal{F}$, relativa à cobertura $\mathfrak{U}$. Em geral, $\check{H}^i(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ não é isomorfo a $\mathsf{H}^i(X;\mathcal{F})$; isso é claro quando, por exemplo, $\mathfrak{U}=\{X\}$. Observemos que se $\mathfrak{V}$ refina $\mathfrak{U}$, temos morfismo induzido

$$\check{H}^i(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^i(\mathfrak{V},\mathcal{F})$$

Denotamos então por $\check{H}^i(X,\mathcal{F})$ o limite direto do sistema direcionado de aplicações induzidas por refinamentos de coberturas como acima; é fácil ver que o resultado independe do modo como as coberturas são refinadas. Nos casos razoáveis, podemos refinar uma dada cobertura por uma outra, localmente finita e com intersecções finitas contrácteis. Tendo isso em mente, citamos :

Proposição 20. *[17, Ch. 3 §4] Se $\mathcal{F}$ é flácido, $\check{H}^i(\mathfrak{U},\mathcal{F})=0$ para cada cobertura $\mathfrak{U}$ e inteiro $i>0$.*

Proposição 21. *[17, Ch. 3 §4] Existe morfismo functorial em $\mathcal{F}$*

$$\mathsf{H}^i(X;\mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^i(\mathfrak{U},\mathcal{F})$$

que é isomorfismo quando a cobertura $\mathfrak{U}$ é acíclica para $\mathcal{F}$.

Proposição 22. *[17, Ch. 3 §4] O limite direto de $\check{H}^1(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ sobre refinamentos de $\mathfrak{U}$ é isomorfo a $\mathsf{H}^1(X;\mathcal{F})$.*

Proposição 23. *([15]) Em espaços Hausdorff paracompactos, coincidem as teorias H^* (functores derivados), $\check{H}^i$ (Čech) e H^* (singular) para feixes constantes.*

Exemplo 24. *(Teorema de de Rham) Temos pelo lema de Poincaré resolução do feixe $\mathbb{R}\in\mathsf{Sh}_X$*

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \Lambda_X^0 \xrightarrow{d} \Lambda_X^1 \xrightarrow{d} \Lambda_X^2 \longrightarrow ...$$

que se decompõe como

$$\begin{aligned}
&0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \Lambda_X^0 \xrightarrow{d} \mathcal{Z}_X^1 \longrightarrow 0\\
&0 \longrightarrow \mathcal{Z}_X^1 \longrightarrow \Lambda_X^1 \xrightarrow{d} \mathcal{Z}_X^2 \longrightarrow 0\\
&\quad\cdots\\
&0 \longrightarrow \mathcal{Z}_X^{n-1} \longrightarrow \Lambda_X^{n-1} \xrightarrow{d} \mathcal{Z}_X^n \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

Por partições da unidade, os feixes Λ_X^p são flácidos, e portanto $\check{H}^i(X,\Lambda_X^p)=0$ para $i>0$. Assim obtemos isomorfismos

$$\check{H}^n(X,\mathbb{R}) \simeq \check{H}^{n-1}\left(X,\mathcal{Z}_X^1\right) \simeq ... \simeq \check{H}^1\left(X,\mathcal{Z}_X^{n-1}\right)$$

$$\check{H}^1\left(X,\mathcal{Z}_X^{n-1}\right) \simeq \frac{\check{H}^0(X,\mathcal{Z}_X^n)}{d\check{H}^0\left(X,\Lambda_X^{n-1}\right)} = \frac{\mathcal{Z}_X^n(X)}{\mathcal{B}_X^n(X)} = H_{dR}^n(X)$$

de maneira que $\check{H}^n(X,\mathbb{R}) \simeq H_{dR}^n(X)$.

Exemplo 25. *(Teorema de Dolbeaut) Para cada $p\geqslant 0$ temos pelo lema de Grothendieck resolução*

$$0 \longrightarrow \Omega^{p,0} \longrightarrow \Lambda_X^{p,0} \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda_X^{p,1} \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda_X^{p,2} \xrightarrow{\overline{\partial}} ...$$

que se decompõe como

$$\begin{aligned}
&0 \longrightarrow \Omega^{p,0} \longrightarrow \Lambda_X^{p,0} \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{Z}_X^{p,1} \longrightarrow 0\\
&0 \longrightarrow \mathcal{Z}_X^{p,1} \longrightarrow \Lambda_X^{p,1} \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{Z}_X^{p,2} \longrightarrow 0\\
&\quad\cdots\\
&0 \longrightarrow \mathcal{Z}_X^{p,q-1} \longrightarrow \Lambda_X^{p,q-1} \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{Z}_X^{p,q} \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

que pelas mesmas razões fornece isomorfismo (dito de Dolbeaut)

$$\check{H}^q\left(X,\Omega^{p,0}\right) \simeq \frac{\mathcal{Z}_X^{p,q}(X)}{\mathcal{B}_X^{p,q}(X)} =: H_{\overline{\partial}}^{p,q}(X)$$

Como uma ferramenta indispensável ao que se seguirá, introduzimos o conceito de hipercohomologia a valores num complexo de feixes abelianos. Se

$$\mathcal{A} = \left\{\mathcal{A}_0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{A}_1 \xrightarrow{d_1} \mathcal{A}_2 \xrightarrow{d_2} ...\right\}$$

é um complexo de feixes (coerentes) sobre X, então podemos considerar o complexo duplo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^p(X,\mathcal{A}_q) \arrow[r, "d_q"] \arrow[d, "\delta^p"'] & \mathcal{C}^p(X,\mathcal{A}_{q+1}) \arrow[d, "\delta^p"] \\ \mathcal{C}^{p+1}(X,\mathcal{A}_q) \arrow[r, "d_q"] & \mathcal{C}^{p+1}(X,\mathcal{A}_{q+1}) \end{tikzcd}$$

Formamos então o complexo total $(\mathcal{C}^* (X, \mathcal{A}), D)$ onde

$$\mathcal{C}^* (X, \mathcal{A}) = \bigoplus_{p+q=n} \mathcal{C}^p (X, \mathcal{A}_q)$$
$$D = \delta + d$$

A homologia desse complexo será dita *hipercohomologia* de X a valores no complexo $\mathcal{A}$ e denotada por $\mathbb{H}^* (X; \mathcal{A})$. Observamos que, como de costume para uma teoria cohomológica, uma seqüência exata curta de complexos de feixes (coerentes) induz seqüência exata longa correspondente em hipercohomologias. Finalmente, observamos que se $\mathcal{A}_i = 0$ para $i > 1$, então qualquer morfismo d_0 faz as vezes de diferencial do complexo, e temos seqüência exata longa induzida :

$$0 \longrightarrow \mathbb{H}^0 (X; \mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{H}^0 (X; \mathcal{A}_0) \xrightarrow{d_0} \mathsf{H}^0 (X; \mathcal{A}_1) \xrightarrow{\Delta_0} \mathbb{H}^1 (X; \mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{H}^1 (X; \mathcal{A}_0) \xrightarrow{d_1} \mathsf{H}^1 (X; \mathcal{A}_1) \xrightarrow{\Delta_1}$$
$$\xrightarrow{\Delta_1} \mathbb{H}^2 (X; \mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{H}^2 (X; \mathcal{A}_0) \xrightarrow{d_2} \mathsf{H}^2 (X; \mathcal{A}_1) \longrightarrow 0$$

Debruçemo-nos agora sobre a versão não-abeliana da teoria de Čech.

Se temos fibrado G-principal $P \longrightarrow M$ e cobrimos M por abertos $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$ sobre os quais P é trivial, percebemos que as transições locais

$$U_\alpha \cap U_\beta \times G \longrightarrow U_\alpha \cap U_\beta \times G$$

devem ser da forma $(x, g) \longmapsto (x, g_{\alpha\beta}(x)g)$, onde $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G$. Evidentemente, temos as relações

$$g_{\alpha\alpha} = 1$$
$$g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha} = 1$$

chamadas *condições de cociclo* (a razão desse nome ficará clara mais adiante), e o fibrado P se recupera da união disjunta dos $U_\alpha \times G$ identificando os pares (x_α, g) e (x_β, h) se $x_\alpha = x = x_\beta$ está em $U_\alpha \cap U_\beta$ e $h = g_{\alpha\beta}(x)g$. Reciprocamente, qualquer cobertura aberta $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$ de M, munida de aplicações $g_{\alpha\beta}$: $U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G$ que satisfazem as condições de cociclo determinam um fibrado G-principal. No entanto, é óbvio que um mesmo fibrado G-principal P pode ter diversas representações por cociclos (e.g., refinando a coleção de abertos e redefinindo as funções de transição por restrição). Gostaríamos de dispor de um critério para determinar quando duas representações de fibrados G-principais por cociclos, $\{U_\alpha, g_{\alpha\beta}\}$ e $\{U'_\alpha, h_{\alpha\beta}\}$, definem fibrados isomorfos. Uma primeira observação diz respeito às coberturas que empregamos : para comparar duas representações, podemos refinar as coberturas simultaneamente de modo a supor que $U_\alpha = U'_\alpha$. Portanto nosso critério deve versar apenas sobre as funções de transição $g_{\alpha\beta}$ e $g'_{\alpha\beta}$. Notemos agora que dois fibrados G-principais isomorfos P e P' podem ser vistos como o mesmo fibrado, munido de um sistema de trivializações locais distintos – mas sobre a mesma cobertura. Suponhamos então que tenhamos trivializações distintas $\psi_\alpha : \pi^{-1}U_\alpha \longrightarrow U_\alpha \times G$ e $\sigma_\alpha : \pi^{-1}U_\alpha \longrightarrow U_\alpha \times G$. Notemos que os $g_{\alpha\beta}$ e $h_{\alpha\beta}$ são obtidos por

$$\left(\psi_\beta\psi_\alpha^{-1}\right)|_{U_\alpha\cap U_\beta} = G_{\alpha\beta} : (x, g) \longmapsto (x, g_{\alpha\beta}(x)g)$$
$$\left(\sigma_\beta\sigma_\alpha^{-1}\right)|_{U_\alpha\cap U_\beta} = H_{\alpha\beta} : (x, g) \longmapsto (x, h_{\alpha\beta}(x)g)$$

No entanto, as aplicações $\sigma_\alpha \psi_\alpha^{-1} : U_\alpha \times G \longrightarrow U_\alpha \times G$ são da forma

$$\sigma_\alpha \psi_\alpha^{-1} = R_\alpha : (x, g) \longmapsto (x, r_\alpha(x) g)$$

onde $r_\alpha : U_\alpha \longrightarrow G$; portanto sobre $U_\alpha \cap U_\beta$ temos

$$R_\beta G_{\alpha\beta} = \sigma_\beta \psi_\beta^{-1} \psi_\beta \psi_\alpha^{-1} = \sigma_\beta \psi_\alpha^{-1} = \sigma_\beta \sigma_\alpha^{-1} \sigma_\alpha \psi_\alpha^{-1} = H_{\alpha\beta} R_\alpha$$

i.e., vale $r_\beta(x) g_{\alpha\beta}(x) r_\alpha(x)^{-1} = h_{\alpha\beta}(x)$ para cada x em $U_\alpha \cap U_\beta$. Dizemos nessas circunstâncias que $\{U_\alpha, g_{\alpha\beta}\}$ e $\{U_\alpha, h_{\alpha\beta}\}$ *diferem pelo cobordo* de $\{U_\alpha, r_\alpha\}$. Reciprocamente, dois cociclos que diferem por um cobordo definem fibrados isomorfos. Essas constatações sugerem o seguinte formalismo : entendamos por $\check{C}^0(\mathfrak{U}; G)$ o produto

$$\check{C}^0(\mathfrak{U}; G) = \prod_\alpha G^{U_\alpha}$$

e introduzamos a relação $\{g_\alpha\}_\alpha \sim \{g'_\alpha\}_\alpha \Longleftrightarrow g'_\alpha g_\alpha^{-1} = g|_{U_\alpha}$, onde $g : M \longrightarrow G$ é alguma função *globalmente* definida. Dizemos então que as 0-cocadeias $\{g_\alpha\}$ e $\{g'_\alpha\}$ são *cohomólogas, e diferem pelo cobordo de* g. Tendo em mente o caso acima, chamamos 1-cocadeia uma coleção de funções $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G$, e denotamos por $\check{C}^1(\mathfrak{U}; G)$ o conjunto de 1-cocadeias relativas à cobertura dada. Aí determinamos que $\{g_{\alpha\beta}\} \sim \{g'_{\alpha\beta}\} \Longleftrightarrow g'_{\alpha\beta} = r_\alpha g_{\alpha\beta} r_\beta^{-1}$, onde $\{r_\alpha\} \in \check{C}^0(\mathfrak{U}; G)$, e dizemos que $\{g_{\alpha\beta}\}$ e $\{g'_{\alpha\beta}\}$ são *cohomólogas* e diferem pelo *cobordo* de $\{r_\alpha\} \in \check{C}^1(\mathfrak{U}; G)$. Os símbolos $\check{H}^0(\mathfrak{U}; G)$ e $\check{H}^1(\mathfrak{U}; G)$ subentendem o quociente de $\check{C}^0(\mathfrak{U}; G)$ e $\check{C}^1(\mathfrak{U}; G)$ por suas respectivas relações de *ser cohomólogo a*. Observemos que se $\mathfrak{V} = \{V_\beta\}$ refina a cobertura $\mathfrak{U}$ (i.e., existe função J com $V_\beta \subset U_{J(\beta)}$), ganhamos morfismo

$$\check{C}^1(\mathfrak{U}; G) \longrightarrow \check{C}^1(\mathfrak{V}; G)$$

que desce a morfismo $\check{H}^1(\mathfrak{U}; G) \longrightarrow \check{H}^1(\mathfrak{U}; G)$ independente da escolha de J. Pomos

$$\check{H}^1(M; G) = \varinjlim \check{H}^1(\mathfrak{U}; G)$$

com o limite direto percorrendo os refinamentos de $\mathfrak{U}$, e definimos $\check{H}^0(M; G)$ analogamente. Pelo que expusemos, $\check{H}^1(M; G)$ se identifica naturalmente com o conjunto de tipos de isomorfismo de fibrados G-principais em M. Ressaltamos que se G não é comutativo, a única estrutura natural que $\check{H}^1(M; G)$ possui é a de conjunto pontuado (com ponto base o fibrado trivial). Introduzimos esse formalismo para tratar do seguinte caso : se nos é dada seqüência exata curta de grupos de Lie

$$1 \longrightarrow G' \longrightarrow G \longrightarrow G'' \longrightarrow 1$$

é óbvio que obtemos seqüência exata (de conjuntos pontuados)

$$\check{H}^1(M; G') \longrightarrow \check{H}^1(M; G) \longrightarrow \check{H}^1(M; G'')$$

induzida por homomorfismo de coeficientes. Observemos que G' é subgrupo de Lie de G, e se P é representado por $\{g_{\alpha\beta}\}$, a aplicação $\check{H}^1(M; G) \longrightarrow \check{H}^1(M; G'')$ é tão-somente dividir P pela ação de G'. Se supusermos que $G \longrightarrow G''$ é um revestimento com fibra abeliana, podemos estender a seqüência acima a

$$\check{H}^1(M; G') \longrightarrow \check{H}^1(M; G) \longrightarrow \check{H}^1(M; G'') \longrightarrow \check{H}^2(M; G')$$

ainda exata, onde

$$\delta_2 : \check{H}^1(M; G'') \longrightarrow \check{H}^2(M; G')$$

é construído da seguinte maneira : tomemos cobertura $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$ cujas intersecções finitas não-vazias são todas contrácteis. Tomamos representante $\{g''_{\alpha\beta}\}$ e levantamos $g''_{\alpha\beta}$ a $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G$. Pela condição do cociclo, a '3-cocadeia'

$$g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} g_{\gamma\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \longrightarrow G$$

está no núcleo do epimorfismo, e portanto fatora pela inclusão

$$G' \overset{i}{\hookrightarrow} G, g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} g_{\gamma\alpha} = g'_{\alpha\beta\gamma} \circ i$$

Então pomos $\delta_2\{g''_{\alpha\beta}\} = \{g'_{\alpha\beta\gamma}\}$. A boa-definição desse mapa é clara, já que leva cobordos em cobordos. Para a exatidão no termo $\check{H}^1(M;G'')$, observamos que se $\{g_{\alpha\beta}\}$ define P em $\check{H}^1(M;G)$, $\delta_2(P/G') = 0$ por definição; reciprocamente, se $\delta_2\{g''_{\alpha\beta}\} = 0$, i.e., se $g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \longrightarrow G'$ são todos identicamente 1, então a coleção $\{g_{\alpha\beta}\}$ define P em $\check{H}^1(M;G)$ com $P/G' = \{g''_{\alpha\beta}\}$.

Exemplo 26. *Se G é contráctil, $\check{H}^1(M;G) = 0$ para toda variedade M (pois por Whitehead BG também é contráctil).*

Exemplo 27. *Consideremos a seqüência exata curta*

$$0 \longrightarrow SO_n \longrightarrow O_n \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

Então $\delta_2 : \check{H}^1(M;O_n) \longrightarrow \check{H}^2(M;\mathbb{Z}_2)$ vale zero em um $P \in \check{H}^1(M;O_n)$ se e só se ele provém de um fibrado SO_n-principal, i.e., se e só se P é orientável. Portanto $\delta_2(P_O(E)) = w_1(E)$, a *primeira classe de Stiefel-Whitney* de E. Outra forma de verificar esta afirmação é checar a naturalidade da definição de w_1, e que w_1 assume no n-fibrado universal $EO_n \longrightarrow BO_n$ valor não-nulo. [32, Ch. 2 §1].□

Exemplo 28. *Suponhamos que exista revestimento duplo $Spin_n \longrightarrow SO_n$ não trivial, onde $Spin_n$ é um grupo de Lie. I.e., suponhamos exata*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow Spin_n \longrightarrow SO_n \longrightarrow 0$$

Essa seqüência induz $\delta_2 : \check{H}^1(M;SO_n) \longrightarrow \check{H}^2(M;\mathbb{Z}_2)$, com $\delta_2(P_{SO}(E)) = w_2(E)$, a segunda classe de Stiefel-Whitney *de E.*□

Exemplo 29. *Analogamente,*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \longrightarrow 0$$

induz isomorfismo $\delta_2 : \check{H}^1(M;S^1) \longrightarrow \check{H}^2(M;\mathbb{Z})$, e se $L \longrightarrow M$ é um fibrado de linha complexo, $\check{c}_1 = \delta_2\left(P_{U_1}(L)\right) = \check{c}_1(L)$, a primeira classe de Chern *de L . Em outras palavras : $\check{c}_1$ classifica tipos de isomorfismo de fibrados de linha complexos sobre M.*□

Boa parte desta seção se encontra em textos sobre cohomologia em feixes; recomendamos em particular [17], [15], [3] ou [14]. Nossas observações finais são discutidas em maior detalhe em [53] e [32].

3.3 Jacobiana de uma superfície de Riemann

Seja M uma variedade complexa de dimensão n. Um subconjunto Z de M é dito *hipersuperfície analítica* de M se para cada $p \in Z$ existe $p \in U \subset M$ aberto e função holomorfa $f \in \mathcal{O}_M(U)$ cumprindo

$$f^{-1}(0) = U \cap Z$$

dizemos que f define Z em U. Observemos que Z pode ter pontos singulares (i.e., pontos p onde $\dim T_pZ = n$). Uma hipersuperfície analítica é dita *irredutível* (SAI) se seu subespaço de pontos regulares é conexo.

Observamos que $\mathcal{O}_{p,M}$ é UFD e que se os germes de $f, g \in \mathcal{O}_M(U)$ em $p \in U$ são relativamente primos, então o são em todo um aberto que contém p (cf. [14, Ch.0]). Desse modo, se Z é SAI de M definida por f em U, e $g \in \mathcal{O}(U)$, a multiplicidade de g em p não muda num aberto, e portanto por ser Z irredutível, multiplicidade de g em qualquer ponto de Z é chamada de *ordem* de g sobre Z, $\mathsf{ord}_Z(g)$. Notemos que

$$\mathsf{ord}_Z(gh) = \mathsf{ord}_Z(g) + \mathsf{ord}_Z(h)$$

de maneira que podemos estender a definição de ordem a $\mathcal{M}$; para tanto, definamos para $g, h \in \mathcal{O}(U)$ que

$$\mathsf{ord}_Z : \mathcal{M}(U) \ni f = \frac{g}{h} \longmapsto \mathsf{ord}_Z(g) - \mathsf{ord}_Z(h)$$

Definimos o grupo abeliano de *divisores de Weil* de M, $\mathsf{Div}(M)$:

$$\mathsf{Div}(M) = \left\{ \sum n_Z Z : Z \text{ é SAI, } n_Z \in \mathbb{Z} \text{ e quase todo } n_Z \text{ é nulo} \right\}$$

O grau de um divisor $\sum n_Z Z$ é $\sum n_Z$. Se $f : M \longrightarrow \mathbb{C}P^1$ é holomorfa, definimos um divisor (f) associado a f através da fórmula

$$(f) = \sum_{Z \text{ SAI}} \mathsf{ord}_Z(f) Z$$

Tais divisores de Weil serão ditos *principais* ; é simples ver que $(f/g) = (f) - (g)$ se g não é identicamente nula, e portanto divisores de Weil principais formam subgrupo $\mathsf{PDiv}M$de $\mathsf{Div}M$. Seja enão $\mathcal{M}^*$ o feixe de funções meromorfas não identicamente nulas, e $\mathcal{O}^*$ o subfeixe de funções holomorfas não identicamente nulas. Temos seqüência exata

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^* \longrightarrow \mathcal{M}^* \longrightarrow \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^* \longrightarrow 0$$

e portanto exatidão em

$$H^0(M, \mathcal{M}^*) \longrightarrow H^0(M, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*) \longrightarrow H^1(M, \mathcal{O}^*)$$

Diremos que os elementos de $H^0(M, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*)$ são *divisores de Cartier* de M, e que a imagem de $H^0(M, \mathcal{M}^*)$ em $H^0(M, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*)$ consiste de divisores de Cartier *principais* . Em termos de uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}$ de Σ, um divisor de Cartier é uma coleção de $f_\alpha \in \mathcal{M}^*(U_\alpha)$ com $f_\beta f_\alpha^{-1} = f_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(U_\alpha)$. Essa condição diz que dado uma SAI Z de M, a ordem de qualquer f_α em Z é a mesma, e só a um número finito de pontos é atribuída ordem não-nula (compacidade). Em suma, temos mapa natural

$$H^0(M, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*) \longrightarrow \mathsf{Div}M$$

que é óbvio morfismo de grupos abelianos, e na realidade um *isomorfismo* pois, dado um divisor de Weil $\sum_i n_i Z_i$, podemos sempre encontrar cobertura $\{U_\alpha\}$ onde Z_i se determina em U_α por função meromorfa $f_{\alpha,i}$; i.e., $Z(f_{\alpha,i}) = Z_i \cap U_\alpha$. Então $f_\alpha = \prod_i f_{\alpha,i}^{n_i}$ determina divisor de Cartier $\{U_\alpha, f_\alpha\}$ que é mapeado precisamente no divisor de Weil de que partíramos. Portanto

$$H^0(M, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*) \simeq \mathsf{Div}M$$

Sob essa correspondência, temos $H^0(M, \mathcal{M}^*) \simeq \mathsf{PDiv}M$ de maneira quase tautológica. Por conta dessa correspondência natural, referiremo-nos doravante a *divisores*, sem maiores qualificações. Observamos então que $H^1(M, \mathcal{O}^*)$ se identifica com o grupo abeliano de fibrados de linha holomorfos em M (claramente isomorfo a $\mathsf{Div}M/\mathsf{PDiv}M =: \mathsf{Pic}M$), e portanto o morfismo de conexão

$$H^0(M, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*) \xrightarrow{\delta} H^1(M, \mathcal{O}^*)$$

mapeia um qualquer divisor $\{f_\alpha\}$ no fibrado que tem por transições holomorfas $\left\{f_{\alpha\beta} = f_\beta f_\alpha^{-1}\right\}$, e os divisores principais no fibrado holomorficamente trivial. Mais ainda : da seqüência exata da exponencial holomorfa

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{e^{2\pi i}} \mathcal{O}^* \longrightarrow 0$$

temos

$$H^1(\Sigma, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{\check{c}_1} H^2(\Sigma, \mathbb{Z})$$

a *primeira classe de Chern* de um fibrado de linha holomorfo. O mergulho natural de $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}^* \longrightarrow 0$ em $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \Lambda^0 \longrightarrow \left(\Lambda^0\right)^* \longrightarrow 0$ com $H^1(\Sigma, \Lambda^0) = 0$ diz que é comutativo

$$\begin{tikzcd}
H^1(\Sigma, \mathcal{O}^*) \arrow[r] \arrow[dr, "\check{c}_1"'] & H^1(\Sigma, \Lambda^{0*}) \arrow[d, "\check{c}_1"] \\
& H^2(\Sigma, \mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

ou seja, o tipo de *difeomorfismo* de um fibrado de linha holomorfo é determinado por sua primeira classe de Chern. Fixemos agora conexão unitária ∇ no fibrado de linha $\delta(D)$. Em termos de uma trivialização $\{U_\alpha\}$, nossos dados consistem em uma coleção de $(0,1)$-formas $\omega_\alpha \in \Lambda^1_{U_\alpha}$ com a condição

$$\omega_\beta - \omega_\alpha = -d\left(\log f_{\alpha\beta}\right)$$

A curvatura F_∇ se computa por

$$\left(F_\nabla\right)_\alpha = d\omega_\alpha + \omega_\alpha \wedge \omega_\alpha = d\omega_\alpha$$

e portanto coincide com $d\omega_\beta$ em $U_\alpha \cap U_\beta$ pela fórmula anterior. Desse modo podemos considerar $\{d\omega_\alpha\}$ uma representação de F_∇ em $H^2_{dR}(M,\mathbb{R})$. Notemos entretanto que $H^2_{dR}(M,\mathbb{R})$ é isomorfo ao quociente

$$\frac{H^0(\Sigma,\mathcal{Z}^2)}{dH^0(\Sigma,\Lambda^1)}$$

onde d é induzido da seqüência exata

$$0 \longrightarrow \mathcal{Z}^1 \longrightarrow \Lambda^1 \xrightarrow{d} \mathcal{Z}^2 \longrightarrow 0$$

e como Λ^1 admite partição da unidade, o morfismo de conexão

$$\delta_1 : \frac{H^0(M,\mathcal{Z}^2)}{dH^0(M,\Lambda^1)} \longrightarrow H^1(M,\mathcal{Z}^1)$$

é um isomorfismo, dado por

$$\delta_1\left(\{d\eta_\alpha, U_\alpha\}\right) = \{\eta_\beta - \eta_\alpha, U_\alpha \cap U_\beta\}$$

Por outro lado, também é exata

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \Lambda^0 \xrightarrow{d} \mathcal{Z}^1 \longrightarrow 0$$

e de novo obtemos isomorfismo

$$\delta_0 : H^1(M,\mathcal{Z}^1) \xrightarrow{\simeq} H^2(M,\mathbb{R})$$

que, de maneira explícita se escreve como

$$\delta_0\left(\{d\eta_{\alpha\beta}, U_\alpha\}\right) = \{\eta_{\alpha\beta} + \eta_{\beta\eta} + \eta_{\gamma\alpha}, U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma\}$$

A composta $\delta_0 \circ \delta_1$ define o *isomorfismo de de Rham* descrito anteriormente

$$H^2_{dR}(M,\mathbb{R}) \xrightarrow{\simeq} H^2(M,\mathbb{R})$$

e em termos dele vemos que F_∇ é representada em $H^2(M,\mathbb{R})$ por

$$\begin{aligned}\delta_0 \circ \delta_1\left(\{d\omega_\alpha, U_\alpha\}\right) = \delta_0\left(\{\omega_\beta - \omega_\alpha\}\right) = \delta_0\left(\{-d\left(\log f_{\alpha\beta}\right)\}\right) =\\ = -\left(\left(\log f_{\alpha\beta}\right) + \left(\log f_{\beta\gamma}\right) + \left(\log f_{\gamma\alpha}\right)\right) =\\ = -\left(\log\left(f_{\alpha\beta} f_{\beta\gamma} f_{\gamma\alpha}\right)\right)\end{aligned}$$

Mas o morfismo de conexão $\check{c}_1$ em

$$H^1\left(M,\mathcal{O}^*\right) \xrightarrow{\check{c}_1} H^2\left(M,\mathbb{Z}\right)$$

se escreve como

$$\check{c}_1\left(\{f_{\alpha\beta}, U_\alpha \cap U_\beta\}\right) = \{g_{\alpha\beta} + g_{\beta\gamma} + g_{\gamma\alpha}, U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma\}$$

onde $g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}(U_\alpha \cap U_\beta)$ é um exp-levantamento de $f_{\alpha\beta}$, i.e.,

$$\begin{aligned}&f_{\alpha\beta} = e^{2\pi i g_{\alpha\beta}}\\ &\Longrightarrow \check{c}_1\left(\{f_{\alpha\beta}, U_\alpha \cap U_\beta\}\right) = \{\frac{1}{2\pi i}\log\left(f_{\alpha\beta} f_{\beta\gamma} f_{\gamma\alpha}\right), U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma\}\end{aligned}$$

e portanto

$$\check{c}_1\left(\delta\left(\{f_\beta f_\alpha^{-1}, U_\alpha \cap U_\beta\}\right)\right) = \frac{i}{2\pi}\delta_0 \circ \delta_1\left(\{d\omega_\alpha, U_\alpha\}\right)$$

Interessa-nos sobretudo o caso $M = \Sigma$ uma superfície de Riemann. Nesse caso, SAI's de Σ nada mais são que pontos; seja $D = p \in \Sigma$, e σ uma trivialização local suave de $\delta(D)$. Qualquer outra seção se escreve como $h\sigma$ para uma função suave h; em termos de $\psi = h\sigma$ a $(0,1)$-forma de conexão local ω se explicita por

$$\omega + \overline{\omega} = \frac{d||\sigma||^2}{||\sigma||^2}$$

uma vez que

$$d||\psi||^2 = ||\sigma||^2\left(\overline{h}dh + hd\overline{h}\right) + |h|^2 d||\sigma||^2$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} d||\psi||^2 &= \left(\nabla\left(h\sigma\right), h\sigma\right) + \left(h\sigma, \nabla\left(h\sigma\right)\right) = \\ &= ||\sigma||^2\left(\overline{h}dh + hd\overline{h} + |h|^2\left(\omega + \overline{\omega}\right)\right) \end{aligned}$$

Em particular

$$\omega = \partial \log ||\sigma||^2$$

e portanto

$$\begin{aligned} F_\nabla = d\omega = \overline{\partial}\partial \log ||f_\alpha \sigma||^2 &= \left(\partial + \overline{\partial}\right)\left(\frac{1}{4\pi}\right)\left(\partial \log f_\alpha + \overline{\partial \log f_\alpha} + \left(\overline{\partial} - \partial\right)\log ||\sigma||^2\right) = \\ &= d\left(\frac{1}{4\pi}\right)\left(-2i \operatorname{Im} \partial \log f_\alpha + \left(\overline{\partial} - \partial\right)\log ||\sigma||^2\right) \end{aligned}$$

de onde se conclui que

$$\begin{aligned} \int_M F_\nabla &= \frac{1}{2\pi i} \operatorname{Im} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial B_\varepsilon(p)} \partial \log f_\alpha = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \operatorname{Im} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial B_\varepsilon(p)} \frac{\partial f_\alpha}{f_\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \end{aligned}$$

Logo

$$\check{c}_1 \circ \delta\left(\{f_\alpha, U_\alpha\}\right) = \frac{i}{2\pi}\delta_0 \circ \delta_1\left(\{d\omega_\alpha, U_\alpha\}\right)$$

ou seja : $\frac{i}{2\pi}F_\nabla$ representa o dual de Poincaré de p. Isso mostra que é comutativo o diagrama

$$\begin{tikzcd} H^0(\Sigma, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*) \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "deg"'] & H^1(\Sigma, \mathcal{O}^*) \arrow[d, "\check{c}_1"] \\ & H^2(\Sigma, \mathbb{Z}) \end{tikzcd}$$

sob a identificação canônica $H^2(\Sigma, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Portanto *divisores principais têm grau nulo* .

Recordemos que toda 2-variedade fechada e orientada X é difeomorfa a uma esfera com $g = g(X)$ alças coladas, i.e., é uma esfera ou um g-toro. Representemos a 1-homologia inteira de X por $a_1, b_1, ..., a_g, b_g$, onde a_i é curva fechada pela circunferência interior da i-ésima alça, e b_i curva fechada pela circunferência exterior da i-ésima alça. Se $X = \Sigma$ é superfície de Riemann – e portanto automaticamente Kähler – nós observamos que sua primeira cohomologia em $\mathbb{C}$ é composta de formas holomorfas e suas conjugadas (por conta das identidades Kähler), e portanto $H^0(\Sigma, K_\Sigma)$ tem dimensão complexa g. Fixamos então base $\{\omega_1, ..., \omega_g\}$ de $H^0(\Sigma, K_\Sigma)$ e definimos o *reticulado de períodos* $\Lambda \subset \mathbb{C}^g$ por

$$\Lambda = \left\{\sum_i n_i A_i + \sum_i m_i B_i : n_i, m_i \in \mathbb{Z}\right\}$$

onde

$$A_i = \begin{pmatrix} \int_{a_i} \omega_1 \\ \vdots \\ \int_{a_i} \omega_g \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} A_i(\omega_1) \\ \vdots \\ A_i(\omega_g) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^g$$

$$B_i = \begin{pmatrix} \int_{b_i} \omega_1 \\ \vdots \\ \int_{b_i} \omega_g \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} B_i(\omega_1) \\ \vdots \\ B_i(\omega_g) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^g$$

Podemos supor sem perda de generalidade que $A_i(\omega_j) = \delta_{ij}$. Λ é uma base $\mathbb{R}$-linear de $\mathbb{C}^g$, pois se para números reais r_i, s_i tivéssemos

$$\sum_i r_i \int_{a_i} \omega_j + \sum_i s_i \int_{b_i} \omega_j = 0$$

para cada j, então o funcional $\sum_i r_i \int_{a_i} + \sum_i s_i \int_{b_i}$ teria de ser nulo sobre $H^{1,0}(\Sigma)$, e portanto sobre $H^1(\Sigma;\mathbb{C}) = H^{1,0}(\Sigma) \oplus \overline{H^{1,0}(\Sigma)}$, o que por dualidade de Poincaré significaria que $r_i = 0 = s_i$ já que $\{a_i\} \cup \{b_i\}$ é uma base da 1-homologia em Σ. Dessa feita, o quociente $\mathbb{C}^g/\Lambda = J$ é um toro complexo, dito *Jacobiana* de Σ. Uma maneira algo mais abstrata de definir J é como o conúcleo do morfismo

$$\begin{aligned} H_1(\Sigma, \mathbb{Z}) &\longrightarrow H^0(\Sigma, \Omega^1_\Sigma)^\vee \\ \gamma &\longmapsto \left(\varphi \longmapsto \int_\gamma \varphi\right) \end{aligned}$$

Fixado um ponto base p em Σ, definimos o mapa de Abel $\mathsf{Ab}_p : \Sigma \longrightarrow J$ por

$$\mathsf{Ab}_p(q) = \begin{pmatrix} \int_p^q \omega_1 \\ \vdots \\ \int_p^q \omega_g \end{pmatrix}$$

onde o símbolo $\int_p^q \omega_i$ significa integrar ω_i ao longo de qualquer caminho entre p e q. A aplicação está bem definida já que quaisquer dois tais caminhos são homólogos a uma combinação inteira de a_i's e b_i's, e portanto definem o mesmo elemento em J. Por linearidade, estendemos Ab_p a atuar no grupo abeliano de *divisores de Weil* de Σ :

$$\mathsf{Ab}_p : \mathsf{Div}(\Sigma) \longrightarrow J$$

Observação 30. *Recordemos que duas métricas Riemannianas g e g' numa variedade diferencial (real) M são ditas* conformemente equivalentes *se em cada ponto de M elas diferem por um escalar positivo. Desse modo, se fixamos uma classe conforme de métricas Riemannianas $\mathcal{G}$ em M, podemos falar em ângulo entre campos vetoriais (ainda que o conceito de 'tamanho' de um campo vetorial não possa ser definido). Em particular, se M é uma superfície orientada, 'rotação por $+90^\circ$' determina uma estrutura quasi-complexa em M, que por razões dimensionais é integrável; a variedade complexa assim definida denotamos por $M_{\mathcal{G}}$. É fácil que se $\mathcal{G}$ e $\mathcal{G}'$ são classes conformes distintas, então $M_{\mathcal{G}}$ e $M_{\mathcal{G}'}$ não são holomorficamente equivalentes, e que toda curva complexa Σ difeomorfa a M é biholomorfa a $M_{\mathcal{G}}$ para alguma classe conforme $\mathcal{G}$.*

Outra observação relevante neste contexto é a de que a decomposição da 1-cohomologia em suas partes $(1,0)$ e $(0,1)$ valem por toda a classe conforme; fica então claro que a Jacobiana de uma superfície de Riemann só depende de sua estrutura complexa – e portanto, fixado um mergulho de Abel Ab_p (que é holomorfo, de acordo com o que segue), nós temos liberdade de fixar em J e Σ métricas compatíveis com o mergulho e com as respectivas estruturas complexas. Em outras palavras : a escolha de p em Σ nos permite pensá-la como subvariedade complexa e Riemanniana de J.

