KÊNIA CRISTINA PEREIRA SILVA

SOBRE QUESTÕES DE COMBINATÓRIA ENVOLVENDO OS NÚMEROS DE FIBONACCI, PELL E JACOBSTHAL

CAMPINAS

2014

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

KÊNIA CRISTINA PEREIRA SILVA

SOBRE QUESTÕES DE COMBINATÓRIA ENVOLVENDO OS NÚMEROS DE FIBONACCI, PELL E JACOBSTHAL

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutora em matemática aplicada.

Orientador: José Plínio de Oliveira Santos

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA PELA ALUNA KÊNIA CRISTINA PEREIRA SILVA, E ORIENTADA PELO PROF. DR. JOSÉ PLÍNIO DE OLIVEIRA SANTOS.

Assinatura do Orientador

CAMPINAS

2014

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

Si38s

Silva, Kênia Cristina Pereira, 1984-
Sobre questões de combinatória envolvendo os números de Fibonacci, Pell e Jacobsthal / Kênia Cristina Pereira Silva. – Campinas, SP : [s.n.], 2014.

Orientador: José Plínio de Oliveira Santos.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Interpretações combinatórias. 2. Fibonacci, Números de. 3. Pell, Números de. 4. Jacobsthal, Números de. I. Santos, José Plínio de Oliveira,1951-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: About questions of combinatorics involving the numbers of Fibonacci, Pell and Jacobsthal
Palavras-chave em inglês:
Combinatorial interpretations
Fibonacci numbers
Pell numbers
Jacobsthal numbers
Área de concentração: Matemática Aplicada
Titulação: Doutora em Matemática Aplicada
Banca examinadora:
José Plínio de Oliveira Santos [Orientador]
Sueli Irene Rodrigues Costa
Cristiano Torezzan
Robson da Silva
Eduardo Henrique de Mattos Brietzke
Data de defesa: 07-10-2014
Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Tese de Doutorado defendida em 07 de outubro de 2014 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). JOSÉ PLÍNIO DE OLIVEIRA SANTOS

Prof(a). Dr(a). SUELI IRENE RODRIGUES COSTA

Prof(a). Dr(a). CRISTIANO TOREZZAN

Prof(a). Dr(a). ROBSON DA SILVA

Eduardo Brietzke

Prof(a). Dr(a). EDUARDO HENRIQUE DE MATTOS BRIETZKE

ABSTRACT

We have presented in this work new combinatorial interpretations for sequences including Fibonacci numbers, Pell numbers and Jacobsthal numbers, in terms of partitions. At the first moment we have listed the identities, definitions and results that we used in this work. Next we have introduced the Andrews method to find out the recurrence relations used at combinatorial interpretations and examples that them had been done. The next chapters are dedicated to new interpretations to Fibonacci, Pell and Jacobsthal sequences, and others. Lastly we have found identities among the sequences, some of them proved bijectively, through combinatorial interpretations setted up on previous chapters.

RESUMO

Neste trabalho apresentamos novas interpretações combinatórias para sequências que incluem os números de Fibonacci, os números de Pell e os números de Jacobsthal, em termos de partição. Na primeira parte listamos as identidades, definições e resultados que foram utilizados durante o trabalho. Na segunda parte introduzimos o método de Andrews para encontrar as relações de recorrência usadas nas interpretações combinatórias e exemplos de como estas interpretações foram feitas. Os capítulos seguintes estão dedicados a novas interpretações para as sequências de Fibonacci, Pell, Jacobsthal, entre outras. No último capítulo encontramos identidades entre as sequências, algumas provadas bijetivamente, através das interpretações combinatórias estabelecidas nos capítulos anteriores.

SUMÁRIO

Ao meu marido Fabiano e ao meu filho Fábio.

AGRADECIMENTOS

Chegar até a conclusão do Doutorado é ter muitos motivos e pessoas para agradecer e é com muito amor, carinho e gratidão que realizo meus agradecimentos.

Agradeço em primeiro lugar a Deus por todas as oportunidades que me foram oferecidas na vida, por ter me dado força para conseguir realizá-las, também, por me deixar nascer numa família que me ama e me apoia sempre e por me guiar na formação de uma nova família, ambas abençoadas.

Agradeço ao meu filho Fábio, a razão de todas as minhas conquistas e ao meu marido Fabiano, que é meu porto seguro, me acalma e me conforta, um verdadeiro companheiro.

Agradeço à minha mãe Sirlei, que é o meu maior exemplo de determinação, uma verdadeira guerreira e que sempre fez de tudo para que pudéssemos estudar e ter um futuro melhor. Agradeço ao meu irmão Alex pelo apoio e orgulho dedicados a mim e por sempre estar presente em todos os momentos da minha vida. Agradeço ao meu pai Carlos pelo incentivo e por ter me ensinado a ser forte. Agradeço aos outros membros de minha família, que mesmo não tendo todos os nomes citados aqui, sabem da importância que sempre tiveram em minha vida.

Agradeço aos meus amigos de maneira geral. Alguns não têm a menor ideia do que é esse mundo de estudos em Matemática, mas sempre perceberam a importância que isso tem pra mim, sendo suficiente para demonstrarem orgulho e apoio. Agradeço aos meus amigos da Unicamp, de maneira especial a Vanessa que me acompanha desde 2004, conhece todos os passos até esse momento e sempre se mostra disposta a ajudar. Agradeço os amigos do laboratório de Matemática Discreta e Códigos, em especial Christiane, pelos momentos de estudo, descontração e ajuda. Agradeço a Elen e Cecília pelo trabalho conjunto, por formarmos um grupo. Sem vocês tudo seria bem mais complicado.

Agradeço ao meu orientador Plínio por ter me recebido tão bem e me orientado na conclusão dessa etapa. Junto com ele, agradeço a todos os professores da Unicamp que colaboraram para minha formação. Alguns serão lembrados pela vida toda e servirão como exemplos pra mim.

Agradeço os membros banca, Sueli, Cristiano, Robson e Eduardo, que com muita atenção e carinho contribuíram para melhoria do meu trabalho.

Agradeço ao meus amigos do IFSP - Bragança Paulista pelo apoio nessa fase final.

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

INTRODUÇÃO

Em geral, as séries vistas em cálculo são hipergeométricas e por isto alguns fatos a respeito delas são conhecidos. Apesar disto, muitos pesquisadores, que se deparam com tais séries em seus trabalhos, não estão conscientes da teoria geral existente acerca das mesmas. Vários fatos sobre séries hipergeométricas foram, primeiramente, encontrados por Euler e uma importante identidade foi descoberta por Pfaff, um dos professores de Gauss. Contudo, foi Gauss mesmo quem completamente reconheceu seu significado e deu um tratamento sistemático em dois importantes trabalhos, um dos quais foi publicado após sua morte. Uma razão para o interesse de Gauss nestas séries foi o fato de que as funções elementares e várias outras importantes funções em matemática podem ser expressas em termos de funções hipergeométricas. Meio século depois de Gauss, Riemann apresentou as funções hipergeométricas sob um ponto de vista diferente o que tornou disponível as fórmulas básicas com um mínimo de cálculo.

Em 1894, L.J Rogers descobriu um par de identidades que, mais tarde, passaram a se chamar Identidades de Rogers-Ramanujan. Durante a primeira metade de Século XX vários matemáticos incluindo Rogers, F.H. Jacson e W. N. Bailey descobriram várias identidades que, na forma, assemelham-se às de Rogers-Ramanujan. Em sua tese de doutorado, L. J. Slater (aluna de Bailey) apresentou uma lista de 130 identidades do tipo Rogers-Ramanujan. Em 1986 Andrews apresentou um algoritmo através do qual generalizações polinomiais de Identidades do tipo Rogers-Ramanujan podem ser obtidas.

Uma das principais razões para o estudo de identidades do tipo Rogers-Ramanujan é o fato de identidades deste tipo surgirem em problemas de modelagem em Mecânica Estatística, Teoria de representação de grupos, Álgebras de Lie, Combinatória, etc.

Neste trabalho apresentamos novas interpretações combinatórias para várias sequências a partir de ideias dadas por Andrews em [3], e resultados dados por Santos em [9]. Andrews introduziu uma função de duas variáveis para o estudo de Identidades do tipo Rogers-Ramanujan e Santos conjecturou fórmulas explícitas para famílias de polinômios que podem ser obtidas usando-se o método de Andrews para mais de 70 identidades da lista de 130 de Slater [19]. As fórmulas apresentadas neste trabalho podem ser provadas como feito em [12] para a Identidade 20, fazendo-se vários cálculos, ou com a ajuda do programa dado por Sills em [16]. Obtivemos interpretações combinatórias para sequências, que incluem os números de Fibonacci, os números de Pell e os números de Jacobsthal em termos de partição. Para isso, usamos as Identidades 9, 12, 15, 16, 19, 20, 23, 27, 28, 29, 31, 32, 33, 38, 39, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 50, 51, 62, 63, 66, 67, 80, 81, 82, 84, 87, 95, 111, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124 e 125 listadas abaixo, que são parte da lista de 130 identidades dadas por Slater em [19]. Também foram estudadas as sequências $A052542$, $A006054$, $A003462$, $A006054$, $A001654$, $A028495$, $A052534$, $A007051$, $A188022$, $A000079$, $A000244$, $A077846$ e $A025192$ dadas em [22].

Ao longo deste trabalho, usaremos a notação de q-séries,

$$(a)_n = (a;q)_n = \prod_{j=0}^{\infty} \frac{(1-aq^j)}{(1-aq^{j+n})} = (1-a)(1-aq)\ldots(1-aq^{n-1}) \tag{1}$$

onde n é um inteiro positivo, e

$$(a;q)_\infty = (a)_\infty = \prod_{j=0}^{\infty}(1-aq^j), \tag{2}$$

para $|q| < 1$.

Identidade 9:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(2n+1)}}{(q;q)_{2n+1}} = \frac{1}{(q^2;q^2)_\infty}(q^4;q^4)_\infty(-q^3;q^4)_\infty(-q;q^4)_\infty. \tag{3}$$

Identidade 12:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1;q)_n q^{\binom{n+1}{2}}}{(q;q)_n} = \frac{(-q;q)_\infty}{(q;q)_\infty}(q^4;q^4)_\infty(q^2;q^4)_\infty^2. \tag{4}$$

Identidade 15:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n(3n-2)}}{(q^4;q^4)_n(-q;q^2)_n} = \frac{1}{(q^2;q^2)_\infty}(q^5;q^5)_\infty(q^4;q^5)_\infty(q;q^5)_\infty. \tag{5}$$

Identidade 16:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+2n}}{(q^4;q^4)_n} = \frac{(-q;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}(q^5;q^5)_\infty(q^4;q^5)_\infty(q;q^5)_\infty. \tag{6}$$

Identidade 19:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{3n^2}}{(q^4;q^4)_n(-q;q^2)_n} = \frac{1}{(q^2;q^2)_\infty}(q^5;q^5)_\infty(q^3;q^5)_\infty(q^2;q^5)_\infty. \tag{7}$$

Identidade 20:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q^4;q^4)_n} = \frac{(-q;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}(q^5;q^5)_\infty(q^3;q^5)_\infty(q^2;q^5)_\infty. \tag{8}$$

Identidade 23:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n^2}}{(q^2;q^2)_n} = \frac{(q;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}(q^6;q^6)_\infty(q^4;q^6)_\infty(q^2;q^6)_\infty. \tag{9}$$

Identidade 27:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q;q^2)_n q^{2n(n+1)}}{(q;q^2)_{n+1}(q^4;q^4)_n} = \frac{1}{(q^2;q^2)_\infty}(q^6;q^6)_\infty(-q^5;q^6)_\infty(-q;q^6)_\infty. \tag{10}$$

Identidade 28:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q^2;q^2)_n q^{n^2+n}}{(q;q)_{2n+1}} = \frac{(-q^2;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}(q^6;q^6)_\infty(-q^5;q^6)_\infty(-q;q^6)_\infty. \tag{11}$$

Identidade 29:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-q;q^2)_n q^{n^2}}{(q;q)_{2n}} = \frac{(-q;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}(q^6;q^6)_\infty(-q^4;q^6)_\infty(-q^2;q^6)_\infty. \tag{12}$$

Identidade 31:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{2n(n+1)}}{(q^2;q^2)_n(-q;q)_{2n+1}} = \frac{1}{(q^2;q^2)_\infty}(q^7;q^7)_\infty(q^6;q^7)_\infty(q;q^7)_\infty. \tag{13}$$

Identidade 32:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{2n(n+1)}}{(q^2;q^2)_n(-q;q)_{2n}} = \frac{1}{(q^2;q^2)_\infty}(q^7;q^7)_\infty(q^5;q^7)_\infty(q^2;q^7)_\infty. \tag{14}$$

Identidade 33:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{2n^2}}{(q^2;q^2)_n(-q;q)_{2n}} = \frac{1}{(q^2;q^2)_\infty}(q^7;q^7)_\infty(q^4;q^7)_\infty(q^3;q^7)_\infty. \tag{15}$$

Identidade 38:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{2n(n+1)}}{(q;q)_{2n+1}} = \frac{1}{(q^2;q^2)_\infty}(q^8;q^8)_\infty(-q^7;q^8)_\infty(-q;q^8)_\infty. \tag{16}$$

Identidade 39:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{2n^2}}{(q;q)_{2n}} = \frac{1}{(q^2;q^2)_\infty}(q^8;q^8)_\infty(-q^5;q^8)_\infty(-q^3;q^8)_\infty. \tag{17}$$

Identidade 43:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-q;q)_n q^{\frac{1}{2}n(n+3)}}{(q;q^2)_{n+1}(q;q)_n} = \frac{(-q;q)_\infty}{(q;q)_\infty}(q^{10};q^{10})_\infty(q^9;q^{10})_\infty(q;q^{10})_\infty. \tag{18}$$

Identidade 44:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{\frac{3}{2}n(n+1)}}{(q;q^2)_{n+1}(q;q)_n} = \frac{1}{(q;q)_\infty}(q^{10};q^{10})_\infty(q^8;q^{10})_\infty(q^2;q^{10})_\infty. \tag{19}$$

Identidade 45:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-q;q)_nq^{\frac{1}{2}n(n+1)}}{(q;q^2)_{n+1}(q;q)_n}=\frac{(-q;q)_\infty}{(q;q)_\infty}(q^{10};q^{10})_\infty(q^7;q^{10})_\infty(q^3;q^{10})_\infty. \tag{20}$$

Identidade 46:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{\frac{1}{2}n(3n-1)}}{(q;q^2)_n(q;q)_n}=\frac{1}{(q;q)_\infty}(q^{10};q^{10})_\infty(q^6;q^{10})_\infty(q^4;q^{10})_\infty. \tag{21}$$

Identidade 47:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1;q^2)_nq^{n^2}}{(q;q)_{2n}}=\frac{1}{(q;q)_\infty}(q^4;q^4)_\infty(q^6;q^8)_\infty(q^2;q^8)_\infty(-q;q^2)_\infty. \tag{22}$$

Identidade 48:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1;q^2)_nq^{n(n+1)}}{(q;q)_{2n}}=\frac{1}{(q;q)_\infty}(-q^3;-q^3)_\infty(-q^2;-q^3)_\infty(q;-q^3)_\infty. \tag{23}$$

Identidade 50:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-q;q^2)_nq^{n(n+2)}}{(q;q)_{2n+1}}=\frac{1}{(q;q)_\infty}(q^{12};q^{12})_\infty(q^{10};q^{12})_\infty(q^2;q^{12})_\infty. \tag{24}$$

Identidade 51:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-q;q^2)_nq^{n(n+1)}}{(q;q)_{2n+1}}=\frac{1}{(q;q)_\infty}(q^{12};q^{12})_\infty(q^8;q^{12})_\infty(q^4;q^{12})_\infty. \tag{25}$$

Identidade 62:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-q;q)_nq^{\frac{1}{2}n(3n+1)}}{(q;q)_{2n+1}}=\frac{(-q;q)_\infty}{(q;q)_\infty}(q^5;q^5)_\infty(q^4;q^5)_\infty(q;q^5)_\infty(q^7;q^{10})_\infty(q^3;q^{10})_\infty. \tag{26}$$

Identidade 63:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-q;q)_nq^{\frac{3}{2}n(n+1)}}{(q;q)_{2n+1}}=\frac{(-q;q)_\infty}{(q;q)_\infty}(q^5;q^5)_\infty(q^3;q^5)_\infty(q^2;q^5)_\infty(q^9;q^{10})_\infty(q;q^{10})_\infty. \tag{27}$$

Identidade 66:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1;q^4)_n(-q;q^2)_n q^{n^2}}{(q^2;q^2)_{2n}} = \frac{(-q;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}(q^{16};q^{16})_\infty(q^{10};q^{16})_\infty(q^6;q^{16})_\infty \tag{28}$$

$$+q((q^{16};q^{16})_\infty(q^{14};q^{16})_\infty(q^2;q^{16})_\infty).$$

Identidade 67:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1;q^4)_n(-q;q^2)_n q^{n^2+2n}}{(q^2;q^2)_{2n}} = \frac{(-q;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}((q^{16};q^{16})_\infty(q^{10};q^{16})_\infty(q^6;q^{16})_\infty \tag{29}$$

$$-q(q^{16};q^{16})_\infty(q^{14};q^{16})_\infty(q^2;q^{16})_\infty).$$

Identidade 80:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q;q)_n q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(q^2;q^2)_n(q;q^2)_{n+1}} = \frac{(-q;q)_\infty}{(q;q)_\infty}((q^{21};q^{21})_\infty(-q^{13};q^{21})_\infty(-q^8;q^{21})_\infty \tag{30}$$

$$-q^2(q^{21};q^{21})_\infty(-q^{20};q^{21})_\infty(-q;q^{21})_\infty).$$

Identidade 81:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q;q)_n q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(q^2;q^2)_n(q;q^2)_n} = \frac{(-q;q)_\infty}{(q;q)_\infty}((q^{21};q^{21})_\infty(-q^{11};q^{21})_\infty(-q^{10};q^{21})_\infty \tag{31}$$

$$-q(q^{21};q^{21})_\infty(-q^{17};q^{21})_\infty(-q^4;q^{21})_\infty).$$

Identidade 82:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q;q)_n q^{\frac{n(n+3)}{2}}}{(q^2;q^2)_n(q;q^2)_{n+1}} = \frac{(-q;q)_\infty}{(q;q)_\infty}((q^{21};q^{21})_\infty(-q^{16};q^{21})_\infty(-q^5;q^{21})_\infty \tag{32}$$

$$-q(q^{21};q^{21})_\infty(-q^{19};q^{21})_\infty(-q^2;q^{21})_\infty).$$

Identidade 84:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(2n+1)}}{(q;q)_{2n+1}} = \frac{1}{(q;q)_\infty}(q^8;q^8)_\infty(q^6;q^8)_\infty(q^2;q^8)_\infty(q^{12};q^{16})_\infty(q^4;q^{16})_\infty. \tag{33}$$

Identidade 87:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q^2;q^4)_n q^{2n(n+1)}}{(q^4;q^4)_n(q;q^2)_n(q;q^2)_{n+1}} = \frac{1}{(q^2;q^2)_\infty}(q^6;q^6)_\infty(-q;q^6)_\infty(-q^5;q^6)_\infty. \tag{34}$$

Identidade 95:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-q;q^2)_n q^{n(3n-2)}}{(q^2;q^2)_{2n}} = \frac{(-q;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}(q^{10};q^{10})_\infty(q^7;q^{10})_\infty(q^3;q^{10})_\infty(q^4;q^{20})_\infty(q^{16};q^{20})_\infty. \tag{35}$$

Identidade 111:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-q;q^2)_n(q^6;q^6)_{n-1}q^{n^2+2n}}{(q^2;q^2)_{2n}(q^2;q^2)_{n-1}} = \frac{(-q;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}((q^{36};q^{36})_\infty(q^{21};q^{36})_\infty(q^{15};q^{36})_\infty \tag{36}$$

$$-q(q^{36};q^{36})_\infty(q^{27};q^{36})_\infty(q^9;q^{36})_\infty).$$

Identidade 113:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-q;q^2)_n(q^6;q^6)_{n-1}q^{n^2}}{(q^2;q^2)_{2n}(q^2;q^2)_{n-1}} = \frac{(-q;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}((q^{36};q^{36})_\infty(q^{21};q^{36})_\infty(q^{15};q^{36})_\infty \tag{37}$$

$$-q^3(q^{36};q^{36})_\infty(q^{33};q^{36})_\infty(q^3;q^{36})_\infty).$$

Identidade 114:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-q;q^2)_n(q^6;q^6)_{n-1}q^{n^2}}{(q^2;q^2)_{2n-1}(q^2;q^2)_n} = \frac{(-q;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}(q^{36};q^{36})_\infty(q^{21};q^{36})_\infty(q^{15};q^{36})_\infty \tag{38}$$

Identidade 115:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-q;q^2)_{n+1}(q^6;q^6)_n q^{n(n+2)}}{(q^2;q^2)_{2n+2}(q^2;q^2)_n} = \frac{(-q;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}(q^{36};q^{36})_\infty(q^{27};q^{36})_\infty(q^9;q^{36})_\infty \tag{39}$$

Identidade 116:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-q;q^2)_{n+1}(q^6;q^6)_n q^{n(n+4)}}{(q^2;q^2)_{2n+2}(q^2;q^2)_n} = \frac{(-q;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}(q^{36};q^{36})_\infty(q^{33};q^{36})_\infty(q^3;q^{36})_\infty \tag{40}$$

Identidade 117:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q;q^2)_n q^{n^2}}{(q^2;q^2)_{2n}} = \frac{(-q;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}((q^{42};q^{42})_\infty(-q^{23};q^{42})_\infty(-q^{19};q^{42})_\infty \tag{41}$$

$$-q^3(q^{42};q^{42})_\infty(-q^{37};q^{42})_\infty(-q^{5};q^{42})_\infty).$$

Identidade 118:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q;q^2)_n q^{n(n+2)}}{(q^2;q^2)_{2n}} = \frac{(-q;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}((q^{42};q^{42})_\infty(-q^{25};q^{42})_\infty(-q^{17};q^{42})_\infty) \tag{42}$$

$$-q(q^{42};q^{42})_\infty(-q^{31};q^{42})_\infty(-q^{11};q^{42})_\infty).$$

Identidade 119:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q;q^2)_{n+1} q^{n(n+2)}}{(q^2;q^2)_{2n+1}} = \frac{(-q;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}((q^{42};q^{42})_\infty(-q^{29};q^{42})_\infty(-q^{13};q^{42})_\infty) \tag{43}$$

Identidade 120:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q^2;q^2)_{n-1} q^{n(n+1)}}{(q;q)_{2n}} = \frac{1}{(q;q)_\infty}((q^{48};q^{48})_\infty(-q^{26};q^{48})_\infty(-q^{22};q^{48})_\infty) \tag{44}$$

$$-q(q^{48};q^{48})_\infty(-q^{34};q^{48})_\infty(-q^{14};q^{48})_\infty).$$

Identidade 121:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q^2;q^2)_{n-1} q^{n^2}}{(q;q)_{2n}} = \frac{1}{(q;q)_\infty}((q^{48};q^{48})_\infty(-q^{26};q^{48})_\infty(-q^{22};q^{48})_\infty) \tag{45}$$

$$-q^2(q^{48};q^{48})_\infty(-q^{38};q^{48})_\infty(-q^{10};q^{48})_\infty).$$

Identidade 122:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q^2;q^2)_n q^{n(n+3)}}{(q;q)_{2n=2}} = \frac{1}{(q;q)_\infty}((q^{48};q^{48})_\infty(-q^{38};q^{48})_\infty(-q^{10};q^{48})_\infty) \tag{46}$$

$$-q^3(q^{48};q^{48})_\infty(-q^{46};q^{48})_\infty(-q^{2};q^{48})_\infty).$$

Identidade 123:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q^2;q^2)_n q^{n(n+2)}}{(q;q)_{2n+2}} = \frac{1}{(q;q)_\infty}(q^{16};q^{16})_\infty(q^{10};q^{16})_\infty(q^6;q^{16})_\infty(q^{28};q^{32})_\infty(q^4;q^{32})_\infty. \qquad (47)$$

Identidade 124:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q^3;q^6)_n q^{2n(n+1)}}{(q^2;q^2)_{2n+1}(q;q^2)_n} = \frac{1}{(q^2;q^2)_\infty}(q^{18};q^{18})_\infty(q^{28};q^{36})_\infty(q^{13};q^{36})_\infty(-q^{13};q^{18})_\infty(-q^5;q^{18})_\infty. \qquad (48)$$

Identidade 125:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q^3;q^6)_n q^{2n(n+2)}}{(q^2;q^2)_{2n+1}(q;q^2)_n} = \frac{1}{(q^2;q^2)_\infty}(q^{18};q^{18})_\infty(q^{32};q^{36})_\infty(q^4;q^{32})_\infty(-q^{11};q^{18})_\infty(-q^7;q^{18})_\infty. \qquad (49)$$

CAPÍTULO 1

DEFINIÇÕES

Antes de apresentarmos nossos resultados são necessárias algumas definições. Iniciamos introduzindo os objetos de estudo: partição, sobrepartição e partição em cores. Em seguida, definimos as sequências de Fibonacci, Pell e Jacobsthal e listamos algumas relações e resultados importantes.

Uma ***partição*** de um inteiro n é uma sequência não crescente de inteiros positivos $(\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_k)$, tal que $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = n$. Por exemplo, para $n = 4$ as partições são:

$$4 \quad 3+1 \quad 2+2 \quad 2+1+1 \quad 1+1+1+1.$$

Denotamos o número de partições de n por $p(n)$, no caso do exemplo anterior, temos $p(4) = 5$.

Uma ***sobrepartição*** de um inteiro n é uma partição de n, onde a primeira aparição de uma parte pode ser marcada. Utilizando novamente o inteiro 4 para exemplificar, temos abaixo a lista de suas sobrepartições:

$$4 \quad \bar{4} \quad 3+1 \quad \bar{3}+1 \quad 3+\bar{1} \quad \bar{3}+\bar{1} \quad 2+2 \quad \bar{2}+2 \quad 2+1+1$$

$$\bar{2}+1+1 \quad 2+\bar{1}+1 \quad \bar{2}+\bar{1}+1 \quad 1+1+1+1 \quad \bar{1}+1+1+1.$$

As sobrepartições de um inteiro n são denotadas por $\bar{p}(n)$ e, para $n = 4$ temos o total de $\bar{p}(4) = 14$.

Uma ***partição em cores*** de um inteiro n é uma partição onde as partes de uma dada cor representam uma partição com certas restrições. Utilizando ainda $n = 4$, podemos definir, como exemplo, as partições laranja-azul como segue:

Partições laranja-azul são aquelas onde as partes laranjas são formadas por pares distintos e ímpares irrestritos e as partes azuis por pares irrestritos.

$$\color{orange}{4} \quad \color{orange}{3}+\color{orange}{1} \quad \color{orange}{2}+\color{orange}{1}+\color{orange}{1} \quad \color{orange}{1}+\color{orange}{1}+\color{orange}{1}+\color{orange}{1} \quad \color{blue}{4} \quad \color{blue}{2}+\color{blue}{2} \quad \color{blue}{2}+\color{orange}{2} \quad \color{blue}{2}+\color{orange}{1}+\color{orange}{1}.$$

Podemos denotar o número de partições laranja-azul de n por $p_{l,a}(n)$ e com isso, $p_{l,a}(4) = 8$.

Iremos estabelecer igualdades entre o número de partições com restrições e sequências conhecidas, como as sequências de Fibonacci, Pell e Jacobsthal, definidas a seguir.

Os números de Pell 1, 2, 5, 12, 29, ..., definidos pela relação de recorrência $p_0 = 1$; $p_1 = 2$; $p_n = 2p_{n-1} + p_{n-2}, n \geq 2$, são os denominadores da sequência de números racionais

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \ldots$$

que são os convergentes da fração contínua que representa $\sqrt{2}$.

Os números de Fibonacci 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... são definidos por

$$F_0 = 0; F_1 = 1; F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 2.$$

Os números de Jacobsthal 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, ... são definidos por

$$J_0 = 1; J_1 = 1; J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}, n \geq 2.$$

Nas conjecturas para os polinômios, apresentadas neste texto, necessitamos de algumas relações listadas abaixo. Para simplificar, usamos a seguinte definição,

Os polinômios Gaussianos são definidos como a seguir:

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q = \begin{cases} \dfrac{(q)_n}{(q)_m(q)_{n-m}}, & 0 \leq m \leq n \\ 0, & \text{caso contário.} \end{cases} \tag{1.1}$$

Estes polinômios são conhecidos como q-análogos dos números binomiais, o que significa que o limite quando q tende a 1 de (1.1) é $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{(n-m)!m!}$, [p. 64 [7]].

Os coeficientes de x^{j+n} na expansão de $(1 + x + x^2)^n$ são chamados de ***coeficientes trinomiais*** e são dados por:

$$\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix}_2 = \sum_{h \geq 0} (-1)^h \begin{pmatrix} n \\ h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2n-2h \\ n-j-h \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Tais coeficientes satisfazem as seguintes identidades.

$$\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} n \\ -j \end{pmatrix}_2. \tag{1.3}$$

$$\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} n-1 \\ j-1 \end{pmatrix}_2 + \begin{pmatrix} n-1 \\ j \end{pmatrix}_2 + \begin{pmatrix} n-1 \\ j+1 \end{pmatrix}_2. \tag{1.4}$$

As duas expressões seguintes são q-análogos dos coeficientes trinomiais, da mesma maneira que os polinômios Gaussianos são q-análogos dos números binomiais, ou seja, o limite quando q tende a 1, de cada um desses valores, resulta nos coeficientes trinomias.
[[5], Eq. (4.2) e Eq. (4.3)]

$$T_0(n, j, q) = \sum_{h\geq 0}(-1)^h \begin{bmatrix} n \\ h \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} 2n-2h \\ n-j-h \end{bmatrix}_q . \tag{1.5}$$

$$T_1(n, j, q) = \sum_{h\geq 0}(-q)^h \begin{bmatrix} n \\ h \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} 2n-2h \\ n-j-h \end{bmatrix}_q . \tag{1.6}$$

Para verificarmos isso, basta observar que ao trocarmos q por q^2 em (1.1) encontramos $\begin{bmatrix} n \\ h \end{bmatrix}_{q^2}$. Como

$$\lim_{q\to 1} \begin{bmatrix} n \\ h \end{bmatrix}_{q^2} = \begin{pmatrix} n \\ h \end{pmatrix} \text{e} \lim_{q\to 1} \begin{bmatrix} 2n-2h \\ n-j-h \end{bmatrix}_q = \begin{pmatrix} 2n-2h \\ n-j-h \end{pmatrix}.$$

Temos que,

$$\lim_{q\to 1} T_0 = \lim_{q\to 1} T_1 = \begin{pmatrix} n \\ h \end{pmatrix}_2 .$$

Podemos ainda definir $U(n, j)$ e $CT(n, j)$ como:

$$U(n, j) = T_0(n, j, q) + T_0(n, j+1, q). \tag{1.7}$$

$$CT(n, j) = T_1(n, j, q^{1/2}). \tag{1.8}$$

O seguinte q-análogo dos coeficientes trinomias também é necessário:

$$J(n, j, q) = \sum_{h\geq 0}(-1)^h q^{h^2} \begin{bmatrix} n \\ h \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} 2n-2h \\ n-j-h \end{bmatrix}_{q^2} . \tag{1.9}$$

Juntamente com $\lim\limits_{q\longrightarrow -1} J(n, j, q)$, neste texto denotado por $\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix}_3$, dado por

$$\binom{n}{j}_3 = \sum_{h\geq 0}\binom{n}{h}\binom{2n-2h}{n-j-h}.$$

O limite (1.10) será utilizado na demostração da Identidade (6), a qual será utilizada para exemplificar o método de Andrews.

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} U(n,j) = \frac{(-q;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}. \qquad [[5], Eq.(4.16)] \tag{1.10}$$

São necessários ainda dois resultados importantes, cujas demonstrações podem ser encontradas nas bibliografias citadas:

Lema de Abel: Se $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n = L$, então $\lim\limits_{t\longrightarrow 1^-}(1-t)\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n = L.$ [p. 190 [6]]

Produto Triplo de Jacobi: $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n x^n q^{n(n+1)/2} = \prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-x^{-1}q^{n-1})(1-xq^n)(1-q^n).$ [[21], Eq. (1.1)]

CAPÍTULO 2

MÉTODO DE ANDREWS E INTERPRETAÇÕES COMBINATÓRIAS

Vamos descrever aqui a ideia introduzida por Andrews em [3] e utilizada por Santos em [9] para encontrar as relações de recorrência apresentadas neste trabalho. O interessante destas relações de recorrência é que, para certos valores da variável q, obtemos importantes sequências. Mostraremos, através de dois exemplos, como estas interpretações combinatórias foram obtidas. Um deles envolve uma sequência conhecida e o outro uma não conhecida.

Método de Andrews

Uma identidade do tipo Rogers-Ramanujan é uma igualdade $\pi(q) = \phi(q)$, onde $\pi(q)$ é uma série e $\phi(q)$ é um produto infinito. O método de Andrews define uma função de duas variáveis $f(q,t)$ com propriedades que auxiliam na demostração desta identidade, e que permite as interpretações combinatórias. Considere essa função com as seguintes propriedades:

i) $f(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(q)\, t^n$, onde $P_n(q)$ são polinômios;

ii) $\lim_{n\longrightarrow\infty} P_n(q) = \phi(q)$;

iii) $f(q,t)$ satisfaz uma equação não homogênea da forma:

$$f(q,t) = R_1(q,t) + R_2(q,t)\, f(q,tq^k),$$

onde R_1 e R_2 são funções racionais de q e k é um inteiro não negativo. A função $f(q,t)$ é obtida inserindo-se um parâmetro t em $\pi(q)$ de maneira que o $(n+1)$-ésimo termo desta nova série é obtido a partir do n-ésimo termo, trocando t por tq^k. Através de **i)** e **iii)** é possível obter a uma relação de recorrência para $P_n(q)$, que pode ser interpretada combinatorialmente e, com $f(q,t)$ e o Lema de Abel, é possível mostrar que $\pi(q) = \phi(q)$.

Vamos apresentar aqui a ideia geral deste trabalho, mostrar como aplicar o método de Andrews para encontrar as relações de recorrência e como interpretar combinatorialmente as funções $f(q,t)$.

Equação funcional

Dada uma identidade do tipo Rogers-Ramanujan, podemos introduzir o parâmetro t no somatório, como sugerido em **i)** no método de Andrews, de maneira que possamos encontrar uma equação funcional como em **iii)**. Esta equação funcional será importante para chegarmos à relação de recorrência, que é o objeto central de nossas interpretações.

Para exemplificar, considere a Identidade 16, equação (6), dada por:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+2n}}{(q^4;q^4)_n} = \frac{(-q;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}(q^5;q^5)_\infty(q^4;q^5)_\infty(q;q^5)_\infty. \tag{2.1}$$

Se introduzirmos o parâmetro t no somatório de (2.1) da seguinte maneira

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n q^{n^2+2n}}{(t;q^2)_{n+1}(-tq^2;q^2)_n}, \tag{2.2}$$

encontramos uma função de duas variáveis, que será chamada de $f_{16}(q,t)$.

