UNICAMP

Rafael Andretto Castrequini

Uma fórmula de Itô-Ventzel para caminhos Hölder

CAMPINAS
2014

Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

Rafael Andretto Castrequini

Uma fórmula de Itô-Ventzel para caminhos Hölder

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em matemática.

Orientador: Pedro José Catuogno

Este exemplar corresponde à versão final da tese defendida pelo aluno Rafael Andretto Castrequini, e orientada pelo Prof. Dr. Pedro José Catuogno.

Assinatura do(a) Orientador(a)

Campinas
2014

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

C279f Castrequini, Rafael Andretto, 1984-
Uma fórmula de Itô-Ventzel para caminhos Hölder / Rafael Andretto Castrequini. – Campinas, SP : [s.n.], 2014.

Orientador: Pedro José Catuogno.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Teoria de rough path. 2. Equações diferenciais parciais. 3. Análise estocástica. I. Catuogno, Pedro José,1959-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: An Itô-Ventzell type formula for Hölder paths
Palavras-chave em inglês:
Rough path theory
Partial differential equations
Stochastic analysis
Área de concentração: Matemática
Titulação: Doutor em Matemática
Banca examinadora:
Pedro José Catuogno [Orientador]
Christian Horacio Olivera
Luiz Antonio Barrera San Martin
Osvaldo Germano do Rocio
Alberto Masayoshi Faria Ohashi
Data de defesa: 19-09-2014
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Tese de Doutorado defendida em 19 de setembro de 2014 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). PEDRO JOSÉ CATUOGNO

Prof(a). Dr(a). CHRISTIAN HORACIO OLIVERA

Prof(a). Dr(a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN

Prof(a). Dr(a). OSVALDO GERMANO DO ROCIO

Prof(a). Dr(a). ALBERTO MASAYOSHI FARIA OHASHI

Abstract

We prove an Itô-Ventezel type formula for Hölder paths with exponent is greater than 1/3. The most important class of examples of theses paths is given by fractional Brownian motion. Our formula is an extension (and agree) to classic version done by H. Kunita in 80's.

The technical tools used rely on rough path theory following M. Gubinelli's approach. Those techniques were developed in the late 90's. by T. Lyons.

As an application, we study differential equations driven by paths with exponent greater than 1/2 (Young Systems). The ideia here is to employ our formula together with method of characteristics in this setting, following Kunita's work.

Keywords: Rough path theory, Ito-Ventzell formula, Partial differential equation.

Resumo

Provaremos uma fórmula do tipo Itô-Ventzel para caminhos Hölder cujo expoente é maior que 1/3. Os exemplos fundamentais de caminhos onde a fórmula é válida é o movimento Browniano fracionário. Nossa fórmula estende (e coincide) a versão clássica feita por H. Kunita na década de 80.

As ferramentas utilizadas residem no contexto dos rough paths seguindo a abordagem de M. Gubinelli. Tais tecnicas começaram a serem desenvolvidas por T. Lyons no final de 90.

Como aplicação, estudaremos equações diferenciais dirigidas por caminhos cujo expoente é maior que 1/2 (Sistemas de Young). Onde a idéia aqui é empregar nossa fórmula aplicando o método das caracteristicas nesse contexto, seguindo novamente os trabalhos de H. Kunita.

Palavras-chave: Teoria de rough path, Análise estocástica, Equações diferenciais parciais.

Sumário

Agradecimentos

Foram longos cinco anos nessa etapa da minha vida, e agradeço a todos que cruzaram meu caminho, sem os quais não estaria aqui, em especial:

À minha família, em especial a minha mãe Márcia, e ao meu irmão Bruno, pelo suporte e compreensão. Por sempre me dar apoio, carinho, sempre acreditar em mim incondicionalmente.

À minha namorada Erika, por sempre ter paciência.

Ao Prof. orientador e amigo Pedro Catuogno, pelo respeito e compreensão. Pelos bons momentos de discussão. Pelas várias dicas para realização desse trabalho. Por me guiar na vida acadêmica.

Aos membros da banca, pelas sugestões valiosas. Pela amizade, em especial ao Prof. Paulo Ruffino, sempre presente no decorrer de todo esse tempo dentro e fora da universidade.

Aos funcionários da Secretaria de Pós-Graduação do Imecc/Unicamp pelo carinho e empenho em resolver os problemas.

À FAPESp pelos 40 meses de suporte financeiro.

Introdução

O objetivo desse trabalho é estudar uma classe de **equações diferenciais dirigidas**, $\partial_t u_t(x) = F(t, x, u_t(x), \nabla u_t(x))dZ_t$, isto é, a derivada em relação ao tempo não é calculada da forma "$\partial_t = \frac{d}{dt}$" mas sim como "$\partial_t = \frac{d}{dZ_t}$", onde Z é um caminho$Z : [0, T] \to V$. Estes caminhos, para os quais precisaremos a definição destas equações, serão uma de classe especial, os **rough paths**. Para abordamos o problema de "existência e unicidade de solução" adaptaremos uma técnica clássica (pré espaços de Sobolev) conhecida por **método das características**, ver [7].

A filosofia aqui é estudar estas equações diferenciais via equações integrais. Em outras palavras, daremos um sentido preciso à noção de integral e depois usaremos o termo/nomenclatura "Equação Diferencial" como sinônimo de "Equação Integral" (sendo esta ultima definida formalmente). Tal "filosofia" vai de acordo com a abordagem ao estudo das Equações Diferenciais Estocásticas - EDEs - (onde define-se primeiramente as integrais de Itô e Stratonovich afim de, depois, definir as EDEs.

No contexto dos **rough paths**, essa "filosofia" não foi a inicial, e começou com M. Gubinelli em 2004, [22]. Anteriormente, o pai da teoria T. Lyons nos anos 1998-2004, ver [28, 30, 29], e coautores, tinham como o objeto primordial a equação diferencial e a teoria (rigorosamente falando) começava com a definição formal de solução da equação diferencial (sem definir formalmente a integral, $\int (\ldots) \, dZ_t$, nem o diferencial, dZ_t).

Estas diferentes abordagens são equivalentes, e o sentido da solução de uma pode ser recuperado pela outra. Acreditamos ser mais fácil de compreender e versátil a abordagem de Gubinelli. Ttal linha de pensamento também é adotada por M. Hairer e P. Friz no seu mais novo livro [15]. O principal motivo da versatilidade é que a integral com rough path introduzida por M. Gubinelli no supracitado [22] é uma soma/discretização tipo Riemann-Stieltjes (como Cálculo Estocástico e como na veremos integral de Young).

Em contrapartida, na Teoria dos Rough Paths pelas vias das equações como objeto fundamental, o mecanismo é aproximar o caminho $t \mapsto Z(t)$, o qual é não-diferenciável (tipicamente tem regularidade tipo Hölder), por caminhos Z^n (onde cada Z^n é diferenciável) e então estudar os pontos de acumulação de

$$dX^n(t) = f(X^n(t)) \, dZ^n(t)$$

em espaços e normas adequados (Hölder ou p-variação).

Por esse motivo, é possível ver que a teoria dos Rough Paths 1-dimensional, i.e., $Z(t) \in \mathbb{R}^d$ com $d = 1$, é um caso particular da teoria de Doss-Sussmann, [11, 32]. Entretanto, para $d \geq 2$, não tem como fugir dos rough paths (deterministicamente falando), pois, essencialmente as convergências $X^n \to X$ quando $Z^n \to Z$ não acontecem (na norma do supremo). Este fato é devido as diferenças entre a topologia da norma do supremo (adotada por Doss-Sussmann) e a topologia Hölder ou p-variação (adotada nos Rough Paths).

Para ilustrar o método das características e o conceito dos rough paths, vamos dar um exemplo. Isto também servirá como um panorama geral dos capítulos deste trabalho.

Considere a seguinte equação de primeira ordem linear, conhecida como **equação do transporte** (para definições a respeito da equação geral, ver a Introdução no Capítulo 3),

$$\begin{cases} \partial_t u_t\left(x\right) + \nabla u_t\left(x\right) dZ_t = 0 \\ u_0\left(x\right) = \phi\left(x\right) \end{cases} \tag{0.0.1}$$

onde $u = u\left(t,x\right) = u_t\left(x\right)$, com $t \in [0,T]$ e $x \in \mathbb{R}^d$, $\phi \in C^k\left(\mathbb{R}^d\right)$ e $\nabla u_t\left(x\right) = \left(\partial_{x_1} u_t\left(x\right), \ldots, \partial_{x_d} u_t\left(x\right)\right)$. A literatura para esta equação, quando $Z_t = t$, é imensa e permeia várias ramos da matemática e física. Quando $Z_t = B_t$é um movimento Browniano, no contexto das EDEs, citaremos duas linhas principais, seguindo a teoria de equações de evolução em dimensão infinita em [10] ou problemas mais finos, como condições mínimas para que a equação esteja bem-posta em [13].

O **método das características** consiste em expressar a solução u da equação acima através de outras funções que são soluções de **equações diferenciais ordinárias** (o que é um problema bem mais fácil de se tratar). Isto é,

$$u_t\left(x\right) = b_t\left(a_t^{-1}\left(x\right)\right) \tag{0.0.2}$$

onde $a_t = a_t\left(x\right)$ e $b_t = b_t\left(x\right)$ são soluções de equações ordinárias em t com condição inicial que depende de y e x respectivamente. A saber, para a **equação do transporte**,

$$\begin{cases} da_t = dZ_t \\ db_t = 0 \\ a_0 = a_0\left(x\right) = x \\ b_0 = b_0\left(x\right) = \phi\left(x\right) \end{cases}$$

tal sistema é denominca **sistema** (das equações) **características**. Este sistema na forma geral está em 3.1.1. Desta forma, u seria representado por

$$\begin{aligned} u &= \phi\left(a_t^{-1}\left(x\right)\right) \\ &= \phi\left(x - Z_t\right). \end{aligned}$$

Agora precisariamos verificar que a expressão $\phi\left(x - Z_t\right)$ resolve a equação Eq. (0.0.1). Para isto, é necessário uma "regra da cadeia", ver Capítulo 2, que funcione no caso em que Z_t não possua derivada na variável t (no sentido usual). Formalmente, podemos pensar que

$$\begin{aligned} d\phi\left(x - Z_t\right) &= \nabla\phi\left(\centerdot\right)\big|_{\centerdot = x - Z_t}\left(-1\right) dZ_t \\ \frac{d\phi}{dZ_t}\left(x - Z_t\right) &= \nabla\phi\left(\centerdot\right)\big|_{\centerdot = x - Z_t} \end{aligned}$$

e reinterpretar a dZ_t como uma integração, ver **Integral de Young** na Seção 1.1.2 e **Integral de Gubinelli** na Seção 1.1.3,

$$\begin{aligned}\phi\left(x - Z_t\right) - \phi\left(x\right) &= -\int_0^t \nabla\phi\left(x - Z_r\right) dZ_r \\ u_t\left(x\right) - \phi\left(x\right) &= -\int_0^t u_r\left(x\right) dZ_r.\end{aligned}$$

Dessa forma, uma vez que a representação para $u_t\left(x\right)$, Eq.(0.0.2), é válida (ver Teorema 3.1.2), podemos pensar de trás para frente. Isto é, primeiro resolver o **sistema da característica** (que não envolve u) para determinar as funções a_t e b_t para depois formular **teoremas de existência e unicidade** para $u_t\left(x\right)$, ver Teoremas 3.2.4 e 3.2.5.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira. No Capítulo temos uma introdução aos rough paths, e sempre que possível fazemos um paralelo e comparações com o cálculo estocástico. Incluimos a maioria das demonstrações, as que julgamos estar espírito da parte final da tese. Todos os resultados são bem conhecidos e canônicos na teorias dos rough paths. Já no Capítulo 2, temos as fórmulas de Itô-Ventzell, resultados originais. Por fim, no Capítulo 3, aplicamos a primeira fórmula de Itô-Ventzell (caso mais simples) para resolvermos uma equação diferencial parcial de primeira ordem (geral) através do método das características.

Capítulo 1

Rough Paths

É uma teoria que teve como motivação e problemas iniciais atacar sistemas de Equações Diferenciais Dirigidas da forma, para $Y : [0,T] \to W$, $Z : [0,T] \to V$, $f : W \to L(V,W)$ e, V e W sendo espaços de Banach,

$$\begin{cases} dY(t) = f(Y(t))\, dZ(t), & t \in [0,T] \\ Y(0) = y \in W \end{cases}$$

onde o caminho que dirige a equação Z é **não-diferenciável**. Tal restrição não é imposta pelo prazer da generalização, mas sim uma realidade. Pois, uma das classes mais importantes nessa situação, é quando Z é um movimento Browniano e a EDO é entendida no sentido **estocástico** (via integração de Itô ou Stratonovich, para citar as mais importantes).

Assim, pode-se dizer que, a príncipio, o objetivo da teoria dos rough paths é providenciar técnicas capazes de resolvere equações diferenciais estocásticas (e integração) de um ponto de vista puramente analítico e determinístico. Tal tarefa é díficil, pois existe sérias restrições em Z quando tenta-se interpretar $\int f(Y(u))\, dZ(u)$ tipo integração de Riemann-Stieltjes. Por exemplo, é conhecido o seguinte resultado negativo.

Proposição 1.0.1. Seja $Z : [0,T] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Seja $(\mathcal{P}_n)$ uma sequência de partições do intervalo $[0,T]$ tal que $|\mathcal{P}_n| \to 0$ quando $n \to \infty$. Defina os funcionais lineares,$n \in \mathbb{N}$,

$$S_n : C^0([0,T]) \to \mathbb{R}$$

por

$$S_n h := \sum_{t_i \in \mathcal{P}_n} h(t_i)\left(Z(t_{i+1}) - Z(t_i)\right)$$

Suponha que que a sequência $(S_n h)_n$ convirja para todo $h \in C^0$. Então Z tem variação limitada, isto é, Z é uma função Lipschitz a menos de reparametrização.

Demonstração. Ver [31] Teorema 56 p.43. □

A moral aqui é que, pedindo-se o mínimo para o que gostaríamos que um funcional linear fosse uma integral (linear, contínuo e generalizar Riemann-Stieltjes), resulta que o caminho Z é "muito" regular. Isto é, Z é mais regular que as trajetórias típicas de um movimento Browniano B, as quais $B_{\cdot}(\omega) \notin C^{\frac{1}{2}}([0,T])$, para quase todo $\omega \in \Omega$.

Uma outra conclusão que pode-se tirar deste resultado é que o domínio de I está demasiadamente grande. Podemos procurar um funcional linear cujo domínio seja apenas um subconjunto de C^0, por exemplo, as funções α-Hölder contínuas $C^\alpha \subset C^0$. Tal abordagem é factivel, levando a **Integral de Young**, ver Seção (1.1.2) abaixo. Entretando esta integral ainda não possibilita calcular integrais do tipo $\int f(B_u)\, dB_u$ ou $\int B_u dB_u$, para o movimento Browniano B e $f \in C^\infty$.

Para melhorar uma integral tipo Riemann-Stieltjes, isto é,

$$\int_0^T f(Z(s))\, dZ(s) := \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{s_i \in \mathcal{P}} f(Z(s_i))\,(Z(s_{i+1}) - Z(s_i))$$

pode-se introduzir uma nova noção de limite (por exemplo, em probalilidade, quandos os objetos são variáveis aleatórias e processos estocásticos) ou ainda, **corrigir / melhorar o incremento** dentro do somatório.

Para ilustrar, melhorar o incremento na integral de integral de Riemann, por exemplo

$$\int_0^T X(s)\, ds = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{s_i \in \mathcal{P}} X(s_i)(s_{i+1} - s_i) + \frac{1}{2}\dot{X}(s_i)(s_{i+1} - s_i)$$

melhora a velocidade de convergência das somas. Isto ocorre pois o novo incremento é Taylor de 2ª-ordem,

$$X(s) \quad \sim \quad X(s_i)(s_{i+1} - s_i) + \frac{1}{2}\dot{X}(s_i)(s_{i+1} - s_i)$$

enquando na integral de Riemann o incremento é apenas de 1ª ordem

$$X(s) \sim X(s_i)(s_{i+1} - s_i).$$

Formalmente, é esta a idéia dos rough paths, melhorar o incremento da integral, de modo que o novo termo compense o termo de 1ª ordem, denotando $Z_u = Z(u)$ e $\delta Z_{st} = Z_t - Z_s$ e usando Taylor em $f(Z_u) = f(Z_s) + f'(Z_s)\,\delta Z_{su} + R_{su}$, temos

$$\int_s^t f(Z_u)\, dZ_u \quad = \quad f(Z_s)(Z_t - Z_s) + f'(Z_s)\int_s^t Z_u - Z_s dZ_u + \int_s^t R_{su} dZ_u$$

Isto motiva um novo incremento, denotando $\mathbb{Z}_{st} := \int_s^t Z_u - Z_s dZ_u$, gostaríamos de definir

$$\int_0^T f(Z_u)\, dZ_u = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{s_i \in \mathcal{P}} f(Z_{s_i})\,\delta Z_{s_i,s_{i+1}} + f'(Z_s)\,\mathbb{Z}_{s_i,s_{i+1}}.$$

É neste momento que introduzimos formalmente os rough paths. É onde acontece um pulo imenso na teoria, pois tal conceito é invisível para integrais de Riemann, Stieltjes ou Young. Invisível, pois,

$$\left|\sum_{s_i} f'(Z_s)\,\mathbb{Z}_{s_i,s_{i+1}}\right| \leq \|f\|_\infty \left|\sum_{s_i} \mathbb{Z}_{s_i,s_{i+1}}\right| \to 0.$$

Definição 1.0.2. Dado $\alpha \in \left(\frac{1}{3}, 1\right]$, o conjunto dos *Rough Paths (geométrico)* definidos no intervalo $[0, T]$ tomando valores num espaço de Banach V é denotado por $\mathcal{D}^{\alpha}([0, T], V)$ (ou $\mathcal{D}_g^{\alpha}$, respectivamente). Dizemos que $(Z, \mathbb{Z}) \in \mathcal{D}^{\alpha}$ se satisfaz:

1. $Z : [0, T] \to V$ e $\mathbb{Z} : [0, T]^2 \to V \otimes V$ funções contínuas tais que
$$\|Z\|_{\alpha} := \sup_{s,t \in [0,T]} \tfrac{|Z_t - Z_s|}{|t-s|^{\alpha}} < \infty, \quad \|\mathbb{Z}\|_{2\alpha} := \sup_{s,t \in [0,T]} \tfrac{|\mathbb{Z}_{st}|}{|t-s|^{2\alpha}} < \infty;$$

2. Denotando $Z_{st} := Z_t - Z_s$,
$$\mathbb{Z}_{st} - \mathbb{Z}_{su} - \mathbb{Z}_{ut} = Z_{su} \otimes Z_{ut};$$

3. E dizemos que $(Z, \mathbb{Z}) \in \mathcal{D}_g^{\alpha}$ se além dos itens anteriores também verifica
$$\mathcal{S}(\mathbb{Z}_{st}) = \frac{1}{2} Z_{st} \otimes Z_{st},$$
onde $\mathcal{S}(u \otimes v) := \frac{u \otimes v + v \otimes u}{2}$.

Observação 1.0.3. O conjunto $\mathcal{D}^{\alpha}$ ou $\mathcal{D}_g^{\alpha}$ **não** é um espaço vetorial, devido ao Item 2. No livro de Friz, [16], baseado na abordagem de T. Lyons, estuda-se o conjunto $\mathcal{D}_g^{\alpha}$ de um ponto de vista mais geométrico, olhando o par $\boldsymbol{z} = (Z, \mathbb{Z})$ como um caminho $\boldsymbol{z} : [0, T] \to G^2(V)$, onde $G^2(V)$ é um sub-grupo de Lie da algebra tensorial $T(V)$ truncado na segunda ordem (pois $\alpha > \frac{1}{3}$). Assim, rough paths, vira sinônimo de “caminho Hölder tomando valores no grupo de Lie $G^2(V)$”. Recomendamos o mesmo livro para uma introdução a estes grupos e esta visão geometricamente rica, formulada para trabalhar com rough paths de qualquer ordem $\alpha \in (0, 1]$.

