

**PROPRIEDADES GLOBAIS DE  
CURVAS NO ESPAÇO**

**CLÁUDIA CANDIDA PANSONATO**

**ORIENTADORA: PROF<sup>a</sup> DR<sup>a</sup> SUELI I. RODRIGUES COSTA**

**IMECC-UNICAMP  
1995**

# PROPRIEDADES GLOBAIS DE CURVAS NO ESPAÇO

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sra. Cláudia Candida Pansonato e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 17 de agosto de 1995



---

Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Sueli Irene R. Costa

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

FICHA CATALOGRAFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO INECC DA UNICAMP

Pansonato, Claudia Candida

P195p Propriedades globais de curvas no espaco / Claudia  
Candida Pansonato. -- Campinas, [SP : s.n.],  
1995.

Orientadora : Sueli Irene Rodrigues Costa

Dissertacao (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,  
Instituto de Matematica, Estatistica e Ciencia da Computacao.

1. Geometria diferencial. 2. Curvas. I. Costa, Sueli  
Irene Rodrigues. II. Universidade Estadual de Campinas.  
Instituto de Matematica, Estatistica e Ciencia da  
Computacao. III. Titulo.

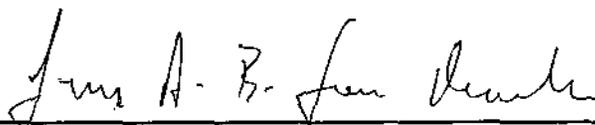
Tese defendida e aprovada em, 17 de 08 de 1995

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



---

Prof(a). Dr(a). MARIA APARECIDA SOARES RUAS



---

Prof(a). Dr(a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN



---

Prof(a). Dr(a). SUELI IRENE RODRIGUES COSTA

*“Dedico este trabalho  
ao Denilson e aos  
Meus pais”*

# AGRADECIMENTOS

Agradeço à Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Sueli I.R. Costa pela competência e dedicação na orientação deste trabalho.

Agradeço ao CNPq pela bolsa, sem a qual este trabalho não seria realizado.

Agradeço ao Departamento de Matemática do Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação (IMECC) da UNICAMP pelo amparo e suporte.

Agradeço aos professores Vincent Buonomano e José Plínio de O. Santos pela ajuda no uso dos softwares Mathematica e Maple.

Agradeço à Cristiane, ao Denilson e ao Roberto pela ajuda na confecção das figuras.

Agradeço à Alessandra e à Cristiane pelos anos de convivência, aos amigos pelo incentivo e à Fátima pelo ótimo trabalho de digitação.

# ÍNDICE

<b>INTRODUÇÃO</b> .....	i
<b>CAPÍTULO I: Curvas no Plano e no Espaço – Propriedades Locais</b> .....	1
Introdução .....	1
I.1 – Curvatura e Círculo Osculador .....	1
I.2 – Torção de uma Curva no Espaço .....	4
I.3 – Curvatura com Sinal e Evoluta de uma Curva Plana .....	10
<b>CAPÍTULO II: Propriedades Globais de Curvas Planas</b> .....	16
Introdução .....	16
II.1 – Índice de Rotação de uma Curva .....	17
II.2 – Curvatura Total e Convexidade .....	24
II.3 – O Teorema dos Quatro Vértices .....	31
<b>CAPÍTULO III: Propriedades Globais de Curvas no Espaço</b> .....	44
Introdução .....	44
III.1 – Curvas Fechadas no Espaço – Nós .....	45
III.2 – Curvatura Total .....	47
III.3 – Torção Total .....	64
III.4 – Energia de um Nó .....	73
III.5 – Número de Enlaçamentos de Duas Curvas no Espaço .....	75
III.6 – Número de Auto-Enlaçamentos de uma Curva Fechada no Espaço .....	92
<b>CAPÍTULO IV: DNA e Geometria Diferencial</b> .....	108
<b>APÊNDICE:</b> .....	117
<b>BIBLIOGRAFIA:</b> .....	120

# INTRODUÇÃO

O espírito deste trabalho foi inspirado no artigo de W. Fenchel [Fenchel] de 1951. Neste o autor faz uma coletânea e correspondente análise de resultados até então obtidos sobre propriedades globais de curvas no espaço. Nosso propósito ao longo de todo este texto foi apresentar o protótipo do que seria uma versão atualizada do trabalho de W. Fenchel, guardadas as devidas proporções e sem a pretensão de ser completo. Assim, além de ser uma abordagem aprofundada da mestrandia neste tópico de pesquisa, é também uma primeira etapa de um trabalho conjunto com a orientadora visando um texto didático e de divulgação sobre o tema.

Podemos considerar como marco inicial para o estudo das propriedades globais de curvas fechadas o *Teorema dos Quatro Vértices* provado por Mukopadhaya (1909) e Kneser (1912), que estabelece que toda curva fechada no plano que não tenha auto-intersecções possui pelo menos 4 vértices, isto é, 4 pontos de extremo para sua curvatura. Diferentes versões e extensões para este teorema têm sido apresentadas desde então, inclusive uma recíproca provada por H. Gluck em 1971 [Gluck]. Comentamos em II.3 duas versões mais recentes: a de R. Osserman, de 1985, "*Teorema dos Quatro ou Mais Vértices*" [Osserman], da qual fizemos um estudo detalhado e a de U. Pinkall (1987), para curvas planas com auto-intersecção mas que são bordo de uma superfície imersa [Pinkall]. Mencionamos também o análogo deste teorema para curvas convexas no espaço, isto é, curvas que estão contidas no bordo de seu fecho convexo. Tais curvas possuem pelo menos quatro pontos de torção nula (III.3).

Quando Fenchel escreveu o artigo mencionado, Fary e Milnor acabavam de provar o resultado clássico que estabelece uma condição necessária para que uma curva tenha nó – sua curvatura total tem que ser maior que  $4\pi$ . Neste trabalho analisamos o teorema de Fary–Milnor com duas diferentes abordagens comentando um resultado correlato recente apresentado por M. Freedman, Z.X. He e Z. Wang em [Freedman] que estabelece outra condição necessária para que uma curva tenha nó, utilizando o invariante no espaço de curvas fechadas no  $\mathbb{R}^3$  denominado energia de um nó (III.4).

No primeiro Capítulo fazemos um breve apanhado das propriedades locais de curvas, procurando dar diferentes interpretações para conceitos como curvatura e torção,

além de fixar a notação. O segundo Capítulo é dedicado ao estudo das propriedades globais de curvas planas como índice de rotação, curvatura total e o Teorema dos Quatro Vértices. No terceiro Capítulo estudamos importantes propriedades globais de curvas no espaço como curvatura total, torção total, energia de um nó ([Freedman]), número de enlaçamentos de duas curvas fechadas (linking number) ([Pohl 1] e [Rolfsen]) e número de auto-enlaçamentos de uma curva fechada (self linking number) ([Pohl 1]). Finalmente, no Capítulo IV colocamos uma interessante aplicação de algumas propriedades globais de curvas no espaço ao estudo da estrutura da molécula de DNA ([Pohl 3]).

Ao longo de todo o trabalho fizemos a análise detalhada de alguns artigos que julgamos importantes, acrescentando provas que não estavam feitas e dando provas alternativas. As principais referências, neste caso, foram [Osserman] em II.3, [Pohl 1] em III.5 e III.6 e [Pohl 3] no Capítulo IV.

Além disto, estudamos a família de curvas  $(q, p)$  sobre o toro (uma curva  $(q, p)$  sobre o toro é uma curva que gira ao redor do toro  $q$  vezes na direção longitudinal e  $p$  vezes na direção meridional) analisando curvatura total, torção total e número de auto-enlaçamentos podendo assim utilizá-las como exemplos e contra-exemplos de grande parte dos resultados aqui apresentados. O uso de programas computacionais (Mathematica e Maple) para o cálculo algébrico e visualização foi de fundamental importância para a sensibilização e estabelecimento de conjecturas que depois foram provadas, como por exemplo, no cálculo da curvatura total das curvas  $(q, p)$  em III.2.

Uma perspectiva nossa para um trabalho futuro é o estudo de trabalhos mais recentes envolvendo invariantes como energia de nós, tendo como meta especializar alguns resultados, possivelmente utilizando o número de auto-enlaçamentos de uma curva.

# CAPÍTULO I

## CURVAS NO PLANO E NO ESPAÇO – PROPRIEDADES LOCAIS

### INTRODUÇÃO

Neste capítulo introduzimos os conceitos básicos da geometria diferencial das curvas no plano e no espaço procurando justapor as formulações de manipulação algébrica mais simples com as de forte significado geométrico. Em I-1 e I-2 apresentamos os principais resultados referentes a curvatura e torção, fixando a notação que será utilizada no decorrer deste trabalho. Em I-3 discutimos a correlação entre vértices de uma curva e cúspides de sua evoluta, a qual não se encontra na literatura usual.

### I-1 CURVATURA E CÍRCULO OSCULADOR

Consideramos neste trabalho curvas  $C^4, \mu : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Diremos que uma curva parametrizada  $\mu : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é regular se  $\mu'(t) \neq 0$ . Quando o parâmetro da curva for o comprimento de arco, utilizaremos a letra  $s$ . Convencionaremos a notação:  $\mu'$  para a derivada de  $\mu$  com relação ao comprimento de arco e  $\dot{\mu}$  para a derivada de  $\mu$  com relação a um parâmetro qualquer. Observamos que embora toda curva regular possa ser parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ , em geral não conseguimos uma expressão explícita para esta parametrização. Vamos agora falar sobre a curvatura de uma curva regular.

#### – CURVATURA DE UMA CURVA

**Definição:** Seja  $\mu : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ . O número  $|\mu''(s)| = k(s)$  é chamado a curvatura de  $\mu$  em  $s$ .

Sejam  $P = \mu(t_1)$  um ponto arbitrário de uma curva  $\mu$  e  $Q = \mu(t_2)$  um ponto de  $\mu$  próximo da  $P$ . Sejam  $\Delta\theta$  o ângulo não orientado entre as tangentes a  $\mu$  em  $P$  e  $Q$  e  $|\Delta s|$  o comprimento do arco  $PQ$ .

O limite da razão  $\frac{\Delta\theta}{\Delta s}$  quando  $Q \rightarrow P$  é a curvatura de  $\mu$  em  $t_1$ . (Vamos denotar este limite por  $\tilde{k}$ ).

Se  $\mu = \mu(s)$  é a parametrização pelo comprimento de arco da curva, vamos mostrar que  $\tilde{k}(s) = |\mu''(s)|$ .

De fato,

Sejam  $P$  e  $Q$  os pontos associados com os valores  $s$  e  $s + \Delta s$  nos parâmetros.

O ângulo  $\Delta\theta$  é o ângulo entre os vetores tangentes unitários  $t(s) = \mu'(s)$  e  $t(s + \Delta s) = \mu'(s + \Delta s)$

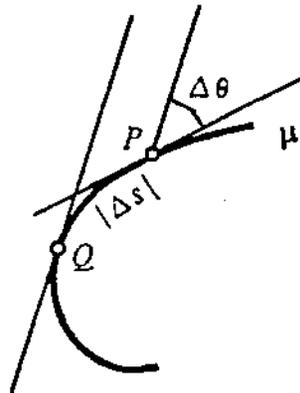


Figura I.1

Portanto,  $|t(s + \Delta s) - t(s)| = 2 \operatorname{sen} \frac{\Delta\theta}{2}$ .

Logo,

$$\frac{|t(s + \Delta s) - t(s)|}{|\Delta s|} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}} \frac{\Delta\theta}{|\Delta s|}$$

Agora, quando  $|\Delta s| \rightarrow 0, \Delta\theta \rightarrow 0$  pela continuidade de  $t(s)$ . Logo, passando ao limite, obtemos:

$$|\mu''(s)| = \tilde{k}(s)$$

**- FÓRMULA DA CURVATURA PARA UMA CURVA NÃO PARAME-  
TRIZADA PELO COMPRIMENTO DE ARCO**

Para efeitos de cálculos, esta fórmula nos será muito útil, visto que em geral não é possível obter uma expressão explícita para a parametrização de uma curva por seu comprimento de arco.

Consideremos, inicialmente, uma curva  $\mu$  regular parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ . Como sabemos,  $k(s) = |\mu''(s)|$ . Como  $\mu''(s)$  é perpendicular ao vetor unitário  $\mu'(s)$ , temos que  $k(s)$  é também a área de retângulo gerado por  $\mu'(s)$  e  $\mu''(s)$ .

Portanto,  $k(s) = |\mu'(s) \wedge \mu''(s)|$ . No caso de  $\mu$  ser uma curva no plano  $\mathbb{R}^2$ , também poderemos expressar  $k(s) = |\det(\mu'(s), \mu''(s))|$ .

Agora, consideremos a curva  $\mu$  com parâmetro qualquer  $t$ . Podemos reparametrizá-la pelo comprimento de arco

$$\mu(t) = \beta(s(t)) \quad \text{onde} \quad s = \int_{t_0}^t |\dot{\mu}(t)| dt.$$

Logo,  $\frac{ds}{dt} = |\dot{\mu}(t)|$ .

Também,  $\dot{\mu}(t) = \beta'(s) \frac{ds}{dt}$ .

Logo,  $\beta'(s) = \frac{\dot{\mu}(t)}{ds/dt} = \frac{\dot{\mu}(t)}{|\dot{\mu}(t)|}$  e

$$\beta''(s) = \frac{\ddot{\mu}(t) ds/dt - \dot{\mu} d^2s/dt^2}{|\dot{\mu}(t)|^2} = \frac{\ddot{\mu} - \dot{\mu}/|\dot{\mu}| d^2s/dt^2}{|\dot{\mu}|^2}.$$

Donde obtemos:

$$k(t) = \frac{|\dot{\mu} \wedge \ddot{\mu}|}{|\dot{\mu}|^3} \tag{I.1}$$

No caso especial de  $\mu$  ser uma curva plana também podemos escrever:

$$k(t) = \frac{|\det(\dot{\mu}, \ddot{\mu})|}{|\dot{\mu}|^3} \tag{I.2}$$

**OBSERVAÇÃO I.1:**  $k(t) = 0$  se e somente se  $\dot{\mu}$  e  $\ddot{\mu}$  são linearmente dependentes.

## - CÍRCULO OSCULADOR DE UMA CURVA

Dada uma curva regular  $\mu$  com  $k(t) \neq 0$  para todo ponto  $t$ , é possível encontrarmos para cada  $t$  um círculo que melhor aproxima a curva em  $\mu(t)$ , chamado círculo osculador. É o que nos diz o teorema abaixo cuja demonstração se encontra em [Spivak].

**TEOREMA:** Seja  $\mu$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ . Se  $\mu''(s) \neq 0$ , então para  $s_1, s_2, s_3$  suficientemente próximos de  $s$ , os pontos  $\mu(s_1), \mu(s_2), \mu(s_3)$  não ficam num segmento de reta. Quando  $s_1, s_2, s_3 \rightarrow s$ , o único círculo através dos pontos  $\mu(s_i)$  se aproxima de um círculo tangente a  $\mu(s)$ , cujo raio é  $1/|\mu''(s)|$  e cujo centro fica na reta passando por  $\mu(s)$  perpendicular à tangente em  $\mu(s)$ . Se  $\mu''(s) = 0$ , então, se os pontos  $\mu(s_i)$  não ficam numa mesma reta, os círculos através deles não se aproximam de um círculo limite.

**OBSERVAÇÃO I.2:** Este teorema mostra a equivalência com a definição clássica de curvatura de uma curva dada como  $k = 1/R$ , onde  $R$  é o raio do círculo osculador no ponto.

## I.2 - TORÇÃO DE UMA CURVA NO ESPAÇO

Dada uma curva  $\mu : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ , denotaremos por  $t(s)$  o vetor tangente à curva em  $s$  e por  $n(s)$  o vetor normal unitário a  $\mu$  em  $s$  (chamado normal principal da curva). O vetor  $b(s) = t(s) \wedge n(s)$  é denominado vetor binormal da curva. Assim, para cada ponto  $s$  da curva temos um triedro  $\{t(s), n(s), b(s)\}$  chamado Triedro de Frenet. Derivando  $t(s)$ , obtemos  $t' = kn$  e derivando  $b(s) = t(s) \wedge n(s)$  obtemos:

$$b' = t' \wedge n + t \wedge n' = t \wedge n'.$$

Como  $b' \perp b$  temos  $b'(s) = -\tau(s)n(s)$ , onde  $\tau(s)$  será definido abaixo. Também, como  $n = b \wedge t$ ,  $n' = b' \wedge t + b \wedge t' = -\tau n \wedge t + b \wedge kn = \tau b - kt$ . Assim, temos as fórmulas de Frenet da curva

$$\begin{cases} t' &= kn \\ n' &= -kt + \tau b \\ b' &= -\tau n \end{cases} \quad (I.3)$$

**DEFINIÇÃO:** Seja  $\mu : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco  $s$  e tal que  $|\mu''(s)| \neq 0 \forall s \in I$ . O número  $\tau(s)$  definido por  $b'(s) = -\tau(s)n(s)$  é

chamado a torção de  $\mu$  em  $s$ .

Observamos que a torção nos dá uma medida de quão não plana é a curva, uma vez que ela mede a variação do vetor binormal. Esta idéia fica ainda mais clara quando escolhemos uma outra forma mais geométrica para se definir torção.

O plano determinado pelos vetores tangente  $t(s)$  e normal  $n(s)$  é chamado plano osculador em  $s$ .

Sejam, então,  $P = \mu(t_1)$  um ponto arbitrário de uma curva  $\mu$  e  $Q = \mu(t_2)$  um ponto de  $\mu$  próximo de  $P$ . Sejam  $\Delta\theta$  o ângulo entre os planos osculadores em  $t_1$  e  $t_2$  e  $|\Delta s|$  o comprimento da curva de  $P$  a  $Q$ . O valor absoluto da torção  $|\tilde{\tau}|$  de  $\mu$  em  $t_1$  é definido como o limite da razão  $\Delta\theta/|\Delta s|$  quando  $Q \rightarrow P$ .

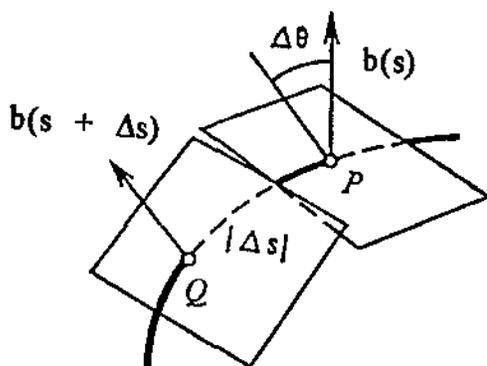


Figura 1.2

Se  $\mu : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é a parametrização pelo comprimento de arco da curva, mostremos que esta torção em valor absoluto coincide com a definição anterior ( $|\tilde{\tau}(s)| = |\tau(s)| = |\nu'(s)|$ ).

De fato, se a curvatura da curva  $\mu$  em  $P$  é não nula, então, por continuidade, é também não nula nos pontos próximos a  $t_1$ . Os vetores  $\mu'(s)$  e  $\mu''(s)$  são não nulos e não paralelos em cada ponto com curvatura não nula. Logo, existe um plano osculador em cada ponto  $Q$  próximo de  $P$ .

Sejam  $b(s)$  e  $b(s + \Delta s)$  os vetores binormais em dois pontos  $P$  e  $Q$  de  $\mu$  e  $\Delta\theta$  o ângulo entre  $b(s)$  e  $b(s + \Delta s)$ .

Como  $b(s)$  e  $b(s + \Delta s)$  são unitários e o ângulo entre eles é  $\Delta\theta$ , temos:

$$|b(s + \Delta s) - b(s)| = 2s \operatorname{sen} \frac{\Delta \theta}{2}.$$

Logo,

$$\frac{|b(s + \Delta s) - b(s)|}{|\Delta s|} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\Delta \theta}{2}}{\frac{\Delta \theta}{2}} \cdot \frac{\Delta \theta}{|\Delta s|}.$$

Portanto, passando ao limite quando  $|\Delta s| \rightarrow 0$ , obtemos:

$$|b'(s)| = |\hat{\tau}(s)|$$

Logo,

$$|\hat{\tau}(s)| = |\tau(s)|.$$

Vamos dar agora uma interpretação para o sinal da torção.

Considere a expansão de Taylor ao redor de  $s_0 = 0$

$$\mu(s) = \mu(0) + s\mu'(0) + \frac{s^2}{2}\mu''(0) + \frac{s^3}{3!}\mu'''(0) + R$$

onde

$$\lim_{s \rightarrow 0} R/s^3 = 0.$$

Como  $\mu'(0) = t$ ,  $\mu''(0) = kn$  e

$$\begin{aligned} \mu'''(0) &= (kn)' = k'n + kn' = k'n - k^2t + k\tau b \\ \mu(s) - \mu(0) &= \left(s - \frac{k^2s^3}{3!}\right)t + \left(\frac{s^2}{2} + \frac{k's^3}{3!}\right)n + \frac{s^3}{3!}k\tau b + R. \end{aligned}$$

Tomamos, agora, o sistema  $0xyz$  de tal modo que a origem  $0$  coincida com  $\mu(0)$  e que  $t = (1, 0, 0)$ ,  $n = (0, 1, 0)$  e  $b = (0, 0, 1)$ . Então  $\mu(s) = (x(s), y(s), z(s))$  é dada por

$$\begin{aligned} x(s) &= s - \frac{k^2s^3}{3!} + Rx \\ y(s) &= \frac{s^2}{2} + \frac{k's^3}{3!} + Ry \\ z(s) &= \frac{k\tau s^3}{3!} + Rz \end{aligned}$$

onde  $R = (R_x, R_y, R_z)$ .

Da equação  $z(s) = \frac{k\tau s^3}{3!}$  temos que se  $\tau > 0$  para  $s$  suficientemente pequeno, então  $z(s)$  cresce com  $s$ . Convencionaremos "lado positivo" do plano osculador aquele lado em que  $b$  está apontando. Então, como  $z(0) = 0$ , quando descrevemos a curva na direção do crescimento do comprimento de arco, a curva cruzará o plano osculador em  $s = 0$ , apontando para o lado positivo. Caso contrário ( $\tau < 0$ ), a curva cruzará o plano osculador apontando para o lado negativo:

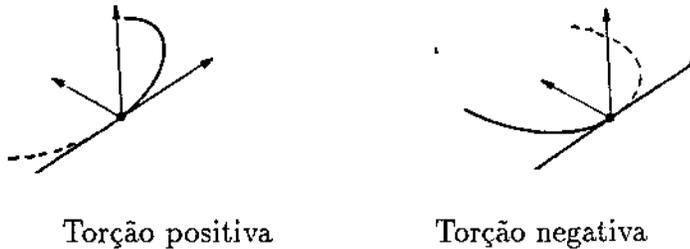


Figura I.3

### - FÓRMULA DA TORÇÃO PARA UMA CURVA NÃO PARAMETRIZADA PELO COMPRIMENTO DE ARCO

Como no caso da curvatura vamos também encontrar uma expressão para a torção de uma curva no caso de qualquer parametrização regular  $\mu = \mu(t)$ .

Seja  $\beta(s(t)) = \mu(t)$  uma reparametrização pelo comprimento de arco,

$$s = \int_{t_0}^t |\dot{\mu}(t)| dt.$$

Temos:

$$\begin{aligned} \dot{\mu} &= \beta' \frac{ds}{dt} \\ \ddot{\mu} &= \beta'' \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{d^2s}{dt^2} \beta' = kn \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{d^2s}{dt^2} t \\ \ddot{\mu} &= (k'n + kn') \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + 2kn \frac{ds}{dt} \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{d^2s}{dt^2} kn + \frac{d^3s}{dt^3} t \\ &= t \left( -k^2 \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 + \frac{d^3s}{dt^3} \right) + n \left( \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 k + 2k \frac{ds}{dt} \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{d^2s}{dt^2} \right) + b \left( k\tau \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 \right) \\ \dot{\mu} \wedge \ddot{\mu} &= \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 (kt \wedge n) = \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 kb. \end{aligned}$$

Logo,

$$\mu' \wedge \mu'' \cdot \bar{\mu} = k^2 \tau \left( \frac{ds}{dt} \right)^6 = k^2 \tau |\dot{\mu}|^6$$

Assim,

$$\tau = \frac{\dot{\mu} \wedge \ddot{\mu} \cdot \bar{\mu}}{|\dot{\mu} \wedge \ddot{\mu}|^2} = \frac{\det(\dot{\mu}, \ddot{\mu}, \bar{\mu})}{|\dot{\mu} \wedge \ddot{\mu}|^2} \quad (I.4)$$

**OBSERVAÇÃO I.3:**  $\tau(t) = 0$  se e somente se  $\dot{\mu}, \ddot{\mu}$  e  $\bar{\mu}$  são linearmente dependentes.

Mencionamos agora um importante resultado da teoria local das curvas.

**– TEOREMA FUNDAMENTAL DA TEORIA LOCAL DE CURVAS (TFC)**

Dadas funções diferenciáveis  $k(s) > 0$  e  $\tau(s), s \in I$ , existe uma curva regular parametrizada  $\mu : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $s$  é comprimento de arco,  $k(s)$  é a curvatura e  $\tau(s)$  é a torção de  $\mu$ . Além disso, qualquer outra curva  $\bar{\mu}$ , satisfazendo as mesmas condições, difere de  $\mu$  por um movimento rígido, isto é, existe uma aplicação linear ortogonal  $\rho$  de  $\mathbb{R}^3$  com determinante positivo, e um vetor  $c$  tal que  $\bar{\mu} = \rho \circ \mu + c$ .

Partindo das fórmulas de Frenet a prova deste Teorema é uma aplicação direta do Teorema de Existência e Unicidade de equações diferenciais ordinárias. Para maiores detalhes ver [Carmo] pág. 309.

Como um exemplo de aplicação das fórmulas anteriores e do TFC, mostremos que as hélices  $(a \cos t, a \sin t, bt), t \in \mathbb{R}$ , são as únicas curvas no espaço que têm curvatura e torção constantes.

De fato, basta mostrarmos que a curvatura e torção da hélice são constantes e que variando o passo da hélice, o raio do cilindro e o sentido de percurso conseguiremos obter qualquer constante para  $k$  e  $\tau$ . O Teorema acima, então, garantirá a unicidade.

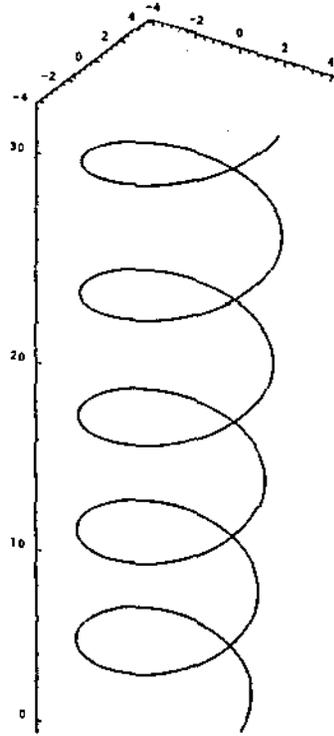


Figura I.4

Por (I.1),  $k(t) = \frac{|\dot{\mu} \wedge \ddot{\mu}|}{|\dot{\mu}|^3}$ .

Logo,

$$k(t) = \frac{\sqrt{a^2 b^2 + a^4}}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \text{ para a hélice} \quad (I.5)$$

Por (I.3),  $\tau(t) = \frac{\det(\dot{\mu}, \ddot{\mu}, \ddot{\mu})}{|\dot{\mu} \wedge \ddot{\mu}|^2}$ .

Logo,

$$\tau(t) = \frac{-b}{a^2 + b^2} \text{ para a hélice} \quad (I.6)$$

Por (I.5) e (I.6) vemos que variando  $a$  e  $b$  obtemos qualquer valor constante para  $k$  e  $\tau$ . O sinal de  $\tau$  está relacionado com o sentido do percurso.

### I.3 – CURVATURA COM SINAL E EVOLUTA DE UMA CURVA PLANA

#### – CURVATURA COM SINAL

No caso particular de uma curva plana  $\mu : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , é possível dar à curvatura  $k$  um sinal. Para isto, seja  $\{e_1, e_2\}$  a base canônica do  $\mathbb{R}^2$ . Definimos o vetor normal unitário  $n(s), s \in I$ , requerendo que a base  $\{t(s), n(s)\}$  (onde  $t$  é o tangente unitário à curva) tenha a mesma orientação que a base  $\{e_1, e_2\}$ . A curvatura  $k$  com sinal é então definida por

$$\frac{dt}{ds} = kn, \text{ ou seja, } k = \frac{dt}{ds} \cdot n.$$

A notação para curvatura com sinal será confundida com a anterior quando não houver problemas.

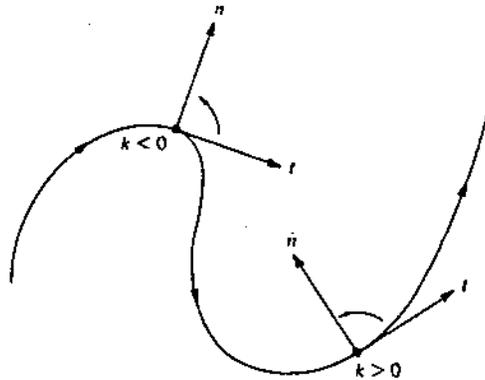


Figura I.5

Para uma curva  $\mu$  com parâmetro qualquer, a curvatura com sinal é dada por:

$$k(t) = \frac{\det(\dot{\mu}, \ddot{\mu})}{|\dot{\mu}|^3}.$$

## - EVOLUTA DE UMA CURVA PLANA

**DEFINIÇÃO:** Seja  $\mu : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular e tal que sua curvatura (com sinal) seja não nula em todo  $t \in I$ . Definimos a evoluta da curva  $\mu(s)$  como o lugar geométrico dos centros dos círculos osculadores.

Então a evoluta de  $\mu$  é dada por

$$\alpha(t) = \mu(t) + \frac{1}{k(t)}n(t) \quad (I.7)$$

Quando  $k = 0$ , a evoluta não está definida ( $\alpha(t)$  deixa de ser conexa). Como exemplo, consideremos a curva dada por:  $\mu(t) = ((2 + \cos t)\cos t, (2 + \cos t)\sin t), t \in [0, 2\pi]$ . Sua curvatura é dada por

$$k(t) = \frac{6\cos t + 6}{(4\cos t + 5)^{3/2}}, \quad (k(t) = 0 \text{ para } t = \pi) \text{ sua evoluta é}$$

$$\alpha(t) = \begin{aligned} & ((2 + \cos t)\cos t, (2 + \cos t)\sin t) + \\ & \frac{4\cos t + 5}{6\cos t + 6} (-\cos(2t) - 2\cos t, \sin(2t) + 2\sin t) \end{aligned}$$

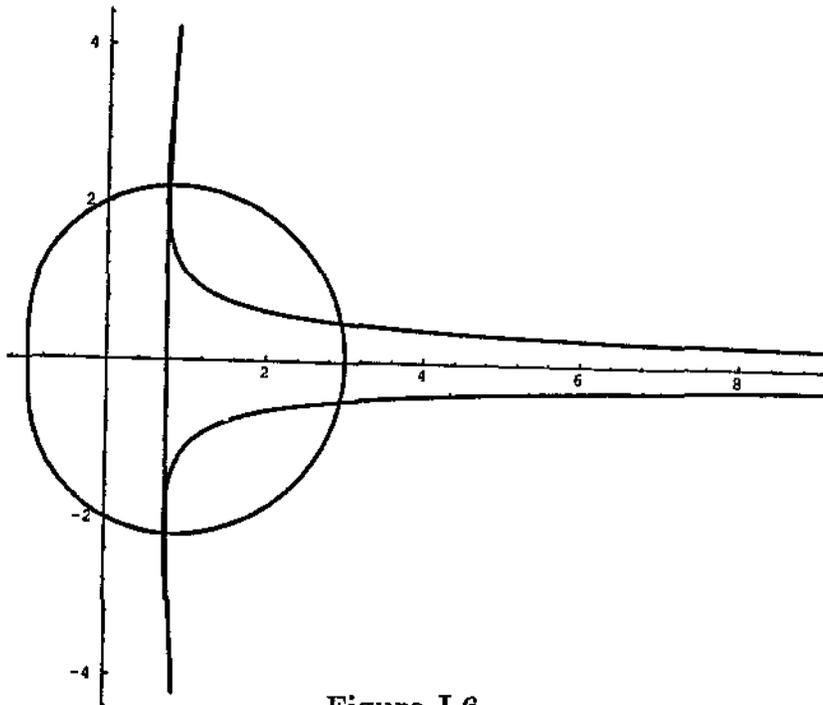


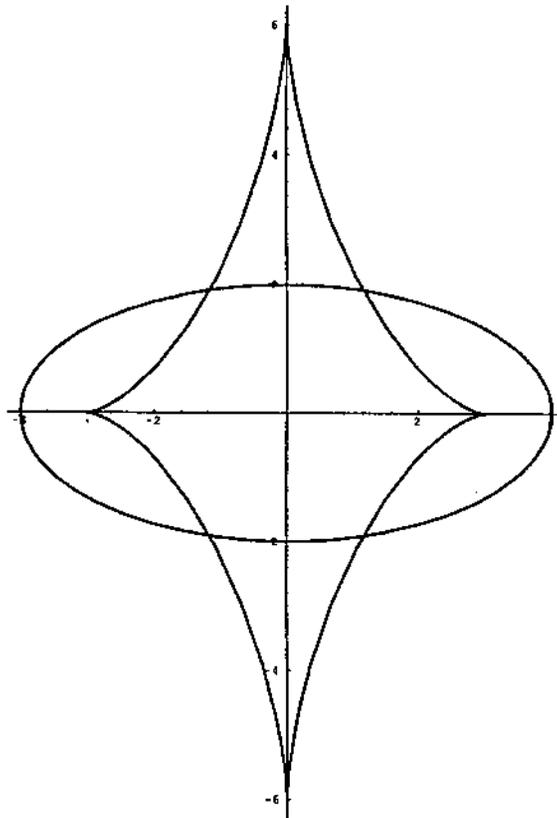
Figura I.6

A evoluta dada por I.7 é uma curva parametrizada regular se e somente se  $k'(t) \neq 0$ , pois tomando uma reparametrização  $\beta(s(t)) = \mu(t)$  de  $\mu$  pelo comprimento de arco, temos:

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= \beta'(s) - \frac{k'(s)}{[k(s)]^2}n(s) + \frac{1}{k(s)}n'(s) \\ &= t'(s) - \frac{k'(s)}{[k(s)]^2}n(s) - \frac{k(s)t'(s)}{k(s)} = \frac{-k'(s)}{[k(s)]^2}n(s) \end{aligned}$$

Como exemplo, ao calcularmos a evoluta da elipse  $\mu(t) = (a \cos t, b \sin t)$ , obtemos:

$$\alpha(t) = \left( \cos^3 t \left( a - \frac{b^2}{a} \right), \sin^3 t \left( b - \frac{a^2}{b} \right) \right)$$



Evoluta da elipse com  $a = 4$  e  $b = 2$

**Figura I.7**

Vemos que os pontos onde  $k' = 0$  (que neste caso são os pontos de máximo e mínimo da curvatura) correspondem a pontos de cúspide na evoluta da elipse.

Um vértice de uma curva é um ponto de máximo ou mínimo local da curvatura  $k$ . Mostraremos que os vértices de uma curva correspondem a pontos de cúspides da evoluta. (Talvez venha daí a palavra vértice).

**PROPOSIÇÃO I.1:** Vértices correspondem a cúspides da evoluta.

**DEMONSTRAÇÃO:** Seja  $\mu(s) = (\mu_1(s), \mu_2(s)), s \in [a, b]$ , uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco e tal que sua curvatura  $k$  seja não nula para todo  $s \in [a, b]$ . Por 1.7, sua evoluta é dada por:  $\alpha(s) = \mu(s) + \frac{1}{k}n(s)$ , onde  $n$  é o vetor normal principal de  $\mu$ .

Seja  $s_0$  um vértice da curva  $\mu$ , ou seja,  $k'(s_0) = 0$ . Vamos mostrar que  $s_0$  é um ponto de cúspide de  $\alpha$ , ou seja, um ponto em que  $\alpha$  não possui vetor tangente e tal que as tangentes unitárias de  $\alpha$  para  $s \rightarrow s_0^+$  e para  $s \rightarrow s_0^-$  formam um ângulo de  $180^\circ$ .

Vamos calcular o produto interno dos vetores  $\lim_{s \rightarrow s_0^+} \frac{\dot{\alpha}(s)}{|\dot{\alpha}(s)|}$  e  $\lim_{s \rightarrow s_0^-} \frac{\dot{\alpha}(s)}{|\dot{\alpha}(s)|}$  e mostrar que o resultado é  $-1$ .