De acordo com o método de Andrews esta função deve satisfazer as propriedades **i)**, **ii)** e **iii)**. Reescrevendo a função $f_{16}(q,t)$, é possível encontrar a propriedade **iii)**, da seguinte maneira

$$f_{16}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n q^{n^2+2n}}{(t;q^2)_{n+1}(-tq^2;q^2)_n} = \frac{1}{(1-t)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n q^{n^2+2n}}{(t;q^2)_{n+1}(-tq^2;q^2)_n} =$$

$$\frac{1}{(1-t)} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1} q^{n^2+4n+3}}{(1-t)(tq^2;q^2)_{n+1}(1+tq^2)(-tq^4;q^2)_n} =$$

$$\frac{1}{(1-t)} + \frac{tq^3}{(1-t)(1+tq^2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n q^{n^2+4n}}{(tq^2;q^2)_{n+1}(-tq^4;q^2)_n} =$$

$$\frac{1}{(1-t)} + \frac{tq^3}{(1-t)(1+tq^2)} f_{16}(q,tq^2).$$

Reorganizando, temos a equação funcional procurada:

$$(1-t)(1+tq^2)f_{16}(q,t) = 1 + tq^2 + tq^3 f_{16}(q,tq^2). \tag{2.3}$$

Relação de recorrência

De posse desta equação funcional, e sabendo que o coeficiente de t^n da equação (2.2) é um polinômio em q, podemos chegar à uma relação de recorrência. Continuando com o exemplo de $f_{16}(q,t)$, usando a equação funcional (2.3) e substituindo nela $f_{16}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n t^n$ obtemos

$$(1-t)(1+tq^2)\sum_{n=0}^{\infty} P_n t^n = 1 + tq^2 + tq^3 \sum_{n=0}^{\infty} P_n q^{2n} t^n,$$

Expandindo a igualdade obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n t^n - \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1} t^n + q^2 \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1} t^n - q^2 \sum_{n=2}^{\infty} P_{n-2} t^n = 1 + tq^2 + q^3 \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1} q^{2n-2} t^n,$$

$$P_0+(P_1-P_0+q^2P_0)\,t+\sum_{n=2}^{\infty}(P_n-P_{n-1}+q^2P_{n-1}-q^2P_{n-2})t^n = 1+(q^2+q^3P_0)\,t+q^3\sum_{n=2}^{\infty}P_{n-1}q^{2n-2}t^n.$$

Igualando os coeficientes de mesma potência encontramos

$$P_0 = 1, \quad P_1 - P_0 + q^2P_0 = q^2 + q^3P_0$$

e

$$\sum_{n=2}^{\infty}(P_n - P_{n-1} + q^2P_{n-1} - q^2P_{n-2})t^n = q^3\sum_{n=2}^{\infty}P_{n-1}q^{2n-2}t^n.$$

E com isso chegamos à relação de recorrência dada por:

$$P_0 = 1;\;\; P_1 = 1 + q^3;$$
$$P_n(q) = (1 - q^2 + q^{2n+1})P_{n-1} + q^2P_{n-2}. \tag{2.4}$$

Em muitos casos, para $q = 1$, essa é uma relação da qual já temos uma interpretação. O que fazemos é analisar $f(q,t)$ em termos de partição e encontrar uma interpretação combinatória para essas sequências, usando o fato de que $P_N(q)$ é o coeficiente de t^N em $f(q,t)$. Também encontramos interpretações combinatórias para a relação com $q = -1$, basta usar a função correspondente $f_i(-q,t)$.

Antes de apresentarmos um exemplo de como as interpretações combinatórias foram feitas, vamos exemplificar como é possível provar as identidades do tipo Rogers-Ramanujam, apresentadas na introdução.

Prova da Identidade 16

Santos apresentou em [9] uma fórmula explicíta para os representantes de posição ímpar da família de polinômios dadas por (2.4):

$$P_{2n-1}(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{10j^2+3j}U(2n,5j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{10j^2+13j+4}U(2n,5j+3).$$

Ela pode ser provada como feito para a Identidade 20 em [12] , através de vários cálculos, ou com a ajuda de um pacote dado por Sills em [16].

Tendo provado isso, é possível mostrar a Identidade (2.1) tomando o $\lim_{n \longrightarrow \infty} P_n(q)$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+2n}}{(q^4;q^4)_n} = \lim_{t \longrightarrow 1^-} (1-t) f_{16}(q,t) \overbrace{=}^{*} \lim_{n \longrightarrow \infty} P_n(q) =$$

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{10j^2+3j} U(2n,5j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{10j^2+13j+4} U(2n,5j+3) \right] \overbrace{=}^{**}$$

$$\frac{(-q;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty} \left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{10j^2+3j} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{10j^2+13j+4} \right] =$$

$$\frac{(-q;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n(5n+3)/2} \overbrace{=}^{***}$$

$$\frac{(-q;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty} (q^5;q^5)_\infty (q^4;q^5)_\infty (q;q^5)_\infty .$$

Observe que foram usados o Lema de Abel $(*)$, o limite dado pela equação (1.10) $(**)$ e o Produto triplo de Jacob com $x = q^{-1}$ e $q = q^5$ $(***)$, apresentados na introdução.

Nosso objetivo é encontrar interpretações combinatórias para as equações sem provar as identidades, mas este exemplo serve para mostrar de maneira completa como o método de Andrews pode ser usado.

Usando o fato de termos $P_n(1)$ ou $P_n(-1)$ como uma sequência conhecida e uma fórmula explícita para $P_n(q)$ podemos, além da interpretação combinatória, encontrar uma nova fórmula geral para tal sequência. Neste trabalho, procedemos como no exemplo seguinte para encontrarmos novas fórmulas para as sequências estudadas.

Fórmula para os números de Fibonacci usando a Identidade 16

Utilizando o método de Andrews é possível, por exemplo, encontrar uma nova fórmula fechada para a sequência de Fibonacci. Substituindo $q = 1$ em (2.4) chegamos à sequência dos números de Fibonacci. Ao mesmo tempo, sabemos que

$$P_{2n-1}(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{10j^2+3j} U(2n,5j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{10j^2+13j+4} U(2n,5j+3) \tag{2.5}$$

usando (1.5) e (1.7) em (2.5) e tomando o limite quando q tende para 1, podemos encontrar uma nova fórmula para a subsequência ímpar dos números de Fibonacci.

$$\lim_{q\longrightarrow 1} P_{2n-1}(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\left[\binom{2n}{5j}_2 + \binom{2n}{5j+1}_2 - \binom{2n}{5j+3}_2 - \binom{2n}{5j+4}_2\right].$$

Quando fazemos a substituição $q = 1$ em (2.4) encontramos a sequência de Fibonacci deslocada, pois $P_n(1) = F_{n+2}$. Fazendo o mesmo deslocamento em (2.5) podemos concluir que

$$F_{2n+1} = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\left[\binom{2n-1}{5j}_2 + \binom{2n-1}{5j+1}_2 - \binom{2n-1}{5j+3}_2 - \binom{2n-1}{5j+4}_2\right], n \geq 1.$$

Conjecturamos que:

$$F_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\left[\binom{n-1}{5j}_2 + \binom{n-1}{5j+1}_2 - \binom{n-1}{5j+3}_2 - \binom{n-1}{5j+4}_2\right] =$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\binom{n+2}{5j+1}_2 - \binom{n+2}{5j+3}_2.$$

Interpretação Combinatória da Identidade 16

Iremos mostrar uma forma de obter uma interpretação combinatória para a Identidade 16, para tanto é conveniente reescrever a função f_{16} da seguinte maneira:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n q^{n^2+2n}}{(t;q^2)_{n+1}(-tq^2;q^2)_n} = \frac{1}{(1-t)}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n q^{n^2+2n}}{(1-t^2q^{2+2})\cdots(1-t^2q^{2n+2n})}\right).$$

É importante observar que o fator $1/(1-t) = 1 + t + t^2 + \cdots, \ \ |t| < 1$, faz com que, ao interpretarmos a parte interna do somatório estamos contando as partições em até N partes, já que o expoente de t conta o número de partes e o expoente de q o número particionado.

Consideramos o expoente $n(n+2)$ de q como a soma $3+5+\cdots+2n+1$, que significa que a maior parte é ímpar e todo ímpar de 3 até $2n+1$ aparece exatamente uma vez. No denominador olhamos para um número da forma $4n$, como $2n + 2n$, que pode ser visto como cada parte par aparecendo um número par de vezes, pois só aparecem de componentes do tipo t^2q^{2n+2n}.

Com essas observações e levando em consideração o fator $1/(1-t)$, podemos enunciar o seguinte teorema, capaz de fornecer uma interpretação para os números de Fibonacci em termos de partição.

Teorema 2.1 *O número de partições em no máximo N partes, onde a maior parte é ímpar, todo ímpar de 3 até a maior parte aparece exatamente uma vez e cada parte par aparece um número par de vezes é igual a F_{N+2}.*

Na Tabela (2.1) mostramos como o teorema funciona para pequenos valores de N.

Partições descritas no Teorema (2.1)		
N		F_{N+2}
0	$\emptyset$	1
1	3	2
2	$3+5$	3
3	$7+5+3;\ 3+2+2;$	5
4	$9+7+5+3;\ 5+4+4+3;\ 5+3+2+2$	8
5	$11+9+7+5+3;\ 7+6+6+5+3;\ 7+5+4+4+3;$ $7+5+3+2+2;\ 3+2+2+2+2$	13

Tabela 2.1: Ilustração do Teorema para $f_{16}(q,t)$.

Procedendo desta maneira encontramos interpretações para muitas sequências, além da sequência de Fibonacci, algumas conhecidas como a sequência de Pell, Jacobsthal e outras dadas em [22].

Para sequências não conhecidas procedemos como no próximo exemplo, interpretando também como coeficiente da expansão de uma certa função em série de potências.

Interpretação Combinatória da Identidade 31

A Identidade 31 é um exemplo que resulta em uma sequência não conhecida, quando substituimos q por 1 ou -1, mas é possível provar que seus termos são os coeficientes, em série de potências, de uma função e esses coeficientes são interpretados combinatoriamente.

Seja a Identidade 31, equação (13), dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n(n+1)}}{(q^2;q^2)_n(-q;q)_{2n+1}} = \frac{1}{(q^2;q^2)_\infty}(q^7;q^7)_\infty(q^6;q^7)_\infty(q;q^7)_\infty$$

escrevemos a função de duas variáveis $f_{31}(q,t)$, como

$$f_{31}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}q^{2(n^2+n)}}{(t;q^2)_{n+1}(-tq^2;q^2)_n(-tq;q^2)_{n+1}}. \tag{2.6}$$

Da mesma maneira feita para f_{16} chegamos a equação funcional:

$$(1-t)(1+tq^2)(1+tq)f_{31}(q,t) = 1 + tq^2 + t^2q^4 f_{31}(q,tq^2).$$

E a relação de recorrência:

$$\begin{aligned} P_0 = 1;\;\; P_1 = 1-q;\;\; P_2 = 1-q+q^2+q^4; \\ P_n(q) = (1-q-q^2)P_{n-1} + (q+q^2-q^3+q^{2n})P_{n-2} + q^3P_{n-3}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

A fórmula apresentada em [9] para os índices pares desta família de polinômios é dada por:

$$\begin{aligned} P_{2n}(q) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{56j^2+10j}\begin{bmatrix}2n+1\\ n-7j\end{bmatrix}_{q^2} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{56j^2-18j+1}\begin{bmatrix}2n+1\\ n-1+7j\end{bmatrix}_{q^2} \\ &- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{56j^2+38j+6}\begin{bmatrix}2n+1\\ n-2-7j\end{bmatrix}_{q^2} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{56j^2-46j+9}\begin{bmatrix}2n+1\\ n-2+7j\end{bmatrix}_{q^2}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Interpretação Combinatória da Identidade 31 para $q = -1$

Ao substituirmos $q = -1$ em (2.7), obtemos que $P_n(-1)$ são os coeficientes da expansão de $\dfrac{1+x}{1-x-2x^2+x^3}$ em série de potências.

Os primeiros elementos da sequência $P_n(-1) = M_n$ são dados por: $1, 2, 4, 7, 13, 23, 42\cdots$.

A interpretação combinatória para $P_n(-q)$ é feita através de $f_{31}(-q,t)$, dada por:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}q^{2(n^2+n)}}{(t;q^2)_{n+1}(-tq^2;q^2)_n(tq;q^2)_{n+1}} =$$

$$\frac{1}{(1-t)}\left(\frac{1}{(1-tq)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n}q^{2(n^2+n)}}{(1-t^2q^{2+2})\cdots(1-t^2q^{2n+2n})(1-tq)\cdots(1-tq^{2n+1})}\right).$$

Devemos observar que no caso de $n = 0$ na função geradora, não temos contribuições pares, mas temos as partições formadas apenas por partes 1 que devem ser contadas. Levando em consideração o fator $1/(1-t)$, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 2.2 *O número de partições onde todo par de* 2 *até o maior par aparece pelo menos* *duas vezes e um número par de vezes, a maior parte pode ser um a mais do que a maior parte par, mais as partições formadas apenas por partes* 1*, em até* N *partes, é igual a* M_N.

Na Tabela (2.2) mostramos como o teorema funciona para pequenos valores de N.

Partições descritas no Teorema (2.2)		
N		M_N
0	$\emptyset$	1
1	1	2
2	$1+1;\ 2+2$	4
3	$1+1+1;\ 2+2+1;\ 3+2+2$	7
4	$1+1+1+1;\ 2+2+1+1;\ 3+2+2+1;\ 3+3+2+2;$ $2+2+2+2;\ 4+4+2+2$	13

Tabela 2.2: Ilustração do Teorema para $f_{31}(-q,t)$.

Falta agora mostrar que os termos da sequência coincidem com os coeficientes da expansão de $\dfrac{1+x}{1-x-2x^2+x^3}$ em série de potências. Quando substituímos $q=-1$ em (2.7), ficamos com

$$M_0 = 1;\ \ M_1 = 2;\ \ M_2 = 4;$$

$$M_{n+3} = M_{n+2} + 2M_{n+1} - M_n.$$

Para encontrar uma expressão para o termo geral dessa relação de recorrência, utilizamos a técnica apresentada no primeiro capítulo de [20].

Multiplicando a relação de recorrência por x^n e somando para todo $n \geq 0$, chegamos a

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_{n+3}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} M_{n+2}x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} M_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} M_n x^n. \tag{2.9}$$

Que pode ser reescrita em função de $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n x^n$ como:

$$\frac{A(x) - M_0 - M_1 x - M_2 x^2}{x^3} = \frac{A(x) - M_0 - M_1 x}{x^2} + 2\frac{A(x) - M_0}{x} - A(x) \Longrightarrow$$

$$A(x) = \frac{1+x}{1-x-2x^2+x^3}.$$

O que mostra que a sequência representa os coeficientes da expansão de $\dfrac{1+x}{1-x-2x^2+x^3}$

em série de potências.

Este mesmo processo foi utilizado em todas as identidades onde relacionamos com expansão em série de potências. Com esta ferramenta em mãos, podemos ainda fazer uma segunda interpretação para a Identidade 31, substituindo $q = 1$.

Calculando o limite

$$\lim_{q \longrightarrow -1} P_{2n}(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[\binom{2n+1}{n-7j} + \binom{2n+1}{n-1+7j} - \binom{2n+1}{n-2-7j} - \binom{2n+1}{n-2+7j} \right]. \tag{2.10}$$

Donde segue que os coeficientes pares da expansão em série de potências de $\dfrac{1+x}{1-x-2x^2+x^3}$ podem ser calculados através de (2.10).

Interpretação Combinatória da Identidade 31 para $q = 1$

Se agora substituirmos $q = 1$ em (2.7), obtemos um nova sequência, $P_n(1)$, que representa os coeficientes da expansão de $\dfrac{1+x}{1+x-2x^2-x^3}$ em série de potências.

Os primeiros representantes da sequência $P_n(1) = \widetilde{M}_n$, são dados por $1, 0, 2, -1, 5, -5, \cdots$. Reescrevendo $f_{31}(q,t)$ fica mais fácil de fazer sua interpretação combinatória.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n} q^{2(n^2+n)}}{(t;q^2)_{n+1}(-tq^2;q^2)_n(-tq;q^2)_{n+1}} =$$

$$\frac{1}{(1-t)} \left(\frac{1}{(1-tq)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n} q^{2(n^2+n)}}{(1-t^2q^{2+2}) \cdots (1-t^2q^{2n+2n})(1+tq) \cdots (1+tq^{2n+1})} \right).$$

Neste caso temos um sinal ligado às partes ímpares que será positivo se o número de partes ímpares for par e negativo se o número de partes ímpares for ímpar. Levando em consideração o fator $1/(1-t)$, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 2.3 *O número de partições onde todo par de* 2 *até o maior par aparece pelo menos duas vezes e um número par de vezes, a maior parte pode ser um a mais do que o maior par, mais as partições formadas apenas por partes* 1*, com um número par de partes ímpares menos aquelas com um número ímpar de partes ímpares, em até* N *partes, é igual a* $\widetilde{M}_N$.

Na Tabela (2.3) mostramos como o teorema funciona para pequenos valores de N.

Partições descritas no Teorema (2.3).			
N	número par de ímpares	número ímpar de ímpares	$\widetilde{M}_N$
0	$\emptyset$		1
1		1	0
2	$1+1;\ 2+2$		2
3		$1+1+1;\ 2+2+1;\ 3+2+2$	-1
4	$1+1+1+1;\ 2+2+1+1;\ 3+2+2+1;$ $3+3+2+2; 2+2+2+2;\ 4+4+2+2$		5

Tabela 2.3: Ilustração do Teorema para $f_{31}(q,t)$.

Para mostrar que os termos da sequência coincidem com os coeficientes da expansão de $\dfrac{1+x}{1+x-2x^2-x^3}$ em série de potências, aplicamos a técnica usada em (2.9) na sequência dada por:

$$\widetilde{M}_0 = 1; \quad \widetilde{M}_1 = 0; \quad \widetilde{M}_2 = 2;$$

$$\widetilde{M}_{n+3} = -\widetilde{M}_{n+2} + 2\widetilde{M}_{n+1} + \widetilde{M}_n.$$

$$\frac{A(x)-\widetilde{M}_0-\widetilde{M}_1x-\widetilde{M}_2x^2}{x^3} = \frac{-A(x)+\widetilde{M}_0+\widetilde{M}_1x}{x^2} + 2\frac{A(x)-\widetilde{M}_0}{x} + A(x) \Longrightarrow$$

$$A(x) = \frac{1+x}{1+x-2x^2-x^3}.$$

Do mesmo modo que anteriormente, os coeficientes pares da expansão em série de potências de $\dfrac{1+x}{1+x-2x^2-x^3}$ podem ser calculados através de

$$\lim_{q\longrightarrow 1} P_{2n}(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\left[\binom{2n+1}{n-7j} - \binom{2n+1}{n-1+7j} - \binom{2n+1}{n-2-7j} + \binom{2n+1}{n-2+7j}\right]. \tag{2.11}$$

Nos próximos capítulos serão apresentados os resultados obtidos com os procedimentos descritos aqui. Por isso apresentaremos a função de duas variáveis $f_i(q,t)$ descrita pelo método de Andrews, a equação funcional, a relação de recorrência, a fórmula para as famílias de polinômios seguida do cálculo do limite, que fornece uma nova fórmula fechada para a sequência, e a interpretação combinatória com uma tabela que mostra o resultado para pequenos valores de N.

CAPÍTULO 3

NOVAS INTERPRETAÇÕES COMBINATÓRIAS PARA OS NÚMEROS DE FIBONACCI

Existem muitas interpretações para os números de Fibonacci, algumas delas combinatórias, como as apresentadas em [8], [10] e [11]. Detalhamos aqui interpretações disponíveis em nosso artigo [14] e outras que envolvem os números de Fibonacci em termos de partição, sobrepartição ou partição em cores. Com esse estudo várias fórmulas fechadas também foram encontradas para estas sequências.

Identidade 15

Para

$$f_{15}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{3n} q^{3n^2-2n}}{(t;q^2)_{n+1}(-tq^2;q^2)_n(-tq;q^2)_n}. \tag{3.1}$$

Temos a equação funcional:

$$(1-t)(1+tq^2)(1+tq)f_{15}(q,t) = (1+tq^2)(1+tq) - t^3 q f_{15}(q,tq^2).$$

E a relação de recorrência:

$$\begin{aligned} P_0 = P_1 = P_2 = 1; \\ P_n(q) = (1-q-q^2)P_{n-1} + (q+q^2-q^3)P_{n-2} + (q^3-q^{2n-5})P_{n-3}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Fórmula apresentada em [9] para esta família de polinômios:

$$\begin{aligned} P_{2n+2}(q) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{40j^2+6j} \begin{bmatrix} 2n \\ n-5j \end{bmatrix}_{q^2} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{40j^2-14j+1} \begin{bmatrix} 2n \\ n-1+5j \end{bmatrix}_{q^2} \\ &- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{40j^2+26j+4} \begin{bmatrix} 2n \\ n-2-5j \end{bmatrix}_{q^2} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{40j^2-34j+7} \begin{bmatrix} 2n \\ n-2+5j \end{bmatrix}_{q^2}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Calculando o limite

$$\lim_{q\longrightarrow -1} P_{2n+2}(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n}{n-5j} + \binom{2n}{n-1+5j} - \binom{2n}{n-2-5j} - \binom{2n}{n-2+5j}.$$

Neste caso, substituindo $q=-1$ em (3.2), obtemos $P_n(-1) = F_n,\ n \geq 1$.

Com isso, obtemos uma nova fórmula para o cálculo dos coeficientes pares maiores do que ou iguais a 2 da sequência de Fibonacci.

$$F_{2n+2} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n}{n-5j} + \binom{2n}{n-1+5j} - \binom{2n}{n-2-5j} - \binom{2n}{n-2+5j}.$$

Para a interpretação combinatória de $P_n(-q)$, usamos $f_{15}(-q,t)$ como segue:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{3n} q^{3n^2-2n}}{(t;q^2)_{n+1}(-tq^2;q^2)_n(tq;q^2)_n} =$$

$$\frac{1}{(1-t)} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{3n} q^{n^2+2(n^2-n)}}{(1-t^2q^{2+2})\cdots(1-t^2q^{2n+2n})(1-tq)\cdots(1-tq^{2n-1})} \right).$$

Olhando para a potência de q, no numerador, ou seja

$$3n^2 - 2n = n^2 + 2(n^2 - n) = 1 + 3 + \cdots + 2n - 1 + 2(0 + 2 + 4 + \cdots + 2n - 2),$$

temos os ímpares de 1 até $2n-1$ aparecendo uma vez e os pares de 0 até $2n-2$ aparecendo duas vezes. Observe que a parte 0 só pode aparecer do numerador, com isso, exatamente duas vezes. Olhando para o denominador, temos os pares aparecendo um número par de vezes e os ímpares irrestritos. De onde segue o teorema:

Teorema 3.1 *O número de partições onde todo ímpar de* 1 *até o maior ímpar aparece pelo menos uma vez, todos os pares de* 2 *até um a menos do que a maior parte ímpar aparecem pelo menos duas vezes e um número par de vezes, a parte* 0 *aparece exatamente duas vezes, com a maior parte podendo ser um a mais que a maior parte ímpar, em até N partes, é igual a* F_N, $N \geq 1$.

A Tabela (3.1), mostra exemplos para pequenos valores de N.

Partições descritas no Teorema (3.1)		
N		F_N
1	$\emptyset$	1
2		1
3	$1+0+0$	2
4	$1+1+0+0$	3
5	$2+2+1+0+0$; $1+1+1+0+0$	5
6	$2+2+1+1+0+0$; $1+1+1+1+0+0$; $3+2+2+1+0+0$	8

Tabela 3.1: Ilustração do Teorema para $f_{15}(-q,t)$.

Identidade 19

Para

$$f_{19}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{3n} q^{3n^2}}{(t;q^2)_{n+1}(-tq^2;q^2)_n(-tq;q^2)_n}. \tag{3.4}$$

Temos a equação funcional:

$$(1-t)(1+tq^2)(1+tq)f_{19}(q,t) = (1+tq^2)(1+tq) - t^3q^3 f_{19}(q,tq^2).$$

E a relação de recorrência:

$$\begin{gathered} P_0 = P_1 = P_2 = 1; \;\; P_3 = 1 - q^3; \\ P_n(q) = (1-q-q^2)P_{n-1} + (q+q^2-q^3)P_{n-2} + (q^3-q^{2n-3})P_{n-3}. \end{gathered} \tag{3.5}$$

Fórmula apresentada em [9] para esta família de polinômios:

$$\begin{aligned} P_{2n+3}(q) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{40j^2+2j} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-5j \end{bmatrix}_{q^2} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{40j^2-18j+2} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-1+5j \end{bmatrix}_{q^2} \\ &- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{40j^2+22j+3} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n+1-5j \end{bmatrix}_{q^2} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{40j^2-38j+9} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n+3+5j \end{bmatrix}_{q^2}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Calculando o limite

$$\lim_{q\longrightarrow -1} P_{2n+3}(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n+1}{n-5j} - \binom{2n+1}{n-1+5j} + \binom{2n+1}{n+1-5j} - \binom{2n+1}{n+3+5j}.$$

Para este caso, substituindo $q = -1$ em (3.5), obtemos a sequência de Fibonacci, $P_n(-1) = F_n,\ n \geq 1$. Resulta em:

$$F_{2n+3} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n+1}{n-5j} - \binom{2n+1}{n-1+5j} + \binom{2n+1}{n+1-5j} - \binom{2n+1}{n+3+5j}.$$

Para a interpretação combinatória de $P_n(-q)$, usamos $f_{19}(-q,t)$ como segue:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{3n} q^{3n^2}}{(t;q^2)_{n+1}(-tq^2;q^2)_n(tq;q^2)_n} =$$

$$\frac{1}{(1-t)}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{3n}q^{3n^2}}{(1-t^2q^{2+2})\cdots(1-t^2q^{2n+2n})(1-tq)\cdots(1-tq^{2n-1})}\right).$$

Olhando para a potência de q no numerador como $3n^2 = 3(1+3+\cdots+2n-1)$ temos os ímpares de 1 até $2n-1$ aparecendo três vezes. No denominador temos os pares aparecendo aos pares e os ímpares irrestritos. Segue o teorema:

Teorema 3.2 *O número de partições onde todo ímpar de* 1 *até o maior ímpar aparece pelo menos três vezes, e os pares aparecem um número par de vezes, com a maior parte par podendo ser um a mais do que a maior parte ímpar, em até N partes, é igual a* $F_N,\ N \geq 1$.

A Tabela (3.2), mostra exemplos para pequenos valores de N.

Partições descritas no Teorema (3.2)		
N		F_N
1	$\emptyset$	1
2		1
3	$1+1+1$	2
4	$1+1+1+1$	3
5	$2+2+1+1+1;\ 1+1+1+1+1$	5
6	$2+2+1+1+1+1;\ \ 1+1+1+1+1+1;\ \ 3+3+3+1+1+1$	8

Tabela 3.2: Ilustração do Teorema para $f_{19}(-q,t)$.

A pequena diferença no numerador das funções geradoras f_{15} e f_{19} torna possível uma bijeção simples entre as interpretações apresentadas. Enquanto para f_{15}, temos q^{3n^2-2n}, visto como ímpares de 1 até $2n-1$ aparecendo pelo menos uma vez e pares de 0 até $2n-2$ aparecendo pelo menos duas vezes, para f_{19}, temos q^{3n^2} visto como ímpares que de 1 até $2n-1$ aparecem pelo menos três vezes. Com isso, basta somarmos 1 aos pares que de 0 até $2n-2$ aparecem pelo menos duas vezes na interpretação de f_{15} que chegamos a interpretação de f_{19}, da mesma forma, basta subtraírmos 1 de duas cópias de cada ímpar que de 1 até $2n-1$ aparecem pelo menos três vezes na interpretação de f_{19} que chegamos a interpretação de f_{15}.

Identidade 20

Para

$$f_{20}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^nq^{n^2}}{(t;q^2)_{n+1}(-tq^2;q^2)_n}. \tag{3.7}$$

Temos a equação funcional:

$$(1-t)(1+tq^2)f_{20}(q,t) = 1 + tq^2 + tqf_{20}(q,tq^2).$$

E a relação de recorrência:

$$P_0 = 1; \quad P_1 = 1+q;$$
$$P_n(q) = (1 - q^2 + q^{2n-1})P_{n-1} + q^2 P_{n-2}. \tag{3.8}$$

Fórmula foi apresentada em [9] para os coeficientes pares desta família de polinômios:

$$P_{2n}(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{10j^2+j} U(2n,5j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{10j^2+11j+3} U(2n,5j+2). \tag{3.9}$$

Calculando o limite

$$\lim_{q\longrightarrow 1} P_{2n}(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\left[\binom{2n}{5j}_2 + \binom{2n}{5j+1}_2 - \binom{2n}{5j+2}_2 - \binom{2n}{5j+3}_2\right].$$

Facilmente verificamos que ao substituirmos $q = 1$ em (3.8), obtemos a sequência dos números de Fibonacci deslocada $P_n(1) = F_{n+2}$. Resulta em:

$$F_{2n+2} = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\left[\binom{2n}{5j}_2 + \binom{2n}{5j+1}_2 - \binom{2n}{5j+2}_2 - \binom{2n}{5j+3}_2\right].$$

Conjecturamos que:

$$F_{n+2} = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\left[\binom{n}{5j}_2 + \binom{n}{5j+1}_2 - \binom{n}{5j+2}_2 - \binom{n}{5j+3}_2\right].$$

Interpretação combinatória:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n q^{n^2}}{(t;q^2)_{n+1}(-tq^2;q^2)_n} = \frac{1}{(1-t)}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n q^{n^2}}{(1-t^2q^{2+2})\cdots(1-t^2q^{2n+2n})}\right).$$

No numerador temos $n^2 = 1 + 3 + \cdots + 2n - 1$, o que significa que todo ímpar de 1 até o maior ímpar aparece exatamente uma vez e no denominador temos $4n = 2n + 2n$, a maior parte par pode ser um a mais do que a maior parte ímpar. Com essas observações podemos enunciar um novo teorema:

Teorema 3.3 *O número de partições em no máximo N partes, onde todo ímpar de 1 até o maior ímpar aparece exatamente uma vez, cada parte par aparece um número par de vezes e a maior parte par é no máximo um a mais do que a maior parte ímpar é igual a* F_{N+2}.

A Tabela (3.3), mostra exemplos para pequenos valores de N.

Partições descritas no Teorema (3.3).		
N		F_{N+2}
0	$\emptyset$	1
1	1	2
2	$3+1$	3
3	$5+3+1; 2+2+1$	5
4	$7+5+3+1;\ 3+2+2+1;\ 4+4+3+1$	8
5	$9+7+5+3+1;\ 2+2+2+2+1;\ 5+3+2+2+1$ $5+4+4+3+1;\ 6+6+5+3+1$	13

Tabela 3.3: Ilustração do Teorema para $f_{20}(q,t)$.

Identidade 43

Para

$$f_{43}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-tq;q)_n t^n q^{\frac{1}{2}n(n+3)}}{(t^2q;q^2)_{n+1}(t;q)_{n+1}}. \tag{3.10}$$

Temos a equação funcional:

$$(1-t)(1-t^2q)f_{43}(q,t) = 1 + (1+tq)tq^2 f_{43}(q,tq).$$

E a relação de recorrência:

$$P_0 = 1;\ \ P_1 = 1 + q^2;\ \ P_2 = 1 + q + q^2 + 2q^3 + q^5;$$

$$P_n(q) = (1+q^{n+1})P_{n-1} + (q+q^{n+1})P_{n-2} - qP_{n-3}. \tag{3.11}$$

Fórmula apresentada em [9] para esta família de polinômios:

$$P_{2n-1}(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{20j^2+8j} CT(2n+1, 10j+2) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{20j^2+12j+1} CT(2n+1, 10j+3), \quad (3.12)$$

$n \geq 1$.

Calculando o limite

$$\lim_{q \longrightarrow 1} P_{2n-1}(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n+1}{10j+2}_2 - \binom{2n+1}{10j+3}_2.$$

Neste caso, substituindo $q = 1$ em (3.11), obtemos um produto de sequências de Fibonacci deslocadas $P_n(1) = F_{n+1} \cdot F_{n+2}$. Resulta em:

$$F_{2n} \cdot F_{2n+1} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n+1}{10j+2}_2 - \binom{2n+1}{10j+3}_2, \quad n \geq 1.$$

Conjecturamos que:

$$F_n \cdot F_{n+1} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n+1}{10j+2}_2 - \binom{n+1}{10j+3}_2.$$

Interpretação combinatória:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-tq;q)_n t^n q^{\frac{1}{2}n(n+3)}}{(t^2q;q^2)_{n+1}(t;q)_{n+1}} = \frac{1}{(1-t)} \left(\frac{1}{(1-t^2q)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+tq)\cdots(1+tq^n) \; t^n q^{\frac{1}{2}n(n+3)}}{(1-t^2q)\cdots(1-t^2q^{2n+1})(1-tq)\cdots(1-tq^n)} \right).$$

Definindo sobrepartições laranja-azul como sendo sobrepartições onde as partes azuis são formadas por ímpares, contados duas vezes, a maior parte azul pode ser duas vezes a maior parte laranja menos um, ou a partição é formada apenas por partes 1. Estas partes estão representadas pelo fator $(t^2q;q^2)_{n+1}$ no denominador. Vamos olhar para o fator $\frac{1}{2}n(n+3) = 2+3+\cdots+(n+1)$ que, juntamente com a parcela no denominador $(tq;q)_n$, formam as partes laranjas, que são partições onde toda parte de 2 até n aparece pelo menos uma vez e a maior parte laranja $n+1$ aparece somente uma vez. A maior parte marcada pode ser no máximo um a menos que a maior parte laranja. Com essas observações, e levando em consideração o fator $1/(1-t)$, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 3.4 *O número de sobrepartições laranja-azul, em até N partes, é igual a* $F_{N+1} \cdot F_{N+2}$.

A Tabela (3.4), mostra exemplos para pequenos valores de N.

Partições descritas no Teorema (3.4)		
N		$F_{N+1} \cdot F_{N+2}$
0	$\emptyset$	$1 = F_1 \cdot F_2$
1	2	$2 = F_2 \cdot F_3$
2	$2 + 1; 2 + \bar{1}; 1; 3 + 2$	$6 = F_3 \cdot F_4$
3	$2 + 1 + 1;\ 2 + 1 + \bar{1};\ 2 + 1;\ 2 + 3; 3 + 2 + \bar{1};$ $3 + 2 + \bar{2}; 3 + 2 + 1;\ 3 + 2 + 2;\ 4 + 3 + 2$	$15 = F_4 \cdot F_5$

Tabela 3.4: Ilustração do Teorema para $f_{43}(q,t)$.