Moralmente o termo $\mathbb{Z}$ é a integral iterada de Z. A Condição 1., põe a regularidade do caminho Z e o que se espera que sua integral iterada tenha (acontece isso na integral de Young, por exemplo). A Condição 2., é a propriedade aditiva da integral iterada em intervalos consecutivos. Por exemplo, para integral simples, o equivalente seria $\int_s^t = \int_s^u + \int_u^t$. Já a Condição 3, não é essencial, ela está ligada a resultados de aproximação via regularização do caminho Z. Isto é, se $(Z^n)_n$ é uma sequência de caminhos regulares que converge Z e $\int_s^t (Z_u^n - Z_s^n) \otimes \dot{Z}_u^n du$ converge a um elemento, na norma $\|\cdot\|_{2\alpha}$, esse objeto limite satisfaz a Condição 3.

T. Lyons foi quem formalizou os rough paths. Sua busca pelas corretas condições algébricas que se espera dos objetos $\mathbb{Z}$ foi inspirado nos trabalhos de K. Chen, ver [5, 6]. A idéia em assumir a existência desses objetos (definição acima), está motivada pelo fato em que na prática tem-se informações suficientes sobre o ruído/sinal que dirige o problema. Por exemplo, no caso em que Z é um movimento Browniano (ruído preferido da análise estocástica), tem-se muitas informações sobre tal, tornando-se possível definir o objeto $\mathbb{Z}$ (por exemplo via integração de Itô ou Stratonovich).

Supondo Z um movimento Browniano, o casamento entre os rough paths e a análise estocástica se dá da seguinte maneira. Primeiro, a teoria dos rough paths (integrais, equações diferenciais, dependência contínua e difereniável nos dados iniciais) funciona completamente apenas baseada na existência do objeto $(Z, \mathbb{Z})$, independentemente de qualquer resultado da análise estocástica. Só então, entra a teoria estocástica, fundamental para definir $\mathbb{Z}_{st} := \int_s^t Z_u - Z_s dZ_s$. Assim todas as igualdades da teoria anterior se tornam ω-quase sempre. Em outras palavras, a probabilidade fica escondida até o último momento e só é usada para construir $\mathbb{Z}$.

Observação 1.0.4. Caso $\alpha > \frac{1}{2}$, podemos definir $\mathbb{Z}_{st} := \int_s^t Z_u - Z_s dZ_u$ via integração de Young. Ver abaixo, Seção (1.1.2).

1.1 Integral de Young e Gubinelli

1.1.1 Integração Abstrata de Riemann - Lema Sewing

O próximo lema é fundamental na construção das integrais, ele pode ser visto como uma abstração das *somas de Riemann*. Mais precisamente, dada uma função $(s,t) \in [0,T] \mapsto \theta_{st}$, queremos condições em θ para que as *somas de Riemann*

$$\sum_{[s_i,t_i]\in\mathcal{P}} \theta_{s_i,t_i}$$

convirjam quando $|\mathcal{P}| \to 0$, onde $\{\mathcal{P}\}$ é uma família de partições do intervalo $[0,T]$.

Por exemplo na integral de Riemann $\int_0^T f(u)du$, temos $\theta_{st} = f(s)(t-s)$, ou ainda, na integral de Riemann-Stieltjes $\int_0^T f(u)dg(u)$, temos $\theta_{st} = f(s)(g(t) - g(s))$.

Uma observação fundamental para os casos citados acima, é que a condição de continuidade para f (e de variação limitada para g) que implicam a existência da integral, pode ser interpretada da seguinte maneira: θ é uma boa aproximação para a integral $I_{st} := \int_s^t f(u)du$ (ou, $:= \int_s^t f(u)\,dg(u)$), no seguinte sentido

$$I_{st} = \theta_{st} + o(|t-s|),$$

isto é, a diferença $I_{st} - \theta_{st}$ é da ordem de $|t-s|$, logo tende a zero quando executada a soma de Riemann e em seguida tomado o limite $|\mathcal{P}| \to 0$. Mais precisamente, veja a seguinte proposição.

Proposição 1.1.1. Sejam $I : [0,T] \to \mathbb{R}$ e $\theta : [0,T]^2 \to \mathbb{R}$ tais que verificam

$$I_t - I_s = \theta_{st} + o(|t-s|),$$

então, pondo $I_{st} := I_t - I_s$,

$$I_{st} = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{[s_i,t_i]\in\mathcal{P}} \theta_{s_i,t_i}.$$

Em outras palavras, I_{0T} é a integral tipo Riemman do integrando generalizado θ no intervalo $[0,T]$.

Demonstração. Seja $\mathcal{P} = \{[s_i,t_i]\}$, partição do intervalo $[s,t]$ suficientemente fina. Por um lado, temos

$$\begin{aligned} \sum_i o(|t_i - s_i|) &= \sum_i \frac{o(|t_i - s_i|)}{|t_i - s_i|} |t_i - s_i| \\ &\leq \epsilon \sum_i |t_i - s_i| \\ &= \epsilon\, |T - 0|, \end{aligned}$$

pela definição de $o(|t-s|)$ e pela escolha de $\mathcal{P}$. Ou seja

$$\lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_i o(|t_i - s_i|) = 0.$$

Por outro lado,

$$I_{st} = \sum_i I_{s_i,t_i}.$$

Assim podemos concluir que

$$\begin{aligned}\lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_i \theta_{s_i,t_i} &= \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_i o\left(|t_i - s_i|\right) - I_{s_i,t_i} \\ &= 0 + I_{st}.\end{aligned}$$

□

Usaremos a seguinte notação durante toda a tese, "δ" será nosso simbolo de *incremento*, isto é, para uma função f de uma variável, definimos

$$\delta f_{st} := f_{st} := f_t - f_s$$

e para uma função de duas variáveis θ, definimos

$$\delta\theta_{sut} := \theta_{st} - \theta_{su} - \theta_{ut}.$$

As condições analíticas para garantir a recíproca da proposição acima, são dadas no contexto das normas Hölder para θ. Vamos formalizar, definindo os espaços Hölder para uma e duas variáveis a seguir.

Definição 1.1.2. Para $\alpha \in [0,1]$, denotamos por $C^{\alpha}\left([0,T]\,;V\right)$ e por $\mathcal{C}_2^{\alpha}\left([0,T]\,;V\right)$ o subconjunto das funções contínuas tomando valores ao espaço de Banach V que verificam

$$\begin{aligned}\|f\|_{\alpha} &:= \sup_{s,t\in[0,T]} \frac{|\delta f_{st}|}{|t-s|^{\alpha}} \\ \|\theta\|_{\alpha} &:= \sup_{s,t\in[0,T]} \frac{|\theta_{st}|}{|t-s|^{\alpha}} \\ \|\delta\theta\|_{\alpha} &:= \sup_{s,u,t\in[0,T]} \frac{|\delta\theta_{sut}|}{|t-s|^{\alpha}},\end{aligned}$$

para $f \in C^{\alpha}$ e $\theta \in \mathcal{C}_2^{\alpha}$, e lembrando que $\delta f_{st} = f_{st} = f_t - f_s$.

Também introduzimos o subespaço $\mathcal{C}_2^{\alpha,\mu}\left([0,T]\,;V\right)$ de $\mathcal{C}_2^{\alpha}$, definido pelas funções $\theta \in \mathcal{C}_2^{\alpha}$ tal que $\|\theta\|_{\alpha,\mu} := \|\theta\|_{\alpha} + \|\delta\theta\|_{\mu} < \infty$.

Também intruduzimos uma "multiplicação", para $\theta, \eta \in \mathcal{C}_2(V)$, $\omega \in \mathcal{C}_2\left(L(V,W)\right)$, $X \in C(U)$ e $f \in C\left(L(V,W)\right)$,

$$\begin{aligned}(f\theta)_{st} &:= f_s\theta_{st} \in W \\ (X\theta)_{st} &:= X_s \otimes \theta_{st} \in U \otimes V \\ (\eta\theta)_{sut} &:= \eta_{su} \otimes \theta_{ut} \in V \otimes V \\ (\omega\theta)_{sut} &:= \omega_{su}\theta_{ut} \in W\end{aligned}$$

Observação 1.1.3. É sabido que $\|\cdot\|_\alpha$ é apenas uma seminorma em C^α ou em $\mathcal{C}_2^\alpha$. Entretando, por exemplo, usando a expressão $|f(0)| + \|f\|_\alpha$ faz C^α espaaço de Banach, e analogamente para $\mathcal{C}_2^\alpha$.

O próximo lema é um *corner - stone* na teoria dos rough paths. Basicamente é uma abstração da demonstração original da existência da Integral de Young, [33]. Na teoria dos Rough Paths, aparece sob vários nomes e/ou contextos. Por exemplo, primeiramente apareceu nos trabalhos de T. Lyons, ver [29] p.67, sob o nome de Teorema 4.3 (Almost rough paths), onde Lyons busca garantir a existência de um (único) rough path próximo a um dado quase-rough path (na nossa linguagem, este, é o incremento da integral).

Depois de Lyons aparecerem outros explorando o coração da demonstração, por exemplo, em D. Feyel e A. La Pradelle [12], aparece como "Sewing lemma" numa maneira bem elementar. Ou em M. Gubinelli [22], numa forma funcional baseado no trabalho anterior, onde usou para definir a integral (a qual apresentaremos nesse trabalho). Acrescentamos que acreditamos que a abordagem de M. Gubinelli é mais flexível e adequada que a de Terry Lyons (e equivalente nas mesmas circunstâncias).

Observação 1.1.4. A demonstração abaixo pode ser encontrada em L. Coutin [8].

Lema 1.1.5. Seja $\theta : [0,T]^2 \to V$ tal que, para todo $s,u,t \in [0,T]$,

$$|\delta\theta_{sut}| \le K\,|t-s|^\mu \tag{1.1.1}$$

onde $K > 0$ e $\mu > 1$ são constantes. Então existe função $I : [0,T] \to V$, única a menos de constante aditiva, tal que

$$|I_t - I_s - \theta_{st}| \le \frac{K}{2^{\mu-1}-1}\,|t-s|^\mu. \tag{1.1.2}$$

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $\eta^n : [0,T]^2 \to V$ por

$$\eta^n(s,t) = \sum_{i=0}^{2^n-1} \theta\left(t_i^n(s,t), t_{i+1}^n(s,t)\right),$$

onde $\{t_i^n(s,t)\}$ é a partição diática do sub-intervalo $[s,t]$. Isto é, para cada $i = 0,\dots,2^n$,

$$t_i^n(s,t) := s + \frac{t-s}{2^n} i.$$

Durante a demonstração omitiremos (s,t) em $t_i^n(s,t)$.

Primeiramente provaremos que $(\eta^n)_n$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{C}_2^\mu$. Note que para $(s,t) \in [0,T]$, $n \in \mathbb{N}$ e $i \in \{0,\dots,2^n\}$ temos

$$t_{2i}^{n+1} = t_i^n; \tag{1.1.3}$$

$$t_{2i+1}^{2n} = \frac{t_i^n + t_{i+1}^n}{2} \tag{1.1.4}$$

e então

$$\eta^{n+1}(s,t) - \eta^{n}(s,t) = -\sum_{i=0}^{2^n-1} \delta\theta\left(t_{2i}^{n+1}, t_{2i+1}^{n+1} t_{2i+2}^{n+1}\right).$$

Usando (1.1.1), para $(s,u,t) = \left(t_{2i}^{n+1}, t_{2i+1}^{n+1} t_{2i+2}^{n+1}\right)$, obtemos

$$\left|\eta^{n+1}(s,t) - \eta^{n}(s,t)\right| \le K\,|t-s|^{\mu}\,2^{-n(\mu-1)}.$$

Logo

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\eta^{n+1}(s,t) - \eta^{n}(s,t)\right| \le K\,|t-s|^{\mu}\,\frac{2^{-(\mu-1)}}{1-2^{-(\mu-1)}} = \frac{K\,|t-s|^{\mu}}{2^{\mu-1}-1}. \tag{1.1.5}$$

Portanto $(\eta^n(s,t))_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em V, uniformemente em (s,t). Denotamos $\eta := \eta(s,t) := \lim_n \eta^n = \eta^1 + \sum_{n=1}^{\infty} \eta^{n+1} - \eta^n$. De onde segue

$$\begin{aligned} |\eta(s,t) - \theta(s,t)| &= \left|\eta(s,t) - \eta^1(s,t)\right| \\ &\le \frac{K}{2^{\mu-1}-1}\,|t-s|^{\mu}. \end{aligned}$$

Vamos mostrar que η é o incremento de uma função $I : [0,T] \to V$, isto é, $\eta(s,t) = I_t - I_s$. De conluiremos que I é única função a menos de constante aditiva, uma vez que mostrarmos que η é única. A estratégia para isto será mostrar que $\delta\eta(s,u,t) = 0$. Esta propriedade algébrica garante a existência da função I (ver M. Gubinelli [22] para uma propriedades de δ). A unicidade segue da propriedade analítica (1.1.2).

Temos que η satisfaz $\delta\eta\left(s, \frac{s+t}{2}, u\right) = 0$. Pois das propriedades da partição diádica (1.1.3) e (1.1.4), temos $\eta^{n+1}(s,t) = \eta^n\left(s, \frac{s+t}{2}\right) + \eta^n\left(\frac{s+t}{2}, t\right)$. Tomando o limite, $n \to \infty$, $\eta(s,t) = \eta\left(s, \frac{s+t}{2}\right) + \eta\left(\frac{s+t}{2}, t\right)$, ou seja, $\delta\eta\left(s, \frac{s+t}{2}, t\right) = 0$. Dizemos η é **semi-aditiva**.

Afirmamos que η é a única semi-aditiva que satisfaz

$$|\eta(s,t) - \theta_{st}| \le c\,|t-s|^{\mu}, \tag{1.1.6}$$

para alguma constante c. Seja $\omega : [0,T]^2 \to V$ semi-aditiva. Então $\Gamma := \eta - \omega$ é semi-aditiva e satisfaz, para todo $s,t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned} |\Gamma(s,t)| &\le |\eta(s,t) - \theta_{st}| + |\theta_{st} - \omega(s,t)| \\ &\le (K_\mu + c)\,|t-s|^{\mu} \end{aligned}$$

onde $K_\mu := \frac{K}{2^{\mu-1}-1}$. Pela propriedade semi-aditiva de Γ, segue que

$$\begin{aligned} |\Gamma(s,t)| &\le \left|\Gamma\left(s, \frac{s+t}{2}\right)\right| + \left|\Gamma\left(\frac{s+t}{2}, t\right)\right| \\ &\le (K_\mu + c)\left(\left|t - \frac{s+t}{2}\right|^{\mu} + \left|\frac{s+t}{2} - s\right|^{\mu}\right) \\ &= (K_\mu + c)\,2^{-\mu}\,|t-s|^{\mu}. \end{aligned}$$

Por indução em n, concluimos que

$$|\Gamma(s,t)| \leq (K_\mu + c)\, 2^{-n\mu} |t-s|^\mu ,$$

para todo $s,t \in [0,T]$, e então $\Gamma = 0$. Concluindo a unicidade de η dentre as semi-aditivas.

Agora, defina

$$\omega^k(s,t) := \sum_{i=0}^{k-1} \eta\left(s + \frac{t-s}{k} i, s + \frac{t-s}{k}(i+1)\right), \forall s,t \in [0,T].$$

Seja $u := \frac{s+t}{2}$, o ponto médio entre s e t, então para $i = 0, \ldots, k$

$$\begin{aligned} s + \frac{t-s}{k} i &= s + \frac{u-s}{k} 2i, \ \forall i \leq \frac{k}{2} \\ s + \frac{t-s}{k} i &= u + \frac{t-s}{k}(2i-k), \ \forall i \geq \frac{k}{2} \end{aligned}$$

portanto o ponto médio do intervalo $\left[s + \frac{t-s}{k} i, s + \frac{t-s}{k}(i+1)\right]$ é

$$\begin{aligned} s + \frac{u-s}{k}(2i+1), \ \forall i &\leq \frac{k-1}{2} \\ u + \frac{t-u}{k}(2i+1-k), \ \forall i &\geq \frac{k-1}{2} \end{aligned}$$

Com estas considerações e pela semi-aditividade de η podemos mostrar que ω^k é semi-aditiva. De fato, por simplicidade vamos ilustrar essa afirmação para k par,

$$\begin{aligned} \omega^k(s,u) &= \sum_{i=0}^{k-1} \eta\left(s + \frac{u-s}{k} i, s + \frac{u-s}{k}(i+1)\right) \\ &= \sum_{i=0,2,\ldots,k-2} \eta\left(s + \frac{u-s}{k} i, s + \frac{u-s}{k}(i+1)\right) + \\ &\qquad + \eta\left(s + \frac{u-s}{k}(i+1), s + \frac{u-s}{k}(i+2)\right) \\ &= \sum_{j=0}^{\frac{k}{2}-1} \eta\left(s + \frac{u-s}{k} 2j, s + \frac{u-s}{k}(2j+1)\right) + \\ &\qquad + \eta\left(s + \frac{u-s}{k}(2j+1), s + \frac{u-s}{k}(2j+2)\right) \\ &= \sum_{j=0}^{\frac{k}{2}-1} \eta\left(s + \frac{t-s}{k} j, s + \frac{u-s}{k}(2j+1)\right) + \\ &\qquad + \eta\left(s + \frac{u-s}{k}(2j+1), s + \frac{t-s}{k}(j+1)\right) \\ &= \sum_{j=0}^{\frac{k}{2}-1} \eta\left(s + \frac{t-s}{k} j, s + \frac{t-s}{k}(j+1)\right) \end{aligned}$$

anolagamente mostra-se que

$$\begin{aligned}
\omega^k(u,t) &= \sum_{i=0,2,\dots,k-2} \eta\left(u+\frac{t-u}{k}i, u+\frac{t-u}{k}(i+1)\right)+ \\
&\quad +\eta\left(u+\frac{t-u}{k}(i+1), u+\frac{t-u}{k}(i+2)\right) \\
&= \sum_{j=0}^{\frac{k}{2}-1} \eta\left(u+\frac{t-u}{k}2j, u+\frac{t-u}{k}(2j+1)\right)+ \\
&\qquad\qquad +\eta\left(u+\frac{t-u}{k}(2j+1), u+\frac{t-u}{k}(2j+2)\right) \\
&= \sum_{l=\frac{k}{2}}^{k-1} \eta\left(u+\frac{t-u}{k}(2l-k), u+\frac{t-u}{k}(2l-k+1)\right)+ \\
&\qquad\qquad +\eta\left(u+\frac{t-u}{k}(2l-k+1), u+\frac{t-u}{k}(2l-k+2)\right) \\
&= \sum_{l=\frac{k}{2}}^{k-1} \eta\left(u+\frac{t-u}{k}(2l-k), u+\frac{t-u}{k}(2l-k+1)\right)+ \\
&\qquad\qquad +\eta\left(u+\frac{t-u}{k}(2l-k+1), u+\frac{t-u}{k}(2l-k+2)\right) \\
&= \sum_{l=\frac{k}{2}}^{k-1} \eta\left(s+\frac{t-s}{k}l, u+\frac{t-u}{k}(2l-k+1)\right)+ \\
&\qquad\qquad +\eta\left(u+\frac{t-u}{k}(2l-k+1), s+\frac{t-s}{k}(l+1)\right) \\
&= \sum_{l=\frac{k}{2}}^{k-1} \eta\left(s+\frac{t-s}{k}l, s+\frac{t-s}{k}(l+1)\right),
\end{aligned}$$

portanto $\omega^k(s,u)+\omega^k(u,t)=\omega^k(s,t)$.