Para prosseguirmos o estudo do mapa de Abel, é necessário discorrermos sobre um resultado clássico, a lei de reciprocidade de Riemann :

Proposição 31. *(Reciprocidade de Riemann) Seja η 1-forma holomorfa em $\Sigma\backslash\{x_j\}$ e que tem por singularidades apenas pólos simples nos pontos $\{x_j\}$. Então se ω é uma qualquer forma holomorfa em Σ, os A- e B-períodos de η e de ω estão relacionados por*

$$\sum_i (B_i(\omega)A_i(\eta) - A_i(\omega)B_i(\eta)) = 2\pi i \sum_j \left(\int_{p_0}^{x_j} \omega\right) \mathrm{res}_{x_j}(\eta)$$

Demonstração. Representemos Σ como a identificação de um $4g$-gono Δ de lados $\alpha_1, \beta_1, \alpha_1^{-1}, \beta_1^{-1}, ..., \beta_g^{-1}$, com única palavra de colagem $\prod[\alpha_i, \beta_i]$, onde nenhum dos x_j está em nenhum dos α_i's ou β_i's. O interior de Δ é 1-conexo, e portanto se ω é uma 1-forma holomorfa em Σ, sua representante ω em $\Delta\backslash\partial\Delta$ é exata, e escrevamos $\omega = d\pi$ em $\mathsf{int}\Delta$. Podemos estender π a

$$\begin{aligned} \pi : \Delta &\longrightarrow \mathbb{C} \\ q &\longmapsto \int_{p_0}^{q} \omega \end{aligned}$$

onde $p_0 \in \Delta\backslash\partial\Delta$. Se $p \in \alpha_i$, existe um único p' em α_i^{-1} que é identificado a p na colagem que produz Σ. Temos então

$$\begin{aligned} \pi(p') - \pi(p) &= \int_p^{p'} \omega = \int_p^{a_i \cap b_i} \omega + \int_{\beta_i} \omega + \int_{b_i \cap a_i^{-1}}^{p'} \omega = \\ &= \int_{b_i} \omega =: B_i(\omega) \end{aligned}$$

Analogamente, se $p \in \beta_i$, existe um único $p' \in \beta_i^{-1}$ a que p se identifica para produzir Σ; argumento idêntico mostra que

$$\pi(p') - \pi(p) = \int_{a_1^{-1}} \omega =: -A_i(\omega)$$

Mas $\pi\eta$ também é meromorfa com singularidades nos mesmos pontos $\{x_j\}$, e por teoria de resíduos

$$\int_{\partial\Delta} \pi\eta = 2\pi i \sum_j \mathrm{res}_{x_j}(\pi\eta) = 2\pi i \sum_j \left(\int_{p_0}^{x_j} \omega\right) \mathrm{res}_{x_j}(\eta)$$

O truque agora é observar que o lado mais à esquerda da fórmula acima pode ser calculado explicitamente :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Delta} \pi\eta &= \sum_{ij} \left(\int_{\alpha_i + \alpha_i^{-1}} \pi\eta + \int_{\beta_i + \beta_i^{-1}} \pi\eta \right) = \\ &= \sum_i B_i(\omega) \left(\int_{a_i} \eta \right) - \sum_i A_i(\omega) \left(\int_{b_i} \eta \right) \\ &=: \sum_i (B_i(\omega)A_i(\eta) - A_i(\omega)B_i(\eta)) \end{aligned}$$

Assim :

$$\sum_i (B_i(\omega)A_i(\eta) - A_i(\omega)B_i(\eta)) = 2\pi i \sum_\lambda \left(\int_{p_0}^{p_\lambda} \omega\right) \mathrm{res}_{p_\lambda}(\eta)$$

como desejávamos. ∎

Observemos que se f é função meromorfa em Σ com divisor associado

$$(f) = \sum_{a_i > 0} a_i p_i + \sum_{b_j < 0} b_j q_j$$

a 1-forma

$$\eta = \frac{1}{2\pi i}\frac{df}{f}$$

é claramente holomorfa no complemento de $\{p_i\} \cup \{q_j\}$ em Σ, tem pólos simples nesses pontos, com resíduos

$$\begin{aligned} \mathrm{res}_{p_i}(\eta) &= \frac{a_i}{2\pi i} \\ \mathrm{res}_{q_j}(\eta) &= \frac{b_j}{2\pi i} \end{aligned}$$

de modo que

$$\sum \mathrm{res}(\eta) = 0$$

Claramente, f se recupera de η por

$$f(z) = \exp\left(2\pi i \int_{p_0}^{z} \eta\right)$$

Será então na linguagem de 1-formas meromorfas com pólos simples e de grau nulo que estudaremos os divisores principais em Σ. Crucial nessa direção é a seguinte proposição, em que $\Omega^1\left(\sum x_i\right)$ denota o feixe de 1-formas meromorfas em Σ que são holomorfas em $\Sigma\backslash\{x_i\}$ e têm pólos simples nos x_i's :

Proposição 32. *Dado conjunto finito de pontos $\{x_i\}$ e números complexos a_i com soma nula, existe 1-forma $\eta \in \Omega^1\left(\sum x_i\right)$ que tem por pólos precisamente os x_i's, e com resíduos a_i; além disso, quaisquer duas tais 1-formas diferem por uma 1-forma holomorfa.*

Demonstração. A seqüência

$$0 \longrightarrow \Omega^1 \longrightarrow \Omega^1\left(\sum x_i\right) \xrightarrow{\mathrm{res}} \bigoplus_i \mathbb{C}_{x_i} \longrightarrow 0$$

é exata, e portanto

$$H^0\left(\Sigma, \Omega^1\left(\sum x_i\right)\right) \xrightarrow{\mathrm{res}} \bigoplus_i \mathbb{C}_{x_i} \longrightarrow H^1\left(\Sigma, \Omega^1\right) \simeq H^0\left(\Sigma, \mathcal{O}_\Sigma\right) \simeq \mathbb{C}$$

é também exata, de onde segue que o conúcleo de res tem dimensão no máximo 1; mas como a soma de resíduos de uma 1-forma meromorfa η é nula, a imagem de res tem de estar contida no hiperplano

$$\bigoplus_i \mathbb{C}_{x_i} < H = \left\{\sum a_i x_i : \sum a_i = 0\right\}$$

e portanto com ele coincide. ∎

O passo decisivo da nossa descrição da Jacobiana é a

Proposição 33. *Se o grau de $\sum_\lambda a_\lambda p_\lambda \in \mathsf{Div}\Sigma$ é nulo, existe uma função meromorfa f a que $\sum_\lambda a_\lambda p_\lambda$ é associado se e só se a imagem de $\sum_\lambda a_\lambda p_\lambda$ por Ab_{p_0} é nula. Em outras palavras,*

$$\mathsf{Ab}_{p_0} : \mathsf{Div}^0\Sigma \longrightarrow J$$

tem núcleo $\mathsf{PDiv}\Sigma$.

Demonstração. Mostremos inicialmente que o divisor (f) associado a função

$$f : \Sigma \longrightarrow \mathbb{C}P^1$$

está no núcleo de Ab_{p_0}. Notemos que $H^1\left(\mathbb{C}P^1; \mathcal{O}_{\mathbb{C}P^1}\right) \simeq H^{1,0}\left(\mathbb{C}P^1; \mathbb{C}\right) = 0$ por cálculo direto da definição de cohomologia de Čech, e portanto aplicações holomorfas

$$\varphi : \mathbb{C}P^1 \longrightarrow J$$

puxa cada 1-forma holomorfa em J à forma nula. Mas as 1-formas holomorfas dz_i geram o espaço cotangente de J em cada ponto, e portanto toda aplicação holomorfa φ de $\mathbb{C}P^1$ num toro complexo é constante. Consideremos então

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C}P^1 &\longrightarrow J \\ [w_0 : w_1] &\longmapsto \mathsf{Ab}_{p_0}(w_0 f - w_1) \end{aligned}$$

que é evidentemente holomorfa. Então

$$\mathsf{Ab}_{p_0}(f) = \varphi([1:0]) = \varphi([0:1]) = \mathsf{Ab}_{p_0}(-1) = 0$$

e portanto $\mathsf{PDiv}\Sigma \subset \ker\left(\mathsf{Ab}_{p_0} : \mathsf{Div}^0\Sigma \longrightarrow J\right)$.

Dediquemo-nos agora a mostrar que, se um dado divisor de grau nulo D é mapeado em zero por Ab_{p_0}, então $D = (f)$ para alguma função meromorfa f. Para isso observamos que se

$$D = \sum_{a_i > 0} a_i p_i + \sum_{b_j < 0} b_j q_j = \sum_k (p_k - q_k)$$

existe pela proposição anterior $\eta' \in \Omega^1\left(\sum (p_k + q_k)\right)$ com resíduos

$$\begin{aligned} \mathrm{res}_{p_i}(\eta) &= \frac{a_i}{2\pi i} \\ \mathrm{res}_{q_j}(\eta) &= \frac{b_j}{2\pi i} \end{aligned}$$

e definimos $\eta \in \Omega^1\left(\sum (p_k + q_k)\right)$ por

$$\eta = \eta' - \sum A_i(\eta')\omega_i$$

de modo que $A_i(\eta) = 0$ para cada i. A expressão $\mathsf{Ab}_{p_0}(D) = 0$ se traduz então como : existem inteiros m_k, n_k tais que

$$\sum_k \begin{pmatrix} \int_{q_k}^{p_k} \omega_1 \\ \vdots \\ \int_{q_k}^{p_k} \omega_g \end{pmatrix} = \sum_i m_i A_i + n_i B_i$$

$$\begin{aligned} \sum_k \int_{q_k}^{p_k} \omega_j &= \sum_i \left(m_i A_i(\omega_j) + n_i B_i(\omega_j)\right) \\ &= m_j + \sum_i n_i B_i(\omega_j) \end{aligned}$$

para cada j. Pela reciprocidade de Riemann temos que

$$B_i(\eta) = \sum_k \int_{q_k}^{p_k} \omega_i$$

e portanto

$$B_j(\eta) = m_j + \sum_i n_i B_i(\omega_j)$$

Daí que se definimos

$$\xi = \eta - \sum n_j \omega_j$$

teremos

$$\begin{aligned} A_i(\xi) &= A_i\left(\eta - \sum n_j\omega_j\right) \\ &= -n_i \\ B_i(\xi) &= B_i\left(\eta - \sum n_j\omega_j\right) \\ &= m_i \end{aligned}$$

e assim ξ tem A- e B-períodos inteiros. Então

$$f(z) = \exp\left(2\pi i \int_{p_0}^{z} \xi\right)$$

define o divisor D. ■

O *grupo de Picard* $\mathsf{Pic}\Sigma = H^1(\Sigma, \mathcal{O}^*)$ tem um subgrupo $\mathsf{Pic}^0\Sigma = \ker\left(\check{c}_1 : H^1(\Sigma, \mathcal{O}^*) \longrightarrow \mathbb{Z}\right)$. O que mostramos, portanto, é que Ab_{p_0} determina injeção

$$\mathsf{Pic}^0\Sigma \longrightarrow J$$

O ponto final da nossa descrição de J é o seguinte

Teorema 34. $\mathsf{Pic}^0\Sigma \longrightarrow J$ *é isomorfismo.*

Antes, um lema auxiliar quase trivial :

Lema 35. *Uma aplicação holomorfa entre variedades complexas fechadas e conexas de mesma dimensão é necessariamente sobrejetiva se for um biholomorfismo nalgum ponto.*

Demonstração. De fato, se

$$M^n \xrightarrow{f} N^n$$

está dentro das hipóteses,

$$\int_M f^*\omega_N > 0$$

onde ω_N é a forma volume em N; mas $H^{2n}(N\backslash \mathrm{pt}) = 0$, e portanto se a imagem de f omite um ponto $\mathrm{pt} \in N$, $\omega_N|_{N\backslash\{\mathrm{pt}\}}$ é exata e portanto

$$\int_M f^*\omega_N = 0$$

já que $\partial M = 0$. ■

Prova do Teorema. Resta apenas mostrar que essa correspondência é sobrejetiva; ou seja, que dado qualquer $(a_1, ..., a_g)$ em J, existe divisor de grau nulo D tal que

$$\mathsf{Ab}_{p_0}(D) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_g \end{pmatrix}$$

Consideremos a ação natural do grupo de permutações de d elementos no produto cartesiano Σ^d, com quociente $\Sigma^d \xrightarrow{\pi} \Sigma^{(d)}$ munido da topologia induzida. Os pontos de $\Sigma^{(d)}$ são d-uplas não-ordenadas $\{p_1, ..., p_d\}$ de elementos de Σ, que representamos por $\sum_i p_i \in \Sigma^{(d)}$. Fixado $\sum_i p_i$, cada p_i possui vizinhança U_i em Σ (com coordenada local z_i), e podemos supor que $U_i \cap U_j = \varnothing$ quando $p_i \neq p_j$ e que $U_i = U_j$ e $z_i = z_j$ quando $p_i = p_j$. Consideremos então

$$\begin{aligned} \pi(U_1 \times ... \times U_d) &\longrightarrow \mathbb{C}^d \\ \sum q_i &\longmapsto \begin{pmatrix} z_1(q_1) + ... + z_d(q_d) \\ z_1(q_1)z_2(q_2) + z_1(q_1)z_3(q_3) + ... + z_{d-1}(q_{d-1})z_d(q_d) \\ \vdots \\ z_1(q_1)z_2(q_2)...z_d(q_d) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A independência algébrica dos polinômios simétricos elementares diz que essa aplicação define coordenadas locais em $\pi\left(U_1 \times ... \times U_d\right) \subset \Sigma^{(d)}$. Tomemos então $\sum_i p_i$ com $p_i \neq p_j$ se $i \neq j$. Temos inclusão natural

$$\begin{aligned} \Sigma^{(d)} &\longrightarrow \mathsf{Div}^0\Sigma \\ \sum_i p_i &\longmapsto \sum_i \left(p_i - p_0\right) \end{aligned}$$

e a composição com $\mathsf{Ab}_{p_0} : \mathsf{Div}^0\Sigma \longrightarrow J$ define aplicação holomorfa

$$\begin{aligned} \mu^{(d)} : \Sigma^{(d)} &\longrightarrow J \\ \sum_i p_i &\longmapsto \sum_i \begin{pmatrix} \int_{p_0}^{p_i} \omega_1 \\ \vdots \\ \int_{p_0}^{p_i} \omega_g \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Expressemos ω_j na coordenada local z_i por $\omega_j = \left(\frac{\omega_j}{dz_i}\right) dz_i$. Então temos

$$\frac{\partial}{\partial z_i}\left(\mu^{(d)}\left(\sum_i p_i\right)\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z_i}\left(\int_{p_0}^{p_i} \omega_1\right) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial z_i}\left(\int_{p_0}^{p_i} \omega_g\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1/dz_i \\ \vdots \\ \omega_g/dz_i \end{pmatrix}$$

Quando $d = g$, a diferencial de $\mu^{(g)}$ em $\sum_i p_i$ se escreve como

$$\begin{pmatrix} \omega_1/dz_1 & \cdots & \omega_1/dz_g \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_g/dz_1 & \cdots & \omega_g/dz_g \end{pmatrix}$$

De acordo com o lema precedente, tudo o que temos a fazer é mostrar que essa matriz tem posto máximo g em algum ponto. Ou seja : desejamos reescolher $\sum p_i$ de modo que a diferencial de $\mu^{(d)}$ nesse ponto tenha posto máximo. Comecemos por escolher p_1 de modo que $\omega_1(p_1) \neq 0$ e notemos que trocar ω_i $(i > 1)$ por $\omega_i - a_i\omega_1$ equivale a trocar a coordenada local z_1, o que não afeta o posto da matriz em questão. Portanto podemos supor que $\omega_2(p_1) = ... = \omega_g(p_1) = 0$. Novamente, trocando a coordenada z_2 podemos supor que $\omega_2(p_2) \neq 0 = \omega_3(p_2) = ... = \omega_g(p_2)$. Repetindo esse procedimento até z_g, obtemos uma matriz em forma triangular superior com diagonal principal sem zeros, e portanto $\mu^{(g)}$ é biholomorfismo em $\sum p_i$, como desejávamos mostrar. ■

Observamos que a escolha de $p_0 \in \Sigma$ define mergulho $\Sigma \hookrightarrow \mathsf{Div}^0\Sigma$ e que sabemos que um divisor de grau nulo $D = p - p_0 \in \mathsf{Div}^0\Sigma$ é principal se e só se $\mathsf{Ab}_{p_0}(p) = 0$. Portanto a composta

$$\Sigma \hookrightarrow \mathsf{Div}^0\Sigma \longrightarrow \mathsf{Div}^0\Sigma/\mathsf{PDiv}^0\Sigma = \mathsf{Pic}^0\Sigma \simeq J$$

determina *mergulho* de Σ em sua Jacobiana, dito de *Abel* ou de *Abel-Jacobi*.

Capítulo 4

Fibrados III : Classes Características

4.1 Lemas da Teoria de Obstrução

Um espaço topológico conexo por caminhos Y é dito *n-simples* se, dados quaisquer dois pontos $y_0, y_1 \in Y$, caminhos $\lambda_0, \lambda_1 : y_0 \longmapsto y_1$ e $k \leqslant n$, coincidem os isomorfismos $\pi_k(Y, y_0) \longrightarrow \pi_k(Y, y_1)$ induzidos por λ_0 e λ_1. Em particular, são ∞-simples (ou apenas *simples*) grupos topológicos, espaço de classes laterais de um grupo de Lie por um subgrupo conexo, além de espaços 1-conexos.

Suponhamos que Y seja n-simples, (X, A) um complexo CW relativo e $f : A \longrightarrow Y$ aplicação contínua. Desejamos saber quando f estende a aplicação $X \longrightarrow Y$.

A idéia é primeiro estender f às 0-células de $X \backslash A$, depois às 1-células, e assim por diante. Evidentemente, estender f às 0-células do complemento de A em X significa simplesmente atribuir valores arbitrários a essas células; essa regra estende ao 1-esqueleto de X se e só se Y é conexo.

Suponhamos então que tenhamos estendido f ao n-esqueleto X_n de X; gostaríamos de saber em que situações podemos estender f a X_{n+1}. Para tanto, fixemos aplicação característica $S^n \xrightarrow{\phi_i} X_n$ de uma dada $(n+1)$-célula e_i^{n+1} de X, e notemos que por simplicidade de Y a composição

$$S^n \longrightarrow X_n \xrightarrow{f} Y \tag{4.1}$$

define um elemento em $\pi_n(Y)$. Se $e_1^{n+1}, ..., e_N^{n+1}$ são as $(n+1)$-células de $X \backslash A$, definimos uma $(n+1)$-cocadeia

$$\begin{aligned} &c_f \in C^{n+1}(X, A; \pi_n Y) \\ &c_f : e_i^{n+1} \longmapsto [f \circ \phi_i] \end{aligned}$$

Dado que a composta $c_f \circ \partial$ (onde ∂ denota a diferencial de $C_*(X, A; \pi_n Y)$) é nula, temos que c_f é um *cociclo*.

Recordemos agora que uma aplicação $S^n \longrightarrow Y$ é restrição de uma aplicação $D^{n+1} \longrightarrow Y$ quando é nulomotópica, e apenas nesse caso. Assim, $f : X_n \longrightarrow Y$ estende $X_{n+1} \longrightarrow Y$ se e só se c_f é o *cociclo nulo*.

Observemos ainda que se $f' : X_n \longrightarrow Y$ é outra aplicação que é homotópica a f sobre X_{n-1} por uma homotopia

$$h : f\|_{X_{n-1}} \simeq f'\|_{X_{n-1}} : (X \times I)_n \longrightarrow Y \tag{4.2}$$

relativa a A, então pelo mesmo raciocínio h define cocadeia c_h em

$$C^{n+1}(X \times I, A \times I; \pi_n Y) \approx \sum_{i+j=n+1} C^i(X, A; \pi_n Y) \otimes C^j(I; \pi_n Y)$$

que é um cociclo. Definimos a *cocadeia de diferença* $d_{f,f',h} \in C^n(X, A; \pi_n Y)$ por

$$d_{f,f',h}(e_j^n) = (-1)^{n+1} c_h \left(e_j^n \times I\right)$$

Então

$$\begin{aligned}
0 &= (\delta c_h)\left(e_i^{n+1}\times I\right) = c_h\left(\partial e_i^{n+1}\times I\cup(-1)^{n+1}e_i^{n+1}\times\partial I\right) = \\
&= (-1)^{n+1}\left[\delta d_{f,f',h}(e_i^{n+1}) + c_{f'}(e_i^{n+1}) - c_f(e_i^{n+1})\right] \\
&\Longrightarrow \delta d_{f,f',h} = c_f - c_{f'}
\end{aligned}$$

ou seja : uma homotopia ($\mathsf{rel}A$) em X_{n-1} entre as restrições de duas aplicações $X_n \longrightarrow Y$ determina uma cocadeia por cujo cobordo diferem as obstruções para que essas aplicações sejam extensíveis a X_{n+1}. Convém também observar que a cocadeia de diferença $d_{f,f',h}$ admite a seguinte descrição geométrica (a menos de sinal) :

$$d_{f,f',h}(e_i^n) : \partial\left(e_i^n\times I\right)\simeq S^n \xrightarrow{h} Y$$

Desejamos agora mostrar que toda n-cocadeia se realiza como cocadeia de diferença de alguma homotopia; mais precisamente, que se $f : X^{(n)} \longrightarrow Y$, $d\in H^n(X,A;\pi_nY)$ e H é homotopia ($\mathsf{rel}A$) com $H_0 = f|_{X^{(n-1)}}$, então existe $g : X^{(n)}\longrightarrow Y$ com $H_1 = g|_{X^{(n-1)}}$ e $d_{f,g,H} = d$.

Fixemos n-células $\{e_i^n\}$ de (X,A), e sejam

$$\alpha_i : \partial\left(e_i^n\times I\right)\longrightarrow Y$$

representantes de $d(e_i^n) = d_i$. Como $K_i = \partial\left(e_i^n\times I\right)\setminus\left(e_i^n\times\{0\}\right)$ é contráctil, $\alpha_i|_{K_i}$ é homotópico a um ponto, e portanto a f, por uma homotopia $H : K_i\times I\longrightarrow Y$. Como complexos CW relativos (Z,B) são *cofibrações*, i.e., o seguinte diagrama se resolve para todo espaço W (cf. [47]) :

$$\begin{tikzcd}
B\times I\cup Z\times\{0\} \arrow[r] \arrow[d] & W \\
Z\times I \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}$$

aplicamos esta observação ao par $\left(\partial\left(e_i^n\times I\right), e_i^n\right)$ para conseguir representante de d_i que restringe a f onde este está definido, de modo que

$$\delta d_{f=H_0,H_1,H} = c_{H_1} - c_f$$

Resumindo temos :

Proposição 36. *Sejam Y espaço topológico n-simples, e (X,A) um complexo CW relativo. Então : (1) para cada $f : X_n\longrightarrow Y$ o cociclo c_f é nulo se e só se f estende a $X_{n+1}\longrightarrow Y$, e é cohomólogo a zero se e só se $f|_{X_{n-1}}$ estende a $X_{n+1}\longrightarrow Y$ e (2) se $f,g : X_n\longrightarrow Y$ são homotópicos em X_{n-1} por uma homotopia h, então c_f e c_g são cohomólogos pelo cobordo da cocadeia de diferença $d_{f,g,h}\in C^n(X,A;\pi_nY)$, e dada uma qualquer n-cocadeia e $f : X_n\longrightarrow Y$, d se realiza como cocadeia de diferença de uma homotopia de f sobre X_{n-1}.*

Desejamos agora discutir brevemente a noção de obstrução primária de um complexo CW $(n-1)$-conexo Y. Ela é definida da seguinte maneira : $\mathrm{id},\mathrm{pt} : Y_{n-1}\longrightarrow Y$ são homotópicos por alguma homotopia h pela hipótese de conexidade sobre Y; a cocadeia de diferença $d_{\mathrm{id},\mathrm{pt},h}\in C^n(Y;\pi_nY)$ é dita então *obstrução primária* para contrair Y a um ponto. Observemos que por conexidade de Y a homotopia específica h é imaterial, autorizando-nos portanto a denotar $d_{\mathrm{id},\mathrm{pt},h}\in C^n(Y;\pi_nY)$ por d_Y.

Interessa-nos sobretudo o caso $Y = S^n$; observemos então que uma homotopia entre $\mathrm{id},\mathrm{pt} : S^n_{n-1} = S^{n-1}\longrightarrow S^n$ estende imediatamente a uma homotopia sobre o hemisfério inferior D^n_-; por definição,

$$d_{\mathrm{id},\mathrm{pt},h}(-) = (-1)^{n+1}c_h(-\times I)$$

mas $c_h(D^n_+\times I)$ gera $\pi_nS^n\simeq H^n(S^n;\pi_nS^n) = H^n(S^n;\mathbb{Z})\simeq\mathbb{Z}$. Pelo mesmo raciocínio, se $f : S^n\longrightarrow S^n$, então

$$d_{f,\mathrm{pt},h} = (\deg f)\, d_{\mathrm{id},\mathrm{pt},h} = f^*\left(d_{\mathrm{id},\mathrm{pt},h}\right)$$

Observemos que é nulhomotópica qualquer aplicação $S^{n-1} \longrightarrow S^n$, e que se h, h' são homotopias $h, h' : f \simeq \mathrm{pt}, \mathrm{pt} \simeq g : S^{n-1} \longrightarrow S^n$; então por construção de $c_{h'h}$ temos que a cocadeia de diferença $d_{f,g,h'h}$ se escreve como

$$\begin{aligned} d_{f,g,h'h} &= d_{f,\mathrm{pt},h} - d_{\mathrm{pt},g,h'} \\ &= (f^* - g^*)\, d_{S^n} \end{aligned}$$

Portanto

$$[S^n, S^n] \underset{\simeq}{\xrightarrow{\deg}} \mathbb{Z} \simeq H^n(S^n; \pi_n S^n)$$

conhecido como Teorema de Hopf.

4.2 Classes de Chern

Suponhamos que $E \xrightarrow{p} M$ seja um fibrado complexo, e consideremos o quociente de $E - M$ pela relação de diferirem dois elementos numa mesma fibra por um escalar não-nulo :

$$\begin{aligned} PE &= E - M/\sim \\ e \sim e' &\Longleftrightarrow p(e) = p(e') \text{ e } e = \lambda e' \text{ para } \lambda \in \mathbb{C}^* \end{aligned}$$

PE tem estrutura natural de fibrado sobre M com fibra $\mathbb{C}P^{r-1}$, dito *projetivização* de E. Essa construção é functorial no seguinte sentido : se $f : M' \longrightarrow M$, são naturalmente isomorfos Pf^*E e f^*PE.

Suponhamos inicialmente que E seja trivial, $E \simeq \mathbb{C}^r \times M \longrightarrow M$. Então $PE \simeq \mathbb{C}P^{r-1} \times M \longrightarrow M$, e pelo isomorfismo de Künneth, temos

$$H^*(PE; \mathbb{Z}) \simeq H^*(\mathbb{C}P^{r-1}; \mathbb{Z}) \otimes H^*(M; \mathbb{Z})$$

e é comutativo o diagrama abaixo :

$$\begin{tikzcd} H^*(PE) \arrow[r] & H^*(\mathbb{C}P^{r-1}) \otimes H^*(M) \\ H^*(M) \arrow[u, "q^*"] \arrow[ur, "1\otimes\mathrm{id}"'] & \end{tikzcd}$$

Podemos considerar o fibrado $q^*E \longrightarrow PE$ e notar que ele contém o subfibrado de linha L_E

$$\{(l,p\} \in PE \times E : p \in l\} = L_E \subseteq q^*E = \{(l,p) \in PE \times E : l \text{ é reta em } E_p\}$$

que a inclusão da fibra $\mathbb{C}P^{r-1} \hookrightarrow PE$ leva no fibrado tautológico $\gamma_1(r-1)$ sobre $\mathbb{C}P^{r-1}$. Denotemos então por f a aplicação classificadora $PE \longrightarrow \mathbb{C}P^\infty$ de $\overline{L_E}$ (o fibrado de linha conjugado a L_E); i.e., $f^*\gamma_1(1) = \overline{L_E}$, e consideremos $f^*t = \Theta_E \in H^2(PE; \mathbb{Z})$, onde t é o gerador livre de $H^*(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z})$ que é dual de Poincaré do hiperplano $z_0 = 0$; então $\Theta_E^i \in H^{2i}(PE; \mathbb{Z})$ (onde $0 \leqslant i \leqslant r-1$) restringem a $1, t, t^2, ..., t^{r-1}$, geradores livres $H^*\left(\mathbb{C}P^{r-1}; \mathbb{Z}\right)$ pelo isomorfismo de Künneth

$$\begin{aligned} H^*(PE; \mathbb{Z}) &\simeq H^*(M; \mathbb{Z}) \otimes H^*\left(\mathbb{C}P^{r-1}; \mathbb{Z}\right) \\ \Theta_E &\longmapsto -1 \otimes t \end{aligned}$$

logo $\{\Theta_E^i\}_0^{r-1}$ geram livremente o $H^*(M; \mathbb{Z})$-módulo $H^*(PE; \mathbb{Z})$.

Definamos

$$\mathfrak{H}^k(M; \mathbb{Z}) = \bigoplus_{\substack{i+2j=k \\ j \geqslant 0}} H^i(M; \mathbb{Z})$$

e observemos que $\mathfrak{H}^k(-; \mathbb{Z})$ é soma direta de functores de cohomologia, e portanto admite seqüências de Meyer-Vietoris; i.e., se U, V são abertos em M e é exata a seqüência curta de complexos de cocadeias

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow C^*(U \cup V) \longrightarrow C^*(U) \oplus C^*(V) &\longrightarrow C^*(U \cap V) \longrightarrow 0 \\ C^*(U \cup V) \ni a &\longmapsto (a|_U, a|_V) \\ C^*(U) \oplus C^*(V) \ni (b,c) &\longmapsto b|_{U\cap V} - c|_{U\cap V} \end{aligned}$$

então é exata a seqüência longa em $\mathfrak{H}^*(-;\mathbb{Z})$:

$$\cdots \longrightarrow \mathfrak{H}^{k-1}(U\cap V;\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathfrak{H}^k(U\cup V;\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathfrak{H}^k(U;\mathbb{Z})\oplus\mathfrak{H}^k(V;\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathfrak{H}^k(U\cap V;\mathbb{Z}) \longrightarrow \cdots$$

Observemos ainda que o $H^*(U;\mathbb{Z})$-módulo $H^*(PE|_U;\mathbb{Z})$ ser gerado livremente por $\{\Theta_E^i|_U\}_0^{r-1}$ significa que os homomorfismos

$$\begin{aligned}\Theta_U^k : \mathfrak{H}^k(U;\mathbb{Z}) &\longrightarrow H^k(PE|_U;\mathbb{Z})\\ \begin{pmatrix} a_{i_0}\\ \vdots \\ a_{i_k}\end{pmatrix} &\longmapsto \sum_j q^*(a_{i_j})\Theta_E^i|_U\end{aligned}$$

são *isomorfismos*.

Se U e V são abertos em M, e Θ_U^k, Θ_V^k e $\Theta_{U\cap V}^k$ são isomorfismos como acima, temos

$$\begin{tikzcd} H^{k-1}(E_U)\oplus H^{k-1}(E_V) \arrow[r] & H^{k-1}(E_{U\cap V}) \arrow[r] & H^k(E_{U\cup V}) \arrow[r] & H^k(E_U)\oplus H^k(E_V) \\ \mathfrak{H}^{k-1}(U)\oplus\mathfrak{H}^{k-1}(V) \arrow[r] \arrow[u, "(\Theta_U^{k-1})\oplus(\Theta_V^{k-1})", "\simeq"'] & \mathfrak{H}^{k-1}(U\cap V) \arrow[r] \arrow[u, "\Theta_{U\cap V}^{k-1}", "\simeq"'] & \mathfrak{H}^k(U\cup V) \arrow[r] \arrow[u, "\Theta_{U\cup V}^k"] & \mathfrak{H}^k(U)\oplus\mathfrak{H}^k(V) \arrow[u, "(\Theta_U^k)\oplus(\Theta_V^k)", "\simeq"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} H^{k-1}(E_{U\cap V}) \arrow[r] & H^k(E_{U\cup V}) \arrow[r] & H^k(E_U)\oplus H^k(E_V) \arrow[r] & H^k(E_{U\cap V}) \\ \mathfrak{H}^{k-1}(U\cap V) \arrow[r] \arrow[u, "\Theta_{U\cap V}^{k-1}", "\simeq"'] & \mathfrak{H}^k(U\cup V) \arrow[r] \arrow[u, "\Theta_{U\cup V}^k"] & \mathfrak{H}^k(U)\oplus\mathfrak{H}^k(V) \arrow[r] \arrow[u, "(\Theta_U^k)\oplus(\Theta_V^k)", "\simeq"'] & \mathfrak{H}^k(U\cap V) \arrow[u, "\Theta_{U\cap V}^k", "\simeq"'] \end{tikzcd}$$

onde as linhas são definidas usando a seqüência de Meyer-Vietoris. Pelo Lema dos 5 em Álgebra Homológica, segue da comutatividade do diagrama e da exatidão das linhas que também os $\Theta_{U\cup V}^k$'s são isomorfismos. Usamos então a compacidade de M para escolher uma cobertura trivializante para E e do argumento acima conseguimos encontrar isomorfismos

$$\Theta_E^k : \mathfrak{H}^k(M;\mathbb{Z}) \longrightarrow H^k(PE;\mathbb{Z})$$

e concluímos que as classes $\{\Theta_E^i\}_0^{r-1}$ geram livremente $H^*(PE;\mathbb{Z})$.

Assim, existem únicas classes $c_i(E)\in H^{2i}(M;\mathbb{Z})$ que satisfazem a relação

$$\Theta_E^r + c_1(E)\Theta_E^{r-1} + ... + c_{r-1}(E)\Theta_E + c_r(E) = 0$$

em $H^*(PE;\mathbb{Z})$; dizemos que $c_i(E)$ é a i-ésima *classe de Chern* de E, e que $c(E) = \sum_{i\geqslant 0} c_i(E)$ é a *classe total de Chern* de E, onde pomos $c_0(E) = 1$.

Uma observação importante neste contexto é a de que todo fibrado complexo (sobre base paracompacta) admite métrica Hermitiana ; se uma tal métrica é escolhida em q^*E, podemos decompor esse fibrado como $q^*E = L_E\oplus L_E^\perp$, onde $L_E^\perp$ denota o ortogonal de L_E para a métrica considerada. Pelo que acabamos de expôr, a cohomologia de M mergulha na de PE pela aplicação induzida pela fibração própria $PE\longrightarrow M$.

Podemos então seguir o processo com $L_E^\perp \longrightarrow PE$; i.e., considerar a projetivização $q_1 : P\left(L_E^\perp\right) \longrightarrow PE$, e pelos mesmos princípios discutidos anteriormente, cindir $q_1^*L_E^\perp \simeq L_{L_E^\perp}\oplus L_{L_E^\perp}^\perp$, com $L_{L_E^\perp}$ o fibrado tautológico determinado por $L_E^\perp$; a cohomologia de PE mergulha na de sua fibração própria $P\left(L_E^\perp\right)$, e assim por diante. O posto de E limita o número de tais passos a dar até encontrar uma fibração própria suave $F\longrightarrow M$, dita *splitting map*, tal que

1. O fibrado induzido por $F\longrightarrow M$ de E cinde como soma de fibrados de linha complexos;

2. O morfismo induzido $H^*(M;\mathbb{Z})\longrightarrow H^*(F;\mathbb{Z})$ é monomorfismo.

Esse resultado é conhecido como princípio do *Splitting Complexo* Através desse princípio (e da naturalidade de c) o cálculo das classes de Chern de um qualquer fibrado complexo E se dá 'cindindo' E (módulo a fibração acima descrita) numa soma de fibrados de linha.

Notemos que a restrição de Θ_E à fibra $\mathbb{C}P^{r-1}$ determina, por construção, o gerador t de sua cohomologia. Afirmamos que Θ_E é a única classe de cohomologia de PE com essa propriedade. De fato, seja Ψ_E uma outra tal classe e construamos como acima os isomorfismos $\{\Psi_E^j\}_j$. Como por Künneth as restrições de Θ_E e Ψ_E a aberto sobre o qual PE é trivial são iguais, só precisamos mostrar que se U e V são abertos em M e valem as igualdades

$$\Psi_U = \Theta_U, \Psi_V = \Theta_V, \Psi_{U\cap V} = \Theta_{U\cap V}$$

então também vale $\Psi_{U\cup V} = \Theta_{U\cup V}$ para que concluamos que $\Psi_E = \Theta_E$ pelo mesmo argumento que mostra a existência de Θ_E. Mas isso segue da seguinte justaposição de diagramas comutativos de linhas exatas (por Meyer-Vietoris) :

$$\begin{tikzcd}
H^{k-1}(PE_U)\oplus H^{k-1}(PE_V) \arrow[r] & H^{k-1}(PE_{U\cap V}) \arrow[r] & H^k(PE_{U\cup V}) \arrow[r] & H^k(PE_U)\oplus H^k(PE_V) \\
\mathfrak{H}^{k-1}(U)\oplus\mathfrak{H}^{k-1}(V) \arrow[r] \arrow[u, "(\Theta_U^{k-1})\oplus(\Theta_V^{k-1})"', "\simeq"] \arrow[d, "(\Psi_U^{k-1})\oplus(\Psi_V^{k-1})", "\simeq"'] & \mathfrak{H}^{k-1}(U\cap V) \arrow[r] \arrow[u, "\Theta_{U\cap V}^{k-1}"', "\simeq"] \arrow[d, "\Psi_{U\cap V}^{k-1}"', "\simeq"] & \mathfrak{H}^k(U\cup V) \arrow[r] \arrow[u, "\Theta_{U\cup V}^k"'] \arrow[d, "\Psi_{U\cup V}^k"'] & \mathfrak{H}^k(U)\oplus\mathfrak{H}^k(V) \arrow[u, "(\Theta_U^k)\oplus(\Theta_V^k)"', "\simeq"] \arrow[d, "(\Psi_U^k)\oplus(\Psi_V^k)"', "\simeq"] \\
H^{k-1}(PE_U)\oplus H^{k-1}(PE_V) \arrow[r] & H^{k-1}(PE_{U\cap V}) \arrow[r] & H^k(PE_{U\cup V}) \arrow[r] & H^k(PE_U)\oplus H^k(PE_V)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
H^{k-1}(PE_{U\cap V}) \arrow[r] & H^k(PE_{U\cup V}) \arrow[r] & H^k(PE_U)\oplus H^k(PE_V) \arrow[r] & H^k(PE_{U\cap V}) \\
\mathfrak{H}^{k-1}(U\cap V) \arrow[r] \arrow[u, "\Theta_{U\cap V}^{k-1}"', "\simeq"] \arrow[d, "\Psi_{U\cap V}^{k-1}"', "\simeq"] & \mathfrak{H}^k(U\cup V) \arrow[r] \arrow[u, "\Theta_{U\cup V}^k"'] \arrow[d, "\Psi_{U\cup V}^k"'] & \mathfrak{H}^k(U)\oplus\mathfrak{H}^k(V) \arrow[r] \arrow[u, "(\Theta_U^k)\oplus(\Theta_V^k)"', "\simeq"] \arrow[d, "(\Psi_U^k)\oplus(\Psi_V^k)"', "\simeq"] & \mathfrak{H}^k(U\cap V) \arrow[u, "\Theta_{U\cap V}^k"', "\simeq"] \arrow[d, "\Psi_{U\cap V}^k"', "\simeq"] \\
H^{k-1}(PE_{U\cap V}) \arrow[r] & H^k(PE_{U\cup V}) \arrow[r] & H^k(PE_U)\oplus H^k(PE_V) \arrow[r] & H^k(PE_{U\cap V})
\end{tikzcd}$$

notando que $\Theta_W^k \circ \left(\Psi_W^k\right)^{-1} = \mathrm{id}$ para $W = U, V, U\cap V$, e portanto também para $W = U\cup V$.

Desse modo, buscar Θ_E ou buscar uma classe de cohomologia que restrinja fibra-a-fibra ao fixo gerador livre t da 2-cohomologia da fibra são problemas equivalentes. Essa observação permite concluir facilmente que a classe Θ é natural, no sentido que

$$f^*\Theta_E = \Theta_{f^*E}$$

onde $f : M' \longrightarrow M$; de fato, sejam $i_{p'} : \{p'\} \hookrightarrow M'$e $j_p : \{p\} \hookrightarrow M$, então

$$i_{p'}^* f^*\Theta_E = (f\circ i_{p'})^*\Theta_E = (j_{f(p)})^*\Theta_E$$

é o gerador fixado $t \in H^*(\mathbb{C}P^{r-1};\mathbb{Z})$, do que decorre a igualdade $f^*\Theta_E = \Theta_{f^*E}$.

Em conseqüência disso, são naturais as classes de Chern :

$$f^*c(E) = c(f^*E)$$

o que pode ser visto mais rapidamente da evidente naturalidade $f^*L_E = L_{f^*E}$.