Identidade 44

Para

$$f_{44}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{3n} q^{\frac{3}{2}n(n+1)}}{(t^2q;q^2)_{n+1}(t;q)_{n+1}}. \tag{3.13}$$

Temos a equação funcional:

$$(1-t)(1-t^2q)f_{44}(q,t) = 1 + t^3q^3 f_{44}(q,tq).$$

E a relação de recorrência:

$$P_0 = P_1 = 1;\ \ P_2 = 1 + q;$$

$$P_n(q) = P_{n-1} + qP_{n-2} - (q - q^n)P_{n-3}. \tag{3.14}$$

Fórmula apresentada em [9] para esta família de polinômios:

$$\begin{aligned} P_{2n}(q) \;=\; & \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{80j^2+12j} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-10j \end{bmatrix}_q - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{80j^2-28j+2} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-1+10j \end{bmatrix}_q \\ & - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{80j^2+52j+8} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-3-10j \end{bmatrix}_q + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{80j^2-68j+14} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-4+10j \end{bmatrix}_q . \end{aligned} \tag{3.15}$$

Calculando o limite

$$\lim_{q\longrightarrow 1} P_{2n}(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n+1}{n-10j} - \binom{2n+1}{n-1+10j} - \binom{2n+1}{n-3-10j} + \binom{2n+1}{n-4+10j}.$$

Para este caso, substituindo $q = 1$ em (3.14), obtemos a sequência de Fibonacci deslocada, $P_n(1) = F_{n+1}$. Resulta em:

$$F_{2n+1} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n+1}{n-10j} - \binom{2n+1}{n-1+10j} - \binom{2n+1}{n-3-10j} + \binom{2n+1}{n-4+10j}.$$

Interpretação combinatória:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{3n} q^{\frac{3}{2}n(n+1)}}{(t^2q;q^2)_{n+1}(t;q)_{n+1}} = \frac{1}{(1-t)} \left(\frac{1}{(1-t^2q)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{3n} q^{\frac{3}{2}n(n+1)}}{(1-t^2q)\cdots(1-t^2q^{2n+1})(1-tq)\cdots(1-q^n)} \right).$$

Definindo como partições laranja-azul, as partições onde as partes laranjas são formadas por todos os inteiros que de 1 até a maior parte aparecem pelo menos três vezes. As partes azuis são partições em partes ímpares, contadas duas vezes. A maior parte pode ser azul e dada por duas vezes a maior parte laranja mais um, ou a partição é formada apenas por partes 1.

Teorema 3.5 *O número de partições laranja-azul, em até N partes, é igual a F_{N+1}.*

A Tabela (3.5), mostra exemplos para pequenos valores de N.

Partições descritas no Teorema (3.5)		
N		F_{N+1}
0	$\emptyset$	1
1		1
2	1	2
3	1 + 1 + 1	3
4	1 + 1; 1 + 1 + 1 + 1	5
5	1 + 1 + 1 + 1 + 1; 1 + 1 + 1 + 1; 1 + 1 + 1 + 3	8
6	1 + 1 + 1; 1 + 1 + 1 + 1 + 1; 1 + 1 + 1 + 1 + 3; 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1; 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1	13

Tabela 3.5: Ilustração do Teorema para $f_{44}(q,t)$.

Identidade 45

Para

$$f_{45}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-tq;q)_n t^n q^{\frac{1}{2}n(n+1)}}{(t^2q;q^2)_{n+1}(t;q)_{n+1}}. \tag{3.16}$$

Temos a equação funcional:

$$(1-t)(1-t^2q)f_{45}(q,t) = 1 + (1+tq)tqf_{45}(q,tq).$$

E a relação de recorrência:

$$\begin{aligned} &P_0 = 1;\ \ P_1 = 1+q; P_2 = 1+2q+2q^2+q^3; \\ &P_n(q) = (1+q^n)P_{n-1} + (q+q^n)P_{n-2} - qP_{n-3}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Fórmula apresentada em [9] para esta família de polinômios:

$$P_{2n}(q) \quad = \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{20j^2+4j} CT(2n+1,10j+1) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{20j^2+16j+3} CT(2n+1,10j+4). \tag{3.18}$$

Calculando o limite:

$$\lim_{q\longrightarrow 1} P_{2n}(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n+1}{10j+1}_2 - \binom{2n+1}{10j+4}_2.$$

Neste caso, substituindo $q = 1$ em (3.17), obtemos um produto de sequências de Fibonacci deslocadas $P_n(1) = F_{n+1} \cdot F_{n+2}$. Resulta em

$$F_{2n+1} \cdot F_{2n+2} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n+1}{10j+1}_2 - \binom{2n+1}{10j+4}_2.$$

Cojecturamos que:

$$F_n \cdot F_{n+1} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n}{10j+1}_2 - \binom{n}{10j+4}_2.$$

Interpretação combinatória:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-tq;q)_n t^n q^{\frac{1}{2}n(n+1)}}{(t^2q;q^2)_{n+1}(t;q)_{n+1}} = \frac{1}{(1-t)}\left(\frac{1}{(1-t^2q)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+tq)\cdots(1+tq^n)t^n q^{\frac{1}{2}n(n+1)}}{(1-t^2q)\cdots(1-t^2q^{2n+1})(1-tq)\cdots(1-tq^n)}\right).$$

Definindo sobrepartição laranja-azul como sendo sobrepartições onde as partes azuis são não marcadas e formadas por ímpares contados duas vezes, a maior parte azul pode ser duas vezes a maior parte laranja mais um, ou a partição é formada apenas por partes 1, representadas pelo fator $(t^2q;q^2)_{n+1}$. As partes laranjas são partições onde toda parte de 1 até a n, maior parte laranja, aparece pelo menos uma vez, $\frac{1}{2}n(n+1) = 1+2+\cdots+n$ no numerador, juntamente com $(tq;q)_n$ no denominador. A maior parte marcada pode ser no máximo igual a maior parte laranja. Com essas observações e, levando em consideração o fator $1/(1-t)$, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 3.6 *O número de sobrepartições laranja-azul, em até N partes, é igual a* $F_{N+1} \cdot F_{N+2}$.

A Tabela (3.6), mostra exemplos para pequenos valores de N.

Partições descritas no Teorema (3.6)		
N		$F_{N+1} \cdot F_{N+2}$
0	$\emptyset$	$1 = F_1 \cdot F_2$
1	1	$2 = F_2 \cdot F_3$
2	$1+1$; $1+\bar{1}$; 1; $2+1$	$6 = F_3 \cdot F_4$
3	$1+1+1$; $1+1+\bar{1}$; $1+1$; $1+3$; $2+1+\bar{1}$; $2+1+\bar{2}$; $2+1+1$; $2+2+1$; $3+2+1$	$15 = F_4 \cdot F_5$

Tabela 3.6: Ilustração do Teorema para $f_{45}(q,t)$.

A diferença de f_{45} para f_{43} é o expoente de q no numerador. Para f_{43}, temos $\dfrac{1}{2}n(n+3)$, interpretado como soma de inteiros de 2 até $n+1$ e para f_{45} temos $\dfrac{1}{2}n(n+1)$, interpretado como soma de inteiros de 1 até n. Diante disso, uma bijeção simples entre as duas interpretações é possível, subtranindo 1 da primeira aparição de cada inteiro da cor laranja em f_{43} chegamos em f_{45} e somando 1 na primeira aparição de cada inteiro da cor laranja de f_{45} chegamos em f_{43}.

Identidade 46

Para

$$f_{46}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{3n} q^{\frac{1}{2}n(3n-1)}}{(t^2q;q^2)_n (t;q)_{n+1}}. \tag{3.19}$$

Temos a equação funcional:

$$(1-t)(1-t^2q) f_{46}(q,t) = 1 - t^2 q + t^3 q f_{46}(q,tq).$$

E a relação de recorrência:

$$\begin{aligned} P_0 &= P_1 = P_2 = 1; \\ P_n(q) &= P_{n-1} + qP_{n-2} - (q - q^{n-2})P_{n-3}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Fórmula apresentada em [9] para esta família de polinômios:

$$\begin{aligned} P_{2n+2}(q) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{80j^2+4j} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n+10j \end{bmatrix}_q - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{80j^2-36j+4} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-3+10j \end{bmatrix}_q \\ &- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{80j^2+44j+4} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-3-10j \end{bmatrix}_q + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{80j^2-76j+18} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-5+10j \end{bmatrix}_q, \end{aligned} \tag{3.21}$$

$n \geq 1$.

Calculando o limite

$$\lim_{q \longrightarrow 1} P_{2n+2}(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n-1}{n+10j} - \binom{2n-1}{n-3+10j} - \binom{2n-1}{n-3-10j} + \binom{2n-1}{n-5+10j}.$$

Neste caso, substituindo $q = 1$ em (3.20), obtemos a sequência de Fibonacci para $n \geq 1$, $P_n(1) = F_n$. Resulta em:

$$F_{2n+2} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n-1}{n+10j} - \binom{2n-1}{n-3+10j} - \binom{2n-1}{n-3-10j} + \binom{2n-1}{n-5+10j}.$$

Interpretação combinatória:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{3n} q^{\frac{1}{2}n(3n-1)}}{(t^2q;q^2)_n (t;q)_{n+1}} = \frac{1}{(1-t)} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n} q^{n^2} t^n q^{\frac{1}{2}n(n-1)}}{(1-t^2q)\cdots(1-t^2q^{2n-1})(1-tq)\cdots(1-tq^n)} \right).$$

Definindo as partições laranja-azul como sendo partições onde as partes laranjas são ímpares contados duas vezes, todo ímpar de 1 até a maior parte $(2n-1)$ aparece pelo menos uma vez. As partes azuis como sendo partições onde todo inteiro de 0 até $(n-1)$ aparece pelo menos uma vez e a maior parte azul pode ser no máximo metade da maior parte laranja mais um. Com essas observações e, levando em consideração o fator $1/(1-t)$, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 3.7 *O número de partições laranja-azul, em até N partes, é igual a* F_N, $N \geq 1$.

A Tabela (3.7), mostra exemplos para pequenos valores de N.

Partições descritas no Teorema (3.7)		
N		F_N
1	$\emptyset$	1
2		1
3	$1+0$	2
4	$1+1+0$	3
5	$1+1+0$; $1+1+1+0$	5

Tabela 3.7: Ilustração do Teorema para $f_{46}(q,t)$.

Identidade 62

Para

$$f_{62}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t;q)_{n+1} t^{3n} q^{\frac{1}{2}n(3n+1)}}{(t^2;q^2)_{n+1} (t^2q;q^2)_{n+1}}. \tag{3.22}$$

Temos a equação funcional:

$$(1-t)(1-t^2q)f_{62}(q,t) = 1 + t^3q^2 f_{62}(q,tq).$$

E a relação de recorrência:

$$P_0 = P_1 = 1; P_2 = 1 + q;$$
$$P_n(q) = P_{n-1} + qP_{n-2} - (q - q^{n-1})P_{n-3}. \tag{3.23}$$

Fórmula apresentada em [9] para esta família de polinômios:

$$\begin{aligned} P_n(q) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{30j^2+j} CT(n,10) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{30j^2-29j+7} CT(n, 5-10j) \\ &- q\left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{30j^2+11j} CT(n, 2+10j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{30j^2-19j+2} CT(n, 3-10j)\right]. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Calculando o limite

$$\lim_{q\longrightarrow 1} P_n(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n}{10j}_2 + \binom{n}{5-10j}_2 - \binom{n}{2+10j}_2 - \binom{n}{3-10j}_.$$

Neste caso, substituindo $q = 1$ em (3.23), obtemos a sequência de Fibonacci deslocada $P_n(1) = F_{n+1}$. Resulta em:

$$F_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n-1}{10j}_2 + \binom{n-1}{5-10j}_2 - \binom{n-1}{2+10j}_2 - \binom{n-1}{3-10j}_2.$$

Interpretação combinatória:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t;q)_{n+1} t^{3n} q^{\frac{1}{2}n(3n+1)}}{(t^2;q^2)_{n+1}(t^2q;q^2)_{n+1}} =$$

$$\frac{1}{(1-t)}\left(\frac{1}{(1-t^2q)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+tq)\cdots(1+tq^n)t^n q^{\frac{1}{2}n(n+1)} t^{2n} q^{n^2}}{(1-t^2q^2)\cdots(1-t^2q^{2n})(1-t^2q)\cdots(1-t^2q^{2n+1})}\right).$$

Definindo como partições laranja-azul, as partições onde as partes laranjas são compostas por inteiros de 1 até n aparecendo pelo menos uma vez e no máximo duas. As partes azuis são contados duas vezes, onde todo ímpar de 1 até o dobro da maior parte laranja menos um aparece pelo menos uma vez, com a maior parte podendo ser o dobro da maior parte laranja mais um, ou a partição é formada apenas por partes 1. Com essas observações e, levando em consideração o fator $1/(1-t)$, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 3.8 *O número de partições laranja-azul, em até N partes é igual a F_{N+1}.*

A Tabela (3.8), mostra exemplos para pequenos valores de N.

Partições descritas no Teorema (3.8)		
N		F_{N+1}
0	$\emptyset$	1
1		1
2	1	2
3	1 + 1	3
4	1 + 1; 1 + 1 + 1	5
5	1 + 1 + 1; 1 + 1 + 2; 1 + 1 + 3	8
6	1 + 1 + 1; 1 + 1 + 1 + 1; 1 + 1 + 1 + 2; 1 + 1 + 1 + 3; 1 + 2 + 1 + 3	13

Tabela 3.8: Ilustração do Teorema para $f_{62}(q,t)$.

Identidade 63

Para

$$f_{63}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t;q)_{n+1} t^{3n} q^{\frac{3}{2}n(n+1)}}{(t^2q;q^2)_{n+1}(t^2;q^2)_{n+1}}. \tag{3.25}$$

Temos a equação funcional:

$$(1-t)(1-t^2q)f_{63}(q,t) = 1 + t^3q^3 f_{63}(q,tq).$$

E a relação de recorrência:

$$P_0 = P_1 = 1; \quad P_2 = 1 + q;$$
$$P_n(q) = P_{n-1} + qP_{n-2} - (q-q^n)P_{n-3}. \tag{3.26}$$

Fórmula apresentada em [9] para esta família de polinômios:

$$\begin{aligned} P_{n-1}(q) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{30j^2+7j} CT(n, 1+10j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{30j^2-23j+4} CT(n, 4-10j) \\ &- q\left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{30j^2+13j} CT(n, 2+10j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{30j^2-17j+1} CT(n, 3-10j)\right], \end{aligned} \tag{3.27}$$

$n \geq 1$.

Calculando o limite

$$\lim_{q \longrightarrow 1} P_n(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n}{1+10j}_2 + \binom{n}{4-10j}_2 - \binom{n}{2+10j}_2 - \binom{n}{3-10j}_2.$$

Nete caso, substituindo $q = 1$ em (3.26), obtemos a sequência de Fibonacci deslocada $P_n(1) = F_{n+1}$. Resulta em:

$$F_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n}{1+10j}_2 + \binom{n}{4-10j}_2 - \binom{n}{2+10j}_2 - \binom{n}{3-10j}_2.$$

Interpretação combinatória:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t;q)_{n+1} t^{3n} q^{\frac{3}{2}n(n+1)}}{(t^2q;q^2)_{n+1}(t^2;q^2)_{n+1}} =$$

$$\frac{1}{(1-t)}\left(\frac{1}{(1-t^2q)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+tq)\cdots(1+tq^n)t^{3n}q^{3\frac{1}{2}n(n+1)}}{(1-t^2q)\cdots(1-t^2q^{2n+1})(1-t^2q^2)\cdots(1-t^2q^{2n})}\right).$$

Definindo como partições laranja-azul as partições onde as partes laranjas de 1 até n aparecem pelo menos três e no máximo quatro vezes, as partes azuis como sendo partições irrestritas e contadas duas vezes. A maior parte azul é no máximo duas vezes a maior parte laranja mais um, ou a partição é formada apenas por partes 1. Com essas observações e, levando em consideração o fator $1/(1-t)$, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 3.9 *O número de partições laranja-azul, em até N partes, é igual a F_{N+1}.*

A Tabela (3.9), mostra exemplos para pequenos valores de N.

Partições descritas no Teorema (3.9)		
N		F_{N+1}
0	$\emptyset$	1
1		1
2	1	2
3	1 + 1 + 1	3
4	1 + 1; 1 + 1 + 1 + 1	5
5	1 + 1 + 1 + 1; 1 + 1 + 1 + 2; 1 + 1 + 1 + 3	8
6	1 + 1 + 1; 1 + 1 + 1 + 1 + 1; 1 + 1 + 1 + 1 + 2; 1 + 1 + 1 + 1 + 3; 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1	13

Tabela 3.9: Ilustração do Teorema para $f_{63}(q,t)$.

Identidade 95

Para

$$f_{95}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{3n} q^{3n^2-2n}}{(t;q^2)_{n+1}(tq;q^2)_n(-tq^2;q^2)_n}. \tag{3.28}$$

Temos a equação funcional:

$$(1-t)(1-tq)(1+tq^2)f_{95}(q,t) = (1-tq)(1+tq^2) + t^3 q f_{95}(q,tq^2).$$

E a relação de recorrência:

$$P_0 = P_1 = P_2 = 1;$$

$$P_n(q) = (1+q-q^2)P_{n-1} - (q-q^2-q^3)P_{n-2} - (q^3-q^{2n-5})P_{n-3}. \tag{3.29}$$

Fórmula apresentada em [9] para esta família de polinômios:

$$\begin{aligned} P_{n+2}(q) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{60j^2+8j} U(n,10j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{60j^2-52j+11} U(n,4-10j) \\ &- q^3 \left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{60j^2+28j} U(n,2+10j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{60j^2-32j+1} U(n,2-10j) \right]. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Calculando o limite

$$\lim_{q\longrightarrow 1} P_{n+2}(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n}{10j}_2 + \binom{n}{10j+1}_2 + \binom{n}{4-10j}_2 + \binom{n}{5-10j}_2 - \binom{n}{2+10j}_2 - \binom{n}{3+10j}_2 - \binom{n}{2-10j}_2 - \binom{n}{3-10j}_2.$$

Substituindoo $q = 1$ em (3.29), obtemos a sequência de Fibonacci $P_n(1) = F_n$, $n \geq 1$. Resulta em:

$$F_{n+2} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n}{10j}_2 + \binom{n}{10j+1}_2 + \binom{n}{4-10j}_2 + \binom{n}{5-10j}_2 - \binom{n}{2+10j}_2 - \binom{n}{3+10j}_2 - \binom{n}{2-10j}_2 - \binom{n}{3-10j}_2.$$

Interpretação combinatória:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{3n} q^{3n^2-2n}}{(t;q^2)_{n+1}(tq;q^2)_n(-tq^2;q^2)_n} =$$

$$\frac{1}{(1-t)}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n q^{n^2} t^{2n} q^{2(n^2-n)}}{(1-tq)\cdots(1-tq^{2n-1})(1-t^2q^{2+2})\cdots(1-t^2q^{2n+2n})}\right).$$

Vamos olhar para o fator

$$3n^2 - 2n = n^2 + 2n^2 - 2n = [(1+3+\cdots+2n-1) + 2(0+2+4+\cdots+2n-2)].$$

Definindo como partições laranja-azul as partições onde as partes azuis são formadas por todos os pares de 0 até $2n-2$ aparecendo exatamente duas vezes. As partes laranjas são formadas por ímpares que de 1 até o maior ímpar aparecem pelo menos uma vez, o maior ímpar sendo um a mais do que a maior parte azul, e partes pares que aparecem aos pares, com maior parte par podendo ser um a mais do que a maior parte ímpar. Com essas observações e, levando em consideração o fator $1/(1-t)$, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 3.10 *O número de partições laranja-azul, em até N partes, é igual a F_N, $N \geq 1$.*

A Tabela (3.10), mostra exemplos para pequenos valores de N.

Partições descritas no Teorema (3.10)		
N		F_N
1	$\emptyset$	1
2		1
3	$1 + 0 + 0$	2
4	$1 + 1 + 0 + 0$	3
5	$1 + 1 + 1 + 0 + 0; 2 + 2 + 1 + 0 + 0$	5
6	$1 + 1 + 1 + 1 + 0 + 0; 2 + 2 + 1 + 1 + 0 + 0; 3 + 1 + 2 + 2 + 0 + 0$	8

Tabela 3.10: Ilustração do Teorema para $f_{95}(q, t)$.

Observe que ao substituirmos $q = -q$ em (3.1) chegamos em (3.28), logo a mesma interpretação feita para f_{15} com $q = -1$ também é válida pra f_{95} com $q = 1$.

CAPÍTULO 4

NOVAS INTERPRETAÇÕES COMBINATÓRIAS PARA OS NÚMEROS DE PELL E JACOBSTHAL

Algumas interpretações combinatórias para os números de Pell e Jacobsthal foram dadas em [8]. Apresentamos aqui interpretações disponíveis em nosso artigo [14] e outras que envolvem os números de de Pell e Jacobsthal em termos de partição, sobrepartição ou partição em cores. As famílias de polinômios apresentadas aqui têm a propriedade de que quando substituímos $q = 1$ ou $q = -1$ na sequência apresentada em [9], esta se transforma na sequência, ou em alguma sequência que envolva os números de Pell e Jacobsthal.

Identidade 12

Para

$$f_{12}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t;q)_n t^n q^{\binom{n+1}{2}}}{(t;q)_{n+1}}. \tag{4.1}$$

Temos a equação funcional:

$$(1-t)f_{12}(q,t) = 1 + (1+t)tqf_{12}(q,tq).$$

E a relação de recorrência:

$$P_0 = 1;\quad P_1 = 1+q;$$
$$P_n(q) = (1+q^n)P_{n-1} + q^{n-1}P_{n-2}. \tag{4.2}$$

Fórmula apresentada em [9] para esta família de polinômios:

$$P_n(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{8j^2} CT(n+1, 1+8j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{8j^2-8j+2} CT(n+1, 3-8j). \tag{4.3}$$

Calculando o limite:

$$\lim_{q\longrightarrow 1} P_n(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n+1}{1+8j}_2 - \binom{n+1}{3-8j}_2.$$

Neste caso, substituindo $q = 1$ em (4.2), obtemos a sequência de Pell $P_n(1) = p_n$. Resulta em

$$p_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n+1}{1+8j}_2 - \binom{n+1}{3-8j}_2.$$

Interpretação combinatória:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-t;q)_n t^n q^{\binom{n+1}{2}}}{(t;q)_{n+1}} &= \frac{1}{(1-t)}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+t)(1+tq)\dots(1+tq^{n-1})t^n q^{\frac{n^2+n}{2}}}{(1-tq)(1-tq^2)\dots(1-tq^n)}\right)\\
&= \frac{1}{(1-t)}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+tq)(1+tq^2)\dots(1+tq^{n-1})t^n q^{\frac{n^2+n}{2}}}{(1-tq)(1-tq^2)\dots(1-tq^n)}\right.\\
&+ \left. t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+tq)(1+tq^2)\dots(1+tq^{n-1})t^n q^{\frac{n^2+n}{2}}}{(1-tq)(1-tq^2)\dots(1-tq^n)}\right).
\end{aligned}$$

Lembrando que $\dfrac{n^2+n}{2} = 1+2+\ldots+n$, vamos considerar sobrepartições em que todas as partes não marcadas de 1 até a maior parte aparecem pelo menos uma vez. A maior parte marcada é menor do que a maior parte não marcada e o número de partes é N ou $N-1$. Chamamos estas sobrepartições do tipo n. Com essas observações e levando em consideração o fator $1/(1-t)$, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 4.1 *O número de sobrepartições do tipo n para todo n até N é igual p_N.*

A Tabela (4.1), mostra exemplos para pequenos valores de N.

Partições descritas no Teorema (4.1).		
N		p_N
1	$\emptyset$; 1	2
2	2 + 1; 1 + 1; 1	5
3	3 + 2 + 1; 2 + 2 + 1; 2 + 1 + 1; $\bar{1}$ + 2 + 1; 1 + 1 + 1; 2 + 1; 1 + 1	12
4	4 + 3 + 2 + 1; 3 + 3 + 2 + 1; 3 + 2 + 2 + 1; 3 + 2 + 1 + 1; $\bar{2}$ + 3 + 2 + 1; $\bar{1}$ + 3 + 2 + 1; 2 + 2 + 2 + 1; 2 + 2 + 1 + 1; 2 + 1 + 1 + 1; 1 + 1 + 1 + 1; $\bar{1}$ + 2 + 1 + 1; $\bar{1}$ + 2 + 2 + 1; 3 + 2 + 1; 2 + 2 + 1; $\bar{1}$ + 2 + 1; 2 + 1 + 1; 1 + 1 + 1	29

Tabela 4.1: Ilustração do Teorema para $f_{12}(q,t)$.

Identidade 27

Para

$$f_{27}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-tq;q^2)_n t^{2n} q^{2(n^2+n)}}{(tq;q^2)_{n+1}(t;q^2)_{n+1}(-tq^2;q^2)_n}. \tag{4.4}$$

Temos a equação funcional:

$$(1-t)(1-tq)(1+tq^2)f_{27}(q,t) = 1 + tq^2 + (1+tq)t^2q^4 f_{27}(q,tq^2).$$

E a relação de recorrência:

$$P_0 = 1;\ \ P_1 = 1+q;\ \ P_2 = 1+q+q^2+q^4;$$
$$P_n(q) = (1+q-q^2)P_{n-1} - (q-q^2-q^3-q^{2n})P_{n-2} - (q^3-q^{2n-1})P_{n-3}. \tag{4.5}$$

Fórmula apresentada em [9] para esta família de polinômios:

$$P_{2n-1}(q) \ = \ \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{12j^2+4j}\begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-1-3j \end{bmatrix}_{q^2} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{12j^2-8j+1}\begin{bmatrix} 2n \\ n-1+3j \end{bmatrix}_{q^2},\ \ n \geq 1. \tag{4.6}$$

Calculando o limite

$$\lim_{q \longrightarrow 1} P_{2n-1}(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n-1}{n-1-3j} + \binom{2n}{n-1+3j}.$$

Neste caso, substituindo $q = 1$ em (4.5), encontramos a sequência $1, 2, 4, 8, 16, \cdots$.

Observe que a relação de recorrência é a mesma dos números de Jacobsthal, a menos das condições iniciais. É possível provar por indução que $P_n(1) = 2^n$, visto que,

$$P_0(1) = 1 = 2^0;\ \ P_1(1) = 2 = 2^1;\ \ P_2(1) = 4 = 2^2\ \ e\ \ P_n(1) = P_{n-1} + 2P_{n-2}.$$

É possível mostrar, também por indução, que $2^n = J_n + J_{n-1}, n \geq 1$.

$$2^{2n-1} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n-1}{n-1-3j} + \binom{2n}{n-1+3j},\ \ n \geq 1.$$

Interpretação combinatória

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-tq;q^2)_n t^{2n} q^{2(n^2+n)}}{(tq;q^2)_{n+1}(t;q^2)_{n+1}(-tq^2;q^2)_n} =$$

$$\frac{1}{(1-t)}\left(\frac{1}{(1-tq)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+tq)\cdots(1+tq^{2n-1})t^{2n}q^{2(n^2+n)}}{(1-tq)\cdots(1-tq^{2n+1})(1-t^2q^{2+2})\cdots(1-t^2q^{2n+2n})}\right).$$

Definimos partições laranja-azul, como partições onde as partes azuis são formadas por pares que de 2 até o maior par aparecem pelo menos duas vezes e um número par de vezes, com maior parte podendo ser um a mais que o maior par, mais as partições formadas apenas por partes 1. As partes laranjas formadas por ímpares no máximo um a menos que a maior parte par. Levando em consideração o fator $1/(1-t)$, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 4.2 *O número de partições laranja-azul, em até N partes, é igual a* $J_N + J_{N-1}$.

A Tabela (4.2), mostra exemplos para pequenos valores de N.

Partições descritas no Teorema (4.2)		
N		$J_N + J_{N-1}$
0	$\emptyset$	1
1	1	2
2	1 + 1; 2 + 2	4
3	1 + 1 + 1; 2 + 2 + 1; 3 + 2 + 2, 2 + 2 + 1	8
4	1 + 1 + 1 + 1; 2 + 2 + 1 + 1; 3 + 2 + 2 + 1; 3 + 3 + 2 + 2; 2 + 2 + 1 + 1; 2 + 2 + 3 + 1; 2 + 2 + 2 + 2; 4 + 4 + 2 + 2	16

Tabela 4.2: Ilustração do Teorema para $f_{27}(q,t)$.

Identidade 28

Para

$$f_{28}(q,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-tq^2;q^2)_n t^n q^{n^2+n}}{(t;q^2)_{n+1}(tq;q^2)_{n+1}}. \tag{4.7}$$

Temos a equação funcional:

$$(1-t)(1-tq)f_{28}(q,t)=1+(1+tq^2)tq^2 f_{28}(q,tq^2).$$

E a relação de recorrência:

$$P_0 = 1; \quad P_1 = 1 + q + q^2;$$
$$P_n(q) = (1 + q + q^{2n})P_{n-1} - (q - q^{2n})P_{n-2}. \tag{4.8}$$

Fórmula apresentada em [9] para esta família de polinômios:

$$P_{2n}(q) \quad = \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{12j^2+4j} CT(2n+1, 1+6j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{12j^2-8j+1} CT(2n+1, 2-6j). \tag{4.9}$$

Calculando o limite

$$\lim_{q \longrightarrow -1} P_{2n}(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n+1}{1+6j}_2 - \binom{2n+1}{2-6j}_2.$$

Neste caso, substituindo $q = -1$ em (4.8) obtemos a sequência de Jacobsthal $P_n(-1) = J_n$. Resulta em:

$$J_{2n} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n+1}{1+6j}_2 - \binom{2n+1}{2-6j}_2.$$

Conjecturamos que:

$$J_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n+1}{1+6j}_2 - \binom{n+1}{2-6j}_2.$$

Para interpretação combinatória para $P_n(-q)$, usamos f_{28}:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-tq^2;q^2)_n t^n q^{n^2+n}}{(t;q^2)_{n+1}(-tq;q^2)_{n+1}} = \frac{1}{(1-t)} \left(\frac{1}{(1+tq)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+tq^2)\cdots(1+tq^{2n})t^n q^{n^2+n}}{(1-tq^2)\cdots(1-tq^{2n})(1+tq)\cdots(1+tq^{2n+1})} \right).$$

Considere que $n^2 + n = 2 + 4 + \ldots + 2n$, a soma dos n primeiros pares.

Definimos partições laranja-azul como partições onde as partes laranjas são pares que aparecem de 2 até a maior parte, pelo menos uma vez e no máximo duas. As partes azuis são partições irrestritas com maior parte no máximo um a mais do que a maior parte laranja, mais as partições formadas apenas por partes 1, e as partes ímpares possuem um sinal, sendo positivo se o número de partes ímpares for par e negativo caso contrário. Com essas observações e, levando em consideração o fator $1/(1-t)$, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 4.3 *O número de partições laranja-azul, com um número par de partes ímpares azuis menos aquelas com um número ímpar de partes ímpares azuis, em no máximo N partes, é igual a J_N.*

A Tabela (4.3), mostra exemplos para pequenos valores de N.

Partições descritas no Teorema (4.3).			
N	com um número par de ímpares	com um número ímpar de ímpares	J_N
0	$\emptyset$		1
1	2	1	1
2	$1+1$; $2+2$; $2+2$; $4+2$	$2+1$; $2+3$	3
3	$2+2+2$; $2+2+2$; $2+1+1$; $2+3+1$; $2+3+3$; $4+2+2$; $4+4+2$; $4+2+2$; $4+2+4$; $6+4+2$	$1+1+1$; $2+2+1$; $2+2+3$; $2+2+1$; $2+3+2$; $4+2+1$; $4+2+3$; $4+2+5$	5

Tabela 4.3: Ilustração do Teorema para $f_{28}(-q,t)$.

Observe que uma segunda interpretação pode se feita usando $q=1$, pois $P(1)=3^n$. Neste caso, a interpretação combinatória é feita com:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-tq^2;q^2)_n t^n q^{n^2+n}}{(t;q^2)_{n+1}(tq;q^2)_{n+1}}=\frac{1}{(1-t)}\left(\frac{1}{(1-tq)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+tq^2)\cdots(1+tq^{2n})t^nq^{n^2+n}}{(1-tq^2)\cdots(1-tq^{2n})(1-tq)\cdots(1-tq^{2n+1})}\right).$$

Se definirmos agora partições laranja-azul como partições onde as partes laranjas são pares que aparecem de 2 até a maior parte pelo menos uma vez e no máximo duas. As partes azuis são partições irrestritas com maior parte no máximo um a mais do que a maior parte laranja, mais as partições formadas apenas por partes 1. Podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 4.4 *O número de partições laranja-azul, em no máximo N partes, é igual a 3^N.*

A Tabela (4.4), mostra exemplos para pequenos valores de N.

Partições descritas no Teorema (4.4)		
N		3^N
0	$\emptyset$	1
1	2; 1	3
2	$1+1$; $2+2$; $2+2$; $4+2$; $2+1$; $2+3$	9
3	$2+2+2$; $2+2+2$; $2+1+1$; $1+1+1$; $2+2+1$; $2+2+3$; $2+3+1$; $2+3+3$; $4+2+2$; $2+2+1$; $2+3+2$; $4+2+1$; $4+4+2$; $4+2+2$; $4+2+4$; $4+2+3$; $4+2+5$; $6+4+2$	27

Tabela 4.4: Ilustração do Teorema para $f_{28}(q,t)$.

E calculando o limite

$$\lim_{q\longrightarrow 1} P_{2n}(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n+1}{1+6j}_2 + \binom{2n+1}{2-6j}_2.$$

$$3^{2n} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n+1}{1+6j}_2 + \binom{2n+1}{2-6j}_2.$$

Conjecturamos que:

$$3^{n} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n+1}{1+6j}_2 + \binom{n+1}{2-6j}_2.$$

Identidade 66

Para

$$f_{66}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^2;q^4)_n t^n q^{n^2}}{(t;q^2)_{n+1}(tq;q^2)_n(-tq^2;q^2)_n}. \tag{4.10}$$

Temos a equação funcional:

$$(1-t)(1-tq)(1+t^2q)f_{66}(q,t) = (1-tq)(1+tq^2) + (1+t^2)tqf_{66}(q,tq^2).$$

E a relação de recorrência:

$$P_0 = 1;\quad P_1 = 1+q;\quad P_2 = 1+q+q^2+q^4;$$

$$P_n(q) = (1+q-q^2+q^{2n-1})P_{n-1} - (q-q^2-q^3)P_{n-2} - (q^3-q^{2n-5})P_{n-3}. \tag{4.11}$$

Fórmula apresentada em [9] para esta família de polinômios:

$$\begin{aligned} P_{2n+2}(q) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+4j} U(2n-1, 8j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-28j+6} U(2n+1, 3-8j) \\ &+ q \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+12j} U(2n+1, 1+8j) - q \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-20j+2} U(2n-1, 2-8j). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Calculando o limite

$$\begin{aligned} \lim_{q \longrightarrow 1} P_{2n+2}(q) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n-1}{8j}_2 + \binom{2n-1}{8j+1}_2 - \binom{2n+1}{3-8j}_2 - \binom{2n+1}{4-8j}_2 \\ &+ \binom{2n+1}{1+8j}_2 + \binom{2n+1}{2+8j}_2 - \binom{2n-1}{2-8j}_2 - \binom{2n-1}{3-8j}_2. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Neste caso, substituindo $q = 1$ em (4.11), obtemos o dobro da sequência de Pell para $n \geq 1$, $P_n(1) = 2p_n$.

$$\begin{aligned} 2p_{2n+2} &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n-1}{8j}_2 + \binom{2n-1}{8j+1}_2 - \binom{2n+1}{3-8j}_2 - \binom{2n+1}{4-8j}_2 \\ &+ \binom{2n+1}{1+8j}_2 + \binom{2n+1}{2+8j}_2 - \binom{2n-1}{2-8j}_2 - \binom{2n-1}{3-8j}_2, \quad n \geq 1. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Denotando por $Y_n = A052542$ em [22], essa sequência, exceto o termo inicial 1, é simplesmente duas vezes os números de Pell.