Note que $\omega^1=\eta$. Por indução, assuma que $\omega^{k-1}=\eta$, para $k\geq 2$. Vamos provar que $\omega^k=\eta$. Para isto, basta mostrar que ω^k satisfaz (1.1.6). Assim, pela definição de ω^k e pela hipótese de indução,

$$\begin{aligned}
\omega^k(s,t) &= \omega^{k-1}\left(s, s+\frac{t-s}{k}(k-1)\right)+\eta\left(s+\frac{t-s}{k}(k-1), t\right) \\
&= \eta\left(s, s+\frac{t-s}{k}(k-1)\right)+\eta\left(s+\frac{t-s}{k}(k-1), t\right),
\end{aligned}$$

para todo $s,t\in[0,T]$. Então,

$$\begin{aligned}\left|\omega^{k}(s,t)-\theta_{st}\right| &= \left|\eta\left(s,s+\frac{t-s}{k}(k-1)\right)+\eta\left(s+\frac{t-s}{k}(k-1),t\right)-\theta_{st}\right|\\ &\leq \left|\eta\left(s,s+\frac{t-s}{k}(k-1)\right)-\theta\left(s,s+\frac{t-s}{k}(k-1)\right)\right|+\\ &\quad+\left|\eta\left(s+\frac{t-s}{k}(k-1),t\right)-\theta\left(s+\frac{t-s}{k}(k-1),t\right)\right|+\\ &\quad+\left|-\delta\theta\left(s,s+\frac{t-s}{k}(k-1),t\right)\right|\\ &\leq \left(K_{\mu}\left(\frac{1}{k^{\mu}}+\frac{(k-1)^{\mu}}{k^{\mu}}\right)+K\right)|t-s|^{\mu}\\ &\leq \left(K_{\mu}\left(\frac{1}{k^{\mu}}+\frac{k^{\mu}-1}{k^{\mu}}\right)+K\right)|t-s|^{\mu}\\ &\leq (K_{\mu}+K)\,|t-s|^{\mu}.\end{aligned}$$

Portanto, como η é a única semi-aditiva que verifica (1.1.6), resulta que $\omega^{k}=\eta$.

Note que para todo (s,t), $k\in\mathbb{N}$ e $i=0,\ldots,k-1$,

$$\omega^{k}(s,t)=\omega^{i}\left(s,s+\frac{t-s}{k}i\right)+\omega^{k-i}\left(s+\frac{t-s}{k}i,t\right)$$

então para todo $(s,t)\in[0,T]$ e em todo $u\in\left\{s+\frac{t-s}{k}i:\forall k\in\mathbb{N},\forall i=0,\ldots,k-1\right\}\subset[s,t]$,

$$\eta(s,t)=\eta(s,u)+\eta(u,t).$$

Da continuidade de η e por densidade, concluimos que $\delta\eta(s,u,t)=0$, para todo $s,u,t\in[0,T]$.

Finalizando, definimos $I_t:=\eta(0,t)$. Então I verifica (1.1.2)

$$\begin{aligned}|I_t-I_s-\theta_{st}| &= |\eta(s,t)-\theta_{st}|\\ &\leq \frac{K}{2^{\mu-1}-1}|t-s|^{\mu}.\end{aligned}$$

Provaremos a unicidade de I. Seja $\bar{I}$ tal que verifica (1.1.2), então

$$\begin{aligned}\left|\delta\left(I-\bar{I}\right)_{st}\right| &\leq |\delta I_{st}-\theta_{st}|+\left|\theta_{st}-\delta\bar{I}_{st}\right|\\ &\leq 2K_{\mu}|t-s|^{\mu},\end{aligned}$$

ou seja, $F:=I-\bar{I}$ é uma função Hölder contínua com expoente $\mu>1$. Portanto $F=cte$, e então $I=\bar{I}+cte$. □

O próximo resultado pode ser encontrado em M. Gubinelli e S. Tindel, [23] Corolário 2.5, é equivalente a versão do Lema Sewing Proposição 2.3 no mesmo artigo. Outra demonstração bem elementar pode ser vista no livro de M. Hairer e P. Friz [15], entretanto é essencialmente a mesma demonstração do lema anterior.

Teorema 1.1.6 (Integração Abstrata)**.** Sejam $0 < \alpha \leq 1 < \mu$. Então existe uma única aplicação $\mathcal{I} : \mathcal{C}_2^{\alpha,\mu}\left([0,T]\,; V\right) \to \mathcal{C}^{\alpha}([0,T]\,;\mathrm{V})$ linear, contínua, $\left(\mathcal{I}\theta\right)_0 = 0$ e que verifica

$$
\begin{aligned}
\left|\left(\mathcal{I}\theta\right)_t - \left(\mathcal{I}\theta\right)_s - \theta_{st}\right| &\leq \frac{2}{2^{\mu}-2}\left\|\delta\theta\right\|_{\mu}\left|t-s\right|^{\mu}. &(1.1.7)\\
\left\|\mathcal{I}\subseteq\right\|_{\alpha} &\leq \frac{2T^{\mu-\alpha}}{2^{\mu}-2}\left\|\theta\right\|_{\alpha,\mu} &(1.1.8)
\end{aligned}
$$

O funcional $\mathcal{I}$, denominamos de “Integral abstrata”, verifica

$$
\left(\mathcal{I}\theta\right)_{0T} = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0}\sum_{s_i\in\mathcal{P}}\theta\left(s_i, s_{i+1}\right)
$$

para $\{\mathcal{P}\}$ família de partições de $[0,T]$.

Demonstração. Dado $\theta \in \mathcal{C}_2^{\alpha,\mu}\left([0,T]\,;V\right)$, por definição $\left|\delta\theta_{sut}\right| \leq \left\|\delta\theta\right\|_{\mu}\left|t-s\right|^{\mu}$. Então, pelo lema anterior, existe $I : [0,T] \to V$ a única função que verifica

$$
\left|I_t - I_s - \theta_{st}\right| \leq \frac{1}{2^{\mu-1}-1}\left\|\delta\theta\right\|_{\mu}\left|t-s\right|^{\mu}.
$$

Defina $\left(\mathcal{I}\subseteq\right)_t := I_t - I_0$. Então $\mathcal{I}\theta$ é a única função que verifica $\left(\mathcal{I}\subseteq\right)_0 = 0$ (1.1.7). Note que $\mathcal{I}\theta \in C^{\alpha}$, pois

$$
\begin{aligned}
\left|\mathcal{I}\theta_t - \mathcal{I}\theta_s\right| &\leq \left|\left(\mathcal{I}\theta\right)_t - \left(\mathcal{I}\theta\right)_s - \theta_{st}\right| + \left|\theta_{st}\right|\\
&\leq \frac{2}{2^{\mu}-2}\left\|\delta\theta\right\|_{\mu}\left|t-s\right|^{\mu} + \left\|\theta\right\|_{\alpha}\left|t-s\right|^{\alpha}\\
&\leq \left(\frac{2}{2^{\mu}-2}\left\|\delta\theta\right\|_{\mu}T^{\mu-\alpha} + \left\|\theta\right\|\right)\left|t-s\right|^{\alpha}.
\end{aligned}
$$

Portanto $\left\|\mathcal{I}\subseteq\right\|_{\alpha} \leq \frac{2T^{\mu-\alpha}}{2^{\mu}-2}\left\|\theta\right\|_{\alpha,\mu}$. Resta provar que $\mathcal{I}$ é linear, pois esta desigualdade garante que $\mathcal{I}$ será linear.

Sejam $\theta, \eta \in \mathcal{C}_2^{\alpha,\mu}$ e $a \in \mathbb{R}$, e então defina $F_t := \left(\mathcal{I}\theta\right)_t + a\left(\mathcal{I}\eta\right)_t - \left(\mathcal{I}\left(\theta + a\eta\right)\right)_t$. É fácil ver que F é μ-Hölder contínua. Como $\mu > 1$ resulta que $F_t = F_0 = 0$. Portanto segue que $\mathcal{I}$ é linear. A unicidade como operador linear que verifica (1.1.7), segue usando o mesmo truque. $\square$

1.1.2 Integral de Young

A integral de Young foi introduzida em 1936, [33]. Nesta seção encontra-se a definição (e existência) da **Integral de Young**, bem como fórmula de mudança de variável e integração por partes. Resultados simples que utilizaremos na parte final da tese.

A desigualdade 1.1.10,conhecida pelo nome de Young-Loeve, é fundamental. Essencialmente, toda parte analítca dos rough paths se baseia nela. Pode-se interpretá-la da seguinte maneira, o termo $f\left(s\right)\left(g\left(t\right) - g\left(s\right)\right)$ é um bom incremento para construir a integral, pois ele aproxima-a com ordem $o\left(\left|t-s\right|^{\mu}\right) = o\left(\left|t-s\right|\right)$, $\mu > 1$.

Observação 1.1.7. Note que a integral, definida abaixo, implica que para calcular $\int_0^T f(t)\,df(t)$ é necessário que $\alpha > \frac{1}{2}$. Logo não é suficientemente boa para definir $\mathbb{Z}$ via integral iterada de Z, quando Z é um movimento Browniano. Pois, neste caso, $Z(\omega) \notin C^{1/2}$, ω-quase sempre.

Teorema 1.1.8. Sejam $f \in C^{\alpha}([0,T]; L(V,W))$ e $g \in C^{\beta}([0,T]; V)$ funções Hölder contínuas, com a condição $\alpha + \beta > 1$. Então o seguinte limite existe, denominado de **Integral de Young**,

$$\int_0^T f(t)\,dg(t) := \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{t_i \in \mathcal{P}} f(t_i)\left(g(t_{i+1}) - g(t_i)\right) \tag{1.1.9}$$

e verifica a desigualdade, para todo $s, t \in [0,T]$

$$\left|\int_s^t f_u dg_u - f_s(g_t - g_s)\right| \leq c_{T,\alpha+\beta} \|f\|_{\alpha,[0,T]} \|g\|_{\beta,[0,T]} |t-s|^{\alpha+\beta}, \tag{1.1.10}$$

denotando, $g_u := g(u)$, e analogamente para a função f. A desigualde acima é denominada na literatura por Young-Loeve.

Demonstração. Começamos definindo o incremento da integral, $\theta_{st} := f_s(g_t - g_s) = f_s \delta g_{st}$. Deste modo temos que $\theta \in \mathcal{C}_2^{\beta,\alpha+\beta}$, uma vez que

$$|\theta_{st}| \leq \|f\|_{\infty} \|g\|_{\beta} |t-s|^{\beta},$$

e

$$\begin{aligned} |\delta\theta_{sut}| &= |-\delta f_{su} \delta g_{ut}| \\ &\leq \|f\|_{\alpha} \|g\|_{\beta} |u-s|^{\alpha} |u-t|^{\beta} \\ &\leq \|f\|_{\alpha} \|g\|_{\beta} |t-s|^{\alpha+\beta}. \end{aligned} \tag{1.1.11}$$

Com isso concluimos que, θ está no domínio do operador $\mathcal{I}$, definido no Lema 1.1.6. Deste modo vamos definir

$$\int_s^t f(u)\,dg(u) := (\mathcal{I}\theta)_{st},$$

logo, segue que a integral acima verifica Eq. (1.1.10), por (1.1.6) e (1.1.7).

Notamos que a definição da integral é equivalente a forma clássica em [33], pois vale a igualdade

$$\int_0^T f(u)\,dg(u) := (\mathcal{I}\theta)_{0T} = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{u_i \in \mathcal{P}} f(u_i)\left(g(u_{i+1}) - g(u_i)\right).$$

□

Corolário 1.1.9. O valor da integral permanece o mesmo se trocarmos na Eq.1.1.9 $f(t_i)$ por $f(t_i^*)$, onde $t_i^* \in [t_i, t_{i+1}]$. Mais precisamente,

$$\int_0^T f(t)\,dg(t) = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{t_i \in \mathcal{P}} f(t_i^*)\left(g(t_{i+1}) - g(t_i)\right)$$

Demonstração. Denotando $\delta g_i = g(t_{i+1}) - g(t_i)$ e $Q_i = (f(t_i^*) - f(t_i))\delta g_i$ temos

$$\begin{aligned} f(t_i^*)\,\delta g_i &= (f(t_i^*) - f(t_i))\,\delta g_i + f(t_i)\,\delta g_i \\ &= Q_i + f(t_i)\,\delta g_i \end{aligned}$$

de onde segue que

$$\lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{t_i\in\mathcal{P}} f(t_i^*)\,(g(t_{i+1}) - g(t_i)) = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{t_i\in\mathcal{P}} Q_i + \int_0^T f(u)\,dg(u)\,.$$

Observer que

$$\begin{aligned} \sum |Q_i| &\leq \sum |f(t_i^*) - f(t_i)|\,|\delta g_i| \\ &\leq \|f\|_\alpha \|g\|_\beta \sum |t_i^* - t_i|^\alpha |t_{i+1} - t_i|^\beta \\ &\leq \|f\|_\alpha \|g\|_\beta \sum |t_{i+1} - t_i|^{\alpha+\beta} \\ &\leq \|f\|_\alpha \|g\|_\beta |\mathcal{P}|^{\alpha+\beta-1} \sum |t_{i+1} - t_i| \\ &= \|f\|_\alpha \|g\|_\beta |\mathcal{P}|^{\alpha+\beta-1}\, T, \end{aligned}$$

logo $\lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{t_i\in\mathcal{P}} Q_i = 0$. E o resultado segue. $\square$

Proposição 1.1.10 (Mudança de Variável para integral de Young)**.** Sejam $Z \in C^\alpha([0,T];V)$, $X \in C^\beta([0,T];L(V,W))$ e $Y \in C^\gamma([0,T];L(W,U))$, onde U, V e W são espaços de Banach. Suponha que $\alpha + \beta\gamma > 1$. Defina $\tilde{Z}_t := z + \int_0^t X_u dZ_u \in W$, então vale a seguinte igualdade

$$\int_0^T Y_u d\tilde{Z}_u = \int_0^T Y_u X_u dZ_u \tag{1.1.12}$$

Demonstração. Note que ambas as integrais na Eq.(1.1.12) existem no sentido de Young. Pois, por um lado, a condição $\alpha + \beta\gamma > 1$ implica que $\alpha + \beta > 1$ (garantindo a existência da primeira integral) e por outro, $\|XY\|_{\beta\gamma} \leq T^{\min\{\beta,\gamma\}} \|XY\|_{\min\{\beta,\gamma\}} < \infty$ (garantindo a existência da segunda).

Seja $\mathcal{P} = \{s_i\}$ uma partição de $[0,T]$ e defina, o sucessor de s_i, por $t_i := s_{i+1}$. Então

$$\sum_{s_i\in\mathcal{P}} Y_{s_i}\delta\tilde{Z}_{s_i,t_i} - \sum_{s_i\in\mathcal{P}} Y_{s_i}X_{s_i}\delta Z_{s_i,t_i} = \sum_{s_i\in\mathcal{P}} Y_{s_i} \int_{s_i}^{t_i} (X_u - X_{s_i})\,dZ_u.$$

Tomando a norma (do espaço U) em ambos os lados e aplicando a desigualdade de Young-Loeve (1.1.10), segue que

$$\begin{aligned} \left|\sum_{s_i\in\mathcal{P}} Y_{s_i}\delta\tilde{Z}_{s_i,t_i} - \sum_{s_i\in\mathcal{P}} Y_{s_i}X_{s_i}\delta Z_{s_i,t_i}\right| &\leq \sum_{s_i\in\mathcal{P}} |Y_{s_i}| \left|\int_{s_i}^{t_i} (X_u - X_{s_i})\,dZ_u\right| \\ &\leq \|Y\|_\infty \sum_{s_i\in\mathcal{P}} c_{T,\alpha,\beta} \|X\|_\alpha \|Z\|_\beta |t-s|^{\alpha+\beta} \\ &\leq \|Y\|_\infty c_{T,\alpha,\beta} \|X\|_\alpha \|Z\|_\beta |\mathcal{P}|^{\alpha+\beta-1} \sum_{s_i\in\mathcal{P}} |t_i - s_i| \\ &= \|Y\|_\infty c_{T,\alpha,\beta} \|X\|_\alpha \|Z\|_\beta |\mathcal{P}|^{\alpha+\beta-1}\, T, \end{aligned}$$

onde $|\mathcal{P}| := \max_{s_i \in \mathcal{P}} \{|t_i - s_i|\}$. Agora basta tomar o limite $|\mathcal{P}| \to 0$ para concluirmos a demonstração.

Outra demonstração, usando o operador $\mathcal{I}$ que define a integral, pode ser feita. Para isto, defina os "incrementos" $\tilde{\theta}_{st} := Y_s \delta \tilde{Z}_{st}$ para a primeira integral, e $\theta_{st} := Y_s X_s \delta Z_{st}$ para a segunda integral, ambos incrementos no domínio de $\mathcal{I}$, $\mathcal{C}_2^{\alpha,\alpha+\beta\gamma}$. Pois é óbvio que $\left\|\tilde{\theta}\right\|_\alpha, \|\theta\|_\alpha < \infty$ e como $\delta\tilde{\theta}_{sut} = -\delta Y_{su} \delta \tilde{Z}_{ut}$ e $\delta\tilde{\theta}_{sut} = -\delta (YX)_{su} \delta Z_{ut}$ segue que $\left\|\delta\tilde{\theta}\right\|_{\alpha+\beta\gamma}, \|\delta\theta\|_{\alpha+\beta\gamma} < \infty$, ou seja $\tilde{\theta}, \theta \in \mathcal{C}_2^{\alpha,\alpha+\beta\gamma}$. Reescrevendo $\tilde{Z}_t - \tilde{Z}_s = X_s \delta Z_{st} + \int_s^t X_u - X_s dZ_u = X_s \delta Z_{st} + R_{st}$ e observando que $\delta R = \delta X \delta Z$, ou seja $R \in \mathcal{C}_2^{\alpha,\alpha+\beta}$, temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^T Y_u d\tilde{Z}_u &= \mathcal{I}\left(\tilde{\theta}\right)_{0T} \\
&= \mathcal{I}\left(Y\delta\tilde{Z}\right)_{0T} \\
&= \mathcal{I}\left(YX\delta Z + YR\right)_{0T} \\
&= \mathcal{I}\left(YX\delta Z\right)_{0T} + \mathcal{I}\left(YR\right)_{0T} \\
&= \int_0^T Y_u X_u dZ_u + 0,
\end{aligned}$$

pois $|\mathcal{I}(YR)| = \left|\lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{s_i} Y_{s_i} R_{s_i s_{i+1}}\right| \leq \|Y\|_\infty \|R\|_{\alpha+\beta} \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{s_i} |s_{i+1} - s_i|^{\alpha+\beta} = 0.$ □

Proposição 1.1.11 (Integração por partes)**.** Seja H um espaço de Hilbert. Sejam $X, Y \in C^\alpha([0,T]; H)$ com $\alpha > \frac{1}{2}$. Então

$$\langle X_t, Y_t \rangle = \langle X_0, Y_0 \rangle + \int_0^t \langle X_s, dY_s \rangle + \int_0^t \langle Y_s, dZ_s \rangle$$

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned}
\delta\left(\langle X, Y \rangle\right)_{st} &= \langle X_t, Y_t \rangle - \langle X_s, Y_s \rangle \\
&= \langle X_s, \delta Y_{st} \rangle + \langle Y_t, \delta X_{st} \rangle
\end{aligned}$$

agora aplicando $\mathcal{I}(\centerdot)_{0t}$ em ambos os lados da igualdade acima temos, do lado esquerdo

$$\mathcal{I}\left(\delta \langle X, Y \rangle\right)_{0t} = \langle X_t, Y_t \rangle - \langle X_0, Y_0 \rangle$$

e do lado esquerdo

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}\left(\langle X, \delta Y \rangle + \langle \delta X, Y \rangle\right)_{0t} &= \mathcal{I}\left(\langle X, \delta Y \rangle\right)_{0t} + \mathcal{I}\left(\langle \delta X, Y \rangle\right)_{0t} \\
&= \int_0^t \langle X_s, dY_s \rangle + \int_0^t \langle Y_s, dX_s \rangle
\end{aligned}$$

onde usamos a definição da integral para a primeira parcela e, na segunda, usamos o Corolário 1.1.9 com $f(t_i^*) = Y_{t_{i+1}}$. □

1.1.3 Integral de Gubinelli - Rough Paths

Nesta seção apresentaremos duas versões da Integral de Gubinelli, ambas introduzidas em [22]. Como já mencionado, apenas faremos o tratamento $\alpha > \frac{1}{3}$.