Suponhamos  $s_0$  um ponto de máximo da curvatura  $k$  de  $\mu$ . Então, quando  $s < s_0$   $k$  é crescente e, portanto,  $k'$  é positivo. Quando  $s > s_0$ ,  $k$  é decrescente e, portanto,  $k'$  é negativo. Neste caso, como

$$\dot{\alpha}(s) = -\frac{k'(s)}{[k(s)]^2}n(s)$$

temos que:

$$\text{Se } s \rightarrow s_0^-, |\dot{\alpha}(s)| = \frac{k'(s)}{(k(s))^2}$$

$$\text{Se } s \rightarrow s_0^+, |\dot{\alpha}(s)| = \frac{-k'(s)}{(k(s))^2}$$

$$\text{Logo, } \lim_{s \rightarrow s_0^-} \frac{\dot{\alpha}(s)}{|\dot{\alpha}(s)|} = -n(s_0) \text{ e } \lim_{s \rightarrow s_0^+} \frac{\dot{\alpha}(s)}{|\dot{\alpha}(s)|} = n(s_0).$$

$$\text{Portanto, } \langle -n(s_0), n(s_0) \rangle = -1.$$

Logo  $s_0$  é um ponto de cúspide da evoluta.

A demonstração é análoga para o caso em que  $s_0$  é um ponto de mínimo da curvatura.

Reciprocamente, suponhamos que  $s = s_0$  seja um ponto de cúspide da evoluta. Então necessariamente temos

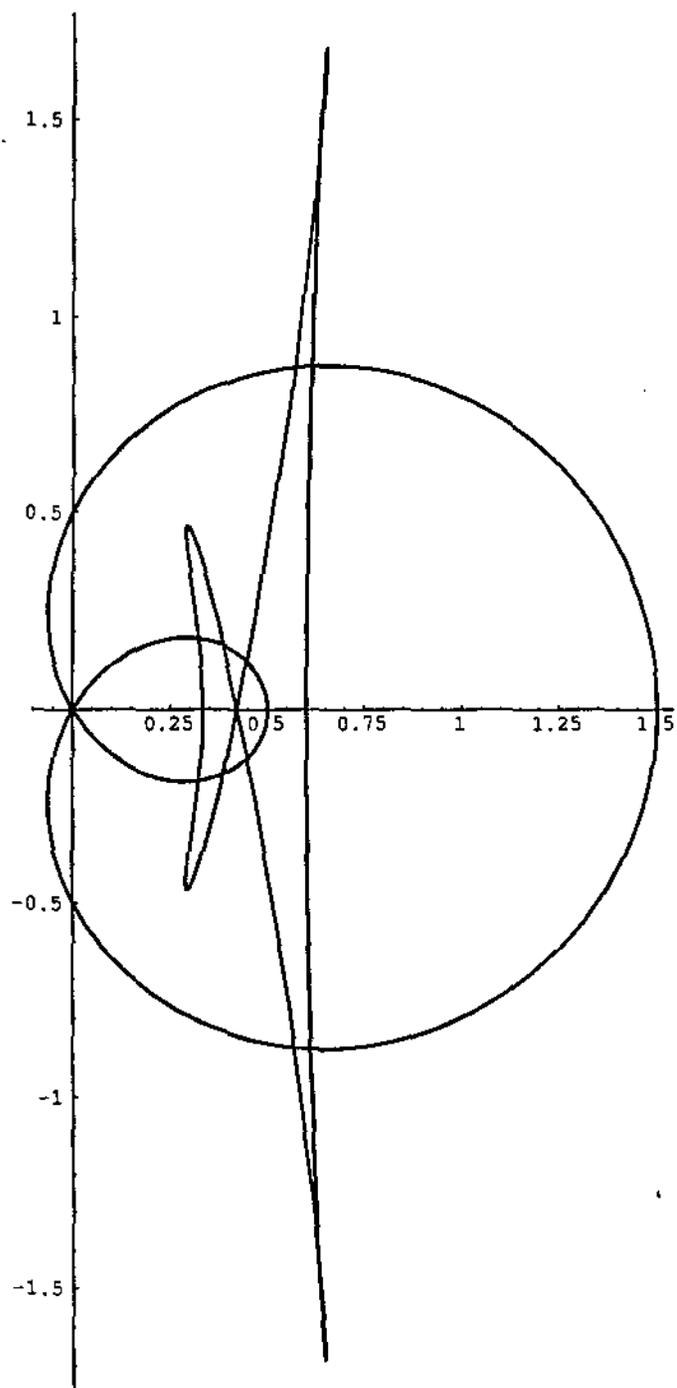
$$\dot{\alpha}(s_0) = 0. \text{ Como } \dot{\alpha}(s_0) = \frac{-k'(s_0)}{(k(s_0))^2}, \dot{\alpha}(s_0) = 0 \Rightarrow k'(s_0) = 0.$$

Logo,  $s_0$  é um ponto crítico da curvatura. Temos que mostrar que  $s_0$  é um ponto de máximo ou mínimo da curvatura.

Sejam  $v(s_0) = \lim_{s \rightarrow s_0^-} \frac{\dot{\alpha}(s)}{|\dot{\alpha}(s)|}$  e  $w(s_0) = \lim_{s \rightarrow s_0^+} \frac{\dot{\alpha}(s)}{|\dot{\alpha}(s)|}$ . Como  $s_0$  é ponto de cúspide de  $\alpha$ ,  $\langle v(s_0), w(s_0) \rangle = -1$ . Então  $v(s_0) = n(s_0)$  e  $w(s_0) = -n(s_0)$  (ou vice-versa), onde  $n(s_0)$  é o vetor normal principal de  $\mu$  em  $s_0$ .

Mas como  $|\dot{\alpha}(s)| = \frac{k'(s)}{(k(s))^2}$  se  $k'(s) \geq 0$  e  $|\dot{\alpha}(s)| = -\frac{k'(s)}{(k(s))^2}$  se  $k'(s) \leq 0$ , temos que  $v(s_0) = n(s_0) \Rightarrow k'(s) \leq 0$  quando  $s \rightarrow s_0^-$  e  $w(s_0) = -n(s_0) \Rightarrow k'(s) \geq 0$  quando  $s \rightarrow s_0^+$ .

Logo, para  $s < s_0$ ,  $k$  é decrescente, enquanto que para  $s > s_0$ ,  $k$  é crescente. Logo,  $s_0$  é um ponto de mínimo de  $k$ . Se supuséssemos  $v(s_0) = -n(s_0)$  e  $w(s_0) = n(s_0)$  obteríamos, de modo análogo, que  $s_0$  é um ponto máximo para  $k$ .



Evoluta do limaçon  $\left( \left( \frac{1}{2} + \cos t \right) \cos t, \left( \frac{1}{2} + \cos t \right) \sin t \right)$

**Figura I.8**

## CAPÍTULO II

### PROPRIEDADES GLOBAIS DE CURVAS PLANAS

#### INTRODUÇÃO

Estudaremos agora imersões do círculo no plano chamadas curvas fechadas e mergulhos do círculo no plano chamadas curvas simples fechadas, dando início ao estudo de propriedades globais de curvas planas.

Em II.1 será estudado o índice de rotação de uma curva que é o número algébrico de voltas completas dadas pela tangente unitária ao longo da curva. O Teorema do Índice de Rotação (Teorema II.1) garante que o índice de rotação de uma curva simples fechada é  $\pm 1$ .

Depois, em II.2 será definida a curvatura total de uma curva fechada e sua relação com a convexidade da curva. Mencionaremos também a Fórmula de Fabricius – Bjerre – Halpern, que é um resultado recente (1985) relatando o número de pontos de inflexão, o número de pontos duplos e o número de tangentes duplas de uma curva, cujos detalhes se encontram em [Berger].

Finalizaremos com o Teorema dos 4 Vértices, que assegura que a função curvatura de uma curva simples fechada possui ao menos 4 pontos extremos (máximo ou mínimo locais), incluindo a demonstração clássica para o caso convexo e as generalizações mais recentes deste Teorema [Osserman], 1985 e [Pinkall], 1987. A prova do Teorema dos Quatro ou Mais Vértices de R. Osserman é desenvolvida detalhadamente.

## II.1 – ÍNDICE DE ROTAÇÃO DE UMA CURVA

Denominaremos curva regular fechada plana a uma imersão de classe  $C^3$  de  $S^1$  em  $\mathbb{R}^2$  ou equivalentemente a uma função  $\mu : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  que pode ser estendida a uma função periódica  $\tilde{\mu} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^3$  com  $\dot{\mu}(t) \neq 0 \forall t$  e  $\mu(a) = \mu(b), \dots, \tilde{\mu}(a) = \tilde{\mu}(b)$ .

Uma curva regular fechada plana é simples se ela não possui auto-intersecções, isto é, se  $t_1, t_2 \in [a, b], t_1 \neq t_2$ , então  $\mu(t_1) \neq \mu(t_2)$ .



Uma curva regular fechada simples

Uma curva regular fechada (não simples)

Figura II.1

Um resultado clássico de natureza topológica envolvendo curvas fechadas planas é o Teorema de Jordan.

**TEOREMA (Jordan):** Seja  $\mu : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular, fechada, plana, simples. Então  $\mathbb{R}^2 - \mu([a, b])$  tem exatamente duas componentes conexas, e  $\mu([a, b])$  é sua fronteira comum.

**DEMONSTRAÇÃO:** [CARMO] pág. 393.

**OBSERVAÇÃO:** O teorema de Jordan também é válido quando  $\mu$  é de classe  $C^0$ . Para uma demonstração ver [DIEUDONNÉE].

Dada uma curva regular fechada plana  $\mu : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , transportamos os vetores tangentes unitários  $t(s)$  paralelamente de modo que as origens de  $t(s)$  coincidam com a origem de  $\mathbb{R}^2$ ; os pontos extremos de  $t(s)$  descrevem então, uma curva parametrizada chamada a indicatriz tangente de  $\mu$ .

Se  $\mu(s) = (\mu_1(s), \mu_2(s))$  é a parametrização pelo comprimento de arco  $s$ , então  $t(s) = (\mu'_1(s), \mu'_2(s))$ . Logo, o vetor velocidade da indicatriz tangente é:

$$\frac{dt}{ds} = (\mu''_1(s), \mu''_2(s)) = \mu''(s) = kn \quad (II.1)$$

onde  $k$  é a curvatura com sinal de  $\mu$  e  $n$  é o vetor normal de  $\mu$ .

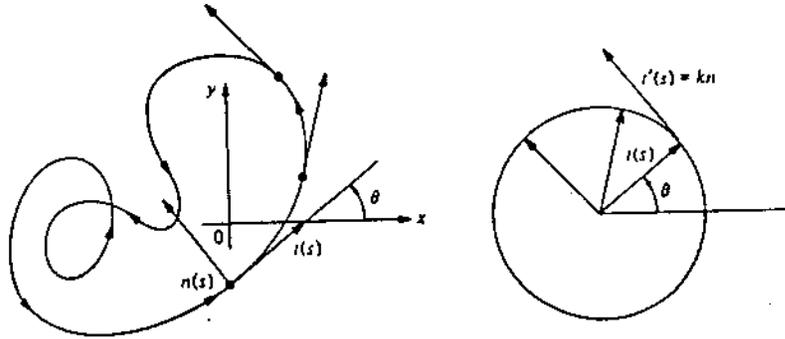


Figura II.2

Seja  $\theta(s), 0 < \theta(s) < 2\pi$ , o ângulo que  $t(s)$  faz com o eixo  $x$ ; isto é,  $\mu'_1(s) = \cos\theta(s), \mu'_2(s) = \sin\theta(s)$ .

Como  $\theta(s)$  está localmente bem definida como uma função diferenciável de  $s$  ([Lima] pág. 189), temos:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= \frac{d}{ds}(\cos\theta, \sin\theta) \\ &= \theta'(-\sin\theta, \cos\theta) = \theta'n. \end{aligned} \quad (II.2)$$

Logo, de (II.1) e (II.2) obtemos:

$$\theta'(s) = k(s).$$

Intuitivamente,  $\theta(s)$  mede a rotação total do vetor tangente, isto é, o ângulo total descrito pelo ponto  $t(s)$  na indicatriz tangente, quando percorrermos a curva  $\mu$  de  $a$  a  $b$ . Como  $\theta'(s) = k(s)$ , temos que quando  $\theta$  for uma função crescente,  $k$  é positiva, ao passo que quando  $\theta$  for decrescente  $k$  é negativa. Ou seja, através do sinal da curvatura

b. Como  $\theta'(s) = k(s)$ , temos que quando  $\theta$  for uma função crescente,  $k$  é positiva, ao passo que quando  $\theta$  for decrescente  $k$  é negativa. Ou seja, através do sinal da curvatura podemos estudar a variação de  $\theta$  e vice-versa. Vejamos alguns exemplos.

Vamos considerar a família de curvas

$$\mu(t) = (rcost, rsent), t \in [0, 2\pi]$$

onde  $r = a + cost$ .

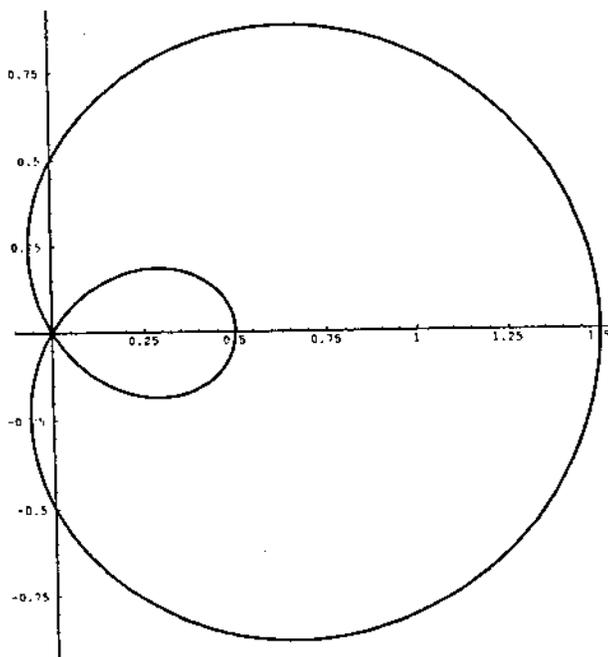
Sejam  $\mu_1(t) = rcost$  e  $\mu_2(t) = rsent$

$$k(t) = \frac{\dot{\mu}_1\ddot{\mu}_2 - \ddot{\mu}_1\dot{\mu}_2}{|\dot{\mu}|^3},$$

de onde obtemos

$$k(t) = \frac{3acos t + a^2 + 2}{(2acos t + a^2 + 1)^{3/2}}.$$

Para diferentes valores de  $a$  obtemos curvas diferentes. Vamos estudar o sinal da curvatura destas curvas. Para  $0 < a < 1$  temos o limaçon, como mostra a figura.



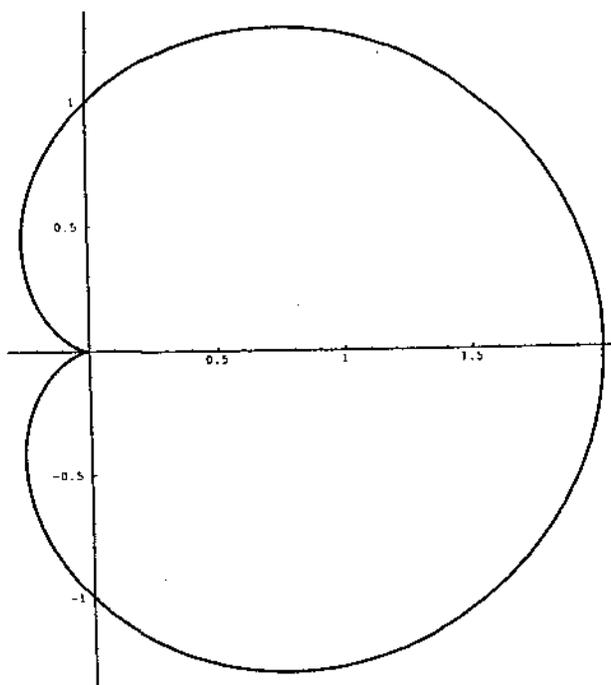
Limaçon com  $a = 1/2$

**Figura II.3**

$3a \cos t + a^2 + 2 \geq -3a + a^2 + 2$  e para  $0 < a < 1$  e  $-3a + a^2 + 2 > 0$ , pois as raízes da equação  $-3a + a^2 + 2 = 0$  são 1 e 2 e, portanto,  $-3a + a^2 + 2 > 0$  para  $0 < a < 1$ .

Logo, para  $0 < a < 1$   $k(t) > 0 \forall t \in [0, 2\pi]$ . Olhando a função ângulo  $\theta(s)$  ao longo do limaçon vemos que  $\theta$  é sempre crescente.

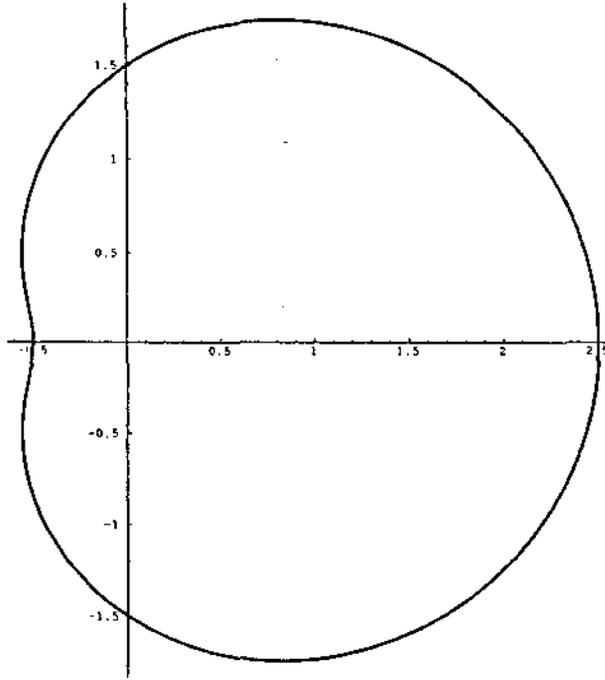
Para  $a = 1$ , temos o cardióide que não é uma curva fechada regular, pois em  $t = \pi, \mu'(t) = 0$



Cardióide

Figura II.4

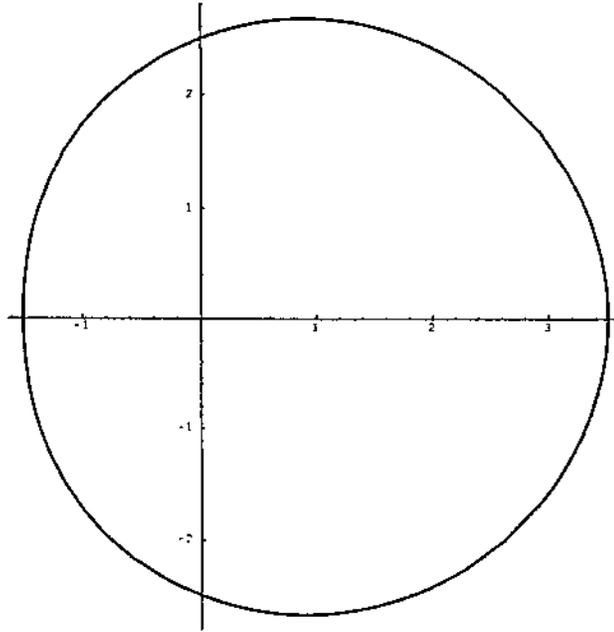
Para  $1 < a < 2$ , as curvas não possuem auto-intersecção (pois  $r > 0$ ) e  $k$  pode assumir valores positivos e negativos. A curva tem o aspecto abaixo e vemos que onde  $\theta$  cresce  $k > 0$  e onde  $\theta$  decresce  $k < 0$ .



**Figura II.5**

Para  $a \geq 2$ , temos:  $3a \cos t + a^2 + 2 \geq -3a + a^2 + 2 \geq 0$ , pois a equação  $-3a + a^2 + 2 = 0$  tem como raízes os números  $a = 1$  e  $a = 2$  e para  $a \geq 2$ ,  $-3a + a^2 + 2 \geq 0$ .

Logo, neste caso,  $k(t) \geq 0 \forall t \in [0, 2\pi]$  e a curva tem o aspecto abaixo



$$a = 2$$

**Figura II.6**

Esta família de curvas nos permite caracterizar melhor as curvas fechadas planas quando sabemos a variação do sinal da curvatura.

Vamos agora definir índice de rotação de uma curva fechada plana.

**DEFINIÇÃO:** O índice de rotação de uma curva regular, fechada, plana é o grau da aplicação (Apêndice - 2)  $\varphi : S^1 \rightarrow S^1$  definida pela indicatriz tangente da curva.

Intuitivamente, o índice de rotação de uma curva fechada é o número algébrico de voltas completas dadas pela indicatriz tangente ao longo da curva.

Logo, olhando o exemplo anterior vemos que o limaçon ( $0 < a < 1$ ) tem índice de rotação  $\pm 2$ , dependendo da orientação. Para  $1 < a < 2$ , o índice de rotação é  $\pm 1$  e para

$a \geq 2$  também é  $\pm 1$ .

**TEOREMA II.1:** (Teorema do Índice de Rotação)

Seja  $\beta : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular fechada, plana, simples. O índice de rotação de  $\beta$  é  $\pm 1$  (dependendo da orientação).

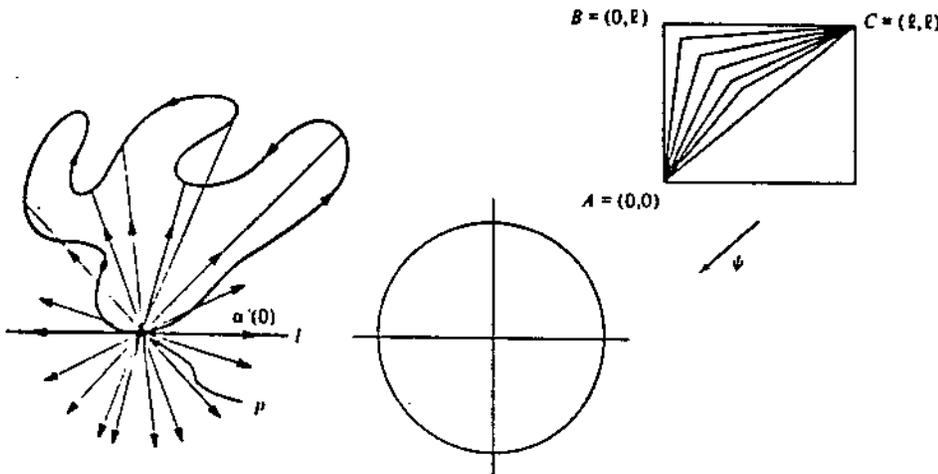
**DEMONSTRAÇÃO:** Considere uma reta que não encontre a curva e desloque-a paralelamente até que ela fique tangente à curva. Seja  $\ell$  a nova posição da reta e  $p$  o ponto de tangência. Logo, a curva está inteiramente de um lado da reta  $\ell$ . Escolha uma nova parametrização  $\alpha : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^2$  da curva de modo que  $\alpha(0) = p$ . Agora, seja

$$T = \{(t_1, t_2) \in [0, \ell] \times [0, \ell], 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ell\}$$

um triângulo, e defina uma aplicação secante  $\psi : T \rightarrow S^1$  por

$$\psi(t_1, t_2) = \frac{\alpha(t_2) - \alpha(t_1)}{|\alpha(t_2) - \alpha(t_1)|} \text{ para } t_1 \neq t_2, (t_1, t_2) \in T - \{(0, \ell)\}$$

$$\psi(t, t) = \frac{\dot{\alpha}(t)}{|\dot{\alpha}(t)|}, \psi(0, \ell) = -\frac{\dot{\alpha}(0)}{|\dot{\alpha}(0)|}$$



**Figura II.7**

$\psi$  é uma aplicação contínua. Sejam  $A = (0, 0)$ ,  $B = (0, \ell)$  e  $C = (\ell, \ell)$  os vértices do triângulo  $T$ .  $\psi \Big|_{AC}$  é a aplicação tangente de  $\alpha$ , o grau da qual é o índice de rotação de  $\alpha$ .

A aplicação tangente de  $\alpha$  é homotópica à restrição de  $\psi$  aos lados  $AB$  e  $BC$ . Como o grau é invariante por homotopia, basta mostrarmos que o grau desta última aplicação é  $\pm 1$ .

Assumimos que as orientações do plano e da curva são tais que o ângulo orientado de  $\dot{\alpha}(0)$  a  $-\dot{\alpha}(0)$  é  $\pi$ . Então a restrição de  $\psi$  a  $AB$  cobre metade de  $S^1$  na direção positiva, e a restrição de  $\psi$  a  $BC$  cobre a metade restante na direção positiva. Desta forma, o grau de  $\psi$  restrita a  $AB$  e  $BC$  é  $+1$ . Revertendo a orientação, obtemos  $-1$  para o grau.

## II.2 – CURVATURA TOTAL E CONVEXIDADE

**DEFINIÇÃO:** A curvatura total com sinal de uma curva  $\alpha : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^2$  regular, fechada, plana, parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ , é a integral

$$\int_0^\ell k(s) ds,$$

onde  $k(s)$  é a curvatura com sinal de  $\alpha$  em  $s$ .

**TEOREMA II.2:** A curvatura total com sinal de  $\alpha$  é igual a  $2\pi \cdot I$ , onde  $I$  é o índice de rotação de  $\alpha$ .

Antes de mostrar este teorema, vamos mostrar que dada a aplicação de recobrimento (Apêndice - 1)  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  definida por

$$\pi(x) = (\cos x, \sin x)$$

e  $\tilde{\varphi} : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$  um levantamento de  $\varphi$  (que é único pelo Apêndice - 1) então,  $\tilde{\varphi}(\ell) - \tilde{\varphi}(0) = \deg \varphi 2\pi$ .

De fato, se  $\sigma$  é o elemento canônico de comprimento de  $S^1$ , então  $\pi^* \sigma = dx$  (Apêndice 3), o elemento canônico de comprimento de  $\mathbb{R}$ .

Como

$$\varphi = \pi \circ \tilde{\varphi}, \varphi^* \sigma = (\pi \circ \tilde{\varphi})^* = (\tilde{\varphi})^* \circ \pi^*(\sigma) = (\tilde{\varphi})^* dx = \frac{d\tilde{\varphi}}{dx} dx.$$

Pela fórmula do grau (Apêndice), temos:

$$\int_0^\ell \varphi^* \sigma = \deg \varphi \int_{S^1} \sigma$$

$$\Rightarrow \int_0^\ell \frac{d\tilde{\varphi}}{dx} dx = \text{deg}\varphi 2\pi$$

$$\Rightarrow \tilde{\varphi}(\ell) - \tilde{\varphi}(0) = \text{deg}\varphi 2\pi.$$

## DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA II.2

Sabemos que o índice de rotação é o grau da aplicação

$$s \mapsto \varphi(s) = \frac{\dot{\alpha}(s)}{|\dot{\alpha}(s)|}$$

Então, se  $\tilde{\varphi}$  é um levantamento de  $\varphi$ ,

$$\tilde{\varphi}(\ell) - \tilde{\varphi}(0) = \text{deg}\varphi 2\pi$$

Logo,

$$\int_0^\ell k(s) ds = \int_0^\ell \frac{d\tilde{\varphi}}{ds} ds = \tilde{\varphi}(\ell) - \tilde{\varphi}(0) = 2\pi \text{deg}\varphi = 2\pi \cdot I.$$

Agora, pelo teorema do índice de rotação, se  $\alpha$  é uma curva regular, fechada, plana, simples,  $I = \pm 1$ . Logo, neste caso temos  $\int_0^\ell k(s) ds = \pm 2\pi$ .

**DEFINIÇÃO:** A curvatura total de uma curva  $\alpha : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^2$  regular fechada, plana, parametrizada pelo comprimento de arco  $s$  é

$$\int_0^\ell |k(s)| ds$$

## OBSERVAÇÕES:

- 1) esta definição também se estende às curvas no espaço, como veremos mais tarde;
- 2) cumpre salientar que a curvatura total de uma curva regular fechada, plana, parametrizada pelo comprimento de arco,  $\alpha : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , é igual ao comprimento da indicatriz tangente de  $\alpha$ .

Vamos agora falar de um importante teorema que relaciona a convexidade de uma curva regular fechada plana com sua curvatura.

**TEOREMA II.3:** Seja  $C = \mu([0, \ell])$  uma curva regular, fechada, plana, simples parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ . Então são equivalentes:

- (i) a curvatura (com sinal) de  $C$  (para alguma escolha de orientação) tem sinal constante;
- (ii)  $\int_0^\ell |k(s)| ds = 2\pi$ ;
- (iii)  $C$  é globalmente convexa, isto é, para todo  $m = \mu(s_0) \in C$  a curva fica inteiramente de um lado de sua reta tangente em  $C$   $tang_m C$ ;
- (iv)  $C$  é fronteira de uma subvariedade convexa com bordo de  $\mathbb{R}^2$ .

Uma curva tendo as propriedades acima é chamada convexa.

A prova que daremos a seguir é um detalhamento da que se encontra em [Berger].

**DEMONSTRAÇÃO:** (i)  $\Leftrightarrow$  (ii):

$$\int_0^\ell |k(s)| ds \geq \left| \int_0^\ell k(s) ds \right| = 2\pi, \text{ pelo Teorema II.1.}$$

Como  $k$  tem sinal constante, temos:

$$\int_0^\ell |k(s)| ds = \left| \int_0^\ell k(s) ds \right| = 2\pi.$$

Por outro lado, suponhamos que o sinal de  $k$  não é constante. Então, como  $k$  é contínua teríamos desigualdade estrita, ou seja,

$$\int_0^\ell |k(s)| ds > \left| \int_0^\ell k(s) ds \right| = 2\pi, \text{ pelo Teorema II.1.}$$

(i)  $\Rightarrow$  (iii). Por contradição: assumimos que  $k$  tem sinal constante mas que existe  $m \in C$  tal que  $C$  tem pontos de ambos os lados de  $tang_m C$ . Por compacidade, escolha pontos  $p$  e  $q$  nos lados opostos de  $tang_m C$  cuja distância a  $tang_m C$  é maximal; então  $tang_p C$ ,  $tang_m C$  e  $tang_q C$  são paralelos

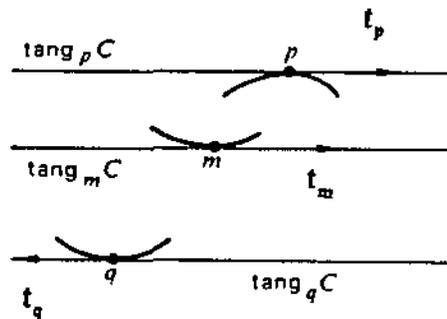


Figura II.8

Sejam  $t_m(C), t_p(C)$  e  $t_q(C)$  as tangentes unitárias a  $C$  nos pontos  $m, p$  e  $q$ , respectivamente.

Como  $|t_m(C)| = |t_p(C)| = |t_q(C)| = 1$ , dois destes vetores serão iguais, digamos  $t_m(C) = t_p(C)$ .

Sejam  $s_1, s_2$  tais que  $\mu(s_1) = m$  e  $\mu(s_2) = p$ , com  $s_1, s_2 \in (0, \ell)$ . Se  $\tilde{\varphi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é um levantamento da aplicação tangente unitária  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ , temos que, com escolhas devidas de orientação,  $k = \frac{d\tilde{\varphi}}{ds}$ . Como  $k$  tem sinal constante (vamos supor sinal positivo),  $\tilde{\varphi}$  é não decrescente. Também,  $\tilde{\varphi}(\ell) = 2\pi$ , se  $\tilde{\varphi}$  é escolhido de modo que  $\tilde{\varphi}(0) = 0$  já que o índice de rotação de  $C = \deg \varphi = 1$  (pois como vimos anteriormente  $\tilde{\varphi}(\ell) - \tilde{\varphi}(0) = \deg \varphi 2\pi$ ).

Como  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  é injetiva em  $(0, 2\pi)$  e  $\tilde{\varphi}((0, \ell)) = (0, 2\pi)$ , a igualdade  $\varphi(s_1) = \varphi(s_2) \Rightarrow \pi(\tilde{\varphi}(s_1)) = \pi(\tilde{\varphi}(s_2)) \Rightarrow \tilde{\varphi}(s_1) = \tilde{\varphi}(s_2)$ . Mas como  $\tilde{\varphi}(s_1) = \tilde{\varphi}(s_2)$  e  $\tilde{\varphi}$  é não decrescente implica  $\tilde{\varphi}$  constante em  $[s_1, s_2]$ .

Logo,  $\varphi$  é constante em  $[s_1, s_2]$  e

$$\begin{aligned}\mu(s_2) &= \mu(s_1) + (s_2 - s_1)\mu'(s_1) \\ p &= m + (s_2 - s_1)\mu'(s_1) \\ p &= m + (s_2 - s_1)t_m(c)\end{aligned}$$

Logo,  $p \in \text{tang}_m(C)$ . Contradição, pois  $p \notin \text{tang}_m(C)$ .

Logo,  $C$  é convexa.

(iii)  $\Rightarrow$  (iv) Tome  $m \in C$  e seja  $H_m$  o semiplano fechado determinado por  $\text{tang}_m C$  e contendo  $C$  (estamos assumindo  $C$  globalmente convexa).

Seja  $D =$  fecho do interior de  $C$ .

Afirmamos que  $D \subset H_m$ . Vamos supor que isto não ocorra. Logo, existe  $y \in \overset{\circ}{D}$  e  $y \notin H_m$ , ou seja,  $y \in \overset{\circ}{D} \setminus H_m$ . A semi-reta  $\Delta$  originada em  $y$  e contendo  $m$  não está inteiramente em  $D$ , pois  $D$  é compacto.

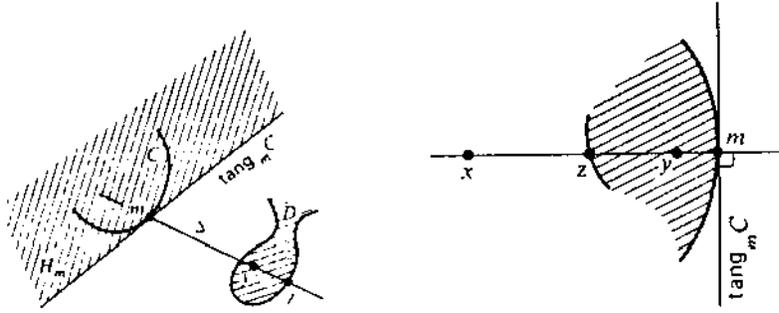


Figura II.9

Como  $y \in \overset{\circ}{D}$  existe um ponto  $z \in \partial(\Delta \cap D) \subset \Delta \cap \partial(D) = \Delta \cap C$  tal que  $y$  fica entrem  $m$  e  $z$ . Logo,  $C$  não está contido em  $H_m$ . Contradição.

Logo  $D \subset H_m$ . Como  $m$  é arbitrário, temos  $D \subset H_m \forall m \in C$ .  
Logo,  $D \subset \bigcap_{m \in C} H_m$ .

Vamos mostrar agora que  $D = \bigcap_{m \in C} H_m$ . Isto implicará  $D$  subvariedade com bordo de  $\mathbb{R}^2$  convexa, já que  $D$  é a intersecção de conjuntos convexos.

Suponha  $D \neq \bigcap_{m \in C} H_m$ . Logo,  $\bigcap_{m \in C} H_m \not\subset D$ . Logo  $\exists x \in \bigcap_{m \in C} H_m, x \notin D$ .

Por compacidade, escolha  $m \in C$  minimizando a função

$$n \mapsto d^2(x, n) = D(s) \in \mathbb{R}, n \in C$$

Se  $x = (x_1, x_2)$  e  $m = (\mu_1(s_1), \mu_2(s_1))$ ,

$$\begin{aligned} D(s) &= (\mu_1(s) - x_1)^2 + (\mu_2(s) - x_2)^2 \\ D'(s) &= 2(\mu_1(s) - x_1)\mu_1'(s) + 2(\mu_2(s) - x_2)\mu_2'(s) \end{aligned}$$

Logo,  $D'(s_1) = 0$ .

O vetor  $(\mu_1(s_1) - x_1, \mu_2(s_1) - x_2)$  é perpendicular a  $(\mu_1'(s_1), \mu_2'(s_1))$ , pois

$$\begin{aligned} & \langle (\mu_1(s_1) - x_1, \mu_2(s_1) - x_2), (\mu'_1(s_1), \mu'_2(s_1)) \rangle = \\ & (\mu_1(s_1) - x_1)\mu'_1(s_1) + (\mu_2(s_1) - x_2)\mu'_2(s_1) = \frac{1}{2}D'(s_1) = 0. \end{aligned}$$

Por hipótese,  $C$  está em  $H_m$ , e em particular  $\overset{\circ}{D}$  contém um ponto  $y$  estritamente entre  $x$  e  $m$ . Mas, como antes, existirá

$$z \in \partial(\Delta \cap D) \subset \Delta \cap \partial D = \Delta \cap C,$$

onde  $z$  está entre  $x$  e  $y$ , pois  $x \notin D$ . Mas um tal  $z$  estaria mais próximo de  $x$  que de  $m$ , isto é,  $d(x, z) < d(x, m)$ , o que contradiz a definição de  $m$ .

