Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica
Departamento de Matemática

Funções holomorfas fracamente contínuas em espaços de Banach

Sonia Sarita Berrios Yana
Doutorado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. Jorge Tulio Mujica Ascui

Março 2007

Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES e BIG-UNICAMP.

Funções holomorfas fracamente contínuas em espaços de Banach

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Sonia Sarita Berrios Yana** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 14 de março de 2007.

Prof. Dr. **Jorge Tulio Mujica Ascui**.
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Jorge Tulio Mujica Ascui.

Prof. Dr. Mário Carvalho de Matos.

Profa. Dra. Daniela Mariz Silva Vieira.

Profa. Dra. Luiza Amália de Moraes.

Prof. Dr. Humberto Daniel Carrión Villaroel.

Tese apresentada ao Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, **IMECC**, como requisito parcial para obtenção do título de **Doutora em Matemática**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues – CRB8a / 2116

Berrios Yana, Sonia Sarita
B459f Funções holomorfas fracamente contínuas em espaços de Banach / Sonia Sarita Berrios Yana -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2007.

Orientador : Jorge Tulio Mujica Ascui
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Funções holomorfas. 2. Banach, Espaços de. 3. Polinômios. I. Mujica Ascui, Jorge Tulio. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Weakly continuous holomorphic functions on Banach spaces.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Holomorphic functions. 2. Banach spaces. 3. Polynomials.

Área de concentração: Matemática - Análise

Titulação: Doutora em Matemática

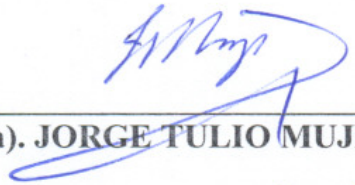
Banca examinadora: Prof. Dr. Jorge Tulio Mujica Ascui (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Mário Carvalho de Matos (IMECC-UNICAMP)
Profa. Dra. Daniela Mariz Silva Vieira (IMECC-UNICAMP)
Profa. Dra. Luiza Amália de Moraes (UFRJ)
Prof. Dr. Humberto Daniel Carrión Villaroel (USP-SP)

Data da defesa: 09/03/2007

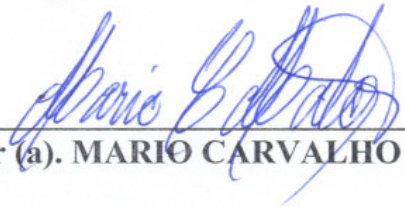
Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática

Tese de Doutorado defendida em 09 de março de 2007 e aprovada

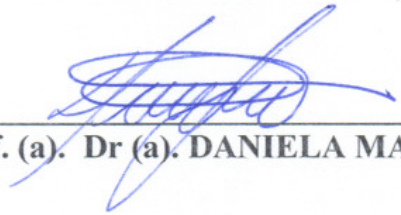
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof. (a). Dr (a). JORGE TULIO MUJICA ASCUI



Prof. (a). Dr (a). MARIO CARVALHO DE MATOS



Prof. (a). Dr (a). DANIELA MARIZ SILVA VIEIRA

Prof. (a). Dr (a). LUIZA AMÁLIA DE MORAES

Prof. (a) Dr. (a) HUMBERTO DANIEL CARRION VILLAROEL

Dedico este trabalho com muito carinho:
A Hernán e a minhas filhas Lesly e Eymi
Ao meu pai Fausto e a minha mãe Vicentina

Agradecimentos

- A Deus por cuidar de mim.
- Ao meu orientador professor **Dr. Jorge Tulio Mujica Ascui** pela orientação excelente. Pela paciência e compreensão durante a preparação desta tese.
- Aos professores Manuel Valdivia e Pilar Rueda pelas sugestões.
- A Daniela Vieira, a Paula Takasuka e a Po Ling pela amizade e apoio.
- Ao professor Walter Torres Montes.
- A dona Cidinha, Tania e Ednaldo pela ajuda constante na questão burocrática.
- Ao meu pai Fausto Berrios Pacori e a minha mãe Vicentina Yana Zapata pelo apoio permanente em todo momento da minha vida.
- A Paty pela ajuda e amizade.
- A minha familia.
- À CAPES e à BIG-UNICAMP pelo apoio financeiro indispensável.
- E muito especialmente a Hernán por ter sido imprescindível em cada etapa deste trabalho.

Resumo

Sejam E e F espaços de Banach complexos, e seja U um aberto em E. Neste trabalho estudamos os subespaços $\mathcal{H}_{wu}(U;F)$, $\mathcal{H}_{w}(U;F)$, $\mathcal{H}_{wsc}(U;F)$ e $\mathcal{H}_{wC}(U;F)$ de $\mathcal{H}(U;F)$. Mais especificamente, se U é aberto equilibrado caracterizamos funções destes subespaços em termos de condições de equicontinuidade dos polinômios da série de Taylor. Estudamos sob que condições estes subespaços coincidem, estendendo assim os resultados dados em Aron, Herves e Valdivia [2] ao caso de abertos equilibrados.

Se E tem uma base contrátil e incondicional, e U é uma bola aberta em E mostramos que cada função holomorfa $f : U \longrightarrow F$ que é limitada nos conjuntos fracamente compactos U-limitados é limitada nos conjuntos U-limitados. Consequentemente, $\mathcal{H}_{w}(U;F) = \mathcal{H}_{wu}(U;F)$.

Abstract

Let E and F be complex Banach spaces, and let U be an open set in E. In this work we study the subspaces $\mathcal{H}_{wu}(U;F)$, $\mathcal{H}_{w}(U;F)$, $\mathcal{H}_{wsc}(U;F)$ and $\mathcal{H}_{wC}(U;F)$ of $\mathcal{H}(U;F)$. More specifically, if U is a balanced open set we characterize functions of these subespaces in terms of equicontinuity conditions of the polynomials in the Taylor series. We study under which conditions these subspaces coincide, and then we extend the results given in Aron, Herves and Valdivia [2] to the case of balanced open sets.

If E has a shrinking and unconditional basis, and U is an open ball in E we show that each holomorphic function $f : U \longrightarrow F$ that is bounded on weakly compact U-bounded sets is bounded on U-bounded sets. Consequently, $\mathcal{H}_{w}(U;F) = \mathcal{H}_{wu}(U;F)$.

Conteúdo

Lista de Símbolos **2**

Introdução **4**

1 Preliminares **6**

1.1 Funções holomorfas num aberto 6

1.2 Resultados sobre polinômios e funções holomorfas 9

1.3 Bases contráteis e incondicionais 12

2 Funções holomorfas fracamente contínuas **14**

2.1 Funções holomorfas e equicontinuidade 14

2.2 Funções holomorfas fracamente contínuas em espaços não contendo uma cópia de ℓ_1 18

3 Funções holomorfas em espaços de Banach com uma base contrátil e incondicional **24**

3.1 Modificações de polinômios 24

3.2 A igualdade $\mathcal{H}_{bk}(U;F) = \mathcal{H}_b(U;F)$ 25

Referências Bibliográficas **46**

Lista de Símbolos

- $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais,
- $\mathbb{C}$ o corpo dos números complexos,
- E, F espaços de Banach complexos,
- B_E a bola aberta de centro 0 e raio 1 em E,
- U um aberto de E,
- $\mathcal{H}(U;F)$ o espaço das aplicações holomorfas de U em F,
- $\mathcal{H}_{wu}(U;F)$ o subespaço das $f \in \mathcal{H}(U;F)$ que são fracamente uniformemente contínuas nos U-limitados,
- $\mathcal{H}_{w}(U;F)$ o subespaço das $f \in \mathcal{H}(U;F)$ que são fracamente contínuas nos U-limitados,
- $\mathcal{H}_{wsc}(U;F)$ o subespaço das $f \in \mathcal{H}(U;F)$ que levam seqüências fracamente convergentes U-limitadas em seqüências convergentes em F,
- $\mathcal{H}_{wC}(U;F)$ o subespaço das $f \in \mathcal{H}(U;F)$ que levam seqüências fracamente Cauchy U-limitadas em seqüências de Cauchy em F,
- $\mathcal{H}_{b}(U;F)$ o subespaço das $f \in \mathcal{H}(U;F)$ que são limitadas nos U-limitados,
- $\mathcal{H}_{bk}(U;F)$ o subespaço das $f \in \mathcal{H}(U;F)$ que são limitadas nos conjuntos fracamente compactos U-limitados,

- $\mathcal{P}(^nE;F)$ o espaço dos polinômios n-homogêneos de E em F,
- $\mathcal{P}_{wu}(^nE;F)$ o subespaço dos $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$ que são fracamente uniformemente contínuos nos limitados,
- $\mathcal{P}_{w}(^nE;F)$ o subespaço dos $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$ que são fracamente contínuos nos limitados,
- $\mathcal{P}_{wsc}(^nE;F)$ o subespaço dos $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$ que são fracamente sequencialmente contínuos,
- $\mathcal{P}_{wC}(^nE;F)$ o subespaço dos $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$ que levam seqüências fracamente Cauchy em seqüências de Cauchy em F,
- $\mathcal{C}_{wsc}(E;F)$ o espaço das aplicações contínuas de E em F que são fracamente sequencialmente contínuas,
- $\mathcal{C}_{w}(E;F)$ o espaço das aplicações contínuas de E em F que levam seqüências fracamente Cauchy em seqüências de Cauchy em F,
- $eq(B)$ a envoltória equilibrada de um subconjunto $B \subset E$,
- $P^nf(0)$ o n-ésimo polinômio homogêneo da série de Taylor de $f \in \mathcal{H}(U;F)$ em torno da origem,
- w ou $\sigma(E,E')$ a topologia fraca de E,
- E_w o espaço de Banach E munido com a topologia fraca, i.e., $(E,\sigma(E,E'))$,
- Λ a constante básica,
- q^n, q_n as projeções canônicas,
- A a aplicação n-linear simétrica associada a $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$,
- cl_wA ou $\overline{A}^w$ a aderência fraca de um subconjunto $A \subset E$,
- $P^{m_1,m_2,\ldots,m_j}_{k_1,k_2,\ldots,k_{j+1}}$ a modificação de um polinômio $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$.

Introdução

Sejam E e F espaços de Banach complexos, seja U um subconjunto aberto de E, e seja $\mathcal{H}(U;F)$ o espaço de todas as funções holomorfas $f : U \longrightarrow F$. Seja $\mathcal{H}_w(U;F)$ (resp. $\mathcal{H}_{wu}(U;F)$) o subespaço de todas as $f \in \mathcal{H}(U;F)$ que são fracamente contínuas (resp. fracamente uniformemente contínuas) nos conjuntos U- limitados.

A inclusão $\mathcal{H}_{wu}(U;F) \subset \mathcal{H}_w(U;F)$ é sempre verdadeira, e a questão de se a igualdade se cumpre foi proposta por Aron, Hervés e Valdivia [2] em 1983, e continua aberta. Claramente $\mathcal{H}_{wu}(E;F) = \mathcal{H}_w(E;F)$ se E é reflexivo, e Dineen [11] provou que $\mathcal{H}_{wu}(c_0;F) = \mathcal{H}_w(c_0;F)$.

Em 2002 Carrión [8] afirmou que $\mathcal{H}_{wu}(E;F) = \mathcal{H}_w(E;F)$ se E tem uma base contrátil. Desafortunadamente Manuel Valdivia encontrou recentemente uma falha na prova do resultado principal de Carrión, e não está claro se a prova de Carrión poderá ser consertada.

Nesta tese mostramos que $\mathcal{H}_{wu}(U;F) = \mathcal{H}_w(U;F)$ se U é uma bola aberta em um espaço de Banach E com uma base contrátil e incondicional. No caso onde $U = E$, este resultado já tinha sido obtido por Carrión [7].

A seguir explicamos com mais detalhe o que é apresentado em cada capítulo deste texto.

O trabalho se divide em tres capítulos. A seguir descreveremos os assuntos

No capítulo 1, introduzimos os subespaços $\mathcal{H}_{wu}(U;F)$, $\mathcal{H}_w(U;F)$, $\mathcal{H}_{wsc}(U;F)$, $\mathcal{H}_{wC}(U;F)$, $\mathcal{H}_b(U;F)$ e $\mathcal{H}_{bk}(U;F)$ de $\mathcal{H}(U;F)$ e apresentamos algumas propriedades desses subespaços. Neste capítulo reunimos também alguns resultados sobre polinômios e funções holomorfas que serão usados posteriormente.

No capítulo 2, seguimos estudando os subespaços introduzidos no capítulo 1. Mais especificamente, caracterizamos as funções que pertencem a estes subespaços em termos dos polinômios da sua série de Taylor. Finalmente, estendemos os resultados sobre funções inteiras de Aron, Hervés e Valdivia [2] ao caso de funções definidas em abertos equilibrados.

No capítulo 3, definimos a noção de modificação de um polinômio, que será muito importante para este trabalho. Na Nota 3.2.3 damos uma breve explicação da falha existente na prova do

resultado principal de Carrión [8]. A maior parte deste capítulo é dedicada a mostrar o seguinte resultado: se E tem uma base contrátil e incondicional, e U é uma bola aberta em E então $\mathcal{H}_{bk}(U;F) = \mathcal{H}_b(U;F)$. Em consequencia, $\mathcal{H}_w(U;F) = \mathcal{H}_{wu}(U;F)$.

Campinas, março de 2007
Sonia Sarita Berrios Yana

Capítulo 1

Preliminares

Nesta tese todos os espaços de Banach são complexos e não triviais, ou seja, distintos de $\{0\}$. B_E denota a bola aberta de centro na origem e raio 1. $\mathbb{N}$ e $\mathbb{C}$ denotam o conjunto dos números naturais e dos números complexos, respectivamente.

1.1 Funções holomorfas num aberto

Sejam E e F espaços de Banach e $U \subset E$ aberto. Um subconjunto A de E é *U-limitado* se $A \subset U$ é limitado em E e existe $r > 0$ tal que $A + rB_E \subset U$. Uma seqüência $(x_k)_k$ em E é U-limitada se $(x_k)_k$ é limitada e existe $r > 0$ tal que $\{x_k : k \in \mathbb{N}\} + rB_E \subset U$.

Um exemplo de uma seqüência fracamente convergente que não é U-limitada foi sugerida por Mário Matos, como segue:

Exemplo 1.1.1 Considere B_E a bola unitária em ℓ_p, $1 < p < \infty$ ou em c_0. Se e_j denota a seqüência $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, com 1 na j-ésima posição, a seqüência $((1 - 1/j)e_j)_{j=1}^{\infty}$ converge fracamente a 0. Mas, esta seqüência não é B_E-limitada, já que $\|((1 - 1/j)e_j)\| = 1 - 1/j$ tende a 1.

Este mesmo exemplo dá um exemplo de um conjunto fracamente compacto que não é U-limitado.

Denotaremos por $\mathcal{H}(U; F)$ o espaço das aplicações holomorfas de U em F. Se $F = \mathbb{C}$ então escreveremos $\mathcal{H}(U)$ no lugar de $\mathcal{H}(U, \mathbb{C})$.

Denotaremos por:

1. $\mathcal{H}_w(U; F)$ o subespaço das $f \in \mathcal{H}(U; F)$ que são fracamente contínuas nos U-limitados.

2. $\mathcal{H}_{wu}(U; F)$ o subespaço das $f \in \mathcal{H}(U; F)$ que são fracamente uniformemente contínuas nos U-limitados.

3. $\mathcal{H}_{wsc}(U;F)$ o subespaço das $f \in \mathcal{H}(U;F)$ tais que: se (x_k) é uma seqüência U-limitada que converge fracamente a $x \in U$ então $(f(x_k))$ converge a $f(x)$.

4. $\mathcal{H}_{wC}(U;F)$ o subespaço das $f \in \mathcal{H}(U;F)$ tais que: se (x_k) é uma seqüência fracamente Cauchy U-limitada então $(f(x_k))$ converge em F.

Observe que se $U = E$ então U-limitado significa limitado. Denotaremos por $\mathcal{P}(^nE;F)$ o espaço de polinômios n-homogêneos contínuos de E em F. Por definição, $\mathcal{P}_\theta(^nE;F) = \mathcal{H}_\theta(E;F) \cap \mathcal{P}(^nE;F)$ para $\theta = w, wu, wC, wsc$. Ver Dineen [10],[12] ou Mujica [18] para maiores informações sobre funções holomorfas em espaços de dimensão infinita.

A seguinte proposição dá uma relação entre os subespaços de $\mathcal{H}(U;F)$ definidos acima. Posteriormente, no Capítulo 2 estudaremos sob que condições estas inclusões chegam a ser igualdades.

Proposição 1.1.2 *Para quaisquer espaços de Banach complexos E e F e $U \subset E$ aberto, tem-se as seguintes inclusões:*

(a) $\mathcal{H}_{wu}(U;F) \subset \mathcal{H}_w(U;F) \subset \mathcal{H}_{wsc}(U;F) \subset \mathcal{H}(U;F)$

(b) $\mathcal{H}_{wu}(U;F) \subset \mathcal{H}_{wC}(U;F) \subset \mathcal{H}_{wsc}(U;F)$

Demonstração. **(a)** É claro.

(b) Provemos a primeira inclusão . Seja $f \in \mathcal{H}_{wu}(U;F)$ e sejam $(x_k) \subset U$ fracamente Cauchy U-limitada e $\epsilon > 0$. Note que $B = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ é U-limitado. Logo existe V vizinhança fraca de 0 tal que se $x, y \in B$ satisfaz $x - y \in V$ então

$$\|f(x) - f(y)\| < \epsilon.$$

Observe que para algum M, $x_k - x_j \in V$ para cada $k, j \geq M$, pois (x_k) é fracamente Cauchy. Logo $\|f(x_k) - f(x_j)\| < \epsilon$ para cada $k, j \geq M$. Isto é , $f \in \mathcal{H}_{wC}(U;F)$.