A seguinte definição, caminhos controlados, é invenção de M. Gubinelli, ver em [15]. É o espaço adequado para ser usado como “integrandos”. Tem propriedades do tipo, toda integral (no sentido do Teorema 1.1.14) está no espaço dos caminhos controlado pelo “integrador”, no caso o rough path $(Z, \mathbb{Z})$. Ou ainda, é espaço adequado para procurar soluções de equações diferenciais dirigidas por rough paths via métodos de ponto fixo.

A idéia é construir uma classe de caminhos que “parecem” com Z.

Definição 1.1.12 (Caminhos Controlados)**.** . Seja $Z \in C^{\alpha}([0,T];V)$, $\alpha \in (0,1]$. O conjunto dos *Caminhos Controlados* por Z definidos no intervalo $[0,T]$ tomando valores no espaço de Banach W, é denotado por $\mathcal{C}_Z^{\alpha}([0,T], W)$. Definimos que $(X, X') \in \mathcal{C}_Z^{\alpha}$ se satisfaz:

1. $X : [0,T] \to W$ e $X' : [0,T] \to L(V,W)$ são funções α-Hölder contínuas;

2. $R^X : [0,T]^2 \to V$, definido por

$$X_t - X_s = X'_s (Z_t - Z_s) + R^X_{st}$$

   satisfaz $\left\| R^X \right\|_{2\alpha} := \sup_{s,t \in [0,T]} \frac{|R_{st}|}{|t-s|^{2\alpha}} < \infty$.

3. O espaço $\mathcal{C}_Z^{\alpha}$ se torna normado e completo se munido da seguinte seminorma

$$\|(X, X')\|_{\alpha} := \|X\|_{\alpha} + \|X'\|_{\alpha} + \left\| R^X \right\|_{2\alpha}$$

   .

Em outras palavras $\mathcal{C}_Z^{\alpha}(W)$ é o subespaço vetorial de $C^{\alpha}(W) \oplus C^{\alpha}(L(V,W)) \oplus \mathcal{C}_2^{2\alpha}(V)$, ver Definição 1.1.2, formado pelos elementos da forma $(X, X', \delta X - X'\delta Z)$.

O caminho X' é denominado de **derivada de Gubinelli**. Pois pode ser pensado como

$$\text{“ } X'_s = \lim_{t \to s} \frac{X_t - X_s}{Z_t - Z_s} \text{ ”}$$

Voltamos a dizer que os caminhos “se parecem” com Z no seguinte sentido. Podemos pensar que a expressão $X_t - X_s = X'_s (Z_t - Z_s) + R^X_{st}$ é uma expanão em Taylor de 1ª ordem, como o “resto”, R^X é de ordem superior, 2α, então podemos dizer que localmente o caminho X se parece com Z.

Vale ressaltar que embora usa-se a notação de derivada, X' não pode ser determinado unicamente a partir de X. Em algumas situações isso é possivel, ver Capitulo 6. (Doob-Meyer type decomposition for rough paths) em Friz-Hairer [15]. Ainda sobre unicidade, X (e R^X) pode ser determinado unicamente a partir de X apenas quando $\alpha > \frac{1}{2}$.

Apesar da falta de natureza intrínseca ao caminho inicial X, em alguma situações tem-se naturalmente o candidato para X'. Por exemplo, quando $X_t := f(Z_t)$, para f suave, podemos definir $X'_t := Df(Z_t)$, de modo que $(f(Z_\cdot), Df(Z_\cdot)) \in \mathcal{C}^\alpha_Z$.

No contexto do cálculo estocástico, também é possível determinar naturalemente o caminho derivada. Por exemplo, Z é um movimento Browniano, os "bons integrandos" são processos X adaptados a filtração de Z (por exemplo martingales). Então, em algum contexto, pode-se usar teoremas tipo "representação martingale" para expressar $X_t = X_0 + \int_0^t X'_u dZ_u$, ou seja, X se parece com Z e verificam $X_t - X_s = X'_s(Z_t - Z_s) + R^X_{st}$.

Observação 1.1.13. O próximo teorema define a Integral de Gubinelli, introduzida em [22]. Recomendamos Friz-Hairer [15]. Apesar na integral depender do caminho derivada, ainda assim esta integral generaliza a integral de Young no caso $\alpha > \frac{1}{2}$. Pois apesar de não ser possível determinar a derivada de Gubinelli X' mesmo quando $\alpha > \frac{1}{2}$, o valor da integral de Gubinelli não muda para diferentes derivadas (para $\alpha > \frac{1}{2}$!). Isto ocorre pois o termo $X'_{u_i}\mathbb{Z}_{u_i,u_{i+1}}$ dentro do somatório, ver (1.1.13) abaixo, só serve para acelarar a taxa de convergencia e não produz valor final. Mais precisamente, para $\alpha > \frac{1}{2}$, $\sum_{s_i} X'_{u_i}\mathbb{Z}_{u_i,u_{i+1}} \to 0$, portanto, independentemente da escolha de X', o valor da integral de Gubinelli é o mesmo valor da integral de Young.

Teorema 1.1.14. Seja $\alpha \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$. Seja $\boldsymbol{Z} = (Z, \mathbb{Z}) \in \mathcal{D}^\alpha([0,T]; V)$, um rough path, e seja $(X, X') \in \mathcal{C}^\alpha_Z([0,T]; L(V,W))$, um caminho controlado por Z. Então o seguinte limite existe, denominado de **Integral de Gubinelli**,

$$\int_0^T X_u d\boldsymbol{Z}_u := \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{u_i \in \mathcal{P}} X_{u_i}\left(Z_{u_{i+1}} - Z_{u_i}\right) + X'_{u_i}\mathbb{Z}_{u_i u_{i+1}}. \tag{1.1.13}$$

Esta integral verifica

$$\left|\int_s^t X_u d\boldsymbol{Z}_u - X_s \delta Z_{st} - X'_s \mathbb{Z}_{st}\right| \le c_\alpha \left(\left\|R^X\right\|_{2\alpha} \|Z\|_\alpha + \|X'\|_\alpha \|\mathbb{Z}\|_{2\alpha}\right) |t-s|^{3\alpha} \tag{1.1.14}$$

para todo $s, t \in [0,T]$. onde $c_\alpha = \frac{2}{2^{3\alpha}-2}$. Ainda mais, o operador linear

$$I : \mathcal{C}^\alpha_Z(L(V,W)) \to \mathcal{C}^\alpha_Z(W)$$

definido por

$$(X, X') \mapsto I(X, X') := \left(\int_0^\cdot X_u d\boldsymbol{Z}_u, X_u\right)$$

é contínuo.

Demonstração. Começamos definindo o incremento generalizado da integral, $\theta_{st} := X_s\delta Z_{st} + X'_s\mathbb{Z}_{st}$. Precisamos estimar $\|\theta\|_\alpha$ e $\|\delta\theta\|_{3\alpha}$ para podermos aplicar o operador $\mathcal{I}$ do Teorema 1.1.6. Temos,

$$|\theta_{st}| \le \|X\|_\infty \|Z\|_\alpha |t-s|^\alpha + \|X'\|_\infty \|\mathbb{Z}\|_{2\alpha} |t-s|^{2\alpha}$$

logo

$$\|\theta\|_\alpha \le \|X\|_\infty \|Z\|_\alpha + T^\alpha \|X'\|_\infty \|\mathbb{Z}\|_{2\alpha}. \tag{1.1.15}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
|\delta\theta_{sut}| &= |-\delta X_{su}\delta Z_{ut} - \delta X'_{su}\mathbb{Z}_{st} + X'_s(\delta\mathbb{Z})_{sut}| \\
&= |-\delta X_{su}\delta Z_{ut} - \delta X'_{su}\mathbb{Z}_{st} + X'_s\delta Z_{su}\delta Z_{ut}| \\
&= |-[\delta X_{su} - X'_s\delta Z_{su}]\,\delta Z_{ut} - \delta X'_{su}\mathbb{Z}_{st}| \\
&= \left|-R^X_{su}\delta Z_{su} - \delta X'_{su}\mathbb{Z}_{ut}\right| \\
&\leq \left(\left\|R^X\right\|_{2\alpha}\|Z\|_\alpha + \|X'\|_\alpha\|\mathbb{Z}\|_{2\alpha}\right)|t-s|^{2\alpha+\alpha},
\end{aligned}$$

logo,

$$\|\delta\theta\|_{3\alpha} \leq \left\|R^X\right\|_{2\alpha}\|Z\|_\alpha + \|X'\|_\alpha\|\mathbb{Z}\|_{2\alpha}. \tag{1.1.16}$$

Pelas desigualdades acima (1.1.15) e (1.1.16) concluimos que $\|\theta\|_{\alpha,3\alpha} < \infty$ e então podemos aplicar o Teorema 1.1.6, definindo a Integral de Gubinelli como

$$\begin{aligned}
\int_s^t X_u d\boldsymbol{Z}_u &:= (\mathcal{I}\theta)_{st} \\
&= \lim_{|\mathcal{P}|\to 0}\sum_{t_i\in\mathcal{P}\cap[s,t]} X_{t_i}\left(Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i}\right) + X'_{t_i}\mathbb{Z}_{t_i t_{i+1}}.
\end{aligned}$$

Pelo mesmo teorema, segue a desigualdade

$$\left|\int_s^t X_u d\boldsymbol{Z}_u - X_s(Z_t - Z_s) - X'_s\mathbb{Z}_{st}\right| \leq c_\alpha\left(\left\|R^X\right\|_{2\alpha}\|Z\|_\alpha + \|X'\|_\alpha\|\mathbb{Z}\|_{2\alpha}\right)|t-s|^{3\alpha}.$$

Agora resta mostrar as propriedades do operador I. Podemos escrevê-lo como $I(X,X') = (\mathcal{I}\theta, X)$. Assim, por (1.1.8)

$$\|\mathcal{I}\theta\|_\alpha \leq c_\alpha T^{\mu-\alpha}\|\theta\|_{\alpha,3\alpha} \tag{1.1.17}$$

Denotando $R^I = -\delta\mathcal{I}\theta + X'\delta Z$, por (1.1.14)

$$\begin{aligned}
\left|R^I_{st}\right| &= |-\delta(\mathcal{I}\theta)_{st} + X_s\delta Z_{st}| \\
&\leq |-\delta(\mathcal{I}\theta)_{st} + X_s\delta Z_{st} + X'\mathbb{Z}_{st}| + |X'\mathbb{Z}_{st}| \\
&\leq c_\alpha\|\delta\theta\|_{3\alpha}|t-s|^{3\alpha} + \|X'\|_\infty\|\mathbb{Z}\|_{2\alpha}|t-s|^{2\alpha}
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\left\|R^I\right\|_{2\alpha} \leq c_\alpha T^\alpha\|\delta\theta\|_{3\alpha} + \|X'\|_\infty\|\mathbb{Z}\|_{2\alpha}. \tag{1.1.18}$$

Juntando as desigualdades (1.1.15), (1.1.16), (1.1.17) e (1.1.18) podemos concluir que $\|I(X,X')\|_\alpha \leq c\,\|(X,X')\|_\alpha$, para alguma constante c dependendo de $\|X\|_\infty$, $\|X'\|_\infty$, $\|Z\|_\alpha$, $\|\mathbb{Z}\|_{2\alpha}$, T e α. □

Observação 1.1.15. No contexto do cálculo estocástico, isto é, quando Z é um movimento Browniano, tem-se que a Integral de Gubinelli coincide com a integração estocástica. Mais precisamente, ver a seguinte proposição.

Proposição 1.1.16. Seja $Z = B$ um movimento Browniano em $\mathbb{R}^d$. Defina $\mathbb{B}^I_{st} = \int_s^t (B_u - B_s) \otimes dB_u \in \mathbb{R}^{d\times d}$ via integral de Itô, e defina $\mathbb{B}^S_{st} = \int_s^t (B_u - B_s) \otimes \circ dB_u \in \mathbb{R}^d$ via integral de Stratonovich. Fixe $\alpha \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$. Então, ω-quase sempre, $\boldsymbol{B}^I := \left(B(\omega), \mathbb{B}^I(\omega)\right) \in \mathcal{D}^\alpha\left(\mathbb{R}^d\right)$ e $\boldsymbol{B}^S := \left(B(\omega), \mathbb{B}^S(\omega)\right) \in \mathcal{D}^\alpha_g\left(\mathbb{R}^d\right)$, ver Definição 1.0.2. Sejam Y e Y' processos adaptados a filtração de B, tais que $(Y_\cdot(\omega), Y'_\cdot(\omega)) \in \mathcal{C}^\alpha_{B(\omega)}$, ω-quase sempre. Então, valem as seguintes igualdades quase sempre (omitindo ω)

$$\begin{aligned}\int_0^T Y_u d\boldsymbol{B}^I_u &= \int_0^T Y_u dB_u \\ \int_0^T Y_u d\boldsymbol{B}^S_u &= \int_0^T Y_u \circ dB_u\end{aligned}$$

Ainda mais, temos uma fórmula de correção tipo Itô-Stratonovich

$$\int_0^T Y_u d\boldsymbol{B}^S_u = \int_0^T Y_u d\boldsymbol{B}^I_u + \frac{1}{2}\int_0^T Y'_u dI_u,$$

onde $I_u = I$, matriz identidade em $\mathbb{R}^d$, para todo $u \in [0, T]$.

Demonstração. Ver Seções 5.1 e 5.2 em [15] pp.67-70. □

Nas aplicações dessa integral será necessário uma versão um pouco mais geral, onde o integrando e o integrador são caminhos controlados pelo mesmo rough path de referência $(Z, \mathbb{Z})$. Este conteúdo é formulado no teorema seguinte.

Fazendo analogia ao mundo estocástico, podemos pensar que a próxima integral é a versão da integração semi-martingale Vs. semi-martingale, com ambos adaptados a mesma filtração de referência.

Teorema 1.1.17. Seja $\alpha \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$. Dado um rough path $(Z, \mathbb{Z}) \in \mathcal{D}^\alpha([0,T]; V)$, sejam $(Y, Y') \in \mathcal{C}^\alpha_Z([0,T]; W)$ e $(X, X') \in \mathcal{C}^\alpha_Z([0,T]; L(W,U))$. A seguinte ingral existe

$$\int_0^T X_u dY_u := \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{t_i \in \mathcal{P}} X_{t_i}\left(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}\right) + X'_{t_i} Y'_{t_i} \mathbb{Z}_{t_i t_{i+1}}$$

e verifica

$$\begin{aligned}\left|\int_s^t X_u dZ_u - X_s \delta Y_{st} - X'_s Y'_s \mathbb{Z}_{st}\right| \quad &\leq \quad c_{\alpha,T}\left(\left\|R^X\right\|_{2\alpha} \|Y\|_\infty \|Z\|_\alpha + \right. \\ &\quad + \|X\|_\alpha \|R^\alpha\|_{2\alpha} + \|X'Y'\|_\alpha \|\mathbb{Z}\|_{2\alpha}) |t-s|^{3\alpha}\end{aligned}$$

Analogamente ao Teorema 1.1.14, a aplicação do espaço procuto $\mathcal{C}^\alpha_Z(L(W,U)) \times \mathcal{C}^\alpha_Z(W)$ ao espaço $\mathcal{C}^\alpha_Z(U)$ definida por

$$((X, X'), (Y, Y')) \mapsto \left(\int_0^\cdot X_u dY_u, XY'\right)$$

é linear e contínua.

Demonstração. Aqui o candidato pro incremento, obviamente, é $\theta_{st} := X_s \delta Y_{st} + X'_s Y'_s \mathbb{Z}_{st}$. É imediato ver que $\|\theta\|_\alpha \leq \|X\|_\infty \|Y\|_\alpha + T^\alpha \|X'\|_\infty \|Y'\|_\infty \|\mathbb{Z}\|_{2\alpha}$. Calculemos, $\delta\theta_{sut}$,

$$\begin{aligned}
\delta\theta &= -\delta X \delta Y + X'Y'\delta\mathbb{Z} - \delta\left(X'Y'\right)\mathbb{Z} \\
&= -\delta X \delta Y + X'Y'\delta Z \delta Z - \delta\left(X'Y'\right)\mathbb{Z} \\
&= -\delta X \left(Y'\delta Z + R^Y\right) + X'Y'\delta Z \delta Z - \delta\left(X'Y'\right)\mathbb{Z} \\
&= \left(-\delta X + X'\delta Z\right) Y'\delta Z - \delta X R^Y - \delta\left(X'Y'\right)\mathbb{Z} \\
&= R^X Y'\delta Z - \delta X R^Y - \delta\left(X'Y'\right)\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Logo

$$\|\delta\theta\|_{3\alpha} \leq \left\|R^X\right\|_{2\alpha} \|Y\|_\infty \|Z\|_\alpha + \|X\|_\alpha \|R^\alpha\|_{2\alpha} + \|X'Y'\|_\alpha \|\mathbb{Z}\|_{2\alpha}.$$

Desse modo provamos que $\theta \in \mathcal{C}_2^{\alpha,3\alpha}$ e então podemos aplicar o operador $\mathcal{I}$ do Teorema 1.1.6 para definir

$$\begin{aligned}
\int_0^T X_u dY_u &:= (\mathcal{I}\theta)_{0T} \\
&= \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{t_i \in \mathcal{P}} X_{t_i}\left(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}\right) + X'_{t_i} Y'_{t_i} \mathbb{Z}_{t_i t_{i+1}}.
\end{aligned}$$

O restante é análogo ao teorema anterior. □

1.2 Resultados sobre equações diferenciais

Esta seção é apenas um resultado sobre existência, unicidade e dependência contínua para equações dirigidas por caminhos tipo Hölder. Isto é, existência e unicidade de um caminho $X : [0,T] \to W$ para Equações Diferenciais Ordinárias da forma

$$\begin{cases} dX_t = f\left(t, X_t\right) dZ_t, & t \in [0,T] \\ X_0 = x \in W \end{cases}$$

onde, $Z : [0,T] \to V$ é um caminho, que dirige a equação, com regularidade tipicamente Hölder, e $f : [0,T] \times W \to L(V,W)$ é tipicamente de classe C^k na variável $x \in W$ e Hölder na variável $t \in [0,T]$.

A literatura nesse assunto é vasta, recomendamos o livro de P. Friz [16] para referencias classicas, estocasticas e roughs. Normalmente a literatura dos rough paths trata do caso autonomo, isto é, $f(t,x) = f(x)$. Apesar do livro estar escrito seguindo a linha de T. Lyons, onde o objeto primário são as equações e não as integrais, os resultados são equivalentes. Mais precisamente, quando o livro diz que a EDO acima tem solução, pode-se entender que a Integral no sentido de Gubinelli existe e verifica-se $X_t = x + \int_0^t f\left(s, X_s\right) dZ_s$.