(iv)  $\Rightarrow$  (i). Num ponto  $m$  de  $C$ , orientada pelo teorema de Jordan, a subvariedade com fronteira  $D$  fica do lado esquerdo de  $\text{tang}_m C$ ; como  $D$  é convexa,  $C$  está também à esquerda de  $\text{tang}_m C$ . Mas então  $k(s_0) \geq 0$  ( $m = \mu(s_0)$ ), pois se  $k(s_0) < 0$ ,  $\theta'(s_0) < 0$  e, portanto,  $\theta$  decresceria em  $s_0$ , o que significa que teríamos pontos de  $C$  à direita de  $\text{tang}_m C$ . Contradição.

## - FÓRMULA DE FABRICIUS-BJERRE-HALPERN

Um resultado recente (1985) que relata o número de pontos de inflexão, o número de pontos duplos e o número de tangentes duplas de uma curva é a Fórmula de Fabricius-Bjerre-Halpern que enunciaremos abaixo e cuja demonstração se encontra em [Berger].

Seja  $\mu : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular, fechada, plana.

### DEFINIÇÃO:

1) Um par  $\{t, s\}$  é chamado uma tangente dupla se  $\mu(t) \neq \mu(s)$  e  $\text{tang}_s = \text{tang}_t$ , onde  $\text{tang}_s$  e  $\text{tang}_t$  são, respectivamente, as retas tangentes em  $\mu(s)$  e  $\mu(t)$ . Sejam  $N^+$  e  $N^-$  os conjuntos de tangentes duplas tais que  $n(s) = n(t)$  e  $n(s) = -n(t)$ , respectivamente.

2) Um par  $\{t, s\}$  é chamado um ponto duplo se  $s \notin t + \ell\mathbb{Z}$  e  $\mu(s) = \mu(t)$ . Um ponto duplo é chamado regular se  $\text{tang}_s \neq \text{tang}_t$ . O conjunto dos pontos duplos regulares é denotado por  $D$ .

3) Um ponto  $\{s\}$  é chamado um ponto de inflexão se  $k(s) = 0$ . Um ponto de inflexão é chamado regular se  $k'(s) \neq 0$  (A curva não é localmente convexa neste ponto).

O conjunto dos pontos de inflexão regulares é denotado por  $I$ .

**TEOREMA II.4** (Fórmula de Frabricius-Bjerre-Halpern): Seja  $C$  uma curva regular, fechada, plana tal que todas as tangentes duplas, todos os pontos duplos e todos os pontos de inflexão são regulares. Então os quatro conjuntos  $N^+$ ,  $N^-$ ,  $D$ ,  $I$  definidos acima são finitos e suas cardinalidades satisfazem a seguinte relação:

$$\#N^+ = \#N^- + \#D + \frac{1}{2}\#I$$

**EXEMPLOS:**

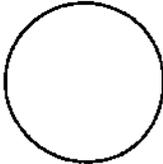
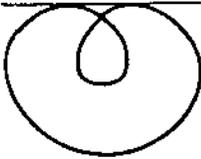
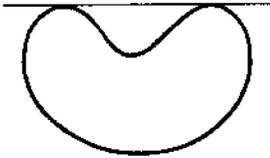
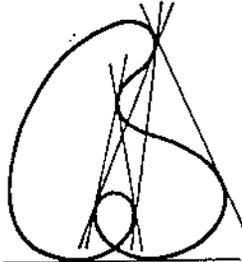
	$N^+$	$N^-$	$D$	$I$
	0	0	0	0
	1	0	1	0
	1	0	0	2
	4	2	1	2

Figura II.10

## II.3 – O TEOREMA DOS QUATRO VÉRTICES

O Teorema dos 4 vértices possui uma longa história, começando em 1909 com Mukhopadhyaya, que provou que uma curva convexa possui pelo menos 4 vértices. (Uma elipse tem um número mínimo de vértices, situados nos extremos dos eixos maior e menor). Em 1912, Kneser generaliza o Teorema para curvas fechadas simples, não necessariamente convexas. Desde então vértices de curvas planas têm sido estudados sob vários pontos de vista. A demonstração mais conhecida do caso convexo é devida a Herglotz, que apareceu num trabalho de 1933. Seu belo e simples argumento usa fortemente a convexidade da curva.

Em 1971 H. Gluck demonstra uma espécie de recíproca do Teorema dos 4 vértices: Se  $k$  for uma função real periódica, estritamente positiva que seja constante ou possua ao menos dois máximos e dois mínimos, então existe uma curva fechada simples que tem  $k$  como função curvatura (e sendo  $k$  estritamente positiva, tal curva será convexa).

Em 1985 R. Osserman dá uma generalização do teorema para curvas fechadas simples [OSSERMAN] e em 1987 U. Pinkall faz uma extensão do teorema para curvas não simples mas que são bordo de superfícies imersas no plano [Pinkall].

Colocamos a seguir a prova de Herglotz para curvas convexas e depois o detalhamento que fizemos da prova de [Osserman], provando três Lemas que não estão feitos no artigo. Para finalizar comentaremos o resultado de [Pinkall].

**TEOREMA II.5** (Herglotz): Uma curva regular fechada plana, convexa tem pelo menos 4 vértices.

**DEMONSTRAÇÃO:** Como vimos  $k(s) = \theta'(s)$ , onde  $\theta(s)$  é o ângulo entre o vetor tangente à curva em  $s$ ,  $t(s)$ , e o eixo  $x$ . Como  $k(s) = \theta'(s)$  é contínua num intervalo fechado e  $\theta'(s)$  é periódica, temos que  $k$  assume um máximo e um mínimo. Nestes pontos,  $k'(s) = 0$ , e  $k'$  muda de sinal um número par de vezes no intervalo periódico. Assim, o teorema pode ser mostrado provando que  $k'$  muda de sinal em mais que dois pontos. Isto é feito indiretamente, assumindo que  $k'$  muda de sinal em dois pontos  $P$  e  $Q$  somente, e mostrando que isto nos leva a uma contradição. Observamos que sob estas circunstâncias  $k'(s) = \theta''(s)$  têm sinais diferentes, mas fixos em dois arcos entre  $P$  e  $Q$ . Escolha  $P$  como origem do plano  $xy$  e tome o eixo  $x$  através de  $Q$ . O eixo  $x$  divide a oval em duas partes - uma inferior e outra superior do semi-plano. Aqui estamos usando a convexidade da oval. Agora, considere a integral  $\int_a^b y(s)\theta''(s)ds$  tomada ao longo da curva  $\mu : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \mu(s) = (x(s), y(s))$ .

Então, como  $\mu$  é  $C^3$ , sua 3ª derivada é contínua. Logo,  $\theta''$  é contínua. Temos:

$$\begin{aligned}\int_a^b y(s)\theta''(s)ds &= \int_a^b (y(s)\theta'(s))'ds - \int_a^b y'(s)\theta'(s)ds \\ &= y(s)\theta'(s) \Big|_a^b - \int_a^b (y'(s)\theta'(s))ds.\end{aligned}$$

Agora,  $y(b)\theta'(b) - y(a)\theta'(a) = 0$  pois a curva é fechada.

A integral do lado direito também é zero, pois  $y'(s) = \text{sen}\theta(s)$  e, portanto,

$$-\int_a^b y'(s)\theta'(s)ds = \int_a^b \frac{d}{ds}(\cos\theta(s)) = \cos\theta(s) \Big|_a^b = 0,$$

pois a curva é fechada.

Agora, como vimos,  $k'$  tem sinais fixos e distintos em cada semi-plano.

Se supusermos  $k'(s) > 0$  no semi-plano superior, como  $y(s)$  é positivo também, temos:

$$\int_a^b y(s)\theta''(s)ds > 0 \text{ neste semi-plano}$$

$$\int_a^b y(s)\theta''(s)ds > 0 \text{ no semi-plano inferior, pois aí } k'(s) < 0 \text{ e } y(s) < 0 \text{ também.}$$

$$\text{Logo, } \int_a^b y(s)\theta''(s)ds > 0 \text{ neste caso.}$$

Se supusermos  $k'(s) < 0$  no semi-plano superior obteremos

$$\int_a^b y(s)\theta''(s)ds < 0.$$

De qualquer forma chegamos a uma contradição.

Vamos agora fazer o detalhamento da prova de [Osserman] para o Teorema dos Quatro Vértices para curvas planas fechadas simples.

**TEOREMA II.6:** (Teorema dos Quatro ou Mais Vértices – R. Osserman): Seja  $\gamma$  uma curva regular, fechada, plana, simples. Seja  $C$  o círculo circunscrito ao redor de  $\gamma$ . Então:

1.  $\gamma \cap C$  contém pelo menos 2 pontos;
2. Se  $\gamma \cap C$  contém pelo menos  $n$  pontos, então  $\gamma$  tem pelo menos  $2n$  vértices.

Três Lemas serão essenciais na demonstração.

**LEMA 1:** Seja  $E$  um conjunto compacto no plano contendo pelo menos 2 pontos. Então, entre todos os círculos  $C$  com a propriedade que o disco fechado limitado por  $C$  contém  $E$ , existe um de raio mínimo  $R > 0$ .

**DEMONSTRAÇÃO:** Existência: Seja  $R = \inf k$ , onde  $k = \{r \in \mathbb{R}^+ \mid B_r(p) \supseteq E, \text{ para algum } p \in \mathbb{R}^2\}$ .

$k \neq \emptyset$ , pois  $E$  é compacto e, portanto, limitado.

Vamos mostrar que  $k$  é fechado, pois assim  $R \in k$  e, assim,  $B_R(p) \supseteq E$ .

Além disso,  $R \neq 0$ , pois como  $E$  tem pelo menos 2 pontos, sendo  $\ell$  a distância entre eles, temos que  $R \in \left[\frac{\ell}{2}, +\infty\right)$ .

Consideremos a função:

$$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \{0, 1\}$$

dada por

$$f(p, r) = \begin{cases} 0 & \text{se } B_r(p) \not\supseteq E \\ 1 & \text{se } B_r(p) \supseteq E \end{cases}$$

Vamos mostrar que  $f^{-1}(0)$  é aberto em  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$ , ou seja, que o conjunto  $A = \{(p, r) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \mid B_r(p) \not\supseteq E\}$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$ . (evidentemente  $A \neq \emptyset$ ).

Seja  $x \in A, x = (p, r)$ , onde  $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$  e  $r \in \mathbb{R}^+$ . Logo,  $B_r(p) \not\supseteq E$ . Então, existe  $y \in E$  tal que  $y \notin B_r(p)$ . Então  $d(y, p) > r$ . Mas isto significa que  $d(y, B_r(p)) = d(y, p) - r = \varepsilon > 0$ .

Vamos considerar a bola  $B_{\varepsilon/4}(p_1, p_2, r)$ . Se  $w \in B_{\varepsilon/4}(p_1, p_2, r)$ , então  $w = \left(p_1 + s\frac{\varepsilon}{4}, p_2 + t\frac{\varepsilon}{4}, r + u\frac{\varepsilon}{4}\right)$ , onde  $s, t, u \in [-1, 1]$ .

Queremos então mostrar que a bola  $B_{r+\frac{\varepsilon}{4}}\left(p_1 + s\frac{\varepsilon}{4}, p_2 + t\frac{\varepsilon}{4}\right)$  ainda não contém o ponto  $y$ .

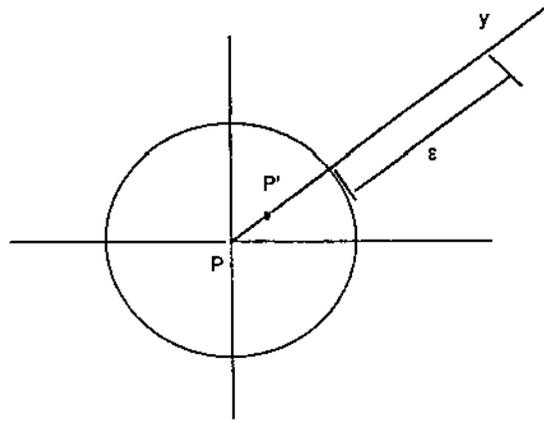


Figura II.11

É claro que o pior caso ocorre quando tomarmos a bola  $B_{r+\frac{\varepsilon}{4}}\left(p_1 + \frac{\varepsilon}{4}, p_2 + \frac{\varepsilon}{4}\right)$ . Neste caso, queremos mostrar que  $d\left(y, \underbrace{\left(p_1 + \frac{\varepsilon}{4}, p_2 + \frac{\varepsilon}{4}\right)}_{p'}\right) > r + \frac{\varepsilon}{4}$

$$\begin{aligned} d(p, p') &= \sqrt{\left(p_1 + \frac{\varepsilon}{4} - p_1\right)^2 + \left(p_2 + \frac{\varepsilon}{4} - p_2\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{16} + \frac{\varepsilon^2}{16}} = \sqrt{2}\frac{\varepsilon}{4} \\ d(y, p') &= d(y, B_r(p)) + r - d(p, p') \\ &= \varepsilon + r - \sqrt{2}\frac{\varepsilon}{4} = r + \varepsilon\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = r + \varepsilon\left(\frac{4 - \sqrt{2}}{4}\right) > r + \frac{\varepsilon}{4} \end{aligned}$$

Logo,  $y \notin B_{r+\frac{\varepsilon}{4}}(p')$ .

Logo, o conjunto  $A$  é um subconjunto aberto do  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$ .

Como  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ = f^{-1}(0) \cup f^{-1}(1)$  e  $f^{-1}(0)$  é aberto, segue que  $f^{-1}(1)$  é fechado em  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$ .

Agora, seja a projeção  $\pi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$   
 $(p_1, p_2, r) \mapsto r$

$\pi$  é aberta, pois dada a bola aberta  $\overset{\circ}{B}_\varepsilon(p_1, p_2, r)$  em  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$ , se  $x \in \overset{\circ}{B}_\varepsilon(p_1, p_2, r)$ , então  $x = (p_1 + s\varepsilon, p_2 + t\varepsilon, r_2 + u\varepsilon)$  com  $s, t, u \in (-1, 1)$ .

Logo,  $\pi(\overset{\circ}{B}_\varepsilon(p_1, p_2, r)) = (r - |u| \frac{\varepsilon}{4}, r + |u| \frac{\varepsilon}{4})$ , que é um aberto de  $\mathbb{R}^+$ . Então  $\pi(f^{-1}(1)) = \{r \in \mathbb{R}^+ \mid B_r(p) \supseteq E, \text{ para algum } p \in \mathbb{R}^2\} = k$  é um fechado de  $\mathbb{R}^+$ , pois  $f^{-1}(1)$  é um fechado de  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$ .

Logo,  $R = \inf k$  é tal que  $B_R(p) \supseteq E$ . Está, então, mostrada a existência.

### - UNICIDADE

Vamos supor que existem 2 círculos  $C_1$  e  $C_2$  que contêm  $E$  e que possuem raio mínimo  $R$ . Evidentemente, eles não podem ser concêntricos. Sejam, então,  $P_1$  e  $P_2$  os dois pontos de intersecção de  $C_1$  e  $C_2$ .  $|\overline{P_1P_2}| < 2R$ , pois  $\overline{P_1P_2}$  é uma corda de  $C_1$  e de  $C_2$ . Seja  $P_3$  o ponto médio de  $\overline{P_1P_2}$ . O círculo  $C_3$  de centro  $P_3$  e raio  $\frac{|\overline{P_1P_2}|}{2}$  contém  $C_1 \cap C_2$  e, portanto, contém  $E$ , pois  $E \subseteq C_1 \cap C_2$ . Além disto, o raio de  $P_3$  é estritamente menor que  $R$ , o que contraria a minimalidade de  $R$ . Logo,  $C_1 = C_2$ .

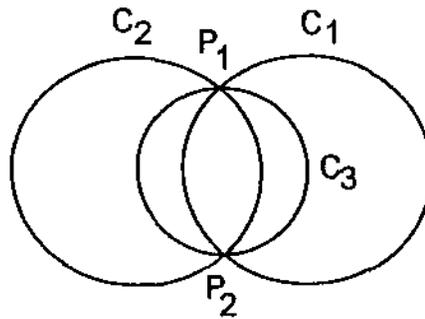


Figura II.12

**LEMA 2:** Se  $C$  é o círculo circunscrito em  $E$ , então qualquer arco de  $C$  maior que um semicírculo intercepta  $E$ .

**DEMONSTRAÇÃO:** Se  $E$  tiver apenas 2 pontos  $a$  e  $b$ , o círculo mínimo contendo  $E$  é aquele que passa por  $a$  e  $b$  e tal que  $\overline{ab}$  seja um diâmetro de  $C$ . Logo, qualquer arco

maior que um semicírculo intercepta  $E$ .

Vamos, então, considerar  $E$  com pelo menos 3 pontos.

Suponha que o círculo intercepte  $E$  em alguns pontos, mas que um arco de  $C$  maior que um semicírculo não intercepte nenhum ponto de  $E$ . Sejam  $a$  e  $b$  pertencentes a  $E \cap C$  tal que a distância entre  $a$  e  $b$  seja máxima. Como existe um arco maior que um semicírculo que não intercepta  $E$ , temos  $|\overline{ab}| < 2R$  ( $R =$  raio de  $C$ ). Assim,  $\overline{ab}$  divide  $C$  em dois arcos, um menor que  $180^\circ$  e outro maior que  $180^\circ$  que não intercepta nenhum ponto de  $E$ .

Seja  $m$  a mediatriz de  $\overline{ab}$   $m$  é um diâmetro de  $C$ . Assim, podemos deslocar o círculo na direção dessa mediatriz, até que ele toque algum outro ponto de  $E$ . Como neste arco maior que um semicírculo nenhum ponto de  $E$  intercepta  $C$ , um ponto encontrará  $C$  primeiro e o conjunto  $E$  ficará contido em  $C$  (como mostra a figura).

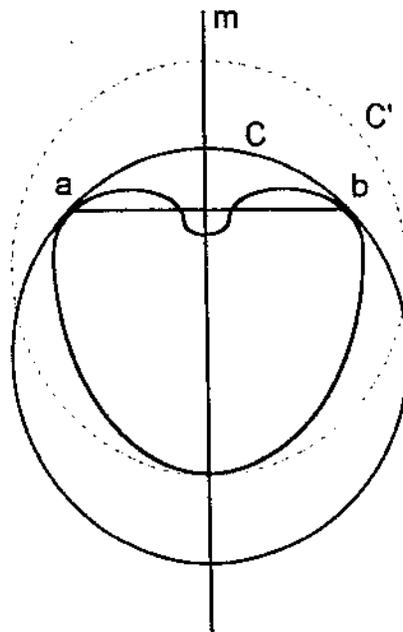


Figura II.13

Logo, conseguimos um outro círculo de mesmo raio contendo  $E$  e, como o círculo

circunscrito é único (Lema 1),  $C$  não pode ser o círculo mínimo.

**LEMA 3:** Seja  $\gamma$  uma curva regular orientada que tem o mesmo vetor unitário tangente num ponto  $P$  que um círculo positivamente orientado  $C$  de raio  $R$ . Seja  $k$  a curvatura de  $\gamma$ . Se  $k > \frac{1}{R}$  em  $P$ , uma vizinhança de  $P$  em  $\gamma$  fica dentro de  $C$ , enquanto que se  $k < \frac{1}{R}$  em  $P$ , uma vizinhança de  $P$  em  $\gamma$  fica fora de  $C$ .

**DEMONSTRAÇÃO:** Vamos mostrar para  $k > \frac{1}{R}$ , ou seja, quando  $\gamma$  tiver curvatura em  $P$  maior que a curvatura do círculo. Suponhamos  $\gamma$  e  $C$  parametrizadas pelo comprimento de arco com  $\gamma(0) = C(0) = P = (R, 0)$ .

Mostrar que uma vizinhança de  $\gamma$  em  $P$  fica dentro de  $C$  significa mostrar que  $|\gamma(s)| < R$  para  $s$  suficientemente próximo de zero.

Para isto, tomamos o desenvolvimento de Taylor de  $\gamma$  em torno do zero

$$\gamma(s) = \gamma(0) + \dot{\gamma}(0)s + \frac{\ddot{\gamma}(0)}{2!}s^2 + R_2, \quad \text{onde } \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R_2}{s^2} = 0$$

Então,

$$\gamma(s) = (R, 0) + (0, 1)s + (-1, 0)\frac{k(0)}{2}s^2 + R_2$$

$$\gamma(s) = (R, 0) + (0, 1)s - (1, 0)\frac{k(0)}{2}s^2 + R_2$$

$$\gamma(s) = (1, 0) \left[ R - \frac{k(0)}{2}s^2 \right] + (0, 1)s + R_2$$

Queremos mostrar que  $|\gamma(s)| < R$ .

Para  $s$  próximo de zero, podemos aproximar  $\gamma(s)$  por

$$\gamma(s) = (1, 0) \left[ R - \frac{k(0)}{2}s^2 \right] + (0, 1)s$$

$$|\gamma(s)| = \left| \left( R - \frac{k(0)}{2}s^2, s \right) \right|.$$

Se  $k(0) > \frac{1}{R}$ , temos:

$$kR > 1 \Rightarrow kR - 1 > 0 \Rightarrow \frac{4}{k^2}(kR - 1) > 0.$$

Logo, se tomarmos  $s$  tal que  $s^2 < \frac{4}{k^2}(kR - 1)$ , temos:

$$\begin{aligned} \frac{k^2 s^2}{4} < kR - 1 &\Rightarrow \frac{k^2 s^2}{4} + 1 - kR < 0 \Rightarrow s^2 \left( \frac{k^2 s^2}{4} + 1 - kR \right) < 0 \\ \Rightarrow \frac{k^2 s^4}{4} + (1 - kR)s^2 < 0 &\Rightarrow \frac{k^2 s^4}{4} + (1 - kR)s^2 + R^2 < R^2 \\ \Rightarrow \left( R - \frac{k s^2}{2} \right)^2 + s^2 < R^2 &\Rightarrow |\gamma(s)|^2 < R^2 \Rightarrow |\gamma(s)| < R. \end{aligned}$$

Logo,  $\gamma(s)$  fica dentro de  $C$  para  $s^2$  próximo de zero com  $s^2 < \frac{4}{k^2}(kR - 1)$ .

**DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA II.6:** Seja  $\gamma$  uma curva regular, fechada, plana, simples,  $C$  o círculo circunscrito e  $R$  o raio de  $C$ . A primeira parte do teorema é consequência direta do Lema 2. Para provar a segunda parte, sejam  $P_1, \dots, P_n$  os pontos de  $\gamma \cap C$ . Se estes pontos são ordenados ciclicamente ao longo de  $\gamma$ , obtemos  $n$  arcos  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  de  $\gamma$ , cada um limitado por um par de pontos em  $\gamma \cap C$ .

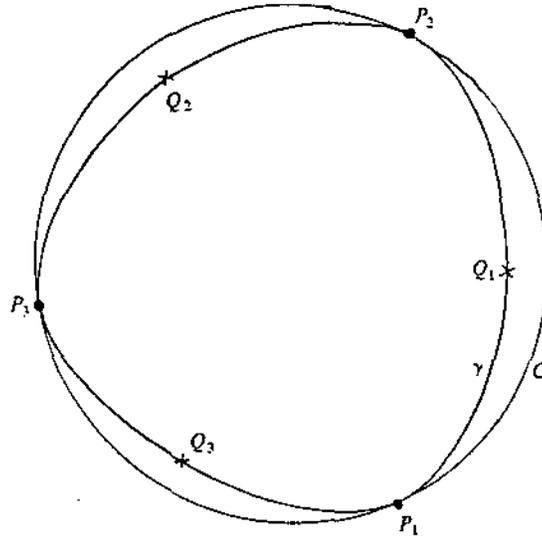


Figura II.14

Afirmamos que cada um dos arcos  $\gamma_i$  fica em  $C$  ou contém um ponto  $Q_i$  tal que a curvatura  $k$  de  $\gamma$  satisfaz

$$(1) \quad k(Q_i) < \frac{1}{R} \quad (\text{prova incluída a seguir}).$$

Assumimos que  $\gamma$  e  $C$  ambas estejam positivamente orientadas. Então, em qualquer ponto  $P_k$  de  $\gamma \cap C$ , as duas curvas têm a mesma orientação e  $\gamma$  fica localmente dentro (ou sobre) de  $C$ . Segue do Lema 3 que

$$(2) \quad k(P_k) \geq \frac{1}{R}.$$

Como (2) acontece em cada ponto extremo de  $\gamma_i$ , temos de (1) que  $k$  tem um mínimo em algum ponto interior  $Q'_i$  de  $\gamma_i$ , e que

$$(3) \quad k(Q'_i) < \frac{1}{R}.$$

Assim, obtemos  $n$  vértices que satisfazem (3). Por outro lado, cada arco  $\gamma_k$  de  $\gamma$  entre sucessivos  $Q_i$  contém pelo menos um ponto  $P_k$  de  $\gamma \cap C$ . Logo, por (1) e (2) existe um ponto interior  $P'_k$  de  $\gamma'_k$  onde  $k$  é um máximo e

$$k(P'_k) \geq \frac{1}{R}.$$

Logo,  $n$  tem mais  $n$  vértices e, portanto a parte 2 do teorema está provada.

Vamos agora provar (1): Seja  $\gamma$  uma curva plana, fechada, simples, positivamente orientada,  $C$  o círculo circunscrito e  $P_1, P_2$  pontos de  $\gamma \cap C$ . Seja  $\gamma_1$  o arco (positivamente orientado) de  $\gamma$  de  $P_1$  a  $P_2$ . Então ou  $\gamma_1$  coincide com o arco circular  $P_1 P_2$  ou existe um ponto  $Q_1$  em  $C$  satisfazendo (1), onde  $R$  é o raio de  $C$ .

**DEMONSTRAÇÃO:** Pelo Lema 2 podemos assumir que o arco positivamente orientado de  $C$  de  $P_1$  e  $P_2$  está incluído num semicírculo fechado; se não, pelo Lema 2, existe um ponto  $P'_2$  entre  $P_1$  e  $P_2$  tal que o arco de  $C$  de  $P_1$  a  $P'_2$  fica num semicírculo (fechado), e aplicamos o argumento acima ao subarco  $\gamma'_1$  de  $\gamma_1$  de  $P_1$  a  $P'_2$ . O correspondente ponto  $Q_1$  de  $\gamma'_1$  satisfazendo (1) também ficará em  $\gamma_1$ .

Assumimos  $C$  centrado na origem, e  $P_1, P_2$  fica na mesma reta vertical no semiplano

à direita, com  $P_2$  acima de  $P_1$ .

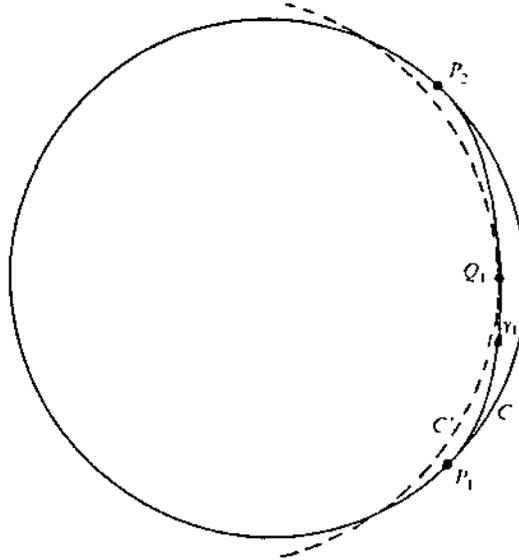


Figura II.15

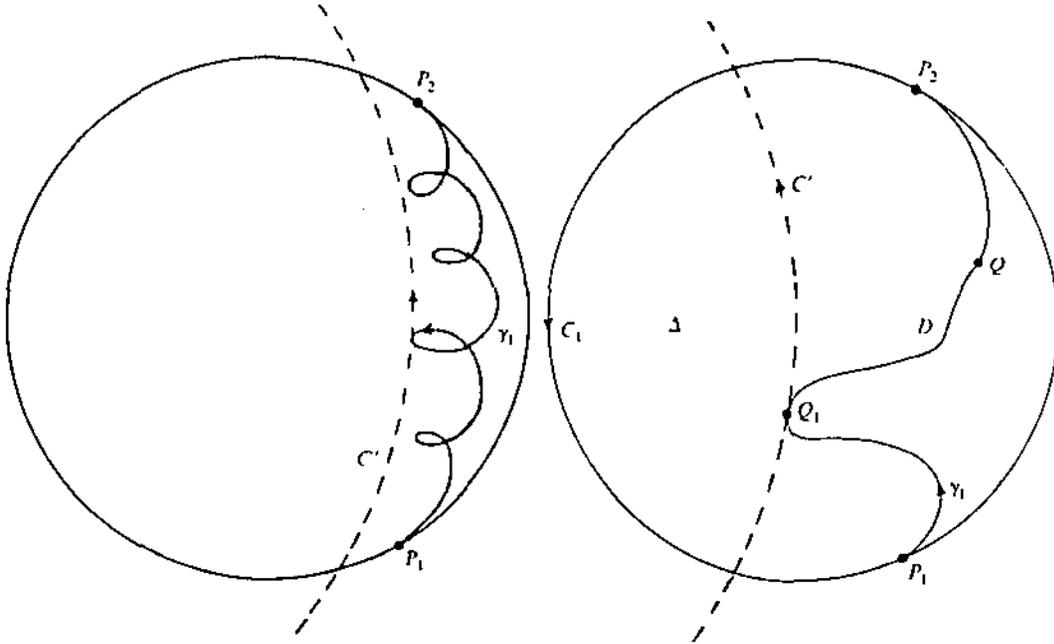
Existem duas possibilidades. Ou  $\gamma_1$  coincide com o arco circular  $P_1 P_2$ , ou existe algum ponto  $Q$  em  $\gamma_1$  que fica estritamente dentro de  $C$ . Vamos primeiro considerar o caso em que  $\gamma$  é convexa. Se trasladarmos o círculo determinado por  $P_1, Q, P_2$  para a esquerda, existirá um último momento em que ele intercepta  $\gamma_1$ . Seja  $C'$  a posição correspondente do círculo, e  $Q_1$  um ponto na intersecção  $C' \cap \gamma_1$ . Como o raio  $R'$  de  $C'$  é tal que  $R' > R$ , e como  $\gamma_1$  fica localmente fora de  $C'$  em  $Q_1$ , temos do Lema 3 que:

$$k(Q_1) \leq \frac{1}{R'} < \frac{1}{R}.$$

Isto prova o teorema para o caso de curvas convexas.

Usaremos basicamente o mesmo argumento para curvas fechadas simples. Utilizaremos a propriedade da curva ser simples para garantir que  $\gamma_1$  tem a mesma orientação que

$C'$  em  $Q_1$ . (Isto pode não ocorrer no caso em que a curva não é simples).



**Figura II.16**

Assumindo  $\gamma_1$  sem auto intersecções, a curva fechada, consistindo de  $\gamma_1$  seguido pelo arco  $C_1$  de  $C$  indo na direção positiva de  $P_1$  a  $P_2$ , é uma curva fechada, simples cujo interior é um domínio  $D$  contido no interior de  $C$ . A orientação positiva induzida em  $\gamma_1$  como fronteira de  $D$  coincide com sua orientação original como parte de  $\gamma$ , desde que nos pontos  $P_1$  e  $P_2$ , ambas coincidem com a orientação positiva de  $C$ . Existem 2 casos a considerar: ou  $\gamma_1$  coincide com o arco  $C$  de  $P_1$  a  $P_2$ , ou  $\gamma_1$  contém um ponto  $Q$  estritamente dentro de  $C$ . No último caso, podemos escolher  $Q$  no lado direito da reta vertical que passa por  $P_1$  e  $P_2$ . Então o círculo determinado por  $P_1, Q, P_2$  tem raio  $R' > R$ . Transladando este círculo para a esquerda, encontramos novamente um círculo  $C'$  contendo um ponto  $Q_1$  de  $\gamma_1$  tal que todas as outras translações de  $C'$  à esquerda não interceptarão  $\gamma_1$ . Segue então que os interiores de  $C$  e  $C'$  se interceptam num domínio  $\Delta$  que está contido em  $D$ . Desta forma, ambos  $\gamma_1$  e  $C'$  têm a mesma orientação em  $Q_1$ , e aplicamos o Lema 3 para obter:

$$k(Q_1) \leq \frac{1}{R'} < \frac{1}{R},$$

o que prova o teorema para curvas fechadas simples.

**OBSERVAÇÃO:** É importante notarmos no Teorema de Osserman que curvas com somente 4 vértices interceptam seu círculo circunscrito em somente 2 pontos. Pelo Lema 2, estes 2 pontos são pontos antípodas do círculo. Claramente, esta é uma propriedade muito especial, dentro da classe de curvas convexas. Com base neste fato, R. Osserman propõe as seguintes questões:

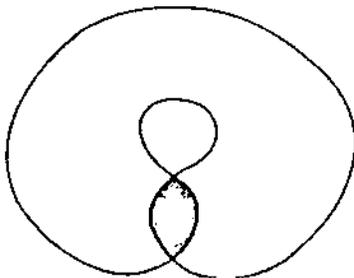
- 1) Existe uma medida natural no espaço de todas as curvas fechadas regulares (convexas ou simples)?
- 2) Em termos de uma tal medida, qual o tamanho relativo dos conjuntos de curvas que interceptam seus círculos circunscritos em
  - (a) exatamente dois pontos?
  - (b) exatamente três pontos?
  - (c) mais que três pontos?

Comentaremos agora o resultado de [Pinkall] sobre o Teorema dos Quatro Vértices.

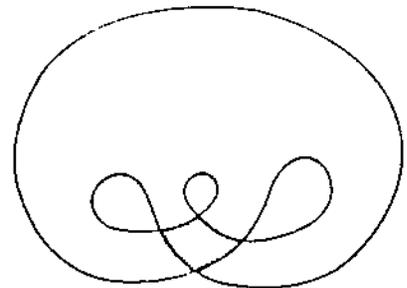
Sabemos que o Teorema dos Quatro Vértices é válido para curvas regulares, fechadas, planas, simples. U. Pinkall tenta generalizar o Teorema para curvas que tenham auto-intersecção. Obviamente, toda curva, regular, fechada, plana possui no mínimo 2 vértices devido à periodicidade. Um exemplo de curva com somente 2 vértices é o limaçon (ver Figura II.3).

Porém, existe uma classe de curvas com auto-intersecção em que vale o Teorema dos Quatro Vértices.

Uma imersão  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  limita uma superfície imersa de gênero  $g$ , se existe uma superfície compacta  $M^2$  de gênero  $g$  com fronteira  $\partial M = S^1$  e uma imersão  $\tilde{f} : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que estende  $f$ . A curva (1) da figura abaixo limita um disco imerso (gênero zero) e a curva (2) limita uma superfície de gênero 1.



(1)



(2)

## Figura II.17

Com base nestes fatos, U. Pinkall mostra em [Pinkall] o seguinte resultado:

**TEOREMA II. 7:** (U. Pinkall) Qualquer curva plana em  $\mathbb{R}^2$  que limita uma superfície imersa tem pelo menos 4 vértices.

Neste mesmo trabalho o autor estabelece a seguinte conjectura.

Se uma curva fechada em  $\mathbb{R}^2$  limita uma superfície imersa de gênero  $g \geq 1$ , então ela tem pelo menos  $4g + 2$  vértices.

# CAPÍTULO III

## PROPRIEDADES GLOBAIS DE CURVAS NO ESPAÇO

### INTRODUÇÃO

Este capítulo será dedicado ao estudo das propriedades globais de curvas no espaço.

Em III.2 estudaremos a curvatura total de uma curva regular fechada e os principais teoremas relacionados, como o Teorema de Fenchel que afirma que a curvatura total de uma curva regular fechada  $C$  é maior ou igual a  $2\pi$  com a igualdade ocorrendo se e somente se  $C$  é plana e convexa, e o Teorema de Fary – Milnor que nos dá uma condição necessária para que uma curva tenha nó. Depois calcularemos a curvatura total das curvas  $(q, p)$  sobre o toro, mostrando que quando o raio do toro tende ao infinito a curvatura total tende a  $2q\pi$ .

No parágrafo III.3 falaremos sobre a torção total de uma curva regular fechada, e será apresentada com detalhes a prova de que a torção total de qualquer curva fechada numa esfera  $S^2(a)$  é zero. Comentaremos também a versão do Teorema dos Quatro Vértices para curvas no espaço citando resultados recentes de [Sedykh] e [Costa 2] para curva convexas. No final deste parágrafo extraímos uma família de curvas convexas das curvas  $(q, p)$  sobre o toro, tendo assim, exemplos de curvas onde vale o Teorema dos Quatro Vértices.

No parágrafo III.4 será definida a energia de um nó e será mencionado um resultado recente (1993) que estabelece um limitante inferior para a energia de um nó [Freedman].

Em III.5 falaremos sobre o número de enlaçamentos entre duas curvas no espaço, dando várias definições equivalentes deste conceito e mostrando que este é invariante por

isotopias.

Finalmente em III.6 estudaremos o número de auto enlaçamentos  $SL$  de uma curva no espaço, analisando seu comportamento sob deformações e calculando  $SL$  para as curvas  $(q, p)$  sobre o toro.