Consideremos então $L \longrightarrow M$ um fibrado de linha. Então $PL \simeq M$ canonicamente, e portanto temos aplicação

$$c_1 : H^1(-;\mathbb{C}^*) \simeq [-,\mathbb{C}P^\infty] \longrightarrow H^2(-;\mathbb{Z})$$

Proposição 37. *A atribuição de c_1 em $[M,\mathbb{C}P^\infty]$ estabelece correspondência biunívoca com $H^2(M;\mathbb{Z})$.*

Demonstração. Ressaltamos de início que por Aproximação Celular podemos sempre supor que M é um complexo CW, já que c_1 não sente homotopias.

Observemos ainda que $c_1(\gamma^1(1)) = -\Theta_{\gamma^1(1)}$ e portanto $c_1(\gamma^1(1))$ gera $H^2(\mathbb{C}P^\infty;\mathbb{Z})$; por naturalidade de c_1 e universalidade de $\gamma^1(1)$, concluímos que se os fibrados de linha classificados por funções $f, g : M \longrightarrow \mathbb{C}P^\infty$ têm mesmo c_1, então a imagem de $c_1(\gamma^1(1))$ pelas aplicações induzidas por f e g em cohomologia são iguais. Mas $H^*(\mathbb{C}P^\infty;\mathbb{Z})$ é polinomial em $c_1(\gamma^1(1))$; logo

$$c_1\left(f^*\gamma^1(1)\right) = c_1\left(g^*\gamma^1(1)\right) \Longleftrightarrow f^* = g^* \text{ em cohomologia}$$

O que devemos mostrar portanto é que $f^* = g^*$ em cohomologia se e só se são homotópicas.

Mas a fibração de Hopf

$$S^1 \cdots S^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$$

mostra através da seqüência longa exata de grupos homotopia que se $n > 1$ temos $\pi_k\mathbb{C}P^{n-1} = 0$ se $k < 2n-1$ ou $k < 2$ e que $\pi_2\mathbb{C}P^{n-1} = \mathbb{Z}$; assim $\mathbb{C}P^\infty$ é espaço de Eilenberg-McLane de tipo $(\mathbb{Z}, 2)$.

Assim podemos supor sem perda de generalidade que f e g são mapas celulares e que $f|_{M_1} = g|_{M_1}$; denotemos por h a homotopia constante em M_1. Como $\mathbb{C}P^1 = S^2$, da discussão sobre obstruções primárias vemos que $d_{f,g,h} = (f^* - g^*)\, d_{S^2}$, e portanto a obstrução para que duas aplicações $M \longrightarrow \mathbb{C}P^\infty$ sejam homotópicas em M_2 é que induzam a mesma aplicação

$$H^2\left(\mathbb{C}P^\infty;\mathbb{Z}\right) \longrightarrow H^2\left(M;\mathbb{Z}\right)$$

Continuemos a denotar a homotopia $f|_{M_2} \simeq g|_{M_2}$ por h; se já estendemos h a M_k (onde $k \geqslant 2$), a obstrução para estender h a homotopia sobre M_{k+1} mora em $H^{k+1}\left(M;\pi_{k+1}\mathbb{C}P^\infty\right)$, que é nulo por conta de $\mathbb{C}P^\infty = K(\mathbb{Z}, 2)$. Assim podemos estender a homotopia h a todo M. ■

Desejamos mostrar que c_1 – que sabemos agora bijeção natural – é de fato um isomorfismo, i.e., respeita a estrutura de grupo que induzimos em $[-, \mathbb{C}P^\infty]$ através da bijeção natural com $\mathrm{Vect}_1(-)$ (que é grupo abeliano sob produto tensorial) descrita na seção sobre fibrados universais. Para tanto, vamos nos valer do isomorfismo

$$\check{c}_1 : H^1(-;S^1) \simeq [-, \mathbb{C}P^\infty] \xrightarrow{\simeq} H^2(-;\mathbb{Z})$$

descrito na seção sobre Teoria de Čech, que desejamos comparar a c_1. Percebamos que, assim como $c_1(\gamma^1(1))$, a classe $\check{c}_1(\gamma^1(1))$ gera a 2-cohomologia de $\mathbb{C}P^\infty$, que é livre de posto 1; portanto $c_1(\gamma^1(1)) = \pm\check{c}_1(\gamma^1(1))$; como a cohomologia de $\mathbb{C}P^1$ distingue $c_1(\gamma^1(1))$ de $-c_1(\gamma^1(1))$, o sinal em observamos $\pm$ pode ser determinado comparando os valores de c_1 e $\check{c}_1$ sobre o fibrado tautológico de $\mathbb{C}P^1$.

Proposição 38. $c_1(\gamma^1(1)) = \check{c}_1(\gamma^1(1))$

Demonstração. Recordemos que é comutativo o diagrama

$$\begin{tikzcd}
H^0(\Sigma, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*) \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "deg"'] & H^1(\Sigma, \mathcal{O}^*) \arrow[d, "\check{c}_1"] \\
& H^2(\Sigma, \mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

com $\Sigma = \mathbb{C}P^1$; assim, se $p = \infty \in \mathsf{Div}\left(\mathbb{C}P^1\right)$, temos a igualdade

$$\check{c}_1\delta\left(\{f_\alpha, U_\alpha\}\right)[\mathbb{C}P^1] = \deg\left(\{f_\alpha, U_\alpha\}\right)$$

onde $(\{f_\alpha, U_\alpha\}) \in H^0\left(\mathbb{C}P^1;\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*\right)$ representa o divisor $p \in \mathbb{C}P^1$. Mas

$$\deg p = 1$$

e sob o isomorfismo

$$\mathsf{Div}\left(\mathbb{C}P^1\right) \simeq H^0\left(\mathbb{C}P^1;\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*\right)$$

a imagem de p é representada por $\{f_0, f_1, U_0, U_1\}$ onde

$$U_0 = \mathbb{C}P^1 \backslash \{\infty\}$$
$$U_1 = \mathbb{C}P^1 \backslash \{0\}$$
$$f_0 : z \longmapsto 1$$
$$f_1 : z \longmapsto \frac{1}{z}$$

o que significa que $\delta(p) = \left\{U_0, U_1, g_{ij} = \frac{f_i}{f_j}\right\}$ é o fibrado de linha que se obtém por

$$\frac{U_0 \times \mathbb{C} \coprod U_1 \times \mathbb{C}}{\sim}$$

onde $U_0 \times \mathbb{C} \ni (z, v) \sim (z, \frac{v}{z}) \in U_1 \times \mathbb{C}$ – ou seja, $\delta(p) = \gamma^1(1)$. Logo

$$\check{c}_1 \left(\gamma^1(1)\right) [\mathbb{C}P^1] = \deg(p) = +1$$

Por outro lado, a inclusão natural

$$\iota : \mathbb{C}P^1 \hookrightarrow \mathbb{C}P^\infty$$

classifica $\gamma^1(1) \longrightarrow \mathbb{C}P^1$, e portanto por definição e naturalidade de c_1 vale

$$c_1 \left(\iota^* \gamma_1(1)\right) [\mathbb{C}P^1] = c_1 \left(\gamma^1\right) \iota_* [\mathbb{C}P^1] = +1$$

Portanto $c_1(\gamma^1(1)) = \check{c}_1(\gamma^1(1))$. ■

Por naturalidade de c_1 e $\check{c}_1$, por terem o mesmo valor em $\gamma^1(1)$, e por esse fibrado ser universal para fibrados de linha, segue que $c_1(L) = \check{c}_1(L)$ para cada $L \longrightarrow M$ de linha complexo, e que $c_1(L \otimes L') = c_1(L) + c_1(L')$.

Pelo Splitting Principle e pela naturalidade das classes de Chern, podemos calcular $c(E)$ de um qualquer fibrado complexo E desde que saibamos calcular $c(E)$ para fibrados complexos E que cindem como soma de fibrados de linha. Consideremos então

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} L_i$$

onde os L_i's são fibrados de linha; então são exatas as seqüências curtas de fibrados

$$0 \longrightarrow L_E \xrightarrow{\iota} q^* E = \bigoplus_{i=1}^{r} q^* L_i \longrightarrow \operatorname{co} \iota \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{C}} \xrightarrow{\iota \otimes 1} \bigoplus_{i=1}^{r} q^* L_i \otimes L_E^\vee \longrightarrow \operatorname{co} \iota \otimes L_E^\vee \longrightarrow 0$$

Se $\sigma \in \Gamma(PE, q^* E \otimes L_E^\vee)$ corresponde à inclusão do fibrado trivial $\underline{\mathbb{C}}$, escrevemos σ_i para sua projeção sobre o fator $q^* L_i \otimes L_E^\vee$, e V_i para o maior aberto sobre o qual σ_i não se anula; assim sendo, temos

$$PE = \bigcup_i V_i$$

Como σ_i trivializa $q^* L_i \otimes L_E^\vee|_{V_i}$, segue que

$$c_1 \left(q^* L_i \otimes L_E^\vee\right) \in H^2 \left(PE; \mathbb{Z}\right)$$

levanta a uma classe relativa em $H^2 \left(PE, V_i; \mathbb{Z}\right)$, que denotamos por x_i. Logo

$$x_1 x_2 \ldots x_r \in H^{2r} \left(PE, \bigcup V_i; \mathbb{Z}\right) = 0$$

e portanto

$$\prod_i c_1 \left(q^* L_i \otimes L_E^\vee\right) = \prod_i \left(q^* c_1(L_i) + c_1(L_E^\vee)\right) = 0$$

Mas $c_1(L_E^\vee) = -c_1(L_E) = \Theta_E$; assim a relação acima se lê

$$\prod_i (\Theta_E + q^* c_1(L_i)) = 0$$

ou seja :

$$\sum_j \zeta_j \left(c_1(L_1), ..., c_1(L_r)\right) \Theta_E^{r-j} = 0$$

onde ζ_j denota o j-ésimo polinômio simétrico elementar. Conseqüentemente

$$c_j \left(\bigoplus_1^r L_i \right) = \zeta_j \left(c_1(L_1), ..., c_1(L_r)\right)$$

e em termos das classes totais

$$c \left(\bigoplus_1^r L_i \right) = \prod_i c\left(L_i\right)$$

do que segue que a fórmula de Whitney

$$c(E \oplus F) = c(E)c(F)$$

para quaisquer dois fibrados complexos E e F.

Podemos então enunciar a seguinte

Proposição 39. *A classe de Chern* $c : \mathrm{Vect}(M) \longrightarrow H^*(M; \mathbb{Z})$ *satisfaz as seguintes propriedades :*

1. $c(E) = \sum_i c_i(E)$, onde $c_0(E) = 1$, $c_i(E) \in H^{2i}(M; \mathbb{Z})$ e $c_i(E) = 0$ para $i > \mathrm{rk}\, E$;
2. Se $f : M' \longrightarrow M$, então $f^* c(E) = c(f^* E)$;
3. $c(E \oplus E') = c(E)c(E')$;
4. $c(\gamma^1(1))$ gera a cohomologia de $\mathbb{C}P^1$, e é o dual de Poincaré de $\infty \in \mathbb{C}P^1$.

Se $\acute{c} : \mathrm{Vect}(M) \longrightarrow H^*(M; \mathbb{Z})$ é uma outra regra que cumpre as propriedades acima e $E \longrightarrow M$ é um fibrado complexo para o qual $f : F \longrightarrow M$ é um splitting map, temos

$$f^* \acute{c}\,(E) \overset{(2)}{=} \acute{c}\,(f^* E) = \acute{c} \left(\bigoplus_1^r L_i \right) \overset{(3)}{=} \prod_1^r \acute{c}\,(L_i)$$

Classificamos $L_i \longrightarrow F$ por $g_i : F \longrightarrow \mathbb{C}P^\infty$ e então

$$\prod_1^r \acute{c}\,(L_i) \overset{(2)}{=} \prod_1^r g_i^* \acute{c}\left(\gamma^1(1)\right) \overset{(4)}{=} \prod_1^r g_i^* c\left(\gamma^1(1)\right) = \prod_1^r c\left(L_i\right) = c \left(\bigoplus_1^r L_i \right) = f^* c\left(E\right)$$
$$\Longrightarrow c(E) - \acute{c}\,(E) \in \ker f^*$$

e portanto $c(E) = \acute{c}\,(E)$ já que f é mergulho em cohomologia. Isso mostra a

Proposição 40. *A classe de Chern c é a única regra* $\mathrm{Vect}(M) \longrightarrow H^*(M; \mathbb{Z})$ *que verifica as propriedades* $(1) - (4)$ *acima.*

Existe também uma descrição de classes de Chern de um fibrado diferencial em termos da 2-forma de curvatura de uma conexão nele definida. Façamos uma breve digressão à Álgebra Linear antes de descrever essa construção alternativa, devida a Chern e Weyl.

Seja V um $\mathbb{C}$-módulo de posto finito, $V^\vee$ seu dual e definamos o operador de simetrização

$$\Pi_\Sigma : \left(V^\vee\right)^{\otimes r} \longrightarrow \left(V^\vee\right)^{\otimes r}$$
$$\left(\Pi_\Sigma(\varphi)\right)(v_1, ..., v_r) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \varphi(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(r)})$$

(onde S_r denota o grupo de permutações de r elementos) e, em termos de Π_Σ, o espaço de r-formas simétricas $\Sigma^r V^\vee = \operatorname{Im}\Pi_\Sigma$. Seja ainda

$$\operatorname{Pol}^r(V;\mathbb{C}) = \{P : V \longrightarrow \mathbb{C} : P \text{ polinômio e } P(av) = a^r P(v) \text{ se } (a,v) \in \mathbb{C}\times V\}$$

Então temos aplicação linear diagonal

$$\begin{aligned} \Sigma^r V^\vee &\longrightarrow \operatorname{Pol}^r(V;\mathbb{C}) \\ \varphi &\longmapsto [v \longmapsto \varphi(v,...,v)] \end{aligned}$$

e aplicação linear de polarização

$$\begin{aligned} \operatorname{Pol}^r(V;\mathbb{C}) &\longrightarrow \Sigma^r V^\vee \\ P &\longmapsto \left[(v_1,...,v_r) \longmapsto \frac{(-1)^r}{r!}\sum_{k=1}^{r}(-1)^k \sum_{i_1<...<i_k} P\left(\sum_{j=1}^{k} v_{i_j}\right)\right] \end{aligned}$$

que são mutuamente inversas. Além disso, a fórmula acima permite perceber, via definição dos produtos

$$\begin{aligned} \Sigma^r V^\vee \times \Sigma^s V^\vee &\longrightarrow \Sigma^{r+s} V^\vee \\ (\Pi_\Sigma(\varphi_1), \Pi_\Sigma(\varphi_2)) &\longmapsto \Pi_\Sigma(\varphi_1 \otimes \varphi_2) \\ \operatorname{Pol}^r(V;\mathbb{C}) \times \operatorname{Pol}^s(V;\mathbb{C}) &\longrightarrow \operatorname{Pol}^{r+s}(V;\mathbb{C}) \\ (P_1,P_2) &\longmapsto P_1P_2 \end{aligned}$$

que a polarização determina isomorfismo de álgebras complexas entre $\operatorname{Pol}(V;\mathbb{C}) = \sum \operatorname{Pol}^r(V;\mathbb{C})$ e $\Sigma V^\vee = \sum \Sigma^r V^\vee$.

Quando $V = \operatorname{End}_{\mathbb{C}} W$, dizemos que $P \in \operatorname{Pol}^r(V;\mathbb{C})$ é *invariante* se P desce ao espaço de classes de conjugação em W; i.e., se $P(A) = P(B^{-1}AB)$ para cada $B \in \operatorname{Aut}_{\mathbb{C}} W$ e cada $A \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}} W$. Polinômios invariantes formam uma subálgebra de $\operatorname{Pol}(V;\mathbb{C})$, que denotamos por $\widetilde{\operatorname{Pol}}(V;\mathbb{C})$. A polarização de um P em $\widetilde{\operatorname{Pol}^r}(V;\mathbb{C})$ determina um $\varphi \in \Sigma^r V^\vee$ com $\varphi(A_1,...,A_r) = \varphi(B^{-1}A_1B,...,B^{-1}A_rB)$ para cada escolha de A_i e B invertível, o conjunto dos quais denotamos por $\widetilde{\Sigma^r} V^\vee$.

Suponhamos agora que $E \longrightarrow M$ seja um fibrado complexo de posto r sobre a n-variedade M, descrito em termos de cociclos de Čech como $\{(U_\alpha, g_{\alpha\beta})\}$ (onde M tem atlas $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}$), e munido de conexão $\bigtriangledown$. Uma seção A de $\Lambda^k T^*M \otimes \operatorname{End} E \longrightarrow M$ se descreve então como uma coleção de

$$A^\alpha : U_\alpha \longrightarrow \Lambda^k (\mathbb{R}^n)^\vee \otimes \operatorname{End}\mathbb{C}^r$$

sujeitas em $U_\alpha \cap U_\beta$ à condição

$$g_{\beta\alpha}(A^\alpha(X^\alpha))\, g_{\beta\alpha}^{-1} = A^\beta(\left(h_\beta h_\alpha^{-1}\right)_* X^\alpha)$$

onde X^α representa uma seção local de um k-vetor X. Da condição acima vemos que se k é par (e portanto a subálgebra $\Lambda^{k*}(\mathbb{R}^n)^\vee$ é comutativa) e P um polinômio invariante homogêneo de grau r, as funções locais

$$P(A^\alpha) : U_\alpha \longrightarrow \Lambda^{kr}(\mathbb{R}^n)^\vee$$

estão sujeitas a

$$g_{\beta\alpha}(P(A^\alpha)(X^\alpha))\, g_{\beta\alpha}^{-1} = \left(P(A^\beta)(\left(h_\beta h_\alpha^{-1}\right)_* X^\alpha)\right)$$

e portanto determinam uma kr-forma $P(A) \in \Gamma_M(\Lambda^{kr}T^*M)$. Em outras palavras, P determina aplicação

$$\underbrace{\Lambda^k_M(\operatorname{End} E) \times ... \times \Lambda^k_M(\operatorname{End} E)}_{r \text{ vezes}} \longrightarrow \Lambda^{rk}_M$$

Da polarização

$$P(A) = \varphi(A,...,A)$$

mais a simetria de φ segue que

$$dP(A) = r\varphi(\triangledown A, ..., A)$$

Em particular, se $A = F_{\triangledown}$, a identidade de Bianchi implica que $P(F_{\triangledown})$ é uma $2r$-forma fechada, o que nos permite considerar sua classe de cohomologia de de Rham $[P(F_{\triangledown})] \in H^{2r}_{dR}(M)$. Observemos que qualquer outra conexão $\triangledown'$ em E difere de $\triangledown$ por uma 1-forma globalmente definida $\eta \in \Lambda^1_M(\operatorname{End} E)$. Se pomos

$$\triangledown_t = \triangledown + 2t\eta$$

então

$$\frac{\partial}{\partial t} F_{\triangledown_t} = \triangledown\eta + 2t\eta \wedge \eta = \triangledown_t \eta$$

Portanto

$$\frac{\partial}{\partial t} P\left(F_{\triangledown_t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\varphi\left(F_{\triangledown_t}, ..., F_{\triangledown_t}\right) = r\varphi\left(\frac{\partial}{\partial t}F_{\triangledown_t}, ..., F_{\triangledown_t}\right) =$$
$$= r\varphi\left(\triangledown_t\eta, F_{\triangledown_t}, ..., F_{\triangledown_t}\right) = d\left(r\varphi\left(\eta, F_{\triangledown_t}, ..., F_{\triangledown_t}\right)\right)$$

Essa conta mostra que em cada instante t da homotopia

$$\frac{\partial}{\partial t} P\left(F_{\triangledown_t}\right) \in \operatorname{Im}\left(d : \Lambda^{2k-1}_M \longrightarrow \Lambda^{2k}_M\right)$$

e portanto

$$t \longmapsto \left[P\left(F_{\triangledown_t}\right)\right] \in H^{2r}_{dR}(M)$$

é constante. Isso mostra que $\left[P\left(F_{\triangledown}\right)\right]$ independe da conexão específica envolvida.

Como

$$Q(A) = \det\left(\frac{i}{2\pi}A + t1\right) = \sum_1^r t^k \Phi_k(A)$$

é invariante, Φ_k é invariante homogêneo de grau k. Assim podemos definir classes de Ĉhern

$$\hat{c}_k(E) = \left[\Phi_k\left(F_{\triangledown}\right)\right]$$

e $\hat{c}(E) = \sum_k \hat{c}_k(E)$. Notemos que $\hat{c}_0(E) = 1$ e que a forma 'top' de $Q(F_{\triangledown})$ (i.e., a forma de máxima dimensão que ocorre em $Q(F_{\triangledown})$ e que pode ser não-nula) tem dimensão $\frac{\operatorname{rk}_{\mathbb{R}} E}{\dim(F_{\triangledown})} = \operatorname{rk} E$, i.e., $\hat{c}_k(E) = 0$ se $k > \operatorname{rk} E$; conseqüentemente, $\hat{c}$ verifica a propriedade (1) acima.

Mais ainda, se $\triangledown$ é conexão em E e $\triangledown'$ em E', então $\triangledown \oplus \triangledown'$ é conexão em $E \oplus E'$ e é evidente que

$$F_{\triangledown\oplus\triangledown'} = \begin{pmatrix} F_{\triangledown} & \\ & F_{\triangledown'} \end{pmatrix}$$

logo

$$\hat{c}(E \oplus E') = \det\left(\frac{i}{2\pi}F_{\triangledown\oplus\triangledown'} + t1\right) =$$
$$\det\left(\frac{i}{2\pi}F_{\triangledown} + t1\right)\det\left(\frac{i}{2\pi}F_{\triangledown'} + t1\right) = \hat{c}(E)\hat{c}(E')$$

e portanto também a propriedade (3) é satisfeita.

Quanto a (2), observamos que se $\triangledown$ é conexão em E, podemos escolher cobertura $\{U_\alpha\}$ de M em que $E = \{U_\alpha, g_{\alpha\beta}\}$ e

$$\triangledown|_{U_\alpha} = d + \omega_\alpha$$

onde ω_α são matrizes $\operatorname{rk}_{\mathbb{R}} E \times \operatorname{rk}_{\mathbb{R}} E$ de 1-formas em U_α satisfazendo

$$\omega_\beta = g_{\beta\alpha}\omega_\alpha g^{-1}_{\beta\alpha} - \left(dg_{\beta\alpha}\right) g^{-1}_{\beta\alpha}$$

sobre $U_\alpha \cap U_\beta$. Então se $h_{\alpha\beta} = f^*g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} \circ f$ e $\eta_\alpha = f^*\omega_\alpha$, temos

$$h_{\beta\alpha}\eta_\alpha h_{\beta\alpha}^{-1} - (dh_{\beta\alpha})\, h_{\beta\alpha}^{-1} = f^*\left(g_{\beta\alpha}\omega_\alpha g_{\beta\alpha}^{-1} - (dg_{\beta\alpha})\, g_{\beta\alpha}^{-1}\right) = f^*(\omega_\beta) = \eta_\beta$$

de modo que $\{f^{-1}U_\alpha, \eta_\alpha\}$ representa uma conexão $f^*\triangledown$ no fibrado $f^*E = \{f^{-1}U_\alpha, h_{\alpha\beta}\}$.

Quanto à curvatura, observemos que $F_\triangledown, F_{f^*\triangledown}$ são tensoriais, i.e.,

$$\begin{aligned}(F_\triangledown)_\beta &= g_{\beta\alpha}\,(F_\triangledown)_\alpha\, g_{\beta\alpha}^{-1}\\ (F_{f^*\triangledown})_\beta &= h_{\beta\alpha}\,(F_{f^*\triangledown})_\alpha\, h_{\beta\alpha}^{-1}\end{aligned}$$

e que sobre $f^{-1}U_\alpha$ a 2-forma $(F_{f^*\triangledown})_\alpha$ se calcula por

$$(F_{f^*\triangledown})_\alpha = d\eta_\alpha - \eta_\alpha \wedge \eta_\alpha = f^*(d\omega_\alpha - \omega_\alpha \wedge \omega_\alpha)$$

já que f^* comuta com d e $\wedge$; assim

$$F_{f^*\triangledown} = f^*F_\triangledown$$

Podemos então mostrar a naturalidade de $\hat{c}(E)$:

$$\begin{aligned}\hat{c}(f^*E) &= \det\left(\frac{i}{2\pi}F_{f^*\triangledown} + t1\right) = \det\left(\frac{i}{2\pi}f^*F_\triangledown + t1\right) = f^*\left(\det\left(\frac{i}{2\pi}F_\triangledown + t1\right)\right) =\\ &= f^*\hat{c}(E)\end{aligned}$$

Observamos que $\hat{c}_1$ restrito a Vect_1 é homomorfismo; de fato se $L = \{U_\alpha, g_{\alpha\beta}\}$ e $L' = \left\{U_\alpha, g'_{\alpha\beta}\right\}$ são fibrados de linha em M munidos das conexões respectivas

$$\begin{aligned}\triangledown &= \{U_\alpha, \omega_\alpha\}\\ \triangledown' &= \{U_\alpha, \omega'_\alpha\}\end{aligned}$$

então $\triangledown \otimes 1 + 1 \otimes \triangledown'$ é conexão em $L \otimes L'$ expressa por

$$\triangledown \otimes 1 + 1 \otimes \triangledown' = \{U_\alpha, \omega_\alpha + \omega'_\alpha\}$$

de modo que

$$F_{\triangledown\otimes 1 + 1\otimes\triangledown'} = F_\triangledown \otimes 1 + 1 \otimes F_{\triangledown'}$$

e portanto

$$\begin{aligned}\hat{c}_1(L \otimes L') &= \frac{i}{2\pi}F_{\triangledown\otimes 1+1\otimes\triangledown'} = \frac{i}{2\pi}(F_\triangledown \otimes 1 + 1 \otimes F_{\triangledown'})\\ &= \hat{c}_1(L) + \hat{c}_1(L')\end{aligned}$$

Resta mostrar que $\hat{c}$ satisfaz também a propriedade (4) para que saibamos que $\hat{c} = c$. Recordemos que se $Z \in H^0(M; \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*)$, temos a igualdade

$$\check{c}_1(\delta(Z)) = \frac{i}{2\pi}[F_\triangledown] \in H^2(M; \mathbb{Z})$$

onde $\triangledown$ é conexão em $\delta(Z) \longrightarrow M$. Mas como $\gamma_1(1) = \delta(\infty)$ temos

$$\check{c}_1(\gamma_1(1))[\mathbb{C}P^1] = \frac{i}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{C}P^1} F_\triangledown = \hat{c}_1(\gamma_1(1))\,[\mathbb{C}P^1]$$

e portanto $\hat{c}_1(\gamma_1(1))$ é o dual de Poincaré de ∞. Em suma :

Proposição 41. *Coincidem $\hat{c}$ e c na categoria de fibrados diferenciais.*

4.3 Classes de Stiefel-Whitney e de Pontrjagin

Há duas outras famílias de classes características que gostaríamos de discutir, ambas definidas sobre fibrados reais : as classes de Stiefel-Whitney e as classes de Pontrjagin.

Seja então $E \longrightarrow X$ um fibrado real com $\text{rk}_{\mathbb{R}}\, E = r$. Como no caso complexo, definimos a projetivização real de E, $P_{\mathbb{R}}E$, por

$$\frac{E \backslash X}{\sim}$$

onde dois pontos são identificados se estão na mesma fibra e diferem por um número real não-nulo. O fibrado induzido de E sobre $P_{\mathbb{R}}E$ tem subfibrado de linha $L_E^{\mathbb{R}}$, que a inclusão da fibra $\mathbb{R}P^{r-1}$ leva no fibrado tautológico; seja $f : P_{\mathbb{R}}E \longrightarrow \mathbb{R}P^\infty$ classificador $L_E^{\mathbb{R}}$, e θ_E a imagem por f do gerador livre da cohomologia de $\mathbb{R}P^\infty$.

Assim como no caso das classes de Chern, e por argumentos idênticos, $H^*(P_{\mathbb{R}}E; \mathbb{Z}_2)$ é $H^*(X; \mathbb{Z}_2)$-módulo livre, gerado localmente por $1, \theta_E, ..., \theta_E^{r-1}$, de maneira que a equação

$$\theta_E^r + w_1(E)\theta_E^{r-1} + ... + w_{r-1}(E)\theta_E + w_r(E) = 0$$

admite solução única $(w_1(E), w_2(E), ..., w_r(E)) \in H^1(X; \mathbb{Z}_2) \times ... \times H^r(X; \mathbb{Z}_2)$. Tais classes são ditas de Stiefel-Whitney, e $w(E) = 1 + w_1(E) + ... + w_1(E)$ é a classe total de Stiefel-Whitney. A demonstração da proposição abaixo é uma versão simplificada (por conta de $+1 = -1$ em $\mathbb{Z}_2$) daquela presente na seção anterior :

Proposição 42. *A classe total de Stiefel-Whitney w verifica as seguintes propriedades :*

1. $w(E) = \sum w_i(E)$ onde $w_0(E) = 1$ e $w_i(E) = 0$ se $i > \text{rk}_{\mathbb{R}}\, E$;
2. $f^*w(E) = w(f^*E)$ (naturalidade);
3. $w(E \oplus E') = w(E)w(E')$ (Whitney);
4. $w(\gamma_1(1)) \neq 1$ em $H^*(\mathbb{R}P^1; \mathbb{Z}_2)$ (normalização).

Assim como no caso complexo, temos um *splitting principle* real, por essencialmente os mesmos argumentos.

Consideremos o fibrado

$$\underbrace{\gamma^1(1) \times ... \times \gamma^1(1)}_{r} \longrightarrow \underbrace{\mathbb{R}P^\infty \times ... \times \mathbb{R}P^\infty}_{r}$$

e seja $f : (\mathbb{R}P^\infty)^r \longrightarrow \text{Grass}_r(\mathbb{R}^\infty)$ seu classificador; ou seja, $f^*\gamma^r = \left(\gamma^1(1)\right)^r$. Desejamos mostrar que f é um splitting map; para isso devemos mostrar que f é mergulho em cohomologia. Tomemos $g : F \longrightarrow \text{Grass}_r(\mathbb{R}^\infty)$ algum splitting map de γ^r, com

$$g^*\gamma^r = L_1 \oplus ... \oplus L_r$$

e seja $h_i : F \longrightarrow \mathbb{R}P^\infty$ o classificador de L_i. Então se $h = (h_1, ..., h_r)$ temos

$$g^*\gamma^r = h^*\left(\gamma^1(1) \times ... \times \gamma^1(1)\right) = (fh)^*\gamma^r$$

e portanto são homotópicas as aplicações g e fh; f é então mergulho em cohomologia porque f^* divide g^* à direita e g é splitting map. Isso permite mostrar a

Proposição 43. *$w : \text{Vect}_{\mathbb{R}}(X) \longrightarrow H^*(X; \mathbb{Z}_2)$ é única a satisfazer as quatro propriedades acima.*

Demonstração. Se $E \longrightarrow X$ é um fibrado real, nós o cindimos por um splitting map $h : F \longrightarrow X$, $h^*E = L_1 \oplus ... \oplus L_r$, e classificamos L_i por $g_i : F \longrightarrow \mathbb{R}P^\infty$. Assim, dada outra atribuição $\hat{w} : \text{Vect}_{\mathbb{R}}(X) \longrightarrow H^*(X; \mathbb{Z}_2)$ que verifica as propriedades $(1) - (4)$ acima, temos

$$\begin{aligned} h^*\hat{w}(E) &\overset{(2)}{=} \hat{w}(L_1 \oplus ... \oplus L_r) \overset{(3)}{=} \prod \hat{w}(L_i) \overset{(2)}{=} \prod g_i^*\hat{w}\left(\gamma^1(1)\right) \overset{(4)}{=} \prod g_i^* w\left(\gamma^1(1)\right) \\ &= w(L_1 \oplus ... \oplus L_r) = h^*w(E) \end{aligned}$$

■

Observemos que $w_{2i}(\gamma^1(1)) = c_i\left(\gamma^1(1)\right) \bmod 2$, e portanto (universalidade + splitting) essa relação vale para qualquer fibrado complexo.

Para definirmos as classes de Pontrjagin de E, observamos que são isomorfos como fibrados *complexos* a complexificação de E, $E \otimes \mathbb{C}$, e seu dual, $(E \otimes \mathbb{C})^\vee$. Conseqüentemente coincidem suas classes de Chern; mas

$$c_i\left((E \otimes \mathbb{C})^\vee\right) = (-1)^i c_i\left(E \otimes \mathbb{C}\right)$$

mostra que $2c_i\left(E \otimes \mathbb{C}\right) = 0$ para i ímpar; assim é nula a imagem de $c_{2i+1}\left(E \otimes \mathbb{C}\right)$ sob o morfismo natural

$$H^*\left(X; \mathbb{Z}\right) \longrightarrow H^*\left(X; \mathbb{Q}\right)$$

Definimos a i-ésima classe integral de Pontrjagin de E pela regra

$$p_i : E \longmapsto (-1)^i c_{2i}(E)$$

e sua i-ésima classe racional, $q_i(E)$, como a imagem de $p_i(E)$ em $H^*\left(X; \mathbb{Q}\right)$. Do axioma da soma de Whitney para c temos

$$\begin{aligned} p_i\left(E \oplus E'\right) &= (-1)^i c_{2i}\left(\left(E \oplus E'\right) \otimes \mathbb{C}\right) = (-1)^i \sum_{j+k=2i} c_j\left(E \otimes \mathbb{C}\right) c_k\left(E' \otimes \mathbb{C}\right) \\ &= \sum_{j+k=i} (-1)^j c_{2j}\left(E \otimes \mathbb{C}\right) (-1)^k c_{2k}\left(E' \otimes \mathbb{C}\right) + \rho = \sum_{j+k=i} p_j\left(E\right) p_k\left(E'\right) + \rho \end{aligned}$$

onde ρ é produto de classes de cohomologia de período 2. Morta a torção ganhamos multiplicatividade das classes de Pontrjagin racionais :

$$q_i\left(E \oplus E'\right) = \sum_{j+k=i} q_j\left(E\right) q_k\left(E'\right)$$

4.4 Fibrados spinoriais e spinoriais^c

Fixemos uma estrutura spin num fibrado $E \longrightarrow M$. A restrição adjunta $\mathrm{Ad} : Cl_n^* \longrightarrow \mathrm{Aut}(Cl_n)$ a $Spin_n$ nos possibilita formar o *fibrado de Clifford* $Cl(E) = P_{Spin}(E) \times_{\mathrm{Ad}} Cl_n$. O automorfismo canônico estende a automorfismo do fibrado de Clifford :

$$\alpha : Cl(E) \longrightarrow Cl(E) \tag{4.3}$$

e conseqüentemente induz decomposição $Cl(E) = Cl^0(E) \oplus Cl^1(E)$, com $Cl^1(E)$ um $Cl^0(E)$-módulo. Se $\rho : Cl_n \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{R}} W$ (resp., $\rho : Cl_n \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}} W$) é módulo real (resp., complexo) para Cl_n, o fibrado $S(E) = P_{Spin}(E) \times_{\rho|_{Spin_n}} W$ é dito *fibrado spinorial real* (resp. *complexo*) de $(E, P_{Spin}(E), \rho)$. A descrição em termos de cociclos de Čech é útil também neste caso. Fixemos um módulo complexo irredutível $\mathbb{S}_n$ para Cl_n ($\rho : Cl_n \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{S})$), e seja $\{U_\alpha, t_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow SO_n\}$ o cociclo que define E, supondo ainda que intersecções finitas de abertos da cobertura são contrácteis. Levante cada $t_{\alpha\beta}$ a $\bar{t}_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow Spin_n$, o que é possível pela hipótese sobre $\{U_\alpha\}$. Então se definimos para cada tripla (α, β, γ) $w_{\alpha\beta\gamma} = \bar{t}_{\alpha\beta}\bar{t}_{\beta\gamma}\bar{t}_{\gamma\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \longrightarrow \mathbb{Z}_2$, então $\{U_\alpha, w_{\alpha\beta\gamma}\}$ representa $w_2(E)$ e é portanto nulo já que E é spin. Portanto $\{U_\alpha, \bar{t}_{\alpha\beta}\}$ define o fibrado $Spin_n$-principal $P_{Spin}(E)$, e $\{U_\alpha, \rho \circ \bar{t}_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}_n)\}$ é a representação de Čech de $S(E)$.

Observação 44. *Notemos que o fibrado spinorial real (resp., complexo) é um módulo real (resp., complexo) sobre o fibrado de Clifford.*

Observação 45. *A classificação dos tipos de isomorfismo de módulos reais e complexos sobre Cl_n fornece o número de tipos de isomorfismo de fibrados spinoriais irredutíveis associados a cada estrutura spin fixada em E.*

Observação 46. *Observemos que as formas volume real e complexas são globalmente definidas. As identidades $\omega^2 = 1$ (para n côngruo a 3 ou 4 mod 4) e $\omega_{\mathbb{C}}^2 = 1$ (para n par) fornecem decomposição dos fibrados spinoriais real e complexo, respectivamente, em suas partes positiva e negativa : $S(E) = S^+(E) \oplus S^-(E)$.*

De maneira análoga tomamos módulo complexo para $\mathbb{C}l_n$, $\rho : \mathbb{C}l_n \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}} W$, e definimos o *fibrado spinorial^c fundamental* associado à estrutura spin^c $P_{Spin^c}(E)$ fixada no fibrado $E \longrightarrow B$ e a ρ como $S_c(E) = P_{Spin^c}(E) \times_\rho W$. Quando W for irredutível diremos que $S_c(E)$ é o fibrado spinorial^c *fundamental*.

