



ELIANA CONTHARTEZE GRIGOLETTO

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FRACIONÁRIAS E AS FUNÇÕES DE  
MITTAG-LEFFLER

CAMPINAS  
2014





UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística  
e Computação Científica

ELIANA CONTHARTEZE GRIGOLETTO

## EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FRACIONÁRIAS E AS FUNÇÕES DE MITTAG-LEFFLER

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutora em matemática aplicada.

**Orientador: Edmundo Capelas de Oliveira**

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA PELA ALUNA ELIANA CONTHARTEZE GRIGOLETTO, E ORIENTADA PELO PROF. DR. EDMUNDO CAPELAS DE OLIVEIRA.

Assinatura do Orientador

A large, dark, handwritten signature in black ink is written over a horizontal line. The signature is highly stylized and appears to be the name of the supervisor, Edmundo Capelas de Oliveira.

CAMPINAS  
2014

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica  
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

C767e Contharteze, Eliana, 1984-  
Equações diferenciais fracionárias e as funções de Mittag-Leffler / Eliana  
Contharteze Grigoletto. – Campinas, SP : [s.n.], 2014.

Orientador: Edmundo Capelas de Oliveira.  
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de  
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Cálculo fracionário. 2. Equações diferenciais fracionárias. 3. Mittag-Leffler,  
Funções de. I. Oliveira, Edmundo Capelas de, 1952-. II. Universidade Estadual de  
Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Fractional differential equations and the Mittag-Leffler functions

**Palavras-chave em inglês:**

Fractional calculus

Fractional differential equations

Mittag-Leffler functions

**Área de concentração:** Matemática Aplicada

**Titulação:** Doutora em Matemática Aplicada

**Banca examinadora:**

Edmundo Capelas de Oliveira [Orientador]

Jayme Vaz Junior

Alagacone Sri Ranga

Bruto Max Pimentel Escobar

Rubens de Figueiredo Camargo

**Data de defesa:** 06-11-2014

**Programa de Pós-Graduação:** Matemática Aplicada

**Tese de Doutorado defendida em 06 de novembro de 2014 e aprovada**

**Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**



---

**Prof(a). Dr(a). EDMUNDO CAPELAS DE OLIVEIRA**



---

**Prof(a). Dr(a). JAYME VAZ JUNIOR**



---

**Prof(a). Dr(a). ALAGACONE SRI RANGA**



---

**Prof(a). Dr(a). BRUTO MAX PIMENTEL ESCOBAR**



---

**Prof(a). Dr(a). RUBENS DE FIGUEIREDO CAMARGO**



## Abstract

We present the operators of fractional integration and differentiation, which can be used to describe an anomalous diffusion process by means of a fractional differential equation. As an application we discuss a fractional differential equation associated with the slowing-down of neutrons using Laplace and Fourier transforms. With the help of a convenient computational implementation we obtain graphs of the solutions of this equation. Some properties of the operators of fractional integration and differentiation are mentioned and used to demonstrate the fundamental theorem of fractional calculus. The classical Mittag-Leffler function with one parameter and the Mittag-Leffler function with two parameters play an important role in the study of fractional differential equations. The so-called Mittag-Leffler function with three parameters, which generalizes the previous two functions, naturally arises in the study of the fractional differential equation associated with the telegraph problem. By calculating the inverse Laplace transform without using contour integration we obtain new representations for the Mittag-Leffler functions in terms of improper integrals of trigonometric functions; as an application we obtain some interesting improper integrals which are usually proved by approximation using Fourier analysis or residue theory.

**Keywords:** Fractional calculus, Fractional differential equations, Mittag-Leffler functions.

## Resumo

Apresentamos operadores de integração e derivação fracionárias, que em particular, podem ser utilizados para descrever um processo difusivo anômalo através de uma equação diferencial fracionária. Como aplicação, discutimos uma equação diferencial fracionária associada ao processo de desaceleração de nêutrons, utilizando as transformadas integrais de Laplace e Fourier e através de uma conveniente implementação computacional, obtemos gráficos associados à solução dessa equação. Algumas propriedades dos operadores de integração e derivação fracionárias são mencionadas e utilizadas para escrever o teorema fundamental do cálculo fracionário. A clássica função de Mittag-Leffler, envolvendo um parâmetro e a função de Mittag-Leffler com dois parâmetros desempenham um papel importante no estudo das equações diferenciais fracionárias. A chamada função de Mittag-Leffler com três parâmetros, que generaliza as duas anteriores, emerge naturalmente no estudo da equação diferencial fracionária associada ao problema do telégrafo. Novas

representações para as funções de Mittag-Leffler foram obtidas em termos de integrais impróprias de funções trigonométricas, a partir do cálculo da transformada de Laplace inversa sem usar um contorno de integração e como aplicação, encontramos algumas integrais impróprias interessantes que, geralmente, são demonstradas por aproximação com o uso de análise de Fourier ou teoria dos resíduos.

**Palavras-chave:** Cálculo fracionário, Equações diferenciais fracionárias, Funções de Mittag-Leffler.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Transformadas Integrais</b>	<b>5</b>
1.1 Convolução . . . . .	5
1.2 Transformada de Fourier . . . . .	6
1.3 Transformada de Laplace . . . . .	8
1.4 Transformada de Laplace inversa . . . . .	11
1.5 Transformada de Laplace inversa sem o uso de um contorno de integração . . . . .	14
1.6 Transformada de Laplace unilateral . . . . .	17
<b>2 Funções Especiais</b>	<b>21</b>
2.1 Função gama . . . . .	21
2.1.1 Relações envolvendo a função gama . . . . .	22
2.1.2 Extensão da função gama . . . . .	23
2.1.3 Função gama incompleta . . . . .	28
2.2 Função beta . . . . .	28
2.3 Função hipergeométrica . . . . .	29
2.3.1 Representação integral . . . . .	30
2.3.2 Relação com a função gama incompleta . . . . .	32
<b>3 Funções de Mittag-Leffler</b>	<b>33</b>
3.1 Função de Mittag-Leffler de um parâmetro . . . . .	33
3.2 Função de Mittag-Leffler generalizada . . . . .	41
3.2.1 Função de Mittag-Leffler de dois parâmetros . . . . .	41
3.2.2 Função de Mittag-Leffler de três parâmetros . . . . .	42
3.3 Relações envolvendo as funções de Mittag-Leffler . . . . .	43
3.4 Transformada de Laplace das funções de Mittag-Leffler . . . . .	46
3.5 Representação integral das funções de Mittag-Leffler . . . . .	48
3.5.1 Casos particulares . . . . .	50
<b>4 Cálculo Fracionário</b>	<b>55</b>
4.1 Integral fracionária de Riemann-Liouville . . . . .	55
4.1.1 Integral fracionária das funções de Mittag-Leffler . . . . .	60

4.2	Derivada fracionária de Riemann-Liouville . . . . .	61
4.3	Integral e derivada fracionárias de Liouville . . . . .	67
4.4	Derivada fracionária de Caputo . . . . .	68
4.5	Integral e derivada fracionárias de Weyl . . . . .	71
4.6	Integral fracionária de Riesz . . . . .	77
4.7	Derivada fracionária de Riesz . . . . .	79
<b>5</b>	<b>Teorema Fundamental do Cálculo Fracionário</b>	<b>91</b>
5.1	TFCF Riemann-Liouville . . . . .	91
5.2	TFCF Caputo . . . . .	93
5.3	TFCF Liouville . . . . .	93
5.4	TFCF Weyl . . . . .	94
5.5	TFCF Riesz . . . . .	95
5.6	Aplicações . . . . .	96
<b>6</b>	<b>Equações Diferenciais Fracionárias</b>	<b>103</b>
6.1	Equação associada à desaceleração de nêutrons . . . . .	104
6.1.1	Aproximação da transformada de Fourier inversa de $\hat{\Phi}(\omega, t)$ . . . . .	106
6.1.2	Casos particulares . . . . .	107
6.2	Equação do telégrafo fracionária . . . . .	116
6.3	Equações diferenciais fracionárias lineares . . . . .	119
	<b>Conclusões e Considerações Finais</b>	<b>127</b>
<b>A</b>	<b>Função exponencial em termos das funções de Mittag-Leffler</b>	<b>129</b>
<b>B</b>	<b>Implementação da solução da equação associada à desaceleração de nêutrons</b>	<b>131</b>
B.1	Caso particular . . . . .	131
	<b>Referências</b>	<b>135</b>

*Dedico esta tese à minha mãe Inês e ao meu orientador Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira.*



# Agradecimentos

Agradeço à minha mãe, cujo apoio incondicional, força, incentivo e presença foram de grande importância para que eu pudesse concluir mais esta etapa da minha vida acadêmica.

Tenho a sorte de ter o prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira como meu orientador de doutorado, a ele sou grata pelas ideias, orientação, pelo constante apoio e paciência. Além de me apoiar, me deu total liberdade em minhas pesquisas. Um dos resultados dessa interação com meu orientador foi a rápida evolução de nosso trabalho. Meu orientador é um excelente profissional, com muita experiência em sua área de pesquisa e também é um excelente educador, aprendi muito com ele, em particular, sobre o cálculo fracionário.

Meu orientador, colegas e amigos me ajudaram muito, tanto na área da matemática, como com o latex, em particular, agradeço imensamente o apoio do Júnior.

Finalizo reconhecendo que esta pesquisa não teria sido possível sem a ajuda financeira do CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico.

Novembro de 2014.

Eliana Contharteze Grigoletto.



# Introdução

O cálculo fracionário, nome popularizado para cálculo de ordem não inteira, é da mesma época que o cálculo de ordem inteira, do século XVII, conforme proposto independentemente por Newton e Leibniz. O cálculo fracionário só se tornou uma área específica da matemática na década de setenta, após uma reunião que culminou com o primeiro congresso internacional dedicado exclusivamente ao cálculo fracionário. Antes disso, só estavam disponíveis trabalhos esporádicos e independentes, sem uma linha consolidada [40].

O tradicional cálculo de ordem inteira apresenta inúmeras aplicações nas áreas de matemática, física, ciências, entre outras. O cálculo de ordem não inteira é um cálculo não tradicional e assim como o cálculo tradicional, apresenta aplicações em diversas áreas. Dado um número  $a$  qualquer, podemos multiplicar esse número  $n$  vezes, obtendo dessa forma a potência  $a^n$ , podemos também calcular a potência não inteira de um número, por exemplo, como a raiz quadrada,  $9^{1/2} = \sqrt{9} = 3$ . Se fazemos isso com potência de números, por que não fazer com integrais e derivadas, ou seja, por que não pensar em derivada e integral de ordens não inteiras?

Na década de oitenta o cálculo fracionário ganhou vários adeptos, em particular, por proporcionar aplicações explícitas em diversas áreas do conhecimento [1, 16, 32]. A partir da década de noventa, completamente consolidado, começam a emergir periódicos específicos e a publicação de livros textos em vários idiomas, o que o torna mais popular. Após o final do século passado, o cálculo fracionário conta com prestígio mundial. Uma linha do tempo, dos primórdios aos dias de hoje, é apresentada em [35, 36, 37].

Hoje, tanto do ponto de vista matemático, como no estudo de novas funções, quanto do ponto de vista das aplicações em diversas áreas, tais como física, processamento de sinais, eletromagnetismo, finanças, entre outras [9], várias pesquisas são desenvolvidas visando aplicações concretas do cálculo fracionário, que se tornou uma ferramenta importante para lidar, por exemplo, com processos difusivos anômalos [39], cujo deslocamento quadrático médio  $\langle x^2(t) \rangle$  é uma expressão não linear no tempo, em contraste com a difusão usual, onde esse deslocamento é uma expressão linear no tempo.

No primeiro capítulo apresentamos as transformadas integrais de Fourier e de Laplace, embora esses conceitos sejam conhecidos, vamos definir a notação que utilizaremos ao longo desta tese. Na Seção 1.1 discutimos o conceito de convolução de sequências, bem como a extensão desse conceito à convolução de funções. Na Seção 1.2 apresentamos a transformada de Fourier, bem como sua transformada inversa. A Seção 1.3 é outra seção introdutória importante, onde abordamos a transformada de Laplace, uma ferramenta utilizada para determinar uma solução particular de uma ampla classe de equações diferenciais ordinárias e de equações diferenciais fracionárias. Não

menos importante é a transformada de Laplace inversa, discutida na Seção 1.4. Outra metodologia para a transformada de Laplace inversa sem o uso de um contorno de integração no plano complexo [2] é apresentada na Seção 1.5. Tal metodologia nos permite expressar algumas integrais impróprias convergentes em termos de novas funções, através de uma conveniente escolha para  $\sigma$ , que é a parte real do número complexo  $s$ , variável da transformada de Laplace de uma função. Além disso, apresentamos uma aplicação envolvendo uma particular equação do telégrafo.

Em continuação a alguns conceitos básicos utilizados no cálculo fracionário, algumas funções especiais, tais como as funções gama, gama incompleta, beta e as funções hipergeométricas que aparecem como solução de algumas equações diferenciais, são abordadas no segundo capítulo. Na Seção 2.1 apresentamos a função gama, também conhecida como função de Euler de segunda espécie, ela é uma das mais importantes funções da física matemática. Ao olharmos para a função fatorial de um número natural, isto nos dá os pontos  $(0, 1), (1, 1), (2, 2), (3, 6), (4, 24), (5, 120), (6, 720), \dots$ . Marcando estes pontos no plano, existe uma forma de unir os pontos e preencher o gráfico para mais valores se considerarmos a função gama, que é definida em termos de uma integral imprópria. Algumas distribuições de probabilidades são definidas em termos da função gama. Na mecânica quântica não relativista, a função gama é utilizada, por exemplo, para expressar a dispersão de Coulomb durante uma colisão entre duas partículas carregadas [6]. Algumas relações envolvendo a função gama, bem como seu prolongamento analítico ao plano complexo são apresentadas nas Subseções 2.1.1 e 2.1.2, respectivamente. Já a função gama incompleta é discutida na Subseção 2.1.3. Ainda no segundo capítulo, na Seção 2.2 apresentamos a função beta e na Seção 2.3 a função hipergeométrica generalizada. Algumas representações integrais conhecidas para funções hipergeométricas particulares são apresentadas na Subseção 2.3.1.

A função  $f(z) = e^z$  emerge naturalmente como solução de equações diferenciais ordinárias com coeficientes constantes. No caso das equações diferenciais fracionárias, ainda com coeficientes constantes, emergem as chamadas funções de Mittag-Leffler como solução. Podemos interpretar as funções de Mittag-Leffler como generalizações da função exponencial. As funções de Mittag-Leffler de um, dois e três parâmetros são apresentadas no terceiro capítulo, nas Seções 3.1 e 3.2, respectivamente. Discutimos ainda algumas relações envolvendo as funções de Mittag-Leffler na Seção 3.3 e sua transformada de Laplace na Seção 3.4.

A partir do cálculo da transformada de Laplace inversa sem utilizar um contorno de integração, expressamos na Seção 3.5, a função de Mittag-Leffler de três parâmetros como uma integral em  $\mathbb{R}^+$ . Como casos particulares, apresentamos algumas integrais impróprias convergentes de funções trigonométricas, que podem ser escritas em termos das funções de Mittag-Leffler.

Tradicionalmente, o conceito de derivada é associado a um número natural, podemos derivar uma função uma, duas, três, ...,  $n$  vezes. É interessante então investigar a possibilidade de derivar  $\alpha$  vezes uma função, onde  $\alpha$  é um número complexo.

A primeira ideia para isso é observar as propriedades da derivada de ordem inteira e então tentar generalizá-las. Não existe apenas uma maneira de fazer isso [10].

Por exemplo, considerando  $n \in \mathbb{N}$ , a derivada de ordem inteira satisfaz as propriedades:

$$(i) \frac{d^n}{dt^n} [c f(t)] = c \frac{d^n}{dt^n} f(t), \text{ onde } c \text{ é constante;}$$

$$(ii) \frac{d^n}{dt^n} [f(t) \pm g(t)] = \frac{d^n}{dt^n} f(t) \pm \frac{d^n}{dt^n} g(t);$$

$$(iii) \frac{d^n}{dt^n} [t^m] = \frac{m!}{(m-n)!} t^{m-n}, \text{ com } m > n \text{ e } m, n \in \mathbb{N};$$

$$(iv) \frac{d^n}{dt^n} [f(t) \cdot g(t)] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(t) g^{(k)}(t).$$

A maior dificuldade, quando pensamos em derivada de ordem não inteira, é substituir o fatorial, que é definido apenas para números naturais, por uma função definida para números complexos. Mas existe uma função especial, a saber, a função gama, definida por:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt,$$

para  $\text{Re}(z) > 0$ ,  $n$  natural não nulo, de modo que  $\Gamma(n+1) = n!$ .

Então, na propriedade (iii), se considerarmos  $\alpha, \mu \in \mathbb{C}$ , de modo que  $\text{Re}(\alpha) \geq 0$  e  $\text{Re}(\mu) > -1$ , podemos escrever

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} [t^\mu] = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\alpha+1)} t^{\mu-\alpha}. \quad (I)$$

Discutimos as operações de integração e derivação fracionárias no quarto capítulo, bem como algumas de suas propriedades. Mais especificamente, na Seção 4.1 introduzimos o conceito de integral fracionária de Riemann-Liouville como uma generalização do conceito de integral de ordem inteira e na Seção 4.2, apresentamos a derivada fracionária de Riemann-Liouville.

Em [44], Osler determina uma expressão para a derivada fracionária de uma função analítica utilizando a série dessa função, com isso, dadas duas funções analíticas, determina uma expressão para a derivada fracionária do produto dessas funções, que não generaliza a propriedade (iv).

A derivada fracionária à esquerda, segundo Riemann-Liouville, é definida de modo a obter a igualdade na equação (I) para a derivada fracionária da função  $f(t) = t^\mu$ .

O que seria então  $\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} [t^{-m}]$  para  $m$  natural não nulo? Temos que

$$\frac{d^n}{dt^n} [t^{-m}] = (-1)^n \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)} t^{-(m+n)}.$$

Usando a ideia para a derivação de ordem não inteira, temos

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} [t^{-m}] = (-1)^\alpha \frac{\Gamma(m+\alpha)}{\Gamma(m)} t^{-(m+\alpha)}.$$

Essa nova definição precisa ser mudada, visto que, para  $0 < \alpha < 1$ , por exemplo, a derivada de ordem não inteira poderia transformar uma função real em uma função complexa ou uma função complexa em uma função real após a derivação. A derivada fracionária de Liouville à direita, apresentada na Seção 4.3, é definida de modo a recuperar a derivada de ordem inteira da função  $f(t) = t^{-m}$ , com  $m$  natural não nulo.

Para resolver uma equação diferencial fracionária envolvendo uma função que tem uma variável temporal, em alguns casos, se temos condições iniciais para o problema, é conveniente utilizar o operador de derivação fracionária de Caputo, apresentado na Seção 4.4.

Integração e derivação fracionárias, conforme definidas pelos operadores de Riemann-Liouville, são bem adequadas para séries de potência, mas não para funções definidas por séries de Fourier. Se  $f(x)$  é uma função periódica de período  $2\pi$ , então a integral fracionária segundo Riemann-Liouville dessa função pode não ser periódica, neste caso convém utilizar os operadores de integração e derivação fracionárias de Weyl. Uma discussão para esse caso é apresentada na Seção 4.5.

Continuando a discussão sobre operações de integração e derivação fracionárias, nas Seções 4.6 e 4.7 vemos que para obter uma integração ou derivação fracionária no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ , devemos encontrar potências fracionárias  $(-\Delta)^{\alpha/2}$  do operador Laplaciano. No caso em que  $\text{Re}(\alpha) < 0$ , chamamos tal potência de integral fracionária de Riesz e no caso em que  $\text{Re}(\alpha) > 0$ , chamamos de derivada fracionária segundo Riesz.

O teorema fundamental do cálculo de ordem inteira estabelece uma relação entre os processos de integração e derivação, ele diz que a integração e diferenciação são processos inversos, além disso, as integrais podem ser calculadas para encontrar primitivas. O teorema também pode ser usado para fazer determinados cálculos, em particular, podemos determinar o limite de uma função usando o teorema fundamental do cálculo [26]. Após generalizar os conceitos de integração e derivação, naturalmente podemos generalizar o teorema fundamental do cálculo para operadores de integração e derivação de ordem não inteira.

No quinto capítulo apresentamos o que chamamos de teorema fundamental do cálculo fracionário [25], uma possível generalização do teorema fundamental do cálculo. Aplicações deste teorema [14] são apresentadas na Seção 5.1, onde utilizamos o teorema para resolver algumas particulares equações diferenciais fracionárias.

Sabe-se que o cálculo de ordem inteira é uma ferramenta poderosa para explicar e modelar muitos processos importantes em ciências aplicadas. Experimentos e a realidade ensinam-nos que existem muitos sistemas complexos anômalos na natureza e na sociedade que não podem ser modelados com o cálculo clássico. A modelagem de fenômenos anômalos requer o desenvolvimento de uma teoria, análoga ao caso clássico, para equações diferenciais fracionárias.

Aplicações do cálculo fracionário são apresentadas no sexto capítulo, onde discutimos, por exemplo, a equação diferencial fracionária associada à desaceleração de nêutrons na Seção 6.1 e através de uma implementação em MATLAB para a solução aproximada, obtemos os gráficos para a solução. Já na Seção 6.2, expressamos a solução para uma equação do telégrafo fracionária, usando transformadas integrais e a metodologia da transformada de Laplace inversa sem um contorno de integração, conforme discutida na Seção 1.5.

Na Seção 6.3 abordamos uma teoria básica para sistemas de equações diferenciais fracionárias lineares, onde utilizamos os operadores de derivação segundo Riemann-Liouville e Caputo. Além disso, desenvolvemos dois teoremas sobre as autofunções associadas a esses operadores e através desses teoremas, resolvemos tais equações diferenciais, expressando a solução no caso homogêneo. Incluímos ainda alguns exemplos ilustrativos. Enfim, apresentamos as conclusões e dois apêndices que concluem o trabalho.

# Capítulo 1

## Transformadas Integrais

As transformadas integrais constituem uma poderosa ferramenta para resolver uma equação diferencial. Neste capítulo, abordamos as transformadas de Laplace e Fourier, bem com suas transformadas inversas, visando a resolução de equações diferenciais fracionárias. Discutimos apenas as principais propriedades. Para um estudo específico sobre estas duas transformadas, sugerimos o livro [55].

Apresentamos inicialmente, algumas definições da análise funcional que serão utilizadas.

**Definição 1.1** (Espaço  $L^p(\Omega)$ ). Seja  $\Omega = [a, b]$  ( $a < b$ ), um intervalo finito ou infinito no eixo real  $\mathbb{R}$ . Denotamos por  $L^p(\Omega)$ , com  $1 \leq p \leq \infty$ , o conjunto das funções complexas  $f$  em  $\Omega$ ,  $p$ -integráveis no sentido de Lebesgue, ou seja,  $\|f\|_p < \infty$ , onde

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, & \text{se } 1 \leq p < \infty, \\ \sup_{\Omega} |f| = \inf \{c \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq c\}, & \text{se } p = \infty. \end{cases}$$

Na definição a seguir, considere  $[a, b]$  um intervalo finito no eixo real  $\mathbb{R}$ .

**Definição 1.2** (Espaço  $AC^n[a, b]$ ). Para<sup>1</sup>  $n \in \mathbb{N}^*$ , denotamos por  $AC^n[a, b]$ , o espaço das funções complexas  $f(x)$ , cujas derivadas até a ordem  $n - 1$  são absolutamente contínuas em  $[a, b]$ , de forma que<sup>2</sup>  $f^{(n-1)}(x) \in AC[a, b]$ .

### 1.1 Convolução

Dadas duas sequências  $\{a_n\}_0^\infty$  e  $\{b_n\}_0^\infty$ , a convolução dessas duas sequências é definida como a nova sequência

$$\{c_n\}_0^\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=0}^n a_{n-j} b_j \right).$$

---

<sup>1</sup>Neste trabalho definimos  $\mathbb{N}^* := \{1, 2, 3, \dots\}$ .

<sup>2</sup>Utilizamos a notação  $f^{(n-1)}(x) = \frac{d^{(n-1)}}{dx^{(n-1)}} f(x)$ .

A sequência  $\{c_n\}_0^\infty$  aparece quando multiplicamos duas séries da forma

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \cdot \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j.$$

Por exemplo, quando multiplicamos duas séries de Laurent [13], temos que calcular uma convolução de sequências.

Raciocínio análogo à convolução de sequências pode ser estendido para funções contínuas. A integral

$$\Psi(x) = f(x) * g(x) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \tau)g(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x - \tau)d\tau, \quad (1.1.1)$$

geralmente surge no cálculo das transformadas de Laplace e Fourier. Essas transformadas integrais serão discutidas nas seções seguintes. A notação  $*$  significa convolução, ou ainda, produto de convolução.

Se as funções  $f(x)$  e  $g(x)$  são tais que

$$f(x - \tau) = 0, \quad \text{se } x > \tau$$

e

$$g(x) = 0, \quad \text{se } x \in (-\infty, 0),$$

então a equação (1.1.1) pode ser escrita da forma

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x - \tau)g(\tau)d\tau. \quad (1.1.2)$$

## 1.2 Transformada de Fourier

Nesta seção apresentamos a definição e algumas propriedades da transformada de Fourier de uma função  $\varphi(x) \in L^1(\Omega)$ . Começamos com a transformada 1-dimensional [55], para depois estendê-la ao caso  $n$ -dimensional.

Seja  $\varphi(x)$  uma função periódica com período  $L$  no intervalo  $-\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}$ , então podemos escrevê-la como uma série exponencial [43]

$$\varphi(x) = \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}_n e^{i \frac{2\pi n x}{L}}, \quad \text{com } \hat{\varphi}_n = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \varphi(x) e^{-i \frac{2\pi n x}{L}} dx.$$

Seja  $\omega_n \equiv \frac{2n\pi}{L}$ . A variação de  $\omega_n$  ( $\Delta\omega_n$ ) é dada por

$$\Delta\omega_n = \frac{2\pi(\Delta n)}{L} = \frac{2\pi}{L},$$

pois  $\Delta n = 1$ . Substituindo  $\frac{2\pi}{L}$  por  $\Delta\omega_n$ , temos

$$\varphi(x) = \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}_n e^{i\omega_n x} = \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}_n e^{i\omega_n x} \left( \frac{L}{2\pi} \Delta\omega_n \right) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}_n e^{i\omega_n x} \Delta\omega_n.$$

Fazendo  $L \rightarrow \infty$ ,  $\Delta\omega_n \rightarrow 0$ , com isso a série acima é a integral

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}_n e^{i\omega_n x} d\omega_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\omega_n) e^{i\omega_n x} d\omega_n,$$

onde substituímos  $\hat{\varphi}_n$  por  $\hat{\varphi}(\omega_n)$ , pois,

$$\hat{\varphi}_n = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \varphi(x) e^{-i\omega_n x} dx \equiv \hat{\varphi}(\omega_n).$$

Como  $L \rightarrow \infty$ , obtemos

$$\hat{\varphi}(\omega_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-i\omega_n x} dx.$$

Podemos agora abandonar o índice  $n$ , escrevendo

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad \text{e} \quad \hat{\varphi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-i\omega x} dx.$$

A primeira integral é conhecida como a transformada de Fourier inversa e a segunda como transformada de Fourier de  $\varphi(x)$ . Assim, a transformada de Fourier 1-dimensional, ou simplesmente transformada de Fourier, da função  $\varphi(x)$  denotada por  $\mathcal{F}[\varphi](\omega) = \hat{\varphi}(\omega)$ , com  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\hat{\varphi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , é definida por

$$\mathcal{F}[\varphi](\omega) = \hat{\varphi}(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-i\omega x} dx. \quad (1.2.1)$$

A transformada de Fourier inversa de  $\hat{g}(\omega)$ , denotada por  $\mathcal{F}^{-1}[\hat{g}](x) = g(x)$ , é definida por

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{g}](x) = g(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega) e^{i\omega x} d\omega. \quad (1.2.2)$$

A transformada de Fourier de uma função é interpretada como sendo a sua decomposição exponencial.

As integrais nas equações (1.2.1) e (1.2.2) convergem absolutamente para funções  $\varphi(x) \in L^1(\mathbb{R})$  e  $\hat{g}(\omega) \in L^1(\mathbb{C})$  e para funções “suficientemente boas” [32].

Cada uma dessas transformadas é inversa uma da outra, ou seja,

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\varphi = \varphi \quad \text{e} \quad \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\hat{g} = \hat{g}.$$

A seguir algumas propriedades da transformada de Fourier 1-dimensional.

- Linearidade:  $\mathcal{F}(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2) = a_1\mathcal{F}(\varphi_1) + a_2\mathcal{F}(\varphi_2)$ .
- Convolução:  $\mathcal{F}[\varphi_1 * \varphi_2](\omega) = \hat{\varphi}_1(\omega) \hat{\varphi}_2(\omega)$ .
- Multiplicação:  $\mathcal{F}[\varphi_1 \cdot \varphi_2](\omega) = \frac{1}{2\pi} \hat{\varphi}_1(\omega) * \hat{\varphi}_2(\omega)$ .

- Derivação:  $\mathcal{F} [\varphi^{(n)}] (\omega) = (i\omega)^n \hat{\varphi} (\omega)$ ;  $\mathcal{F}^{-1} [\hat{\varphi}^{(n)}] = (-ix)^n \varphi (x)$ , com  $n \in \mathbb{N}$ .

Considere agora  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Neste caso, a transformada de Fourier  $n$ -dimensional da função  $\varphi(\mathbf{x})$  e a respectiva transformada inversa, são dadas por

$$\mathcal{F} [\varphi] (\boldsymbol{\omega}) = \hat{\varphi} (\boldsymbol{\omega}) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\mathbf{x}) e^{-i\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} \quad (1.2.3)$$

e

$$\mathcal{F}^{-1} [\hat{g}] (\mathbf{x}) = g (\mathbf{x}) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(\boldsymbol{\omega}) e^{i\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x}} d\boldsymbol{\omega}, \quad (1.2.4)$$

onde  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$ ,  $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n] \in \mathbb{R}^n$ , com  $\hat{\varphi} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ , o produto  $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x} = x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + \dots + x_n\omega_n$ ,  $d\mathbf{x} = dx_1 dx_2 \dots dx_n$  e  $d\boldsymbol{\omega} = d\omega_1 d\omega_2 \dots d\omega_n$ .

Se  $\Delta$  é o operador de Laplace  $n$ -dimensional, ou seja,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2},$$

então

$$\mathcal{F} [\Delta\varphi] (\boldsymbol{\omega}) = -|\boldsymbol{\omega}|^2 \hat{\varphi} (\boldsymbol{\omega}). \quad (1.2.5)$$

### 1.3 Transformada de Laplace

A transformada de Laplace é usada para determinar uma solução particular de uma ampla classe de equações diferenciais, tanto as de ordem inteira, quanto as de ordem não inteira.

Seja  $f(t)$  um sinal (som, potencial elétrico,...), então a transformada de Laplace bilateral de  $f(t)$ , denotada por  $\mathcal{L} [f] (s) = F(s)$ , é definida por

$$\mathcal{L} [f] (s) = F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (1.3.1)$$

onde  $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ .

Se  $s = i\omega$ , então  $F(i\omega)$  é a transformada de Fourier de  $f(t)$ . Transformadas de Fourier de sinais sempre existem para sinais em  $L^1(\mathbb{R})$ , o mesmo não ocorre para as transformadas de Laplace, pois  $s = \sigma + i\tau$  pode induzir um crescimento exponencial. Assim, devemos nos preocupar com a região de convergência (RC).

De fato, se  $f(t) \in L^1(\mathbb{R})$ , por (1.3.1) podemos observar que

$$|\hat{f}(\omega)| = |F(i\omega)| < \infty, \text{ já que } |e^{-i\omega t}| = 1.$$

Enquanto que em  $\mathcal{L} [f]$ , temos que

$$|e^{-st}| = |e^{-(\sigma+i\tau)t}| = |e^{-\sigma t}|,$$

que pode crescer indefinidamente [18].

No caso particular em que  $f_1(t) = e^{-at}u(t)$ , onde  $a > 0$  e  $u(t)$  é a função degrau unitário, definida por

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \geq 0, \\ 0, & \text{se } t < 0, \end{cases} \quad (1.3.2)$$

temos por (1.3.1), que

$$F_1(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} e^{-at} u(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+s)t} dt = -\frac{e^{-(a+s)t}}{s+a} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s+a},$$

se  $\text{Re}(s) > -a$ . Logo, a RC é o semiplano complexo  $\text{Re}(s) = \sigma > -a$ .

Se considerarmos  $f_2(t) = -e^{-at}u(-t)$ , onde  $a > 0$  e  $u(t)$  é a função degrau unitário, por (1.3.1), temos que

$$F_2(s) = \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-st} e^{-at} u(-t) dt = \int_{-\infty}^0 -e^{-(a+s)t} dt = \frac{e^{(a+s)t}}{s+a} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{1}{s+a},$$

se  $\text{Re}(s) < -a$ . Logo, a RC é o semiplano complexo  $\text{Re}(s) = \sigma < -a$ .

Podemos observar que  $F_1(s) \equiv F_2(s)$ , entretanto  $f_1(t) \neq f_2(t)$ , o que diferencia os dois casos é a RC.

Para um sinal de tempo contínuo  $f(t)$ , onde  $t$  denota a variável temporal, utilizamos a transformada de Laplace unilateral, ou simplesmente transformada de Laplace

$$\mathcal{L}[f](s) = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (1.3.3)$$

onde  $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ .

Vamos então definir a RC para a transformada de Laplace em (1.3.3). Começamos com a definição a seguir.

**Definição 1.3** (Ordem exponencial). Uma função  $f(t)$ , definida para  $t \geq 0$ , é de ordem exponencial se existem constantes reais  $M > 0$ ,  $t_0 > 0$  e  $a \in \mathbb{R}$ , tais que

$$|f(t)| \leq Me^{at}, \quad \text{para todo } t > t_0, \quad (1.3.4)$$

ou equivalentemente, se

$$e^{-at} |f(t)| \leq M \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |f(t) e^{-at}| = 0.$$

Uma função  $f$  é limitada se existe  $M > 0$  tal que  $|f(t)| \leq M$ , para todo  $t$  no domínio de  $f$ . Assim, se  $f$  é limitada, dado  $a > 0$ , temos

$$e^{-at} |f(t)| \leq M, \quad \text{para todo } t \geq 0,$$

pois  $|e^{-at}| \leq 1$ . Logo, toda função limitada é de ordem exponencial.

Uma função de ordem exponencial no infinito e contínua por partes em todo intervalo  $[0, A]$ , com  $A > 0$  é dita admissível.

**Teorema 1.4** (Existência da transformada de Laplace unilateral). Se uma função  $f(t)$ , definida para  $t \geq 0$ , é contínua por partes em todo intervalo fechado  $0 \leq t \leq c$ , com  $c > 0$  e de ordem exponencial, então existe  $a \in \mathbb{R}$  de modo que  $\mathcal{L}[f](s)$  existe para  $\text{Re}(s) = \sigma > a$ .

*Demonstração.* Sendo  $f$  de ordem exponencial, pela Definição 1.3, existem constantes reais  $M > 0$ ,  $t_0 > 0$  e  $a$ , de modo que  $|f(t)| \leq Me^{at}$ , para todo  $t > t_0$ . Calculando a transformada de Laplace de  $f(t)$ , temos

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \underbrace{\int_0^{t_0} e^{-st} f(t) dt}_{\text{(I)}} + \underbrace{\int_{t_0}^{\infty} e^{-st} f(t) dt}_{\text{(II)}}.$$

A integral (I) existe pela hipótese de que  $f$  é contínua por partes em todo intervalo fechado  $0 \leq t \leq c$ . No caso da integral (II), temos

$$|f(t)| \leq Me^{at} \quad \Rightarrow \quad |e^{-st} f(t)| \leq M |e^{-st}| e^{at}.$$

Escrevendo  $s = \sigma + i\tau$ ,

$$|e^{-st}| = |e^{-\sigma t - i\tau t}| = |e^{-\sigma t}| |e^{-i\tau t}| = |e^{-\sigma t}|.$$

Logo, podemos escrever

$$|e^{-st} f(t)| \leq M |e^{-\sigma t}| e^{at} = M e^{-\sigma t} e^{at} = M e^{-(\sigma-a)t},$$

ou seja,

$$|e^{-st} f(t)| \leq M e^{-(\sigma-a)t}.$$

Com isso, impondo a condição  $\sigma > a$ , a integral (II) é convergente para  $\text{Re}(s) = \sigma > a$ . Assim,  $\mathcal{L}[f](s)$  existe para  $\text{Re}(s) > a$ . ■

Concluimos então que a transformada de Laplace  $F(s)$  em (1.3.3), existe em um domínio contido no semiplano complexo, onde  $\text{Re}(s) = \sigma > a$ , com  $a$  real satisfazendo (1.3.4).

A transformada de Laplace é um operador linear, pois se  $F(s)$  e  $G(s)$  são as transformadas de Laplace das funções  $f(t)$  e  $g(t)$  respectivamente, e  $a$  e  $b$  são constantes, então

$$\mathcal{L}[af + bg](s) = aF(s) + bG(s).$$

Em particular, a função  $f(t) = e^{-at}$  é de ordem exponencial, pois dado  $a > 0$ ,  $|f(t)| = |e^{-at}| \leq 1$  para todo  $t \geq 0$ . Além disso,  $f(t)$  é contínua. Logo, pelo Teorema 1.4,  $\mathcal{L}[f](s)$  existe e é dada por

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-at} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+s)t} dt = -\frac{e^{-(a+s)t}}{s+a} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s+a},$$

se  $\text{Re}(s) > -a$ .

Se  $f(t) = t^n$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , então para  $a > 0$  e  $t \geq 0$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-at} t^n = 0 \quad (\text{basta usar l'Hôpital } n \text{ vezes}),$$

assim  $f$  é de ordem exponencial. Sendo  $f$  contínua,  $\mathcal{L}[f](s)$  existe e é dada por

$$F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \text{com } \operatorname{Re}(s) > 0.$$

Para uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $f(t)$ ,  $\frac{d}{dt}f(t)$ ,  $\frac{d^2}{dt^2}f(t)$ , ...,  $\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}f(t)$  contínuas em  $[a, c] \subset \mathbb{R}$  e  $\frac{d^n}{dt^n}f(t)$  contínua por partes em  $[a, c] \subset \mathbb{R}$ , de modo que existam constantes  $\bar{a}$ ,  $M > 0$  e  $t_0 > 0$  tais que

$$|f(t)| \leq Me^{\bar{a}t}, \quad \left| \frac{d}{dt}f(t) \right| \leq Me^{\bar{a}t}, \quad \dots, \quad \left| \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}f(t) \right| \leq Me^{\bar{a}t},$$

para todo  $t > t_0$ . Então para  $\operatorname{Re}(s) > \bar{a}$ ,

$$\mathcal{L} \left[ \frac{d^n}{dt^n} f \right] (s) = s^n \mathcal{L}[f](s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^j \left[ \left( \frac{d^{n-1-j}}{dt^{n-1-j}} f(t) \right) \Big|_{t=a} \right]. \quad (1.3.5)$$

Para obter (1.3.5), basta fazer  $n$  integrações por partes em  $\mathcal{L} \left[ \frac{d^n}{dt^n} f \right] (s)$ .

## 1.4 Transformada de Laplace inversa

A RC da transformada de Laplace é o que faz a diferença para determinar a transformada de Laplace inversa, já que ela é única.

Escrevendo  $s = \sigma + i\tau$  na equação (1.3.1), temos que

$$F(\sigma + i\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sigma+i\tau)t} f(t) dt,$$

de onde segue que

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma t} f(t) e^{-i\tau t} dt,$$

ou seja,  $F(s)$  é a transformada de Fourier da função  $e^{-\sigma t} f(t)$ . Podemos então obter a função  $e^{-\sigma t} f(t)$  aplicando a transformada de Fourier inversa, isto é,

$$e^{-\sigma t} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma + i\tau) e^{i\tau t} d\tau,$$

ou seja,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma + i\tau) e^{(\sigma+i\tau)t} d\tau.$$

Fazendo a mudança de variáveis  $\sigma + i\tau = s$ , obtemos a representação integral para a transformada de Laplace inversa, dada por

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F](t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{\sigma - i\tau}^{\sigma + i\tau} e^{st} F(s) ds, \quad (1.4.1)$$

onde  $\text{Re}(s) > \sigma_0$ , de modo que todas as singularidades de  $F(s)$  estejam do lado esquerdo à reta  $\text{Re}(s) = \sigma_0$  do plano complexo.

A seguir, alguns teoremas e definições importantes para o cálculo da transformada de Laplace inversa.

**Definição 1.5** (Função analítica). Uma função  $f(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  é **analítica** em um domínio  $D \in \mathbb{C}$ , se  $f(z)$  é definida e diferenciável em todos os pontos de  $D$ . A função  $f(z)$  é dita analítica em  $z_0 \in D$ , se  $f(z)$  for analítica em uma vizinhança de  $z_0$ . Os pontos de  $z \in D$  nos quais  $f(z)$  não é diferenciável, são chamados pontos singulares de  $f$ .

**Definição 1.6** (Função inteira). Uma função  $f(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  é inteira se é analítica em todo o plano complexo e não tem singularidades, exceto no infinito. Toda função inteira admite uma representação da forma

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j, \text{ válida para } |z| < \infty.$$

As funções de variáveis complexas podem ser expandidas em séries de Taylor ou Laurent. A expansão em série de Taylor, em torno de  $z_0$ , é utilizada nos casos em que a função é analítica em uma vizinhança de  $z_0$ , exceto em  $z_0$ . A expansão em série de Laurent, em torno de  $z_0$ , é utilizada quando a função não é analítica em  $z_0$  e em uma vizinhança de  $z_0$ , mas é analítica em uma coroa circular em torno de  $z_0$ .

Se  $f(z)$  é analítica em uma região  $R$ , exceto em  $V_{z_0}$ , que consiste em uma vizinhança de  $z_0$  e no próprio ponto  $z_0$ , que é uma singularidade de  $f$ , então  $f(z)$  possui uma expansão em série de Laurent para todos os pontos próximos de  $z_0$ , exceto em  $V_{z_0}$ . A série de Laurent de  $f(z)$  em torno de  $z = z_0$  é definida da forma

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j (z - z_0)^j, \quad \text{para todo } z \in R \setminus \{V_{z_0}\}, \quad (1.4.2)$$

onde

$$a_j = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{j+1}} dz,$$

com  $j \in \mathbb{Z}$ , e  $C$  uma curva fechada simples contida na região  $R$  que contém  $z_0$ .

Podemos calcular os coeficientes da série (1.4.2), utilizando o Teorema 1.8 e (1.4.3). Para o coeficiente  $a_j$ , a função  $\frac{f(z)}{(z - z_0)^{j+1}}$  tem polo de ordem  $j + 1$  na singularidade  $z = z_0$ .

Fazendo  $j = -1$ , encontramos

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^0} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz,$$

de onde segue que

$$2\pi i a_{-1} = \oint_C f(z) dz.$$

Para efetuar uma integração no plano complexo da forma

$$\int_{\sigma - i\tau}^{\sigma + i\tau} g(s) ds,$$

onde  $g(s)$  tem um número finito de singularidades, usamos o contorno de Bromwich, que consiste em uma curva vertical  $C = \{s = \sigma_0 + i\tau, \text{ com } -\infty < \tau < \infty\}$ . Essa curva vertical é uma linha no plano complexo, paralela ao eixo imaginário, de forma que todas as singularidades de  $g(s)$  estejam à sua esquerda, no semiplano  $\{s = \sigma + i\tau, \text{ com } \sigma < \sigma_0\}$ . Podemos calcular a integral através de uma curva simples fechada no plano complexo, no sentido anti-horário, de modo que as singularidades de  $g(s)$  estejam todas no interior da curva fechada.

**Teorema 1.7** (Cauchy-Goursat). Seja  $f(z)$  uma função analítica em um domínio  $D$ , simplesmente conexo. Se  $C$  é um caminho simples e fechado, com  $C \subseteq D$ , então  $\oint_C f(z) dz = 0$ .

*Demonstração.* A demonstração para este teorema pode ser encontrada em [13]. ■

Se  $f(z)$  tem um polo [13] de ordem  $m$  em  $z = z_i$ , então o resíduo de  $f(z)$  em  $z_i$  é dado por

$$\text{Res}(z_i) = \lim_{z \rightarrow z_i} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_i)^m f(z)], \text{ se } m \geq 1. \quad (1.4.3)$$

**Teorema 1.8** (Teorema dos resíduos). Seja  $f(z)$  uma função analítica no fecho de uma curva fechada simples  $C$ , exceto em um número finito de pontos singulares isolados  $z_1, z_2, z_3, \dots, z_k$ , dentro de  $C$ . Então,

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^k \text{Res}(z_i).$$

Vamos esboçar um cálculo explícito envolvendo a transformada de Laplace inversa. Considere

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 1}.$$

As singularidades de  $F(s)$  são  $s_1 = i$  e  $s_2 = -i$ . Com isso vemos que  $F(s)$  tem polo simples, ou seja, de ordem 1, em  $s_1$  e  $s_2$ , que se encontram do lado esquerdo do semiplano complexo  $\{s = \sigma + i\tau : \sigma < \sigma_0\}$ , conforme a figura a seguir.

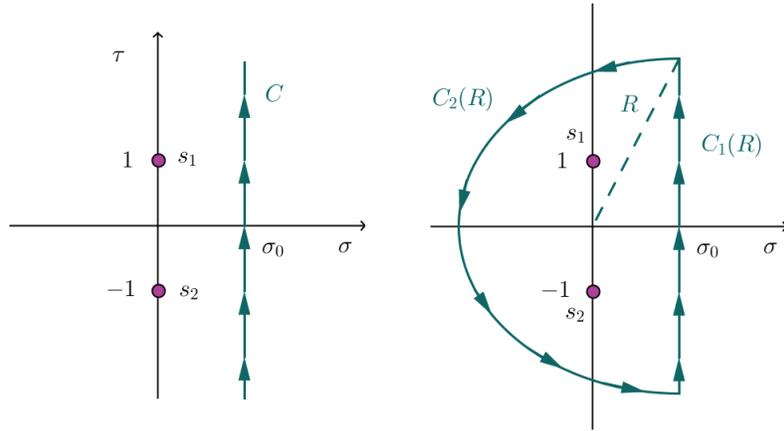


Figura 1.1: Contorno de Bromwich de  $F(s)$ .

Com base no contorno de Bromwich da figura acima, vamos determinar  $\mathcal{L}^{-1}[F](t)$ .

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{-1}[F](t) &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{\sigma_0 - i\tau}^{\sigma_0 + i\tau} e^{st} \frac{1}{s^2 + 1} ds \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{st} \frac{1}{s^2 + 1} ds \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{C_1(R) + C_2(R)} e^{st} \frac{1}{s^2 + 1} ds \\
 &= \frac{1}{2\pi i} 2\pi i \sum_{i=1}^2 \text{Res}(s_i) \\
 &= \text{sen } t.
 \end{aligned}$$

Na próxima seção, apresentamos uma metodologia para efetuar o cálculo da transformada de Laplace inversa sem utilizar um contorno de integração.

## 1.5 Transformada de Laplace inversa sem o uso de um contorno de integração

Poucos anos atrás Berberan discutiu a inversão analítica da transformada de Laplace sem utilizar um contorno de integração [2]. Berberan justifica o cálculo devido a sua importância em problemas envolvendo a lei do decaimento da luminescência que é amplamente utilizada na física, química e ciências biológicas [58]. Nesta seção, faremos um resumo deste trabalho, visto que vamos utilizar tal resultado. Convém ressaltar que o trabalho apresenta alguns erros, mais especificamente, as equações de números (7), (8), (12) e (13) apresentam incoerências matemáticas.

A transformada de Laplace de uma função real  $f(t)$ , definida para  $t > 0$ , é definida na equação (1.3.3) e sua respectiva transformada de Laplace inversa é definida na equação (1.4.1).