Teorema 1.2.1. Sejam $Z \in C^{\alpha}([0,T];V)$, $f:[0,T]\times U \to L(V,W)$. Suponha que $f_t(\centerdot) \in C^{1+k,\gamma}$, isto é, possui $k+1$ derivadas e a derivada de ordem $k+1$ é γ-Hölder para todo $t \in [0,T]$, e que $f_{\centerdot}(x) \in C^{\beta}$. Suponha que $\alpha + \alpha\gamma > 1$ e que $\beta + \gamma\alpha > 1$. Então a equação

$$X_t = x + \int_0^t f(u, X_u) Z_u$$

possui única solução em $C^{\alpha}\left(\left[0,\bar{T}\right];W\right)$, a qual denotaremos por $X_t(x)$. Ainda mais a aplicação

$$x \in W \to X_t(x)$$

é de classe C^k. Se f e suas derivadas são limitadas então $\bar{T} = T$.

Demonstração. Ver [27, 21]. □

Capítulo 2

Fórmula tipo de Itô-Ventzell

As fórmulas apresentadas neste capítulo seguem de perto os trabalhos de H. Kunita [26], onde elas são formuladas no contexto do cálculo estocástico para semimartingales. Essencialmente elas são representações integrais (no sentido de Young ou Gubineli) da composição $f(t, X_t)$. A importância será evidente no próximo capítulo, onde empregamos a fórmula do Teorema 2.1.2, para calcular compostas de um fluxo de uma equação diferencial por outro fluxo. Como o mecanismo é descobrir qual equação diferencial a composta $f(t, X_t)$ satisfaz, é de suma importância uma representação integral.

Para outras generalizações e apanhado de referências, ainda no cálculo estocástico, para processos não-semimartingales recomendamos [9, 14].

Todos os resultados apresentados neste capítulo são contribuições originais.

2.1 Caso $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$

Neste caso, as integrais envolvidas estão no contexto das integrais de Young. A teoria dos rough paths não é necessária aqui. O Teorema 2.1.2, a seguir, é inspirado no Teorema 1.2 de [26] pp 121-122. Estruturalmente obtemos a mesma fórmula (claro que a difereça é que no trabalho de Kunita, a integração é no sentido de Stratonovich enquanto aqui é no sentido de Young).

Lema 2.1.1. Seja $X \in C^\alpha([0,T];U)$ e seja $\psi : (t,x) \in [0,T] \times U \mapsto \psi_t(x) \in B$ Hölder em t, diferenciável em x tal que $\|\psi\|_{\alpha,\infty} := \sup_{x\in U} \|\psi_\cdot(x)\|_\alpha$. Então

$$t \in [0,T] \mapsto \psi_t(X_t) \in B$$

é α-Hölder e verifica

$$\|\psi_\cdot(X_\cdot)\|_\alpha \leq \|\psi\|_{\alpha,\infty} + \|D_x\psi\|_{\infty,X} \|X\|_\alpha$$

onde

$$\|D_x\psi\|_{\infty,X} := \sup_{\substack{s,t \in [0,T] \\ \tau \in [0,1]}} |D_x\psi_t(X_s + \tau(X_t - X_s)|_{op}$$

e $|\cdot|_{op}$ é a norma de operador.

Demonstração. Usando Taylor na variável x para a função $\psi(s,\cdot)$ e desigualdade triangular, temos que para algum $\tau \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} |\psi_t(X_t) - \psi_s(X_s)| &\leq |\psi_t(X_t) - \psi_s(X_t)| + |\psi_s(X_t) - \psi_s(X_s)| \\ &\leq \|\psi\|_{\alpha,\infty} |t-s|^\alpha + |D\psi_s(X_s + \tau(X_t - X_s))(X_t - X_s)| \\ &\leq \|\psi\|_{\alpha,\infty} |t-s|^\alpha + \|\psi\|_{\infty,X} \|X\|_\alpha |t-s|^\alpha, \end{aligned}$$

de onde segue o resultado. □

Teorema 2.1.2 (Fórmula tipo Itô-Ventzell)**.** Sejam $Z \in C^\alpha([0,T];V)$, $X \in C^\alpha([0,T],U)$ funções α-Hölder com $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ e seja $g : [0,T] \times U \to A$. Suponha que $g_t(x)$ é dado pela seguinte integral no sentido de Young,

$$g_t(x) = g_0(x) + \int_0^t h_u(x)\mathrm{d}Z_u \tag{2.1.1}$$

com $h : [0,T] \times U \to L(V,A)$ verificando as mesmas condições que ψ no Lema 2.1.1. Então a composição $t \mapsto g_t(X_t)$ verifica a expressão

$$g_t(X_t) = g_0(X_0) + \int_0^t h_u(X_u)\mathrm{d}Z_u + \int_0^t \mathrm{D}_x g_u(X_u)\mathrm{d}X_u. \tag{2.1.2}$$

Demonstração. Fixe uma família de partições $\{\mathcal{P}\}$ do intervalo $[0,t]$ tal que $|\mathcal{P}| \to 0$. Começamos com o lado esquerdo de Eq.(2.1.2), para uma partição $\mathcal{P}$ fixa, temos

$$\begin{aligned} g_t(X_t) - g_0(X_0) &= \sum_{[s,u]\in\mathcal{P}} g_u(X_u) - g_s(X_s) \\ &= \sum_{[s,u]\in\mathcal{P}} g_u(X_s) - g_s(X_s) \\ &\quad + \sum_{[s,u]\in\mathcal{P}} g_u(X_u) - g_u(X_s). \end{aligned}$$

Mostraremos que a primeira somatória converge a $\int_0^t h_u(X_u)\mathrm{d}Z_u$ e a segunda converge a $\int_0^t \mathrm{D}_x g_u($ $X_u)\mathrm{d}X_u$, concluindo a igualdade em Eq.(2.1.2).

Pela Eq.(2.1.1) para $x = X_s$, temos

$$g_u(X_s) - g_s(X_s) = \int_s^u h_u(X_s)\mathrm{d}Z_u - h_s(X_s)(Z_u - Z_s) + h_s(X_s)(Z_u - Z_s)$$

notamos que pela desigualdade fundamental da Integral de Young, temos

$$\begin{aligned} \sum_{[s,u]\in\mathcal{P}} \left| \int_s^u h_u(X_s)\mathrm{d}Z_u - h_s(X_s)(Z_u - Z_s) \right| &\leq \textstyle\sum_{[s,u]\in\mathcal{P}} \quad \|h_\cdot(X_s)\|_\alpha \|Z\|_\alpha |u-s|^{2\alpha} \\ &\leq \textstyle\sum_{[s,u]\in\mathcal{P}} \quad \|h\|_{\alpha,\infty} \|Z\|_\alpha |u-s|^{2\alpha} \end{aligned}$$

como $\sum_{[s,u]\in\mathcal{P}} |u-s|^{2\alpha} = \sum_{[s,u]\in\mathcal{P}} o(|u-s|) \to 0$ quando $|\mathcal{P}| \to 0$, resulta que

$$\begin{aligned} \lim_{\mathcal{P}\to 0} \sum_{[s,u]\in\mathcal{P}} g_u(X_s) - g_s(X_s) &= 0 + \lim_{\mathcal{P}\to 0} \sum_{[s,u]\in\mathcal{P}} h_s(X_s)(Z_u - Z_s) \\ &= \int_0^t h_u(X_u)\,dZ_u \end{aligned}$$

pois $u \mapsto h_u(X_u)$ é α-Hölder pelo Lema 2.1.1, a integral anterior existe e, por definição, é a integral de Young.

Agora, para a segunda integral, usando expansão de Taylor na função $g_u(x)$ na variável x em torno do ponto $x = X_s$ e calculando em $x = X_u$, resulta que,

$$g_u(X_u) = g_u(X_s) + D_x g_u(X_s)(X_u - X_s) + \frac{1}{2} D_x^2 g_u(X_{s,u,\tau})(X_u - X_s)^{\otimes 2}, \tag{2.1.3}$$

onde $X_{s,u,\tau} = X_s + \tau(X_u - X_s)$ para algum $\tau \in [0,1]$. Notemos que o último termo é da ordem de $o\left(|u-s|^{2\alpha}\right) = o(|u-s|)$, então tende a zero quando toma-se o limite $|\mathcal{P}| \to 0$. Agora, observe que, escrevendo $\delta X_{su} := X_u - X_s$,

$$\begin{aligned} D_x g_u(X_s)\delta X_{su} &= D_x g_u(X_s)\delta X_{su} \pm D_x g_s(X_s)\delta X_{su} \\ &= D_x g_s(X_s)\delta X_{su} + D_x\left[g_u(x) - g_s(x)\right]\big|_{x=X_s}\delta X_{su} \\ &= D_x g_s(X_s)\delta X_{su} + o(|u-s|), \end{aligned}$$

pois $\left|\left[D_x g_u(x) - D_x g_s(x)\right]\big|_{x=X_s}\delta X_{su}\right| \leq \|D_x g\|_{\alpha,\infty}\|X\|_\alpha |u-s|^{2\alpha}$.

Voltando na Eq.2.1.3, e usando que alguns termos são de ordem $o(|u-s|)$, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{\mathcal{P}\to 0}\sum_{[s,u]\in\mathcal{P}} g_u(X_s) - g_s(X_s) &= \lim_{\mathcal{P}\to 0}\sum_{[s,u]\in\mathcal{P}} D_x g_s(X_s)\delta X_{su} + o(|u-s|) \\ &= \lim_{\mathcal{P}\to 0}\sum_{[s,u]\in\mathcal{P}} D_x g_s(X_s)\delta X_{su} + 0 \\ &= \int_0^t D_x g_u(X_u)\, dX_u, \end{aligned}$$

pela definição de Young, já que $u \to D_x g_u(X_u)$ e X são α-Hölder. Concluimos assim a demonstração. □

2.2 Caso $\frac{1}{3} < \alpha \leq \frac{1}{2}$

A fórmula apresentada nesta seção, Teorema 2.2.3 também é nossa contribuição a teoria. Estruturalmente é diferente da fórmula original apresentada em Teorema 1.2 de H. Kunita, [26]. Entretanto no caso particular em que $(Z,\mathbb{Z}) = \left(B,\mathbb{B}^S\right)$, ver Proposição 1.1.16, nós recuperamos a fórmula original de Kunita.

O próximo lema é original, embora seja comum na literatura a composição via $\phi(t,x) = \phi(x)$, onde ϕ não depende do tempo, ou é "muito" regular em t. Por exemplo, ver Lema 7.3 e Exercício 7.8 em [15].

Lema 2.2.1. Lema da Composição: Sejam $Z = (Z,\mathbb{Z}) \in \mathcal{D}^{\oslash}$ um rough, e $(t,x) \in [0,T]\times V \mapsto$

$\phi_t(x)$ uma aplicação tal que

$$\begin{aligned}
\forall x \in V, \quad \left(\phi_{\cdot}(x), \phi'_{\cdot}(x)\right) &\in \mathcal{C}_Z^\alpha \\
\forall t \in [0,T], \quad \phi_t(\cdot) &\in C^2(V) \\
\forall t \in [0,T], \quad \phi_t(\cdot) &\in C^1(V) \\
\|D_x\phi\|_{\alpha,\infty} := \sup_{x\in V} \|D_x\phi_{\cdot}(x)\|_\alpha &< \infty \\
\|\phi'\|_{\alpha,\infty}, \|\phi\|_{\alpha,\infty}, \left\|R^\phi\right\|_{2\alpha,\infty}, \|D_x\phi\|_{\alpha,\infty} &< \infty.
\end{aligned}$$

Definimos $Y_t := \phi_t(X_t)$ e $Y'_t := \phi'_t(X_t) + D_x\phi_t(X_t)X'_t$. Então

$$(Y, Y') \in \mathcal{C}_Z^\alpha$$

Demonstração. Primeiro mostraremos que $Y \in C^\alpha$. Direto do lema anterior, teremos que $Y \in C^\alpha$, com

$$\|Y\|_\alpha \leq \|D_x\phi\|_{\infty,X} \|X\|_\alpha + \|\phi\|_{\alpha,\infty} \tag{2.2.1}$$

lembrando que $\|D_x\phi\|_{\infty,X} := \sup_{s,t,\tau} |D_x\phi_t(X_{s,t,\tau})|_{op}$.

Agora vamos mostrar que $Y' \in C^\alpha$,

$$\begin{aligned}
|Y'_t - Y'_s| &= |\phi'_t(X_t) + D_x\phi_t(X_t)X'_t - \phi'_s(X_s) - D_x\phi_s(X_s)X'_s| \\
&\leq |\phi'_t(X_t) - \phi'_s(X_s)| + |D_x\phi_t(X_t)X'_t - D_x\phi_s(X_s)X'_s \pm D_x\phi_s(X_s)X'_t| \\
&\leq |\phi'_t(X_t) - \phi'_s(X_s)| \\
&\quad + |D_x\phi_t(X_t) - D_x\phi_s(X_s)|_{op} \|X'\|_\infty + \|D_x\phi_{\cdot}(X_{\cdot})\|_\infty |X'_t - X'_s| \\
&\leq \left\{\|\phi'(X)\|_\alpha + \|D_x\phi(X)\|_\alpha \|X'\|_\infty + \|D_x\phi_{\cdot}(X_{\cdot})\|_\infty \|X'\|_\alpha\right\} |t-s|^\alpha
\end{aligned}$$

na ultima desigualdade, usamos o lema anterior para as funções $t \mapsto \phi_t(X_t)$ e $t \mapsto D_x\phi_t(X_t)$. Assim temos que $Y' \in C^\alpha$, com

$$\begin{aligned}
\|Y'\|_\alpha &\leq \left\{\|D\phi'\|_{\infty,X} \|X\|_\alpha + \|\phi\|_{\alpha,\infty}\right\} \\
&\quad + \left\{\left\|D_x^2\phi\right\|_{\infty,X} \|X\|_\alpha + \|D\phi\|_{\alpha,\infty}\right\} \|X'\|_\infty \\
&\quad + \|D_x\phi_{\cdot}(X_{\cdot})\|_\infty \|X'\|_\alpha .
\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Resta mostrar que $R^Y \in \mathcal{C}^{2\alpha}$, lembrando que $R^Y_{st} := (Y_t - Y_s) - Y'_s(Z_t - Z_s)$. Abaixo usaremos que $(X, X'), (\phi_{\cdot}(x), \phi'_{\cdot}(x)) \in \mathcal{C}_Z^\alpha$, mais precisamente (usando a notação $Z_{st} = Z_t - Z_s$) vamos usar as expressões provindas das definições $X'_s Z_{st} = X_{st} - R^X_{st}$ e que $\phi'_s(x) Z_{st} = \phi_{st}(x) - R^\phi_{st}(x)$ (em particular para $x = X_s$) na expressão de R^Y. Assim, podemos reescrê-lo como

$$
\begin{aligned}
R^Y_{st} &= Y_{st} - \left\{ \phi'_s(X_s) + D_x\phi_s(X_s) X'_s \right\} Z_{st} \\
&= Y_{st} - \left\{ \phi'_s(X_s) Z_{st} \right\} - \left\{ D_x\phi_s(X_s) X'_s Z_{st} \right\} \\
&= Y_{st} - \left\{ \phi_t(X_s) - \phi_s(X_s) - R^\phi_{st}(X_s) \right\} - \left\{ D_x\phi_s(X_s) \left(X_{st} - R^X_{st} \right) \right\} \\
&= Y_{st} - (\phi_{st})(X_s) + R^\phi_{st}(X_s) - D_x\phi_s(X_s) X_{st} + D_x\phi_s(X_s) R^X_{st} \\
&= \phi(X)_{st} - (\phi_{st})(X_s) - D_x\phi_s(X_s) X_{st} + R^\phi_{st}(X_s) + D_x\phi_s(X_s) R^X_{st} \\
&= \left\{ \phi_t(X_t) - \phi_t(X_s) - D_x\phi_s(X_s) X_{st} \right\} + R^\phi_{st}(X_s) + D_x\phi_s(X_s) R^X_{st} \\
&= \left\{ (D_x\phi_t(X_s) - D_x\phi_s(X_s)) \,\delta X_{st} + \frac{1}{2} D^2_x\phi_t(X_\tau)(X_{st} \otimes X_{st}) \right\} \\
&\quad + R^\phi_{st}(X_s) + D_x\phi_s(X_s) R^X_{st}
\end{aligned}
$$

tomando $|\cdot|$ em ambos os lados, como por hipótese $\left\| R^X \right\|_{2\alpha}, \left\| R^\phi \right\|_{2\alpha,\infty}, \| D_x\phi \|_{\alpha,\infty} < \infty$ e $|D_x\phi_s(X_s)| \leq \|D_x\phi\|_{\infty,X}$, então segue que

$$
\begin{aligned}
\left\| R^Y \right\|_{2\alpha} &\leq \|D_x\phi\|_{\alpha,\infty} \|X\|_\alpha + \frac{1}{2} \left\| D^2_x\phi \right\|_{\infty,X} \|X\|^2_\alpha \\
&\quad + \left\| R^\phi \right\|_{2\alpha,\infty} + \|D_x\phi\|_{\infty,X} \left\| R^X \right\|_{2\alpha}
\end{aligned}
$$

□

Observação 2.2.2. A fórmula abaixo generaliza a original de H. Kunita, Teorema 1.2 em [26]. Aqui, estruturalmente é diferente, isto é, aparece o termo extra $\int_0^t D_x h_r(X_r)\, d\mathbb{Z}^A_r$. Entretanto, no caso particular em que o rough path de referência é $\left(B, \mathbb{B}^S\right)$, ver Proposição 1.1.16, temos que $\int_0^t D_x h_r(X_r)\, d\mathbb{Z}^A_r = 0$, recuperando exatamente a fórmula original.

Teorema 2.2.3 (Fórmula tipo Itô-Ventzell)**.** Seja $\boldsymbol{Z} = (Z, \mathbb{Z})$ um α-rough path geométrico em V e sejam $(X, X'), (h(x), h'(x)) \in \mathcal{C}^\alpha_Z$, $\forall x$, caminhos controlados por Z. Lembrando que, X e h verificam, $\forall s, t \in [0, T]$, $\delta X_{st} = X'_s \delta Z_{st} + R^X_{st}$ e $h_t(x) - h_s(x) = h'_s(x)\,\delta Z_{st} + R^h_{st}(x)$ sendo $R^X, R^h(x)$ 2α-Hölder (uniformemente em x).

Suponha que $g_t(x)$ verifica

$$
g_t(x) = g_0(x) + \int_0^t h_u(x) \mathrm{d}\boldsymbol{Z}_u \tag{2.2.3}
$$

Suponha que os caminhos controlados $(h_\cdot(x), h'_\cdot(x))$ e $(Dg_\cdot(x), Dh_\cdot(x))$ verificam as mesmas hipóteses que $(\phi_\cdot(x), \phi'_\cdot(x))$. As quais, essencialmente, dizem que $g_t(\cdot) \in C^3$, $h_t(\cdot) \in C^2$, $h'_t(\cdot), R^h_t(\cdot) \in C^1$ para todo $t \in [0, T]$, e normas Hölder são uniformemente limitadas em x.