Observação 47. $\nu_{2k}^{\mathbb{C}} = 1 \Longrightarrow$ *existe um único fibrado spinorial^c fundamental associado a uma estrutura spin^c num fibrado de dimensão par. Por outro lado, $\nu_{2k+1}^{\mathbb{C}} = 2$, mas as representações irredutíveis inequivalentes têm a mesma restrição a $Spin^c$. Portanto fixada uma estrutura spin^c num fibrado, há um único fibrado spinorial^c a menos de isomorfismo.*

Observação 48. *O fibrado spinorial^c $S_c(E)$ é um módulo complexo sobre o fibrado de Clifford.*

Buscamos agora uma caracterização mais 'amigável' do fibrado spinorial^c fundamental através da linguagem de Čech. $\mathbb{S}$ ainda denota um módulo complexo irredutível para Cl_n, $\rho : Cl_n \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}_n)$. Fixemos $E \longrightarrow M$ com descrição de Čech é $\{U_\alpha, t_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow SO_n\}$, onde a cobertura $\{U_\alpha\}$ é acíclica. Suponhamos que E admita estrutura spin^c $P_{Spin^c} = \{U_\alpha, c_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow Spin_n^c\}$. Recorde que os mapas $c_{\alpha\beta}$ podem ser vistos como produto de mapas $\phi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow Spin_n$ e $z_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow S^1$ com a propriedade de que é comutativo o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & Spin_n \arrow[d, hook] & \\
U_\alpha \cap U_\beta \arrow[ur, "\phi_{\alpha\beta}"] \arrow[r, "c_{\alpha\beta}"] \arrow[dr, "z_{\alpha\beta}"'] & Spin_n^c & Spin_n \times S^1 \arrow[l, "mod \mathbb{Z}_2"'] \arrow[ul, "pr_1"'] \arrow[dl, "pr_2"] \\
 & S^1 \arrow[u, hook] &
\end{tikzcd}$$

Então $\{U_\alpha, z_{\alpha\beta}^2\}$ é o cociclo que define o fibrado, e que as cocadeias $\{U_\alpha, \phi_{\alpha\beta}\}$ e $\{U_\alpha, z_{\alpha\beta}\}$ *não são cociclos em geral.* Isso é claro já que, por exemplo, se $\{U_\alpha, \phi_{\alpha\beta}\}$ é um cociclo então ele define estrutura spin em E, i.e., $w_2(E)$ tem de ser zero, o que não é necessário para que E possua estrutura spin^c. No entanto, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\hat{H}^1_{\check{C}}(B; S^1) \arrow[r, "z \mapsto z^2"] \arrow[d, "c_1", "\simeq"'] & \hat{H}^1_{\check{C}}(B; S^1) \arrow[r, "w_2"] \arrow[d, "c_1", "\simeq"'] & \hat{H}^1_{\check{C}}(B; \mathbb{Z}_2) \arrow[d, equal] \\
\hat{H}^1_{\check{C}}(B; \mathbb{Z}) \arrow[r, "z \mapsto 2z"] & \hat{H}^1_{\check{C}}(B; \mathbb{Z}) \arrow[r, "\delta"] & \hat{H}^1_{\check{C}}(B; \mathbb{Z}_2)
\end{tikzcd}$$

mostra que a obstrução para que E seja spin (ou seja, que $w_2(E) = 0$) coincide com a obstrução para que $\det \sigma$ possua raiz quadrada $\det \sigma^{1/2}$ globalmente definida (que é $\delta(c_1(\det \sigma)) = 0$, ou seja, que $c_1(\det \sigma) \equiv 0 \mod 2$). Portanto, com coeficientes em $\mathbb{Z}_2$, $w_2(E) + \delta(c_1(\det \sigma)) = 0$. Conclusão : *a cocadeia $\{U_\alpha, \phi_{\alpha\beta} \times z_{\alpha\beta}\}$ é um cociclo independente de serem ou não cociclos as cocadeias $\{U_\alpha, \phi_{\alpha\beta}\}$ e $\{U_\alpha, z_{\alpha\beta}\}$.* Em vista disso, construímos o cociclo $\{U_\alpha, \rho \circ c_{\alpha\beta}\} = \{U_\alpha, \rho \circ (\phi_{\alpha\beta} \times z_{\alpha\beta})\}$ que representa o fibrado spinorial^c fundamental. Suponhamos então que P_{Spin^c} seja trivial; então os $\phi_{\alpha\beta}$ podem ser tomados identicamente 1, e segue de $S_c(E) = P_{Spin^c}(E) \times_\rho \mathbb{S}$ que $S_c(E) = S(E) \otimes \det \sigma^{1/2}$. Portanto sobre aberto trivializante U_α para P_{Spin^c} o fibrado spinorial^c fundamental é da forma $S(E) \otimes \det \sigma^{1/2}$, e é fácil ver (pela unicidade de $\otimes$) que os fibrados sobre abertos trivializantes U_α e U_β coincidem em sua intersecção. Isso mostra que

$$S_c(E) = S(E) \otimes \det \sigma^{1/2} \tag{4.4}$$

Se P_{Spin^c} corresponde a $(\kappa, \tau) \in H^2(B; \mathbb{Z}) \oplus H^1(B; \mathbb{Z}_2)$, observamos que $\det \sigma = L_\kappa$. Se P'_{Spin^c} é uma outra estrutura spin^c em E, representada por $(\kappa', \tau) \in H^2(B; \mathbb{Z}) \oplus H^1(B; \mathbb{Z}_2)$, então o fibrado spinorial^c fundamental para P'_{Spin^c} é $S(E) \otimes L_{\kappa'}^{1/2}$, onde *se passa do fibrado spinorial^c fundamental $S_c(E)$de P_{Spin^c} ao fibrado spinorial^c fundamental $S'_c(E)$ de P'_{Spin^c} tensorizando $S_c(E)$ por $L_{-\kappa}^{1/2} \otimes L_{\kappa'}^{1/2} = L_{\kappa'-\kappa}^{1/2}$.*[1] Para

[1]Comentário já redundante a esta altura : claro que $L_\kappa^{1/2}$ não necessariamente existe para cada κ em $H^2(B; \mathbb{Z})$ (a condição é que $\kappa = 2\kappa''$ para algum κ''); no entanto, localmente esse fibrado sempre existe, de modo que nossa passagem se $S_c(E)$ a $S'_c(E)$ é pelo menos localmente bem-definida.

calcular o fibrado spinorial^c fundamental, fazemos as seguintes observações : se V é um espaço vetorial real de dimensão n, e J uma estrutura complexa em V, denotemos por V_1 o i-autoespaço de J. Então denotamos por $\Lambda^*_{\mathbb{C}} V_1$ a álgebra exterior complexa de V_1, de dimensão complexa 2^n. Então V age em $\Lambda^*_{\mathbb{C}} V_1$ por

$$\begin{aligned} V \times \Lambda^*_{\mathbb{C}} V_1 &\longrightarrow \Lambda^*_{\mathbb{C}} V_1 \\ (v, w_1 \wedge ... \wedge w_r) &\longmapsto \pi(v) \wedge w_1 \wedge ... \wedge w_r - \pi(v) \rfloor w_1 \wedge ... \wedge w_r \end{aligned}$$

Verifica-se imediatamente que o quadrado dessa representação atua por multiplicação pelo escalar $\varphi(v)$, e portanto estende a representação de toda a Álgebra de Clifford em $\Lambda^*_{\mathbb{C}} V_1$. Uma consulta à tabela de dimensão e número das representações irredutíveis de $\mathbb{C}l_n$ mostra que a representação que construímos é de fato irredutível se não for trivial, o que é evidente. Isso basta para concluir que $\Lambda^{0,*} V$ é o fibrado spinorial^c fundamental (associado à representação spinorial complexa).

Observemos agora as seguintes proposições, que serão usadas no capítulo sexto.

Proposição 49. *Um fibrado orientado de posto (real) ao menos três, sobre um complexo CW Σ de dimensão 2 é trivial se é spin. Em outras palavras,* $w_1(E) = 0 = w_2(E)$ *e* $r = \mathsf{rk}_{\mathbb{R}} E > 2 \Longrightarrow E$ *é trivial.*

Demonstração. Observemos que $P_{SO_r}(E)$ é o quociente de um fibrado $Spin_r$-principal P_{Spin_r} pela ação de $\mathbb{Z}_2$. Tomemos

$$f : \Sigma \longrightarrow BSpin_r$$

classificador de P_{Spin_r}, e notemos que $Spin_r$ é simplesmente conexo (já que $r > 2$), e portanto $BSpin_r$ é 2-conexo. Assim sendo, a obstrução para estender uma homotopia entre

$$f_0, \mathsf{pt} : \Sigma \longrightarrow BSpin_r$$

mora em $H^2(\Sigma; \pi_2 BSpin_r) = 0$. Portanto

$$E = f^* ESpin_r$$

é trivial. ∎

Proposição 50. *Se Σ é superfície de Riemann, M uma variedade (real) orientada de dimensão ao menos 4,* $w_2(TM) = 0$ *e*

$$f : \Sigma \longrightarrow M$$

um mergulho, então o fibrado normal de Σ em M é trivial.

Demonstração. Basta notar que $f^* TM = T\Sigma \oplus N\Sigma$, e $0 = w_i(T\Sigma \oplus N\Sigma) = w_i(T\Sigma) + w_i(N\Sigma) = w_i(N\Sigma)$ para $0 < i < 3$. ∎

Proposição 51. *Se Σ é superfície de Riemann de gênero $g \geqslant 2$, p um seu ponto e*

$$\mathsf{Ab}_p : \Sigma \longrightarrow J$$

o mergulho de Abel-Jacobi de Σ baseado em p, então Σ sempre possui uma estrutura spin compatível com a de J.

Demonstração. A observação fundamental (cf. [Ch. II, §2, Prop. 2.15]LM) é que uma subvariedade spin de uma variedade munida de uma estrutura spin tem estrutura spin canônicamente determinada pela escolha de uma estrutura spin em seu fibrado normal. Como o fibrado normal $N\Sigma \longrightarrow \Sigma$ é spin orientado, e portanto (diferenciavelmente) trivial se $g > 2$, fica claro que nessa situação sempre podemos dotá-lo de uma estrutura spin. No caso $g = 2$, notamos que $c_1(J) = 0$ e portanto

$$0 = (\mathsf{Ab}_p)^* c_1(J) = c_1(N\Sigma \oplus T\Sigma) = c_1(N\Sigma) + c_1(T\Sigma)$$

e portanto $N\Sigma$ é diferenciavelmente equivalente ao inverso do fibrado tangente de Σ.

Recordemos então que uma estrutura spin num fibrado U_1-principal P sobre Σ é um morfismo de fibrados $\widetilde{P} \longrightarrow P$ que é um 2-revestimento $z \longmapsto z^2$ em cada fibra. Observemos então que se $P_{U_1}(T\Sigma)$ é dado por cociclos de Čech

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow U_1$$

então $P_{U_1}\left(T\Sigma^{-1}\right)$ tem cociclos de Čech $\left\{g_{\alpha\beta}^{-1}\right\}$; uma estrutura spin

$$\widetilde{P} \longrightarrow P_{U_1}(T\Sigma)$$

tem então cociclos $\{h_{\alpha\beta}\}$ com $h_{\alpha\beta}^2 = g_{\alpha\beta}$, e portanto $\left\{h_{\alpha\beta}^{-1}\right\}$ determinam estrutura spin

$$\widetilde{Q} \longrightarrow P_{U_1}\left((T\Sigma)^{-1}\right)$$

Assim, a escolha de uma estrutura spin em $T\Sigma$ naturalmente determina uma estrutura spin em $N\Sigma$. ■

4.5 Conexões spinoriais

O objetivo desta seção é discutir em maior detalhe as conexões que desejamos considerar nos fibrados spinoriais. Recordemos inicialmente que, dada variedade Riemanniana munida de conexão M, munida de conexão métrica $\bigtriangledown$, a torção de $\bigtriangledown$ se define por

$$T_{\bigtriangledown}(X,Y) = [\bigtriangledown_X, \bigtriangledown_Y] - \bigtriangledown_{[X,Y]} \tag{4.5}$$

Esse tensor mora em $\Lambda^2 \operatorname{End}(TM)$, e a única conexão métrica com torção nula é dita conexão de Levi-Civita de M. Vamos supor que M está munido da (única) conexão em M cuja torção é nula é dita de *Levi-Civita*, e suporemos nesta seção que é a conexão com que TM é munido.

$\bigtriangledown^{Cl}$**em** $Cl(E)$ Notemos inicialmente que uma conexão em $P_{Spin}(E)$ é induzida de conexão em $P_{SO}(E)$ já que $P_{Spin}(E) \longrightarrow P_{SO}(E)$ é um 2-revestimento. Explicitamente : em $p \in P_{Spin}(E)$ declaramos ser horizontal a imagem inversa do subespaço horizontal de $\Xi(p)$ em $P_{SO}(E)$. No entanto, no caso de estrutura spin^c

$$P_{Spin^c}(E) \longrightarrow P_{SO}(E) \times P_{U_1} \tag{4.6}$$

fixemos uma conexão τ^{U_1}em P_{U_1} e uma conexão τ^{SO_n} em $P_{SO}(E)$. Declaramos horizontal em $(q,u) \in P_{SO}(E) \times P_{U_1}$ o subespaço $\tau^{U_1} \times \tau^{SO_n}$, e em $p \in \Xi^{c-1}(q,u)$ sua imagem inversa por Ξ^c. Consideremos agora dada uma conexão τ no fibrado $P_{SO}(E)$, e desejamos induzir uma conexão em $Cl(E)$. É fácil verificar que $Cl(E) = P_{Spin}(E) \times_{\mathrm{Ad}} Cl_n = P_{SO}(E) \times_\rho Cl_n$ onde $\rho : SO_n \longrightarrow \operatorname{Aut}(Cl_n)$ é a representação

$$\rho(g)e_{i_1}e_{i_2}...e_{i_r} = (ge_{i_1})(ge_{i_2})...(ge_{i_r}) \tag{4.7}$$

Observemos que a ação $SO_n \times (P_{SO}(E) \times Cl_n) \longrightarrow P_{SO}(E) \times Cl_n$ dada por $(g,(q,x)) \longmapsto (qg, \rho(g^{-1})x)$ tem por quociente $Cl(E)$, e denotamos por π a aplicação quociente. Declaremos horizontal em $p = \pi(q,x) \in Cl(E)$ o subespaço em que $d\pi_{(q,x)}$ mapeia o subespaço horizontal $\tau_q \times T_x Cl_n$ de $P_{SO}(E) \times Cl_n$ em (q,x). A diferencial em g de $SO_n \longrightarrow \operatorname{Aut}(P_{SO}(E) \times Cl_n)$ mapeia $\tau_q \times T_x Cl_n$ isomorficamente em $\tau_{qg} \times T_{\rho(g^{-1})x} Cl_n$, e portanto $d\pi_{(q,x)}(\tau_q \times T_x Cl_n) = d\pi_{(q',x')}(\tau_{q'} \times T_{x'} Cl_n)$. Temos então uma conexão *bona fide* em $Cl(E)$. Um ponto importante a ressaltar : ρ induz morfismo entre as álgebras de Lie de SO_n e de $\operatorname{Aut}(Cl_n)$. É fácil ver que a exponencial de uma derivação de Cl_n é um automorfismo, e, reciprocamente, caminhos por automorfismos têm derivações por velocidades. Assim, $L(\operatorname{Aut}(Cl_n)) = \mathsf{Der}(Cl_n)$. Portanto, se $\bigtriangledown^{Cl}$ é a derivação covariante induzida em $Cl(E)$ por derivação covariante $\bigtriangledown^E$ em E, temos que, numa trivialização local em que seções se identificam a mapas $U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\bigtriangledown^E|_{U_\alpha} = d + \omega^\alpha \tag{4.8}$$

Observemos que se $\{U_\alpha, \phi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow SO_{\mathrm{rk}\,E}$ é o cociclo de Čech que define $P_{SO}(E) \longrightarrow M$, o fibrado $Cl(E)$ se representa por $\{U_\alpha, \rho \circ \phi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \operatorname{Aut}(Cl_n)\}$ e fica claro que

$$\rho \circ \phi_{\alpha\beta}(x)\rho_*\omega^\alpha(x) = d\left(\rho \circ \phi_{\alpha\beta}\right) + \rho_*\omega^\beta(x)\rho \circ \phi_{\alpha\beta}(x) \tag{4.9}$$

daí que a coleção $\{d + \rho_*\omega^\alpha\}_\alpha$ define conexão *bona fide* em $Cl(E)$. (Verifique que ela coincide com a conexão que descrevemos anteriormente em $Cl(E)$). Notemos tambem que, como $\rho_*\omega^\alpha(x)$ é uma derivação de $T_x Cl_n$, temos que

$$\bigtriangledown^{Cl}(st) = \bigtriangledown^{Cl}(s)t + s\bigtriangledown^{Cl}(t) \tag{4.10}$$

i.e., $\bigtriangledown^{Cl}$ age como derivação da álgebra de seções de $Cl(E)$. Notemos também que, vendo E como subfibrado de $Cl(E)$, a restrição de $\bigtriangledown^{Cl}$a E coincide com $\bigtriangledown^{E}$(Explicitamente : se $(e_1, ..., e_n)$ é seção local de $P_{SO}(E)$, então $\bigtriangledown^{Cl}(e_{i_1}e_{i_2}...e_{i_k}) = \sum_j e_{i_1}...\bigtriangledown^E e_{i_j}...e_{i_k})$. Sob o isomorfismo $\Lambda^* E \simeq Cl(E)$ são preservados por $\bigtriangledown^{Cl}$os subfibrados $\Lambda^k E$. Mais ainda, como sempre podemos tomar uma seção local $(e_1, ..., e_n)$ de $P_{SO}(E)$ em que, num ponto predeterminado $p \in M$ se tem $\bigtriangledown^E e_i(p) = 0$, a forma volume $\omega = e_1 e_2 ... e_n$ é globalmente paralela, $\bigtriangledown^{Cl}\omega \equiv 0$, e portanto $\bigtriangledown^{Cl}$preserva $Cl^{\pm}(E)$ quando $n \equiv 3$ ou 4 mod 4.

Observação 52. *Usando argumentos análogos se mostra também que a transformação de curvatura $K_{u,v}$: $E_x \longrightarrow E_x$ estende a derivação da álgebra de seções de $Cl(E)$.*

Observação 53. *Se $(e_1, ..., e_n)$ de $P_{SO}(TM)$, os operadores $d = \sum_j e_j \wedge \bigtriangledown_{e_j}$ e $d^* = -\sum_j e_j \rfloor \bigtriangledown_{e_j}$ nada mais são que o operador de diferenciação exterior e sua adjunta. De fato, é simples constatar que d^* é adjunto a d, e que (1) $d^2 = 0$; (2) d é diferenciação exterior em funções e (3) $d(\eta_1 \wedge \eta_2) = d\eta_1 \wedge \eta_2 + (-1)^{\eta_1} \eta_1 \wedge d\eta_2$)*

$\bigtriangledown^S$**em** $S(E)$ Dada conexão τ em $P_{Spin}(E)$ (e portanto em $P_{SO}(E)$), induzimos no fibrado spinorial $S(E) = P_{Spin}(E) \times_\rho W$ a conexão que declara horizontal o subespaço de $T_s S(E)$ que corresponde a $\tau_p \times T_x W$ por $P_{Spin}(E) \times W \longrightarrow P_{Spin}(E) \times_\rho W$. No entanto, sabemos que todo fibrado spinorial $S(E)$ cinde como soma de irredutíveis. Dada nossa classificação prévia de representações de álgebras de Clifford, saber que $\bigtriangledown^{Cl}$age como derivação de $\Gamma(Cl(E))$ é suficiente para afirmar que também a derivação covariante $\bigtriangledown^S$ induzida num fibrado spinorial $S(E)$ age como derivação em $\Gamma(S(E))$, e também $S^{\pm}(E)$ são preservados por $\bigtriangledown^S$ quando definidos.

Observação 54. *Observemos que quando $E = TM$, construímos uma conexão canônica em $Cl(E)$.*

Descrições em Coordenadas no caso spin Em vista das nossas recentes observações, é suficiente calcular em coordenadas a derivação covariante do fibrado de Clifford de E. Para isso, teremos de analisar em maior detalhe o morfismo induzido por Ξ em $L(Spin_n) \longrightarrow L(SO_n)$.

Notemos inicialmente que Cl_n é álgebra associativa, e portanto a estrutura de álgebra de Lie de $L(Spin_n) = T_1 Spin_n$ é dada por $[a, b] = ab - ba$. A variedade $Spin_n$ reveste SO_n; logo tem dimensão $\dim SO_n = \frac{n(n-1)}{2}$. Observemos que se $\{e_1, ..., e_n\}$ for base ortonormal de $\mathbb{R}^n$, então $e_i e_j \in Spin_n$ se $i < j$, e há exatamente $\frac{n(n-1)}{2}$ tais elementos com $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Assim, para mostrar que $\{e_i e_j\}_{i<j}$ é base de $L(Spin_n)$ basta mostrar que cada um desses elementos (claramente linearmente independentes) está em $L(Spin_n)$, i.e., é velocidade em 1 de uma curva por $Spin_n$. Mas é claro que as curvas

$$t \longmapsto \gamma_{ij}(t) = (\cos t + \sin t(e_i e_j)) \tag{4.11}$$

estão em $Spin_n$ e têm por velocidade em 0 $e_i e_j$. Além disso, se $k \notin \{i, j\}$,

$$\begin{aligned} \xi \circ \gamma_{ij}(t) e_k &= (\cos t + \sin t(e_i e_j))\, e_k \,(\cos t + \sin t(e_i e_j))^{-1} && (4.12)\\ &= (\cos t + \sin t(e_i e_j))\, e_k \,(\cos t - \sin t(e_i e_j))^{-1} && (4.13)\\ &= e_k \Longrightarrow d\xi_1(e_i e_j) e_k = 0 && (4.14) \end{aligned}$$

e se $k = i$

$$\begin{aligned} \xi \circ \gamma_{ij}(t) e_k &= (\cos t + \sin t(e_i e_j))\, e_i \,(\cos t - \sin t(e_i e_j)) && (4.15)\\ &= \left(\cos^2 t - \sin^2 t\right) e_i + (2 \sin t \cos t) e_j && (4.16)\\ &= (\cos 2t) e_i + (\sin 2t) e_j && (4.17)\\ &\Longrightarrow d\xi_1(e_i e_j) e_i = -2 e_j && (4.18) \end{aligned}$$

Analogamente, $d\xi_1(e_i e_j) e_j = 2 e_i$, donde se conclui que $\xi_*(e_i e_j) = 2 e_i \wedge e_j$. Como $[e_i, e_j] = e_i e_j - e_j e_i = 2 e_i e_j$, segue que

$$\frac{1}{4}\xi_*[v, w] = v \wedge w \text{ para todos } v \wedge w \in \Lambda^2 \mathbb{R}^n \tag{4.19}$$

Observemos então que se escrevemos a expressão local da conexão em $P_{SO}(E)$

$$(\triangledown^E)^\alpha e_i = \sum_{i<j} \omega^\alpha_{ji} e_i \wedge e_j \tag{4.20}$$

então $\bar{\omega}_{ij}$são levantamentos de ω_{ij} a $P_{Spin}(E)$, então $d\Xi_x(\triangledown^{Cl}_v e_k(x)) = \sum_{i<j} \omega^\alpha_{ji}(x)(v) e_i \wedge e_j(e_k) \implies \triangledown^{Cl}_v e_k(x) = \left(\frac{1}{2}\sum_{i<j} \omega^\alpha_{ji}(x)(v) e_i e_j\right) e_k$ e portanto se sobre um aberto U_α se trivializa um fibrado spinorial $S(E)$ e $\sigma \in \Gamma(S(E)|_{U_\alpha})$ se escreve em coordenadas por

$$\sigma^\alpha : x \longmapsto (x, s_\alpha(x)) \text{ onde } s_\alpha : U_\alpha \longrightarrow W \tag{4.21}$$

Portanto se V é campo vetorial em M, a seção $(\triangledown^S_V)\sigma$ se escreve sobre U_α como

$$x \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ d(s_\alpha)_{V(x)} s_\alpha(x) + \frac{1}{2}\sum_{i<j} \omega_{ji}(x)(V(x)) e_i e_j s_\alpha(x) \end{pmatrix} \tag{4.22}$$

Conexões spinoriais^c No caso de fibrados spinoriais^c, recordamos que $P_{Spin^c}(E) \longrightarrow P_{SO}(E) \times P_{U_1}$ é um 2-revestimento, e portanto uma 1-forma de conexão ω em $P_{SO}(E)$ e uma 1-formas de conexão A em $P_{U_1} = \det(P_{Spin^c})$ induzem naturalmente conexão em $P_{Spin^c}(E)$ (declarando horizontal em $p \in P_{Spin^c}(E)$ o subespaço $(d\Xi^c_p)^{-1}(\tau^{SO}_{pr_1 \circ \xi^c(p)} \times \tau^{U_1}_{pr_2 \circ \xi^c(p)})$). Fixemos então trivializações $\{U_\alpha, \phi_{\alpha\beta}\}$ de E e $\{U_\alpha, z_{\alpha\beta}\}$ de $\det P_{Spin^c}$, com

$$\phi_{\alpha\beta} \times z^{1/2}_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow Spin^c_n \tag{4.23}$$

Observemos que se $(\triangledown^{P_{SO}(E)\times P_{U_1}})^\alpha(e_i, z)(x) = \left(\sum_{i<j} \omega^\alpha_{ji}(x) e_i \wedge e_j, A(x)z\right)$, então segue de

$$d\Xi^c_p\left(\triangledown^{P_{Spin^c}}_v e_k(x)\right) = \left(\sum_{i<j} \omega^\alpha_{ji}(x) V(x) e_i \wedge e_j, A(x)z\right) \tag{4.24}$$

e

$$(d\Xi^c_*)^{-1} A = \frac{1}{2} A \tag{4.25}$$

que fixado V campo vetorial em B, σ seção de $P_{Spin^c}(E)$, se trivializarmos $\sigma|_{U_\alpha}$ como

$$x \longmapsto (x, s_\alpha(x)),\ s_\alpha : U_\alpha \longrightarrow Spin^c_n \tag{4.26}$$

a seção $(\triangledown^{P_{Spin^c}}_V)\sigma$ se escreve sobre U_α como

$$x \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ d(s_\alpha)_{V(x)} s_\alpha(x) + \frac{1}{2} A(x) s_\alpha(x) + \frac{1}{2}\sum_{i<j} \omega_{ji}(x)(V(x)) e_i e_j s_\alpha(x) \end{pmatrix} \tag{4.27}$$

onde pensamos o produto $A(x)s_\alpha(x)$ como definido através da dualidade métrica entre 1-formas e campos vetoriais (Se $\eta \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)^*$ e $\eta = g(\cdot, V_\eta)$ para $V_\eta \in \mathbb{R}^n$, então o produto de Clifford $\eta x - x \in Cl_n$ – é na verdade $V_\eta x$).

Observação 55. *Como $\mathbb{C}l_n \simeq Cl_n \otimes \mathbb{C}$ e $\triangledown^{S_c(E)} e_{i_1} e_{i_2} ... e_{i_k} = \sum_j e_{i_1} ... \triangledown^{P_{Spin^c}} e_{i_j} ... e_{i_k}$, segue que essa é a forma geral da derivação covariante de uma seção num fibrado spinorial^c munido da conexão unitária $A \in \Gamma(T^*M \otimes i\mathbb{R})$ no determinante da estrutura spin^c.*

Transformação de Curvatura, operadores de Dirac e Identidades de Bochner É imediato das nossas considerações que se $\Omega = d\omega + [\omega, \omega]$ é a 2-forma de curvatura em $P_{SO}(E)$ então a curvatura da conexão induzida num fibrado spinorial $S(E) = P_{Spin}(E) \times P_{U_1}$, $K^{S(E)} = \left(\triangledown^{S(E)}\right)^{(1)} \circ \left(\triangledown^{S(E)}\right)$, é tal que

$$K^{S(E)}\psi = \frac{1}{2}\sum_{i<j} \Omega_{ji} \otimes e_i e_j \psi \tag{4.28}$$

Ora,

$$\left\langle K_{u,v}^{E}(e_i), e_j \right\rangle = \Omega_{ji}(u,v) \tag{4.29}$$

$$K_{u,v}^{S(E)}\psi = \frac{1}{2}\sum_{i<j}\Omega_{ji}(u,v)e_ie_j\psi \tag{4.30}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i<j}\left\langle K_{u,v}^{E}(e_i), e_j \right\rangle e_ie_j\psi \tag{4.31}$$

e a expressão

$$\frac{1}{2}\sum_{i<j}\left\langle K_{u,v}^{E}(e_i), e_j \right\rangle e_ie_j \tag{4.32}$$

independe da escolha de seção (local) $(e_1, ..., e_n) \in P_{SO}(E)$, e troca de sinal se trocamos u com v. Denotando-a por $\mathbb{K}^{S(E)}(u,v)$, vemos que o produto de Clifford de $\mathbb{K}^{S(E)}(u,v)$ com uma seção ψ do fibrado spinorial produz o mesmo valor que a transformação de curvatura $K_{u,v}^{S(E)}$ aplicada a ψ. Dado que sob o isomorfismo $Cl(TM) \simeq \Lambda^*TM$ temos

$$d + d^* = \sum_{j=1}^{n} e_j \wedge \triangledown_{e_j} - \sum_{j=1}^{n} e_j \rfloor \triangledown_{e_j} = \tag{4.33}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} e_j \left(\wedge \triangledown_{e_j} - \rfloor \triangledown_{e_j}\right) = \sum_{j=1}^{n} e_j \triangledown_{e_j} \tag{4.34}$$

já que $v(v_1 \wedge ... \wedge v_r) = v \wedge v_1 \wedge ... \wedge v_r - v\rfloor(v_1 \wedge ... \wedge v_r)$, isso sugere que definamos o *operador de Dirac*

$$\mathcal{D} : \Gamma(Cl(TM)) \longrightarrow \Gamma(Cl(TM)) \tag{4.35}$$

$$\psi \longmapsto \sum_{j=1}^{n} e_j \triangledown_{e_j} \psi \tag{4.36}$$

Como $(d + d^*)^2 = d \circ d^* + d^* \circ d = \Delta =$ Laplaciano de Hodge, temos que $\mathcal{D}^2 = \Delta$. Observemos que nós escolhemos multiplicar a seção $\triangledown_{e_j}\psi$ *à esquerda* por e_i. Se definirmos o operador

$$\bar{\mathcal{D}} : \Gamma(Cl(TM)) \longrightarrow \Gamma(Cl(TM)) \tag{4.37}$$

$$\psi \longmapsto \sum_{j=1}^{n} (\triangledown_{e_j}\psi)e_j \tag{4.38}$$

então uma conta mostra que $\bar{\mathcal{D}}$ age como $(-1)^r(d - d^*)$ em $\Lambda^r T^*M$, e portanto $\bar{\mathcal{D}}^2 = \Delta = \mathcal{D}^2$ e $\mathcal{D}\circ\bar{\mathcal{D}}=\bar{\mathcal{D}}\circ\mathcal{D}$. Notemos que como das definições

$$\mathcal{D}^2\psi = \sum_{i,j} e_i \triangledown_{e_i} (e_j \triangledown_{e_j} \psi) = -\sum_{i} \triangledown_{e_i} \triangledown_{e_i} \psi + \sum_{i<j} e_ie_jK_{e_i,e_j}^{Cl(TM)}(\psi) \tag{4.39}$$

e

$$\bar{\mathcal{D}}^2\psi = \sum_{i,j} e_i \triangledown_{e_i} (e_j \triangledown_{e_j} \psi) = -\sum_{i} \triangledown_{e_i} \triangledown_{e_i} \psi + \sum_{i<j} K_{e_i,e_j}^{Cl(TM)}(\psi)e_je_i \tag{4.40}$$

a igualdade $\mathcal{D}^2\psi = \bar{\mathcal{D}}^2\psi$ implica que

$$\sum_{i<j}\left(K_{e_i,e_j}^{Cl(TB)}(\psi)e_je_i - e_ie_jK_{e_i,e_j}^{Cl(TM)}(\psi)\right) = 0 \tag{4.41}$$

Analogamente, $\mathcal{D}\circ\bar{\mathcal{D}}\psi=\bar{\mathcal{D}}\circ\mathcal{D}\psi$ implica

$$\sum_{i<j} e_iK_{e_i,e_j}^{Cl(TM)}(\psi)e_j = 0 \tag{4.42}$$

Essas duas identidades relacionando a curvatura da conexão no fibrado de Clifford e a estrutura de fibrado de álgebras de Clifford são conhecidas por *identidades de Bochner*. Notemos que multiplicação por vetor unitário define transformação ortogonal em $Cl(E)$, e como observamos anteriormente, $\bigtriangledown^{Cl(E)}$ age como derivação na álgebra de seções de $Cl(E)$. Num qualquer de módulo à esquerda para $Cl(TM)$ munido de métrica Riemanniana e conexão $(S, g_S, \bigtriangledown^S)$ é possível definir o operador de Dirac $\bar{\mathcal{D}}_S$ desde que $\bigtriangledown^S$aja como derivação da $\Gamma(Cl(TM))$-álgebra $\Gamma(S)$ e multiplicação de Clifford à esquerda por vetores unitários definamos operação ortogonal. $(S, g_S, \bigtriangledown^S, \bar{\mathcal{D}}_S)$ é chamado então de *fibrado de Dirac*. Perceba que se $\bigtriangledown^2_{u,v}\psi = \bigtriangledown_u \bigtriangledown_v \psi - \bigtriangledown_{\bigtriangledown_u v}\psi$, a expressão

$$\left(\bigtriangledown^S\right)^* \left(\bigtriangledown^S\right) : \Gamma(S) \longrightarrow \Gamma(S) \tag{4.43}$$

$$\psi \longmapsto -\mathsf{Tr}\left(\bigtriangledown^2_{\cdot,\cdot}\psi\right) \tag{4.44}$$

é tal que

$$\int_B (\bigtriangledown^{S*} \bigtriangledown^S \varphi, \psi) = \int_B (\bigtriangledown^S \varphi, \bigtriangledown^S \psi) \tag{4.45}$$

Em particular, se $\left(\bigtriangledown^S\right)^* \left(\bigtriangledown^S\right) \varphi = 0$, $| \bigtriangledown^S \varphi|_{L^2} = 0$, i.e., φ está no núcleo de $\left(\bigtriangledown^S\right)^* \left(\bigtriangledown^S\right)$ se e só se é globalmente paralelo. Ora, observemos que

$$\psi \longmapsto \frac{1}{2} \sum_{i,j} e_i e_j K^S_{e_i,e_j}(\psi) \tag{4.46}$$

é um endomorfismo honesto do fibrado de Dirac, digamos, $\mathcal{T} \in \mathsf{End}(S)$. Além do mais,

$$\left(\bigtriangledown^S\right)^* \left(\bigtriangledown^S\right) \psi = -\sum_i \bigtriangledown^2_{e_i,e_i}\psi \tag{4.47}$$

e portanto

$$\mathcal{T}\psi + \bigtriangledown^{S*} \bigtriangledown^S \psi = \frac{1}{2} \sum_{i,j} e_i e_j K^S_{e_i,e_j}(\psi) - \sum_i \bigtriangledown^2_{e_i,e_i}\psi \tag{4.48}$$

e se $(\bigtriangledown^S e_i)(x) = 0$, é fácil ver que $K^S_{e_i,e_j}(\psi) = \bigtriangledown^2_{e_i,e_j}\psi - \bigtriangledown^2_{e_j,e_i}\psi$ e portanto

$$\mathcal{T}\psi = \frac{1}{2} \sum_{i,j} e_i e_j \left(\bigtriangledown^2_{e_i,e_j}\psi - \bigtriangledown^2_{e_j,e_i}\psi\right) \tag{4.49}$$

$$= \sum_{i<j} e_i e_j \left(\bigtriangledown^2_{e_i,e_j}\psi - \bigtriangledown^2_{e_j,e_i}\psi\right) \tag{4.50}$$

Logo

$$\mathcal{T}\psi + \bigtriangledown^{S*} \bigtriangledown^S \psi = \sum_{i<j} e_i e_j \left(\bigtriangledown^2_{e_i,e_j}\psi - \bigtriangledown^2_{e_j,e_i}\psi\right) - \sum_i \bigtriangledown^2_{e_i,e_i}\psi \tag{4.51}$$

$$= \sum_{i.j} e_i e_j \bigtriangledown^2_{e_i,e_j} \psi = \sum_{i.j} e_i e_j \bigtriangledown_{e_i} \bigtriangledown_{e_j}\psi \tag{4.52}$$

$$= \mathcal{D}^2\psi \tag{4.53}$$

Essa fórmula é conhecida sob o nome de *fórmula de Weitzenböck*.

Observação 56. *Definamos o tensor de Ricci por* $\mathsf{Ric}(\psi) = -\sum_i K^{TM}_{e_i,\psi} e_i$. *Então* $\mathcal{T}|_{TM \subseteq Cl(TM)} = \mathsf{Ric}$. *Portanto se* $\mathsf{Ric} > 0$ *(ou* $\geqslant 0$ *e* > 0 *nalgum ponto) então não existem 1-formas harmônicas em* M. *Quando* $\mathsf{Ric} \geqslant 0$, *toda 1-forma harmônica é globalmente paralela. Analogamente, se* M *não tem bordo e* $(\mathcal{T}\psi, \psi) \geqslant 0$ *e* $(\mathcal{T}\psi, \psi)(x) > 0$ *em algum ponto* x, *então* M *não possui* p*-formas harmônicas não-nulas para nenhum* $p \neq 0, n$ *– e tem portanto a homologia de uma* n*-esfera, pelo Teorema de Hodge.*

Capítulo 5

Vestígios do Grande Teorema

5.1 Seqüências Multiplicativas e F-gêneros

Fixemos uma série formal com coeficientes racionais f cujo termo de grau nulo é 1. Para cada inteiro positivo n, consideremos variáveis $x_1, ..., x_n$ e forme $f(x_1)f(x_2)...f(x_n)$: trata-se de uma série formal nas variáveis x_i, e essa série formal é obviamente simétrica nos x_i's. Daí segue que $f(x_1)f(x_2)...f(x_n)$ tem uma expressão como

$$f(x_1)f(x_2)...f(x_n) = 1 + F_1(\zeta_1) + F_2(\zeta_1, \zeta_2) + F_3(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) + ... \tag{5.1}$$

onde ζ_i é o i-ésimo polinômio simétrico, $\zeta_i(t_1, ..., t_m) = \sum_{i_1 < ... < i_k} t_{i_1} t_{i_2} ... t_{i_k}$; pela independência algébrica dos polinômios ζ_i, tal expressão deve ser única. Obtemos assim uma seqüência de polinômios $\{F_k(\zeta_1, ..., \zeta_k)\}_{k=1}^{\infty}$ (dita *seqüência multiplicativa* associada à *série característica* f) com as seguintes propriedades :

1. $F_k(t\zeta_1, t^2\zeta_2, ..., t^k\zeta_k) = t^k F_k(\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_k)$ para cada t;

2. F_k independe do número de variáveis; i.e., se tivéssemos fixado $N > n$ e variáveis $y_1, ..., y_N$, posto $f(y_1)f(y_2)...f(y_N) = 1 + \sum_{k \geqslant 1} F'_k(\zeta_1, ..., \zeta_k)$, então $F'_k = F_k$;

3. Fixada uma álgebra racional R, construímos a álgebra $\Re$ de séries formais cujos elementos são da forma $1 + \sum_{k \geqslant 1} b_k$, onde $b_k \in R$ com o produto

$$\left(1 + \sum_{k \geqslant 1} b_k\right)\left(1 + \sum_{k \geqslant 1} b'_k\right) = 1 + \sum_{k \geqslant 1}\left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant k} b_{k-i} b'_i\right)$$

   Definamos $\Phi : \Re \longrightarrow \Re$ por $1 + \sum_{k \geqslant 1} b_k \longmapsto 1 + \sum_{k \geqslant 1} F_k(b_1, ..., b_k)$. Então Φ é *multiplicativo*, i.e. $\Phi(bc) = \Phi(b)\Phi(c)$.

4. A série característica se recupera de Φ através da fórmula $\Phi(1 + x) = f(x)$.

Observemos de $c(E \oplus E') = c(E)c(E')$ que a classe de Chern total de E, $c(E) = 1 + c_1(E) + ... + c_n(E)$, pode ser escrita como

$$\prod_{i=1}^{n}(1 + c_1(L_i)) \tag{5.2}$$

Se denotamos por x_i o elemento $c_1(L_i)$ e definimos $f(x) = (1 + x)$, então $c(E) = f(x_1)...f(x_n)$.