Fazendo a mudança de variáveis  $s = \sigma + i\tau$ , com  $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$ , podemos reescrever a transformada de Laplace inversa de  $f(t)$  da seguinte forma

$$f(t) = \frac{e^{\sigma t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau t} F(\sigma + i\tau) d\tau. \quad (1.5.1)$$

Escrevendo  $F(\sigma + i\tau) = \text{Re}[F(\sigma + i\tau)] + i \text{Im}[F(\sigma + i\tau)]$  e  $e^{i\tau t} = \cos(t\tau) + i \text{sen}(t\tau)$ , temos

$$f(t) = \frac{e^{\sigma t}}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [\text{Re}[F(\sigma + i\tau)] \cos(t\tau) - \text{Im}[F(\sigma + i\tau)] \text{sen}(t\tau)] d\tau + \right. \\ \left. + i \int_{-\infty}^{\infty} [\text{Im}[F(\sigma + i\tau)] \cos(t\tau) + \text{Re}[F(\sigma + i\tau)] \text{sen}(t\tau)] d\tau \right\}.$$

Como  $f(t)$  é uma função real, podemos escrever

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\text{Im}[F(\sigma + i\tau)] \cos(t\tau) + \text{Re}[F(\sigma + i\tau)] \text{sen}(t\tau)] d\tau = 0,$$

de onde segue a expressão para  $f(t)$ :

$$f(t) = \frac{e^{\sigma t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\text{Re}[F(\sigma + i\tau)] \cos(t\tau) - \text{Im}[F(\sigma + i\tau)] \text{sen}(t\tau)] d\tau. \quad (1.5.2)$$

A partir da equação (1.3.3), temos que

$$\text{Re}[F(\sigma + i\tau)] = \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} f(t) \cos(t\tau) dt \quad (1.5.3)$$

e

$$\text{Im}[F(\sigma + i\tau)] = - \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} f(t) \text{sen}(t\tau) dt, \quad (1.5.4)$$

com isso, vemos que a função  $\psi(\tau) = [\text{Re}[F(\sigma + i\tau)] \cos(t\tau) - \text{Im}[F(\sigma + i\tau)] \text{sen}(t\tau)]$  é par, desse modo, a equação (1.5.2) pode ser escrita como

$$f(t) = \frac{e^{\sigma t}}{\pi} \int_0^{\infty} [\text{Re}[F(\sigma + i\tau)] \cos(t\tau) - \text{Im}[F(\sigma + i\tau)] \text{sen}(t\tau)] d\tau, \quad (1.5.5)$$

onde  $t > 0$  e  $\sigma > \sigma_0$ . Esta expressão recupera a função cuja transformada de Laplace é conhecida, isto é, explicita a função como uma integral real.

Através do cálculo da transformada de Laplace inversa sem um contorno de integração no plano complexo, com uma conveniente escolha para  $\sigma$ , que é a parte real do número complexo  $s$ , variável da transformada de Laplace de uma função, expressamos algumas integrais impróprias convergentes em termos de uma nova função.

Considere a transformada de Laplace da função exponencial, dada por

$$\mathcal{L}[e^t](s) = \frac{1}{s-1},$$

para  $t > 0$  e  $\text{Re}(s) > 1$ . Escolhendo  $\sigma = 2$  e escrevendo  $s = 2 + i\tau$ , temos

$$\frac{1}{s-1} = \frac{1}{1+i\tau} = \frac{1}{1+\tau^2} - i \frac{\tau}{1+\tau^2}.$$

Assim, pela equação (1.5.3), podemos escrever

$$\frac{1}{1+\tau^2} = \text{Re} [F(2+i\tau)] = \int_0^\infty e^{-2t} e^t \cos(t\tau) dt,$$

ou seja,

$$\frac{1}{1+\tau^2} = \int_0^\infty e^{-t} \cos(t\tau) dt, \quad (1.5.6)$$

para  $\tau \in \mathbb{R}$ .

Por outro lado, pela equação (1.5.4), podemos escrever

$$-\frac{\tau}{1+\tau^2} = \text{Im} [F(2+i\tau)] = - \int_0^\infty e^{-2t} e^t \text{sen}(t\tau) dt,$$

ou seja,

$$\frac{\tau}{1+\tau^2} = \int_0^\infty e^{-t} \text{sen}(t\tau) dt, \quad (1.5.7)$$

para  $\tau \in \mathbb{R}$ .

Em particular, se  $\tau = 0$  na equação (1.5.6), temos que

$$\int_0^\infty e^{-t} dt = 1.$$

Utilizando essa metodologia de transformada de Laplace inversa, podemos mostrar, por exemplo, que não existe uma função  $f(t)$  cuja transformada de Laplace seja  $F(s) = \text{sen } s$ . De fato, vamos supor que exista uma função  $f(t)$  de modo que sua transformada de Laplace  $F(s)$  seja  $F(s) = \text{sen } s$ . Escrevendo  $s = \sigma + i\tau$ , temos que

$$\mathcal{L}[f(t)](\sigma + i\tau) = F(\sigma + i\tau) = \text{sen}(\sigma + i\tau).$$

Utilizando a relação

$$\text{sen } s = \frac{e^{is} - e^{-is}}{2i},$$

temos que

$$F(\sigma + i\tau) = \frac{e^{i(\sigma+i\tau)} - e^{-i(\sigma+i\tau)}}{2i} = \frac{i}{2} (e^\tau e^{-i\sigma} - e^{-\tau} e^{i\sigma}).$$

Fazendo as substituições

$$e^{-i\sigma} = \cos \sigma - i \text{sen } \sigma \quad \text{e} \quad e^{i\sigma} = \cos \sigma + i \text{sen } \sigma,$$

temos

$$F(\sigma + i\tau) = \operatorname{sen} \sigma \left( \frac{e^\tau + e^{-\tau}}{2} \right) + i \cos \sigma \left( \frac{e^\tau - e^{-\tau}}{2} \right),$$

de onde segue que

$$F(\sigma + i\tau) = \operatorname{sen} \sigma \cdot \cosh \tau + i \cos \sigma \cdot \sinh \tau.$$

Separando as partes real e imaginária de  $F(\sigma + i\tau)$ , temos que

$$\operatorname{Re}[F(\sigma + i\tau)] = \operatorname{sen} \sigma \cdot \cosh$$

e

$$\operatorname{Im}[F(\sigma + i\tau)] = \cos \sigma \cdot \sinh \tau.$$

Finalmente, utilização a equação (1.5.5), podemos escrever

$$f(t) = \frac{e^{\sigma t}}{\pi} \int_0^\infty [\operatorname{sen} \sigma \cosh \tau \cos(t\tau) - \cos \sigma \sinh \tau \operatorname{sen}(t\tau)] d\tau. \quad (1.5.8)$$

Através de alguns testes computacionais, verificamos que a integral que define  $f(t)$  na equação (1.5.8) é divergente para os valores de  $\sigma$  que foram testados. Logo, neste caso, não encontramos uma função  $f(t)$  tal que sua transformada de Laplace seja a função  $\operatorname{sen} s$ .

Outras integrais impróprias interessantes podem ser obtidas a partir das funções de Mittag-Leffler, que serão apresentadas no próximo capítulo.

## 1.6 Transformada de Laplace unilateral

No contexto de equações diferenciais, surgem singularidades de descontinuidades em sinais ou funções. Quando isso acontece, devemos considerar essas singularidades e tratá-las de modo específico quando utilizamos a transformada de Laplace unilateral. Em [34] encontramos uma discussão detalhada sobre os limites inferiores de integração na definição da transformada de Laplace, tais como

$$\mathcal{L}_+[f(t)](s) = \int_{0^+}^\infty e^{-st} f(t) dt \quad (1.6.1)$$

e

$$\mathcal{L}_-[f(t)](s) = \int_{0^-}^\infty e^{-st} f(t) dt. \quad (1.6.2)$$

Contudo, considerando a transformada  $\mathcal{L}_+$  como na equação (1.6.1), temos que

$$\mathcal{L}_+[\delta(t)] = 0,$$

enquanto que se considerarmos  $\mathcal{L}_-$  como na equação (1.6.2), temos

$$\mathcal{L}_-[\delta(t)] = 1.$$

Para uma função real  $f(t)$  definida para  $t \geq 0$ , pela equação (1.3.5), podemos escrever a relação

$$\mathcal{L} [f^{(n)}(t)] (s) = s^n \mathcal{L} [f] (s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^j f^{(n-1-j)}(0). \quad (1.6.3)$$

Quando consideramos as transformadas de Laplace unilaterais, conforme definidas nas equações (1.6.1) e (1.6.2), podemos obter as expressões

$$\mathcal{L}_+ [f^{(n)}(t)] (s) = s^n \mathcal{L} [f] (s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^j f^{(n-1-j)}(0^+) \quad (1.6.4)$$

e

$$\mathcal{L}_- [f^{(n)}(t)] (s) = s^n \mathcal{L} [f] (s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^j f^{(n-1-j)}(0^-). \quad (1.6.5)$$

Em particular, se  $n = 1$  na equação (1.6.4), podemos escrever

$$\mathcal{L}_+ [f'(t)] (s) = s \mathcal{L} [f] (s) - f(0^+).$$

Tomando o limite com  $s \rightarrow \infty$  na equação acima, temos que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \{ \mathcal{L}_+ [f'(t)] (s) \} = \lim_{s \rightarrow \infty} \{ s \mathcal{L} [f] (s) - f(0^+) \},$$

ou seja,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left\{ \int_{0^+}^{\infty} e^{-st} f'(t) dt \right\} = \lim_{s \rightarrow \infty} \{ s \mathcal{L} [f] (s) \} - f(0^+),$$

de onde segue que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \{ s \mathcal{L} [f] (s) \} = f(0^+). \quad (1.6.6)$$

Considere a versão clássica do problema associado à desaceleração de nêutrons, proposta e estudada por Sneddon [55]. Essa equação indica que o movimento da desaceleração de nêutrons em um material é semelhante à difusão de calor. Além disso, o autor salienta a importância do estudo da difusão de nêutrons, principalmente na teoria da reação nuclear em cadeia. Esse problema pode ser descrito através da equação diferencial parcial

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + T(x, t),$$

onde  $u(x, t)$  é denominada densidade da desaceleração de nêutrons, que representa o número de nêutrons por unidade de volume por unidade de tempo em que atingem a idade  $t$ ,  $x$  representa a variável espacial e  $T(x, t)$  é uma função fonte. Consideramos o caso em que  $T(x, t) = \delta(x)\delta(t)$ ,

que representa o problema em um meio infinito, com isso, o problema clássico da desaceleração de nêutrons é descrito da seguinte forma

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) + \delta(x)\delta(t) \\ u(x, 0) &= \delta(x) \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u_t(x, t) &= 0. \end{aligned} \tag{1.6.7}$$

A seguir, apresentamos duas resoluções para esse problema, uma utilizando a transformada de Laplace definida em (1.6.1) e outra sem utilizar a transformada de Laplace.

Aplicando a transformada de Fourier em (1.6.7), obtemos

$$\begin{aligned} U_t(\omega, t) &= -\omega^2 U(\omega, t) + \delta(t) \\ U(\omega, 0) &= 1, \end{aligned} \tag{1.6.8}$$

onde  $U(\omega, t)$  é a transformada de Fourier de  $u(x, t)$  com relação à variável  $x$ . A condição  $U(\omega, 0) = 1$  corresponde à filtragem de  $\delta(x)$ . Podemos reescrever a equação (1.6.8) da forma

$$\frac{d}{dt} e^{\omega^2 t} U(\omega, t) = \delta(t) e^{\omega^2 t}.$$

Integrando ambos os membros da equação acima, obtemos

$$e^{\omega^2 t} U(\omega, t) = c + \int_0^t \delta(\tau) e^{\omega^2 \tau} d\tau,$$

ou seja,

$$e^{\omega^2 t} U(\omega, t) = c + \int_0^t \delta(\tau) e^{-\omega^2(0-\tau)} d\tau = c + (\delta * g)(0),$$

onde  $g(t) = e^{-\omega^2 t}$ . Dessa forma, temos que

$$e^{\omega^2 t} U(\omega, t) = c + g(0) = c + 1.$$

Utilizando a condição inicial, podemos escrever

$$e^{\omega^2 0} U(\omega, 0) = c + 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = c + 1 \quad \Rightarrow \quad c = 0.$$

Logo,

$$U(\omega, t) = e^{-\omega^2 t}.$$

Aplicando agora a transformada de Fourier inversa na equação acima, obtemos a solução<sup>3</sup>

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/4t}, \quad \text{para } t > 0. \tag{1.6.9}$$

Vale ressaltar que se utilizarmos a transformada de Laplace para resolver o problema (1.6.7), vamos encontrar uma solução diferente se não considerarmos a singularidade da distribuição delta

---

<sup>3</sup>Veja [55], página 215.

de Dirac em  $t = 0$ . De fato, aplicando a transformada de Laplace em (1.6.8) e usando a relação (1.6.6), obtemos

$$sU(\omega, s) - U(\omega, 0) = -\omega^2 U(\omega, s) + 1,$$

onde  $U(\omega, s)$  é a transformada de Laplace de  $U(\omega, t)$ .

Utilizando a condição inicial  $U(\omega, 0)$ , segue que

$$U(\omega, s) = \frac{2}{s + \omega^2}.$$

Aplicando a transformada de Laplace inversa em  $U(\omega, s)$  e em seguida a transformada de Fourier inversa, temos

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/4t}. \quad (1.6.10)$$

Note que a solução em (1.6.10) difere da solução apresentada por Sneddon, como na equação (1.6.9), por um fator  $1/2$ . Para obter a solução correta para esse problema utilizando a transformada de Laplace, devemos considerar a singularidade de  $\delta(t)$ , neste caso, devemos tomar a transformada de Laplace conforme definida em (1.6.1). Além disso, utilizando a expressão (1.6.4), obtemos

$$sU(\omega, s) - U(\omega, 0^+) = -\omega^2 U(\omega, s) + \mathcal{L}_+ [\delta(t)],$$

de onde segue que

$$sU(\omega, s) - 1 = -\omega^2 U(\omega, s) + 0,$$

ou seja,

$$U(\omega, s) = \frac{1}{s + \omega^2}.$$

Tomando a transformada de Laplace inversa e em seguida a transformada de Fourier inversa, obtemos a solução

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/4t}, \quad \text{para } t > 0,$$

como na equação (1.6.9).

# Capítulo 2

## Funções Especiais

As clássicas funções especiais, a função hipergeométrica e seus casos particulares, emergem naturalmente como solução de algumas equações diferenciais ordinárias. Vários autores não incluem as funções gama e beta na classe de funções especiais por não serem solução de uma equação diferencial.

Neste capítulo, devido a sua importância em uma série de aplicações, apresentamos algumas funções especiais, incluindo além das funções gama e beta, as funções hipergeométricas.

### 2.1 Função gama

A função gama, também conhecida como função de Euler de segunda espécie, é uma das mais importantes funções da física matemática, que além de generalizar o conceito de fatorial, é utilizada no cálculo das transformadas de Laplace e Fourier de algumas funções. Algumas distribuições de probabilidades são definidas em termos da função gama. Na mecânica quântica não relativista, a função gama é utilizada, por exemplo, para expressar a dispersão de Coulomb durante uma colisão entre duas partículas carregadas [6].

Ao olharmos para a função fatorial de um número natural, isto nos dá os pontos  $(0, 1)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(3, 6)$ ,  $(4, 24)$ ,  $(5, 120)$ ,  $(6, 720)$ , .... Marcando estes pontos no plano, existe uma forma de uni-los e preencher o gráfico para mais valores se considerarmos a função gama, definida para os reais positivos, podemos até ampliar o domínio dessa função a um conjunto contido no conjunto dos números complexos, como pode ser visto adiante.

A função gama é definida como uma integral imprópria em termos de outra função. Ela é uma função complexa de uma variável complexa,  $\Gamma : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , e é definida da seguinte forma

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \text{para } \operatorname{Re}(z) > 0. \quad (2.1.1)$$

Na integral (2.1.1), para  $z \in \mathbb{N}$ , a função

$$f(t) = t^{z-1} e^{-t} = \frac{e^{-t}}{t^{1-z}}$$

possui singularidades em  $t = 0$ . Se  $z \in D = \{\sigma + i\tau, \text{ com } \sigma, \tau \in \mathbb{R}/\sigma > 0\}$ , a integral em (2.1.1) converge e a função gama é analítica, ou seja,  $\Gamma(z)$  está bem definida para  $\text{Re}(z) > 0$ .

### 2.1.1 Relações envolvendo a função gama

A seguir, algumas relações que podemos obter da função gama.

- Relação da função gama com a transformada de Laplace:

Fazendo a mudança de variáveis  $t = sv$  em (2.1.1), obtemos

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty (sv)^{z-1} e^{-sv} s \, dv = s^z \int_0^\infty v^{z-1} e^{-sv} \, dv,$$

de onde segue que

$$\Gamma(z) = s^z \mathcal{L}[f](s), \quad \text{com } f(t) = t^{z-1} u(t), \quad (2.1.2)$$

onde  $u(t)$  é a função degrau unitário, definida em (1.3.2).

- Fatorial:

Se  $z \in \mathbb{N}$ , a função gama é uma generalização do conceito de fatorial. De fato, fazendo  $z = n + 1$  em (2.1.2), temos

$$\Gamma(n + 1) = s^{n+1} \mathcal{L}[t^n].$$

Como  $\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$ , segue que

$$\Gamma(n + 1) = s^{n+1} \frac{n!}{s^{n+1}} = n!$$

- Gaussiana:

Seja  $z = \frac{1}{2}$  em (2.1.1). Efetuando a mudança de variável  $t = x^2$ , obtemos

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = 2 \int_0^\infty e^{-x^2} dx = 2 \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

- Relação funcional:

Fazendo integração por partes em  $\Gamma(z + 1) = \int_0^\infty t^z e^{-t} dt$ , temos

$$\int_0^\infty t^z e^{-t} dt = t^z (-e^{-t}) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-t} z t^{z-1} dt = z \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = z \Gamma(z).$$

Logo, podemos escrever

$$\Gamma(z+1) = z \Gamma(z), \quad \text{para } \operatorname{Re}(z) > 0. \quad (2.1.3)$$

• Reflexão:

Para  $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$ , é possível obter a expressão

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z)$$

efetuando uma integração no plano complexo [5]. O resultado dessa integração é uma função trigonométrica

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}, \quad \text{para } 0 < \operatorname{Re}(z) < 1. \quad (2.1.4)$$

### 2.1.2 Extensão da função gama

A função gama converge para valores de  $z \in \mathbb{C}$ , com  $\operatorname{Re}(z) > 0$ . A fim de estender essa função a todo o plano complexo, vamos escrever a integral em (2.1.1), da seguinte forma

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = \underbrace{\int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt}_{I_1} + \underbrace{\int_1^\infty t^{z-1} e^{-t} dt}_{I_2}.$$

A integral  $I_2$  converge para todo  $z$  complexo, pois  $e^{-t}$  decresce mais rapidamente do que qualquer potência de  $t$ . Nosso problema agora, consiste em analisar a integral  $I_1$ . Podemos reescrever  $I_1$  da seguinte forma

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt \\ &= \int_0^1 t^{z+n} \left[ \frac{e^{-t} - (1-t + t^2/2! + \dots + (-1)^n t^n/n!)}{t^{n+1}} \right] dt + \sum_{k=0}^n \int_0^1 \frac{(-1)^k t^{z-1+k}}{k!} dt \\ &= \int_0^1 t^{z+n} \left[ \frac{e^{-t} - (1-t + t^2/2! + \dots + (-1)^n t^n/n!)}{t^{n+1}} \right] dt + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k! (z+k)}. \end{aligned}$$

Fazendo  $n \rightarrow \infty$ , o primeiro termo, que é uma integral, vai para zero porque

$$e^{-t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{k!},$$

sobrando apenas o somatório. Assim,

$$I_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (z+k)}.$$

Com isso, podemos escrever a função  $\Gamma(z)$  da forma

$$\Gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(z+k)} + \int_1^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt. \quad (2.1.5)$$

A expressão na equação (2.1.5) é chamada de expansão de Mittag-Leffler da função gama. Através dessa expressão notamos que a função gama é analítica em todos os pontos do plano complexo exceto nos pontos  $\mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ , que são os polos da função gama. Podemos então usar essa expressão para determinar  $\Gamma(z)$ , com  $\text{Re}(z) < 0$  e  $z \notin \mathbb{Z}_-$ .

A seguir, temos a representação gráfica para a função  $f(z) = f(\sigma + i\tau) = |\Gamma(\sigma + i\tau)|$ , para  $-4 < \sigma < 4$  e  $-3 < \tau < 3$ , bem como alguns cortes feitos em alguns valores de  $\sigma$ , conforme as Figuras 2.1, 2.2, 2.3 e 2.4.

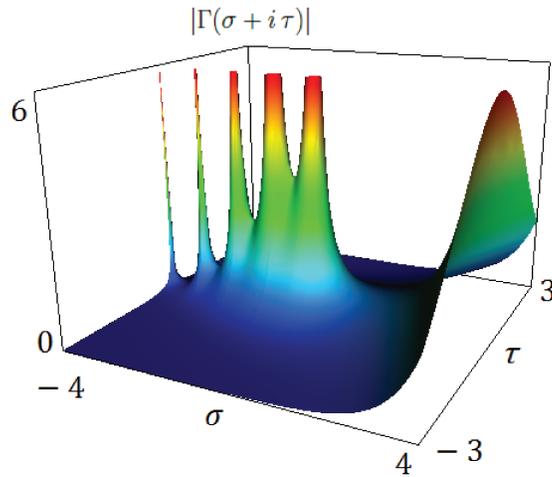


Figura 2.1: Função  $f(\sigma + i\tau) = |\Gamma(\sigma + i\tau)|$ .

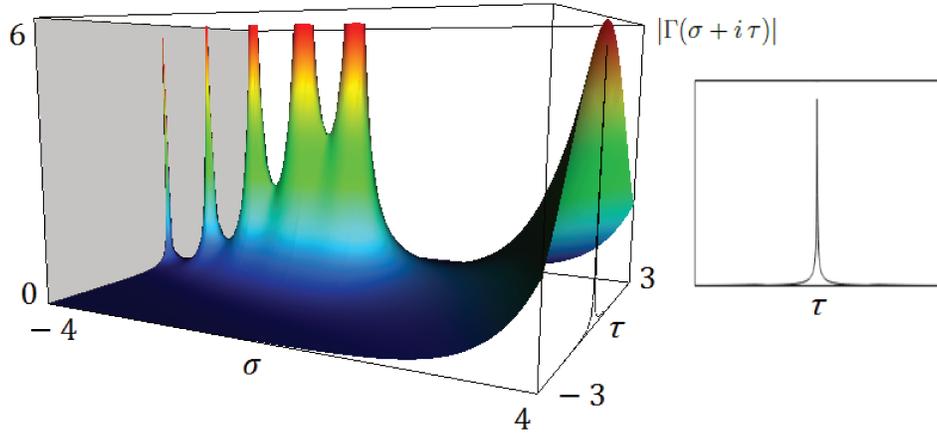


Figura 2.2: Corte da função  $|\Gamma(\sigma + i\tau)|$  em  $\sigma \cong -3,9$ .

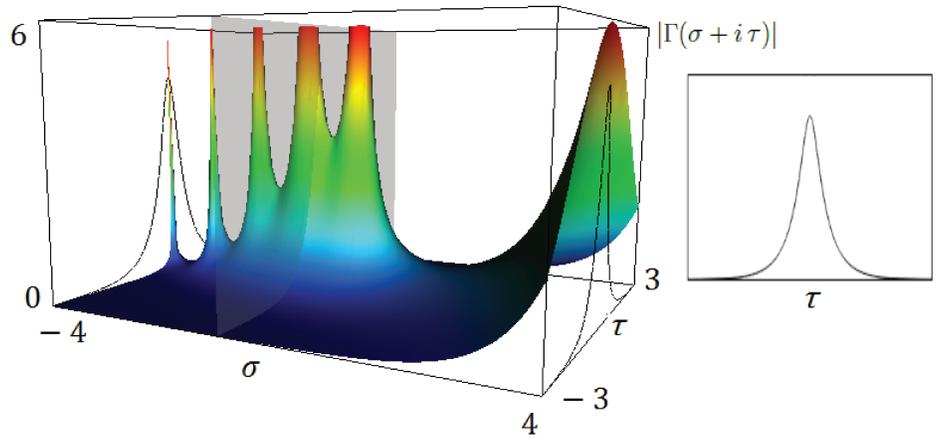


Figura 2.3: Corte da função  $|\Gamma(\sigma + i\tau)|$  em  $\sigma \cong -0,8$ .

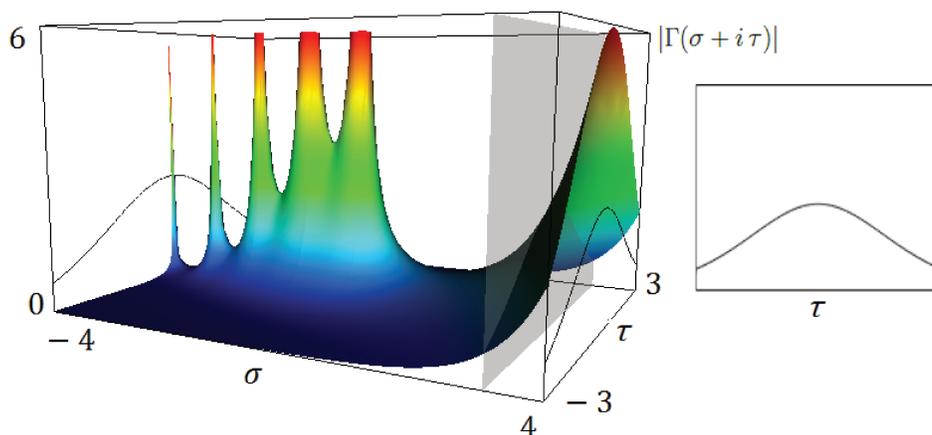


Figura 2.4: Corte da função  $|\Gamma(\sigma + i\tau)|$  em  $\sigma \cong 3,3$ .

A representação gráfica da função gama, no caso particular em que  $\Gamma : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_- \rightarrow \mathbb{R}$ , é como na figura a seguir.

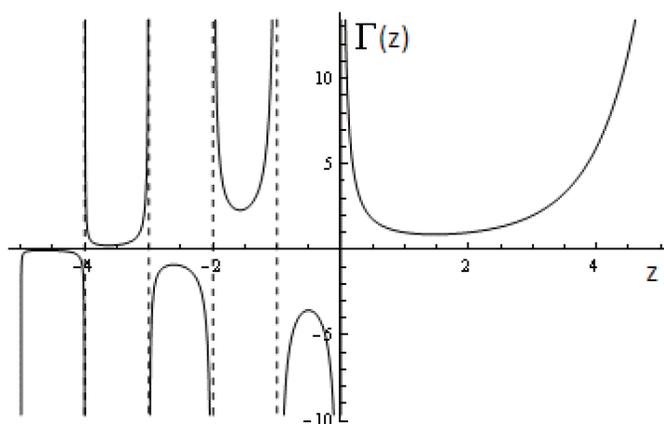


Figura 2.5: Função  $\Gamma(z)$  para  $-5 < z < 5$ .

Podemos obter a seguinte relação envolvendo a inversa da função gama:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{\sigma_0 - i\tau}^{\sigma_0 + i\tau} e^s s^{-z} ds, \quad \text{com } \sigma_0 > 0, \quad (2.1.6)$$

onde a integral no membro direito da equação (2.1.6) está bem definida em todo o plano complexo. De fato, por (2.1.2), temos que

$$\Gamma(z) = s^z \mathcal{L} [t^{z-1}] \quad \Rightarrow \quad s^{-z} \Gamma(z) = \mathcal{L} [t^{z-1}],$$

de onde segue que

$$s^{-z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \mathcal{L} [t^{z-1}].$$

Aplicando a transformada de Laplace inversa em ambos os membros da igualdade acima, temos

$$\mathcal{L}^{-1} [s^{-z}] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{\Gamma(z)} \mathcal{L} [t^{z-1}] \right],$$

ou seja,

$$\mathcal{L}^{-1} [s^{-z}] = \frac{1}{\Gamma(z)} t^{z-1}.$$

Agora,

$$\mathcal{L}^{-1} [s^{-z}] = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{\sigma_0 - i\tau}^{\sigma_0 + i\tau} e^{st} s^{-z} ds, \quad \text{com } \sigma_0 > 0.$$

Dessa forma, podemos escrever a seguinte igualdade

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{\sigma_0 - i\tau}^{\sigma_0 + i\tau} e^{st} s^{-z} ds = \frac{1}{\Gamma(z)} t^{z-1}.$$

Como  $t$  é arbitrário, podemos tomar  $t = 1$ , obtendo a relação da equação (2.1.6).

A função  $f(z) = \frac{1}{\Gamma(z)}$  também pode ser obtida pela aproximação de Stirling [17]. Essa aproximação é dada por

$$\frac{1}{\Gamma(z)} \cong \sqrt{\frac{z}{2\pi}} e^z z^{-z} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e}{z}\right)^z z^{\frac{1}{2}}. \quad (2.1.7)$$

A seguir, o gráfico para a função  $f(z) = \frac{1}{\Gamma(z)}$ , no caso particular em que  $z \in \mathbb{R}$ .

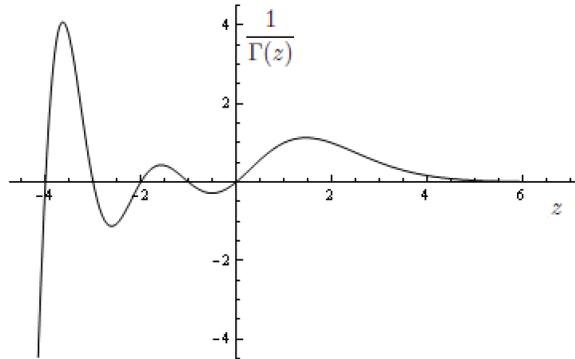


Figura 2.6: Função  $\frac{1}{\Gamma(z)}$  para  $-4,5 < z < 7$ .

### 2.1.3 Função gama incompleta

A partir da definição da função gama, podemos introduzir as chamadas funções gama incompletas, denotadas por  $\gamma(\alpha, w)$  e  $\Gamma(\alpha, w)$ . Essas funções são definidas para  $\alpha \in \mathbb{C}$ , com  $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ , respectivamente, por

$$\gamma(\alpha, w) = \int_0^w t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \quad (2.1.8)$$

e

$$\Gamma(\alpha, w) = \int_w^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \quad (2.1.9)$$

Note que, a partir destas duas equações, podemos escrever que

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{w \rightarrow \infty} \gamma(\alpha, w) = \Gamma(\alpha, 0) = \gamma(\alpha, w) + \Gamma(\alpha, w).$$

## 2.2 Função beta

A função beta, também conhecida como função de Euler de primeira espécie, é uma função complexa de duas variáveis complexas,  $B : D \times D \rightarrow \mathbb{C}$ , onde  $D \subset \mathbb{C}$ . Uma representação integral da função beta  $B(x, y)$  é dada por

$$B(x, y) = \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du,$$

definida para  $\operatorname{Re}(x) > 0$  e  $\operatorname{Re}(y) > 0$ . Fazendo a mudança de variável

$$t = \frac{u}{1+u},$$

obtemos

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad \text{para } \operatorname{Re}(x), \operatorname{Re}(y) > 0. \quad (2.2.1)$$

Podemos escrever a função beta em termos da função gama, da seguinte forma:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Através da relação acima, é fácil ver que vale a relação de simetria  $B(x, y) = B(y, x)$ .

No caso particular em que  $m, n \in \mathbb{N}^*$ , temos que  $B(m, n) \leq 1$ , pois

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!} < 1.$$

A figura a seguir é a representação gráfica da função beta.

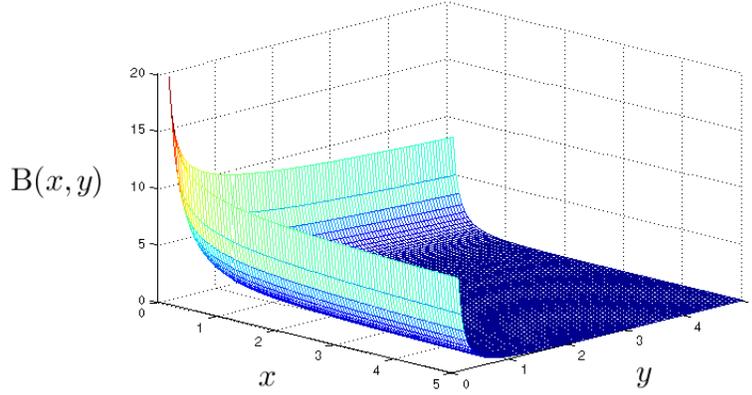


Figura 2.7: Função  $B(x, y)$  para  $0 < x, y < 5$ .

Note que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} B(x, y) = 0$  e  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} B(x, y) = \infty$ .

## 2.3 Função hipergeométrica

A função hipergeométrica generalizada, também conhecida como função de Gauss, é definida pela série

$${}_pF_q(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q; z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_j \cdots (\alpha_p)_j z^j}{(\beta_1)_j \cdots (\beta_q)_j j!}, \quad (2.3.1)$$

onde  $(\alpha_i)_j$  e  $(\beta_l)_j$ , com  $i = 1, \dots, p$  e  $l = 1, \dots, q$  ( $p, q \in \mathbb{N}$ ), denotam o símbolo de Pochhammer, que é definido da seguinte forma

$$(\gamma)_\nu := \frac{\Gamma(\gamma + \nu)}{\Gamma(\gamma)}. \quad (2.3.2)$$

Em (2.3.1),  $\alpha_i, \beta_l \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$ , para  $i = 1, \dots, p$  e  $l = 1, \dots, q$ , além disso,  $\text{Re}(\alpha_i) > 0$  e  $\text{Re}(\beta_l) > 0$ .

Se  $p \leq q$ , a série  ${}_pF_q(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q; z)$  é absolutamente convergente para todos os valores de  $z \in \mathbb{C}$ . Quando  $p = q + 1$ , a série é absolutamente convergente para  $|z| < 1$ .

Como caso particular dos parâmetros, a partir da função hipergeométrica, no caso em que  $p = q = 1$ , obtemos a função hipergeométrica confluyente, também conhecida como função de Kummer, dada por

$${}_1F_1(\alpha; \beta; z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_j z^j}{(\beta)_j j!}. \quad (2.3.3)$$

Essa série é convergente para todo  $z \in \mathbb{C}$ .

Se considerarmos,  $p = q = 0$ , então

$${}_0F_0(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} = e^z = {}_1F_1(\alpha; \alpha; z),$$

onde  ${}_1F_1(\alpha; \alpha; z)$  é um caso particular da função hipergeométrica confluyente  ${}_1F_1(\alpha; \beta; z)$ .

Por outro lado, se  $p = 1$  e  $q = 0$ , então

$${}_1F_0(\alpha; z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + j)}{\Gamma(\alpha)} \frac{z^j}{j!}.$$

Utilizando a equação (2.1.1) para escrever  $\Gamma(\alpha + j)$ , temos que

$${}_1F_0(\alpha; z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha+j-1} \frac{z^j}{j!} dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(zt)^j}{j!} dt.$$

Fazendo a substituição

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(zt)^j}{j!} dt = e^{zt}$$

na equação acima, temos que

$${}_1F_0(\alpha; z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} e^{zt} dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} e^{-t(1-z)} t^{\alpha-1} dt.$$

Com a mudança de variáveis  $t(1-z) = u$ , podemos escrever

$${}_1F_0(\alpha; z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (1-z)^{-\alpha} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\alpha-1} du = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} (1-z)^{-\alpha} = (1-z)^{-\alpha}.$$

Logo,

$${}_1F_0(\alpha; z) = (1-z)^{-\alpha}, \quad \text{para } |z| < 1.$$

### 2.3.1 Representação integral

A representação integral para a função hipergeométrica confluyente  ${}_1F_1(\alpha; \beta; z)$  e para a função hipergeométrica  ${}_2F_1(\alpha_1, \alpha_2; \beta; z)$ , pode ser obtida como a seguir.

Partindo da definição da função hipergeométrica confluyente, temos que

$${}_1F_1(\alpha; \beta; z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_j}{(\beta)_j} \frac{z^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + j)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta + j)} \frac{z^j}{j!}.$$

Fazendo a substituição

$$\frac{\Gamma(\alpha + j)}{\Gamma(\beta + j)} = \frac{B(\alpha + j, \beta - \alpha)}{\Gamma(\beta - \alpha)},$$

obtemos

$$\begin{aligned}
{}_1F_1(\alpha; \beta; z) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)} \sum_{j=0}^{\infty} B(\alpha+j, \beta-\alpha) \frac{z^j}{j!} \\
&\stackrel{(2.2.1)}{=} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)} \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^1 t^{\alpha+j-1} (1-t)^{\beta-\alpha-1} \frac{z^j}{j!} dt \\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-\alpha-1} \left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(zt)^j}{j!} \right) dt \\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-\alpha-1} e^{zt} dt.
\end{aligned}$$

Assim, podemos escrever

$${}_1F_1(\alpha; \beta; z) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-\alpha-1} e^{zt} dt, \quad (2.3.4)$$

com  $\operatorname{Re}(\beta) > \operatorname{Re}(\alpha) > 0$  e  $|z| < 1$ .

No próximo capítulo, mais especificamente na Seção 3.4, expressamos as funções de Mittag-Leffler através de integrais impróprias e obtemos como caso particular, por meio dessas representações, outra forma integral, uma integral imprópria, para a função hipergeométrica confluyente  ${}_1F_1(\alpha; \beta; t)$ , no caso em que  $t > 0$  e  $\beta > 0$ .

Para encontrar a representação integral para a função hipergeométrica  ${}_2F_1(\alpha_1, \alpha_2; \beta; z)$ , assim como fizemos para a função hipergeométrica confluyente, podemos, a partir da definição da função, escrever

$${}_2F_1(\alpha_1, \alpha_2; \beta; z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_j (\alpha_2)_j}{(\beta)_j} \frac{z^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha_1+j)\Gamma(\alpha_2+j)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\beta+j)} \frac{z^j}{j!}.$$

Fazendo a substituição

$$\frac{\Gamma(\alpha_2+j)}{\Gamma(\beta+j)} = \frac{B(\alpha_2+j, \beta-\alpha_2)}{\Gamma(\beta-\alpha_2)},$$

obtemos

$$\begin{aligned}
{}_2F_1(\alpha_1, \alpha_2; \beta; z) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\beta-\alpha_2)} \sum_{j=0}^{\infty} B(\alpha_2+j, \beta-\alpha_2) \frac{\Gamma(\alpha_1+j)}{\Gamma(\alpha_1)} \frac{z^j}{j!} \\
&\stackrel{(2.2.1)}{=} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\beta-\alpha_2)} \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^1 t^{\alpha_2+j-1} (1-t)^{\beta-\alpha_2-1} \frac{\Gamma(\alpha_1+j)}{\Gamma(\alpha_1)} \frac{z^j}{j!} dt,
\end{aligned}$$

ou seja,

$${}_2F_1(\alpha_1, \alpha_2; \beta; z) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\beta-\alpha_2)} \int_0^1 t^{\alpha_2-1} (1-t)^{\beta-\alpha_2-1} \left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha_1+j)}{\Gamma(\alpha_1)} \frac{(zt)^j}{j!} \right) dt. \quad (2.3.5)$$

Pela equação (2.1.1), podemos reescrever  $\Gamma(\alpha_1 + j)$  no somatório dentro da integral na equação (2.3.5), obtendo

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha_1 + j)}{\Gamma(\alpha_1)} \frac{(zt)^j}{j!} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\xi} \xi^{\alpha_1 + j - 1} \frac{(zt)^j}{j!} d\xi \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^{\infty} e^{-\xi} \xi^{\alpha_1 - 1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\xi zt)^j}{j!} d\xi \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^{\infty} e^{-\xi} \xi^{\alpha_1 - 1} e^{(\xi zt)} d\xi \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^{\infty} e^{-\xi(1-tz)} \xi^{\alpha_1 - 1} d\xi.
\end{aligned}$$

Introduzindo a mudança de variável  $u = \xi(1 - zt)$ , temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha_1 + j)}{\Gamma(\alpha_1)} \frac{(zt)^j}{j!} &= (1 - zt)^{-\alpha_1} \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\alpha_1 - 1} du \\
&= (1 - zt)^{-\alpha_1} \frac{\Gamma(\alpha_1)}{\Gamma(\alpha_1)} = (1 - zt)^{-\alpha_1}.
\end{aligned}$$

Assim, podemos reescrever a equação (2.3.5) da forma

$${}_2F_1(\alpha_1, \alpha_2; \beta; z) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\beta - \alpha_2)} \int_0^1 t^{\alpha_2 - 1} (1 - t)^{\beta - \alpha_2 - 1} (1 - zt)^{-\alpha_1} dt, \quad (2.3.6)$$

com  $\text{Re}(\beta) > \text{Re}(\alpha_2) > 0$  e  $|\arg(1 - z)| \leq \pi - \epsilon$ , com  $0 < \epsilon < \pi$ .

## 2.3.2 Relação com a função gama incompleta

Podemos relacionar a função hipergeométrica confluyente  ${}_1F_1(\alpha; \beta; z)$  com a função gama incompleta, no caso particular em que  $\beta = \alpha + 1$ . Temos que

$${}_1F_1(\alpha; \alpha + 1; -z) \stackrel{(2.3.4)}{=} \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1)} \int_0^1 t^{\alpha - 1} e^{-zt} dt = \alpha \int_0^1 t^{\alpha - 1} e^{-zt} dt.$$

Fazendo a mudança de variável  $zt = u$ , podemos escrever

$${}_1F_1(\alpha; \alpha + 1; -z) = \alpha z^{-\alpha} \int_0^z u^{\alpha - 1} e^{-u} du \stackrel{(2.1.8)}{=} \alpha z^{-\alpha} \gamma(\alpha, z),$$

de onde segue que

$$\gamma(\alpha, z) = z^\alpha (\alpha)^{-1} {}_1F_1(\alpha; \alpha + 1; -z). \quad (2.3.7)$$

# Capítulo 3

## Funções de Mittag-Leffler

Neste capítulo, apresentamos a função de Mittag-Leffler de um parâmetro [42], introduzida em 1903, bem como as funções de Mittag-Leffler com dois e três parâmetros. Apresentamos ainda sua transformada de Laplace, sua representação integral via transformada de Laplace inversa sem um contorno de integração no caso de funções de Mittag-Leffler reais, bem como sua relação com a função hipergeométrica confluyente.

A função com dois parâmetros [59] foi introduzida em 1905. Em 1971, Prabhakar [48] introduziu a função de três parâmetros. Atualmente existem estudos sobre as funções de Mittag-Leffler com  $n$  parâmetros. As funções de Mittag-Leffler são generalizações da função exponencial.

### 3.1 Função de Mittag-Leffler de um parâmetro

A função de Mittag-Leffler de um parâmetro  $E_\alpha : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , é uma função complexa de uma variável complexa, e parâmetro complexo  $\alpha$ . Essa função foi introduzida em 1903, pelo matemático sueco Gösta Mittag-Leffler [42]. Ela é definida da forma

$$E_\alpha(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + 1)}, \quad \text{com } \operatorname{Re}(\alpha) > 0. \quad (3.1.1)$$

Pela Definição 1.6, a função  $E_\alpha(z)$  é uma função inteira, pois é analítica em todo o plano complexo e não tem singularidades.

**Definição 3.1** (Ordem de uma função inteira). Uma função inteira não constante é de ordem finita  $\rho = \inf \{\lambda\}$ , se

$$|f(z)| \leq e^{|z|^\lambda}, \text{ para todo } |z| > r > 0.$$

A função de Mittag-Leffler de um parâmetro é tal que

$$|E_\alpha(z)| \leq e^{|z|^{\frac{1}{\operatorname{Re}(\alpha)}}},$$

para todo  $|z| > r > 0$ . Logo, é de ordem  $\rho = \frac{1}{\operatorname{Re}(\alpha)}$ .

**Definição 3.2** (Tipo de uma função inteira). Uma função inteira, não constante, de ordem finita  $\rho$ , é de tipo finito  $\sigma = \inf \{b\} > 0$ , se  $b$  satisfaz

$$|f(z)| \leq e^{b|z|^\rho}, \text{ para todo } |z| > r > 0, \text{ com } b < \infty.$$

Se  $f(z)$  não satisfaz a desigualdade para todo  $b$  finito, então a função é dita de tipo máximo ou de tipo infinito ( $\sigma = 0$ ). Uma função inteira, de ordem 1 e tipo finito é uma função de ordem exponencial.

Pela Definição 3.2, a função de Mittag-Leffler de um parâmetro é de tipo  $\sigma = 1$ .

Por exemplo, a função  $E_1(z) = e^z$  é de ordem  $\rho = 1$  e tipo  $\sigma = 1$ , enquanto que a função  $f(z) = \frac{1}{\Gamma(z)}$  é de ordem  $\rho = 1$  e tipo máximo.

A fórmula de duplicação [5] expressa uma função de Mittag-Leffler de parâmetro  $2\alpha$  em função das funções de Mittag-Leffler de parâmetro  $\alpha$ , da forma

$$E_{2\alpha}(z) = \frac{1}{2} \left\{ E_\alpha \left( z^{\frac{1}{2}} \right) + E_\alpha \left[ - \left( z^{\frac{1}{2}} \right) \right] \right\}. \quad (3.1.2)$$

Podemos representar a função de Mittag-Leffler através de uma integral, no caso em que  $\alpha = \frac{1}{k}$ , com  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ .

Começamos com a representação integral da função  $E_{\frac{1}{k}}(z)$ , no caso em que  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ . Pela equação (3.1.1), temos que

$$E_\alpha(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + 1)}.$$

Derivando ambos os membros da equação acima, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} [E_\alpha(z)] &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{jz^{j-1}}{\Gamma(\alpha j + 1)} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{jz^{j-1}}{\Gamma(\alpha j + 1)} = \\ &= \left\{ \frac{z^0}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{2z^1}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \cdots + \frac{(k-1)z^{k-2}}{\Gamma[(k-1)\alpha + 1]} + \frac{kz^{k-1}}{\Gamma(k\alpha + 1)} + \frac{(k+1)z^k}{\Gamma[(k+1)\alpha + 1]} + \cdots \right\} \end{aligned}$$

Da relação em (2.1.3), temos que  $\Gamma(k\alpha + 1) = (k\alpha) \Gamma(k\alpha)$ . Assim,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} [E_\alpha(z)] &= \left\{ \frac{z^0}{\alpha\Gamma(\alpha)} + \frac{2z^1}{2\alpha\Gamma(2\alpha)} + \cdots + \frac{(k-1)z^{k-2}}{(k-1)\alpha\Gamma[(k-1)\alpha]} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{kz^{k-1}}{k\alpha\Gamma(k\alpha)} + \frac{(k+1)z^k}{(k+1)\alpha\Gamma[(k+1)\alpha]} + \cdots \right\} = \\ &= \left\{ \frac{z^0}{\alpha\Gamma(\alpha)} + \frac{z^1}{\alpha\Gamma(2\alpha)} + \cdots + \frac{z^{k-2}}{\alpha\Gamma[(k-1)\alpha]} + \frac{z^{k-1}}{\alpha\Gamma(k\alpha)} + \frac{z^k}{\alpha\Gamma[(k+1)\alpha]} + \cdots \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \frac{1}{\alpha} \left[ \frac{z^0}{\Gamma(\alpha)} + \frac{z^1}{\Gamma(2\alpha)} + \cdots + \frac{z^{k-2}}{\Gamma[(k-1)\alpha]} \right] + \frac{z^{k-1}}{\alpha} \left[ \frac{1}{\Gamma(k\alpha)} + \frac{z^1}{\Gamma[(k+1)\alpha]} + \cdots \right] \right\} \\
&= \left\{ \left[ \frac{1}{\alpha} \sum_{\mu=1}^{k-1} \frac{z^{\mu-1}}{\Gamma(\mu\alpha)} \right] + \left[ \frac{z^{k-1}}{\alpha} \left( \frac{1}{\Gamma(k\alpha)} + \frac{z^1}{\Gamma[(k+1)\alpha]} + \cdots \right) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Logo, podemos escrever

$$\frac{d}{dz} [E_\alpha(z)] = \left\{ \left[ \frac{1}{\alpha} \sum_{\mu=1}^{k-1} \frac{z^{\mu-1}}{\Gamma(\mu\alpha)} \right] + \left[ \frac{z^{k-1}}{\alpha} \left( \frac{1}{\Gamma(k\alpha)} + \frac{z^1}{\Gamma[(k+1)\alpha]} + \cdots \right) \right] \right\}.$$

Considerando agora  $\alpha = \frac{1}{k}$ , obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} [E_{\frac{1}{k}}(z)] &= \left\{ \left[ k \sum_{\mu=1}^{k-1} \frac{z^{\mu-1}}{\Gamma(\mu/k)} \right] + \left[ kz^{k-1} \left( \frac{1}{\Gamma(1)} + \frac{z^1}{\Gamma(1 + (\frac{1}{k}))} + \cdots \right) \right] \right\} \\
&= \left[ k \sum_{\mu=1}^{k-1} \frac{z^{\mu-1}}{\Gamma(\mu/k)} \right] + kz^{k-1} E_{\frac{1}{k}}(z).
\end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\frac{d}{dz} [E_{\frac{1}{k}}(z)] = kz^{k-1} E_{\frac{1}{k}}(z) + k \sum_{\mu=1}^{k-1} \frac{z^{\mu-1}}{\Gamma(\mu/k)}. \quad (3.1.3)$$

Como  $E_{\frac{1}{k}}(0) = 1$ , podemos escrever o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} [E_{\frac{1}{k}}(z)] = kz^{k-1} E_{\frac{1}{k}}(z) + k \sum_{\mu=1}^{k-1} \frac{z^{\mu-1}}{\Gamma(\mu/k)} \\ E_{\frac{1}{k}}(0) = 1 \end{cases}$$

Multiplicando a equação (3.1.3) por  $e^{-(z^k)}$ , temos

$$e^{-(z^k)} \frac{d}{dz} [E_{\frac{1}{k}}(z)] = kz^{k-1} e^{-(z^k)} E_{\frac{1}{k}}(z) + k e^{-(z^k)} \sum_{\mu=1}^{k-1} \frac{z^{\mu-1}}{\Gamma(\mu/k)} \quad \Rightarrow$$

$$e^{-(z^k)} \frac{d}{dz} [E_{\frac{1}{k}}(z)] - kz^{k-1} e^{-(z^k)} E_{\frac{1}{k}}(z) = k e^{-(z^k)} \sum_{\mu=1}^{k-1} \frac{z^{\mu-1}}{\Gamma(\mu/k)} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dz} [e^{-(z^k)} E_{\frac{1}{k}}(z)] = k e^{-(z^k)} \sum_{\mu=1}^{k-1} \frac{z^{\mu-1}}{\Gamma(\mu/k)} \quad \Rightarrow$$

$$e^{-(z^k)} E_{\frac{1}{k}}(z) = \left[ \int_0^z k e^{-(\epsilon^k)} \sum_{\mu=1}^{k-1} \frac{\epsilon^{\mu-1}}{\Gamma(\mu/k)} d\epsilon \right] + c,$$

onde  $c$  é uma constante.

Finalmente, aplicando a condição  $E_{\frac{1}{k}}(0) = 1$  na equação acima, encontramos  $c = 1$ , de onde segue

$$E_{\frac{1}{k}}(z) = e^{z^k} + e^{z^k} \left[ \int_0^z k e^{-(\epsilon^k)} \sum_{\mu=1}^{k-1} \frac{\epsilon^{\mu-1}}{\Gamma(\mu/k)} d\epsilon \right]. \quad (3.1.4)$$

Por outro lado, se o parâmetro  $\alpha$  da função de Mittag-Leffler for racional, ou seja  $\alpha = \frac{h}{k}$ , com  $h, k \in \mathbb{N}$  e primos entre si, então a função de Mittag-Leffler neste parâmetro possui a representação

$$E_{\frac{h}{k}}(z) = \frac{1}{h} \sum_{\mu=0}^{h-1} E_{\frac{1}{k}} \left( z^{\frac{1}{h}} e^{\frac{2\mu\pi i}{h}} \right), \quad (3.1.5)$$

cuja demonstração pode ser encontrada em [17, 59].

Usando a fórmula de duplicação (3.1.2) e a representação (3.1.5), mencionamos a seguir alguns casos particulares de interesse, onde representamos as funções de Mittag-Leffler em função de outras funções.

- Função  $E_2(z)$ :

$$E_2(z) = \frac{1}{2} \left\{ E_1 \left( z^{\frac{1}{2}} \right) + E_1 \left[ - \left( z^{\frac{1}{2}} \right) \right] \right\} = \frac{e^{\sqrt{z}} + e^{-\sqrt{z}}}{2} = \cosh(\sqrt{z}).$$

A seguir, o gráfico das funções  $E_{1,9}(z)$ ,  $E_2(z)$  e  $E_{2,1}(z)$ .

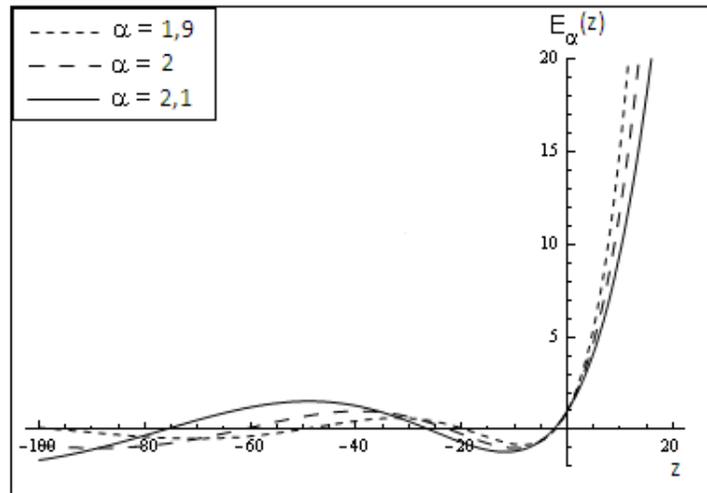


Figura 3.1: Função  $E_\alpha(z)$ , para  $\alpha = 1,9$ ; 2 e 2,1.

• Função  $E_3(z)$ :

$$E_3(z) = \frac{1}{3} \left[ e^{z^{\frac{1}{3}}} + 2e^{-\left(\frac{1}{2}z^{\frac{1}{3}}\right)} \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}z^{\frac{1}{3}}\right) \right].$$

De fato, pela fórmula de duplicação, podemos escrever

$$E_3(z) = \frac{1}{2} \left\{ E_{\frac{3}{2}}\left(z^{\frac{1}{2}}\right) + E_{\frac{3}{2}}\left[-\left(z^{\frac{1}{2}}\right)\right] \right\}.$$

Fazendo  $h = 3$  e  $k = 2$  na equação (3.1.5), podemos escrever

$$\begin{aligned} E_{\frac{3}{2}}\left(z^{\frac{1}{2}}\right) &= \frac{1}{3} \sum_{\mu=0}^{3-1} E_{\frac{1}{2}}\left[\left(z^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{2\mu\pi i}{3}}\right] \\ &= \frac{1}{3} \sum_{\mu=0}^2 E_{\frac{1}{2}}\left(z^{\frac{1}{6}} e^{\frac{2\mu\pi i}{3}}\right) \\ &= \frac{1}{3} \left[ E_{\frac{1}{2}}\left(z^{\frac{1}{6}}\right) + E_{\frac{1}{2}}\left(z^{\frac{1}{6}} e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) + E_{\frac{1}{2}}\left(z^{\frac{1}{6}} e^{\frac{4\pi i}{3}}\right) \right]. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} E_{\frac{3}{2}}\left(-z^{\frac{1}{2}}\right) &= \frac{1}{3} \sum_{\mu=0}^{3-1} E_{\frac{1}{2}}\left[-\left(z^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{2\mu\pi i}{3}}\right] \\ &= \frac{1}{3} \sum_{\mu=0}^2 E_{\frac{1}{2}}\left(-z^{\frac{1}{6}} e^{\frac{2\mu\pi i}{3}}\right) \\ &= \frac{1}{3} \left[ E_{\frac{1}{2}}\left(-z^{\frac{1}{6}}\right) + E_{\frac{1}{2}}\left(-z^{\frac{1}{6}} e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) + E_{\frac{1}{2}}\left(-z^{\frac{1}{6}} e^{\frac{4\pi i}{3}}\right) \right]. \end{aligned}$$

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} E_3(z) &= \frac{1}{6} \left[ E_{\frac{1}{2}}\left(z^{\frac{1}{6}}\right) + E_{\frac{1}{2}}\left(z^{\frac{1}{6}} e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) + E_{\frac{1}{2}}\left(z^{\frac{1}{6}} e^{\frac{4\pi i}{3}}\right) + E_{\frac{1}{2}}\left(-z^{\frac{1}{6}}\right) + E_{\frac{1}{2}}\left(-z^{\frac{1}{6}} e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) + \right. \\ &\quad \left. + E_{\frac{1}{2}}\left(-z^{\frac{1}{6}} e^{\frac{4\pi i}{3}}\right) \right] \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{2} \left[ E_{\frac{1}{2}}\left(z^{\frac{1}{6}}\right) + E_{\frac{1}{2}}\left(-z^{\frac{1}{6}}\right) \right] \right\} + \frac{1}{6} \left[ E_{\frac{1}{2}}\left(z^{\frac{1}{6}} e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) + E_{\frac{1}{2}}\left(-z^{\frac{1}{6}} e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) + \right. \\ &\quad \left. + E_{\frac{1}{2}}\left(z^{\frac{1}{6}} e^{\frac{4\pi i}{3}}\right) + E_{\frac{1}{2}}\left(-z^{\frac{1}{6}} e^{\frac{4\pi i}{3}}\right) \right] \\ &= \frac{1}{3} E_1\left(z^{\frac{1}{3}}\right) + \frac{1}{6} \left[ E_{\frac{1}{2}}\left(z^{\frac{1}{6}} e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) + E_{\frac{1}{2}}\left(-z^{\frac{1}{6}} e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) + E_{\frac{1}{2}}\left(z^{\frac{1}{6}} e^{\frac{4\pi i}{3}}\right) + E_{\frac{1}{2}}\left(-z^{\frac{1}{6}} e^{\frac{4\pi i}{3}}\right) \right] \\ &= \frac{1}{3} e^{z^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{6} \left[ E_{\frac{1}{2}}\left(z^{\frac{1}{6}} e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) + E_{\frac{1}{2}}\left(-z^{\frac{1}{6}} e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) + E_{\frac{1}{2}}\left(z^{\frac{1}{6}} e^{\frac{4\pi i}{3}}\right) + E_{\frac{1}{2}}\left(-z^{\frac{1}{6}} e^{\frac{4\pi i}{3}}\right) \right]. \end{aligned}$$

Fazendo  $k = 2$  na equação (3.1.4), temos

$$\begin{aligned}
E_{\frac{1}{2}}\left(z^{\frac{1}{6}}e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) &= e^{\left(z^{\frac{1}{6}}e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^2} + e^{\left(z^{\frac{1}{6}}e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^2} \left( \int_0^{\left(z^{\frac{1}{6}}e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)} 2e^{-(\epsilon^2)} \sum_{\mu=1}^{2-1} \frac{\epsilon^{\mu-1}}{\Gamma(\mu/2)} d\epsilon \right) \\
&= e^{\left(z^{\frac{1}{3}}e^{\frac{4\pi i}{3}}\right)} + e^{\left(z^{\frac{1}{3}}e^{\frac{4\pi i}{3}}\right)} \left( \int_0^{\left(z^{\frac{1}{6}}e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)} 2e^{-(\epsilon^2)} \sum_{\mu=1}^1 \frac{\epsilon^{\mu-1}}{\Gamma(\mu/2)} d\epsilon \right) \\
&= e^{\left(z^{\frac{1}{3}}e^{\frac{4\pi i}{3}}\right)} + e^{\left(z^{\frac{1}{3}}e^{\frac{4\pi i}{3}}\right)} \left( \int_0^{\left(z^{\frac{1}{6}}e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)} \frac{2e^{-(\epsilon^2)}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} d\epsilon \right).
\end{aligned}$$

Analogamente, segue

$$\begin{aligned}
E_{\frac{1}{2}}\left(-z^{\frac{1}{6}}e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) &= e^{\left(z^{\frac{1}{3}}e^{\frac{4\pi i}{3}}\right)} + e^{\left(z^{\frac{1}{3}}e^{\frac{4\pi i}{3}}\right)} \left( \int_0^{\left(-z^{\frac{1}{6}}e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)} \frac{2e^{-(\epsilon^2)}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} d\epsilon \right) \\
&= e^{\left(z^{\frac{1}{3}}e^{\frac{4\pi i}{3}}\right)} - e^{\left(z^{\frac{1}{3}}e^{\frac{4\pi i}{3}}\right)} \left( \int_0^{\left(z^{\frac{1}{6}}e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)} \frac{2e^{-(\epsilon^2)}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} d\epsilon \right).
\end{aligned}$$

Além disso,

$$E_{\frac{1}{2}}\left(z^{\frac{1}{6}}e^{\frac{4\pi i}{3}}\right) = e^{\left(z^{\frac{1}{3}}e^{\frac{8\pi i}{3}}\right)} + e^{\left(z^{\frac{1}{3}}e^{\frac{8\pi i}{3}}\right)} \left( \int_0^{\left(z^{\frac{1}{6}}e^{\frac{4\pi i}{3}}\right)} \frac{2e^{-(\epsilon^2)}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} d\epsilon \right)$$

e

$$E_{\frac{1}{2}}\left(-z^{\frac{1}{6}}e^{\frac{4\pi i}{3}}\right) = e^{\left(z^{\frac{1}{3}}e^{\frac{8\pi i}{3}}\right)} - e^{\left(z^{\frac{1}{3}}e^{\frac{8\pi i}{3}}\right)} \left( \int_0^{\left(z^{\frac{1}{6}}e^{\frac{4\pi i}{3}}\right)} \frac{2e^{-(\epsilon^2)}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} d\epsilon \right).$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned}
E_3(z) &= \frac{1}{3}e^{z^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{6} \left[ E_{\frac{1}{2}}\left(z^{\frac{1}{6}}e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) + E_{\frac{1}{2}}\left(-z^{\frac{1}{6}}e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) + E_{\frac{1}{2}}\left(z^{\frac{1}{6}}e^{\frac{4\pi i}{3}}\right) + E_{\frac{1}{2}}\left(-z^{\frac{1}{6}}e^{\frac{4\pi i}{3}}\right) \right] \\
&= \frac{1}{3}e^{z^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{6} \left[ 2e^{\left(z^{\frac{1}{3}}e^{\frac{8\pi i}{3}}\right)} + 2e^{\left(z^{\frac{1}{3}}e^{\frac{4\pi i}{3}}\right)} \right].
\end{aligned}$$

Da fórmula de Euler<sup>1</sup>, segue que

$$e^{\frac{4\pi i}{3}} = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad e$$

---

<sup>1</sup>Fórmula de Euler:  $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$ .

$$e^{\frac{8\pi i}{3}} = \cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{8\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Logo, podemos escrever

$$\begin{aligned} E_3(z) &= \frac{1}{3}e^{z^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{6} \left[ 2e^{\left((z^{\frac{1}{3}})\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)} + 2e^{\left((z^{\frac{1}{3}})\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)} \right] \\ &= \frac{1}{3}e^{z^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{6} \left[ 2e^{\left(-\frac{1}{2}z^{\frac{1}{3}}-i\frac{\sqrt{3}}{2}z^{\frac{1}{3}}\right)} + 2e^{\left(-\frac{1}{2}z^{\frac{1}{3}}+i\frac{\sqrt{3}}{2}z^{\frac{1}{3}}\right)} \right] \\ &= \frac{1}{3}e^{z^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{6} \left[ 2e^{\left(-\frac{1}{2}z^{\frac{1}{3}}\right)} e^{\left(-i\frac{\sqrt{3}}{2}z^{\frac{1}{3}}\right)} + 2e^{\left(-\frac{1}{2}z^{\frac{1}{3}}\right)} e^{\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}z^{\frac{1}{3}}\right)} \right] \\ &= \frac{1}{3}e^{z^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{6} \left\{ 2e^{\left(-\frac{1}{2}z^{\frac{1}{3}}\right)} \left[ e^{\left(-i\frac{\sqrt{3}}{2}z^{\frac{1}{3}}\right)} + e^{\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}z^{\frac{1}{3}}\right)} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{3}e^{z^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{6} \left[ 2e^{\left(-\frac{1}{2}z^{\frac{1}{3}}\right)} 2 \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}z^{\frac{1}{3}}\right) \right]. \end{aligned}$$

A seguir, o gráfico das funções  $E_{2,9}(z)$ ,  $E_3(z)$  e  $E_{3,1}(z)$ .

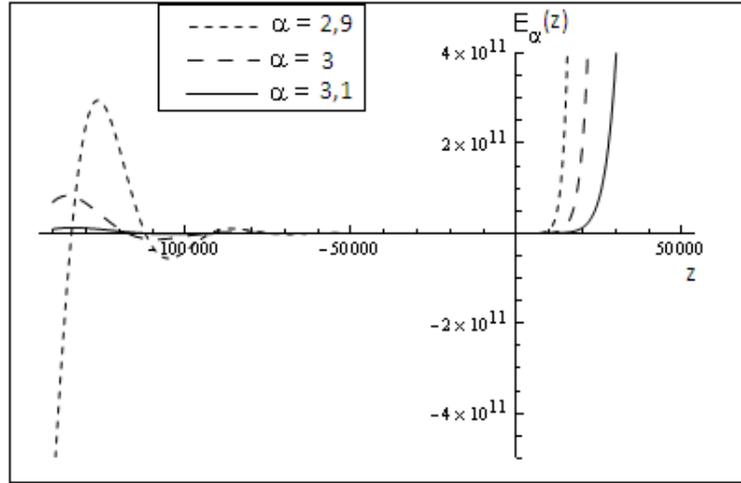


Figura 3.2: Função  $E_\alpha(z)$ , para  $\alpha = 2,9$ ;  $3$  e  $3,1$ .

• Função  $E_4(z)$ :

$$E_4(z) = \frac{1}{2} \left\{ E_2\left(z^{\frac{1}{2}}\right) + E_2\left[-\left(z^{\frac{1}{2}}\right)\right] \right\} = \frac{1}{2} \left[ \cosh\left(z^{\frac{1}{4}}\right) + \cos\left(z^{\frac{1}{4}}\right) \right].$$

Na figura a seguir, temos o gráfico das funções  $E_{3,9}(z)$ ,  $E_4(z)$  e  $E_{4,1}(z)$ .

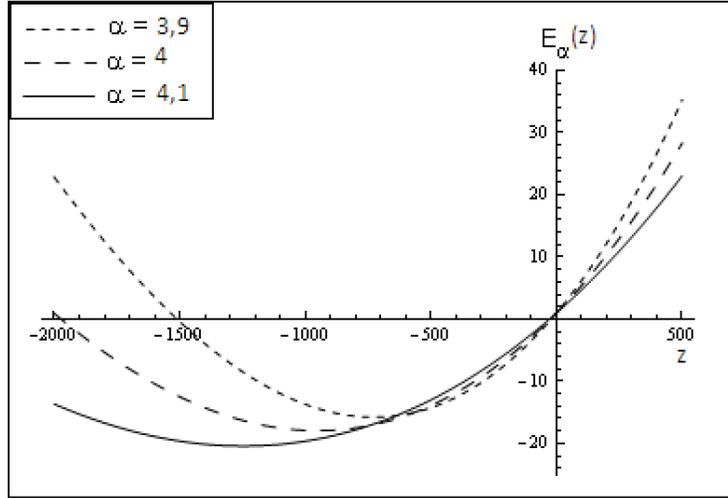


Figura 3.3: Função  $E_\alpha(z)$ , para  $\alpha = 3,9$ ;  $4$  e  $4,1$ .

De acordo com Pollard [47], a função de Mittag-Leffler de um parâmetro definida por

$$x \rightarrow E_\alpha(-x), \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

é completamente monotônica para  $\alpha \in (0, 1]$ , isto é,

$$(-1)^n D^n [E_\alpha(-x)] \geq 0, \quad \text{para todo } n = 0, 1, 2, \dots$$

Funções completamente monotônicas são muito utilizadas em análise numérica, teoria de probabilidade [22], entre outras áreas [29].

A seguir o gráfico da função completamente monotônica  $E_{0,7}(-x)$ , para  $0 \leq x \leq 10$ .

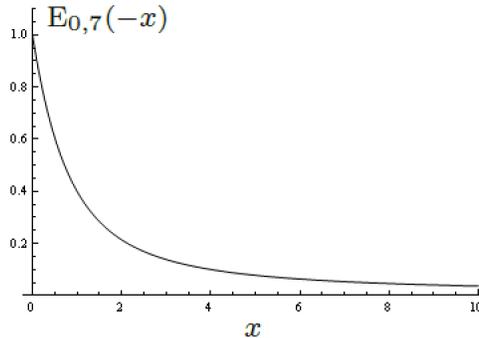


Figura 3.4: Função  $E_{0,7}(-x)$ .

Por outro lado, se considerarmos  $\alpha = 1, 1$ , a função de Mittag-Leffler  $E_{1,1}(-x)$  não é monotônica. Segue abaixo o gráfico para essa função e para a função  $(-1)^n D^n [E_{1,1}(-x)]$ , no caso particular

em que  $n = 1$ , onde podemos observar que existem valores de  $x$  para os quais  $(-1)^1 D^1 [E_{1,1}(-x)] < 0$ , o que comprova que a função  $E_{1,1}(-x)$  não é monotônica.

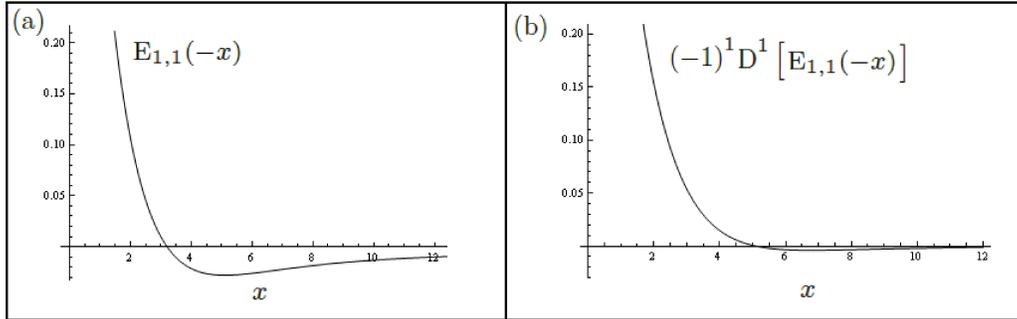


Figura 3.5: Função  $E_{1,1}(-x)$ .

Recentemente encontramos muitos trabalhos que estudam a monotonicidade de funções obtidas em termos das funções de Mittag-Leffler [11, 12, 41].

A função de Mittag-Leffler

$$x \rightarrow E_{\alpha}(-x^{\alpha}), \quad x \in \mathbb{R}^{+},$$

também é completamente monotônica para  $\alpha \in (0, 1]$ . Mainardi [38] em seu recente trabalho, discute propriedades dessa função, que aparece como solução de uma particular equação diferencial fracionária [23].

## 3.2 Função de Mittag-Leffler generalizada

Uma função de Mittag-Leffler generalizada é aquela que apresenta mais de um parâmetro. Em 1905, Wiman [59] introduziu a função de Mittag-Leffler de dois parâmetros  $E_{\alpha,\beta}(z)$ , que é uma generalização da função  $E_{\alpha}(z)$ , conhecida como função de Wiman. Em 1971, Prabhakar [48] introduziu a função de três parâmetros  $E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z)$ . Atualmente existem estudos sobre as funções de Mittag-Leffler com quatro ou mais parâmetros [57].

### 3.2.1 Função de Mittag-Leffler de dois parâmetros

A função de Mittag-Leffler de dois parâmetros  $E_{\alpha,\beta} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , é uma função complexa de uma variável complexa e parâmetros complexos  $\alpha$  e  $\beta$ .

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + \beta)}, \quad \text{com } \text{Re}(\alpha), \text{Re}(\beta) > 0. \quad (3.2.1)$$

A função de Mittag-Leffler de dois parâmetros é uma função inteira, de ordem  $\rho = \frac{1}{\text{Re}(\alpha)}$  e tipo  $\sigma = 1$ .

Em particular, tomando  $\beta = 1$  na equação (3.2.1), temos que  $E_{\alpha,1}(z) = E_{\alpha}(z)$ .

Segue abaixo o gráfico para as funções  $E_{3,2}(z)$  e  $E_{2,9,1,9}(z)$ , no caso em que  $-10.000 < z < 2.000$ .

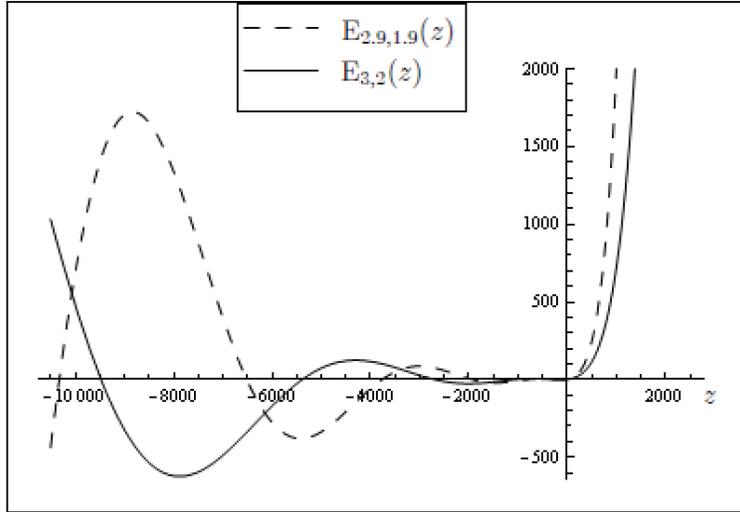


Figura 3.6: Função  $E_{\alpha,\beta}(z)$ .

Schneider [54] mostrou que a função

$$x \rightarrow E_{\alpha,\beta}(-x), \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

é completamente monotônica para  $\alpha \in (0, 1]$  e  $\beta \geq \alpha$ , isto é,

$$(-1)^n D^n [E_{\alpha,\beta}(-x)] \geq 0, \quad \text{para todo } n = 0, 1, 2, \dots$$

### 3.2.2 Função de Mittag-Leffler de três parâmetros

A função de Mittag-Leffler de três parâmetros  $E_{\alpha,\beta}^\gamma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , é uma função complexa de uma variável complexa e parâmetros complexos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ . Essa função foi introduzida por Prabhakar [48] e é definida da forma

$$E_{\alpha,\beta}^\gamma(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_j}{\Gamma(\alpha j + \beta)} \frac{z^j}{j!}, \quad (3.2.2)$$

com  $\text{Re}(\alpha)$ ,  $\text{Re}(\beta)$ ,  $\text{Re}(\gamma) > 0$  e  $(\gamma)_j$  denota o símbolo de Pochhammer (2.3.2).

A função  $E_{\alpha,\beta}^\gamma(z)$ , assim como as funções  $E_{\alpha,\beta}(z)$  e  $E_\alpha(z)$ , também é uma função inteira de ordem  $\rho = \frac{1}{\text{Re}(\alpha)}$ .

Substituindo o símbolo de Pochhammer (2.3.2) na função de Mittag-Leffler de três parâmetros, podemos escrever

$$E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_j}{\Gamma(\alpha j + \beta)} \frac{z^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + \beta)} \frac{\Gamma(\gamma + j)}{\Gamma(\gamma) \Gamma(j + 1)}.$$

Note que  $E_{\alpha,\beta}^1(z) = E_{\alpha,\beta}(z)$ .

O comportamento assintótico da função  $E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z)$  pode ser obtido através da fórmula em [53], dada por

$$E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z) = \frac{(-z)^{\gamma}}{\Gamma(\gamma)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma + j)}{\Gamma(\beta - \alpha(\gamma + j))} \frac{(-z)^{-j}}{j!}, \quad \text{para } |z| > 1. \quad (3.2.3)$$

### 3.3 Relações envolvendo as funções de Mittag-Leffler

Nesta seção expressamos a função de Mittag-Leffler de três parâmetros em termos da função de Mittag-Leffler de dois parâmetros, e a partir disso, expressamos a função de dois parâmetros em termos da função de um parâmetro. Temos que

$$E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + \beta)} \frac{\Gamma(\gamma + j)}{\Gamma(j + 1)}.$$

Fazendo a substituição

$$\frac{\Gamma(\gamma + j)}{\Gamma(j + 1)} = \frac{1}{\Gamma(1 - \gamma)} B(j + \gamma, 1 - \gamma),$$

temos

$$E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \frac{1}{\Gamma(1 - \gamma)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + \beta)} B(j + \gamma, 1 - \gamma).$$

Por (2.2.1),

$$B(j + \gamma, 1 - \gamma) = \int_0^1 t^{j+\gamma-1} (1-t)^{-\gamma} dt,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z) &= \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \frac{1}{\Gamma(1 - \gamma)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + \beta)} \int_0^1 t^{j+\gamma-1} (1-t)^{-\gamma} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \frac{1}{\Gamma(1 - \gamma)} \int_0^1 t^{\gamma-1} (1-t)^{-\gamma} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(zt)^j}{\Gamma(\alpha j + \beta)} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \frac{1}{\Gamma(1 - \gamma)} \int_0^1 t^{\gamma-1} (1-t)^{-\gamma} E_{\alpha,\beta}(zt) dt. \end{aligned}$$

Usando a igualdade em (2.1.4), obtemos a expressão

$$E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z) = \frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} \int_0^1 t^{\gamma-1} (1-t)^{-\gamma} E_{\alpha,\beta}(zt) dt, \quad \text{para } 0 < \operatorname{Re}(\gamma) < 1. \quad (3.3.1)$$

A relação na equação (3.3.1) é válida apenas para  $0 < \operatorname{Re}(\gamma) < 1$ , isso acontece porque em  $\Gamma(1-\gamma)$  devemos ter  $\operatorname{Re}(1-\gamma) > 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(\gamma) < 1$ . Em  $\Gamma(\gamma)$ , devemos ter  $\operatorname{Re}(\gamma) > 0$ . Logo,  $0 < \operatorname{Re}(\gamma) < 1$ .

Ressaltando que, em [56] encontramos a expressão (3.3.1), obtida de forma diferente, onde foi necessário o uso de derivadas fracionárias. Além disso, no artigo existe um erro, no lugar de  $\gamma$  que aparece no denominador da fração, é  $\pi$ .

Para expressar a função de três parâmetros em termos da função de dois parâmetros, para  $\operatorname{Re}(\gamma) \geq 1$ , escrevemos

$$\begin{aligned} E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + \beta)} \frac{\Gamma(\gamma + j)}{\Gamma(\gamma) \Gamma(j + 1)} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + 1)} \frac{\Gamma(\gamma + j)}{\Gamma(\gamma) \Gamma(j + 1)} \frac{\Gamma(\alpha j + 1)}{\Gamma(\alpha j + \beta)}. \end{aligned}$$

Agora,

$$\frac{\Gamma(\alpha j + 1)}{\Gamma(\alpha j + \beta)} = \frac{1}{\Gamma(\beta - 1)} B(\alpha j + 1, \beta - 1) = \frac{1}{\Gamma(\beta - 1)} \int_0^1 t^{\alpha j} (1-t)^{\beta-2} dt.$$

Assim,

$$\begin{aligned} E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + 1)} \frac{\Gamma(\gamma + j)}{\Gamma(\gamma) \Gamma(j + 1)} \frac{1}{\Gamma(\beta - 1)} \int_0^1 t^{\alpha j} (1-t)^{\beta-2} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta - 1)} \int_0^1 (1-t)^{\beta-2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(zt^{\alpha})^j}{\Gamma(\alpha j + 1)} \frac{\Gamma(\gamma + j)}{\Gamma(\gamma) \Gamma(j + 1)} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta - 1)} \int_0^1 (1-t)^{\beta-2} E_{\alpha,1}^{\gamma}(zt^{\alpha}) dt. \end{aligned}$$

Logo, obtemos

$$E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z) = \frac{1}{\Gamma(\beta - 1)} \int_0^1 (1-t)^{\beta-2} E_{\alpha,1}^{\gamma}(zt^{\alpha}) dt, \quad \text{para } \operatorname{Re}(\beta) > 1. \quad (3.3.2)$$

A partir das equações (3.3.1) e (3.3.2), podemos escrever

$$E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} \int_0^1 t^{\gamma-1} (1-t)^{-\gamma} E_{\alpha,\beta}(zt) dt, & \text{se } 0 < \operatorname{Re}(\gamma) < 1, \\ \frac{1}{\Gamma(\beta - 1)} \int_0^1 (1-t)^{\beta-2} E_{\alpha,1}^{\gamma}(zt^{\alpha}) dt, & \text{se } \operatorname{Re}(\gamma) \geq 1 \text{ e } \operatorname{Re}(\beta) > 1. \end{cases}$$

Utilizando as expressões obtidas, podemos considerar alguns casos particulares.

Fazendo  $\gamma = 1$  em (3.3.2), obtemos a função de Mittag-Leffler de dois parâmetros em termos da função de Mittag-Leffler de um parâmetro,

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\Gamma(\beta-1)} \int_0^1 (1-t)^{\beta-2} E_\alpha(zt^\alpha) dt, \quad \text{se } \text{Re}(\beta) > 1. \quad (3.3.3)$$

Em (3.3.3), se em particular  $\beta = 2$ , então

$$E_{\alpha,2}(z) = \frac{1}{\Gamma(1)} \int_0^1 (1-t)^{2-2} E_\alpha(zt^\alpha) dt = \int_0^1 E_\alpha(zt^\alpha) dt.$$

Fazendo agora  $\alpha = 2$ ,

$$E_{2,2}(z) = \int_0^1 E_2(zt^2) dt = \int_0^1 \cosh \sqrt{(zt^2)} dt = \int_0^1 \cosh(t\sqrt{z}) dt = \frac{\sinh \sqrt{z}}{\sqrt{z}}.$$

Se  $\beta = 3$  em (3.3.3), então

$$\begin{aligned} E_{\alpha,3}(z) &= \frac{1}{\Gamma(2)} \int_0^1 (1-t)^{3-2} E_\alpha(zt^\alpha) dt = \int_0^1 (1-t) E_\alpha(zt^\alpha) dt = \\ &= \int_0^1 E_\alpha(zt^\alpha) dt - \int_0^1 t E_\alpha(zt^\alpha) dt. \end{aligned}$$

Substituindo a primeira integral por  $E_{\alpha,2}(z)$  e fazendo a mudança de variável

$$\frac{t^2}{2} = u$$

na segunda integral, temos

$$E_{\alpha,3}(z) = E_{\alpha,2}(z) - \int_0^{\frac{1}{2}} E_\alpha\left(z(2u)^{\frac{\alpha}{2}}\right) du.$$

Fazendo  $\alpha = 2$  na expressão anterior, temos

$$\begin{aligned} E_{2,3}(z) &= E_{2,2}(z) - \int_0^{\frac{1}{2}} E_2\left(z(2u)^{\frac{2}{2}}\right) du = E_{2,2}(z) - \int_0^{\frac{1}{2}} E_2(2zu) du = \\ &= \frac{\sinh \sqrt{z}}{\sqrt{z}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \cosh \sqrt{(2zu)} du = \frac{1}{z} (\cosh \sqrt{z} - 1). \end{aligned}$$

Podemos relacionar a função de Mittag-Leffler  $E_{\alpha,\beta}^\gamma(z)$  com a função hipergeométrica confluyente  ${}_1F_1(\gamma; \beta; z)$ , e com isso, relacionarmos também com a função gama incompleta. De fato, temos que

$${}_1F_1(\gamma; \beta; z) = \Gamma(\beta) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_j}{\Gamma(\beta+j)} \frac{z^j}{j!} = \Gamma(\beta) E_{1,\beta}^\gamma(z).$$

Assim, obtemos

$$E_{1,\beta}^\gamma(z) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} {}_1F_1(\gamma; \beta; z). \quad (3.3.4)$$

Trocando  $z$  por  $-z$ , fazendo  $\gamma = \beta - 1$  em (3.3.4) e usando (2.3.7), temos que

$$E_{1,\beta}^{\beta-1}(-z) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} {}_1F_1(\beta - 1; \beta; -z) = \frac{(\beta - 1)}{\Gamma(\beta)} z^{1-\beta} \gamma(\beta - 1, z).$$

Logo, podemos escrever

$$E_{1,\beta}^{\beta-1}(-z) = \frac{z^{1-\beta}}{\Gamma(\beta - 1)} \gamma(\beta - 1, z). \quad (3.3.5)$$

Pela equação (3.3.2), temos que

$$E_{1,\beta}^{\beta-1}(-z) = \frac{1}{\Gamma(\beta - 1)} \int_0^1 (1-t)^{\beta-2} E_{1,1}^{\beta-1}(-zt) dt = \frac{z^{1-\beta}}{\Gamma(\beta - 1)} \gamma(\beta - 1, z),$$

ou seja,

$$z^{1-\beta} \gamma(\beta - 1, z) = \int_0^1 (1-t)^{\beta-2} E_{1,1}^{\beta-1}(-zt) dt, \quad \text{para } \operatorname{Re}(\beta) > 1. \quad (3.3.6)$$

Em particular, fazendo  $\gamma = 1$  em (3.3.4), obtemos

$$E_{1,\beta}(z) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} {}_1F_1(1; \beta; z), \quad \text{com } \operatorname{Re}(\beta) > 0. \quad (3.3.7)$$

### 3.4 Transformada de Laplace das funções de Mittag-Leffler

Nesta seção, vamos determinar a transformada de Laplace envolvendo as funções de Mittag-Leffler, que aparecem como solução particular de algumas equações diferenciais fracionárias, quando utilizamos a metodologia de transformadas integrais para resolvê-las. Começamos o cálculo a partir da função de três parâmetros

$$E_{\alpha,\beta}^\gamma(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + \beta)} \frac{\Gamma(\gamma + j)}{\Gamma(\gamma) \Gamma(j + 1)}.$$

Considere  $k \in \mathbb{C}$  e  $t \geq 0$ , temos que

$$E_{\alpha,\beta}^\gamma(kt^\alpha) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(k)^j t^{\alpha j}}{\Gamma(\alpha j + \beta)} \frac{\Gamma(\gamma + j)}{\Gamma(\gamma) \Gamma(j + 1)}.$$

Por (2.1.2), podemos escrever

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha j + \beta)} = t^{1-\alpha j - \beta} \mathcal{L}^{-1} [s^{-\alpha j - \beta}],$$

assim,

$$\begin{aligned} E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(kt^{\alpha}) &= \sum_{j=0}^{\infty} (k)^j t^{\alpha j} t^{1-\alpha j-\beta} \mathcal{L}^{-1} [s^{-\alpha j-\beta}] \frac{\Gamma(\gamma+j)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(j+1)} \\ &= t^{1-\beta} \mathcal{L}^{-1} \left[ \sum_{j=0}^{\infty} (k)^j s^{-\alpha j-\beta} \frac{\Gamma(\gamma+j)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(j+1)} \right], \end{aligned}$$

pois a transformada de Laplace inversa ( $\mathcal{L}^{-1}$ ) é um operador linear. Logo,

$$\begin{aligned} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(kt^{\alpha}) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^{\beta}} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{k}{s^{\alpha}}\right)^j \frac{1}{\Gamma(\gamma)\Gamma(j+1)} \Gamma(\gamma+j) \right] \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^{\beta}} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{k}{s^{\alpha}}\right)^j \frac{1}{\Gamma(\gamma)\Gamma(j+1)} \int_0^{\infty} e^{-t\gamma+j-1} dt \right] \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^{\beta}} \int_0^{\infty} e^{-t\gamma-1} dt \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{kt}{s^{\alpha}}\right)^j \frac{1}{\Gamma(j+1)} \right] \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^{\beta}} \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^{\infty} e^{-t} e^{\frac{kt}{s^{\alpha}}} t^{\gamma-1} dt \right] \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^{\beta}} \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^{\infty} e^{-t(1-\frac{k}{s^{\alpha}})} t^{\gamma-1} dt \right]. \end{aligned}$$

Admitindo  $|k/s^{\alpha}| < 1$ , podemos fazer a mudança de variável

$$t \left(1 - \frac{k}{s^{\alpha}}\right) = u$$

na integral, com isso,

$$\begin{aligned} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(kt^{\alpha}) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^{\beta}} \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^{\infty} e^{-u} \left(\frac{u}{1-\frac{k}{s^{\alpha}}}\right)^{\gamma-1} \left(\frac{1}{1-\frac{k}{s^{\alpha}}}\right) du \right] \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^{\beta}} \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \left(\frac{1}{1-\frac{k}{s^{\alpha}}}\right)^{\gamma} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\gamma-1} du \right] \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^{\beta}} \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \frac{s^{\alpha\gamma}}{(s^{\alpha}-k)^{\gamma}} \Gamma(\gamma) \right] \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^{\beta}} \frac{s^{\alpha\gamma}}{(s^{\alpha}-k)^{\gamma}} \right]. \end{aligned}$$

Aplicando a transformada de Laplace em ambos os membros, temos

$$\mathcal{L} \left[ t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(kt^{\alpha}) \right] (s) = \frac{1}{s^{\beta}} \frac{s^{\alpha\gamma}}{(s^{\alpha} - k)^{\gamma}} = \frac{s^{\alpha\gamma-\beta}}{(s^{\alpha} - k)^{\gamma}},$$

isto é,

$$\mathcal{L} \left[ t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(kt^{\alpha}) \right] (s) = \frac{s^{\alpha\gamma-\beta}}{(s^{\alpha} - k)^{\gamma}}, \quad \text{com } |k/s^{\alpha}| < 1. \quad (3.4.1)$$

Em particular, fazendo  $\gamma = 1$  na equação (3.4.1), temos

$$\mathcal{L} \left[ t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(kt^{\alpha}) \right] (s) = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha} - k}, \quad \text{com } |k/s^{\alpha}| < 1. \quad (3.4.2)$$

Considerando agora  $\beta = 1$  na equação (3.4.2), temos

$$\mathcal{L} [E_{\alpha}(kt^{\alpha})] (s) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} - k}, \quad \text{com } |k/s^{\alpha}| < 1. \quad (3.4.3)$$

### 3.5 Representação integral das funções de Mittag-Leffler

No Capítulo 1, discutimos um método para calcular a transformada de Laplace inversa sem o uso de um contorno de integração, conforme proposto em [2]. Vamos utilizar a equação (1.5.5) para expressar a função de Mittag-Leffler de três parâmetros através de uma integral em  $\mathbb{R}^+$ . Para isso, considere a restrição da função de Mittag-Leffler de três parâmetros, definida em (3.2.2) a um domínio real, isto é,

$$E_{\alpha,\beta}^{\gamma} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

com parâmetros  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  e  $\gamma > 0$ . Vamos utilizar a equação (1.5.5) para expressar a função real de Mittag-Leffler de três parâmetros através de uma integral em  $\mathbb{R}^+$ .

Pela equação (3.4.1), a transformada de Laplace da função  $f(t) = t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(kt^{\alpha})$  é dada por

$$\mathcal{L} \left[ t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(kt^{\alpha}) \right] (s) = \frac{s^{\alpha\gamma-\beta}}{(s^{\alpha} - k)^{\gamma}},$$

para  $t > 0$ , com  $k \in \mathbb{R}$  e  $|k/s^{\alpha}| < 1$ .

Escrevendo  $s = \sigma + i\tau$ , com  $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$ , podemos determinar  $\sigma \equiv \sigma(k, \alpha)$  para o qual a equação (3.4.1) é válida. Introduzindo coordenadas polares, podemos escrever

$$s = \sigma + i\tau = re^{i\theta}, \quad \text{onde } r = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$$

e

$$\theta = \arccos \left( \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \right) \quad \text{ou} \quad \theta = \arcsen \left( \frac{\tau}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \right).$$

A inequação  $|k/s^{\alpha}| < 1$  deve ser satisfeita, assim

$$\begin{aligned}
|k/s^\alpha| < 1 &\Leftrightarrow |k| |r^{-\alpha} e^{-i\theta\alpha}| < 1 \\
&\Leftrightarrow |r^{-\alpha}| < \frac{1}{|k|} \\
&\Leftrightarrow |r^\alpha| > |k| \\
&\Leftrightarrow (\sigma^2 + \tau^2)^{\frac{\alpha}{2}} > |k| \\
&\Leftrightarrow \sigma^2 + \tau^2 > |k|^{\frac{2}{\alpha}},
\end{aligned}$$

isto é,

$$\sigma^2 > |k|^{\frac{2}{\alpha}} - \tau^2,$$

para todo  $\tau \in \mathbb{R}$ . Logo, devemos considerar  $\sigma$  satisfazendo a desigualdade  $\sigma > |k|^{\frac{1}{\alpha}}$ . Podemos escolher então

$$\sigma = |k|^{\frac{1}{\alpha}} + 1.$$

Assim, é válida a igualdade

$$t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^\gamma(kt^\alpha) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s^{\alpha\gamma-\beta}}{(s^\alpha - k)^\gamma} \right], \quad (3.5.1)$$

para  $t > 0$ , com  $k \in \mathbb{R}$  e  $s = \sigma + i\tau$ , com  $\sigma \equiv \sigma(k, \alpha) = |k|^{\frac{1}{\alpha}} + 1$  e  $\tau \in \mathbb{R}$ .

Por outro lado, temos que

$$\frac{s^{\alpha\gamma-\beta}}{(s^\alpha - k)^\gamma} = \frac{(\sigma + i\tau)^{\alpha\gamma-\beta}}{[(\sigma + i\tau)^\alpha - k]^\gamma}.$$

Além disso,  $[(\sigma + i\tau)^\alpha - k]^\gamma \in \mathbb{C}$ , então podemos escrever

$$[(\sigma + i\tau)^\alpha - k]^\gamma = \tilde{r} e^{i\tilde{\theta}}, \quad (3.5.2)$$

de onde segue que

$$(r^\alpha e^{i\theta\alpha} - k)^\gamma = \tilde{r} e^{i\tilde{\theta}},$$

ou seja,

$$r^\alpha e^{i\theta\alpha} - k = \tilde{r}^{\frac{1}{\gamma}} e^{i\frac{\tilde{\theta}}{\gamma}}.$$

Separando parte real e parte imaginária, podemos escrever as equações

$$\tilde{r}^{\frac{1}{\gamma}} \cos\left(\frac{\tilde{\theta}}{\gamma}\right) = r^\alpha \cos(\theta\alpha) - k \quad \text{e} \quad \tilde{r}^{\frac{1}{\gamma}} \sin\left(\frac{\tilde{\theta}}{\gamma}\right) = r^\alpha \sin(\theta\alpha), \quad (3.5.3)$$

logo,

$$\frac{s^{\alpha\gamma-\beta}}{(s^\alpha - k)^\gamma} = \frac{(\sigma + i\tau)^{\alpha\gamma-\beta}}{[(\sigma + i\tau)^\alpha - k]^\gamma} = \frac{(re^{i\theta})^{\alpha\gamma-\beta}}{\tilde{r}e^{i\tilde{\theta}}} = \frac{r^{\alpha\gamma-\beta}}{\tilde{r}} e^{i[\theta(\alpha\gamma-\beta)-\tilde{\theta}]}.$$

Ou seja, podemos escrever

$$\frac{s^{\alpha\gamma-\beta}}{(s^\alpha - k)^\gamma} = \frac{r^{\alpha\gamma-\beta}}{\tilde{r}} \left\{ \cos [\theta (\alpha\gamma - \beta) - \tilde{\theta}] + i \operatorname{sen} [\theta (\alpha\gamma - \beta) - \tilde{\theta}] \right\}.$$

Assim, as partes real e imaginária são dadas, respectivamente, por

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{(\sigma + i\tau)^{\alpha\gamma-\beta}}{[(\sigma + i\tau)^\alpha - k]^\gamma} \right\} = \frac{r^{\alpha\gamma-\beta}}{\tilde{r}} \cos [\theta (\alpha\gamma - \beta) - \tilde{\theta}]$$

e

$$\operatorname{Im} \left\{ \frac{(\sigma + i\tau)^{\alpha\gamma-\beta}}{[(\sigma + i\tau)^\alpha - k]^\gamma} \right\} = \frac{r^{\alpha\gamma-\beta}}{\tilde{r}} \operatorname{sen} [\theta (\alpha\gamma - \beta) - \tilde{\theta}].$$

Finalmente, utilizando a equação (1.5.5), podemos escrever

$$t^{\beta-1} \mathbf{E}_{\alpha,\beta}^\gamma(kt^\alpha) = \frac{e^{\sigma t}}{\pi} \int_0^\infty \frac{r^{\alpha\gamma-\beta}}{\tilde{r}} \left\{ \cos [\theta (\alpha\gamma - \beta) - \tilde{\theta}] \cos(t\tau) - \operatorname{sen} [\theta (\alpha\gamma - \beta) - \tilde{\theta}] \operatorname{sen}(t\tau) \right\} d\tau,$$

ou ainda, que

$$t^{\beta-1} \mathbf{E}_{\alpha,\beta}^\gamma(kt^\alpha) = \frac{e^{\sigma t}}{\pi} \int_0^\infty \frac{r^{\alpha\gamma-\beta}}{\tilde{r}} \cos [\theta (\alpha\gamma - \beta) - \tilde{\theta} + t\tau] d\tau, \quad (3.5.4)$$

onde  $\sigma \equiv \sigma(k, \alpha) = |k|^{\frac{1}{\alpha}} + 1$ ,  $r \equiv r(\tau) = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$ ,  $\theta \equiv \theta(\tau) = \arccos \left( \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \right)$ , enquanto que  $\tilde{r} \equiv \tilde{r}(\tau)$  e  $\tilde{\theta} \equiv \tilde{\theta}(\tau)$  são dados pelas equações em (3.5.3).