Interpretação combinatória:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^2;q^4)_n t^n q^{n^2}}{(t;q^2)_{n+1}(tq;q^2)_n(-tq^2;q^2)_n} =$$

$$\frac{1}{(1-t)}\left(1 + (1+t^2)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+t^2q^4)\cdots(1+t^2q^{4n-4}) t^n q^{n^2}}{(1-t^2q^{2+2})\cdots(1-t^2q^{2n+2n})(1-tq)\cdots(1-tq^{2n-1})}\right).$$

Definimos sobrepartições laranja-azul como sobrepartições onde as partes laranjas são ímpares não marcados e aparecem de 1 até a maior parte $2n-1$ pelo menos uma vez. As partes azuis são pares não marcados, aparecendo aos pares com a maior parte podendo ser um a mais que a maior parte laranja e para cada par de pares, até o maior ímpar menos um, pode existir uma parte marcada. Com essas observações e levando em consideração o fator $(1+t^2)/(1-t)$

podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 4.5 *Se consideramos para cada n a sobrepartição laranja-azul com n ou $n-2$ partes, então o número de todas estas sobrepartições com $n \leq N$ é igual a Y_N.*

A Tabela (4.5), mostra exemplos para pequenos valores de N.

Partições descritas no Teorema (4.5).		
N		Y_N
0	$\emptyset$	1
1	1	2
2	3 + 1; 1 + 1;	4
3	5 + 3 + 1; 3 + 1 + 1; 3 + 3 + 1; 1 + 1 + 1; 1 + 2 + 2; 1	10

Tabela 4.5: Ilustração do Teorema para $f_{66}(q,t)$.

Identidades 67

Para

$$f_{67}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^2;q^4)_n t^n q^{n^2+2n}}{(t;q^2)_{n+1}(tq;q^2)_n(-tq^2;q^2)_n}. \tag{4.15}$$

Temos a equação funcional:

$$(1-t)(1-tq)(1+tq^2)f_{67}(q,t) = (1-tq)(1+tq^2) + (1+t^2)tq^3 f_{67}(q,t).$$

E a relação de recorrência:

$$P_0 = 1; \quad P_1 = 1 + q^3; \quad P_2 = 1 + q^3 + q^4 + q^8;$$

$$P_n(q) = (1 + q - q^2 + q^{2n+1})P_{n-1} - (q - q^2 - q^3)P_{n-2} - (q^3 - q^{2n-3})P_{n-3}. \tag{4.16}$$

Fórmula apresentada em [9] para esta família de polinômios:

$$\begin{aligned} P_{2n-1}(q) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+4j} U(2n, 8j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-28j+6} U(2n-2, 3-8j). \\ &- q \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+12j} U(2n, 1+8j) + q \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-20j+2} U(2n-2, 2-8j), \end{aligned} \tag{4.17}$$

$n \geq 1$.

Calculando o limite

$$\lim_{q \longrightarrow 1} P_{2n-1}(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n}{8j}_2 + \binom{2n}{1+8j}_2 - \binom{2n-2}{3-8j}_2 - \binom{2n-2}{4-8j}_2 . - \binom{2n}{1+8j}_2 - \binom{2n}{2+8j}_2 + \binom{2n-2}{2-8j}_2 + \binom{2n-2}{3-8j}_2 . \tag{4.18}$$

Neste caso, substituindo $q = 1$ em (4.16), obtemos que $P_n(1) = 2p_n$, $n \geq 1$. Denotando por $Y_n = A052542$ em [22], essa sequência, exceto o termo inicial 1, é simplesmente duas vezes os números de Pell.

$$2p_{2n-1} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n}{8j}_2 + \binom{2n}{1+8j}_2 - \binom{2n-2}{3-8j}_2 - \binom{2n-2}{4-8j}_2 - \binom{2n}{1+8j}_2 - \binom{2n}{2+8j}_2 + \binom{2n-2}{2-8j}_2 + \binom{2n-2}{3-8j}_2 .$$

$n \geq 1$.

Interpretação combinatória:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^2;q^4)_n t^n q^{n^2+2n}}{(t;q^2)_{n+1}(tq;q^2)_n(-tq^2;q^2)_n} =$$

$$\frac{1}{(1-t)}\left(1 + (1+t^2)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+t^2q^4)(1+t^2q^8)\cdots(1+t^2q^{4n-4}) t^n q^{n^2+2n}}{(1-t^2q^{2+2})\cdots(1-t^2q^{2n+2n})(1-tq)\cdots(1-tq^{2n-1})}\right).$$

Considere que $n^2 + 2n = 3 + \ldots + 2n + 1$ é a soma dos n ímpares a partir de 3.

Definimos sobrepartições laranja-azul como sobrepartições onde as partes laranjas são não marcadas, ímpares e aparecem de 3 até a parte $2n - 1$ pelo menos uma vez, a maior parte laranja $2n+1$ aparece apenas uma vez, mais as partições formadas apenas por partes 1. As partes azuis são pares não marcados aparecendo aos pares, com a maior parte podendo ser um a menos que a maior parte laranja e para cada par de pares, até o maior ímpar menos três, pode existir uma parte marcada. Com essas observações e, levando em consideração o fator $(1 + t^2)/(1 - t)$, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 4.6 *Se consideramos para cada n, a sobrepartição laranja-azul, com n ou $n-2$ partes, então o número de todas estas sobrepartições com $n \leq N$ é igual a Y_n.*

A Tabela (4.6), mostra exemplos para pequenos valores de N.

Partições descritas no Teorema (4.6).		
N		Y_N
0	$\emptyset$	1
1	1	2
2	3 + 1; 1 + 1;	4
3	5 + 1 + 1; 3 + 3 + 1; 3 + 1 + 1; 1 + 1 + 1; 1 + 2 + 2; 1;	10

Tabela 4.6: Ilustração do Teorema para $f_{67}(q,t)$.

Identidade 87_a

Para

$$f_{87_a}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t^2q^2;q^4)_n t^{2n} q^{2n^2+2n}}{(t;q^2)_{n+1}(-tq^2;q^2)_n(tq;q^2)_n(tq;q^2)_{n+1}}. \tag{4.19}$$

Temos a equação funcional:

$$(1-t)(1-tq)(1+tq^2)f_{87_a}(q,t) = 1 + tq^2 + (1+tq)t^2q^4 f_{87_a}(q,tq^2).$$

E a relação de recorrência:

$$P_0 = 1; \quad P_1 = 1+q; \quad P_2 = 1+q+q^2+q^4$$

$$P_n(q) = (1+q-q^2)P_{n-1} - (q-q^2-q^3-q^{2n})P_{n-2} - (q^3-q^{2n-1})P_{n-3}. \tag{4.20}$$

Em [9] foram apresentadas duas fórmulas para esta família de polinômios. A primeira é:

$$\begin{aligned} P_{2n}(q) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{48j^2+8j} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-6j \end{bmatrix}_{q^2} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{48j^2-40j+8} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-2+6j \end{bmatrix}_{q^2} \\ &+ q\left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{48j^2+16j} \begin{bmatrix} 2n \\ n-1-6j \end{bmatrix}_{q^2} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{48j^2-32j+4} \begin{bmatrix} 2n \\ n-2+6j \end{bmatrix}_{q^2}\right]. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Calculando o limite:

$$\lim_{q\longrightarrow 1} P_{2n}(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n+1}{n-6j} + \binom{2n+1}{n-2+6j} + \binom{2n}{n-1-6j} + \binom{2n}{n-2+6j}.$$

A segunda fórmula para a família de polinômios é dada por:

$$P_{2n} \;=\; \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{12j^2+4j}\begin{bmatrix}2n+1\\ n-3j\end{bmatrix}_{q^2} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{12j^2-8j+1}\begin{bmatrix}2n\\ n-1+3j\end{bmatrix}_{q^2}. \tag{4.22}$$

Calculando o limite:

$$\lim_{q\longrightarrow 1} P_{2n} = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\binom{2n+1}{n-3j}+\binom{2n}{n-1+3j}.$$

Neste caso, substituindo $q = 1$ em (4.20), obtemos a mesma relação de recorrência para os números de Jacobsthal, mas com termos iniciais diferentes, resultando na sequência 2^n, como argumentado na interpretação de f_{27}. Resulta em:

$$2^{2n} = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\binom{2n+1}{n-6j}+\binom{2n+1}{n-2+6j}+\binom{2n}{n-1-6j}+\binom{2n}{n-2+6j},$$

e

$$2^{2n} = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\binom{2n+1}{n-3j}+\binom{2n}{n-1+3j}.$$

Interpretação combinatória:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t^2q^2;q^4)_n t^{2n}q^{2n^2+2n}}{(t;q^2)_{n+1}(-tq^2;q^2)_n(tq;q^2)_n(tq;q^2)_{n+1}} = \frac{1}{(1-t)}$$

$$\left(\frac{1}{(1-tq)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-t^2q^2)\cdots(1-t^2q^{2(2n-1)})t^{2n}q^{2n^2+2n}}{(1-tq)\cdots(1-tq^{2n+1})(1-t^2q^{2+2})\cdots(1-t^2q^{2n+2n})(1-tq)\cdots(1-tq^{2n-1})}\right).$$

Definindo como partições laranja-azul-verde partições onde nas partes laranjas os pares de 2 até a maior parte aparece pelo menos duas vezes e um número par de vezes. As partes azuis são ímpares, com maior parte podendo ser um a mais do que a maior parte laranja. As partes verdes são contadas duas vezes, dadas por pares formados pelo dobro dos ímpares, com maior parte sendo no máximo o dobro do maior par menos dois. Temos também um sinal ligado às partes verdes que será positivo se o número de partes verdes for par e negativo se for ímpar. Com essas observações e, levando em consideração o fator $1/(1-t)$, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 4.7 *O número de sobrepartições laranja-azul-verde com um número par de partes* *verdes menos aquelas com um número ímpar de partes verdes, em até N partes, é igual a* 2^N.

A Tabela (4.7), mostra exemplos para pequenos valores de N.

Partições descritas no Teorema (4.7).			
N	com um número par de partes verdes	com um número ímpar de partes verdes	2^N
0	$\emptyset$		1
1	1		2
2	1 + 1; 2 + 2		4
3	1 + 1 + 1; 2 + 2 + 1; 2 + 2 + 3; 2 + 2 + 1		8
4	1 + 1 + 1 + 1; 2 + 2 + 2 + 2; 2 + 2 + 1 + 1 2 + 2 + 1 + 3; 2 + 2 + 3 + 3; 2 + 2 + 1 + 1; 2 + 2 + 1 + 1; 2 + 2 + 1 + 3 4 + 4 + 2 + 2	2 + 2 + 2	16

Tabela 4.7: Ilustração do Teorema para $f_{87_a}(q,t)$.

CAPÍTULO 5

NOVAS INTERPRETAÇÕES COMBINATÓRIAS PARA SEQUÊNCIAS DISPONÍEVEIS EM OEIS

Apresentamos neste capítulo as interpretações feitas para sequências que estão disponíveis em The On-line Encyclopedia of Integer Sequences (OIES) [22]. O objetivo é encontrar relações mais diretas entre as interpretações dadas aqui e as já apresentadas.

Interpretações Combinatórias para a sequência $A000079$ (2^n)

Apresentamos aqui várias interpretações em termos de partição para 2^n e, no último capítulo, algumas bijeções entre estas interpretações.

Identidade 9

Para

$$f_9(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n} q^{2n^2+n}}{(t;q^2)_{n+1}(tq;q^2)_{n+1}}. \tag{5.1}$$

Temos a equação funcional:

$$(1-t)(1-tq)f_9(q,t) = 1 + t^2q^3 f_9(q,tq^2).$$

E a relação de recorrência:

$$\begin{aligned} P_0 &= 1; P_1 = 1+q; \\ P_n(q) &= (1+q)P_{n-1} - (q - q^{2n-1})P_{n-2}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Fórmula apresentada em [9] para esta família de polinômios:

$$P_{2n-1}(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{8j^2+2j} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-1-2j \end{bmatrix}_{q^2} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{8j^2-6j+1} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-1+2j \end{bmatrix}_{q^2}, \quad n \geq 1. \tag{5.3}$$

Calculando o limite:

$$\lim_{q \longrightarrow 1} P_{2n-1}(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n-1}{n-1-2j} + \binom{2n-1}{n-1+2j}.$$

Neste caso, substituindo $q = 1$ em (5.2), obtemos $P_n(1) = 2^n$. Resulta em:

$$2^{2n-1} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n-1}{n-1-2j} + \binom{2n-1}{n-1+2j}, \quad n \geq 1.$$

Interpretação combinatória:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}q^{2n^2+n}}{(t;q^2)_{n+1}(tq;q^2)_{n+1}} = \frac{1}{(1-t)}\left(\frac{1}{(1-tq)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n}q^{2n^2+n}}{(1-tq)(1-tq^2)\cdots(1-tq^{2n})(1-tq^{2n+1})}\right).$$

Observando que $2n^2+n = 1+2+\cdots+(2n-1)+2n$, temos no numerador todos os inteiros positivos de 1 até $2n$ aparecendo pelo menos uma vez, podem aparecer mais do que uma devido ao fato de que no denominador as partes podem ser de 1 até $2n+1$. Com essas observações e levando em consideração o fator $1/(1-t)$, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 5.1 *O número de partições onde todo inteiro de* 1 *até o maior par aparece pelo menos uma vez com a maior parte podendo ser no máximo um a mais do que o maior par, mais as partições formadas apenas por partes* 1*, em até N partes, é igual a* 2^N.

A Tabela (5.1), mostra exemplos para pequenos valores de N.

Partições descritas no Teorema (5.1)		
N		2^N
0	$\emptyset$	1
1	1	2
2	$1+1;\ 2+1$	4
3	$1+1+1;\ 2+1+1;\ 2+2+1,\ 3+2+1$	8
4	$1+1+1+1;\ 2+1+1+1;\ 3+2+1+1;\ 3+3+2+1;$ $2+2+2+1;\ 2+2+1+1;\ 3+2+2+1;\ 4+3+2+1$	16

Tabela 5.1: Ilustração do Teorema para $f_9(q,t)$.

Identidade 23

Para

$$f_{23}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n q^{n^2}}{(t;q^2)_{n+1}}. \tag{5.4}$$

Temos a equação funcional:

$$(1-t)f_{23}(q,t) = 1 - tqf_{23}(q,tq^2).$$

E a relação de recorrência:

$$\begin{aligned} P_0 &= 1; \\ P_n(q) &= (1 - q^{2n-1})P_{n-1}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Fórmula apresentada em [9] para esta família de polinômios:

$$P_n(q) \;=\; \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{12j^2+2j} J(n, 3j, q) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{12j^2-10j+2} J(n, 1-3j, q). \tag{5.6}$$

Calculando o limite:

$$\lim_{q \longrightarrow -1} P_n(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n}{3j}_3 - \binom{n}{1-3j}_3.$$

Neste caso, substituindo $q = -1$ em (5.5), obtemos $P_n(-1) = 2^n$. Resulta em:

$$2^n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n}{3j}_3 - \binom{n}{1-3j}_3.$$

A interpretação combinatória para $P_n(-q)$é feita através de $f_{23}(-q, t)$, dada por:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n q^{n^2}}{(t; q^2)_{n+1}} = \frac{1}{(1-t)} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n q^{n^2}}{(1 - tq^2) \cdots (1 - tq^{2n})} \right).$$

Observando que $n^2 = 1 + 3 + \cdots + 2n - 1$, temos no numerador todos os ímpares de 1 até $2n - 1$ aparecendo exatamente uma vez, e no denominador os pares irrestritos, com maior parte podendo ser $2n$. Com essas observações e levando em consideração o fator $1/(1 - t)$, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 5.2 *O número de partições onde os ímpares de* 1 *até o maior ímpar aparecem exatamente uma vez, e a maior parte pode ser no máximo um a mais do que o maior ímpar, em até* N *partes, é igual a* 2^N.

A Tabela (5.2), mostra exemplos para pequenos valores de N.

Partições descritas no Teorema (5.2)		
N		2^N
0	$\emptyset$	1
1	1	2
2	$1+3;\ 2+1$	4
3	$2+2+1;\ 3+2+1;\ 4+3+1,\ 5+3+1$	8
4	$2+2+2+1;\ 3+2+2+1;\ 4+4+3+1;\ 4+3+2+1;$ $5+4+3+1;\ 5+3+2+1;\ 6+5+3+1;\ 7+5+3+1$	16

Tabela 5.2: Ilustração do Teorema para $f_{23}(-q,t)$.

Identidade 38

Para

$$f_{38}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n} q^{2(n^2+n)}}{(t;q^2)_{n+1}(tq;q^2)_{n+1}}. \tag{5.7}$$

Temos a equação funcional:

$$(1-t)(1-tq)f_{38}(q,t) = 1 + t^2 q^4 f_{38}(q,tq^2).$$

E a relação de recorrência:

$$P_0 = 1;\quad P_1 = 1+q;$$
$$P_n(q) = (1+q)P_{n-1} - (q-q^{2n})P_{n-2}. \tag{5.8}$$

Fórmula apresentada em [9] para esta família de polinômios:

$$P_{2n}(q) \;=\; \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+6j} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-4j \end{bmatrix}_{q^2} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-10j+1} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-1+4j \end{bmatrix}_{q^2}. \tag{5.9}$$

$$P_{2n-1}(q) \;=\; \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+6j} \begin{bmatrix} 2n \\ n-1-4j \end{bmatrix}_{q^2} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-10j+1} \begin{bmatrix} 2n \\ n-1+4j \end{bmatrix}_{q^2}. \tag{5.10}$$

$n \geq 1$.

Calculando os limites:

$$\lim_{q\longrightarrow 1} P_{2n}(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n+1}{n-4j} + \binom{2n+1}{n-1+4j}.$$

$$\lim_{q\longrightarrow 1} P_{2n-1}(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n}{n-1-4j} + \binom{2n}{n-1+4j}.$$

Neste caso, substituindo $q = 1$ em (5.8), obtemos $P_n(1) = 2^n$. Resulta em:

$$2^{2n} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n+1}{n-4j} + \binom{2n+1}{n-1+4j}.$$

$$2^{2n-1} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n}{n-1-4j} + \binom{2n}{n-1+4j}.$$

Interpretação combinatória:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}q^{2(n^2+n)}}{(t;q^2)_{n+1}(tq;q^2)_{n+1}} = \frac{1}{(1-t)}\left(\frac{1}{(1-tq)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n}q^{2(n^2+n)}}{(1-tq)(1-tq^2)\cdots(1-tq^{2n})(1-tq^{2n+1})}\right).$$

Levando em consideração o fator $1/(1-t)$, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 5.3 *O número de partições onde todo par de* 2 *até o maior par aparece pelo menos duas vezes e a maior parte pode ser um a mais do que a maior parte par, mais as partições formadas apenas por partes* 1*, em até N partes, é igual a* 2^N.

A Tabela (5.3), mostra exemplos para pequenos valores de N.

Partições descritas no Teorema (5.3)		
N		2^N
0	$\emptyset$	1
1	1	2
2	$1+1;\ 2+2$	4
3	$1+1+1;\ 2+2+1;\ 3+2+2,\ 2+2+2$	8
4	$1+1+1+1;\ 2+2+1+1;\ 3+2+2+1;\ 3+3+2+2;$ $2+2+2+2;\ 2+2+2+1;\ 3+2+2+2;\ 4+4+2+2$	16

Tabela 5.3: Ilustração do Teorema para $f_{38}(q,t)$.

Identidade 39

Para

$$f_{39}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n} q^{2n^2}}{(t;q^2)_{n+1}(tq;q^2)_n}. \tag{5.11}$$

Temos a equação funcional:

$$(1-t)(1-tq)f_{39}(q,t) = 1 - tq + t^2q^2 f_{39}(q,tq^2).$$

E a relação de recorrência:

$$\begin{aligned} P_0 &= P_1 = 1; \\ P_n(q) &= (1+q)P_{n-1} - (q - q^{2n-2})P_{n-2}. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Fórmula apresentada em [9] para esta família de polinômios:

$$P_{2n}(q) \;=\; \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+2j} \begin{bmatrix} 2n \\ n-4j \end{bmatrix}_{q^2} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-14j+3} \begin{bmatrix} 2n \\ n-2+4j \end{bmatrix}_{q^2}. \tag{5.13}$$

$$P_{2n+1}(q) \;=\; \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+2j} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-4j \end{bmatrix}_{q^2} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-14j+4} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-1+4j \end{bmatrix}_{q^2}. \tag{5.14}$$

Calculando os limites:

$$\lim_{q\longrightarrow 1} P_{2n}(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n}{n-4j} + \binom{2n}{n-2+4j}.$$

$$\lim_{q\longrightarrow 1} P_{2n+1}(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n+1}{n-4j} + \binom{2n+1}{n-1+4j}.$$

Neste caso, substituindo $q = 1$ em (5.12), obtemos $P_n(1) = 2^{n-1}$, $n \geq 1$. Resulta em:

$$2^{2n-1} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n}{n-4j} + \binom{2n}{n-2+4j}, n \geq 1.$$

$$2^{2n} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n+1}{n-4j} + \binom{2n+1}{n-1+4j}.$$

Interpretação combinatória:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n} q^{2n^2}}{(t;q^2)_{n+1}(tq;q^2)_n} = \frac{1}{(1-t)} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n} q^{2n^2}}{(1-tq)(1-tq^2)\cdots(1-tq^{2n-1})(1-tq^{2n})} \right).$$

Observando que no numerador temos todos os ímpares de 1 até $2n-1$ aparecendo pelo menos duas vezes e no denominador a maior parte pode ser um a mais que no denominador, e levando em consideração o fator $1/(1-t)$, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 5.4 *O número de partições onde todo ímpar de* 1 *até o maior ímpar aparece pelo menos duas vezes, a maior parte pode ser um a mais do que a maior parte ímpar, em até N partes, é igual a* 2^{N-1}, $N \geq 1$.

A Tabela (5.4), mostra exemplos para pequenos valores de N.

Partições descritas no Teorema (5.4)		
N		2^{N-1}
0	$\emptyset$	1
1		1
2	1 + 1	2
3	1 + 1 + 1; 2 + 1 + 1	4
4	1 + 1 + 1 + 1; 2 + 2 + 1 + 1; 2 + 1 + 1 + 1; 3 + 3 + 1 + 1	8
5	1 + 1 + 1 + 1 + 1; 2 + 1 + 1 + 1 + 1; 2 + 2 + 1 + 1 + 1; 2 + 2 + 2 + 1 + 1; 3 + 3 + 1 + 1 + 1; 3 + 3 + 2 + 1 + 1; 3 + 3 + 3 + 1 + 1; 4 + 3 + 3 + 1 + 1	16

Tabela 5.4: Ilustração do Teorema para $f_{39}(q,t)$.

Identidade 84

Para

$$f_{84}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n} q^{2n^2+n}}{(t;q^2)_{n+1}(tq;q^2)_{n+1}}. \tag{5.15}$$

Temos a equação funcional:

$$(1-t)(1-tq) f_{84}(q,t) = 1 + t^2 q^3 f_{84}(q, tq^2).$$

E a relação de recorrência:

$$P_0 = 1; \quad P_1 = 1 + q;$$
$$P_n(q) = (1+q)P_{n-1} - (q - q^{2n-1})P_{n-2}. \tag{5.16}$$

Fórmula apresentada em [9] para esta família de polinômios:

$$\begin{aligned} P_n(q) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{48j^2+4j} \begin{bmatrix} 2n \\ n+8j \end{bmatrix}_q + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{48j^2-44j+10} \begin{bmatrix} 2n \\ n-4+8j \end{bmatrix}_q \\ &- q^2 \left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{48j^2+20j} \begin{bmatrix} 2n \\ n-2-8j \end{bmatrix}_q + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{48j^2-28j+2} \begin{bmatrix} 2n \\ n-2+8j \end{bmatrix}_q \right]. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Calculando o limite:

$$\lim_{q \longrightarrow 1} P_n(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n}{n+8j} + \binom{2n}{n-4+8j} - \binom{2n}{n-2-8j} - \binom{2n}{n-2+8j}.$$

Neste caso, substituindo $q = 1$ em (5.16), obtemos $P_n(1) = 2^n$. Resulta em:

$$2^n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n}{n+8j} + \binom{2n}{n-4+8j} - \binom{2n}{n-2-8j} - \binom{2n}{n-2+8j}.$$

Interpretação combinatória:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n} q^{2n^2+n}}{(t;q^2)_{n+1}(tq;q^2)_{n+1}} = \frac{1}{(1-t)} \left(\frac{1}{(1-tq)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n} q^{2n^2+n}}{(1-tq)(1-tq^2)\cdots(1-tq^{2n})(1-tq^{2n+1})} \right).$$

Observando que $2n^2 + n = 1 + 2 + \cdots + (2n-1) + 2n$, temos no numerador todos os inteiros positivos de 1 até $2n$ aparecendo pelo menos uma vez, podem aparecer mais do que uma devido ao fato de que no denominador termos partes 1 até $2n+1$. Com essas observações e levando em consideração o fator $1/(1-t)$, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 5.5 *O número de partições onde todo inteiro de* 1 *até o maior par aparece pelo menos uma vez com maior parte podendo ser no máximo um a mais que o maior par, mais as partições formadas apenas por partes* 1*, em até N partes, é igual a* 2^N.

A Tabela (5.5), mostra exemplos para pequenos valores de N.

Partições descritas no Teorema (5.5)		
N		2^N
0	$\emptyset$	1
1	1	2
2	$1+1;\ 2+1$	4
3	$1+1+1;\ 2+1+1;\ 2+2+1,\ 3+2+1$	8
4	$1+1+1+1;\ 2+1+1+1;\ 3+2+1+1;\ 3+3+2+1;$ $2+2+2+1;\ 2+2+1+1;\ 3+2+2+1;\ 4+3+2+1$	16

Tabela 5.5: Ilustração do Teorema para $f_{84}(q,t)$.

Interpretações Combinatórias para a sequência $A000244$ (3^n)

A pequena diferença no numerador das duas funções geradoras apresentadas aqui, pode relacionar uma interpretação em termos de partição de f_{50} a uma interpretação para f_{51}, pois o fator n^2+n é interpretado como soma de pares e n^2+2n é interpretado como soma de ímpares maiores ou iguais a três. Mas uma interpretação em termos de coloração também foi apresentada para f_{51}, onde a bijeção pode ser escrita mais detalhadamente.

Identidade 50

Para

$$f_{50}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-tq;q^2)_n t^n q^{n^2+2n}}{(t;q^2)_{n+1}(tq;q^2)_{n+1}}. \tag{5.18}$$

Temos a equação funcional:

$$(1-t)(1-tq)f_{50}(q,t) = 1 + (tq^3 + t^2q^4)f_{50}(q,tq^2).$$

E a relação de recorrência:

$$P_0 = 1;\ \ P_1 = 1+q+q^3; P_2 = 1+q+q^2+q^3+2q^4+q^5+q^6+q^8;$$
$$P_n(q) = (1+q+q^{2n+1})P_{n-1} - (q-q^{2n})P_{n-2}. \tag{5.19}$$

Fórmula apresentada em [9] para esta família de polinômios:

$$P_{n-1}(q) \;=\; \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+8j}\begin{bmatrix} 2n \\ n-1-6j \end{bmatrix}_q - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-16j+2}\begin{bmatrix} 2n \\ n-2+6j \end{bmatrix}_q, \quad n \geq 1. \tag{5.20}$$

Calulando o limite:

$$\lim_{q\longrightarrow 1} P_n(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n}{n-1-6j} - \binom{2n}{n-2+6j}.$$

Fazendo a substituição $q = 1$ em (5.19), obtemos $P_n(1) = 3^n$. Resulta em:

$$3^{n-1} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n}{n-1-6j} - \binom{2n}{n-2+6j}, \quad n \geq 1.$$

Interpretação combinatória:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-tq;q^2)_n t^n q^{n^2+2n}}{(t;q^2)_{n+1}(tq;q^2)_{n+1}} = \frac{1}{(1-t)}\left(\frac{1}{(1-tq)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+tq)\cdots(1+tq^{2n-1})t^n q^{n^2+2n}}{(1-tq)(1-tq^2)\cdots(1-tq^{2n})(1-tq^{2n+1})}\right).$$

Levando em consideração o fator $1/(1-t)$, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 5.6 *O número de sobrepartições onde somente os ímpares podem ser marcados até no máximo dois a menos que a maior parte, todo ímpar não marcado de* 3 *até a maior parte aparece pelo menos uma vez, mais as partições formadas apenas por partes 1, em até N partes é igual a* 3^N.

A Tabela (5.6), mostra exemplos para pequenos valores de N.

Partições descritas no Teorema (5.6)		
N		3^N
0	$\emptyset$	1
1	$1; 3$	3
2	$1+1;\ 3+1;\ 3+2;\ 3+3;\ 3+\bar{1};\ 5+3$	9
3	$1+1+1;\ 3+1+1; 3+2+2;\ 3+3+3;\ 3+2+1;\ 3+3+2;\ 3+3+1;$ $3+1+\bar{1};\ 3+2+\bar{1};\ 3+3+\bar{1};\ 5+3+1;\ 5+3+2;\ 5+3+3;\ 5+4+3;$ $5+5+3;\ 5+3+\bar{1};\ 5+3+\bar{3};\ 7+5+3$	27

Tabela 5.6: Ilustração do Teorema para $f_{50}(q,t)$.

Identidade 51

Para

$$f_{51}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-tq;q^2)_n t^n q^{n^2+n}}{(t;q^2)_{n+1}(tq;q^2)_{n+1}}. \tag{5.21}$$

Temos a equação funcional:

$$(1-t)(1-tq)f_{51}(q,t) = 1 + (tq^2 + t^2q^3)f_{51}(q,tq^2).$$

E a relação de recorrência:

$$P_0 = 1;\quad P_1 = 1 + q + q^2;$$

$$P_n(q) = (1 + q + q^{2n})P_{n-1} - (q - q^{2n-1})P_{n-2}. \tag{5.22}$$

Fórmula apresentada em [9] para esta família de polinômios:

$$P_{n-1}(q) \;=\; \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+4j}\begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-1-6j \end{bmatrix}_q + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-20j+4}\begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-3+6j \end{bmatrix}, \quad n \geq 1. \tag{5.23}$$

Calculando o limite:

$$\lim_{q\longrightarrow 1} P_{n-1}(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n-1}{n-1-6j} + \binom{2n-1}{n-3+6j}.$$

Neste caso, substituindo $q = 1$ em (5.22), obtemos $P_n(1) = 3^n$. Resulta em:

$$3^{n-1} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n-1}{n-1-6j} + \binom{2n-1}{n-3+6j}, \quad n \geq 1.$$

Interpretação combinatória :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-tq;q^2)_n t^n q^{n^2+n}}{(t;q^2)_{n+1}(tq;q^2)_{n+1}} = \frac{1}{(1-t)}\left(\frac{1}{(1-tq)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+tq)\cdots(1+tq^{2n-1})t^n q^{n^2+n}}{(1-tq^2)\cdots(1-tq^{2n})(1-tq)\cdots(1-tq^{2n+1})}\right).$$

Definimos partição laranja-azul como partições onde a partição azul é dada por todos os pares de 2 até o maior par aparecendo exatamente uma vez, com maior parte no máximo um a mais do que a maior parte par, mais as partições formadas apenas por partes 1. Na partição laranja os ímpares são distintos, a maior parte é no máximo a maior parte par azul. Com essas observações e levando em consideração o fator $1/(1-t)$, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 5.7 *O número de partições laranja-azul, em até N partes é igual a 3^N.*

A Tabela (5.7), mostra exemplos para pequenos valores de N.

Partições descritas no Teorema (5.7)		
N		3^N
0	$\emptyset$	1
1	2; 1	3
2	1 + 1; 2 + 1; 3 + 2; 2 + 1; 2 + 2; 4 + 2	9
3	1 + 1 + 1; 2 + 1 + 1; 3 + 2 + 1; 3 + 3 + 2; 2 + 2 + 1; 2 + 2 + 2; 2 + 1 + 2; 2 + 1 + 1; 3 + 2 + 2; 3 + 2 + 1; 4 + 2 + 1; 4 + 3 + 2; 5 + 4 + 2; 4 + 2 + 1; 4 + 2 + 2; 4 + 2 + 3; 4 + 2 + 4; 6 + 4 + 2	27

Tabela 5.7: Ilustração do Teorema para $f_{51}(q,t)$.

Outra interpretação combinatória:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-tq;q^2)_n t^n q^{n^2+n}}{(t;q^2)_{n+1}(tq;q^2)_{n+1}} = \frac{1}{(1-t)}\left(\frac{1}{(1-tq)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+tq)\cdots(1+tq^{2n-1})t^n q^{n^2+n}}{(1-tq)(1-tq^2)\cdots(1-tq^{2n})(1-tq^{2n+1})}\right).$$

Levando em consideração o fator $1/(1-t)$, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 5.8 *O número de sobrepartições onde todo par de 2 até o maior par aparece pelo menos uma vez, a maior parte não marcada pode ser um a mais que a maior parte par, as partes marcadas são ímpares e no máximo um a menos que a maior parte par, mais as partições formadas apenas por partes 1, em até N partes é igual a 3^N.*

A Tabela (5.8), mostra exemplos para pequenos valores de N.

Partições descritas no Teorema (5.8)		
N		3^N
0	$\emptyset$	1
1	$1; 2$	3
2	$1+1;\ 2+1;\ 2+2;\ 3+2;\ 2+\bar{1};\ 4+2$	9
3	$1+1+1;\ 2+1+1; 2+2+2;\ 2+2+1;\ 3+3+2;\ 3+2+2;\ 3+2+1;$ $2+1+\bar{1};\ 3+2+\bar{1};\ 2+2+\bar{1};\ 4+2+1;\ 4+2+2;\ 4+3+2;$ $4+4+2;\ 5+4+2;\ 4+2+\bar{1};\ 4+2+\bar{3};\ 6+4+2$	27

Tabela 5.8: Ilustração 2 do Teorema para $f_{51}(q,t)$.

Interpretações Combinatórias para a sequência $A025192$ (2.3^{n-1})

Para a função geradora de f_{47} temos q^{n^2} no numerador, enquanto para f_{48} temos q^{n^2+n}, com isso podemos facilmente passar de uma interpretação para a outra trocando os ímpares que aparecem pelo menos uma vez pelos pares que aparecem pelo menos uma vez. Apresentamos, no último capítulo, uma bijeção entre as interpretações dadas para f_{29} e f_{48}.