Exemplo 57. *Cindamos a complexificação de um fibrado real orientado de dimensão par $E \longrightarrow M$ como soma de fibrados de 2-planos, $E \otimes \mathbb{C} \simeq L_1 \oplus L_1^* \oplus ... \oplus L_n \oplus L_n^*$. Como no caso anterior, $q(E \oplus E') = q(E)q(E')$ e portanto a classe racional total de Pontrjagin, $q(E) = 1 + q_1(E) + ... + q_n(E)$, se escreve como*

$$\prod_{i=1}^{n}(1 + x_i)(1 - x_i) = \prod_{i=1}^{n}(1 - x_i^2) \tag{5.3}$$

Daí que $c_2i(E\otimes\mathbb{C}) = (-1)^i\sigma_i(x_1^2,...,x_i^2)$*; tomando* $f(x) = 1+x^2$*, temos de* $q_i(E) = (-1)^i c_{2i}(E\otimes\mathbb{C})$ *que* $f(x_1)...f(x_n) = q(E)$*. Assim temos que* $q_i(E) = \sigma_i(x_1^2,...,x_i^2)$

Exemplo 58. *Fixemos* $\mathsf{td}(x) = \frac{x}{1-e^{-x}} = 1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2+....$ *A seqüência multiplicativa* $\{Td_k\}_{k=1}^{\infty}$*associada a essa série característica se chama* seqüência de Todd*; se* M *é* n*-variedade complexa compacta,* $\mathsf{Td}_n(c_1(B),...,c_n(M)) = \mathsf{Td}[M]$ *é chamado de* gênero de Todd *de* M*. Quando* M *tem dimensão complexa* 1*, é claro que* $\mathsf{Td}[M] = 1+\frac{1}{2}c_1(TM)$*.*

Exemplo 59. *Fixemos* $\hat{a}(x) = \frac{\sqrt{x}/2}{\sinh(\sqrt{x}/2)} = 1-\frac{1}{24}x+\frac{7}{2^7 3^2 5}x^2+....$ *cuja seqüência multiplicativa* $\{\hat{A}_k\}_{k=1}^{\infty}$ *é chamada de* seqüência $\hat{A}$ *(A-hat sequence). Dado fibrado real* E *sobre a variedade compacta* B*, denotamos por* $\hat{A}(E)$ *a classe* $\hat{A}$ *total de* E *(ou* classe de Atiyah*),* $\hat{A}(E) = 1+\hat{A}_1(q_1(E))+\hat{A}_2(q_1(E),q_2(E))+....$

Exemplo 60. *Fixemos* $l(x) = \frac{\sqrt{x}}{\tanh(\sqrt{x})} = 1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{45}x^2+...$*, cuja seqüência multiplicativa* $\{L_k\}_{k=1}^{\infty}$ *é dita* L-seqüência de Hirzebruch*. Dado fibrado real* E *sobre a variedade compacta* B*, denotamos por* $L(E)$ *a* classe total de Hirzebruch de E*,* $\mathsf{L}(E) = 1+L_1(q_1(E))+L_2(q_1(E),q_2(E))+....$

Exemplo 61. *Fixemos fatoração formal* $c(E) = \prod_{i=1}^{n}(1+x_i)$ *como acima, de maneira que a* i*-ésima classe de Chern de* E *se escreva como* $c_i(E) = \zeta_i(x_1,...,x_n)$*. Definamos o caráter de Chern de* E*,* $\mathsf{ch}E$*, pela expressão* $\mathsf{ch}E = \sum_i e^{x_i} = n+\sum_i x_i+\frac{1}{2}\sum_i x_i^2+....$*Os fatores de grau* k*,* $\mathsf{ch}^k E = \frac{1}{k!}\sum_i x_i^k$ *se escrevem como função dos polinômios simétricos* ζ_i*, e portanto* $\mathsf{ch}E$ *está bem-definido em* $H^{par}(M;\mathbb{Q})$*. Observamos que se* $c(E) = \prod_{i=1}^{n}(1+x_i)$ *e* $c(E') = \prod_{j=1}^{n'}(1+x'_j)$ *temos* $c(E\oplus E') = \prod_{i,j}(1+x_i+x'_j)$ *e* $c(E\otimes E') = \prod_{i,j}(1+x_i)(1+x'_j)$*, e portanto* $\mathsf{ch}\,(E\oplus E') = \mathsf{ch}E+\mathsf{ch}E'$ *e* $\mathsf{ch}\,(E\otimes E') = \mathsf{ch}E\cup\mathsf{ch}E'$*. Portanto* ch *determina homomorfismo* $K(M)\longrightarrow H^{par}(M;\mathbb{Q})$*.*

Observação 62. *Atiyah e Hirzebruch mostram em [1] que quando* M *é um complexo CW finito, a aplicação induzida* $\mathsf{ch}:K(M)\otimes\mathbb{Q}\longrightarrow H^{par}(M;\mathbb{Q})$ *é um* isomorfismo*.*

5.2 Elementos de Teoria K

Seja X espaço topológico Hausdorff compacto (mas não necessariamente conexo) e consideremos o semigrupo abeliano $(\mathrm{Vect}\,X,\oplus)$. Definamos $K(X)$ como o grupo abeliano livremente gerado por $\mathrm{Vect}\,X$, $\mathsf{Free}(\mathrm{Vect}\,X)$, quocientado pelo subgrupo $\mathsf{rel}(X)$ gerado pelos elementos da forma $[E\oplus F]-[E]-[F]$. Isto é, $K(X)$ é o mais 'livre' grupo abeliano gerado pelos tipos de isomorfismo de fibrados vetoriais complexos sobre X com a imposição de que haja uma propriedade de cancelamento para a soma . O morfismo natural $j:\mathrm{Vect}\,X\longrightarrow K(X)$, $E\longmapsto[E]$, tem portanto a seguinte propriedade : dado qualquer morfismo de semigrupos de $\mathrm{Vect}\,X$ a grupo abeliano A, esse morfismo fatora por j. Essa propriedade universal garante a unicidade (módulo isomorfismos) de $K(X)$ pelo argumento padrão.

Existe uma construção com semigrupos que é util mencionar já que caracterizamos $K(X)$ por uma propriedade universal. Dado um semigrupo abeliano S, a *construção de Grothendieck* de S é o morfismo natural

$$S\xrightarrow{i}S\times S\longrightarrow S\times S/\Delta(S) = \mathsf{Groth}(S),\ \Delta(s) = (s,s)$$
$$s\longmapsto(s,0)\longmapsto(s,0)\ \mathsf{mod}\ \Delta(S)$$

Como $(s,0)+(0,s) = 0$ mod $\Delta(S)$, $\mathsf{Groth}(S)$ é na verdade grupo abeliano (e a composição acima é evidentemente morfismo de semigrupos). Portanto $\mathrm{Vect}(X)\xrightarrow{\pi}\mathsf{Groth}(\mathrm{Vect}(X))$ fatora por j (digamos que $\theta j = \pi$) e daí que a aplicação induzida $K(X)\xrightarrow{\theta}\mathsf{Groth}(\mathrm{Vect}(X))$ é a priori sobrejetiva. Represente um elemento de $K(X)$ que é mapeado em $0\in\mathsf{Groth}(\mathrm{Vect}(X))$ pela soma formal finita $\sum n_\alpha E_\alpha$, e o reescreva como

$$\sum_{n_\alpha\geqslant0}n_\alpha E_\alpha-\sum_{n_\alpha<0}(-n_\alpha)E_\alpha = j\left(\bigoplus_{\alpha:n_\alpha\geqslant0}E_\alpha\oplus\overset{n_\alpha}{\cdots}\oplus E_\alpha\right)-j\left(\bigoplus_{\alpha:n_\alpha<0}E_\alpha\oplus\overset{n_\alpha}{\cdots}\oplus E_\alpha\right) = jE_+-jE_-$$

Portanto $\theta\left(\sum n_\alpha E_\alpha\right) = 0 \iff \pi E_+ = \pi E_- \iff (E_+, E_-) = (E, E)$ para algum $E \in \mathrm{Vect}(X)$, i.e., se e só se $E_+ = E_-$. Portanto $K(X) \xrightarrow{\theta} \mathsf{Groth}(\mathrm{Vect}(X))$ é um isomorfismo. Passaremos então a representar cada elemento de $K(X)$ como $[E] - [F]$, para $E, F \in \mathrm{Vect}(X)$.

Recorde ainda que, dada a suposição de que X é compacto, todo fibrado vetorial é subfibrado de fibrado trivial. Portanto se $[E] - [F] \in K(X)$, tomemos $F \oplus F' = \varepsilon^n$, onde ε^n denota o fibrado trivial de dimensão n. Então

$$[E] - [F] = [E \oplus F'] - [\varepsilon^n] = [E'] - n$$

Concluímos que os elementos de $K(X)$ têm a forma $[E] - n$, para algum $n \geqslant 0$. Se pensarmos $K(X)$ como $\mathsf{Groth}(\mathrm{Vect}(X))$, é claro que $[E] = [E'] \iff E \oplus F = E' \oplus F$ para algum fibrado F; se $F \oplus F' = \varepsilon^n$ (e sempre há F' cumprindo esse requerimento), temos que

$$E \oplus \varepsilon^n = E' \oplus \varepsilon^n$$

Reciprocamente, se $E \oplus \varepsilon^n = E' \oplus \varepsilon^n$ para alguma escolha de n (em cujo caso se diz que E e E' são fibrados *fortemente estavelmente equivalentes*) , então é evidente que $[E]$ e $[E']$ representam o mesmo elemento na K-teoria de X.

Se X, Y são espaços Hausdorff compactos e $f : X \longrightarrow Y$, a regra $\mathrm{Vect}\, Y \ni E \longmapsto f^*E \in \mathrm{Vect}\, X$ define homomorfismo $f^! : K(Y) \longrightarrow K(X)$ que só depende da classe de homotopia de f, como discutido na seção sobre fibrados universais.

Dados $E \in \mathrm{Vect}\, X$ e $F \in \mathrm{Vect}\, Y$, formamos o produto $X \times Y$ com projeções naturais π_X, π_Y. Então $\pi_X^* E, \pi_Y^* F$ são fibrados sobre $X \times Y$, e podemos portanto considerar o fibrado $\pi_X^* E \otimes \pi_Y^* F = E \circledast F$ em $\mathrm{Vect}(X \times Y)$. A comutatividade do diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd}
Vect(X) \times Vect(Y) \arrow[r, "\circledast"] \arrow[d, "j_X \times j_Y"] & Vect(X \times Y) \arrow[d, "j_{X \times Y}"] \\
K(X) \times K(Y) \arrow[r] & K(X \times Y)
\end{tikzcd}$$

permite[1] definir o *produto exterior* de X e Y.

Quando $X = Y$ e Δ denota a diagonal $X \longrightarrow X \times X$, ganhamos pairing bilinear em $K(X)$ através da composição do produto exterior de X consigo mesmo com $K(X \times X) \xrightarrow{\Delta^!} K(X)$.

A compatibilidade de soma e produto em $K(X)$ é imediata. Desta constatação decorre que, de modo explícito, o produto em $K(X)$ entre $[E_1] - [F_1]$ e $[E_2] - [F_2]$ é representado por

$$[(E_1 \otimes E_2) \oplus (F_1 \otimes F_2)] - [(E_1 \otimes F_2) \oplus (F_1 \otimes E_2)]$$

Torna-se claro desta representação que a estrutura multiplicativa é preservada pelos morfismos $f^! : K(Y) \longrightarrow K(X)$, que são portanto morfismos de *anéis* comutativos. Portanto K é functor contravariante $\mathsf{HComp} \longrightarrow \mathsf{CRg}$ da categoria de espaços Hausdorff compactos na categoria de anéis comutativos.

Uma observação importante é a de que $K(\mathrm{pt})$ é isomorfo ao anel dos números inteiros, já que o espaço de tipos de isomorfismo de fibrados vetoriais sobre pt tem por invariante completo sua dimensão, e a construção de Grothendieck de $\mathbb{N}$ nos devolve $\mathbb{Z}$. Repare também que se $\mathrm{pt} \in X$, sua inclusão em X determina em K-teoria morfismo que se identifica com a extensão natural de $\dim_{\mathrm{pt}} : \mathrm{Vect}\, X \longrightarrow \mathbb{Z}$ que determina a dimensão da fibra sobre pt.

Definamos ainda as categorias HComp^+ de espaços Hausdorff compactos X com ponto distinguido pt, e HComp^2 de pares de espaços Hausdorff compactos (X, Y), onde $Y \subset X$. Então obtemos functores covariantes as regras

$$\begin{aligned} \mathsf{HComp}^2 &\longrightarrow \mathsf{HComp}^+ \\ (X, Y) &\longmapsto X/Y \end{aligned}$$

[1]Observemos que $K(X) \times K(Y) \simeq \mathsf{Groth}(\mathrm{Vect}\, X \times \mathrm{Vect}\, Y)$ por conta das propriedades universais de Groth e de $\times$.

com ponto base Y/Y[2] e

$$\mathsf{HComp}^+ \longrightarrow \mathsf{HComp}$$

de 'esquecer o ponto base' (com as óbvias definições sobre morfismos). Tendo definido $K(-) : \mathsf{HComp} \longrightarrow \mathsf{CRg}$, iremos definir functores contravariantes $K_{red}(-) : \mathsf{HComp}^+ \longrightarrow \mathsf{CRg}$ e $K(-,-) : \mathsf{HComp}^2 \longrightarrow \mathsf{CRg}$.

Comecemos por $K_{red}(-)$: se X está em HComp^+, $\mathrm{pt} \hookrightarrow X$ determina $K(X) \longrightarrow K(\mathrm{pt})$, cujo núcleo definimos ser $K_{red}(X)$. Dado morfismo de espaços pontuados $(X, \mathrm{pt}) \xrightarrow{f} (Y, \mathrm{pt})$, o diagrama abaixo fornece (através da universalidade do núcleo) o morfismo $K_{red}(Y) \longrightarrow K_{red}(X)$ (que por abuso de notação seguiremos denotando por $f^!$) :

$$\begin{tikzcd}
K_{red}(Y) \arrow[r, dashed, "f^!"] \arrow[d, hook] & K_{red}(X) \arrow[d, hook] \\
K(Y) \arrow[r, "f^!"] \arrow[d, "\mathrm{pt}_Y^!"] & K(X) \arrow[d, "\mathrm{pt}_X^!"] \\
K(\mathrm{pt}_Y) \arrow[r, "f^!"] & K(\mathrm{pt}_X)
\end{tikzcd}$$

Observemos ainda que o mapa $X \longrightarrow \mathrm{pt}$ determina splitting

$$K(X) \simeq K_{red}(X) \oplus K(\mathrm{pt})$$

que é natural em HComp^+.

Debrucemo-nos agora sobre HComp^2 : dado par Hausdorff compacto (X, Y) onde Y é subespaço de X, definimos $K(X, Y)$ por $K_{red}(X/Y)$.

Observação 63. *$K_{red}(X/Y) = K_{red}(X \cup CY)$, onde a $X \cup CY$ se impõe como ponto base o vértice de CY.*

Evidentemente, $K_{red}(X)$ é o subgrupo de $K(X)$ cujos elementos são diferenças formais de tipos de isomorfismos de fibrados sobre X de mesma dimensão em pt (e portanto se supomos X conexo, de mesma dimensão *tout court*).

Observemos que cada elemento de $K(X)$ tem uma representação da forma $[E] - \mathrm{rk}_{\mathrm{pt}} E$. Se um mesmo elemento de $K_{red}(X)$ tem duas representações dessa forma, $[E] - \mathrm{rk}_{\mathrm{pt}} E = [E'] - \mathrm{rk}_{\mathrm{pt}} E'$, temos que $[E \oplus \varepsilon^{\mathrm{rk}\, E'}] - [E' \oplus \varepsilon^{\mathrm{rk}\, E}] = 0$ em $K(X)$. Vendo $K(X)$ como a construção de Grothendieck de $\mathrm{Vect}\, X$, isso significa que $E \oplus \varepsilon^{\mathrm{rk}\, E'} \oplus F = E' \oplus \varepsilon^{\mathrm{rk}\, E} \oplus F$ para algum $F \in \mathrm{Vect}\, X$; tomando $F' \in \mathrm{Vect}\, X$ com $F \oplus F' \simeq \varepsilon^r$ se descobre que $E \oplus \varepsilon^{\mathrm{rk}\, E' + r} \simeq E' \oplus \varepsilon^{\mathrm{rk}\, E + r}$. Reciprocamente, se $E \oplus \varepsilon^m \simeq E' \oplus \varepsilon^n$ para alguma escolha de m, n, i.e., se E e E' são fibrados *estavelmente equivalentes*, então é evidente que $[E] - \mathrm{rk}_{\mathrm{pt}} E = [E'] - \mathrm{rk}_{\mathrm{pt}} E'$, i.e. que determinam o mesmo elemento na K-teoria reduzida de X. Em outras palavras : $K_{red}(X)$ pode ser pensado como o espaço de órbitas de $\mathrm{Vect}\, X$ pela relação de equivalência estável.

Observação 64. *Repetindo a construção acima ipsis litteris para* $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(X)$ *obtemos o functor de K-teoria real, KO : $\mathsf{HComp} \longrightarrow \mathsf{CRg}$. Notemos que olvidar a estrutura complexa define transformação natural de functores $K \longrightarrow KO$. Afirmações análogas valem para $KO_{red} : \mathsf{HComp}^+ \longrightarrow \mathsf{CRg}$ e $KO : \mathsf{HComp}^2 \longrightarrow \mathsf{CRg}$.*

Observação 65. *Recorde também que um espaço Hausdorff Z é dito localmente compacto qualquer vizinhança de qualquer seu ponto contém um compacto. Para tais espaços está definida a* compactificação por um ponto *Z^+, obtida definindo em $Z + \{\infty\}$ a topologia que tem por abertos os abertos originais e também os conjuntos da forma $(Z \backslash C) + \{\infty\}$ onde $C \subset Z$ é compacto*[3]*. Definimos a K-teoria de Z a suporte compacto por $K_{cpt}(Z) = K_{red}(Z^+)$. Observemos que $K_{cpt}(Z)$ coincide com $K(Z)$ quando Z é compacto, e que K_{cpt} é functor da categoria de espaços Hausdorff localmente compactos (com morfismos aplicações próprias, i.e., cuja preimagem de compacto é compacta) na categoria de anéis comutativos.*

É crucial saber quando um isomorfismo de fibrados sobre Y estende a isomorfismo de fibrados sobre X. Uma condição suficiente e estabelecida no que segue :

[2]Quando $Y = \varnothing$, definimos X/Y como $X + pt$ com ponto base pt.

[3]Exercício (cf. Bredon) : *A topologia acima definida em Z^+ o torna um espaço Hausdorff compacto que tem Z por subespaço, e é a única topologia em Z^+ com essas propriedades.*

Lema 66. *Se $\varphi : E_0|_Y \xrightarrow{\simeq} E_1|_Y$ é homotópica por isomorfismos $E_0|_Y \xrightarrow{\simeq} E_1|_Y$ à restrição de um isomorfismo $\psi : E_0 \xrightarrow{\simeq} E_1$ então φ estende a isomorfismo $E_0 \xrightarrow{\simeq} E_1$.*

Demonstração. Tomemos

$$Z = (Y \times I) \cup (X \times \{0\}) \subset X \times I$$

e denotemos por π a projeção $X \times I \longrightarrow X$. Se $H : Y \times I \longrightarrow Y$ é homotopia entre φ e a restrição a Y de ψ, temos isomorfismo

$$\Phi : \pi^* E_0|_Z \longrightarrow \pi^* E_1|_Z$$

com

$$\begin{aligned} \Phi|_{Y \times \{t\}} &= H_t \\ \Phi|_{X \times \{0\}} &= \psi \end{aligned}$$

Como $\Phi|_{Y \times I}$ é simplesmente uma seção de $\mathrm{Hom}(\pi^* E_0|_{Y \times I}, \pi^* E_1|_{Y \times I})$, $\Phi|_{Y \times I}$ estende a seção

$$\Phi' \in \mathrm{Hom}(\pi^* E_0|_{X \times I}, \pi^* E_1|_{X \times I})$$

Suficientemente perto de cada $\{y\} \times I$ a restrição da seção Φ' deve ser um isomorfismo; portanto obtemos $U \subset_o X$ com $\Phi'|_{U \times I}$ isomorfismo. Para concluir, recorde que espaços Hausdorff compactos são normais, e portanto pelo Teorema de Tietze, existe função contínua f que se anula fora de U e é identicamente 1 em Y. Então a regra $X \ni x \longmapsto \Phi'|_{(x, f(x))}$ define extensão de φ a isomorfismo em X. ∎

Observação 67. *Observemos que a demonstração permaneceria inalterada se trocássemos 'isomorfismo' por 'monomorfismo'.*

Desejamos agora definir uma nova operação com fibrados, *colapsar* um fibrado vetorial sobre X a um fibrado vetorial sobre X/Y. Para tanto, tome $E \in \mathrm{Vect}\, X$, $(X, Y) \in \mathsf{HComp}^2$ e suponhamos que temos trivialização de $E|_Y$, digamos $\alpha : E|_Y \simeq Y \times \mathbb{C}^k$. Denotemos por $p : Y \times \mathbb{C}^k \longrightarrow \mathbb{C}^k$ a projeção natural, e definamos a família de espaços vetoriais sobre X/Y como o quociente de E pela seguinte relação de equivalência :

$$e \sim e' \iff \text{ estão em fibras de } Y \text{ e } p \circ \alpha(e) = p \circ \alpha(e')$$

Que a família de espaços vetoriais $E/\sim = E/\alpha$ seja localmente trivial segue do fato que podemos estender α a uma trivialização α_U de E sobre uma vizinhança U de Y (cf. lema de extensão de isomorfismos sobre Y), e então α_U induz em U/Y trivialização de E/α, que é dito colapsado de E por α.

Observemos que uma aplicação constante $X \longrightarrow Y$ fatora por $X \longrightarrow pt$, e que sua imagem de $\mathrm{Vect}\, \mathrm{pt}$ em $\mathrm{Vect}\, X$ são os fibrados triviais, de modo que induzido no semigrupo $\mathrm{Vect}\, X$ Notemos que $K(X, \varnothing) = K_{red}(X^+) \simeq K(X)$. Dado $(X, Y) \in \mathsf{HComp}^2$, ganhamos seqüência

$$Y \hookrightarrow X \longrightarrow X/Y$$

que induz seqüência

$$K_{red}(X/Y) \xrightarrow{i^!} K_{red}(X) \xrightarrow{j^!} K_{red}(Y)$$

onde os morfismos são induzidos pelas inclusões $(Y, \varnothing) \overset{j}{\hookrightarrow} (X, \varnothing) \overset{i}{\hookrightarrow} (X, Y)$. Afirmamos que

Proposição 68. *A seqüência*

$$K_{red}(X/Y) \xrightarrow{i^!} K_{red}(X) \xrightarrow{j^!} K_{red}(Y)$$

é exata em $K_{red}(X)$.

Demonstração. Observemos inicialmente que $j^!i^! = (ij)^! = 0$, pois a composição $Y \longrightarrow X/Y$ é constante; portanto a aplicação induzida $(ij)^* : VectX/Y \longrightarrow VectY$ é nula e daí que $(ij)^! = 0$ em K e em K_{red}. Por outro lado, se $E \in VectX$ e $j^![E] = 0$ em $K_{red}(Y)$, então $j^![E] = [j^*E] = 0$ em $K(Y)$, i.e., $j^*E = E|_Y$ é estavelmente trivial. Somamos então a ele fibrado trivial ε^k de maneira que possamos encontrar trivialização $\alpha : \left(E \oplus \varepsilon^k\right)|_Y \xrightarrow{\simeq} \varepsilon^N|_Y$. Colapse $E \oplus \varepsilon^k \in VectX$ sobre Y através de α e observemos que é comutativo o diagrama

$$\begin{array}{ccc} E \otimes \epsilon^k & \longrightarrow & (E \otimes \epsilon^k)/\alpha \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & X/Y \end{array}$$

Como $\left(E \oplus \varepsilon^k\right)_x \longrightarrow \left(\left(E \oplus \varepsilon^k\right)/\alpha\right)_x$ é idêntico quando $x \notin Y$ e $\left(E \oplus \varepsilon^k\right)_x \simeq \left(\left(E \oplus \varepsilon^k\right)/\alpha\right)_{Y/Y}$, o morfismo $E \oplus \varepsilon^k \longrightarrow \left(E \oplus \varepsilon^k\right)/\alpha$ é um isomorfismo em cada fibra, e portanto um isomorfismo tout court. Portanto $E \oplus \varepsilon^k$ é induzido de $\left(E \oplus \varepsilon^k\right)/\alpha$ pelo colapso $X \longrightarrow X/Y$. Portanto todo fibrado estavelmente trivial sobre Y é estavelmente equivalente a um fibrado induzido de X/Y; passando à K-teoria, $Ker j^! = \operatorname{Im} i^!$. ■

Quando Y é contráctil, o morfismo de semigrupos $\operatorname{Vect} X/Y \longrightarrow \operatorname{Vect} X$ é bijetor; de fato, basta mostrar que $E/\alpha \simeq E/\alpha'$ para quaisquer duas trivializações α, α' de E sobre Y. Ora, $\alpha' \circ \alpha^{-1}$ é um isomorfismo de fibrados triviais, e portanto só depende de uma aplicação $Y \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ (para algum n), e como Y é contráctil e $GL_n(\mathbb{C})$ conexo (recorde que o determinante de qualquer matriz complexa é um quadrado), $\alpha' \circ \alpha^{-1}$ é homotópico à aplicação constante 1. Se h_t é a homotopia, definimos $H_t : Y \times \mathbb{C}^n \longrightarrow Y \times \mathbb{C}^n$ por $(y, v) \longmapsto (y, h_t(y)v)$; compomos com $(\alpha')^{-1} : Y \times \mathbb{C}^n \longrightarrow E|_Y$ e observamos que isso é homotopia por isomorfismos entre α^{-1} e $(\alpha')^{-1}$, de modo que a homotopia

$$\begin{aligned} E/\alpha \times I &\longrightarrow E/\alpha' \\ (e, t) &\longmapsto e \text{ se } e \text{ não está sobre } Y \\ (\alpha^{-1}(y, v), t) &\longmapsto (\alpha')^{-1} \circ H_t(y, h_t(y)v) \end{aligned}$$

que preserva fibras e em cada uma é um isomorfismo, e portanto (cf. classificação de fibrados vetoriais) $E/\alpha \simeq E/\alpha'$.

Observação 69. *Notemos que o splitting* natural $K(X) \simeq K_{red}(X) \oplus K(pt)$ *nos permite escrever*

$$K(X, Y) \longrightarrow K_{red}(X) \longrightarrow K_{red}(Y)$$

quando X e Y estão em HComp^+ *e têm o mesmo ponto base.*

Seja então $\alpha : E \longrightarrow F$ um morfismo de fibrados vetoriais sobre X. Dizemos que α é um isomorfismo de diferença sobre $(X, Y) \in \mathsf{HComp}^2$ se α restringe a um isomorfismo sobre Y. Dois isomorfismos de diferença $\alpha_i : E_i \longrightarrow F_i$ $(i = 1, 2)$ sobre (X, Y) são ditos equivalentes, ou isomorfos, se existirem isomorfismos $E_1 \longrightarrow E_2$ e $F_1 \longrightarrow F_2$ que tornem comutativo o diagrama de isomorfismos abaixo :

$$\begin{array}{ccc} E_1|_Y & \longrightarrow & F_1|_Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_2|_Y & \longrightarrow & F_2|_Y \end{array}$$

Observemos que o conjunto $S(X, Y)$ de classes de equivalência de isomorfismos de diferença sobre (X, Y) é naturalmente um semigrupo abeliano, e que um $f : (X', Y') \longrightarrow (X, Y)$ induz $f^* : S(X, Y) \longrightarrow S(X', Y')$. Notemos que um isomorfismo de diferença $\alpha : E \longrightarrow F$ em $S(X, Y)$ equivalente a $1 : G \longrightarrow G$ evidentemente estende a isomorfismo $E \longrightarrow F$; reciprocamente, um tal $\alpha : E \longrightarrow F$ que estende a isomorfismo $E \longrightarrow F$ é equivalente a $1 : E \longrightarrow E$. Definamos $L(X, Y)$ como o quociente de $S(X, Y)$ pela relação $\alpha : E \longrightarrow F \sim \alpha' : E' \longrightarrow F'$ em $S(X, Y)$ se e só se existem G, G' com $\alpha \oplus 1_G = \alpha' \oplus 1_{G'}$ em $S(X, Y)$. Então $\sim$ é compatível com a estrutura de semigrupo em $S(X, Y)$, e induz portanto estrutura de semigrupo em $L(X, Y)$ cujo elemento neutro é representado por isomorfismos de fibrados sobre X. Denotamos por $[\alpha : E \longrightarrow F]$ a imagem de $\alpha \in S(X, Y)$ em $L(X, Y)$.

Proposição 70. *Existe transformação natural* Θ *entre os cofuntores* L *e* K *em* HComp^2.

Demonstração. Notemos que $L(X, \varnothing) \simeq K(X)$ pela descrição de $K(X)$ como tipos de isomorfismo de fibrados vetoriais estavelmente equivalentes. Observemos também que podemos colapsar todo $[\alpha : E \longrightarrow \varepsilon^N]$; i.e., podemos definir $\Theta(\alpha) = E/\alpha - N \in \mathrm{Vect}(X/Y)$. Para cada $[\alpha : E \longrightarrow F]$ é possível encontrar G tal que $F \oplus G = \varepsilon^N$, e por definição $[\alpha : E \longrightarrow F] = [\alpha \oplus 1_G : E \oplus G \longrightarrow \varepsilon^N]$, e $\Theta(\alpha \oplus 1_G) = (E \oplus G) / (\alpha \oplus 1_G) - N$. Que essa definição de fato desce a $L(X, Y)$ observamos que se $[\alpha : E \longrightarrow \varepsilon^N] = [\alpha' : E' \longrightarrow \varepsilon^{N'}]$, então $\alpha \oplus 1_G = \alpha' \oplus 1_{G'}$ em $S(X, Y)$; daí que G e G' sejam estavelmente equivalentes, e portanto existem H, H' com $G \oplus H = \varepsilon^M, G' \oplus H' = \varepsilon^{M'}$. I.e., $[\alpha : E \longrightarrow \varepsilon^N] = [\alpha' : E' \longrightarrow \varepsilon^{N'}] \Longrightarrow \alpha \oplus 1 : E \oplus \epsilon^M \longrightarrow \varepsilon^{N+M}$ e $\alpha' \oplus 1 : E' \oplus \epsilon^{M'} \longrightarrow \varepsilon^{N'+M'}$ são isomorfos como isomorfismos de diferença, e

$$E/\alpha - N = \left(E \oplus \epsilon^M\right) / (\alpha \oplus 1) - (N + M) = \left(E' \oplus \epsilon^{M'}\right) / (\alpha' \oplus 1) - (N' + M') = E'/\alpha' - N'$$

Isso mostra que $\Theta : L(X, Y) \longrightarrow K(X, Y)$ está bem-definido. Trata-se com efeito de um morfismo de semigrupos, que é sobrejetor já que todo elemento em $K(X, Y)$ é da forma $[H] - N$, e todo fibrado vetorial H sobre X/Y é isomorfo a algum fibrado em X colapsado em Y (cf. as seqüências exatas acima). Também é injetivo : se $\Theta([\alpha : E \longrightarrow \varepsilon^N]) = \Theta([\alpha' : E' \longrightarrow \varepsilon^{N'}])$, então existem M, M' com

$$\left(E \oplus \varepsilon^M\right) / (\alpha \oplus 1) \simeq \left(E' \oplus \varepsilon^{M'}\right) / (\alpha' \oplus 1)$$

isomorfos sobre X/Y, donde $\alpha \oplus 1 : E \longrightarrow \varepsilon^{N+M} = \alpha' \oplus 1 : E' \longrightarrow \varepsilon^{N'+M'}$ em $S(X, Y)$ e $[\alpha : E \longrightarrow \varepsilon^N] = [\alpha' : E' \longrightarrow \varepsilon^{N'}]$ em $L(X, Y)$. Observamos por fim que se $f : (X', Y') \longrightarrow (X, Y)$, então $f^* (E/\alpha) = f^* (E) / f^* (\alpha) = f^!([E/\alpha])$. Portanto vale

$$f^!\Theta = \Theta f^*$$

Isso conclui a demonstração de que Θ define um isomorfismo entre os cofuntores K e L em HComp^2. Repare que quando $Y = \varnothing$ (e portanto $L(X, Y)$ se identifica com $K(X)$) temos $\Theta = 1$. ■

O cofunctor $\Theta : \mathsf{HComp}^2 \longrightarrow \mathsf{CRg}$ será chamado de functor de diferença . As seguintes propriedades seguem da discussão acima ou são de demonstração imediata :

Proposição 71. $\Theta : L(-,-) \longrightarrow K(-,-)$ *satisfaz :*

1. $f^!\Theta([\alpha : E \longrightarrow F]) = \Theta([f^*\alpha : f^*E \longrightarrow f^*F])$
2. $\Theta([\alpha : E \longrightarrow F])$ *só depende da classe de homotopia de* α
3. $Y = \varnothing \Longrightarrow \Theta([\alpha : E \longrightarrow F]) = [E] - [F]$
4. *Se* $j : (X, \varnothing) \hookrightarrow (X, Y)$, *então* $j^!\Theta([\alpha : E \longrightarrow F]) = [E] - [F]$
5. $\Theta([\alpha : E \longrightarrow F]) = 0 \Leftrightarrow$ *existe* G *tal que* $\alpha \oplus 1_G$ *estende a isomorfismo sobre todo* X
6. $\Theta([\alpha \oplus \alpha' : E \oplus E' \longrightarrow F \oplus F']) = \Theta([\alpha : E \longrightarrow F]) + \Theta([\alpha' : E' \longrightarrow F'])$
7. $\Theta\left([E \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} G]\right) = \Theta\left([E \xrightarrow{\alpha} F]\right) + \Theta\left([F \xrightarrow{\beta} G]\right)$ ■

5.3 Operadores Fredholm

Recorde também que um operador linear entre espaços de Banach $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$ é dito *Fredholm* se tem núcleo e conúcleo de dimensão finita. O subconjunto de $\mathrm{Hom}(V, W)$ dos operadores Fredholm é denotado por $\mathrm{Fred}(V, W)$. Para tais operadores, definimos seu índice $\mathrm{ind}(T)$ como a diferença entre dimensões de seu núcleo e de seu conúcleo. Um operador $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$ é dito *compacto* se mapeia o disco unitário de V num conjunto relativamente compacto de W; o subconjunto de tais operadores se denota por $\mathrm{Comp}(V, W)$; trata-se evidentemente de um subespaço linear de $\mathrm{Hom}(V, W)$, e é claramente fechado. (De fato, tomemos seqüência de operadores compactos $\{T_m\}_m$ que convergem a operador contínuo T; desejamos mostrar que T leva seqüências limitadas $|x_n| \leqslant 1$ em seqüências $\{Tx_n\}_n$ que têm subseqüência convergente no fecho da imagem de T, i.e., tal que $\{Tx_n\}_n$ seja Cauchy. Ora, T_1 compacto $\Longrightarrow$ existe subseqüência $\{x_n^1\}_n \subset \{x_n\}_n$ tal que $\{T_1 x_n^1\}_n$ converge; aplicando esse processo indutivamente ganhamos uma 'filtração' de subseqüências

$$... \subset \{x_n^m\}_n \subset ... \subset \{x_n^1\}_n \subset \{x_n\}_n$$

que têm a propriedade que $\{T_m x_n^m\}_n$ converge para cada m; portanto o mesmo se pode dizer de $\{T_m x_n^n\}_n$. Resta-nos mostrar que $\{Tx_n^n\}_n$ é Cauchy; para tanto observemos que

$$|Tx_n^n - Tx_m^m| = |(T - T_n)x_n^n + T_n(x_n^n - x_m^m) + (T_n + T)x_m^m| \leqslant |(T - T_n)x_n^n| + |T_n(x_n^n - x_m^m)| + |(T_n + T)x_m^m|$$

Como $|(T - T_n)| \longrightarrow 0$, $|x_n^n - x_m^m| \longrightarrow 0$ e $\{|x_n^n|\}_n$ $\{|T + T_n|\}_n$ são limitadas; daí segue a conclusão.)

Exemplos típicos de operadores compactos são aqueles de posto finito; é fácil ver que qualquer limite de tais operadores é compacto.

Notemos que se T é compacto que não é de posto finito, podemos fixar sistema ortonormal $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ do fecho de sua imagem, e denotamos por $P_m : W \longrightarrow W$ a projeção ortogonal sobre o espaço gerado por $\{v_n\}_{n=1}^m$. Então temos seqüência de operadores de posto finito $P_m \circ T$ que converge a T; de fato, se essa seqüência não convergisse a T, teríamos seqüência limitada $\{x_{m_k}\}$ com $|\left(P_{m_k} \circ T - T\right) x_{m_k}| \geqslant a > 0$ para cada m_k, o que contradiz a convergência de uma subseqüência que é garantida pela compacidade de $P_{m_k} \circ T - T$. Portanto operadores *compactos são limites de operadores de posto finito.*

Fixemos agora $T \in \mathrm{Fred}(V)$ e notemos que T determina isomorfismo $(\ker T)^\perp \longrightarrow TV$, cuja inversa denotamos por S'. A composição de S' com a projeção ortogonal $V \longrightarrow TV$ nós dá operador contínuo $S : V \longrightarrow (\ker(T))^\perp$; claramente, $S \circ T$ coincide com a identidade em $(\ker T)^\perp$, que tem codimensão finita. Também é verdade que $T \circ S$ coincide com a identidade em TV, de modo que T é invertível módulo $\mathrm{Comp}(V)$.

Reciprocamente, se T e S estão em $\mathrm{End}\, V$ e $S \circ T - \mathrm{id}$, $T \circ S - \mathrm{id}$ são compactos, desejamos mostrar que $T \in \mathrm{Fred}(V)$. Ora, como $(S \circ T - \mathrm{id})$ é compacto e portanto limite de operadores de posto finito, podemos escrevê-lo como $R + R_1$, onde R tem posto finito e R_1 é compacto de norma bastante pequena (pequena o bastante para que $(\mathrm{id} + R_1)$ seja invertível). Então

$$\left((\mathrm{id} + R_1)^{-1} \circ S\right) \circ T = (\mathrm{id} + R_1)^{-1} \circ (\mathrm{id} + R_1 + R) = \mathrm{id} + (id + R_1)^{-1} \circ R$$

Como $(\mathrm{id} + R_1)^{-1} \circ R = K_L$ tem posto finito, vê-se que, modificando S de maneira apropriada a um S_L, $S_L \circ T - \mathrm{id}$ tem posto finito.

De maneira análoga modificamos S a S_R de modo que $T \circ S_R = \mathrm{id} + K_R$ onde K_R tem posto finito; segue então que $S_L - S_R = (S_L \circ T \circ S_R - S_L \circ K_R) - (S_L \circ T \circ S_R - K_L \circ S_R) = K_L \circ S_R - S_L \circ K$. Então $T \circ S_L = \mathrm{id} + (K_R - T \circ (S_L - S_R))$. Portanto, se modificarmos S a S_L, S inverte T dos dois lados módulo operadores de posto finito. Agora e simples ver que T deve ser Fredholm, pois $\ker(T) \subset \ker(S \circ T)$, $\mathrm{co}(T) = (TV)^\perp \subset ((T \circ S)V)^\perp = \mathrm{co}(T \circ S)$ e pela Alternativa de Fredholm $\ker(S \circ T)$ e $\mathrm{co}(T \circ S)$ têm dimensão finita.