### 3.5.1 Casos particulares

Nesta subsecção apresentamos algumas integrais impróprias de funções trigonométricas em termos das funções de Mittag-Leffler, utilizando a equação (3.5.4).

Na equação (3.5.4), considere o caso particular em que  $\alpha = 1$ ,  $\beta = \gamma$ , isto é,  $\alpha\gamma - \beta = 0$  e  $k = 1$ . Com isso, podemos tomar  $\sigma = 2$ . Assim, temos que

$$t^{\beta-1} \mathbf{E}_{1,\beta}^\beta(t) = \frac{e^{2t}}{\pi} \int_0^\infty \frac{r^0}{\tilde{r}} \cos [\theta(0) - \tilde{\theta} + t\tau] d\tau.$$

Visto que  $f(u) = \cos(u)$  é uma função par, podemos escrever

$$t^{\beta-1} \mathbf{E}_{1,\beta}^\beta(t) = \frac{e^{2t}}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(\tilde{\theta} - t\tau)}{\tilde{r}} d\tau,$$

onde

$$2 + i\tau = re^{i\theta},$$

já que escolhemos  $\sigma = 2$ . Desse modo,

$$r \cos(\theta) = 2 \quad \text{e} \quad r \sin(\theta) = \tau,$$

com isso, pelas equações em (3.5.3), sendo  $\gamma = \beta$ , temos o sistema

$$\begin{cases} \tilde{r}^{\frac{1}{\beta}} \cos\left(\frac{\tilde{\theta}}{\beta}\right) = 1 \\ \tilde{r}^{\frac{1}{\beta}} \sin\left(\frac{\tilde{\theta}}{\beta}\right) = \tau \end{cases},$$

de onde segue que

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\tilde{\theta}}{\beta}\right) = \tau \quad \Rightarrow \quad \tilde{\theta} = \beta \operatorname{arc\,tg}(\tau),$$

bem como

$$\tilde{r} = [\sec(\operatorname{arc\,tg}(\tau))]^\beta.$$

Logo, podemos escrever a representação integral

$$t^{\beta-1} \mathbf{E}_{1,\beta}^\beta(t) = \frac{e^{2t}}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos[\beta \operatorname{arc\,tg}(\tau) - t\tau]}{[\sec(\operatorname{arc\,tg}(\tau))]^\beta} d\tau, \quad \text{para } t > 0 \text{ e } \beta > 0. \quad (3.5.5)$$

Em particular, se  $\beta = 1$  na equação (3.5.5), temos que

$$e^t = \frac{e^{2t}}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos[\operatorname{arc\,tg}(\tau) - t\tau]}{[\sec(\operatorname{arc\,tg}(\tau))]} d\tau, \quad \text{para } t > 0,$$

ou ainda,

$$\pi e^{-t} = \int_0^\infty \frac{\cos(t\tau) + \tau \sin(t\tau)}{1 + \tau^2} d\tau, \quad \text{para } t > 0. \quad (3.5.6)$$

Vale ressaltar que, da relação

$$\mathbf{E}_{1,\beta}^\gamma(z) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} {}_1F_1(\gamma; \beta; z),$$

onde  ${}_1F_1(\gamma; \beta; z)$  é a função hipergeométrica confluyente, podemos ainda escrever, a partir da equação (3.5.4), uma representação integral para uma particular função hipergeométrica confluyente.

De fato, tomando  $k = 1$  e  $\alpha = 1$  na equação (3.5.4), temos que  $\sigma = 2$ , assim,

$$t^{\beta-1} \mathbf{E}_{1,\beta}^\gamma(t) = \frac{e^{2t}}{\pi} \int_0^\infty \frac{r^{\gamma-\beta}}{\tilde{r}} \cos[\theta(\gamma - \beta) - \tilde{\theta} + t\tau] d\tau,$$

ou seja,

$${}_1F_1(\gamma; \beta; t) = \frac{\Gamma(\beta) t^{1-\beta} e^{2t}}{\pi} \int_0^\infty \frac{r^{\gamma-\beta}}{\tilde{r}} \cos[\theta(\gamma - \beta) - \tilde{\theta} + t\tau] d\tau,$$

onde  $r = \sqrt{4 + \tau^2}$ ,  $\theta = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{4 + \tau^2}}\right)$ , enquanto que  $\tilde{r} \equiv \tilde{r}(\tau)$  e  $\tilde{\theta} \equiv \tilde{\theta}(\tau)$  são dados pelas equações em (3.5.3):

$$\tilde{r}^{\frac{1}{\gamma}} \cos\left(\frac{\tilde{\theta}}{\gamma}\right) = r \cos(\theta) - 1 \quad \text{e} \quad \tilde{r}^{\frac{1}{\gamma}} \sin\left(\frac{\tilde{\theta}}{\gamma}\right) = r \sin(\theta),$$

mas  $s = 2 + i\tau = r e^{i\theta}$ , ou seja,  $r \cos(\theta) = 2$  e  $r \sin(\theta) = \tau$ , assim

$$\tilde{r}^{\frac{1}{\gamma}} \cos\left(\frac{\tilde{\theta}}{\gamma}\right) = 1 \quad \text{e} \quad \tilde{r}^{\frac{1}{\gamma}} \sin\left(\frac{\tilde{\theta}}{\gamma}\right) = \tau,$$

de onde segue que

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\tilde{\theta}}{\gamma}\right) = \tau,$$

isto é,

$$\tilde{\theta} = \gamma \operatorname{arc tg}(\tau).$$

Dessa forma, podemos determinar  $\tilde{r}$  escrevendo

$$\tilde{r}^{\frac{1}{\gamma}} \cos\left(\frac{\tilde{\theta}}{\gamma}\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{r}^{\frac{1}{\gamma}} \cos(\operatorname{arc tg}(\tau)) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{r} = [\sec(\operatorname{arc tg}(\tau))]^\gamma.$$

Assim, temos a seguinte relação

$${}_1F_1(\gamma; \beta; t) = \frac{\Gamma(\beta) t^{1-\beta} e^{2t}}{\pi} \int_0^\infty \frac{r^{\gamma-\beta}}{\tilde{r}} \cos[\theta(\gamma - \beta) - \tilde{\theta} + t\tau] d\tau, \quad (3.5.7)$$

para  $t > 0$  e  $\beta > 0$ , onde  $r = \sqrt{4 + \tau^2}$ ,  $\theta = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{4 + \tau^2}}\right)$ ,  $\tilde{r} = [\sec(\operatorname{arc tg}(\tau))]^\gamma$  e  $\tilde{\theta} = \gamma \operatorname{arc tg}(\tau)$ .

Considere agora o caso em que  $\alpha\gamma - \beta = 0$  na equação (3.5.4). Temos que

$$t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^\gamma(kt^\alpha) = \frac{e^{\sigma t}}{\pi} \int_0^\infty \frac{r^0}{\tilde{r}} \cos(\theta \cdot 0 - \tilde{\theta} + t\tau) d\tau,$$

ou seja,

$$t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^\gamma(kt^\alpha) = \frac{e^{\sigma t}}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\tilde{r}} \cos(t\tau - \tilde{\theta}) d\tau, \quad (3.5.8)$$

onde  $\sigma = |k|^{\frac{1}{\alpha}} + 1$ , enquanto que  $\tilde{r} \equiv \tilde{r}(\tau)$  e  $\tilde{\theta} \equiv \tilde{\theta}(\tau)$  são dados pelas equações em (3.5.3).

Por outro lado, na equação (3.5.8), considere agora o caso particular em que  $\alpha = \beta$ ,  $\gamma = 1$  ( $\alpha\gamma - \beta = 0$ ) e  $k = -1$ . Neste caso, podemos escolher  $\sigma = 2$  e escrever

$$\begin{aligned} t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha) &= \frac{e^{2t}}{\pi} \int_0^\infty \frac{r^0}{\tilde{r}} \cos[\theta(0) - \tilde{\theta} + t\tau] d\tau \\ &= \frac{e^{2t}}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\tilde{r}} [\cos(-\tilde{\theta})\cos(t\tau) - \text{sen}(-\tilde{\theta})\text{sen}(t\tau)] d\tau. \end{aligned}$$

Assim, temos

$$t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha) = \frac{e^{2t}}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\tilde{r}} [\cos(\tilde{\theta})\cos(t\tau) + \text{sen}(\tilde{\theta})\text{sen}(t\tau)] d\tau. \quad (3.5.9)$$

Utilizando as equações (3.5.3), podemos escrever

$$\tilde{r} \cos(\tilde{\theta}) = r^\alpha \cos(\theta\alpha) + 1 \quad \text{e} \quad \tilde{r} \text{sen}(\tilde{\theta}) = r^\alpha \text{sen}(\theta\alpha).$$

De onde segue que

$$\tilde{r}^2 [\cos^2(\tilde{\theta}) + \text{sen}^2(\tilde{\theta})] = r^{2\alpha} [\cos^2(\theta\alpha) + \text{sen}^2(\theta\alpha)] + 2r^\alpha \cos(\theta\alpha) + 1,$$

ou seja,

$$\tilde{r}^2 = r^{2\alpha} + 2r^\alpha \cos(\theta\alpha) + 1.$$

Assim, podemos escrever as seguintes expressões

$$\frac{\cos(\tilde{\theta})}{\tilde{r}} = \frac{r^\alpha \cos(\theta\alpha) + 1}{r^{2\alpha} + 2r^\alpha \cos(\theta\alpha) + 1} \quad \text{e} \quad \frac{\text{sen}(\tilde{\theta})}{\tilde{r}} = \frac{r^\alpha \text{sen}(\theta\alpha)}{r^{2\alpha} + 2r^\alpha \cos(\theta\alpha) + 1}.$$

Sendo  $\sigma = 2$ , temos  $s = 2 + i\tau$ , de onde segue que

$$r = \sqrt{4 + \tau^2}$$

e

$$\theta = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{4 + \tau^2}}\right) \quad \text{ou} \quad \theta = \arcsen\left(\frac{\tau}{\sqrt{4 + \tau^2}}\right).$$

Assim, temos que

$$\varphi_1(\tau) := \frac{\cos(\tilde{\theta})}{\tilde{r}} = \left\{ \frac{(4 + \tau^2)^{\frac{\alpha}{2}} \cos\left[\alpha \cdot \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{4 + \tau^2}}\right)\right] + 1}{(4 + \tau^2)^\alpha + 2(4 + \tau^2)^{\frac{\alpha}{2}} \cos\left[\alpha \cdot \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{4 + \tau^2}}\right)\right] + 1} \right\} \quad (3.5.10)$$

e

$$\varphi_2(\tau) := \frac{\text{sen}(\tilde{\theta})}{\tilde{r}} = \left\{ \frac{(4 + \tau^2)^{\frac{\alpha}{2}} \text{sen} \left[ \alpha \cdot \text{arc sen} \left( \frac{\tau}{\sqrt{4 + \tau^2}} \right) \right]}{(4 + \tau^2)^\alpha + 2(4 + \tau^2)^{\frac{\alpha}{2}} \cos \left[ \alpha \cdot \text{arc cos} \left( \frac{2}{\sqrt{4 + \tau^2}} \right) \right] + 1} \right\}. \quad (3.5.11)$$

Substituindo as equações (3.5.10) e (3.5.11) na equação (3.5.9), podemos escrever a expressão

$$t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha) = \frac{e^{2t}}{\pi} \int_0^\infty [\varphi_1(\tau) \cos(t\tau) + \varphi_2(\tau) \text{sen}(t\tau)] d\tau, \quad (3.5.12)$$

onde  $\varphi_1(\tau)$  e  $\varphi_2(\tau)$  são definidos nas equações (3.5.10) e (3.5.11), respectivamente.

Através de uma conveniente escolha para  $\sigma$ , que é a parte real do número complexo  $s$ , variável da transformada de Laplace de uma função, expressamos algumas integrais impróprias convergentes através de uma nova função, como no caso da equação (3.5.4), onde dados os parâmetros  $\alpha, \beta, \gamma$  e  $k$ , podemos escrever uma integral imprópria convergente, envolvendo funções trigonométricas, a partir das funções de Mittag-Leffler.

# Capítulo 4

## Cálculo Fracionário

As derivadas e integrais de ordem inteira têm inúmeras aplicações e são utilizadas para resolver problemas em vários campos da ciência. As derivadas e integrais de ordem não inteira são uma generalização daquelas de ordem inteira. Em [27] Heymans & Podlubny e em [46] Podlubny fornecem uma interpretação geométrica e discutem aplicações para o cálculo fracionário, com integração e derivação de ordem não inteira.

Existem diversas formas de se introduzir tais conceitos, isto é, diversas maneiras de definir a integral e a derivada de ordem não inteira, que não necessariamente coincidem umas com as outras, mas cada uma apresenta sua particular aplicação em diversas áreas, tais como: física, processamento de sinais, eletromagnetismo, entre outras [9, 15, 21, 60].

Neste capítulo apresentamos as definições de integrais fracionárias, nos sentidos de Riemann-Liouville, Liouville, Weyl e Riesz, as derivadas fracionárias nos sentidos de Riemann-Liouville, Caputo, Liouville, Weyl e Riesz, bem como algumas de suas propriedades. Escrevemos o teorema fundamental do cálculo fracionário [25] envolvendo os operadores descritos, bem como aplicações deste teorema em algumas equações diferenciais fracionárias [14] particulares.

### 4.1 Integral fracionária de Riemann-Liouville

Nesta seção apresentamos a definição de integral fracionária, no sentido de Riemann-Liouville e algumas de suas propriedades.

Se  $f(x) \in L^1(a, b)$ , com  $-\infty < a < b < \infty$ , as integrais fracionárias de Riemann-Liouville de ordem  $\alpha \in \mathbb{C}$ , com  $\text{Re}(\alpha) > 0$ , à esquerda e à direita, são definidas, respectivamente, por

$$\left(I_{a+}^{\alpha} f\right)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(\tau)}{(x-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, \quad \text{para } x > a \quad (4.1.1)$$

e

$$\left(I_{b-}^{\alpha} f\right)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(\tau)}{(\tau-x)^{1-\alpha}} d\tau, \quad \text{para } x < b. \quad (4.1.2)$$

Se  $\alpha = 0$ ,  $I_{a+}^0 \equiv I_{b-}^0 := I$ , onde  $I$  é o operador identidade<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Ressaltamos que em alguns livros, as notações  $I_{a+}^{\alpha}$  e  $I_{b-}^{\alpha}$  aparecem como  ${}_a I_x^{\alpha}$  e  ${}_x I_b^{\alpha}$ , respectivamente.

**Definição 4.1** (Espaços  $I_{a+}^{\alpha}(\mathbb{L}_p)$  e  $I_{b-}^{\alpha}(\mathbb{L}_p)$ ). Os espaços  $I_{a+}^{\alpha}(\mathbb{L}_p)$  e  $I_{b-}^{\alpha}(\mathbb{L}_p)$ , são definidos para  $\text{Re}(\alpha) > 0$  e  $1 \leq p \leq \infty$ , respectivamente, por

$$I_{a+}^{\alpha}(\mathbb{L}_p) := \left\{ f(x) : f(x) = I_{a+}^{\alpha} g(x), \quad g(x) \in L^p(a, b) \right\}$$

e

$$I_{b-}^{\alpha}(\mathbb{L}_p) := \left\{ f(x) : f(x) = I_{b-}^{\alpha} h(x), \quad h(x) \in L^p(a, b) \right\}.$$

A seguir mencionamos algumas propriedades da integral fracionária de Riemann-Liouville, outras podem ser encontradas em [52].

**Propriedade 4.2** (Semigrupo). Se  $\text{Re}(\alpha) > 0$  ou  $\alpha = 0$  e se  $\text{Re}(\beta) > 0$  ou  $\beta = 0$ , então

$$I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} = I_{a+}^{\alpha+\beta} \quad \text{e} \quad I_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\beta} = I_{b-}^{\alpha+\beta}.$$

**Propriedade 4.3** (Comutatividade). Se  $\text{Re}(\alpha) > 0$  ou  $\alpha = 0$  e se  $\text{Re}(\beta) > 0$  ou  $\beta = 0$ , então

$$I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} = I_{a+}^{\beta} I_{a+}^{\alpha} \quad \text{e} \quad I_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\beta} = I_{b-}^{\beta} I_{b-}^{\alpha}.$$

**Propriedade 4.4** (Linearidade). Sejam  $f(x)$  e  $g(x)$  tais que existam  $(I_{a+}^{\alpha} f)(x)$ ,  $(I_{b-}^{\alpha} f)(x)$ ,  $(I_{a+}^{\alpha} g)(x)$  e  $(I_{b-}^{\alpha} g)(x)$ , com  $\text{Re}(\alpha) > 0$ . Seja  $\lambda \in \mathbb{C}$ , então

$$I_{a+}^{\alpha} [\lambda f(x) + g(x)] = \lambda I_{a+}^{\alpha} f(x) + I_{a+}^{\alpha} g(x)$$

e

$$I_{b-}^{\alpha} [\lambda f(x) + g(x)] = \lambda I_{b-}^{\alpha} f(x) + I_{b-}^{\alpha} g(x).$$

**Propriedade 4.5.** Se  $\text{Re}(\mu) > -1$ ,  $\text{Re}(\alpha) > 0$  e  $x > a$ , então

$$I_{a+}^{\alpha} (x - a)^{\mu} = \frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\mu + \alpha + 1)} (x - a)^{\mu + \alpha}. \quad (4.1.3)$$

*Demonstração.* Temos que

$$I_{a+}^{\alpha} (x - a)^{\mu} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{(\tau - a)^{\mu}}{(x - \tau)^{1-\alpha}} d\tau.$$

Fazendo a mudança de variável

$$u = \frac{\tau - a}{x - \tau}$$

na integral, temos que

$$\tau = \frac{ux + a}{1 + u} \quad \text{e} \quad d\tau = \frac{x - a}{(1 + u)^2} du.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
I_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\mu} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \left( \frac{ux+a}{1+u} - a \right)^{\mu} \left( x - \frac{ux+a}{1+u} \right)^{\alpha-1} \left[ \frac{x-a}{(1+u)^2} \right] du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \left( \frac{ux-ua}{1+u} \right)^{\mu} \left( \frac{x-a}{1+u} \right)^{\alpha-1} \left[ \frac{x-a}{(1+u)^2} \right] du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\mu+\alpha} \int_0^{\infty} \frac{u^{\mu}}{(1+u)^{\mu+\alpha+1}} du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\mu+\alpha} B(\mu+1, \alpha) \\
&= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)} (x-a)^{\mu+\alpha}.
\end{aligned}$$

■

No particular caso em que consideramos a função  $g(\alpha, x) = I_{0+}^{\alpha}x$ , com  $\alpha, x \geq 0$ , por (4.1.3), temos que

$$I_{0+}^{\alpha}x = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\alpha+2)} x^{\alpha+1} = \frac{x^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} \quad \Rightarrow \quad g(\alpha, x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}.$$

Vamos analisar a interpretação geométrica do cálculo de  $g(\alpha, x)$ , no caso em que  $x = 1$  e  $\alpha \in [0, 1]$ .

- Para  $\alpha = 0, 3$ :

$$I_{0+}^{\alpha}x = {}_0I_1^{0,3}x = \int_0^1 \frac{\tau}{\Gamma(0,3)(1-\tau)^{0,7}} d\tau = \frac{1}{\Gamma(2,3)} \cong 0,86.$$

Geometricamente, isso representa a área da região do plano delimitada pelos gráficos de

$$f(t) = \frac{t}{\Gamma(0,3)(1-t)^{0,7}}, \quad y = 0 \quad \text{e} \quad t = 1, \quad \text{conforme a figura a seguir.}$$

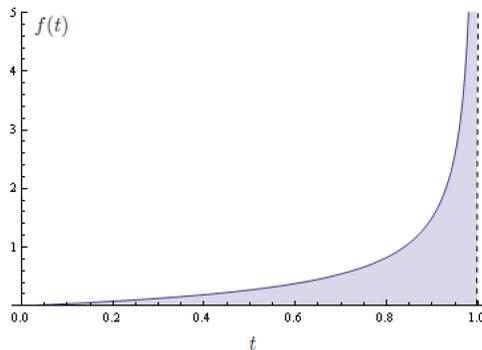


Figura 4.1: Função  $f(t) = \frac{t}{\Gamma(0,3)(1-t)^{0,7}}$ .

- Para  $\alpha = 0,5$ :  $I_{0+}^{\alpha}x = {}_0I_1^{0,5}x = \int_0^1 \frac{\tau}{\Gamma(0,5)(1-\tau)^{0,5}}d\tau = \frac{1}{\Gamma(2,5)} \cong 0,75$ .

Geometricamente, isso representa a área da região do plano delimitada pelos gráficos de

$$g(t) = \frac{t}{\Gamma(0,5)(1-t)^{0,5}}, \quad y = 0 \text{ e } t = 1, \text{ conforme a figura a seguir.}$$

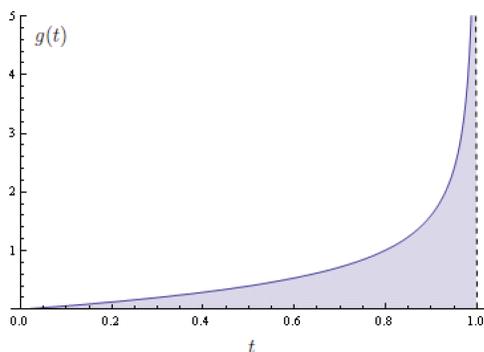


Figura 4.2: Função  $g(t) = \frac{t}{\Gamma(0,5)(1-t)^{0,5}}$ .

- Para  $\alpha = 0,8$ :  $I_{0+}^{\alpha}x = {}_0I_1^{0,8}x = \int_0^1 \frac{\tau}{\Gamma(0,8)(1-\tau)^{0,2}}d\tau = \frac{1}{\Gamma(2,8)} \cong 0,6$ .

Geometricamente, isso representa a área da região do plano delimitada pelos gráficos de

$$h(t) = \frac{t}{\Gamma(0,8)(1-t)^{0,2}}, \quad y = 0 \text{ e } t = 1, \text{ conforme a figura a seguir.}$$

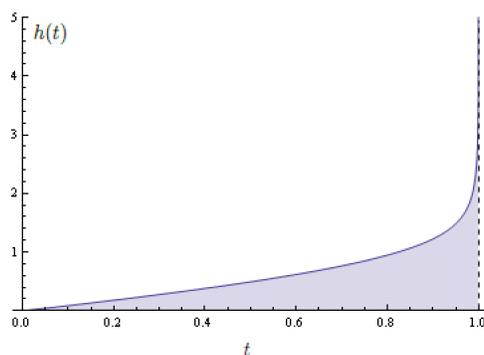


Figura 4.3: Função  $h(t) = \frac{t}{\Gamma(0,8)(1-t)^{0,2}}$ .

- Para  $\alpha = 1$ :  $I_{0+}^{\alpha}x = {}_0I_1^1x = \int_0^1 x dx = \frac{1}{\Gamma(3)} = \frac{1}{2}$ .

Geometricamente, isso representa a área da região do plano delimitada pelos gráficos de

$\varphi(t) = t$ ,  $y = 0$  e  $t = 1$ , conforme a figura a seguir.

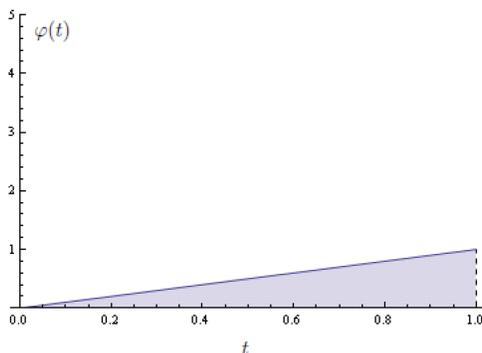


Figura 4.4: Função  $\varphi(t) = t$ .

Notamos, através dos casos apresentados acima, que  $g(0.3, 1) > g(0.5, 1) > g(0.8, 1) > g(1, 1)$ . Se  $f(x) = k$ , onde  $k$  é uma constante real, então

$$I_{0+}^{\alpha}k = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{k}{(x-\tau)^{1-\alpha}} d\tau = \frac{k}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-\tau)^{\alpha-1} d\tau = \frac{kx^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)} = \frac{kx^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Logo, para  $x > 0$ , temos que

$$I_{0+}^{\alpha}k = \frac{kx^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}. \quad (4.1.4)$$

A transformada de Laplace do operador de integração fracionária de Riemann-Liouville, no caso em que  $a = 0$ , é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L} [I_{0+}^{\alpha}f] (s) &= \mathcal{L} \left[ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau \right] (s) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \mathcal{L} \left[ \int_0^t f(\tau) (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau \right] (s) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \mathcal{L} [f * g] (s) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \mathcal{L} [f] (s) \mathcal{L} [g] (s), \end{aligned}$$

onde  $g(t) = t^{\alpha-1}u(t)$  sendo  $u(t)$  a função degrau unitário, definida em (1.3.2).

Usando a equação (2.1.2), obtemos

$$\mathcal{L} \left[ \mathbb{I}_{0+}^{\alpha} f \right] (s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \mathcal{L} [f] (s) \mathcal{L} \left[ t^{\alpha-1} \right] (s) = s^{-\alpha} \mathcal{L} [f] (s).$$

Ou seja, podemos escrever

$$\mathcal{L} \left[ \mathbb{I}_{0+}^{\alpha} f \right] (s) = s^{-\alpha} \mathcal{L} [f] (s), \quad \text{para } \operatorname{Re}(\alpha) > 0. \quad (4.1.5)$$

### 4.1.1 Integral fracionária das funções de Mittag-Leffler

Vamos expressar a integral fracionária de Riemann-Liouville à esquerda a partir das funções de Mittag-Leffler,  $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z)$ , no caso em que  $z > 0$ . Considere os parâmetros  $\sigma, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ , de modo que  $\operatorname{Re}(\alpha), \operatorname{Re}(\beta), \operatorname{Re}(\gamma)$  e  $\operatorname{Re}(\sigma)$  sejam todos positivos.

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_{0+}^{\sigma} \left[ \mathbb{E}_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z) \right] &= \mathbb{I}_{0+}^{\sigma} \left[ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + \beta)} \frac{\Gamma(\gamma + j)}{\Gamma(\gamma) \Gamma(j + 1)} \right] \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma + j)}{\Gamma(\alpha j + \beta) \Gamma(\gamma) \Gamma(j + 1)} \mathbb{I}_{0+}^{\sigma} (z^j) \\ &\stackrel{(4.1.3)}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma + j)}{\Gamma(\alpha j + \beta) \Gamma(\gamma) \Gamma(j + 1)} \frac{\Gamma(j + 1)}{\Gamma(j + \sigma + 1)} z^{j+\sigma} \\ &= \frac{z^{\sigma}}{\Gamma(\gamma)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma + j)}{\Gamma(j + \sigma + 1) \Gamma(\alpha j + \beta)} z^j. \end{aligned}$$

Se  $\sigma = \gamma - 1$ , temos que

$$\mathbb{I}_{0+}^{\gamma-1} \left[ \mathbb{E}_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z) \right] = \frac{z^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} \mathbb{E}_{\alpha,\beta}(z).$$

Por outro lado, se  $\sigma \neq \gamma - 1$ , podemos fazer a substituição

$$\frac{\Gamma(\gamma + j)}{\Gamma(j + \sigma + 1)} = \frac{1}{\Gamma(\sigma - \gamma + 1)} \mathbb{B}(\gamma + j, \sigma - \gamma + 1),$$

com isso,

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_{0+}^{\sigma} \left[ \mathbb{E}_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z) \right] &= \frac{z^{\sigma}}{\Gamma(\gamma) \Gamma(\sigma - \gamma + 1)} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{B}(\gamma + j, \sigma - \gamma + 1) \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + \beta)} \\ &\stackrel{(2.2.1)}{=} \frac{z^{\sigma}}{\Gamma(\gamma) \Gamma(\sigma - \gamma + 1)} \int_0^1 t^{\gamma-1} (1-t)^{\sigma-\gamma} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(zt)^j}{\Gamma(\alpha j + \beta)} dt \\ &= \frac{z^{\sigma}}{\Gamma(\gamma) \Gamma(\sigma - \gamma + 1)} \int_0^1 t^{\gamma-1} (1-t)^{\sigma-\gamma} \mathbb{E}_{\alpha,\beta}(zt) dt. \end{aligned}$$

Assim, obtemos as expressões

$$I_{0+}^{\sigma} \left[ E_{\alpha, \beta}^{\gamma}(z) \right] = \begin{cases} \frac{z^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} E_{\alpha, \beta}(z), & \text{se } \sigma = \gamma - 1, \\ \frac{z^{\sigma}}{\Gamma(\gamma) \Gamma(\sigma - \gamma + 1)} \int_0^1 t^{\gamma-1} (1-t)^{\sigma-\gamma} E_{\alpha, \beta}(zt) dt, & \text{se } \sigma \neq \gamma - 1. \end{cases} \quad (4.1.6)$$

## 4.2 Derivada fracionária de Riemann-Liouville

As derivadas fracionárias, segundo Riemann-Liouville, à esquerda e à direita, são definidas para  $\alpha \in \mathbb{C}$ , respectivamente, por

$$D_{a+}^{\alpha} := I_{a+}^{-\alpha} \quad \text{e} \quad D_{b-}^{\alpha} := I_{b-}^{-\alpha}.$$

Se  $\text{Re}(\alpha) < 0$ ,  $D_{a+}^{\alpha} f(x)$  e  $D_{b-}^{\alpha} f(x)$  existem para toda função  $f(x) \in L^1(a, b)$ , com  $-\infty < a < b < \infty$ , pois coincidem com as respectivas integrais fracionárias de Riemann-Liouville. Por outro lado, se  $\text{Re}(\alpha) \geq 0$ , então  $D_{a+}^{\alpha} f(x)$  e  $D_{b-}^{\alpha} f(x)$  existem para toda função  $f(x) \in AC^n(a, b)$ , com  $n = [\text{Re}(\alpha)] + 1$ , onde  $[\mu]$  denota a parte inteira de  $\mu$ .

Podemos escrever as derivadas fracionárias, segundo Riemann-Liouville, para  $\text{Re}(\alpha) \geq 0$ , com  $\alpha \notin \mathbb{N}$ , à esquerda e à direita, respectivamente, por<sup>2</sup>

$$\left( D_{a+}^{\alpha} f \right) (x) := D^n \left[ \left( I_{a+}^{n-\alpha} f \right) (x) \right], \quad \text{para } x > a \quad (4.2.1)$$

e

$$\left( D_{b-}^{\alpha} f \right) (x) := (-1)^n D^n \left[ \left( I_{b-}^{n-\alpha} f \right) (x) \right], \quad \text{para } x < b. \quad (4.2.2)$$

Se, em particular,  $\alpha = n \in \mathbb{N}$ , então

$$\left( D_{a+}^n f \right) (x) = f^{(n)}(x) \quad \text{e} \quad \left( D_{b-}^n f \right) (x) = (-1)^n f^{(n)}(x).$$

Seguem alguns lemas, propriedades e teoremas envolvendo o operador de derivação fracionária, segundo Riemann-Liouville, outras podem ser encontradas em [28, 32].

**Propriedade 4.6** (Linearidade). Os operadores  $D_{a+}^{\alpha}$  e  $D_{b-}^{\alpha}$ , assim como os operadores de integração fracionária, são lineares.

**Propriedade 4.7.** Se  $x > a$ ,  $\text{Re}(\mu) > -1$  e  $\text{Re}(\alpha) \geq 0$ , então

$$D_{a+}^{\alpha} (x-a)^{\mu} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\alpha+1)} (x-a)^{\mu-\alpha}. \quad (4.2.3)$$

*Demonstração.* A demonstração segue da Propriedade 4.5:

$$D_{a+}^{\alpha} (x-a)^{\mu} = D^n I_{a+}^{n-\alpha} (x-a)^{\mu} \stackrel{(4.1.3)}{=} \frac{\Gamma(\mu+1) D^n \left[ (x-a)^{\mu+n-\alpha} \right]}{\Gamma(\mu+n-\alpha+1)} = \frac{\Gamma(\mu+1) (x-a)^{\mu-\alpha}}{\Gamma(\mu-\alpha+1)}. \quad \blacksquare$$

---

<sup>2</sup>Aqui, denotamos  $D^n \equiv \frac{d^n}{dx^n}$ .

**Teorema 4.8.** Sejam  $f(x) \in AC^n[a, b]$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$  com  $\operatorname{Re}(\alpha) \geq 0$  e  $n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1$ , então as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville à esquerda e à direita, podem ser escritas da forma

$$\left(D_{a+}^{\alpha} f\right)(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(1+j-\alpha)} \left(f^{(j)}(x)\Big|_{x=a}\right) + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(\tau)}{(x-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau$$

e

$$\left(D_{b-}^{\alpha} f\right)(x) = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \frac{(b-x)^{j-\alpha}}{\Gamma(1+j-\alpha)} \left(f^{(j)}(x)\Big|_{x=b}\right) + \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \frac{f^{(n)}(\tau)}{(\tau-x)^{\alpha-n+1}} d\tau.$$

*Demonstração.* Para demonstrar o teorema para a derivada fracionária à esquerda, podemos partir da definição, depois integrar por partes  $n$  vezes e por fim utilizar a regra de Leibniz<sup>3</sup>.

$$\begin{aligned} \left(D_{a+}^{\alpha} f\right)(x) &= D^n \left(I_{a+}^{n-\alpha} f\right)(x) \\ &= D^n \left[ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f(\tau)}{(x-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \right] \\ &= D^n \left\{ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left[ f(a) \frac{(x-a)^{n-\alpha}}{(n-\alpha)} + \frac{1}{n-\alpha} \int_a^x (x-\tau)^{n-\alpha} f^{(1)}(\tau) d\tau \right] \right\} \\ &= \frac{f(a)}{\Gamma(n-\alpha)} D^n \left[ \frac{(x-a)^{n-\alpha}}{(n-\alpha)} \right] + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} D^n \left[ \int_a^x (x-\tau)^{n-\alpha} f^{(1)}(\tau) d\tau \right] \\ &= f(a) \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + D^n \left[ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_a^x (x-\tau)^{n-\alpha} f^{(1)}(\tau) d\tau \right]. \end{aligned}$$

Na  $n$ -ésima integração por partes, obtemos

$$\left(D_{a+}^{\alpha} f\right)(x) = \sum_{j=0}^{n-1} f^{(j)}(a) \frac{(x-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(1+j-\alpha)} + D^n \left[ \frac{1}{\Gamma(2n-\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{2n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \right]. \quad (4.2.4)$$

Agora podemos utilizar  $n$  vezes a regra de Leibniz, do cálculo de ordem inteira, na integral do lado direito em (4.2.4), obtendo a expressão

$$\frac{1}{\Gamma(2n-\alpha)} D^n \left[ \int_a^x (x-\tau)^{2n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \right] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau.$$

Finalmente, podemos escrever

$$\left(D_{a+}^{\alpha} f\right)(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(1+j-\alpha)} \left(f^{(j)}(x)\Big|_{x=a}\right) + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(\tau)}{(x-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau. \quad (4.2.5)$$

O resultado para a derivada fracionária à direita segue de maneira similar. ■

---

<sup>3</sup>Regra de Leibniz:  $\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, \tau) d\tau = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, \tau) d\tau + f(x, b(x)) \frac{d}{dx} b(x) - f(x, a(x)) \frac{d}{dx} a(x).$

No caso em que  $f^{(j)}(a) = f^{(j)}(b) = 0$ , para  $j = 0, 1, 2, \dots, [\operatorname{Re}(\alpha)]$  em (4.2.5), então

$$\left( D_{a+}^{\alpha} f \right) (x) = \left( I_{a+}^{n-\alpha} f^{(n)} \right) (x) \quad \text{e} \quad \left( D_{b-}^{\alpha} f \right) (x) = (-1)^n \left( I_{b-}^{n-\alpha} f^{(n)} \right) (x).$$

**Lema 4.9.** Sejam  $\varphi(x) \in L^p(a, b)$ , com  $1 \leq p \leq \infty$  e  $\alpha \in \mathbb{C}$  com  $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ , então

$$\left[ D_{a+}^{\alpha} \left( I_{a+}^{\alpha} \varphi \right) \right] (x) = \varphi(x) \quad \text{e} \quad \left[ D_{b-}^{\alpha} \left( I_{b-}^{\alpha} \varphi \right) \right] (x) = \varphi(x). \quad (4.2.6)$$

*Demonstração.* Para demonstrar este lema, escrevemos

$$\left[ D_{a+}^{\alpha} \left( I_{a+}^{\alpha} \varphi \right) \right] (x) = D^n I_{a+}^{n-\alpha} I_{a+}^{\alpha} \varphi(x).$$

Usando a Propriedade 4.2 e em seguida o teorema fundamental do cálculo de ordem inteira  $n$  vezes, temos

$$D^n I_{a+}^{n-\alpha} I_{a+}^{\alpha} \varphi(x) = D^n I_{a+}^n \varphi(x) = \varphi(x).$$

Utilizando raciocínio análogo, obtemos  $\left[ D_{b-}^{\alpha} \left( I_{b-}^{\alpha} \varphi \right) \right] (x) = \varphi(x)$ . ■

O Lema 4.9 e o lema a seguir serão utilizados no teorema fundamental do cálculo fracionário, discutido no Capítulo 5.

**Lema 4.10.** Se  $f(x) \in L^1(a, b)$ , com  $-\infty < a < b < \infty$  e  $I_{a+}^{n-\alpha} f(x) \in AC^n[a, b]$ , com  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$  e  $n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1$ , então

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( I_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} f \right) (x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha-j-1}}{\Gamma(\alpha-j)} \left[ \left( D^{n-j-1} I_{a+}^{n-\alpha} f(x) \right) \Big|_{x=a} \right], \\ \left( I_{b-}^{\alpha} D_{b-}^{\alpha} f \right) (x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-j-1} (b-x)^{\alpha-j-1}}{\Gamma(\alpha-j)} \left[ \left( D^{n-j-1} I_{b-}^{n-\alpha} f(x) \right) \Big|_{x=b} \right]. \end{array} \right.$$

Em particular, se  $\alpha = n \in \mathbb{N}^*$ , podemos escrever

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( I_{a+}^n D_{a+}^n f \right) (x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^j}{j!} \left( f^{(j)}(x) \Big|_{x=a} \right), \\ \left( I_{b-}^n D_{b-}^n f \right) (x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j (b-x)^j}{j!} \left( f^{(j)}(x) \Big|_{x=b} \right), \end{array} \right.$$

e se  $0 < \operatorname{Re}(\alpha) < 1$ , temos

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( I_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} f \right) (x) = f(x) - \frac{(x-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left[ \left( I_{a+}^{1-\alpha} f(x) \right) \Big|_{x=a} \right], \\ \left( I_{b-}^{\alpha} D_{b-}^{\alpha} f \right) (x) = f(x) - \frac{(b-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left[ \left( I_{b-}^{1-\alpha} f(x) \right) \Big|_{x=b} \right]. \end{array} \right.$$

*Demonstração.* Para demonstrar este lema, podemos utilizar integração por partes. Temos que

$$\left[ \mathbb{I}_{a+}^{\alpha} \left( \mathbb{D}_{a+}^{\alpha} f \right) \right] (x) = \left[ \mathbb{I}_{a+}^{\alpha} \left( \mathbb{D}^n \mathbb{I}_{a+}^{n-\alpha} f \right) \right] (x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - \tau)^{\alpha-1} \mathbb{D}^n \mathbb{I}_{a+}^{n-\alpha} f(\tau) d\tau.$$

Integrando por partes, fazendo  $u = (x - \tau)^{\alpha-1}$  e  $dv = \mathbb{D}^n \mathbb{I}_{a+}^{n-\alpha} f(\tau) d\tau$ , obtemos

$$\begin{aligned} \left[ \mathbb{I}_{a+}^{\alpha} \left( \mathbb{D}_{a+}^{\alpha} f \right) \right] (x) &= \\ &= \frac{-(x-a)^{\alpha-1} \left[ \left( \mathbb{D}^{n-1} \mathbb{I}_{a+}^{n-\alpha} f(x) \right) \Big|_{x=a} \right]}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_a^x (x-\tau)^{\alpha-2} \mathbb{D}^{n-1} \mathbb{I}_{a+}^{n-\alpha} f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Integrando por partes da mesma forma por mais  $n-1$  vezes, obtemos

$$\begin{aligned} \left[ \mathbb{I}_{a+}^{\alpha} \left( \mathbb{D}_{a+}^{\alpha} f \right) \right] (x) &= \\ &= - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha-j-1} \left[ \left( \mathbb{D}^{n-j-1} \mathbb{I}_{a+}^{n-\alpha} f(x) \right) \Big|_{x=a} \right]}{\Gamma(\alpha-j)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha-n)} \int_a^x (x-\tau)^{\alpha-n-1} \mathbb{I}_{a+}^{n-\alpha} f(\tau) d\tau \\ &= - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha-j-1} \left[ \left( \mathbb{D}^{n-j-1} \mathbb{I}_{a+}^{n-\alpha} f(x) \right) \Big|_{x=a} \right]}{\Gamma(\alpha-j)} + \mathbb{I}_{a+}^{\alpha-n} \mathbb{I}_{a+}^{n-\alpha} f(x) \\ &= - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha-j-1} \left[ \left( \mathbb{D}^{n-j-1} \mathbb{I}_{a+}^{n-\alpha} f(x) \right) \Big|_{x=a} \right]}{\Gamma(\alpha-j)} + f(x). \end{aligned}$$

De forma análoga segue o resultado para  $\left[ \mathbb{I}_{b-}^{\alpha} \left( \mathbb{D}_{b-}^{\alpha} f \right) \right] (x)$ .

Em particular, se  $\alpha = n$ , então, substituindo  $\alpha$  por  $n$  em  $\left[ \mathbb{I}_{a+}^{\alpha} \left( \mathbb{D}_{a+}^{\alpha} f \right) \right] (x)$  e fazendo a mudança de índices  $n-j-1 = k$  no somatório, obtemos o resultado desejado.

Além disso, se  $0 < \operatorname{Re}(\alpha) < 1$ , basta fazer  $n = 1$  em  $\left[ \mathbb{I}_{a+}^{\alpha} \left( \mathbb{D}_{a+}^{\alpha} f \right) \right] (x)$  e  $\left[ \mathbb{I}_{b-}^{\alpha} \left( \mathbb{D}_{b-}^{\alpha} f \right) \right] (x)$ . ■

Diferentemente do operador de integração fracionária de Riemann-Liouville, a Propriedade 4.2 (semigrupo) não vale para o operador de derivação fracionária segundo Riemann-Liouville, como pode ser observado através do teorema a seguir.

**Teorema 4.11.** Sejam  $f(x) \in L^1(a, b)$ , com  $-\infty < a < b < \infty$ ,  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$  tais que  $\alpha + \beta < n$ , com  $n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1$ , e sejam ainda  $m = [\operatorname{Re}(\beta)] + 1$  e  $\left( \mathbb{I}_{a+}^{m-\alpha} f \right) (x) \in \operatorname{AC}^m[a, b]$ , então

$$\left[ \mathbb{D}_{a+}^{\alpha} \left( \mathbb{D}_{a+}^{\beta} f \right) \right] (x) = \left( \mathbb{D}_{a+}^{\alpha+\beta} f \right) (x) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-a)^{-\alpha-j-1} \left[ \left( \mathbb{D}^{m-j-1} \mathbb{I}_{a+}^{m-\beta} f(x) \right) \Big|_{x=a} \right]}{\Gamma(-\alpha-j)}. \quad (4.2.7)$$

*Demonstração.* Vamos usar o Lema 4.10 e a Propriedade 4.2 para a demonstração deste teorema.

$$\left[ \mathbb{D}_{a+}^{\alpha} \left( \mathbb{D}_{a+}^{\beta} f \right) \right] (x) = \left[ \mathbb{D}^n \mathbb{I}_{a+}^{n-\alpha} \left( \mathbb{D}_{a+}^{\beta} f \right) \right] (x) \underbrace{=}_{\alpha+\beta < n} \mathbb{D}^n \mathbb{I}_{a+}^{n-\alpha-\beta} \left[ \left( \mathbb{I}_{a+}^{\beta} \mathbb{D}_{a+}^{\beta} f \right) \right] (x).$$

Pelo Lema 4.10, podemos escrever

$$\left[ \mathbb{I}_{a+}^{\beta} \left( \mathbb{D}_{a+}^{\beta} f \right) \right] (x) = f(x) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-a)^{\beta-j-1} \left[ \left( \mathbb{D}^{m-j-1} \mathbb{I}_{a+}^{m-\beta} f(x) \right) \Big|_{x=a} \right]}{\Gamma(\beta-j)},$$

com  $m = [\text{Re}(\beta)] + 1$ . Assim, obtemos

$$\begin{aligned} \left[ \mathbb{D}_{a+}^{\alpha} \left( \mathbb{D}_{a+}^{\beta} f \right) \right] (x) &= \mathbb{D}^n \mathbb{I}_{a+}^{n-\alpha-\beta} \left\{ f(x) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-a)^{\beta-j-1} \left[ \left( \mathbb{D}^{m-j-1} \mathbb{I}_{a+}^{m-\beta} f(x) \right) \Big|_{x=a} \right]}{\Gamma(\beta-j)} \right\} \\ &= \mathbb{D}_{a+}^{\alpha+\beta} \left\{ f(x) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-a)^{\beta-j-1} \left[ \left( \mathbb{D}^{m-j-1} \mathbb{I}_{a+}^{m-\beta} f(x) \right) \Big|_{x=a} \right]}{\Gamma(\beta-j)} \right\} \\ &= \left( \mathbb{D}_{a+}^{\alpha+\beta} f \right) (x) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\mathbb{D}_{a+}^{\alpha+\beta} (x-a)^{\beta-j-1} \left[ \left( \mathbb{D}^{m-j-1} \mathbb{I}_{a+}^{m-\beta} f(x) \right) \Big|_{x=a} \right]}{\Gamma(\beta-j)} \\ &= \left( \mathbb{D}_{a+}^{\alpha+\beta} f \right) (x) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-a)^{-\alpha-j-1} \left[ \left( \mathbb{D}^{m-j-1} \mathbb{I}_{a+}^{m-\beta} f(x) \right) \Big|_{x=a} \right]}{\Gamma(-\alpha-j)}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Podemos determinar uma expressão para a transformada de Laplace da derivada fracionária de Riemann-Liouville à esquerda, como a seguir.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[ \mathbb{D}_{a+}^{\alpha} f \right] (s) &= \mathcal{L} \left[ \mathbb{D}^n \mathbb{I}_{a+}^{n-\alpha} f \right] (s) \\ &\stackrel{(1.3.5)}{=} \underbrace{s^n \mathcal{L} \left[ \mathbb{I}_{a+}^{n-\alpha} f \right] (s)} - \sum_{j=0}^{n-1} s^j \left[ \frac{d^{n-1-j}}{dt^{n-1-j}} \mathbb{I}_{a+}^{n-\alpha} f(t) \right] \Big|_{t=a+} \\ &= s^n \mathcal{L} \left[ \mathbb{I}_{a+}^{n-\alpha} f \right] (s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^j \left[ \mathbb{D}^{n-1-j} \mathbb{I}_{a+}^{n-\alpha} f(t) \right] \Big|_{t=a+} \\ &= s^n \mathcal{L} \left[ \mathbb{I}_{a+}^{n-\alpha} f \right] (s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^j \left[ \mathbb{D}^n \mathbb{I}^{1+j} \mathbb{I}_{a+}^{n-\alpha} f(t) \right] \Big|_{t=a+} \\ &= s^n \mathcal{L} \left[ \mathbb{I}_{a+}^{n-\alpha} f \right] (s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^j \left[ \mathbb{D}^n \mathbb{I}_{a+}^{n-\alpha+1+j} f(t) \right] \Big|_{t=a+} \\ &= s^n \mathcal{L} \left[ \mathbb{I}_{a+}^{n-\alpha} f \right] (s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^j \left[ \mathbb{D}_{a+}^{\alpha-1-j} f(t) \right] \Big|_{t=a+}. \end{aligned}$$

Logo, para  $n = [\text{Re}(\alpha)] + 1$  e  $\text{Re}(\alpha) > 0$ , temos

$$\mathcal{L} [D_{a+}^{\alpha} f] (s) = s^n \mathcal{L} [I_{a+}^{n-\alpha} f] (s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^j [D_{a+}^{\alpha-1-j} f(t)] \Big|_{t=a+}. \quad (4.2.8)$$

Em particular, se  $a = 0$  em (4.2.8), então

$$\mathcal{L} [D_{0+}^{\alpha} f] (s) = s^{\alpha} \mathcal{L} [f] (s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^j [D_{0+}^{\alpha-1-j} f(t)] \Big|_{t=0+}, \quad (4.2.9)$$

pois,  $\mathcal{L} [I_{0+}^{n-\alpha} f] (s) \stackrel{(4.1.5)}{=} s^{\alpha-n} \mathcal{L} [f] (s)$ .