### III.1 – CURVAS FECHADAS NO ESPAÇO – NÓS

Analogamente ao que foi feito para curvas planas, denominaremos uma curva regular fechada no espaço  $\mathbb{R}^3$  a uma imersão  $\mu : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $C^3$ , ou equivalentemente, a uma função  $\mu : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  que pode ser estendida a uma função periódica  $\bar{\mu} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $C^3$  com  $\dot{\mu}(t) \neq 0 \forall t$  e  $\mu(a) = \mu(b), \dots, \bar{\mu}(a) = \bar{\mu}(b)$ .

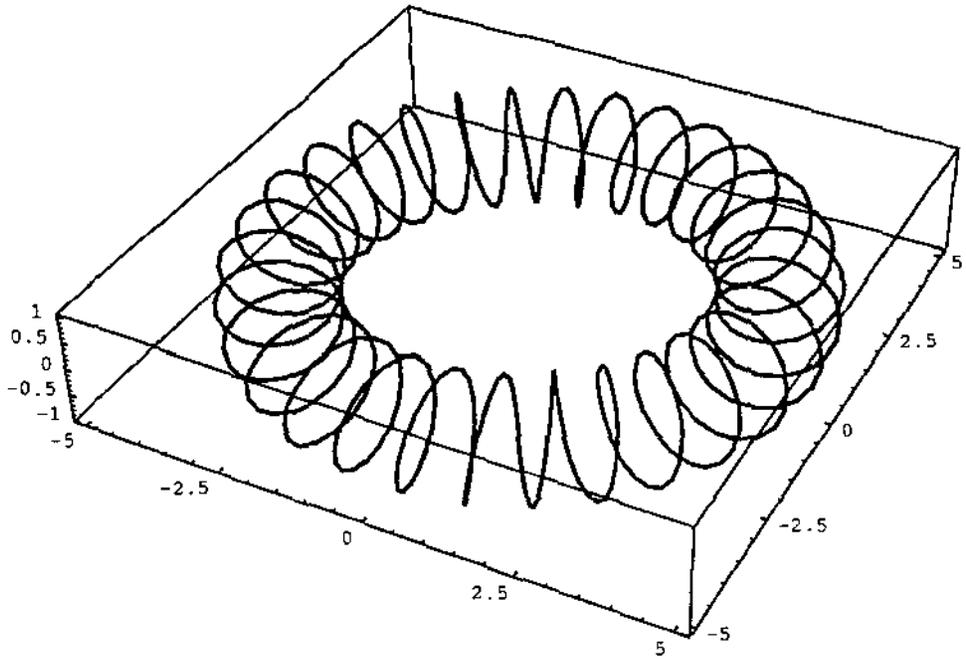
Uma curva regular fechada no espaço será chamada simples se não houver pontos de auto intersecção (isto é,  $\mu$  é um mergulho de  $S^1$  em  $\mathbb{R}^3$ ).

Curvas simples fechadas no espaço podem ser estudadas agrupando-as por classes tais que duas curvas da mesma classe possam ser obtidas uma da outra por uma deformação contínua através de curvas simples. A análise destas classes é muito complexa e contém muitos problemas em aberto, constituindo-se numa subárea da Topologia / Geometria chamada Teoria dos Nós.

A formalização da definição destas classes é feita a partir do conceito de isotopia. Uma deformação de curvas fechadas  $H : S^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $C^1$  tal que para cada  $t$  fixo  $\mu_t(x) = H(x, t)$  é uma curva regular fechada, é chamada uma homotopia regular. Se, para cada  $t$ ,  $\mu_t$  é um mergulho de  $S^1$  em  $\mathbb{R}^3$  (ou seja, uma curva regular simples fechada) dizemos que  $H$  é uma isotopia.

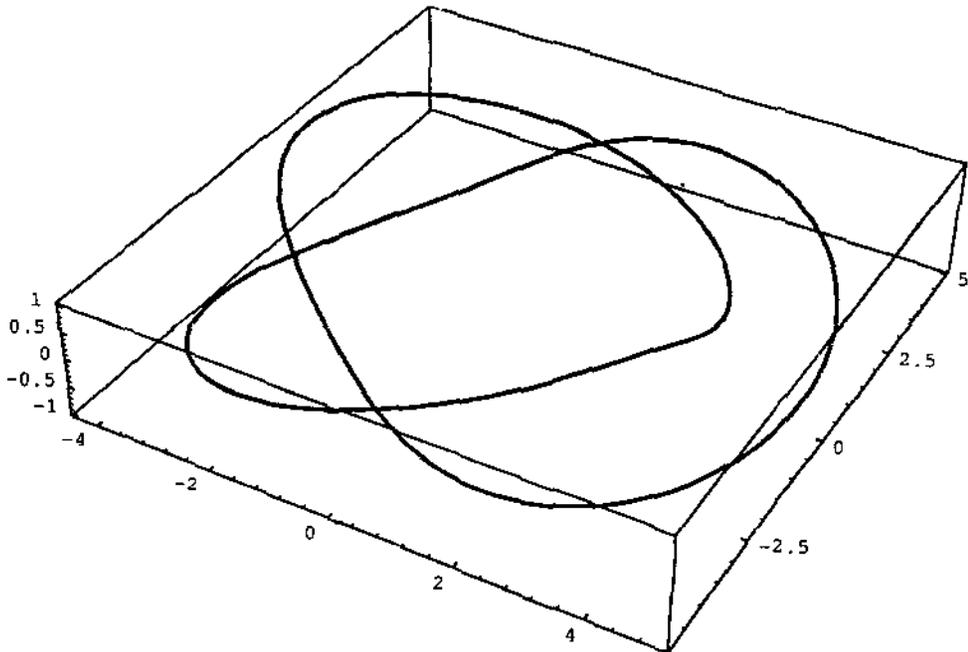
Dizemos que uma curva regular fechada simples em  $\mathbb{R}^3$  é uma curva sem nó quando ela pertence à mesma classe de isotopia do círculo  $S^1$ . Caso contrário ela é uma curva com nó (ou simplesmente um nó).

Como exemplo, consideremos as curvas  $(q, p)$  sobre o toro. Uma curva  $(q, p)$  no toro é uma curva que gira ao redor do toro  $q$  vezes na direção longitudinal e  $p$  vezes na direção meridional. Esta curva é regular simples fechada e tem nó quando  $q \neq 1$  e  $p$  e  $q$  são primos entre si.



Curva (1,30) sobre o toro

**Figura III.1**



Curva (2,3) sobre o toro (trefoil)

**Figura III.2**

Exemplos de curvas sem nó e curvas com nó são, respectivamente, a curva (1,30) e o trefoil (curva (2,3)).

As curvas  $(q, p)$  são representantes de infinitas classes de isotopia de nós. As curvas  $(1, p)$  e  $(q, 1)$  são curvas sem nó e quando  $q \neq 1$  e  $p$  e  $q$  são primos entre si os nós  $(p, q)$  e  $(q, p)$  são isotópicos [Rolfsen] pág. 53.

Durante o trabalho enfatizamos essa família de curvas nos vários exemplos que aparecerão. Estas curvas podem ser parametrizadas do seguinte modo: considere o toro no espaço obtido pela rotação do círculo de raio unitário ao redor de um eixo, a distância do centro deste círculo à origem sendo  $a > 1$ . Obviamente, quando  $a \leq 1$  não teremos mais um toro. Quando  $a = 0$ , teremos uma esfera. Eventualmente consideraremos estes casos nos exemplos. Em coordenadas cilíndricas a curva  $(q, p)$  tem por equação:

$$\begin{aligned} x &= r \cos t \\ y &= r \sen t \\ z &= \sen(nt) \end{aligned} \tag{III.1}$$

onde  $r = a + \cos(nt)$ ,  $n = p/q$  e  $t$  varia num intervalo de comprimento  $2q\pi$ .

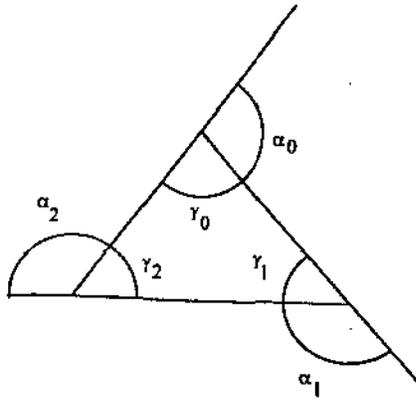
### III.2 – CURVATURA TOTAL

Como no caso de curvas planas, dada uma curva  $\alpha : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^3$  regular fechada, parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ , sua curvatura total é dada por:  $\int_0^\ell k(s) ds$  e seu valor corresponde ao comprimento de arco da indicatriz tangente (pertencente a  $S^2$ ).

J.W. Milnor em seu artigo [Milnor 1] de 1949 deu uma definição de curvatura total que é aplicável a uma classe mais ampla de curvas, definindo, para isto, a curvatura total de um polígono fechado. Vamos falar sobre esta definição.

Um polígono fechado  $P$  no espaço  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ , é uma sequência finita de pontos  $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, a_m = a_0$ , onde  $a_i \neq a_{i+1}$  e  $a_i a_{i+1}$  são segmentos de reta para  $i = 0, 1, \dots, m-1$ . Seja  $\alpha_i$  o ângulo entre os vetores  $a_{i+1} - a_i$  e  $a_i - a_{i-1}$  satisfazendo  $0 \leq \alpha_i \leq \pi$ . A curvatura total  $k(P)$  de um polígono  $P$  é  $\sum_{i=1}^m \alpha_i$ .

Exemplos:

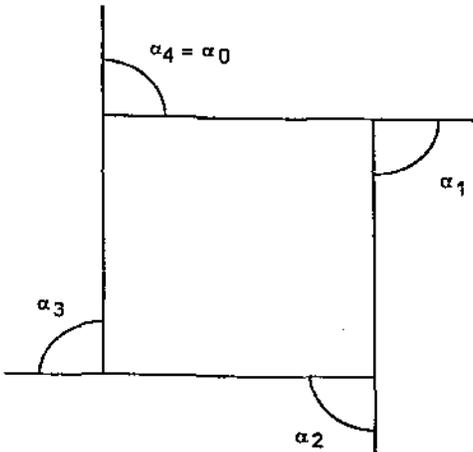


$$\alpha_i = \pi - \gamma_i; \quad i = 0, 1, 2$$

$$\sum_{i=0}^2 \alpha_i = \sum_{i=0}^2 (\pi - \gamma_i) = \pi - \gamma_0 + \pi - \gamma_1 + \pi - \gamma_2 = 3\pi - (\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2) = 2\pi$$

Logo, a curvatura total do triângulo é  $2\pi$

Figura III.3



$$\sum_{i=0}^3 \alpha_i = 2\pi$$

Logo, a curvatura total do quadrado é  $2\pi$ .

Figura III.4

Na verdade, a curvatura total de qualquer polígono plano fechado convexo é  $2\pi$ , pois os vetores  $a_i a_{i+1}$  (se orientados no sentido anti-horário) realizam uma rotação de  $2\pi$ .

No caso de um polígono não convexo os vetores  $a_i a_{i+1}$  realizarão uma rotação maior que  $2\pi$ .

Exemplo:

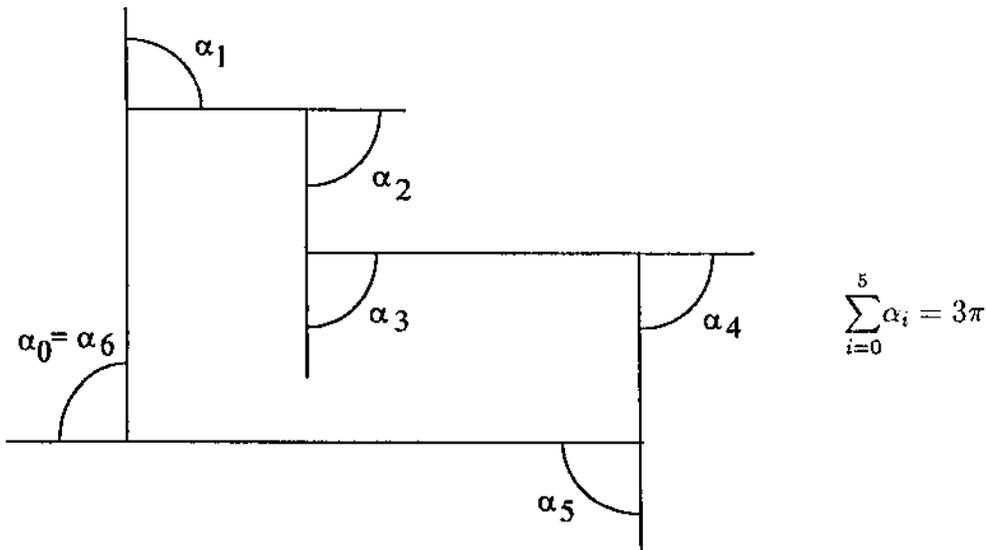


Figura III.5

Denominaremos curva fechada contínua no espaço  $\mathbb{R}^n$  a uma função vetorial contínua  $\mu(t) = (\mu_1(t), \dots, \mu_n(t))$  de período  $\ell$  que é não-constante em qualquer  $t$ -intervalo. Em particular qualquer polígono pode ser descrito deste modo. Uma curva fechada  $\mu(t)$  é simples se  $\mu(t_1) = \mu(t_2)$  somente quando  $(t_1 - t_2)/\ell$  for um inteiro.

Um polígono fechado  $P$  com vértices  $a_1, \dots, a_m$  é um polígono inscrito numa curva fechada contínua se existe um conjunto de valores paramétricos  $t_i$  tal que  $t_i < t_{i+1}, \dots, t_{i+m} = t_i + \ell$ , e  $a_i = \mu(t_i) \forall i$ .

Para cada curva fechada contínua  $C$  sua curvatura total  $k(C)$  é definida por

$$k(C) = \sup\{k(P)\}$$

onde  $P$  varia sobre todos os polígonos inscritos em  $C$ .

A partir destas definições J.W. Milnor provou o seguinte:

**TEOREMA III.1:** Se  $C$  é uma curva regular fechada no espaço parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ , então:

$$k(C) = \int_C |\mu''(s)| ds.$$

A prova é feita mostrando-se que se  $a_1^m = \mu(s_1^m), \dots, a_m^m = \mu(s_m^m)$  são os vértices de polígonos  $P_m$  inscritos em  $C$ , tal que  $\lim_{m \rightarrow \infty} \max_i \{(s_{i+1}^m - s_i^m)\} = 0$ , então  $\lim_{m \rightarrow \infty} k(P_m) = \int_C |\mu''(s)| ds$ .

Assim, para mostrar que  $\int_C |\mu''(s)| ds = \sup\{k(P)\}$  para  $P$  inscrito em  $C$  basta apenas mostrar que  $k(P) \leq \int_C |\mu''(s)| ds$ .

Dado qualquer polígono  $P_k$  inscrito em  $C$ , pode-se formar a sequência de polígonos  $P_m$  para  $m = k, k+1, \dots$  adicionando vértices a  $P_k$  de modo que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \max\{(s_{i+1}^m - s_i^m)\} = 0.$$

Como é mostrado em [Milnor]  $k(P_k) \leq k(P_{k+1}) \leq \dots$ .

Mas,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} k(P_m) = \int_C |\mu''(s)| ds$$

Portanto,

$$k(P_k) \leq \int_C |\mu''(s)| ds.$$

Através deste teorema observamos que dada uma curva fechada regular por partes  $C = u([0, \ell])$ , isto é, uma curva contínua que deixa de ser regular apenas num número finito de pontos, sua curvatura total é dada por:

$$k(C) = \int_0^\ell |u''(s)| ds + \sum_i \alpha_i,$$

onde  $\alpha_i$  são os ângulos nos vértices de  $C$ . Em outras palavras, neste caso a indicatriz tangente de  $C$  consiste de um número de arcos, cada um correspondendo a um arco regular de  $C$ , e juntamos cada par de vértices sucessivos pelo menor grande arco circular na

esfera unitária. O comprimento da curva obtida é a curvatura total de  $C$ .

O Teorema III.1 nos permite também concluir que dada qualquer curva regular plana fechada convexa  $C$ , sua curvatura total é  $2\pi$  (como vimos no Teorema II.3), visto que todo polígono inscrito em  $C$  é convexo e a curvatura total de qualquer polígono convexo é  $2\pi$ .

Um importante teorema envolvendo a curvatura total de curvas fechadas no espaço estabelece que a recíproca deste fato também é verdadeira:

**TEOREMA III.2 (Fenchel):** Seja  $k(C)$  a curvatura total de uma curva regular fechada  $C$ . Então  $k(C) \geq 2\pi$  e a igualdade ocorre se e somente se  $C$  é plana e convexa.

A demonstração a seguir é um detalhamento da encontrada em [Millman].

Serão necessários na demonstração uma definição e dois Lemas.

**DEFINIÇÃO:** O hemisfério de  $S^2$  com polo  $N$  é o conjunto  $\{x \in S^2 \mid \widehat{Nx} < \pi/2\}$ , onde  $\widehat{Nx}$  denota a distância de  $N$  a  $x$  ao longo de um grande círculo através de  $N$  e  $x$ . Se  $S^2$  é visto como o conjunto de vetores unitários, o hemisfério aberto com polo  $N$  é

$$\{x \in S^2 \mid \langle N, x \rangle > 0\}.$$

**LEMA 1:** Se  $C = \alpha([0, \ell])$  é uma curva fechada, então a imagem da indicatriz tangente não fica num hemisfério.

**DEMONSTRAÇÃO:** Suponhamos  $\alpha$  parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ . Seja  $a$  um vetor unitário fixo. Defina

$$g(s) = a \cdot \alpha(s)$$

$g$  é uma função contínua em  $C$ , portanto tem um máximo e um mínimo. Como  $g'(s)$  existe, em um tal ponto extremo  $s_0$  temos  $g'(s_0) = a \cdot t(s_0) = 0$ , onde  $t(s)$  é o vetor unitário tangente a  $C$  em  $\alpha(s)$ . A equação acima mostra que  $a$ , como um ponto da esfera unitária, tem distância esférica  $\pi/2$  de pelo menos 2 pontos da indicatriz tangente  $\gamma$ . Como  $a$  é arbitrário, a indicatriz tangente  $\gamma$  é interceptada por todo grande círculo; logo  $\gamma$  não fica num hemisfério.

**LEMA 2:** Seja  $\gamma$  uma curva fechada de comprimento  $\ell$  na esfera unitária  $S^2$ . Se  $\ell < 2\pi$ , existe um ponto  $m \in S^2$  tal que a distância esférica  $\widehat{mx} \leq \ell/4$  para todo  $x \in \gamma$ . Se  $\ell = 2\pi$ , mas  $\gamma$  não é a união de dois grandes semicírculos, existe um ponto  $m \in S^2$  tal

que  $\widehat{mx} < \frac{\pi}{2} \forall x \in \gamma$ .

Antes de mostrarmos o lema observamos que dados dois pontos  $a, b \in S^2$ , se  $\widehat{ab} < \pi$ , o ponto médio  $m$  de  $a$  e  $b$  é o ponto no menor grande arco circular entre  $a$  e  $b$  definido pelas condições  $\widehat{am} = \widehat{bm} = \frac{1}{2} \widehat{ab}$ . Seja  $x$  um ponto em  $S^2$  tal que  $\widehat{mx} \leq \frac{1}{2} \pi$ . Então  $2 \widehat{mx} \leq \widehat{ax} + \widehat{bx}$ , pois:

Seja  $x'$  o simétrico de  $x$  relativo a  $m$ , isto é, seja  $x'$  o ponto no grande círculo através de  $m$  e  $x$  tal que  $\widehat{mx} = \widehat{x'm}$ . Como os teoremas de congruência de dois triângulos num plano são também verdadeiros para dois triângulos esféricos, os dois triângulos esféricos  $bmx$  e  $ax'm$  são congruentes, de modo que:

$$\widehat{x'a} = \widehat{xb} \quad \widehat{x'x} = \widehat{x'm} + \widehat{mx} = 2 \widehat{mx}.$$

Logo, pela desigualdade triangular,

$$\begin{aligned} 2 \widehat{mx} = \widehat{x'x} &\leq \widehat{x'a} + \widehat{ax} = \widehat{bx} + \widehat{ax} \\ 2 \widehat{mx} &\leq \widehat{bx} + \widehat{ax} \quad (*) \end{aligned}$$

**PROVA DO LEMA 2:** Para provar a primeira parte do lema tomamos 2 pontos  $a, b$  em  $\gamma$  que dividem  $\gamma$  em duas partes iguais. Então  $\widehat{ab} \leq \overline{ab}$  (comprimento ao longo de  $\gamma$ )  $= \frac{\ell}{2} < \pi$ .

Seja  $m$  o ponto médio de  $a$  e  $b$ , e seja  $x$  um ponto de  $\gamma$  tal que  $2 \widehat{mx} < \pi$ . Tal ponto  $x$  existe, por exemplo, o ponto  $a$ . Como a distância esférica é a menor distância entre 2 pontos na esfera, temos:

$$\widehat{ax} \leq \overline{ax} \quad \widehat{bx} \leq \overline{bx}$$

De (\*) temos:

$$2 \widehat{mx} \leq \widehat{ax} + \widehat{bx} \leq \overline{ax} + \overline{bx} = ab = \frac{\ell}{2}.$$

Logo a função  $f(x) = \widehat{mx}, x \in \gamma$ , não toma valores no intervalo aberto  $(\ell/4, \pi/2)$ , pois se tomasse teríamos  $\frac{\ell}{4} < \widehat{mx} < \frac{\pi}{2}$  para algum  $x \in \gamma$  e então, como  $\widehat{mx} < \frac{\pi}{2}$  podemos usar (\*) e obter

$$\frac{\ell}{4} < \widehat{m}x \leq \frac{\widehat{ax} + \widehat{bx}}{2} \leq \frac{\overline{ax} + \overline{bx}}{2} = \frac{\overline{ab}}{2} = \ell/4 \quad \text{Contradição.}$$

Por outro lado, como  $\gamma$  é conexa e  $f(x)$  é contínua em  $\gamma$ , a imagem da função  $f$  é conexa. Mas  $f(x) \leq \ell/4$  para pelo menos um  $x$ , digamos  $x = a$ , e como vimos acima  $f$  não toma valores em  $(\ell/4, \pi/2)$ . Logo,  $f(x) \leq \ell/4 \forall x \in \gamma$ , ou seja,  $\widehat{m}x \leq \ell/4 \forall x \in \gamma$ .

Suponha agora que  $\gamma$  tenha comprimento  $\ell = 2\pi$  mas não é a união de 2 grandes semicírculos. Novamente, sejam  $a$  e  $b$  pontos em  $\gamma$  que dividem  $\gamma$  em duas partes iguais. Então  $a, b$  não podem ser antípodas, pois:

Suponha que fossem, então  $a$  e  $b$  dividem  $\gamma$  em 2 segmentos cujos comprimentos são pelo menos  $\pi$ , pois  $\widehat{ab} = \pi$ . Como  $\ell = 2\pi$ , cada um destes segmentos tem comprimento  $\pi$  e como são antípodas dão uma curva de menor comprimento unindo  $a$  e  $b$  e, portanto, é um grande semicírculo. Logo,  $\gamma$  é uma união de 2 grandes semicírculos, o que contradiz a hipótese.

Então, para qualquer  $x$  em  $\gamma$  temos a desigualdade estrita

$$\widehat{ax} + \widehat{bx} < \overline{ax} + \overline{bx} = \pi.$$

Novamente, seja  $m$  o ponto médio de  $a$  e  $b$ . Se  $f(x) < \frac{\pi}{2}$  ( $x = a$ , por exemplo) então de (\*) temos:

$$2 \widehat{m}x \leq \widehat{ax} + \widehat{bx} < \pi$$

o que significa que  $f$  não pode tomar o valor  $\frac{\pi}{2}$ .

Como a imagem de  $f$  é conexa e  $f(a) < \frac{\pi}{2}$ , temos  $f(x) < \frac{\pi}{2} \forall x \in \gamma$ . Logo,  $\widehat{m}x < \frac{\pi}{2} \forall x \in \gamma$ .

**PROVA DO TEOREMA III.2:** Seja  $\gamma$  a indicatriz tangente de  $C$ .

Pelo Lema 1,  $\gamma$  não pode estar contida num hemisfério e pelo lema anterior o comprimento de  $\gamma$  é maior ou igual a  $2\pi$  e é igual a  $2\pi$  se e somente se  $\gamma$  é a união de dois grandes semicírculos. Logo, a curvatura total é maior ou igual a  $2\pi$ . No último caso  $C$  é a união de 2 arcos planos e, portanto é uma curva plana. Mas pelo Teorema II.3, sabemos que a curvatura total é  $2\pi$  se e somente se a curva é convexa.

Em [Milnor] o Teorema de Fenchel é provado para o caso mais geral de curvas fechadas contínuas.

**COROLÁRIO:** Para uma curva regular fechada  $C$  se  $|k(s)| \leq \frac{1}{R}$ , onde  $s$  e  $k(s)$  são, respectivamente, o comprimento de arco e a curvatura de  $C$  em  $s$  e  $R$  é uma constante positiva,  $C$  tem comprimento  $\ell \geq 2\pi R$ .

**DEMONSTRAÇÃO:**

$$\ell = \int_0^\ell ds \geq \int_0^\ell R |k| ds = R \int_0^\ell |k| ds \geq 2\pi R.$$

## O TEOREMA DE FARY – MILNOR

A curvatura total de uma curva fechada no espaço é uma ferramenta importante que fornece uma condição necessária para que uma curva tenha nó.

Isto é o que nos diz o Teorema de Fary – Milnor, cuja prova depende de uma fórmula chamada “*Fórmula de Crofton*” sobre a medida dos grandes círculos que interceptam um arco na esfera unitária.

Todo grande círculo na esfera unitária  $S^2$  determina unicamente um polo, o ponto extremo do vetor normal unitário ao plano do círculo tal que o polo permanece do lado esquerdo quando percorremos ao longo do círculo.

Desta forma, o conjunto dos grandes círculos orientados está em correspondência um a um com os pontos de  $S^2$ .

A medida de um conjunto de grandes círculos orientados em  $S^2$  é a área do correspondente subconjunto de  $S^2$ .

Dado  $w \in S^2$ , seja  $w^\perp$  o grande círculo associado. Para uma curva regular  $\gamma$  com imagem  $C$ , seja  $n_\gamma(w)$  o número de pontos em  $C \cap w^\perp$  (que pode ser infinito). Note que  $n_\gamma(w)$  não depende da parametrização da curva.

Por se tratar de um conceito interessante em si mesmo, calcularemos a medida do conjunto de grandes círculos que interceptam uma curva  $\gamma$  que é um pequeno círculo de raio  $\cos\alpha$  no polo da esfera unitária  $S^2$ . Este exemplo permitirá uma melhor visualização

e intuição dos resultados a seguir.

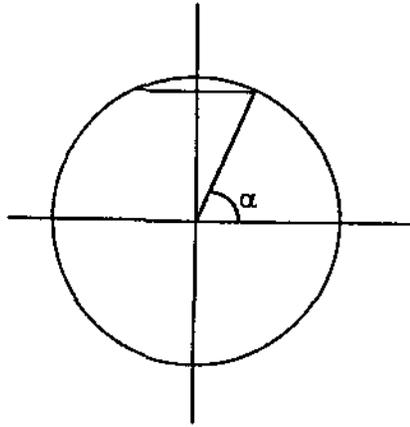


Figura III.5

Vamos calcular a medida do conjunto de grandes círculos que interceptam  $\gamma$ , ou seja, a área do conjunto dos pontos de  $S^2$  cujos vetores associados são normais aos grandes círculos que interceptam  $\gamma$ .

Analisando a figura, vemos que os grandes círculos associados aos vetores  $a, b, c, d$  não interceptam  $\gamma$ . Também, nenhum vetor dentro do duplo cone é normal a um grande círculo que intercepta  $\gamma$ . Logo, a região que queremos calcular a área está contida na região complementar ao duplo cone.

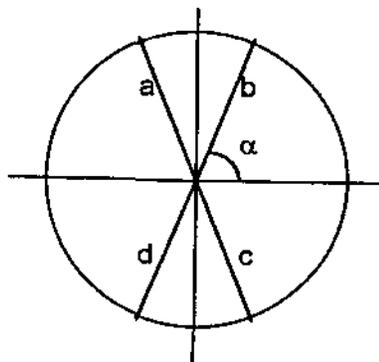
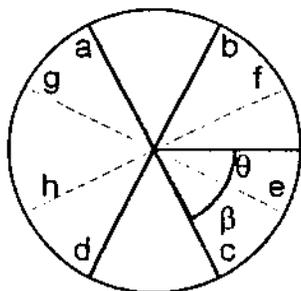


Figura III.6

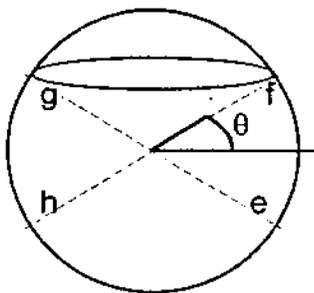
Olhando os grandes círculos correspondentes a  $e, f, g, h$  vemos que eles interceptam  $\gamma$  "por último". Logo, a área a ser calculada é a faixa ao redor do equador determinada por estes vetores.



$$\begin{aligned} h &\perp a \\ g &\perp d \\ c &\perp b \\ f &\perp e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\alpha = \beta + \frac{\pi}{2} &\Rightarrow \beta = 2\alpha - \frac{\pi}{2} \\ \theta + \beta &= \alpha \\ \theta + 2\alpha - \frac{\pi}{2} &= \alpha \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} - \alpha \end{aligned}$$

Figura III.7



O raio do círculo ao lado é

$$r = \cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha$$

Figura III.8

Assim, a área desejada (com multiplicidade) é a área da esfera menos as áreas das calotas superior e inferior multiplicado por 2, visto que cada grande círculo intercepta a curva em 2 pontos e, portanto, deve ser contado 2 vezes.

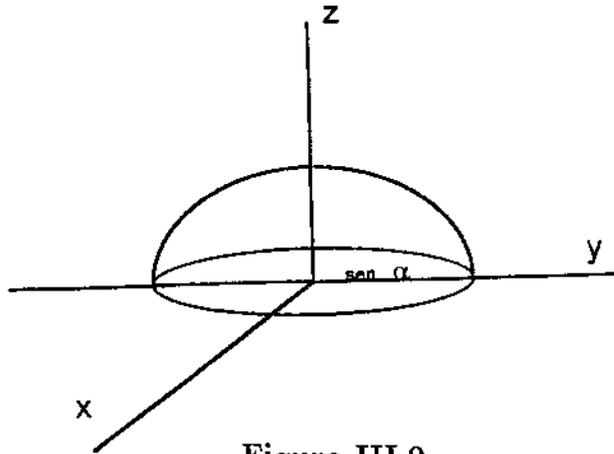


Figura III.9

A área da calota acima é dada por

$$\sigma = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy, \text{ onde}$$

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \text{ e } D \text{ é a região } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq \text{sen}\alpha\}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

$$\iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \iint_D \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dx dy =$$

$$\int_{-\text{sen}\alpha}^{\text{sen}\alpha} \left( \int_{-\sqrt{\text{sen}^2\alpha - x^2}}^{\sqrt{\text{sen}^2\alpha - x^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dy \right) dx$$

Usando coordenadas polares  $x = \rho \cos\theta, y = \rho \text{sen}\theta$

$$\rho \in [0, \text{sen}\alpha]$$

$$\theta \in [0, 2\pi],$$

temos:

$$\int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\operatorname{sen}\alpha} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \rho d\rho \right) d\theta = \int_0^{2\pi} -\sqrt{1-\rho^2} \Big|_0^{\operatorname{sen}\alpha} d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} (-\operatorname{cos}\alpha + 1) d\theta = (-\operatorname{cos}\alpha + 1)2\pi.$$

Fazendo a área da esfera menos as áreas das duas calotas, obtemos:

$$4\pi - (4\pi(-\operatorname{cos}\alpha + 1)) = 4\pi\operatorname{cos}\alpha.$$

Logo, a área desejada com multiplicidade é  $2 \cdot 4\pi\operatorname{cos}\alpha = 8\pi\operatorname{cos}\alpha$ .

**TEOREMA III.3** (Fórmula de Crofton):

Seja  $C$  a imagem de uma curva regular  $\gamma(t)$  em  $S^2$  de comprimento  $\ell$ . A medida do conjunto dos grandes círculos orientados que interceptam  $\gamma$  é  $4\ell$ .

**DEMONSTRAÇÃO:** Como  $n_\gamma(w)$  e  $\ell$  não dependem da parametrização, podemos assumir que  $\gamma$  seja dado por um vetor velocidade unitário ( $\gamma = a(s)$ ,  $s$  comprimento de arco).

Seja  $S = \{w \in S^2 \mid w^\perp \cap C \neq \emptyset\}$ . A medida do conjunto dos grandes círculos que interceptam  $C$  é a área de  $S$ , isto é,  $\int \int_S dA$ . Queremos contar os círculos com multiplicidade (ex: - se  $C \cap w^\perp$  tem três pontos, queremos contar  $w^\perp$  três vezes). A medida é dada pela integral  $\int \int_S n_\gamma(w) dA$ .

Vamos então provar que  $\int \int_S n_\gamma(w) dA = 4\ell$ .

Sejam  $a(s) = \gamma(s)$ ,  $b(s) = \frac{d\gamma}{ds}$  e  $c(s) = a \wedge b$ .

$a, b, c$  formam uma base ortonormal em  $\mathbb{R}^3$  para cada  $s \in [0, \ell]$ .

Análogo às equações de Frenet, temos:

$$\begin{cases} a' = & b \\ b' = -a & +\lambda(s)c \\ c' = & -\lambda(s)b \end{cases}$$

Se  $w^\perp$  encontra  $C$  em  $\gamma(s_0)$ , então o vetor unitário  $w$  que representa o polo de  $w^\perp$  é ortogonal a  $\gamma(s_0) = a(t_0)$ .

Seja  $d$  o vetor tangente ao círculo  $w^\perp$  em  $\gamma(s_0)$  e  $\varphi = \text{ângulo entre } b \text{ e } d$ .

$$\begin{aligned}\text{Logo } w &= \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)b - \cos(\pi - \varphi)c \\ &= \text{sen}\varphi b + \cos\varphi c.\end{aligned}$$

Definimos uma aplicação  $w : [0, \ell] \times [0, 2\pi)$  por

$$w(s, \varphi) = \text{sen}\varphi b(s) + \cos\varphi c(s).$$

A imagem de  $w$  é  $S$ . Isto torna  $S$  uma superfície parametrizada. A área da superfície parametrizada  $S$  é dada por:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\ell \left| \frac{\partial w}{\partial s} \wedge \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right| ds d\varphi.$$

Entretanto, esta não é a área da superfície  $S$ , mas a área contada com multiplicidade ( $w$  não precisa ser 1-1).

Suponhamos que  $w(s_1, \varphi_1) = w(s_2, \varphi_2)$  para  $(s_1, \varphi_1) \neq (s_2, \varphi_2)$ . Se  $s_1 = s_2$ ,  $w(s_1, \varphi_1) \neq w(s_2, \varphi_2)$  para  $\varphi_1 \neq \varphi_2$ . Logo, tomamos  $s_1 \neq s_2$ . Então,  $w(s_1, \varphi_1) = w(s_2, \varphi_2)$  para  $(s_1, \varphi_1) \neq (s_2, \varphi_2)$  significa que a curva  $\gamma(s)$  cruza o grande círculo  $w^\perp$  em 2 pontos distintos. Logo,  $n_\gamma(w) = 2$ . Reciprocamente, se a curva  $\gamma$  cruza o grande círculo  $w^\perp$  em 2 pontos distintos  $s_1$  e  $s_2$ , temos que  $w(s_1, \varphi_1) = w(s_2, \varphi_2)$ . Assim, existem  $n$  pontos que são levados em  $Y \in S^2$  pela aplicação  $w$  se e somente se  $w^\perp$  intercepta  $\gamma$  em  $n$  pontos. Logo,  $n = n_\gamma(w)$ .

Logo,

$$\int \int_S n_\gamma(w) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^\ell \left| \frac{\partial w}{\partial s} \times \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right| ds d\varphi$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial s} &= \text{sen}\varphi b'(s) + \cos\varphi c'(s) \\ &= \text{sen}\varphi(-a + \lambda(s)c) + \cos\varphi(-\lambda(s)b) \\ &= \text{sen}\varphi a - \lambda(s)\cos\varphi b + \lambda(s)\text{sen}\varphi c \\ \frac{\partial w}{\partial \varphi} &= \cos\varphi b - \text{sen}\varphi c.\end{aligned}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} \wedge \frac{\partial w}{\partial \varphi} = -b \operatorname{sen}^2 \varphi - c \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi$$

$$\left| \frac{\partial w}{\partial s} \wedge \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right| = \sqrt{\operatorname{sen}^4 \varphi + \operatorname{sen}^2 \varphi \cos^2 \varphi} = |\operatorname{sen} \varphi|.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int \int_S n_\gamma(w) dA &= \int_0^{2\pi} \int_0^\ell |\operatorname{sen} \varphi| ds d\varphi = \ell \int_0^{2\pi} |\operatorname{sen} \varphi| d\varphi \\ &= 4\ell \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} \varphi d\varphi = 4\ell. \end{aligned}$$

Podemos observar a validade da fórmula de Crofton no exemplo dado anteriormente, onde  $\gamma(t)$  é um círculo  $C$  de raio  $\operatorname{cosec} \alpha$ . Então, o comprimento de  $C$  é  $\ell = 2\pi \operatorname{cosec} \alpha$ . Pela fórmula de Crofton, a medida do conjunto de grandes círculos que interceptam  $C$  é  $4\ell = 4(2\pi \operatorname{cosec} \alpha) = 8\pi \operatorname{cosec} \alpha$ , como havíamos obtido anteriormente.