Para a outra inclusão, suponha existe $f \in \mathcal{H}_{wC}(U;F) \backslash \mathcal{H}_{wsc}(U;F)$. Logo existe $(x_k) \subset U$ seqüência U-limitada tal que $x_k \longrightarrow x \in U$ fracamente e para algum $\epsilon > 0$,

$$\|f(x_k) - f(x)\| \geq \epsilon$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Considere a seqüência (y_j) definida por

$$y_{2k} = x_k \qquad \text{e} \qquad y_{2k+1} = x$$

A seqüência $(y_j) \subset U$ é uma seqüência fracamente Cauchy U-limitada. Como $f \in \mathcal{H}_{wC}(U;F)$, $(f(y_j))$ converge em F. Como toda subseqüência de uma seqüência convergente converge para

o mesmo limite e $(f(y_{2k+1}))$ converge para $f(x)$, é claro que $(f(y_{2k}))$ converge para $f(x)$. Logo $(f(x_k))$ converge para $f(x)$, uma contradição. Portanto, $\mathcal{H}_{wC}(U;F) \subset \mathcal{H}_{wsc}(U;F)$.

□

Dizemos que um subconjunto $B \subset E$ de um espaço de Banach é *equilibrado* se $\lambda x \in B$ para todo $x \in B$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, com $|\lambda| \leq 1$. Denotaremos por $eq(B)$ a interseção de todos os subconjuntos equilibrados de E que contém B. Diremos que $eq(B)$ é a *envoltória equilibrada* de B.

As seguintes proposições dão algumas propriedades dos conjuntos U-limitados, que serão usadas freqüentemente em todo o trabalho.

Proposição 1.1.3 *[6] Se $U \subset E$ é um aberto arbitrário e B é U-limitado temos:*

(a) Existe $r > 1$ tal que rB é U-limitado.

(b) Se U é aberto equilibrado, então $eq(B)$ é U-limitado.

Proposição 1.1.4 *Sejam B limitado em E e $U \subset E$ um aberto de E. Então para cada $a \in U$ existe $s > 0$ tal que $a + sB$ é U-limitado.*

Demonstração. Sejam B limitado em E e $a \in U$. Como U é aberto existe rB_E bola em E tal que $a + rB_E \subset U$. Como B é limitado existe $s > 0$ tal que $sB \subset \frac{r}{2}B_E$. Logo

$$a + sB + \frac{r}{2}B_E \subset a + \frac{r}{2}B_E + \frac{r}{2}B_E \subset a + rB_E \subset U.$$

Portanto $a + sB$ é U-limitado. □

Denotaremos por $\mathcal{H}_b(U;F)$ (resp. $\mathcal{H}_{bk}(U;F)$) o subespaço das $f \in \mathcal{H}(U;F)$ que são limitadas nos U-limitados (resp. nos conjuntos fracamente compactos U-limitados). A seguir apresentamos propriedades destes conjuntos que serão usadas no Capítulo 3.

Teorema 1.1.5 *Sejam E e F espaços de Banach, seja $U \subset E$ aberto equilibrado. Seja $P_n \in \mathcal{P}(^nE;F)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Então :*

(a) $f = \sum P_n \in \mathcal{H}(U;F)$ se e só se $\limsup \|P_n\|_K^{1/n} < 1$ para cada conjunto compacto $K \subset U$.

(b) $f = \sum P_n \in \mathcal{H}_b(U;F)$ se e só se $\limsup \|P_n\|_B^{1/n} < 1$ para cada conjunto U-limitado B.

(c) $f = \sum P_n \in \mathcal{H}_{bk}(U;F)$ se e só se $\limsup \|P_n\|_W^{1/n} < 1$ para cada conjunto fracamente compacto U-limitado W.

Demonstração. **(a)** ($\Longrightarrow$) Seja $f \in \mathcal{H}(U;F)$. Seja $K \subset U$ compacto. Considere $A = eq(K)$, seja $r > 1$ tal que $rA \subset U$. Como K é compacto, rA é compacto. Logo $f(rA)$ é compacto e portanto, f é limitada em rA.

Pela Desigualdade de Cauchy [18, Corolário 7.4],

$$\|P_n(t)\| \leq \frac{1}{r^n} \sup_{|\xi|=r} \|f(\xi t)\|$$

para cada $t \in K$. Seja s, $1 < s < r$. Logo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|P_n\|_{sK} = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \|P_n\|_K \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{s}{r}\right)^n \|f\|_{rA} = \frac{r}{r-s}\|f\|_{rA} < \infty$$

Portanto, $\sum_{n=0}^{\infty} \|P_n\|_{sK} < \infty$ para todo $s, 1 < s < r$. Observe que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^n \|P_n\|_K \leq \sum_{n=0}^{\infty} s^n \|P_n\|_K < \infty$$

para cada $0 < |\lambda| \leq s$. Logo $1 < r \leq R$ onde R é o raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \|P_n\|_K$. Pela Fórmula de Cauchy Hadamard, $\limsup \|P_n\|_K^{1/n} = \frac{1}{R} < 1$, que é o que queriamos.

($\Longleftarrow$) Suponha $\limsup \|P_n\|_K^{1/n} < 1$ para cada conjunto compacto $K \subset U$. Então

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^n \|P_n\|_K < \infty$$

para cada $0 < |\lambda| \leq r < R$ onde R é o raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \|P_n\|_K$, ou seja, $\frac{1}{R} = \limsup \|P_n\|_K^{1/n} < 1$.

Assim, a serie $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n P_n$ converge uniformemente sobre cada $K \subset U$ compacto a uma aplicação $f_\lambda \in \mathcal{H}(U;F)$ para cada $0 < |\lambda| \leq r < R$. Como $1 < R$, tome r tal que $1 \leq r < R$. Logo para $\lambda = 1$ temos o que queriamos.

Considere a mesma demostração de (a) para as partes (b) e (c), tendo em conta que $\mathcal{H}_b(U;F)$ (resp. $\mathcal{H}_{bk}(U;F)$) é completo para a topologia da convergência uniforme sobre os conjuntos U-limitados (resp. sobre os conjuntos fracamente compactos e U-limitados). □

1.2 Resultados sobre polinômios e funções holomorfas

Nesta seção reunimos vários resultados sobre polinômios e funções inteiras que serão usados posteriormente neste trabalho.

Teorema 1.2.1 *[2] Sejam E e F espaços de Banach e $n \in \mathbb{N}$. Então :*

1. $\mathcal{P}_w({}^nE;F) = \mathcal{P}_{wu}({}^nE;F)$

2. $\mathcal{P}_{wC}({}^nE;F) = \mathcal{P}_{wsc}({}^nE;F)$

Proposição 1.2.2 *[2] Sejam E e F espaços de Banach complexos e $n \in N$. Então $\mathcal{P}_{wsc}({}^nE;F)$ é o espaço dos $P \in \mathcal{P}({}^nE;F)$ que são fracamente contínuos nos subconjuntos fracamente compactos de E.*

Teorema 1.2.3 *[14] Sejam E e F espaços de Banach. São equivalentes:*

(a) E não contém cópia de ℓ_1.

(b) Para cada F e $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_{wsc}({}^nE;F) = \mathcal{P}_w({}^nE;F)$.

(c) Existe F tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_{wsc}({}^nE;F) = \mathcal{P}_w({}^nE;F)$.

(d) Para algum F e algum $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$, $\mathcal{P}_{wsc}({}^nE;F) = \mathcal{P}_w({}^nE;F)$.

(e) Para algum $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$, $\mathcal{P}_{wsc}({}^nE) = \mathcal{P}_w({}^nE)$.

Teorema 1.2.4 ***(Pelczynski)*** *[11, Proposition 2] Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}({}^nc_0) = \mathcal{P}_{wsc}({}^nc_0)$.*

Teorema 1.2.5 *[14] Sejam E e F espaços de Banach. São equivalentes:*

(a) E não contém cópia de ℓ_1.

(b) Para cada F, $\mathcal{C}_{wsc}(E;F) = \mathcal{C}_w(E;F)$.

(c) Para cada F, $\mathcal{H}_{wsc}(E;F) = \mathcal{H}_w(E;F)$.

(d) Existe F, $\mathcal{H}_{wsc}(E;F) = \mathcal{H}_w(E;F)$.

(e) $\mathcal{H}_{wsc}(E) = \mathcal{H}_w(E)$.

Teorema 1.2.6 *[17, Theorem 1] Seja E espaço de Banach. São equivalentes:*

(a) E não contém uma cópia de ℓ_1.

(b) $\mathcal{H}_{wC}(E;F) \subset \mathcal{H}_b(E;F)$, para cada espaço de Banach F.

(c) $\mathcal{H}_{wC}(E) \subset \mathcal{H}_b(E)$.

Proposição 1.2.7 *[2] Se $\mathcal{H}_w(\ell_1) = \mathcal{H}_{wu}(\ell_1)$ então $\mathcal{H}_w(E;F) = \mathcal{H}_{wu}(E;F)$, para cada E e F espaços de Banach.*

Proposição 1.2.8 *[6] Seja $U \subset E$ aberto equilibrado e seja $f \in \mathcal{H}(U;F)$. Então $f \in \mathcal{H}_{wu}(U;F)$ se e só se $f \in \mathcal{H}_b(U;F)$ e $P^n f(0) \in \mathcal{P}_{wu}({}^nE;F)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Um espaço topológico E é chamado **angelical** se cada subconjunto $A \subset E$ relativamente enumeravelmente compacto satisfaz:

(a) A é relativamente compacto.

(b) Para cada $x \in \overline{A}$ existe uma seqüência em A que converge a x.

Proposição 1.2.9 *[13, p. 39, (1)] Seja E um espaço de Banach, e seja $E_w = (E, \sigma(E,E'))$. Então E_w é angelical.*

A seguir apresentamos resultados variados que serão usados posteriormente.

Proposição 1.2.10 *[13, p. 38] Se E é um espaço localmente convexo metrizável, e $A \subset E$, então para cada $x \in \overline{A}^w$ existe $D \subset A$ enumerável com $x \in \overline{D}^w$.*

Proposição 1.2.11 *[19] Seja E espaço de Banach separável. São equivalentes:*

(a) E não contém cópia de ℓ_1.

(b) Cada $B \subset E$ limitado é fracamente seqüencialmente denso em sua aderência fraca.

Teorema 1.2.12 ***(Eberlein-Smulian)****[9, p. 18] Seja E um espaço de Banach, e seja $A \subset E$. Então A é relativamente fracamente compacto se e só se cada seqüência em A admite uma subseqüência que converge fracamente a um ponto de E.*

Seja $A \subset E$ um subconjunto. Denotamos por $cl_w A$ a adência fraca de A em E. Freqüentemente usaremos o Teorema de Eberlein na seguinte forma

Teorema 1.2.13 ***(Eberlein)*** *Seja E um espaço de Banach, e seja $K \subset E$ tal que cada seqüência em K tem uma subseqüência que converge fracamente em E. Então*

(a) $cl_w K$ é fracamente compacto.

(b) Para cada $x \in cl_w K$ existe uma seqüência $(x_n) \subset K$ que converge fracamente a x.

1.3 Bases contráteis e incondicionais

Uma base de Schauder $(e_n)_n$ em um espaço de Banach E é dita *incondicional* se para cada $x \in E$ a série $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ converge incondicionalmente; isto é, para toda permutação π em $\mathbb{N}$ a série $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{\pi_n} e_{\pi_n}$ converge a x.

Uma base de Schauder $(e_n)_n$ em um espaço de Banach E é dita *contrátil* se para cada $\phi \in E'$

$$\lim_{n\to\infty} \|\phi|_{E_n}\| = 0,$$

onde E_n é a aderência do subespaço gerado por $(e_i)_{i>n}$.

Se $(e_i)_{i\geq 1}$ é base de Schauder de um espaço de Banach E, denotamos por q^n a *projeção* $q^n : E \longrightarrow E$ definida por

$$q^n(\sum_{i\geq 1} \alpha_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i.$$

As projeções q^n são operadores lineares limitados e $\sup_n \|q^n\| < \infty$. O número $\Lambda = \sup_n \|q^n\| \geq 1$ é chamado de *constante básica*.

Se $I = Id_E$, definamos para cada $m < n$ em $\mathbb{N}$, $q_n = I - q^n$ e $q_m^n = q^n - q^m = q_m - q_n$.

Observe que $\|q_m^n(x)\| \leq 2\Lambda$ para todo $x \in B_E$.

É imediato da definição de base contrátil que

Proposição 1.3.1 *[8] Seja E espaço de Banach com base contrátil.*

(a) Se $A \subset E$ é limitado, então para cada $\phi \in E'$

$$\lim_n \|\phi\|_{q_n(A)} = 0$$

(b) Se $(x_n) \subset E$ é limitada, então $q_n(x_n)$ converge fracamente a 0.

O próximo Lema renorma o espaço E com uma norma equivalente, porém mais útil (ver [16, p. 38]).

Lema 1.3.2 *Seja E um espaço de Banach com uma base incondicional (e_n). Então:*

(a) A aplicação bilinear $\Phi : l_\infty \times E \longrightarrow E$ definida por

$$\Phi((\beta_n), \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \alpha_n e_n$$

é bem definida e contínua.

(b) A norma

$$|||\sum_n \alpha_n e_n||| := \sup\{\sum_n \beta_n \alpha_n e_n : (\beta_n) \in B_{l_\infty}\}$$

é equivalente à norma original sobre E.

O seguinte Lema é conhecido (ver [10, Lema 4.36]).

Lema 1.3.3 *Seja E um espaço de Banach com uma base incondicional (e_n), com a norma do Lema 1.3.2. Seja $\Omega \subset E$ limitado e $(\epsilon_i) \in B_{c_0}$. Defina*

$$(\epsilon_n) \otimes \Omega = \{\sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_i \alpha_i e_i : \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i \in \Omega\}.$$

Então:

(a) $(\sum_{i\geq k} \epsilon_i \alpha_i e_i)_{k\geq 1}$ *converge a 0 quando* $k \longrightarrow \infty$.

(b) *O conjunto* $(\epsilon_n) \otimes \Omega$ *é relativamente compacto.*

(c) *Se U é uma bola em E centrada na origem e Ω é U- limitado, então* $(\epsilon_n) \otimes \Omega$ *é relativamente compacto e U-limitado.*

Capítulo 2

Funções holomorfas fracamente contínuas

2.1 Funções holomorfas e equicontinuidade

Nesta seção caracterizamos funções em $\mathcal{H}_{wsc}(U;F)$, $\mathcal{H}_{w}(U;F)$ e $\mathcal{H}_{wu}(U;F)$ em termos de equicontinuidade dos polinômios da série de Taylor.

Proposição 2.1.1 *Sejam E e F espaços de Banach, $U \subset E$ aberto equilibrado e $f \in \mathcal{H}(U;F)$. São equivalentes:*

(a) $f \in \mathcal{H}_{wsc}(U;F)$.

(b) A seqüência $(P^n f(0))$ satisfaz a seguinte condição : Dados (x_k) seqüência U-limitada tal que $x_k \longrightarrow x \in U$ fracamente e $\epsilon > 0$ existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $\|P^n f(0)(x_k) - P^n f(0)(x)\| < \epsilon$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e $k \geq M$. Em particular, $P^n f(0) \in \mathcal{P}_{wsc}({}^n E;F)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. **(a) $\Longrightarrow$ (b)** Seja (x_k) seqüência U-limitada tal que $x_k \longrightarrow x \in U$ fracamente. Afirmamos que, dado $\epsilon > 0$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f(\lambda x_k) - f(\lambda x)\| < \epsilon \qquad (|\lambda| = 1, k \geq M).$$

Caso contrário, para infinitos $k \in \mathbb{N}$, existe $|\lambda_k| = 1$ tal que $\|f(\lambda_k x_k) - f(\lambda_k x)\| \geq \epsilon$. Como $\Lambda = \{\lambda : |\lambda| = 1\}$ é compacto, existe (λ_{k_i}) subseqüência de (λ_k) tal que $\lambda_{k_i} \longrightarrow \lambda, |\lambda| = 1$ Logo, $\lambda_{k_i} x_{k_i} \longrightarrow \lambda x$ fracamente e $\lambda_{k_i} x \longrightarrow \lambda x$.

Considere $B = \{x_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ U-limitado. Então $A = eq(B)$ é U-limitado. Observe que $(\lambda_{k_i} x_{k_i}) \subset A$ e $(\lambda_{k_i} x) \subset A$. Logo são U-limitadas. Como $f \in \mathcal{H}_{wsc}(U;F)$ temos que

$$\|f(\lambda_{k_i} x_{k_i}) - f(\lambda_{k_i} x)\| \leq \|f(\lambda_{k_i} x_{k_i}) - f(\lambda x)\| + \|f(\lambda x) - f(\lambda_{k_i} x)\| \longrightarrow 0,$$

contradição .

Pela Fórmula Integral de Cauchy, para $k \geq M$ e $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$\|P^n f(0)(x_k) - P^n f(0)(x)\| = \|\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=1} \frac{f(\lambda x_k) - f(\lambda x)}{\lambda^{n+1}} d\lambda\| \leq \sup_{|\lambda|=1} \{\|f(\lambda x_k) - f(\lambda x)\|\} \leq \epsilon.$$

Agora, provemos que cada $P^n f(0) \in \mathcal{P}_{wsc}({}^n E;F)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Dado $n \in \mathbb{N}$, sejam $(x_k) \subset E$ seqüência que converge fracamente a x e $\epsilon > 0$. Pela Proposição 1.1.4, (sx_k) é U-limitado para algum $s > 0$. Segue daí que existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $\|P^n f(0)(sx_k) - P^n f(0)(sx)\| < \epsilon s^n$ para cada $k \geq M$. Logo

$$\|P^n f(0)(x_k) - P^n f(0)(x)\| = \frac{1}{s^n} \|P^n f(0)(sx_k) - P^n f(0)(sx)\| < \epsilon$$

para cada $k \geq M$. Ou seja, $P^n f(0) \in \mathcal{P}_{wsc}({}^n E;F)$.

(b) $\Longrightarrow$ (a) Seja (x_k) seqüência U-limitada tal que $x_k \longrightarrow x \in U$ fracamente. Considere $B = \{x_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ U-limitado. Pela Proposição 1.1.3, rB é U-limitado para algum $r > 1$. Por (b), dado $\epsilon > 0$ existe $M \in N$ tal que $\|P^n f(0)(rx_k) - P^n f(0)(rx)\| < \epsilon$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e $k \geq M$. Consequentemente

$$\|f(x_k) - f(x)\| = \|\sum_{n=0}^{\infty} (P^n f(0)(x_k) - P^n f(0)(x))\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^n} \|P^n f(0)(rx_k) - P^n f(0)(rx)\| < \frac{r}{r-1}\epsilon$$

para cada $k \geq M$. Portanto, $f \in \mathcal{H}_{wsc}(U;F)$.