Identidade 29

Para

$$f_{29}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-tq;q^2)_n t^n q^{n^2}}{(t;q^2)_{n+1}(tq;q^2)_n}. \tag{5.24}$$

Temos a equação funcional:

$$(1-t)(1-tq)f_{29}(q,t) = 1 - tq + (1+tq)tqf_{29}(q,tq^2).$$

E a relação de recorrência:

$$P_0 = 1; P_1 = 1+q;$$

$$P_n(q) = (1+q+q^{2n+1})P_{n-1} - (q-q^{2n-2})P_{n-2}. \tag{5.25}$$

Fórmula apresentada em [9] para esta família de polinômios:

$$P_n(q) \quad = \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{12j^2+2j} U(n, 6j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{12j^2-10j+2} U(n, 2-6j). \tag{5.26}$$

Calculando o limite:

$$\lim_{q \longrightarrow 1} P_n(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n}{6j}_2 + \binom{n}{6j+1}_2 + \binom{n}{2-6j}_2 + \binom{n}{3-6j}_2.$$

Neste caso, substituindo $q = 1$ em (5.5), obtemos $P_n(1) = 2.3^{n-1}$, dada por $A025192$ em [22]. Resulta em:

$$L_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n}{6j}_2 + \binom{n}{6j+1}_2 + \binom{n}{2-6j}_2 + \binom{n}{3-6j}_2.$$

Interpretação combinatória:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-tq;q^2)_n t^n q^{n^2}}{(t;q^2)_{n+1}(tq;q^2)_n} = \frac{1}{(1-t)} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+tq)\cdots(1+tq^{2n-1})t^n q^{n^2}}{(1-tq)(1-tq^2)\cdots(1-tq^{2n-1})(1-tq^{2n})} \right).$$

Levando em consideração o fator $1/(1-t)$, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 5.9 *O número de partições onde todo ímpar de* 1 *até o maior ímpar aparece pelo menos uma vez, a maior parte não marcada pode ser um a mais que a maior parte ímpar e as partes marcadas são ímpares menores do que ou iguais a maior parte ímpar, em no máximo N partes, é igual a* 2.3^{N-1}.

A Tabela (5.9), mostra exemplos para pequenos valores de N.

Partições descritas no Teorema (5.9)		
N		2.3^{N-1}
0	$\emptyset$	1
1	1	2
2	$1+1;\ 1+2;\ 1+3;\ 1+\bar{1}$	6
3	$1+1+1;\ 1+1+\bar{1};\ 2+1+\bar{1};\ 2+1+1;\ 2+2+1;$ $3+1+\bar{1};\ 3+1+\bar{3};\ 3+1+1;\ 3+2+1;\ 3+3+1;\ 4+3+1;\ 5+3+1$	18

Tabela 5.9: Ilustração do Teorema para $f_{29}(q,t)$.

Identidade 47

Para

$$f_{47}(q,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-t;q^2)_n t^n q^{n^2}}{(t;q^2)_{n+1}(tq;q^2)_n}. \tag{5.27}$$

Temos a equação funcional:

$$(1-t)(1-tq)f_{47}(q,t)=1-tq+(1+t)tqf_{47}(q,tq^2).$$

E a relação de recorrência:

$$\begin{aligned} P_0 &= 1;\quad P_1=1+q;\\ P_n(q) &= (1+q+q^{2n-1})P_{n-1}-(q-q^{2n-3})P_{n-2}. \end{aligned} \tag{5.28}$$

Fórmula apresentada em [9] para esta família de polinômios:

$$\begin{aligned} P_n(q) \quad &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+2j}\begin{bmatrix}2n\\ n-6j\end{bmatrix}_q-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-22j+5}\begin{bmatrix}2n-1\\ n-3+6j\end{bmatrix}_q\\ &+q\left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+10j}\begin{bmatrix}2n-1\\ n-2-6j\end{bmatrix}_q-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-14j+1}\begin{bmatrix}2n\\ n-2+6j\end{bmatrix}_q\right]. \end{aligned} \tag{5.29}$$

Calculando o limite:

$$\lim_{q\longrightarrow 1} P_n(q)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\binom{2n}{n-6j}-\binom{2n-1}{n-3+6j}+\binom{2n-1}{n-2-6j}-\binom{2n}{n-2+6j}.$$

Neste caso, substituindo $q=1$ em (5.28), obtemos que $P_0(1)=1,\ \ P_n(1)=2.3^{n-1},\ n\geq 1$.

Resulta em:

$$2.3^{n-1} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n}{n-6j} - \binom{2n-1}{n-3+6j} + \binom{2n-1}{n-2-6j} - \binom{2n}{n-2+6j}, \quad n \geq 1.$$

Interpretação combinatória:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t;q^2)_n t^n q^{n^2}}{(t;q^2)_{n+1}(tq;q^2)_n} = \frac{1}{(1-t)}\left(1 + (1+t)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+tq^2)\cdots(1+tq^{2n-2})t^n q^{n^2}}{(1-tq)(1-tq^2)\cdots(1-tq^{2n-1})(1-tq^{2n})}\right).$$

Levando em consideração o fator $(1+t)/(1-t)$, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 5.10 *O número de partições onde todo ímpar de* 1 *até o maior ímpar aparece pelo menos uma vez, a maior parte não marcada pode ser um a mais que a maior parte ímpar, as partes marcadas são pares no máximo um a menos que a maior parte ímpar, em até N ou $N-1$ partes, é igual a* 2.3^{N-1}, $N \geq 1$.

A Tabela (5.10), mostra exemplos para pequenos valores de N.

Partições descritas no Teorema (5.10)		
N		2.3^{N-1}
0	$\emptyset$	1
1	1	2
2	$1+1$; $2+1$; $3+1$; 1	6
3	$1+1+1$; $2+1+1$; $2+2+1$; $3+1+1$; $3+2+1$; $3+3+1$; $4+3+1$; $3+1+\bar{2}$; $5+3+1$; $1+1$; $2+1$; $3+1$	18

Tabela 5.10: Ilustração do Teorema para $f_{47}(q,t)$.

Identidade 48

Para

$$f_{48}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t;q^2)_n t^n q^{n^2+n}}{(t;q^2)_{n+1}(tq;q^2)_n}. \tag{5.30}$$

Temos a equação funcional:

$$(1-t)(1-tq)f_{48}(q,t) = 1 - tq + (1+t)tq^2 f_{48}(q,tq^2).$$

E a relação de recorrência:

$$P_0 = 1; \;\; P_1 = 1 + q^2;$$
$$P_n(q) = (1 + q + q^{2n})P_{n-1} - (q - q^{2n-2})P_{n-2}. \tag{5.31}$$

Fórmula apresentada em [9] para esta família de polinômios:

$$\begin{aligned} P_n(q) \;\; &= \;\; \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+2j} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-6j \end{bmatrix}_q - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-22j+5} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-3+6j \end{bmatrix}_q \\ & -q \;\; \left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+10j} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-1-6j \end{bmatrix}_q - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-14j+1} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-2+6j \end{bmatrix}_q \right]. \end{aligned} \tag{5.32}$$

Calculando o limite:

$$\lim_{q \longrightarrow 1} P_n(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n+1}{n-6j} - \binom{2n-1}{n-3+6j} - \binom{2n+1}{n-1-6j} + \binom{2n-1}{n-2+6j}.$$

Neste caso, substituindo $q = 1$ em (5.31), obtemos que $P_0(1) = 1, \;\; P_n(1) = 2.3^{n-1}, \; n \geq 1$. Resulta em:

$$2.3^{n-1} \;=\; \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n+1}{n-6j} - \binom{2n-1}{n-3+6j} - \binom{2n+1}{n-1-6j} + \binom{2n-1}{n-2+6j}, \;\; n \geq 1.$$

Interpretação combinatória:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t;q^2)_n t^n q^{n^2+n}}{(t;q^2)_{n+1}(tq;q^2)_n} = \frac{1}{(1-t)} \left(1 + (1+t) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+tq^2)\cdots(1+tq^{2n-2})t^n q^{n^2+n}}{(1-tq)(1-tq^2)\cdots(1-tq^{2n-1})(1-tq^{2n})} \right).$$

Levando em consideração o fator $(1+t)/(1-t)$, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 5.11 *O número de partições onde todo par de* 2 *até a maior parte aparece pelo menos uma vez, as partes marcadas são pares no máximo dois a menos que a maior parte, em até* N *ou* $N-1$ *partes, é igual a* $2.3^{N-1}, \; N \geq 1$.

A Tabela (5.11), mostra exemplos para pequenos valores de N.

Partições descritas no Teorema (5.11)		
N		2.3^{N-1}
0	$\emptyset$	1
1	2	2
2	$2+2$; $2+1$; $4+2$; 2	6
3	$2+2+2$; $2+2+1$; $2+1+1$; $4+2+1$; $4+2+2$; $4+3+2$; $4+4+2$; $4+2+\bar{2}$; $6+4+2$; $2+2$; $2+1$; $4+2$	18

Tabela 5.11: Ilustração do Teorema para $f_{48}(q,t)$.

Interpretações Combinatórias para a sequência $A028495$

As funções interpretadas aqui diferem apenas de um fator $2n$ no expoente de q no numerador. Com isso existe uma bijeção simples entre elas, basta associarmos os pares de f_{32} que aparecem pelo menos uma vez com os ímpares de f_{33}.

Identidade 32

Para

$$f_{32}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n} q^{2(n^2+n)}}{(t;q^2)_{n+1}(-tq^2;q^2)_n(-tq;q^2)_n}. \tag{5.33}$$

Temos a equação funcional:

$$(1-t)(1+tq)(1+tq^2)f_{32}(q,t) = (1+tq)(1+tq^2) + t^2q^4 f_{32}(q,tq^2).$$

E a relação de recorrência:

$$P_0 = 1;\ \ P_1 = 1;\ \ P_2 = 1+q^4;$$
$$P_n(q) = (1-q-q^2)P_{n-1} + (q+q^2-q^3+q^{2n})P_{n-2} + q^3P_{n-3}. \tag{5.34}$$

Fórmula apresentada em [9] para esta família de polinômios:

$$\begin{aligned} P_{2n}(q) \ &= \ \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{56j^2+6j}\begin{bmatrix}2n+1\\ n-7j\end{bmatrix}_{q^2} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{56j^2-22j+2}\begin{bmatrix}2n+1\\ n-1+7j\end{bmatrix}_{q^2} \\ &- \ \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{56j^2+34j+5}\begin{bmatrix}2n+1\\ n-2-7j\end{bmatrix}_{q^2} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{56j^2+62j+17}\begin{bmatrix}2n+1\\ n-3+7j\end{bmatrix}_{q^2}. \end{aligned} \tag{5.35}$$

Caldulando o linite:

$$\lim_{q \longrightarrow -1} P_{2n}(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n+1}{n-7j} - \binom{2n+1}{n-1+7j} + \binom{2n+1}{n-2-7j} - \binom{2n+1}{n-3+7j}.$$

Neste caso, substituindo $q = -1$ em (5.34), obtemos que $P_n(-1)$ são os coeficientes da expansão de $\dfrac{1-x^2}{1-x-2x^2+x^3}$ em série de potências que é apresentado por $A028495$, em [22]. Os primeiros termos de $P_n(-1) = M_n$ são dados por: $1, 1, 2, 3, 6, 10, 19, 33 \cdots$. Resulta em:

$$M_{2n} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n+1}{n-7j} - \binom{2n+1}{n-1+7j} + \binom{2n+1}{n-2-7j} - \binom{2n+1}{n-3+7j}.$$

Para a interpretação combinatória de $P_n(-q)$, usamos $f_{32}(-q, t)$ como segue:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n} q^{2(n^2+n)}}{(t; q^2)_{n+1}(-tq^2; q^2)_n (tq; q^2)_n} =$$

$$\frac{1}{(1-t)} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n} q^{2(n^2+n)}}{(1-t^2q^{2+2}) \cdots (1-t^2q^{2n+2n})(1-tq) \cdots (1-tq^{2n-1})} \right).$$

Levando em consideração o fator $1/(1-t)$, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 5.12 *O número de partições onde todo par de* 2 *até a maior parte aparece pelo menos duas vezes e um número par de vezes, em até N partes, é igual a* M_N.

A Tabela (5.12), mostra exemplos para pequenos valores de N.

Partições descritas no Teorema (5.12)		
N		M_N
0	$\emptyset$	1
1		1
2	$2+2$	2
3	$2+2+1$	3
4	$2+2+1+1; 2+2+2+2;\ 4+4+2+2$	6
5	$2+2+1+1+1; 2+2+2+2+1;\ 4+4+2+2+1; 4+4+3+2+2$	10

Tabela 5.12: Ilustração do Teorema para $f_{32}(-q, t)$.

Quando substituímos $q = -1$, ficamos com

$$M_0 = 1; M_1 = 1; \quad M_2 = 2;$$

$$M_{n+3} = M_{n+2} + 2M_{n+1} - M_n.$$

Aplicando a técnica usada em (2.9) encontramos

$$\frac{A(x) - M_0 - M_1x - M_2x^2}{x^3} = \frac{A(x) - M_0 - M_1x}{x^2} + 2\frac{A(x) - M_0}{x} - A(x) \Longrightarrow$$

$$A(x) = \frac{1 - x^2}{1 - x - 2x^2 + x^3}.$$

O que mostra que a sequência representa os coeficientes da expansão de $\dfrac{1 - x^2}{1 - x - 2x^2 + x^3}$ em série de potências.

Neste caso, podemos ainda substituir $q = 1$ em (5.34), obtemos que $P_n(1)$ são os coeficientes da expansão de $\dfrac{1 + 2x + x^2}{1 + x - 2x^2 - x^3}$ em série de potências.

Os primeiros termos de $P_n(1) = \widetilde{M}_n$, são dados por: $1, 1, 2, 1, 4, 0, 9, 5, 23 \cdots$. Resulta em:

$$\widetilde{M}_{2n}(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n+1}{n-7j} - \binom{2n+1}{n-1+7j} - \binom{2n+1}{n-2-7j} + \binom{2n+1}{n-3+7j}.$$

Interpretação combinatória:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n} q^{2(n^2+n)}}{(t;q^2)_{n+1}(-tq^2;q^2)_n(-tq;q^2)_n} =$$

$$\frac{1}{(1-t)} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n} q^{2(n^2+n)}}{(1 - t^2q^{2+2}) \cdots (1 - t^2q^{2n+2n})(1 + tq) \cdots (1 + tq^{2n-1})} \right).$$

Neste caso temos um sinal ligado às partes ímpares que será positivo se o número de partes ímpares for par e negativo se o número de partes ímpares for ímpar. Levando em consideração o fator $1/(1 - t)$, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 5.13 *O número de partições onde todo par de* 2 *até a maior parte aparece pelo menos duas vezes e um número par de vezes com um número par de partes ímpares menos aquelas com um número ímpar de partes ímpares, em até N partes, é igual a $\widetilde{M}_N$.*

A Tabela (5.13), mostra exemplos para pequenos valores de N.

Partições descritas no Teorema (5.13).			
N	número par de ímpares	número ímpar de ímpares	$\widetilde{M}_N$
0	$\emptyset$		1
1			1
2	$2+2$		2
3		$2+2+1$	1
4	$2+2+1+1; 2+2+2+2;\ 4+4+2+2$		4
5		$2+2+1+1+1;\ 4+4+2+2+1;$ $2+2+2+2+1;\ 4+4+3+2+2$	0

Tabela 5.13: Ilustração do Teorema para $f_{32}(q,t)$.

Quando substituímos $q = 1$, ficamos com

$$\widetilde{M}_0 = 1;\ \ \widetilde{M}_1 = 1;\ \ \widetilde{M}_2 = 2;$$

$$\widetilde{M}_{n+3} = -\widetilde{M}_{n+2} + 2\widetilde{M}_{n+1} + \widetilde{M}_n.$$

Aplicando a técnica usada em (2.9) encontramos

$$\frac{A(x) - \widetilde{M}_0 - \widetilde{M}_1 x - \widetilde{M}_2 x^2}{x^3} = \frac{-A(x) + \widetilde{M}_0 + \widetilde{M}_1 x}{x^2} + 2\frac{A(x) - \widetilde{M}_0}{x} + A(x) \Longrightarrow$$

$$A(x) = \frac{1 + 2x + x^2}{1 + x - 2x^2 - x^3}.$$

O que mostra que a sequência representa os coeficientes da expansão de $\dfrac{1 + 2x + x^2}{1 + x - 2x^2 - x^3}$ em série de potências.

Identidade 33

Para

$$f_{33}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n} q^{2n^2}}{(t;q^2)_{n+1}(-tq^2;q^2)_n(-tq;q^2)_n}. \tag{5.36}$$

Temos a equação funcional:

$$(1-t)(1+tq^2)(1+tq)f_{33}(q,t) = (1+tq^2)(1+tq) + t^2q^2 f_{33}(q,tq^2).$$

E a relação de recorrência:

$$P_0 = 1; \ \ P_1 = 1; \ \ P_2 = 1 + q^2;$$
$$P_n(q) = (1 - q - q^2)P_{n-1} + (q + q^2 - q^3 + q^{2n-2})P_{n-2} + q^3P_{n-3}. \tag{5.37}$$

Fórmula apresentada em [9] para esta família de polinômios:

$$\begin{aligned} P_{2n+1}(q) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{56j^2+2j}\begin{bmatrix} 2n \\ n-7j \end{bmatrix}_{q^2} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{56j^2-30j+4}\begin{bmatrix} 2n \\ n+2-7j \end{bmatrix}_{q^2} \\ &- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{56j^2-26j+3}\begin{bmatrix} 2n \\ n+2-7j \end{bmatrix}_{q^2} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{56j^2-54j+13}\begin{bmatrix} 2n \\ n+3-7j \end{bmatrix}_{q^2}. \end{aligned} \tag{5.38}$$

Calculando o limite:

$$\lim_{q\longrightarrow -1} P_{2n}(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n}{n-7j} - \binom{2n}{n+2-7j} + \binom{2n}{n+2-7j} - \binom{2n}{n+3-7j}.$$

Neste caso, substituindo $q = -1$ em (5.37), obtemos a sequeência M_n como para f_{32}. Resulta em:

$$M_{2n} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n}{n-7j} - \binom{2n}{n+2-7j} + \binom{2n}{n+2-7j} - \binom{2n}{n+3-7j}.$$

Para a interpretação combinatória de $P_n(-q)$, usamos $f_{33}(-q, t)$ como segue:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}q^{2n^2}}{(t;q^2)_{n+1}(-tq^2;q^2)_n(tq;q^2)_n} =$$

$$\frac{1}{(1-t)}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n}q^{2n^2}}{(1-t^2q^{2+2})\cdots(1-t^2q^{2n+2n})(1-tq)\cdots(1-tq^{2n-1})}\right).$$

Levando em consideração o fator $1/(1-t)$, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 5.14 *O número de partições onde todo ímpar de* 1 *até o maior ímpar aparece pelo menos duas vezes, as partes pares aparecem um número par de vezes, com maior parte par pode ser um a mais que a maior parte ímpar, em até N partes, é igual a M_N.*

A Tabela (5.14), mostra exemplos para pequenos valores de N.

Partições descritas no Teorema (5.14)		
N		M_N
0	$\emptyset$	1
1		1
2	1 + 1	2
3	1 + 1 + 1	3
4	1 + 1 + 1 + 1; 2 + 2 + 1 + 1; 3 + 3 + 1 + 1	6
5	1 + 1 + 1 + 1 + 1; 2 + 2 + 1 + 1 + 1; 3 + 3 + 1 + 1 + 1; 3 + 3 + 3 + 1 + 1	10

Tabela 5.14: Ilustração do Teorema para $f_{33}(-q,t)$.

A demonstração de que a sequência representa os coeficientes da expansão de $\dfrac{1-x^2}{1-x-2x^2+x^3}$ em série de potências, já foi feita para f_{32}.

Podemos ainda substituir $q = 1$ em (5.37), obtemos $\widetilde{M}_n$. Resulta em:

$$\widetilde{M}_{2n} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n}{n-7j} - \binom{2n}{n+2-7j} - \binom{2n}{n+2-7j} + \binom{2n}{n+3-7j}.$$

Interpretação combinatória:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n} q^{2n^2}}{(t;q^2)_{n+1}(-tq^2;q^2)_n(-tq;q^2)_n} =$$

$$\frac{1}{(1-t)} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n} q^{2n^2}}{(1-t^2q^{2+2}) \cdots (1-t^2q^{2n+2n})(1+tq) \cdots (1+tq^{2n-1})} \right).$$

Neste caso temos um sinal ligado às partes ímpares do denominador que será positivo se o número de partes ímpares for par e negativo se o número de partes ímpares for ímpar, observando que no numerador sempre temos um número par de partes ímpares. Levando em consideração o fator $1/(1-t)$, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 5.15 *O número de partições onde todo ímpar de* 1 *até o maior ímpar aparece pelo menos duas vezes, as partes pares aparecem um número par de vezes, com maior parte par podendo ser um a mais que a maior parte ímpar, com um número par de partes ímpares menos aquelas com um número ímpar de partes ímpares, em até N partes, é igual a* $\widetilde{M}_N$.

A Tabela (5.15), mostra exemplos para pequenos valores de N.

Partições descritas no Teorema (5.15).			
N	número par de ímpares	número ímpar de ímpares	$\widetilde{M}_N$
0	$\emptyset$		1
1			1
2	$1+1$		2
3		$1+1+1$	1
4	$1+1+1+1; 2+2+1+1;\ 3+3+1+1$		4
5		$1+1+1+1+1;\ 2+2+1+1+1;$ $3+3+1+1+1;\ 3+3+3+1+1$	0

Tabela 5.15: Ilustração do Teorema para $f_{33}(q,t)$.

A demostração de que a sequência representa os coeficientes da expansão de $\dfrac{1+2x+x^2}{1+x-2x^2-x^3}$ em série de potências foi feita para f_{32}.

Interpretações Combinatórias para a sequência $A006054$

Dada uma partição de f_{80} para chegarmos a uma partição de f_{82} basta levarmos a primeira aparição do inteiro n, que é da cor laranja em seu sucessor e marcarmos a sua segunda aparição. Da mesma forma, dada uma partição de f_{82} levamos as partes laranjas em seu antecessor, e as partes marcadas transformamos em partes laranjas.

Identidade 80

Para

$$f_{80}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t;q)_{n+1} t^n q^{\frac{1}{2}n(n+1)}}{(t^2;q^2)_{n+1}(t^2q;q^2)_{n+1}}. \tag{5.39}$$

Temos a equação funcional:

$$(1-t)(1-t^2q)f_{80}(q,t) = 1 + tqf_{80}(q,tq).$$

E a relação de recorrência:

$$P_0 = 1;\ \ P_1 = 1+q;\ \ P_2 = 1+2q+q^2+q^3;$$
$$P_n(q) = (1+q^n)P_{n-1} + qP_{n-2} - qP_{n-3}. \tag{5.40}$$

Fórmula apresentada em [9] para esta família de polinômios:

$$\begin{aligned} P_{n-1}(q) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{42j^2+5j} CT(n, 1+14j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{42j^2-37j+8} CT(n, 6-14j) \\ &- q^2 \left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{42j^2+19j} CT(n, 3+14j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{42j^2-23j+1} CT(n, 4-14j) \right]. \end{aligned} \tag{5.41}$$

$n \geq 1$.

Calculando o limite:

$$\lim_{q \longrightarrow 1} P_{n-1}(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n}{1+14j}_2 + \binom{n}{6-14j)}_2 - \binom{n}{3+14j}_2 - \binom{n}{4-14j}_2.$$

Neste caso, substituindo $q = 1$ em (5.40) obtemos a sequência $G_n = A006054$, cujos primeiros termos são $1, 2, 5, 11, \ldots$ que, de acordo com [22], possui várias interpretações. Resulta em:

$$G_{n-1} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n}{1+14j}_2 + \binom{n}{6-14j)}_2 - \binom{n}{3+14j}_2 - \binom{n}{4-14j}_2, n \geq 1.$$

Interpretação combinatória:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t;q)_{n+1} t^n q^{\frac{1}{2}n(n+1)}}{(t^2;q^2)_{n+1}(t^2q;q^2)_{n+1}} = \frac{1}{(1-t)} \left(\frac{1}{(1-tq)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+tq)\cdots(1+tq^n)t^n q^{\frac{1}{2}n(n+1)}}{(1-t^2q)(1-t^2q^2)\cdots(1-t^2q^{2n})(1-t^2q^{2n+1})} \right).$$

Definimos partições laranja-azul, como sendo partições onde as partes laranjas são formadas por todos os inteiros de 1 até o maior aparecendo pelo menos uma vez e no máximo duas. As partes azuis são contadas duas vezes e a maior parte azul é no máximo duas vezes mais um a maior parte laranja, mais as partições formadas apenas por partes 1. Com essas observações e levando em consideração o fator $1/(1-t)$, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 5.16 *O número de partições em partes laranja-azul, em no máximo N partes, é igual a G_N.*

A Tabela (5.16), mostra exemplos para pequenos valores de N.

Partições descritas no Teorema (5.16)		
N		G_N
0	$\emptyset$	1
1	1	2
2	1; 1 + 1; 2 + 1	5
3	1 + 1; 1 + 2; 1 + 3 2 + 2 + 1; 2 + 1 + 1; 3 + 2 + 1	11

Tabela 5.16: Ilustração do Teorema para $f_{80}(q,t)$.

Identidade 82

Para

$$f_{82}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t;q)_{n+1} t^n q^{\frac{1}{2}n(n+3)}}{(t^2;q^2)_{n+1}(t^2q;q^2)_{n+1}}. \tag{5.42}$$

Temos a equação funcional:

$$(1-t)(1-t^2q)f_{82}(q,t) = 1 + tq^2 f_{82}(q,tq).$$

E a relação de recorrência:

$$P_0 = 1;\ \ P_1 = 1 + q^2;\ \ P_2 = 1 + q + q^2 + q^3 + q^5;$$
$$P_n(q) = (1+q^{n+1})P_{n-1} + qP_{n-2} - qP_{n-3}. \tag{5.43}$$

Fórmula apresentada em [9] para esta família de polinômios:

$$\begin{aligned} P_{n-2}(q) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{42j^2+11j} CT(n, 2+14j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{42j^2-31j+5} CT(n, 5-14j) \\ &- q\left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{42j^2+17j} CT(n, 3+14j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{42j^2-25j+2} CT(n, 4-14j)\right]. \end{aligned} \tag{5.44}$$

$n \geq 2$. Calculando o limite:

$$\lim_{q\longrightarrow 1} P_{n-2}(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n}{2+14j}_2 + \binom{n}{5-14j}_2 - \binom{n}{3+14j}_2 - \binom{n}{4-14j}_2.$$

Fazendo a substituição $q = 1$ em (5.43), obtemos G_n como para f_{80}. Resulta em:

$$M_{n-2} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n}{2+14j}_2 + \binom{n}{5-14j}_2 - \binom{n}{3+14j}_2 - \binom{n}{4-14j}_2, \quad n \geq 2$$

Interpretação combinatória:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-tq;q)_n t^n q^{\frac{1}{2}n(n+3)}}{(t^2q;q^2)_{n+1}(t;q)_{n+1}} = \frac{1}{(1-t)} \left(\frac{1}{(1-tq)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+tq)\cdots(1+tq^n)t^n q^{\frac{1}{2}n(n+3)}}{(1-t^2q)(1-t^2q^2)\cdots(1-t^2q^{2n})(1-t^2q^{2n+1})} \right).$$

Definindo sobrepartição laranja-azul como sendo partições onde as partes azuis são não marcadas e formadas por inteiros contados duas vezes, a maior parte azul pode ser duas vezes a maior parte laranja menos um, mais as partições formadas apenas por partes 1. As partes laranjas são dadas pelo fator $\frac{1}{2}n(n+3) = 2+3+\cdots+(n+1)$, que são partições onde toda parte de 2 até $n+1$ aparece exatamente uma vez. A maior parte marcada pode ser no máximo um a menos que a maior parte laranja. Com essas observações e levando em consideração o fator $1/(1-t)$, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 5.17 *O número de sobrepartições laranja-azul, em até N partes, é igual a G_N.*

A Tabela (5.17), mostra exemplos para pequenos valores de N.

Partições descritas no Teorema (3.4)		
N		G_N
0	$\emptyset$	1
1	2	2
2	1; $2+\bar{1}$; $3+2$	5
3	$2+1$; $2+2$; $2+3$; $3+2+\bar{1}$; $3+2+\bar{2}$; $4+3+2$	11

Tabela 5.17: Ilustração do Teorema para $f_{82}(q,t)$.

Interpretações Combinatórias para a sequência $A052534$

As interpretações para f_{117} e f_{118} diferem apenas pelo fato de termos os ímpares aparecendo pelo menos um vez, para f_{117} começando de 1 e para f_{118} começando de 3. Por isso, apresentamos no último capítulo uma bijeção não trivial entre f_{81} e f_{117}.

Identidade 81

Para

$$f_{81}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t;q)_{n+1} t^n q^{\frac{1}{2}n(n+1)}}{(t^2;q^2)_{n+1}(t^2q;q^2)_n}. \tag{5.45}$$

Temos a equação funcional:

$$(1-t)(1-t^2q)f_{81}(q,t) = 1 - t^2q + tqf_{81}(q,tq).$$

E a relação de recorrência:

$$\begin{aligned} P_0 = 1;\ \ P_1 = 1+q;\ \ P_2 = 1+q+q^2+q^3; \\ P_n(q) = (1+q^n)P_{n-1} + qP_{n-2} - qP_{n-3}. \end{aligned} \tag{5.46}$$

Fórmula apresentada em [9] para esta família de polinômios:

$$\begin{aligned} P_{n-1}(q) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{42j^2+j} CT(n,14j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{42j^2-41j+10} CT(n,7-14j) \\ &- q\left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{42j^2+13j} CT(n,2+14j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{42j^2-29j+4} CT(n,5-14j)\right]. \end{aligned} \tag{5.47}$$

$n \geq 1$.

Calculando o limite:

$$\lim_{q \longrightarrow 1} P_n(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n}{14j}_2 + \binom{n}{7-14j}_2 - \binom{n}{2+14j}_2 - \binom{n}{5-14j}_2.$$

Neste caso, substituindo $q = 1$ em (5.46), obtemos a sequência H_n cujos primeiros termos são dados por $1, 2, 4, 9, 20, 45, 101, 227, \ldots$ que são os coeficientes da expansão de $\dfrac{(1-x)(1+x)}{1-2x-x^2+x^3}$ em série de potências representado por $A052534$, em [22]. Resulta em:

$$H_{n-1} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n}{14j}_2 + \binom{n}{7-14j}_2 - \binom{n}{2+14j}_2 - \binom{n}{5-14j}_2, n \geq 1.$$

Interpretação combinatória:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t;q)_{n+1} t^n q^{\frac{1}{2}n(n+1)}}{(t^2;q^2)_{n+1}(t^2q;q^2)_n} = \frac{1}{(1-t)}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+tq)\cdots(1+tq^n)t^n q^{\frac{1}{2}n(n+1)}}{(1-t^2q)(1-t^2q^2)\cdots(1-t^2q^{2n-1})(1-t^2q^{2n})}\right).$$

Definimos partições laranja-azul, como sendo partições onde as partes laranjas são formadas por todos os inteiros de 1 até o maior aparecendo pelo menos uma vez e no máximo duas. As partes azuis são contadas duas vezes e a maior parte azul é no máximo duas vezes a maior parte laranja. Com essas observações e levando em consideração o fator $1/(1-t)$, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 5.18 *O número de partições em partes laranja-azul, em no máximo N partes, é igual a H_N.*

A Tabela (5.18), mostra exemplos para pequenos valores de N.

Partições descritas no Teorema (5.18)		
N		H_N
0	$\emptyset$	1
1	1	2
2	2 + 1; 1 + 1	4
3	3 + 2 + 1; 2 + 2 + 1; 2 + 1 + 1; 1 + 1; 1 + 2	9
4	1 + 1 + 1; 1 + 1 + 2; 2 + 1 + 1; 2 + 1 + 2; 2 + 1 + 3; 2 + 1 + 4; 3 + 2 + 1 + 1; 3 + 2 + 2 + 1; 3 + 3 + 2 + 1; 4 + 3 + 2 + 1; 2 + 2 + 1 + 1	20

Tabela 5.18: Ilustração do Teorema para $f_{81}(q,t)$.

Quando substituímos $q = 1$, ficamos com:

$$H_0 = 1; \;\; H_1 = 2; \;\; H_2 = 4;$$

$$H_{n+3} = 2H_{n+2} + H_{n+1} - H_n.$$

Aplicando a técnica usada em (2.9) encontramos

$$\frac{A(x) - H_0 - H_1x - H_2x^2}{x^3} = \frac{2A(x) - 2H_0 - 2H_1x}{x^2} + \frac{A(x) - H_0}{x} - A(x) \Longrightarrow$$

$$A(x) = \frac{(1-x)(1+x)}{1 - 2x - x^2 + x^3}.$$

O que mostra que a sequência representa os coeficientes da expansão de $\dfrac{(1-x)(1+x)}{1-2x-x^2+x^3}$ em série de potências.

Identidade 117

Para

$$f_{117}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n q^{n^2}}{(t;q^2)_{n+1}(tq;q^2)_n(-tq^2;q^2)_n}. \tag{5.48}$$

Temos a equação funcional:

$$(1-t)(1-tq)(1+tq^2)f_{117}(q,t) = (1-tq)(1+t^2q) + tqf_{117}(q,tq^2).$$

E a relação de recorrência:

$$\begin{aligned} P_0 = 1;\;\; P_1 &= 1+q;\;\; P_2 = 1+q+q^2+q^4; \\ P_n(q) = (1+q-q^2+q^{2n-1})&P_{n-1} - (q-q^2-q^3)P_{n-2} - q^3P_{n-3}. \end{aligned} \tag{5.49}$$

Fórmula apresentada em [9] para esta família de polinômios:

$$\begin{aligned} P_n(q) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{84j^2+4j}U(n,14j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{84j^2-80j+19}U(n,6-14j) \\ &- q^3\left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{84j^2+32j}U(n,2+14j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{84j^2-52j+5}U(n,4-14j)\right]. \end{aligned} \tag{5.50}$$

Calculando o limite:

$$\lim_{q\longrightarrow 1} P_n(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n}{14j}_2 + \binom{n}{14j+1}_2 + \binom{n}{6-14j}_2 + \binom{n}{7-14j}_2 -$$

$$\binom{n}{2+14j}_2 - \binom{n}{3+14j}_2 - \binom{n}{4-14j}_2 - \binom{n}{5-14j}_2.$$

Neste caso, substituindo $q=1$ em (5.49), obtemos a sequência H_n como para f_{81}. Resulta em:

$$H_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n}{14j}_2 + \binom{n}{14j+1}_2 + \binom{n}{6-14j}_2 + \binom{n}{7-14j}_2 -$$

$$\binom{n}{2+14j}_2 - \binom{n}{3+14j}_2 - \binom{n}{4-14j}_2 - \binom{n}{5-14j}_2.$$

Interpretação combinatória:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n q^{n^2}}{(t;q^2)_{n+1}(tq;q^2)_n(-tq^2;q^2)_n} =$$

$$\frac{1}{(1-t)}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n q^{n^2}}{(1-tq)\cdots(1-tq^{2n-1})(1-t^2q^{2+2})\cdots(1-t^2q^{2n+2n})}\right).$$

Levando em consideração o fator $1/(1-t)$, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 5.19 *O número de partições onde todo ímpar de* 1 *até o maior ímpar aparece pelo menos uma vez e os pares aparecem um número par de vezes, com maior parte par podendo ser um a mais do que a maior parte ímpar, em no máximo* N *partes, é igual a* H_N.