**TEOREMA III.4 (Fary - Milnor):** Se  $\alpha$  é uma curva simples regular com nó, então a curvatura total de  $\alpha$  é pelo menos  $4\pi$ .

**DEMONSTRAÇÃO:** Suponhamos  $\int k ds < 4\pi$ . Seja  $\gamma$  a imagem da tangente esférica de  $\alpha$ . Então, como  $\gamma$  não fica em nenhum hemisfério (Lema 1, pág. 51),  $\gamma$  é interceptada por todo grande círculo. Logo, pela fórmula de Crofton

$$4\ell = \int \int_{S^2} n_\gamma(w) dA \quad (\ell = \text{comprimento de } \gamma)$$

$$\frac{1}{4} \int \int_{S^2} n_\gamma(w) dA = \ell = \int k ds < 4\pi.$$

Então, para algum  $Y \in S^2$ ,  $n_\gamma(Y) < 4$ , pois caso contrário

$$\frac{1}{4} \int \int_{S^2} n_\gamma(w) dA \geq \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot 4\pi = 4\pi.$$

Sejam  $y$  o vetor unitário representando  $Y$  e  $f(s) = \langle y, \alpha(s) \rangle$ . Então  $f'(s) = \langle y, \gamma(s) \rangle$  e  $f'(s) = 0$  se e somente se  $Y^\perp$  intercepta  $C$  em  $\gamma(s)$ . Desta forma,  $f(s)$  tem exatamente  $n_\gamma(Y) < 4$  pontos críticos. Existe um máximo absoluto e um mínimo absoluto, e possivelmente um ponto de inflexão (se  $n(Y) = 3$ ). Não existe outro extremo relativo além do extremo absoluto.

Podemos assumir que as coordenadas de  $\mathbb{R}^3$  são escolhidas de modo que  $y = (0, 0, 1)$ . Então, se  $\alpha(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s))$ ,  $\langle y, \alpha(s) \rangle = x_3(s)$ . Logo, a função coordenada  $x_3(s)$  de  $\alpha$  tem somente um máximo  $M$  e um mínimo  $m$ . Estes dois pontos dividem a curva em dois arcos, tal que  $x_3(s)$  cresce num e decresce noutro.

Como todo plano horizontal intercepta cada arco em pelo menos um ponto, todo plano horizontal entre dois planos horizontais  $x_3 = M$  e  $x_3 = m$  intercepta  $\alpha$  em exatamente 2 pontos. Juntamos cada par desses pontos por um segmento de reta, e com todos esses segmentos de reta formamos uma superfície limitada pela curva  $\alpha$ , que é homeomorfa a um disco circular

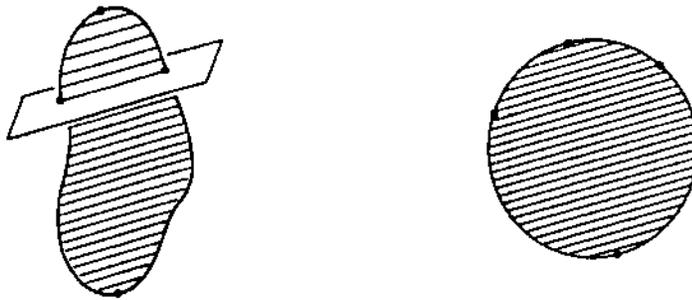


Figura III.10

Logo,  $\alpha$  é uma curva sem nó. Contradição. Assim, devemos ter  $\int k ds \geq 4\pi$ .

A prova feita acima é essencialmente a prova esboçada por [Fenchel] em 1951. [Milnor] em 1950 provou o teorema usando a definição mais geral de curvatura total que comentamos anteriormente, além disso [Milnor 1] provou que qualquer nó tem curvatura total estritamente maior que  $4\pi$ .

### CURVATURA TOTAL DAS CURVAS $(q, p)$ SOBRE O TORO

Em [Milnor 1] é provado que a curvatura de qualquer nó é estritamente maior que  $4\pi$ . Inspirados neste resultado, calculamos a curvatura total dos nós no toro, com o objetivo de verificar que, de fato, conseguimos nós com curvatura total tão próxima de  $4\pi$  quanto se queira.

Por (III.1) sabemos que a curva  $(q, p)$  sobre o toro tem por parametrização  $\alpha(t) = ((a + \cos(nt))\cos t, (a + \cos(nt))\sin t, \sin(p/qt))$ , onde  $n = p/q$  e  $t \in [0, 2q\pi]$ . Para cada

$(q, p)$  fixo (primos entre si), variamos o raio  $a$  do toro e, pelos resultados obtidos no computador com o uso do software Mathematica, intuimos que quando  $a$  tendia ao infinito a curvatura total da curva  $(q, p)$  tendia a  $2q\pi$ . Portanto, para o trefoil (curva  $(2, 3)$ ), a curvatura total tende a  $4\pi$  quando  $a \rightarrow \infty$ . Assim, conseguimos nós no toro com curvatura total tão próxima de  $4\pi$  quanto se queira.

Vamos agora mostrar este resultado. Por (I.2) a curvatura de  $\alpha$  é dada por:

$$\frac{|\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}|}{|\dot{\alpha}|^3}$$

Logo, a curvatura total de  $\alpha$  é dada por:

$$k(\alpha) = \int_0^{2q\pi} \frac{|\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}|}{|\dot{\alpha}|^3} |\dot{\alpha}| dt.$$

Vamos mostrar que se  $\beta(t) = \lambda\alpha(t)$ , onde  $\lambda$  é uma constante qualquer, então  $k(\beta) = k(\alpha)$ .

De fato,

$$\begin{aligned}\beta(t) &= \lambda\alpha(t) \\ \dot{\beta}(t) &= \lambda\dot{\alpha}(t) \\ \ddot{\beta}(t) &= \lambda\ddot{\alpha}(t)\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}k(\beta) &= \int_0^{2q\pi} \frac{|\lambda\dot{\alpha} \wedge \lambda\ddot{\alpha}| |\lambda\dot{\alpha}|}{|\lambda\dot{\alpha}|^3} dt \\ &= \int_0^{2q\pi} \lambda^3 \frac{|\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}| |\dot{\alpha}|}{\lambda^3 |\dot{\alpha}|^3} dt = k(\alpha).\end{aligned}$$

Consideremos agora os nós no toro multiplicados pela constante  $\frac{1}{a}$ . Assim, obtemos uma família de curvas:

$$\gamma_n(t, a) = \left( \left(1 + \frac{\cos(nt)}{a}\right) \cos t, \left(1 + \frac{\cos(nt)}{a}\right) \sin t, \frac{\sin(nt)}{a} \right).$$

Então, usando o fato acima, concluímos que a curvatura total das curvas  $\gamma_n$  tem que coincidir com a curvatura total das curvas  $(q, p)$  sobre o toro de raio  $a$ .

Mostremos, então, que quando  $a \rightarrow \infty$  a curvatura total das curvas  $\gamma_n \rightarrow 2q\pi$ .

Como

$$k(\gamma_n(t, a)) = \int_0^{2q\pi} \frac{\left( \frac{\partial \gamma_n}{\partial t} \wedge \frac{\partial^2 \gamma_n}{\partial t^2} \right)}{\left| \frac{\partial \gamma_n}{\partial t} \right|^3} \left| \frac{\partial \gamma_n}{\partial t} \right| dt$$

temos que mostrar que

$$\lim_{a \rightarrow \infty} k(\gamma_n(t, a)) = 2q\pi.$$

Agora,  $\lim_{a \rightarrow \infty} \gamma_n(t, a) = \gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ , ou seja, o círculo unitário percorrido  $q$  vezes. Logo,  $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\partial^i \gamma_n}{\partial t^i} = \frac{d^i}{dt^i} \gamma(t)$ , para  $i = 1, 2$ .

Então,

$$k(\gamma(t)) = \int_0^{2q\pi} \frac{\left| \frac{d\gamma}{dt} \wedge \frac{d^2\gamma}{dt^2} \right|}{\left| \frac{d\gamma}{dt} \right|^2} dt = 2q\pi.$$

Resta mostrarmos que  $\lim_{a \rightarrow \infty} k(\gamma_n(a, t)) = k(\gamma(t))$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^{2q\pi} \underbrace{\frac{\left| \frac{\partial \gamma_n}{\partial t} \wedge \frac{\partial^2 \gamma_n}{\partial t^2} \right|}{\left| \frac{\partial \gamma_n}{\partial t} \right|^3}}_f \left| \frac{\partial \gamma_n}{\partial t} \right| dt = \int_0^{2q\pi} \lim_{a \rightarrow \infty} f(t, a) dt, \text{ pois :}$$

A função  $f(t, a)$  é uma função contínua em  $[0, 2q\pi]$ . Então, para qualquer intervalo fechado que não contenha o zero, sua primitiva  $F(a)$  é uma função contínua em  $a$ , visto que

$$\begin{aligned} |F(a+h) - F(a)| &= \left| \int_0^{2q\pi} (f(t, a+h) - f(t, a)) dt \right| \leq \\ &\leq \int_0^{2q\pi} |f(t, a+h) - f(t, a)| dt \end{aligned}$$

Em virtude da continuidade uniforme de  $f(t, a)$  para valores suficientemente pequenos de  $h$  o integrando do lado direito, considerado como uma função de  $t$ , pode ser tão pequeno

quanto se queira, e daí segue, portanto, a continuidade de  $F$  com relação a  $a$ .

$$\text{Logo, } \lim_{a \rightarrow \infty} k(\gamma_n) = k(\gamma) = 2q\pi.$$

Assim, quando o raio  $a$  do toro tende ao infinito a curvatura total da curva  $(q, p)$  tende a  $2q\pi$ .

### III.3 – TORÇÃO TOTAL

Depois de termos estudado a curvatura total de uma curva  $\mu : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , queremos agora falar sobre a torção total de  $\mu$  que é definida por  $\int_a^b \tau(s) ds$ , onde  $s$  e  $\tau$  são, respectivamente, o comprimento de arco e a torção de  $\mu$ . Para qualquer número real  $r$  existe uma curva regular fechada tal que a torção total é igual a  $r$ . Para provar isto, consideramos curvas que são hélices circulares com os pontos extremos unidos por uma curva plana. Variando o passo, o número de espirais, o raio do cilindro e a orientação, qualquer torção total pode ser encontrada

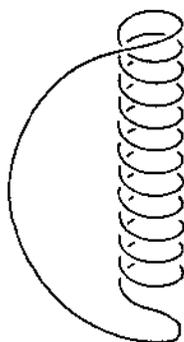


Figura III.11

A torção total desta curva é a torção total da hélice, pois a curva que liga os extremos é plana.

A torção total da hélice, por sua vez, é o produto da torção, que é constante igual a  $\frac{-b}{a^2 + b^2}$  (por (I.6)), pelo comprimento de arco.

Se  $\ell$  é o comprimento de arco de hélice, sua torção total é dada por  $\frac{-b}{a^2 + b^2} \ell$ .

Embora para qualquer número real  $r$  conseguimos sempre uma curva regular fechada para a qual a torção total é  $r$ , no caso de curvas na esfera é possível estipular um valor

para a torção total, como mostra o teorema abaixo:

**TEOREMA III.5:** A torção total de qualquer curva regular fechada numa esfera de raio  $a$ ,  $S^2(a)$ , é zero.

**DEMONSTRAÇÃO:** É suficiente mostrarmos o teorema para uma curva  $\mu$  na esfera unitária  $S^2$ , pois:

Se  $\gamma : [0, \ell] \rightarrow S^2(a)$  é uma curva em  $S^2(a)$ , podemos escrever  $\gamma = a\mu$ , onde  $\mu \in S^2$ .

Logo, a torção total de  $\gamma$  é

$$\begin{aligned} & \int_0^\ell \frac{\det(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \ddot{\ddot{\gamma}})}{|\dot{\gamma} \wedge \ddot{\gamma}|^2} |\dot{\gamma}| dt = \\ & = \int_0^\ell \frac{\det(a\dot{\mu}, a\ddot{\mu}, a\ddot{\ddot{\mu}})}{|a\dot{\mu} \wedge a\ddot{\mu}|^2} |a\dot{\mu}| dt = \\ & = a^2 \int_0^\ell \frac{\det(\dot{\mu}, \ddot{\mu}, \ddot{\ddot{\mu}})}{|\dot{\mu} \wedge \ddot{\mu}|^2} |\dot{\mu}| dt = a^2 \text{ torção total de } \mu. \end{aligned}$$

Seja então,  $\mu$  uma curva regular na esfera unitária  $S^2$  parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ .

$$\text{Então } \mu(s) = \lambda t + \beta n + v b.$$

Seja  $\lambda$  a projeção de  $\mu(s)$  na direção de  $t$ . Então:

$$\lambda = \langle \mu, t \rangle = \frac{1}{2} \langle \mu, \mu \rangle'.$$

Como  $\mu$  é um vetor unitário,  $\langle \mu, \mu \rangle' = 0$  e, portanto,  $\lambda = 0$ .

$$\text{Logo, } \mu(s) = \beta n + v b.$$

$$t = \mu'(s) = \beta' n + \beta(-kt + \tau b) + v'b + v(-\tau n).$$

$$\text{Logo, } t = (-\beta k)t + (\beta' - \tau v)n + (\beta\tau + v')b.$$

$$\text{Logo, } -\beta k = 1 \Rightarrow \beta = -\frac{1}{k} = -\rho, \text{ onde } \rho \text{ é o raio de curvatura de } \mu.$$

Também,  $\beta' - \tau v = 0$ .

$$\text{Como } \langle \mu, \mu \rangle = 1 \Rightarrow \beta^2 + v^2 = 1 \text{ e } v = \pm \sqrt{1 - \beta^2} = \pm \sqrt{1 - \rho^2} \quad (1).$$

$$\text{Então, } \beta' - \tau v = 0 \Rightarrow \tau v = \beta' \Rightarrow v = \frac{\beta'}{\tau} = -\frac{\rho'}{\tau} \quad (2).$$

De (1) e (2) temos:

$$\begin{aligned} \frac{-\rho'}{\tau} &= \pm \sqrt{1 - \rho^2} \Rightarrow \rho' = \pm \tau \sqrt{1 - \rho^2} \\ &\text{e } \tau = \pm \rho' / \sqrt{1 - \rho^2} \text{ quando } \rho \neq 1. \end{aligned}$$

Se  $\rho < 1$ ,  $\frac{\rho'}{\sqrt{1 - \rho^2}}$  faz sentido, e se uma escolha de sinal for feita,  $\tau = \pm \rho' / \sqrt{1 - \rho^2}$ .

Neste caso,

$$\int_0^\ell \tau ds = \pm \int_0^\ell \frac{\rho'}{\sqrt{1 - \rho^2}} ds = \pm \text{sen}^{-1} \rho(s) \Big|_0^\ell = 0, \text{ pois } \rho(0) = \rho(\ell).$$

No argumento a seguir estaremos assumindo as definições e resultados de curvatura normal e curvatura geodésica que estão em [Carmo].

Veremos que podemos ter  $\rho = 1$  e isto vai acontecer quando a curvatura geodésica de  $\mu$  for zero.

Seja  $N(s)$  o vetor unitário normal a esfera no ponto  $s$  apontando para dentro da esfera. Logo,  $N(s) = -\mu(s)$ . Então,  $\mu'' = k_n N + k_g S$ , onde  $k_n$  é a curvatura normal de  $\mu$ ,  $k_g$  a curvatura geodésica e  $S = N \times t$ .

$$\text{Agora, } \langle S, \mu'' \rangle = k_n \underbrace{\langle S, N \rangle}_0 + k_g \underbrace{\langle S, S \rangle}_1 = k_g.$$

Então,

$$\begin{aligned} k_g &= \langle S, \mu'' \rangle = \langle N \times t, \mu'' \rangle = -\langle \mu \times t, t' \rangle = -\langle \mu \times t, kn \rangle = \\ &= -\langle \mu, t \times kn \rangle = -k \langle \mu, b \rangle \\ \langle \mu, b \rangle &= \langle \beta n + vb, b \rangle = \beta \langle n, b \rangle + v \langle b, b \rangle = v \end{aligned}$$

e pelo que vimos antes  $v = \frac{\rho'}{\tau}$ .

Logo,  $k_g = k \frac{\rho'}{\tau} \Rightarrow \tau = \frac{k\rho'}{k_g}$  se  $\tau \neq 0$ .

Como  $k^2 = k_n^2 + k_g^2$  [Carmo] e a curvatura normal de uma curva na esfera é 1 (pois o valor absoluto da curvatura normal num ponto  $p \in \mu(s)$  é igual à curvatura da seção normal da superfície em  $p$  ao longo de  $\mu'(0)$ . ([Carmo] pág. 142). Logo, com  $N$  como orientação, as seções normais através de um ponto  $p \in S^2$  são círculos de raio 1, que têm curvatura igual a 1),

$$\begin{aligned} k^2 &= 1 + k_g^2 \Rightarrow k_g^2 = k^2 - 1 \Rightarrow k_g = \pm\sqrt{k^2 - 1} \\ \frac{k_g}{k} &= \pm\sqrt{1 - \rho^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Logo,

$$\tau = \frac{k\rho'}{k_g} = \rho' / (k_g/k) = \pm\rho' / \sqrt{1 - \rho^2}$$

e o sinal  $\pm 1$  é tomado de acordo com o sinal de  $k_g$ .

Logo,  $\rho = 1 \Leftrightarrow k_g = 0$ .

Desta forma,  $\tau = \pm\rho' / \sqrt{1 - \rho^2}$  quando  $k_g \neq 0$  e o sinal tomado é o de  $k_g$ .

Provaremos este resultado no caso em que  $k_g$  se anula num número finito de pontos,  $0 < s_0 < s_1 < \dots < s_n = \ell$  onde  $k_g$  é zero e tal que em  $(s_{i-1}, s_i)$   $k_g$  é estritamente positiva, estritamente negativa, ou identicamente nula.

$$\int_0^\ell \tau ds = \sum \int_{s_{i-1}}^{s_i} \tau ds.$$

Em cada  $s_i$   $k_g$  é zero,  $k = 1$  e, portanto,  $\rho = 1$ .

Se  $k_g > 0$  em  $(s_{i-1}, s_i)$ , então  $\tau = \rho' / \sqrt{1 - \rho^2}$  e  $\int_{s_{i-1}}^{s_i} \tau ds$  é a integral imprópria

$$\int_{s_{i-1}}^{s_i} \frac{\rho'}{\sqrt{1 - \rho^2}} ds = \text{sen}^{-1}(\rho(s)) = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Analogamente, se  $k_g < 0$  em  $(s_{i-1}, s_i)$ , então  $\int_{s_{i-1}}^{s_i} \tau ds = 0$ .

Observamos que se  $k_g \equiv 0$  em  $(s_{i-1}, s_i)$ , então a curva  $\mu$  é uma geodésica da esfera, ou seja, um grande círculo e, portanto, uma curva plana. Logo,  $\tau \equiv 0$  em  $(s_{i-1}, s_i)$  e  $\int_{s_{i-1}}^{s_i} \tau ds = 0$ .

Logo,  $\int_0^\ell \tau ds = 0$ .

Michael A. Penna dá uma demonstração mais geométrica deste teorema usando outra definição para torção total [Penna]. Vamos falar sobre esta definição.

Como vimos no Capítulo I, dada uma curva regular  $\mu : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  e tal que  $k(t) \neq 0, \forall t \in I, P = \mu(t_1)$  um ponto arbitrário da curva e  $Q = \mu(t_2)$  um ponto de  $\mu$  próximo de  $P$ , seja  $\Delta\theta$  o ângulo entre os planos osculadores em  $t_1$  e  $t_2$  (ou o ângulo entre as binormais  $b(t_1)$  e  $b(t_2)$ ) e  $|\Delta s|$  o comprimento da curva de  $P$  a  $Q$ . Então o valor absoluto da torção  $|\tau|$  de  $\mu$  em  $t_1$  é o limite da razão  $\Delta\theta/|\Delta s|$  quando  $Q \rightarrow P$ .

Suponhamos agora que  $\mu$  seja uma curva poligonal em  $\mathbb{R}^3$  com vértices  $v_i$ . Assumimos  $\mu$  fechada e com número de vértices finito. Com a definição de torção dada acima em mente, definimos agora a torção de  $\mu$ . Na definição acima, a torção é uma função de pontos. Neste caso, será uma função de segmentos de  $\mu$ . Ou seja, a torção  $\tau$  de  $\mu$  associará a cada segmento

$$\sigma_i = \{(1-t)v_i + tv_{i+1} : t \in [0, 1]\}$$

de  $\mu$  um número real  $\tau(\sigma_i) = \tau_i$ .

**DEFINIÇÃO:** Se  $\sigma_{i-1}, \sigma_i$  e  $\sigma_{i+1}$  são coplanares,  $\tau(\sigma_i) = 0$ . Se  $\sigma_{i-1}, \sigma_i$ , e  $\sigma_{i+1}$  não são coplanares, seja  $\Delta\theta$ , o ângulo entre as binormais:

$$b_i = \frac{(v_i - v_{i-1}) \times (v_{i+1} - v_i)}{|(v_i - v_{i-1}) \times (v_{i+1} - v_i)|} \text{ e } b_{i+1} = \frac{(v_{i+1} - v_i) \times (v_{i+2} - v_{i+1})}{|(v_{i+1} - v_i) \times (v_{i+2} - v_{i+1})|}$$

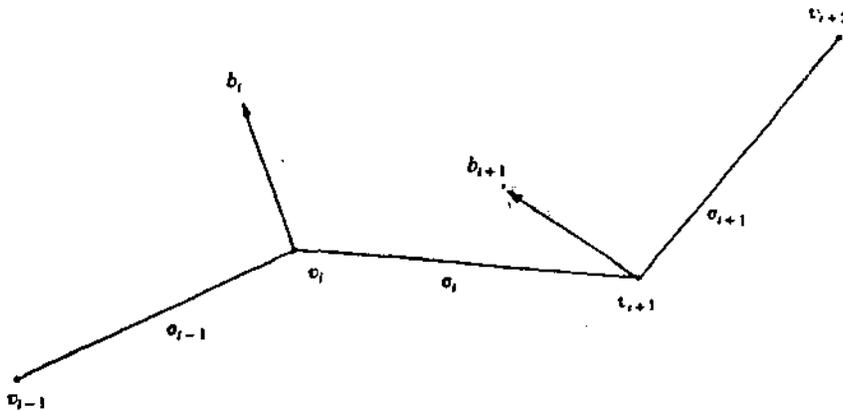


Figura III.12

Sinal de  $\tau$  : positivo se  $\cos \sphericalangle(b_i, \sigma_{i+1}) > 0$  e negativo  $\cos \sphericalangle(b_i, \sigma_{i+1}) < 0$ . Assim temos uma analogia com a definição do Capítulo I.

O valor absoluto da torção em  $\sigma_i$  é definido como:

$$\tau_i = \tau(\sigma_i) = \frac{\Delta\theta_i}{|v_{i+1} - v_i|}.$$

**PROPOSIÇÃO:** Seja  $\{\mu_i\}$  uma sequência de aproximações poligonais secantes à curva fechada regular  $\mu$  tal que os vértices de  $\mu_i$  são os vértices de  $\mu_j, i < j$ , e tal que  $\mu_i$  se aproxima de  $\mu$  uniformemente quando  $i \rightarrow \infty$ . Então para cada  $t_0$  a torção  $\tau(t_0) = \lim_{i \rightarrow \infty} \tau(\sigma_i)$  onde, para cada  $i, \sigma_i$  é o segmento de  $\mu_i$  para o qual  $\mu(t_0)$  fica entre  $v_i$  e  $v_{i+1}$ .

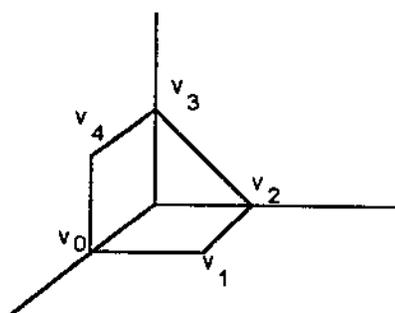
Então, se  $\tilde{\mu}$  é uma aproximação poligonal secante para uma curva regular fechada  $\mu$ , podemos aproximar a torção total de  $\mu$ :

$$\int \tau ds \cong \sum_i \tau_i |v_{i+1} - v_i| = \sum_i \Delta\theta_i,$$

a soma tomada sobre todos os segmentos  $\sigma_i$  de  $\mu$ .

Exemplo:

Vamos calcular a torção total da poligonal abaixo:



- $V_0 = V_5 = (1, 0, 0)$
- $V_1 = (1, 1, 0)$
- $V_2 = (0, 1, 0)$
- $V_3 = (0, 0, 1)$
- $V_4 = (1, 0, 1)$

Figura III.13

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{(V_1 - V_0) \times (V_2 - V_1)}{|(V_1 - V_0) \times (V_2 - V_1)|} = \frac{(0, 1, 0) \times (-1, 0, 0)}{|(0, 1, 0) \times (-1, 0, 0)|} = (0, 0, 1) \\
 b_2 &= \frac{(V_2 - V_1) \times (V_3 - V_2)}{|(V_2 - V_1) \times (V_3 - V_2)|} = \frac{(-1, 0, 0) \times (0, -1, 1)}{|(-1, 0, 0) \times (0, -1, 1)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1) \\
 b_3 &= \frac{(V_3 - V_2) \times (V_4 - V_3)}{|(V_3 - V_2) \times (V_4 - V_3)|} = \frac{(0, -1, 1) \times (1, 0, 0)}{|(0, -1, 1) \times (1, 0, 0)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1) \\
 b_4 &= \frac{(V_4 - V_3) \times (V_5 - V_4)}{|(V_4 - V_3) \times (V_5 - V_4)|} = \frac{(1, 0, 0) \times (0, 0, -1)}{|(1, 0, 0) \times (0, 0, -1)|} = (0, 1, 0)
 \end{aligned}$$

$$\Delta\theta_1 = \sphericalangle(b_1, b_2)$$

$$\langle b_1, b_2 \rangle = \cos(\Delta\theta_1) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos(\Delta\theta_1) \Rightarrow \Delta\theta_1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\Delta\theta_2 = \sphericalangle(b_2, b_3) = 0$$

$$\begin{aligned}
 \Delta\theta_3 &= \sphericalangle(b_3, b_4) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos(\Delta\theta_3) \\
 &\Rightarrow \Delta\theta_3 = \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

$$\text{Logo, Torção Total} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Usando esta definição de torção total Michael A. Penna dá uma prova mais ilustrada do ponto de vista geométrico do Teorema III.5 [Penna].

## TEOREMA DOS QUATRO VÉRTICES PARA CURVAS NO ESPAÇO

Existem várias versões do Teorema dos Quatro Vértices para Curvas no Espaço. A primeira delas foi dada por Kneser em 1912 em seu trabalho contendo a versão clássica para curvas planas. Ele mostrou que os vértices de uma curva plana correspondem a pontos de torção nula na anti-projeção estereográfica desta curva. Assim, toda curva fechada na esfera tem pelo menos 4 pontos de torção nula. Mais tarde, em 1958, M. Barser e F. Flohr mostraram o Teorema para curvas num ovalóide. Uma versão mais geral para o Teorema é feita para curvas convexas no espaço, ou seja, curvas que estão contidas no bordo de seu fecho convexo. Referências recentes deste trabalho são [Sedyhk] e [Costa 2]. Neste último trabalho, é mostrado o seguinte resultado:

Se  $\alpha$  é uma curva convexa satisfazendo as condições:

- $\alpha$  é simples e fechada;
- sua curvatura não se anula em nenhum lugar;
- não tem retas suporte bitangentes;
- tem contato total de ordem finita com qualquer plano  
então  $\alpha$  tem pelo menos 4 vértices (4 mudanças de sinal para a torção).

É importante observarmos, por analogia ao caso de curvas planas, que para curvas no espaço a palavra vértice também possui uma interpretação. Vamos mostrar que os vértices de curvas no espaço correspondem a pontos de cúspide da binormal. De fato,

Seja  $b(s)$  a binormal de uma curva  $\alpha$  regular fechada. Seja  $s_0$  um ponto de mudança de sinal da torção. Vamos mostrar que  $s_0$  é uma cúspide de  $b(s)$ . Suponhamos que para  $s \rightarrow s_0^-$ ,  $\tau(s) < 0$  e para  $s \rightarrow s_0^+$ ,  $\tau(s) > 0$ . Então

$$\frac{b'(s)}{|b(s)|} = -\frac{\tau n}{\pm\tau}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow s_0^-} \frac{b'(s)}{|b'(s)|} &= \lim_{s \rightarrow s_0^-} = \frac{\tau n}{-\tau} = n \\ \text{e} \\ \lim_{s \rightarrow s_0^+} \frac{b'(s)}{|b'(s)|} &= \lim_{s \rightarrow s_0^+} \frac{-\tau n}{\tau} = -n. \end{aligned}$$

Logo, as tangentes unitárias a  $b(s)$  para  $s \rightarrow s_0^-$  e para  $s \rightarrow s_0^+$  formam um ângulo de  $180^\circ$ , o que significa que  $s_0$  é um ponto de cúspide de  $b(s)$ .

Reciprocamente, suponhamos  $s = s_0$  um ponto de cúspide de  $b(s)$ . Logo, necessariamente temos  $b'(s_0) = 0$  o que implica que  $-\tau(s_0)n(s_0) = 0 \Rightarrow \tau(s_0) = 0$  e, portanto,  $\tau(s_0) = 0$ .

Temos ainda que mostrar que  $s_0$  é um ponto de mudança de sinal da torção.

$$\text{Sejam, então, } v(s_0) = \lim_{s \rightarrow s_0^-} \frac{b'(s)}{|b'(s)|} \text{ e } w(s_0) = \lim_{s \rightarrow s_0^+} \frac{b'(s)}{|b'(s)|}.$$

Como  $s_0$  é um ponto de cúspide de  $b$ ,  $v(s_0) \cdot w(s_0) = -1$ . Então,  $v(s_0) = n(s_0)$  e  $w(s_0) = -n(s_0)$  (ou vice-versa).

Como

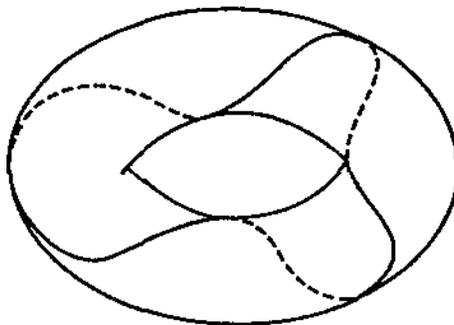
$$\begin{aligned} |b'(s)| &= \tau(s) \text{ se } \tau(s) > 0 \text{ e} \\ |b'(s)| &= -\tau(s) \text{ se } \tau(s) < 0, \end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned} v(s_0) = n(s_0) &\Rightarrow \tau(s) < 0 \text{ para } s \rightarrow s_0^- \text{ e} \\ w(s_0) = -n(s_0) &\Rightarrow \tau(s) > 0 \text{ para } s \rightarrow s_0^+. \end{aligned}$$

Logo,  $s_0$  é um ponto de mudança de sinal da torção.

Finalmente cabe observar que o Teorema dos Quatro Vértices, ao contrário do caso de curvas planas, não é válido para todas as curvas regulares fechadas simples no espaço. Um exemplo pode ser dado pela curva (1,3) no toro, que para  $\frac{19}{8} < a < 10$ , tem torção nunca nula [Costa 1]. Esta curva não é convexa.



Curva (1,3) sobre o toro

Figura III.14

Uma família de curvas convexas (e que portanto tem pelo menos 4 vértices) pode ser extraída das curvas  $(q, p)$  no toro. Como mostraremos no parágrafo III.6 as curvas  $(q, p)$  no toro ( $a > 1$ ) se projetam como curvas de curvatura não nula no plano se e somente se  $a > n^2 + 1$ .

No caso de curvas do tipo  $(1, n)$  (sem nó) a projeção no plano é uma curva sem auto-intersecção (são curvas simples). Logo, pelo Teorema II.3 estas curvas têm projeção convexa no plano.

Dizemos que uma curva  $C$  fechada no espaço  $\mathbb{R}^3$  é convexa se todo ponto  $x \in C$  possui um plano suporte, ou seja, um plano que suporta a curva no ponto e tal que a curva fica inteiramente contida num dos semi-espacos determinados por este plano.

Então, como para  $a > n^2 + 1$  as curvas  $(1, n)$  possuem projeção convexa, podemos tomar o cilindro cuja base é esta curva projeção. Logo, este cilindro contém a curva  $(1, n)$  e todo ponto  $x$  pertencente a curva terá como plano tangente o plano tangente ao cilindro neste ponto  $x$  e, portanto, toda a curva ficará num semi-espaco determinado pelo plano tangente. Logo, para  $a > n^2 + 1$  as curvas  $(1, n)$  no toro são convexas e, portanto, possuem pelo menos 4 pontos de torção nula.

### III.4 – ENERGIA DE UM NÓ

Um funcional no espaco de curvas fechadas no  $\mathbb{R}^3$  que foi introduzido recentemente é a energia de um nó. Dada uma curva  $\gamma(u)$  fechada, regular por partes em  $\mathbb{R}^3$ , onde  $u, v$  pertencem ao intervalo de definição da curva ou a  $S^1$ , define-se essa energia por:

$$E(\gamma) = \iint \left\{ \frac{1}{|\gamma(u) - \gamma(v)|^2} - \frac{1}{D(\gamma(u), \gamma(v))^2} \right\} |\dot{\gamma}(u)| |\dot{\gamma}(v)| \, du \, dv$$

onde  $D(\gamma(u), \gamma(v))$  é a menor distância sobre a curva entre  $\gamma(u)$  e  $\gamma(v)$ .

Como exemplo, calculamos a energia do círculo unitário. Primeiro, observamos que se  $\gamma$  está parametrizada pelo comprimento de arco e  $\ell$  é o comprimento de  $\gamma$ , então:

$$E(\gamma) = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \int_{u-\ell/2}^{u+\ell/2} \left\{ \frac{1}{|\gamma(v) - \gamma(u)|^2} - \frac{1}{|v - u|^2} \right\} \, du \, dv. (*)$$

Seja  $\gamma_0 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma parametrização do círculo unitário. Se  $|v - u| \leq \pi$ , então

$$|\gamma_0(v) - \gamma_0(u)| = 2 \operatorname{sen}(|v - u|/2).$$

Logo, pela equação (\*) temos:

$$\begin{aligned}
E(\gamma) &= \int_{-\pi}^{\pi} du \int_{-u-\pi}^{u+\pi} \left\{ \frac{1}{[2\operatorname{sen}\frac{v-u}{2}]^2} - \frac{1}{(u-v)^2} \right\} dv \\
&= 4\pi \int_0^{\pi} \left[ \frac{1}{4\operatorname{sen}^2(v/2)} - \frac{1}{v^2} \right]_{u-\pi}^{u+\pi} du \\
&= 2\pi \int_0^{\pi/2} \left[ \frac{1}{\operatorname{sen}^2 u} - \frac{1}{u^2} \right] du \\
&= 2\pi \left( -\cot u + \frac{1}{u} \right) \Big|_0^{\pi/2}
\end{aligned}$$

como  $\cot u = 1/u - (1/3)u + \dots$ , temos  $\cot u - 1/u \rightarrow 0$  quando  $u \rightarrow 0$ . Logo,  $E(\gamma_0) = 4$ .

Uma das principais propriedades deste funcional é a invariância por transformações de Möbius [Freedman]. Uma transformação de Möbius na 3 esfera  $= \mathbb{R}^3 \cup \infty$  é um elemento do grupo de difeomorfismos que preservam ângulos gerados pela inversão em 2 esferas.

**TEOREMA III.6:** (Teorema 2.1 de [Freedman])

Seja  $\gamma$  uma curva simples fechada em  $\mathbb{R}^3$  e  $T$  uma transformação de Möbius em  $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ . Então:

- (i) Se  $T \circ \gamma \subset \mathbb{R}^3$ , então  $E(T \circ \gamma) = E(\gamma)$ .
- (ii) Se  $T \circ \gamma$  passa através do  $\infty$ , então  $E((T \circ \gamma) \cap \mathbb{R}^3) = E(\gamma) - 4$ .