Se  $\alpha = n \in \mathbb{N}$ , a equação em (4.2.9) torna-se igual à equação em (1.3.5), que é a transformada de Laplace da derivada  $n$ -ésima de uma função  $f(t)$ .

Como um exemplo da derivada fracionária de uma função, considere  $h(\alpha, x) = D_{0+}^{\alpha} x$ , com  $\alpha \geq 0$  e  $x \geq 0$ . Por (4.2.3), temos que

$$D_{0+}^{\alpha} x = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(-\alpha+2)} x^{-\alpha+1} = \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}.$$

Logo,

$$h(\alpha, x) = \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}.$$

Segue abaixo o gráfico de  $h(\alpha, x)$ .

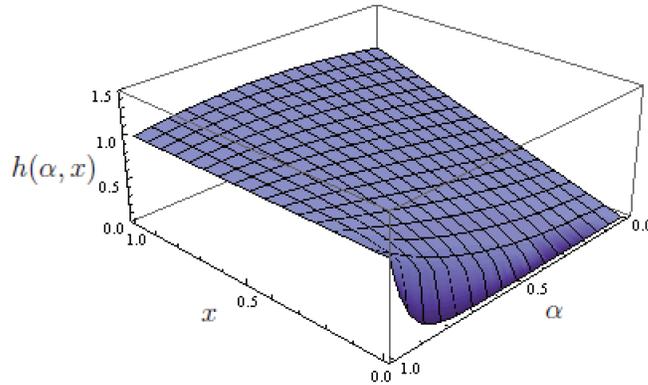


Figura 4.5: Função  $h(\alpha, x)$  para  $0 \leq \alpha \leq 1$  e  $0 \leq x \leq 1$ .

Note que para  $\alpha = 0$ , temos  $h(0, x) = x$  e para  $\alpha = 1$ ,  $h(1, x) = 1$ .

Por outro lado, se  $f(x) = k$ , onde  $k$  é uma constante complexa, podemos obter  $D_{0+}^{\alpha} k$ , fazendo  $a = \mu = 0$  em (4.2.3) e multiplicando por  $k$ :

$$D_{0+}^{\alpha} k = k D_{0+}^{\alpha} 1 = \frac{kx^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad \text{para } x > 0 \text{ e } \operatorname{Re}(\alpha) > 0.$$

A derivada de uma constante será nula, apenas para  $\alpha \in \mathbb{N}^*$ , pois, neste caso,

$$\Gamma(1-\alpha) \rightarrow \infty.$$

Para outros valores de  $\alpha$ ,  $D_{0+}^{\alpha} k$  será não nula.

Seja  $f(x) = x^{\alpha-j}$ , com  $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$  e  $j = 1, 2, \dots, ([\operatorname{Re}(\alpha)] + 1)$ , então

$$D_{0+}^{\alpha} x^{\alpha-j} = \frac{\Gamma(\alpha-j+1)}{\Gamma(1-j)} x^{-j} \equiv 0,$$

pois,  $\Gamma(1-j) \rightarrow \infty$  para todo  $j = 1, 2, \dots, ([\operatorname{Re}(\alpha)] + 1)$ .

### 4.3 Integral e derivada fracionárias de Liouville

A sugestão inicial de Liouville foi baseada na fórmula para a diferenciação de uma função exponencial e foi estendida para funções  $f(x)$  que podem ser expandidas como séries da forma:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{a_k x} \quad \Rightarrow \quad D^p f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k a_k^p e^{a_k x},$$

onde  $a_k > 0$  para todo  $k$ .

Outra sugestão para a derivada fracionária segundo Liouville, foi a de derivar uma função da forma  $f(t) = t^{-a}$ , para  $\operatorname{Re}(\alpha) \geq 0$ ,  $n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1$ ,  $a > 0$  e  $t > 0$ .

As integrais fracionárias segundo Riemann-Liouville, à esquerda e à direita, são facilmente estendidas ao caso de um intervalo infinito ( $a = -\infty$  ou  $b = +\infty$ ). As integrais fracionárias de Liouville, à esquerda e à direita, são definidas para  $-\infty < x < \infty$  e  $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ , respectivamente por

$$\left( I_{+}^{\alpha} f \right) (x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{f(\tau)}{(x-\tau)^{1-\alpha}} d\tau \quad (4.3.1)$$

e

$$\left( I_{-}^{\alpha} f \right) (x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} \frac{f(\tau)}{(\tau-x)^{1-\alpha}} d\tau. \quad (4.3.2)$$

As correspondentes derivadas fracionárias de Liouville são

$$\left( D_{+}^{\alpha} f \right) (x) := D^n \left[ \left( I_{+}^{n-\alpha} f \right) (x) \right] \quad \text{e} \quad \left( D_{-}^{\alpha} f \right) (x) := (-1)^n D^n \left[ \left( I_{-}^{n-\alpha} f \right) (x) \right], \quad (4.3.3)$$

onde  $n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1$ ,  $\operatorname{Re}(\alpha) \geq 0$  e  $x \in \mathbb{R}$ .

Se, em particular,  $\alpha = n \in \mathbb{N}$ , então  $\left( D_{+}^{\alpha} f \right) (x) = f^{(n)}(x)$  e  $\left( D_{-}^{\alpha} f \right) (x) = (-1)^n f^{(n)}(x)$ .

Kilbas utiliza a Propriedade 2.5, equação (2.2.13) de seu livro [32], para demonstrar que

$$D_-^\alpha t^{-a} = (-1)^n \frac{\Gamma(\alpha + a)}{\Gamma(a)} t^{-a-\alpha},$$

para  $\operatorname{Re}(\alpha) \geq 0$ ,  $n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1$ ,  $t > 0$  e  $a > 0$ . Se, em particular,  $\alpha = n$  e  $a = m$ , então

$$\frac{d^n}{dt^n} [t^{-m}] = (-1)^n \frac{\Gamma(m + n)}{\Gamma(m)} t^{-(m+n)},$$

ou seja, recuperamos a derivada de ordem inteira dessa função.

## 4.4 Derivada fracionária de Caputo

O operador diferencial de ordem não inteira de Caputo, pode ser utilizado quando queremos, por exemplo, discutir uma equação diferencial fracionária, cujas condições iniciais têm interpretações bem conhecidas em termos das derivadas de ordens inteiras [45].

Se  $f(x) \in AC^n[a, b]$ , com  $-\infty < a < b < \infty$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$  tal que  $\operatorname{Re}(\alpha) \geq 0$ , com  $\alpha \notin \mathbb{N}$ , e seja  $n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1$ , então as derivadas fracionárias à esquerda  $({}_C D_{a+}^\alpha)$  e à direita  $({}_C D_{b-}^\alpha)$ , segundo Caputo, são definidas a partir do operador de integração fracionária de Riemann-Liouville, da forma

$$({}_C D_{a+}^\alpha f)(x) := (I_{a+}^{n-\alpha} f^{(n)})(x) \quad (4.4.1)$$

e

$$({}_C D_{b-}^\alpha f)(x) := (-1)^n (I_{b-}^{n-\alpha} f^{(n)})(x). \quad (4.4.2)$$

Se, em particular,  $\alpha = n \in \mathbb{N}$ , então

$$({}_C D_{a+}^n f)(x) = f^{(n)}(x) \quad \text{e} \quad ({}_C D_{b-}^n f)(x) = (-1)^n f^{(n)}(x).$$

Utilizando a equação em (4.2.5), podemos estabelecer uma relação entre as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville e Caputo, da forma

$$({}_C D_{a+}^\alpha f)(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(1+j-\alpha)} (f^{(j)}(x)|_{x=a}) + ({}_C D_{a+}^\alpha f)(x),$$

ou ainda, na forma

$$({}_C D_{a+}^\alpha f)(x) = (D_{a+}^\alpha f)(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(1+j-\alpha)} (f^{(j)}(x)|_{x=a}). \quad (4.4.3)$$

Note que se  $f^{(j)}(a) = f^{(j)}(b) = 0$  para  $j = 0, 1, \dots, n-1$ , então a derivada de Caputo coincide com a derivada de Riemann-Liouville.

Diversas propriedades do operador de Caputo, bem como a relação dele com outros operadores diferenciais fracionários podem ser encontradas em [5, 8].

**Propriedade 4.12.** Se  $x > a$ ,  $\text{Re}(\alpha) > 0$  e  $n = [\text{Re}(\alpha)] + 1$ , então

$${}_C D_{a+}^{\alpha} (x-a)^{\mu} = \begin{cases} 0, & \text{para } \mu = 0, 1, 2, \dots, n-1, \\ \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\alpha+1)} (x-a)^{\mu-\alpha}, & \text{para } \text{Re}(\mu) > n-1. \end{cases}$$

*Demonstração.* Vamos usar a definição da derivada de Caputo e a Propriedade 4.7, para mostrar o caso em que  $\text{Re}(\mu) > n-1$ .

$$\begin{aligned} {}_C D_{a+}^{\alpha} (x-a)^{\mu} &= I_{a+}^{n-\alpha} D^n (x-a)^{\mu} \\ &= I_{a+}^{n-\alpha} \left[ \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-n+1)} (x-a)^{\mu-n} \right] \quad (\text{para } \text{Re}(\mu) > -1) \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-n+1)} I_{a+}^{n-\alpha} (x-a)^{\mu-n} \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\alpha+1)} (x-a)^{\mu-\alpha}, \quad \text{para } \text{Re}(\mu-n) > -1, \text{ ou seja, } \text{Re}(\mu) > n-1. \end{aligned}$$

Por outro lado, se  $\mu \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ , então

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left[ \left( D^j (x-a)^{\mu} \right) \Big|_{x=a} \right] \frac{(x-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(1+j-\alpha)} = \Gamma(\mu+1) \frac{(x-a)^{\mu-\alpha}}{\Gamma(1+\mu-\alpha)},$$

pois no somatório do primeiro membro, o único termo não nulo ocorre quando  $\mu = j$ .

Agora, por (4.4.3), segue que

$$\begin{aligned} {}_C D_{a+}^{\alpha} (x-a)^{\mu} &= D_{a+}^{\alpha} (x-a)^{\mu} - \sum_{j=0}^{n-1} \left[ \left( D^j (x-a)^{\mu} \right) \Big|_{x=a} \right] \frac{(x-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(1+j-\alpha)} \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\alpha+1)} (x-a)^{\mu-\alpha} - \Gamma(\mu+1) \frac{(x-a)^{\mu-\alpha}}{\Gamma(1+\mu-\alpha)} \\ &= 0. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Particularmente, na Propriedade 4.12, se  $\mu = 0$  e  $k$  é uma constante complexa, então

$$0 = \left( {}_C D_{a+}^{\alpha} (x-a)^0 \right) \quad \Rightarrow \quad k {}_C D_{a+}^{\alpha} 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad {}_C D_{a+}^{\alpha} k \equiv 0.$$

Enquanto a derivada de Riemann-Liouville de uma constante pode ser não nula, a derivada fracionária de Caputo de uma constante é nula.

**Lema 4.13.** Se  $f(x) \in C[a, b]$ , com  $[a, b]$  um intervalo finito,  $\alpha \in \mathbb{C}$  tal que  $\text{Re}(\alpha) > 0$  e  $\text{Re}(\alpha) \notin \mathbb{N}$  ou  $\alpha \in \mathbb{N}$ , então

$$\left( {}_C D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} f \right) (x) = f(x) \quad \text{e} \quad \left( {}_C D_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\alpha} f \right) (x) = f(x). \quad (4.4.4)$$

A demonstração deste lema pode ser encontrada em [32].

**Lema 4.14.** Se  $f \in AC^n[a, b]$  ou  $C^n[a, b]$ , com  $-\infty < a < b < \infty$ , e  $\alpha \in \mathbb{C}$  com  $\text{Re}(\alpha) > 0$  e  $n = [\text{Re}(\alpha)] + 1$ , então

$$\left( I_{a+}^{\alpha} {}_C D_{a+}^{\alpha} f \right) (x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^j}{j!} \left( f^{(j)}(x) \Big|_{x=a} \right) \quad (4.4.5)$$

e

$$\left( I_{b-}^{\alpha} {}_C D_{b-}^{\alpha} f \right) (x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j (b-x)^j}{j!} \left( f^{(j)}(x) \Big|_{x=b} \right). \quad (4.4.6)$$

*Demonstração.* Vamos utilizar a Propriedade 4.2 e integração por partes para chegar ao resultado. Consideremos inicialmente as seguintes igualdades:

$$\left( I_{a+}^{\alpha} {}_C D_{a+}^{\alpha} f \right) (x) = \left( I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{n-\alpha} D^n f \right) (x) = \left( I_{a+}^n D^n \right) f(x) = \left( I_{a+}^n f^{(n)} \right) (x).$$

Agora podemos determinar  $\left( I_{a+}^n f^{(n)} \right) (x)$  efetuando  $n$  integrações por partes, ou seja,

$$\begin{aligned} \left( I_{a+}^n f^{(n)} \right) (x) &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x f^{(n)}(\tau) (x-\tau)^{n-1} d\tau \\ &= -\frac{1}{\Gamma(n)} (x-a)^{n-1} f^{(n-1)}(a) + \frac{1}{\Gamma(n-1)} \int_a^x f^{(n-1)}(\tau) (x-\tau)^{n-2} d\tau \\ &\quad \vdots \\ &= -\sum_{j=1}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (x-a)^j + \frac{1}{\Gamma(1)} \int_a^x f^{(1)}(\tau) (x-\tau)^0 d\tau \\ &= -\sum_{j=1}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (x-a)^j + \int_a^x f^{(1)}(\tau) d\tau \\ &= -\sum_{j=1}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (x-a)^j + f(x) - f(a) \\ &= f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (x-a)^j. \end{aligned}$$

A demonstração para  $\left( I_{b-}^{\alpha} {}_C D_{b-}^{\alpha} f \right) (x)$  é efetuada de forma similar. ■

A expressão para a transformada de Laplace do operador de derivação fracionária de Caputo à esquerda, no caso em que  $a = 0$ ,  $\text{Re}(\alpha) > 0$  e  $n = [\text{Re}(\alpha)] + 1$ , é dada por

$$\mathcal{L} \left[ {}_C D_{0+}^{\alpha} f \right] (s) = \mathcal{L} \left[ I_{0+}^{n-\alpha} f^{(n)} \right] (s)$$

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\equiv}_{(4.1.5)} s^{\alpha-n} \mathcal{L} [f^{(n)}] (s) \\
& \underbrace{\equiv}_{(1.3.5)} s^{\alpha-n} \left\{ s^n \mathcal{L} [f] (s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^j \left[ D^{n-1-j} f(t) \right] \Big|_{t=0+} \right\} \\
& = s^\alpha \mathcal{L} [f] (s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^{\alpha-n+j} \left[ f^{(n-1-j)}(t) \right] \Big|_{t=0+} \\
& \underbrace{\equiv}_{n-1-j=k} s^\alpha \mathcal{L} [f(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-1-k} \left[ f^{(k)}(t) \right] \Big|_{t=0+}.
\end{aligned}$$

Logo, podemos escrever

$$\mathcal{L} [{}_C D_{0+}^\alpha f] (s) = s^\alpha \mathcal{L} [f] (s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-1-k} \left[ f^{(k)}(t) \right] \Big|_{t=0+}. \quad (4.4.7)$$

Na equação (4.4.7), se em particular  $\alpha = n \in \mathbb{N}$ , então recuperamos a transformada de Laplace da derivada  $n$ -ésima de uma função, como na equação (1.3.5).

## 4.5 Integral e derivada fracionárias de Weyl

As operações de integração e derivação fracionárias, conforme definidas pelos operadores de Riemann-Liouville, são bem adequadas para séries de potência, mas não para funções definidas por séries de Fourier, pois, se  $f(x)$  é uma função periódica de período  $2\pi$ , então  $(I_{a+}^\alpha f)(x)$  pode não ser periódica. Por essa razão, é conveniente utilizar os operadores de integração e derivação fracionárias de Weyl.

Seja  $f(x)$  uma função periódica de período  $2\pi$ , definida na reta real, com valor médio nulo, isto é,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = 0, \quad (4.5.1)$$

e seja

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad \text{com} \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} f(x) dx, \quad (4.5.2)$$

a série de Fourier de  $f(x)$ , onde os  $c_n$ 's são os coeficientes de Fourier<sup>4</sup>.

Por (4.5.1), obtemos  $c_0 = 0$ , já que por hipótese a função tem valor médio nulo. Assim, podemos escrever

$$f(x) \sim \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad \text{com} \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} f(x) dx. \quad (4.5.3)$$

---

<sup>4</sup>A notação  $\sim$  indica que a série não necessariamente converge, e se converge, não converge necessariamente a  $f(x)$ .

Observe que por (4.5.3), temos

$$I^1 f(x) \sim \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} c_n (in)^{-1} e^{inx} \quad \text{e} \quad D^1 f(x) \sim \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} c_n (in)^1 e^{inx}.$$

Assim, a integral e a derivada de Weyl, são definidas, respectivamente, por

$${}^w I^\alpha f(x) \sim \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} c_n (in)^{-\alpha} e^{inx} \quad \text{e} \quad {}^w D^\alpha f(x) \sim \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} c_n (in)^\alpha e^{inx},$$

com  $\alpha \in \mathbb{C}$  e  $\text{Re}(\alpha) > 0$ .

Substituindo  $c_n$  na série para  ${}^w I^\alpha f(x)$ , definida acima, obtemos

$$\begin{aligned} {}^w I^\alpha f(x) &\sim \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-iny} f(y) dy \right) (in)^{-\alpha} e^{inx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) \left[ \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{e^{in(x-y)}}{(in)^\alpha} \right] dy \\ &\stackrel{\underbrace{x-y=t}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_x^{x-2\pi} f(x-t) \left[ \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{e^{int}}{(in)^\alpha} \right] (-dt) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t) \Psi_\alpha(t) dt, \end{aligned}$$

onde

$$\Psi_\alpha(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{e^{int}}{(in)^\alpha}. \quad (4.5.4)$$

De maneira análoga, obtemos a expressão para a derivada fracionária de Weyl

$${}^w D^\alpha f(x) \sim \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t) \Psi_{-\alpha}(t) dt.$$

De acordo com Samko [51], no caso em que  $0 < \alpha < 1$ , se  $f(x) \in L^1(0, 2\pi)$ , a série em (4.5.4) converge a

$$\Psi_\alpha(t) = \frac{2\pi}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} + r_\alpha(t), \quad \text{com} \quad 0 < t < 2\pi,$$

onde a função  $r_\alpha(t)$  é infinitamente diferenciável em  $t \in (-2\pi, 2\pi]$ . Dessa forma, obtemos a integral fracionária de Weyl à esquerda, definida por

$${}^w I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt = I_+^\alpha f(x), \quad 0 < \alpha < 1, \quad (4.5.5)$$

isto é, a integral fracionária de Weyl coincide com a integral fracionária de Liouville para  $0 < \alpha < 1$ . A respectiva derivada fracionária de Weyl à esquerda, denotada por  ${}_{-\infty}W_x^\alpha f(x)$ , para  $0 < \alpha < 1$ , é dada por

$${}_{-\infty}W_x^\alpha f(x) = \frac{d}{dx} I_+^{1-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt = D_+^\alpha f(x). \quad (4.5.6)$$

Observe que se definirmos a série de Fourier de  $f(x)$  da forma

$$f(x) \sim \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} c_n e^{-inx}, \quad \text{com} \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{inx} f(x) dx,$$

então obtemos para  $0 < \alpha < 1$ , de maneira análoga, que a integral fracionária de Weyl à direita e a derivada fracionária de Weyl à direita, são definidas, respectivamente, por

$${}^w I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty \frac{f(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt = I_-^\alpha f(x)$$

e

$${}_x W_\infty^\alpha f(x) = -\frac{d}{dx} I_-^{1-\alpha} f(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^\infty \frac{f(t)}{(t-x)^\alpha} dt = D_-^\alpha f(x).$$

Como exemplo de aplicação da derivada fracionária segundo Weyl, vamos determinar uma expressão para a derivada fracionária da particular função  $f(x) = \cos x$ , segundo Weyl e segundo Riemann-Liouville.

Temos que  $f(x)$  é periódica de período  $2\pi$  e tem valor médio nulo, pois

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos x \, dx = 0.$$

• Derivada fracionária de  $f(x) = \cos x$  segundo Weyl:

$$f(x) = \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{1}{2} e^{ix} + \frac{1}{2} e^{-ix}.$$

Assim, temos que

$$c_1 = c_{-1} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad c_n = 0 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}.$$

Com isso,

$${}^w D^\alpha \cos x = c_1 (i)^\alpha e^{ix} + c_{-1} (-i)^\alpha e^{-ix} = \frac{1}{2} i^\alpha e^{ix} + \frac{1}{2} (-i)^\alpha e^{-ix}.$$

Portanto, podemos escrever

$$\phi(\alpha, x) = {}^w D^\alpha \cos x = \frac{1}{2} i^\alpha e^{ix} + \frac{1}{2} (-i)^\alpha e^{-ix}.$$

Note que a função  $\phi(\alpha, x)$  é periódica de período  $2\pi$ .

Na figura a seguir, temos o gráfico para a função  $\phi(\alpha, x)$ , no intervalo  $-10 \leq x \leq 10$ , para alguns valores de  $\alpha$ .

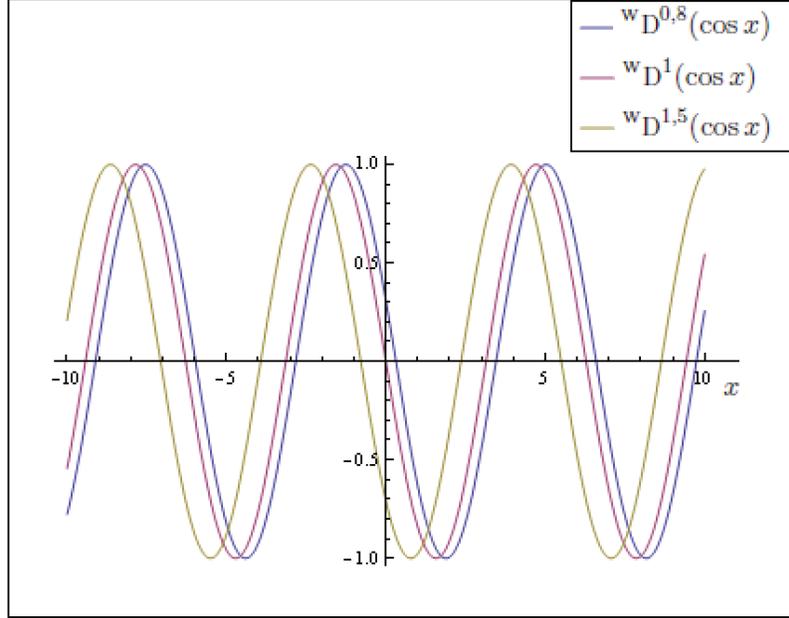


Figura 4.6:  ${}^wD^\alpha(\cos x)$  para  $\alpha = 0, 8; 1$  e  $1, 5$ .

- Derivada fracionária de  $f(x) = \cos x$  segundo Riemann-Liouville:

$$\begin{aligned} D_{0+}^\alpha \cos x &= \frac{1}{2} \left( D_{0+}^\alpha e^{ix} + D_{0+}^\alpha e^{-ix} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ D_{0+}^\alpha \left[ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(ix)^j}{j!} \right] + D_{0+}^\alpha \left[ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-ix)^j}{j!} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2} x^{-\alpha} [E_{1,1-\alpha}(ix) + E_{1,1-\alpha}(-ix)] \\ &= \frac{x^{-\alpha}}{2\Gamma(1-\alpha)} [{}_1F_1(1; 1-\alpha; ix) + {}_1F_1(1; 1-\alpha; -ix)], \end{aligned}$$

onde  ${}_1F_1(a; b; z)$  é a função hipergeométrica confluyente.

A derivada de Weyl é definida para  $x \in \mathbb{R}$ , enquanto que a de Riemann-Liouville é definida apenas para  $x > 0$ .

A função  $D_{0+}^\alpha \cos x$  não tem período  $2\pi$ . De fato, se por exemplo  $\alpha = 0, 5$ , então

$$\left[ D_{0+}^{0,5} \cos x \right] \Big|_{x=1} = \frac{1^{-0,5}}{2\Gamma(0,5)} [{}_1F_1(1; 0,5; i) + {}_1F_1(1; 0,5; -i)] \cong -0,1055,$$

enquanto que

$$\left[ D_{0+}^{0,5} \cos x \right] \Big|_{x=(1+2\pi)} = \frac{(1+2\pi)^{-0,5}}{2\Gamma(0,5)} \left[ {}_1F_1(1; 0, 5; (1+2\pi)i) + {}_1F_1(1; 0, 5; -(1+2\pi)i) \right] \cong -0,2104.$$

Ou seja, concluimos que

$$\left[ D_{0+}^{0,5} \cos x \right] \Big|_{x=1} \neq \left[ D_{0+}^{0,5} \cos x \right] \Big|_{x=(1+2\pi)}.$$

Na figura a seguir temos o gráfico da derivada fracionária segundo Riemann-Liouville da função  $f(x) = \cos x$  para alguns valores particulares de  $\alpha$ , quando  $-10 \leq x \leq 20$ . No gráfico de  $D_{0+}^\alpha(\cos x)$  podemos ter pontos com  $x \leq 0$  apenas no caso em que  $\alpha = 1$ . Para  $\alpha \neq 1$ ,  $D_{0+}^\alpha(\cos x)$  está bem definida apenas para  $x > 0$ .

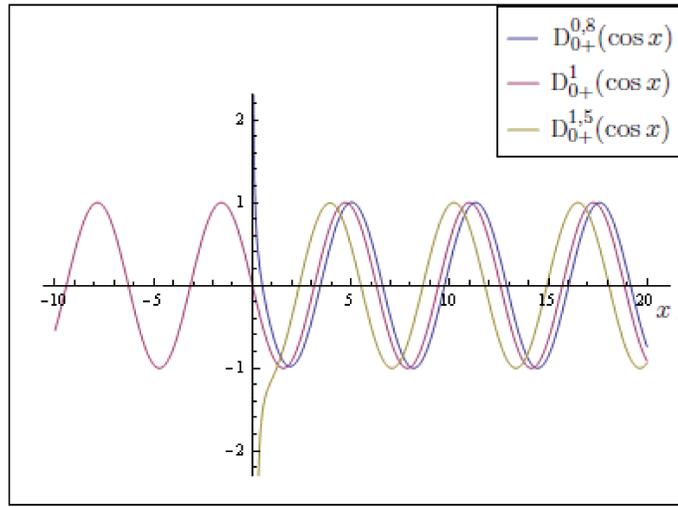


Figura 4.7:  $D_{0+}^\alpha(\cos x)$  para  $\alpha = 0,8; 1$  e  $1,5$ .

A seguir o gráfico para  ${}^wD_{0+}^{0,5}(\cos x)$  e  $D_{0+}^{0,5}(\cos x)$ , quando  $0 \leq x \leq 4\pi$ . Pelo gráfico acima, notamos que para  $\pi < x < 4\pi$  as derivadas se aproximam, enquanto que para  $0 < x < \pi$ , elas diferem bastante, principalmente quando  $x$  está próximo de 0.

Outro exemplo de aplicação da derivada fracionária segundo Weyel pode ser obtido considerando a seguinte equação diferencial fracionária:

$${}^wD^{2\alpha} f(x) + {}^wD^\beta f(x) + f(x) = g(x), \quad (4.5.7)$$

com  $0 < \alpha, \beta < 1$  e  $g(x) \in L^1(0, 2\pi)$  uma função  $2\pi$ -periódica, com valor médio nulo.

Seja

$$f(x) \sim \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} a_n e^{inx}$$

uma solução particular para essa equação. Assim, podemos escrever

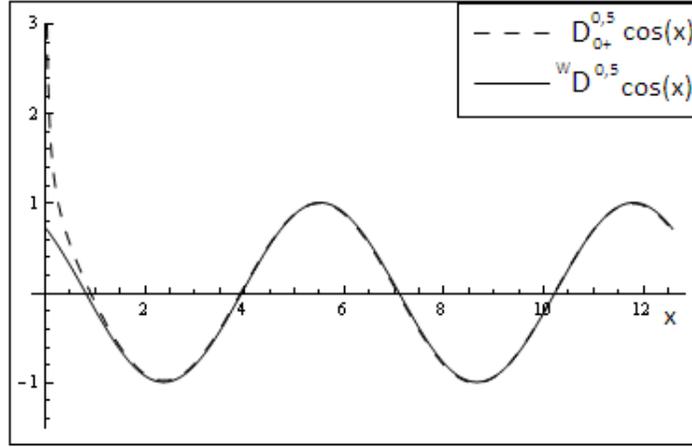


Figura 4.8:  ${}^wD^{0,5}(\cos x)$  (Weyl) e  $D_{0+}^{0,5}(\cos x)$  (Riemann-Liouville).

$${}^wD^{2\alpha} f(x) \sim \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} a_n (in)^{2\alpha} e^{inx} \quad \text{e} \quad {}^wD^{\beta} f(x) \sim \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} a_n (in)^{\beta} e^{inx}.$$

Com isso, obtemos

$${}^wD^{2\alpha} f(x) + {}^wD^{\beta} f(x) + f(x) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} a_n [(in)^{2\alpha} + (in)^{\beta} + 1] e^{inx}.$$

Seja agora

$$g(x) \sim \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} c_n e^{inx},$$

a série de Fourier de  $g(x)$ , onde

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} g(x) dx,$$

então a equação em (4.5.7) é equivalente à equação

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} a_n [(in)^{2\alpha} + (in)^{\beta} + 1] e^{inx} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

Através da equação acima é possível determinar os coeficientes  $a_n$ 's para obter uma expressão para a função  $f(x)$ . Temos que

$$a_n = \frac{c_n}{[(in)^{2\alpha} + (in)^{\beta} + 1]} = \frac{[(in)^{2\alpha} + (in)^{\beta} + 1]^{-1}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} g(x) dx.$$

Logo, uma solução particular para a equação (4.5.7) é dada por

$$f(x) \sim \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} e^{inx} \left\{ \frac{[(in)^{2\alpha} + (in)^\beta + 1]^{-1}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} g(x) dx \right\}.$$

Se, em particular,  $g(x) = -\text{sen}x = \frac{1}{2i} e^{-ix} - \frac{1}{2i} e^{ix}$ , então

$$c_{-1} = \frac{1}{2i}, \quad c_1 = -\frac{1}{2i} \quad \text{e} \quad c_n = 0 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}.$$

Assim, obtemos

$$a_{-1} = \frac{1}{2i [(-i)^{2\alpha} + (-i)^\beta + 1]}, \quad a_1 = \frac{-1}{2i (i^{2\alpha} + i^\beta + 1)}$$

e

$$a_n = 0 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}.$$

Logo, podemos escrever

$$f(x) = \frac{1}{2i [(-i)^{2\alpha} + (-i)^\beta + 1]} e^{-ix} - \frac{1}{2i (i^{2\alpha} + i^\beta + 1)} e^{ix}.$$

Além disso, ainda neste caso particular, fazendo  $\alpha = \beta = 1$ , temos que  $f(x) = \cos x$  é uma solução particular para a equação (4.5.7) quando  $g(x) = -\text{sen}x$ .

## 4.6 Integral fracionária de Riesz

Operações de integração e derivação fracionárias no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$  são potências fracionárias  $(-\Delta)^{\beta/2}$  do operador Laplaciano, onde  $\beta \in \mathbb{C}$ . Se  $\text{Re}(\beta) < 0$ , temos a integral fracionária de Riesz, por outro lado, se  $\text{Re}(\beta) > 0$ , temos a derivada fracionária de Riesz.

Se  $\varphi$  é uma função de uma variável real, então temos a seguinte propriedade:

$$\mathcal{F}[\Delta\varphi](\omega) = (i\omega)^2 \hat{\varphi}(\omega).$$

Generalizando essa propriedade para a derivada fracionária de uma função  $f(x)$ , com  $x \in \mathbb{R}$ , podemos escrever

$$\mathcal{F}[\Delta^{\alpha/2} f](\omega) = (i\omega)^\alpha \hat{f}(\omega).$$

Podemos ainda reescrever a potência  $i^\alpha$  da forma

$$i^\alpha = (i^2)^{\alpha/2} = (-1)^{\alpha/2},$$

com isso, temos que

$$\mathcal{F} \left[ \Delta^{\alpha/2} f \right] (\omega) = (-1)^{\alpha/2} \|\omega\|^\alpha \hat{f}(\omega),$$

ou ainda,

$$\mathcal{F} \left[ (-\Delta)^{\alpha/2} f \right] (\omega) = \|\omega\|^\alpha \hat{f}(\omega),$$

de onde segue que

$$(-\Delta)^{\alpha/2} f = \mathcal{F}^{-1} \|\omega\|^\alpha \mathcal{F} f = \mathbb{D}^\alpha f,$$

onde  $\mathcal{F}^{-1}$  denota a transformada de Fourier inversa e  $\mathbb{D}^\alpha$  denota a derivada fracionária de Riesz de ordem  $\alpha$ .

No caso da integral fracionária, podemos considerar a potência fracionária  $-\frac{\alpha}{2}$ , com  $\text{Re}(\alpha) > 0$ , do operador Laplaciano, em termos da transformada de Fourier, por

$$(-\Delta)^{-\alpha/2} f = \mathcal{F}^{-1} \|\omega\|^{-\alpha} \mathcal{F} f = \mathbb{I}^\alpha f,$$

para  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  e funções  $f(x)$ , “suficientemente boas”.  $\mathbb{I}^\alpha f$  denota a integral fracionária de Riesz da função  $f$ .

A integração fracionária de Riesz de ordem  $\alpha$  é também conhecida como potencial de Riesz e definida pela convolução de Fourier

$$(\mathbb{I}^\alpha f)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} K_\alpha(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) f(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}, \quad (4.6.1)$$

com  $\text{Re}(\alpha) > 0$  e  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , onde

$$K_\alpha(\mathbf{x}) := \frac{1}{\gamma_n(\alpha)} \begin{cases} \|\mathbf{x}\|^{\alpha-n}, & \text{se } \alpha - n \neq 0, 2, 4, \dots, \\ \|\mathbf{x}\|^{\alpha-n} \log\left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\right), & \text{se } \alpha - n = 0, 2, 4, \dots, \end{cases}$$

é o núcleo de Riesz e  $\gamma_n(\alpha)$  é definido em [32], como

$$\gamma_n(\alpha) = \begin{cases} 2^\alpha \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \left[\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)\right]^{-1}, & \text{se } \alpha - n \neq 0, 2, 4, \dots, \\ (-1)^{\frac{n-\alpha}{2}} 2^{\alpha-1} \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(1 + \frac{\alpha-n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right), & \text{se } \alpha - n = 0, 2, 4, \dots \end{cases}$$

Se, em particular,  $n = 1$ , ou seja,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , então

$$(\mathbb{I}^\alpha f)(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}{2^\alpha \pi^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) |x - \xi|^{\alpha-1} d\xi \quad (\alpha \neq 1, 3, 5, \dots). \quad (4.6.2)$$

Podemos reescrever (4.6.2) como um produto de convolução (1.1.1), da seguinte forma

$$(\mathbb{I}^\alpha f)(x) = c_\alpha (f * g)(x), \quad (4.6.3)$$

onde  $g(x) = |x|^{\alpha-1}$ ,  $c_\alpha = \frac{\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}{2^\alpha \pi^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$  e  $\alpha \neq 1, 3, 5, \dots$

Aplicando a transformada de Fourier em ambos os membros de (4.6.3), obtemos

$$\mathcal{F}[\mathbb{I}^\alpha f](\omega) = \mathcal{F}[c_\alpha(f * g)](\omega) \Rightarrow |\omega|^{-\alpha} \hat{f}(\omega) = c_\alpha \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega),$$

onde  $\hat{f}(\omega)$  e  $\hat{g}(\omega)$  são as transformadas de Fourier de  $f(x)$  e  $g(x)$ , respectivamente. Assim,

$$\hat{g}(\omega) = \mathcal{F}[|x|^{\alpha-1}](\omega) = \frac{2^\alpha \pi^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} |\omega|^{-\alpha}. \quad (4.6.4)$$

Podemos também reescrever (4.6.2) em termos das integrais de Liouville (4.3.1) e (4.3.2):

$$\begin{aligned} \mathbb{I}^\alpha f(x) &= \frac{\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}{2^\alpha \pi^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) |x - \xi|^{\alpha-1} d\xi \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}{2^\alpha \pi^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \left[ \int_{-\infty}^x f(\xi) (x - \xi)^{\alpha-1} d\xi + \int_x^{\infty} f(\xi) (\xi - x)^{\alpha-1} d\xi \right] \\ &= \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}{2^\alpha \pi^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \left[ \mathbb{I}_+^\alpha f(x) + \mathbb{I}_-^\alpha f(x) \right] \\ &= \frac{1}{2 \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \left[ \mathbb{I}_+^\alpha f(x) + \mathbb{I}_-^\alpha f(x) \right]. \end{aligned}$$

Logo, temos

$$\mathbb{I}^\alpha f(x) = \frac{1}{2 \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \left[ \mathbb{I}_+^\alpha f(x) + \mathbb{I}_-^\alpha f(x) \right] \quad (\alpha \neq 1, 3, 5, \dots). \quad (4.6.5)$$

## 4.7 Derivada fracionária de Riesz

Apresentamos nesta seção o operador de derivação fracionária de Riesz, que pode ser escrito em termos da transformada de Fourier, conforme discutido na seção anterior, de modo a satisfazer

$$(-\Delta)^{\alpha/2} f = \mathcal{F}^{-1} \|\omega\|^\alpha \mathcal{F} f = \mathbb{D}^\alpha f,$$

onde  $\mathbb{D}^\alpha$  denota a derivada fracionária de Riesz de ordem  $\alpha$ .

A derivada fracionária de Riesz de  $f(\mathbf{x})$ , com  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , é definida para  $\text{Re}(\alpha) > 0$ , como a seguinte integral

$$(\mathbb{D}^\alpha f)(\mathbf{x}) := \frac{1}{d_n(l, \alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(\Delta_\xi^l f)(\mathbf{x})}{|\xi|^{n+\alpha}} d\xi \quad (l > \alpha), \quad (4.7.1)$$

onde  $d_n(l, \alpha)$  e  $(\Delta_\xi^l f)(\mathbf{x})$  estão definidas em [32].

Em particular, se  $n = 1$ , então

$$(\mathbb{D}^\alpha f)(x) = k_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x) - f(x - \xi)}{|\xi|^{1+\alpha}} d\xi \quad (0 < \alpha < 1), \quad (4.7.2)$$

onde  $k_\alpha = \frac{2^\alpha \Gamma(1 + \frac{\alpha}{2}) \Gamma(\frac{1+\alpha}{2}) \text{sen}(\frac{\alpha\pi}{2})}{\pi^{\frac{3}{2}}}$ .

Vamos expressar (4.7.2) em termos das derivadas fracionárias de Liouville (4.3.3). Considerando  $0 < \alpha < 1$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} D_+^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x (x - \xi)^{-\alpha} f(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^\infty \xi^{-\alpha} f(x - \xi) d\xi \\ &= \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^\infty \xi^{-\alpha} \frac{\partial}{\partial x} f(x - \xi) d\xi. \end{aligned}$$

Agora,  $\frac{\partial}{\partial x} f(x - \xi) = -\frac{\partial}{\partial \xi} f(x - \xi)$ , com isso, temos

$$D_+^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^\infty \xi^{-\alpha} \left[ -\frac{\partial}{\partial \xi} f(x - \xi) \right] d\xi.$$

Efetuada integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned} D_+^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \left\{ \left[ -\frac{f(x - \xi)}{\xi^\alpha} \right] \Big|_0^\infty - \alpha \int_0^\infty \xi^{-\alpha-1} f(x - \xi) d\xi \right\} \\ &= \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \left\{ \lim_{\xi \rightarrow \infty} \left[ -\frac{f(x - \xi)}{\xi^\alpha} \right] + \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x - \xi)}{\xi^\alpha} \right] - \alpha \int_0^\infty \xi^{-\alpha-1} f(x - \xi) d\xi \right\} \\ &= \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \left\{ 0 + f(x) \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\xi^\alpha} \right] - \alpha \int_0^\infty \xi^{-\alpha-1} f(x - \xi) d\xi \right\} \\ &= \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \left\{ 0 + f(x) \int_0^\infty \frac{\alpha}{\xi^{\alpha+1}} d\xi - \alpha \int_0^\infty \xi^{-\alpha-1} f(x - \xi) d\xi \right\} \\ &= \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \left[ \alpha \int_0^\infty \frac{f(x)}{\xi^{\alpha+1}} d\xi - \alpha \int_0^\infty \frac{f(x - \xi)}{\xi^{\alpha+1}} d\xi \right] \\ &= \frac{\alpha}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^\infty \frac{f(x) - f(x - \xi)}{\xi^{\alpha+1}} d\xi. \end{aligned}$$

Logo, podemos escrever

$$D_+^\alpha f(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{f(x) - f(x-\xi)}{\xi^{\alpha+1}} d\xi \quad (0 < \alpha < 1). \quad (4.7.3)$$

De forma análoga, obtemos

$$\begin{aligned} D_-^\alpha f(x) &= -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^\infty (\xi-x)^{-\alpha} f(\xi) d\xi \\ &= -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^\infty \xi^{-\alpha} f(x+\xi) d\xi \\ &= -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \xi^{-\alpha} \frac{\partial}{\partial x} f(x+\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Agora,  $\frac{\partial}{\partial x} f(x+\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi} f(x+\xi)$ , com isso

$$D_-^\alpha f(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \xi^{-\alpha} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} f(x+\xi) \right] d\xi$$

Efetuada integração por partes, temos

$$\begin{aligned} D_-^\alpha f(x) &= -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left\{ \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[ -\frac{f(x+\xi)}{\xi^\alpha} \right] + \alpha \int_0^\infty \xi^{-\alpha-1} f(x+\xi) d\xi \right\} \\ &= -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[ -\alpha \int_0^\infty \frac{f(x)}{\xi^{\alpha+1}} d\xi + \alpha \int_0^\infty \frac{f(x+\xi)}{\xi^{\alpha+1}} d\xi \right] \\ &= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{f(x) - f(x+\xi)}{\xi^{\alpha+1}} d\xi. \end{aligned}$$

Logo, obtemos

$$D_-^\alpha f(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{f(x) - f(x+\xi)}{\xi^{\alpha+1}} d\xi \quad (0 < \alpha < 1). \quad (4.7.4)$$

A derivada de Riesz (4.7.2) de  $f(x)$ , pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^\alpha f(x) &= k_\alpha \left[ \int_0^\infty \frac{f(x) - f(x-\xi)}{\xi^{\alpha+1}} d\xi + \int_0^\infty \frac{f(x) - f(x+\xi)}{\xi^{\alpha+1}} d\xi \right] \\ &= k_\alpha \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha} \left[ D_+^\alpha f(x) + D_-^\alpha f(x) \right]. \end{aligned}$$

Podemos simplificar a expressão

$$k_\alpha \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha},$$

utilizando algumas identidades envolvendo a função gama, discutidas no Capítulo 2. Primeiramente, vamos substituir o termo  $k_\alpha$ , definido em (4.7.2) na expressão

$$k_\alpha \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha} = \frac{2^\alpha \Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\pi^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha}.$$

Em [24], página 896, 1 de 8.335, encontramos a expressão

$$\Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(2x)}{2^{2x-1}}.$$

Escrevendo  $x = \frac{1+\alpha}{2}$ , temos que

$$\Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1+\alpha)}{2^\alpha}.$$

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} k_\alpha \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha} &= \frac{2^\alpha \Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\pi^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha} \\ &= \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1+\alpha) \Gamma(1-\alpha) \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\alpha \pi^{\frac{3}{2}}} \\ &\stackrel{(2.1.3)}{=} \frac{\sqrt{\pi} \alpha \Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha) \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\alpha \pi^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha) \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\pi^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Em [24], página 896, 2 de 8.334, encontramos a expressão

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + x\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - x\right) = \frac{\pi}{\cos(\pi x)}.$$

Escrevendo  $x = \alpha - \frac{1}{2}$  na expressão acima, temos que

$$\Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha) = \Gamma\left(\frac{1}{2} + \alpha - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \alpha\right) = \frac{\pi}{\cos\left[\pi\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\right]}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
k_\alpha \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha} &= \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha) \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\pi^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{\sqrt{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \pi}{\pi^{\frac{3}{2}} \cos\left[\pi\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\right]} \\
&= \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\cos\left[\pi\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\right]}.
\end{aligned}$$

Ainda podemos escrever

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\cos\left[\pi\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\right]} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\cos\left(\alpha\pi - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen}(\alpha\pi)} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(2\frac{\alpha\pi}{2}\right)} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} = \frac{1}{2\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}.$$

Ou seja, obtemos a seguinte igualdade

$$k_\alpha \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha} = \frac{1}{2\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}.$$

Temos então uma expressão para a derivada de Riesz em termos das derivadas de Liouville, dada por

$$\mathbb{D}^\alpha f(x) = \frac{1}{2\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \left[ \mathbb{D}_+^\alpha f(x) + \mathbb{D}_-^\alpha f(x) \right] \quad (0 < \alpha < 1). \quad (4.7.5)$$

Podemos ainda expressar  $\mathbb{D}^\alpha f(x)$  como um produto de convolução a partir da equação (4.7.5). Substituindo  $\mathbb{D}_+^\alpha f(x)$  e  $\mathbb{D}_-^\alpha f(x)$  pelas expressões dadas em (4.3.3) e considerando o fato de que  $0 < \alpha < 1$ , podemos escrever

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}^\alpha f(x) &= \frac{1}{2\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \left[ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x f(\xi) (x-\xi)^{-\alpha} d\xi + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^\infty f(\xi) (\xi-x)^{-\alpha} d\xi \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha) 2\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \left[ \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x f(\xi) (x-\xi)^{-\alpha} d\xi + (-1)^{-\alpha} \frac{d}{dx} \int_x^\infty f(\xi) (x-\xi)^{-\alpha} d\xi \right] \\
&= \left[ \frac{1 + (-1)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha) 2\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \right] \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^\infty f(\xi) (x-\xi)^{-\alpha} d\xi \\
&= \left[ \frac{1 + (-1)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha) 2\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \right] \int_{-\infty}^\infty f(\xi) \left[ \frac{\partial}{\partial x} (x-\xi)^{-\alpha} \right] d\xi \\
&= \left[ \frac{1 + (-1)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha) 2\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \right] \int_{-\infty}^\infty f(\xi) \left[ -\alpha (x-\xi)^{-\alpha-1} \right] d\xi
\end{aligned}$$

$$= \left[ \frac{1 + (-1)^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha) 2 \cos(\frac{\alpha\pi}{2})} \right] \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) (x - \xi)^{-\alpha-1} d\xi.$$

Assim, temos que

$$(\mathbb{D}^\alpha f)(x) = d_\alpha (f * h)(x), \quad (4.7.6)$$

onde  $h(x) = x^{-\alpha-1}$ ,  $d_\alpha = \left[ \frac{1 + (-1)^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha) 2 \cos(\frac{\alpha\pi}{2})} \right]$  e  $0 < \alpha < 1$ .