Fixemos $T_0 \in \mathrm{Fred}(V, W)$, onde se supõe agora que V e W são espaços de Hilbert separáveis. Se $V' \leqslant V$ tem codimensão finita e intercepta o núcleo de T_0 por 0, então existe vizinhança $T_0 \in U \subset_0 \mathrm{Hom}(V, W)$ tal que $T \in U \Longrightarrow$(1) $\ker T \cap V = \{0\}$, (2) $TV \subset_f W$ e portanto $(T_0 V)^\perp \simeq W/TV$. De fato, observemos que $T_0|_V$ é injetora, e portanto $\inf\{T_0(v) : V \ni v, |v| = 1\} > \rho > 0$ para algum ρ. Se (1) não vale, existe $\{T_n\} \subset \mathrm{Hom}(V, W)$ convergindo a T_0 e seqüência $\{v_n\} \subset V$ (cada v_n de norma 1) com $T_n(v_n) = 0$. Então fixado $\varepsilon > 0$, existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ com $n > n(\varepsilon) \Longrightarrow |T_n(v) - T_0(v)| < \varepsilon/2$. Escolha $\varepsilon = \rho, v = v_{n(\rho)+1}, n = n(\rho)+1$ e obtenha contradição. Para (2), notemos que $(T_0 V)^\perp \oplus V \longrightarrow W$ dado por $(v', v) \longmapsto v' + Tv$ é contínua e bijetora; como W é Hilbert, aplicamos o Teorema da Aplicação Aberta para concluir que se trata de um isomorfismo (que evidentemente induz isomorfismo $(T_0 V)^\perp \simeq W/TV$).

Observemos ainda que se U é a vizinhança descrita na proposição, é localmente trivial

$$\coprod_{T \in U} (W/TV) \longrightarrow U$$

já que a regra

$$W \times U \ni (w, T) \longmapsto \pi_{TV}(w)$$

(onde $\pi_{TV} : W \longrightarrow (TV)^\perp$) é contínua. Portanto se trata de um fibrado vetorial sobre U.

Proposição 72. *(1)* $\mathrm{Fred}(V,W)$ *é aberto em* $\mathrm{Hom}(V,W)$*, e (2)* $\mathrm{ind} : \mathrm{Fred}(V,W) \longrightarrow \mathbb{Z}$ *é contínua, e por conseguinte, fatora por* $\pi_0 \mathrm{Fred}(V,W)$*; (3) também é verdade que* ind *não assume o mesmo valor em distintas componentes conexas de* $\mathrm{Fred}(V)$*, de modo que* $\mathrm{ind} : \pi_0 \mathrm{Fred}(V) \longrightarrow \mathbb{Z}$ *é bijeção.*

Demonstração. (1) Fixemos $T_0 \in \mathrm{Fred}(V,W)$, V' e U como acima. O isomorfismo $(T_0V)^\perp \simeq W/TV$ diz que, para cada $T \in U$, $\dim\ker T^*$ são todos iguais, e portanto $U \subset \mathrm{Fred}(V,W)$.

(2) Dualmente, $T_0^* \in \mathrm{Fred}(W^*,V^*) \Longrightarrow \dim\ker(T^*)^* = \dim\ker T$ é constante numa vizinhança de T_0^*. Usando a dualidade canônica $V \longrightarrow V^*$, concluímos que ind é localmente constante.

(3) Suponhamos agora que T_0 e T_1 sejam Fredholm de mesmo índice; como $\mathrm{ind}(\cdot^*) = -\mathrm{ind}(\cdot)$, podemos supor sem perda de generalidade que o índice de ambos não é negativo. Isso equivale a dizer que a dimensão do conúcleo de T_i, que identificamos ao complemento ortogonal de sua imagem, não excede a dimensão (finita) de seu núcleo; podemos portanto encontrar epimorfismos $\ker(T_i) \xrightarrow{\theta_i} \mathrm{co}(T_i)$; como $\ker(T_i + \theta_i) \subset \ker(T_i)$ e $\mathrm{co}(T_i + \theta_i) = 0$, temos que $T_i + \theta_i$ é também Fredholm e portanto $t \longmapsto T_i + t\theta_i$ define homotopia de T_i a epimorfismo por operadores Fredholm. Supomos doravante que T_0 e T_1 são epimorfismos de mesmo índice, e mostramos que é possível ligá-los em $\mathrm{Fred}(V)$.

Decomponhamos $V \simeq (\ker(T_i)) \oplus (\ker(T_i))^\perp$ e observemos que

$$T_0|_{(\ker(T_0))^\perp} : (\ker(T_0))^\perp \longrightarrow V$$
$$T_1^{-1} : V \longrightarrow (\ker(T_1))^\perp$$

são isomorfismos; como têm o mesmo índice e portanto núcleos de mesma dimensão finita, podemos definir isomorfismo $(\ker(T_0)) \longrightarrow (\ker(T_1))$, que somado ao isomorfismo $T_1^{-1} \circ T_0 : (\ker(T_0))^\perp \longrightarrow (\ker(T_1))^\perp$ nos dá um automorfismo $S \in \mathrm{Aut}\, V$, com a propriedade que $T_1 \circ S = T_0$. Usando o fato que $\mathrm{Aut}\, V$ é conexo (e até mesmo contráctil, segundo o Teorema de Kuiper [30]), definimos uma homotopia $t \longmapsto S_t$ em $\mathrm{Aut}\, V$ entre a identidade e S, que por sua vez nos provê homotopia $t \longmapsto T_1 \circ S_t$ entre T_1 e T_0 por operadores Fredholm. ■

Proposição 73. *(1) O índice de* T *Fredholm não se altera se lhe somamos um operador compacto* S*. (2) Se* $T_1, T_2 \in \mathrm{Fred}(V)$ *então* $T_2 \circ T_1 \in \mathrm{Fred}(V)$ *e* $\mathrm{ind}(T_2 \circ T_1) = \mathrm{ind}(T_2) + \mathrm{ind}(T_1)$*.*

Demonstração. (1) Observemos que devemos mostrar que $(T+S)$ e T se encontram na mesma componente conexa de $\mathrm{Fred}(V)$. Ora, para cada $0 \leqslant t \leqslant 1$ é Fredholm $T + tS$; portanto $t \longmapsto \mathrm{ind}(T + tS)$ é constante; logo $\mathrm{ind}(T) = \mathrm{ind}(T+S)$.

(2) Que $T_2 \circ T_1$ seja Fredholm quando T_i é Fredholm segue do fato de que $\dim\mathrm{co}(T_2 \circ T_1) \leqslant \dim\mathrm{co}(T_2) + \dim\mathrm{co}(T_1)$ e $\dim\ker(T_2 \circ T_1) \leqslant \dim K(T_2) + \dim K(T_1)$. Observemos agora que se $\pi : V \longrightarrow (\ker T_2)^\perp$, a homotopia $t \longmapsto (1-t)T_1 + t\pi \circ T_1$ nunca sai de $\mathrm{Fred}(V)$, e portanto $\pi \circ T_1$ e T_1 estão na mesma componente conexa de $\mathrm{Fred}(V)$; logo têm o mesmo índice. Notemos então que $\ker(T_2) + \ker(\pi \circ T_1) = \ker(T_2) \oplus \ker(\pi \circ T_1) = \ker(T_2 \circ T_1)$ e que $(T_2 \circ \pi \circ T_1)(V)^\perp = (T_2 \circ T_1)(V)^\perp$.

Portanto $\mathrm{ind} : \pi_0 \mathrm{Fred}(V) \longrightarrow \mathbb{Z}$ é um isomorfismo. ■

Suponhamos então que tenhamos variedades diferenciais M e Y (compacta) e fibrados de Hilbert $E, F \longrightarrow M$. Usando a projeção natural $Y \times M \longrightarrow M$, induzimos fibrados E^Y, F^Y sobre $Y \times M$. Observemos que um morfismo $T \in \mathrm{Hom}(E^Y, F^Y)$ pode ser pensado como uma coleção de morfismos entre os fibrados originais parametrizada pela variedade Y, $T = \{T_y \in \mathrm{Hom}(E,F) : y \in Y\}$. Fazemos então a hipótese de que cada T_y é Fredholm. Então se for o caso de $\dim\ker T_y$ (ou $\dim\mathrm{co}\, T_y$) ser localmente constante em Y, então as regras

$$y \longmapsto \ker T_y$$
$$y \longmapsto \mathrm{co}\, T_y$$

definem fibrados vetoriais sobre Y, e portanto um elemento

$$[\ker T] - [\mathrm{co}\, T] \in K(Y)$$

No entanto, em geral, essa atribuição é contínua *inferiormente*; i.e., todo ponto tem vizinhança em que a dimensão do núcleo não aumenta. No entanto, um fato admirável é que, embora não se possa dizer no caso geral que $\ker(T)$ e $\mathrm{co}(T)$ sejam fibrados, ainda assim o elemento "$[\ker T] - [\mathrm{co}\, T]$"está bem-definido na K-teoria de Y.

Para convencer o leitor da veracidade dessa asserção, introduzamos o conceito de *estabilizador* de uma família $\mathcal{L} = (T_y)_{y\in Y}$: trata-se de um subespaço linear de dimensão finita $V < F$ tal que para cada $y \in Y$ o mapa linear

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{y,V} : E \oplus V &\longrightarrow F\\ (w,s) &\longmapsto T_y w + v\end{aligned}$$

é sobrejetor. Observemos que se T_y é constante em y, então $\ker(T_y^*)$ é um estabilizador para $\mathcal{L}$. No caso geral, se pode tomar $y_0 \in U \subset_o Y$ suficientemente pequena de modo a que $\ker(T_{y_0}^*)$ estabilize a subfamília $\mathcal{L}|_U = (T_y)_{y\in U}$. Claramente, se $V_1, V_2 < F$ estabilizam $\mathcal{L}|_{U_1}, \mathcal{L}|_{U_2}$, respectivamente, então $V_1 + V_2$ estabiliza $\mathcal{L}|_{U_1\cup U_2}$. Assim, usando que Y é compacta, concluímos que toda família Fredholm $\mathcal{L}$ admite estabilizadores. Denotemos por $\mathsf{Stab}(\mathcal{L})$ a coleção de estabilizadores de $\mathcal{L}$. Observamos que cada $V \in \mathsf{Stab}(\mathcal{L})$ contém $(T_y E)^\perp$ para cada $y \in Y$, e define seqüência exata

$$0 \longrightarrow \ker(\mathcal{L}_{y,V}) \hookrightarrow E \oplus V \xrightarrow{\mathcal{L}_{y,V}} F \longrightarrow 0$$

e portanto um fibrado vetorial $y \longmapsto \ker(\mathcal{L}_{y,V})$. Pomos então

$$\operatorname{ind}(T) = [\ker(\mathcal{L}_{y,V})] - \dim V$$

É muito simples mostrar que esse elemento independe da escolha de $V \in \mathsf{Stab}(\mathcal{L})$; de fato, se V' é um outro estabilizador da família, então $\mathcal{L}_{y,V\oplus V'}$ é linearmente homotópica por epimorfismos tanto a $\mathcal{L}_{y,V'}$ quanto a $\mathcal{L}_{y,V'}$, e a homotopia linear entre $\mathcal{L}_{y,V'}$ e $\mathcal{L}_{y,V'}$ define isomorfismo $\ker(\mathcal{L}_{y,V}) \simeq \ker(\mathcal{L}_{y,V})$. Daí que

$$\ker(\mathcal{L}_{y,V}) \oplus \varepsilon^{\dim V} \oplus \varepsilon^{\dim V'} \simeq \ker(\mathcal{L}_{y,V}) \oplus \varepsilon^{\dim V} \oplus \varepsilon^{\dim V'}$$

e portanto

$$[\ker(\mathcal{L}_{y,V})] - \dim V = [\ker(\mathcal{L}_{y,V'})] - \dim V'$$

Observemos que $\operatorname{ind}(T) = [\ker(T)] - [\operatorname{co}(T)]$ quando $\ker(T)$ e $\operatorname{co}(T)$ são fibrados.

5.4 Operadores Diferenciais e o Teorema de Atiyah-Singer

Se $E, F \longrightarrow M$ são fibrados vetoriais (reais ou complexos), um mapa linear $L : \Gamma(M,E) \longrightarrow \Gamma(M,F)$ é dito um *operador diferencial de ordem* k se para quaisquer trivializações $\{U_\alpha, \psi_\alpha\}.\{U_\alpha, \zeta_\alpha\}$ de E e F, respectivamente, os mapas induzidos

$$L_\alpha : [\Gamma(U_\alpha)]^{\operatorname{rk}_{\mathbb{R}} E} \longrightarrow [\Gamma(U_\alpha)]^{\operatorname{rk}_{\mathbb{R}} F} \tag{5.4}$$

são da forma

$$L_\alpha(f)(x) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{\substack{j=1\\|\alpha|\leqslant k}}^{rkE} a_\alpha^{1,j}(x)\partial^\alpha f_j(x) \\ \vdots \\ \sum\limits_{\substack{j=1\\|\alpha|\leqslant k}}^{rkE} a_\alpha^{\operatorname{rk} F,j}(x)\partial^\alpha f_j(x)\end{pmatrix} = \sum_{|\alpha|\leqslant k} A_\alpha(x)\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}, \tag{5.5}$$

onde $A_\alpha \in [\Gamma(U_\alpha)]^{\operatorname{rk}_{\mathbb{R}} F\times \operatorname{rk}_{\mathbb{R}} E}$. Denotamos o espaço linear dos tais L por $\mathsf{Diff}_k(E,F)$. Tomemos um operador diferencial L de ordem k e munamos M de uma métrica Riemanniana, com $B(M)$ e $S(M)$ os subfibrados de discos e de esferas de $\pi : T^*M \longrightarrow M$ determinados por essa métrica. Podemos então pensar π^*E e π^*F como subespaços de $B(M)\times E$ e $B(M)\times F$, respectivamente. Definimos morfismo de fibrados

$$\sigma_k(L) = \pi^*E \longrightarrow \pi^*F$$

o *símbolo principal* de L, da seguinte maneira : um ponto em π^*E é da forma $(v, s(x))$ para $x \in M$, $\pi(v) = x$ e s uma seção de $E \longrightarrow M$; tomemos f uma função diferenciável em M com $f(x) = 0$ e $df(x) = v$. Então, se consideramos coordenadas locais $x_1, ..., x_n$ em M e denotamos por D^α o operador

$$D^\alpha = (-i)^{|\alpha|} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$$

temos $D^\alpha(f^k s)_x = 0$ para $|\alpha| > k$, e

$$D^\alpha(f^k s)_x = (-i)^{|\alpha|} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} ... \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} k! s(x)$$

Segue que a regra

$$\sigma_k(L) : (v, s(x)) \longmapsto \left(v, \frac{i^k}{k!} D^\alpha(f^k s)_x\right)$$

só depende das coordenadas $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ de df e do valor de s em x. Assim $\sigma_k(L)$ define um morfismo honesto entre π^*E e π^*F. É instrutivo ver o que isso significa em termos de um operador diferencial L de ordem k entre fibrados triviais $E = \mathbb{R}^n \times V \longrightarrow F = \mathbb{R}^n \times W$. Em termos de uma trivialização global

$$L = \sum_{|\alpha| \leqslant k} A_\alpha(x) \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}$$

temos que

$$\sigma_k(L) \left(\sum \xi_i dx_i\right) = \sum_{|\alpha| = k} A_\alpha(x) \xi^\alpha$$

onde ξ^α denota $\xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} ... \xi_n^{\alpha_n}$ A expressão local anterior e a regra da cadeia mostram que se $L' : \Gamma(F) \longrightarrow \Gamma(G)$ é um operador diferencial de ordem k', então

$$\sigma_{k'+k}(L' \circ L) = \sigma_{k'}(L') \circ \sigma_k(L)$$

Dizemos que L de ordem k é *elíptico* se $\sigma_k(L)$ restringe a isomorfismo sobre $S(M)$. A propriedade fundamental dos operadores diferenciais elípticos é descrita no teorema a seguir, onde $L_s^2(M, E)$ denota o completamento de $\Gamma(E)$ sob a norma

$$||\psi||_{L_s^2}^2 = \sum_{i=0}^{s} \int_M |\underbrace{\nabla \nabla ... \nabla}_{i \text{ vezes}} \psi|^2$$

Teorema 74. *Seja $L : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(F)$ um operador diferencial elíptico de ordem k sobre variedade compacta M. Então ([32],[37]) :*

1. *Para cada $U \subset_o M$, $u \in L_s(M, E)$, $Lu|_U \in \Gamma(U, F) \Longrightarrow u|_U \in \Gamma(U, E)$;*
2. *L tem extensão contínua $L_s(M, E) \longrightarrow L_{s-k}(M, F)$;*
3. *As normas $|\cdot|_{s,E}$ e $|\cdot|_{s-k,E} + |L \cdot|_{s-k,F}$ em $L_s(M, E)$ são equivalentes.*

A primeira parte do teorema diz que as únicas soluções *fracas* de uma equação diferencial do tipo $Lu = f$, f função suave fixada e L operador diferencial elíptico, são as soluções *fortes*, i.e., suaves fora de um conjunto de medida nula. Se $L : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(F)$ é operador diferencial elíptico de ordem k, $\ker L < L_s^2(M, E)$ é fechado (regularidade elíptica diz que o núcleo da extensão contínua de L a $L_s(M, E)$ coincide com o núcleo de L como operador em $\Gamma(M, E)$) e localmente compacto (tome seqüência limitada $\{u_n\} \subset \ker L$, $|u_n|_{s-k,E} \leqslant C$, e observemos que por regularidade elíptica $|u_n|_{s,E} \leqslant C'$, de sorte que $\{u_n\} \subset \ker L \cap L_s^2(M, E)$. Como $L_s^2(M, E)$ mergulha compactamente em $L^2(M, E)$ para $s > 0$, uma subseqüência de $\{u_n\}$ converge em $\ker L$ na topologia de $|\cdot|_{s,E}\cdot$), e portanto tem dimensão finita. Da mesma maneira, $\ker L^* \simeq \operatorname{co} L$ tem dimensão finita, i.e., as extensões $L_s^2(M, E) \longrightarrow L_{s-k}^2(M, F)$ são todas Fredholm de índice independente do inteiro s.

Um outro fato a que vale a pena atentar é que para L elíptico de ordem k, o símbolo principal $\sigma = \sigma_k(L)$ determina elemento $d(E, F, \sigma)$ em $L(B(M), S(M))$ e portanto $\Theta d(E, F, L)$ em $K(B(M), S(M))$. Através do caráter de Chern ch obtemos

$$\mathsf{ch}L := \mathsf{ch}\Theta d(E, F, L) \in H^*(B(M), S(M); \mathbb{Q})$$

Definimos então um número *racional* $\gamma(L)$ por

$$\gamma(L) = (\mathsf{ch}L \cup \mathsf{td}E) \backslash [T^*M]$$

que chamamos *índice topológico* do operador L. O (fantástico) teorema do índice de Atiyah-Singer (cf. [20]) diz que, se M é compacta e L operador elíptico, então o índice topológico coincide com o índice de L; i.e., que

$$\gamma(L) = \dim \ker L - \dim \operatorname{co} L$$

Observemos que essa fórmula implica, em particular, que $\gamma(L)$ é um *número inteiro*. Essa é a mãe dos teoremas de integralidade em geometria diferencial. Uma generalização posterior devida ainda a Atiyah, Singer e Segal diz que, se Y é espaço Hausdorff compacto que parametriza (continuamente) uma família de operadores elípticos $y \longmapsto L_y : \Gamma_M(E) \longrightarrow \Gamma_M(F)$, então temos $\pi : X = TM \times Y \longrightarrow Y$ então coincidem em $H^*(Y; \mathbb{Q})$ os elementos

$$\mathsf{ch}(\operatorname{ind} L) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \pi^* \left(\mathsf{ch}(\sigma(L))\, \hat{\boldsymbol{A}}(X)^2\right)$$

onde $n = \dim M$ e $\hat{\boldsymbol{A}}$ denota a classe de Atiyah. Uma das conseqüências desse resultado é o teorema de Riemann-Roch-Hirzebruch :

Teorema 75. *(R-R-H) Se $E \longrightarrow M$ é um fibrado holomorfo sobre variedade complexa compacta M, então sua característica de Euler holomorfa de E (a soma alternante das dimensões das homologias do complexo de Dolbeaut associado a E) se calcula por $T(M, E) = (\mathsf{ch}E \cup \mathsf{td}M) \backslash [M]$.*

Capítulo 6

Fibrados de Higgs

6.1 Funcional de Yang-Mills

Dada uma 4-variedade Riemanniana M e um fibrado $SU(2)$-principal $P \longrightarrow M$, consideramos $\mathrm{Ad}\, P = P \times_{SU(2)} L(SU(2))$ munido do produto interno induzido de

$$L(SU(2)) \ni (A, B) \longmapsto -\mathsf{Tr}(AB)$$

que torna $\mathrm{Ad}\, P \otimes \Lambda^2 T^* M \longrightarrow M$ um fibrado Riemanniano sobre M. Observemos que se $\nabla \in \mathcal{A}(P)$, então sua curvatura F_∇ define Definimos o *funcional de Yang-Mills*

$$\mathcal{YM} : \mathcal{A}(P) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\mathcal{YM}(\nabla) = |F_\nabla|^2 = -\int_M \mathsf{Tr}\left(F_\nabla \wedge *F_\nabla\right)$$

cujos pontos críticos são ditos *ínstantons*. As equações de Euler-Lagrange desse funcional são ditas *equações de Yang-Mills* , e correspondem a uma versão elíptica das equações de Maxwell (originalmente escritas para métricas de assinatura $(+ - --)$). Explicitamente, se $A \in \Omega^1(\mathrm{Ad}\, P)$ e temos a família a 1-parâmetro de conexões

$$t \longmapsto \nabla_t = \nabla_0 + tA$$

Notemos que

$$F_{\nabla + A} = F_\nabla + \nabla A + A \wedge A$$

e portanto

$$F_{\nabla_t} = F_\nabla + t\nabla A + t^2 A \wedge A$$

donde

$$\mathcal{YM}(\nabla_t) = \mathcal{YM}(\nabla) + 2t < F_\nabla, \nabla A > + o(t^2)$$

Como os pontos críticos ∇ se determinam por

$$\frac{d}{dt}\left(\mathcal{YM}(\nabla_t)\right)_{t=0} = 0$$

devemos ter

$$< F_\nabla, \nabla A >= 0$$

para cada A; i.e.,

$$\nabla^* F_\nabla = 0$$

Recorde no entanto que

$$\nabla F_\nabla = 0$$

é a identidade de Bianchi, válida para qualquer conexão ∇. Temos portanto uma versão não-linear das equações de harmonicidade de Hodge

$$d\omega = 0 = d^*\omega$$

Como ∇^* atua em 2-formas ω por

$$\nabla^*\omega = - * \nabla * \omega$$

uma outra maneira de reescrever as equações de Yang-Mills é

$$\begin{aligned} \nabla F_\nabla &= 0 \\ \nabla * F_\nabla &= 0 \end{aligned}$$

Isso sugere que atentemos a uma classe particular de soluções dessas equações, a saber, as conexões ∇ que satisfazem as condições de (anti-)autodualidade

$$*F_\nabla = \mp F_\nabla$$

que são soluções por Bianchi. Evidentemente, conexões anti-autoduais ∇ ficam auto-duais se revertermos a orientação em M, de maneira que podemos nos ater a qualquer uma das duas condições. Observemos que se toda 2-forma se decompõe unicamente como a soma de uma forma autodual e uma forma anti-autodual, i.e.

$$\Lambda^2 = \Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_-$$

e que a decomposição acima é ortogonal para o produto interno

$$\begin{aligned} \Lambda^2 \times \Lambda^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2) &\longmapsto \int_M \omega_1 \wedge *\omega_2 \end{aligned}$$

Em realidade, tais soluções correspondem a mínimos do funcional de Yang-Mills (o que é sempre interessante em teorias físicas...) : com efeito, se ∇ é uma qualquer solução das equações de Yang-Mills cuja curvatura se decompõe em suas partes anti- e autoduais

$$F_\nabla = F_\nabla^+ + F_\nabla^-$$

então é claro que

$$\mathcal{YM}(\nabla) = |F_\nabla^+|^2 + |F_\nabla^-|^2$$

Por outro lado, a expressão das classes de Chern

$$c(E) = \det\left(1 + \frac{i}{2\pi} F_\nabla\right)$$

que

$$c_1(E) = \frac{i}{2\pi} \mathsf{Tr} F_\nabla$$

Como F_∇ é uma 2-forma que toma valores em $L(SU(2))$, F_∇ tem a forma

$$F_\nabla = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ -\overline{f_{12}} & -f_{11} \end{pmatrix}$$

e portanto $c_1(E) = 0$, de onde se obtém que

$$c_2(E) = \frac{1}{4\pi^2}\left(f_{11} \wedge f_{11} - f_{12} \wedge \overline{f_{12}}\right)$$

Observemos, no entanto, que

$$\mathsf{Tr}\left(F_\nabla \wedge F_\nabla\right) = 2\left(f_{11} \wedge f_{11} - f_{12} \wedge \overline{f_{12}}\right)$$

i.e.

$$c_2(E) = \frac{1}{8\pi^2}\mathsf{Tr}\left(F_\nabla \wedge F_\nabla\right)$$

Mas

$$F_\nabla \wedge F_\nabla = F_\nabla^+ \wedge F_\nabla^+ + 2F_\nabla^+ \wedge F_\nabla^- + F_\nabla^- \wedge F_\nabla^-$$

e o fato de F_∇^+ e F_∇^- serem ortogonais (e M fechada) diz que $F_\nabla^+ \wedge F_\nabla^- \in d\Omega^3$. Logo

$$\begin{aligned}\mathsf{Tr}\left(F_\nabla \wedge F_\nabla\right) &= \mathsf{Tr}\left(F_\nabla^+ \wedge F_\nabla^+\right) + \mathsf{Tr}\left(F_\nabla^- \wedge F_\nabla^-\right)\\ &= \mathsf{Tr}\left(F_\nabla^+ \wedge *F_\nabla^+\right) - \mathsf{Tr}\left(F_\nabla^- \wedge *F_\nabla^-\right)\end{aligned}$$

módulo cobordos, e portanto

$$8\pi^2\int_M c_2(E) = \int_M \left(\mathsf{Tr}\left(F_\nabla^+ \wedge *F_\nabla^+\right) - \mathsf{Tr}\left(F_\nabla^- \wedge *F_\nabla^-\right)\right) = |F_\nabla^+|^2 - |F_\nabla^-|^2$$

É claro então que $8\pi^2\int_M c_2(E)$ é uma cota inferior para $\mathcal{YM}(\nabla)$; notemos então que $\int_M c_2(E) \geqslant 0$, $|F_\nabla^+|^2 \geqslant |F_\nabla^-|^2$ e $\mathcal{YM}(\nabla) = 8\pi^2\int_M c_2(E) \Longleftrightarrow \nabla$ é autodual, e se $\int_M c_2(E) \leqslant 0$, $|F_\nabla^+|^2 \leqslant |F_\nabla^-|^2$ e $\mathcal{YM}(\nabla) = 8\pi^2\int_M c_2(E) \Longleftrightarrow \nabla$ é anti-autodual. Quando $M = \mathbb{R}^4$ (com a métrica usual) sabemos que todo fibrado $SU(2)$-principal $P \longrightarrow M$ é trivial; em termos das coordenadas usuais $x_1, ..., x_4$ podemos trivializar globalmente a conexão em P como

$$\nabla = d + A_1dx_1 + A_2dx_2 + A_3dx_3 + A_4dx_4$$

e a curvatura

$$F_\nabla = \sum_{i<j} F_{ij}dx_i \wedge dx_j$$

onde

$$F_{ij} = \left[\nabla_i, \nabla_j\right], \text{ onde } \nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + A_i$$

Nesses termos, a condição de autodualidade de ∇ se traduz em

$$\begin{aligned}F_{12} &= F_{34}\\ F_{13} &= F_{24}\\ F_{14} &= F_{23}\end{aligned}$$

Suponhamos agora que $\mathbb{R}^2$ aja em $\mathbb{R}^4$ por traslação nas duas últimas coordenadas :

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$
$$\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3+a_1\\ x_4+a_2\end{pmatrix}$$

e que uma dada conexão autodual ∇ seja invariante por essa ação. Em termos mais pedestres, supomos que as funções A_3 e A_4 só dependam de x_1 e x_2, e portanto

$$\nabla = d + A_1dx_1 + A_2dx_2$$

definamos uma conexão sobre $\mathbb{R}^2$, com campos de endomorfismos A_3 e A_4, que renomeamos ϕ_1 e ϕ_2, respectivamente. Então

$$\phi = \phi_1 - i\phi_2$$

determina um campo complexo de endomorfismos do fibrado, $\phi \in \Gamma_{\mathbb{R}^2}\left(\operatorname{Ad}P \otimes \mathbb{C}\right)$. Se ϕ^* denota

$$\phi^* = -\phi_1 - i\phi_2$$

então as equações de autodualidade se reescrevem como

$$\begin{aligned} F_\nabla - \frac{1}{2}i[\phi,\phi^*] &= 0 \\ [\nabla_1 + i\nabla_2, \phi] &= 0 \end{aligned}$$

Essas equações dependem do sistema de coordenadas escolhido; no entanto, se pomos

$$\begin{aligned} z &= x_1 + ix_2 \\ \theta &= \frac{1}{2}\phi dz \\ \theta^* &= \frac{1}{2}\phi^* d\overline{z} \end{aligned}$$

elas se convertem em

$$\begin{aligned} F_\nabla + [\theta,\theta^*] &= 0 \\ \overline{\partial_\nabla}\theta &= 0 \end{aligned}$$

que *independem do sistema de coordenadas* e são *conformemente invariantes* [21]. Como não existem soluções ∇ de energia finita (i.e., com $\mathcal{YM}(\nabla) < \infty$) em $\mathbb{R}^2$, são justamente essas propriedades do sistema acima que nos permitem considerá-lo sobre superfícies de Riemann Σ, que nada mais são que 2-variedades orientadas munidas de uma escolha particular de classe conforme de métricas Riemannianas. O caso de Σ elíptica foi tratado extensivamente em [24], [25] e [26].

Para uma versão invariante da redução dimensional das equações de Yang-Mills, e a discussão de suas propriedades, nos referimos ao artigo de Hitchin [21]. A elipticidade dessas equações é discutida em detalhe no livro de Freed e Uhlenbeck [11] que discute os resultados de Donaldson. Um estudo mais elaborado da redução-dimensional associada a outros subgrupos de $\mathbb{R}^4$é empreendido por Jardim em [27].

6.2 Fibrados de Higgs

Motivados por nossas considerações precedentes, definimos o conceito de um fibrado de Higgs. Seja X uma variedade Kähler de dimensão n, $\Omega^1_X \longrightarrow X$ o fibrado de 1-formas holomorfas em X, $E \longrightarrow X$ um fibrado vetorial complexo e $\theta : E \longrightarrow E \otimes \Omega^1_X$ um morfismo de fibrados (dito *campo de Higgs*), dizemos que o par (E,θ) é um *fibrado de Higgs* se E e θ forem holomorfos, e $\theta \wedge \theta = 0$ (observemos que supomos a existência de métrica em X – Kähler, ainda por cima – mas não em E). Uma observação preliminar é a seguinte : se $\overline{\partial}$ é a estrutura holomorfa de E, podemos definir um operador diferencial de ordem 1, D'', por

$$D'' = \overline{\partial} + \theta$$

Evidentemente, D'' satisfaz uma $\overline{\partial}$-regra de Leibniz :

$$D''(f\sigma) = \overline{\partial} f \otimes \sigma + fD''(\sigma)$$

onde f é uma função suave e σ uma seção de E. D'' atua também em formas a valores em E através da regra

$$D''(\sigma \wedge \varphi) = D''(\sigma) \wedge \varphi + (-1)^{|\sigma|}\sigma \wedge D''(\varphi)$$

onde $|\sigma|$ denota o grau da forma σ. Além disso, observemos que

$$\begin{aligned} (D'')^2\sigma &= \left(\overline{\partial}\right)^2\sigma + \overline{\partial}\left(\theta\sigma\right) + \theta\left(\overline{\partial}\sigma\right) + \theta^2\sigma \\ &= \left(\overline{\partial}\right)^2\sigma + \left(\overline{\partial}\theta\right)\sigma + \theta^2\sigma \end{aligned}$$

Esse simples cálculo mostra que $(D'')^2 = 0$, já que : (1) $\overline{\partial}$ define estrutura holomorfa em E se e só se seu quadrado é nulo; (2) θ é holomorfa se e só se é anulada pela estrutura complexa de E; (3) $\theta^2 = 0$ se e só se o componente $(2,0)$ de D'' se anula. Reciprocamente, se só supusermos ter E e θ suaves, e tomarmos D'' operador diferencial de ordem 1, obtido da soma de um operador que leva seções em $(0,1)$-formas com um operador algébrico θ que leva seções em $(1,0)$-formas, então D'' define em (E,θ) a estrutura de um fibrado de Higgs se D'' satisfaz a $\overline{\partial}$-regra de Leibniz e $(D'')^2 = 0$ (conseqüência vulgar do artigo [38] frente aos cálculos acima; veja também [10] para uma demonstração por teoria de calibre), em cujo caso diremos que se trata de uma *estrutura de Hodge*. Observemos que de acordo com o GAGA de Serre [42], quando X é uma variedade projetiva (i.e., admite um mergulho holomorfo num espaço projetivo) um fibrado holomorfo E é algébrico, assim como campo de Higgs θ, que passam então a morar no reino encantado da geometria algébrica. De acordo com essas observações, denotaremos um fibrado de Higgs por (E,θ) ou (E,D'') indistintamente. Se introduzirmos uma métrica Hermitiana h num fibrado de Higgs (E,D''), podemos definir um operador ∂_h por

$$h(-,\partial\sigma) = \overline{\partial}h(-,\sigma) - h(\overline{\partial}-,\sigma)$$

que é claramente linear, e satisfaz

$$\partial_h\ (f\sigma) = \partial f \otimes \sigma + f\partial_h\ (\sigma)$$

Também podemos definir $\overline{\theta_h}$ por

$$h(\theta-,\sigma) = h(-,\overline{\theta_h}\sigma)$$

de maneira a definir $D'_h = \partial_h\ + \overline{\theta_h}$. Notemos que

$$D_h = D'_h + D''$$

satisfaz a d-regra de Leibniz, e determina portanto uma conexão no fibrado E, métrica para h. Observemos que

$$\begin{aligned} h(\varphi,[\partial_h\ ,\overline{\theta_h}]\sigma) &= 2\overline{\partial}h(\theta\varphi,\sigma) - h(\theta\overline{\partial}\varphi,\sigma) - h(\overline{\partial}\,(\theta\varphi)\,,\sigma) = \\ &= 2\overline{\partial}h(\theta\varphi,\sigma) - h(\left(\overline{\partial}\theta\right)\varphi,\sigma) = 2h(\varphi,\overline{\theta_h}\partial_h\ \sigma) \\ &\Longrightarrow [\partial_h\ ,\overline{\theta_h}]\sigma = 2\overline{\theta_h}\partial_h\ \sigma \\ &\Longrightarrow \partial_h\ \overline{\theta_h} = 0 \end{aligned}$$

Analogamente,

$$h(\varphi,\partial_h^2\ \sigma) = -2\overline{\partial}h(\varphi,\partial_h\ \sigma)$$

Tomando $\varphi = \partial_h^2\ \sigma$ e $\psi = \partial_h\ \sigma$ temos

$$\begin{aligned} h(\varphi,\partial_h^2\ \sigma) &= -2\overline{\partial}\overline{[h(\psi,\partial_h^2\ \sigma)]} = 4\overline{\partial}\overline{\left[\overline{\overline{\partial}h(\partial_h\ \sigma,\partial_h\ \sigma)}\right]} = \\ &= 4\left(\overline{\partial}\right)^2 h(\partial_h\ \sigma,\partial_h\ \sigma) = 0 \\ &\Longrightarrow \partial_h^2\ = 0 \end{aligned}$$

de maneira que $(D'_h)^2 = 0$. Por conta disso, temos

$$F_h = D_h^2 = D'_h D'' + D'' D'_h$$

a *curvatura* da conexão D_h. h é dita Yang-Mills hermitiana se

$$\Lambda F_h = \lambda 1$$

onde Λ denota a adjunta (com respeito à métrica em X) do produto wedge com a forma Kähler κ_X, e λ é função apenas da inclinação $\mu(E) = \frac{\deg(E)}{\mathrm{rk}(E)}$ de E, onde

$$\deg(E) = c_1(E) \cup \kappa_X^{\dim X - 1}[X] = \int_X \mathsf{Tr}(F_h) \wedge \kappa_X^{\dim X - 1}$$

denota o grau do fibrado. Suponhamos então que $c_1(E) \cup \kappa_X^{\dim X-1}[X] = c_2(E) \cup \kappa_X^{\dim X-2}[X] = 0$ e h é Yang-Mills hermitiana. Então E tem inclinação nula, e portanto $|\lambda \,\mathrm{rk}\, E| = 0 \Longrightarrow \lambda = 0$, e a condição de h ser Hermitiana Yang-Mills diz apenas que

$$\Lambda F_h = 0$$

(Uma métrica h que satisfaça a relação acima se diz *harmônica*.) Segue então da relação ([45])

$$c_2(E) \cup \kappa_X^{\dim X-2}[X] = C_1||F_h||^2_{L^2} - C_2||\Lambda F_h||^2_{L^2}$$

para certas constantes C_1, C_2, que $F_h = 0$. Em outras palavras, que um fibrado de Higgs (E, D'') munido de uma métrica Yang-Mills Hermitiana define (pela construção acima) um fibrado plano se seus dois primeiros números de Chern $\deg(E)$ e $c_2(E) \cup \kappa_X^{\dim X-2}[X]$ forem nulos. Invertamos um pouco a perspectiva, e suponhamos que nos é dado um fibrado complexo plano (H, ∇) sobre X. Decompomos ∇ em suas partes $(1,0)$ e $(0,1)$:

$$\nabla = d' + d''$$

Escolhida uma métrica Hermitiana h em H, definimos operadores δ'_h e δ''_h unicamente pelas condições

$$h(-, \delta'_h\sigma) = d''h(-,\sigma) - h(d''-, \sigma)$$
$$h(-, \delta''_h\sigma) = d'h(-,\sigma) - h(d'-, \sigma)$$

Em outros termos, definimos δ'_h e δ''_h de modo a $d' + \delta''_h$ e $d'' + \delta'_h$ serem conexões métricas. Em termos desses operadores, definimos

$$2\partial_h = d' + \delta'_h$$
$$2\overline{\partial_h} = d'' + \delta''_h$$
$$2\theta_h = d' - \delta'_h$$
$$2\overline{\theta_h} = d'' - \delta''_h$$
$$D''_h = \overline{\partial_h} + \theta$$
$$D'_h = \delta''_h - \delta'_h$$

Observemos que (1) D''_h satisfaz a $\overline{\partial}$-regra de Leibniz (e é portanto um candidato a estrutura de Higgs) (2) $\nabla + D'_h = 2D''_h$; (3) a *pseudocurvatura* G_h de D''_h , se escreve como

$$G_h = (D''_h) = \frac{\nabla D'_h + D'_h\nabla}{4}$$

pois $\nabla^2 = 0$ (H é plano) e $(D'_h)^2 = 0$. Este último dado se obtém de uma manipulação formal das definições que esboçamos : $(D'_h)^2$ significa que valem simultaneamente $(\delta''_h)^2 = 0 = (\delta'_h\delta''_h + \delta''_h\delta'_h) = 0 = (\delta'_h)^2$. Mostramos que $(\delta''_h)^2 = 0$:

$$h((\delta''_h)^2\,\varphi, \sigma) = -2d'h(\varphi, d'\sigma) = 2d'h(\delta''_h\varphi, \sigma);\text{ portanto se } \sigma = (\delta''_h)^2$$
$$h((\delta''_h)^2\,\varphi, \sigma) = -2d'h(d'\delta''_h\varphi, \delta''_h\varphi) = -2d'\left[d'h(d'\delta''_h\varphi, \varphi) - h((d')^2\,\delta''_h\varphi, \varphi)\right] = 0$$
$$\implies \ (\delta''_h)^2 = 0$$

As identidades $(\delta'_h\delta''_h + \delta''_h\delta'_h) = 0$ e $(\delta'_h)^2 = 0$ se demonstram de maneira similar. Notemos que

$$\nabla^2 \implies \nabla(d'' - d') + (d'' - d')\nabla = 0$$

Como a relação

$$D'_h = (d'' - d') + 2\left(\theta_h - \overline{\theta_h}\right)$$

e portanto

$$G_h = 2\nabla\left(\theta_h - \overline{\theta_h}\right)$$

A métrica h é dita *harmônica* se $\Lambda G_h = 0$. Observemos que $\nabla^* = i[\Lambda, D'_h]$ pelas identidades Kähler; portanto 'h ser harmônica' significa apenas que $\nabla^* G_h = 0$, já que $D'_h G_h = 0$ por Bianchi. Então

$$||G_h||^2_{L^2} = 2\int_X \left(\theta_h - \overline{\theta_h}, \nabla^* G_h\right) = 0$$

Em suma : se h é uma métrica harmônica no fibrado plano (H, ∇), a pseudocurvatura G_h é nula. Em conseqüência disso, nosso melhor candidato a estrutura de Hodge, D_h'', é de fato uma estrutura de Hodge. As correspondências que obtivemos entre fibrados de Higgs com $c_1(E) = 0 = c_2(E)$ e métrica Yang-Mills Hermitiana, por um lado, e fibrados planos com métrica harmônica são claramente mutuamente inversas, e atentamos para o fato que se a métrica Yang-Mills em questão for harmônica, é a própria estrutura de Hodge a conexão plana que construímos.