□

Proposição 2.1.2 *Sejam E e F espaços de Banach, $U \subset E$ aberto equilibrado e $f \in \mathcal{H}(U;F)$. São equivalentes:*

(a) $f \in \mathcal{H}_w(U;F)$.

(b) A seqüência $(P^n f(0))$ satisfaz a seguinte condição : Dados B U-limitado, $(x_i)_{i \in I} \subset B$ uma rede tal que $x_i \longrightarrow x \in B$ fracamente e $\epsilon > 0$, existe $M \in I$ tal que $\|P^n f(0)(x_i) - P^n f(0)(x)\| < \epsilon$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e $i \geq M$. Em particular, $P^n f(0) \in \mathcal{P}_w({}^n E;F)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. (a) $\Longrightarrow$ (b)

Seja B U-limitado e seja $(x_i)_{i\in I} \subset B$ rede tal que $x_i \longrightarrow x \in B$ fracamente. Considere $A = eq(B)$. Como B é U-limitado, segue da Proposição 1.1.3 que A é U-limitado. Afirmamos que dado $\epsilon > 0$ existe $M \in I$ tal que

$$\|f(\lambda x_i) - f(\lambda x)\| < \epsilon \qquad (|\lambda| = 1, i \geq M).$$

Caso contrário, para infinitos $i \in I$, existe $|\lambda_i| = 1$ tal que $\|f(\lambda_i x_i) - f(\lambda_i x)\| \geq \epsilon$. Como $\Lambda = \{\lambda : |\lambda| = 1\}$ é compacto, existe $(\lambda_{\phi(j)})$ subrede de (λ_i) tal que $\lambda_{\phi(j)} \longrightarrow \lambda, |\lambda| = 1$ Logo, $\lambda_{\phi(j)} x_{\phi(j)} \longrightarrow \lambda x$ fracamente e $\lambda_{\phi(j)} x \longrightarrow \lambda x$.

Como A é U-limitado e $f \in \mathcal{H}_w(U;F)$ temos que

$$\|f(\lambda_{\phi(j)} x_{\phi(j)}) - f(\lambda_{\phi(j)} x)\| \leq \|f(\lambda_{\phi(j)} x_{\phi(j)}) - f(\lambda x)\| + \|f(\lambda x) - f(\lambda_{\phi(j)} x)\| \longrightarrow 0$$

contradição .

Pela Fórmula Integral de Cauchy, para $i \geq M$ e $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$\|P^n f(0)(x_i) - P^n f(0)(x)\| = \|\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=1} \frac{f(\lambda x_i) - f(\lambda x)}{\lambda^{n+1}} d\lambda\| \leq \sup_{|\lambda|=1} \{\|f(\lambda x_i) - f(\lambda x)\|\} \leq \epsilon.$$

Segue daí que $P^n f(0) \in \mathcal{P}_w({}^n E;F)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. A demonstração é análoga à demonstração da proposição anterior.

(b) $\Longrightarrow$ (a) Seja B U-limitado, e seja $(x_i) \subset B$ rede tal que $x_i \longrightarrow x \in B$ fracamente. Segue da Proposição 1.1.3 que rB é U-limitado para algum $r > 1$. Por (b), dado $\epsilon > 0$ existe $M \in I$ tal que $\|P^n f(0)(rx_i) - P^n f(0)(rx)\| < \epsilon$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e $i \geq M$. Logo

$$\|f(x_i) - f(x)\| = \|\sum_{n=0}^{\infty} (P^n f(0)(x_i) - P^n f(0)(x))\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^n} \|P^n f(0)(rx_i) - P^n f(0)(rx)\| < \frac{r}{r-1}\epsilon$$

para $i \geq M$. Portanto, $f \in \mathcal{H}_w(U;F)$.

□

Proposição 2.1.3 *Sejam E e F espaços de Banach, $U \subset E$ aberto equilibrado e $f \in \mathcal{H}(U;F)$. Consideremos as afirmações :*

(a) $f \in \mathcal{H}_{wC}(U;F)$.

(b) $P^n f(0) \in \mathcal{P}_{wC}({}^n E;F)$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$.

(c) A seqüência $(P^n f(0))$ satisfaz a seguinte condição : Dados (x_k) seqüência fracamente Cauchy U-limitada e $\epsilon > 0$ existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $\|P^n f(0)(x_k) - P^n f(0)(x_j)\| < \epsilon$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e $k, j \geq M$.

Então **(a)** $\Longrightarrow$ **(b)** *e* **(c)** $\Longrightarrow$ **(a)**

Demonstração. **(a)** $\Longrightarrow$ **(b)** Seja $f \in \mathcal{H}_{wC}(U;F)$. Como $\mathcal{H}_{wC}(U;F) \subset \mathcal{H}_{wsc}(U;F)$, $P^nf(0) \in \mathcal{P}_{wsc}({}^nE;F)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, pela Proposição 2.1.1. Logo $P^nf(0) \in \mathcal{P}_{wC}({}^nE;F)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, pelo Teorema 1.2.1. .

(c) $\Longrightarrow$ **(a)** Seja (x_k) seqüência fracamente Cauchy U-limitada. Logo (rx_k) é fracamente Cauchy U-limitada para algum $r > 1$. Por (c), dado $\epsilon > 0$ existe $M \in N$ tal que $\|P^nf(0)(rx_k) - P^nf(0)(rx_j)\| < \epsilon$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e $k, j \geq M$. Daqui

$$\|f(x_k)-f(x_j)\| = \|\sum_{n=0}^{\infty}(P^nf(0)(x_k)-P^nf(0)(x_j))\| \leq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^n}\|P^nf(0)(rx_k)-P^nf(0)(rx_j)\| < \frac{r}{r-1}\epsilon$$

para $k, j \geq M$. Portanto, $f \in \mathcal{H}_{wC}(U;F)$.

□

Não sabemos se valem as implicações **(b)** $\Longrightarrow$ **(a)** e **(a)** $\Longrightarrow$ **(c)** na Proposição 2.1.3, ou caso contrário, se existem contraexemplos mostrando que tais implicações são falsas.

Proposição 2.1.4 *Sejam E e F espaços de Banach, $U \subset E$ aberto equilibrado e $f \in \mathcal{H}(U;F)$. São equivalentes:*

(a) $f \in \mathcal{H}_{wu}(U;F)$.

(b) A seqüência $(P^nf(0))$ satisfaz a seguinte condição : Dados B U-limitado e $\epsilon > 0$ existe V vizinhança fraca de 0 tal que se $x, y \in B$ satisfaz $x - y \in V$ então para cada $n \in \mathbb{N}$, $\|P^nf(0)(x) - P^nf(0)(y)\| < \epsilon$. Em particular, $P^nf(0) \in \mathcal{P}_{wu}({}^nE;F)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. **(a)** $\Longrightarrow$ **(b)** Seja B U-limitado. Considere $A = eq(B)$. Da Proposição 1.1.3 segue que A é U-limitado. Por hipótese $f \in \mathcal{H}_{wu}(U;F)$. Logo dado $\epsilon > 0$ existe V vizinhança fraca de 0 tal que se $x, y \in A$ satisfaz $x - y \in V$ então

$$\|f(x) - f(y)\| < \epsilon.$$

Sejam $x, y \in B$ tal que $x - y \in V$, pela Fórmula Integral de Cauchy,

$$\|P^nf(0)(x) - P^nf(0)(y)\| = \|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=1}\frac{f(\lambda x) - f(\lambda y)}{\lambda^{n+1}}d\lambda\| \leq \sup_{|\lambda|=1}\{\|f(\lambda x) - f(\lambda y)\|\} \leq \epsilon$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

(b) $\Longrightarrow$ **(a)** Seja B U-limitado. Logo rB é U-limitado para algum $r > 1$ pela Proposição 1.1.3. Por (b), dado $\epsilon > 0$, existe $V = V_{\phi_1,\phi_2..,\phi_k;\delta}$ vizinhança fraca de 0 tal que se $z, w \in rB$ com $z - w \in V$ então $\|P^nf(0)(z) - P^nf(0)(w)\| < \epsilon$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Agora, sejam $x, y \in B$ tal que $x - y \in V_{\phi_1,\phi_2..,\phi_k;\delta/r}$. Logo $rx, ry \in rB$ com $rx - ry \in V$ e assim $\|P^n f(0)(rx) - P^n f(0)(ry)\| < \epsilon$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Logo

$$\|f(x) - f(y)\| = \|\sum_{n=0}^{\infty}(P^n f(0)(x) - P^n f(0)(y))\| \leq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^n}\|P^n f(0)(rx) - P^n f(0)(ry)\| < \frac{r}{r-1}\epsilon.$$

Portanto, $f \in \mathcal{H}_{wu}(U;F)$.

□

Observação 2.1.5 A uniformidade em (b) na Proposição 2.1.2 é necessária. De fato, Gutierrez [14, Theorem 3] exibe uma função $f \in \mathcal{H}(E)\backslash\mathcal{H}_w(E)$ tal que $P^n f(0) \in \mathcal{P}_w({}^nE;F)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Este mesmo exemplo mostra que a condição de uniformidade em (b) na proposição anterior também é necessária.

2.2 Funções holomorfas fracamente contínuas em espaços não contendo uma cópia de ℓ_1

Os resultados desta seção foram obtidos por Aron, Hervés e Valdivia [2] para funções inteiras. Estenderemos estes resultados para abertos equilibrados.

Lema 2.2.1 *Sejam E e F espaços de Banach e seja $U \subset E$ aberto. Seja $f \in \mathcal{H}(U;F)$ e seja S equilibrado tal que $\|f\|_{rS} = \sup\{\|f(x)\| : x \in rS \subset U\} < \infty$, para algum $r > 1$. Então $f(x) = \sum P^n f(0)(x)$ uniformemente em S.*

Demonstração. Seja $x \in S$. Como S é equilibrado, para cada $\xi \in \overline{\Delta}(0,r)$ temos que

$$0 + \xi x = \xi x = |\xi|e^{i\theta}x \in rS \subset U.$$

Pela Desigualdade de Cauchy,

$$\|P^n f(0)(x)\| \leq \frac{1}{r^n}\sup_{|\xi|=r}\|f(\xi x)\|.$$

Logo

$$\sum_{n=0}^{\infty}\|P^n f(0)(x)\| \leq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^n}\sup_{|\xi|=r}\|f(\xi x)\| \leq \|f\|_{rS}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^n} < \infty$$

Portanto, $f(x) = \sum P^n f(0)(x)$ uniformemente para $x \in S$. □

O teorema seguinte é essencialmente uma reformulação da Proposição 1.2.8.

Teorema 2.2.2 *Sejam E e F espaços de Banach e seja $U \subset E$ aberto e equilibrado. Então,*

$$\mathcal{H}_{wu}(U;F) = \mathcal{H}_w(U;F) \cap \mathcal{H}_b(U;F)$$

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{H}_w(U;F) \cap \mathcal{H}_b(U;F)$. Agora, seja B U-limitado. Pelo Lema 1.1.3, existe $r > 1$ tal que $r \cdot eq(B)$ é U-limitado. Logo f é limitada em $req(B)$, pois $f \in \mathcal{H}_b(U;F)$. Pelo Lema 2.2.1, $f(x) = \sum P^n f(0)(x)$ uniformemente em $eq(B)$. Como $B \subset eq(B)$ temos que $f(x) = \sum P^n f(0)(x)$ uniformemente sobre os U-limitados.

Como $f \in \mathcal{H}_w(U;F)$ segue da Proposição 2.1.2 que $P^n f(0) \in \mathcal{P}_w({}^n E;F)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Assim, $P^n f(0) \in \mathcal{P}_{wu}({}^n E;F)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ pela Proposição 1.2.1.

Como $\mathcal{H}_{wu}(U;F)$ é completo com a topologia da convergencia uniforme sobre os U-limitados, temos $f \in \mathcal{H}_{wu}(U;F)$. A outra inclusão segue da Proposição 1.2.8. □

Seja E um espaço de Banach. Denotemos por $E_w = (E, \sigma(E,E'))$.

Proposição 2.2.3 *Seja E espaço de Banach e $U \subset E$ aberto. Então $\mathcal{H}_{wsc}(U;F)$ é o espaço das $f \in \mathcal{H}(U;F)$ que são fracamente contínuas sobre cada K fracamente compacto e U-limitado.*

Demonstração. ($\Longleftarrow$) Seja (x_n) seqüência U-limitada tal que $x_n \longrightarrow x \in U$ fracamente. Observe que $K := \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\} \subset U$ é fracamente compacto e U-limitado. Logo $f|_K$ é fracamente contínua. Dai segue que $f(x_n)$ converge a $f(x)$ em F. Isto é $f \in \mathcal{H}_{wsc}(U;F)$.

($\Longrightarrow$) Dados $f \in \mathcal{H}_{wsc}(U;F)$ e $K \subset U$ fracamente compacto U-limitado. Seja $A \subset K$ e $x \in \overline{A}^w$. Como E_w é Hausdorff, K é fracamente fechado. Logo

$$\overline{A}^w \subset \overline{K}^w = K \subset U$$

e assim $\overline{A}^w$ é fracamente compacto. Como E_w é angelical (ver Proposição 1.2.9), existe $(x_n) \subset A$ que converge fracamente a $x \in U$. Como K é U-limitado temos que (x_n) é U-limitada. Logo $f \in \mathcal{H}_{wsc}(U;F)$ implica que $f(x_n)$ converge a $f(x)$ em F. Assim, $f(\overline{A}^w) \subset \overline{f(A)}$. Segue daí que $f|_K$ é fracamente contínua. □

A proposição seguinte foi provada em [14, Theorem 3] para funções inteiras. Aqui nós estendemos para um aberto arbitrário.

Proposição 2.2.4 *Seja E espaço de Banach. São equivalentes:*

(a) E não contém uma cópia de ℓ_1.

(b) $\mathcal{H}_{wsc}(U;F) = \mathcal{H}_w(U;F)$ para cada espaço de Banach F e para cada $U \subset E$ aberto.

(c) $\mathcal{H}_{wsc}(U) = \mathcal{H}_w(U)$ para algum $U \subset E$ aberto.

Demonstração. **(a) $\Longrightarrow$ (b)** É claro que $\mathcal{H}_w(U;F) \subset \mathcal{H}_{wsc}(U;F)$. Provemos a outra inclusão. Seja $f \in \mathcal{H}_{wsc}(U;F)$ e seja B U-limitado. Seja $A \subset B$ e $x \in \overline{A}^w \cap B$. Pela Proposição 1.2.10, existe $D \subset A$ enumerável tal que $x \in \overline{D}^w$.

Considere $E_0 = \overline{[D]}$ espaço de Banach separável que não contém cópia de ℓ_1. Logo D limitado implica que existe $(x_n) \subset D$ tal que (x_n) é $\sigma(E_0, E_0')$ - convergente a x, pela Proposição 1.2.11. Logo (x_n) é $\sigma(E, E')$- convergente a x. Como B é U-limitado segue que (x_n) é U-limitada.

Mas $f \in \mathcal{H}_{wsc}(U;F)$ implica $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ em F. Assim, $f(\overline{A}^w \cap B) \subset \overline{f(A)}$ logo f é fracamente contínua sobre B. Portanto $f \in \mathcal{H}_w(U;F)$.

(b) $\Longrightarrow$ (c) É claro.

(c) $\Longrightarrow$ (a) Suponha que E contém cópia de ℓ_1. Pelo Teorema 1.2.5 temos que $\mathcal{H}_w(E) \neq \mathcal{H}_{wsc}(E)$, ou seja, existe $f \in \mathcal{H}_{wsc}(E) \backslash \mathcal{H}_w(E)$. Seja B limitado de E tal que $f|_B$ não seja fracamente contínua.

Seja $a \in U$. Pela Proposição 1.1.4, existe $s > 0$ tal que $B' = a + sB$ é U-limitado.

Seja $g(x) = f \circ h \circ t(x)$ para cada $x \in U$ onde

$$t : x \in E \mapsto t(x) = x - a \in E$$

e

$$h : x \in E \mapsto h(x) = s^{-1}x \in E.$$

Provemos que $g \in \mathcal{H}_{wsc}(U)$. Seja (x_n) seqüência U-limitada tal que x_n converge fracamente a $x \in U$. Como h é linear e contínua, $h(x_n - a)$ converge fracamente a $h(x-a)$. Logo $g(x_n)$ converge a $g(x)$ em F pois $f \in \mathcal{H}_{wsc}(E)$.

Observe que $h \circ t(B') = B$ logo $g(B') = f(B)$. Observe que $h : E_w \longrightarrow E_w$ e $t : E_w \longrightarrow E_w$ são homeomorfismos. Como f não é fracamente contínua sobre B, existe $(x_i) \subset B$ rede tal que $x_i \longrightarrow x$ fracamente mas $f(x_i)$ não converge a $f(x)$. Defina $(y_i) := ((h \circ t)^{-1}(x_i))$ rede em B' e $y := (h \circ t)^{-1}(x) \in B'$. Logo $y_i \longrightarrow y$ fracamente. Note que,

$$f(x_i) = f \circ (h \circ t) \circ (h \circ t)^{-1}(x_i) = g(y_i)$$

e do mesmo modo $f(x) = g(y)$, logo $g(y_i)$ não converge a $g(y)$. Assim, g não é fracamente contínua sobre B'. onde B' é U- limitado. Portanto, $g \in \mathcal{H}_{wsc}(U) \backslash \mathcal{H}_w(U)$. A implicação **(c) $\Longrightarrow$ (a)** segue por contraposição . □

O Teorema seguinte foi provada em Moraes [17, Theorem 1] para funções inteiras. Aqui nós estendemos para um aberto arbitrário.

Teorema 2.2.5 *Seja E espaço de Banach. São equivalentes:*

(a) E não contém uma cópia de ℓ_1.

(b) $\mathcal{H}_{wC}(U;F) \subset \mathcal{H}_b(U;F)$ para cada espaço de Banach F e para cada $U \subset E$ aberto.