Esta propriedade foi essencial na obtenção dos seguintes resultados [Feedman]:

- 1) Sobre todas as curvas regulares por partes fechadas  $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , os círculos têm a menor energia e qualquer curva  $\gamma$  de energia mínima parametriza um círculo.
- 2) Qualquer curva regular por partes com energia menor que  $6\pi + 4 \approx 22.84954$  é uma curva sem nó.
- 3) O número de classes de isomorfismos de nós que têm representantes de energia menor ou igual a  $M$  é limitado por  $2(24^{-4/2\pi})(24^{1/2\pi})^M \approx (0.264)(1.658)^M$ . Em particular, existem finitos tipos de nós limitados por qualquer valor de energia.

Assim, através da energia de um nó podemos estimar o número de tipos de nós com energia menor ou igual a uma constante  $M$ . Experimentos computacionais de K. Ahara

deram um valor de  $\approx 74$  para a energia de um trefoil.

Com base nestes fatos, tentamos calcular a energia dos nós no toro. Nossa intenção era conseguir exemplos que se aproximassem mais do resultado de [Feedman], utilizando para isto os softwares Mathematica e Maple versões para a estação SUN.

Porém, as grandes oscilações do integrando não permitiram resultados confiáveis dentro das aproximações feitas.

Uma de nossas perspectivas para trabalho futuro é um estudo em maior profundidade dos resultados de [Feedman] com possíveis discussões envolvendo a geometria diferencial global das curvas.

### III.5 – NÚMERO DE ENLAÇAMENTOS DE DUAS CURVAS NO ESPAÇO

Neste parágrafo apresentamos diferentes definições para o número de enlaçamentos (*linking number*) entre duas curvas no espaço mostrando a equivalência entre elas. As principais referências utilizadas foram [Rolfsen] e [Pohl 1].

#### A INTEGRAL DE GAUSS

Seja  $M$  uma variedade compacta diferenciável de dimensão  $n$  (com ou sem fronteira) e seja  $\phi$  uma aplicação diferenciável de  $M$  na esfera unitária de dimensão  $n$ . Seja  $dO_n$  o pull-back (Apêndice 3) do elemento de volume de  $S^n$  sob  $\phi$  e  $O_n$  o volume de  $S^n$ . Então

$$\frac{1}{O_n} \int_M dO_n$$

é chamada a integral de Gauss para  $\phi$ .

A integral de Gauss tem várias aplicações na Geometria. No caso em que  $M$  não tem fronteira, ela dá o grau de  $\phi$  (Apêndices 2 e 4). Foi usada por Kronecker para dar uma fórmula para o número de intersecções de duas subvariedades no espaço euclidiano. No caso em que  $M$  é uma hipersuperfície imersa e  $\phi$  é a aplicação de Gauss, ela dá a curvatura total de  $M$ . Gauss usou a integral em sua investigação sobre a teoria eletromagnética para dar uma fórmula para o número de enlaçamentos de duas curvas fechadas no espaço. Se  $C_1$  e  $C_2$  são duas curvas regulares fechadas disjuntas no espaço e se  $\phi : C_1 \times C_2 \rightarrow S^2$  é a aplicação que associa a cada  $(x, y)$  o vetor unitário de  $x$  a  $y$ , então a integral de Gauss dá o número de enlaçamentos ( $LK(C_1, C_2)$ ) de  $C_1$  e  $C_2$  (se  $C_1$  e  $C_2$  não são disjuntos então o número de enlaçamentos é indeterminado).

Logo,

$$LK(C_1, C_2) = \frac{1}{4\pi} \int_{C_1 \times C_2} dS \quad (\text{III.5.1})$$

onde  $dS$  é o pull-back do elemento de área orientada de  $S^2$  pela aplicação  $\phi$ .

Dadas duas curvas regulares fechadas disjuntas  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3, \alpha([a, b]) = C_2$  e  $\beta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3, \beta([c, d]) = C_1$ , a integral de Gauss é equivalente à integral

$$\frac{1}{4\pi} \int_c^d \int_a^b \frac{d\epsilon t(u, v, w)}{|u|^3} dx dt \quad (\text{III.5.2})$$

onde

$$\begin{aligned} u &= \alpha(x) - \beta(t) \\ v &= \alpha'(x) \\ w &= \beta'(t). \end{aligned}$$

Esta integral nos fornece uma fórmula explícita para se calcular o número de enlaçamentos de duas curvas no espaço.

Vamos então mostrar que (III.5.1) e (III.5.2) são equivalentes.

De fato,

$$\int_{C_1 \times C_2} dS = \text{grau de } \phi \cdot \text{área de } S^2.$$

Logo, podemos interpretar  $\int_{C_1 \times C_2} dS$  como a “área orientada” de  $S^2$  coberta pela aplicação  $\phi$ .

Tomamos a parametrização de  $S^2$  dada por:

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow S^2 \\ (x, t) &\mapsto \frac{\alpha(x) - \beta(t)}{|\alpha(x) - \beta(t)|}. \end{aligned}$$

Logo,

$$dS = \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial x} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial t}, \phi \right\rangle dx dt.$$

Assim,

$$\int_{C_1 \times C_2} dS = \int_c^d \int_a^b \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial x} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial t}, \phi \right\rangle dx dt.$$

Tomando  $u, v, w$  como anteriormente, temos:  $\phi = \frac{u}{|u|} = \frac{u}{\langle u, u \rangle^{1/2}}$ , e

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{|u|} \left[ v - \frac{u \langle v, u \rangle}{|u|^2} \right]$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{|u|} \left[ w - \frac{u \langle w, u \rangle}{|u|^2} \right]$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot \phi &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t} \wedge \phi = \frac{1}{|u|^2} v \cdot w \wedge \phi = \\ &= \frac{1}{|u|^3} v \cdot w \wedge u = \frac{1}{|u|^3} \det(u, v, w). \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{C_1 \times C_2} dS = \int_c^d \int_a^b \frac{1}{|u|^3} \det(u, v, w) dx dt.$$

Já vimos três maneiras de se definir o número de enlaçamentos de duas curvas no espaço (As integrais (III.5.1) e (III.5.2) e como o grau da aplicação  $\phi$ ). Veremos agora outras maneiras de se calcular o número de enlaçamentos de duas curvas.

Para a definição de número de enlaçamentos de duas curvas que faremos abaixo, será necessária a introdução do conceito de superfície de Seifert para uma curva. Dada uma curva regular fechada simples no  $\mathbb{R}^3$  é sempre possível construirmos uma superfície que seja compacta, conexa, mergulhada no  $\mathbb{R}^3$  e orientável, de modo que a curva seja bordo desta superfície, chamada *superfície de Seifert* [Rolfsen]. Descrevemos a seguir como esta construção pode ser feita [Carter]. Em [Rolfsen], é feita a prova da existência desta superfície.

Dada uma curva simples fechada no  $\mathbb{R}^3$ , tomamos sua projeção num plano. Quando a curva não tiver nó, a superfície de Seifert é isotópica a um disco. Quando tivermos um nó no  $\mathbb{R}^3$ , a projeção terá auto-intersecções. Orientamos, então, a projeção do nó e em cada cruzamento um par de setas orientadas são associadas com a orientação (figura III.15). Então o cruzamento é suavizado de tal modo que as orientações coincidam.

(Podemos pensar na intersecção de duas avenidas de mão única e no par de conversões possíveis nesta intersecção). Uma coleção de curvas simples fechadas orientadas resultará da suavização de todos os cruzamentos. Cada curva limita um disco no plano de projeção e estes discos podem ser levantados no espaço tridimensional de modo que fiquem mutuamente disjuntos. À coleção destes discos, reintroduzimos os cruzamentos adicionando faixas torcidas de tal modo que a orientação induzida no bordo desta superfície coincida com a orientação inicial do nó. Logo, obtemos uma superfície compacta, conexa, mergulhada no  $\mathbb{R}^3$  cujo bordo é o nó dado inicialmente.

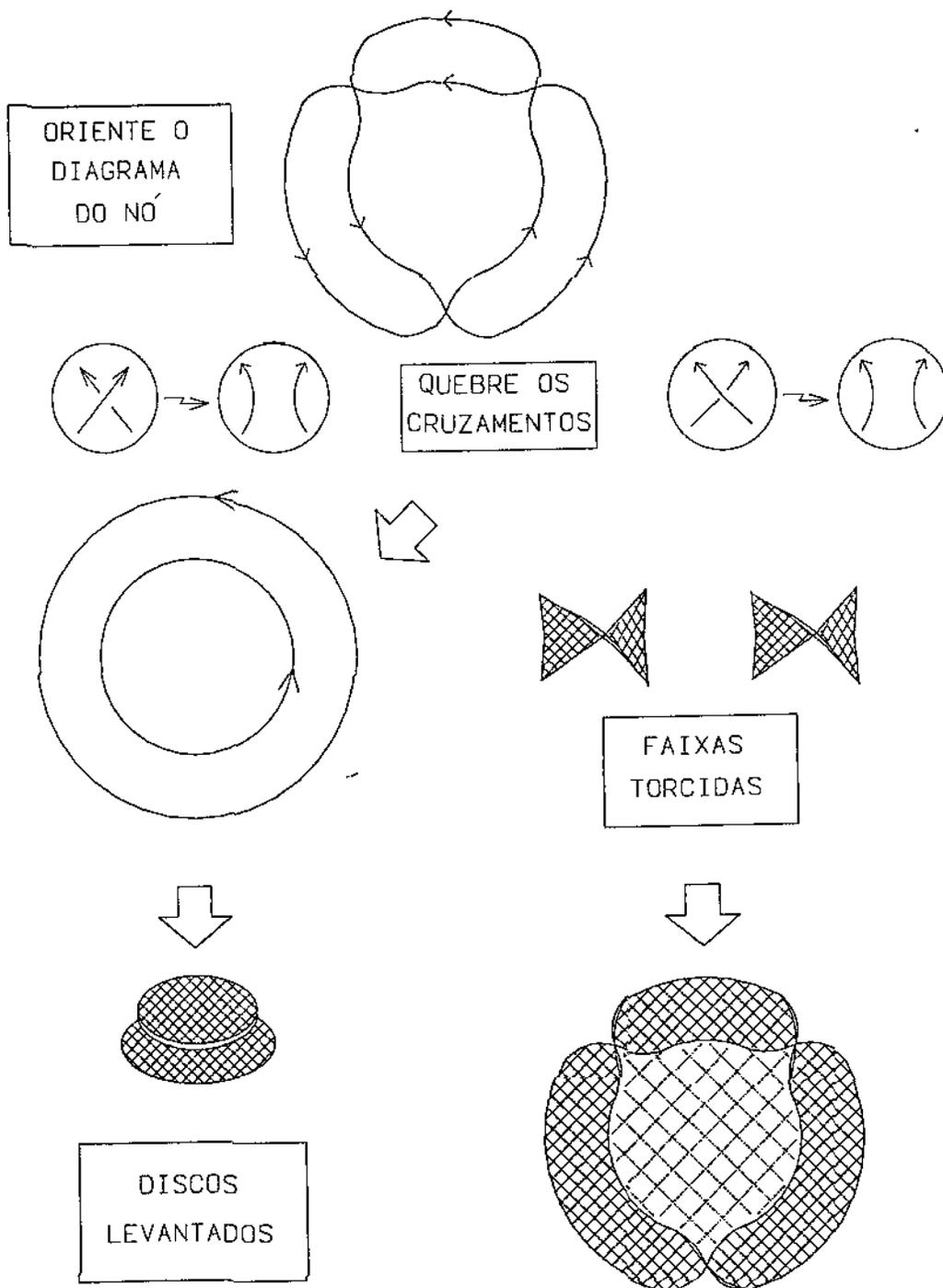


Figura III.15

Daremos agora a nossa 4ª definição de número de enlaçamentos de duas curvas. Sejam  $C_1$  e  $C_2$  curvas regulares, fechadas, disjuntas. Seja  $S$  a superfície de Seifert para  $C_1$ . Pelo Teorema da Transversalidade (Apêndice 6), podemos assumir que  $C_2$  intercepta  $S$  num número finito de pontos  $x_1, \dots, x_N$ .

Se, num determinado ponto  $x_i$  onde  $C_2$  cruza  $S$ , o sentido de cruzamento é o mesmo que o do vetor normal a  $S$ , contamos +1. Caso contrário, contamos -1. A soma destes números (vamos denotá-la por  $A$ ), nos dá o número de enlaçamentos entre  $C_1$  e  $C_2$ .

$$\text{Mostraremos agora que } A = \frac{1}{4\pi} \int_{C_1 \times C_2} dS = LK.$$

Como  $C_2$  encontra  $S$  num número finito de pontos, sejam  $x_1 = (d_1, c_1), \dots, x_N = (d_N, c_N)$  estes pontos, onde  $d_i \in C_2$  e  $c_i \in S$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

Para cada ponto  $(x, y) \in S \times C_2$  distinto de  $(d_1, c_1), \dots, (d_N, c_N)$  associamos um vetor unitário  $\phi(x, y)$  que vai de  $x$  a  $y$ . Envolvemos cada  $(d_i, c_i)$  por uma esfera  $\Sigma_i$  em  $S \times C_2$  que não contenha outro  $(d_i, c_i)$  e que não encontre  $\partial(S \times C_2) = C_1 \times C_2$ . Seja  $dS$  o pull-back do elemento de área sobre a esfera unitária pela aplicação  $\phi$ . Então  $d(dS) = 0$ , pois  $dS$  é o pull-back de uma 2 forma definida numa variedade bidimensional.

Assumimos  $S \times C_2$  orientado. Pelo Teorema de Stokes, temos:

$$\int_{C_1 \times C_2} dS + \sum_{i=1}^N \int_{\Sigma_i} dS = \int_{S \times C_2} d(dS) = 0.$$

Logo,

$$\int_{C_1 \times C_2} dS = - \sum_{i=1}^N \int_{\Sigma_i} dS.$$

Mas a  $j$ -ésima integral do lado direito é igual a  $-4\pi(\pm 1)$ . Logo,

$$\int_{C_1 \times C_2} dS = 4\pi A \Rightarrow A = \frac{1}{4\pi} \int_{C_1 \times C_2} dS = LK.$$

Assim temos a 4ª definição de  $LK$ .

Falaremos agora de uma 5ª definição de  $LK$ . Considere a projeção regular de  $C_1 \cup C_2$  no plano. Em cada ponto  $x_i$  onde  $C_2$  cruza sob  $C_1$ , conte

$$+1 \text{ para } \downarrow_{t_1} \rightarrow t_2 \text{ e } -1 \text{ para } \uparrow_{t_1} \rightarrow t_2$$

onde  $t_1$  e  $t_2$  são, respectivamente as projeções dos tangentes unitários a  $C_1$  e  $C_2$  em  $x_i$ .

A soma destes números ( $= B$ ), sobre todos os cruzamentos de  $C_2$  sob  $C_1$  nos dá o número de enlaçamentos entre  $C_1$  e  $C_2$ .

**DEMONSTRAÇÃO:** Consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3 \\ (t, x) &\mapsto \frac{\alpha(x) - \beta(t)}{|\alpha(x) - \beta(t)|}, \text{ onde } \alpha([a, b]) = C_1 \text{ e } \beta([c, d]) = C_2. \end{aligned}$$

Escolhemos em  $S^2$  a orientação do vetor normal para fora.

Seja  $y \in S^2$  valor regular de  $\phi$ . Vamos mostrar que os pontos na imagem inversa de  $y$  pela aplicação  $\phi$  são os pontos em que a curva  $C_2$  cruza sob a curva  $C_1$  e que contando  $+1$  para  $-\downarrow_{t_1} \rightarrow t_2$  e  $-1$  para  $-\uparrow_{t_1} \rightarrow t_2$  a soma destes números dará exatamente o grau de  $\phi$ , ou seja, o número de enlaçamentos entre  $C_1$  e  $C_2$ .

Como  $y$  é um valor regular e  $S^2$  é compacta,  $\phi^{-1}(y) = \{p_1, \dots, p_k\} \in C_1 \times C_2$  é finito, onde  $p_i = (\alpha(x_i), \beta(t_i))$ .

Consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} \pi_y : \mathbb{R}^3 &\rightarrow y^\perp \quad (\pi_y \text{ a projeção no plano perpendicular a } y) \\ w &\mapsto w - w \cdot y \cdot y \end{aligned}$$

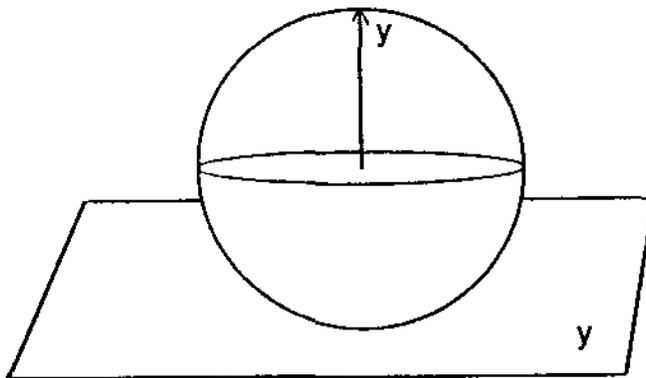


Figura III.16

Logo,

$$(\alpha(x_i), \beta(t_i)) \in \phi^{-1}(y) \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_y(\alpha(x_i)) = \pi_y(\beta(t_i)) \\ \alpha(x_i) \cdot y > \beta(t_i) \cdot y \left( \text{pois } y = \frac{\alpha(x_i) - \beta(t_i)}{|\alpha(x_i) - \beta(t_i)|} \right). \end{cases} \quad e$$

Logo, os pontos na imagem inversa de  $y$  pela  $\phi$  são exatamente os pontos em que  $C_2$  cruza sob  $C_1$ .

Vamos agora verificar que o sinal positivo para  $-\downarrow_{t_1} \rightarrow t_2$  e  $-1$  e negativo para  $-\uparrow_{t_1} \rightarrow t_2$  coincide com o fato de  $\phi$  preservar ou reverter orientação.

Sejam  $w_1 = \pi_y(\alpha'(x_i))$  e  $w_2 = \pi_y(\beta'(t_i))$ , onde  $(\alpha(x_i), \beta(t_i)) \in \phi^{-1}(y)$ . Mostraremos que  $\{w_1, w_2\}$  é uma base positiva (nesta ordem)  $\Leftrightarrow \phi$  preserva orientação, ou seja, que

$$w_1 \wedge w_2 \cdot y > 0 \Leftrightarrow \phi \text{ preserva orientação.} \quad (a)$$

Considerando a aplicação  $\phi$ , podemos olhá-la como uma parametrização de  $S^2$

$$\phi : (t, x) \mapsto \frac{\alpha(x) - \beta(t)}{|\alpha(x) - \beta(t)|}.$$

Como

$$\phi \cdot \phi = 1 \Rightarrow \begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \phi &= 0 \\ e \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot \phi &= 0. \end{aligned}$$

$$\text{Logo } \frac{\partial \phi}{\partial x} \perp \phi \text{ e } \frac{\partial \phi}{\partial t} \perp \phi.$$

Para um ponto regular  $(x_i, t_i) \in \phi^{-1}(y)$

$$\left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\} \text{ é L.I. e gera } T_y S^2.$$

Agora,  $\phi$  preserva orientação  $\Leftrightarrow \phi$  leva uma base positiva de  $\mathbb{R}^2$  numa base positiva de  $T_y(S^2) \Leftrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot y > 0$  (b).

De (a) e (b) devemos mostrar que

Como

$$\begin{aligned} w_1 &= \pi_y(\alpha'(x_i)) \Rightarrow w_1 = \alpha'(x_i) - \alpha'(x_i) \cdot y \cdot y \\ w_2 &= \pi_y(\beta'(t_i)) \Rightarrow w_2 = \beta'(t_i) - \beta'(t_i) \cdot y \cdot y. \end{aligned}$$

Então

$$w_1 \wedge w_2 \cdot y > 0 \Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} \alpha'(x_i) - \alpha'(x_i) \cdot y \cdot y \\ \beta'(t_i) - \beta'(t_i) \cdot y \cdot y \\ y \end{bmatrix} > 0 \quad (c)$$

Por outro lado, já vimos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t}(t_i, x_i) &= \left[ \alpha'(x_i) - \frac{u}{|u|^2} \alpha'(x_i) \cdot (\alpha(x_i) - \beta(t_i)) \right] \cdot \frac{1}{|u|} \\ \frac{\partial \phi}{\partial t}(t_i, x_i) &= \left[ \beta'(t_i) - \frac{u}{|u|^2} \beta'(t_i) \cdot (\alpha(x_i) - \beta(t_i)) \right] \cdot \frac{1}{|u|} \end{aligned}$$

onde  $u = \alpha(x_i) - \beta(t_i)$ .

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot y > 0 &\Leftrightarrow \\ \det \begin{bmatrix} \alpha'(x_i) - \frac{u}{|u|^2} \alpha'(x_i) \cdot (\alpha(x_i) - \beta(t_i)) \\ \beta'(t_i) - \frac{u}{|u|^2} \beta'(t_i) \cdot (\alpha(x_i) - \beta(t_i)) \\ y \end{bmatrix} > 0 &\Leftrightarrow \\ \det \begin{bmatrix} \alpha'(x_i) - \alpha'(x_i) \cdot y \cdot y \\ \beta'(t_i) - \beta'(t_i) \cdot y \cdot y \\ y \end{bmatrix} > 0. \end{aligned}$$

Comparando com (c), obtemos

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot y > 0 \Leftrightarrow w_1 \wedge w_2 \cdot y > 0.$$

Logo,  $\deg(\phi) = B$ , o que significa que  $B$  é o número de enlaçamentos entre  $C_1$  e  $C_2$ .

Uma definição de  $LK$  de natureza topológica é a seguinte:

$C_2$  é um laço em  $S^3$  (esfera unitária em  $\mathbb{R}^4$ )  $-C_1$ , portanto representa um elemento de  $\pi_1(S^3 - C_1)$  com ponto base apropriado. Este grupo fundamental se abelianiza a  $\mathbf{Z}$  (ou seja, o quociente deste grupo fundamental pelo seu comutador é  $\mathbf{Z}$ , conjunto dos números inteiros) e o laço  $C_2$  é levado num inteiro, que é o número de enlaçamentos entre  $C_1$  e  $C_2$ . (6ª definição) A demonstração deste fato se encontra em [Rolfesen].

### PROPRIEDADES:

O número de enlaçamentos  $LK$  entre duas curvas  $C_1$  e  $C_2$  é invariante por isotopia.

De fato, se existem isotopias  $\alpha : [0, 1] \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\beta : [0, 1] \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  e tal que  $\alpha_0(S^1) = C_2$  e  $\beta_0(S^1) = C_1$ , então definimos

$$\phi_k(x, t) = \frac{\alpha_k(x) - \beta_k(t)}{|\alpha_k(x) - \beta_k(t)|}, k \in [0, 1].$$

Assim, temos aplicações isotópicas  $\phi_0, \phi_1 : S^1 \times S^1 \rightarrow S^2$ . Como, pelo Apêndice 2 o grau é invariante por isotopia, temos que  $deg(\phi_0) = deg(\phi_1) = LK$ .

Outra propriedade importante do número de enlaçamentos entre duas curvas é que  $LK(C_1, C_2) = LK(C_2, C_1)$ , pois se  $C_1$  e  $C_2$  são revertidos então a orientação do produto  $C_1 \times C_2$  é revertida e o sinal de  $\phi$  é trocado, o que significa que  $u = \alpha(x) - \beta(t)$  também tem sinal trocado. Logo,  $LK = \frac{1}{4\pi} \int_{C_1 \times C_2} \frac{det(u, v, w)}{|u|^3} dx dt$  ( $v = \alpha'(x)$  e  $w = \beta'(t)$ ) fica inalterada.

Se revertermos a orientação de uma das curvas, por exemplo de  $C_1$ , teremos, pela 5ª definição de  $LK$ , que as projeções  $-\uparrow_{t_2}^{t_1}$  e  $-\uparrow_{t_1}^{t_2}$  terão seus sinais trocados, o que significa que o sinal de  $LK$  também muda.

Logo  $LK(-C_1, C_2) = -LK(C_1, C_2)$ .

### ÍNDICE DE TANGENTE DE CRUZAMENTO

Em III.6 falaremos sobre o número de auto-enlaçamentos de uma curva regular fechada simples no espaço e será dada uma fórmula integral para calcular este número. Para isto será necessário, então, uma reinterpretação da Integral de Gauss.

Sejam, então,  $C_2 = \alpha(S^1)$  e  $C_1 = \beta(S^1)$  curvas regulares fechadas simples disjuntas. Mostraremos que o número de enlaçamentos entre  $C_1$  e  $C_2$  é igual a metade da soma dos índices de tangente de cruzamento, cuja definição necessitará de algumas considerações abaixo.

Localmente em  $C_1 \times C_2$  associamos a todo ponto vetores unitários  $e_1, e_2, e_3$  que são perpendiculares entre si, onde  $e_1(x, t) = \frac{\alpha(x) - \beta(t)}{|\alpha(x) - \beta(t)|}$  é o vetor unitário de  $\beta(t)$  a  $\alpha(x)$  e de modo que  $\{e_1, e_2, e_3\}$  seja um triedro positivamente orientado em  $\mathbb{R}^3$ .

Seja  $w_{ij} = de_i \cdot e_j$ , onde para  $i = 1, 2, 3$ ,

$$\begin{aligned} e_i : \mathbb{R}^2 &\rightarrow S^2 \\ (x, t) &\mapsto e_i(x, t) \\ &e \\ de_{i(x,t)} : \mathbb{R}^2 &\rightarrow T_{e_i(x,t)}(S^2). \end{aligned}$$

Logo,  $de_{i(x,t)} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in e_i^\perp(x,t)$  (plano perpendicular ao vetor  $e_i(x,t)$ ), pois na esfera o plano tangente num ponto é perpendicular ao vetor posição.

Assim,  $e_i^\perp(x, t) = T_{e_i(x,t)}(S^2)$ .

Como

$$\begin{aligned} de_i &= \frac{\partial e_i}{\partial x} dx + \frac{\partial e_i}{\partial t} dt, \\ w_{ij} = de_i \cdot e_j &= \frac{\partial e_i}{\partial x} \cdot e_j dx + \frac{\partial e_i}{\partial t} \cdot e_j dt. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} dw_{ij} &= d\left(\frac{\partial e_i}{\partial x} \cdot e_j dx + \frac{\partial e_i}{\partial t} \cdot e_j dt\right) \\ &= \frac{\partial e_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial e_j}{\partial x} dx dt - \frac{\partial e_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial e_j}{\partial t} dx dt. \end{aligned}$$

Seja  $dS$  o pull-back do elemento de área de  $S^2$  pela aplicação  $e_1$ . Mostraremos que  $dS = w_{12} \wedge w_{13} = dw_{32}$ . Para isto, vamos mostrar que  $dw_{ij} = \sum_{k=1}^3 w_{ik} \wedge w_{kj}$ .

Expressando  $\frac{\partial e_i}{\partial x}, \frac{\partial e_i}{\partial t}, \frac{\partial e_j}{\partial x}, \frac{\partial e_j}{\partial t}$  na base  $\{e_1, e_2, e_3\}$  obtemos:

$$dw_{ij} = \left[ \left( \frac{\partial e_i}{\partial t} \cdot e_1 \right) \left( \frac{\partial e_j}{\partial x} \cdot e_1 \right) + \left( \frac{\partial e_i}{\partial t} \cdot e_2 \right) \left( \frac{\partial e_j}{\partial x} \cdot e_2 \right) + \left( \frac{\partial e_i}{\partial t} \cdot e_3 \right) \left( \frac{\partial e_j}{\partial x} \cdot e_3 \right) \right] dxdt - \left[ \left( \frac{\partial e_i}{\partial x} \cdot e_1 \right) \left( \frac{\partial e_j}{\partial t} \cdot e_1 \right) + \left( \frac{\partial e_i}{\partial x} \cdot e_2 \right) \left( \frac{\partial e_j}{\partial t} \cdot e_2 \right) + \left( \frac{\partial e_i}{\partial x} \cdot e_3 \right) \left( \frac{\partial e_j}{\partial t} \cdot e_3 \right) \right] dxdt$$

Como  $e_i \cdot e_j = 0$  para  $i \neq j$ , temos:

$$(*) \begin{cases} \frac{\partial e_i}{\partial x} \cdot e_j = -\frac{\partial e_j}{\partial x} \cdot e_i \\ e \\ \frac{\partial e_i}{\partial t} \cdot e_j = -\frac{\partial e_j}{\partial t} \cdot e_i \end{cases}$$

Também,  $\frac{\partial e_i}{\partial t} \cdot e_i = 0$  e  $\frac{\partial e_i}{\partial x} \cdot e_i = 0$ , pois  $\frac{\partial e_i}{\partial x}, \frac{\partial e_i}{\partial t} \in e_i^\perp$ .

Considerando estes fatos na expressão acima, obtemos:

$$\begin{aligned} dw_{ij} &= \left( \frac{\partial e_i}{\partial x} \cdot e_1 \right) \left( \frac{\partial e_1}{\partial t} \cdot e_j \right) dxdt - \left( \frac{\partial e_i}{\partial t} \cdot e_1 \right) \left( \frac{\partial e_1}{\partial x} \cdot e_j \right) dxdt + \\ &\quad \left( \frac{\partial e_i}{\partial x} \cdot e_2 \right) \left( \frac{\partial e_2}{\partial t} \cdot e_j \right) dxdt - \left( \frac{\partial e_i}{\partial t} \cdot e_2 \right) \left( \frac{\partial e_2}{\partial x} \cdot e_j \right) dxdt + \\ &\quad \left( \frac{\partial e_i}{\partial x} \cdot e_3 \right) \left( \frac{\partial e_3}{\partial t} \cdot e_j \right) dxdt - \left( \frac{\partial e_i}{\partial t} \cdot e_3 \right) \left( \frac{\partial e_3}{\partial x} \cdot e_j \right) dxdt \\ &= \sum_{k=1}^3 de_i \cdot e_k \wedge de_k \cdot e_j = \sum_{k=1}^3 w_{ik} \wedge w_{kj}. \end{aligned}$$

Logo,  $dw_{32} = w_{31} \wedge w_{12} \stackrel{(*)}{=} w_{12} \wedge w_{13}$ .

Resta mostrarmos então que  $dS = w_{12} \wedge w_{13}$ .

Já vimos que  $dS = \frac{\partial e_1}{\partial x} \wedge \frac{\partial e_1}{\partial t} \cdot e_1 dxdt$ .

Expressando  $\frac{\partial e_1}{\partial x}$  e  $\frac{\partial e_1}{\partial t}$  na base  $\{e_1, e_2, e_3\}$  e usando o fato que  $\frac{\partial e_1}{\partial x} \in e_1^\perp$  e  $\frac{\partial e_1}{\partial t} \in e_1^\perp$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_1}{\partial x} \wedge \frac{\partial e_1}{\partial t} \cdot e_1 dxdt &= \left( \frac{\partial e_1}{\partial x} \cdot e_2 \right) \left( \frac{\partial e_1}{\partial t} \cdot e_3 \right) dxdt - \left( \frac{\partial e_1}{\partial t} \cdot e_2 \right) \left( \frac{\partial e_1}{\partial x} \cdot e_3 \right) dxdt \\ &= w_{12} \wedge w_{13}. \end{aligned}$$

Logo,  $dS = dw_{32}$ , o que significa que  $dS$  é uma forma exata e, portanto,

$$\int_{C_1 \times C_2} dS = 0,$$

pois a integral de uma forma exata sobre uma superfície fechada é zero.

Assim, teríamos  $LK(C_1, C_2) = 0$ , o que nem sempre é verdade.

Existe, entretanto, uma escolha natural da base  $\{e_1, e_2, e_3\}$  em geral. Para cada  $(x, t) \in S^1 \times S^1$  considere o plano gerado por  $e_1(x, t)$  e  $\dot{\beta}$  com orientação  $\{e_1, \dot{\beta}\}$ . Seja  $e_2$  um vetor unitário neste plano e normal a  $e_1$  de modo que  $e_1, e_2$  coincida com a orientação dada. O 3º vetor da base é determinado por  $e_3 = e_1 \times e_2$ . Esta construção fica indeterminada um ponto  $(x, t) \in S^1 \times S^1$  tal que a reta tangente a  $\beta$  em  $t$  contenha  $\alpha(x)$ . Este ponto  $(x, t)$  será chamado *tangente de cruzamento de  $\alpha$  com respeito a  $\beta$* .

A totalidade das retas tangentes a  $\beta$  formam uma superfície desenvolvível chamada a tangente desenvolvível de  $\beta$ .

Assumimos que a curvatura de  $\beta$  nunca se anula. Isto garantirá que a superfície desenvolvível de  $\beta$  seja uma superfície imersa em todo lugar, exceto em  $\beta(S^1)$ , pois seja,  $X(s, t) = \beta(t) + s\dot{\beta}(t)$  a tangente desenvolvível de  $\beta$ .

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial s} &= \dot{\beta}(t) \\ &\text{e} \\ \frac{\partial X}{\partial t} &= \dot{\beta}(t) + s\ddot{\beta}(t) \end{aligned}$$

se  $k(t) = 0$ , teríamos que neste ponto  $\frac{\partial X}{\partial s}$  e  $\frac{\partial X}{\partial t}$  são  $LD$  e, portanto,  $X$  não seria uma superfície imersa.

Pelo Teorema da Transversalidade (Apêndice 6), podemos assumir que  $\alpha$  cruza a tangente desenvolvível de  $\beta$  transversalmente e nos pontos onde ocorre tal cruzamento são justamente os pontos de tangente de cruzamento. Segue então que as tangentes de cruzamento são em número finito, digamos,  $(x_1, t_1) \cdots, (x_M, t_M)$ . Envolvemos cada tangente de cruzamento por uma caixa de comprimento  $\varepsilon$ ,  $B_{i\varepsilon} = \{(x, t) \in S^1 \times S^1 / |x - x_i| \leq \varepsilon, |t - t_i| \leq \varepsilon\}$  com  $\varepsilon$  tomado tão pequeno de modo que  $B_{i\varepsilon}$  não contenha outro  $(x_i, t_i)$ .

Seja  $A_{i\varepsilon} = \partial(B_{i\varepsilon})$ . Em  $C_1 \times C_2 - UB_{i\varepsilon}$  o triedro  $\{e_1, e_2, e_3\}$  está bem definido, e podemos aplicar o Teorema de Stokes:

$$\int_{C_1 \times C_2 - UB_{i\varepsilon}} dw_{32} = \sum_{i=1}^M \int_{A_{i\varepsilon}} w_{32}.$$

Passando ao limite quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , temos:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_1 \times C_2 - UB_{i\varepsilon}} dw_{32} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_i \int_{A_{i\varepsilon}} w_{32} \\ \Rightarrow \int_{C_1 \times C_2} dS &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_i \int_{A_{i\varepsilon}} w_{32}. \end{aligned}$$

Se mostrarmos que as integrais do lado direito são múltiplas de  $2\pi$ , obteremos:

$$\int_{C_1 \times C_2} dS = (k_1 + \dots + k_M)2\pi \Rightarrow (k_1 + \dots + k_M) = \frac{1}{2\pi} \int_{C_1 \times C_2} dS.$$

Cada  $k_i, i = 1, \dots, M$  é chamado índice da tangente de cruzamento de  $\alpha$  com relação a  $\beta$ . Assim temos que

$$\int_{C_1 \times C_2} dS = \frac{1}{2}(k_1 + \dots + k_m),$$

ou seja, o número de enlaçamentos entre  $C_1$  e  $C_2$  é igual à metade da soma dos índices de tangente de cruzamento de  $\alpha$  com relação a  $\beta$  (esta é a 7ª definição de  $LK$ ).

Observação: como  $LK(C_1, C_2) = LK(C_2, C_1)$ , temos que a soma dos índices de tangente de cruzamento de  $\beta$  com respeito a  $\alpha$  é igual à soma dos índices de tangente de cruzamento de  $\alpha$  com respeito a  $\beta$ . Portanto, podemos apenas falar em índice de tangente de cruzamento.

Resta então mostrar que as integrais  $\int_{A_{i\varepsilon}} w_{32}$  são de fato, múltiplas de  $2\pi$ .

Para isto aplicaremos o processo de dilatação direta [Pohl 2] para cada  $(x_i, t_i) \in S^1 \times S^1$ , isto é, substituímos cada  $(x_i, t_i)$  pelo círculo de direções tangentes orientadas  $\Sigma_i$  a  $S^1 \times S^1$  em  $(x_i, t_i)$ . Por este processo obtém-se uma variedade  $D$  com fronteira consistindo de  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_m$  [Pohl 2].