A Tabela (5.19), mostra exemplos para pequenos valores de N.

Partições descritas no Teorema (5.19)		
N		H_N
0	$\emptyset$	1
1	1	2
2	1 + 1; 3 + 1	4
3	1 + 1 + 1; 2 + 2 + 1; 3 + 1 + 1; 3 + 3 + 1; 5 + 3 + 1	9
4	1 + 1 + 1 + 1; 2 + 2 + 1 + 1; 3 + 1 + 1 + 1; 3 + 2 + 2 + 1; 3 + 3 + 1 + 1; 3 + 3 + 3 + 1; 4 + 4 + 3 + 1; 5 + 3 + 1 + 1; 5 + 3 + 3 + 1; 5 + 5 + 3 + 1; 7 + 5 + 3 + 1	20

Tabela 5.19: Ilustração do Teorema para $f_{117}(q,t)$.

A demonstração de que os termos da sequência coincidem com os coeficientes da expansão de $\dfrac{(1-x)(1+x)}{1-2x-x^2+x^3}$ em série de potências é a mesma dada na interpretação de f_{81}.

Identidade 118

Para

$$f_{118}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n q^{n^2+2n}}{(t;q^2)_{n+1}(tq;q^2)_n(-tq^2;q^2)_n}. \tag{5.51}$$

Temos a equação funcional:

$$(1-t)(1-tq)(1+tq^2)f_{118}(q,t) = (1-tq)(1+tq^2) + tq^3 f_{118}(q,tq^2).$$

E a relação de recorrência:

$$P_0 = 1; \quad P_1 = 1 + q^3; \quad P_2 = 1 + q^3 + q^4 + q^8;$$
$$P_n(q) = (1 + q - q^2 + q^{2n-1})P_{n-1} - (q - q^2 - q^3)P_{n-2} - q^3 P_{n-3}. \tag{5.52}$$

Fórmula apresentada em [9] para esta família de polinômios:

$$\begin{aligned} P_{n-1}(q) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{84j^2+8j} U(n, 14j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{84j^2-76j+17} U(n, 6-14j) \\ &- q\left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{84j^2+20j} U(n, 1+14j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{84j^2-64j+11} U(n, 5-14j)\right]. \end{aligned} \tag{5.53}$$

$n \geq 1$. Calculando o limite:

$$\lim_{q \longrightarrow 1} P_{n-1}(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n}{14j}_2 + \binom{n}{1+14j}_2 + \binom{n}{6-14j}_2 + \binom{n}{7-14j}_2$$
$$-\binom{n}{1+14j}_2 - \binom{n}{2+14j}_2 - \binom{n}{5-4j}_2 - \binom{n}{6-14j}_2.$$

Neste caso, substituindo $q = 1$ em (5.49), obtemos a sequência H_n como para f_{81}. Resulta em:

$$H_{n-1} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n+1}{14j}_2 + \binom{n+1}{1+14j}_2 + \binom{n+1}{6-14j}_2 + \binom{n+1}{7-14j}_2$$
$$-\binom{n+1}{1+14j}_2 - \binom{n+1}{2+14j}_2 - \binom{n+1}{5-4j}_2 - \binom{n+1}{6-14j}_2.$$

Interpretação combinatória:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n q^{n^2+2n}}{(t;q^2)_{n+1}(tq;q^2)_n(-tq^2;q^2)_n} =$$
$$\frac{1}{(1-t)}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n q^{n^2+2n}}{(1-tq)\cdots(1-tq^{2n-1})(1-t^2q^{2+2})\cdots(1-t^2q^{2n+2n})}\right).$$

Levando em consideração o fator $1/(1-t)$, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 5.20 *O número de partições onde todo ímpar de* 3 *até um a menos que o maior ímpar aparece pelo menos uma vez, o maior ímpar aparece somente uma vez e os pares aparecem* *um número par de vezes, com maior parte par podendo ser um a menos do que a maior parte ímpar, em no máximo N partes, é igual a H_N.*

A Tabela (5.20), mostra exemplos para pequenos valores de N.

Partições descritas no Teorema (5.20)		
N		H_N
0	$\emptyset$	1
1	3	2
2	$3+1$; $3+5$	4
3	$3+1+1$; $3+2+2$; $5+3+1$; $5+3+3$; $7+3+5$	9
4	$3+1+1+1$; $3+2+2+1$; $5+3+1+1$; $5+3+2+2$; $5+3+3+1$; $5+3+3+3$; $5+4+4+3$; $7+5+3+1$; $7+5+3+3$; $7+5+5+3$; $9+7+5+3$	20

Tabela 5.20: Ilustração do Teorema para $f_{118}(q,t)$.

A demonstração de que os termos da sequência coincidem com os coeficientes da expansão de $\dfrac{(1-x)(1+x)}{1-2x-x^2+x^3}$ em série de potências é a mesma dada na interpretação de f_{81}.

Interpretações Combinatórias para a sequência $A077846$

Na função geradora de f_{115} temos o fator $t^n q^{n^2+2n}$, já para a função f_{116} temos o fator $t^n q^{n^2+4n}$, que foram interpretados como soma de ímpares maiores ou iguais a 3 e soma de ímpares maiores ou iguais a 5, respectivamente. Como o restante da função geradora é igual, para sair de uma interpretação para a outra basta aplicar essa translação na primeira aparição dos ímpares. De f_{115} para f_{116} somamos dois a cada ímpar distinto e para passarmos de f_{116} para f_{115} subtraímos dois de cada ímpar distinto.

Identidade 115

Para

$$f_{115}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t^3q^6;q^6)_n t^n q^{n^2+2n}}{(t;q^2)_{n+2}(tq;q^2)_{n+1}(-tq^2;q^2)_{n+1}(tq^2;q^2)_n}. \tag{5.54}$$

Temos a equação funcional:

$$(1-t)(1-tq)(1-t^2q^4)f_{115}(q,t) = 1 + (1-t^3q^6)tq^3 f_{115}(q,tq^2).$$

E a relação de recorrência:

$$P_0 = 1;\;\; P_1 = 1 + q + q^3;\;\; P_2 = 1 + q + q^2 + q^3 + 2q^4 + q^5 + q^6 + q^8;$$
$$P_3 = 1 + q + q^2 + 2q^3 + 2q^4 + 3q^5 + 2q^6 + 3q^7 + 2q^8 + 2q^9 + q^{10} + 2q^{11} + q^{12} + q^{13} + q^{15};$$
$$P_n(q) = (1 + q + q^{2n+1})P_{n-1} - (q - q^4)P_{n-2} - (q^4 + q^5)P_{n-3} + (q^5 - q^{2n+1})P_{n-4}. \quad (5.55)$$

Fórmula apresentada em [9] para esta família de polinômios:

$$P_n(q) \;=\; \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{72j^2+18j}U(n+1, 1+12j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{72j^2-54j+9}U(n+1, 4-12j). \quad (5.56)$$

Calculando o limite:

$$\lim_{q\longrightarrow 1} P_n(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n+1}{1+12j}_2 + \binom{n+1}{2+12j}_2 - \binom{n+1}{4-12j}_2 - \binom{n+1}{5-12j}_2.$$

Neste caso, substituindo $q = 1$ em (5.55), obtemos Z_n cujos primeiros termos são $1, 3, 9, 25, 69, 189, 517 \cdots$, são os coeficientes da expansão de $\dfrac{1}{1-3x+2x^3}$ em série de potências, representada por $A077846$ em [22]. Resulta em:

$$Z_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n+1}{1+12j}_2 + \binom{n+1}{2+12j}_2 - \binom{n+1}{4-12j}_2 - \binom{n+1}{5-12j}_2.$$

Interpretação combinatória:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t^3q^6;q^6)_n t^n q^{n^2+2n}}{(t;q^2)_{n+2}(tq;q^2)_{n+1}(-tq^2;q^2)_{n+1}(tq^2;q^2)_n} = \frac{1}{(1-t)}$$

$$\left(\frac{1}{(1-tq^2)(1-tq)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-t^3q^6)\cdots(1-t^3q^{3.2n})t^nq^{n^2+2n}}{(1-t^2q^{2.2})\cdots(1-t^2q^{2.(2n+2)})(1-tq)(1-tq^2)\cdots(1-tq^2)(1-tq^{2n+1})}\right).$$

Definindo como partições laranja-azul-verde, as partições onde as partes laranjas são ímpares que de 3 até o maior ímpar aparecem exatamente uma vez e os pares um número par de vezes, com maior parte podendo ser um a mais que a maior parte ímpar, mais as partições formadas apenas por partes 2. As partes azuis são irrestritas, com maior parte no máximo a maior parte ímpar laranja, mais as partições formadas apenas por partes 1. As partes verdes são formadas por pares que podem aparecer exatamente três vezes, com maior parte no máximo um a menos que a maior parte ímpar laranja, e existe um sinal ligado às partes verdes, que é positivo se o número de partes verdes for par e negativo se o número de partes verdes for ímpar.

Teorema 5.21 *O número de partições laranja-azul-verde com um número par de partes verdes menos aquelas com um número ímpar de partes verdes, em até N partes, é igual a Z_N.*

A Tabela (5.21), mostra exemplos para pequenos valores de N.

Partições descritas no Teorema (5.21).			
N	com um número par de partes verdes	com um número ímpar de partes verdes	Z_N
0	$\emptyset$		1
1	1; 3		3
2	1 + 1; 2 + 2; 3 + 1; 3 + 2; 3 + 3; 5 + 3		9
3	1 + 1 + 1; 2 + 2 + 1; 3 + 2 + 2; 3 + 4 + 4; 3 + 6 + 6; 3 + 1 + 1; 3 + 2 + 1; 3 + 3 + 1; 3 + 2 + 2; 3 + 3 + 2; 3 + 3 + 3; 5 + 3 + 1; 5 + 3 + 2; 5 + 3 + 3; 5 + 3 + 4; 5 + 3 + 5; 7 + 5 + 3	2 + 2 + 2	25

Tabela 5.21: Ilustração do Teorema para $f_{115}(q,t)$.

Quando substituímos $q = 1$, ficamos com:

$$Z_0 = 1; \;\; Z_1 = 3; \;\; Z_2 = 9; \;\; Z_3 = 25;$$

$$Z_{n+3} = 3Z_{n+2} - 2Z_n.$$

Aplicando a técnica usada em (2.9) encontramos

$$\frac{A(x) - Z_0 - Z_1x - Z_2x^2}{x^3} = \frac{3A(x) - 3Z_0 - 3Z_1x}{x^2} - 2A(x) \Longrightarrow$$

$$A(x) = \frac{1}{1 - 3x + 2x^3}.$$

O que mostra que a sequência representa os coeficientes da expansão de $\dfrac{1}{1 - 3x + 2x^3}$ em série de potências.

Identidade 116

Para

$$f_{116}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t^3q^6;q^6)_n t^n q^{n^2+4n}}{(t;q^2)_{n+2}(tq;q^2)_{n+1}(-tq^2;q^2)_{n+1}(tq^2;q^2)_n}. \tag{5.57}$$

Temos a equação funcional:

$$(1-t)(1-tq)(1-t^2q^4)f_{116}(q,t) = 1 + (1-t^3q^6)f_{116}(q,tq^2).$$

E a relação de recorrência:

$$P_0 = 1;\ \ P_1 = 1+q+q^5;\ \ P_2 = 1+q+q^2+q^4+q^5+q^6+q^7+q^8+q^{12};$$
$$P_3 = 1+q+q^2+q^3+q^4+2q^5+q^6+2q^7+2q^8+3q^9+q^{10}+q^{11}+$$
$$q^{12}+2q^{13}+q^{14}+q^{15}+q^{16}+q^{17}+q^{21};$$
$$P_n(q) = (1+q+q^{2n+3})P_{n-1} - (q-q^4)P_{n-2} - (q^4+q^5)P_{n-3} + (q^5-q^{2n+3})P_{n-4}. \tag{5.58}$$

Fórmula apresentada em [9] para esta família de polinômios:

$$P_n(q) \;=\; \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{72j^2+30j}U(n+2,2+12j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{72j^2-42j+3}U(n+2,3-12j). \tag{5.59}$$

Calculando o limite:

$$\lim_{q\longrightarrow 1} P_n(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n+2}{2+12j}_2 + \binom{n+2}{3+12j}_2 - \binom{n+2}{3-12j}_2 - \binom{n+2}{4-12j}_2.$$

Neste caso, substituindo $q = 1$ em (5.58), obtemos Z_n como para f_{115}. Resulta em:

$$Z_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n+2}{2+12j}_2 + \binom{n+2}{3+12j}_2 - \binom{n+2}{3-12j}_2 - \binom{n+2}{4-12j}_2.$$

Interpretação combinatória:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t^3q^6;q^6)_n t^n q^{n^2+4n}}{(t;q^2)_{n+2}(tq;q^2)_{n+1}(-tq^2;q^2)_{n+1}(tq^2;q^2)_n} = \frac{1}{(1-t)}$$

$$\left(\frac{1}{(1-tq^2)(1-tq)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-t^3q^6)\cdots(1-t^3q^{3.2n})t^nq^{n^2+4n}}{(1-t^2q^{2.2})\cdots(1-t^2q^{2.(2n+2)})(1-tq)(1-tq^2)\cdots(1-tq^2)(1-tq^{2n+1})}\right).$$

Olhando para $n^2+4n = 5+7+\cdots+2n+3$ e definindo como partições laranja-azul-verde, as partições onde as partes laranjas são ímpares que de 5 até o maior ímpar aparecem exatamente uma vez e os pares, um número par de vezes, com maior parte par podendo ser um a menos que a maior parte ímpar, mais as partições formadas apenas por partes 2. As partes azuis são irrestritas, com maior parte dois a menos que a maior parte laranja, mais as partições formadas apenas por partes 1. As partes verdes são formadas por pares que podem aparecer exatamente três vezes, com maior parte no máximo três a menos que a maio parte laranja, e existe um sinal ligado às partes verdes, que é positivo se o número de partes verdes for par e negativo se o número de partes verdes for ímpar.

Teorema 5.22 *O número de partições laranja-azul-verde com um número par de partes verdes menos aquelas com um número ímpar de partes verdes, em até N partes, é igual a Z_N.*

A Tabela (5.22), mostra exemplos para pequenos valores de N.

Partições descritas no Teorema (5.22).			
N	com um número par de partes verdes	com um número ímpar de partes verdes	Z_N
0	$\emptyset$		1
1	1; 5		3
2	1 + 1; 2 + 2; 5 + 1; 5 + 2; 5 + 3; 7 + 5		9
3	1 + 1 + 1; 2 + 2 + 1; 5 + 2 + 2; 5 + 4 + 4; 5 + 6 + 6; 5 + 1 + 1; 5 + 2 + 1; 5 + 3 + 1; 5 + 2 + 2; 5 + 3 + 2; 5 + 3 + 3; 7 + 5 + 1; 7 + 5 + 2; 7 + 5 + 3; 7 + 5 + 4; 7 + 5 + 5; 9 + 7 + 5	2 + 2 + 2	25

Tabela 5.22: Ilustração do Teorema para $f_{116}(q,t)$.

A demonstração de que a sequência representa os coeficientes da expansão de $\dfrac{1}{1-3x+2x^3}$ em série de potência é a mesma feita em f_{115}.

Interpretações Combinatórias para a sequência $A007051$

As interpretações para esta sequência apresentam uma pequena diferença na função geradora. Para f_{120} temos $t^nq^{n^2+n}$, que foi interpretado como soma de pares, enquanto para f_{121} temos

$t^n q^{n^2}$ visto como soma de ímpares. Logo existe uma bijeção simples entre as duas interpretações.

Identidade 120

Para

$$f_{120}(q,t) = \frac{1}{1-t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-tq^2;q^2)_{n-1} t^n q^{n^2+n}}{(t;q^2)_{n+1}(tq;q^2)_n}. \tag{5.60}$$

Temos a equação funcional:

$$(1-t)(1-tq)(1+t^2q^4)f_{120}(q,t) = 1 - tq + t^3q^5 - 2t^2q^4 - t^3q^6 + (1-tq^2)(1-t^2q^4)tq^2 f_{120}(q,tq^2).$$

E a relação de recorrência:

$$\begin{gathered} P_0 = 1;\;\; P_1 = 1+q^2;\;\; P_2 = 1+q^2+q^3+q^4+q^6; \\ P_3 = 1+q^2+q^3+2q^4+q^5+2q^6+q^7+2q^8+q^9+q^{10}+q^{12}; \\ P_n(q) = (1+q+q^{2n})P_{n-1} - (q-q^4-q^{2n})P_{n-2} - (q^4+q^5+q^{2n})P_{n-3} + (q^5-q^{2n})P_{n-4}. \end{gathered} \tag{5.61}$$

Fórmula apresentada em [9] para esta família de polinômios:

$$\begin{aligned} P_n(q) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{96j^2+4j} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-12j \end{bmatrix}_q + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{96j^2-92j+22} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-5+12j \end{bmatrix}_q \\ &- q\left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{96j^2+20j} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-1-12j \end{bmatrix}_q + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{96j^2-76j+14} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-4+12j \end{bmatrix}_q\right]. \end{aligned} \tag{5.62}$$

Calculando o limite:

$$\lim_{q\longrightarrow 1} P_n(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n+1}{n-12j} + \binom{2n+1}{n-5+12j} - \binom{2n+1}{n-1-12j} - \binom{2n+1}{n-4+12j}.$$

Neste caso, substituindo $q=1$ em (5.61), obtemos a sequência $L_n \dfrac{3^n+1}{2}$ cujos primeiros termos são dados por $1, 2, 5, 14, 41, 122\ldots$ reprentados por $A007051$ em [22]. Resulta em:

$$L_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n+1}{n-12j} + \binom{2n+1}{n-5+12j} - \binom{2n+1}{n-1-12j} - \binom{2n+1}{n-4+12j}.$$

Interpretação combinatória :

$$\frac{1}{1-t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-tq^2;q^2)_{n-1}t^n q^{n^2+n}}{(t;q^2)_{n+1}(tq;q^2)_n} = \frac{1}{(1-t)}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+tq^2)\cdots(1+tq^{2n-2})t^n q^{n^2+n}}{(1-tq)(1-tq^2)\cdots(1-tq^{2n-1})(1-tq^{2n})}\right).$$

Levando em consideração o fator $1/(1-t)$, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 5.23 *O número de partições onde todo par não marcado de 2 até a maior parte aparece pelo menos uma vez e as partes marcadas são pares e no máximo dois a menos que a maior parte, em no máximo N partes, é igual a L_N.*

A Tabela (5.23), mostra exemplos para pequenos valores de N.

Partições descritas no Teorema (5.23)		
N		L_N
0	$\emptyset$	1
1	2	2
2	$2+1;\ 2+2;\ 4+2$	5
3	$2+1+1;\ 2+2+2;\ 2+2+1;\ 4+2+\bar{2};\ 4+2+1;$ $4+2+2;\ 4+3+2;\ 4+4+2;\ 6+4+2$	14

Tabela 5.23: Ilustração do Teorema para $f_{120}(q,t)$.

Falta demonstrar que $P_n(1) = \dfrac{3^n+1}{2}$. Observe que:

$$L_0 = 1;\ \ L_1 = 2;\ \ L_2 = 5;\ \ L_n = 3L_{n-1} + L_{n-2} - 3L_{n-3}.$$

Com isso temos,
$L_0 = \dfrac{3^0+1}{2};\ \ L_1 = \dfrac{3^1+1}{2};\ \ L_2 = \dfrac{3^2+1}{2}.$

Suponha que de 0 até n temos a afirmação verdadeira, vamos mostrar que ela vale para $n+1$. De fato:

$$L_{n+1} = 3L_n + L_{n-1} - 3L_{n-2} = 3\frac{3^n+1}{2} + \frac{3^{n-1}+1}{2} - 3\frac{3^{n-2}+1}{2} =$$

$$\frac{3^{n+1}}{2}+\frac{3}{2}+\frac{3^{n-1}}{2}+\frac{1}{2}-\frac{3^{n-1}}{2}-\frac{3}{2}=\frac{3^{n+1}+1}{2}.$$

Logo, $L_n=\dfrac{3^n+1}{2}$.

Identidade 121

Para

$$f_{121}(q,t)=\frac{1}{1-t}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-tq^2;q^2)_{n-1}t^nq^{n^2}}{(t;q^2)_{n+1}(tq;q^2)_n}. \tag{5.63}$$

Temos a equação funcional:

$$(1-t)(1-tq)(1-t^2q^4)f_{121}(q,t)=1-tq-t^2q^4-t^2q^3+(1+tq^2)(1-t^2q^4)tqf_{121}(q,tq^2).$$

E a relação de recorrência:

$$P_0=1;\quad P_1=1+q;\quad P_2=1+q+q^2+q^3+q^4;$$
$$P_3=1+q+q^2+2q^3+2q^4+2q^5+2q^6+q^7+q^8+q^9;$$
$$P_n(q)=(1+q+q^{2n-1})P_{n-1}-(q-q^4-q^{2n-1})P_{n-2}-(q^4+q^5+q^{2n-1})P_{n-3}+(q^5-q^{2n-1})P_{n-4}. \tag{5.64}$$

Fórmula apresentada em [9] para esta família de polinômios:

$$\begin{aligned}P_n(q) \;&=\; \sum_{j=-\infty}^{\infty}q^{96j^2+4j}\begin{bmatrix}2n+1\\ n-12j\end{bmatrix}_q+\sum_{j=-\infty}^{\infty}q^{96j^2-92j+22}\begin{bmatrix}2n+1\\ n-5+12j\end{bmatrix}_q\\ &-\; q^2\left[\sum_{j=-\infty}^{\infty}q^{96j^2+28j}\begin{bmatrix}2n+1\\ n-1-12j\end{bmatrix}_q+\sum_{j=-\infty}^{\infty}q^{96j^2-68j+10}\begin{bmatrix}2n+1\\ n-4+12j\end{bmatrix}_q\right].\end{aligned} \tag{5.65}$$

Calculando o limite:

$$\lim_{q\longrightarrow 1}P_n(q)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\binom{2n+1}{n-12j}+\binom{2n+1}{n-5+12j}-\binom{2n+1}{n-1-12j}-\binom{2n+1}{n-4+12j}.$$

Neste caso, substituindo $q=1$ em (5.64), obtemos a sequência $L_n=\dfrac{3^n+1}{2}$ cujos primeiros termos são $1, 2, 5, 14, 41, 122\ldots$ reprentados por $A007051$ em [22]. Resulta em:

$$L_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n+1}{n-12j} + \binom{2n+1}{n-5+12j} - \binom{2n+1}{n-1-12j} - \binom{2n+1}{n-4+12j}.$$

Interpretação combinatória:

$$\frac{1}{1-t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-tq^2;q^2)_{n-1} t^n q^{n^2}}{(t;q^2)_{n+1}(tq;q^2)_n} = \frac{1}{(1-t)} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+tq^2)\cdots(1+tq^{2n-2}) t^n q^{n^2}}{(1-tq)(1-tq^2)\cdots(1-tq^{2n-1})(1-tq^{2n})} \right).$$

Levando em consideração o fator $1/(1-t)$, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 5.24 *O número de partições onde todo ímpar de* 1 *até o maior ímpar aparece pelo menos uma vez, a maior parte não marcada é no máximo um a mais que a maior parte ímpar e as partes marcadas são pares e no máximo um a menos que a maior parte ímpar, em no máximo* N *partes, é igual a* L_N.

A Tabela (5.24), mostra exemplos para pequenos valores de N.

Partições descritas no Teorema (5.24)		
N		L_N
0	$\emptyset$	1
1	1	2
2	$1+1$; $2+1$; $3+1$	5
3	$1+1+1$; $2+1+1$; $2+2+1$; $3+1+\bar{2}$; $3+1+1$; $3+2+1$; $3+3+1$; $4+3+1$; $5+3+1$	14

Tabela 5.24: Ilustração do Teorema para $f_{121}(q,t)$.

A demonstração de que a sequência é representada por $\dfrac{3^n+1}{2}$ é a mesma feita para a interpretação de f_{120}.

Interpretações Combinatórias para a sequência $A003462$

No último capítulo apresentamos uma bijeção entre as interpretações combinatórias apresentadas aqui. As funções geradoras não são muito diferentes, mas as interpretações feitas para cada uma são suficientes para uma bijeção interessante.

Identidade 122

Para

$$f_{122}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-tq^2;q^2)_n t^n q^{n^2+3n}}{(t;q^2)_{n+2}(tq;q^2)_{n+1}}. \tag{5.66}$$

Temos a equação funcional:

$$(1-t)(1-tq)(1-tq^2)f_{122}(q,t) = 1 + (1-t^2q^4)tq^4 f_{122}(q,tq^2).$$

E a relação de recorrência:

$$\begin{aligned} &P_0 = 1;\;\; P_1 = 1+q+q^2+q^4;\;\; P_2 = 1+q+2q^2+q^3+2q^4+q^5+2q^6+q^7+q^8+q^{10};\\ &P_n(q) = (1+q+q^2+q^{2n+2})P_{n-1} - (q+q^2+q^3)P_{n-2} + (q^3-q^{2n+2})P_{n-3}. \end{aligned} \tag{5.67}$$

Fórmula apresentada em [9] para esta família de polinômios:

$$\begin{aligned} P_{n-1}(q) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{96j^2+28j}\begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-1-12j \end{bmatrix}_q + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{96j^2-68j+10}\begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-4+12j \end{bmatrix}_q \\ &- q^3\left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{96j^2+44j}\begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-2-12j \end{bmatrix}_q + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{96j^2-52j+2}\begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-3+12j \end{bmatrix}_q\right]. \end{aligned} \tag{5.68}$$

$n \geq 1$.

Calculando o limite:

$$\lim_{q\longrightarrow 1} P_{n-1}(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n+1}{n-1-12j} + \binom{2n+1}{n-4+12j} - \binom{2n+1}{n-2-12j} - \binom{2n+1}{n-3+12j}.$$

Neste caso, substituindo $q = 1$ em (5.67), obtemos $P_n(1) = Q_{n+1}$, cujos primeiros de Q_n termos são dados por $0, 1, 4, 13, 40, 121, 364, \cdots$, que aparece em [22] pela numeração $A003462$, como $P_n(1) = \frac{3^{n+1}-1}{2}$. Resulta em:

$$Q_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n+1}{n-1-12j} + \binom{2n+1}{n-4+12j} - \binom{2n+1}{n-2-12j} - \binom{2n+1}{n-3+12j}.$$

Interpretação combinatória:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-tq^2;q^2)_n t^n q^{n^2+3n}}{(t;q^2)_{n+2}(tq;q^2)_{n+1}} =$$

$$\frac{1}{(1-t)}\left(\frac{1}{(1-tq)(1-tq^2)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+tq^2)\cdots(1+tq^{2n})t^n q^{n^2+3n}}{(1-tq)(1-tq^2)\cdots(1-tq^{2n+1})(1-tq^{2n+2})}\right).$$

Levando em consideração o fator $1/(1-t)$, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 5.25 *O número de partições onde todo par não marcado de* 4 *até a maior parte aparece pelo menos uma vez, e as partes marcadas são pares e no máximo dois a menos que a maior parte, mais as partições formadas apenas por partes* 1 *e* 2*, em no máximo* N *partes, é igual a* Q_N.

A Tabela (5.25), mostra exemplos para pequenos valores de N.

Partições descritas no Teorema (5.25)		
N		Q_N
0	$\emptyset$	1
1	1; 2; 4	4
2	$1+1$; $2+2$; $2+1$; $4+1$; $4+2$; $4+3$; $4+4$; $4+\bar{2}$; $4+6$	13

Tabela 5.25: Ilustração do Teorema para $f_{122}(q,t)$.

Falta demonstrar que $P_n(1) = \dfrac{3^{n+1}-1}{2}$. Observe que:

$$Q_0 = 1; \quad Q_1 = 4; \quad Q_2 = 13; \quad Q_n == 4Q_{n-1} - 3Q_{n-2}.$$

Com isso temos,

$$Q_0 = \frac{3^1-1}{2}; \quad Q_1 = \frac{3^2-1}{2}; \quad Q_2 = \frac{3^3-1}{2}.$$

Suponha que de 0 até n temos a afirmação verdadeira, vamos mostrar que ela vale para $n+1$. De fato:

$$Q_{n+1} = 4\cdot Q_n - 3\cdot Q_{n-1} = 4\cdot\frac{3^{n+1}-1}{2} - 3\cdot\frac{3^n-1}{2} =$$

$$\frac{4\cdot 3^{n+1} - 4 - 3\cdot 3^n + 3}{2} = \frac{3\cdot 3^{n+1}-1}{2} = \frac{3^{n+2}-1}{2}.$$

Logo, $Q_n = \dfrac{3^{n+1}-1}{2}$.

Identidade 123

Para

$$f_{123}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-tq^2;q^2)_n t^n q^{n^2+2n}}{(t;q^2)_{n+2}(tq;q^2)_{n+1}}. \tag{5.69}$$

Temos a equação funcional:

$$(1-t)(1-tq)(1-tq^2)f_{123}(q,t) = 1 + (1-t^2q^4)tq^3 f_{123}(q,tq^2).$$

E a relação de recorrência:

$$P_0 = 1;\;\; P_1 = 1+q+q^2+q^3;\;\; P_2 = 1+q+2q^2+2q^3+2q^4+2q^5+q^6+q^7+q^8;$$
$$P_n(q) = (1+q+q^2+q^{2n+1})P_{n-1} - (q+q^2+q^3)P_{n-2} + (q^3-q^{2n+1})P_{n-3}. \tag{5.70}$$

Fórmula apresentada em [9] para esta família de polinômios:

$$\begin{aligned} P_{n-1}(q) \;&=\; \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{96j^2+20j} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-1-12j \end{bmatrix}_q + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{96j^2-76j+14} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-4+12j \end{bmatrix}_q \\ &-\; q^4 \left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{96j^2+44j} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-2-12j \end{bmatrix}_q + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{96j^2-52j+2} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-3+12j \end{bmatrix}_q \right]. \end{aligned} \tag{5.71}$$

$n \geq 1$.

Calculando o limite:

$$\lim_{q \longrightarrow 1} P_{n-1}(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n+1}{n-1-12j} + \binom{2n+1}{n-4+12j} - \binom{2n+1}{n-2-12j} - \binom{2n+1}{n-3+12j}.$$

Neste caso, substituindo $q = 1$ em (5.70), obtemos $P_n(1) = Q_{n+1}$, cujos primeiros de Z_n termos são dados por $0, 1, 4, 13, 40, 121, 364, \cdots$, que aparece em [22] pela numeração $A003462$, como $P_n(1) = \dfrac{3^{n+1}-1}{2}$. Resulta em:

$$Q_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n+1}{n-1-12j} + \binom{2n+1}{n-4+12j} - \binom{2n+1}{n-2-12j} - \binom{2n+1}{n-3+12j}, \;\; n \geq 1.$$

Interpretação combinatória:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-tq^2;q^2)_n t^n q^{n^2+2n}}{(t;q^2)_{n+2}(tq;q^2)_{n+1}} =$$

$$\frac{1}{(1-t)}\left(\frac{1}{(1-tq)(1-tq^2)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+tq^2)\cdots(1+tq^{2n})t^n q^{n^2+2n}}{(1-tq)\cdots(1-tq^{2n+1})(1-tq^2)\cdots(1-tq^{2n+2})}\right).$$

Definindo como partições laranja-azul, as partições onde nas partes azuis os ímpares de 3 até o maior ímpar aparecem exatamente uma vez e a maior parte pode ser um a mais que o maior ímpar, ou a partição é formada apenas por partes 2. Nas partes laranjas os pares são distintos, com maior parte no máximo igual a maior parte ímpar da partição azul, ou a partição pode ser formada apenas por partes 1 .

Teorema 5.26 *O número de partições laranja-azul, como definida acima, em até N partes, é igual a Q_N.*

A Tabela (5.26), mostra exemplos para pequenos valores de N.

Partições descritas no Teorema (5.26)		
N		Q_N
0	$\emptyset$	1
1	2; 3; 1	4
2	1 + 1; 1 + 2; 2 + 2; 1 + 3; 3 + 3; 3 + 2; 4 + 3; 3 + 2; 5 + 3	13

Tabela 5.26: Ilustração do Teorema para $f_{123}(q,t)$.

A demonstração de que $P_n(1) = \dfrac{3^{n+1}-1}{2}$. é a mesma feita para f_{122}

Interpretações Combinatórias para a sequência $A188022$

Existe uma bijeção simples entre as duas interpretações combinatórias apresentadas para essa sequência, que pode ser observada na função geradora. Para f_{124} temos no numerador o fator $t^{2n}q^{2n^2+2n}$ que foi interpretado como pares de 2 até $2n$ aparecendo duas vezes e para f_{125} o fator é dado por $t^{2n}q^{2n^2+4n}$ interpretado como ímpares de 3 até $2n+1$ aparecendo duas vezes. Com isso se somarmos um a cada parte par distinta de uma partição para f_{124} chegamos a uma partição para f_{125} e se subtraírmos um de cada ímpar distinto a partir de 3 de uma partição f_{125} chegamos a uma partição para f_{124}.