Aplicando a transformada de Fourier em ambos os membros da equação (4.7.6), obtemos a transformada de Fourier da função  $h(x) = x^{-\alpha-1}$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[(\mathbb{D}^\alpha f)](\omega) &= \left[ \frac{1 + (-1)^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha) 2 \cos(\frac{\alpha\pi}{2})} \right] \mathcal{F}[(f * h)](\omega) \\ |\omega|^\alpha \hat{f}(\omega) &= \left[ \frac{1 + (-1)^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha) 2 \cos(\frac{\alpha\pi}{2})} \right] \hat{f}(\omega) \hat{h}(\omega), \end{aligned}$$

onde  $\hat{f}(\omega)$  e  $\hat{h}(\omega)$  são as transformadas de Fourier de  $f(x)$  e  $h(x)$ , respectivamente. Assim,

$$\hat{h}(\omega) = \mathcal{F}[x^{-\alpha-1}](\omega) = \left[ \frac{\Gamma(-\alpha) 2 \cos(\frac{\alpha\pi}{2})}{1 + (-1)^{-\alpha}} \right] |\omega|^\alpha, \quad \text{com } 0 < \alpha < 1. \quad (4.7.7)$$

**Teorema 4.15.** O produto de convolução de Fourier das funções  $g(x) = |x|^{\alpha-1}$  e  $h(x) = x^{-\alpha-1}$ , para  $0 < \alpha < 1$  é da forma<sup>5</sup>

$$(g * h)(x) = \frac{1}{c_\alpha d_\alpha} \delta(x), \quad (4.7.8)$$

onde  $c_\alpha = \frac{\Gamma(\frac{1-\alpha}{2})}{2^\alpha \pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(\frac{\alpha}{2})}$ ,  $d_\alpha = \left[ \frac{1 + (-1)^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha) 2 \cos(\frac{\alpha\pi}{2})} \right]$  e  $\frac{1}{c_\alpha d_\alpha} = \frac{4 \Gamma(\alpha) \Gamma(-\alpha) \cos^2(\frac{\alpha\pi}{2})}{1 + (-1)^{-\alpha}}$ .

*Demonstração.* Aplicando a transformada de Fourier na função  $(g * h)(x)$ , e usando as equações (4.6.4) e (4.7.7), temos que

$$\mathcal{F}[(g * h)](\omega) = \hat{g}(\omega) \hat{h}(\omega) = \left( \frac{|\omega|^{-\alpha}}{c_\alpha} \right) \left( \frac{|\omega|^\alpha}{d_\alpha} \right) = \frac{1}{c_\alpha d_\alpha} = \mathcal{F} \left[ \frac{1}{c_\alpha d_\alpha} \delta(x) \right](\omega).$$

Assim, podemos escrever

$$\mathcal{F}[g * h](\omega) = \mathcal{F} \left[ \frac{1}{c_\alpha d_\alpha} \delta \right](\omega).$$

Aplicando a transformada de Fourier inversa em ambos os membros, temos que

$$(g * h)(x) = \frac{1}{c_\alpha d_\alpha} \delta(x) = \left[ \frac{4 \Gamma(\alpha) \Gamma(-\alpha) \cos^2(\frac{\alpha\pi}{2})}{1 + (-1)^{-\alpha}} \right] \delta(x).$$

■

---

<sup>5</sup> $\delta(x)$  denota a distribuição delta de Dirac.

No Teorema 4.15, o coeficiente  $\frac{1}{c_\alpha d_\alpha}$  em (4.7.8) é complexo, já que  $0 < \alpha < 1$ . Considerando  $0 < \alpha < 1$ , pelas equações (4.6.5) e (4.7.5), temos que

$$\begin{aligned} (\mathbb{D}^\alpha \mathbb{I}^\alpha f)(x) &= \frac{1}{2 \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \mathbb{D}^\alpha \left( \mathbb{I}_+^\alpha f(x) + \mathbb{I}_-^\alpha f(x) \right) \\ &= \left[ \frac{1}{2 \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \right]^2 \left\{ \mathbb{D}_+^\alpha \left[ \mathbb{I}_+^\alpha f(x) + \mathbb{I}_-^\alpha f(x) \right] + \mathbb{D}_-^\alpha \left[ \mathbb{I}_+^\alpha f(x) + \mathbb{I}_-^\alpha f(x) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{4 \cos^2\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \left[ \mathbb{D}_+^\alpha \mathbb{I}_+^\alpha f(x) + \mathbb{D}_+^\alpha \mathbb{I}_-^\alpha f(x) + \mathbb{D}_-^\alpha \mathbb{I}_+^\alpha f(x) + \mathbb{D}_-^\alpha \mathbb{I}_-^\alpha f(x) \right]. \end{aligned}$$

Podemos escrever

$$\left( \mathbb{D}_+^\alpha \mathbb{I}_+^\alpha f \right)(x) = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left( \mathbb{D}_{a+}^\alpha \mathbb{I}_{a+}^\alpha f \right)(x) \underbrace{=}_{\text{Lema 4.9}} \lim_{a \rightarrow -\infty} f(x) = f(x),$$

de maneira análoga, temos

$$\left( \mathbb{D}_-^\alpha \mathbb{I}_-^\alpha f \right)(x) = f(x).$$

Assim,

$$\left( \mathbb{D}^\alpha \mathbb{I}^\alpha f \right)(x) = \frac{1}{4 \cos^2\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \left[ 2f(x) + \mathbb{D}_+^\alpha \mathbb{I}_-^\alpha f(x) + \mathbb{D}_-^\alpha \mathbb{I}_+^\alpha f(x) \right]. \quad (4.7.9)$$

Dadas duas funções reais  $f(x)$  e  $g(x)$ , por (4.7.2) temos que para  $0 < \alpha < 1$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^\alpha [f(x)g(x)] &= k_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)g(x) - f(x-\xi)g(x-\xi)}{|\xi|^{1+\alpha}} d\xi \\ &= k_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x-\xi) + f(x)g(x-\xi) - f(x-\xi)g(x-\xi)}{|\xi|^{1+\alpha}} d\xi \\ &= k_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)[g(x) - g(x-\xi)] + f(x)g(x-\xi) - f(x-\xi)g(x-\xi)}{|\xi|^{1+\alpha}} d\xi \\ &= f(x)\mathbb{D}^\alpha g(x) + k_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)g(x-\xi) - f(x-\xi)g(x-\xi)}{|\xi|^{1+\alpha}} d\xi \\ &= f(x)\mathbb{D}^\alpha g(x) + k_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(x, \xi)}{|\xi|^{1+\alpha}} d\xi, \end{aligned}$$

onde

$$\psi(x, \xi) = f(x)g(x-\xi) - f(x-\xi)g(x-\xi).$$

A função  $\psi(x, \xi)$  pode ser reescrita da forma

$$\begin{aligned}
\psi(x, \xi) &= f(x)g(x - \xi) - f(x - \xi)g(x - \xi) \\
&= g(x)f(x - \xi) - g(x)f(x - \xi) + f(x)g(x - \xi) - f(x - \xi)g(x - \xi) \\
&= f(x)g(x) - f(x)g(x) + g(x)f(x - \xi) - g(x)f(x - \xi) + f(x)g(x - \xi) - f(x - \xi)g(x - \xi) \\
&= g(x) [f(x) - f(x - \xi)] - f(x)g(x) + f(x)g(x - \xi) + g(x)f(x - \xi) - f(x - \xi)g(x - \xi).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\psi(x, \xi) = g(x) [f(x) - f(x - \xi)] - f(x)g(x) + f(x)g(x - \xi) + g(x)f(x - \xi) - f(x - \xi)g(x - \xi). \quad (4.7.10)$$

Dessa forma, temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}^\alpha [f(x)g(x)] &= f(x)\mathbb{D}^\alpha g(x) + k_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(x, \xi)}{|\xi|^{1+\alpha}} d\xi \\
&\stackrel{\text{Eq. (4.7.10)}}{=} \underbrace{f(x)\mathbb{D}^\alpha g(x) + g(x)\mathbb{D}^\alpha f(x)} + k_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-f(x)g(x) + f(x)g(x - \xi) + g(x)f(x - \xi) - f(x - \xi)g(x - \xi)}{|\xi|^{1+\alpha}} d\xi \\
&= f(x)\mathbb{D}^\alpha g(x) + g(x)\mathbb{D}^\alpha f(x) + k_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-f(x) [g(x) - g(x - \xi)] + f(x - \xi) [g(x) - g(x - \xi)]}{|\xi|^{1+\alpha}} d\xi \\
&= f(x)\mathbb{D}^\alpha g(x) + g(x)\mathbb{D}^\alpha f(x) + k_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[f(x - \xi) - f(x)] [g(x) - g(x - \xi)]}{|\xi|^{1+\alpha}} d\xi.
\end{aligned}$$

Logo, podemos escrever

$$\mathbb{D}^\alpha [f(x)g(x)] = f(x)\mathbb{D}^\alpha g(x) + g(x)\mathbb{D}^\alpha f(x) + k_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[f(x - \xi) - f(x)] [g(x) - g(x - \xi)]}{|\xi|^{1+\alpha}} d\xi. \quad (4.7.11)$$

Considere, por exemplo, o caso particular em que  $f(x) = c$ , onde  $c$  é uma constante real. Pela equação (4.7.2), segue que para  $0 < \alpha < 1$ ,

$$\mathbb{D}^\alpha c = k_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c - c}{|\xi|^{1+\alpha}} d\xi = 0.$$

Ou seja, a derivada de uma constante é zero. Substituindo esse resultado na equação (4.7.11), podemos escrever

$$\mathbb{D}^\alpha [c g(x)] = c \mathbb{D}^\alpha g(x) + g(x)\mathbb{D}^\alpha c + k_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[c - c] [g(x) - g(x - \xi)]}{|\xi|^{1+\alpha}} d\xi,$$

ou seja,

$$\mathbb{D}^\alpha [c g(x)] = c \mathbb{D}^\alpha g(x) + g(x) \cdot 0 + k_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[0] [g(x) - g(x - \xi)]}{|\xi|^{1+\alpha}} d\xi,$$

assim, temos que

$$\mathbb{D}^\alpha [c g(x)] = c \mathbb{D}^\alpha g(x).$$

Como um exemplo ilustrativo para a derivada de Riesz de uma função, vamos considerar a função  $f(x) = \cos x$  e encontrar sua derivada fracionária segundo Riesz, no caso particular em que  $0 < \alpha < 1$ , utilizando a derivada como o produto de convolução, definida na equação (4.7.6).

$$\mathbb{D}^\alpha \cos(x) = \left[ \frac{1 + (-1)^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha) 2 \cos(\frac{\alpha\pi}{2})} \right] \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\xi) (x - \xi)^{-\alpha-1} d\xi.$$

Fazendo a mudança de variável  $u = x - \xi$  na integral acima, temos que

$$\mathbb{D}^\alpha \cos(x) = \left[ \frac{1 + (-1)^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha) 2 \cos(\frac{\alpha\pi}{2})} \right] \int_{\infty}^{-\infty} \cos(x - u) u^{-\alpha-1} \cdot (-du),$$

ou seja,

$$\mathbb{D}^\alpha \cos(x) = \left[ \frac{1 + (-1)^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha) 2 \cos(\frac{\alpha\pi}{2})} \right] \int_{-\infty}^{\infty} \cos(x - u) u^{-\alpha-1} du.$$

Podemos reescrever a integral acima de maneira conveniente para que possamos utilizar as equações em (??) e (??).

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^\alpha \cos(x) &= \left[ \frac{1 + (-1)^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha) 2 \cos(\frac{\alpha\pi}{2})} \right] \int_{-\infty}^{\infty} (\cos x \cos u + \text{sen } x \text{ sen } u) u^{-\alpha-1} du \\ &= \left[ \frac{1 + (-1)^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha) 2 \cos(\frac{\alpha\pi}{2})} \right] \left\{ \cos x \int_{-\infty}^{\infty} \cos(u) u^{-\alpha} \frac{du}{u} + \text{sen } x \int_{-\infty}^{\infty} \text{sen}(u) u^{-\alpha} \frac{du}{u} \right\} \\ &= \left[ \frac{1 + (-1)^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha) 2 \cos(\frac{\alpha\pi}{2})} \right] \left\{ \cos x \left[ \int_{-\infty}^0 \cos(u) u^{-\alpha} \frac{du}{u} + \int_0^{\infty} \cos(u) u^{-\alpha} \frac{du}{u} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \text{sen } x \left[ \int_{-\infty}^0 \text{sen}(u) u^{-\alpha} \frac{du}{u} + \int_0^{\infty} \text{sen}(u) u^{-\alpha} \frac{du}{u} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Podemos reescrever as integrais

$$(i) \int_{-\infty}^0 \cos(u) u^{-\alpha} \frac{du}{u} \underbrace{=}_{u=-v} \int_{\infty}^0 \cos(-v) (-v)^{-\alpha} \left( \frac{-dv}{-v} \right) = -(-1)^{-\alpha} \int_0^{\infty} \cos(v) v^{-\alpha} \frac{dv}{v}$$

e

$$(ii) \int_{-\infty}^0 \text{sen}(u) u^{-\alpha} \frac{du}{u} \stackrel{u=-v}{=} \int_{\infty}^0 \text{sen}(-v) (-v)^{-\alpha} \left( \frac{-dv}{-v} \right) = (-1)^{-\alpha} \int_0^{\infty} \text{sen}(v) v^{-\alpha} \frac{dv}{v},$$

na expressão para a derivada de Riesz de  $f(x) = \cos x$ , com isso,

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^{\alpha} \cos(x) &= \left[ \frac{1 + (-1)^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha) 2 \cos(\frac{\alpha\pi}{2})} \right] \left\{ \cos x \left[ -(-1)^{-\alpha} \int_0^{\infty} \cos(v) v^{-\alpha} \frac{dv}{v} + \int_0^{\infty} \cos(u) u^{-\alpha} \frac{du}{u} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \text{sen } x \left[ (-1)^{-\alpha} \int_0^{\infty} \text{sen}(v) v^{-\alpha} \frac{dv}{v} + \int_0^{\infty} \text{sen}(u) u^{-\alpha} \frac{du}{u} \right] \right\}, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^{\alpha} \cos(x) &= \left[ \frac{1 + (-1)^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha) 2 \cos(\frac{\alpha\pi}{2})} \right] \left\{ [1 - (-1)^{-\alpha}] \cos x \int_0^{\infty} \cos(v) v^{-\alpha} \frac{dv}{v} + \right. \\ &\quad \left. + [1 + (-1)^{-\alpha}] \text{sen } x \int_0^{\infty} \text{sen}(v) v^{-\alpha} \frac{dv}{v} \right\}. \end{aligned}$$

Nas expressões das equações (??) e (??), dadas por:

$$\int_0^{\infty} \cos(tx) x^z \frac{dx}{x} = \Gamma(z) t^{-z} \cos \frac{\pi z}{2}, \quad \text{com } \text{Re}(z) > 0, \quad t > 0$$

e

$$\int_0^{\infty} \text{sen}(tx) x^z \frac{dx}{x} = \Gamma(z) t^{-z} \text{sen} \frac{\pi z}{2}, \quad \text{com } \text{Re}(z) > -1, \quad t > 0,$$

podemos tomar  $t = 1 > 0$  para obter as expressões integrais para  $\mathbb{D}^{\alpha} \cos(x)$ . Vale ressaltar que essas equações valem para  $\text{Re}(z) > 0$ , mas podemos também considerar  $0 < z < 1$ , já que este intervalo não contém nenhum polo da função gama. Assim, temos que

$$\int_0^{\infty} \cos(v) v^{-\alpha} \frac{dv}{v} = \Gamma(-\alpha) \cos \left( -\frac{\alpha\pi}{2} \right) = \Gamma(-\alpha) \cos \left( \frac{\alpha\pi}{2} \right)$$

e

$$\int_0^{\infty} \text{sen}(v) v^{-\alpha} \frac{dv}{v} = \Gamma(-\alpha) \text{sen} \left( -\frac{\alpha\pi}{2} \right) = -\Gamma(-\alpha) \text{sen} \left( \frac{\alpha\pi}{2} \right).$$

Dessa forma, podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^{\alpha} \cos(x) &= \left[ \frac{1 + (-1)^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha) 2 \cos(\frac{\alpha\pi}{2})} \right] \left\{ [1 - (-1)^{-\alpha}] \cos(x) \Gamma(-\alpha) \cos \left( \frac{\alpha\pi}{2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + [1 + (-1)^{-\alpha}] \text{sen}(x) (-\Gamma(-\alpha)) \text{sen} \left( \frac{\alpha\pi}{2} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ \frac{1 + (-1)^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha) 2 \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \right] \left\{ [1 - (-1)^{-\alpha}] \Gamma(-\alpha) \cos(x) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + \right. \\
&\quad \left. + [-1 - (-1)^{-\alpha}] \Gamma(-\alpha) \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right\} \\
&= \left[ \frac{1 + (-1)^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha) 2 \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \right] \left\{ \Gamma(-\alpha) \left[ \cos(x) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right] + \right. \\
&\quad \left. + (-1)^{1-\alpha} \Gamma(-\alpha) \left[ \cos(x) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right] \right\} \\
&= \left[ \frac{1 + (-1)^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha) 2 \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \right] \left\{ \Gamma(-\alpha) \left[ \cos\left(x + \frac{\alpha\pi}{2}\right) + (-1)^{1-\alpha} \cos\left(x - \frac{\alpha\pi}{2}\right) \right] \right\},
\end{aligned}$$

de onde segue que

$$\mathbb{D}^\alpha \cos(x) = \left[ \frac{1 + (-1)^{-\alpha}}{2 \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \right] \cdot \left[ \cos\left(x + \frac{\alpha\pi}{2}\right) + (-1)^{1-\alpha} \cos\left(x - \frac{\alpha\pi}{2}\right) \right], \quad (4.7.12)$$

para  $0 < \alpha < 1$ .

Em particular, se  $\alpha = \frac{1}{2}$  na equação (4.7.12), temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}^{1/2} \cos(x) &= \left[ \frac{1 + (-1)^{-1/2}}{2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} \right] \cdot \left[ \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + (-1)^{1/2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right] \\
&= \left( \frac{1 + i^{-1}}{\sqrt{2}} \right) \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen}(x) + i \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen}(x) \right) \right].
\end{aligned}$$

Efetuada o cálculo acima, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}^{1/2} \cos(x) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{1 + i^{-1}}{\sqrt{2}} \right) \{ [\cos(x) + i \operatorname{sen}(x)] + i [\cos(x) + i \operatorname{sen}(x)] \} = \left( \frac{1 + i^{-1}}{2} \right) (e^{ix} + i e^{ix}) = \\
&= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{i} \right) (e^{ix} + i e^{ix}) = \frac{1}{2} (1 - i) (e^{ix} + i e^{ix}) = \frac{1}{2} (e^{ix} + i e^{ix} - i e^{ix} + e^{ix}) = e^{ix}.
\end{aligned}$$

Logo, segue que

$$\mathbb{D}^{1/2} \cos(x) = e^{ix}.$$

Por outro lado, se considerarmos a função  $f(x) = e^{i\lambda x}$ , com  $\lambda \in \mathbb{R}$  um escalar qualquer, então a derivada de Riesz de ordem  $\alpha$  para essa função, com  $0 < \alpha < 1$ , é dada por

$$\mathbb{D}^\alpha e^{i\lambda x} \stackrel{\text{Eq. (4.7.6)}}{=} \left[ \frac{1 + (-1)^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha) 2 \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \right] \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\xi} (x - \xi)^{-\alpha-1} d\xi.$$

Fazendo a mudança de variável  $u = x - \xi$  na integral acima, temos que

$$\mathbb{D}^\alpha e^{i\lambda x} = \left[ \frac{1 + (-1)^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha) 2 \cos(\frac{\alpha\pi}{2})} \right] \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(x-u)} u^{-\alpha-1} du,$$

ou seja,

$$\mathbb{D}^\alpha e^{i\lambda x} = e^{i\lambda x} \left[ \frac{1 + (-1)^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha) 2 \cos(\frac{\alpha\pi}{2})} \right] \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda u} u^{-\alpha-1} du.$$

A integral no membro direito da equação acima é a transformada de Fourier da função  $f(x) = x^{-\alpha-1}$  aplicada no ponto  $\omega = \lambda$ , onde  $\omega$  é a variável da transformada de Fourier. Sendo assim, podemos escrever

$$\mathbb{D}^\alpha e^{i\lambda x} = e^{i\lambda x} \left[ \frac{1 + (-1)^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha) 2 \cos(\frac{\alpha\pi}{2})} \right] \mathcal{F} [x^{-\alpha-1}] (\lambda).$$

Pela equação (4.7.7), temos que

$$\mathcal{F} [x^{-\alpha-1}] (\omega) = \left[ \frac{\Gamma(-\alpha) 2 \cos(\frac{\alpha\pi}{2})}{1 + (-1)^{-\alpha}} \right] |\omega|^\alpha,$$

para  $0 < \alpha < 1$ . Utilizando essa equação no cálculo da derivada de Riesz de  $f(x) = e^{i\lambda x}$ , temos que

$$\mathbb{D}^\alpha e^{i\lambda x} = e^{i\lambda x} \left[ \frac{1 + (-1)^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha) 2 \cos(\frac{\alpha\pi}{2})} \right] \cdot \left[ \frac{\Gamma(-\alpha) 2 \cos(\frac{\alpha\pi}{2})}{1 + (-1)^{-\alpha}} \right] |\lambda|^\alpha,$$

de onde segue que,

$$\mathbb{D}^\alpha e^{i\lambda x} = |\lambda|^\alpha e^{i\lambda x}, \quad \text{para } 0 < \alpha < 1. \quad (4.7.13)$$

Em particular, se  $\lambda = 1$  na equação (4.7.13), temos que

$$\mathbb{D}^\alpha e^{ix} = e^{ix}, \quad \text{para } 0 < \alpha < 1,$$

isso significa que para o operador de derivação fracionária de Riesz, a função  $f(x) = e^{ix}$  se comporta como a função exponencial  $\varphi(x) = e^x$  no cálculo de ordem inteira, pois  $D^n e^x = e^x$ , para qualquer  $n \in \mathbb{N}^*$ .

# Capítulo 5

## Teorema Fundamental do Cálculo Fracionário

Depois de apresentar as diferentes versões dos operadores de integração e derivação fracionárias, é natural introduzir o correspondente TFCF (teorema fundamental do cálculo fracionário) associado a essas diferentes versões [25]. Apresentamos o TFCF nas versões de Riemann-Liouville, Caputo, Liouville, Weyl e Riesz. Os resultados já conhecidos serão mencionados em nossas referências, os outros serão demonstrados. Em todos os casos, escrevemos o teorema de forma geral e recuperamos, com um limite conveniente, o resultado para o caso clássico do teorema fundamental do cálculo de ordem inteira.

### 5.1 TFCF Riemann-Liouville

O teorema fundamental do cálculo fracionário, no caso em que consideramos os operadores de integração e derivação fracionárias segundo Riemann-Liouville é como a seguir.

**Teorema 5.1.** Sejam  $f(x)$  uma função tal que  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , de modo que  $-\infty < a < b < \infty$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$  com  $\text{Re}(\alpha) > 0$  e  $n = [\text{Re}(\alpha)] + 1$ . Se  $f(x) \in AC^n[a, b]$  ou  $C^n[a, b]$ , então para  $x \in (a, b)$ :

(i)  $(D_{a+}^\alpha I_{a+}^\alpha f)(x) = f(x)$  e  $(D_{b-}^\alpha I_{b-}^\alpha f)(x) = f(x)$ .

(ii) Para  $[I_{a+}^{n-\alpha} f(x)] \in AC^n[a, b]$ , temos

$$(I_{a+}^\alpha D_{a+}^\alpha f)(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha-j-1}}{\Gamma(\alpha-j)} \left[ (D^{n-j-1} I_{a+}^{n-\alpha} f(x)) \Big|_{x=a} \right] \quad (5.1.1)$$

e no caso em que  $[I_{b-}^{n-\alpha} f(x)] \in AC^n[a, b]$ , temos

$$(I_{b-}^\alpha D_{b-}^\alpha f)(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-j-1} (b-x)^{\alpha-j-1}}{\Gamma(\alpha-j)} \left[ (D^{n-j-1} I_{b-}^{n-\alpha} f(x)) \Big|_{x=b} \right]. \quad (5.1.2)$$

Para  $f(x) \in I_{a+}^{\alpha} (L_p)$ , temos

$$\left( I_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} f \right) (x) = f(x) \quad (5.1.3)$$

e para  $f(x) \in I_{b-}^{\alpha} (L_p)$ , temos

$$\left( I_{b-}^{\alpha} D_{b-}^{\alpha} f \right) (x) = f(x). \quad (5.1.4)$$

Em particular, se  $0 < \text{Re}(\alpha) < 1$  nas equações (5.1.1) e (5.1.2), então

$$\left( I_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} f \right) (x) = f(x) - \frac{(x-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left[ \left( I_{a+}^{1-\alpha} f(x) \right) \Big|_{x=a} \right]$$

e

$$\left( I_{b-}^{\alpha} D_{b-}^{\alpha} f \right) (x) = f(x) - \frac{(b-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left[ \left( I_{b-}^{1-\alpha} f(x) \right) \Big|_{x=b} \right].$$

Se  $\alpha = 1$ , temos que

$$\left( I_{a+}^1 D_{a+}^1 f \right) (x) = f(x) - f(a) \quad \text{e} \quad \left( I_{b-}^1 D_{b-}^1 f \right) (x) = f(x) - f(b),$$

bem como<sup>1</sup>

$$\left( {}_a I_b^1 D_{a+}^1 f \right) (x) = f(b) - f(a) \quad \text{e} \quad \left( {}_a I_b^1 D_{b-}^1 f \right) (x) = f(a) - f(b).$$

*Demonstração.* (i) Ambos os resultados seguem do Lema 2.4 em [32].

(ii) Para demonstrar as equações em (5.1.3) e (5.1.4), utilizamos a Definição 4.1 e (i).

Se  $f(x) \in I_{a+}^{\alpha} (L_p)$ , então  $f(x) = I_{a+}^{\alpha} g(x)$ . Assim, podemos escrever

$$\left( I_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} f \right) (x) = I_{a+}^{\alpha} \left[ \left( D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} g \right) (x) \right] = \left( I_{a+}^{\alpha} g \right) (x) = f(x).$$

Agora, se  $f(x) \in I_{b-}^{\alpha} (L_p)$ , de maneira análoga segue que

$$\left( I_{b-}^{\alpha} D_{b-}^{\alpha} f \right) (x) = f(x).$$

As equações (5.1.1) e (5.1.2) seguem do Lema 4.10.

No caso em que  $0 < \text{Re}(\alpha) < 1$ , devemos substituir  $n = 1$  em (5.1.1) e (5.1.2).

No caso em que  $\alpha = 1$ , recuperamos

$$\left( {}_a I_b^1 D_{a+}^1 f \right) (x) = \left[ \left( I_{a+}^1 D_{a+}^1 f \right) (x) \right] \Big|_{x=b} = [f(x) - f(a)] \Big|_{x=b} = f(b) - f(a)$$

e

$$\left( {}_a I_b^1 D_{b-}^1 f \right) (x) = \left[ \left( I_{b-}^1 D_{b-}^1 f \right) (x) \right] \Big|_{x=a} = [f(x) - f(b)] \Big|_{x=a} = f(a) - f(b).$$

■

---

<sup>1</sup> $({}_a I_b^1 \varphi) (x) = \left[ \left( I_{a+}^1 \varphi \right) (x) \right] \Big|_{x=b} = \left[ \left( I_{b-}^1 \varphi \right) (x) \right] \Big|_{x=a}.$

## 5.2 TFCF Caputo

Se considerarmos agora o operador de integração segundo Riemann-Liouville e o operador de derivação segundo Caputo, podemos escrever o teorema a seguir.

**Teorema 5.2.** Sejam  $f(x)$  uma função tal que  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $-\infty < a < b < \infty$  e  $\alpha \in \mathbb{C}$  com  $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$  e  $n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1$ . Se  $f(x) \in \operatorname{AC}^n[a, b]$  ou  $C^n[a, b]$ , então para  $x \in (a, b)$ :

(i) Para  $\operatorname{Re}(\alpha) \notin \mathbb{N}$  ou  $\alpha \in \mathbb{N}$ , temos

$$\left({}_C D_{a+}^\alpha I_{a+}^\alpha f\right)(x) = f(x) \quad \text{e} \quad \left({}_C D_{b-}^\alpha I_{b-}^\alpha f\right)(x) = f(x).$$

(ii) Para  $[I_{a+}^{n-\alpha} f(x)] \in \operatorname{AC}^n[a, b]$ , temos

$$\left(I_{a+}^\alpha {}_C D_{a+}^\alpha f\right)(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^j}{j!} \left(f^{(j)}(x)\Big|_{x=a}\right)$$

e para  $[I_{b-}^{n-\alpha} f(x)] \in \operatorname{AC}^n[a, b]$ , temos

$$\left(I_{b-}^\alpha {}_C D_{b-}^\alpha f\right)(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j (b-x)^j}{j!} \left(f^{(j)}(x)\Big|_{x=b}\right).$$

Em particular, se  $0 < \operatorname{Re}(\alpha) < 1$ , então

$$\left(I_{a+}^\alpha {}_C D_{a+}^\alpha f\right)(x) = f(x) - f(a), \quad \left(I_{b-}^\alpha {}_C D_{b-}^\alpha f\right)(x) = f(x) - f(b)$$

e se  $\alpha = 1$ , então

$$\left({}_a I_b^1 {}_C D_{a+}^1 f\right)(x) = f(b) - f(a) \quad \text{e} \quad \left({}_a I_b^1 {}_C D_{b-}^1 f\right)(x) = f(a) - f(b).$$

*Demonstração.* (i) Segue do Lema 2.21 em [32]. (ii) Segue do Lema 2.22 em [32]. ■

## 5.3 TFCF Liouville

Se considerarmos agora os operadores de integração e derivação fracionários segundo Liouville, conforme definidos na Seção 4.3, podemos escrever o teorema a seguir.

**Teorema 5.3.** Sejam  $f(x)$  uma função definida na reta real,  $\alpha \in \mathbb{C}$  com  $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$  e  $n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1$ . Se  $f(x) \in \operatorname{AC}^n(-\infty, \infty)$  ou  $C^n(-\infty, \infty)$ , então para  $x \in \mathbb{R}$ :

(i)  $\left(D_+^\alpha I_+^\alpha f\right)(x) = f(x) \quad \text{e} \quad \left(D_-^\alpha I_-^\alpha f\right)(x) = f(x).$

(ii) Se  $0 < \operatorname{Re}(\alpha) < 1$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , então

$$\left(I_+^\alpha D_+^\alpha f\right)(x) = f(x) \quad \text{e} \quad \left(I_-^\alpha D_-^\alpha f\right)(x) = f(x).$$

*Demonstração.* (i) Pela parte (i) do Teorema 5.1, segue que

$$\left(D_+^\alpha I_+^\alpha f\right)(x) = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(D_{a+}^\alpha I_{a+}^\alpha f\right)(x) = \lim_{a \rightarrow -\infty} f(x) = f(x),$$

de maneira análoga, temos  $\left(D_-^\alpha I_-^\alpha f\right)(x) = f(x)$ .

(ii) Pela parte (ii) do Teorema 5.1, se  $0 < \operatorname{Re}(\alpha) < 1$ , então

$$\left(I_+^\alpha D_+^\alpha f\right)(x) = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left\{ f(x) - \frac{(x-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left[ \left( I_{a+}^{1-\alpha} f(x) \right) \Big|_{x=a} \right] \right\} = f(x)$$

e

$$\left(I_-^\alpha D_-^\alpha f\right)(x) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left\{ f(x) - \frac{(b-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left[ \left( I_{b-}^{1-\alpha} f(x) \right) \Big|_{x=b} \right] \right\} = f(x),$$

desde que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

■

## 5.4 TFCF Weyl

Se considerarmos agora os operadores de integração e derivação fracionários segundo Weyl, conforme definidos na Seção 4.5, podemos escrever o teorema a seguir.

**Teorema 5.4.** Seja  $f(x) \in L^1(0, 2\pi)$  uma função periódica de período  $2\pi$ , definida na reta real, com valor médio nulo, e seja  $\alpha \in \mathbb{C}$  com  $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ , então nos pontos  $x \in \mathbb{R}$  para os quais a série de Fourier de  $f(x)$  converge, temos que

$$\left({}^w D^\alpha {}^w I^\alpha f\right)(x) = f(x) \quad \text{e} \quad \left({}^w I^\alpha {}^w D^\alpha f\right)(x) = f(x).$$

*Demonstração.* Seja

$$f(x) \sim \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad \text{com} \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} f(x) dx,$$

a série de Fourier de  $f(x)$ , com coeficientes de Fourier  $c_n$ , então

$${}^w I^\alpha f(x) \sim \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} c_n (in)^{-\alpha} e^{inx} \quad \text{e} \quad {}^w D^\alpha f(x) \sim \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} c_n (in)^\alpha e^{inx},$$

com isso, temos que

$$\left({}^w I^\alpha {}^w D^\alpha f\right)(x) = {}^w I^\alpha \left[ \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} c_n (in)^\alpha e^{inx} \right] = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} c_n (in)^\alpha (in)^{-\alpha} e^{inx} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} c_n e^{inx} \sim f(x).$$

De maneira análoga, obtemos  $({}^wD^\alpha {}^wI^\alpha f)(x) = f(x)$ . ■

## 5.5 TFCF Riesz

Se considerarmos agora potências fracionárias do operador Laplaciano, definidas nas Seções 4.6 e 4.7, como a integral fracionária de Riesz bem como sua derivada, podemos escrever o teorema como a seguir.

**Teorema 5.5.** Seja  $f(x) \in \Phi$ , onde  $\Phi$  denota o espaço das funções de Lizorkin<sup>2</sup>, e seja  $\alpha > 0$ , então

- (i)  $(\mathbb{D}^\alpha \mathbb{I}^\alpha f)(x) = f(x)$ .
- (ii) Para  $0 < \alpha < 1$ ,  $(\mathbb{I}^\alpha \mathbb{D}^\alpha f)(x) = f(x)$ .

*Demonstração.* (i) Segue da propriedade 2.35 de [32].

- (ii) Para  $0 < \alpha < 1$ , de (4.6.3) temos que

$$(\mathbb{I}^\alpha \mathbb{D}^\alpha f)(x) = \mathbb{I}^\alpha [d_\alpha (f * h)(x)] = d_\alpha c_\alpha (f * h)(x) * g(x),$$

$$\text{onde } g(x) = |x|^{\alpha-1}, \quad h(x) = x^{-\alpha-1}, \quad c_\alpha = \frac{\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}{2^\alpha \pi^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad \text{e} \quad d_\alpha = \left[ \frac{1 + (-1)^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha) 2 \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \right].$$

Utilizando o Teorema 4.15, temos

$$(\mathbb{I}^\alpha \mathbb{D}^\alpha f)(x) = c_\alpha d_\alpha [f * (g * h)](x) = c_\alpha d_\alpha \left[ f * \left( \frac{1}{c_\alpha d_\alpha} \delta \right) \right](x) = f(x).$$

Em particular, pelo Teorema 5.5, para  $0 < \alpha < 1$ , temos que  $(\mathbb{D}^\alpha \mathbb{I}^\alpha f)(x) = f(x)$ . Substituindo esse resultado na expressão da equação (4.7.9), podemos escrever

$$(\mathbb{D}^\alpha \mathbb{I}^\alpha f)(x) = \frac{1}{4 \cos^2\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \left[ 2f(x) + D_+^\alpha I_-^\alpha f(x) + D_-^\alpha I_+^\alpha f(x) \right],$$

ou seja,

$$f(x) = \frac{1}{4 \cos^2\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \left[ 2f(x) + D_+^\alpha I_-^\alpha f(x) + D_-^\alpha I_+^\alpha f(x) \right],$$

de onde segue o resultado

$$D_+^\alpha I_-^\alpha f(x) + D_-^\alpha I_+^\alpha f(x) = \left[ 2 \cos^2\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) - 1 \right] 2f(x) \quad 0 < \alpha < 1. \quad (5.5.1)$$

---

<sup>2</sup>Espaço das funções complexas infinitamente diferenciáveis, cujas derivadas de ordem inteira se anulam na origem.

## 5.6 Aplicações

Seguem alguns exemplos de aplicação do TFCF em equações diferenciais fracionárias [14], envolvendo em particular, os operadores segundo Riemann-Liouville, Caputo e Riesz.

1. Considere o problema de valor inicial fracionário

$${}_C D_{0+}^{\alpha} y(t) = c,$$

$$y(0) = 0,$$

onde  $c$  é uma constante,  $t > 0$  e  $0 < \text{Re}(\alpha) < 1$ .

Aplicando o operador de integração fracionária  $I_{0+}^{\alpha}$  na equação diferencial, e utilizando o item (ii) do Teorema 5.2, temos

$$I_{0+}^{\alpha} {}_C D_{0+}^{\alpha} y(t) = I_{0+}^{\alpha} c,$$

de onde segue a solução

$$y(t) = \frac{c t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)}.$$

No caso particular em que  $c = 1$ , segue abaixo o gráfico para alguns valores de  $\alpha$ .

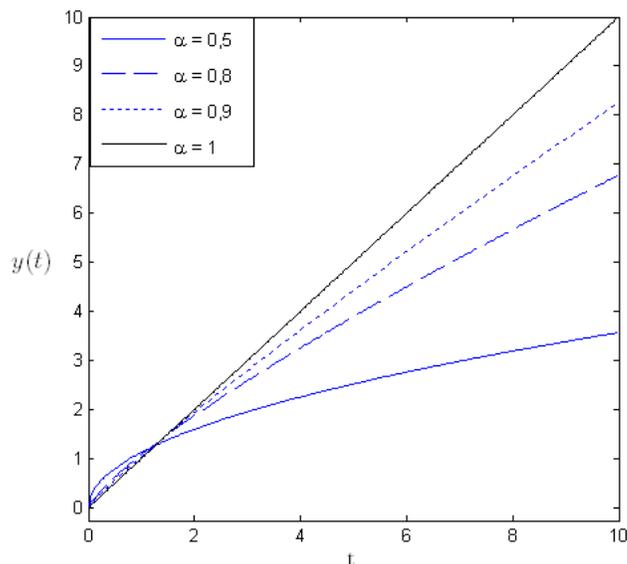


Figura 5.1: Função  $y(t) = \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)}$ .

2. Considere o problema de valor inicial envolvendo a equação de difusão fracionária

$${}_C D_{0+}^{\alpha} u(x, t) = \lambda \mathbb{D}^{2\beta} u(x, t),$$

$$u(x, 0) = f(x),$$

onde  $\lambda$  é uma constante não nula,  $t > 0$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$ ,  $f(x) \in L^1(-\infty, \infty)$  e

$$\mathbb{D}^{2\beta} u(x, t) = (-\Delta)^{\beta} u(x, t)$$

é a derivada fracionária, segundo Riesz, de  $u(x, t)$  com relação à variável  $x$ .

Elsaid [20] utiliza o método de iteração variacional para obter a solução para essa equação de difusão fracionária. Outros métodos também podem ser utilizados, tais como aproximações numéricas e transformadas integrais.

Neste trabalho, vamos resolvê-la utilizando o método das transformadas integrais e o TFCF segundo Riesz.

Aplicando a transformada de Laplace na equação de difusão e usando (4.4.7), temos

$$\mathcal{L} [{}_C D_{0+}^{\alpha} u] (s) = \mathcal{L} [\lambda \mathbb{D}^{2\beta} u] (s),$$

de onde segue que

$$s^{\alpha} U(x, s) - s^{\alpha-1} u(x, 0) = \lambda \mathbb{D}^{2\beta} U(x, s),$$

onde  $U(x, s)$  é a transformada de Laplace de  $u(x, t)$ . Da condição inicial  $u(x, 0) = f(x)$ , temos

$$s^{\alpha} U(x, s) - s^{\alpha-1} f(x) = \lambda \mathbb{D}^{2\beta} U(x, s).$$

Supondo que  $U(x, s) = \mathbb{I}^{2\beta} h(x, s)$  e usando a parte (i) do Teorema 5.5, segue que

$$s^{\alpha} \mathbb{I}^{2\beta} h(x, s) - s^{\alpha-1} f(x) = \lambda \mathbb{D}^{2\beta} \mathbb{I}^{2\beta} h(x, s),$$

ou seja,

$$s^{\alpha} \mathbb{I}^{2\beta} h(x, s) - s^{\alpha-1} f(x) = \lambda h(x, s).$$

Pela equação (4.6.3), temos

$$s^{\alpha} c_{2\beta} h(x, s) * g(x) - s^{\alpha-1} f(x) = \lambda h(x, s),$$

onde  $g(x) = |x|^{2\beta-1}$ , o coeficiente  $c_{2\beta}$  é como em (4.6.3) e  $h(x, s) * g(x)$  é a convolução de Fourier com relação à variável  $x$ .

Aplicando a transformada de Fourier e usando (4.6.4), temos

$$s^\alpha c_{2\beta} \hat{h}(\omega, s) \frac{1}{c_{2\beta}} |\omega|^{-2\beta} - s^{\alpha-1} \hat{f}(\omega) = \lambda \hat{h}(\omega, s),$$

assim,

$$s^\alpha \hat{h}(\omega, s) |\omega|^{-2\beta} - s^{\alpha-1} \hat{f}(\omega) = \lambda \hat{h}(\omega, s),$$

onde  $\hat{h}(\omega, s) = \mathcal{F}[h](\omega)$ .

Além disso, aplicando a transformada de Fourier na expressão

$$U(x, s) = \mathbb{I}^{2\beta} h(x, s),$$

obtemos

$$\hat{U}(\omega, s) = |\omega|^{-2\beta} \hat{h}(\omega, s).$$

Com isso, temos que

$$s^\alpha \hat{U}(\omega, s) - s^{\alpha-1} \hat{f}(\omega) = \lambda |\omega|^{2\beta} \hat{U}(\omega, s),$$

isto é,

$$\hat{U}(\omega, s) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - \lambda |\omega|^{2\beta}} \hat{f}(\omega).$$

Aplicando a transformada de Laplace inversa e usando a equação (3.4.3), obtemos

$$\hat{u}(\omega, t) = \hat{f}(\omega) E_\alpha(\lambda |\omega|^{2\beta} t^\alpha),$$

onde  $E_\alpha(z)$  é a função de Mittag-Leffler de um parâmetro dada em (3.1.1).

Por fim, aplicando a transformada de Fourier inversa, obtemos

$$u(x, t) = f(x) * \mathcal{F}^{-1} \left[ E_\alpha(\lambda |\omega|^{2\beta} t^\alpha) \right] (x, t). \quad (5.6.1)$$

Explicitando o cálculo da transformada de Fourier inversa, podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} \left[ E_\alpha(\lambda |\omega|^{2\beta} t^\alpha) \right] (x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_\alpha(\lambda |\omega|^{2\beta} t^\alpha) e^{i\omega x} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} E_\alpha(\lambda \omega^{2\beta} t^\alpha) \cos(\omega x) d\omega. \end{aligned}$$

Obtemos então a solução

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} E_{\alpha}(\lambda \omega^{2\beta} t^{\alpha}) f(\tau) \cos(\omega(x - \tau)) d\omega d\tau. \quad (5.6.2)$$

Note em (5.6.1), que se  $t = 0$ , então

$$u(x, 0) = [f * \mathcal{F}^{-1}(1)](x) = (f * \delta)(x) = f(x).$$

Podemos considerar o caso particular em que  $f(x) = \delta(x)$ , pois  $\delta(x) \in L^1(-\infty, \infty)$ , já que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1,$$

e para este caso, a solução é da forma

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} E_{\alpha}(\lambda \omega^{2\beta} t^{\alpha}) \cos(\omega x) d\omega. \quad (5.6.3)$$

Ainda neste caso particular, se  $\alpha = 1$ ,  $\beta \rightarrow 1/2$  e  $\lambda = -1$ , obtemos a solução

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}},$$

que é a solução clássica da equação de difusão associada às derivadas de ordem inteira.

Por outro lado, se considerarmos  $\alpha = \beta = 0,9$  no caso particular em que a solução é como em (5.6.3), segue abaixo o gráfico de  $u(x, t)$  para alguns valores de  $t$ .

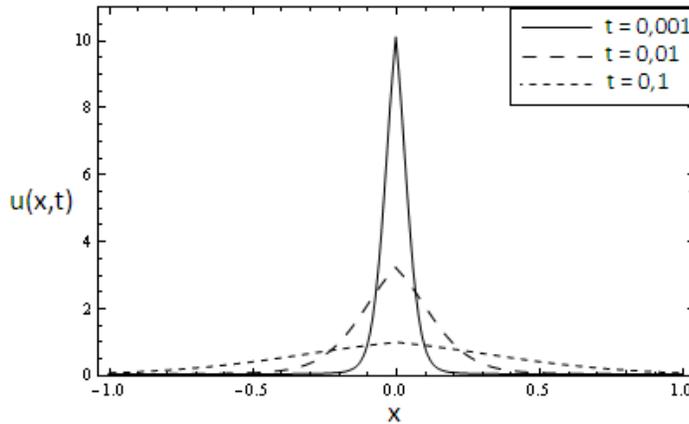


Figura 5.2: Gráfico de  $u(x, t)$  em (5.6.3) para  $\alpha = \beta = 0,9$ .

No próximo capítulo, vamos analisar especificamente a equação mais geral desse exemplo, consistindo em uma equação de difusão fracionária associada a desaceleração de nêutrons, cujas aplicações são discutidas em [55].

3. Jafari & Momani em [30] apresentam uma maneira de resolver equações diferenciais fracionárias fazendo uma modificação no método de perturbação com homotopia de He (HPM). Neste exemplo, vamos resolver uma equação apresentada em [30] utilizando o método de separação de variáveis e o TFCF.

Considere o problema de valor inicial da equação de difusão fracionária

$${}_C D_{0+}^{\alpha} u(\bar{x}, t) = -\Delta u(\bar{x}, t) \quad \text{e} \quad u(\bar{x}, 0) = e^{-(x_1+x_2+x_3)}, \quad (5.6.4)$$

onde  $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ , com  $-\infty < x_1, x_2, x_3 < \infty$ ,  $t > 0$  e  $\alpha \in (0, 1] \subset \mathbb{R}$ .