(c) $\mathcal{H}_{wC}(U) \subset \mathcal{H}_b(U)$ para algum $U \subset E$ aberto.

Demonstração. **(a) $\Longrightarrow$ (b)** Seja $f \in \mathcal{H}_{wC}(U;F)$. Então $f \in \mathcal{H}_{wsc}(U;F)$ pela Proposição 1.1.2 e $f \in \mathcal{H}_w(U;F)$ pela Proposição anterior. Provemos que $f \in \mathcal{H}_b(U;F)$. Por absurdo, suponha que exista B U-limitado tal que $f(B)$ não seja limitado. Daqui, existe $(x_n) \subset B$ tal que $\|f(x_n)\| > n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como E não contém cópia de ℓ_1 pela Proposição 1.2.11, existe (x_{n_k}) subseqüência fracamente de Cauchy de (x_n). Logo, $f(x_{n_k})$ é Cauchy em F pois $f \in \mathcal{H}_{wC}(U;F)$. Segue que $(f(x_{n_k}))$ é limitada em F, contradição . Portanto $f \in \mathcal{H}_b(U;F)$.

(b) $\Longrightarrow$ (c) É óbvio.

(c) $\Longrightarrow$ (a) Suponha que E contenha cópia de ℓ_1. Pelo Teorema 1.2.6 temos que $\mathcal{H}_{wC}(E) \nsubseteq \mathcal{H}_b(E)$, ou seja, existe $f \in \mathcal{H}_{wC}(E)\backslash\mathcal{H}_b(E)$. Seja B limitado de E tal que $f|_B$ não seja limitado.

Seja $a \in U$. Pela Proposição 1.1.4 existe $s > 0$ tal que $B' = a + sB$ é U-limitado. Sejam h e t definidas como na Proposição anterior. Definamos $g(x) = f \circ h \circ t(x)$ para cada $x \in U$.

Provemos que $g \in \mathcal{H}_{wC}(U)$. Seja (x_n) seqüência fracamente Cauchy U-limitada. Como h é linear e contínua, $h(x_n)$ é fracamente Cauchy. Logo $g(x_n)$ é Cauchy pois $f \in \mathcal{H}_{wC}(E)$.

Observe que $h \circ t(B') = B$ logo $g(B') = f(B)$. Observe que $h : E_w \longrightarrow E_w$ e $t : E_w \longrightarrow E_w$ são homeomorfismos. Como f não é limitada sobre B, existe $(x_n) \subset B$ seqüência tal que $\|f(x_n)\| \geq n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Defina $(y_n) := ((h \circ t)^{-1}(x_n))$ seqüência em B' Note que,

$$f(x_n) = f \circ (h \circ t) \circ (h \circ t)^{-1}(x_n) = g(y_n),$$

logo $g(y_n)$ não é limitada. Assim, g não é limitada sobre B', onde B' é U- limitado. Portanto, $g \in \mathcal{H}_{wC}(U)\backslash\mathcal{H}_b(U)$. A implicação **(c) $\Longrightarrow$ (a)** segue por contraposição .

□

Corolário 2.2.6 *Seja E espaço de Banach. São equivalentes:*

(a) E não contém uma cópia de ℓ_1.

(b) $\mathcal{H}_{wC}(U;F) = \mathcal{H}_{wu}(U;F)$ para cada espaço de Banach complexo F e para cada $U \subset E$ aberto e equilibrado.

(c) $\mathcal{H}_{wC}(U) = \mathcal{H}_{wu}(U)$ para algum $U \subset E$ aberto e equilibrado.

Demonstração. **(a)** $\Longrightarrow$ **(b)** Pelo Teorema 2.2.5, $\mathcal{H}_{wC}(U;F) \subset \mathcal{H}_b(U;F)$. Logo $\mathcal{H}_{wC}(U;F) \subset \mathcal{H}_{wsc}(U;F) \cap \mathcal{H}_b(U;F)$. Pela Proposição 2.2.4 $\mathcal{H}_{wsc}(U;F) = \mathcal{H}_w(U;F)$ pois E não contém cópia de ℓ_1. Logo pelo Teorema 2.2.2, $\mathcal{H}_{wC}(U;F) \subset \mathcal{H}_w(U;F) \cap \mathcal{H}_b(U;F) = \mathcal{H}_{wu}(U;F)$. A outra inclusão segue da Proposição 1.1.2.

(b) $\Longrightarrow$ **(c)** É óbvio.

(c) $\Longrightarrow$ **(a)** Como $\mathcal{H}_{wC}(U) = \mathcal{H}_{wu}(U) \subset \mathcal{H}_b(U)$ entao pelo Teorema 2.2.5, E não contém cópia de ℓ_1.

□

As duas proposições a seguir foram provadas por Aron, Hervés e Valdivia [2] para funções inteiras, aqui estendemos para abertos equilibrados.

Proposição 2.2.7 *Seja $U \subset c_0$ aberto, equilibrado. Então :*

(a) $\mathcal{H}_{wC}(U) = \mathcal{H}_{wu}(U) = \mathcal{H}_b(U)$

(b) $\mathcal{H}_{wsc}(U) = \mathcal{H}_w(U) = \mathcal{H}_{bk}(U)$

Demonstração. **(a)** Pelo Corolário 2.2.6, $\mathcal{H}_{wC}(U) = \mathcal{H}_{wu}(U)$. Para a segunda igualdade, seja $f \in \mathcal{H}_b(U)$, isto é , f é limitado nos U- limitados. Seja B U-limitado. Considere $A := eq(B)$. Como U aberto e equilibrado, pelo Lema 1.1.3 temos que A é U-limitado e que existe $r > 1$ tal que rA é U-limitado. Logo, f é limitada em rA. Pelo Lema 2.2.1, $f(x) = \sum P^n f(0)(x)$ uniformemente em A. Como $B \subset A$, $f(x) = \sum P^n f(0)(x)$ uniformemente sobre os U-limitados.

Pelo Teorema de Pelczynski 1.2.4, $P^n f(0) \in \mathcal{P}_{wsc}({}^n c_0)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Assim, $P^n f(0) \in \mathcal{P}_{wu}({}^n c_0)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ pelo Teorema 1.2.3 e Teorema 1.2.1.

Como $\mathcal{H}_{wu}(U)$ é completo com a topologia da convergencia uniforme sobre os U-limitados, $f \in \mathcal{H}_{wu}(U)$. A outra inclusão segue do Teorema 2.2.2.

(b) Pelo Teorema 2.2.4, $\mathcal{H}_{wsc}(U) = \mathcal{H}_w(U)$. Para a segunda igualdade, seja $f \in \mathcal{H}_{wsc}(U)$ e suponha f não limitada em algum $K \subset U$ fracamente compacto e U-limitado. Ou seja, existe $(x_n) \subset K$ tal que $\|f(x_n)\| \geq n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como K fracamente compacto, pelo Teorema de Eberlein-Smulian 1.2.12, existe (x_{n_k}) subseqüência de (x_n) fracamente convergente a um $x \in U$. Mas, (x_{n_k}) é U-limitada e $f \in \mathcal{H}_{wsc}(U;F)$ logo $f(x_{n_k})$ converge a $f(x)$. Daí, $f(x_{n_k})$ é limitada, contradição .

Para a outra inclusão , seja $f \in \mathcal{H}_{bk}(U)$, ou seja, f é limitada sobre conjuntos fracamente compactos e U-limitados. Seja B fracamente compacto U-limitado. Considere $A := eq(B)$. Como U aberto e equilibrado, pelo Lema 1.1.3 temos que A é U-limitado e que existe $r > 1$ tal que rA é U-limitado. Mas, B fracamente compacto implica rA fracamente compacto. Como antes se mostra

que, $f(x) = \sum P^n f(0)(x)$ uniformemente para cada $x \in A$. Como $B \subset A$, $f(x) = \sum P^n f(0)(x)$ uniformemente sobre os fracamente compactos U-limitados.

Pelo Teorema de Pelczynski 1.2.4, $P^n f(0) \in \mathcal{P}_{wsc}({}^n c_0)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Segue da Proposição 1.2.2 que cada $P^n f(0)$ é fracamente contínua nos conjuntos fracamente compactos, e portanto nos fracamente compactos U-limitados. Pela Proposição 2.2.3, $f \in \mathcal{H}_{wsc}(U)$. □

Proposição 2.2.8 *Seja $U \subset \ell_1$ aberto. Se $\mathcal{H}_w(U) = \mathcal{H}_{wu}(U)$ então $\mathcal{H}_w(E;F) = \mathcal{H}_{wu}(E;F)$ para cada E e F espaços de Banach.*

Demonstração. Por absurdo, suponha que para algum E e F Banach, $\mathcal{H}_w(E;F) \neq \mathcal{H}_{wu}(E;F)$. Pelo Exemplo 1.2.7, $\mathcal{H}_w(\ell_1) \neq \mathcal{H}_{wu}(\ell_1)$. Dai, existe $f \in \mathcal{H}_w(\ell_1) \backslash \mathcal{H}_{wu}(\ell_1)$. Seja B limitado de ℓ_1 tal que $f|_B$ não seja fracamente uniformemente contínua.

Seja $a \in U$. Pela Proposição 1.1.4 existe $s > 0$ tal que $B' = a + sB$ é U-limitado.

Sejam h e t definidas como nas proposições anteriores. Definamos $g(x) = f \circ h \circ t(x)$ para cada $x \in U$.

Provemos que $g \in \mathcal{H}_w(U)$. Dado B U-limitado, seja $(x_j) \subset B$ rede tal que x_j converge fracamente a $x \in B$. Como h é linear e contínua, $h(x_j - a)$ converge fracamente a $h(x - a)$. Logo $g(x_j)$ converge a $g(x)$ em F pois $f \in \mathcal{H}_w(\ell_1)$.

Observe que $h \circ t(B') = B$ logo $g(B') = f(B)$. Como $h : (\ell_1)_w \longrightarrow (\ell_1)_w$ e $t : (\ell_1)_w \longrightarrow (\ell_1)_w$ são homeomorfismos, segue que g não é fracamente uniformemente contínua sobre B' onde B' é U- limitado. Portanto, $g \in \mathcal{H}_w(U) \backslash \mathcal{H}_{wu}(U)$, o que contraria a hipótese $\mathcal{H}_w(U) = \mathcal{H}_{wu}(U)$. □

Capítulo 3

Funções holomorfas em espaços de Banach com uma base contrátil e incondicional

3.1 Modificações de polinômios

Começamos esta seção apresentando o conceito de modificação de um polinômio $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$. As modificações são fortemente usadas na demonstração do Teorema principal deste capítulo. A partir da seção 3.2 deste capítulo, suporemos que E possui uma base de Schauder. Denotaremos por q^n e q_n as projeções canônicas definidas na seção 1.3. Citamos Lindenstrauss e Tzafriri [15] para a terminologia da teoria de espaços de Banach.

Seja E um espaço de Banach com base de Schauder $(e_i)_{i\geq 1}$. Seja $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$ e seja A sua forma n-linear simétrica associada. Seja $(m_i)_{i=1}^{\infty}$ uma seqüência estritamente crescente de inteiros positivos. Seja $k = (k_1, k_2, \ldots, k_{j+1})$ com $\sum_{i=1}^{j+1} k_i = n$ e $k! := k_1!k_2!.\ldots.k_{j+1}!$. Então para cada $x \in E$ definimos a aplicação $P_{k_1,k_2,\ldots,k_{j+1}}^{m_1,m_2,\ldots,m_j} : E \to F$ por

$$P_{k_1,k_2,\ldots,k_{j+1}}^{m_1,m_2,\ldots,m_j}(x) := \frac{n!}{k!} A(q^{m_1}(x)^{k_1} \cdots q_{m_{j-1}}^{m_j}(x)^{k_j} q_{m_j}(x)^{k_{j+1}})$$

Então $P_{k_1,k_2,\ldots,k_{j+1}}^{m_1,m_2,\ldots,m_j}$ é chamada uma *modificação* de P e pertence a $\mathcal{P}(^nE;F)$.

A seguinte igualdade, que será usada posteriormente, segue da fórmula de Leibniz [18, Teorema 1.8]

$$P^{m_1,m_2,\ldots,m_j}_{k_1,k_2,\ldots,k_{j+1}} = \sum_{i=0}^{k_{j+1}} P^{m_1,m_2,\ldots,m_j,m_{j+1}}_{k_1,k_2,\ldots,k_j,i,k_{j+1}-i} \tag{3.1}$$

3.2 A igualdade $\mathcal{H}_{bk}(U;F) = \mathcal{H}_b(U;F)$

Se E tem uma base contrátil e incondicional e U é uma bola aberta de E, o objetivo desta seção é mostrar a igualdade $\mathcal{H}_{bk}(U;F) = \mathcal{H}_b(U;F)$. Supondo $\mathcal{H}_{bk}(U;F) \nsubseteq \mathcal{H}_b(U;F)$ encontraremos polinômios com certas propriedades e conseguiremos achar uma seqüência de números positivos $(\delta_i)_{i\geq 1}$ em ℓ_1. A existência desta seqüência nos levará a uma contradição .

Na Nota 3.2.3 damos uma breve explicação da falha existente na prova do resultado principal de Carrión [8].

Começemos esta seção com o seguinte Lema.

Lema 3.2.1 *Seja U um subconjunto aberto e equilibrado de E. Se $\mathcal{H}_{bk}(U;F) \nsubseteq \mathcal{H}_b(U;F)$, então existe $f = \sum P_n \in \mathcal{H}_{bk}(U;F)\backslash\mathcal{H}_b(U;F)$ e $(\gamma_n) \subset \mathbb{N}$, com $P_n \in P(^{\gamma_n}E;F)$ para cada n, e existe uma seqüência U-limitada (x_n) tal que*

(a)

$$1 < \|P_n(x_n)\|^{1/\gamma_n}$$

para cada $n \geq 1$ e,

(b)

$$\frac{\gamma_n}{\log(\gamma_n + 1)} \geq n$$

para cada $n \geq 1$.

Demonstração. Como $\mathcal{H}_{bk}(U;F) \nsubseteq \mathcal{H}_b(U;F)$ existe $g \in \mathcal{H}_{bk}(U;F)\backslash\mathcal{H}_b(U;F)$. Seja $\sum Q_n$ a série de Taylor de g na origem, e seja R seu raio de convergência. Pelo Teorema 1.1.5, existe um conjunto B U-limitado tal que

$$\limsup \|Q_n\|_B^{1/n} > 1.$$

Observe que o Teorema 1.1.5 implica que existe um conjunto B equilibrado e U-limitado tal que $\limsup \|Q_n\|_B^{1/n} \geq 1$. Mas existe $\rho > 1$ tal que ρB é também U-limitado. Logo $\limsup \|Q_n\|_{\rho B}^{1/n} > 1$.

Observe que $g \in \mathcal{H}(U;F)$ implica que $R > 0$, e $g \notin \mathcal{H}_b(U;F)$ implica que $R < \infty$. Como podemos supor que $\epsilon B_E \subset B \subset rB_E$ for $0 < \epsilon < 1 < r$, segue que

$$0 < L = \limsup \|Q_n\|_B^{1/n} < \infty.$$

Podemos achar uma seqüência estritamente crescente $(n_l) \subset \mathbb{N}$ tal que $L = \lim \|Q_{n_l}\|_B^{1/n_l}$.

Seja $\epsilon = (L-1)/2$. Então existe $l_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$1 < L - \epsilon < \|Q_{n_l}\|_B^{1/n_l}$$

para todo $l \geq l_0$. Para cada $l \geq l_0$ existe $x_l \in B$ tal que

$$1 < \|Q_{n_l}(x_l)\|^{1/n_l} \tag{3.2}$$

Por outro lado,

$$\lim_l \frac{n_l}{\log(n_l+1)} = \infty$$

Para cada $i \in \mathbb{N}$ existe $l_i \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{n_{l_i}}{\log(n_{l_i}+1)} \geq i$$

Definamos $P_i := Q_{n_{l_i}}$, $f := \sum Q_{n_{l_i}}$. Segue de (3.2) e Teorema 1.1.5 que $f \notin \mathcal{H}_b(U;F)$. Como $(Q_{n_{l_i}}) \subset (Q_n)$ e $g \in \mathcal{H}_{bk}(U;F)$ segue do Teorema 1.1.5 que para cada conjunto W fracamente compacto e U-limitado:

$$\limsup \|Q_{n_{l_i}}\|_W^{1/n_{l_i}} \leq \limsup \|Q_n\|_W^{1/n} < 1$$

Assim, $f \in \mathcal{H}_{bk}(U;F)$.

Definamos $\gamma_i = n_{l_i}$, então $f = \sum P_i \in \mathcal{H}_{bk}(U;F) \backslash \mathcal{H}_b(U;F)$ satisfaz o Lema. □

Note que, a parte (b) do Lema anterior implica que

$$\frac{1}{(\gamma_n+1)^{r/\gamma_n}} \geq \frac{1}{e}$$

para cada $1 \leq r \leq n$.

Lema 3.2.2 *[8, Lema 6] Sejam (P_n), (γ_n) e (x_n) as seqüências dadas pelo Lema 3.2.1. Então para cada seqüência estritamente crescente de inteiros positivos $(m_i)_{i=1}^{\infty}$, existe uma seqüência de inteiros $(j_{n,m_1,m_2,\ldots,m_i})_{n\geq 1}$, $i = 1, 2, \ldots$ tais que*

(a)

$$0 \leq \sum_{s=1}^{i} j_{n,m_1,m_2,\ldots,m_s} \leq \gamma_n$$

para cada $i \geq 1$ e $n \geq 1$.

(b) Se $\gamma_{n,i} = \gamma_n - \sum_{s=1}^{i} j_{n,m_1,m_2,\ldots,m_s}$*, então*

$$\|(P_n)^{m_1,m_2,,\ldots,m_i}_{j_{n,m_1},j_{n,m_1,m_2},\ldots,j_{n,m_1,m_2,\ldots,m_i},\gamma_{n,i}}(x_n)\|^{1/\gamma_n} \geq \frac{1}{(\gamma_n+1)^{i/\gamma_n}}$$

para cada $i \geq 1$ *e* $n \geq 1$.