Identidade 124

Para

$$f_{124}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t^3q^3;q^6)_n t^{2n} q^{2n^2+2n}}{(t;q^2)_{n+1}(tq;q^2)_{n+1}(-tq;q^2)_{n+1}(-tq^2;q^2)_n(tq;q^2)_n}. \quad (5.72)$$

Temos a equação funcional:

$$(1-t)(1+tq^2)(1-t^2q^2)f_{124}(q,t) = (1-tq^2) + (1+t^2q^2)t^2q^4 f_{124}(q,tq^2).$$

E a relação de recorrência:

$$P_0 = P_1 = 1; \;\; P_2 = 1+q^2+q^4; \;\; P_3 = 1+q^2+q^4+q^5;$$
$$P_n(q) = (1-q^2)P_{n-1} + (2q^2+q^{2n})P_{n-2} - (q^2-q^4-q^{2n-1})P_{n-3} - (q^4-q^{2n-2})P_{n-4}. \quad (5.73)$$

Fórmula apresentada em [9] para esta família de polinômios:

$$\begin{aligned} P_{2n}(q) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{108j^2+12j} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-9j \end{bmatrix}_{q^2} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{108j^2-96j+21} \begin{bmatrix} 2n \\ n-4+12j \end{bmatrix}_{q^2} \\ &+ q^5 \left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{108j^2+48j} \begin{bmatrix} 2n \\ n-2-9j \end{bmatrix}_{q^2} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{108j^2-60j+3} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-2+9j \end{bmatrix}_{q^2} \right]. \quad (5.74) \end{aligned}$$

Calculando o limite:

$$\lim_{q \longrightarrow 1} P_{2n}(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n+1}{n-9j} - \binom{2n}{n-4+12j} + \binom{2n}{n-2-9j} - \binom{2n+1}{n-2+9j}.$$

Neste caso, substituindo $q = 1$ em (5.73), obtemos R_n cujos primeiros termos sõ dados por $1, 1, 3, 4, 10, 15, 34, 55, 117 \cdots$, que aparece em [22] pela numeração $A188022$. Resulta em:

$$R_{2n} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n+1}{n-9j} - \binom{2n}{n-4+12j} + \binom{2n}{n-2-9j} - \binom{2n+1}{n-2+9j}.$$

Interpretação combinatória:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t^3q^3;q^6)_n t^{2n} q^{2n^2+2n}}{(t;q^2)_{n+1}(tq;q^2)_{n+1}(-tq;q^2)_{n+1}(-tq^2;q^2)_n(tq;q^2)_n} = \frac{1}{(1-t)}$$

$$\left(\frac{1}{(1-t^2q^{2.1})} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-t^3q^3)\cdots(1-t^3q^{3(2n-1)})t^{2n}q^{2n^2+2n}}{(1-t^2q^{2.1})(1-t^2q^{2.2})\cdots(1-t^2q^{2.2n})(1-t^2q^{2.(2n+1)})(1-tq)\cdots(1-tq^{2n-1})} \right).$$

Definindo como partições laranja-azul-verde, as partições onde as partes laranjas aparecem um número par de vezes com pares aparecendo pelo menos duas vezes, a maior parte laranja pode ser um a mais que o maior par, mais as partições formadas apenas por partes 1. As partes azuis são formadas por ímpares irrestritos, com maior parte no máximo um a menos que o maior par laranja. As partes verdes são formadas por ímpares que podem aparecer exatamente três vezes, com maior parte no máximo um a menos que o maior par laranja, e existe um sinal ligado às partes verdes, que é positivo se o número de partes verdes for par e negativo se o número de partes verdes for ímpar.

Teorema 5.27 *O número de partições laranja-azul-verde com um número par de partes verdes menos aquelas com um número ímpar de partes verdes, em até N partes, é igual a R_N.*

A Tabela (5.27), mostra exemplos para pequenos valores de N.

Partições descritas no Teorema (5.27).			
N	com um número par de partes verdes	com um número ímpar de partes verdes	R_N
0	$\emptyset$		1
1			1
2	$1+1$; $2+2$		3
3	$2+2+1$		4
4	$1+1+1+1$; $2+2+1+1$; $2+2+2+2$; $3+3+2+2$; $2+2+1+1$; $4+4+2+2$		10
5	$2+2+1+1+1$; $2+2+2+2+1$; $3+3+2+2+1$; $4+4+2+2+1$; $4+4+2+2+2$; $4+4+2+2+1$	$1+1+1+1+1$	15

Tabela 5.27: Ilustração do Teorema para $f_{124}(q,t)$.

Identidade 125

Para

$$f_{125}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t^3q^3;q^6)_n t^{2n} q^{2n^2+4n}}{(t;q^2)_{n+1}(tq;q^2)_{n+1}(-tq;q^2)_{n+1}(-tq^2;q^2)_n(tq;q^2)_n}. \tag{5.75}$$

Temos a equação funcional:

$$(1-t)(1-t^2q^2)(1+tq^2)f_{125}(q,t) = (1+tq^2) + (1+tq+t^2q^2)t^2q^6_{125}(q,tq^2).$$

E a relação de recorrência:

$$P_0 = P_1 = 1;\;\; P_2 = 1+q^2+q^6;\;\; P_3 = 1+q^2+q^6+q^7;$$
$$P_n(q) = (1-q^2)P_{n-1} + (2q^2+q^{2n+2})P_{n-2} - (q^2-q^4-q^{2n+1})P_{n-3} - (q^4-q^{2n})P_{n-4}. \tag{5.76}$$

Fórmula apresentada em [9] para esta família de polinômios:

$$\begin{aligned} P_{2n-2}(q) \;\; &= \;\; \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{108j^2+24j}\begin{bmatrix} 2n \\ n-1-9j \end{bmatrix}_{q^2} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{108j^2-84j+15}\begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-4+9j \end{bmatrix}_{q^2} \\ &- \;\; q^4\left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{108j^2+48j}\begin{bmatrix} 2n \\ n-2-9j \end{bmatrix}_{q^2} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{108j^2-60j+3}\begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-3+9j \end{bmatrix}_{q^2}\right]. \end{aligned} \tag{5.77}$$

$n \geq 1$.

Calculando o limite:

$$\lim_{q\longrightarrow 1} P_{2n-2}(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n}{n-1-9j} - \binom{2n-1}{n-4+9j} - \binom{2n}{n-2-9j} + \binom{2n-1}{n-3+9j}.$$

Neste caso, substituindo $q = 1$ em (5.76), obtemos R_n cujos primeiros termos são dados por $1, 1, 3, 4, 10, 15, 34, 55, 117\cdots$, que aparece em [22] pela numeração $A188022$. Resulta em:

$$R_{2n-2} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n}{n-1-9j} - \binom{2n-1}{n-4+9j} - \binom{2n}{n-2-9j} + \binom{2n-1}{n-3+9j}, \;\; n \geq 1.$$

Interpretação combinatória :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t^3q^3;q^6)_n t^{2n} q^{2n^2+4n}}{(t;q^2)_{n+1}(tq;q^2)_{n+1}(-tq;q^2)_{n+1}(-tq^2;q^2)_n(tq;q^2)_n} = \frac{1}{(1-t)}$$

$$\left(\frac{1}{(1-t^2q^{2.1})} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-t^3q^3)\cdots(1-t^3q^{3(2n-1)})t^{2n}q^{2n^2+4n}}{(1-t^2q^{2.1})(1-t^2q^{2.2})\cdots(1-t^2q^{2.2n})(1-t^2q^{2.(2n+1)})(1-tq)\cdots(1-tq^{2n-1})}\right).$$

Definindo como partições laranja-azul-verde, as partições onde as partes laranjas aparecem um número par de vezes com ímpares de 3 até a maior parte aparecendo pelo menos duas vezes, e partições formadas apenas por partes 1. As partes azuis são formadas por ímpares irrestritos, com maior parte no máximo dois a menos que o maior parte laranja. As partes verdes são formadas por ímpares que podem aparecer exatamente três vezes, com maior parte no máximo dois a menos que a maior parte laranja, e existe um sinal ligado às partes verdes, que é positivo se o número de partes verdes for par e negativo se o número de partes verdes for ímpar.

Teorema 5.28 *O número de partições laranja-azul-verde com um número par de partes verdes menos aquelas com um número ímpar de partes verdes, em até N partes, é igual a R_N.*

A Tabela (5.28), mostra exemplos para pequenos valores de N.

Partições descritas no Teorema (5.28).			
N	com um número par de partes verdes	com um número ímpar de partes verdes	R_N
0	$\emptyset$		1
1			1
2	$1+1$; $3+3$		3
3	$3+3+1$		4
4	$1+1+1+1$; $3+3+1+1$; $3+3+2+2$; $3+3+3+3$; $3+3+1+1$; $5+5+3+3$;		10
5	$3+3+1+1+1$; $3+3+2+2+1$; $3+3+3+3+1$; $5+5+3+3+1$; $5+5+3+3+2$; $5+5+3+3+1$	$1+1+1+1+1$	15

Tabela 5.28: Ilustração do Teorema para $f_{125}(q,t)$.

CAPÍTULO 6

INTERPRETAÇÕES COMBINATÓRIAS PARA OUTRAS SEQUÊNCIAS

Algumas sequências não são ainda conhecidas, mas apresentamos aqui suas interpretações combinatórias e sua relação com a expansão em série de potências.

Identidade 111

Para

$$f_{111}(q,t) = \frac{1}{1-t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t^3q^6;q^6)_{n-1}t^nq^{n^2+2n}}{(t;q^2)_{n+1}(tq;q^2)_n(-tq^2;q^2)_n(tq^2;q^2)_{n-1}}. \tag{6.1}$$

Temos a equação funcional:

$$(1-t)(1-tq)(1-t^2q^4)f_{111}(q,t) = (1-tq)(1-t^2q^4)+(1-t^3q^6)tq^3f_{111}(q,tq^2)+tq^3-tq^3(1+tq^2+t^2q^4).$$

E a relação de recorrência:

$$P_0 = 1;\;\; P_1 = 1+q^3;\;\; P_2 = 1+q^3+q^4+q^8;$$

$$P_3 = 1+q^3+q^4+q^5+q^7+q^8+q^9+q^{11}+q^{15};$$

$$P_n(q) = (1+q+q^{2n+1})P_{n-1} - (q-q^4)P_{n-2} - (q^4+q^5)P_{n-3} + (q^5-q^{2n+1})P_{n-4}. \tag{6.2}$$

Fórmula apresentada em [9] para esta família de polinômios:

$$\begin{aligned} P_{2n}(q) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{72j^2+6j}U(2n+1,12j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{72j^2-66j+15}U(2n+1,5-12j) \\ &- q\left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{72j^2+18j}U(2n+1,1+12j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{72j^2-54j+9}U(2n+1,4-12j)\right]. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Calculando o limtie:

$$\lim_{q\longrightarrow 1} P_{2n}(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n+1}{12j}_2 + \binom{2n+1}{1+12j}_2 - \binom{2n+1}{5-12j}_2 - \binom{2n+1}{6-12j}_2 - \binom{2n+1}{1+12j}_2$$

$$-\binom{2n+1}{2+12j}_2 + \binom{2n+1}{4-12j}_2 + \binom{2n+1}{5-12j}_2.$$

Neste caso, substituindo $q=1$ em (6.2), obtemos S_n cujos primeiros termos são $1,2,4,10,26,70,190\cdots$, que são os coeficientes da expansão de $\dfrac{1-x-2x^2}{1-3x+2x^3}$ em série de potências. Resulta em:

$$S_{2n} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{2n+1}{12j}_2 - \binom{2n+1}{6-12j}_2 - \binom{2n+1}{2+12j}_2 + \binom{2n+1}{4-12j}_2.$$

Conjecturamos que:

$$S_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n+1}{12j}_2 - \binom{n+1}{6-12j}_2 - \binom{n+1}{2+12j}_2 + \binom{n+1}{4-12j}_2.$$

Interpretação combinatória:

$$\frac{1}{1-t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t^3q^6;q^6)_{n-1}t^nq^{n^2+2n}}{(t;q^2)_{n+1}(tq;q^2)_n(-tq^2;q^2)_n(tq^2;q^2)_{n-1}} = \frac{1}{1-t}+$$

$$\frac{1}{(1-t)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-t^3q^6)\cdots(1-t^3q^{3.(2n-2)})t^nq^{n^2+2n}}{(1-tq)(1-tq^2)\cdots(1-tq^{2n-2})(1-tq^{2n-1})(1-t^2q^{2.2})(1-t^2q^{2.4})\cdots(1-t^2q^{2.2n})}.$$

Definindo como partições laranja-azul-verde, as partições onde nas partes laranjas os ímpares de 3 até um a menos que a maior parte aparecem pelo menos uma vez e a maior parte $2n+1$ aparece exatamente uma vez. As partes azuis são formadas por pares que aparecem aos pares, com maior parte podendo ser no máximo um a menos que a maior parte laranja. As partes verdes são formadas por pares que podem aparecer exatamente três vezes, com maior parte no máximo três a menos que a maior parte laranja, e existe um sinal ligado às partes verdes, que é positivo se o número de partes verdes for par e negativo se o número de partes verdes for ímpar.

Teorema 6.1 *O número de partições laranja-azul-verde com um número par de partes verdes menos aquelas com um número ímpar de partes verdes, em até N partes, é igual a S_N.*

A Tabela (6.1), mostra exemplos para pequenos valores de N.

É importante observar que neste e nos próximos exemplos, a segunda coluna da tabela, relativa aos números ímpares de partes verdes, só começará a ser preenchida a partir de $n = 5$. Veja que para as partes verdes temos no expoente de q pares da forma $2n-2$, que resulta em $n \geq 2$, com isso devemos ter no numerador das partes laranjas t^2q^{3+5}. Neste caso, os exemplos se tornam muito grandes e não foram apresentados no texto.

Partições descritas no Teorema (6.1).			
N	com um número par de partes verdes	com um número ímpar de partes verdes	S_N
0	$\emptyset$		1
1	3		2
2	3 + 1; 5 + 3		4
3	3 + 1 + 1; 3 + 2 + 2; 5 + 3 + 1; 5 + 3 + 2; 5 + 3 + 3; 7 + 5 + 3		10
4	3 + 1 + 1 + 1; 3 + 1 + 2 + 2; 5 + 3 + 1 + 1; 5 + 3 + 2 + 1; 5 + 3 + 2 + 2; 5 + 3 + 3 + 3; 5 + 3 + 3 + 2; 5 + 3 + 3 + 1; 5 + 3 + 2 + 2; 5 + 3 + 4 + 4; 7 + 5 + 3 + 1; 7 + 5 + 3 + 2; 7 + 5 + 3 + 3; 7 + 5 + 4 + 3; 7 + 5 + 5 + 3; 9 + 7 + 5 + 3		26

Tabela 6.1: Ilustração do Teorema para $f_{111}(q,t)$.

Quando substituímos $q = 1$, ficamos com:

$$S_0 = 1;\ \ S_1 = 2;\ \ S_2 = 4;\ \ S_3 = 10;$$

$$S_{n+4} = 3S_{n+3} - 2S_{n+1}.$$

Aplicando a técnica usada em (2.9) encontramos

$$\frac{A(x) - S_0 - S_1x - S_2x^2 - S_3x^3}{x^4} = \frac{3A(x) - 3S_0 - 3S_1x - 3S_2x^2}{x^3} - \frac{2A(x) - 2S_0}{x} \Longrightarrow$$

$$A(x) = \frac{1 - x - 2x^2}{1 - 3x + 2x^3}.$$

O que mostra que a sequência representa os coeficientes da expansão de $\dfrac{1 - x - 2x^2}{1 - 3x + 2x^3}$ em série de potências.

Identidade 113

Para

$$f_{113}(q,t) = \frac{1}{1-t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t^3q^6;q^6)_{n-1}t^nq^{n^2}}{(t;q^2)_{n+1}(tq;q^2)_n(-tq^2;q^2)_n(tq^2;q^2)_{n-1}}. \tag{6.4}$$

Temos a equação funcional:

$$(1-t)(1-tq)(1-t^2q^4)f_{113}(q,t) = (1-tq)(1-t^2q^4)+(1-t^3q^6)tqf_{113}(q,tq^2)-tq(1+tq^2+t^2q^4)+tq.$$

Temos a equação funcional:

$$P_0 = 1; \quad P_1 = 1 + q; \quad P_2 = 1 + q + q^2 + q^4;$$
$$P_3 = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + 2q^5 + q^6 + q^7 + q^9;$$
$$P_n(q) = (1 + q + q^{2n-1})P_{n-1} - (q - q^4)P_{n-2} - (q^4 + q^5)P_{n-3} + (q^5 - q^{2n-1})P_{n-4}. \tag{6.5}$$

Fórmula apresentada em [9] para esta família de polinômios:

$$\begin{aligned} P_n(q) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{72j^2+6j}U(n,12j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{72j^2-66j+15}U(n,5-12j) \\ &- q^3\left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{72j^2+30j}U(n,2+12j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{72j^2-42j+3}U(n,3-12j)\right]. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Calculando o limite:

$$\lim_{q\longrightarrow 1} P_n(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n}{12j}_2 + \binom{n}{1+12j}_2 - \binom{n}{5-12j}_2 - \binom{n}{6-12j}_2 - \binom{n}{2+12j}_2$$
$$-\binom{n}{3+12j}_2 + \binom{n}{3-12j}_2 + \binom{n}{4-12j}_2.$$

Neste caso, substituindo $q = 1$ em (6.5), obtemos S_n sequência apresentada anteriormente para f_{111}. Resulta em:

$$S_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n}{12j}_2 + \binom{n}{1+12j}_2 - \binom{n}{5-12j}_2 - \binom{n}{6-12j}_2$$
$$-\binom{n}{2+12j}_2 - \binom{n}{3+12j}_2 + \binom{n}{3-12j}_2 + \binom{n}{4-12j}_2.$$

Interpretação combinatória:

$$\frac{1}{1-t}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(t^3q^6;q^6)_{n-1}t^nq^{n^2}}{(t;q^2)_{n+1}(tq;q^2)_n(-tq^2;q^2)_n(tq^2;q^2)_{n-1}}=\frac{1}{1-t}+$$

$$\frac{1}{(1-t)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-t^3q^6)\cdots(1-t^3q^{3.(2n-2)})t^nq^{n^2}}{(1-tq)(1-tq^2)\cdots(1-tq^{2n-2})(1-tq^{2n-1})(1-t^2q^{2.2})(1-t^2q^{2.4})\cdots(1-t^2q^{2.2n})}.$$

Definindo como partições laranja-azul-verde, as partições onde nas partes laranjas os ímpares que de 1 até a maior parte aparecem pelo menos uma vez. As partes azuis são formadas por pares que aparecem aos pares, com maior parte podendo ser no máximo um a mais que a maior parte laranja. As partes verdes são formadas por pares que podem aparecer exatamente três vezes, com maior parte no máximo um a menos que a maior parte laranja, e existe um sinal ligado às partes verdes, que é positivo se o número de partes verdes for par e negativo se o número de partes verdes for ímpar.

Teorema 6.2 *O número de partições laranja-azul-verde com um número par de partes verdes menos aquelas com um número ímpar de partes verdes, em até N partes, é igual a S_N.*

A Tabela (6.2), mostra exemplos para pequenos valores de N.

Partições descritas no Teorema (6.2).			
N	com um número par de partes verdes	com um número ímpar de partes verdes	S_N
0	$\emptyset$		1
1	1		2
2	1 + 1; 3 + 1		4
3	1 + 1 + 1; 1 + 2 + 2; 3 + 1 + 1; 3 + 2 + 1; 3 + 3 + 1; 5 + 3 + 1		10
4	1 + 1 + 1 + 1; 1 + 1 + 2 + 2; 3 + 1 + 1 + 1; 3 + 2 + 1 + 1; 3 + 2 + 1 + 2; 3 + 3 + 3 + 1; 3 + 3 + 2 + 1; 3 + 3 + 1 + 1; 3 + 1 + 2 + 2; 3 + 1 + 4 + 4; 5 + 3 + 1 + 1; 5 + 3 + 2 + 1; 5 + 3 + 3 + 1; 5 + 4 + 3 + 1; 5 + 5 + 3 + 1; 7 + 5 + 3 + 1		26

Tabela 6.2: Ilustração do Teorema para $f_{113}(q,t)$.

Esta interpretação é muito parecida com a interpretação dada para f_{111}, isso se deve ao fato da pequena diferença apresentada na função geradora das duas funções. Enquanto para f_{111} temos $t^nq^{n^2+2n}$, que interpretamos como ímpares de 3 até $2n+1$, para f_{113} temos $t^nq^{n^2}$, que interpretamos como ímpares de 1 até $2n-1$. Com isso para sairmos de uma interpretação para a outra basta fazermos essa translação nos ímpares.

Identidade 114

Para

$$f_{114}(q,t) = \frac{1}{1-t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t^3q^6;q^6)_{n-1}t^nq^{n^2}}{(t;q^2)_n(tq;q^2)_n(-tq^2;q^2)_{n-1}(tq^2;q^2)_n}. \tag{6.7}$$

Temos a equação funcional:

$$(1-t)(1-tq)(1-t^2q^4)f_{114}(q,t) = 1 - tq - t^2q^4 + (1-t^3q^6)tqf_{114}(q,tq^2).$$

E a relação de recorrência:

$$P_0 = 1; \quad P_1 = 1+q; \quad P_2 = 1+q+q^2+q^3+q^4;$$
$$P_3 = 1+q+q^2+2q^3+2q^4+2q^5+q^6+q^7+q^8+q^9;$$
$$P_n(q) = (1+q+q^{2n-1})P_{n-1} - (q-q^4)P_{n-2} - (q^4+q^5)P_{n-3} + (q^5-q^{2n-1})P_{n-4}. \tag{6.8}$$

Fórmula apresentada em [9] para esta família de polinômios:

$$P_n(q) \quad = \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{72j^2+6j}U(n,12j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{72j^2-66j+15}U(n,5-12j). \tag{6.9}$$

Calculando o limite:

$$\lim_{q\longrightarrow 1} P_n(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n}{12j}_2 + \binom{n}{1+12j}_2 - \binom{n}{5-12j}_2 - \binom{n}{6-12j}_2.$$

Neste caso, substituindo $q=1$ em (6.8), obtemos T_n cujos primeiros termos são dados por $1,2,5,13,35,85\cdots$, são os coeficientes da expansão de $\dfrac{1-x-x^2}{1-3x+2x^3}$ em série de potências. Resulta em:

$$T_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n}{12j}_2 + \binom{n}{1+12j}_2 - \binom{n}{5-12j}_2 - \binom{n}{6-12j}_2.$$

Interpretação combinatória:

$$\frac{1}{1-t}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(t^3q^6;q^6)_{n-1}t^nq^{n^2}}{(t;q^2)_n(tq;q^2)_n(-tq^2;q^2)_{n-1}(tq^2;q^2)_n}=\frac{1}{1-t}+$$

$$\frac{1}{(1-t)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-t^3q^6)\cdots(1-t^3q^{3.(2n-2)})t^nq^{n^2}}{(1-tq)(1-tq^2)\cdots(1-tq^{2n-1})(1-tq^{2n})(1-t^2q^{2.2})\cdots(1-t^2q^{2.(2n-2)})}.$$

Definindo como partições laranja-azul-verde, as partições onde nas partes laranjas os ímpares aparecem pelo menos uma vez e a maior parte pode ser um a mais que a maior parte ímpar. As partes azuis são formadas por pares que aparecem aos pares, com maior parte podendo ser no máximo um a menos que a maior parte ímpar laranja. As partes verdes são formadas por pares que podem aparecer exatamente três vezes, com maior parte no máximo um a menos que a maior parte ímpar laranja, e existe um sinal ligado às partes verdes, que é positivo se o número de partes verdes for par e negativo se o número de partes verdes for ímpar.

Teorema 6.3 *O número de partições laranja-azul-verde com um número par de partes verdes menos aquelas com um número ímpar de partes verdes, em até N partes, é igual a T_N.*

A Tabela (6.3), mostra exemplos para pequenos valores de N.

Partições descritas no Teorema (6.3)			
N	com um número par de partes verdes	com um número ímpar de partes verdes	T_N
0	$\emptyset$		1
1	1		2
2	1 + 1; 2 + 1; 3 + 1		5
3	1 + 1 + 1; 2 + 1 + 1; 2 + 2 + 1; 3 + 1 + 1; 3 + 2 + 1; 3 + 3 + 1; 4 + 3 + 1; 5 + 3 + 1		13

Tabela 6.3: Ilustração do Teorema para $f_{114}(q,t)$.

Quando substituímos $q = 1$, ficamos com:

$$T_0 = 1;\quad T_1 = 2;\quad T_2 = 5;\quad T_3 = 13;$$

$$T_{n+4} = 3T_{n+3} - 2T_{n+1}.$$

Aplicando a técnica usada em (2.9) encontramos

$$\frac{A(x)-T_0-T_1x-T_2x^2-T_3x^3}{x^4}=\frac{3A(x)-3T_0-3T_1x-3T_2x^2}{x^3}-\frac{2A(x)-2T_0}{x}\implies$$

$$A(x)=\frac{1-x-x^2}{1-3x+2x^3}.$$

O que mostra que a sequência representa os coeficientes da expansão de $\dfrac{1-x-x^2}{1-3x+2x^3}$ em série de potências.

Identidade 119

Para

$$f_{119}(q,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^nq^{n^2+2n}}{(t;q^2)_{n+1}(tq;q^2)_{n+1}(-tq^2;q^2)_n}. \tag{6.10}$$

Temos a equação funcional:

$$(1-t)(1-tq)(1+tq^2)f_{119}(q,t)=1+tq^2+tq^3f_{119}(q,tq^2).$$

E a relação de recorrência:

$$\begin{aligned}&P_0=1;\;\; P_1=1+q+q^3;\;\; P_2=1+q+q^2+q^3+q^4+q^6+q^8;\\ &P_n(q)=(1+q-q^2+q^{2n-1})P_{n-1}-(q-q^2-q^3)P_{n-2}-q^3P_{n-3}.\end{aligned} \tag{6.11}$$

Fórmula apresentada em [9] para esta família de polinômios:

$$\begin{aligned}P_{n-1}(q) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty}q^{84j^2+16j}U(n,1+14j)+\sum_{j=-\infty}^{\infty}q^{84j^2-68j+13}U(n,5-14j)\\ &- q^4\left[\sum_{j=-\infty}^{\infty}q^{84j^2+40j}U(n,3+14j)+\sum_{j=-\infty}^{\infty}q^{84j^2-44j+1}U(n,3-14j)\right].\end{aligned} \tag{6.12}$$

$n\geq 1$.

Calculando o limite:

$$\lim_{q\longrightarrow 1} P_{n-1}(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n}{1+14j}_2 + \binom{n}{2+14j}_2 + \binom{n}{5-14j}_2 + \binom{n}{6-14j}_2$$

$$-\binom{n}{3+14j}_2 - \binom{n}{4+14j}_2 - \binom{n}{3-14j}_2 - \binom{n}{4-14j}_2.$$

Nete caso, substituindo $q = 1$ em (6.11), obtemos a sequência U_n cujos primeiros termos são dados por $1, 3, 7, 16, 36, 83, \ldots$ que são os coeficientes da expansão de $\dfrac{x+1}{1-2x-x^2+x^3}$ em série de potências. Resulta em:

$$U_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n+1}{1+14j}_2 + \binom{n+1}{2+14j}_2 + \binom{n+1}{5-14j}_2 + \binom{n+1}{6-14j}_2$$

$$-\binom{n+1}{3+14j}_2 - \binom{n+1}{4+14j}_2 - \binom{n+1}{3-14j}_2 - \binom{n}{4-14j}_2.$$

Interpretação combinatória:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n q^{n^2+2n}}{(t;q^2)_{n+1}(tq;q^2)_{n+1}(-tq^2;q^2)_n} =$$

$$\frac{1}{(1-t)} \left(\frac{1}{(1-tq)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n q^{n^2+2n}}{(1-t^2q^{2+2}) \cdots (1-t^2q^{2n+2n})(1-tq) \cdots (1-tq^{2n+1})} \right).$$

Levando em consideração o fator $1/(1-t)$, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 6.4 *O número de partições onde todo ímpar de* 3 *até o maior ímpar aparece pelo menos uma vez e os pares aparecem um número par de vezes, mais as partições formadas apenas por partes 1, em no máximo* N *partes, é igual a* U_N.

A tabela (6.4), mostra exemplos para pequenos valores de N.

Partições descritas no Teorema (6.4)		
N		U_N
0	$\emptyset$	1
1	1; 3	3
2	1 + 1; 3 + 1; 3 + 3; 5 + 3	7
3	1 + 1 + 1; 3 + 1 + 1; 3 + 2 + 2; 3 + 3 + 3; 3 + 3 + 1; 5 + 3 + 1; 5 + 3 + 3; 5 + 5 + 3; 7 + 3 + 5	16

Tabela 6.4: Ilustração do Teorema para $f_{119}(q,t)$.

Quando substituímos $q = 1$, ficamos com:

$$U_0 = 1; \quad U_1 = 3; \quad U_2 = 7;$$

$$U_{n+3} = 2U_{n+2} + U_{n+1} - U_n.$$

Aplicando a técnica usada em (2.9) encontramos

$$\frac{A(x) - U_0 - U_1 x - U_2 x^2}{x^3} = \frac{2A(x) - 2U_0 - 2U_1 x}{x^2} + \frac{A(x) - U_0}{x} - A(x) \Longrightarrow$$

$$A(x) = \frac{x+1}{1 - 2x - x^2 + x^3}.$$

O que mostra que a sequência representa os coeficientes da expansão de $\dfrac{x+1}{1-2x-x^2+x^3}$ em série de potências.

CAPÍTULO 7

BIJEÇÕES

Durante o estudo das interpretações combinatórias algumas sequências foram encontradas ligadas a mais de uma função geradora, o que nos permitiu estabelecer bijeções entre tais interpretações. Apresentamos primeiro as igualdades que demonstramos e por último as que ficaram como cojecturas.

Bijeções

O seguinte teorema estabelece uma bijeção entre as interpretações combinatórias apresentadas para f_9 (5.1) e f_{23}(5.4).

Teorema 7.1 *O número de partições onde todo inteiro de 1 até o maior par aparece pelo menos uma vez com a maior parte podendo ser no máximo um a mais do que o maior par, em N partes, é igual ao número de partições onde os ímpares de 1 até o maior ímpar aparecem exatamente uma vez e a maior parte pode ser no máximo um a mais do que o maior ímpar, em N partes.*

Demonstração:

Considere partições do tipo A as partições onde todo inteiro de 1 até o maior par aparece pelo menos uma vez com maior parte podendo ser no máximo um a mais do que o maior par, em N partes; e as partições do tipo B, partições onde os ímpares de 1 até o maior ímpar aparecem exatamente uma vez, e a maior parte pode ser no máximo um a mais que o maior ímpar, também em N partes. Fixado N, a prova será feita através de bijeção entre as partições dos tipos A e B.

Seja uma partição do tipo A. Se as partes ímpares dessa partição de 1 até o maior ímpar aparecem exatamente uma vez, e a maior parte no máximo um a mais que o maior ímpar então essa partição também é do tipo B e portanto será associada a ela mesma na bijeção. Por exemplo, seja a partição do tipo A, $3+2+2+1$. Neste caso temos que as partes ímpares aparecem somente uma vez e a maior parte é 3 portanto, 3 + 2 + 2 + 1 é uma partição do tipo B.

Caso contrário, haverá ímpares repetidos e pelo menos uma das partes será igual a 1. O processo para obter ímpares que apareçam somente uma vez é somar 2 a cada parte maior do que ou igual ao ímpar que aparece repetido, menos na primeira parte igual a 1, sucessivamente.

Por exemplo, considere a partição 2 + 1 + 1 + 1. Temos que o número ímpar 1 repete exatamente três vezes, assim aplicando duas vezes a operação, exceto em uma parte igual a 1, obtemos

$$2+1+1+1 \rightarrow 4+3+3+1 \rightarrow 6+5+3+1$$

e portanto a partição 2 + 1 + 1 + 1 será associada a 6 + 5 + 3 + 1, uma partição do tipo B.

Reciprocamente, a aplicação inversa é dada tomando uma partição do tipo B e retirando 2 unidades de cada parte, se possível (zero não é considerado como parte), menos da parte igual a 1, até que se encontre as partes de 1 até o maior par aparecendo pelo menos uma vez. Por exemplo,

$$6 + 5 + 3 + 1 \to 4 + 3 + 1 + 1 \to 2 + 1 + 1 + 1.$$

Assim, tem-se uma bijeção entre as partições do tipo A e B, o que estabelece o resultado.

□

O seguinte teorema estabelece uma bijeção entre as interpretações combinatórias apresentadas para f_9 (5.1) e f_{38} (5.7).

Teorema 7.2 *O número de partições onde todo inteiro de 1 até o maior par aparece pelo menos uma vez com maior parte podendo ser no máximo um a mais do que o maior par, em N partes, é igual ao número de partições onde todo par de 2 até o maior par aparece pelo menos duas vezes, e a maior parte pode ser um a mais do que a maior parte par, em N partes.*

Demonstração:

Considere partições do tipo A as partições onde todo inteiro de 1 até o maior par aparece pelo menos uma vez com maior parte podendo ser no máximo um a mais do que o maior par, em N partes; e as partições do tipo B, partições onde todo par de 2 até o maior par aparece pelo menos duas vezes, e a maior parte pode ser um a mais do que a maior parte par, também em N partes. Fixado N, a prova será feita através de bijeção entre as partições dos tipos A e B.

Dada uma partição do tipo A, temos todos os inteiros de 1 até o maior par $2n$ aparecendo pelo menos uma vez, que podemos escrever da seguinte maneira:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots (2n - 1) + 2n + \lambda,$$

onde λ é uma partição irrestrita com maior parte no máximo $2n + 1$, e número de partes igual a $N - 2n$. Para passarmos para uma partição do tipo B, vamos transformar a primeira aparição de cada ímpar de 1 até $2n - 1$ que aparece pelo menos uma vez em seu sucessor. Essa nova partição é representada por:

$$2 + 2 + 4 + 4 + \cdots 2n + 2n + \lambda,$$

que é uma partição onde todo par de 2 até o maior par aparece pelo menos duas vezes e a maior parte pode ser uma a mais do que o maior par, ou seja, uma partição do tipo B.

Agora dada uma partição do tipo B, podemos representá-la como acima

$$2 + 2 + 4 + 4 + \cdots 2n + 2n + \lambda,$$

onde λ é uma partição irrestrita com maior parte no máximo $2n + 1$, e número de partes igual a $N - 2n$. Para passarmos para uma partição do tipo A basta transformarmos a primeira aparição dos pares que de 2 até $2n$ aparecem pelo menos duas vezes, em seu antecessor, com isso temos

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots (2n - 1) + 2n + \lambda,$$

que é uma partição onde todo inteiro de 1 até o maior par aparece pelo menos uma vez, e a maior parte é no máximo um a mais do que o maior par.

O que resulta na igualdade de partições dos tipos A e B.

□

O seguinte teorema estabelece uma bijeção entre as interpretações combinatórias apresentadas para f_{28} (4.7) e f_{50}(5.18).

Teorema 7.3 *Definindo como partições laranja-azul, as partições onde as partes laranjas são pares que aparecem de 2 até a maior parte, pelo menos uma vez e no máximo duas. As partes azuis são partições irrestritas com maior parte no máximo um a mais do que a maior parte laranja, mais as partições formadas apenas por partes 1.*

O número de partições laranja-azul, em N partes, é igual ao número de sobrepartições onde somente os ímpares podem ser marcados até no máximo dois a menos que a maior parte, todo ímpar não marcado de 3 até a maior parte aparece pelo menos uma vez, mais as partições formadas apenas por partes 1, em N partes.

Demonstração:

Considere partições do tipo A as partições laranja-azul, em N partes; e as partições do tipo B, sobrepartições onde somente os ímpares podem ser marcados até no máximo dois a menos que a maior parte, todo ímpar não marcado de 3 até a maior parte aparece pelo menos uma vez, mais as partições formadas apenas por partes 1. Fixado N, a prova será feita através de bijeção entre as partições dos tipos A e B.

Dada uma partição do tipo A, ela pode ser formada apenas por partes 1, neste caso, será transformada na partição do tipo B formada apenas por partes 1, apenas desconsiderando a cor azul. Caso contrário, basta tomarmos a primeira aparição de cada par laranja e adicionarmos uma unidade. Na sua segunda aparição, caso aconteça, basta subtraírmos uma unidade e marcarmos. As partes azul se mantem as mesmas. Não considerando mais a diferença de cores, temos uma partição do tipo B.