Então vale

$$
\begin{aligned}
g_t(X_t) = g_0(X_0) + \int_0^t h_u(X_u)\, \mathrm{d}\boldsymbol{Z}_u + \int_0^t \mathrm{D}_x g_u(X_u)\, \mathrm{d}X_u \\
- \frac{1}{2} \int_0^t D_x h_r(X_r)\, d\mathbb{Z}^A_r
\end{aligned}
\tag{2.2.4}
$$

Demonstração. Antes observaremos como serão as integrais roughs. Fixe uma família de partições $\{\mathcal{P}\}$ do intervalo $[0,t]$ tal que $|\mathcal{P}| \to 0$. Assim,

$$\int_0^t h_u(X_u)\,\mathrm{d}Z_u = \lim_{\mathcal{P}\to 0} \sum_{[s,u]\in\mathcal{P}} \theta_{s,u},$$

onde $\theta_{s,u} := h_s(X_s)\,\delta Z_{su} + [h_s'(X_s) + D_x h_s(X_s)\,X_s']\,\mathbb{Z}_{su}$. Também

$$\int_0^t \mathrm{D}_x g_u(X_u)\,\mathrm{d}X_u := \lim_{\mathcal{P}\to 0} \sum_{[s,u]\in\mathcal{P}} \widetilde{\theta}_{s,u}$$

onde $\widetilde{\theta}_{s,u} = D_x g_s(X_s)\,\delta X_{su} + [D_x g_s'(X_s) + D_x^2 g_s(X_s)\,X_s']\,X_s'\mathbb{Z}_{su}$. Lembramos que essa é a integral de Gubinelli $\int Y dW := \lim \sum_{[s,u]} Y_s \delta W_{su} + Y_s' W_s' \mathbb{Z}_{su}$, para $(Y, Y'), (W, W') \in \mathcal{C}_Z^\alpha$, ver Teorema (1.1.17).

Essas integrais estão bem definidas, pois pelo "Lema da Composição", as aplicações $u \mapsto h_u(X_u)$ e $u \mapsto D_x g_u(X_u)$ estão em $\mathcal{C}_Z^\alpha$.

Começamos com o lado esquerdo de Eq.(2.2.4), para uma partição $\mathcal{P}$ fixa, temos

$$\begin{aligned} g_t(X_t) - g_0(X_0) &= \sum_{[s,u]\in\mathcal{P}} g_u(X_u) - g_s(X_s) \\ &= \sum_{[s,u]\in\mathcal{P}} g_u(X_u) - g_u(X_s) + g_u(X_s) - g_s(X_s). \end{aligned}$$

Afirmamos que

$$g_u(X_s) - g_s(X_s) = \theta_{s,u} - D_x h_s(X_s)\,X_s'\mathbb{Z}_{su} + o(|u-s|)$$

.

Segue da Eq.(2.2.3) que

$$\begin{aligned} g_u(X_s) - g_s(X_s) &= \int_s^u h_r(X_s)\,\mathrm{d}Z_r \\ &= \int_s^u h_r(X_s)\,\mathrm{d}Z_r - h_s(X_s)(Z_u - Z_s) - \mathrm{D}_x h_s(X_s)\,X_s'\mathbb{Z}_{su} \\ &\quad + h_s(X_s)(Z_u - Z_s) + \mathrm{D}_x h_s(X_s)\,X_s'\mathbb{Z}_{su} \\ &= o(|u-s|) \\ &\quad + h(X_s)(Z_u - Z_s) + \mathrm{D}_x h_s(X_s)\,X_s'\mathbb{Z}_{su} \\ &= o(|u-s|) + \theta_{s,u} - D_x h_s(X_s)\,X_s'\mathbb{Z}_{su} \end{aligned}$$

aqui usamos a desigualdade fundamental da integral de Gubinelli para $\int_s^u h_r(x)\,\mathrm{d}Z_r$ com $x = X_s$. Assim concluimos a afirmação.

Agora, **afirmamos que**

$$g_u(X_u) - g_u(X_s) = \widetilde{\theta}_{s,u} + D_x h_s(X_s)\,X_s'\,[\delta Z_{su} \otimes \delta Z_{su} - \mathbb{Z}_{su}] + o(|u-s|)$$

usando Taylor na variável x de g podemos expandir o lado esquerdo como

$$g_u(X_u) - g_u(X_s) = Dg_u(X_s)\delta X_{su} + \frac{1}{2}D_x^2 g_u(X_s)\delta X_{su}\otimes\delta X_{su} + o(|u-s|). \tag{2.2.5}$$

Vamos usar a relação $\delta X = X'\delta Z + R^X$ na expressão acima. No termo com a segunda derivada, temos,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}D_x^2 g_u(X_s)\delta X_{su}\otimes\delta X_{su} &= D_x^2 g_u(X_s)\, X_s' X_s' \left(\frac{\delta Z_{su}\otimes\delta Z_{su}}{2}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}D_x^2 g_u(X_s)\, X_s'\delta Z_{su}\otimes R_{su}^X + \frac{1}{2}D_x^2 g_u(X_s)\, R_{su}^X \otimes X_s'\delta Z_{su} \\
&= D_x^2 g_u(X_s)\, X_s' X_s' \left(\frac{\delta Z_{su}\otimes\delta Z_{su}}{2}\right) \\
&\quad + o(|u-s|) \\
&= D_x^2 g_u(X_s)\, X_s' X_s' (\mathbb{Z}_{su}) \pm D_x^2 g_s(X_s)\, X_s' X_s' \mathbb{Z}_{su} \\
&\quad + o(|u-s|) \\
&= D_x^2 g_s(X_s)\, X_s' X_s' (\mathbb{Z}_{su}) + \\
&\quad + \left\{ D_x^2 g_u(X_s)\, X_s' X_s' - D_x^2 g_s(X_s)\, X_s' X_s' \right\} \mathbb{Z}_{su} + o(|u-s|) \\
&= D_x^2 g_s(X_s)\, X_s' X_s' (\mathbb{Z}_{su}) + o(|u-s|)
\end{aligned}$$

usamos que o operador $D_x^2 g_s(X_s)\, X_s' X_s'$ age na parte simétrica de $V\otimes V$, que $\mathcal{SYM}(\mathbb{Z}_{su}) = \frac{\delta Z_{su}\otimes\delta Z_{su}}{2} \in V\otimes V$ (pois Z é gemoétrico) e que $\left\|R^X\right\|_{2\alpha}$, $\|D_x^2 g\|_{\alpha,\infty}$, $\|X\|_\alpha$, $\|\mathbb{Z}\|_{2\alpha}$, $\|D_x^2 g\|_{\infty,X}$, $\|X'\|_\infty$ são finitos.

Para o termo da primeira derivada em Eq.(2.2.5), temos

$$\begin{aligned}
D_x g_u(X_s)\delta X_{su} &= D_x g_u(X_s)\delta X_{su} \pm D_x g_s(X_s)\,\delta X_{su} \\
&= D_x g_s(X_s)\,\delta X_{su} + D_x\left[g_u(x) - g_s(x)\right]\big|_{x=X_s}\delta X_{su} \\
&= D_x g_s(X_s)\,\delta X_{su} + D_x\left[g_s'(x)\,\delta Z_{su} + R_{su}^g(x)\right]\big|_{x=X_s}\delta X_{su} \\
&= D_x g_s(X_s)\,\delta X_{su} + D_x g_s'(X_s)\,\delta Z_{su}\otimes\delta X_{su} + D_x R_{su}^g(X_s)\,\delta X_{su} \\
&= D_x g_s(X_s)\,\delta X_{su} + D_x g_s'(X_s)\,\delta Z_{su}\otimes\left[X_s'\delta Z_{su} + R_{su}^X\right] + o(|u-s|) \\
&= D_x g_s(X_s)\,\delta X_{su} + D_x g_s'(X_s)\, X_s'\delta Z_{su}\otimes\delta Z_{su} + o(|u-s|) \\
&= D_x g_s(X_s)\,\delta X_{su} + D_x h_s(X_s)\, X_s'\delta Z_{su}\otimes\delta Z_{su} + o(|u-s|)
\end{aligned}$$

aqui usamos o fato de $g_t(x)$ ser uma integral rough, implica que $(g_\cdot(x), g_\cdot'(x)) = (g_\cdot(x), h_\cdot(x)) \in \mathcal{C}_Z^\alpha$ (uniformemente em x) e que as normas Hölder são finitas para garantir o termo $o(|u-s|)$.

Finalizando, inserindo de volta as expressões de $D_x g$ e $D_x^2 g$ na equação Eq.(2.2.5), resulta que

$$\begin{aligned}
g_u(X_u) - g_u(X_s) &= D_x g_s(X_s)\,\delta X_{su} + D_x h_s(X_s)\, X_s'\delta Z_{su}\otimes\delta Z_{su} + \\
&\quad + D_x^2 g_s(X_s)\, X_s' X_s' (\mathbb{Z}_{su}) + o(|u-s|) \\
&= \widetilde{\theta}_{s,u} + D_x h_s(X_s)\, X_s'\delta Z_{su}\otimes\delta Z_{su} - D_x h_s(X_s)\, X_s'\mathbb{Z}_{su} + o(|u-s|) \\
&= \widetilde{\theta}_{s,u} + D_x h_s(X_s)\, X_s'\left[\delta Z_{su}\otimes\delta Z_{su} - \mathbb{Z}_{su}\right] + o(|u-s|),
\end{aligned}$$

terminando a segunda afirmação.

Juntando as duas afirmações, concluimos que

$$\begin{aligned}
g_t(X_t) - g_0(X_0) &= \sum_{[s,u]\in\mathcal{P}} g_u(X_t) - g_s(X_s) \\
&= \sum_{[s,u]\in\mathcal{P}} \theta_{s,u} + \sum_{[s,u]\in\mathcal{P}} \widetilde{\theta}_{s,u} \\
&\quad + \sum_{[s,u]\in\mathcal{P}} D_x h_s(X_s) X'_s \left[\delta Z_{su} \otimes \delta Z_{su} - 2\mathbb{Z}_{su}\right] \\
&\quad + \sum_{[s,u]\in\mathcal{P}} o(|s-u|). \\
&= \sum_{[s,u]\in\mathcal{P}} \theta_{s,u} + \sum_{[s,u]\in\mathcal{P}} \widetilde{\theta}_{s,u} \\
&\quad + \sum_{[s,u]\in\mathcal{P}} -\frac{1}{2} D_x h_s(X_s) X'_s \left[-\frac{\delta Z_{su} \otimes \delta Z_{su}}{2} + \mathbb{Z}_{su}\right] \\
&\quad + \sum_{[s,u]\in\mathcal{P}} o(|s-u|).
\end{aligned}$$

Agora tomaremos o limite fazendo $\|\mathcal{P}\| \to 0$, assim

$$\begin{aligned}
g_t(X_t) - g_0(X_0) &= \int_0^t h_r(X_r)\, dZ_r + \int_0^t Dg_r(X_r)\, dZ_r \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_0^t D_x h_r(X_r)\, d\mathbb{Z}_r^A \\
&\quad +0
\end{aligned}$$

onde denotamos, $\int_0^t D_x h_r(X_r)\, d\mathbb{Z}_r^A := \lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0} \sum_{[s,u]\in\mathcal{P}} D_x h_s(X_s) X'_s \left[\mathbb{Z}_{su} - \frac{\delta Z_{su}\otimes\delta Z_{su}}{2}\right]$. Apesar do limite existir, é apenas uma notação formal de integral (com respeito a parte anti-simétrica, $\mathbb{Z}_{su}^A := \mathbb{Z}_{su} - \frac{\delta Z_{su}\otimes\delta Z_{su}}{2}$, do tensor $\mathbb{Z}_{su} \in V \otimes V$). $\square$

2.3 Comentários

Para fazer a fórmula de Itô-Kunita no caso geral, isto é, $\alpha \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right)$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$, primeiramente precisa-se da definição de rough path e a integral nesse contexto, ver [16] para geométricos e ver [24, 20] para não-geométricos. Não é díficil de entender como tal integral ficaria, pensando no exemplo fundamental, como calcular

$$\begin{aligned}
\int_0^T f(Z_s)\, dZ_s : &= \mathcal{I}\left(f(Z)\,\delta Z + Df(Z)\,\mathbb{Z}\right) \\
&= \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{s_i\in\mathcal{P}} f(Z_{s_i})\,\delta Z_{s_i,s_{i+1}} + Df(Z_{s_i})\,\mathbb{Z}_{s_i,s_{i+1}}
\end{aligned}$$

quando o incremento generalizado $\theta := f(Z)\,\delta Z + Df(Z)\,\mathbb{Z}$ não é bom o suficiente para aproximar a integral? Procura-se um novo candidato, por exemplo

$$\theta = \begin{cases} f(Z)\,\delta Z + Df(Z)\,\mathbb{Z} + D^2 f(Z)\,\mathbb{Z}^3 & ; k = 3 \\ \sum_{i=0}^{k} D^{i-1} f(Z)\,\mathbb{Z}^i & ; k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

onde denotamos, $D^0 f = f$ $\mathbb{Z}^1 := \delta Z$, $\mathbb{Z}^2 := \mathbb{Z}$ e postula-se a existencia do rough path $\left(Z, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}^3, \ldots, \mathbb{Z}^k\right)$ satisfazendo propriedades algébricas e analíticas que imitam integrais iteradas $\int \cdots \int dZ \otimes \cdots \otimes dZ$.

O espaço dos integrandos (caminhos controlados por Z) deve imitar as deridas de f, isto é, $\mathcal{C}_Z^\alpha = \left\{\left(X, X', X'', \ldots, X^{(k)}\right)\right\}$ e as derivadas de Gubinelli satisfazem

$$\delta X_{st} = \sum_{i=1}^{k} X_s^{(i)} \mathbb{Z}_{st}^i + R_{st}^X,$$

por exemplo. a expressão acima deve ser pensada como o polinômio (de grau k) de Taylor, no caso particular em que$X_t := f(Z_t)$, em torno do ponto $x = Z_s$.

Desse modo, pode-se mostrar que a integral

$$\int X dZ := \mathcal{I}\left(\sum_{i=0}^{k} X^{(i-1)} \mathbb{Z}^i\right)$$

está bem definida e satisfaz as mesmas propriedades da Integral definida no Teorema (1.1.14).

Até agora a teoria está escrita e sólida, ver [19, 23, 15, 16]. As próximas considerações, que acreditamos ser factiveis, deveriam ser provadas para ser possível generalizar a Fórmula de Itô-Ventzel:

- Para $X, W \in \mathcal{C}_Z^\alpha$ para $\alpha \leq \frac{1}{3}$, correta definição para a integral $\int X dW$

Até onde conhecemos não existe na literatura. Por exemplo, para $\alpha > \frac{1}{4}$, acreditamos que $\int X dW = \mathcal{I}\left(X\delta W + X'W'\mathbb{Z} + \left(X''W' + 2X'W''\right)\mathbb{Z}^3\right)$ seja a definição correta.

- Dado $X \in \mathcal{C}_Z^\alpha$, provar que $Y_t := h_t(X_t) \in \mathcal{C}_Z^\alpha$.

A dificuldade aqui é de natureza combinatória. Por exemplo, para $\alpha > \frac{1}{3}$, se $Y_t := h(t, X_t)$ e $\left(h_\cdot, h'_\cdot, h''_\cdot\right) \in \mathcal{C}_Z^\alpha$, precisamos definir Y' e Y'', por exemplo, os candidatos seriam

$$\begin{aligned} Y'_t &:= h'_t(X_t) + D_x h_t(X_t)\,X'_t \\ Y''_t &:= h''_t(t, X_t) + 2D_x h'_t(X_t)\,X'_t + D_x^2 h_t(X_t)\,X'_t \otimes X'_t + D_x h_t(X_t)\,X''_t \end{aligned}$$

- Se $g_t(x) = g_0(x) + \int_0^t h_s(x)\,dZ_s$, expandir em Taylor $g_t(X_t)$ até k$^{\underline{a}}$-ordem,

a dificuldade também é de natureza combinatória, pois juntar Y' e Y'' com a expansão em Taylor de g se torna uma bagunça sem a linguagem adequada. Por exemplo ver trablhos em rough paths de ordem qualquer [24, 20].

Não é novidade dos rough paths a natureza combinatória, em trabalhos que propõe resolver EDO's via série, [1, 2].

Capítulo 3

Equações Diferenciais parciais

Esta seção é original e inspirada no trabalho de H. Kunita, [25], onde ele propõe resolver equações estocásticas parciais de primeira ordem (ver o sistema (3.0.1)). Dado que a fórmula de Ito-Ventzell que provamos no Teorema 2.1.2 é estruturalmente a mesma que H. Kunita tem, e dado os teoremas de fluxos para equações ordinárias dirigidas por caminhos Hölder, não é de surpreender que as tecnicas das Equações Caracteristicas propostas em [25] funciona exatamente aqui.

Existem trabalhos na direção de Equações Caracteristicas para sistemas dirigidos por rough paths. Por exemplo P. Friz et al, nos trabalhos [17, 3, 18] usam o metodo das caracteristicas. A diferença entre as abordagens consiste que P. Friz aproxima o ruído Z por caminhos regulares, aplica o método das caracteriscas usual para equações regulares e depois toma o limite, encontrando um objeto limite que ele postula ser a solução da equação original.

O conteúdo desta seção está escrito num pre-print entre o autor da tese e o orientador em [4].

Introdução - Equação linear geral de primeira ordem

De agora em diante a teoria dos rough paths não será mais empregada, ficaremos apenas no contexto da integral de Young.

Nesta seção trataremos de equações parciais de primeira ordem dirigidas por um caminho α-Hölder $Z : [0,T] \to \mathbb{R}^d$ com $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$. Mais precisamente focaremos no seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} du_t = F\left(t, x, u_t, \nabla u_t\right) dZ_t \\ u_0 = \phi \in C^1\left(\mathbb{R}^e\right) \end{cases} \tag{3.0.1}$$

onde $F : [0,T] \times \mathbb{R}^e \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^e \to \mathbb{R}^d$, $\phi : \mathbb{R}^e \to \mathbb{R}$ e $u : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$.

Definição 3.0.1 (Solução do Sistema Young)**.** Dado $\phi \in C^1\left(\mathbb{R}^e\right)$, um campo local $u_t\left(x\right) \in \mathbb{R}$, onde $x \in \mathbb{R}^d$ e $t \in [0, T\left(x\right)]$ é denominado de solução do Sistema Young (3.0.1) com condição inicial $u_0 = \phi$ se $0 < T\left(x\right) \leq T$ e

$$u_t\left(x\right) \quad = \quad \phi\left(x\right) + \int_0^t \left\langle F\left(s, x, u_s\left(x\right), \nabla u_s\left(x\right)\right), dZ_s\right\rangle$$

para todo (t, x) tal que $0 \leq t < T\left(x\right)$. O símbolo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno em $\mathbb{R}^e$ e a integral acima é entendida no sentido de Young.

3.1 Equações Características

Agora introduziremos as **Equações Características** associadas ao Sistema de Youg (3.0.1).

Definição 3.1.1 (Equações Características)**.** Dadas $Z \in C^{\alpha}\left([0,T]\,;\mathbb{R}^{d}\right)$ e $(t,x,u,p) \in [0,T] \times \mathbb{R}^{e} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{e} \mapsto F\left(t,x,u,p\right) \in \mathbb{R}^{d}$ tal que F é β-Hölder na variável t e diferenciável nas variáveis (x,v,p). Suponha $\alpha+\beta>1$. As *Equações Características* são definidas por

$$\begin{cases} da_t = -D_pF\left(t,a_t,b_t,c_t\right)dZ_t \\ db_t = \left\{F\left(t,a_t,b_t,c_t\right) - D_pF\left(t,a_t,b_t,c_t\right)\centerdot c_t\right\}dZ_t \\ dc_t = \left\{D_xF\left(t,a_t,b_t,c_t\right) + \partial_uF\left(t,a_t,b_t,c_t\right)c_t\right\}dZ_t \\ \left(a_0,b_0,c_0\right) = (x,u,p) \in \mathbb{R}^{e}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{e} \end{cases} \tag{3.1.1}$$

onde denotamos, $\partial_uF := \frac{\partial F}{\partial u}$, $D_pF := \left(\partial_{p_1}F\cdots\partial_{p_e}F\right)_{e\times d} := \left(\partial_{p_i}F^{j}\right)_{e\times d}$ e analogamente para $D_xF := \left(\partial_{x_1}F\cdots\partial_{x_e}F\right)_{e\times d}$.