Asseguramos que a base  $\{e_1, e_2, e_3\}$  definida acima se estende diferenciavelmente à fronteira desta nova variedade. Para provar isto, tomamos expansões em séries de potência de  $\beta$  e  $\alpha$  em vizinhanças de  $t_i$  e  $x_i$  respectivamente. Tomamos a origem de  $\mathbb{R}^3$  em  $\beta(t_i)$  e sejam  $s_1$  e  $s_2$  o comprimento de arco de  $\beta$  e  $\alpha$  respectivamente. Sejam

$$\begin{aligned}
e_{10} &= \pm e_1(x_i, t_i) (= \pm \dot{\beta}(t_i)) \\
e_{20} &= \text{o vetor normal em } \beta(t_i) \\
e_{30} &= \text{o vetor binormal em } \beta(t_i) \\
t_0 &= \dot{\alpha}(x_i).
\end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned}
\beta(s_1) &= s_1 e_{10} + \frac{1}{2} k s_1^2 e_{20} + R_3, \text{ onde } \lim_{s_1 \rightarrow 0} \frac{R_3}{s_1^3} = 0 \\
\alpha(s_2) &= \beta(0) + s_2 t_0 + R_2 \text{ onde } \lim_{s_2 \rightarrow 0} \frac{R_2}{s_2^2} = 0.
\end{aligned}$$

Como  $(x_i, t_i)$  é um ponto de tangente de cruzamento, temos:  $\alpha(x_i) = \lambda e_{10}$  para algum  $\lambda$ , e podemos escrever:  $t_0 = a_1 e_{10} + a_2 e_{20} + a_3 e_{30}$ . Já temos assumido que  $\alpha$  cruza a tangente desenvolvível de  $\beta$  transversalmente, e desde que o espaço tangente a esta superfície ao longo da reta tangente a  $\beta$  em  $t_i$  é gerado por  $e_{10}$  e  $e_{20}$ , temos que  $a_3 \neq 0$ . (Senão teríamos infinitos pontos de intersecção de  $\alpha$  com a tangente desenvolvível de  $\beta$ ).

Agora,  $e_1(s_1, s_2)$  é múltiplo de  $\alpha(s_2) - \beta(s_1)$  e  $e_3(s_1, s_2)$  múltiplo de  $[\alpha(s_2) - \beta(s_1)] \wedge \beta'(s_1)$ .

Assim,

$$\begin{aligned}
\alpha(s_2) - \beta(s_1) &= \lambda e_{10} + s_2(a_1 e_{10} + a_2 e_{20} + a_3 e_{30}) - (s_1 e_{10} - \frac{1}{2} k s_1^2 e_{20}) \\
&= e_{10}(\lambda + s_2 a_1 - s_1) + e_{20}(s_2 a_2 + \frac{1}{2} k s_1^2) + e_{30}(a_3 s_2) \\
\beta'(s_1) &= e_{10} + k s_1 e_{20} \\
&e
\end{aligned}$$

$$[\alpha(s_2) - \beta(s_1)] \wedge \beta'(s_1) = e_{20}(a_3 s_2) + e_{30}(k \lambda s_1 - s_2 a_2) + \text{termos de } 2^{\text{a}} \text{ ordem.}$$

Isto mostra que a direção  $e_3$  é dominada por termos de 1<sup>a</sup> ordem, de modo que ela se estende diferenciavelmente à fronteira  $\sum_i$

$e_1$  está bem definido e é constante em  $\sum_i$ , pois  $e_{10}$  é tangente à variedade  $D$  em  $(t_i, x_i)$  e  $\sum_i$  é o bordo de um círculo tangente à variedade em  $(t_i, x_i)$ . Logo, tomamos  $e_2 = e_3 \wedge e_1$ . Então:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{A_{i\epsilon}} w_{32} = \int_{\Sigma_i} w_{32}.$$

Mostremos que  $w_{32} = \pm d\varphi$ , onde  $\varphi = \angle(e_3, e_{30})$ .

Temos

$$\cos\varphi = \langle e_3, e_{30} \rangle \Rightarrow -\operatorname{sen}\varphi d\varphi = \frac{\partial e_3}{\partial x} \cdot e_{30} dx + \frac{\partial e_3}{\partial t} \cdot e_{30} dt.$$

Como  $e_1$  é constante em  $\Sigma_i$ , temos de  $e_1 \cdot e_3 = 0$  que

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_3}{\partial x} &\perp e_1 \\ e \\ \frac{\partial e_3}{\partial t} &\perp e_1. \end{aligned}$$

como  $\frac{\partial e_3}{\partial x}$  e  $\frac{\partial e_3}{\partial t}$  são perpendiculares a  $e_3$ , temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_3}{\partial x} &= \frac{\partial e_3}{\partial x} \cdot e_2 e_2 \\ e \\ \frac{\partial e_3}{\partial t} &= \frac{\partial e_3}{\partial t} \cdot e_2 e_2. \end{aligned}$$

Sabemos que  $w_{32} = \frac{\partial e_3}{\partial x} \cdot e_2 dx + \frac{\partial e_3}{\partial t} \cdot e_2 dt$ . Então, usando os fatos acima vamos mostrar que  $w_{32} = \pm d\varphi$

$$\begin{aligned} -\operatorname{sen}\varphi d\varphi &= \frac{\partial e_3}{\partial x} \cdot e_{30} dx + \frac{\partial e_3}{\partial t} \cdot e_{30} dt \\ &= \left( \frac{\partial e_3}{\partial x} \cdot e_2 e_2 \right) \cdot e_{30} dx + \left( \frac{\partial e_3}{\partial t} \cdot e_2 e_2 \right) e_{30} dt \\ &= \left( \frac{\partial e_3}{\partial x} \cdot e_2 \right) (e_2 \cdot e_{30}) dx + \left( \frac{\partial e_3}{\partial t} \cdot e_2 \right) (e_2 \cdot e_{30}) dt \\ &= \frac{\partial e_3}{\partial x} \cdot e_2 (\pm \operatorname{sen}\varphi) dx + \frac{\partial e_3}{\partial t} \cdot e_2 (\pm \operatorname{sen}\varphi) dt \end{aligned}$$

Logo,

$$d\varphi = \pm \left( \frac{\partial e_3}{\partial x} \cdot e_2 dx + \frac{\partial e_3}{\partial t} \cdot e_2 dt \right) = \pm w_{32}.$$

Portanto,

$$\int_{\Sigma_i} w_{32} = \int_{\Sigma_i} \pm d\varphi = \lambda 2\pi, \lambda \text{ inteiro.}$$

Como um exemplo, mostraremos que o número de enlaçamentos entre a curva  $(q, p)$  sobre o toro e o equador do toro,  $(a \cos t, a \sin t, 0)$ , é  $-p$  (quando a curva e a circunferência estão orientados no sentido anti-horário).

De fato, a superfície de Seifert da circunferência é o disco. Temos que contar quantas vezes a curva atravessa o disco e atribuir o valor  $+1$  se a curva atravessa o disco de “baixo para cima” e  $-1$  caso contrário.

Como sabemos, a curva  $(q, p)$  pode ser dada em coordenadas cilíndricas do seguinte modo:

$$\begin{aligned} (r \cos t, r \sin t, z) \text{ onde } r &= \left( a + \cos\left(\frac{p}{q}t\right) \right) \\ \text{e } z &= \operatorname{sen}\left(\frac{p}{q}t\right) \quad t \in [0, 2q\pi]. \end{aligned}$$

Então, o número de enlaçamentos entre a curva  $(q, p)$  e o equador do toro será igual ao número de vezes que a curva  $(q, p)$  tem coordenada  $z$  se anulando quando ela atravessa o plano equador de “cima para baixo” (ver Figura III.1).

Calculemos, então, os pontos em que  $\operatorname{sen}\left(\frac{p}{q}t\right)$  se anula

$$\operatorname{sen}\left(\frac{p}{q}t\right) = 0 \Rightarrow t = \frac{q}{p}k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Mas  $t \leq 2q\pi \Rightarrow k \leq 2p$ .

Logo, existem  $2p$  pontos onde  $\operatorname{sen}\left(\frac{p}{q}t\right) = 0$ . São eles

$$\left\{ 0, \frac{q\pi}{p}, \frac{q2\pi}{p}, \dots, \frac{q(2p-1)\pi}{p} \right\}.$$

Destes pontos, apenas  $p$  pontos furam a superfície de Seifert do equador do toro.

Nos pontos em que  $k$  é par a curva do toro é dada por

$$\left( (a+1)\cos\left(\frac{kq\pi}{p}\right), (a+1)\operatorname{sen}\left(\frac{kq\pi}{p}\right), 0 \right).$$

Nestes pontos

$$\left( (a+1)\cos\left(\frac{kq\pi}{p}\right) \right)^2 + \left( (a+1)\operatorname{sen}\left(\frac{kq\pi}{p}\right) \right)^2 = (a+1)^2 > a^2.$$

Logo, para  $k$  par a curva do toro não cruza o disco. Quando  $k$  for ímpar, a curva  $(q, p)$  é dada por:

$$\left( (a-1)\cos\left(\frac{kq}{p}\pi\right), (a-1)\operatorname{sen}\left(\frac{kq}{p}\pi\right), 0 \right)$$

e

$$\left( (a-1)\cos\left(\frac{kq}{p}\pi\right) \right)^2 + \left( (a-1)\operatorname{sen}\left(\frac{kq}{p}\pi\right) \right)^2 = a^2 - 2a + 1 < a^2 - 1 < a^2.$$

Logo, para  $k$  ímpar a curva do toro cruza o disco em  $p$  pontos.

Nestes pontos, a tangente à curva  $(q, p)$  tem coordenada  $z$  negativa, o que significa que a curva  $(q, p)$  cruza o disco de “*cima para baixo*”. Logo, neste caso, o número de enlaçamentos entre as duas curvas é  $-p$ .

### III.6 – NÚMERO DE AUTO-ENLAÇAMENTOS DE UMA CURVA FECHADA NO ESPAÇO

O conceito de número de enlaçamentos (linking number) entre duas curvas no espaço pode ser adaptado para se definir o número de auto-enlaçamentos (self linking number) de uma (única) curva no espaço [Pohl 1].

Quando definimos o número de enlaçamentos de duas curvas fechadas no espaço como a integral de Gauss, assumimos que as duas curvas não se interceptavam. No caso de uma única curva regular fechada  $C$  em  $\mathbb{R}^3$ , a integral de Gauss fica

$$\frac{1}{4\pi} \int_{C \times C} dS,$$

onde  $dS$  é o pull-back do elemento de área da esfera pela aplicação  $e_1 : C \times C \rightarrow S^2$  que associa a cada  $(x, y)$  o vetor unitário de  $x$  a  $y$ .

Porém, como veremos adiante, esta integral assume valores contínuos (números reais) de modo que não faz sentido definir o número de auto-enlaçamentos de uma curva fechada como a integral acima.

Seja, então,  $\alpha : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3, \alpha(S^1) = C$  uma curva regular simples fechada no espaço  $\mathbb{R}^3$  e cuja curvatura nunca se anula. Assumimos  $C$  orientada. O número de auto enlaçamentos  $SL$  de  $C$  é então definido como a metade da soma dos índices de tangente e cruzamento de  $\alpha$  com relação a ela mesma. (Análogo à 7ª definição de número de enlaçamentos de duas curvas no espaço no parágrafo III.5).

A partir desta definição é possível encontrar uma fórmula integral para o número de auto enlaçamentos de uma curva fechada no espaço ( $SL$ ). Seja  $S(S^1)$  o espaço de direções secantes abstratas do círculo  $S^1$ . Este espaço é definido como dilatação direta de  $S^1 \times S^1$  ao longo de  $\Delta$ , onde  $\Delta = \{(x, x); x \in S^1\}$ . [POHL 2].

$S(S^1)$  é uma variedade diferenciável com fronteira; seu interior consiste de  $S^1 \times S^1 - \Delta$  e sua fronteira é o fibrado unitário tangente de  $S^1$  [POHL 2].

Para cada  $(x, y) \in S^1 \times S^1 - \Delta$ , associamos o vetor unitário  $e_1(x, y)$  em  $\mathbb{R}^3$  no sentido de  $\alpha(x)$  a  $\alpha(y)$ . Para cada  $t \in \partial(S(S^1))$  associamos  $e_1(t) = t$  visto como vetor unitário de  $\mathbb{R}^3$ . Esta aplicação  $e_1 : S(S^1) \rightarrow \mathbb{R}^3$  é diferenciável [POHL 2]. Para cada  $(x, y) \in S^1 \times S^1 - \Delta$  tal que a tangente a  $\alpha$  em  $x$  não encontra  $\alpha(y)$  associamos  $e_2(x, y)$ , o vetor unitário no plano gerado por  $e_1(x, y)$  e  $\dot{\alpha}(x)$  e perpendicular a  $e_1(x, y)$ , isto é,

$$e_2 = \frac{\dot{\alpha}(x) - \dot{\alpha}(x) \cdot e_1 e_1}{|\dot{\alpha}(x) - \dot{\alpha}(x) \cdot e_1 e_1|}.$$

A função  $e_2$  também se estende diferenciavelmente à fronteira de  $S(S^1)$  [Pohl 2] e é a normal principal de  $\alpha$ ,  $e_2$  não está definida nos pontos de tangente de cruzamento. Seja  $e_3 = e_1 \wedge e_2$ . Tomamos a orientação canônica em  $S^1 \times S^1$ . Isto induz uma orientação em  $S(S^1)$ . Pelo Teorema da Transversalidade (Apêndice 5) podemos assumir que  $\alpha(S^1)$  cruza sua tangente desenvolvível transversalmente nos pontos de tangente de cruzamento. Isto garante que as tangentes de cruzamento são em número finito  $(x_1, y_1), \dots, (x_M, y_M)$ . Envolvermos cada  $(x_i, y_i)$  por uma caixa  $B_{i\epsilon}$  de comprimento  $\epsilon$  em  $S^1 \times S^1 - \Delta \subset S(S^1)$ .

Aplicando o Teorema de Stokes, temos:

$$\int_{S(S^1) - \cup B_{i\epsilon}} dw_{32} = \int_{\partial(S(S^1))} w_{32} + \sum_{i=1}^M \int_{\partial B_{i\epsilon}} w_{32}.$$

Passando ao limite quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , temos:

$$\int_{S^1 \times S^1} dS = \int_{\partial(S(S^1))} w_{32} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{i=1}^M \int_{\partial B_{i\epsilon}} w_{32}.$$

As integrais do lado direito sob o limite são os índices de tangente de cruzamento vezes  $2\pi$ .

Sejam  $k_i$ ,  $i = 1, \dots, M$  os índices de tangente de cruzamento.

Então:

$$(k_1 + \dots + k_m) \cdot 2\pi = 2 \cdot SL \cdot 2\pi = 4\pi SL.$$

Agora,  $\partial(S(S^1))$  consiste de 2 partes, os vetores unitários tangentes orientados “para cima”  $C(1)$  e os vetores unitários tangentes orientados “para baixo”  $C(2)$ . Seja  $T : S^1 \times S^1 - \Delta \rightarrow S^1 \times S^1 - \Delta$  definida por  $T(x, y) = (y, x)$ , esta aplicação se estende diferenciavelmente à aplicação  $T : S(S^1) \rightarrow S(S^1)$ . Mas  $T$  reverte orientação em  $S^1 \times S^1 - \Delta$ ; logo reverte orientação em  $\partial(S(S^1))(T|_{C(1)} : C(1) \rightarrow C(2))$ . É claro que  $\epsilon_1 T = -\epsilon_1$  e sobre a fronteira  $\epsilon_2 T = -\epsilon_2$ . Conseqüentemente  $\epsilon_3 T = \epsilon_3$ , de modo que  $T^*w_{32} = -w_{32}$  sobre a fronteira. Então:

$$T^*(S(S^1))^* \rightarrow (S(S^1))^*$$

Pelo teorema de mudança de variáveis (Apêndice 5), temos:

$$\int_{C(2)} dw_{32} = - \int_{C(1)} T^*w_{32} = - \int_{C(1)} -w_{32} = \int_{C(1)} w_{32}.$$

Logo,

$$\int_{C(1)} w_{32} = \int_{C(2)} w_{32}.$$

Mas em  $C(1)$  o triedro escolhido é justamente o triedro de Frenet

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= t \\ \epsilon_2 &= n \\ \epsilon_3 &= b \end{aligned}$$

Logo pelas fórmulas de Frenet (I.3), temos:

$$\begin{aligned} d\epsilon_1 &= k\epsilon_2 ds \\ d\epsilon_2 &= (-k\epsilon_1 + \tau\epsilon_3) ds \\ d\epsilon_3 &= -\tau\epsilon_2 ds, \end{aligned}$$

onde  $ds$  é o elemento de arco da curva.

Logo,  $w_{32} = de_3 \cdot e_2 = -\tau e_2 \cdot e_2 ds = -\tau ds$ .

Assim,

$$\int_{C(1)} w_{32} = - \int_C \tau ds \text{ e } \int_{C(2)} w_{32} = - \int_C \tau ds.$$

Usando estes fatos, temos:

$$\int_{C \times C} dS = -2 \int_C \tau ds + 4\pi SL.$$

Logo,

$$SL = \underbrace{\frac{1}{4\pi} \int_{C \times C} dS}_{\text{integral de Gauss para } C} + \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_C \tau ds}_{\text{Torção Total}} \quad (\text{III.6.1})$$

Logo, o número de auto-enlaçamentos de uma curva fechada  $C$  no espaço é igual à soma da integral de Gauss para  $C$  com  $\frac{1}{2\pi}$  Torção Total de  $C$  (2ª definição de  $SL$ ).

Pelas definições que temos de  $SL$  ainda não fica claro que, de fato,  $SL$  é um número inteiro. Vamos então dar outra interpretação para  $SL$ . Deformando-se a curva  $\alpha$  através da binormal em cada ponto a uma distância  $d$ , obtemos uma nova curva  $\alpha_d$ . Se  $d$  é suficientemente pequeno, isto pode ser feito sem interceptar a nova curva com a curva original e sem interceptar a curva com ela mesma. Esta operação move a curva fora de sua tangente desenvolvível (pois o plano tangente a esta superfície é gerado por  $\frac{\partial \alpha}{\partial x}, \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2}$ ). Logo, a soma dos índices de tangente de cruzamento de  $\alpha$  com respeito a  $\alpha_d$  é igual à soma dos índices de tangente de cruzamento de  $\alpha$  com respeito a mesma. Logo,  $SL = LK(\alpha, \alpha_d)$  (3ª definição de  $SL$ ) e, portanto, o número de auto-enlaçamentos de uma curva fechada no espaço é um número inteiro.

Olhando agora a fórmula integral para  $SL$ , temos 2 integrais cuja soma é um inteiro.

Como sabemos,  $\frac{1}{2\pi} \int_C \tau ds$  pode assumir qualquer valor real. Isto significa que  $\frac{1}{4\pi} \int_{C \times C} dS$  também pode assumir qualquer valor real, visto que a soma das 2 integrais dá um número inteiro.

O número de auto-enlaçamentos de uma curva fechada no espaço é independente da orientação escolhida, pois se mudarmos a orientação de  $\alpha, \alpha_d$  também terá orientação revertida e, portanto,

$$SL = LK(-\alpha, -\alpha_d) = -LK(\alpha, -\alpha_d) = -(-LK(\alpha, \alpha_d)) = LK(\alpha, \alpha_d).$$

Em vista das dificuldades de se calcular  $SL$ , pois muitas vezes a integral de Gauss é extremamente complicada, falaremos sobre um método mais prático de calcular  $SL$ . Antes, porém, definiremos isotopia não-degenerada de curvas. Uma deformação de curvas fechadas  $H : S^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $C^1$  é não-degenerada se para cada  $t$  fixo  $\mu_t(x) = H(x, t)$  é uma curva não-degenerada, ou seja, tem curvatura não nula em todo ponto.

Este método é aplicável a curvas que possuem projeção com curvatura não nula.

Introduzimos coordenadas  $(x, y, z)$  em  $\mathbb{R}^3$  e consideremos a transformação  $S_t$  de  $\mathbb{R}^3$  definida por  $S_t(x, y, z) = (x, y, tz)$ . Suponha  $C$  com curvatura não nula e que  $S_0(C)$  também tenha curvatura não nula. Como  $K(S_0(C)) \neq 0 \Rightarrow K(S_t(C)) \neq 0 \forall t$ , temos que  $S_t$  é uma isotopia não-degenerada de curvas regulares simples fechadas no espaço.

Quando  $t$  vai a zero, a torção total vai a zero, de modo que  $SL$  é igual ao valor da integral de Gauss sozinha. (Como veremos a seguir  $SL$  é invariante por isotopias não degeneradas e portanto, para  $t$  tão próximo de zero quanto se queira  $SL$  não varia e  $4\pi SL$  é igual ao limite da integral de Gauss).

Agora, como sabemos (parágrafo III.5) a integral de Gauss é igual à “*área orientada de  $S^2$  coberta pela aplicação  $e_1$* ”. Logo, avaliar  $SL = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \int_{S_t(C) \times S_t(C)} dS$  é o mesmo que determinar quantas vezes um ponto genérico da esfera é coberto pela aplicação  $e_1$  no limite, e qual o sinal do Jacobiano na imagem inversa deste ponto. Mas, de modo análogo ao que foi feito para o número de enlaçamentos de duas curvas fechadas no espaço (5ª definição de  $LK$  em III.5), isto é o número de pontos duplos de  $S_0(C)$  e estes pontos duplos são contados do seguinte modo: seja  $t_1$  a tangente positiva da “*parte de cima*” da projeção e  $t_2$  a tangente positiva da “*parte de baixo*” da projeção. Se  $t_1 t_2$  estão orientados no sentido anti-horário, contamos  $+1$ . Caso contrário, contamos  $-1$ . A soma destes números, sob todos os pontos duplos nos dá, então, o número de auto-enlaçamentos de uma curva no espaço.

Sabemos que a torção total de uma curva regular fechada no espaço pode assumir valores contínuos. De fato, se uma curva é não degeneradamente deformada numa curva

plana a torção total vai a zero. Porém, como  $SL$  é um número inteiro, a soma do lado direito de (III.6.1) é um número inteiro. Logo, temos que a integral de Gauss de uma curva regular fechada no espaço assume valores contínuos. Observamos que sob uma deformação não degenerada o triedro de Frenet varia continuamente, o que implica que a torção total varia continuamente. E sob uma isotopia a integral de Gauss varia continuamente. Como  $SL$  permanece inteiro a fórmula (III.6.1) implica que  $SL$  é invariante sob uma isotopia não degenerada. Consideremos alguns exemplos:

Qualquer curva plana convexa não tem tangentes de cruzamento, de modo que  $SL = 0$ .

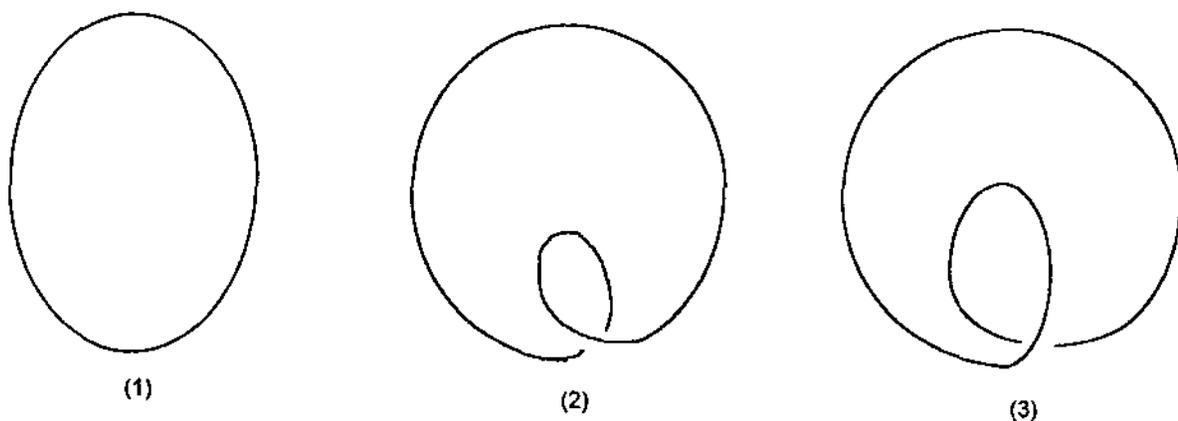


Figura III.17

A curva (2) tem  $SL = 1$  e a curva (3) tem  $SL = -1$ .

A curva (2) pode ser não degeneradamente deformada na curva (3) passando através dela mesma no ponto de aparente cruzamento. Como a torção total varia continuamente numa deformação não degenerada a Integral de Gauss muda por 2 nesta auto passagem.

Agora, se uma curva arbitrária é passada através dela mesma, a deformação pode ser mudada de modo que localmente a auto passagem tem a forma que consideramos anteriormente. Portanto, a Integral de Gauss muda por 2 numa arbitrária auto passagem de uma curva arbitrária. Logo, numa auto passagem de uma curva durante uma transformação não degenerada  $SL$  muda por 2.

A curva (3) pode ser isotopicamente deformada num círculo, “desenrolando a dobra”. Nesta operação a Integral de Gauss varia continuamente, mas a torção total muda por  $2\pi$ . O salto ocorre numa vizinhança da dobra, de modo que ele é local. Assim temos que sob uma isotopia na qual uma “dobra” é removida  $SL$  muda por 1.

**TEOREMA III.7** (Teorema de Feldman): Qualquer curva regular fechada no espaço com curvatura nunca nula pode ser não degeneradamente deformada numa das curvas (1) ou (2). Nenhuma delas pode ser não degeneradamente deformada na outra.

Como durante uma deformação não degenerada  $SL$  muda por 2 sua paridade é preservada. Segue que uma curva regular fechada pode ser não degeneradamente deformada numa curva (1) se e somente se  $SL$  é par; e pode ser não degeneradamente deformada numa curva (2) se e somente se  $SL$  é ímpar.

### – NÚMERO DE AUTO-ENLAÇAMENTOS DAS CURVAS $(q, p)$ SOBRE O TORO

O método mais simples de se calcular o número de auto-enlaçamentos de uma curva fechada no espaço é aquele que se baseia em contar o número de intersecções do seguinte modo: em cada ponto de cruzamento contamos +1 se  $\{t_1, t_2\}$  forma uma base positiva, onde  $t_1$  é a tangente da parte de cima da projeção e  $t_2$  é a tangente da parte de baixo, e contamos -1 caso contrário, visto que em geral a integral de Gauss é difícil de se calcular.

Como vimos em (III.1) as curvas  $(q, p)$  sobre o toro são dadas em coordenadas cilíndricas por:

$$\begin{aligned}x &= r \cos t \\y &= r \sin t \\z &= s \cos(nt)\end{aligned}$$

onde  $r = a + \cos(nt)$ ,  $a > 1$ ,  $n = p/q$  e  $t$  varia no intervalo de comprimento  $2q\pi$ .

Quando fixamos  $n > 1$  e variamos  $a$ , obtemos uma família de curvas isotópicas. Mas, como  $SL$  é invariante por isotopias não degenerada precisamos analisar para quais valores de  $a$  a curvatura se anula.

Temos pela Observação I.1 que a curvatura  $k$  de uma curva  $\alpha$  é nula se e somente se  $\dot{\alpha}$  e  $\ddot{\alpha}$  são linearmente dependentes. Expressando a curva  $(q, p)$  numa base móvel  $\{V_1, V_2, V_3\}$  onde

$$\begin{aligned}V_1 &= (\cos t, \sin t, 0) \\V_2 &= (-\sin t, \cos t, 0) \\V_3 &= (0, 0, 1)\end{aligned}$$

obtemos:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha} &= V_1(-rn^2 \sin(nt) - 2r'ncos(nt)) + \\&V_2((r'' - r)ncos(nt) + n^2r' \sin(nt)) + \\&V_3(2(r')^2 - r(r'' - r))\end{aligned}$$

$$k(t) = 0 \Leftrightarrow \dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha} = 0$$

$$\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -rn^2 \sin(nt) - 2r'ncos(nt) = 0 & (1) \\ (r'' - r)ncos(nt) + n^2r' \sin(nt) = 0 & (2) \\ 2(r')^2 - r(r'' - r) = 0 & (3) \end{cases}$$

De (1) temos  $an^2 \sin(nt) = n^2 \sin(nt) \cos(nt)$ .

Logo, se  $\sin(nt) \neq 0$   $a = \cos(nt)$ , impossível pois  $a > 1$ .

Assim, para satisfazer (1) devemos ter

$$\sin(nt) = 0, \text{ ou seja, } nt = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Usando este fato em (2), obtemos:

$$\begin{aligned}a &= -1 - n^2, \text{ se } k \text{ é par (o que é absurdo, pois } a > 1) \\&e \\a &= 1 + n^2, \text{ se } k \text{ é ímpar}\end{aligned}$$

Usando estas três condições ( $nt = k\pi, k$  ímpar e  $a = n^2 + 1$ ) vemos que (3) é satisfeito.

Logo,  $k(t) = 0$  se e somente se  $nt = k\pi$ , com  $k$  ímpar e  $a = n^2 + 1$ .

Assim, para  $a \neq n^2 + 1$  podemos calcular  $SL$ .

Para usarmos o método da projeção precisamos verificar onde a curvatura  $k_p$  da projeção da curva  $(q, p)$  não muda de sinal

$$k_p(t) = \frac{(2a^2 + 4n^2 + \cos(nt)(4a + 2an^2) + \cos^2(nt)(2 - 2n^2))\sqrt{2}}{(1 + 2a^2 + n^2 + 4a\cos(nt) + \cos(2nt) - n^2\cos(2nt))^{\frac{3}{2}}}$$

$$k_p(t) \geq 0 \Leftrightarrow 2a^2 + 4n^2 + \cos(nt)(4a + 2an^2) + \cos^2(nt)(2 - 2n^2) \geq 0.$$

Seja  $X = \cos(nt)$ .

Assim temos uma equação do 2º grau dada por:

$$X^2(2 - 2n^2) + X(4a + 2an^2) + 2a^2 + 4n^2 = 0.$$

O discriminante  $\Delta = 4n^2[a^2n^2 + 8a^2 + 8n^2 - 8]$ .

Como  $a > 1$ ,  $\Delta > 36n^4 > 0$ .

Assim temos duas raízes reais distintas:

$$X_1 = \frac{-4a - 2an^2 + 2n\sqrt{a^2n^2 + 8a^2 + 8n^2 - 8}}{4 - 4n^2}$$

e

$$X_2 = \frac{-4 - 2an^2 - 2n\sqrt{a^2n^2 + 8a^2 + 8n^2 - 8}}{4 - 4n^2}.$$

Como

$$n > 1, X_1 < X_2.$$

Como o coeficiente de  $X^2$  é  $(2 - 2n^2) < 0$ ,  $k_p(t) \geq 0$  para

$$X_1 \leq X \leq X_2$$

ou seja,

$$X_1 \leq \cos(nt) \leq X_2.$$

Assim,  $k_p(t) \geq 0 \forall t \in [0, 2\pi]$  se e somente se  $X_1 \leq -1$  e  $X_2 \geq 1$ , ou seja,  $k_p(t) \geq 0 \Leftrightarrow |X_1| \geq 1$  e  $|X_2| \geq 1$ .

Como

$$|X_2| > |X_1|, k_p(t) \geq 0 \forall t \Leftrightarrow |X_1| \geq 1.$$

Mas

$$|X_1| \geq 1 \Leftrightarrow \underbrace{|-4a - 2an^2 + 2n\sqrt{a^2n^2 + 8a^2 + 8n^2 - 8}|}_{(*)} \geq 4n^2 - 4.$$

Agora,  $|(*)| = (*)$ , pois:

$$2n\sqrt{a^2n^2 + 8a^2 + 8n^2 - 8} \geq 4a + 2an^2 \Leftrightarrow a^2 \geq -2n^2.$$

Então,

$$|X_1| \geq 1 \Leftrightarrow -4a - 2an^2 + 2n\sqrt{a^2n^2 + 8a^2 + 8n^2 - 8} \geq 4n^2 - 4.$$

De onde obtemos:

$$|X_1| \geq 1 \Leftrightarrow 16a^2n^2 + 16n^4 \geq 16n^2a + 16n^4a + 16a^2 - 32a + 16.$$

Resolvendo a equação do 2º grau em  $a$  dada por

$$a^2(n^2 + 1) + a(-n^2 - n^4 + 2) + n^4 - 1 = 0,$$

obtemos as raízes

$$a_1 = n^2 + 1$$

e

$$a_2 = 1.$$

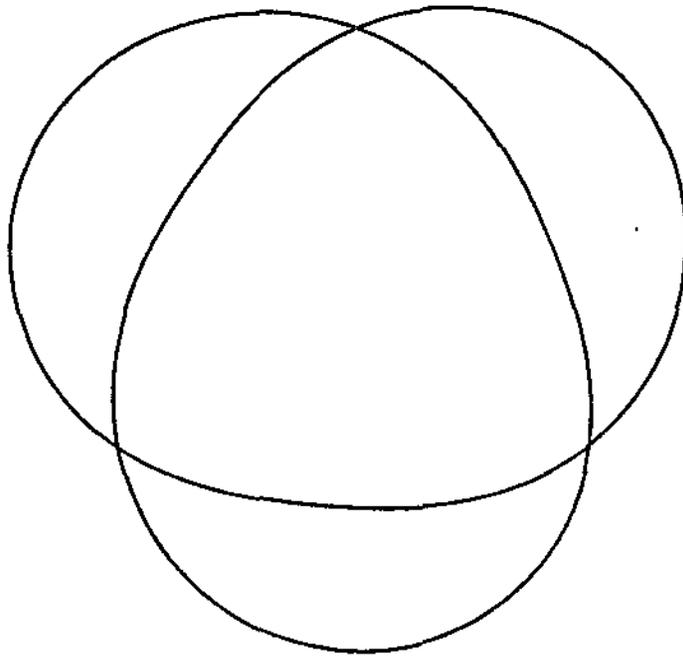
Logo,  $|X_1| \geq 1 \Leftrightarrow a \leq 1$  ou  $a \geq n^2 + 1$ .

Como  $a > 1$  sempre, temos  $|X_1| \geq 1$  se e somente  $a \geq n^2 + 1$ . Logo, para  $n > 1$  a curvatura da projeção da curva  $(q, p)$   $k_p(t) \geq 0 \Leftrightarrow a \geq n^2 + 1$ .

Mostraremos neste caso que  $SL = -p(q-1)$ . Seja  $\alpha_p$  a projeção da curva  $(q, p)$  no plano  $xy$ . Então  $\alpha_p = (rcost, rsent)$  onde  $r = (a + \cos nt)$ ,  $n = p/q$  e  $t \in [0, 2q\pi]$ .

Vamos fazer algumas considerações:

A curva  $\alpha_p$  é gerada pela rotação da região  $0 \leq \theta < \frac{2\pi}{p}$ , ou seja, rotação de seus trechos nesta região.



$$0 \leq \theta < \frac{2\pi}{p}$$

Curva (2,3)

Figura III.18

Na verdade, a parte da curva que fica nesta região é dada por exatamente  $q$  trechos, a saber:

$$T_1 \quad 0 \leq t < \frac{2\pi}{p}$$

$$T_2 \quad 2\pi \leq t < 2\pi + \frac{2\pi}{p}$$

⋮

$$T_q \quad 2\pi(q-1) \leq t < 2\pi(q-1) + \frac{2\pi}{p}$$

Assim, mostraremos que na região  $0 \leq \theta < \frac{2\pi}{p}$  existem  $q-1$  auto-intersecções de  $\alpha_p$  dadas por

$$\bigcup_{q \geq j > i \geq 1} T_i \cap T_j.$$

Analiseemos  $T_i \cap T_j$ ,  $j > i$ .

Se um ponto  $p$  da curva pertence a esta intersecção, devemos ter:

$$\begin{aligned}
 p &= \alpha_p(t_i) = \alpha_p(t_j) \\
 &\Updownarrow \\
 &((a + \cos(nt_i))(cost_i, sent_i) = (a + \cos(nt_j))(cost_j, sent_j) \\
 &\Updownarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases}
 t_j - t_i = g \cdot 2\pi, \text{ onde } g = (j - i) & (1) \\
 \text{e} \\
 nt_i = 2k\pi - nt_j & (2) \\
 k \text{ inteiro e } 0 \leq k \leq 2q - 1.
 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema formado pelas equações (1) e (2), obtemos:

$$t_j = (j - i)\pi + \frac{k\pi}{n}. \quad (3)$$

Usando a condição:  $2\pi(j - 1) \leq t_j < 2\pi(j - 1) + \frac{2\pi}{p}$ , obtemos:

$$k = \frac{p}{q}[j + i - 2] \quad (4)$$

ou

$$k = \frac{p}{q}[j + i - 2] + \frac{1}{q}. \quad (5)$$

Agora, usando (3), (4) e (5) mostraremos que os pontos  $t_j$  são necessariamente do tipo:

$$(a) \ t_j = 2\pi(j - 1)$$

ou

$$(b) \ t_j = 2\pi(j - 1) + \frac{\pi}{p}.$$

De fato, como  $t_j \in \left[2\pi(j - 1), 2\pi(j - 1) + \frac{2\pi}{p}\right)$ , podemos escrever  $t_j = 2\pi(j - 1) + A$ , onde  $A \in \left[0, \frac{2\pi}{p}\right)$ .