Demonstração. Seja A_n a aplicação γ_n-linear associada com P_n. Por indução sobre i.

Para $i = 1$.

$$\begin{aligned}
\|P_n(x_n)\| = \|A_n(x_n)^{\gamma_n}\| &= \|A_n(q^{m_1}(x_n) + q_{m_1}(x_n))^{\gamma_n}\| \\
&= \|\sum_{j=0}^{\gamma_n} \frac{\gamma_n!}{j!(\gamma_n-j)!} A_n(q^{m_1}(x_n)^j q_{m_1}(x_n)^{\gamma_n-j})\| \\
&= \|\sum_{j=0}^{\gamma_n} (P_n)^{m_1}_{j,\gamma_n-j}(x_n)\| \\
&\leq \sum_{j=0}^{\gamma_n} \|(P_n)^{m_1}_{j,\gamma_n-j}(x_n)\|
\end{aligned}$$

Escolha um inteiro j_{n,m_1} , $0 \leq j_{n,m_1} \leq \gamma_n$ tal que

$$\|(P_n)^{m_1}_{j_{n,m_1},\gamma_n-j_{n,m_1}}(x_n)\| = \max_{0\leq j\leq\gamma_n} \|(P_n)^{m_1}_{j,\gamma_n-j}(x_n)\|$$

para cada $n \geq 1$. Então

$$\|P_n(x_n)\| = (\gamma_n+1)\|(P_n)^{m_1}_{j_{n,m_1},\gamma_n-j_{n,m_1}}(x_n)\|$$

Assim, pelo Lema 3.2.1 temos que

$$\|(P_n)^{m_1}_{j_{n,m_1},\gamma_n-j_{n,m_1}}(x_n)\|^{1/\gamma_n} \geq \frac{1}{(\gamma_n+1)^{1/\gamma_n}}\|P_n(x_n)\|^{1/\gamma_n} \geq \frac{1}{(\gamma_n+1)^{1/\gamma_n}}$$

para cada $n \geq 1$.

Para $i = 2$. Usando a relação (3.1) e a notação $\gamma_{n,1} = \gamma_n - j_{n,m_1}$ temos que

$$\begin{aligned}
\|(P_n)^{m_1}_{j_{n,m_1},\gamma_{n,1}}(x_n)\| &= \|\sum_{j=0}^{\gamma_{n,1}} (P_n)^{m_1,m_2}_{j_{n,m_1},j,\gamma_{n,1}-j}(x_n)\| \\
&\leq \sum_{j=0}^{\gamma_{n,1}} \|(P_n)^{m_1,m_2}_{j_{n,m_1},j,\gamma_{n,1}-j}(x_n)\|
\end{aligned}$$

Escolha um inteiro j_{n,m_1,m_2} , $0 \leq j_{n,m_1,m_2} \leq \gamma_{n,1} = \gamma_n - j_{n,m_1}$ tal que

$$\|(P_n)^{m_1,m_2}_{j_{n,m_1},j_{n,m_1,m_2},\gamma_{n,1}-j_{n,m_1,m_2}}(x_n)\| = \max_{0\leq j\leq\gamma_{n,1}} \|(P_n)^{m_1,m_2}_{j_{n,m_1},j,\gamma_{n,1}-j}(x_n)\|$$

para cada $n \geq 1$.

Definamos $\gamma_{n,2} = \gamma_n - j_{n,m_1} - j_{n,m_1,m_2}$. Então

$$\begin{aligned} \|(P_n)^{m_1}_{j_{n,m_1},\gamma_{n,1}}(x_n)\| &\leq \sum_{j=0}^{\gamma_{n,1}} \|(P_n)^{m_1,m_2}_{j_{n,m_1},j_{n,m_1,m_2},\gamma_{n,2}}(x_n)\| \\ &= (\gamma_{n,1}+1)\|(P_n)^{m_1,m_2}_{j_{n,m_1},j_{n,m_1,m_2},\gamma_{n,2}}(x_n)\| \\ &\leq (\gamma_n+1)\|(P_n)^{m_1,m_2}_{j_{n,m_1},j_{n,m_1,m_2},\gamma_{n,2}}(x_n)\| \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \|(P_n)^{m_1,m_2}_{j_{n,m_1},j_{n,m_1,m_2},\gamma_{n,2}}(x_n)\|^{1/\gamma_n} &\geq \frac{1}{(\gamma_n+1)^{1/\gamma_n}}\|(P_n)^{m_1}_{j_{n,m_1},\gamma_{n,1}}(x_n)\|^{1/\gamma_n} \\ &\geq \frac{1}{(\gamma_n+1)^{1/\gamma_n}}\frac{1}{(\gamma_n+1)^{1/\gamma_n}} = \frac{1}{(\gamma_n+1)^{2/\gamma_n}} \end{aligned}$$

para cada $n \geq 1$.

Procedendo indutivamente obtemos o Lema. □

Nota 3.2.3 Em [8, Lemma 6], para cada seqüência estritamente crescente $(m_i)_{i\geq 1}$ de inteiros positivos, Carrión encontra seqüências de inteiros $(j_{n,m_i})_{n\geq i}$ com certas propriedades. Manuel Valdivia observou que quando $i \geq 2$ o inteiro j_{n,m_i} depende não só de n e m_i, mas também de $m_1, m_2, ..., m_{i-1}$. A notação j_{n,m_i} é infeliz, e é a origem da falha na prova de [8, Teorema 11]. De fato em [8, p. 512] Carrión afirma que

$$\frac{j_{n_2,m_2(s_l)}}{\gamma_{n_2}} \geq \inf_s \frac{j_{n_2,m_2(s)}}{\gamma_{n_2}} = \sigma_2 > 0.$$

Veremos que esta afirmação não está justificada. Seguindo a sugestão de Valdivia denotamos j_{n,m_i} por $j_{n,m_1,m_2,...,m_i}$ no Lema 3.2.2. Com esta notação [8, Lemma 10] garante a existência de $n_2 > 2$ tal que

$$\sigma_2 = \inf_{s\geq 1} \frac{j_{n_2,m_1(1),m_2(s)}}{\gamma_{n_2}} > 0.$$

Por outro lado, na prova de [8, Theorem 11] Carrión acha uma seqüência (s_l) tal que $\|q_{m_1(s_l)}(x_{n_2})\| < 2^{-l/\sigma_2}$. Então os cálculos na prova de [8, Theorem 11] mostram que, para provar o Teorema será suficiente provar a desigualdade

$$\frac{j_{n_2,m_1(s_l),m_2(s_l)}}{\gamma_{n_2}} \geq \inf_{s\geq 1} \frac{j_{n_2,m_1(1),m_2(s)}}{\gamma_{n_2}} = \sigma_2 > 0.$$

Infelizmente não está claro que esta desigualdade seja verdadeira, pois a seqüência do lado esquerdo não é necessariamente uma subseqüência da seqüência do lado direito.

De agora em diante E denotará um espaço de Banach com uma base contrátil e incondicional, e U será uma bola centrada na origem. Sempre que E tenha base incondicional, suporemos que E tem a norma dada no Lema 1.3.2(b).

Para $\Omega \subset E$ definamos o conjunto

$$\Omega((m_i)_{i=0}^j) = \{\sum_{i=1}^{j} \theta_i q_{m_{i-1}}^{m_i}(x) + \theta_{j+1} q_{m_j}(x) : x \in \Omega; |\theta_i| = 1\},$$

por convenção $m_0 = 0$. Para cada $l \in \mathbb{N}$ com $l \geq m_j$

$$\Omega((m_i)_{i=0}^j, l) = \{\sum_{i=1}^{j} \theta_i q_{m_{i-1}}^{m_i}(x) + \theta_{j+1} q_{m_j}^{l}(x) + \theta_{j+2} q_l(x) : x \in \Omega; |\theta_i| = 1\}.$$

Observe que $\Omega((m_i)_{i=0}^j, m_j) = \Omega((m_i)_{i=0}^j)$.

Lema 3.2.4 *Seja E um espaço de Banach com uma base contrátil e incondicional, e seja U uma bola centrada na origem. Seja $\Omega \subset E$ fracamente compacto e U-limitado. Então:*

(a) Para cada j fixo,

$$\bigcup_{l \geq m_j} \Omega((m_i)_{i=0}^j, l)$$

é fracamente compacto e U-limitado.

(b) Seja $f = \sum_{n_l} P_{n_l} \in \mathcal{H}_{bk}(U;F)$

$$\limsup \|(P_{n_l})_{k_1,k_2,\ldots,k_{j+2}}^{m_1,m_2,\ldots m_j,l}\|_\Omega^{1/\gamma_{n_l}} < 1.$$

Demonstração. **(a)** [8, Lemma 3] afirma que o conjunto

$$\bigcup_{l > m_j} \Omega((m_i)_{i=0}^j, l)$$

é relativamente fracamente compacto. Mas um exame da prova de [8, Lemma 3] mostra que o conjunto

$$\bigcup_{l \geq m_j} \Omega((m_i)_{i=0}^j, l)$$

é fracamente compacto.

Agora, suponha que $U = rB_E$. Como Ω é U-limitado então $\epsilon = d(\Omega, \partial U) > 0$ assim $\Omega \subset (r - \epsilon/2)B_E \subset U$. A hipótese de base incondicional com a norma dada no Lema 1.3.2 implica que $\Omega((m_i)_{i=0}^j, l) \subset (r - \epsilon/2)B_E$ para cada $l \geq m_j$. Assim

$$\bigcup_{l \geq m_j} \Omega((m_i)_{i=0}^j, l)) \subset (r - \epsilon/2)B_E \subset U$$

Portanto $\bigcup_{l\geq m_j} \Omega((m_i)_{i=0}^j, l))$ é U-limitado.

(b) Por (a) e Teorema 1.1.5 temos que

$$\limsup \|(P_{n_l})_{k_1,k_2,\ldots,k_{j+2}}^{m_1,m_2,\ldots m_j,l}\|_\Omega^{1/\gamma_{n_l}} \leq \limsup \|P_{n_l}\|_{\bigcup_{l\geq m_j}\Omega((m_i)_{i=0}^j,l)}^{1/\gamma_{n_l}} < 1.$$

□

Lema 3.2.5 *1. Existe* $l_1 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\liminf_{n\geq 1} \frac{j_{n,l_1}}{\gamma_n} > 0$$

2. Existem $\delta_1 > 0$ *e uma seqüência estritamente crescente* $(r_1(n))$ *de inteiros positivos tal que*

(a) $r_1(1) \geq 1$

(b) $\lim_n \frac{j_{r_1(n),l_1}}{\gamma_{r_1(n)}} = \delta_1$.

(c) Para cada $n \geq 1$, $\frac{\delta_1}{2} < \frac{j_{r_1(n),l_1}}{\gamma_{r_1(n)}} < 2\delta_1$.

(d) $0 < \delta_1 < 1$

Demonstração. 1. Suponhamos que $\liminf_{n\geq 1} \frac{j_{n,l}}{\gamma_n} = 0$ para todo $l \in \mathbb{N}$. Assim para cada $l \in \mathbb{N}$ existe $n_l \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{j_{n_l,l}}{\gamma_{n_l}} < \frac{1}{l}.$$

Passando a uma subseqüência podemos assumir que (n_l) é estritamente crescente. Temos dois casos:

Caso 1. Para infinitos índices n_l, $j_{n_l,l} = 0$. Podemos supor sem perda de generalidade que $j_{n_l,l} = 0$ para todo $l \in \mathbb{N}$. Então pelo Lema 3.2.2 temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\gamma_{n_l}+1)^{1/\gamma_{n_l}}} \leq \|(P_{n_l})_{j_{n_l,l};\gamma_{n_l}-j_{n_l,l}}^l(x_{n_l})\|^{1/\gamma_{n_l}} &= \|(P_{n_l})_{0,\gamma_{n_l}}^l(x_{n_l})\|^{1/\gamma_{n_l}} \\ &= \|P_{n_l}(q_l(x_{n_l}))\|^{1/\gamma_{n_l}} \end{aligned}$$

para todo $l \in \mathbb{N}$. Assim

$$\liminf \|P_{n_l}(q_l(x_{n_l}))\|^{1/\gamma_{n_l}} \geq 1.$$

Por outro lado, desde que E tem uma base contrátil, a seqüência $(q_l(x_{n_l}))$ converge fracamente a 0, daqui $W = \{q_l(x_{n_l}) : l \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ é fracamente compacto. Como (x_{n_l}) é U-limitado e E tem base incondicional, segue que W é U- limitado. Portanto, pelo Lema 3.2.4(b), temos que

$$\limsup \|P_{n_l}(q_l(x_{n_l}))\|^{1/\gamma_{n_l}} \leq \limsup \|P_{n_l}\|_W^{1/\gamma_{n_l}} < 1,$$

contradição.

Caso 2. Para infinitos índices n_l, $j_{n_l,l} > 0$. Podemos supor sem perda de generalidade que $j_{n_l,l} > 0$ para todo $l \in \mathbb{N}$. Se definimos $\alpha_l = \exp\left(-\sqrt{\frac{\gamma_{n_l}}{j_{n_l,l}}}\right)$, então $0 < \alpha_l \leq 1$, $(\alpha_l)_{l\in\mathbb{N}} \in c_0$ e $\lim \alpha_l^{j_{n_l,l}/\gamma_{n_l}} = 1$ quando $l \to \infty$.

Seja $y_l = \alpha_l q^l(x_{n_l}) + q_l(x_{n_l})$. Então

$$\begin{aligned}
\|(P_{n_l})^l_{j_{n_l,l},\gamma_{n_l}-j_{n_l,l}}(y_l)\|^{1/\gamma_{n_l}} &= \|(P_{n_l})^l_{j_{n_l,l},\gamma_{n_l}-j_{n_l,l}}(\alpha_l q^l(x_{n_l}) + q_l(x_{n_l}))\|^{1/\gamma_{n_l}} \\
&= \alpha_l^{\frac{j_{n_l,l}}{\gamma_{n_l}}} \|(P_{n_l})^l_{j_{n_l,l},\gamma_{n_l}-j_{n_l,l}}(x_{n_l})\|^{1/\gamma_{n_l}} \\
&\geq \alpha_l^{\frac{j_{n_l,l}}{\gamma_{n_l}}} \frac{1}{(\gamma_{n_l}+1)^{1/\gamma_{n_l}}}
\end{aligned}$$

para todo $l \in \mathbb{N}$. Assim

$$\liminf \|(P_{n_l})^l_{j_{n_l,l},\gamma_{n_l}-j_{n_l,l}}(y_l)\|^{1/\gamma_{n_l}} \geq 1.$$

Por outro lado, como E tem uma base contrátil temos que (y_l) converge fracamente a 0. Assim $W = \{y_l : l \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ é fracamente compacto. Agora, (x_{n_l}) U-limitada e E com uma base incondicional implica que W é um conjunto U- limitado. Pelo Lema 3.2.4 temos que

$$\limsup \|(P_{n_l})^l_{j_{n_l,l},\gamma_{n_l}-j_{n_l,l}}(y_l)\|^{1/\gamma_{n_l}} \leq \limsup \|(P_{n_l})^l_{j_{n_l,l},\gamma_{n_l}-j_{n_l,l}}\|^{1/\gamma_{n_l}}_W < 1$$

contradição. Isto prova 1.

2. Definamos $\delta_1 := \liminf_{n\geq 1} \frac{j_{n,l_1}}{\gamma_n}$. Claramente existe uma seqüência estritamente crescente $(r_1(n))$ de inteiros positivos com as propriedades (a), (b) e (c).

Provemos (d), ou seja, $\delta_1 < 1$. Suponha que

$$\liminf_n \frac{j_{n,l_1}}{\gamma_n} = 1.$$

Assim podemos encontrar uma subseqüência (n_k) tal que $\lim_k \frac{j_{n_k,l_1}}{\gamma_{n_k}} = 1$. Temos dois casos.

Caso 1. Para infinitos índices k, $j_{n_k,l_1} = \gamma_{n_k}$. Podemos supor sem perda de generalidade que $j_{n_k,l_1} = \gamma_{n_k}$ para cada k.

Seja $y_{n_k} = q^{l_1}(x_{n_k})$. Então pelo Lema 3.2.2 temos que

$$\begin{aligned}
\|(P_{n_k})^{l_1}_{j_{n_k,l_1},\gamma_{n_k}}(y_{n_k})\|^{1/\gamma_{n_k}} &= \|(P_{n_k})^{l_1}_{\gamma_{n_k},0}(q^{l_1}(x_{n_k}))\|^{1/\gamma_{n_k}} \\
&= \|(P_{n_k})^{l_1}_{j_{n_k,l_1},\gamma_{n_k}}(x_{n_k})\|^{1/\gamma_{n_k}} \geq \frac{1}{(\gamma_{n_k}+1)^{1/\gamma_{n_k}}}
\end{aligned}$$

para cada k. Portanto

$$\liminf \|(P_{n_k})^{l_1}_{j_{n_k,l_1},\gamma_{n_k}}(y_{n_k})\|^{1/\gamma_{n_k}} \geq 1.$$

Por outro lado, o conjunto $W = \overline{\{q^{l_1}(x_{n_k}) : k \geq 1\}}^{\|.\|}$ é compacto e está contido em U pois l_1 é fixo e (x_{n_k}) é U-limitado. Pelo Lema 3.2.4 temos que

$$\limsup \|(P_{n_k})^{l_1}_{j_{n_k,l_1}}(y_{n_k})\|^{1/\gamma_{n_k}} \leq \limsup \|(P_{n_k})^{l_1}_{j_{n_k,l_1}}\|^{1/\gamma_{n_k}}_W < 1,$$

contradição.

Caso 2. Para infinitos índices k, $j_{n_k,l_1} < \gamma_{n_k}$. Podemos supor sem perda de generalidade que $j_{n_k,l_1} < \gamma_{n_k}$ para cada k. Se definimos $\alpha_k = \exp\left(-\sqrt{\frac{\gamma_{n_k}}{\gamma_{n_k} - j_{n_k,l_1}}}\right)$, então $0 < \alpha_k \leq 1$, $(\alpha_k) \in c_0$ e $\lim \alpha_k^{\frac{\gamma_{n_k} - j_{n_k,l_1}}{\gamma_{n_k}}} = 1$ quando $k \to \infty$.