Teorema 3.1.2. Seja u uma solução local do Sistema de Young (3.0.1) tal que $u\left(t,\centerdot\right) \in C^{3}\left(\mathbb{R}^{d}\right)$ para todo $t \in [0,T]$. Assuma que a é solução da equação

$$\begin{cases} da_t = -D_pF\left(t,a_t,b_t,c_t\right)dZ_t \\ a_0 = x \in \mathbb{R}^{e} \end{cases} \tag{3.1.2}$$

onde denotamos $b_t = u_t\left(a_t\right)$ e $c_t = \nabla u_t\left(a_t\right)$. Então $\left(a_t,b_t,c_t\right)$ é solução do Sistema (3.1.1) com condição inicial $\left(a_0,b_0,c_0\right) = \left(x,\phi\left(x\right),\nabla\phi\left(x\right)\right)$.

Demonstração. Pela fórmula de Itô-Ventzell, Teorema 2.1.2., podemos calcular a composição de a_t com $u_t\left(x\right)$, encontrando uma expressão para $u_t\left(a_t\right) = b_t$,

$$u_t\left(a_t\right) = u_0\left(a_0\right) + \int_0^t \left\langle F\left(s,a_s,u_s\left(a_s\right),\nabla u_s\left(a_s\right)\right), dZ_s\right\rangle + \int_0^t \left\langle \nabla u_s\left(a_s\right), da_s\right\rangle, \tag{3.1.3}$$

agora usando a fórmula de mudança de variável, Proposição 1.1.10., podemos reescrever a ultima integral como

$$\begin{aligned} \int_0^t \left\langle \nabla u_s\left(a_s\right), da_s\right\rangle &= \int_0^t \left\langle \nabla u_s\left(a_s\right), -D_pF\left(s,a_s,b_s,c_s\right)dZ_s\right\rangle \\ &= \int_0^t \left\langle -D_pF\left(s,a_s,b_s,c_s\right)\centerdot c_s, dZ_s\right\rangle, \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

aqui usamos Eq. (3.1.2), $c_s = \nabla u_s\left(a_s\right)$ e denotamos $D_pF\centerdot c_s = \sum_{i=1}^{e}\partial_{p_i}F\partial_{x_i}u_s\left(a_s\right) \in \mathbb{R}^{d}$. Combinando Eq.(3.1.3), Eq.(3.1.4), $b_t = u_t\left(a_t\right)$ e $u_0 = \phi$ temos

$$b_t = \phi\left(x\right) + \int_0^t \left\langle F\left(s,a_s,b_s,c_s\right) - D_pF\left(s,a_s,b_s,c_s\right)\centerdot c_s, dZ_s\right\rangle$$

isto é, $db_t = \left\{F\left(t,a_t,b_t,c_t\right) - D_pF\left(t,a_t,b_t,c_t\right)\centerdot c_t\right\}dZ_t$ e $b_0 = \phi\left(x\right)$.

Agora nosso objetivo é calcular a equação diferencial para $c_t = \nabla u_t(a_t)$. Abaixo omitiremos os argumentos de $F(s, x, u_s(x), \nabla u_s(x)) = F$, notamos que

$$\begin{aligned}\partial_{x_i} u_t(x) &= \partial_{x_i}\phi(x) + \frac{\partial}{\partial x_i}\int_0^t \langle F, dZ_s\rangle \\ &= \partial_{x_i}\phi(x) + \int_0^t \langle \partial_{x_i}F + \partial_u F \partial_{x_i} u_s(x) + \\ &\quad + D_p F \partial_{x_i}(\nabla u_s(x)), dZ_s\rangle\end{aligned}$$

isto é, $\partial_{x_i} u_t(x)$ pode ser expresso como uma integral de Young do tipo $\int h_s(x)\, dZ_s$. Desse modo, podemos usar a fórmula de Itô-Ventzell (para integrais de Young), Teorema 2.1.2, afim de calcular a composição $\partial_{x_i} u_t(a_t) =: c_t^i$

$$c_t^i = \partial_{x_i}\phi(a_0) + \int_0^t \langle h_s(a_s), dZ_s\rangle + \int_0^t \langle \nabla\partial_{x_i} u_s(a_s), da_s\rangle \tag{3.1.5}$$

usando a equação diferencial de da_t e novamente a fórmula de mudança de variável podemos reescrever a última integral como

$$\begin{aligned}\int_0^t \langle \nabla\partial_{x_i} u_s(a_s), da_s\rangle &= \int_0^t \langle \nabla\partial_{x_i} u_s(a_s), -D_p F(s, a_s, b_s, c_s)\, dZ_s\rangle \\ &= \int_0^t \langle -D_p F(s, a_s, b_s, c_s) \cdot \nabla\partial_{x_i} u_s(a_s), dZ_s\rangle.\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

Combinando Eqs. (3.1.5) e (3.1.6),

$$c_t^i = \partial_{x_i}\phi(a_0) + \int_0^t \left\langle \partial_{x_i}F(s, a_s, b_s, c_s) + \partial_u F(s, a_s, b_s, c_s)\, c_s^i, dZ_s\right\rangle,$$

pois (trivialmente) $h_s(a_s) - D_p F \cdot \nabla\partial_{x_i} u_s(a_s) = \partial_{x_i}F + \partial_u F c_s^i$. Ou seja, mostramos que

$$c_t = \nabla\phi(a_0) + \int_0^t \langle D_x F(s, a_s, b_s, c_s) + \partial_u F(s, a_s, b_s, c_s)\, c_s, dZ_s\rangle,$$

em outras palavras, mostramos que $dc_t = D_x F(t, a_t, b_t, c_t) + \partial_u F(t, a_t, b_t, c_t)\, dZ_t$ com $c_0 = \nabla\phi(x)$. □

3.2 Existência e unicidade

Seguindo H. Kunita [25], denotaremos a solução do Sistema (3.1.1) com condição inicial $(x, u, p) \in \mathbb{R}^e \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^e$ no tempo $t = 0$, por $(a_t(x, u, p), b_t(x, u, p), c_t(x, u, p))$ para todo $t \in [0, T(x, u, p))$. Também denotaremos por $\bar{a}_t(x) := a_t(x, \phi(x), \nabla\phi(x))$, analogamente para $\bar{b}_t(x)$, $\bar{c}_t(x)$ e $\bar{T}(x)$.

O seguinte lema diz que explicita as condições para que a aplicação $x \mapsto \bar{a}_t(x)$ seja um difeomorfismo em $\mathbb{R}^e$. Tal lema é de fundamental importância, pois a solução $u_t(x)$ do Sistema de Young será expressa através da inversa da aplicação $x \mapsto \bar{a}_t(x)$, mais precisamente provaremos que $u_t(x) = \bar{b}_t\left(\bar{a}_t^{-1}(x)\right)$ será solução de (3.0.1), ver Teorema 3.2.4.

Lema 3.2.1. Suponha que $F = F(t,x,u,p)$ é de classe C^{k+1} nas variáveis (x,u,p) e que $\phi \in C^k$ para $k \geq 3$. Logo existe único $\bar{a}_t = a_t(x,\phi(x),\nabla\phi(x))$. Definimos os seguintes tempo de paradas,

$$\begin{aligned}\tau(x) &:= \inf\{t \in (0,T] : \det D\bar{a}_t(x) = 0\} \wedge \bar{T}(x)\\ \sigma(y) &:= \inf\{t > 0 : y \notin \bar{a}_t(\{x : t < \tau(x)\})\}\end{aligned}$$

Em palavras, $\tau(x)$ é o tempo máximos em que $t \mapsto D\bar{a}_t(x)$ é um isomorfismo (é onde esperamos que $\bar{a}_t(\centerdot)$ tenha inversa). Já $\sigma(y)$ é tempo máximo onde os pontos $y \in \mathbb{R}^e$ são alcançados pelo fluxo $\bar{a} = \bar{a}_t(x)$ (é o que esperamos que seja a imagem de $\bar{a}_t(\centerdot)$ enquanto $\bar{a}$ seja invesível). Então

$$\bar{a}_t : \{x \in \mathbb{R}^e : t < \tau(x)\} \to \{y \in \mathbb{R}^e : t < \sigma(y)\}$$

é um difeomorfismo de classe C^{k-2}.

Então, para todo $(t,y) \in [0,T] \times \mathbb{R}^e$ tal que $t < \sigma(y)$, $\bar{a}_t^{-1}(y)$ existe (e é único quando $k \geq 5$) e satisfaz

$$\begin{cases} d\bar{a}_t^{-1}(y) = D\bar{a}_t\left(\bar{a}_t^{-1}(y)\right)^{-1} D_pF\left(t, y, \bar{b}_t \circ \bar{a}_t^{-1}(y), \bar{c}_t \circ \bar{a}_t^{-1}(y)\right) dZ_t \\ \bar{a}_0^{-1}(y) = y \end{cases}$$

Demonstração. Dado $y \in \mathbb{R}^e$, considere $\iota_t = \iota_t(y)$ a única solução da equação (no sentido de Young)

$$\begin{cases} d\iota_t(y) = D\bar{a}_t(\iota_t(y))^{-1} D_pF\left(t, \bar{a}_t \circ \iota_t(y), \bar{b}_t \circ \iota_t(y), \bar{c}_t \circ \iota_t(y)\right) dZ_t \\ \iota_0(y) = y \end{cases},$$

com $t < \sigma(y)$. Denote por $[0,\hat{\sigma}(y)) \subseteq [0,\sigma(y))$ o intervalo maximal da solução. O intuito é mostrar que $\bar{a}_t(\iota_t(y)) = y$ em $\{y : t < \hat{\sigma}(y)\}$.

Observamos que $\iota_t(y) \in \{x : t < \tau(x)\}$ sempre que $t < \bar{\sigma}(y)$, logo é possível calcular $D\bar{a}_t(\iota_t(y))^{-1}$ pela definição de $\tau(x)$. Para ver isso, note que se $t < \sigma(y)$ então $\forall s \leq t, \exists x_s \in \mathbb{R}^e$ tal que, $y = \bar{a}_s(x_s)$ e $s < \tau(x_s)$ então numa vizinhança de $\iota_0(y) = y$ podemos assumir que $\bar{a}_s(\centerdot)$ é bijetora $\forall s \leq t$, desse modo $\iota_t(y)$ estará nessa mesma vizinhança enquanto t for pequeno, ou seja, $\iota_t(y) \in \{x : t < \tau(x)\}$.

Lembrando $\bar{a}_t = \bar{a}_t(x)$ verifica

$$\begin{cases} d\bar{a}_t(x) = -D_pF\left(t, \bar{a}_t(x), \bar{b}_t(x), \bar{c}_t(x)\right) dZ_t \\ \bar{a}_0(x) = x \in \mathbb{R}^e \end{cases}$$

queremos calcular a composta $\bar{a}_t(\iota_t(y))$ via fórmula de Itô-Ventzell, Teorema 2.1.2, e a mudança de variável (1.1.12), para reescrevermos $d\iota_s(y)$ em termos de dZ_s,

$$\begin{aligned}
\bar{a}_t(\iota_t(y)) &= \bar{a}_0(\iota_0(y)) + \int_0^t -D_pF\left(s, \bar{a}_s(\iota_s(y)), \bar{b}_s(\iota_s(y)), \bar{c}_s(\iota_s(y))\right) dZ_s + \\
&\quad + \int_0^t D\bar{a}_s(\iota_s(y))\, d\iota_s(y) \\
&= y - \int_0^t D_pF\left(s, \bar{a}_s(\iota_s(y)), \bar{b}_s(\iota_s(y)), \bar{c}_s(\iota_s(y))\right) dZ_s \\
&\quad + \int_0^t D\bar{a}_s(\iota_s(y))\, D\bar{a}_s(\iota_s(y))^{-1} D_pF\left(s, \bar{a}_s\circ\iota_s(y), \bar{b}_s\circ\iota_s(y), \bar{c}_s\circ\iota_s(y)\right) dZ_s \\
&= y - \int_0^t D_pF\left(s, \bar{a}_s(\iota_s(y)), \bar{b}_s(\iota_s(y)), \bar{c}_s(\iota_s(y))\right) dZ_s + \\
&\quad + \int_0^t D_pF\left(s, \bar{a}_s\circ\iota_s(y), \bar{b}_s\circ\iota_s(y), \bar{c}_s\circ\iota_s(y)\right) dZ_s \\
&= y,
\end{aligned}$$

para todo $y \in \{y : t < \hat{\sigma}(y)\}$, como queríamos.

Agora fixamos $t < \bar{\tau}(x) := \inf\{t > 0 : \bar{a}_t(x) \notin \{y : t < \hat{\sigma}(y)\}\} \wedge \tau(x)$ e queremos mostrar que $\iota_t(\bar{a}_t(x)) = x$. Novamente, vamos calcular a composta $\iota_t(\bar{a}_t(x))$ via fórmula de Itô-Ventzell, Teorema 2.1.2, e a mudança de variável (1.1.12), para reescrevermos $d\bar{a}_s(x)$ em termos de dZ_s,

$$\begin{aligned}
\iota_t(\bar{a}_t(x)) &= \iota_0(\bar{a}_0(x)) + \int_0^t \Big\{ D\bar{a}_s(\iota_s\circ\bar{a}_s(x))^{-1} \\
&\qquad D_pF\left(s, \bar{a}_s\circ\iota_s\circ\bar{a}_s(x), \bar{b}_s\circ\iota_s\circ\bar{a}_s(x), \bar{c}_s\circ\iota_s\circ\bar{a}_s(x)\right)\Big\} dZ_s + \\
&\quad + \int_0^t D\iota_s(\bar{a}_s(x))\, d\bar{a}_s(x) \\
&= x + \int_0^t \Big\{ D\bar{a}_s(\iota_s\circ\bar{a}_s(x))^{-1} \\
&\qquad D_pF\left(s, \bar{a}_s(x), \bar{b}_s\circ\iota_s\circ\bar{a}_s(x), \bar{c}_s\circ\iota_s\circ\bar{a}_s(x)\right)\Big\} dZ_s + \\
&\quad - \int_0^t D\iota_s(\bar{a}_s(x))\, D_pF\left(s, \bar{a}_s(x), \bar{b}_s(x), \bar{c}_s(x)\right) dZ_s
\end{aligned}$$

usamos que $\bar{a}_s(\iota_s(y)) = y$ na primeira integral. Para simplificar a segunda integral acima vamos derivar $\bar{a}_s(\iota_s(y)) = y$ em y e calcular em $y = \bar{a}_s(x)$, concluindo que, $D\iota_s(\bar{a}_s(x)) = D\bar{a}_s(\iota_s(\bar{a}_s(x)))^{-1}$. Desse modo, podemos reescrever $\iota_t\circ\bar{a}_t(x)$ como

$$\begin{aligned}
\iota_t\circ\bar{a}_t(x) &= x + \int_0^t \Big\{ D\bar{a}_s(\iota_s(\bar{a}_s(x)))^{-1} \\
&\qquad \Big[D_pF\left(s, \bar{a}_s(x), \bar{b}_s\circ\iota_s\circ\bar{a}_s(x), \bar{c}_s\circ\iota_s\circ\bar{a}_s(x)\right) \\
&\qquad -D_pF\left(s, \bar{a}_s(x), \bar{b}_s(x), \bar{c}_s(x)\right)\Big]\Big\} dZ_s
\end{aligned}$$

e esta equação (do caminho $t \mapsto i_t\circ\bar{a}_t(x)$) possui única solução Teorema 1.2.1, ou seja, esta deve ser $i_t\circ\bar{a}_t(x) = x$ para $t < \bar{\tau}(x)$.

Nesse momento temos praticamente mostrado que $\iota_t(\centerdot)$ e a inversa de $\bar{a}_t(\centerdot)$. Isto é, sabemos que

$$\begin{cases} \bar{a}_t \circ \iota_t(y) = y, & t < \bar{\sigma}(y) \\ \iota_t \circ \bar{a}_t(x) = x, & t < \bar{\tau}(x) \end{cases} \tag{3.2.1}$$

e para concluirmos o teorema resta mostra que $\tau(x) = \bar{\tau}(x)$ e que $\sigma(y) = \bar{\sigma}(y)$.

Vamos mostrar que $\tau(x) = \bar{\tau}(x)$. Pela definição temos $\bar{\tau}(x) \leq \tau(x)$, assim resta mostrar que $\lim_{t\to\bar{\tau}(x)} \det D\bar{a}_t(x) = 0$. Observando a equação diferencial $d\iota_t(y) = D\bar{a}_t(\iota_t(y))^{-1} D_pF\big(t, \bar{a}_t \circ \iota_t(y), \bar{b}_t \circ \iota_t(y), \bar{c}_t \circ \iota_t(y)\big)\, dZ_t$, podemos concluir que o tempo terminal $\bar{\sigma}(y)$ acontece quando $D\bar{a}_t(\iota_t(y))$ deixa de ser inversível, ou quando a curva $t \mapsto \iota_t(y)$ "escapa" do domínio do fluxo $\left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right)$, em outras palavras quando o tempo $t \to \bar{\sigma}(y)$, a condição inicial $x := \lim_{t\to\bar{\sigma}(y)} \iota_t(y)$ não permite calcular $\left(\bar{a}_t(x), \bar{b}_t(x), \bar{c}_t(x)\right)$ no tempo $t = \bar{\sigma}(y)$. Mais precisamente, quando $t \nearrow \bar{\sigma}(y)$, isto é $t \to \bar{\sigma}(y)$ com $t < \bar{\sigma}(y)$, temos

$$\lim_{t\nearrow\bar{\sigma}(y)} \det D\bar{a}_t(\iota_t(y)) = 0 \tag{3.2.2}$$

ou

$$\lim_{t\nearrow\bar{\sigma}(y)} \iota_t(y) \notin \left\{x : \bar{\sigma}(y) < \bar{T}(x)\right\} \tag{3.2.3}$$

lembrando que $\bar{T}(x) = T(x, \phi(x), \nabla\phi(x))$ é o tempo terminal do sistema de equações de (a, b, c), (3.1.1). Sem perda de generalidade podemos assumir $\bar{\tau}(x) < \bar{T}(x)$, pois caso contrário $D\bar{a}_{\centerdot}(x)$ é sempre isomorfismo. Com essa obersavação em mãos, se $t < \bar{\tau}(x)$ e $\bar{\tau}(x) < \bar{T}(x)$, por (3.2.1), temos $x = \iota_t \circ \bar{a}_t(x)$ e então

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\bar{\tau}(x)} \det D\bar{a}_t(x) &= \lim_{t\to\bar{\tau}(x)} \det D\bar{a}_t(\iota_t(\bar{a}_t(x))) \\ &= \lim_{t\to\bar{\sigma}(y)} \det D\bar{a}_t(\iota_t(y)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

segue pois $t \nearrow \bar{\tau}(x)$ se, e só se, $a_t(x)$ está escapando de $\{y : t < \bar{\sigma}(y)\}$, domínio do fluxo de $\iota = \iota_t(y)$, e isto acontece se, e só se, acontece (3.2.2) (já que (3.2.3) não ocorre pois assumimos que $\bar{\tau}(x) < \bar{T}(x)$). Concluimos que $\tau(x) = \bar{\tau}(x)$. Ou seja, por (3.2.1), $\iota_t \circ \bar{a}_t(x) = x$ para todo (t, x) no domínio do fluxo $\bar{a}$ e isto implica que $\bar{a}_t(\centerdot)$ é bijetora sobre sua imagem. Com isto concluímos que $\bar{a}_t^{-1}(y) = \iota_t(y)$ para todo $y \in \bar{a}_t(\{x : t < \tau(x)\})$.