Utilizando (3) e (4), obtemos:

$$(j - i)\pi + (j + i - 2)\pi = 2\pi(j - 1) + A \Rightarrow A = \pi[2j - 2j - 2 + 2] = 0.$$

Utilizando (3) e (5), obtemos:

$$\begin{aligned}(j-i)\pi + (j+i-2)\pi + \frac{\pi}{p} &= 2\pi(j-1) + A \Rightarrow A = [2j + \frac{1}{p} - 2 + 2 - 2j]\pi \\ &\Rightarrow A = \frac{\pi}{p}.\end{aligned}$$

Logo,  $t_j$  é do tipo (a) ou (b).

Se  $t_j$  for do tipo (a),  $nt_j = 2\pi\frac{p}{q}(j-1) = \frac{2\pi}{q}(p(j-1))$ .

Para sabermos o número de auto-intersecções da curva  $\alpha_p$  na região  $0 \leq \theta < \frac{2\pi}{p}$ , precisamos saber para quantos pontos  $nt_j \cos(nt_j)$  coincide.

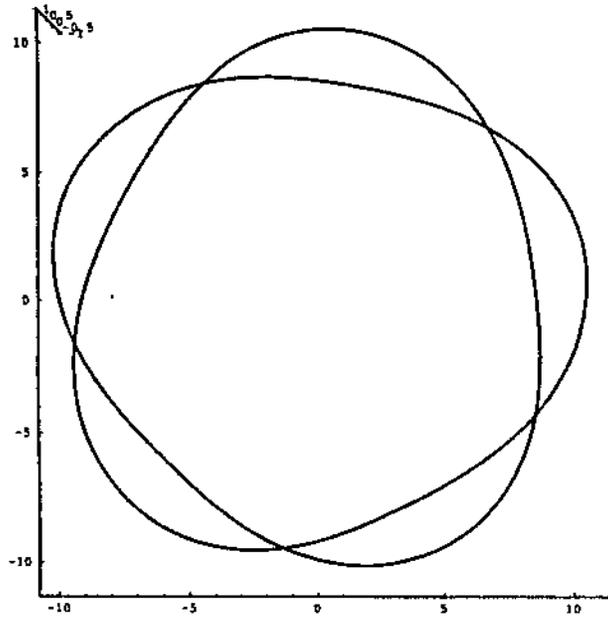
Como  $j \in [2, q], j-1 \in [1, q-1]$ . Logo, temos  $q-1$  valores para  $nt_j$ .

Como cosseno coincide em ângulos cuja média dá  $\pi$ , temos que  $\cos(nt_j)$  coincide em  $\left[\frac{q-1}{2}\right]$  pontos, onde  $\left[\frac{q-1}{2}\right]$  é o maior inteiro que é menor ou igual a  $\frac{q-1}{2}$ .

O mesmo argumento servirá para provarmos que  $\cos(nt_j)$  coincide em  $\left[\frac{q-1}{2}\right]$  pontos quando  $nt_j = \frac{2\pi}{q}(p(j-1)) + \frac{\pi}{q}$ .

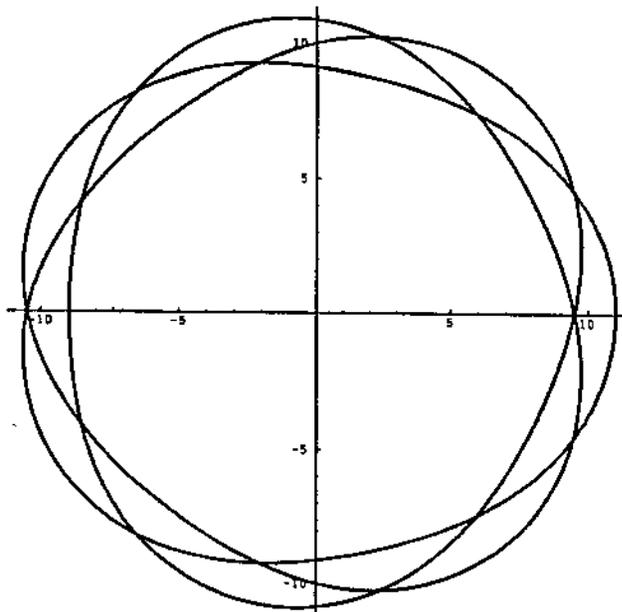
Logo, temos em  $0 \leq \theta < \frac{2\pi}{p} \left[\frac{q-1}{2} + \frac{q-1}{2}\right] = q-1$  auto-intersecções da curva  $\alpha_p$ . Assim, a curva  $\alpha_p$  possui  $p(q-1)$  auto-intersecções.

Logo, neste caso,  $(a > n^2 + 1), SL = -p(q-1)$ .



Curva (2,5)

Figura III.19



Curva (3,7)

Figura III.20

Quando atravessamos a região  $a = n^2 + 1$ ,  $SL$  pode mudar, visto que neste caso  $k(t) = 0$ .

Como sabemos

$$SL = \frac{1}{4\pi} \int_{C \times C} dS + \frac{1}{2\pi} \int_C \tau ds.$$

A integral de Gauss varia continuamente quando variamos  $a$ , pois temos isotopia de curvas. Porém, a torção total pode dar um salto quando atravessamos a região  $a = n^2 + 1$

$$\tau(t) = \frac{\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha} \cdot \ddot{\alpha}}{|\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}|^2}.$$

Para a curva  $(q, p)$  e  $a = n^2 + 1$  sabemos que  $\tau(t)$  tem denominador nulo para  $nt = k\pi$ .

Porém, como veremos, esta é uma singularidade removível, visto que para  $a = n^2 + 1$ ,

$$\tau(t) = \frac{n(-n^6 - 3n^4 - 2n^2 + \cos(nt)(4n^4 + 7n^2 + 1) + \cos^2(nt)(-n^2 + 1))}{2n^8 + 11n^6 + 19n^4 + 8n^2 + 1 + \cos(nt) \cdot B + \cos^2(nt) \cdot C + \cos^3(nt) \cdot E}$$

onde

$$B = 3n^6 + 11n^4 + 14n^2 + 3; \quad C = 5n^2 + 3eE = 1 - n^2$$

O denominador  $D$  é não nulo pois sendo  $A$  o seu termo constante, temos:

$$A - B + E \leq D \leq A + B + C - E \quad (\text{pois } n^2 > 1).$$

Logo,

$$D \geq 2n^8 + 8n^6 + 8n^4 - 7n^2 - 1.$$

Como  $n > 1$ ,  $n^6 > n^2$ .

Logo,  $D \geq 2n^8 + n^6 + 8n^4 - 1 > 10 > 0$ .

Assim, a singularidade em  $t = n\pi$  é removível.

Portanto, a família de funções  $\int_C \tau(s) ds$  é uma família de funções contínuas em  $a$ , o que significa que a torção total varia continuamente com  $a$ .

Como  $SL$  é um número inteiro, e as 2 integrais (Integral de Gauss e Torção Total) variam continuamente com  $a$ , temos que  $SL$  não muda quando atravessamos a região  $a = n^2 + 1$ .

Logo, para as curvas  $(q, p)$  sobre o toro com  $n > 1$ ,  $SL = -p(q - 1)$ .

# CAPÍTULO IV

## DNA E GEOMETRIA DIFERENCIAL

### INTRODUÇÃO

Depois de termos estudado as propriedades globais de curvas no espaço, vamos ver como estas propriedades se aplicam à biologia do DNA. Falaremos sobre a Fórmula de White [Pohl 3] e veremos que ela descreve certos fenômenos do DNA.

A molécula de DNA é um polímero de cerca de 2 milionésimos de um centímetro de largura e comprimento variando de 3 milésimos de um centímetro a vários centímetros. Consiste, usualmente, de duas cadeias, cada uma vinculada covalentemente à outra, correndo lateralmente e enrolando uma ao redor da outra. Cada cadeia tem grupos laterais covalentemente ligados em intervalos regulares. Desta forma, o DNA pode ser pensado como uma longa escada enrolada (dupla hélice). Cada degrau consiste de um par complementar, de modo que se cada degrau é cortado ao meio, uma metade da escada determina a outra. A sequência de grupos em cada lado pode ser pensada como uma longa palavra, e estas palavras constituem a informação genética. Globalmente, a escada “*enrola*” e “*entorta*” e na maioria dos casos forma um círculo topológico (além disto a escada não forma uma “*faixa de Möbius*”). Também, o eixo central da escada se “*super enrola*”.

Sabe-se que uma grande proporção dos conhecidos DNA's exibem alguma forma superespiral em pelo menos um estágio de seu ciclo de vida. Portanto, uma apreciação deste fato e suas consequências é essencial para uma completa compreensão da biologia do DNA. Parece que um dos mais importantes papéis da estrutura superespiral é compatificar moléculas de DNA. Por exemplo, o cromossomo da bactéria E. Coli é um DNA circular de um milímetro de comprimento, enquanto a bactéria por si só tem um milésimo de um milímetro de diâmetro. Segue que a molécula de DNA tem que ser fortemente

compactificada.

Virtualmente, toda propriedade física, química e biológica do DNA – sua transcrição, comportamento hidrodinâmico, energético, enzimologia e assim por diante – são afetados pela circularidade fechada e deformações associadas com a superespiral. Neste contexto entrará a Fórmula de White que estudaremos a seguir.

## – A FÓRMULA DE WHITE

Seja  $C = \mu([a, b])$  uma curva regular fechada simples no espaço e  $v$  um campo de vetores unitários em  $C$  normal a  $C$ . Pensamos  $v$  como uma família a um parâmetro de segmentos de reta orientados, o extremo de cada um fica em  $C$ , de modo que  $v$  forma uma faixa. Supomos que a unidade de comprimento seja escolhida pequena de tal modo que cada segmento de reta encontra a curva somente no seu ponto inicial, e de modo que a faixa seja mergulhada. A curva de pontos extremos do campo vetorial,  $C_v$ , está em correspondência um a um com  $C$ , de modo que uma orientação em  $C$  induz uma orientação em  $C_v$ . Seja  $LK$  o número de enlaçamentos entre  $C$  e  $C_v$ .

Suponhamos  $C$  orientada, e seja  $t$  o vetor tangente unitário. Seja  $v^\perp$  um campo vetorial unitário definido ao longo de  $C$  de modo que  $vv^\perp t$  forma uma base ortonormal positivamente orientada em cada ponto. Seja

$$Tw = \frac{1}{2\pi} \int_C v^\perp \cdot dv$$

$Tw$  é chamado de *enrolamento total* (*total twist*) de  $v$ .

Vamos analisar o significado desta fórmula. No caso em que o campo  $v$  é o campo que associa a cada ponto da curva o vetor normal principal, temos: (estamos supondo a curva parametrizada pelo comprimento de arco)

$$\begin{aligned}v &= n \\t &= t \\v^\perp &= -v \times t = -n \times t = b,\end{aligned}$$

que é o vetor binormal de  $C$ .

Logo,

$$Tw = \frac{1}{2\pi} \int_C b \cdot dn = \frac{1}{2\pi} \int_a^b b \frac{dn}{ds} ds.$$

Agora, pelas fórmulas de Frenet,

$$\frac{dn}{ds} = -kt + \tau b.$$

Logo,

$$Tw = \frac{1}{2\pi} \int_a^b b \cdot (-kt + \tau b) ds = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \tau ds$$

que é a torção total de  $C$ .

Assim, no caso em que o campo  $v$  é o campo que associa a cada ponto da curva o vetor normal principal, o enrolamento total coincide com a torção total da curva.

Seja agora  $Wr = \frac{1}{4\pi} \int_{C \times C} dS$ , onde  $dS$  é o *pull back* do elemento de área do  $S^2$  pela aplicação  $e_1(x, y) = \frac{y-x}{|y-x|}$ ,  $(x, y) \in C \times C$ , ou seja  $Wr$  é a Integral de Gauss para a curva  $C$ .  $Wr$  será denominado o número de contorção (*writhing number*) de  $C$ .

A fórmula de White assegura que:

$$LK = Tw + Wr.$$

Vamos considerar um exemplo. Seja  $C$  o equador do toro  $(a \cos t, a \sin t, 0)$ . Vamos tomar o campo  $v$  como sendo  $v(t) = \cos\left(\frac{p}{q}t\right)(\cos t, \sin t, 0) + \sin\left(\frac{p}{q}t\right)(0, 0, 1) = \left(\cos\left(\frac{p}{q}t\right)\cos t, \cos\left(\frac{p}{q}t\right)\sin t, \sin\left(\frac{p}{q}t\right)\right)$ .  $v$  é um campo de vetores normais em  $C$ .

$C_v$  é então dado por  $\left( acost + \cos\left(\frac{p}{q}t\right)cost, asent + \cos\left(\frac{p}{q}t\right)sent, sen\left(\frac{p}{q}t\right) \right) = \left( \left(a + \cos\left(\frac{p}{q}t\right)\right)cost, \left(a + \cos\left(\frac{p}{q}t\right)\right)sent, sen\left(\frac{p}{q}t\right) \right)$ , ou seja,  $C_v$  é a curva  $(q, p)$  sobre o toro.

Vamos calcular  $Tw$  do campo  $v$ . Como sabemos (parágrafo III.5), o número de enlaçamentos entre a curva  $(q, p)$  do toro e o equador é  $-p$ . Como  $C$  é uma curva plana, temos que  $Wr = 0$ . Logo, pela fórmula de White,  $Tw = -p$ .

Vemos neste exemplo que o enrolamento total de  $v$  mede quantas vezes o campo  $v$  se enrola na curva  $C$ . No caso em que  $C$  é uma curva plana o enrolamento total é igual ao número de rotações que o campo  $v$  faz ao redor de  $C$ .

É importante ressaltarmos que o número de enlaçamentos e o enrolamento total são mais intuitivos para nós, enquanto que na situação biológica  $Wr$  pode ser medido diretamente; mas  $Lk$  e  $Tw$  não o podem.

Consideremos o caso em que o campo  $v$  é o campo de vetores binormais da curva  $C$  (estamos assumindo para isto que a curvatura  $k$  de  $C$  é nunca nula). Neste caso, o enrolamento total é igual à torção total da curva  $C$ , pois:

$$\begin{aligned} v &= b \\ t &= t \\ v^\perp &= -v \times t = -b \times t = -n \\ \int_C v^\perp \cdot dv &= \int_C -n \cdot db = \int_a^b -n \cdot \frac{db}{ds} ds = \int_a^b -n \cdot (-\tau n) ds = \int_a^b \tau ds. \end{aligned}$$

Pela fórmula de White, temos:

$$\underbrace{LK(C, C_b)}_{\parallel_{SL}} = \frac{1}{2\pi} \int_C \tau ds + \frac{1}{4\pi} \int_{C \times C} dS.$$

Assim o número de auto-enlaçamentos,  $SL$ , pode ser obtido da fórmula de White quando tomamos este campo de vetores particular.

O exemplo a seguir ([Pohl 2]) ilustra fisicamente o balanceamento expresso pela fórmula de White. Tome um pedaço de barbante e marque um lado dele com um lápis colorido. Agora, tomando um extremo em cada dedo, enrolé-o. Imaginamos os extremos do barbante ligados por uma curva plana. Este arco imaginário, junto com o eixo central do

barbante, formam a curva  $C$ . O lado marcado do barbante, junto com um prolongamento paralelo ao longo do arco imaginário, formam o campo  $v$ .  $C$  é uma curva plana, de modo que  $Wr = 0$ . O número de enlaçamentos entre  $C$  e  $C_v$  é alto e é igual ao enrolamento total, pois sentimos o barbante enrolando em nossos dedos. Ao aproximarmos as mãos, o barbante assume uma forma de superespiral e sentimos nossos dedos relaxarem.  $Tw$  é agora pequeno, mas  $Wr$  é alto pois vemos vários cruzamentos; o crescimento em  $Wr$  é compensado pelo decréscimo em  $Tw$ , visto que o número de enlaçamento não muda.

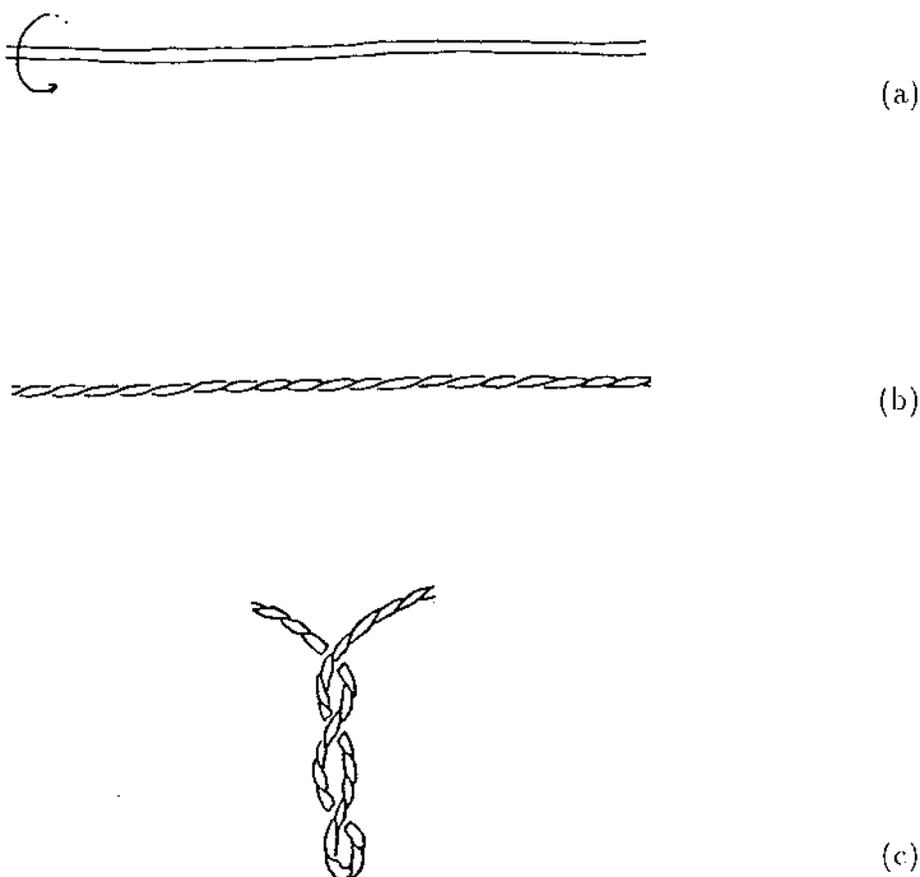


Figura IV.1

Com um fio de telefone também podemos ver a relação entre o número de contorção e enrolamento total.



Figura IV.2

No 1º caso em que o fio está “relaxado” seu enrolamento é pequeno, o número de contorção é grande e o eixo do fio é uma hélice no  $\mathbb{R}^3$ . Quando o fio é esticado seu eixo é próximo de uma reta e o número de contorção é pequeno e o enrolamento total é grande.

#### Demonstração da Fórmula de White:

Seja  $M$  a faixa de vetores de  $v$ .  $M$  é uma variedade com fronteira, a qual possui duas componentes  $C$  e  $C_v$ . Seja  $\Delta \subset M \times M$  a diagonal. Dilatamos  $\Delta$  em  $M \times M$ , mas de um modo não padrão substituindo  $\Delta$  pelo fibrado de direções normais orientadas a  $\Delta$  em  $M \times M$  [Pohl 2]. Seja  $S(C, M)$  o fecho de  $C \times M - \Delta$  na dilatação em  $M \times M$ .  $S(C, M)$  é também uma variedade com fronteira consistindo essencialmente de  $C \times C, C \times C_v$  e vetores unitários tangentes a  $M$  baseados nos pontos de  $C$  e apontando para  $M$ , que chamaremos  $T(M, C)$ . Isto quer dizer que  $T(M, C)$  é o fibrado de semi-círculos contidos no plano gerado por  $t$  e  $v$  (respectivamente, a tangente unitária e a normal principal de  $C$ ) para cada  $s \in [a, b]$  e ficando no semi-plano que contém  $v$ .

Para cada ponto  $x$  de  $C$  temos um semi-círculo  $T(M, C) = \bigcup_x M_x$ .

Para cada  $(x, y) \in C \times M - \Delta$ , seja

$$e_1(x, y) = \frac{y - x}{|y - x|}$$

uma extensão da aplicação definida anteriormente em  $C \times C$ . Também, esta aplicação se estende a  $T(M, C)$  [Pohl 2]. Desta forma,  $e_1 : S(C, M) \rightarrow S^2$  leva uma variedade

orientável tridimensional em  $S^2$ . Seja  $dS$  o *pull back* do elemento de área de  $S^2$  pela aplicação  $e_1$ . Usando o Teorema de Stokes, temos:

$$\int_{C \times C} dS + \int_{C \times C_v} dS + \int_{T(M,C)} dS = \int_{S(C,M)} d(dS) = 0.$$

Nesta fórmula, as orientações nos domínios de integração são aquelas induzidas por  $C \times M$  ( $C$  e  $C_v$  têm, portanto, orientações opostas).

Logo,

$$\frac{1}{4\pi} \int_{C \times C} dS + \frac{1}{4\pi} \int_{C \times C_v} dS + \frac{1}{4\pi} \int_{T(M,C)} dS = 0.$$

Mas, como  $C$  e  $C_v$  têm orientação opostas,

$$\frac{1}{4\pi} \int_{C \times C_v} dS = -LK(C, C_v).$$

Temos, então:

$$LK(C, C_v) = Wr + \frac{1}{4\pi} \int_{T(M,C)} dS.$$

Resta agora avaliar a integral sobre  $T(M, C)$ . Seja então  $e_1^\perp$  um vetor unitário tal que  $e_1^\perp$  é perpendicular a  $e_1$ , fica no plano gerado por  $e_1$  e pelo vetor tangente  $t$ , e tal que a orientação  $e_1 e_1^\perp$  coincide com a orientação  $vt$  dos planos tangentes a  $M$  ao longo de  $C$ .

Como, para cada ponto de  $C$  temos um semi-círculo gerado por  $v$  e  $t$  no semi-plano que contém  $v$ , a aplicação  $e_1$  restrita a  $T(M, C)$  fica determinada por um ponto da curva e por uma direção  $\phi$ . Logo, como  $e_1$  é unitário, podemos escrever:

$$e_1 = \cos\phi v + \text{sen}\phi t \quad \text{onde} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, \quad \text{pois em } T(M, C) \cos\phi \geq 0.$$

Assim,  $e_1^\perp = -\text{sen}\phi v + \cos\phi t$

$$de_1 = -\text{sen}\phi d\phi v + \cos\phi d\phi t + \cos\phi dv + \text{sen}\phi dt.$$

Portanto,

$$de_1 \cdot e_1^\perp = d\phi + dv \cdot t \tag{1}$$

e

$$de_1 \cdot v^\perp = \cos\phi dv \cdot v^\perp + \text{sen}\phi dt \cdot v^\perp \tag{2}$$

Como  $e_1$  depende de dois parâmetros (o parâmetro  $s$  da curva e o ângulo  $\phi$ ),

$$\begin{aligned} dS &= \left| \frac{\partial e_1}{\partial s} \wedge \frac{\partial e_1}{\partial \phi} \right| d\phi ds \\ \frac{\partial e_1}{\partial s} &= \cos\phi \frac{dv}{ds} + \operatorname{sen}\phi \frac{dt}{ds} \\ &\quad \text{e} \\ \frac{\partial e_1}{\partial \phi} &= -\operatorname{sen}\phi v + \cos\phi t. \end{aligned}$$

Expressando  $\frac{\partial e_1}{\partial s}$  e  $\frac{\partial e_1}{\partial \phi}$  na base  $\{v, v^\perp, t\}$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_1}{\partial s} &= \left( \frac{\partial t}{\partial s} \cdot v \operatorname{sen}\phi, \frac{\partial v}{\partial s} \cdot v^\perp \cos\phi + \frac{\partial t}{\partial s} \cdot v^\perp \operatorname{sen}\phi, \frac{\partial v}{\partial s} \cdot t \cos\phi \right) \\ \frac{\partial e_1}{\partial \phi} &= (-\operatorname{sen}\phi, 0, \cos\phi). \end{aligned}$$

Usando também o fato que  $t \cdot v = 0 \Rightarrow \frac{dt}{ds} \cdot v = -\frac{dv}{ds} \cdot t$ , obtemos:

$$dS = \left( \frac{dv}{ds} \cdot v^\perp \cos\phi + \frac{dt}{ds} \cdot v^\perp \operatorname{sen}\phi \right) d\phi ds. \quad (3)$$

Por (1) e (2) também temos que:

$$(de_1 \cdot e_1^\perp) \wedge (de_1 \cdot v^\perp) = \frac{dv}{ds} \cdot v^\perp \cos\phi d\phi ds + \frac{\partial t}{\partial s} \cdot v^\perp \operatorname{sen}\phi d\phi ds. \quad (4)$$

Logo, (3) e (4)  $\Rightarrow dS = (de_1 \cdot e_1^\perp) \wedge (de_1 \cdot v^\perp)$ .

Portanto, em  $T(M, C)$  temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_{T(M, C)} dS &= \frac{1}{4\pi} \int_C \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi d\phi (dv \cdot v^\perp) + \operatorname{sen}\phi d\phi (dt \cdot v^\perp) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_C dv \cdot v^\perp = Tw. \end{aligned}$$

Assim fica provada a fórmula de White  $LK = Tw + Wr$ .

É importante observar que só depois de descoberta a Fórmula de White foi possível notar certos fenômenos do DNA por ela descritos. Alguns biólogos procederam intuitivamente e obtiveram resultados quantitativos que estavam de acordo com esta fórmula,

porém fizeram isto sem saber o significado exato dos conceitos envolvidos. Depois que estes conceitos foram estudados matematicamente é que foi reobtida a Fórmula de White neste contexto. Logo, a descoberta desta fórmula permitiu aos biólogos uma maior segurança no estudo e compreensão de fenômenos que verificavam apenas experimentalmente.

Em 1953 Watson e Crick propuseram sua teoria sobre a estrutura e replicação do DNA. Muitos dos elementos desta teoria foram rapidamente aceitos e confirmados. Mas uma dificuldade permaneceu. Eles propuseram que os dois ramos da molécula se enrolam (hélice dupla) e que eles se separam quando a molécula é replicada. Além disso descobriu-se mais tarde que as moléculas de DNA são em geral muito longas e circulares. Se o cromossomo da bactéria *E. Coli* é uma hélice dupla, seus dois ramos têm um número de enlaçamentos por volta de 300.000, como então, poderiam se separar estes ramos?

A solução biológica possível para este problema é a existência de determinadas enzimas que manipulam o DNA topologicamente N.R. Cazzarelli e P.O. Brown publicaram experimentos que mostram que certa enzima da bactéria *E. Coli* muda o número de enlaçamentos por múltiplos de 2. Pela fórmula de White eles interpretaram este resultado mostrando que esta enzima junta os dois ramos de uma molécula fazendo um rompimento num ramo, passando os dois extremos ao redor do outro ramo e rejuntando. Experimentos mais recentes também têm confirmado esta teoria [Pohl 3] e [Summers].

Nos estudos bioquímicos de moléculas de DNA *in vitro* a superespiral pode ser medida diretamente. Se eletrodos são jogados numa solução de DNA, as moléculas de DNA, sendo negativamente carregadas, se movem rumo ao eletrodo positivo. Existe um gel adequado de modo que quando misturado nesta solução a velocidade de movimento pode ser ajustada de tal forma que  $Wr$  possa ser medido com certa precisão.

# APÊNDICE

Com o objetivo de facilitar a leitura e fixar uma notação, colocamos a seguir, alguns dos resultados de caráter geral (a nível de variedades) utilizados no decorrer deste trabalho, mencionando referências.

## 1 – ESPAÇOS DE RECOBRIMENTO

Sejam  $B$  e  $\tilde{B}$  subconjuntos de  $\mathbb{R}^3$ . Dizemos que  $\pi : \tilde{B} \rightarrow B$  é uma aplicação de recobrimento se

1.  $\pi$  é contínua e  $\pi(\tilde{B}) = B$ .
2. Cada ponto  $p \in B$  tem vizinhança  $U$  em  $B$  tal que

$$\pi^{-1}(U) = \cup_{\alpha} V_{\alpha}$$

onde os  $V_{\alpha}$ 's são conjuntos abertos dois a dois disjuntos tal que a restrição  $\pi$  a  $V_{\alpha}$  é um homeomorfismo da  $V_{\alpha}$  em  $U$ .

$\tilde{B}$  é então chamado um espaço de recobrimento de  $B$  [Carmo].

**PROPOSIÇÃO:** Seja  $\pi : \tilde{B} \rightarrow B$  uma aplicação de recobrimento,  $\alpha : [0, \ell] \rightarrow B$  um arco em  $B$ , e  $\tilde{p}_0 \in \tilde{B}$  um ponto de  $\tilde{B}$  tal que  $\pi(\tilde{p}_0) = \alpha(0) = p_0$ . Então existe um único levantamento  $\tilde{\alpha} : [0, \ell] \rightarrow \tilde{B}$  de  $\alpha$  com origem em  $\tilde{p}_0$ , isto é, com  $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{p}_0$ .

## 2 – GRAU DE UMA APLICAÇÃO

Sejam  $M, N$  variedades diferenciáveis orientadas sem bordo, com  $\dim M = \dim N = n$ , onde  $M$  é compacta e  $N$  é convexa.

Seja  $f : M \rightarrow N$  diferenciável e  $x$  um ponto regular de  $f$ . Definimos o sinal de  $df_x$  como sendo  $+1$  se  $df_x$  preserva orientação e  $-1$  se  $df_x$  reverte orientação.

Dado um ponto regular  $y$  de  $f$ , como  $M$  é compacta temos que o conjunto  $\{x \in M : f(x) = y\}$  é finito. Assim definimos o grau de  $f$  ( $\deg f$ ) como:

$$\deg f = \deg(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sinal } df_x,$$

visto que este inteiro independe do valor regular escolhido [Milnor 2].

**PROPOSIÇÃO:** O grau de uma aplicação diferenciável é invariante por homotopias [MILNOR 2].

### 3 – PULL-BACK

Sejam  $X$  e  $Y$  variedades diferenciáveis. Se  $f : X \rightarrow Y$  é uma aplicação diferenciável e  $w$  uma  $p$ -forma em  $Y$ , definimos uma  $p$ -forma  $f^*w$  em  $X$  do seguinte modo:

Se  $f(x) = y$ , então  $f$  induz uma aplicação derivada  $df_x : T_x(X) \rightarrow T_y(Y)$ . Como  $w(y)$  é um  $p$ -tensor ordenado em  $T_y(Y)$ , nós podemos trazê-lo para  $T_x(X)$  usando a transposta  $(df_x)^* : (T_y(Y))^* \rightarrow (T_x(X))^*$ , que é estendida para álgebras exteriores  $(df_x)^* : \Lambda^p(T_y(Y)) \rightarrow \Lambda^p(T_x(X))$ , onde  $\Lambda^p(T_y(Y))$  e  $\Lambda^p(T_x(X))$  são conjuntos de  $p$ -tensores alternados em  $T_y(Y)$  e  $T_x(X)$ , respectivamente.

Definimos

$$f^*w(x) = (df_x)^*w[f(x)].$$

Então,  $f^*w(x)$  é um  $p$ -tensor alternado em  $T_x(X)$ , de modo que  $f^*w$  é uma  $p$ -forma em  $X$ , chamada o pull-back de  $w$  por  $f$  [Guillemin].

### 4 – FÓRMULA DO GRAU

Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação diferenciável arbitrária de duas variedades orientadas, compactas de dimensão  $k$  e  $w$  uma  $k$ -forma em  $Y$ .

Então:

$$\int_X f^*w = \deg(f) \int_Y w \quad [\text{Guillemin}]$$

### 5 – TEOREMA DE MUDANÇA DE VARIÁVEIS EM $\mathbb{R}^k$

Seja  $f : U \rightarrow V$  um difeomorfismo de conjuntos abertos em  $\mathbb{R}^k$ , e  $w$  uma  $k$ -forma diferenciável em  $U$ . Então:

$$\int_U w = \int_V f^* w.$$

Se  $f$  reverte orientação, então:

$$\int_U w = - \int_V f^* w \quad [\text{Guillemin}]$$

## 6 – TRANSVERSALIDADE

Sejam  $C \subset N$  uma subvariedade de classe  $C^k$  e  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação  $C^k$ , onde  $k, r \geq 1$ . Dizemos que  $f$  é transversal a  $S$  em um ponto  $p \in M$  se  $f(p) \notin S$  em  $df_p(TM_p) + TS_{f(p)} = TN_{f(p)}$ , isto é, se a imagem de  $TM_p$  por  $df_p$  contém um subespaço complementar de  $TS_{f(p)}$  em  $TN_{f(p)}$ .

Dizemos que  $f$  é transversal a  $S$ , se o é em cada ponto  $p \in M$  [Palis].

### TEOREMA DA TRANSVERSALIDADE

Suponhamos  $M$  compacta e  $S \subset N$  uma subvariedade fechada. O conjunto das aplicações  $f \in C^k(M, N)$  transversais a  $S$  é aberto e denso na topologia de Whitney  $C^k$  [Palis].

## BIBLIOGRAFIA

- [Bauer], W.R. Bauer, Crick, F.H.C and White, J.H – *Supercoiled DNA*. Scientific American, 243, 1980, 100–113.
- [Berger], M. Berger and Gostiaux, B. – *Differential Geometry: Manifolds, Curves and Surfaces*. Springer Verlag, 1988.
- [Carmo], M.P. Carmo – *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall Inc., 1976.
- [Carter], J.S. Carter and Saito, M. – *Knot Diagrams and Braid Theories in Dimension 4*. Preprint.
- [Costa 1], S.I.R. Costa – *On Closed Twisted Curves*. Proc. Amer. Math. Soc., 109, 1990, 205–214.
- [Costa 2], S.I.R. Costa and Fuster, M.C.R. – *Nowhere Vanishing Torsion Closed Curves Always Hide Twice*. A aparecer em Geometria e Dedicata.
- [Dieudonné], J. Dieudonné – *Treatise on Analysis*. Pure and Applied Mathematics, 10. Academic Press, New York, 1969.
- [Feldman], E.A. Feldman – *The Geometry of Immersions I*. Trans. Amer. Math. Soc. 120, 1965, 185–223.
- [Fenchel], W. Fenchel – *On Differential Geometry of Closed Space Curves*. Bull. Amer. Math. Soc., 57, 1951, 44–54.
- [Freedman], M. Freedman, He, Z.X. and Wang, Z. – *Mobius Energy of Knots and Unknots*. Annals of Mathematics, 139, 1994, 1–50.
- [Guillemin], V. Guillemin and Pollack, A. – *Differential Topology*. Prentice-Hall. Englewood Cliffs, N.J., 1974.
- [Gluck], H. Gluck – *The Converse of the Four Vertex Theorem*. Enseignemet Math., 17, 1971, 295–309.
- [Lima], E.L. Lima – *Curso de Análise, Vol. 2*. Rio de Janeiro, IMPA, CNPq, 1981.

- [Millman], R.S. Millman and Parker, G.D. – *Elements of Differential Geometry*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1977.
- [Milnor 1], J.W. Milnor – *On the Total Curvature of Knots*. *Annals of Mathematics*, 52, 1950, 248-257.
- [Milnor 2], J.W. Milnor – *Topology from the Differentiable Viewpoint*. University Press of Virginia, 1969.
- [O'Hara], J. O'Hara – *Energy of a Knot*. *Topology*, 30, 1991, 241-247.
- [Osserman], R. Osserman – *The Four or more vertex theorem*. *Amer. Math. Monthly*, 92, 1985, 332-337.
- [Palis], J. Palis Junior e Melo, Welington – *Introdução aos Sistemas dinâmicos*. Rio de Janeiro, IMPA-CNPq, 1977.
- [Penna], M.A. Penna – *Total Torsion*. *Amer. Math. Monthly*, 87, 1980, 452-461.
- [Pinkall], U. Pinkall – *On the four vertex theorem*. *Aequat. Math.*, 34, 1987, 221-230.
- [Pogorelov], A. Pogorelov – *Geometry* Mir Publishers. Moscou, 1987.
- [Pohl 1], W.F. Pohl – *The Self Linking Number of a Closed Curve*. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 17, 1968, 975-985.
- [Pohl 2], W.F. Pohl – *Some Integral Formulas for Space Curves and their Generalization*. *Amer. Journal of Mathematics*, 1968, 1321-1345.
- [Pohl 3], W.F. Pohl – *DNA and Differential Geometry*. *The Mathematical Intelligencer*, 3, 1980, 20-27.
- [Rolfsen], D. Rolfsen – *Knots and Links*. Publish or Perish, Inc., 1976.
- [Sedykh], V.D. Sedykh – *The Theorem About four Vertex of a Convex Space Curve (in Russian) Functional*. *Anal. Prilozhen*, 26, 1992, n<sup>o</sup> 1, 35-41.
- [Spivak], M. Spivak – *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Volumes I a IV. Publish or Perish, Inc., 1979.
- [Stoker], J.J. Stoker – *Differential Geometry*. John Wiley & Sons, Inc., 1969.
- [Struik], D.J. Struik – *Lectures on Classical Differential Geometry*. Addison-Wesley Publ. Comp., 1950.
- [Summers], De W. Summers – *Untangling DNA*. *The Mathematical Intelligencer*. Vol. 12, n<sup>o</sup> 3, 1990.