Seja $y_k = q^{l_1}(x_{n_k}) + \alpha_k q_{l_1}(x_{n_k})$. Então

$$\begin{aligned}
\|(P_{n_k})^{l_1}_{j_{n_k,l_1}}(y_{n_k})\|^{1/\gamma_{n_k}} &= \|(P_{n_k})^{l_1}_{j_{n_k,l_1}}(q^{l_1}(x_{n_k}) + \alpha_k q_{l_1}(x_{n_k}))\|^{1/\gamma_{n_k}} \\
&= \alpha_k^{\frac{\gamma_{n_k} - j_{n_k,l_1}}{\gamma_{n_k}}} \|(P_{n_k})^{l_1}_{j_{n_k,l_1}}(x_{n_k})\|^{1/\gamma_{n_k}} \\
&\geq \alpha_k^{\frac{\gamma_{n_k} - j_{n_k,l_1}}{\gamma_{n_k}}} \frac{1}{(\gamma_{n_k}+1)^{1/\gamma_{n_k}}}
\end{aligned}$$

Portanto

$$\liminf \|(P_{n_k})^{l_1}_{j_{n_k,l_1}},(y_{n_k})\|^{1/\gamma_{n_k}} \geq 1$$

Por outro lado, o conjunto $W = \{y_k : k \geq 1\} \cup \overline{\{q^{l_1}(x_{n_k}) : k \geq 1\}}^{\|.\|}$ é um conjunto compacto contido em U pois l_1 é fixo e $\lim \alpha_k q_{l_1}(x_{n_k}) = 0$. Pelo Lema 3.2.4 segue que

$$\limsup \|(P_{n_k})^{l_1}_{j_{n_k,l_1}}(y_{n_k})\|^{1/\gamma_{n_k}} \leq \limsup \|(P_{n_k})^{l_1}_{j_{n_k,l_1}}\|^{1/\gamma_{n_k}}_W < 1,$$

contradição. Isto prova (d). □

Lema 3.2.6 *Seja $l_1 \in \mathbb{N}$ dado pelo Lema 3.2.5. Então*

1. *Existe $l_2 \in \mathbb{N}$, $l_2 > l_1$, tal que*
$$\liminf_{n \geq 1} \frac{j_{n,l_1,l_2}}{\gamma_n} > 0$$
2. *Existem $\delta_2 > 0$ e uma subseqüência estritamente crescente $(r_2(n)) \subset (r_1(n))$ tal que*
   - *(a)* $r_2(2) \geq 2$
   - *(b)* $\lim_n \frac{j_{r_2(n),l_1,l_2}}{\gamma_{r_2(n)}} = \delta_2$.
   - *(c) Para cada $n \geq 1$ temos que*
$$\frac{\delta_2}{2} < \frac{j_{r_2(n),l_1,l_2}}{\gamma_{r_2(n)}} < 2\delta_2.$$

(d) $0 < \delta_1 + \delta_2 < 1$

Demonstração. **1.** Suponha que para todo $l > l_1$ temos que $\liminf_{n\geq 1} \frac{j_{n,l_1,l}}{\gamma_n} = 0$. Então para cada $l > l_1$ existe $n_l \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{j_{n_l,l_1,l}}{\gamma_{n_l}} < \frac{1}{l}.$$

Passando a uma subseqüência podemos assumir que (n_l) é estritamente crescente. Assim $\lim_l \frac{j_{n_l,l_1,l}}{\gamma_{n_l}} = 0$. Temos dois casos:

Caso 1. Para infinitos índices n_l, $j_{n_l,l_1,l} = 0$. Podemos supor sem perda de generalidade que $j_{n_l,l_1,l} = 0$ para todo $l > l_1$. Então pelo Lema 3.2.2 temos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{(\gamma_{n_l}+1)^{2/\gamma_{n_l}}} \leq \|(P_{n_l})^{l_1,l}_{j_{n_l,l_1},j_{n_l,l_1,l},\gamma_{n_l,2}}(x_{n_l})\|^{1/\gamma_{n_l}} &= \|(P_{n_l})^{l_1,l}_{j_{n_l,l_1},0,\gamma_{n_l}-j_{n_l,l_1}}(x_{n_l})\|^{1/\gamma_{n_l}} \\ &= \|(P_{n_l})^{l_1,l}_{j_{n_l,l_1},0,\gamma_{n_l}-j_{n_l,l_1}}(q^{l_1}(x_{n_l})+q_l(x_{n_l}))\|^{1/\gamma_{n_l}}\end{aligned}$$

para todo $l > l_1$.

Assim

$$\liminf \|(P_{n_l})^{l_1,l}_{j_{n_l,l_1},0,\gamma_{n_l}-j_{n_l,l_1}}(q^{l_1}(x_{n_l})+q_l(x_{n_l}))\|^{1/\gamma_{n_l}} \geq 1.$$

Por outro lado, como $\lim q_l(x_{n_l})$ converge fracamente a 0 e l_1 é fixo, segue que

$$W = \{q^{l_1}(x_{n_l}) + q_l(x_{n_l}) : l > l_1\} \cup \overline{\{q^{l_1}(x_{n_l}) : l \geq l_1\}}^{\|.\|}$$

é fracamente compacto. Agora, (x_{n_l}) U-limitada e E com base incondicional implica que W é U-limitado. Pelo Lema 3.2.4 segue que

$$\limsup \|(P_{n_l})^{l_1,l}_{j_{n_l,l_1},0,\gamma_{n_l}-j_{n_l,l_1}}(q^{l_1}(x_{n_l})+q_l(x_{n_l}))\|^{1/\gamma_{n_l}} \leq \limsup \|(P_{n_l})^{l_1,l}_{j_{n_l,l_1},0,\gamma_{n_l}-j_{n_l,l_1}}\|^{1/\gamma_{n_l}}_W < 1,$$

contradição.

Caso 2. Para infinitos índices n_l, $j_{n_l,l_1,l} > 0$. Podemos supor sem perda de generalidade que $j_{n_l,l_1,l} > 0$ para todo $l > l_1$. Se definimos $\alpha_l = \exp\left(-\sqrt{\frac{\gamma_{n_l}}{j_{n_l,l_1,l}}}\right)$, então $0 < \alpha_l \leq 1$, $(\alpha_l)_{l\in\mathbb{N}} \in c_0$ e $\lim \alpha_l^{\frac{j_{n_l,l_1,l}}{\gamma_{n_l}}} = 1$ quando $l \to \infty$.

Seja $y_l = q^{l_1}(x_{n_l}) + \alpha_l q^l_{l_1}(x_{n_l}) + q_l(x_{n_l})$. Então

$$\begin{aligned}\|(P_{n_l})^{l_1,l}_{j_{n_l,l_1},j_{n_l,l_1,l},\gamma_{n_l,2}}(y_l)\|^{1/\gamma_{n_l}} &= \|(P_{n_l})^{l_1,l}_{j_{n_l,l_1},j_{n_l,l_1,l},\gamma_{n_l,2}}(q^{l_1}(x_{n_l})+\alpha_l q^l_{l_1}(x_{n_l})+q_l(x_{n_l}))\|^{1/\gamma_{n_l}} \\ &= \alpha_l^{\frac{j_{n_l,l_1,l}}{\gamma_{n_l}}} \|(P_{n_l})^{l_1,l}_{j_{n_l,l_1},j_{n_l,l_1,l},\gamma_{n_l,2}}(x_{n_l})\|^{1/\gamma_{n_l}} \\ &\geq \alpha_l^{\frac{j_{n_l,l_1,l}}{\gamma_{n_l}}} \frac{1}{(\gamma_{n_l}+1)^{2/\gamma_{n_l}}}\end{aligned}$$

para todo $l > l_1$. Assim

$$\liminf \|(P_{n_l})^{l_1,l}_{j_{n_l,l_1},j_{n_l,l_1,l},}(y_l)\|^{1/\gamma_{n_l}} \geq 1.$$

Por outro lado, como (x_{n_l}) é U-limitado, $\alpha_l q^l_{l_1}(x_{n_l}) + q_l(x_{n_l})$ converge fracamente a 0, e o Lema 3.2.4(a) implica que $W = \{y_l : l > l_1\} \cup \overline{\{q^{l_1}(x_{n_k}) : k \geq 1\}}^{\|.\|}$ é fracamente compacto e U-limitado. Pelo Lema 3.2.4 (b) segue que

$$\limsup \|(P_{n_l})^{l_1,l}_{j_{n_l,l_1},j_{n_l,l_1,l},\gamma_{n_l,2}}(y_l)\|^{1/\gamma_{n_l}} \leq \limsup \|(P_{n_l})^{l_1,l}_{j_{n_l,l_1},j_{n_l,l_1,l},\gamma_{n_l,2}}\|^{1/\gamma_{n_l}}_W < 1,$$

contradição. Isto prova 1.

2. Como $(r_1(n)) \subset (n)_{n\geq 1}$ temos por (a) que

$$0 < \liminf_{n\geq 1} \frac{j_{n,l_1,l_2}}{\gamma_n} \leq \liminf_{n\geq 1} \frac{j_{r_1(n),l_1,l_2}}{\gamma_{r_1(n)}}$$

Definamos $\delta_2 := \liminf_{n\geq 1} \frac{j_{r_1(n),l_1,l_2}}{\gamma_{r_1(n)}}$. Claramente existe uma subseqüência estritamente crescente $(r_2(n)) \subset (r_1(n))$ com as propriedades (a), (b) e (c).

Provemos (d). Pela definição de δ_1 e $(r_2(n)) \subset (r_1(n))$ temos que

$$\delta_1 = \lim_{n\geq 1} \frac{j_{r_1(n),l_1}}{\gamma_{r_1(n)}} = \lim_{n\geq 1} \frac{j_{r_2(n),l_1}}{\gamma_{r_2(n)}}.$$

Como $0 \leq j_{n,l_1} \leq \gamma_n - j_{n,l_1,l_2}$ para cada $n \geq 2$ temos que

$$\frac{j_{n,l_1}}{\gamma_n} + \frac{j_{n,l_1,l_2}}{\gamma_n} \leq 1.$$

Logo

$$\frac{j_{r_2(n),l_1}}{\gamma_{r_2(n)}} + \frac{j_{r_2(n),l_1,l_2}}{\gamma_{r_2(n)}} \leq 1,$$

para cada $n \geq 2$, e portanto

$$0 < \delta_1 + \delta_2 = \lim \frac{j_{r_2(n),l_1}}{\gamma_{r_2(n)}} + \lim \frac{j_{r_2(n),l_1,l_2}}{\gamma_{r_2(n)}} \leq 1.$$

Provemos que $\delta_1 + \delta_2 < 1$. Suponha que $\delta_1 + \delta_2 = 1$, ou seja, $\lim \frac{j_{r_2(n),l_1}}{\gamma_{r_2(n)}} + \lim \frac{j_{r_2(n),l_1,l_2}}{\gamma_{r_2(n)}} = 1$.

Para simplificar a notação escreveremos (n) no lugar de $(r_2(n))$. Então

$$\lim_n \{\frac{j_{n,l_1}}{\gamma_n} + \frac{j_{n,l_1,l_2}}{\gamma_n}\} = 1.$$

Temos dois casos:

Caso 1. Para infinitos índices n, $j_{n,l_1} + j_{n,l_1,l_2} = \gamma_n$. Podemos assumir sem perda de generalidade que $j_{n,l_1} + j_{n,l_1,l_2} = \gamma_n$ para todo n.

Seja $y_n = q^{l_2}(x_n)$. Então pelo Lema 3.2.2 temos que

$$\begin{aligned}\|(P_n)^{l_1,l_2}_{j_{n,l_1},j_{n,l_1,l_2},\gamma_{n,2}}(y_n)\|^{1/\gamma_n} &= \|(P_n)^{l_1,l_2}_{j_{n,l_1},j_{n,l_1,l_2},0}(q^{l_2}(x_n))\|^{1/\gamma_n} \\ &= \|(P_n)^{l_1,l_2}_{j_{n,l_1},j_{n,l_1,l_2},0}(x_n)\|^{1/\gamma_n} \geq \frac{1}{(\gamma_n+1)^{2/\gamma_n}}\end{aligned}$$

para cada n, onde $\gamma_{n,2} = \gamma_n - j_{n,l_1} - j_{n,l_1,l_2}$. Portanto

$$\liminf \|(P_n)^{l_1,l_2}_{j_{n,l_1},j_{n,l_1,l_2},0}(q^{l_2}(x_n))\|^{1/\gamma_n} \geq 1.$$

Por outro lado, o conjunto $W = \overline{\{q^{l_2}(x_n) : n \geq 1\}}^{\|.\|}$ é compacto e está contido em U, uma vez que l_2 é fixo. Pelo Lema 3.2.4 segue que

$$\limsup \|(P_n)^{l_1,l_2}_{j_{n,l_1},j_{n,l_1,l_2},0}(q^{l_2}(x_n))\|^{1/\gamma_n} \leq \|(P_n)^{l_1,l_2}_{j_{n,l_1},j_{n,l_1,l_2},0}\|^{1/\gamma_n}_W < 1,$$

contradição.

Caso 2. Para infinitos índices n, $j_{n,l_1} + j_{n,l_1,l_2} < \gamma_n$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $j_{n,l_1} + j_{n,l_1,l_2} < \gamma_n$ para cada n. Se definimos $\alpha_n = \exp\left(-\sqrt{\frac{\gamma_n}{\gamma_{n,2}}}\right)$, então $0 < \alpha_n \leq 1$, $(\alpha_n) \in c_0$ e $\lim \alpha_n^{\frac{\gamma_{n,2}}{\gamma_n}} = 1$ quando $n \to \infty$.

Seja $y_n = q^{l_2}(x_n) + \alpha_n q_{l_2}(x_n)$. Então

$$\begin{aligned}\|(P_n)^{l_1,l_2}_{j_{n,l_1},j_{n,l_1,l_2},\gamma_{n,2}}(y_n)\|^{1/\gamma_n} &= \|(P_n)^{l_1,l_2}_{j_{n,l_1},j_{n,l_1,l_2},\gamma_{n,2}}(q^{l_2}(x_n) + \alpha_n q_{l_2}(x_n))\|^{1/\gamma_n} \\ &\geq \alpha_l^{\frac{\gamma_{n,2}}{\gamma_n}} \|(P_n)^{l_1,l_2}_{j_{n,l_1},j_{n_l,l_1,l_2},\gamma_{n,2}}(x_n)\|^{1/\gamma_n} \geq \alpha_n^{\frac{\gamma_{n,2}}{\gamma_n}} \frac{1}{(\gamma_n+1)^{2/\gamma_n}}\end{aligned}$$

para cada n, onde $\gamma_{n,2} = \gamma_n - j_{n,l_1} - j_{n,l_1,l_2}$. Assim

$$\liminf \|(P_n)^{l_1,l_2}_{j_{n,l_1},j_{n,l_1,l_2},\gamma_{n,2}}(y_n)\|^{1/\gamma_n} \geq 1.$$

Por outro lado, $W = \{y_n : n \geq 1\} \cup \overline{\{q^{l_2}(x_n) : n \geq 1\}}^{\|.\|}$ é um conjunto compacto contido em U, pois l_2 é fixo e $(\alpha_n) \in c_0$. Pelo Lema 3.2.4 segue que

$$\limsup \|(P_n)^{l_1,l_2}_{j_{n,l_1},j_{n,l_1,l_2},\gamma_{n,2}}(y_n)\|^{1/\gamma_n} \leq \|(P_n)^{l_1,l_2}_{j_{n,l_1},j_{n,l_1,l_2},\gamma_{n,2}}\|^{1/\gamma_n}_W < 1,$$

contradição. Isto prova (d). □

Lema 3.2.7 *Suponha que* $l_1 < l_2 < l_3 < ... < l_{k-1}$ *sejam tais que*

1. $\liminf_{n\geq 1} \frac{j_{n,l_1,l_2,l_3,...,l_{k-1}}}{\gamma_n} > 0$.

2. *Existem* $\delta_i > 0$ *para* $i = 1, 2..., k-1$ *e subseqüências estritamente crescentes*

$$(r_{k-1}(n)) \subset \ldots \subset (r_2(n)) \subset (r_1(n))$$

tais que

   (a) $r_{k-1}(k-1) \geq k-1$.

   (b) $\lim_n \frac{j_{r_i(n),l_1,l_2,\ldots,l_{k-1}}}{\gamma_{r_i(n)}} = \delta_i$.

   (c) *Para cada* $n \geq 1$ *temos que* $\frac{\delta_i}{2} < \frac{j_{r_i(n),l_1,l_2,\ldots,l_{k-1}}}{\gamma_{r_i(n)}} < 2\delta_i$.

   (d) $0 < \sum_{i=1}^{k-1} \delta_i < 1$.

Então:

1. *Existe* $l_k > l_{k-1}$ *tal que*

$$\liminf_{n\geq 1} \frac{j_{n,l_1,l_2,\ldots,l_{k-1},l_k}}{\gamma_n} > 0.$$

2. *Existem* $\delta_k > 0$ *e uma subseqüência estritamente crescente*

$$(r_k(n)) \subset (r_{k-1}(n)) \subset \ldots \subset (r_2(n)) \subset (r_1(n))$$

tais que

   (a) $r_k(k) \geq k$.

   (b) $\lim_n \frac{j_{r_k(n),l_1,l_2,\ldots,l_k}}{\gamma_{r_k(n)}} = \delta_k$.

   (c) *Para cada* $n \geq 1$ *temos que* $\frac{\delta_k}{2} < \frac{j_{r_k(n),l_1,l_2,\ldots,l_k}}{\gamma_{r_k(n)}} < 2\delta_k$.

   (d) $0 < \sum_{i=1}^{k} \delta_i < 1$.