Vamos supor que a solução seja da forma

$$u(\bar{x}, t) = X(\bar{x})T(t). \quad (5.6.5)$$

Substituindo (5.6.5) na equação de difusão fracionária (5.6.4), temos

$$\frac{{}_C D_{0+}^{\alpha} T(t)}{T(t)} = \frac{-\Delta X(\bar{x})}{X(\bar{x})} = \lambda,$$

onde  $\lambda$  é uma constante real. Primeiro consideramos a equação diferencial fracionária

$${}_C D_{0+}^{\alpha} T(t) = \lambda T(t). \quad (5.6.6)$$

Substituindo (4.4.1) na equação (5.6.6), temos a equação equivalente

$$I_{0+}^{n-\alpha} T^{(n)}(t) = \lambda T(t).$$

Aplicando o operador  $D_{0+}^{n-\alpha}$  em ambos os membros da equação acima, temos

$$D_{0+}^{n-\alpha} I_{0+}^{n-\alpha} T^{(n)}(t) = D_{0+}^{n-\alpha} (\lambda T(t)).$$

Usando a parte (i) do Teorema 5.1, podemos escrever

$$T^{(n)}(t) = \lambda D_{0+}^{n-\alpha} T(t). \quad (5.6.7)$$

Como  $\alpha \in (0, 1]$ , então  $n = 1$  e a equação (5.6.7) torna-se

$$D_{0+}^1 T(t) = \lambda D_{0+}^{1-\alpha} T(t). \quad (5.6.8)$$

A equação (5.6.8) é conhecida e pode ser resolvida colocando  $\alpha = 1$  e  $\beta = 1 - \alpha$  na equação (5.2.31) de [32], onde obtemos o resultado

$$T(t) = E_{\alpha}(\lambda t^{\alpha}), \quad (5.6.9)$$

onde  $E_\alpha(\cdot)$  é a função de Mittag-Leffler de um parâmetro.

Usando a condição inicial, temos que

$$X(\bar{x})T(0) = e^{-(x_1+x_2+x_3)},$$

mas pela equação (5.6.9),  $T(0) = 1$ , então  $X(\bar{x}) = e^{-(x_1+x_2+x_3)}$ . Substituindo esse resultado na equação envolvendo  $X(\bar{x})$ , temos que

$$-3X(\bar{x}) = \lambda X(\bar{x}),$$

isto é,  $\lambda = -3$ . Assim, a solução é dada por

$$u(\bar{x}, t) = e^{-(x_1+x_2+x_3)}E_\alpha(-3t^\alpha). \quad (5.6.10)$$

Notamos no artigo de Jafari & Momani [30] que a solução apresentada está com erro de impressão, pois é fácil verificar que ela não é solução para o problema (5.6.4).

Como um caso particular, consideramos o problema associado à equação de difusão unidimensional, dado por

$${}_C D_{0+}^\alpha u(x, t) = -\Delta u(x, t) \quad e \quad u(x, 0) = e^{-x}.$$

Neste caso, a solução é

$$u(x, t) = e^{-x}E_\alpha(-t^\alpha),$$

pois  $\lambda = -1$  em (5.6.9). Representamos a seguir o gráfico no caso em que  $\alpha = 0,8$ .

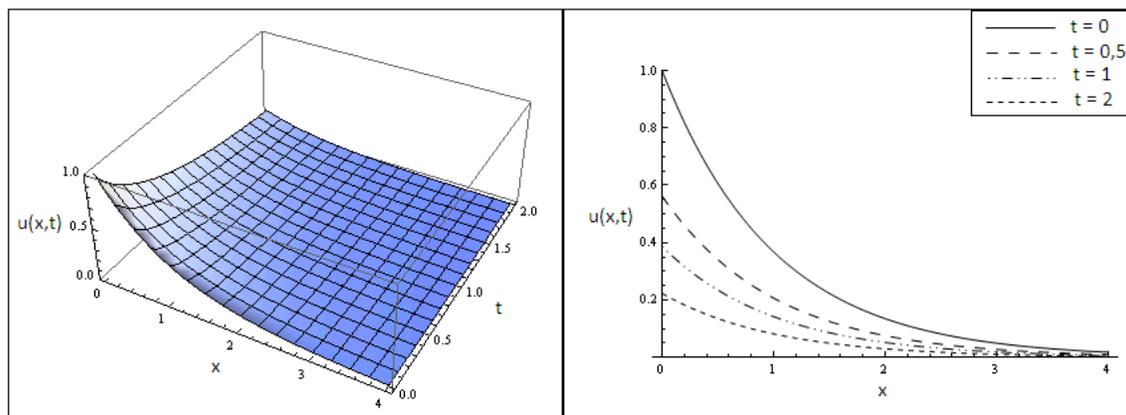


Figura 5.3: Gráfico de  $u(x, t) = e^{-x}E_\alpha(-t^\alpha) \times x$  no caso  $\alpha = 0,8$ .

4. Considere a equação

$$D_{0+}^{\alpha} y(x) = \lambda D_{0+}^{\beta} y(x), \quad (5.6.11)$$

com  $x > 0$  e  $0 \leq \beta < \alpha \leq 1$ .

Vamos supor a solução  $y(x) \in I_{0+}^{\beta}(\mathbb{L}_p)$ , assim podemos escrever  $y(x) = I_{0+}^{\beta} g(x)$ , com  $g(x) \in L^p(0, \infty)$ . Substituindo em (5.6.11), temos

$$D_{0+}^{\alpha} I_{0+}^{\beta} g(x) = \lambda D_{0+}^{\beta} I_{0+}^{\beta} g(x). \quad (5.6.12)$$

O membro esquerdo de (5.6.12) pode ser escrito como  $D_{0+}^{\alpha-\beta} g(x)$ , pois como  $\alpha \leq 1$ ,

$$D_{0+}^{\alpha} = D_{0+}^n I_{0+}^{n-\alpha} \underbrace{=}_{n=1} D_{0+}^1 I_{0+}^{1-\alpha},$$

com isso,

$$D_{0+}^{\alpha} I_{0+}^{\beta} g(x) = D_{0+}^1 I_{0+}^{1-\alpha} I_{0+}^{\beta} g(x) = D_{0+}^1 I_{0+}^{1-\alpha+\beta} g(x) = D_{0+}^{\alpha-\beta} g(x).$$

Utilizando a parte (i) do Teorema 5.1 no membro direito de (5.6.12), temos

$$D_{0+}^{\alpha-\beta} g(x) = \lambda g(x). \quad (5.6.13)$$

Como  $0 < \alpha - \beta \leq 1$ , pelo Corolário 5.1 de [32], a solução da equação (5.6.13) é dada por

$$g(x) = x^{\alpha-\beta-1} E_{\alpha-\beta, \alpha-\beta}(\lambda x^{\alpha-\beta}),$$

onde  $E_{\alpha, \beta}(\cdot)$  é a função de Mittag-Leffler de dois parâmetros.

Agora,  $y(x) = I_{0+}^{\beta} g(x)$ , efetuando a integração, obtemos a solução de (5.6.11), dada por

$$y(x) = x^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda x^{\alpha-\beta}). \quad (5.6.14)$$

Em particular, quando  $\alpha = \lambda = 1$  em (5.6.11), a solução é dada por

$$y(x) = E_{1-\beta, 1}(x^{1-\beta}) = E_{1-\beta}(x^{1-\beta}).$$

Neste caso, temos que

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} y(x) = \lim_{\beta \rightarrow 0} E_{1-\beta}(x^{1-\beta}) = e^x,$$

que satisfaz a equação

$$D_{a+}^1 y(x) = y(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx} y(x) = y(x),$$

ou seja, recuperamos a solução no caso da equação diferencial de ordem inteira.

# Capítulo 6

## Equações Diferenciais Fracionárias

Nesse capítulo, primeiramente apresentamos e resolvemos a equação diferencial parcial fracionária associada à desaceleração de nêutrons, como um problema particular associado a difusão em um material, cuja versão clássica, equação diferencial parcial de ordem inteira, estudada por Sneddon [55], foi discutida na Seção 1.6. A versão fracionária desse problema consiste em uma difusão anômala, já que o deslocamento quadrático médio possui uma relação não linear no tempo. A difusão anômala desempenha regras importantes em muitos problemas envolvendo equações diferenciais parciais fracionárias.

A equação diferencial

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} u(x, t) = -k u_{xx}(x, t),$$

descreve um movimento associado à difusão anômala.

Por [39], temos que o deslocamento quadrático médio  $\langle x^2(t) \rangle$  é dado por

$$\langle x^2(t) \rangle = \mathcal{L}^{-1} \left[ -\frac{\partial^2 \hat{U}(\omega, s)}{\partial \omega^2} \right]_{\omega=0} \sim k t^\mu,$$

onde  $\hat{U}(\omega, s) = \mathcal{F} [\mathcal{L} [u(x, t)]]$  e  $k$  é uma constante.

Se  $\mu = 1$ , temos a difusão normal, se  $\mu < 1$ , a subdifusão e se  $\mu > 1$ , a superdifusão.

Em particular, a difusão anômala desempenha um papel importante em uma ampla classe de sistemas, como por exemplo, a difusão em fractais, a difusão em meios porosos, entre outros sistemas físicos [19].

Ainda neste capítulo, apresentamos dois teoremas sobre as autofunções dos operadores de derivação fracionária de Riemann-Liouville e Caputo, como aplicação desses teoremas, apresentamos uma expressão para a solução de um certo tipo de equação diferencial fracionária linear, bem como exemplos de aplicação. E por fim, discutimos a equação diferencial fracionária do telégrafo.

## 6.1 Equação associada à desaceleração de nêutrons

Na Seção 1.6 discutimos uma equação diferencial parcial de ordem inteira, com condições iniciais e de fronteira, associada à desaceleração de nêutrons. Nesta seção, vamos considerar a equação diferencial parcial fracionária associada a esse problema.

Para descrever a equação fracionária associada a esse problema [7], introduzimos a derivada de Caputo na variável temporal e na variável espacial, introduzimos a derivada de Riesz. Com parâmetros convenientes, recuperamos a solução da equação de ordem inteira.

O problema fracionário correspondente ao problema (1.6.7), pode ser escrito da forma

$$\begin{aligned} {}_C D_{0+}^{\alpha} u(x, t) &= -\nu (-\Delta)^{\beta/2} u(x, t) + F(x)\delta(t) \\ u(x, 0^+) &= F(x) \\ u(x, 0^-) &= 0 \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u_t(x, t) &= 0, \end{aligned} \tag{6.1.1}$$

onde  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $1 < \beta \leq 2$ ,  $\nu > 0$ ,  ${}_C D_{0+}^{\alpha}$  é a derivada de Caputo e  $(-\Delta)^{\beta/2} = \mathbb{D}^{\beta}$  é a derivada de Riesz.

Vamos resolver esse problema usando transformadas integrais.

Aplicando a transformada de Fourier em (6.1.1), segue que

$$\begin{aligned} {}_C D_{0+}^{\alpha} U(\omega, t) &= -\nu |\omega|^{\beta} U(\omega, t) + \widehat{F}(\omega)\delta(t) \\ U(\omega, 0^+) &= \widehat{F}(\omega), \\ U(\omega, 0^-) &= 0, \end{aligned} \tag{6.1.2}$$

onde  $U(\omega, t)$  é a transformada de Fourier de  $u(x, t)$  com relação à variável  $x$  e  $\widehat{F}(\omega)$  é a transformada de Fourier de  $F(x)$ .

Aplicando agora a transformada de Laplace, conforme definida em (1.6.1) e usando a expressão em (4.4.7), temos

$$s^{\alpha} \mathcal{U}(\omega, s) - s^{\alpha-1} U(\omega, 0^+) = -\nu |\omega|^{\beta} \mathcal{U}(\omega, s) + \widehat{F}(\omega) \mathcal{L}_+ [\delta(t)],$$

onde  $\mathcal{U}(\omega, s)$  é a transformada de Laplace de  $U(\omega, t)$ .

Usando a condição  $U(\omega, 0^+) = \widehat{F}(\omega)$  de (6.1.2) na equação acima e substituindo  $\mathcal{L}_+ [\delta(t)]$  por zero, temos

$$s^{\alpha} \mathcal{U}(\omega, s) - s^{\alpha-1} \widehat{F}(\omega) = -\nu |\omega|^{\beta} \mathcal{U}(\omega, s),$$

ou seja,

$$\mathcal{U}(\omega, s) = \widehat{F}(\omega) \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} + \nu |\omega|^{\beta}}. \tag{6.1.3}$$

Aplicando a transformada de Fourier inversa na equação (6.1.3), obtemos

$$\mathcal{U}(x, s) = \mathcal{F}^{-1} \left[ \widehat{F}(\omega) \widehat{\Phi}(\omega, s) \right],$$

onde  $\widehat{\Phi}(\omega, s) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \nu |\omega|^\beta}$ . Assim,

$$\mathcal{U}(x, s) = (\mathcal{F} * \Phi)(x),$$

onde  $*$  é a convolução de Fourier,  $\Phi \equiv \Phi(x, s) = \mathcal{F}^{-1} [\widehat{\Phi}(\omega, s)]$  e  $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}^{-1} [\widehat{\mathcal{F}}(\omega)]$ .

Podemos escrever

$$\Phi(x, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \nu |\omega|^\beta} e^{i\omega x} d\omega.$$

Substituindo  $e^{i\omega x}$  por  $\cos(\omega x) + i \operatorname{sen}(\omega x)$  na integral acima e considerando o fato de que a função  $\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \nu |\omega|^\beta}$  é par na variável  $\omega$ , segue que

$$\Phi(x, s) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \nu \omega^\beta} \cos(\omega x) d\omega. \quad (6.1.4)$$

Logo,

$$\mathcal{U}(x, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(x - \tau) \Phi(\tau, s) d\tau, \quad (6.1.5)$$

onde  $\Phi(\tau, s)$  é como na equação (6.1.4).

Aplicando a transformada de Laplace inversa em (6.1.5), obtemos a solução

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(x - \tau) \mathcal{L}^{-1} [\Phi(\tau, s)] d\tau.$$

Por (6.1.4), temos que

$$\mathcal{L}^{-1} [\Phi(\tau, s)] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \nu \omega^\beta} \right] \cos(\omega \tau) d\omega.$$

Pela expressão em (3.4.3), admitindo a condição

$$\nu |\omega|^\beta |s^{-\alpha}| < 1,$$

podemos escrever

$$\mathcal{L}^{-1} [\Phi(\tau, s)] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} E_\alpha(-\nu \omega^\beta t^\alpha) \cos(\omega \tau) d\omega.$$

Portanto, a solução para o problema (6.1.1) é

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \mathcal{F}(x - \tau) \left[ \int_0^{\infty} E_\alpha(-\nu \omega^\beta t^\alpha) \cos(\omega \tau) d\omega \right] \right\} d\tau, \quad \text{para } t > 0. \quad (6.1.6)$$

Em particular, se  $\nu = 1$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$  e  $\mathcal{F}(x) = \delta(x)$ , então

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/4t}, \quad \text{para } t > 0,$$

ou seja, recuperamos a solução da equação de ordem inteira, definida em (1.6.7).

### 6.1.1 Aproximação da transformada de Fourier inversa de $\widehat{\Phi}(\omega, t)$

Com o intuito de encontrar uma maneira de obter o gráfico para a solução da equação diferencial fracionária associada à desaceleração de nêutrons, dada por (6.1.6), no caso em que fixamos  $t = t_0$ , vamos obter uma aproximação da transformada de Fourier inversa da função

$$\widehat{\Phi}(\omega, t) = E_\alpha(-\nu\omega^\beta t^\alpha), \quad (6.1.7)$$

que aparece na solução  $u(x, t)$  em (6.1.6).

Para escrever a expressão para uma aproximação de  $\mathcal{F}^{-1} [E_\alpha(-\nu\omega^\beta t^\alpha)]$ , vamos usar raciocínio similar ao utilizado na obtenção da transformada de Fourier discreta (conhecida como DFT) [3].

Para obter valores de  $u(x, t)$ , temos que calcular a integral

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty E_\alpha(-\nu\omega^\beta t^\alpha) \cos(\omega x) d\omega. \quad (6.1.8)$$

Essa integral é a transformada de Fourier inversa da função  $\widehat{\Phi}(\omega, t)$  da equação (6.1.7).

Fixado um  $t_0$ , como  $\nu > 0$ , existe um  $\omega_c$  de modo que  $\widehat{\Phi}(\omega_c, t_0) \cong 0$  para  $|\omega| > \omega_c$ .

Se redefinirmos  $\widehat{\Phi}(\omega, t_0)$  da seguinte forma

$$\widehat{\Phi}(\omega, t_0) = \begin{cases} \widehat{\Phi}(\omega, t_0), & \text{se } 0 \leq \omega \leq \omega_c, \\ 0, & \text{se } \omega > \omega_c, \end{cases} \quad (6.1.9)$$

pela equação (6.1.8), a função  $\Phi(x, t_0)$  é dada por

$$\Phi(x, t_0) \cong \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c} \widehat{\Phi}(\omega, t_0) \cos(\omega x) d\omega.$$

Dividindo o intervalo  $[0, \omega_c]$  em  $n$  subintervalos, com  $\Delta\omega = \frac{\omega_c}{n}$  e definindo  $n + 1$  pontos

$$\omega_j = j \Delta\omega, \quad \text{para } j = 0, \dots, n,$$

com  $\omega_0 = 0$ ;  $\omega_1 = \Delta\omega$ ;  $\dots$ ;  $\omega_n = \omega_c$ , encontramos os valores de  $\widehat{\Phi}(\omega_j, t_0)$  em todos os pontos  $\omega_j$ 's. Assim, podemos escrever

$$\Phi(x, t_0) \cong \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c} \widehat{\Phi}(\omega, t_0) \cos(\omega x) d\omega \cong \frac{1}{\pi} \Delta\omega \sum_{j=0}^n \widehat{\Phi}(\omega_j, t_0) \cos(\omega_j x).$$

Logo,

$$\Phi(x, t_0) \cong \frac{\Delta\omega}{\pi} \sum_{j=0}^n \widehat{\Phi}(\omega_j, t_0) \cos(\omega_j x), \quad (6.1.10)$$

onde  $\Delta\omega = \frac{\omega_c}{n}$ ,  $\omega_j = j\Delta\omega$  e  $\widehat{\Phi}(\omega_j, t_0) \underbrace{\cong}_{(6.1.7)} E_\alpha(-\nu\omega_j^\beta t_0^\alpha)$ .

Pela expressão em (6.1.10), com uma conveniente implementação em MATLAB<sup>1</sup>, podemos obter valores aproximados para  $u(x, t_0)$ .

<sup>1</sup>Veja Apêndice B.

## 6.1.2 Casos particulares

Vamos considerar alguns casos particulares para a solução aproximada da equação diferencial (6.1.1), que pode ser obtida utilizando a expressão (6.1.10), quando são dados os parâmetros  $\nu, \alpha, \beta$  e a função  $F(x)$ . Utilizando a solução aproximada, podemos plotar alguns gráficos da forma  $u(x, t_0) \times x$  através da implementação discutida no Apêndice B.

1. Se  $\nu = 1, \alpha = 1, \beta = 2$  e  $F(x) = \delta(x)$ , temos o problema de ordem inteira

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= -u_{xx}(x, t) + \delta(x)\delta(t) \\ u(x, 0^+) &= \delta(x) \\ u(x, 0^-) &= 0 \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u_t(x, t) &= 0. \end{aligned} \tag{6.1.11}$$

Pela equação (6.1.6), temos que

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\omega^2 t} \cos(\omega x) d\omega = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/4t}, \quad \text{para } t > 0.$$

Ou seja, recuperamos a solução da equação de ordem inteira, definida em (1.6.7).

Fixando  $t_0 = 1$ , pela equação (6.1.7), podemos escrever

$$\widehat{\Phi}(\omega, 1) = E_\alpha(-\nu\omega^\beta t_0^\alpha) = E_1(-\omega^2 1^1) = e^{-\omega^2}.$$

Escolhendo  $w_c = 4$ , temos que  $\widehat{\Phi}(4, 1) = e^{-(4)^2} \cong 1,1253 \cdot 10^{-7}$ .

Fazendo  $n = 10^5$ , temos que  $\Delta\omega = \frac{\omega_c}{n} = \frac{4}{10^5} = 4 \cdot 10^{-5}$ .

A solução exata para essa escolha de  $w_c$  e  $t_0$  é  $u(x, 1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-x^2/4}$ , enquanto que a solução aproximada é dada por

$$u(x, 1) \cong \frac{4 \cdot 10^{-5}}{\pi} \sum_{j=0}^{100000} e^{-(4 \cdot 10^{-5} j)^2} \cos(4 \cdot 10^{-5} j x),$$

já que por (6.1.6) temos que  $u(x, 1) = \Phi(x, 1)$ , pois  $F(x) = \delta(x)$ , com isso, usamos a aproximação em (6.1.10). Para alguns valores de  $x$ , comparamos os valores obtidos pela solução aproximada com os valores exatos, dados pela solução clássica, conforme a Tabela 1 a seguir.

$x$	$n = 10^5; \widehat{\Phi}(4, 1) \cong 1,1253 \cdot 10^{-7}$	
	$u_e(x, 1)$	$u_a(x, 1)$
0	0,282094	0,282101
0,5	0,265003	0,265009
1	0,219695	0,219702
1,5	0,160732	0,160739
2	0,103776	0,103783

Tabela 1:  $u_e(x, 1)$  (exato) e  $u_a(x, 1)$  (aproximado), com  $w_c = 4$ .

Por outro lado, escolhendo  $w_c = 2$ , temos que  $\widehat{\Phi}(2, 1) = e^{-(2)^2} \cong 0,0183156$ .

Fazendo  $n = 10^5$ , temos que  $\Delta\omega = \frac{\omega_c}{n} = \frac{2}{10^5} = 2 \cdot 10^{-5}$ . Neste caso, a solução aproximada é dada por

$$u(x, 1) \cong \frac{2 \cdot 10^{-5}}{\pi} \sum_{j=0}^{100000} e^{-(2 \cdot 10^{-5} j)^2} \cos(2 \cdot 10^{-5} j x)$$

	$n = 10^5; \widehat{\Phi}(2, 1) \cong 0,0183156$	
$x$	$u_e(x, 1)$	$u_a(x, 1)$
0	0,282094	0,280778
0,5	0,265003	0,264416
1	0,219695	0,220468
1,5	0,160732	0,161984
2	0,103776	0,104154

Tabela 2:  $u_e(x, 1)$  (exato) e  $u_a(x, 1)$  (aproximado), com  $w_c = 2$ .

Na Tabela 2, utilizamos  $w_c = 2$ , que não é uma escolha melhor que  $w_c = 4$ , visto que  $\widehat{\Phi}(2, 1)$  não está tão próximo de zero, mesmo assim a solução aproximada coincide com a solução exata em duas casas decimais. Na Tabela 1, consideramos  $w_c = 4$ , de modo que  $\widehat{\Phi}(2, 1) \cong 0$ , neste caso notamos uma melhora nos valores da solução aproximada, que coincidem com a solução exata em três casas decimais. Vale ressaltar também que quanto maior o número de amostras  $n$ , mais informações temos da solução exata.

2. Neste caso vamos considerar  $\alpha = 0,9; \beta = 1,9; t_0 = \nu = 1$  e  $F(x) = \delta(x)$ . Temos então o seguinte problema

$$\begin{aligned} {}_C D_{0+}^{0,9} u(x, t) &= -\nu (-\Delta)^{\frac{1,9}{2}} u(x, t) + \delta(x)\delta(t) \\ u(x, 0^+) &= \delta(x) \\ u(x, 0^-) &= 0 \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u_t(x, t) &= 0. \end{aligned} \tag{6.1.12}$$

No Apêndice B, discutimos detalhadamente os passos utilizados para a obtenção dos dados da Tabela 3 e do gráfico para este caso particular.

Sendo  $t_0 = 1$ , pela equação (6.1.7), temos que

$$\widehat{\Phi}(\omega, 1) = E_{\alpha}(-\nu\omega^{\beta}t_0^{\alpha}) = E_{0,9}(-\omega^{1,9}).$$

Escolhendo  $w_c = 10$  e  $n = 10^5$ , temos que

$$\Delta\omega = \frac{\omega_c}{n} = \frac{10}{10^5} = 10^{-4} \text{ e } \omega_j = 10^{-4} j, \text{ para } j = 0, 1, \dots, 100000.$$

Além disso,  $\widehat{\Phi}(10, 1) = E_{0,9}[-(10)^{1,9}] \cong 0,00135174$ .

Logo, temos que

$$u(x, 1) \cong \frac{10^{-4}}{\pi} \sum_{j=0}^{100000} E_{0,9}[-(10^{-4} j)^{1,9}] \cos(10^{-4} j x).$$

Na tabela a seguir, comparamos valores exatos com valores aproximados para a solução, quando  $x = 0; 0,3; 0,5; 0,8; 1; 2$  e  $5$ .

$\alpha = 0,9; \beta = 1,9 \text{ e } w_c = 10$		
$x$	$u_e(x, 1)$	$u_a(x, 1)$
0	0,313239	0,308543
0,3	0,288564	0,289244
0,5	0,268238	0,267479
0,8	0,233220	0,233746
1	0,208288	0,208144
2	0,094986	0,095188
5	0,002548	0,002539

Tabela 3:  $u_e(x, 1)$  (exato) e  $u_a(x, 1)$  (aproximado) para o problema (6.1.12).

A seguir, plotamos o gráfico neste caso particular para  $u(x, 1)$ , com  $x \in [-6, 6]$ .

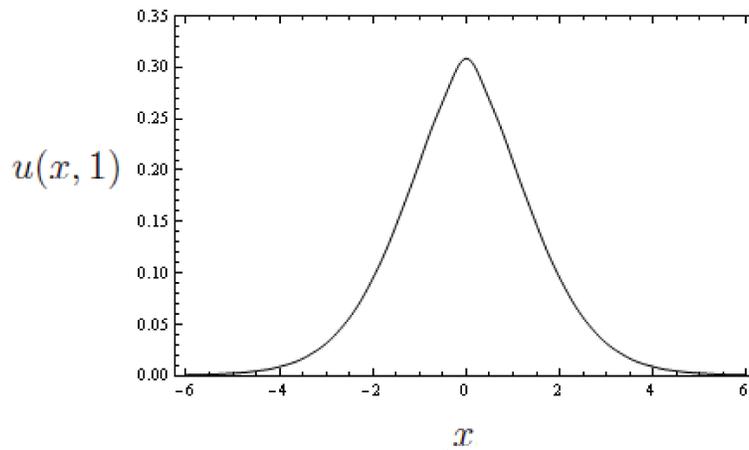


Figura 6.1: Função  $u(x, 1)$  para  $\alpha = 0,9$  e  $\beta = 1,9$ .

3. Neste caso vamos considerar  $\alpha = 0,8$ ;  $\beta = 1,8$ ;  $t_0 = \nu = 1$  e  $F(x) = \delta(x)$ . Temos então o seguinte problema

$$\begin{aligned} {}_C D_{0+}^{0,8} u(x, t) &= -\nu (-\Delta)^{\frac{1,8}{2}} u(x, t) + \delta(x)\delta(t) \\ u(x, 0^+) &= \delta(x) \\ u(x, 0^-) &= 0 \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u_t(x, t) &= 0. \end{aligned} \tag{6.1.13}$$

Sendo  $t_0 = 1$ , pela equação (6.1.7), temos que

$$\widehat{\Phi}(\omega, 1) = E_{\alpha}(-\nu\omega^{\beta}t_0^{\alpha}) = E_{0,8}(-\omega^{1,8}).$$

Escolhendo  $w_c = 10$  e  $n = 10^5$ , temos que

$$\Delta\omega = \frac{\omega_c}{n} = \frac{10}{10^5} = 10^{-4} \text{ e } \omega_j = 10^{-4} j, \text{ para } j = 0, 1, \dots, 100000.$$

Além disso,  $\widehat{\Phi}(10, 1) = E_{0,8}[-(10)^{1,8}] \cong 0,00352176$ .

Logo, temos que

$$u(x, 1) \cong \frac{10^{-4}}{\pi} \sum_{j=0}^{100000} E_{0,8}[-(10^{-4} j)^{1,8}] \cos(10^{-4} j x).$$

$\alpha = 0,8$ ; $\beta = 1,8$ e $w_c = 10$		
$x$	$u_e(x, 1)$	$u_a(x, 1)$
0	0,352421	0,338616
0,3	0,300382	0,302099
0,5	0,269656	0,267638
0,8	0,224922	0,226273
1	0,196665	0,196255
2	0,087287	0,087788
5	0,004525	0,004475

Tabela 4:  $u_e(x, 1)$  (exato) e  $u_a(x, 1)$  (aproximado) para o problema (6.1.13).

O gráfico na Figura 6.2 a seguir, representa a solução  $u(x, 1)$  do problema (6.1.13), no caso em que  $x \in [-6, 6]$ . Na Figura 6.3 plotamos em um mesmo gráfico as figuras correspondentes aos problemas (6.1.11), (6.1.12) e (6.1.13).

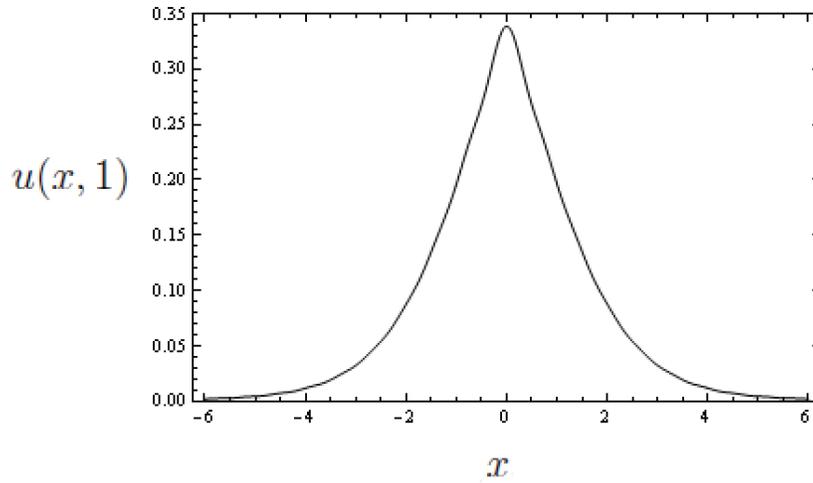


Figura 6.2: Função  $u(x, 1)$  para  $\alpha = 0,8$  e  $\beta = 1,8$ .

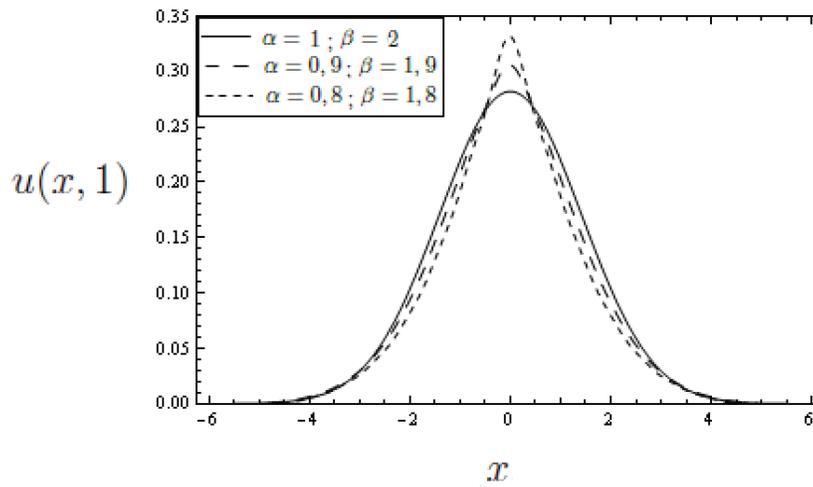


Figura 6.3: Função  $u(x, 1)$  para particulares valores de  $\alpha$  e  $\beta$ .

4. Neste caso vamos considerar  $\alpha = 0,5$ ;  $\beta = 1,5$ ;  $t_0 = \nu = 1$  e  $F(x) = \delta(x)$ . Temos então o seguinte problema

$$\begin{aligned} {}_C D_{0+}^{0,5} u(x, t) &= -\nu (-\Delta)^{\frac{1,5}{2}} u(x, t) + \delta(x)\delta(t) \\ u(x, 0^+) &= \delta(x) \\ u(x, 0^-) &= 0 \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u_t(x, t) &= 0. \end{aligned} \tag{6.1.14}$$

Sendo  $t_0 = 1$ , pela equação (6.1.7) temos que

$$\widehat{\Phi}(\omega, 1) = E_{\alpha}(-\nu\omega^{\beta}t_0^{\alpha}) = E_{0,5}(-\omega^{1,5}).$$

Escolhendo  $w_c = 10$  e  $n = 10^5$ , temos que

$$\Delta\omega = \frac{\omega_c}{n} = \frac{10}{10^5} = 10^{-4} \text{ e } \omega_j = 10^{-4} j, \text{ para } j = 0, 1, \dots, 100000.$$

Além disso,  $\widehat{\Phi}(10, 1) = E_{0,5}[-(10)^{1,5}] \cong 0,0178323$ .

Por outro lado, escolhendo  $w_c = 100$  e  $n = 10^5$ , temos que

$$\Delta\omega = \frac{\omega_c}{n} = \frac{100}{10^5} = 10^{-3} \text{ e } \omega_j = 10^{-3} j, \text{ para } j = 0, 1, \dots, 100000.$$

Além disso,  $\widehat{\Phi}(100, 1) = E_{0,5}[-(100)^{1,5}] \cong 0,000564189$ .

A tabela a seguir mostra os valores obtidos pela solução aproximada para essas duas escolhas de  $w_c$ .

$\alpha = 0,5$ ; e $\beta = 1,5$			
$x$	$u_e(x, 1)$	$u_a(x, 1)$ com $\omega_c = 10$	$u_a(x, 1)$ com $\omega_c = 100$
0	0,568488	0,454931	0,532730
0,3	0,326512	0,334580	0,326077
0,5	0,262421	0,251904	0,262475
0,8	0,195169	0,202036	0,195105
1	0,162019	0,159710	0,162085
2	0,068682	0,071180	0,068762
5	0,008979	0,008665	0,009122

Tabela 5:  $u_e(x, 1)$  (exato) e  $u_a(x, 1)$  (aproximado) para o problema (6.1.14).

Com base na Tabela 5, escolhemos  $\omega_c = 100$  para plotar o gráfico a seguir.

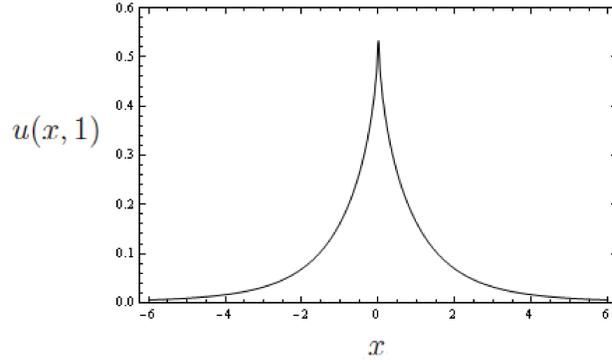


Figura 6.4: Função  $u(x, 1)$  para  $\alpha = 0,5$  e  $\beta = 1,5$ .

5. Vamos considerar  $\alpha = 0,1$ ;  $\beta = 1,9$ ;  $\nu = 1$  e  $F(x) = \delta(x)$ . Temos então o seguinte problema

$$\begin{aligned}
 {}_C D_{0^+}^{0,1} u(x, t) &= -\nu (-\Delta)^{\frac{1,9}{2}} u(x, t) + \delta(x)\delta(t) \\
 u(x, 0^+) &= \delta(x) \\
 u(x, 0^-) &= 0 \\
 \lim_{|x| \rightarrow \infty} u_t(x, t) &= 0.
 \end{aligned} \tag{6.1.15}$$

Escolhendo  $w_c = 100$  e  $n = 10^5$ , vamos analisar a solução aproximada para o problema (6.1.15) para os valores de  $t$  a seguir.

- Para  $t_0 = 0,5$ , temos que

$$\widehat{\Phi}(100; 0, 5) = E_{0,1} \left[ -(100)^{1,9} (0, 5)^{0,1} \right] \cong 0,000158931$$

- Para  $t_0 = 1$ , temos que

$$\widehat{\Phi}(100, 1) = E_{0,1} \left[ -(100)^{1,9} \right] \cong 0,000148289.$$

- Para  $t_0 = 1,5$ , temos que

$$\widehat{\Phi}(100; 1, 5) = E_{0,1} \left[ -(100)^{1,9} (1, 5)^{0,1} \right] \cong 0,000142398.$$

$\alpha = 0,1, \beta = 1,9$ e $t = 0,5$			$\alpha = 0,1, \beta = 1,9$ e $t = 1$			$\alpha = 0,1, \beta = 1,9$ e $t = 1,5$		
$x$	$u_e(x, 1)$	$u_a(x, 1)$	$x$	$u_e(x, 1)$	$u_a(x, 1)$	$x$	$u_e(x, 1)$	$u_a(x, 1)$
0	0,530111	0,524648	0	0,511120	0,506033	0	0,500328	0,495450
0,3	0,372183	0,372168	0,3	0,363091	0,363094	0,3	0,357813	0,357822
0,5	0,300115	0,300244	0,5	0,294926	0,295056	0,5	0,291844	0,291976
0,8	0,219196	0,219292	0,8	0,217714	0,217815	0,8	0,21675	0,216853
1	0,178430	0,178562	1	0,178466	0,178600	1	0,178383	0,178518
2	0,065603	0,065740	2	0,067865	0,068004	2	0,069149	0,069288
5	0,004136	0,004290	5	0,004646	0,004801	5	0,004964	0,005119

Tabela 6:  $u_e(x, 1)$  (exato) e  $u_a(x, 1)$  (aproximado) para alguns valores de  $t$ .

A seguir, o gráfico no caso particular em que  $t = 1$  e  $x \in [-6, 6]$ .

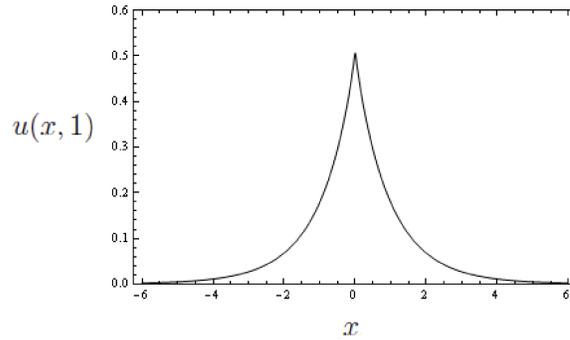


Figura 6.5: Função  $u(x, 1)$  para  $\alpha = 0,1$  e  $\beta = 1,9$ .

No gráfico a seguir, plotamos  $u(x, t)$  para  $t = 0,5; 1$  e  $1,5$  e  $x \in [-1, 1]$ .

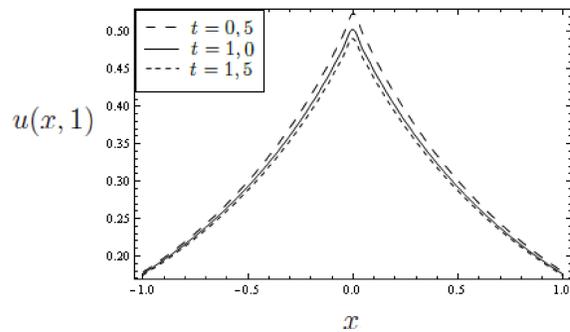


Figura 6.6: Função  $u(x, t)$  para  $t = 0,5; 1$  e  $1,5$ , com  $\alpha = 0,1$  e  $\beta = 1,9$ .

6. Vamos considerar o problema geral (6.1.1) no caso em que

$$F(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } |x| < 1/2, \\ 0, & \text{se } |x| > 1/2. \end{cases}$$

Pela equação (6.1.6), temos que

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\pi} \int_{x-1/2}^{x+1/2} \left[ \int_0^\infty E_\alpha(-\nu\omega^\beta t^\alpha) \cos(\omega\tau) d\omega \right] d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left\{ E_\alpha(-\nu\omega^\beta t^\alpha) \left[ \int_{x-1/2}^{x+1/2} \cos(\omega\tau) d\tau \right] d\omega \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left\{ E_\alpha(-\nu\omega^\beta t^\alpha) \left[ \frac{\text{sen}[\omega(x+1/2)] - \text{sen}[\omega(x-1/2)]}{\omega} \right] d\omega \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left\{ E_\alpha(-\nu\omega^\beta t^\alpha) \left[ \frac{\text{sen}(\omega/2)\cos(\omega x)}{\omega/2} \right] d\omega \right\} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{E_\alpha(-\nu\omega^\beta t^\alpha) \text{sen}(\omega/2)\cos(\omega x)}{\omega} d\omega, \end{aligned}$$

Logo,

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{E_\alpha(-\nu\omega^\beta t^\alpha) \text{sen}(\omega/2)\cos(\omega x)}{\omega} d\omega. \quad (6.1.16)$$

Os gráficos para a solução na equação (6.1.16) também podem ser obtidos utilizando a mesma metodologia dos exemplos anteriores, sendo necessário apenas uma pequena mudança na implementação em MATLAB.

A seguir alguns gráficos para esse caso.

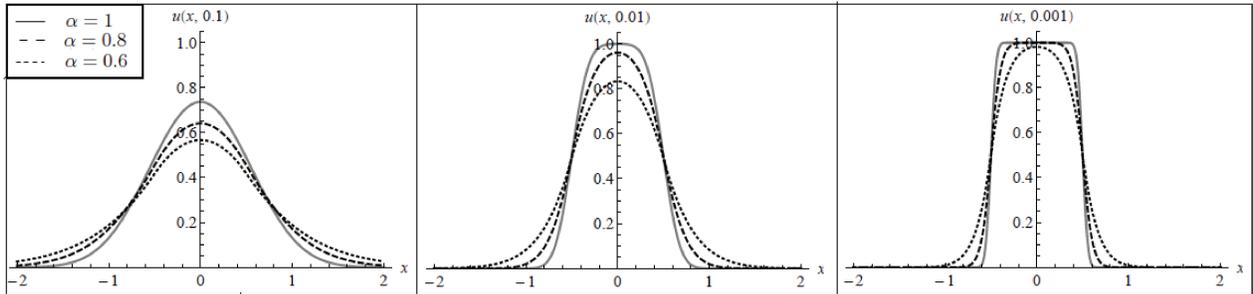


Figura 6.7: Função  $u(x, t)$  para  $t = 0, 1; 0, 01$  e  $0, 001$ , com  $\alpha = 0, 6; 0, 8$  e  $1$  e  $\beta = 2$ .

Estudos recentes apresentam uma solução analítica para esse problema [7].

## 6.2 Equação do telégrafo fracionária

Vamos resolver a seguinte equação do telégrafo fracionária, que apresenta características dos movimentos de onda e difusão [49]:

$$\begin{aligned} {}_C D_{0+}^{2\alpha} u(x, t) + a {}_C D_{0+}^{\beta} u(x, t) + b u(x, t) &= -k^2 (-\Delta)^{\gamma} u(x, t), \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x, t) &= 0, \\ u(x, 0) = f(x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) \Big|_{t=0} &= g(x), \end{aligned} \tag{6.2.1}$$

onde  $a, b$  e  $k$  são constantes reais,  $x \in \mathbb{R}$  é a variável espacial,  $t > 0$  é a variável temporal,  $1/2 < \alpha \leq 1$ ,  $0 < \beta \leq 1$  e  $1/2 < \gamma \leq 1$ . Para resolvê-la, vamos utilizar a metodologia de transformada de Laplace inversa apresentada em [2] e discutida no Capítulo 1, Seção 1.5. No caso em que  $\alpha = \beta = \gamma = 1$ , nós recuperamos a clássica equação do telégrafo.

Essa equação foi resolvida em [4] no caso em que  $b = 0$ , com o uso de transformadas integrais de Laplace e Fourier e a solução foi representada através da função  $H$ -Fox [8].

Aplicando a transformada de Fourier em ambos os membros da equação do telégrafo fracionária, temos

$${}_C D_{0+}^{2\alpha} \hat{u}(\omega, t) + a {}_C D_{0+}^{\beta} \hat{u}(\omega, t) + b \hat{u}(\omega, t) = -k^2 |\omega|^{2\gamma} \hat{u}(\omega, t),$$

onde  $\hat{u}(\omega, t) = \mathcal{F}[u(x, t)]$  e  $(-\Delta)^{\alpha/2} f = \mathcal{F}^{-1} \|\omega\|^{\alpha} \mathcal{F}f$ .

Aplicando agora a transformada de Laplace na equação acima e usando a equação (4.4.7), obtemos

$$s^{2\alpha} \hat{U}(\omega, s) - s^{2\alpha-1} \hat{u}(\omega, 0) - s^{2\alpha-2} \frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(\omega, t) \Big|_{t=0} + a s^{\beta} \hat{U}(\omega, s) - a s^{\beta-1} \hat{u}(\omega, 0) + b \hat{U}(\omega, s) = -k^2 |\omega|^{2\gamma} \hat{U}(\omega, s),$$

onde  $\hat{U}(\omega, s) = \mathcal{L}[\hat{u}(\omega, t)]$ . Das condições iniciais, temos que

$$\hat{u}(\omega, 0) = \mathcal{F}[u(x, 0)] = \mathcal{F}[f(x)] = \hat{f}(\omega)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(\omega, t) \Big|_{t=0} = \mathcal{F} \left[ \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) \Big|_{t=0} \right] = \mathcal{F}[g(x)] = \hat{g}(\omega).$$

Assim,

$$s^{2\alpha} \hat{U}(\omega, s) - s^{2\alpha-1} \hat{f}(\omega) - s^{2\alpha-2} \hat{g}(\omega) + a s^{\beta} \hat{U}(\omega, s) - a s^{\beta-1} \hat{f}(\omega) + b \hat{U}(\omega, s) = -k^2 |\omega|^{2\gamma} \hat{U}(\omega, s),$$

de onde segue que

$$\hat{U}(\omega, s) = \frac{\hat{f}(\omega) (s^{2\alpha-1} + a s^{\beta-1}) + s^{2\alpha-2} \hat{g}(\omega)}{s^{2\alpha} + a s^{\beta} + k^2 |\omega|^{2\gamma} + b}. \tag{6.2.2}$$

Tomando a transformada de Fourier inversa na equação (6.2.2), podemos escrever

$$U(x, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \left[ \frac{\hat{f}(\omega) (s^{2\alpha-1} + a s^{\beta-1}) + s^{2\alpha-2} \hat{g}(\omega)}{s^{2\alpha} + a s^{\beta} + k^2 |\omega|^{2\gamma} + b} \right] d\omega. \quad (6.2.3)$$

Pela equação (1.5.5), podemos escrever

$$u(x, t) = \frac{e^{\sigma t}}{\pi} \int_0^{\infty} [\operatorname{Re} [U(x, \sigma + i\tau)] \cos(t\tau) - \operatorname{Im} [U(x, \sigma + i\tau)] \operatorname{sen}(t\tau)] d\tau, \quad (6.2.4)$$

onde  $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$  e  $\sigma$  deve ser tomado de modo a satisfazer a condição de existência de  $U(x, \sigma + i\tau)$ .

• Caso particular:

Considere o caso particular em que  $a = b = 2$ ,  $k = 1$ ,  $\alpha = \beta = \gamma = 1$ ,  $f(x) = \operatorname{sen}(x)$  e  $g(x) = -\operatorname{sen}(x)$  na equação (6.2.1).

Pela equação (6.2.3), temos que

$$U(x, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \left[ \frac{\hat{f}(\omega) (s + 2) + \hat{g}(\omega)}{s^2 + 2s + \omega^2 + 2} \right] d\omega.$$

Como  $f(x) = \operatorname{sen}(x)$  e  $g(x) = -\operatorname{sen}(x)$ ,

$$\hat{f}(\omega) = -i\pi [\delta(\omega - 1) - \delta(\omega + 1)]$$

e

$$\hat{g}(\omega) = i\pi [\delta(\omega - 1) - \delta(\omega + 1)].$$

Logo, podemos escrever

$$\begin{aligned} U(x, s) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} [-i\pi (\delta(\omega - 1) - \delta(\omega + 1))] \left[ \frac{s + 2 - 1}{s^2 + 2s + \omega^2 + 2} \right] d\omega \\ &= \frac{-i(s + 1)}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \left[ \frac{\delta(\omega - 1) - \delta(\omega + 1)}{s^2 + 2s + \omega^2 + 2} \right] d\omega. \end{aligned}$$

Efetuada a integral acima no MATLAB, obtemos o resultado

$$U(x, s) = \operatorname{sen}(x) \left( \frac{s + 1}{s^2 + 2s + 3} \right).$$

Temos que  $s^2 + 2s + 3$  é maior que zero para todo  $s \in \mathbb{C}$ , ou seja,  $\operatorname{Re}[s] = \sigma \in \mathbb{R}$ , com isso, podemos escolher  $\sigma = 0$  e escrever  $s = 0 + i\tau$  para determinar  $\operatorname{Re} [U(x, i\tau)]$  e  $\operatorname{Im} [U(x, i\tau)]$ .