Agora vamos mostrar que $\bar{\sigma}(y) = \sigma(y)$. Notamos que $\{y : t < \bar{\sigma}(y)\} \supset \bar{a}_t(\{x : t < \tau(x)\})$ pois o primeiro conjunto é o domínio do fluxo de ι e já sabemos que $\iota_t(\centerdot) = \bar{a}_t^{-1}(\centerdot)$ restrito ao segundo conjunto. Por simplicidade escreveremos$\{t < \bar{\sigma}\} \supset \bar{a}_t(\{t < \tau\})$. Por outro lado, da definição de $\iota_t(y)$, temos que $\iota_t(\{t < \bar{\sigma}\}) \subset \{t < \tau\}$, logo $\bar{a}_t \circ \iota_t(\{t < \bar{\sigma}\}) \subset \bar{a}_t(\{t < \tau\})$. Desde que $\bar{a}_t \circ \iota_t(y) = y$ em $\{t < \bar{\sigma}\}$, ver (3.2.1), temos $\{t < \bar{\sigma}\} \subset \bar{a}_t(\{t < \tau\})$. Portanto $\{t < \bar{\sigma}\} = \bar{a}_t(\{t < \tau\})$ para todo t. Isto prova que $\bar{\sigma}(y) = \sigma(y)$. $\square$

Observação 3.2.2. O próximo lema são fórmulas para as derivadas de $\bar{b}_t(\centerdot)$ e $\bar{b}_t \circ \bar{a}_t^{-1}(\centerdot)$, lembrando que $\bar{a}(x)$ e $\bar{b}(x)$ são soluções do Sistema das Características (3.1.1) com condição inicial $(x, \phi(x), \nabla\phi(x))$. As fórmulas estão coerentes quando $\bar{b}_t = u_t(\bar{a}_t)$, isto é, no contexto do Teorema 3.1.2.

Lema 3.2.3. Sejam a, b e c dados pelo Sistema das Características (3.1.1) com condição inicial $(x, \phi(x), \nabla\phi(x))$. Então

$$\begin{aligned} \nabla \bar{b}_t(x) &= \bar{c}_t(x) D\bar{a}_t(x) && (3.2.4) \\ \nabla\left(\bar{b}_t \circ \bar{a}_t^{-1}\right) &= \bar{c}_t \circ \bar{a}_t && (3.2.5) \end{aligned}$$

lembrando que $\bar{a}_t(x) = a_t(x, \phi(x), \nabla\phi(x))$, $\bar{b}_t(x) = b_t(x, \phi(x), \nabla\phi(x))$ e $\bar{c}_t(x) = c_t(x, \phi(x), \nabla\phi(x))$. Observamos que $\bar{c}_t(y) D\bar{a}_t(x) = \sum_{j=1}^{e} \left\langle \bar{c}_t(y), \partial_{x_j}\bar{a}_t(x)\right\rangle e_j$ onde $\{e_j\}$ é base canônica do $\mathbb{R}^e$.

Demonstração. Defina $Y_t(x) := \nabla\bar{b}_t(x) - \bar{c}_t(\bar{a}_t(x)) D\bar{a}_t(x)$, vamos mostrar que $Y_{\cdot}(x)$ é solução de uma equação linear, pois como a condição inicial é $Y_0(x) = \nabla\phi(x) - \bar{c}_0(x) I_{e\times e} = \nabla\phi(x) - \nabla\phi(x) = 0$ resultará que $Y_{\cdot}(x) = 0$.

Vamos calcular $\nabla\bar{b}_t(x)$. Lembramos que $\bar{b}$ satisfaz (omitindo a variável x)

$$\bar{b}_t = \phi + \int_0^t \left\langle F\left(s, \bar{a}_s, \bar{b}_s, \bar{c}_s\right) - D_pF\left(s, \bar{a}_s, \bar{b}_s, \bar{c}_s\right) \centerdot c_s, dZ_s\right\rangle$$

então (agora também omitindo os argumentos de F) e$\partial_j = \partial_{x_j}$

$$\begin{aligned} \partial_j\bar{b}_t &= \partial_j\phi + \int_0^t \Big\langle D_xF\partial_j\bar{a}_s + \partial_uF\partial_j\bar{b}_s + D_pF \centerdot \partial_j\bar{c}_s + \\ &\quad -\partial_j(D_pF) \centerdot \bar{c}_s - D_pF \centerdot \partial_j\bar{c}_s, dZ_s\Big\rangle \\ &= \partial_j\phi + \int_0^t \left\langle D_xF\partial_j\bar{a}_s + \partial_uF\partial_j\bar{b}_s - \partial_j(D_pF) \centerdot \bar{c}_s, dZ_s\right\rangle && (3.2.6) \end{aligned}$$

Agora, vamos calcucular $\langle \bar{c}_t(x), \partial_j\bar{a}_t(x)\rangle$ via fórmula de integração por partes Proposição 1.1.11, omitindo a variável x,

$$\langle \bar{c}_t, \partial_j\bar{a}_t\rangle = \langle \bar{c}_0, \partial_j\bar{a}_0\rangle + \int_0^t \langle \bar{c}_s, d(\partial_j\bar{a}_s)\rangle + \int_0^t \langle \partial_j\bar{a}_s, d\bar{c}_s\rangle. \quad (3.2.7)$$

Para calcularmos as integrais vamos usar a fórmula de mudança de variável para reescrevermos $d(\partial_j\bar{a}_s)$ e $d\bar{c}_s$ em termos de dZ_s. Sabemos que $\bar{a}$ satisfaz $d\bar{a}_t = -D_pF\left(t, \bar{a}_t, \bar{b}_t, \bar{c}_t\right) dZ_t$ então derivando em relação a ∂_{x_j} (e trocando esta derivada com a integral) temos

$$\partial_j\bar{a}_t = e_j - \int_0^t \partial_j(D_pF)\, dZ_s. \quad (3.2.8)$$

Substituindo $d\bar{c}_t = \{D_xF - \bar{c}_t\partial_uF\} dZ_t$ e (3.2.8) em 3.2.7, obtemos

$$\begin{aligned} \langle \bar{c}_t, \partial_j\bar{a}_t\rangle &= \partial_j\phi \\ &\quad + \int_0^t \langle \bar{c}_s, -\partial_j(D_pF)\, dZ_s\rangle \\ &\quad + \int_0^t \langle \partial_j\bar{a}_s, \{D_xF - \bar{c}_s\partial_uF\} dZ_s\rangle. \\ &= \partial_j\phi + \int_0^t \langle -\partial_j(D_pF) \centerdot \bar{c}_s + D_xF\partial_j\bar{a}_s + \\ &\quad + \langle \partial_j\bar{a}_s, \bar{c}_s\rangle \partial_uF, dZ_s\rangle && (3.2.9) \end{aligned}$$

Agora, combinando (3.2.6) e (3.2.9) podemos calcular Y_t,

$$\begin{aligned}\langle Y_t, e_j\rangle &= \partial_j \bar{b}_t - \langle \bar{c}_t, \partial_j \bar{a}_t\rangle \\ &= \int_0^t \left\langle \partial_u F \partial_j \bar{b}_s - \langle \partial_j \bar{a}_s, \bar{c}_s\rangle \partial_u F, dZ_s \right\rangle \\ &= \int_0^t \left\langle \partial_u F \left\{ \partial_j \bar{b}_s - \langle \partial_j \bar{a}_s, \bar{c}_s\rangle \right\}, dZ_s \right\rangle \\ &= \int_0^t \langle \partial_u F \langle Y_t, e_j\rangle, dZ_s\rangle\end{aligned}$$

ou seja, $dY_t = \partial F_u Y_t dZ_t$ como queríamos. Com isto provamos (3.2.4).

Resta mostrar que $\nabla\left(\bar{b}_t \circ \bar{a}_t^{-1}\right) = \bar{c}_t \circ \bar{a}_t$. Temos

$$\begin{aligned}\nabla\left(\bar{b}_t \circ \bar{a}_t^{-1}\right)(y) &= \nabla \bar{b}_t \left(\bar{a}_t^{-1}(y)\right) D\bar{a}_t^{-1}(y) \\ &= \nabla \bar{b}_t \left(\bar{a}_t^{-1}(y)\right) D\bar{a}_t \left(\bar{a}_t^{-1}(y)\right)^{-1}\end{aligned}$$

usando (3.2.4) com $x = \bar{a}_t^{-1}(y)$ na lado direito da igualdade acima resulta que

$$\begin{aligned}\nabla\left(\bar{b}_t \circ \bar{a}_t^{-1}\right)(y) &= \bar{c}_t(x) D\bar{a}_t(x) D\bar{a}_t(x)^{-1} \\ &= \bar{c}_t\left(\bar{a}_t^{-1}(y)\right).\end{aligned}$$

□

Teorema 3.2.4 (Existência)**.** Suponha que $F = F(t,x,u,p)$ é de classe C^{k+1} nas variáveis (x,u,p) e que $\phi \in C^k$ para $k \geq 3$. Sejam $Z \in C^{\alpha}\left([0,T];\mathbb{R}^d\right)$ com $\alpha > \frac{1}{2}$, e (a,b,c) solução do Sistema (3.1.1) com condição inicial $(x, \phi(x), \nabla\phi(x))$. Denote $\bar{a}_t(x) = a_t(x, \phi(x), \nabla\phi(x))$, analogamente para $\bar{b}$ e $\bar{c}$. Defina

$$\sigma(y) := \inf\{t > 0 : y \notin \bar{a}_t(\{x : t < \tau(x)\})\},$$

como no Lema 3.2.1.

Então $u_t(x) := \bar{b}_t\left(\bar{a}_t^{-1}(x)\right)$ é solução de

$$\begin{cases} du_t = F(t,x,u_t,\nabla u_t) dZ_t \\ u_0(x) = \phi(x) \in C^3 \end{cases}$$

onde $F : [0,T] \times \mathbb{R}^e \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^e \to \mathbb{R}^d$.

Demonstração. Pela fórmula de Itô-Ventzell, Teorema 2.1.2 (omitindo $F\Big(s, x, \bar{b}_t \circ \bar{a}_t^{-1}(x), \bar{c}_t \circ$ $\circ \bar{a}_t^{-1}(x)\Big) = F$)

$$\begin{aligned}u_t(x) &= \bar{b}_t\left(\bar{a}_t^{-1}(x)\right) \\ &= \bar{b}_0\left(\bar{a}_0^{-1}(x)\right) + \int_0^t \langle F - D_p F \centerdot c_s, dZ_s\rangle + \\ &\quad + \int_0^t \left\langle \nabla \bar{b}_s\left(\bar{a}_s^{-1}(x)\right), d\bar{a}_s^{-1}(x)\right\rangle. \qquad (3.2.10)\end{aligned}$$

Lembrando que

$$\nabla \bar{b}_t (y) = \bar{c}_t (y) \, D\bar{a}_t (y) \, ,$$

ver (3.2.4) no Lema 3.2.3, e que

$$d\bar{a}_t^{-1} (x) = D\bar{a}_t \left(\bar{a}_t^{-1} (x) \right)^{-1} D_p F \left(t, x, \bar{b}_t \circ \bar{a}_t^{-1} (x) \, , \bar{c}_t \circ \bar{a}_t^{-1} (x) \right) dZ_t,$$

ver Lema 3.2.1, podemos reescrever a ultima integral como

$$\int_0^t \left\langle \nabla \bar{b}_s \left(\bar{a}_s^{-1} (x) \right) , d\bar{a}_s^{-1} (x) \right\rangle = \int_0^t D_p F \left(s, x, \bar{b}_s \circ \bar{a}_s^{-1} (x) \, , \bar{c}_s \circ \bar{a}_s^{-1} (x) \right) \boldsymbol{.} \, c_t, dZ_t \tag{3.2.11}$$

Substituindo (3.2.11) em (3.2.10) temos

$$\begin{aligned} u_t (x) &= \bar{b}_0 \left(\bar{a}_0^{-1} (x) \right) + \int_0^t \left\langle F \left(s, x, \bar{b}_s \circ \bar{a}_s^{-1} (x) \, , \bar{c}_s \circ \bar{a}_s^{-1} (x) \right) , dZ_s \right\rangle \\ &= \phi (x) + \int_0^t \left\langle F \left(s, x, u_s (x) \, , \nabla u_s (x) \right) , dZ_s \right\rangle , \end{aligned}$$

pela definição de $u_s (x) = \bar{b}_s \circ \bar{a}_s^{-1} (x)$ e pois $\nabla u_s (x) = \nabla \left(\bar{b}_s \circ \bar{a}_s^{-1} \right) (x) = \bar{c}_s \circ \bar{a}_s^{-1} (x)$ (ver (3.2.5) no Lema 3.2.3). □

Teorema 3.2.5 (Unicidade)**.** Suponha que $F = F (t, x, u, p)$ é de classe C^{k+1} nas variáveis (x, u, p) e que $\phi \in C^k$ para $k \geq 4$. Sejam $Z \in C^\alpha \left([0, T] \, ; \mathbb{R}^d \right)$ com $\alpha > \frac{1}{2}$, e (a, b, c) solução do Sistema (3.1.1) com condição inicial $(x, \phi (x) \, , \nabla \phi (x))$. Denote $\bar{a}_t (x) = a_t (x, \phi (x) \, , \nabla \phi (x))$, analogamente para $\bar{b}$ e $\bar{c}$. Seja $u_t (x)$, $t \in [0, T (x))$, solução local de

$$\begin{cases} du_t = F (t, x, u_t, \nabla u_t) \, dZ_t \\ u_0 (x) = \phi (x) \in C^k \end{cases}$$

Então u pode ser representado como $u_t (x) = \bar{b}_t \circ \bar{a}_t^{-1} (x)$ para $t \in [0, \sigma (x) \wedge T (x))$. Ou seja, o problema possui solução unica.

Demonstração. Como $\bar{a}_t (x)$ e $\bar{b}_t (x)$ são unicamente determinados por F e por $\phi (x)$, o teorema anterior garante a unicidade. □

Referências

[1] Ch Brouder. “Trees, renormalization and differential equations”. Em: *BIT Numerical Mathematics* 44.3 (2004), pp. 425–438.

[2] John C Butcher. “An algebraic theory of integration methods”. Em: *Mathematics of Computation* 26.117 (1972), pp. 79–106.

[3] Michael Caruana e Peter Friz. “Partial differential equations driven by rough paths”. Em: *Journal of Differential Equations* 247.1 (2009), pp. 140–173.

[4] Pedro J. Catuogno e Rafael A. Castrequini. “On Young Systems”. Em: *pre-print* (2014).

[5] Kuo-Tsai Chen. “Integration of paths, geometric invariants and a generalized Baker-Hausdorff formula”. Em: *Annals of Mathematics* (1957), pp. 163–178.

[6] Kuo-Tsai Chen. “Integration of paths–A faithful representation of paths by noncommutative formal power series”. Em: *Transactions of the American Mathematical Society* (1958), pp. 395–407.

[7] R Courant. “Partial Differential Equations (vol. 2 of Methods of Mathematical Physics by R. Courant and D. Hilbert)”. Em: *New York: Interscience* (1962).

[8] Laure Coutin. “Rough paths via sewing lemma”. Em: *ESAIM PS* 16 (2012), pp. 479–526.

[9] Rosanna Coviello, Francesco Russo et al. “Nonsemimartingales: stochastic differential equations and weak Dirichlet processes”. Em: *The Annals of Probability* 35.1 (2007), pp. 255–308.

[10] Giuseppe Da Prato e Jerzy Zabczyk. *Stochastic equations in infinite dimensions*. Vol. 152. Cambridge university press, 2014.

[11] Halim Doss. “Liens entre équations différentielles stochastiques et ordinaires”. Em: *Annales de l’institut Henri Poincaré (B) Probabilités et Statistiques*. Vol. 13. 2. Gauthier-Villars. 1977, pp. 99–125.

[12] Denis Feyel e Arnaud de La Pradelle. “Curvilinear integrals along enriched paths”. Em: *Electron. J. Probab* 11.34 (2006), pp. 860–892.

[13] Franco Flandoli, Massimiliano Gubinelli e Enrico Priola. “Well-posedness of the transport equation by stochastic perturbation”. Em: *Inventiones mathematicae* 180.1 (2010), pp. 1–53.

[14] Franco Flandoli, Francesco Russo et al. “Generalized integration and stochastic ODEs”. Em: *The Annals of Probability* 30.1 (2002), pp. 270–292.

[15] P. K. Friz e M. Hairer. *A Course on Rough Paths*. Ed. por Universitext. Springer, 2014.

[16] Peter K Friz e Nicolas B Victoir. *Multidimensional stochastic processes as rough paths: theory and applications*. Cambridge University Press Cambridge, 2010.

[17] Peter Friz e Harald Oberhauser. "On the splitting-up method for rough (partial) differential equations". Em: *Journal of Differential Equations* 251.2 (2011), pp. 316–338.

[18] Peter Friz e Harald Oberhauser. "Rough path stability of (semi-) linear SPDEs". Em: *Probability Theory and Related Fields* 158.1-2 (2014), pp. 401–434.

[19] M. Gubinelli. "Abstract integration, Combinatorics of Trees and Differential Equations". Em: *ArXiv e-prints* (set. de 2008). arXiv: `0809.1821 [math.CA]`.

[20] M. Gubinelli. "Ramification of rough paths". Em: *ArXiv Mathematics e-prints* (out. de 2006). eprint: `math/0610300`.

[21] M. Gubinelli e A. Lejay. "Global existence for rough differential equations under linear growth conditions". Em: *ArXiv e-prints* (maio de 2009). arXiv: `0905.2399 [math.PR]`.

[22] Massimiliano Gubinelli. "Controlling rough paths". Em: *Journal of Functional Analysis* 216.1 (2004), pp. 86–140.

[23] Massimiliano Gubinelli, Samy Tindel et al. "Rough evolution equations". Em: *The Annals of Probability* 38.1 (2010), pp. 1–75.

[24] M. Hairer e D. Kelly. "Geometric versus non-geometric rough paths". Em: *ArXiv e-prints* (out. de 2012). arXiv: `1210.6294 [math.PR]`.

[25] Hiroshi Kunita. "First order stochastic partial differential equations". Em: *North-Holland Mathematical Library* 32 (1984), pp. 249–269.

[26] Hiroshi Kunita. "Some extensions of Ito's formula". Em: *Séminaire de Probabilités XV 1979/80*. Springer, 1981, pp. 118–141.

[27] Antoine Lejay. "Controlled differential equations as Young integrals: a simple approach". Anglais. Em: *Journal of Differential Equations* 249 (2010), pp. 1777–1798. DOI: `10.1016/j.jde.2010.05.006`. URL: `http://hal.inria.fr/inria-00402397`.

[28] Terry J Lyons. "Differential equations driven by rough signals". Em: *Rev. Mat. Iberoamericana* 14.2 (1998).

[29] Terry J Lyons, Michael Caruana e Thierry Lévy. *Differential equations driven by rough paths.* Springer, 2007.

[30] Terry Lyons e Zhongmin Qian. "System control and rough paths". Em: *Numerical Methods and Stochastics* 34 (2002), p. 91.

[31] Philip E Protter. *Stochastic Integration and Differential Equations: Version 2.1.* Vol. 21. Springer, 2004.

[32] Héctor J Sussmann. "On the gap between deterministic and stochastic ordinary differential equations". Em: *The Annals of Probability* (1978), pp. 19–41.

[33] Laurence C Young. “An inequality of the Hölder type, connected with Stieltjes integration”. Em: *Acta Mathematica* 67.1 (1936), pp. 251–282.