Um morfismo entre fibrados de Higgs $\mathcal{E} = \left\{E \xrightarrow{\theta} E \otimes \Omega_X^1\right\}$ e $\mathcal{E}' = \left\{E' \xrightarrow{\theta'} E' \otimes \Omega_X^1\right\}$ consiste em um morfismo de fibrados $\varphi : E \longrightarrow E'$ tal que o seguinte diagrama comuta :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\phi"'] & E \otimes \Omega_X^1 \arrow[d, "\phi\otimes\mathrm{id}"] \\ E' \arrow[r, "\theta'"] & E' \otimes \Omega_X^1 \end{tikzcd}$$

Um fibrado de Higgs $\mathcal{E} = \left\{E \xrightarrow{\theta} E \otimes \Omega_X^1\right\}$ é dito *trivial* se $E = \mathcal{O}_X$ e $\theta = 0$. Na linguagem de operadores diferenciais, é fácil ver que a noção de fibrado harmônico é functorial com respeito a holomorfismos no espaço base X. Com isso queremos dizer que se $f : Y \longrightarrow X$ é holomorfo, e (E, D'') um fibrado de Higgs munido de métrica h e conexão associada $D_h = D_h' + D''$, então f^*h é uma métrica em f^*E, que é um fibrado de Higgs, e $f^*D_h = D_{f^*h}$. Também podemos definir o produto tensorial de dois fibrados de Higgs :

$$(E_1, D_1'', h_1) \otimes (E_2, D_2'', h_2) = (E_1 \otimes E_2, D_1'' \otimes 1 + 1 \otimes D_2'', h_1 \otimes h_2)$$

que satisfazem propriedades de functorialidade análogas, assim como a construção de fibrado de Higgs dual, $(E, \theta, h) \longmapsto (E^*, -\theta, h^*)$. Observações idênticas se aplicam ao caso de fibrados planos. Ainda não abordamos a questão da *existência* de métricas Yang-Mills hermitianas ou harmônicas . Para tanto, intruduzamos alguma nomenclatura : um fibrado de Higgs (E, θ) se diz *estável* se todo subfibrado de Higgs (i.e., subfibrados holomorfos F com $\theta F \subset F \otimes \Omega_X^1$) tem inclinação estritamente menor que a de E; quando a igualdade pode ocorrer chamamos (E, θ) de *semiestável* . Um fibrado de Higgs que é soma de fibrados de Higgs estáveis de mesma inclinação se diz *poliestável* . Conceitos análogos se aplicam a fibrados complexos planos (H, ∇) : (H, ∇) é dito irredutível se não existem subfibrados próprios com $(H, \nabla) = (H_1, \nabla_1) \oplus (H_2, \nabla_2)$, e corresponde à noção de estabilidade em fibrados de Higgs. Da mesma maneira, o conceito de poliestabilidade se converte em semisimplicidade no caso de fibrados planos. Então :

Teorema 76. *([9]) Um fibrado plano tem métrica harmônica se e só se é semisimples.*

Teorema 77. *([39],[49]) Um fibrado de Higgs tem métrica Yang-Mills hermitiana se e só se é poliestável.*

Se E é um fibrado plano, denotemos por $H_f^0(E)$ o espaço de seções paralelas de E, e se E é um fibrado de Higgs, escrevamos $H_\theta^0(E)$ para denotar o núcleo da estrutura de Hodge sobre seções suaves. Então se E possui métrica harmônica, temos $H_f^0(E) = H_\theta^0(E)$. De fato, se σ é uma seção suave de E, $D = D' + D''$ onde D é a conexão plana e D'' a estrutura de Hodge, temos

$$\begin{aligned} \int_X h(D'\sigma, D'\sigma) &= \int_X h(\sigma, (D')^* D'\sigma) = \int_X h(\sigma, i[\Lambda, D'']D'\sigma) = \\ &= \int_X h(\sigma, -i\Lambda D' D''\sigma) = 0 \\ &\Longrightarrow D'\sigma = 0 \end{aligned}$$

Analogamente, $D\sigma = 0 \Longrightarrow D_h'\sigma = 0 \Longrightarrow D''\sigma = 0$. Em particular, $H_f^0(E^* \otimes F) = H_\theta^0(E^* \otimes F)$ nos permite concluir com o

Corolário 78. *A categoria de fibrados planos semisimples é equivalente à categoria de fibrados de Higgs poliestáveis, equivalentes, por sua vez, à categoria de fibrados harmônicos.*

Estabilidade é uma propriedade de rigidez em fibrados de Higgs sobre variedades projetivas, e em especial em superfícies de Riemann . Resumimos algumas propriedades (cf. [18]) de que faremos uso mais adiante.

Proposição 79. *([39]) Se E e F são fibrados vetoriais holomorfos sobre superfície de Riemann Σ, e $f : E \longrightarrow F$ é um morfismo não-nulo, então existem fibrados holomorfos E_1, F_1, E_2 e F_2 e morfismo $E_2 \longrightarrow F_1$ que é isomorfismo sobre aberto de Zariski U de Σ, que determinam o seguinte diagrama comutativo com linhas exatas*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E_1 \arrow[r] & E \arrow[r] \arrow[d, "f"] & E_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 & F_2 \arrow[l] & F \arrow[l] & F_1 \arrow[l] & 0 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Demonstração. A demonstração é a seguinte : temos diagrama comutativo de feixes com linhas exatas :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \ker f \arrow[r] & E \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \operatorname{co}\ker f \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & 0 \\ 0 & \operatorname{co} f \arrow[l] & F \arrow[l] & \ker \operatorname{co} f \arrow[l] & 0 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

e usamos o fato que $\operatorname{co}\ker f$ é naturalmente isomorfo a $\ker \operatorname{co} f$. No entanto, os feixes $\operatorname{co}\ker f$, $\operatorname{co} f$ e $\ker f$ não necessariamente são localmente livres, e portanto podem não corresponder a fibrados em Σ, mas em todo caso são *coerentes*, já que $(\Sigma, \mathcal{O}_\Sigma)$ é um esquema Noetheriano ([17, Ch. 2 Prop. 5.7]). Notemos entrementes que se $U = \mathsf{Spec}\mathbb{C}[t]$ é um aberto afim em Σ, temos $\mathcal{O}_\Sigma|_U = \mathcal{O}_{\mathsf{Spec}\mathbb{C}[t]}$, e $\mathbb{C}[t]$ é um *domínio a ideais principais*. Dada a equivalência

$$M \longmapsto \mathcal{M}$$

entre a categoria de $\mathbb{C}[t]$-módulos de tipo finito e a categoria de feixes coerentes sobre $\mathsf{Spec}\mathbb{C}[t]$ ([17, Ch. 2 Prop. 5.5]), com inversa $\mathcal{M} \longmapsto \Gamma(\mathsf{Spec}\mathbb{C}[t], \mathcal{M})$, percebemos que $\ker f$ é localmente livre, já que corresponde a um submódulo de $\mathbb{C}[t]$-módulo livre, que é portanto livre já que $\mathbb{C}[t]$ é um PID [31]. Já $\operatorname{co} f$ corresponde a um quociente de módulos livres, e portanto $\operatorname{co} f$ não será livre se $\Gamma(\mathsf{Spec}\mathbb{C}[t], \operatorname{co} f)$ tiver torção. Por exemplo :

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_p \longrightarrow \mathcal{O}_\Sigma \longrightarrow \mathcal{O}_p \longrightarrow 0$$

(onde $\mathcal{I}_p$ é o ideal de um ponto – fechado – $p \in \Sigma$) é seqüência exata de feixes coerentes, $\mathcal{I}_p$ e $\mathcal{O}_\Sigma$ são localmente livres, mas o mesmo não ocorre com $\mathcal{O}_p$. Entretanto, o suporte desse feixe está concentrado em um único ponto, p, de modo que no complemento de p em Σ a seqüência $0 \longrightarrow \mathcal{I}_p \longrightarrow \mathcal{O}_\Sigma \longrightarrow 0$ é exata. Desejamos mostrar que o mesmo fenômeno ocorre com $\operatorname{co}\ker f$, e para isso vamos desenterrar algumas afirmações da Álgebra Comutativa (cf., por exemplo, [2] ou [4]). Percebamos inicialmente que $\mathbb{C}[t]$ tem dimensão de Krull 1 e coincide com seu fecho integral em $\mathbb{C}(t)$. Além disso, a localização de $\mathbb{C}[t]$ em cada seu ideal maximal é um domínio de valoração discreta; i.e., $\mathbb{C}[t]$ é domínio de Dedekind . Mas todo módulo de torção sobre domínio de Dedekind A é soma direta de submódulos da forma

$$M_i = A/m_i^{n_i}$$

onde os m_i's são ideais maximais de A e os n_i's são inteiros que excedem 1. No nosso caso $A = \mathbb{C}[t]$, a completude algébrica de $\mathbb{C}$ nos permite descrever os ideais maximais de $\mathbb{C}[t]$ como $m_i = (t - p_i)$, para algum ponto p_i de $\mathbb{C}$. Observemos então que se

$$f = \prod (t - p_i)$$

então a torção do A_f-módulo M_f desaparece. Disso segue que o feixe de torção de um feixe coerente $\mathcal{F}$ sobre superfície de Riemann Σ tem suporte em $\{p_1, ..., p_n\}$, e portanto $\mathcal{F}$ é localmente livre em $\Sigma \backslash \{p_1, ..., p_n\}$, e portanto um fibrado. Podemos estender $\mathcal{F}$ a toda a superfície por meio da equivalência de categorias mencionada acima, considerando o módulo

$$\frac{\Gamma(\mathsf{Spec}\mathbb{C}[t], \mathcal{F})}{T\left(\Gamma(\mathsf{Spec}\mathbb{C}[t], \mathcal{F})\right)}$$

que define por colagem extensão localmente livre (recorde que tomar torção, T, é functor). ■

Proposição 80. *Dados feixes localmente livres $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sobre Σ e morfismo $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ que é isomorfismo sobre um aberto de Zariski, vale $c_1(\mathcal{B}) \geqslant c_1(\mathcal{A})$.*

Demonstração. Suponhamos inicialmente que ambos os feixes sejam invertíveis. Observemos então que $\ker\varphi$ é um subfeixe localmente livre de $\mathcal{A}$ que é concentrado num número finito de pontos de Σ, e portanto é nulo. Daí que

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow \mathrm{co}\,\varphi \longrightarrow 0$$

seja exata, e portanto $\chi(\mathcal{B}) = \chi(\mathcal{A}) + \chi(\mathrm{co}\,\varphi)$. Mas também $\mathrm{co}\,\varphi$ tem suporte finito (em dimensão zero), e portanto $\chi(\mathrm{co}\,\varphi) = \dim H^0(\Sigma, \mathrm{co}\,\varphi) \geqslant 0$. Em suma : para feixes invertíveis sobre superfície de Riemann compacta a existência de um morfismo $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ que restringe a isomorfismo num aberto de Zariski implica $\chi(\mathcal{B}) = c_1(\mathcal{B}) \geqslant c_1(\mathcal{A}) = \chi(\mathcal{A})$. Finalizamos a demonstração notando que se $\mathcal{A}$ é um qualquer feixe localmente livre de posto n, então $c_1(\mathcal{A}) = c_1(\Lambda^n \mathcal{A})$. ■

Notemos que se $\mathcal{E} = E \xrightarrow{\theta} E \otimes K_\Sigma$ e $\mathcal{F} = F \xrightarrow{\varsigma} F \otimes K_\Sigma$ são fibrados de Higgs sobre Σ, e temos morfismo não-trivial $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$, então φ define morfismo de fibrados vetoriais $E \longrightarrow F$, e tomamos o aberto de Zariski $U \subset \Sigma$ em que o morfismo $E_2 \longrightarrow F_1$ (na notação do Lema de Narisimhan) é isomorfismo. O núcleo de $E|_U \longrightarrow F|_U$ é evidentemente $E_1|_U$, e por ser núcleo de φ, $E_1|_U$ é um subfibrado de Higgs de $\mathcal{E}|_U$, i.e.

$$\theta\,(E_1|_U) \subset (E_1 \otimes K_\Sigma)\,|_U$$

Como $\mathsf{Closure}U = \Sigma$, segue que E_1 é um subfibrado de Higgs $\mathcal{E}_1$ de $\mathcal{E}$ em toda a curva Σ. De modo análogo, a imagem de $E|_U \longrightarrow F|_U$ é $F_1|_U$, e o mesmo argumento mostra que F_1 é subfibrado de Higgs $\mathcal{F}_1$ de $\mathcal{F}$. Notemos que sempre podemos quocientar um fibrado de Higgs por um seu subfibrado de Higgs, e assim construímos $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}/\mathcal{E}_1$, $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}/\mathcal{F}_1$. Suponhamos agora que $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$ sejam *estáveis* (como fibrados de Higgs) . Então por definição temos as desigualdades

$$\mu(\mathcal{E}_2) \geqslant \mu(\mathcal{E}) \geqslant \mu(\mathcal{E}_1)$$
$$\mu(\mathcal{F}_2) \geqslant \mu(\mathcal{F}) \geqslant \mu(\mathcal{F}_1)$$

onde a igualdade vale em qualquer um dos casos apenas se os fibrados subjacentes coincidem. Como $E_2 \longrightarrow F_1$ é um isomorfismo em U vale $c_1(E_2) \leqslant c_1(F_1)$, e portanto

$$\mu(\mathcal{F}) \geqslant \mu(\mathcal{F}_1) \geqslant \mu(\mathcal{E}_2) \geqslant \mu(\mathcal{E})$$

Daí que, necessariamente, $\mu(\mathcal{F}) \geqslant \mu(\mathcal{E})$. Se por acaso $\mu(\mathcal{F}) = \mu(\mathcal{E})$, a desigualdade acima mostra que $\mu(\mathcal{F}) = \mu(\mathcal{F}_1)$ e $\mu(\mathcal{E}_2) = \mu(\mathcal{E})$. Pela hipótese de estabilidade, devemos ter $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}$ (e portanto φ é injetor) e $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$ (φ é sobrejetor) – ou seja, $\mathcal{E} \simeq \mathcal{F}$ através de φ. Em resumo :

Proposição 81. *Se $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$ são fibrados de Higgs estáveis e $\mu(\mathcal{E}) > \mu(\mathcal{F})$, todo morfismo $\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ é trivial. Se $\mu(\mathcal{E}) = \mu(\mathcal{F})$ e os fibrados de Higgs não são triviais, então os únicos morfismos não-triviais $\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ têm de ser isomorfismos.*■

Em conseqüência temos o seguinte

Corolário 82. *Se $\mathcal{E}$ é um fibrado de Higgs estável de inclinação positiva, temos $\mathbb{H}^2(\Sigma, \mathcal{E}) = 0$. Se a inclinação de $\mathcal{E}$ é negativa, $\mathbb{H}^0(\Sigma, \mathcal{E}) = 0$, e se por fim $\mu(\mathcal{E}) = 0$ e $\mathcal{E}$ não é trivial, temos $\mathbb{H}^0(\Sigma, \mathcal{E}) = 0 = \mathbb{H}^2(\Sigma, \mathcal{E})$.*

Suponhamos que $\mu(\mathcal{E}) < 0$. Então todo morfismo $\mathcal{O}_\Sigma \longrightarrow \mathcal{E}$ é trivial, e portanto $\mathbb{H}^0(\Sigma, \mathcal{E}) = 0$. Se $\mu(\mathcal{E}) > 0$ então $\mu(\mathcal{E}^* \otimes \Omega^1_\Sigma) < 0$ e daí que $\mathbb{H}^0(\Sigma, \mathcal{E}^* \otimes \Omega^1_\Sigma) = 0$. Por dualidade de Serre, segue que

$$\left(\mathbb{H}^0(\Sigma, \mathcal{E}^* \otimes \Omega^1_\Sigma)\right)^\vee = \mathbb{H}^2(\Sigma, \mathcal{E}) = 0$$

Por fim, se $\mathcal{E}$ tem grau nulo, então todo $\mathcal{O}_\Sigma \longrightarrow \mathcal{E}$ e $\mathcal{O}_\Sigma \longrightarrow \mathcal{E}^* \otimes \Omega^1_\Sigma$ é trivial ou um isomorfismo; portanto se $\mathcal{O}_\Sigma \neq \mathcal{E}$ devemos ter $\mathbb{H}^0(\Sigma, \mathcal{E}) = 0 = \mathbb{H}^2(\Sigma, \mathcal{E})$.■ O termo fibrado de Higgs foi cunhado por Hitchin em seu artigo seminal Self-Duality Equations on a Riemann Surface, [21], inspirado por um artigo de P. Higgs sobre partículas elementares em física [19]. Por sua vez, Simpson, Deligne e Beilinson se dedicaram ao assunto atraídos pela analogia do campo de Higgs θ com o mapa de Kodaira-Spencer na teoria de variação de estruturas de Hodge. A definição de métrica harmônica coincide com aquela empregada alhures, de que a derivada da aplicação classificadora da métrica seja um ponto crítico do funcional de energia (como empregado, por exemplo, em [21]). Recomendamos para mais detalhes a exposição fascinante [45].

6.3 Conexões hiperholomorfas em variedades hiper-Kähler

Todo o conteúdo desta seção se encontra em [50] ou, mais detalhadamente, em [51].

Uma estrutura hiper-Kähler em uma variedade Riemanniana (M, g) consiste em três estruturas complexas (integráveis) I, J, K tais que :

1. M é Kähler com respeito a cada uma dessas estruturas complexas (i.e., são fechadas as 2-formas $\omega_I = g(I\cdot, \cdot)$, $\omega_J = g(J\cdot, \cdot)$ e $\omega_K = g(K\cdot, \cdot)$)

2. Como endomorfismos do fibrado tangente de M, valem as relações $IJ = -JI = K$.

Denotamos por $\mathbb{H}$ a álgebra dos quatérnions $Cl_{2,0}$. Temos evidente ação de $\mathbb{H}$ no fibrado tangente de M. Identificamos SU_2 com o espaço de quatérnions unitários, e consideramos a ação induzida no fibrado de formas diferenciais

$$SU_2 \times \Lambda_M^* \longrightarrow \Lambda_M^*$$

Não é difícil perceber que essa ação é paralela (já que cada estrutura complexa é paralela) e portanto comuta com o laplaciano do traço, $\Delta = \nabla^* \nabla$.

Mas recordemos que, quando M é compacta, pela teoria de Hodge cada classe cohomológica de M tem um e um único representante Δ-harmônico; portanto, sob a hipótese de compacidade, a ação de SU_2 em Λ_M^* induz ação

$$SU_2 \times H^*(M; \mathbb{C}) \longrightarrow H^*(M; \mathbb{C})$$

Para cada $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ de norma unitária, o endomorfismo

$$L = aI + bJ + cK$$

é também uma estrutura complexa em M, que é claramente integrável, paralela e Kähler (ou seja : $\omega_L = g(L\cdot, \cdot)$ é fechada).

Definição 83. *L é dita* estrutura complexa induzida *pela estrutura hiper-Kähler em M. O conjunto de tais estruturas complexas denotamos por $\mathcal{R}(M)$.*

Observemos que cada $L \in \mathcal{R}(M)$ determina uma decomposição de Hodge

$$H^n(M; \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=n} H_L^{p,q}(M)$$

Teorema 84. *[51, Prop. 2.2] $\omega \in H^{2p}(M; \mathbb{C})$ é invariante pela ação de SU_2 se e só se $\omega \in H_L^{p,p}(M)$ para cada $L \in \mathcal{R}(M)$.*

Teorema 85. *[51, Prop. 5.2] Seja $H^{inv} \subset H^2(M; \mathbb{C})$ o subespaço de 2-formas fixadas pela ação de SU_2, e $H^\perp$ seu complemento ortogonal. Então $H^\perp$ é subespaço de dimensão 3, gerado pelas formas Kähler $\omega_I, \omega_J, \omega_K$.*

Corolário 86. *Se $\omega \in H_L^{1,1}(M)$ para cada $L \in \mathcal{R}(M)$, então ω é ortogonal a cada forma de Kähler ω_L associada a estrutura complexa induzida L.*

Uma conexão ∇ num fibrado Hermitiano sobre uma variedade hiper-Kähler M é dita *hiperholomorfa* se sua 2-forma de curvatura F_∇ tem tipo $(1, 1)$ com respeito a cada estrutura complexa induzida. De acordo com o corolário anterior, se ∇ é hiperholomorfa, então a contração de F_∇ por qualquer forma de Kähler induzida é nula. Simbolicamente :

$$\Lambda_L F_\nabla = 0 \text{ se } L \in \mathcal{R}(M)$$

6.4 Nosso problema

Seja Σ superfície de Riemann de gênero $g \geqslant 2$ e p um seu ponto. Seguindo uma observação da seção 3.3, pensamos Σ como subvariedade complexa e Riemanniana de J, onde ambas variedades são munidas de estruturas spin compatíveis.

Observação 87. *Como Σ é subvariedade Riemanniana (com estrutura spin compatível) de J, vale a seguinte relação para formas φ, ψ em J :*

$$\mathsf{Ab}_p^* (\varphi \cdot_J \psi) = \mathsf{Ab}_p^* (\varphi) \cdot_\Sigma \mathsf{Ab}_p^* (\psi)$$

onde os subíndices J e Σ sob $\cdot$ enfatizam que multiplicação de Clifford se emprega.

Consideramos agora um fibrado holomorfo $E \longrightarrow \Sigma$ munido de conexão unitária $\bigtriangledown$ e um morfismo de fibrados

$$\theta : E \longrightarrow E \otimes K_\Sigma$$

que satisfazem as equações de Hitchin ([21]) :

$$\begin{cases} F_\bigtriangledown + [\theta, \theta^*] = 0 \\ \overline{\partial}_\bigtriangledown \theta = 0 \end{cases} \tag{6.1}$$

Observação 88. *Observemos que como o grau de E se calcula por*

$$\deg E = \int_\Sigma c_1(E) = \int_\Sigma \mathsf{Tr}\,(F_\bigtriangledown)$$

e

$$\mathsf{Tr}[\theta, \theta^*] = 0$$

Portanto a condição unitária que impusemos a ∇ implica E ter grau nulo.

Denotando por $\overline{\partial}$ a conexão parcial em E, temos o operador de Dirac associado ao complexo elíptico fundamental torcido por E :

$$\Lambda^0(E) \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda^1(E) \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda^{1,1}(E)$$

$$\mathsf{Dir}_E = \overline{\partial} - \overline{\partial}^* : S_\Sigma^+ \otimes E := \left(\Lambda^0 \oplus \Lambda^{1,1}\right)(E) \longrightarrow \left(\Lambda^{1,0} \oplus \Lambda^{0,1}\right)(E) =: S_\Sigma^- \otimes E$$

O complexo acima pode ser ainda torcido por fibrados de linha holomorfos planos $L_\eta \longrightarrow J$, seguindo a notação da seção sobre o fibrado de Poincaré. Denotemos por $E(\eta)$ o fibrado $E \otimes L_\eta|_\Sigma \longrightarrow \Sigma$ com a conexão parcial induzida, para a qual reservamos o símbolo $\overline{\partial}_\eta$. Também θ pode ser torcido, definindo $\theta_\eta = \theta \otimes \mathrm{id}$; claramente o fibrado $E(\eta) \xrightarrow{\theta_\eta} E(\eta) \otimes \Lambda^{1,0}$ também é fibrado de Higgs estável de grau nulo. Como

$$\overline{\partial}_\eta \left(\Gamma(E(\eta) \otimes S_\Sigma^\pm)\right) \subset \Gamma(E(\eta) \otimes S_\Sigma^\mp)$$
$$\theta_\eta \left(\Gamma(E(\eta) \otimes S_\Sigma^\pm)\right) \subset \Gamma(E(\eta) \otimes S_\Sigma^\mp)$$

consideramos os operadores

$$\mathcal{D}_\eta : \Gamma(E(\eta) \otimes S_\Sigma^+) \longrightarrow \Gamma(E(\eta) \otimes S_\Sigma^-)$$

dados por $\overline{\partial}_\eta - \overline{\partial}_\eta^* + \theta_\eta - \theta_\eta^*$. Módulo o operador algébrico $\theta_\eta - \theta_\eta^*$, lidamos apenas com o operador de Dirac canônico de variedades Hermitianas com estrutura spin^c; trata-se portanto de um operador diferencial elíptico de ordem 1, já que termos algébricos não contribuem para o símbolo principal dos operadores $\mathcal{D}_\eta$. Se σ é uma seção holomorfa de $K_\Sigma \longrightarrow \Sigma$, a regra

$$\theta_{(\eta,\sigma)} = \theta_\eta + \mathrm{id}_{E(\eta)} \otimes \sigma$$

faz com que por fim tenhamos uma família de operadores elípticos parametrizada por $J^\vee \times H^0(K_\Sigma)$:

$$J^\vee \times H^0(K_\Sigma) \ni (\eta, \sigma) \longmapsto \mathcal{D}_{(\eta,\sigma)}$$

Observemos que, para cada par (η,σ), a teoria de índice de operadores elípticos diz que $\mathcal{D}_{(\eta,\sigma)}$ estende a operador Fredholm em $L^2\left(E(\eta)\otimes S_\Sigma\right)$, com índice bem-definido

$$\operatorname{ind}\mathcal{D}_{(\eta,\sigma)} = \dim\ker\mathcal{D}_{(\eta,\sigma)} - \dim\operatorname{co}\mathcal{D}_{(\eta,\sigma)}$$

e tal que soluções ψ de $\mathcal{D}_{(\eta,\sigma)}\psi = \varphi$ para φ suave são suaves. No entanto, cálculo direto mostra que $\operatorname{ind}\mathcal{D}_{(\eta,\sigma)}$ não varia na direção $H^0(K_\Sigma)$ (em linguagem menos obtusa, que $\operatorname{ind}\mathcal{D}_{(\eta,\sigma)} = \operatorname{ind}\mathcal{D}_{(\eta,0)}$ para cada η). Portanto $J^\vee\times H^0(K_\Sigma)\longrightarrow\mathbb{Z}$ dado por $(\eta,\sigma)\longmapsto\operatorname{ind}\mathcal{D}_{(\eta,\sigma)}$ fatora pela projeção $J^\vee\times H^0(K_\Sigma)\longrightarrow J^\vee$, e como $J^\vee$ é compacto podemos usar a maquinaria geral para concluir que $(\eta,\sigma)\longmapsto\operatorname{ind}\mathcal{D}_{(\eta,\sigma)}$ é *constante* em $J^\vee\times H^0(K_\Sigma)$. Observemos que se $E\xrightarrow{\theta}E\otimes\Lambda^{1,0}_\Sigma$ é um fibrado de Higgs estável de grau nulo, então $E\otimes\Lambda^{0,1}_\Sigma\xrightarrow{\theta\otimes 1}E\otimes\Lambda^{1,1}_\Sigma$ é estável, e

$$c_1\left(E\otimes\Lambda^{0,1}_\Sigma\right) = c_1\left(\Lambda^{0,1}_\Sigma\right) = c_1\left(T\Sigma\right) = 2(1-g) < 0$$

pela hipótese de $g>1$. Então podemos interpretar o complexo duplo abaixo como um morfismo entre fibrados de Higgs estáveis :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\overline{\partial}"'] & E\otimes\Lambda^{1,0}_\Sigma \arrow[d, "\overline{\partial}\otimes\mathrm{id}"] \\ E\otimes\Lambda^{0,1}_\Sigma \arrow[r, "\theta\otimes\mathrm{id}"'] & E\otimes\Lambda^{1,1}_\Sigma \end{tikzcd}$$

Como $\mu(E\otimes\Lambda^{0,1}_\Sigma) < 0 = \mu(E)$, segue que o morfismo $\overline{\partial}$ é *trivial*. Portanto a cohomologia do complexo total associado ao complexo duplo acima, com diferencial total $D=\overline{\partial}+\theta$, é isomorfa à cohomologia do complexo

$$E\xrightarrow{\theta}E\otimes\Lambda^{0,1}_\Sigma\xrightarrow{\theta\otimes\mathrm{id}}E\otimes\Lambda^{1,1}_\Sigma$$

Notemos que esse complexo $(\mathcal{C})$ se escreve como soma direta dos complexos

$$E\xrightarrow{\theta}E\otimes\Lambda^{0,1}_\Sigma\longrightarrow 0 \quad e \quad 0\longrightarrow E\otimes\Lambda^{1,0}_\Sigma\xrightarrow{\theta\otimes\mathrm{id}}E\otimes\Lambda^{1,1}_\Sigma$$

que denotamos respectivamente por $\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}'$. Observemos que é então exata a seqüência de complexos de dois termos

$$0\longrightarrow\mathcal{E}\longrightarrow(\mathcal{C})\longrightarrow\mathcal{E}'\longrightarrow 0$$

e daí que seja exata a seqüência longa induzida em hipercohomologia [14, Ch. 3] :

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathbb{H}^0\left(\Sigma,\mathcal{E}\right)\longrightarrow\mathbb{H}^0\left(\Sigma,(\mathcal{C})\right)\longrightarrow\mathbb{H}^0\left(\Sigma,\mathcal{E}'\right)\longrightarrow\mathbb{H}^1\left(\Sigma,\mathcal{E}\right)\longrightarrow\mathbb{H}^1\left(\Sigma,(\mathcal{C})\right)\\ &\longrightarrow\mathbb{H}^1\left(\Sigma,\mathcal{E}'\right)\longrightarrow\mathbb{H}^2\left(\Sigma,\mathcal{E}\right)\longrightarrow\mathbb{H}^2\left(\Sigma,(\mathcal{C})\right)\longrightarrow\mathbb{H}^2\left(\Sigma,\mathcal{E}'\right)\longrightarrow 0\end{aligned}$$

Como $\mathcal{E}$ é nosso fibrado de Higgs estável sem inclinação, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{H}^0\left(\Sigma,\mathcal{E}\right) = 0 = \mathbb{H}^2\left(\Sigma,\mathcal{E}\right) \\ \Longrightarrow \mathbb{H}^2\left(\Sigma,(\mathcal{C})\right) = \mathbb{H}^2\left(\Sigma,\mathcal{E}'\right)\end{aligned}$$

Por outro lado, $\mathbb{H}^0\left(\Sigma,\mathcal{E}'\right)=0$ pois $\mu\left(E\otimes\Lambda^{0,1}_\Sigma\right)<0$, e portanto $\mathbb{H}^0\left(\Sigma,(\mathcal{C})\right)=0$. Para mostrarmos que também $\mathbb{H}^2\left(\Sigma,(\mathcal{C})\right)$ é nula, precisamos fazer uma breve excursão às seqüências espectrais; todos as referências se encontram em [14, Ch. 3, §5]

Proposição 89. $\mathbb{H}^2\left(\Sigma,\mathcal{E}'\right)=0$*, onde* $\mathcal{E}' = \left\{0\longrightarrow E\otimes\Lambda^{0,1}\xrightarrow{\theta\otimes\mathrm{id}}E\otimes\Lambda^{0,1}\otimes\Lambda^{1,0}\right\}$.

Demonstração. Nas nossas condições existe seqüência espectral $\{E_r\}$ que converge a $\mathbb{H}^*(\Sigma;\mathcal{E}')$ e cujo termo E_2 é da forma

$$E_2^{p,q} = H^q\left(H^p\left(\mathcal{E}'\right)\right) = \frac{\ker\left(H^p\left(\mathcal{E}'_q\right)\xrightarrow{\delta_q}H^p\left(\mathcal{E}'_{q+1}\right)\right)}{\delta_{q-1}H^p\left(\mathcal{E}'_{q-1}\right)}$$

Então constatamos que

$$\begin{aligned}
E_2^{p,0} &= 0\\
E_2^{p,1} &= \ker\left(\theta\otimes\mathrm{id} : H^p\left(E\otimes\Lambda^{0,1}\right)\longrightarrow H^p\left(E\otimes\Lambda^{0,1}\otimes\Lambda^{1,0}\right)\right)\\
E_2^{p,2} &= \mathrm{co}\left(\theta\otimes\mathrm{id} : H^p\left(E\otimes\Lambda^{0,1}\right)\longrightarrow H^p\left(E\otimes\Lambda^{0,1}\otimes\Lambda^{1,0}\right)\right)
\end{aligned}$$

Lembramos também que d_2 tem bigrau $(2,-1)$, e portanto o único $d_2^{p,q}$ que pode não ser nulo é

$$d_2^{0,2} : E_2^{0,2} \longrightarrow E_2^{2,1}$$

e recordamos que

$$E_2^{0,2} = \mathrm{co}\left(\theta\otimes\mathrm{id} : H^0\left(E\otimes\Lambda^{0,1}\right)\longrightarrow H^0\left(E\otimes\Lambda^{0,1}\otimes\Lambda^{1,0}\right)\right)$$

Se esse espaço for nulo, então todos os $d_2^{p,q}$'s serão nulos e então

$$E_2^{p,q} = E_3^{p,q} = ... = E_\infty^{p,q} = \mathbb{H}^{p+q}(\Sigma;\mathcal{E}')$$

e em particular $\mathbb{H}^2(\Sigma;\mathcal{E}') = E_2^{0,2}$.