Demonstração. 1. Suponha que para todo $l > l_{k-1}$ temos que $\liminf_{n\geq 1} \frac{j_{n,l_1,l_2,l_3,\ldots,l_{k-1},l}}{\gamma_n} = 0$. Então para cada $l > l_{k-1}$ existe $n_l \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{j_{n_l,l_1,l_2,l_3,\ldots,l_{k-1},l}}{\gamma_{n_l}} < \frac{1}{l}.$$

Passando a uma subseqüência podemos supor que (n_l) é estritamente crescente. Assim

$$\lim_l \frac{j_{n_l,l_1,l_2,\ldots,l_{k-1},l}}{\gamma_{n_l}} = 0.$$

Temos dois casos:

Caso 1. Para infinitos índices n_l, $j_{n_l,l_1,l_2,\ldots,l_{k-1},l} = 0$. Podemos supor sem perda de generalidade que $j_{n_l,l_1,l_2,\ldots,l_{k-1},l} = 0$ para todo $l > l_{k-1}$. Então pelo Lema 3.2.2 temos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{(\gamma_{n_l}+1)^{k/\gamma_{n_l}}} &\leq \|(P_{n_l})^{l_1,l_2,\ldots l_{k-1},l}_{j_{n_l,l_1},j_{n_l,l_1,l_2},\ldots,j_{n,l_1,l_2,l_3,\ldots,l_{k-1},l},\gamma_{n_l,k}}(x_{n_l})\|^{1/\gamma_{n_l}} \\ &= \|(P_{n_l})^{l_1,l_2,\ldots l_{k-1},l}_{j_{n_l,l_1},j_{n_l,l_1,l_2},\ldots,j_{n,l_1,l_2,l_3,\ldots,l_{k-1}},0,\gamma_{n_l,k}}(x_{n_l})\|^{1/\gamma_{n_l}} \\ &= \|(P_{n_l})^{l_1,l_2,\ldots l_{k-1},l}_{j_{n_l,l_1},j_{n_l,l_1,l_2},\ldots,j_{n,l_1,l_2,l_3,\ldots,l_{k-1}},0,\gamma_{n_l,k}}(q^{l_{k-1}}(x_{n_l})+q_l(x_{n_l}))\|^{1/\gamma_{n_l}}\end{aligned}$$

para todo $l > l_{k-1}$. Assim

$$\liminf \|(P_{n_l})^{l_1,l_2,\ldots l_{k-1},l}_{j_{n_l,l_1},j_{n_l,l_1,l_2},\ldots,j_{n,l_1,l_2,l_3,\ldots,l_{k-1}},0,\gamma_{n_l,k}}(q^{l_{k-1}}(x_{n_l})+q_l(x_{n_l}))\|^{1/\gamma_{n_l}} \geq 1.$$

Por outro lado, como E tem uma base contrátil e l_{k-1} é fixo, temos que

$$W = \{q^{l_{k-1}}(x_{n_l}) + q_l(x_{n_l}) : l \geq 1\} \cup \overline{\{q^{l_{k-1}}(x_{n_l}) : l \geq 1\}}^{\|.\|}$$

é fracamente compacto. E com uma base incondicional e (x_{n_l}) U-limitada implica que W é U-limitado. Pelo Lema 3.2.4 segue que

$$\begin{aligned}&\limsup \|(P_{n_l})^{l_1,l_2,\ldots l_{k-1},l}_{j_{n_l,l_1},j_{n_l,l_1,l_2},\ldots,j_{n,l_1,l_2,l_3,\ldots,l_{k-1}},0,\gamma_{n_l,k}}(q^{l_{k-1}}(x_{n_l})+q_l(x_{n_l}))\|^{1/\gamma_{n_l}} \\ \leq\ &\limsup \|(P_{n_l})^{l_1,l_2,\ldots l_{k-1},l}_{j_{n_l,l_1},j_{n_l,l_1,l_2},\ldots,j_{n,l_1,l_2,l_3,\ldots,l_{k-1}},0,\gamma_{n_l,k}}\|^{1/\gamma_{n_l}}_W < 1,\end{aligned}$$

contradição.

Caso 2. Para infinitos índices n_l, $j_{n_l,l_1,l_2,l_3,\ldots,l_{k-1},l} > 0$. Podemos supor sem perda de generalidade que $j_{n_l,l_1,l_2,l_3,\ldots,l_{k-1},l} > 0$ para todo $l > l_{k-1}$. Se definimos $\alpha_l = \exp\left(-\sqrt{\frac{\gamma_{n_l}}{j_{n_l,l_1,l_2,l_3,\ldots,l_{k-1},l}}}\right)$, então $0 < \alpha_l \leq 1$, $(\alpha_l)_{l\in\mathbb{N}} \in c_0$ e $\lim_l \alpha_l^{\frac{j_{n_l,l_1,l_2,l_3,\ldots,l_{k-1},l}}{\gamma_{n_l}}} = 1$ quando $l \to \infty$.

Seja $y_l = q^{l_{k-1}}(x_{n_l}) + \alpha_l q^l_{l_{k-1}}(x_{n_l}) + q_l(x_{n_l})$. Então

$$\begin{aligned}\|(P_{n_l})^{l_1,l_2,..,l_{k-1},l}_{j_{n_l,l_1},..,j_{n_l,l_1,l_2,..,l_{k-1}},l,\gamma_{n_l,k}}(y_l)\|^{1/\gamma_{n_l}} &= \alpha_l^{\frac{j_{n_l,l_1,l_2,,,,l_{k-1},l}}{\gamma_{n_l}}} \|(P_{n_l})^{l_1,l_2,..,l_{k-1},l}_{j_{n_l,l_1},..,j_{n_l,l_1,l_2,..,l_{k-1}},l,\gamma_{n_l,k}}(x_{n_l})\|^{1/\gamma_{n_l}} \\ &\geq \alpha_l^{\frac{j_{n_l,l_1,l_2,\ldots,l_{k-1},l}}{\gamma_{n_l}}} \frac{1}{(\gamma_{n_l}+1)^{k/\gamma_{n_l}}}\end{aligned}$$

para todo $l > l_{k-1}$. Assim

$$\liminf \|(P_{n_l})^{l_1,l_2,\ldots,l_{k-1},l}_{j_{n_l,l_1},j_{n_l,l_1,l_2},\ldots,j_{n_l,l_1,l_2,l_3,\ldots,l_{k-1},l},\gamma_{n_l,k}}(y_l)\|^{1/\gamma_{n_l}} \geq 1.$$

Por outro lado, como E tem uma base contrátil, então $\lim \alpha_l q^l_{l_{k-1}}(x_{n_l}) + q_l(x_{n_l})$ converge fracamente a 0, e agora l_{k-1} fixo implica que $W = \{y_l : l \in \mathbb{N}\} \cup \overline{\{q^{l_{k-1}}(x_{n_l}) : l \geq 1\}}^{\|.\|}$ é fracamente

compacto. Como que E tem uma base incondicional e (x_{n_l}) é U-limitada, temos que W é U-limitado. Pelo Lema 3.2.4 segue que

$$\begin{aligned} & \limsup \|(P_{n_l})^{l_1,l_2,\ldots,l_{k-1},l}_{j_{n_l,l_1},j_{n_l,l_1,l_2},\ldots,j_{n_l,l_1,l_2,l_3,\ldots,l_{k-1},l},\gamma_{n_l,k}}(y_l)\|^{1/\gamma_{n_l}} \\ \leq & \limsup \|(P_{n_l})^{l_1,l_2,\ldots,l_{k-1},l}_{j_{n_l,l_1},j_{n_l,l_1,l_2},\ldots,j_{n_l,l_1,l_2,l_3,\ldots,l_{k-1},l},\gamma_{n_l,k}}\|^{1/\gamma_{n_l}}_W < 1 \end{aligned}$$

contradição. Isto prova 1.

(2.) Como $(r_{k-1}(n)) \subset (n))$ temos por (a) que

$$0 < \liminf_{n\geq 1} \frac{j_{n,l_1,l_2}}{\gamma_n} \leq \liminf_{n\geq 1} \frac{j_{r_{k-1}(n),l_1,l_2,\ldots,l_{k-1}}}{\gamma_{r_{k-1}(n)}}$$

Definamos $\delta_k := \liminf_{n\geq 1} \frac{j_{r_{k-1}(n),l_1,l_2,\ldots,l_{k-1}}}{\gamma_{r_{k-1}(n)}}$. Claramente existe uma subseqüência estritamente crescente $(r_k(n)) \subset (r_{k-1}(n))$ com as propriedades (a), (b) e (c).

Provemos (d). Seja $i < k$. Pela definição de δ_i e $(r_k(n)) \subset (r_i(n))$ temos que

$$\delta_i = \lim_{n\geq 1} \frac{j_{r_i(n),l_1,\ldots,l_i}}{\gamma_{r_i(n)}} = \lim_{n\geq 1} \frac{j_{r_k(n),l_1,\ldots,l_i}}{\gamma_{r_k(n)}}.$$

Como $0 \leq j_{n,l_1,\ldots,l_k} \leq \gamma_n - \sum_{i=1}^{k-1} j_{n,l_1,l_2,\ldots,l_i}$ para cada $n \geq 1$ então

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{j_{n,l_1,l_2,\ldots,l_i}}{\gamma_n} \leq 1$$

Segue dai que

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{j_{r_k(n),l_1,\ldots,l_i}}{\gamma_{r_k(n)}} \leq 1$$

para cada $n \geq 1$, e portanto

$$0 < \sum_{i=1}^{k} \delta_i = \sum_{i=1}^{k} \lim \frac{j_{r_k(n),l_1,\ldots,l_i}}{\gamma_{r_k(n)}} \leq 1.$$

Provemos que $\sum_{i=1}^{k} \delta_i < 1$. Suponha que $\sum_{i=1}^{k} \delta_i = 1$, isto é, $\sum_{i=1}^{k} \lim \frac{j_{r_k(n),l_1,\ldots,l_i}}{\gamma_{r_k(n)}} = 1$.

Para simplificar a notação escreveremos n em lugar de $r_k(n)$. Assim

$$\sum_{i=1}^{k} \lim \frac{j_{n,l_1,\ldots,l_i}}{\gamma_n} = 1.$$

Temos dois casos.

Caso 1. Para infinitos índices n, $\sum_{i=1}^{k} j_{n_l,l_1,l_2,\ldots,l_i} = \gamma_n$, ou seja, $\gamma_{n,k} = 0$. Podemos supor sem perda de generalidade que $\gamma_{n,k} = 0$ para cada n.

Seja $y_n = q^{l_k}(x_n)$. Então pelo Lema 3.2.2 temos que

$$\begin{aligned}\|(P_n)^{l_1,l_2,\dots,l_k}_{j_{n,l_1},j_{n,l_1,l_2},\dots,\gamma_{n,k}}(y_n)\|^{1/\gamma_n} &= \|(P_n)^{l_1,l_2,\dots,l_k}_{j_{n,l_1},j_{n,l_1,l_2},\dots,\gamma_{n,k}}(q^{l_k}(x_n))\|^{1/\gamma_n} \\ &= \|(P_n)^{l_1,l_2,\dots,l_k}_{j_{n,l_1},j_{n,l_1,l_2},\dots,\gamma_{n,k}}(x_n)\|^{1/\gamma_n} \geq \frac{1}{(\gamma_n+1)^{k/\gamma_n}}\end{aligned}$$

para todo n, onde $\gamma_{n,k} = \gamma_n - \sum_{i=1}^{k} j_{n,l_1,l_2,\dots,l_i}$. Assim

$$\liminf \|(P_n)^{l_1,l_2,\dots,l_k}_{j_{n,l_1},j_{n,l_1,l_2},\dots,\gamma_{n,k}}(q^{l_k}(x_n))\|^{1/\gamma_n} \geq 1.$$

Por outro lado, $W = \overline{\{q^{l_k}(x_n) : n \geq 1\}}^{\|.\|}$ é um conjunto compacto contido em U, pois l_k é fixo. Pelo Lema 3.2.4 temos que

$$\begin{aligned}&\lim \|(P_n)^{l_1,l_2,\dots,l_k}_{j_{n,l_1},j_{n,l_1,l_2},\dots,\gamma_{n,k}}(q^{l_k}(x_n))\|^{1/\gamma_n} \\ \leq\ &\|(P_n)^{l_1,l_2,\dots,l_k}_{j_{n,l_1},j_{n,l_1,l_2},\dots,\gamma_{n,k}}\|^{1/\gamma_n}_W < 1,\end{aligned}$$

contradição.

Caso 2. Para infinitos índices n, $\sum_{i=1}^{k} j_{n,l_1,l_2,\dots,l_i} < \gamma_n$, isto é, $\gamma_{n,k} > 0$. Podemos supor sem perda de generalidade que $\gamma_{n,k} > 0$ para cada n. Se definimos $\alpha_n = \exp\left(-\sqrt{\frac{\gamma_n}{\gamma_{n,k}}}\right)$, então $0 < \alpha_n \leq 1$, $(\alpha_n) \in c_0$ e $\lim_n \alpha_n^{\frac{\gamma_{n,k}}{\gamma_n}} = 1$.

Seja $y_n = q^{l_k}(x_n) + \alpha_n q_{l_k}(x_n)$. Então

$$\begin{aligned}\|(P_n)^{l_1,l_2,\dots,l_k}_{j_{n,l_1},j_{n,l_1,l_2},\dots,\gamma_{n,k}}(y_n)\|^{1/\gamma_n} &= \|(P_n)^{l_1,l_2,\dots,l_k}_{j_{n,l_1},j_{n,l_1,l_2},\dots,\gamma_{n,k}}(q^{l_k}(x_n) + \alpha_n q_{l_k}(x_n))\|^{1/\gamma_n} \\ &\geq \alpha_n^{\frac{\gamma_{n,k}}{\gamma_n}} \|(P_n)^{l_1,l_2,\dots,l_k}_{j_{n,l_1},j_{n,l_1,l_2},\dots,\gamma_{n,k}}(x_n)\|^{1/\gamma_n} \geq \alpha_n^{\frac{\gamma_{n,k}}{\gamma_n}} \frac{1}{(\gamma_n+1)^{k/\gamma_n}}\end{aligned}$$

para cada n, onde $\gamma_{n,k} = \gamma_n - \sum_{i=1}^{k} j_{n,l_1,l_2,\dots,l_i}$. Assim

$$\liminf \|(P_n)^{l_1,l_2,\dots,l_k}_{j_{n,l_1},j_{n,l_1,l_2},\dots,\gamma_{n,k}}(y_n)\|^{1/\gamma_n} \geq 1.$$

Por outro lado, o conjunto $W = \{y_n : n \geq 1\} \cup \overline{\{q^{l_k}(x_n) : n \geq 1\}}^{\|.\|}$ é compacto, pois l_k é fixo e $(\alpha_n) \in c_0$. Como (x_n) é U-limitado, W é U-limitado. Assim pelo Lema 3.2.4 segue que

$$\lim \|(P_n)^{l_1,l_2,\dots,l_k}_{j_{n,l_1},j_{n,l_1,l_2},\dots,\gamma_{n,k}}(y_n)\|^{1/\gamma_n} \leq \|(P_n)^{l_1,l_2,\dots,l_k}_{j_{n,l_1},j_{n,l_1,l_2},\dots,\gamma_{n,k}}\|^{1/\gamma_n}_W < 1,$$

contradição. Isto prova (d). □

Resumindo temos

Corolário 3.2.8 *Existem uma seqüência estritamente crescente* $(l_i)_{i\geq 1} \subset \mathbb{N}$*, uma seqüência de números positivos* (δ_i) *e seqüências estritamente crescentes* $(r_i(n))_{n\geq 1}$ *de inteiros positivos*

$$(r_i(n)) \subset (r_{i-1}(n)) \subset \ldots \subset (r_2(n)) \subset (r_1(n))$$

tais que

1. $r_k(k) \geq k$ *para cada* $k \geq 1$.
2. $\lim_n \frac{j_{r_k(n),l_1,l_2,\ldots,l_k}}{\gamma_{r_k(n)}} = \delta_k$ *para cada* $k \geq 1$
3. *Para cada* $n \geq 1$ *e* $k \geq 1$ *temos que* $\frac{\delta_k}{2} < \frac{j_{r_k(n),l_1,l_2,\ldots,l_k}}{\gamma_{r_k(n)}} < 2\delta_k$.
4. $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i \leq 1$
5. *Existe uma seqüência* (s_n) *tal que* $\frac{\delta_k}{2} < \frac{j_{s_n,l_1,l_2,\ldots,l_k}}{\gamma_{s_n}} < 2\delta_k$ *para cada* $k = 1, 2, ..., n$.

Demonstração. Os items $1, 2, 3, 4$ segue dos Lemas anteriores. Provemos (5). Seja $1 \leq k \leq n$. Então $(r_n(j))_{j\geq 1} \subset (r_k(j))_{j\geq 1}$ assim $r_n(n) = r_k(j)$ para algum $j \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$\frac{j_{r_n(n),l_1,l_2,\ldots,l_k}}{\gamma_{r_n(n)}} = \frac{j_{r_k(j),l_1,l_2,..,l_k}}{\gamma_{r_k(j)}}$$

Portanto por (3) temos que

$$\frac{\delta_k}{2} < \frac{j_{r_n(n),l_1,l_2,\ldots,l_k}}{\gamma_{r_n(n)}} < 2\delta_k.$$

Então defina $s_n := r_n(n)$ a seqüência diagonal. Assim (s_n) é a seqüência desejada.

□

Seja (x_n) uma seqüência em E, $(\epsilon_i) \in c_0$ e (ρ_i) uma seqüência de números positivos para cada j, definamos

$$(\epsilon_i) \otimes ((x_n), (m_i)_{i=0}^{j}, (\rho_i)_{i=1}^{j+1}) = \{\sum_{i=1}^{j} \epsilon_i \theta_i q_{m_{i-1}}^{m_i}(x_j) + \theta_{j+1} q_{m_j}(x_j) : |\theta_i| = \rho_i\}$$

onde $|\epsilon_i|\rho_i \leq 1$ para $1 \leq i \leq j$, e $\rho_{j+1} \leq 1$.