Agora dada uma partição do tipo B, ela pode ser formada apenas por partes 1, neste caso, será transformada na mesma partição de cor azul. Caso contrário, basta subtraírmos uma unidade de cada primeira aparição do ímpar, somarmos uma unidade em cada aparição do ímpar marcado e colorirmos de laranja essas partes. As demais serão coloridas de azul. Essa operação leva à uma partição do tipo A.

$\square$

O seguinte teorema estabelece uma bijeção entre as interpretações combinatórias apresentadas para f_{50} (5.18)e f_{51} (5.21).

Teorema 7.4 *O número de sobrepartições onde somente os ímpares podem ser marcados até no máximo dois a menos que a maior parte, todo ímpar não marcado de* 3 *até a maior parte aparece pelo menos uma vez, mais as partições formadas apenas por partes 1, em N partes, é igual ao número de partições laranja-azul onde a partição azul é dada por todos os pares de* 2 *até o maior par aparecendo exatamente uma vez, com maior parte no máximo um a mais do que a maior parte par. Na partição laranja os ímpares são distintos, a maior parte é no máximo a maior parte par azul, em N partes.*

Demonstração:

Considere partições do tipo A sobrepartições onde somente os ímpares podem ser marcados até no máximo dois a menos que a maior parte, todo ímpar não marcado de 3 até a maior parte aparece pelo menos uma vez, mais as partições formadas apenas por partes 1, em N partes; e as partições do tipo B, partições laranja-azul onde a partição azul é dada por todos os pares de

2 até o maior par aparecendo exatamente uma vez, com maior parte no máximo um a mais do que a maior parte par. Na partição laranja os ímpares são distintos, a maior parte é no máximo a maior parte par azul, também em N partes. Fixado N, a prova será feita através de bijeção entre as partições dos tipos A e B.

Considere uma partição do tipo A, ela é formada apenas por partes 1 ou pode ser escrita como:

$$(3 + 5 + 7 + \cdots + 2n + 1) + \overline{\lambda} + \lambda,$$

onde $\overline{\lambda}$ é uma partição em que todas as partes são ímpares, distintas e marcadas, com maior parte no máximo $2n - 1$ e λ é uma partição irrestrita com maior parte no máximo $2n + 1$.

Se a partição for formada apenas por partes 1, ela será levada na partição formada apenas por partes 1.

Caso contrário, ela pode ser levada à uma partição do tipo B da seguinte maneira. A primeira aparição dos ímpares que de 3 até a maior parte aparecem pelo menos uma vez, serão levados em seus antecessores, e juntamente com as partes ímpares de λ (λ_i) formarão as partes azuis e, $\overline{\lambda}$ (sem a marcação) juntamente com as partes pares de λ (λ_p) serão levados nas partes laranjas. Logo

$$(2 + 4 + 6 + \cdots + 2n) + \lambda_i + \overline{\lambda} + \lambda_p,$$

com λ_i formada por ímpares com maior parte podendo ser $2n + 1$, e $\overline{\lambda} + \lambda_p$ com maior parte no máximo $2n$.

Com isso, temos uma partição laranja-azul, onde nas partes azuis os pares que de 2 até o maior par aparecem exatamente uma vez e a maior parte pode ser um a mais que o maior par, ou a partição é formada apenas por partes 1. Nas partes laranjas os ímpares são distintos, com maior parte no máximo a maior parte par da partição azul.

Agora dada uma partição do tipo B, ela pode ser escrita como:

$$(2 + 4 + 6 + \cdots + 2n) + \lambda + \lambda,$$

com λ formada por ímpares com maior parte podendo ser $2n+1$, e λ, formada por ímpares distintos e pares irrestritos com maior parte $2n$. Os pares azuis, que de 2 até o maior par, aparecem exatamente uma vez, serão levados em seus sucessores. As partes ímpares distindas de λ devem ser levadas nas partes marcadas. Ou, seja:

$$(3 + 5 + 7 + \cdots + 2n + 1) + \overline{\lambda} + \tilde{\lambda}.$$

Como $\overline{\lambda}$ é formado pelas partes ímpares distintas de λ, que tem maior parte $2n$, a maior parte de $\overline{\lambda}$ é $2n - 1$ e, $\tilde{\lambda}$ uma partição irrestrita com maior parte $2n + 1$.

A partição formada apenas por 1, será levada na partição formada apenas por partes 1.

Com isso temos uma sobrepartições onde somente os ímpares podem ser marcados até no máximo dois a menos que a maior parte, todo ímpar não marcado de 3 até a maior parte aparece pelo menos uma vez, mais as partições formadas apenas por partes 1, que é uma partição do tipo A.

□

O seguinte teorema estabelece uma bijeção entre as interpretações combinatórias apresentadas para f_{81} (5.45) e f_{117} (5.48).

Teorema 7.5 *O número de partições nas cores laranja-azul onde as partes laranjas são formadas por todos os inteiros de* 1 *até o maior aparecendo pelo menos uma vez e no máximo duas. As partes azuis são contadas duas vezes e a maior parte azul é no máximo duas vezes a maior parte laranja, em N partes, é igual ao número de partições onde todo ímpar de* 1 *até o maior ímpar aparece pelo menos uma vez e os pares aparecem um número par de vezes, com maior parte par podendo ser um a mais do que a maior parte ímpar, em N partes.*

Demonstração:

Considere partições do tipo A as partições nas cores laraja-azul onde as partes laranjas são formadas por todos os inteiros de 1 até o maior aparecendo pelo menos uma vez e no máximo duas. As partes azuis são contadas duas vezes e a maior parte azul é no máximo duas vezes a maior parte laranja, em N partes; e as partições do tipo B, partições onde todo ímpar de 1 até o maior ímpar aparece pelo menos uma vez e os pares aparecem um número par de vezes, com maior parte par podendo ser um a mais do que a maior parte ímpar, também em N partes. Fixado N, a prova será feita através de bijeção entre as partições dos tipos A e B.

Uma partição do tipo A pode ser escrita como:

$$1+2+3+\cdots+n+\lambda+\lambda.$$

Com λ uma partição em partes distintas, com maior parte no máximo n e λ uma partição irrestrita com maior parte no máximo $2n$.

Some i em cada parte laranja igual a $i+1$, com $i \geq 1$, e duplique cada parte azul. Ou seja:

$$1+(2+1)+(3+2)+\cdots+(n+n-1)+\lambda+\tilde{\lambda} \rightarrow$$

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)+\lambda+\tilde{\lambda},$$

com λ uma partição em partes ímpares distintas com maior parte $2n-1$ e $\tilde{\lambda}$ uma partição irrestrita com todas as partes aparecendo um número par de vezes. Observe que as partes pares estão em $\tilde{\lambda}$ e por isso aparecem um número par de vezes, e as partes ímpares aparecem pelo menos uma vez. Que é uma partição do tipo B.

Por exemplo, se tomarmos a partição do tipo A dada por:

$$1+1+2+2+3+4+4+5+1+2+2+3+8+10 \rightarrow$$

$$1+2+3+4+5+\underbrace{1+2+4}_{\lambda}+\underbrace{1+2+2+3+8+10}_{\lambda} \rightarrow$$

$$1+(2+1)+(3+2)+(4+3)+(5+4)+\underbrace{1+(2+1)+(4+3)}_{\lambda}+$$

$$\underbrace{1+1+2+2+2+2+3+3+8+8+10+10}_{\lambda} \rightarrow$$

$$1+1+1+1+2+2+2+2+3+3+3+3+5+7+7+8+8+9+10+10,$$

que é uma partição do tipo B.

Reciprocamente, tome uma partição do tipo B.

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)+\lambda+\tilde{\lambda},$$

com λ dada por partes ímpares e $\tilde{\lambda}$ por pares aparecendo um número par de vezes, com maior parte no máximo $2n$.

Cada par de partes pares se transformará em uma parte par azul. Transforme cada par de partes iguais de λ em uma parte azul, caso o número de uma determinada parte seja ímpar, uma cópia dela se juntará as partes ímpares. Subtraia i das partes iguais a $2i-1, i \geq 1$ que não são azuis, e transforme em partes laranjas. Como tínhamos partes ímpares de 1 até o maior ímpar, obteremos partes de 1 até a maior parte aparecendo pelo menos uma vez e no máximo duas. Que é uma partição do tipo A.

Tomando, por exemplo, a partição do tipo B

$$1+1+1+1+2+2+2+2+3+3+3+3+5+7+7+8+8+9+10+10 \rightarrow$$

$$1+3+5+7+9+\underbrace{1+1+1+3+3+3+7}_{\lambda}+\underbrace{2+2+2+2+8+8+10+10}_{\tilde{\lambda}} \rightarrow$$

$$1+1+3+3+5+7+7+9+1+2+2+3+8+10 \rightarrow$$

$$1+1+(3-1)+(3-1)+(5-2)+(7-3)+(7-3)+(9-4)+1+2+2+3+8+10 \rightarrow$$

$$1+1+2+2+3+4+4+5+1+2+2+3+8+10,$$

que é uma partição do tipo A. $\square$

O seguinte teorema estabelece uma bijeção entre as interpretações combinatórias apresentadas para f_{122} (5.66) e f_{123} (5.69).

Teorema 7.6 *O número de partições onde todo par não marcado de* 4 *até a maior parte aparece pelo menos uma vez, e as partes marcadas são pares e no máximo dois a menos que a maior parte, mais as partições formadas apenas por partes* 1 *e* 2*, em* N *partes, é igual ao número de partições laranja-azul, que são partições onde nas partes azuis os ímpares de 3 até o maior ímpar aparecem exatamente uma vez e a maior parte pode ser um a mais que o maior ímpar, ou a partição é formada apenas por partes 2. Nas partes laranjas os pares são distintos, com maior parte no máximo igual a maior parte ímpar da partição azul, ou a partição pode ser formada apenas por partes 1, em* N *partes.*

Demonstração:

Considere partições do tipo A as partições onde todo par não marcado de 4 até a maior parte aparece pelo menos uma vez, e as partes marcadas são pares e no máximo dois a menos que a maior parte, mais as partições formadas apenas por partes 1 e 2, em N partes; e as partições do tipo B, partições laranja-azul, onde nas partes azuis os ímpares de 3 até o maior ímpar aparecem exatamente uma vez e a maior parte pode ser um a mais que o maior ímpar, ou a partição é formada apenas por partes 2. Nas partes laranjas os pares são distintos, com maior parte no máximo igual a maior parte ímpar da partição azul, ou a partição pode ser formada apenas por partes 1, também em N partes. Fixado N, a prova será feita através de bijeção entre as partições dos tipos A e B.

Tome uma partição do tipo A, ela é formada apenas por partes 1 e 2, ou pode ser escrita como:

$$(4 + 6 + 8 + \cdots + 2n + 2) + \overline{\lambda} + \lambda,$$

onde $\overline{\lambda}$ é uma partição em que todas as partes são pares, distintas e marcadas, com maior parte no máximo $2n$ e λ é uma partição irrestrita com maior parte no máximo $2n + 2$.

Se a partição for formada apenas por partes 1 e 2, as partes 1 serão laranjas e as partes 2 serão azuis.

Caso contrário, ela pode ser levada à uma partição do tipo B da seguinte maneira. Os pares que de 4 até a maior parte aparecem pelo menos uma vez, serão levados em seus antecessores, e juntamente com as partes pares de λ (λ_p) formarão as partes azuis e, $\overline{\lambda}$ (sem a marcação) juntamente com as partes ímpares de λ (λ_i) serão levados nas partes laranjas. Logo

$$(3 + 5 + 7 + \cdots + 2n + 1) + \lambda_p + \overline{\lambda} + \lambda_i,$$

com λ_p formada por pares com maior parte podendo ser $2n + 2$, e $\overline{\lambda} + \lambda_i$ com maior parte no máximo $2n + 1$.

Com isso, temos uma partição laranja-azul, onde nas partes azuis os ímpares de 3 até o maior ímpar aparecem exatamente uma vez e a maior parte pode ser um a mais que o maior ímpar, ou a partição é formada apenas por partes 2. Nas partes laranjas os pares são distintos, com maior parte no máximo igual a maior parte ímpar da partição azul, ou a partição pode ser formada apenas por partes 1.

Agora dada uma partição do tipo B, ela pode ser escrita como:

$$(3 + 5 + 7 + \cdots + 2n + 1) + \lambda + \lambda,$$

com λ formada por pares com maior parte podendo ser $2n + 2$ e, λ formada por pares distintos e ímpares irrestritos com maior parte $2n + 1$, ou formadas apenas partes 1 e 2. Essas últimas podem ser levadas em partições formadas apenas por partes 1 e 2, que são partições do tipo A. As outras podem ser levadas em partições do tipo A, apenas levando os ímpares azuis , que de 3 até o maior ímpar, aparecem pelo menos uma vez, em seus sucessores. As partes pares distindas de λ devem ser levadas nas partes marcadas. Ou, seja:

$$(4 + 6 + 8 + \cdots + 2n + 2) + \overline{\lambda} + \tilde{\lambda}.$$

Como $\overline{\lambda}$ é formado pelas partes pares distintas de λ, que tem maior parte $2n + 1$, a maior parte de $\overline{\lambda}$ é $2n$ e, $\tilde{\lambda}$ uma partição irrestrita com maior parte $2n + 2$.

Com isso temos uma partição onde, todo par não marcado de 4 até a maior parte aparece pelo menos uma vez, e as partes marcadas são pares e no máximo dois a menos que a maior parte, mais as partições formadas apenas por partes 1 e 2, que é uma partição do tipo A.

□

Conjecturas

Bijeção entre as interpretações combinatórias apresentadas para f_9 (5.1)e f_{27} (4.4).

Conjectura 7.1 *O número de partições onde todo inteiro de 1 até o maior par aparece pelo menos uma vez com maior parte podendo ser no máximo um a mais do que o maior par, em N partes, é igual ao número de partições laranja-azul, onde as partes azuis são formadas por pares que de 2 até o maior par aparecem pelo menos duas vezes e um número par de vezes, com maior parte podendo ser um a mais que o maior par, mais as partições formadas apenas por* *partes 1. As partes laranjas formadas por ímpares no máximo um a menos que a maior parte par, em N partes.*

Bijeção entre as interpretações combinatórias apresentadas para f_9 (5.1) e f_{87} (4.19).

Conjectura 7.2 *Definindo como partições laranja-azul-verde partições onde nas partes laranjas os pares de* 2 *até o maior aparecendo pelo menos duas vezes e um número par de vezes. As partes azuis são ímpares, com maior parte podendo ser um a mais do que a maior parte laranja. As partes verdes são contadas duas vezes, dadas por pares formados pelo dobro dos ímpares, com maior parte sendo no máximo o dobro do maior par menos dois. Temos também um sinal ligado às partes verdes que será positivo se o número de partes verdes for par e negativo se for ímpar.*

O número de partições onde todo inteiro de 1 até o maior par aparece pelo menos uma vez com maior parte podendo ser no máximo um a mais do que o maior par, em N partes, é igual ao número de partições laranja-azul, em N partes.

Bijeção entre as interpretações combinatórias apresentadas para f_{29} (5.24) e f_{48} (5.30).

Conjectura 7.3 *O número de partições onde todo ímpar de* 1 *até o maior ímpar aparece pelo menos uma vez, a maior parte não marcada pode ser um a mais que a maior parte ímpar e as partes marcadas são ímpares menores do que ou iguais a maior parte ímpar, em N partes, é igual ao número de partições onde todo par de* 2 *até a maior parte aparece pelo menos uma vez, as partes marcadas são pares no máximo dois a menos que a maior parte, em* N *ou* $N-1$ *partes.*

Bijeção entre as interpretações combinatórias apresentadas para f_{44} (3.13)e f_{46} (3.19).

Conjectura 7.4 *Definindo como partições laranja-azul, as partições onde as partes laranjas são formadas por todos os inteiros que de* 1 *até a maior parte aparecem pelo menos três vezes. As partes azuis são partições em partes ímpares, contadas duas vezes. A maior parte pode ser azul e dada por duas vezes a maior parte laranja mais um, mais as partições formadas apenas por partes 1. E as partições vermelha-verde como sendo partições onde as partes vermelhas são ímpares contados duas vezes, to ímpar de* 1 *até a maior parte* $(2n-1)$ *aparece pelo menos* *uma vez. As partes verdes como sendo partições onde todo inteiro de* 0 *até* $(n-1)$ *aparece pelo menos uma vez e a maior parte verde pode ser no máximo metade da maior parte vermelha mais um.*

O número de partições laranja-azul em N partes é igual ao número de partições vermelha-verde, em N partes.

Bijeção entre as interpretações combinatórias apresentadas para f_{46} (3.19)e f_{62} (3.22).

Conjectura 7.5 *Definindo como partições vermelha-verde como sendo partições onde as partes vermelhas são ímpares contados duas vezes, to ímpar de* 1 *até a maior parte* $(2n-1)$ *aparece pelo menos uma vez. As partes verdes como sendo partições onde todo inteiro de* 0 *até* $(n-1)$ *aparece pelo menos uma vez e a maior parte verde pode ser no máximo metade da maior parte vermelha mais um. E partições laranja-azul, as partições onde as partes laranjas são compostas por inteiros de* 1 *até n aparecendo pelo menos uma vez e no máximo duas. As partes azuis são contados duas vezes, onde todo ímpar de* 1 *até o dobro da maior parte laranja menos um aparece pelo menos uma vez, com a maior parte podendo ser o dobro da maior parte laranja mais, ou a partição é formada apenas por partes 1.*

O número de partições vermelha-verde em N partes é igual ao número de partições laranja-azul, em N partes.

Bijeção entre as interpretações combinatórias apresentadas para f_{62} (3.22)e f_{63} (3.25).

Conjectura 7.6 *Definindo laranja-azul, as partições onde as partes laranjas são compostas por inteiros de* 1 *até n aparecendo pelo menos uma vez e no máximo duas. As partes azuis são contados duas vezes, onde todo ímpar de* 1 *até o dobro da maior parte laranja menos um aparece pelo menos uma vez, com a maior parte podendo ser o dobro da maior parte laranja mais, ou a partição é formada apenas por partes 1. E partições vermelha-verde as partições onde as partes vermelhas de* 1 *até n aparecem pelo menos três e no máximo quatro vezes, as partes verdes como sendo partições irrestritas e contadas duas vezes. A maior parte verde é duas vezes a maior parte vermelhas mais um, ou a partição é formada apenas por partes 1.*

O número de partições laranja-azul em N partes é igual ao número de partições vermelha-verde, em N partes.

Bijeção entre as interpretações combinatórias apresentadas para f_{63} (3.25)e f_{95} (3.28).

Conjectura 7.7 *Definindo como partições vermelha-verde as partições onde as partes vermelhas de* 1 *até* n *aparecem pelo menos três e no máximo quatro vezes, as partes verdes como sendo partições irrestritas e contadas duas vezes. A maior parte verde é duas vezes a maior parte vermelhas mais um, ou a partição é formada apenas por partes 1. E partições laranja-azul as partições onde as partes azuis são formadas por todos os pares de* 0 *até* $2n-2$ *aparecendo exatamente duas vezes. As partes laranjas são formadas por ímpares que de* 1 *até o maior ímpar aparecem pelo menos uma vez, o maior ímpar sendo um a mais do que a maior parte azul, e partes pares que aparecem aos pares, com maior parte par podendo ser um a mais do que a maior parte ímpar.*

O número de partições vermelha-verde em N partes é igual ao número de partições laranja-azul, em N partes.

CAPÍTULO 8

TRABALHOS FUTUROS

No cálculo da fórmula para o termo geral da sequência encontrada usando o Método de Andrews com $f_{23}(-q,t)$, nos deparamos com um novo instrumento de contagem, que difere do coeficiente trinomial por não ter a variação de sinal. Apresentamos aqui uma interpretação em termos de caminhos reticulados e algumas conjecturas ligadas a este coeficiente. Nosso objetivo, é encontrar propriedades que nos permitam compreender melhor as características combinatórias desse coeficiente.

No texto esse novo coeficiente foi denotado por $\left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array}\right)_3$ e tem fórmula geral:

$$\left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array}\right)_3 = \sum_{h\geq 0} \left(\begin{array}{c} n \\ h \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} 2n-2h \\ n-j-h \end{array}\right).$$

Construímos com esse coeficiente um triângulo, cada linha representa um valor fixo de n e as colunas se devem a variação de j ($-n \leq j \leq n$).

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & 3 & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & 6 & 11 & 6 & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & 9 & 30 & 45 & 30 & 9 & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & 12 & 58 & 144 & 195 & 144 & 58 & 12 & 1 & & & & \\
 & & & 1 & 15 & 95 & 330 & 685 & 873 & 685 & 330 & 95 & 15 & 1 & & & \\
 & & 1 & 18 & 141 & 630 & 1770 & 3258 & 3989 & 3258 & 1770 & 630 & 141 & 18 & 1 & & \\
 & 1 & 21 & 196 & 1071 & 3801 & 9198 & 15533 & 18483 & 15533 & 9198 & 3801 & 1071 & 196 & 21 & 1 &
\end{array}$$

O que percebemos é que existem interpretações para as diagonais desse triângulo.

Da direita para a esquerda temos a primeira diagonal formada apenas por 1's, a segunda diagonal é formada por múltiplos de 3, ou seja:

$$\left(\begin{array}{c} n \\ n \end{array}\right)_3 = \left(\begin{array}{c} n \\ -n \end{array}\right)_3 1; \quad \left(\begin{array}{c} n \\ n-1 \end{array}\right)_3 = \left(\begin{array}{c} n \\ 1-n \end{array}\right)_3 = 3n.$$

A diagonal, cujos primeiros termos são $1, 11, 30, 58, 95, 141, \cdots$ é descrita em [[22], A051682] pelos números hendecagonais que são da forma $\frac{n(9n-7)}{2}$. Eles são encontrados quando escrevemos os números $0, 1, 2, 3, 4, \cdots$ em uma espiral triangular, a sequência dada representa os valores presentes na mesma linha, e à direita do 0. Essa diagonal pode ser descrita como:

$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\right)_3 = 1; \quad \left(\begin{array}{c} n \\ n-2 \end{array}\right)_3 = \left(\begin{array}{c} n \\ 2-n \end{array}\right)_3 = \frac{n(9n-7)}{2}.$$

A coluna central desse triângulo tem os primeiros termos dados por $1, 3, 11, 45, 195, 873, \cdots$ e é descrita em [[22], A026375], com termo geral dado por:

$$a(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{2k}{k} = T(2n, n).$$

Define-se $T(n, k)$ como o número de caminhos reticulados de $(0, 0)$ até $(n, n-2k)$, usando passos $U = (1, 1)$, $D = (1, -1)$ e, em níveis pares também $H = (2, 0)$. [[22], A026374.]

Neste caso é fácil ver a equivalência, já que a coluna central do triângulo corresponde a $j = 0$, e se h varia de 0 até m, $k = m - h$ varia de m até 0.

$$\binom{n}{0}_3 = \sum_{h \geq 0} \binom{n}{h}\binom{2(n-h)}{n-h} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k}\binom{2k}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{2k}{k} = a(n).$$

Para a segunda coluna, com primeiros termos dados por $1, 6, 30, 144, 685 \cdots$ encontramos a mesma interpretação em termos de caminhos reticulados,

$$\binom{n}{1}_3 = T(2n, n-1). \qquad [[22], A026376]$$

Do mesmo modo, encontramos para a terceira coluna cujos primeiros termos são dados por $1, 9, 58, 330, 1170 \cdots$, a interpretação em termos de caminhos reticulados:

$$\binom{n}{2}_3 = T(2n, n-2). \qquad [[22], A026377]$$

Para as demais colunas não há na literatura nenhuma interpretação mas, as apresentadas anteriormente nos levaram a seguinte conjectura

$$\binom{n}{j}_3 = T(2n, n-j).$$

Para mostrar que a conjectura é verdadeira utilizamos a definição dada em [[22], A026374] de que $(1 + 3x + x^2)^n$ é a função geradora para $T(2n, k)$.

Sendo necessário apenas demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 8.1

$$(1+3x+x^2)^n = \sum_{j=-n}^{n} \binom{n}{j}_3 x^{j+n}.$$

Demonstração:

$$(1+3x+x^2)^n = [(1+x)^2 + x]^n = \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} [(1+x)^2]^{n-h} x^h = \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} (1+x)^{2n-2h} x^h =$$

$$\sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} \left[\sum_{k=0}^{2n-2h} \binom{2n-2h}{k} x^{2n-2h-k} 1^k \right] x^h = x^n \sum_{h=0}^{n} \sum_{k=0}^{2n-2h} \binom{n}{h} \binom{2n-2h}{k} x^{n-h-k} =$$

$$x^n \sum_{j=-n}^{n} \sum_{h\geq 0} \binom{n}{h} \binom{2n-2h}{n-j-h} x^j = \sum_{j=-n}^{n} \binom{n}{j}_3 x^{j+n}.$$

Ao substituirmos $j = n - h - k$, observando que h varia de 0 até n e k de 0 até $2n - 2h$, podemos concluir que j irá variar de $-n$ até n.

□

Corolário 8.1

$$\binom{n}{j}_3 = T(2n, n-j).$$

Agora, tomando $x = 1$ no Teorema (8.1) conseguimos o seguinte resultado:

Corolário 8.2

$$\sum_{j=-n}^{n} \binom{n}{j}_3 = 5^n.$$

Reescrevendo a função geradora $(1+3x+x^2)^n = x^n(x^{-1}+3+x)^n$, encontramos um fato que já era visualizado no triângulo

$$\binom{n}{j}_3 = \binom{n}{-j}_3.$$

Da seguinte igualdade segue uma importante propriedade,

$$(x^{-1} + 3 + x)^n = (x^{-1} + 3 + x)(x^{-1} + 3 + x)^{n-1}.$$

Isso quer dizer que o coeficiente de x^j na expansão de $(x^{-1} + 3 + x)^n$ é igual a soma do coeficiente de x^{j-1} com o triplo do coeficiente de x^j e o coeficiente de x^{j+1} na expansão de $(x^{-1} + 3 + x)^{n-1}$. Disso segue,

$$\binom{n}{j}_3 = \binom{n-1}{j-1}_3 + 3\binom{n-1}{j}_3 + \binom{n-1}{j+1}_3.$$

Conjecturas

Com esta nova interpretação para $T(2n, n-j)$ e trabalhando com classes de uma linha encontramos algumas conjecturas:

$$\frac{2^{n+1} + 5^n}{3} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n}{3j}_3. \quad [[22], A247313] \tag{8.1}$$

$$2^n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n}{3j}_3 - \binom{n}{1-3j}_3 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n}{3j}_3 - \binom{n}{2-3j}_3. \quad [[22], A077569] \tag{8.2}$$

Esta primeira igualdade foi encontrada no estudo da identidade 23.

$$\frac{5^n + 2 \cdot 3^n + 1}{4} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n}{4j}_3. \quad [[22], A146086] \tag{8.3}$$

$$\frac{3^n + 1}{2} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n}{4j}_3 - \binom{n}{1-4j}_3 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n}{4j}_3 - \binom{n}{3-4j}_3. \quad [[22], A007051] \tag{8.4}$$

$$3^n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n}{4j}_3 - \binom{n}{2-4j}_3 . \qquad [[22], A000244] \tag{8.5}$$

$$\frac{3^n + 5^n}{2} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n}{4j}_3 + \binom{n}{1-4j}_3 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n}{4j}_3 + \binom{n}{3-4j}_3 . \qquad [[22], A081186] \tag{8.6}$$

$$\frac{5^n + 1}{2} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n}{4j}_3 + \binom{n}{2-4j}_3 . \qquad [[22], A034478] \tag{8.7}$$

$$\frac{3 \cdot 5^n + 1}{4} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n}{4j}_3 + \binom{n}{1-4j}_3 + \binom{n}{2-4j}_3 . \qquad [[22], A083065] \tag{8.8}$$

$$\frac{5^n + 3}{4} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n}{4j}_3 - \binom{n}{1-4j}_3 + \binom{n}{2-4j}_3 . \qquad [[22], A047850] \tag{8.9}$$

$$\frac{\left(5 - \sqrt{5}\right)\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^n}{10} + \frac{\left(5 + \sqrt{5}\right)\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{10} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n}{5j}_3 - \binom{n}{1-5j}_3 \tag{8.10}$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n}{5j}_3 - \binom{n}{4-5j}_3 . \qquad [[22], A093129]$$

$$\left(\frac{\frac{1}{2} - \sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{5}{2}\right)^n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n}{5j}_3 - \binom{n}{2-5j}_3 \tag{8.11}$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n}{5j}_3 - \binom{n}{3-5j}_3 . \qquad [[22], A081567]$$

$$\frac{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\begin{array}{c} n \\ 1-5j \end{array} \right)_3 - \left(\begin{array}{c} n \\ 3-5j \end{array} \right)_3 . \quad [[22], A093131] \tag{8.12}$$

$$2^{n-1}(1+2^n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\begin{array}{c} n \\ 6j \end{array} \right)_3 - \left(\begin{array}{c} n \\ 2-6j \end{array} \right)_3 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\begin{array}{c} n \\ 6j \end{array} \right)_3 - \left(\begin{array}{c} n \\ 4-6j \end{array} \right)_3 . \quad [[22], A007582] \tag{8.13}$$

$$\frac{2^{2n+1}+1}{3} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\begin{array}{c} n \\ 6j \end{array} \right)_3 - \left(\begin{array}{c} n \\ 3-6j \end{array} \right)_3 . \quad [[22], A007583] \tag{8.14}$$

$$\frac{3\cdot 2^{n-1}+2^{2n-1}+1}{3} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\begin{array}{c} n \\ 6j \end{array} \right)_3 - \left(\begin{array}{c} n \\ 5-6j \end{array} \right)_3 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\begin{array}{c} n \\ 6j \end{array} \right)_3 - \left(\begin{array}{c} n \\ 1-6j \end{array} \right)_3 . \quad [[22], A007581] \tag{8.15}$$

$$2^{n-1}(2^{2n-1}-1) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\begin{array}{c} n \\ 1-6j \end{array} \right)_3 - \left(\begin{array}{c} n \\ 3-6j \end{array} \right)_3 . \quad [[22], A006516] \tag{8.16}$$

$$\frac{4^n-1}{3} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\begin{array}{c} n \\ 1-6j \end{array} \right)_3 - \left(\begin{array}{c} n \\ 4-6j \end{array} \right)_3 . \quad [[22], A002450] \tag{8.17}$$

Nosso objetivo, em trabalhos futuros, é encontrar propriedades deste triângulo que nos permitam compreender melhor as características combinatórias do coeficiente $\left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right)_3$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho apresentamos novas interpretações combinatórias para as sequências que incluem as sequências de Fibonacci, Pell e Jacobsthal, utilizando o método de Andrews. Através das conjecturas polinomiais encontradas por Santos apresentamos também novas fórmulas para o termo geral dessas sequências, ou subsequências delas. Fizemos o mesmo estudo para outras sequências, com as mais variadas interpretações, porém não tão conhecidas como as citadas anteriormente.

Através dessas interpretações, pudemos ainda, provar bijetivamente algumas identidades entre nossas interpretações combinatórias, nesse aspecto, deixamos algumas em aberto.

No cálculo de algumas dessas fórmulas para os termos gerais da sequência nos deparamos com um novo instrumento de contagem que difere do coeficiente trinomial por não ter a variação de sinal. Foi possível encontrar uma interpretação para esse coeficiente em termos de caminhos reticulados. Construímos, com esses coeficientes, um triângulo e pretendemos encontrar propriedades dele que nos permitam compreender melhor as características combinatórias desse novo coeficiente.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] G.E. Andrews. *The Theory of Partitions.* Encyclopedia of Mathematics and Its Applications: (Rota, Editor), Vol, G.-C Addison-Wesley, Reading, 1976. (Reissued: Cambridge University Press, London and New York, 1985).

[2] G.E. Andrews. *q-Series: Their Development and Application in Analysis, Number Theory, Combinatorics, Physics and Computer Algebra.* CBMS Regional Conf. Ser. in Math. 66, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1986.

[3] G.E. Andrews. *Combinatorics and Ramanujan's "lost"notebook.* London Math. Soc. Lecture Note Series, No. 103, Cambridge Univ. Press, London, 1985, pp. 1-23.

[4] G.E. Andrews. *q-Trinomial Coefficients and Rogers-Ramanujan Type Identities.* Analytic Number Theory edited by B. Berndt, Boston, 1990.

[5] G.E. Andrews. *Euler's exemplum memorabile inductionis fallacis and q-trinomio coefficients.* Journal of the American Math. Society 3 (1990), 673-669.

[6] G.E. Andrews. *Number Theory.* Dover Publications, New York, 1994.

[7] G.E. Andrews; R Kimmo. *Integer Partitions.* Cambridge,2004.

[8] I.M. Craveiro. *Extensões e Interpretações Combinatórias para os Números de Fibonacci, Pell e Jacobsthal.* Tese de Doutorado, DM-IMECC-UNICAMP, Campinas, 2004.

[9] J.P.O. Santos. *Computer Algebra and Identities of the Rogers-Ramanujan Type.* Ph.D. thesis, Pennsylvania State University, 1991.

[10] J.P.O. Santos, M. Ivkovic. *Polynomial generalizations of the Pell sequence and the Fibonacci sequence.* The Fibonacci Quarterly, v. 43, n. 4, p. 328-338, 2005.

[11] J.P.O. Santos, M. Ivkovic. *Fibonacci Numbers and Partitions.* The Fibonacci Quarterly, v. 41, n. 3, p. 263-278, 2003.

[12] J.P.O. Santos. *On the Combinatorics of Polynomial Generalizations of Rogers-Ramanujan Type Identities.* Discrete Mathematics 254.1-3 (2002): 497-511.

[13] J.P.O. Santos, P. Mondek. *Extending Theorems of Göllnitz, A New Family of Partition Identities.* The Ramanujan Journal 3(1999): 359-365.

[14] C.P. Andrade, J.P.O. Santos, E.V.P.Silva, K.C.P.Silva. *Polynomial Generalizations and Combinatorial Interpretations for Sequences Including the Fibonacci and Pell Numbers.* Open Journal of Discrete Mathematics, 2013,3,25-32.

[15] J.P.O. Santos, A.V. Sills. *q-Pell Sequences and Two Identities of V.A Lebesgue.* Discrete Mathematics 257.1 (2002):125-142.

[16] A.V. Sills. *RRtools-a Maple Package for Aiding the Discovery and Proof of Finite Rogers-Ramanujan Type Identities.* J. Symbolic Computation 37/4 (2004), 415-448. available from: http://www.math.rutgers.edu/ asills/maple/RRtools1

[17] A. Sills. available from:http: //www.math.rutgers.edu/ asills/SillsMathemMaple.html

[18] L.J Slater. *A new proof of Roger's transformations of infinite series.* Proc. London Math. Soc. (2) 53 (1951): 460-475.

[19] L.J Slater. *Further Identities of the Rogers-Ramanujan Type.* Proc. London Math. Soc. (2) 54 (1952): 147-167.

[20] H.S. Wilf. *generatingfunctionology.* AK Peters, Ltda. Third Edition, 2006.

[21] D. Foata, G.N. Han. *The triple, quintuple and septuple product identities revised.* Séminaire Lotharingien de Combinatoire, 42 (1999), Article B42o, pp12.

[22] N. J. A. Sloane *The On-line Encyclopedia of Integer Sequences,* published eletronically at https://oeis.org/.