Então vejamos : nós sabemos pelo mesmíssimo argumento aplicado não ao complexo $\mathcal{E}'$, mas ao fibrado de Higgs $\mathcal{E} = \left\{E \longrightarrow E\otimes\Lambda^{1,0}\right\}$ que $F_2^{p,q} \Longrightarrow \mathbb{H}^{p+q}(\Sigma;\mathcal{E})$, onde

$$\begin{aligned}
F_2^{p,0} &= \ker\left(\theta : H^p\left(E\right)\longrightarrow H^p\left(E\otimes\Lambda^{1,0}\right)\right)\\
F_2^{p,1} &= \mathrm{co}\left(\theta : H^p\left(E\right)\longrightarrow H^p\left(E\otimes\Lambda^{1,0}\right)\right)
\end{aligned}$$

de modo que as diferenciais

$$d_2^{p,q} : F_2^{p,q} \longrightarrow F_2^{p+2,q-1}$$

são todas nulas, e portanto

$$\begin{aligned}
0 = \mathbb{H}^2(\Sigma;\mathcal{E}) &= \bigoplus_{p+q=2} F_2^{p,q} = F_2^{1,0}\oplus F_2^{0,1}\\
&\Longrightarrow F_2^{1,0} = 0 = F_2^{0,1}
\end{aligned}$$

e portanto $\mathrm{co}\left(\theta : H^0\left(E\right)\longrightarrow H^0\left(E\otimes\Lambda^{1,0}\right)\right) = 0$. Como $\otimes\Lambda^{0,1}$ é exato à direita, isso implica que

$$\mathrm{co}\left(\theta\otimes\mathrm{id} : H^0\left(E\otimes\Lambda^{0,1}\right)\longrightarrow H^0\left(E\otimes\Lambda^{0,1}\otimes\Lambda^{1,0}\right)\right)$$

também é nulo, e portanto $\mathbb{H}^2(\Sigma;\mathcal{E}') = 0$. ∎

Em suma,

$$\mathbb{H}^0\left(\Sigma,(\mathcal{C})\right) = 0 = \mathbb{H}^2\left(\Sigma,(\mathcal{C})\right)$$

ou seja, a hipercohomologia de $(\mathcal{C})$ *está concentrada em grau 1.* No entanto, os operadores

$$\mathcal{D}_{(\eta,\sigma)} : \Gamma\left(E(\eta)\otimes S_\Sigma^+\right)\longrightarrow \Gamma\left(E(\eta)\otimes S_\Sigma^-\right)$$

são injetores se e só se as hipercohomologias em graus 0 e 2 dos complexos abaixo desaparecem :

$$E(\eta)\xrightarrow{\overline{\partial}_\eta+\theta_{(\eta,\sigma)}} E(\eta)\otimes\Lambda_\Sigma^1 \xrightarrow{\overline{\partial}_\eta+\theta_{(\eta,\sigma)}} E(\eta)\otimes\Lambda_\Sigma^{1,1}$$

e esses complexos nada mais são que os complexos totais associados aos complexos duplos

$$\begin{tikzcd}
E(\eta) \arrow[r, "\theta_{(\eta,\sigma)}"] \arrow[d, "\overline{\partial}_\eta"] & E(\eta)\otimes K_\Sigma \arrow[d, "\overline{\partial}_\eta"'] \\
E(\eta)\otimes\Lambda_\Sigma^{0,1} \arrow[r, "\theta_{(\eta,\sigma)}\otimes\mathrm{id}"'] & E(\eta)\otimes\Lambda_\Sigma^{1,1}
\end{tikzcd}$$

já que $\mu(E(\eta))=0$ e $E(\eta)$ é estável. Em suma : a hipótese de E ser fibrado de Higgs estável de grau nulo diz que $\mathcal{D}$ é injetor para todo (η,σ), e portanto $\ker\mathcal{D}^*$ tem dimensão localmente constante. Observemos que para cada η temos isomorfismo canônico $E(\eta)\xrightarrow{\simeq}E$ obtido do isomorfismo canônico $V\otimes\mathbb{C}\longrightarrow V$; obtemos daí isomorfismos $\varphi_\eta : L^2\left(E(\eta)\otimes S^{\pm}\right)\longrightarrow L^2\left(E\otimes S^{\pm}\right)$. Como $L^2(-)$ não distingue entre as conexões no fibrado de linha trivial, os isomorfismos naturais φ_η coincidem, e podemos portanto identificar co$\mathcal{D}^*$ com um subfibrado vetorial $\widehat{E}$ do fibrado trivial em $J^\vee\times H^0(K_\Sigma)$ com fibra $L^2\left(E\otimes S^-\right)$, que denotamos por H^-. De maneira similar, abreviemos o fibrado trivial

$$L^2\left(E\otimes S^+\right)\times J^\vee\times H^0(K_\Sigma)\longrightarrow J^\vee\times H^0(K_\Sigma)$$

por H^+, e munamos $H^{\pm}$ da conexão trivial $\underline{d}$. É fácil ver que se $G_{(\eta,\sigma)}$ denota o operador de Green associado a $\mathcal{D}^*_{(\eta,\sigma)}\mathcal{D}_{(\eta,\sigma)}$ (de modo que $\mathcal{D}^*_{(\eta,\sigma)}\mathcal{D}_{(\eta,\sigma)}G_{(\eta,\sigma)}\psi=\psi$ para cada $\psi\in\Gamma_Y(H^+)$), então um projetor ortogonal (na métrica L^2 hermitiana induzida em $H^{\pm}$) explícito para $\widehat{E}$ é

$$P : H^-\longrightarrow H^-$$
$$P_{(\eta,\sigma)}=1_{H^-_{(\eta,\sigma)}}-\mathcal{D}_{(\eta,\sigma)}G_{(\eta,\sigma)}\mathcal{D}^*_{(\eta,\sigma)}$$

Temos então $P^*=P$, $P^2=P$, $P|_{\widehat{E}}=\mathrm{id}_{\widehat{E}}$, $P|_{(\widehat{E})^\perp}=0$. Através de P definimos conexão em $\widehat{E}$ impondo comutatividade ao diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_{J^\vee\times H^0(K_\Sigma)}(\widehat{E}) \arrow[r, "\widehat{\nabla}"] \arrow[d] & \Lambda^1_{J^\vee\times H^0(K_\Sigma)}(\widehat{E}) \arrow[d] \\
\Gamma_{J^\vee\times H^0(K_\Sigma)}(H^-) \arrow[r, "\underline{d}"] & \Lambda^1_{J^\vee\times H^0(K_\Sigma)}(H^-)
\end{tikzcd}$$

O par $(\widehat{E},\widehat{\nabla})$ será chamado de *transformada de Nahm* do fibrado de Higgs (E,θ). Denotemos por $\langle\langle,\rangle\rangle$ o produto interno Hermitiano induzido em $\widehat{E}$ de H^-. Calculamos a curvatura de $\widehat{\nabla}$: num referencial unitário local $\psi_1,...,\psi_n$ de $\widehat{E}$, temos

$$\left(F_{\widehat{\nabla}}\right)_{i,j}=\left\langle\left\langle\left(P\underline{d}\right)^2\psi_i,\psi_j\right\rangle\right\rangle=\langle\langle P\underline{d}P\underline{d}\psi_i,\psi_j\rangle\rangle=\langle\langle\underline{d}P\underline{d}\psi_i,\psi_j\rangle\rangle$$

Mas por um lado

$$\underline{d}\,\langle\langle P\underline{d}\psi_i,\psi_j\rangle\rangle=\langle\langle\underline{d}P\underline{d}\psi_i,\psi_j\rangle\rangle-\langle\langle P\underline{d}\psi_i,\underline{d}\psi_j\rangle\rangle$$

e como $\langle\langle P\underline{d}\psi_i,\psi_j\rangle\rangle=\langle\langle\underline{d}\psi_i,\psi_j\rangle\rangle$ e $\underline{d}^2=0$, temos também

$$\underline{d}\,\langle\langle P\underline{d}\psi_i,\psi_j\rangle\rangle=-\,\langle\langle\underline{d}\psi_i,\underline{d}\psi_j\rangle\rangle$$

i.e.,

$$\left(F_{\widehat{\nabla}}\right)_{i,j}(\eta,\sigma)=\left\langle\left\langle\left(P_{(\eta,\sigma)}-1\right)\underline{d}\psi_i,\underline{d}\psi_j\right\rangle\right\rangle=\left\langle\left\langle\mathcal{D}_{(\eta,\sigma)}G_{(\eta,\sigma)}\mathcal{D}^*_{(\eta,\sigma)}\underline{d}\psi_i,\underline{d}\psi_j\right\rangle\right\rangle=$$
$$=\left\langle\left\langle G_{(\eta,\sigma)}\mathcal{D}^*_{(\eta,\sigma)}\underline{d}\psi_i,\mathcal{D}^*_{(\eta,\sigma)}\underline{d}\psi_j\right\rangle\right\rangle=\left\langle\left\langle G_{(\eta,\sigma)}[\mathcal{D}^*_{(\eta,\sigma)},\underline{d}]\psi_i,[\mathcal{D}^*_{(\eta,\sigma)},\underline{d}]\psi_j\right\rangle\right\rangle\quad .$$

já que ψ_i e ψ_j estão no núcleo de $\mathcal{D}^*$.

Proposição 90. *O operador*

$$\Gamma_{J^\vee\times H^0(K_\Sigma)}(H^-)\to\Lambda^1_{J^\vee\times H^0(K_\Sigma)}\left(H^+\right)$$
$$\psi\mapsto[\mathcal{D}^*_{(\eta,\sigma)},\underline{d}]\psi$$

age como multiplicação de Clifford pela 2-forma $\Theta=(\mathsf{Ab}_p\times\mathbf{1}_{J^\vee\times H^0(K_\Sigma)})^*\left(\Xi-\frac{1}{2}\Omega_{\mathcal{P}}\right)$, *onde* $\Omega_{\mathcal{P}}$ *é a curvatura do fibrado de Poincaré* $\mathcal{P}$ *e* Ξ *é umaa* 1*-forma em* $H^0(K_\Sigma)$ *(que calculamos explicitamente na demonstração).*

Demonstração. Representemos uma seção $\psi \in \Gamma_{J^\vee \times H^0(K_\Sigma)}(H^-)$ por $\psi = \varphi \otimes \lambda$, onde

$$\varphi : J^\vee \times H^0(K_\Sigma) \longrightarrow L^2_p\left(\mathcal{E} \otimes \left(\Lambda^{1,0}_\Sigma \oplus \Lambda^{1,0}_\Sigma\right)\right)$$
$$\lambda : J^\vee \times H^0(K_\Sigma) \longrightarrow L^2_p\left(\underline{\mathbb{C}}\right)$$

e notemos que

$$\mathcal{D}^*_{(\eta,\sigma)}\left(\varphi \otimes \lambda\right) - \mathcal{D}^*_{(0,0)}\left(\varphi \otimes \lambda\right) = \varphi \otimes \left(\mathsf{Ab}_p \times \mathbf{1}_{J^\vee \times H^0(K_\Sigma)}\right)^* \left(\overline{\sigma} - \sigma - 2\pi i \eta\right) \cdot \lambda$$

Se υ_j são coordenadas complexas no espaço afim $H^0(K_\Sigma)$, de maneira que as seções holomorfas σ de K_Σ se escrevem como

$$\sigma = \sum \upsilon_j \sigma_j$$

onde $\{\sigma_j\}_1^g$ é uma base (fixa) de $H^0(K_\Sigma)$. Como $\mathcal{D}^*_{(0,0)}$ certamente comuta com $\underline{d}$, obtemos (cf. 87)

$$\left[\mathcal{D}^*, \underline{d}\right]\left(\varphi \otimes \lambda\right)(\eta,\sigma) = \varphi \otimes \left(\mathsf{Ab}_p \times \mathbf{1}_{J^\vee \times H^0(K_\Sigma)}\right)^* \left(\Xi - \frac{1}{2}\Omega_{\mathcal{P}}\right) \cdot \lambda$$

onde Ξ denota a 1-forma

$$\Xi = \sum_{j=1}^{g} \left(\upsilon_j d\sigma_j - \overline{\upsilon}_j d\overline{\sigma}_j\right)$$

■

Fixamos bases unitárias $\{\gamma_k = \xi_{2k-1} + i\xi_{2k}\}$ and $\{\rho_k = \eta_{2k-1} + i\eta_{2k}\}$ [1] com $k = 1, \ldots, g$ para $\mathbb{C}^g$ e $(\mathbb{C}^g)^\vee$, respectivamente, e então reescrevemos $\Omega_{\mathcal{P}}$ nessas coordenadas :

$$\Omega_{\mathcal{P}} = 2\pi i \sum_{k=1}^{g} (d\rho_k \wedge d\overline{\gamma}_k + d\overline{\rho}_k \wedge d\gamma_k)$$

En particular, $\Omega_{\mathcal{P}}$ tem tipo $(1,1)$ como 2-forma em $J \times J^\vee$, e induz portanto estrutura holomorfa em $\mathcal{P}$.

Como multiplicação de Clifford comuta com o operador de Green [8], podemos seguir nosso cálculo :

$$\left(F_{\widehat{\nabla}}\right)_{i,j}(\eta,\sigma) = \frac{1}{4}\left\langle\left\langle G_{(\eta,\sigma)}\psi_i, \Omega_{\mathcal{P}} \wedge \Omega_{\mathcal{P}} \cdot \psi_j \right\rangle\right\rangle$$

Mas

$$\Omega_{\mathcal{P}} \wedge \Omega_{\mathcal{P}} = -4\pi^2 \sum_{k,j} (d\rho_k \wedge d\overline{\gamma}_k + d\overline{\rho}_k \wedge d\gamma_k) \wedge (d\rho_j \wedge d\overline{\gamma}_j + d\overline{\rho}_j \wedge d\gamma_j) \tag{6.2}$$

que reescrevemos como $W_1 + W_2$,

$$W_1 = -8\pi^2 \sum_k d\rho_k \wedge d\overline{\rho}_k \wedge d\gamma_k \wedge d\overline{\gamma}_k \text{ e}$$

$$\begin{aligned} W_2 = 8\pi^2 \sum_{k<j} &\left(d\rho_k \wedge d\rho_j \wedge d\overline{\gamma}_k \wedge d\overline{\gamma}_j + d\overline{\rho}_k \wedge d\overline{\rho}_j \wedge d\gamma_k \wedge d\gamma_j\right) + \\ + 8\pi^2 \sum_{k<j} &\left(d\rho_k \wedge d\overline{\rho}_j \wedge d\overline{\gamma}_k \wedge d\gamma_j + d\overline{\rho}_k \wedge d\rho_j \wedge d\gamma_k \wedge d\overline{\gamma}_j\right) \end{aligned}$$

Observemos que $(\mathsf{Ab}_p \times \mathbf{1}_{J^\vee})^* W_2 = 0$ já que Σ tem dimensão complexa 1. Assim :

$$\left(F_{\widehat{\nabla}}\right)_{i,j}(\eta,\sigma) = 8\pi^2 \sum_{k=1}^{g} \left\langle\left\langle G_{(\eta,\sigma)}\psi_i, d\gamma_k \cdot d\overline{\gamma}_k \cdot \psi_i \right\rangle\right\rangle d\rho_k \wedge d\overline{\rho}_k \quad . \tag{6.3}$$

Em particular, $F_{\widehat{\nabla}}$ tem tipo $(1,1)$ e define portanto estrutura holomorfa em $\widehat{E}$. Em suma, provamos o :

[1] Ressaltamos que esta escolha corresponde a impôr uma estrutura complexa *arbitrária*

Teorema 91. *A conexão transformada $\widehat{\nabla}$ é hiperholomorfa. Em particular, para cada forma Kähler em $J^\vee \times H^0(K_\Sigma)$, $\widehat{\nabla}$ é Hermite-Einstein com constante nula (i.e., $\Lambda F_{\widehat{\nabla}} = 0$) .*

Uma segunda observação sobre a transformada de Nahm é que ela desce a tipos de isomorfismo de fibrados de Higgs. Com efeito, um morfismo de fibrados de Higgs com conexão $(E, \nabla, \theta) \longrightarrow (E', \nabla', \theta')$ é um morfismo $\varphi : (E, \nabla) \longrightarrow (E', \nabla')$ com $(\varphi \otimes 1) \circ \theta = \theta' \circ \varphi$. Dois fibrados de Higgs isomorfos podem ser então tomados como o mesmo fibrado E munido de conexões e campos de Higgs gauge-equivalentes :

$$(E, \nabla, \theta) \simeq (E', \nabla', \theta') \Longrightarrow (E', \nabla', \theta') = (E, \nabla^u, \theta^u)$$

onde u é uma transformação de calibre (unitária) de E. Observemos que u ser unitária diz que trocar calibre por u comuta com tomar adjuntas, e aquela operação sempre comuta com tomar componentes $(0, 1)$. Assim que

$$\begin{aligned} \overline{\partial'}^{(*)} &= \left(\overline{\partial}^{(*)}\right)^u \\ \theta'^{(*)} &= \left(\theta^{(*)}\right)^u \end{aligned}$$

Portanto, se formamos $\mathcal{D}'_{(\eta,\sigma)}$, temos que

$$(u \otimes 1)\, \mathcal{D}'^*_{(\eta,\sigma)} \psi = \mathcal{D}^*_{(\eta,\sigma)} \left((u \otimes 1)^{-1} \psi \right)$$

i.e., $U^{-1} = (u \otimes 1)^{-1}$ define isomorfismo natural $\ker \mathcal{D}'^*_{(\eta,\sigma)} \longrightarrow \ker \mathcal{D}^*_{(\eta,\sigma)}$ que independe de (η, σ), no sentido que $d^y (u \otimes 1)^{-1} = 0$. Observemos que

$$\mathcal{D}^*_{(\eta,\sigma)} \mathcal{D}_{(\eta,\sigma)} G_{(\eta,\sigma)} \psi = \psi$$

diz que

$$G'_{(\eta,\sigma)} \psi = U G_{(\eta,\sigma)} \left(U^{-1} \psi \right)$$

e portanto

$$\begin{aligned} P'_{(\eta,\sigma)} &= U P_{(\eta,\sigma)} U^{-1} \\ &\Longrightarrow \overset{\wedge}{\nabla}{}' = \left(U P U^{-1} \right) d^y = \\ &= U P d^y U^{-1} = \left(\overset{\wedge}{\nabla} \right)^U \end{aligned}$$

i.e., fibrados de Higgs isomorfos resultam em fibrados tranformados isomorfos. Uma segunda característica interessante de ressaltar nessa transformada é sua aditividade; i.e., se (E, ∇, θ) é soma de dois fibrados de Higgs $(E_1, \nabla_1, \theta_1) \oplus (E_2, \nabla_2, \theta_2)$, todos eles dentro das nossas hipóteses, então $(\widehat{E}, \widehat{\bigtriangledown}) = (\widehat{E}_1, \widehat{\bigtriangledown}_1) \oplus (\widehat{E}_2, \widehat{\bigtriangledown}_2)$. De fato, é evidente que sob a decomposição $\Gamma(E(\eta) \otimes S) \simeq \Gamma(E_1(\eta) \otimes S^+) \oplus \Gamma(E_2(\eta) \otimes S^+) \oplus \Gamma(E_1(\eta) \otimes S^-) \oplus \Gamma(E_2(\eta) \otimes S^-)$ o operador de (tipo) Dirac $\Gamma(E(\eta) \otimes S) \longrightarrow \Gamma(E(\eta) \otimes S)$ se decompõe como

$$\begin{pmatrix} & & \mathcal{D}^*_{1(\eta,\sigma)} & \\ & & & \mathcal{D}^*_{2(\eta,\sigma)} \\ \mathcal{D}_{1(\eta,\sigma)} & & & \\ & \mathcal{D}_{2(\eta,\sigma)} & & \end{pmatrix}$$

logo

$$\mathcal{D}^*_{(\eta,\sigma)} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}^*_{1(\eta,\sigma)} & \\ & \mathcal{D}^*_{2(\eta,\sigma)} \end{pmatrix}$$

e

$$G_{(\eta,\sigma)} = \begin{pmatrix} G_{1(\eta,\sigma)} & \\ & G_{2(\eta,\sigma)} \end{pmatrix}$$
$$\Longrightarrow P_{(\eta,\sigma)} = \begin{pmatrix} P_{1(\eta,\sigma)} & \\ & P_{2(\eta,\sigma)} \end{pmatrix}$$
$$\Longrightarrow \widehat{\bigtriangledown} = P_{(\eta,\sigma)} d^{(\eta,\sigma)} = \begin{pmatrix} \widehat{\bigtriangledown}_1 & \\ & \widehat{\bigtriangledown}_2 \end{pmatrix}$$

Assim :

Teorema 92. *A transformada de Nahm é aditiva :* $\left(\widehat{E_1 \oplus E_2}, \widehat{\bigtriangledown_1 \oplus \bigtriangledown_2}\right) \simeq \left(\widehat{E_1} \oplus \widehat{E_2}, \widehat{\bigtriangledown}_1 \oplus \widehat{\bigtriangledown}_2\right)$.

Notemos também que $\mathcal{O}_{\mathbb{C}P^g}(1) \longrightarrow \mathbb{C}P^g$ tem por base de seções globais as coordenadas homogêneas $z_0, ..., z_g$ em $\mathbb{C}P^g$. Identificamos então $P\left(\mathbb{C} \times H^0\left(\Sigma, K_\Sigma\right)\right)$ com $\mathbb{C}P^g$, com $H^0\left(\Sigma, K_\Sigma\right)$ correspondendo a $z_0 \neq 0$, e podemos portanto definir, fixada uma base $\sigma_1, ..., \sigma_g$ de seções holomorfas de $K_\Sigma \longrightarrow \Sigma$, o campo de Higgs

$$\theta_{(\eta,[z_0:\ldots:z_g])} = z_0\left(\theta \otimes 1_{L_\eta}\right) + 1_{E(\eta)} \otimes \left(\sum_{i=1}^{g} z_i \sigma_i\right)$$

de maneira que $\theta_{(\eta,[1:z_1:\ldots:z_g])} = \theta_{(\eta,\sum_i z_i\sigma_i])}$ e $\theta_{(\eta,[0:z_1:\ldots:z_g])} = 1_{E(\eta)} \otimes (\sum_{i=1}^{g} z_i\sigma_i)$. A atribuição

$$\theta : (\eta, [z_0 : \ldots : z_g]) \longmapsto \theta_{(\eta,[z_0:\ldots:z_g])}$$

é portanto holomorfa, e podemos considerar a seqüência

$$E \overset{\theta_{(\eta,[z])}}{\longrightarrow} E \otimes \Lambda^1 \overset{\theta_{(\eta,[z])}}{\longrightarrow} E \otimes \Lambda^{1,1}$$

que varia de maneira holomorfa no parâmetro $(\eta, [z]) \in J_\Sigma^\vee \times \mathbb{C}P^g$. Da hipótese de estabilidade e inclinação nulos temos para $(\eta, [z])$ no aberto afim $J_\Sigma^\vee \times H^0(K_\Sigma) \subset J_\Sigma^\vee \times \mathbb{C}P^g$

$$\mathbb{H}^0\left(\Sigma, \mathcal{E}_{(\eta,[z])}\right) = 0 = \mathbb{H}^2\left(\Sigma, \mathcal{E}_{(\eta,[z])}\right)$$

e portanto a cohomologia do complexo acima se concentra em grau 1 para cada parâmetro. Como

$$\mathbb{H}^1\left(\Sigma, \mathcal{E}_{(\eta,[z])}\right)|_{J_\Sigma^\vee \times H^0(K_\Sigma)}$$

é, pelo que foi exposto acima, justamente nossa transformada $\hat{E}$, percebemos que

$$J_\Sigma^\vee \times \mathbb{C}P^g \longrightarrow \mathbb{H}^1\left(\Sigma, \mathcal{E}_{(\eta,[z])}\right)$$

coincide com $\widehat{E}$ em $J_\Sigma^\vee \times H^0(K_\Sigma)$. No entanto, a hipercohomologia de $\mathcal{E}_{(\eta,[z])}$ também se concentra em grau 1 quando $(\eta, [z])$ está no divisor do infinito $J_\Sigma^\vee \times \left(\mathbb{C}P^g \backslash H^0(K_\Sigma)\right)$. De fato, $\mathbb{H}^0\left(\Sigma, \mathcal{E}_{(\eta,[z])}\right)$ se identifica com (seções globais d') o núcleo do morfismo

$$\mathcal{E}(\eta) \overset{1\otimes\sigma}{\longrightarrow} \mathcal{E}(\eta) \otimes K_\Sigma$$

onde σ é uma forma holomorfa não-nula em Σ, tendo portanto zeros em codimensão 1, onde $\ker(1 \otimes \sigma)$ tem suporte, e portanto é nulo $\mathbb{H}^0\left(\Sigma, \mathcal{E}_{(\eta,[z])}\right)$. Por outro lado, podemos usar dualidade de Serre para identificar $\mathbb{H}^2\left(\Sigma, \mathcal{E}_{(\eta,[z])}\right)$ com o dual de $\mathbb{H}^0\left(\Sigma, \mathcal{E}^*_{(\eta,[z])} \otimes K_\Sigma\right)$, que se identifica por sua vez com o núcleo de

$$\mathcal{E}(\eta)^* \otimes K_\Sigma \otimes K_\Sigma^* = \mathcal{E}(\eta)^* \overset{1\otimes\sigma^*}{\longrightarrow} \mathcal{E}(\eta)^* \otimes K_\Sigma$$

cuja única seção global é a seção nula. Desse modo

$$J_\Sigma^\vee \times \mathbb{C}P^g \longrightarrow \mathbb{H}^1\left(\Sigma, \mathcal{E}_{(-)}\right)$$

é de fato uma *extensão holomorfa* de $\widehat{E}$ a $J_\Sigma^\vee \times \mathbb{C}P^g$.

Observação 93. *O posto do fibrado transformado $\widehat{E}$ se calcula usando a seqüência exata*

$$0 \longrightarrow H^0(\Sigma; E) \longrightarrow H^0(\Sigma; E \otimes K_\Sigma) \longrightarrow \mathbb{H}^1(\Sigma; \mathcal{E}) \longrightarrow H^1(\Sigma; E) \longrightarrow H^1(\Sigma; E \otimes K_\Sigma) \longrightarrow 0$$

que mostra que

$$\dim(\mathbb{H}^1(\Sigma; \mathcal{E})) = \chi(E \otimes K_\Sigma) - \chi(E) = 2(g-1)\,\mathrm{rk}(E)$$

por Riemann-Roch-Hirzebruch.

Observação 94. *Em virtude da dependência holomorfa de Ab_p em p, construímos uma Transformada Universal $\mathcal{E} \longrightarrow \Sigma \times J^\vee \times \mathbb{C}P^g$, que em cada $\{p\} \times J^\vee \times \mathbb{C}P^g$ restringe à transformada com ponto p fixado.*

Uma propriedade analítica possivelmente muito relevante para a construção de uma transformada inversa é a de não ter fatores planos. Recordamos que um fibrado com conexão se diz *sem fatores planos* (WFF) se dele ão é possível cindir um fibrado de linha plano. Essa propriedade é satisfeita não apenas pela nossa transformada $\left(\widehat{E}, \widehat{\bigtriangledown}\right)$ como também por cada $\left(\widehat{E}_\sigma, \widehat{\bigtriangledown}_\sigma\right)$ induzido da inclusão $J^\vee \times \{\sigma\} \hookrightarrow J^\vee \times H^0(K_\Sigma)$, como mostramos no seguinte:

Teorema 95. $\left(\widehat{E}, \widehat{\bigtriangledown}\right) \longrightarrow J^\vee \times H^0(K_\Sigma)$ *é WFF, assim como todo fibrado induzido de* $\left(\widehat{E}, \widehat{\bigtriangledown}\right)$ *pela inclusão*

$$J^\vee \times \{\sigma\} \hookrightarrow J^\vee \times H^0(K_\Sigma)$$

Demonstração. Observemos que se $\psi \in \Gamma_{J^\vee \times H^0(K_\Sigma)}(\widehat{\mathcal{E}})$ é uma seção plana, a identidade

$$\underline{d}\psi = \mathcal{D}G\mathcal{D}^*\underline{d}\psi$$

vale em $J^\vee \times H^0(K_\Sigma)$. Portanto, se decompomos ψ na soma de suas componentes $(1,0)$- e $(0,1)$, $\psi = \psi_1 + \psi_2$, obtemos

$$\begin{aligned}
\|\underline{d}\psi\|^2 &= \|\underline{d}\psi_1\|^2 + \|\underline{d}\psi_2\|^2 + \langle\langle \underline{d}\psi_1, \underline{d}\psi_2\rangle\rangle + \langle\langle \underline{d}\psi_2, \underline{d}\psi_1\rangle\rangle \\
&= \|\underline{d}\psi_1\|^2 + \|\underline{d}\psi_2\|^2 \\
&= \langle\langle \mathcal{D}^*\underline{d}\psi_1, G\mathcal{D}^*\underline{d}\psi_1\rangle\rangle + \langle\langle \mathcal{D}^*\underline{d}\psi_2, G\mathcal{D}^*\underline{d}\psi_2\rangle\rangle \\
&= \langle\langle [\mathcal{D}^*, \underline{d}]\,\psi_1, G\,[\mathcal{D}^*, \underline{d}]\,\psi_1\rangle\rangle + \langle\langle [\mathcal{D}^*, \underline{d}]\,\psi_2, G\,[\mathcal{D}^*, \underline{d}]\,\psi_2\rangle\rangle \\
&= \langle\langle [\mathcal{D}^*, \underline{d}]\,\psi_1, G\,[\mathcal{D}^*, \underline{d}]\,\psi_1\rangle\rangle + \langle\langle [\mathcal{D}^*, \underline{d}]\,\psi_2, G\,[\mathcal{D}^*, \underline{d}]\,\psi_2\rangle\rangle \\
&= \langle\langle \Theta \cdot \psi_1, G\Theta \cdot \psi_1\rangle\rangle + \langle\langle \Theta \cdot \underline{d}\psi_2, G\Theta \cdot \psi_2\rangle\rangle \\
&= \left\langle\left\langle \Theta^2 \cdot \psi_1, G\psi_1\right\rangle\right\rangle + \left\langle\left\langle \Theta^2 \cdot \underline{d}\psi_2, G\psi_2\right\rangle\right\rangle
\end{aligned}$$

But Θ^2 is the pullback of the form

$$-\Xi \wedge \Omega_{\mathcal{P}} + \frac{1}{4}\Omega_{\mathcal{P}} \wedge \Omega_{\mathcal{P}}$$

No entanto, $\Xi \wedge \Omega_{\mathcal{P}}$ é uma 3-forma que tem tipo 1 in J; logo a multiplicação de Clifford por uma forma de dimensão ímpar em Σ pelo pullback de $\Xi \wedge \Omega_{\mathcal{P}}$ para $\Sigma \times J^\vee$ fornece uma forma par em Σ; como o operador de Green G preserva tipo e formas ímpares são ortogonais a formas pares, segue que

$$\left\langle\left\langle \Theta^2 \cdot \psi_j, G\psi_j\right\rangle\right\rangle = \left\langle\left\langle (\mathsf{Ab}_p \times \mathbf{1}_{J^\vee})^* \, W_1 \cdot \psi_j, G\psi_j\right\rangle\right\rangle$$

Mas $(\mathsf{Ab}_p \times \mathbf{1}_{J^\vee})^* \, W_1 \cdot$ leva $(1,0)$-formas em $(0,1)$-formas e reciprocamente; concluímos então que $\|\underline{d}\psi\| = 0$. Isso significa que ψ é constante em $J^\vee \times H^0(K_\Sigma)$ vista como aplicação

$$\psi : J^\vee \times H^0(K_\Sigma) \longrightarrow L^2_p\left(E \otimes \left(\Lambda^{1,0}_\Sigma \oplus \Lambda^{1,0}_\Sigma\right) \otimes \underline{\mathbb{C}}\right)$$

Agora se escrevermos

$$\mathcal{D}^*_{(\eta,\sigma)}(\psi) - \mathcal{D}^*_{(0,0)}(\psi) = \left(\mathsf{Ab}_p \times \mathbf{1}_{J^\vee \times H^0(K_\Sigma)}\right)^* (\overline{\sigma} - \sigma - 2\pi i \eta) \cdot \psi$$

como fizemos antes, percebemos que $\psi = 0$ já que

$$\mathcal{D}^*_{(\eta,\sigma)}(\psi) = 0 \quad \text{para todo } (\eta,\sigma)$$

pois se supõe que ψ seja uma seção do fibrado transformado. Quanto aos fibrados induzidos $\widehat{E}_\sigma \longrightarrow J^\vee$, atentamos ao fato de que eles são descritos pelo núcleo da família

$$J^\vee \ni \eta \longmapsto \mathcal{D}^*_{(\eta,\sigma)}$$

Supondo que ψ_σ seja uma seção plana de $\widehat{E}_\sigma$, o mesmo argumento empregado acima mostra que

$$\psi_\sigma : J^\vee \longrightarrow L^2_p\left(E \otimes \left(\Lambda^{1,0}_\Sigma \oplus \Lambda^{1,0}_\Sigma\right) \otimes \underline{\mathbb{C}}\right)$$

é constante em $J^\vee$, e a identidade

$$\mathcal{D}^*_{(\eta,\sigma)}(\psi_\sigma) - \mathcal{D}^*_{(0,\sigma)}(\psi_\sigma) = (\mathsf{Ab}_p \times \mathbf{1}_{J^\vee})^*(-2\pi i\eta) \cdot \psi_\sigma$$

novamente implica $\psi_\sigma = 0$. ■

Desejamos mostrar por fim a

Proposição 96. *Se $\theta = 0$, a transformada de Nahm de E é induzida de um fibrado holomorfo em $J^\vee$.*

Demonstração. Suponhamos que (E,θ) seja um fibrado de Higgs estável sem inclinação e com $\theta = 0$. Então nossa transformada $\widehat{E} \longrightarrow J^\vee \times H^0(K_\Sigma)$ se obtém por

$$T^*J^\vee \ni (\eta,\sigma) \longmapsto \ker\left(\mathcal{D}_{(\eta,\sigma)}\right)$$
$$\mathcal{D}_{(\eta,\sigma)} = \overline{\partial_\eta} - \overline{\partial_\eta}^* + 1 \otimes \varphi_\sigma$$

onde φ_σ denota a 1-forma $\sigma - \sigma^*$. Dado número $t \in I = [0,1]$, consideremos o operador

$$T_{(\eta,\sigma,t)} : L^2_1(E \otimes S) \longrightarrow L^2_1(E \otimes S)$$
$$T_{(\eta,\sigma,t)} = \mathcal{D}_{(\eta,t\sigma)}$$

Pelo que foi demonstrado antes, $T_{(\eta,\sigma,t)}$ é Fredholm *injetor* para cada $(\eta,\sigma,t) \in J^\vee \times H^0(K_\Sigma) \times I$, de mesmo índice que $\mathcal{D}_{(\eta,\sigma)}$. Temos então fibrado

$$\widehat{E_I} \longrightarrow J^\vee \times H^0(K_\Sigma) \times I$$

determinado por $\ker T_{(\eta,\sigma,t)}$. Claramente, $\widehat{E_I}$ provê isomorfismo de fibrados com conexão entre

$$\widehat{E}_0 \longrightarrow J^\vee \times H^0(K_\Sigma) \times \{0\}$$

e

$$\widehat{E}_1 \longrightarrow J^\vee \times H^0(K_\Sigma) \times \{1\}$$

munidos das conexões induzidas . Observemos que $\widehat{E}_1$ coincide com nossa transformada $\widehat{E}$, enquanto $\widehat{E}_0$ se obtém por

$$\left(\widehat{E_0}\right)_{(\eta,\sigma)} = \ker\left(\mathcal{D}_{(\eta,0)}\right)$$

e portanto coincide com o pullback pela projeção

$$J^\vee \times H^0(K_\Sigma) \longrightarrow J^\vee$$

do fibrado

$$J^\vee \ni \eta \longmapsto \ker\left(\overline{\partial_\eta} - \overline{\partial_\eta}^*\right)$$

Isso conclui a demonstração. ■

Concluímos com a seguinte conjectura, sugerida pelos resultados de [24]-[27] e [10, Ch. 3] :

Conjectura 97. *Se o campo de Higgs θ é trivial, a transformada de Fourier-Mukai de $\left(\widehat{E}, \widehat{\bigtriangledown}\right)$ (no sentido de Donaldson) restringe a E sobre Σ. Em particular todo fibrado estável de grau nulo sobre uma superfície de Riemann estende holomorficamente a sua Jacobiana.*

Bibliografia

[1] M. Atiyah & F. Hirzebruch, *Analytic cycles on complex manifolds*, Topology I (1962), 25-47

[2] M. Atiyah & I. MacDonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison Wesley (1969)

[3] A. Anani'n, *Notas de aula de Álgebra Homológica*

[4] A. Anani'n, *Notas de aula de Álgebra Comutativa*

[5] E. Artin, *Geometric Algebra*, Wiley Interscience (1957)

[6] O. Biquard, M. Jardim, *Asymptotic behaviour and the moduli space of doubly-periodic instantons*, J. Eur. Math. Soc. **3** (2001), 335–375.

[7] J. Bonsdorff, *A Fourier transformation for Higgs bundles* Journal für reine und angewandte Mathematik **591** (2006), 21–48.

[8] P. B. Braam, P. van Baal, *Nahm's transformation for instantons*, Communications in Mathematical Physics **122** (1989) 267–280.

[9] K. Corlette, *Flat G-bundles with canonical metrics*, Journal of Differential Geometry 28 (1988), 361-382

[10] S. K. Donaldson, P. B. Kronheimer, *The geometry of four-manifolds*. Claredon Press, Oxford, 1990.

[11] D. Freed & K. Uhlenbeck, *Instantons and four-manifolds*, M.S.R.I. Publications Vol. 1, Springer (1984)

[12] O. García-Prada, *The geometry of the vortex equation*, PhD thesis, Oxford (1991).

[13] O. García-Prada, D. Hernández Ruipérez, F. Pioli, C. Tejero Prieto, Fourier-Mukai and Nahm transforms for holomorphic triples on elliptic curves. Journal of Geometry and Physics **55** (2005), 353–384.

[14] P. Griffiths and P. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, 1994.

[15] R. Godement, *Théorie des Faisceaux*, Hermann (1958)

[16] R. Hamilton, *The inverse function theorem of Nash and Moser*, Bulletin of the American Mathematical Society **7** (1982), 65-222

[17] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer (1977)

[18] T. Hausel, *Vanishing of intersection numbers on the moduli space of Higgs bundles* Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998), 1011-1040.

[19] P. Higgs, *Broken Symmetries and the masses of gauge bosons*, Physical Review Letters 13, No. **16** (1964), 508-509

[20] F. Hirzebruch, *Topological Methods in Algebraic Geometry*, Springer (1966)

[21] N. Hitchin, *The self-duality equations on a Riemann surface* Proceedings of the London Mathematical Society **55** (1987), 59–126.

[22] N. Hitchin, *The Dirac operator* In: *Invitations to geometry and topology*, 208–232. Oxford Univ. Press, Oxford, 2002.

[23] D. Husemoller, *Fibre Bundles*, Spinger (1966)

[24] M. Jardim, *Nahm transform of doubly-periodic instantons*, PhD Thesis, University of Oxford (math.DG/9912028)

[25] M. Jardim, *Construction of doubly-periodic instantons*, Communications in Mathematical Physics **216** (2001) 1, 1-15

[26] M. Jardim, *Nahm transform and spectral curves for doubly-periodic instantons*, Communications in Mathematical Physics **225** (2002) 3, 639-668

[27] M. Jardim, *A survey on Nahm transform*, Journal of Geometry and Physics **52** (2004) 3, 313-327

[28] M. Karoubi, *K-Theory*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaft, Springer (1970)

[29] S. Kobayashi & S. Nomizu, *Foundations of differential geometry I & II* (1963, 1969), John Wiley

[30] N. Kuiper, *The homotopy type of the unitary group of Hilbert space*, Topology 3 (1965), 19-30

[31] S. Lang, *Algebra*, Addison Wesley (1965)

[32] H. Lawson & M.-L. Michelson. *Spin Geometry*, Pinceton (1989)

[33] J. Milnor, *Construction of Universal Bundles II*, Annals of Mathematics, Vol. **63**, No. 3 (May, 1956), 430-436

[34] J. Milnor & J. Stasheff, *Characteristic Classes*, Annals of Mathematics Studies 76 (1974), Princeton

[35] S. Mukai, *Duality between* $D(X)$ *and* $D(\hat{X})$ *with applications to Picard sheaves*, Nagoya Mathematical Journal 81 (1981), 153-175

[36] C. Nash, *Differential Topology and Quantum Field Theory*, Academic Press (1991)

[37] L. Nicolaescu, *Notes on Seiberg-Witten Theory*, AMS GTM 28 (2000)

[38] A. Newlander & L. Nirenberg, *Complex Analytic Coordinates on Almost Complex Manifolds*, Ann. of Math. 65 No. 3 (1957), 391-404

[39] M. Narasimhan & C. Seshadri, *Stable and unitary bundles on a compact Riemann surface*, Annals of Mathematics 82 (1965), 540-564

[40] R. Palais, *Foundations of Global Non-Linear Analysis*, Benjamin (1968)

[41] R. Sharpe, *Differential Geometry: Cartan's Generalization of Klein's Erlangen Program*, Springer (1997)

[42] J.-P. Serre, *Géométrie algébrique et géométrie analytique*, Annales de l'Institut Fourier 6 (1956), 1-42

[43] J.-P. Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann (1978)

[44] J.-P. Serre, *Sur la cohomologie des variétés algébriques*, Journal des Mathematiques Pures et Apliquées (1957), 1-16

[45] C. Simpson, *Higgs Bundles and Local Systems*, Publications Mathématiques 75, Institut des Hautes Études Scientifiques 1 (1992), 5-95

[46] N. Steenrod, *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton (1951)

[47] N. Steenrod, *A convenient category of topological spaces*, Michigan Mathematical Journal 14 (1967), 133-152

[48] C. Tejero Prieto, *Fourier-Mukai transform and adiabatic curvature of spectral bundles for Landau Hamiltonians on Riemann surfaces*, Communications in Mathematical Physics 265 (2006), 373-396

[49] K. Uhlenbeck & S. Yau, *On the existence of Hermitian-Yang-Mills connections in stable vector bundles*, Comunications in Pure and Applied Mathematics 39-S (1986), 257-293

[50] M. Verbitsky, *Cohomology of compact hyperkaehler manifolds and its applications*, GAFA vol. 6 no. 4 pp. 601–612 (1996)

[51] M. Verbitsky, *Cohomology of compact hyperkaehler manifolds*, arXiv:alg-geom/9501001

[52] A. Weil, *Introduction à l'étude des variétes kähleriennes*, Hermann (1952)

[53] G. Whitehead, *Elements of Homotopy Theory*, Spinger GTM 61 (1978)

Índice