Lema 3.2.9 *Seja* E *um espaço de Banach com uma base contrátil e incondicional* (e_n)*, e a norma satisfazendo a condição do Lema 1.3.2.*

(a) Seja (x_n) *uma seqüência* U*-limitada e seja* $(\epsilon_i) \in c_0$ *com* $|\epsilon_1| > 1$ *e* $|\epsilon_i| \leq 1$ *para* $i \geq 2$*. Então existem* $j_0 \in \mathbb{N}$ *e uma seqüência de números positivos* (ρ_i) *tal que*

$$cl_w \left(\bigcup_{j\geq j_0} (\epsilon_i) \otimes ((x_n), (m_i)_{i=0}^{j}, (\rho_i)_{i=1}^{j+1}) \right)$$

é fracamente compacto e U*-limitado.*

(b) Seja $f = \sum_n P_n \in \mathcal{H}_{bk}(U;F)$ *e* $(\epsilon_i) \in c_0$ *com* $|\epsilon_1| > 1$ *e* $|\epsilon_i| \leq 1$ *para* $i \geq 2$. *Se* (x_n) *é* U*-limitado e* (a_n) *é definida por*

$$a_n = \sum_{s=1}^{n} \epsilon_s q_{m_{s-1}}^{m_s}(x_n) + q_{m_n}(x_n).$$

Então

$$\limsup \|(P_n)_{k_1,k_2,\ldots,k_{n+1}}^{m_1,m_2,\ldots,m_n}(a_n)\|^{1/\gamma_n} < 1$$

Demonstração. **(a)** Como $(\epsilon_j) \in c_0$ então existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\epsilon_{j_0}| \leq \dfrac{1}{|\epsilon_1|}$. Definamos

$$\rho_i = \begin{cases} \dfrac{1}{|\epsilon_i|} & i = 1,\, j_0 \\ 1 & i \neq 1,\, j_0 \end{cases}$$

Provemos que cada seqüência em $\bigcup_{j\geq j_0}(\epsilon_i) \otimes ((x_n), (m_i)_{i=0}^{j}, (\rho_i)_{i=1}^{j+1})$ tem uma subseqüência que converge fracamente.

Seja $(a_n) \subset \bigcup_{j\geq j_0}(\epsilon_i) \otimes ((x_n), (m_i)_{i=0}^{j}, (\rho_i)_{i=1}^{j+1})$. Passando a uma subseqüência, se necessário, temos os seguintes casos:

Caso 1. Existe um $j \geq j_0$ tal que

$$a_n \in (\epsilon_i) \otimes ((x_n), (m_i)_{i=0}^{j}, (\rho_i)_{i=1}^{j+1})$$

para cada $n \geq 1$. Como $(\epsilon_i) \otimes ((x_n), (m_i)_{i=0}^{j}, (\rho_i)_{i=1}^{j+1})$ é compacto, existe uma subseqüência de (a_n) que converge a $a \in (\epsilon_i) \otimes ((x_n), (m_i)_{i=0}^{j}, (\rho_i)_{i=1}^{j+1})$.

Caso 2. Podemos supor sem perda de generalidade que

$$a_j = \sum_{i=1}^{k_j} \epsilon_i \theta_i^j q_{m_{i-1}}^{m_i}(x_{k_j}) + \theta_{k_{j+1}}^j q_{m_{k_j}}(x_{k_j})$$

com (k_j) estritamente crescente.

Seja

$$\overline{a_j} = \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_i \theta_i^j q_{m_{i-1}}^{m_i}(x_{k_j}).$$

Pelo Lema 1.3.3 o conjunto $W = \{\overline{a_j} : j \geq 1\}$ é relativamente compacto e U-limitado. Passando a uma subseqüência, se necessario, podemos supor que existe $\lim \overline{a_j} = a \in cl_E W$.

Por outro lado,

$$\overline{a_j} - a_j = \sum_{i=k_j+1}^{\infty} \epsilon_i \theta_i^j q_{m_{i-1}}^{m_i}(x_{k_j}) - \theta_{k_{j+1}}^j q_{m_{k_j}}(x_{k_j})$$

Como E tem uma base contrátil temos que $\theta_{k_{j+1}} q_{m_{k_j}}(x_{k_j})$ converge fracamente a 0 quando $j \longrightarrow \infty$. Pelo Lema 1.3.3, $\sum_{i=k_j+1}^{\infty} \epsilon_i \theta_i^j q_{m_{i-1}}^{m_i}(x_{k_j})$ converge a 0 quando $j \longrightarrow \infty$.

Assim $\overline{a_j} - a_j$ converge fracamente a 0. Como $a_j - a = a_j - \overline{a_j} + \overline{a_j} - a$ temos que (a_j) converge fracamente a a.

Pelos casos 1 e 2 segue que $\bigcup_{j\geq j_0}(\epsilon_i) \otimes ((x_n), (m_i)_{i=0}^{j}, (\rho_i)_{i=1}^{j+1}))$ é relativamente fracamente compacto.

Portanto

$$cl_w\left(\bigcup_{j\geq j_0}(\epsilon_i) \otimes ((x_n), (m_i)_{i=0}^{j}, (\rho_i)_{i=1}^{j+1})\right)$$

é fracamente compacto, e o Teorema 1.2.13 implica que

$$cl_w\left(\bigcup_{j\geq j_0}(\epsilon_i) \otimes ((x_n), (m_i)_{i=0}^{j}, (\rho_i)_{i=1}^{j+1})\right) \subset \bigcup_{j\geq j_0}(\epsilon_i) \otimes ((x_n), (m_i)_{i=0}^{j}, (\rho_i)_{i=1}^{j+1}) \cup cl_E(W).$$

Agora, suponha que $U = rB_E$. Como (x_n) é U- limitado então existe $0 < s < r$ tal que $(x_n) \subset sB_E$. A hipótese de base incondicional implica que

$$(\epsilon_i) \otimes ((x_n), (m_i)_{i=0}^{j}, (\rho_i)_{i=1}^{j+1}) \subset sB_E \subset U.$$

Segue daí que

$$(\epsilon_i) \otimes ((x_n), (m_i)_{i=0}^{j}, (\rho_i)_{i=1}^{j+1})$$

é U-limitado. Como $cl_E W$ é U-limitado temos que

$$\bigcup_{j\geq j_0}(\epsilon_i) \otimes ((x_n), (m_i)_{i=0}^{j}, (\rho_i)_{i=1}^{j+1})) \cup cl_E W$$

é U-limitado. Portanto a primeira parte do Lema está provada.

(b) Como

$$\begin{aligned}
& \limsup \|(P_n)_{k_1,k_2,\ldots,k_{n+1}}^{m_1,m_2,\ldots,m_n}(a_n)\|^{1/\gamma_n} \\
\leq\ & \limsup \frac{1}{\rho_1^{k_1/\gamma_n}\rho_{j_0}^{k_{j_0}/\gamma_n}} \sup_{\|\theta_i\|=\rho_i} \|P_n(\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i\theta_i q_{m_{i-1}}^{m_i}(x_n) + \theta_{n+1}q_n(x_n))\|^{1/\gamma_n} \\
\leq\ & \limsup \|P_n(\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i\theta_i q_{m_{i-1}}^{m_i}(x_n) + \theta_{n+1}q_{m_n}(x_n))\|^{1/\gamma_n} \\
\leq\ & \limsup \|P_n\|^{1/\gamma_n}_{Cl_w(\bigcup_{j\geq j_0}(\epsilon_i)\otimes((x_n),(m_i)_{i=0}^{j},(\rho_i)_{i=1}^{j+1}))},
\end{aligned}$$

o Lema segue de (a) e Teorema 1.1.5. □

Lema 3.2.10 *[7, Lema 2.6] Dados $(\delta_i) \in \ell_1$ com $\delta_i > 0$ e $a > 0$ existe uma seqüência estritamente crescente (ψ_i) de números positivos tal que*

(a) $\lim_i \psi_i = \infty$

(b) $\sum_i \psi_i \delta_i = a$

Demonstração. Para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $p_k \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{i=p_k}^{\infty} \delta_i < 4^{-k}$.

Podemos supor que $p_1 < p_2 < ... < p_k < ...$

Agora

$$s := \sum_{k=1}^{\infty} \left(a2^k \sum_{p_k \leq m < p_{k+1}} \delta_m \right) < \sum_{k=1}^{\infty} a2^k 4^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} a2^{-k} = a$$

Definamos

$$\psi_i = \begin{cases} \frac{a-s}{\sum_{j=1}^{p_1-1} \delta_j} & 1 \leq i < p_1 \\ a2^k & p_k \leq i < p_{k+1}, k \geq 1 \end{cases}$$

□

Teorema 3.2.11 *Sejam E e F espaços de Banach, E com uma base contrátil e incondicional. Seja U uma bola aberta em E centrada no origem. Então*

$$\mathcal{H}_{bk}(U;F) = \mathcal{H}_b(U;F)$$

para cada espaço de Banach F.

Demonstração. É obvio que $\mathcal{H}_b(U;F) \subset \mathcal{H}_{bk}(U;F)$. Suponha que $\mathcal{H}_{bk}(U;F) \nsubseteq \mathcal{H}_b(U;F)$. Seja $f = \sum P_n \in \mathcal{H}_{bk}(U;F) \setminus \mathcal{H}_b(U;F)$ e (x_n) dados pelo Lema 3.2.1. Considere as seqüências $(l_k)_{k=1}^{\infty}$, (δ_i) e $(s_n)_{n\geq 1}$ dadas pelo Corolário 3.2.8.

Pelo Lema 3.2.10 existe $(\psi_k)_{k=2}^{\infty}$ com $\psi_k > 0$ e $\psi_k \longrightarrow \infty$ tal que $\sum_{k=2}^{\infty} 2\delta_k \psi_k = \log 2$.

Seja $\epsilon_k = \exp(-\psi_k)$ para cada $k \geq 2$. Então $0 < \epsilon_k < 1$, $(\epsilon_k) \in c_0$, e

$$\log(\epsilon_2^{2\delta_2} \dots \epsilon_n^{2\delta_n}) = -\sum_{k=2}^{n} 2\delta_k \psi_k \geq -\log(2) = \log(\frac{1}{2}).$$

Daqui

$$\epsilon_2^{2\delta_2} \dots \epsilon_n^{2\delta_n} \geq \frac{1}{2}$$

para todo $n \geq 2$.

Se $\epsilon_1 = \exp(\frac{4}{\delta_1})$, então $\epsilon_1^{\delta_1/2} = e^2$. Assim

$$\epsilon_1^{\delta_1/2} \epsilon_2^{2\delta_2} \dots \epsilon_n^{2\delta_n} \geq \frac{e^2}{2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Considere a seqüência (y_n) definida por

$$y_n = \sum_{s=1}^{n} \epsilon_s q_{l_{s-1}}^{l_s}(x_{s_n}) + q_n(x_{s_n}).$$

Sendo (x_{s_n}) uma seqüência U-limitada, o Lema 3.2.9 implica que

$$\limsup \|(P_{s_n})^{l_1,l_2,\ldots,l_n}_{j_{s_n,l_1},j_{s_n,l_1,l_2},\ldots,j_{s_n,l_1,l_2,l_3,\ldots,l_n},\gamma_{s_n,n}}(y_n)\|^{1/\gamma_{s_n}} < 1.$$

Por outro lado, pelo Lema 3.2.2 e os comentários que seguem ao Lema 3.2.1 temos que

$$\begin{aligned}
& \|(P_{s_n})^{l_1,l_2,\ldots,l_n}_{j_{s_n,l_1},\ldots,j_{s_n,l_1,l_2,l_3,\ldots,l_n},\gamma_{s_n,n}}(y_n)\|^{1/\gamma_{s_n}} \\
= \; & \epsilon_1^{\frac{j_{s_n,l_1}}{\gamma_{s_n}}} \ldots \epsilon_n^{\frac{j_{s_n,l_1,l_2,l_3,\ldots,l_n}}{\gamma_{s_n}}} \|(P_{s_n})^{l_1,l_2,\ldots,l_n}_{j_{s_n,l_1},\ldots,j_{s_n,l_1,l_2,l_3,\ldots,l_n},\gamma_{s_n,n}}(x_{s_n})\|^{1/\gamma_{s_n}} \\
\geq \; & \epsilon_1^{\frac{j_{s_n,l_1}}{\gamma_{s_n}}} \ldots \epsilon_n^{\frac{j_{s_n,l_1,l_2,l_3,\ldots,l_n}}{\gamma_{s_n}}} \frac{1}{(\gamma_{s_n}+1)^{n/\gamma_{s_n}}} \\
\geq \; & \epsilon_1^{\frac{j_{s_n,l_1}}{\gamma_{s_n}}} \ldots \epsilon_n^{\frac{j_{s_n,l_1,l_2,l_3,\ldots,l_n}}{\gamma_{s_n}}} \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

para todo $n \geq 1$.

Pelo Corolário 3.2.8, $\frac{\delta_k}{2} < \frac{j_{s_n,l_1,\ldots,l_k}}{\gamma_{s_n}} < 2\delta_k$ for every $k = 1, 2, .., n$. Como $\epsilon_1 > 1$ e $0 < \epsilon_k < 1$ para $k \geq 2$, segue que

$$\epsilon_1^{\frac{j_{s_n,l_1}}{\gamma_{s_n}}} \ldots \epsilon_n^{\frac{j_{s_n,l_1,l_2,l_3,\ldots,l_n}}{\gamma_{s_n}}} \geq \epsilon_1^{\delta_1/2}\epsilon_2^{2\delta_2} \ldots \epsilon_n^{2\delta_n} \geq \frac{e^2}{2}.$$

Assim

$$\|(P_{s_n})^{l_1,l_2,\ldots,l_n}_{j_{s_n,l_1},j_{s_n,l_1,l_2},\ldots,j_{s_n,l_1,l_2,l_3,\ldots,l_n},\gamma_{s_n,n}}(y_n)\|^{1/\gamma_{s_n}} \geq \frac{e^2}{2e} = \frac{e}{2}$$

Portanto

$$\liminf \|(P_{s_n})^{l_1,l_2,\ldots,l_n}_{j_{s_n,l_1},j_{s_n,l_1,l_2},\ldots,j_{s_n,l_1,l_2,l_3,\ldots,l_n},\gamma_{s_n,n}}(y_n)\|^{1/\gamma_{s_n}} > 1,$$

contradição. Portanto $\mathcal{H}_{bk}(U;F) = \mathcal{H}_b(U;F)$. □

O teorema seguinte foi provada por Carrión [7] para funções inteiras, aqui nós provamos o teorema para bolas centradas na origem.

Teorema 3.2.12 *Seja E um espaço de Banach com base incondicional. Seja U uma bola em E centrado na origem. Se E não contém uma cópia de ℓ_1 então*

$$\mathcal{H}_{wu}(U;F) = \mathcal{H}_w(U;F) = \mathcal{H}_{wsc}(U;F)$$

para cada espaço de Banach F.

Demonstração. Sabemos que se E tem uma base incondicional, então E não contém uma cópia de ℓ_1 se e só se a base de E é contrátil (ver [15, Teorema 1.c.9]). Portanto o Teorema 3.2.11 implica que $\mathcal{H}_{bk}(U;F) = \mathcal{H}_b(U;F)$. Como $\mathcal{H}_{wsc}(U;F) \subset \mathcal{H}_{bk}(U;F)$ temos que $\mathcal{H}_{wsc}(U;F) \subset \mathcal{H}_b(U;F)$. Então o Teorema 2.2.4 e a Proposição 2.2.2, implicam que $\mathcal{H}_{wsc}(U;F) = \mathcal{H}_w(U;F) = \mathcal{H}_w(U;F) \cap \mathcal{H}_b(U;F) = \mathcal{H}_{wu}(U;F)$. □

A hipótese de base incondicional foi importante neste trabalho, principalmente para provar o Teorema 3.2.11. E também para que os conjuntos considerados no saiam da bola centrada na origem U. Seria interessante mostrar o teorema para abertos arbitrários. Mas ainda eliminar esta hipótese de incondicionalidade neste teorema, corrigindo assim o [8, Theorem 11].

Referências Bibliográficas

[1] R. Aron, *Weakly uniformly continuous and weakly sequentially continuous entire functions.* Advances in Holomorphy, J. A. Barroso (ed.) North-Holland Math. Stud. **34**, North-Holland, Amsterdam, 1979.

[2] R. Aron, C. Hervés, and M. Valdivia, *Weakly continuous mappings on Banach spaces.* J. Funct. Anal. **52** (1983), 189-204.

[3] R. Aron and J. Prolla *Polynomial approximation of differentiable functions on Banach spaces.* J. Reine Angew. Math. **313** (1980), 195-216.

[4] S. Berrios, *Funções holomorfas fracamente contínuas em espaços de Banach.* 62o Seminário Brasileiro de Análise, 2005, Rio de Janeiro. Atas 62o Seminário Brasileiro de Análise,2005.

[5] S. Berrios, *Weakly continuous holomorphic functions on Banach spaces with a shrinking and unconditional basis.* 2006 (Artigo Submetido).

[6] P. A. Burlandy and L. A. Moraes, *The spectrum of an algebra of weakly continuous holomorphic mappings.* Indag. Math. N. S. **11** (2000), 525-532.

[7] H. Carrión, *Funções inteiras em espaços de Banach com dual separável.* Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Brasil, 2002.

[8] H. Carrión, *Entire functions on Banach spaces with a separable dual.* J. Funct. Anal. **189**. (2002), 496-514.

[9] J. Diestel, *Sequences and Series in Banach Spaces.* Springer, New York 1984.

[10] S. Dineen, *Complex Analysis in Locally Convex Spaces.* North-Holland Math. Stud. **57**, North-Holland, Amsterdam, 1981.

[11] S. Dineen, *Entire functions on c_0.* J. Funct. Anal. **52** (1983), 205-283.

[12] S. Dineen, *Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces.* Springer, London, 1999.

[13] K. Floret, *Weakly Compact Sets.* Lectures Notes in Math. **801**, Springer, Berlin, 1980.

[14] J. Gutierrez, *Weakly continuous functions on Banach spaces not containing* l_1. Proc. Amer. Math. Soc. **119** (1993), 147-152.

[15] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces I.* Springer, New York, 1977.

[16] J. Marti, *Introduction to the Theory of Bases.* Springer, New York, 1969.

[17] L. A. Moraes, *Weakly continuous holomorphic mappings.* Proc. Royal Irish Academy **97A** (1997), 139-144.

[18] J. Mujica, *Complex Analysis in Banach Spaces.* North-Holland Math. Stud. **120**. North-Holland, Amsterdam, 1986.

[19] H. P. Rosenthal, *Some recent discoveries in the isomorphic theory of Banach spaces.* Bull. Amer. Math. Soc. **84** (1978), 803-831