Assim, segue que

$$\operatorname{Re} [U(x, i\tau)] = \operatorname{sen}(x) \left( \frac{\tau^2 + 3}{\tau^4 - 2\tau^2 + 9} \right)$$

e

$$\text{Im}[U(x, i\tau)] = -\text{sen}(x) \left( \frac{\tau(\tau^2 - 1)}{\tau^4 - 2\tau^2 + 9} \right).$$

Finalmente, pela equação (6.2.4), temos que

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{e^{0t}}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \text{sen}(x) \left( \frac{\tau^2 + 3}{\tau^4 - 2\tau^2 + 9} \right) \cos(t\tau) + \text{sen}(x) \left[ \frac{\tau(\tau^2 - 1)}{\tau^4 - 2\tau^2 + 9} \right] \text{sen}(t\tau) \right\} d\tau \\ &= \frac{\text{sen}(x)}{\pi} \int_0^\infty \frac{(\tau^2 + 3) \cos(t\tau) + \tau(\tau^2 - 1) \text{sen}(t\tau)}{\tau^4 - 2\tau^2 + 9} d\tau. \end{aligned}$$

Efetuada a integral acima no MATLAB, obtemos o resultado

$$u(x, t) = \frac{\text{sen}(x)}{\pi} e^{-t} \pi \cos(\sqrt{2}t).$$

Logo, neste caso particular, a solução é dada por

$$u(x, t) = e^{-t} \cos(\sqrt{2}t) \text{sen}(x).$$

Segue abaixo o gráfico para a solução obtida neste caso particular.

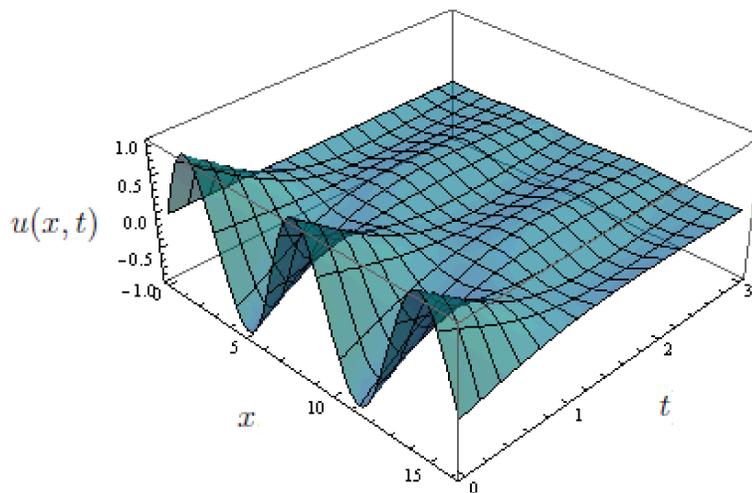


Figura 6.8: Gráfico de  $u(x, t) = e^{-t} \cos(\sqrt{2}t) \text{sen}(x)$  para  $0 < x < 16$  e  $0 < t < 3$ .

### 6.3 Equações diferenciais fracionárias lineares

Enfim, mais uma aplicação das funções de Mittag-Leffler no estudo das equações diferenciais fracionárias lineares.

Vamos apresentar alguns exemplos de equações diferenciais fracionárias lineares (EDFL), cuja solução pode ser expressa em termos das funções de Mittag-Leffler [31, 50].

Sejam  $\Omega = [a, b]$  um intervalo finito do eixo real  $\mathbb{R}$ ,  $x \in \Omega$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , com  $0 < \alpha \leq 1$  e  $n \in \mathbb{N}^*$ . Considere a equação diferencial fracionária linear

$$[\mathbf{L}_{n\alpha}(y)](x) := \left( \mathcal{D}_{a+}^{n\alpha} y \right)(x) + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x) \left( \mathcal{D}_{a+}^{j\alpha} y \right)(x) = f(x), \quad (6.3.1)$$

onde  $\mathcal{D}_{a+}^\alpha$  denota os operadores de derivação fracionária de Riemann-Liouville ou de Caputo.

A equação em (6.3.1) é chamada de equação diferencial fracionária sequencial linear e possui  $n$  soluções globais [31].

Vamos analisar o caso particular em que  $a_0(x) = \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $a_j(x) \equiv 0$ , para todo  $j = 1, \dots, n-1$  e  $f(x) \equiv 0$ . Dessa forma, obtemos a equação

$$[\mathbf{L}_{n\alpha}(y)](x) := \left( \mathcal{D}_{a+}^{n\alpha} y \right)(x) - \lambda y(x) = 0, \quad (6.3.2)$$

com  $0 < \alpha \leq 1$  e  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Através de dois teoremas sobre as autofunções dos operadores de derivação fracionária segundo Riemann-Liouville e Caputo, é possível encontrar a solução para certos tipos de equações diferenciais fracionárias, em particular, as possíveis soluções da equação (6.3.2), no caso em que o operador  $\mathcal{D}_{a+}^\alpha$  é considerado no sentido de Riemann-Liouville ou de Caputo.

**Teorema 6.1.** Sejam  $\Omega = [a, b]$  um intervalo finito do eixo real  $\mathbb{R}$ , com  $x \in \Omega$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e  $\alpha \in \left( \frac{m-1}{m}, 1 \right] \subset \mathbb{R}$ , então

$$y_k(x) = (x - a)^{m\alpha - k} \mathbf{E}_{m\alpha, m\alpha + 1 - k} [\lambda (x - a)^{m\alpha}], \quad (6.3.3)$$

com  $x > a$  e  $k = 1, \dots, m$ , são as autofunções associadas ao autovalor  $\lambda$  do operador de derivação fracionária à esquerda segundo Riemann-Liouville ( $\mathbf{D}_{a+}^{m\alpha}$ ).

*Demonstração.* Para mostrar que  $y_k(x)$  são autofunções de  $\mathbf{D}_{a+}^{m\alpha}$ , para  $k = 1, \dots, m$ , utilizamos a definição da função de Mittag-Leffler e a Propriedade 4.7.

Aplicando  $\mathbf{D}_{a+}^{m\alpha}$  em  $y_k(x)$ , temos

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{a+}^{m\alpha} \left\{ (x - a)^{m\alpha - k} \mathbf{E}_{m\alpha, m\alpha + 1 - k} [\lambda (x - a)^{m\alpha}] \right\} &= \mathbf{D}_{a+}^{m\alpha} \left[ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j (x - a)^{m\alpha j + m\alpha - k}}{\Gamma(m\alpha j + m\alpha + 1 - k)} \right] \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{\Gamma(m\alpha j + m\alpha + 1 - k)} \mathbf{D}_{a+}^{m\alpha} \left[ (x - a)^{m\alpha j + m\alpha - k} \right] \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^{j-1}}{\Gamma(m\alpha j + 1 - k)} \mathbf{D}_{a+}^{m\alpha} \left[ (x - a)^{m\alpha j - k} \right]. \end{aligned}$$

Pela Propriedade 4.7, podemos escrever

$$D_{a+}^{m\alpha} [(x-a)^{m\alpha j-k}] = \frac{\Gamma(m\alpha j - k + 1)}{\Gamma(m\alpha j - k - m\alpha + 1)} (x-a)^{m\alpha j-k-m\alpha},$$

desde que

$$m\alpha j - k > -1, \text{ ou seja, que } \alpha > \frac{k-1}{mj} \text{ para } k = 1, 2, \dots, m \text{ e } j = 1, 2, \dots$$

Resolvendo essas inequações, encontramos a restrição

$$\alpha > \frac{m-1}{m}.$$

Assim, obtemos

$$D_{a+}^{m\alpha} \left\{ (x-a)^{m\alpha-k} E_{m\alpha, m\alpha+1-k} [\lambda(x-a)^{m\alpha}] \right\} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^{j-1}}{\Gamma(m\alpha j - k - m\alpha + 1)} (x-a)^{m\alpha j-k-m\alpha}.$$

Se  $j = 1$ , o denominador do membro direito da igualdade acima valerá  $\Gamma(1-k)$ , mas

$$\lim_{k \rightarrow a} \Gamma(1-k) = \infty, \text{ para todo } a = 1, 2, \dots, m.$$

Com isso, temos

$$\frac{(x-a)^{-k}}{\Gamma(1-k)} = 0, \text{ para } k = 1, 2, \dots, m.$$

Logo, obtemos a igualdade

$$D_{a+}^{m\alpha} \left\{ (x-a)^{m\alpha-k} E_{m\alpha, m\alpha+1-k} [\lambda(x-a)^{m\alpha}] \right\} = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\lambda^{j-1}}{\Gamma(m\alpha j - k - m\alpha + 1)} (x-a)^{m\alpha j-k-m\alpha},$$

ou seja,

$$D_{a+}^{m\alpha} \left\{ (x-a)^{m\alpha-k} E_{m\alpha, m\alpha+1-k} [\lambda(x-a)^{m\alpha}] \right\} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^{j+1}}{\Gamma(m\alpha j + m\alpha + 1 - k)} (x-a)^{m\alpha j+m\alpha-k},$$

de onde segue o resultado desejado

$$D_{a+}^{m\alpha} \left\{ (x-a)^{m\alpha-k} E_{m\alpha, m\alpha+1-k} [\lambda(x-a)^{m\alpha}] \right\} = \lambda(x-a)^{m\alpha-k} E_{m\alpha, m\alpha+1-k} [\lambda(x-a)^{m\alpha}].$$

■

Considerando agora o operador de derivação fracionária segundo Caputo, podemos escrever o teorema a seguir sobre suas autofunções.

**Teorema 6.2.** Sejam  $\Omega = [a, b]$  um intervalo finito do eixo real  $\mathbb{R}$ , com  $x \in \Omega$ ,  $\alpha, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$  e  $\alpha \in \left(\frac{m-1}{m}, 1\right] \subset \mathbb{R}$ , então

$$y_k(x) = (x - a)^{k-1} E_{m\alpha, k} [\lambda(x - a)^{m\alpha}], \quad (6.3.4)$$

para  $x > a$  e  $k = 1, \dots, m$ , são as autofunções associadas ao autovalor  $\lambda$  do operador de derivação fracionária segundo Caputo ( ${}_C D_{a+}^{m\alpha}$ ).

*Demonstração.* Para mostrar que  $y_k(x)$  são autofunções de  ${}_C D_{a+}^{m\alpha}$ , para  $k = 1, \dots, m$ , utilizamos a definição da função de Mittag-Leffler e a Propriedade 4.7.

Aplicando  ${}_C D_{a+}^{m\alpha}$  em  $y_k(x)$ , temos

$$\begin{aligned} {}_C D_{a+}^{m\alpha} \left\{ (x - a)^{k-1} E_{m\alpha, k} [\lambda(x - a)^{m\alpha}] \right\} &= {}_C D_{a+}^{m\alpha} \left[ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j (x - a)^{m\alpha j + k - 1}}{\Gamma(m\alpha j + k)} \right] \\ &= {}_C D_{a+}^{m\alpha} \frac{(x - a)^{k-1}}{\Gamma(k)} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j}{\Gamma(m\alpha j + k)} {}_C D_{a+}^{m\alpha} \left[ (x - a)^{m\alpha j + k - 1} \right]. \end{aligned}$$

Pela Propriedade 4.12, podemos escrever

$${}_C D_{a+}^{m\alpha} \left[ \frac{(x - a)^{k-1}}{\Gamma(k)} \right] = 0,$$

se  $k - 1 = 0, 1, 2, \dots, m - 1 < [m\alpha]$ .

Como  $[m\alpha] < m\alpha$ , devemos ter  $0, 1, 2, \dots, m - 1 < m\alpha$ . Resolvendo esse sistema de inequações, encontramos a restrição

$$\alpha > \frac{m - 1}{m}.$$

Além disso,

$${}_C D_{a+}^{m\alpha} \left[ (x - a)^{m\alpha j + k - 1} \right] = \frac{\Gamma(m\alpha j + k)}{\Gamma(m\alpha j + k - m\alpha)} (x - a)^{m\alpha j + k - 1 - m\alpha},$$

desde que  $m\alpha j + k - 1 > [m\alpha]$ , para todo  $j = 1, 2, \dots$  e para todo  $k = 1, 2, \dots, m$ .

Temos então um sistema de inequações:

Fazendo  $k = 1$ : devemos ter  $m\alpha j > [m\alpha]$ , mas isso vale para todo  $j = 1, 2, \dots$

Fazendo  $k = 2$ : devemos ter  $m\alpha j > [m\alpha] - 1$ , mas isso vale para todo  $j = 1, 2, \dots$

$\vdots$

Fazendo  $k = m$ : devemos ter  $m\alpha j > [m\alpha] - m + 1$ , mas isso vale para todo  $j = 1, 2, \dots$

Assim, podemos escrever

$${}_C D_{a+}^{m\alpha} \left\{ (x-a)^{k-1} E_{m\alpha,k} [\lambda(x-a)^{m\alpha}] \right\} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j (x-a)^{m\alpha j + k - 1 - m\alpha}}{\Gamma(m\alpha j + k - m\alpha)},$$

ou seja,

$${}_C D_{a+}^{m\alpha} \left\{ (x-a)^{k-1} E_{m\alpha,k} [\lambda(x-a)^{m\alpha}] \right\} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^{j+1} (x-a)^{m\alpha j + k - 1}}{\Gamma(m\alpha j + k)},$$

de onde segue o resultado desejado

$${}_C D_{a+}^{m\alpha} \left\{ (x-a)^{k-1} E_{m\alpha,k} [\lambda(x-a)^{m\alpha}] \right\} = \lambda (x-a)^{k-1} E_{m\alpha,k} [\lambda(x-a)^{m\alpha}].$$

■

Pelo Teorema 6.1, a solução geral da equação (6.3.2) quando consideramos o operador diferencial fracionário segundo Riemann-Liouville, pode ser escrita da forma

$$y(x) = \sum_{k=1}^n c_k y_k(x) = \sum_{k=1}^n c_k (x-a)^{n\alpha-k} E_{n\alpha, n\alpha+1-k} [\lambda(x-a)^{n\alpha}], \quad (6.3.5)$$

onde  $c_k$ , com  $k = 1, \dots, n$ , são constantes arbitrárias.

Por outro lado, se considerarmos o operador diferencial fracionário segundo Caputo, pelo Teorema 6.2, a solução geral da equação (6.3.2), quando consideramos  $0 < \alpha \leq 1$ , pode ser escrita da forma

$$y(x) = \sum_{k=1}^n c_k y_k(x) = \sum_{k=1}^n c_k (x-a)^{k-1} E_{n\alpha,k} [\lambda(x-a)^{n\alpha}], \quad (6.3.6)$$

onde  $c_k$ , com  $k = 1, \dots, n$ , são constantes arbitrárias.

Note que se fizermos  $\alpha = 1$  em (6.3.6), a solução coincide com a solução em (6.3.5), no caso em que tomamos  $\alpha = 1$ , isto é,

$$y(x) = \sum_{k=1}^n c_k (x-a)^{k-1} E_{n,k} [\lambda(x-a)^n],$$

onde  $c_k$ , com  $k = 1, \dots, n$ , são constantes arbitrárias.

Seguem alguns exemplos ilustrativos de equações diferenciais fracionárias lineares, conforme definidas em (6.3.2).

1. Em particular, se  $c_k = 1$  para todo  $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $\lambda = 1$ ,  $a = 0$ ,  $\alpha = 1$  e  $\mathcal{D}_{0+}^\alpha := {}_C D_{0+}^\alpha$  na equação (6.3.2), então obtemos a solução

$$y(x) = \sum_{k=1}^n x^{k-1} E_{n,k}(x^n) = e^x, \quad (6.3.7)$$

que é válida para todo  $n$  natural. No Apêndice A.1 discutimos a expressão da equação (6.3.7) e apresentamos o resultado da expressão

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=1}^n x^{k-1} E_{n,k}(x^n) \right] = e^x.$$

2. Considere a equação (6.3.2) no caso particular em que  $n = 3$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\alpha \in \left(\frac{2}{3}, 1\right)$  e  $\mathcal{D}_{a+}^\alpha$  é o operador de Riemann-Liouville com  $a = 0$ , isto é,

$$\left( D_{0+}^{3\alpha} y \right) (x) - y(x) = 0.$$

Por (6.3.5), uma solução para essa equação pode ser escrita da forma

$$y(x) = x^{(3\alpha-1)} E_{3\alpha, 3\alpha}(x^{3\alpha}) + x^{(3\alpha-2)} E_{3\alpha, 3\alpha-1}(x^{3\alpha}) + x^{(3\alpha-3)} E_{3\alpha, 3\alpha-2}(x^{3\alpha}),$$

a seguir, o gráfico para  $y(x)$ , nos casos em que  $\alpha = 0,8$  e  $0,9$ .

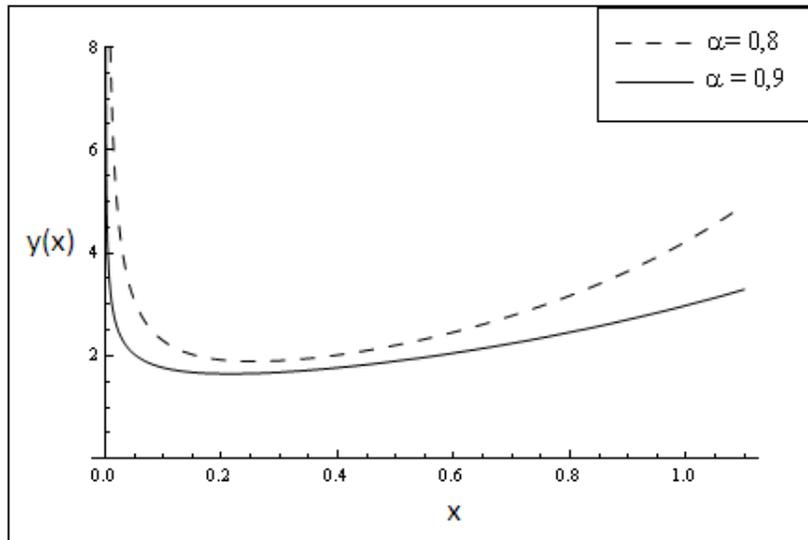


Figura 6.9: Gráfico de  $y(x)$  para  $\alpha = 0,8; 0,9$ .

3. Considere agora a equação (6.3.2) no caso particular em que  $n = 3$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\alpha \in \left(\frac{2}{3}, 1\right)$  e  $\mathcal{D}_{a+}^\alpha$  é o operador de Caputo com  $a = 0$ , isto é,

$$\left( {}_C D_{0+}^{3\alpha} y \right) (x) - y(x) = 0.$$

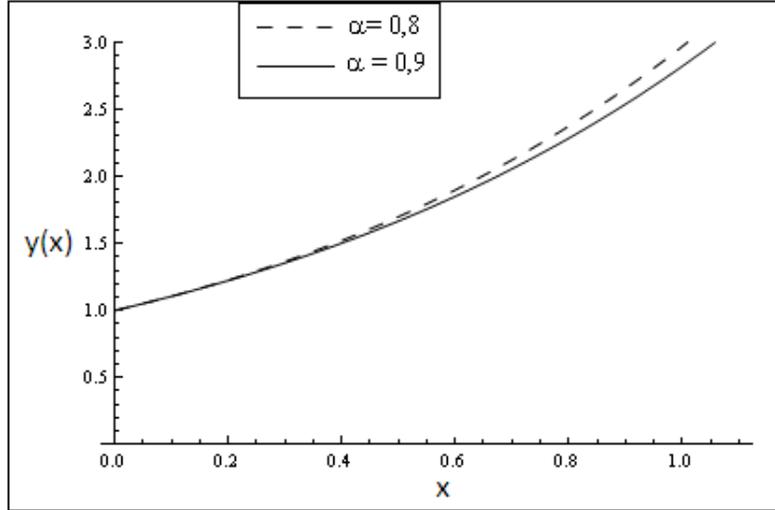


Figura 6.10: Gráfico de  $y(x)$  para  $\alpha = 0,8; 0,9$ .

Por (6.3.6), uma solução para essa equação pode ser escrita da forma

$$y(x) = E_{3\alpha} (x^{3\alpha}) + x E_{3\alpha,2} (x^{3\alpha}) + x^2 E_{3\alpha,3} (x^{3\alpha}).$$

A seguir o gráfico para  $y(x)$ , nos casos em que  $\alpha = 0,8$  e  $0,9$ .

4. Considere o problema de valor inicial associado à equação de onda bidimensional fracionária

$$\begin{aligned} {}_C D_{0+}^{2\alpha} u &= 2\Delta u, \\ u(\bar{x}, 0) &= \text{sen}(x_1)\text{sen}(x_2), \end{aligned}$$

onde  $u \equiv u(\bar{x}, t)$ ,  $\bar{x} = (x_1, x_2)$ , com  $-\infty < x_1, x_2 < \infty$ ,  $t > 0$  e  $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \subset \mathbb{R}$ .

Vamos supor que a solução seja da forma

$$u(\bar{x}, t) = X(\bar{x})T(t). \quad (6.3.8)$$

Substituindo a condição inicial na equação (6.3.8), obtemos

$$X(\bar{x}) = \frac{1}{T(0)} \text{sen}(x_1)\text{sen}(x_2). \quad (6.3.9)$$

Substituindo a equação (6.3.8) na equação de onda fracionária, temos

$$\frac{{}_C D_{0+}^{2\alpha} T(t)}{T(t)} = \frac{2\Delta X(\bar{x})}{X(\bar{x})} = \lambda,$$

onde  $\lambda$  é uma constante real.

Por (6.3.6), a solução da equação

$${}_C D_{0+}^{2\alpha} T(t) = \lambda T(t)$$

é dada por

$$T(t) = E_{2\alpha}(\lambda t^{2\alpha}) + t E_{2\alpha,2}(\lambda t^{2\alpha}). \quad (6.3.10)$$

Fazendo  $t = 0$  na equação (6.3.10), obtemos  $T(0) = 1$ .

Logo, de (6.3.9) podemos escrever

$$X(\bar{x}) = \text{sen}(x_1)\text{sen}(x_2).$$

Substituindo agora  $X(\bar{x})$  na equação

$$2\Delta X(\bar{x}) = \lambda X(\bar{x}),$$

obtemos  $\lambda = -2$ .

Com isso, a solução da equação de onda bidimensional fracionária é da forma

$$u(x_1, x_2, t) = \text{sen}(x_1)\text{sen}(x_2) \left[ E_{2\alpha}(-2t^{2\alpha}) + t E_{2\alpha,2}(-2t^{2\alpha}) \right]. \quad (6.3.11)$$

Quando  $t = 0$ , independente do parâmetro  $\alpha$ , teremos  $u(x_1, x_2, 0) = \text{sen}(x_1)\text{sen}(x_2)$ .

A seguir os gráficos de  $u(x_1, x_2, 0)$  e  $u(x_1, x_2, 0,5)$  (para  $\alpha = 0,6$  e  $\alpha = 0,9$ ).

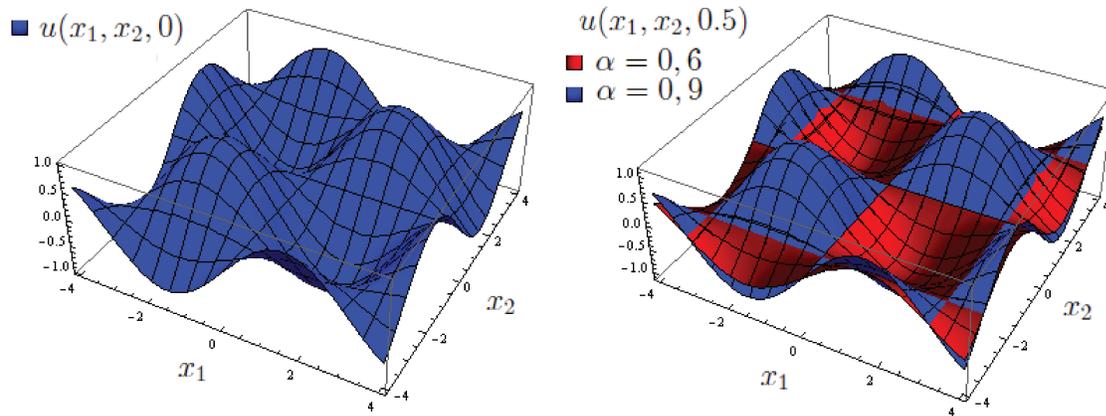


Figura 6.11: Função  $u(x_1, x_2, 0)$  e  $u(x_1, x_2, 0,5)$  (para  $\alpha = 0,6$  e  $\alpha = 0,9$ ).

Por outro lado, para  $\alpha = 0,6; 0,9$ , temos a seguir os gráficos de  $u(x_1, x_2, 2)$  e  $u(x_1, x_2, 100)$ .

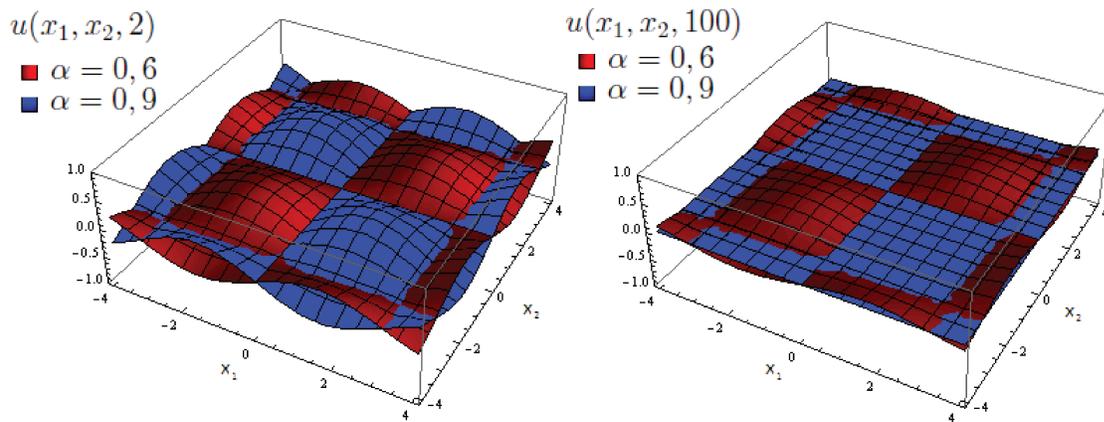


Figura 6.12: Função  $u(x_1, x_2, 2)$  e  $u(x_1, x_2, 100)$ , para  $\alpha = 0,6; 0,9$ .

Na figura acima é possível observar que quando o tempo  $t$  aumenta, a função  $u(x, t)$  tende ao plano  $u = 0$ .

# Conclusões e Considerações Finais

Assim como o cálculo de ordem inteira, o cálculo fracionário também apresenta inúmeras aplicações, como foi abordado no Capítulo 6, onde discutimos algumas particulares equações diferenciais fracionárias. As definições de cada operador de integração e derivação de ordem não inteira, bem como a utilização de cada operador em casos específicos, foram discutidas no Capítulo 4.

Caputo reformulou a derivada fracionária de Riemann-Liouville, como vimos na Seção 4.4, a fim de utilizar condições iniciais em equações diferenciais fracionárias. Além disso, pouco antes da reformulação de Caputo, Kolowankar e Gangal também reformularam a derivada fracionária de Riemann-Liouville a fim de derivar funções em fractais [33].

Para definir determinados conceitos do cálculo fracionário, é necessário discutir algumas funções especiais e ferramentas matemáticas, tais como, as funções gama e beta e as transformadas integrais de Fourier e Laplace. Tais conceitos foram abordados nos Capítulos 1 e 2.

A função de Mittag-Leffler de um parâmetro e suas generalizações desempenham papel fundamental no cálculo de ordem não inteira, assim como a função exponencial desempenha um papel importante no cálculo de ordem inteira, as funções de Mittag-Leffler são importantes para o cálculo fracionário em problemas da física, biologia, engenharia e ciências aplicadas. Tais funções aparecem como solução de uma ampla classe de equações diferenciais fracionárias.

Neste trabalho, mais especificamente, no Capítulo 3, apresentamos as funções de Mittag-Leffler de um, dois e três parâmetros, bem como algumas de suas propriedades. Através de uma forma integral conseguimos relacionar a função de um parâmetro com as funções de dois e três parâmetros e com isso obtivemos alguns gráficos para a função de três parâmetros.

Utilizando a metodologia da transformada de Laplace inversa sem utilizar um contorno de integração, conforme apresentada na Seção 1.5, através de uma conveniente escolha para  $\sigma$ , que é a parte real do número complexo  $s$ , variável da transformada de Laplace de uma função, expressamos algumas integrais impróprias convergentes através de uma nova função. Ainda utilizando essa metodologia, na Seção 3.5 expressamos as funções de Mittag-Leffler como integrais em  $\mathbb{R}^+$ , como no caso da equação (3.5.4), onde dados os parâmetros  $\alpha, \beta, \gamma$  e  $k$ , podemos escrever uma integral imprópria convergente, envolvendo funções trigonométricas, a partir das funções de Mittag-Leffler. Vale ressaltar que não encontramos tais expressões em outras referências, o que nos motiva a publicar futuramente um artigo sobre isso.

Após uma breve introdução sobre o cálculo fracionário, apresentamos as integrais fracionárias nos sentidos de Riemann-Liouville, Liouville, Weyl e Riesz, também discutimos a formulação das derivadas fracionárias, conforme introduzidas por Riemann-Liouville, Caputo, Liouville, Weyl e Riesz. Apresentamos algumas propriedades associadas a esses operadores bem como o TFCF e

aplicações desse teorema. Demonstramos o teorema fundamental do cálculo fracionário e apresentamos exemplos de aplicação [25].

No Capítulo 6, resolvemos uma equação diferencial parcial fracionária associada a desaceleração de nêutrons [7], cuja versão clássica, isto é, equação de ordem inteira, foi proposta e estudada por Sneddon [55], indicando que o movimento da desaceleração de nêutrons em um meio material é semelhante à difusão de calor. Com o uso de transformadas integrais, de Laplace e Fourier, obtivemos uma expressão para a solução dessa equação. Devido a dificuldade em obter valores para a solução em dados pontos, desenvolvemos um método numérico, escrevendo a solução aproximada da equação como um somatório e a partir desta fórmula adaptamos uma implementação em MATLAB. Através dessa implementação, conseguimos obter valores para a solução.

Ainda no Capítulo 6, com o propósito de obter uma expressão explícita para a solução geral de uma equação diferencial fracionária específica, apresentamos dois teoremas sobre as autofunções dos operadores de derivação fracionária de Riemann-Liouville e Caputo, sendo possível através desse teorema, expressar tal solução. Exemplos de aplicação foram apresentados e discutidos.

Os problemas relacionados ao cálculo fracionário apresentados neste trabalho são apenas uma pequena parte do que está sendo feito e do que já foi estudado sobre o assunto. As referências bibliográficas e as referências nelas contidas, ajudam na compreensão do cálculo fracionário, bem como em suas respectivas ramificações.

Como continuação natural deste trabalho, pretendemos pesquisar mais sobre as possíveis aplicações no cálculo da transformada de Laplace inversa sem usar um contorno de integração, conforme apresentado e discutido na Seção 1.5, já que através dessa técnica podemos obter expressões para determinadas integrais impróprias.

Além disso, outro aspecto interessante e que merece mais atenção, é a parte computacional para obtenção de valores para a solução de determinadas equações diferenciais fracionárias, mais especificamente, as equações que descrevem movimentos de difusão anômala, pois, geralmente a solução obtida emerge em termos de integrais impróprias de funções envolvendo as funções de Mittag-Leffler, cuja solução analítica pode ser expressa em termos das funções H de Fox. Não encontramos referências sobre pacotes computacionais para as funções H de Fox, exceto para casos particulares. Pretendemos desenvolver um método computacional para calcular integrais envolvendo as funções de Fox.

# Apêndice A

## Função exponencial em termos das funções de Mittag-Leffler

No Capítulo 6, Seção 6.3, discutimos a solução geral para equações diferenciais fracionárias lineares específicas.

No caso particular em que consideramos a EDFL

$$({}_C D_{0+}^{n\alpha} y)(x) = y(x),$$

com  $x \in [a, b]$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , com  $0 < \alpha \leq 1$  e  $n \in \mathbb{N}^*$ , encontramos para a solução geral, a expressão

$$y(x) = \sum_{k=1}^n x^{k-1} E_{n,k}(x^n),$$

onde utilizamos o Teorema 6.2 para expressar tal solução.

Vamos demonstrar que a soma

$$\sum_{k=1}^n x^{k-1} E_{n,k}(x^n),$$

é igual a função  $y(x) = e^x$ , quando consideramos  $n \in \mathbb{N}^*$  um número natural não nulo qualquer. Para isso, reescrevemos a soma acima da forma

$$y(x) = \sum_{k=1}^n x^{k-1} E_{n,k}(x^n) = E_{n,1}(x^n) + x E_{n,2}(x^n) + x^2 E_{n,3}(x^n) + \cdots + x^{n-1} E_{n,n}(x^n).$$

Escrevendo a série de cada função de Mittag-Leffler, temos

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{nj}}{\Gamma(nj+1)} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{nj+1}}{\Gamma(nj+2)} + \cdots + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{nj+n-1}}{\Gamma(nj+n)}.$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}
y(x) = & \underbrace{\left(1 + \frac{x^n}{\Gamma(n+1)} + \frac{x^{2n}}{\Gamma(2n+1)} + \dots\right)}_{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{nj}}{\Gamma(nj+1)}} + \underbrace{\left(\frac{x}{\Gamma(2)} + \frac{x^{n+1}}{\Gamma(n+2)} + \frac{x^{2n+1}}{\Gamma(2n+2)} + \dots\right)}_{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{nj+1}}{\Gamma(nj+2)}} + \\
& + \dots + \underbrace{\left(\frac{x^{n-1}}{\Gamma(n)} + \frac{x^{2n-1}}{\Gamma(2n)} + \frac{x^{3n-1}}{\Gamma(3n)} + \dots\right)}_{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{nj+n-1}}{\Gamma(nj+n)}}.
\end{aligned}$$

Rearranjando os termos e somando todos, teremos

$$y(x) = 1 + \frac{x}{\Gamma(2)} + \dots + \frac{x^{n-1}}{\Gamma(n)} + \frac{x^n}{\Gamma(n+1)} + \frac{x^{n+1}}{\Gamma(n+2)} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{\Gamma(2n)} + \dots,$$

ou seja,

$$y(x) = e^x,$$

independente do valor de  $n$ . Sendo assim, podemos escrever que

$$\sum_{k=1}^n x^{k-1} E_{n,k}(x^n) = e^x, \quad (\text{A.1})$$

para qualquer natural não nulo  $n$ .

Além disso, se tomarmos o limite quando  $n$  vai para infinito na equação (A.1), a série converge para a função exponencial. Temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=1}^n x^{k-1} E_{n,k}(x^n) \right] = e^x. \quad (\text{A.2})$$

Uma outra maneira de obtermos o mesmo resultado é através da transformada de Laplace inversa.

# Apêndice B

## Implementação da solução da equação associada à desaceleração de nêutrons

Para esboçar gráficos da forma  $u(x, t_0) \times x$  para valores dos parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\nu$  da equação equação diferencial parcial de ordem fracionária, com condições iniciais e de fronteira, associada à desaceleração de nêutrons (6.1.1), utilizamos dois softwares computacionais, MATLAB 7.8.0 (R2009a.) e Wolfram Mathematica (versão 9.0).

Os gráficos foram obtidos utilizando um processo que será apresentado na próxima seção.

### B.1 Caso particular

Apresentamos os passos utilizados na obtenção do particular caso em que  $\alpha = 0,9$ ;  $\beta = 1,9$ ;  $t_0 = \nu = 1$  e  $F(x) = \delta(x)$  na equação (6.1.1), como no problema (6.1.12):

$$\begin{aligned} {}_C D_{0+}^{0,9} u(x, t) &= -\nu (-\Delta)^{\frac{1,9}{2}} u(x, t) + \delta(x)\delta(t) \\ u(x, 0^+) &= \delta(x) \\ u(x, 0^-) &= 0 \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u_t(x, t) &= 0. \end{aligned}$$

Esse caso foi apresentado e discutido no item 2 da Subseção 6.1.2. Considere as figuras a seguir.

 <pre>w = Range[0, 10, .0001]; U = MittagLefflerE[.9, -(w)^(1.9)]; NumberForm[%, 12] U</pre>	 <pre>%Dado U n=100000; wc=10; dw=(wc/n); % Delta w w=[0:dw:wc]'; x=0; % Escrever o valor de x v=cos(w*x); ua=(dw/pi)*(U'*v) %Valor de u(x,t_0) aproximado</pre>
---	--

Figura B.1: Programa para obtenção dos dados da Tabela 3 (Subseção 6.1.2).

### MATLAB 7.8.0 (R2009a)

```
%clear all
n=100000;
wc=10;
dw=(wc/n); % Delta w
w=[0:dw:wc]';

x=[0:.01:6]';
n1=size(x);

for i=1:n1(1,1)
    ua(i)=(dw/pi)*(U'*cos(w*x(i)));
end

ua=ua';

for i=1:n1(1,1)-1
    ua1(n1(1,1)-i)=ua(i+1);
end

for i=1:n1(1,1)-1
    x1(n1(1,1)-i)=-x(i+1);
end

uaf=[ua1';ua];
x1f=[x1';x];

for i=1:length(uaf)
    m(2*i-1)=x1f(i);
    m(2*i)=uaf(i);
end

m=m';
```

### Wolfram Mathematica

```
ListLinePlot[DADOS
, PlotStyle -> RGBColor[0, 0, 0], PlotRange -> {0, .35}]
```

Figura B.2: Programas para obtenção do gráfico.



$\{5.950000000000000, 0.001034241439748\}$ ,  $\{5.960000000000000, 0.001018890498073\}$ ,  
 $\{5.970000000000000, 0.001003573741030\}$ ,  $\{5.980000000000000, 0.000988361780767\}$   
 $\{5.990000000000000, 0.000973324931345\}$ ,  $\{6.000000000000000, 0.000958532494552\}$ .

Para os outros casos que foram apresentados na Subseção 6.1.2 com tabelas e gráficos, a metodologia utilizada para obter os resultados foi a mesma que apresentamos nesse apêndice.

# Referências Bibliográficas

- [1] R. L. Bagley and P. J. Torvik. A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity. *J. Rheology*, **27**:201–210, 1983.
- [2] Mário N. Berberan-Santos. Analytical inversion of the Laplace transform without contour integration: application to luminescence decay laws and other relaxation functions. *J. Math. Chem.*, **38**:165–173, 2005.
- [3] W. L. Briggs and V. E. Henson. *The DFT: an owner's manual for the discrete Fourier transform*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1995.
- [4] R. F. Camargo, E. Capelas de Oliveira, and J. Vaz Jr. On the generalized Mittag-Leffler function and its application in a fractional telegraph equation. *Math. Phys. Anal. Geom.*, **15**:1–16, 2012.
- [5] Rubens Figueiredo Camargo. *Cálculo Fracionário e Aplicações*. Tese de Doutorado, Imecc – Unicamp, Campinas, 2009.
- [6] C. W. Clark. Coulomb phase shift. *Am. J. Phys.*, **47 (8)**:683–684, 1979.
- [7] F. Silva Costa, E. Contharteze Grigoletto, J. Vaz Jr., and E. Capelas de Oliveira. Slowing-down of neutrons: A fractional model. *Communications in Applied and Industrial Mathematics*, Aceito 2014.
- [8] Felix Silva Costa. *Cálculo Fracionário e a Função de Fox*. Tese de Doutorado, Imecc – Unicamp, Campinas, 2011.
- [9] M. Dalir and M. Bashour. Applications of fractional calculus. *Appl. Math. Sci.*, **4 (21)**:1021–1032, 2010.
- [10] E. Capelas de Oliveira and J.A. Tenreiro Machado. A review of Definitions for Fractional Derivatives and Integral. *Math. Probl. Eng.*, Article ID 238459, 2014.
- [11] E. Capelas de Oliveira, F. Mainardi, and J. Vaz Jr. Models based on Mittag-Leffler functions for anomalous relaxation in dielectrics. *Eur. Phys. J. Special Topics*, **193**:161–171, 2011.
- [12] E. Capelas de Oliveira, F. Mainardi, and J. Vaz Jr. Fractional models of anomalous relaxation based on the Kilbas and Saigo function. *Meccanica*, **49**:2049–2060, 2014.

- [13] E. Capelas de Oliveira e W. A. Rodrigues Jr. *Funções Analíticas com Aplicações*. Editora Livraria da Física, São Paulo, 2006.
- [14] E. Contharteze Grigoletto, E. Capelas de Oliveira e F. Silva Costa. Aplicações do teorema fundamental do cálculo fracionário em equações diferenciais fracionárias. *Anais do I CMAC Sudeste*, 59-64, 2013.
- [15] L. Debnath. Recent applications of fractional calculus to science and engineering. *Int. J. Math. Math. Sci.*, **54**:3413–3442, 2003.
- [16] Lokenath Debnath. A brief historical introduction to fractional calculus. *Int. J. Math. Edu., Sci. & Technol.*, **35**:487–501, 2004.
- [17] K. Diethelm. *The Analysis of Fractional Differential Equations*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2010.
- [18] Daniela dos Santos de Oliveira. *Derivada Fracionária e as Funções de Mittag-Leffler*. Dissertação de Mestrado, Unicamp, Campinas, 2014.
- [19] I. T. Pedron e R. S. Mendes. Difusão anômala e equações generalizadas de difusão. *Rev. Bras. Ens. Fis.*, **27 (2)**:251–258, 2005.
- [20] A. Elsaid. The variational iteration method for solving Riesz fractional partial differential equations. *Compt. Math. Appl.*, **60**:1940–1947, 2010.
- [21] N. Engheta. Fractional curl operator in electromagnetics. *Microwave and Optical Technology Letters*, **17**:86–91, 1998.
- [22] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, volume **2**, 3rd ed. Wiley, New York, 1971.
- [23] R. Gorenflo and F. Mainardi. Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order. *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*, pages 223–276, 2008.
- [24] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series, and Products*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2007.
- [25] E. Contharteze Grigoletto and E. Capelas de Oliveira. Fractional versions of the fundamental theorem of calculus. *Appl. Math.*, **4**:23–33, 2013.
- [26] E. Contharteze Grigoletto and E. Capelas de Oliveira. Is a definition always useful to calculate something? *Int. J. Math. Edu. Sci. & Technol.*, **44**:1–4, 2013.
- [27] N. Heymans and I. Podlubny. Physical interpretation of initial conditions for fractional differential equations with Riemann-Liouville fractional derivative. *Rheol. Acta*, **45**:765–772, 2006.
- [28] R. Hilfer. *Applications of Fractional Calculus in Physics*. World Scientific, Singapore, 2000.

- [29] M. E. H. Ismail, L. Lorch, and M. E. Muldon. Completely monotonic functions associated with the gamma function and its q-analogues. *J. Math. Anal. Appl.*, **116**:1–9, 1986.
- [30] H. Jafari and S. Momani. Solving fractional diffusion and wave equations by modified homotopy perturbation method. *Phys. Lett. A*, **370**:388–396, 2007.
- [31] A. A. Kilbas, M. Rivero, L. Rodríguez-Germá, and J. J. Trujillo.  $\alpha$ -analytic solutions of some linear fractional differential equations with variable coefficients. *Appl. Math. Comput.*, **187**:239–249, 2007.
- [32] Anatoly A. Kilbas, Hari M. Srivastava, and Juan J. Trujillo. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier, Amsterdam, 2006.
- [33] K. M. Kolowankar and A. D. Gangal. Fractional differentiability of nowhere differentiable functions and dimensions. *Chaos*, **6**:505–513, 1996.
- [34] K. H. Lundberg, H. R. Miller, and D. L. Trumper. Initial conditions, generalized functions and the Laplace transform. *IEEE, Control Systems Magazine*, **27**:22–35, 2007.
- [35] J. A. Tenreiro Machado, V. Kiryakova, and F. Mainardi. A poster about the old history of fractional calculus. *Fract. Cal. & Appl. Anal.*, **13**:447–454, 2010.
- [36] J. A. Tenreiro Machado, V. Kiryakova, and F. Mainardi. A poster about the recent history of fractional calculus. *Fract. Cal. & Appl. Anal.*, **13**:329–334, 2010.
- [37] J. A. Tenreiro Machado, V. Kiryakova, and F. Mainardi. Recent history of fractional calculus. *Commun. Nonl. Sci. Num. Simul.*, **16**:1140–1153, 2011.
- [38] F. Mainardi. On some properties of the Mittag-Leffler function  $E_\alpha(-t^\alpha)$ , completely monotone for  $t > 0$  with  $0 < \alpha < 1$ . *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B.*, 2014.
- [39] R. Metzler and J. Klafter. The random walk's guide to anomalous diffusion: A fractional dynamics approach. *Phys. Rep.*, **339**:1–77, 2000.
- [40] K. S. Miller and B. Ross. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. John Wiley & Sons, New York, 1993.
- [41] K. S. Miller and S. G. Samko. Completely monotonic functions. *Integr. Transf. and Spec. Funct.*, **12**:389–402, 2001.
- [42] G. M. Mittag-Leffler. Sur la nouvelle fonction  $E_\alpha(x)$ . *C. R. Acad. Sci. Paris*, **137**:554–558, 1903.
- [43] Tyn Myint-U. *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*. Elsevier, New York, 1973.
- [44] Thomas J. Osler. A further extension of the Leibniz rule to fractional derivatives and its relation to Parseval's formula. *Siam J. Math. Anal.*, **3**:1–16, 1972.

- [45] I. Podlubny. *Fractional Differential Equations*. Mathematics in Science and Engineering V198, Academic Press, New York, 1999.
- [46] I. Podlubny. Geometric and physical interpretation of fractional integral and fractional differentiation. *Fract. Cal. & Appl. Anal.*, **5**(4):367–386, 2002.
- [47] H. Pollard. The completely monotonic character of the Mittag-Leffler function  $E_\alpha(-x)$ . *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52**:908–910, 1948.
- [48] T. R. Prabhakar. A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel. *Yokohama Math. J.*, **19**:7–15, 1971.
- [49] R. Rajaramanr. Analytical solutions for the different forms of telegraph equations by homotopy analysis method. *Global J. Sci. Frontier Research*, **12**(5):7–12, 2012.
- [50] S. Z. Rida and A. A. M. Arafa. New method for solving linear fractional differential equations. *Int. J. Diff. Equat.*, Article ID 814132, 8 pages, 2011.
- [51] S. G. Samko. Fractional Weyl-Riesz integrodifferentiation of periodic functions of two variables via the periodization of the Riesz kernel. *Appl. Anal. J.*, **82**(3):269–299, 2003.
- [52] S. G. Samko, A. A. Kilbas, and O. I. Marichev. *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*. Gordon and Breach Science Publishers, Switzerland, 1993.
- [53] R. K. Saxena, A. M. Mathai, and H. J. Haubold. Unified fractional kinetic equation and a fractional diffusion equation. *Astrophys. Space Sci.*, **209**:299–310, 2004.
- [54] W. R. Schneider. Completely monotone generalized Mittag-Leffler functions. *Expo. Math.*, **14**:3–16, 1996.
- [55] I. N. Sneddon. *Fourier Transform*. Dover Publications, Inc., New York, 1995.
- [56] A. Stanislavsky and K. Weron. Numerical scheme for calculating of the fractional two-power relaxation laws in time-domain of measurements. *Comp. Phys. Commun.*, **183**:320–323, 2012.
- [57] Graziane Sales Teodoro. *Sobre as funções de Mittag-Leffler e aplicações*. Dissertação de Mestrado, Unicamp, Campinas, 2014.
- [58] B. Valeur. *Molecular Fluorescence. Principles and Applications*. Wiley-VCH, Weinheim, 2002.
- [59] A. Wiman. Über den fundamentalsatz in der theorie der functionen  $E_\alpha(x)$ . *Acta Math.*, **29**:191–201, 1905.
- [60] M. Zubair, M. J. Mughal, and Q. A. Naqvi. On electromagnetic wave propagation in fractional space. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **12**:2844–2850, 2011.