

IDEAIS PRIMOS ESSENCIAIS EM ANÉIS COM α -MULTIPLICAÇÃO

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. JOÃO MONTENEGRO DE MIRANDA e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 19 de julho de 1991

Gervásio Gurgel Bastos

Prof. Dr. Gervásio Gurgel Bastos *n.º 110*
Orientador *g. L.C.*

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Ciências.

Bo/ano-1453

M672i

14496/BC

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Gervásio Gurgel Bastos pela orientação.

Aos Professores Yves Lequain e Paulo Erumatti pelas sugestões.

À Ana pela compreensão e apoio.

À Universidade Federal da Paraíba, ao CNPQ e à CAPES pelo suporte financeiro.

Aos professores e colegas que de forma direta e indireta contribuíram para a realização deste trabalho, especialmente a Antonio de Andrade e Silva pelas correções e impressão do texto.

À

Ana,

Renato,

Roberto e

Juliana.

INDICE

Introdução	v
Notações	ix
Capítulo 1: Pré-requisitos	1
Capítulo 2: Sistemas de Ideais	6
Capítulo 3: Ideais Primos Essenciais em Anéis com $\ast$ -Multiplicação	25
Capítulo 4: Uma Correspondência 1-1 entre Ideais Primos Essenciais e Filtros Primos	39
Capítulo 5: Anéis com $\ast$ -Multiplicação, $\ast$ -Domínios e Grupos de Divisibilidade	47
Bibliografia	51

INTRODUÇÃO

Em seu artigo *Prime Ideals in GCD-Domains* [Sh-1] Sheldon estuda os chamados ideais PF-primos, que representam para MDC-dominios o mesmo que os ideais primos principais para dominios fatoriais.

A partir da verificação de que a noção de ideal PF-primo pode ser introduzida via sistemas de ideais - a saber, ideais PF-primos coincidem com t -ideais primos - nos interessamos em estudar os ideais primos essenciais (= PF-primos em MDC-dominios) no contexto mais natural, e ao mesmo tempo bem mais geral, dos anéis com $\ast$ -multiplicação. Convém observar que a generalização da teoria de Sheldon para anéis com $\ast$ -multiplicação é interessante, pois esta classe de anéis engloba, além de MDC-dominios, também dominios de Prüfer (de Dedekind, principais, etc...) e, do outro lado, os dominios de tipo Krull (de Krull, fatoriais, etc...).

No Capítulo 1 apresentamos os conceitos e resultados necessários para a compreensão do trabalho.

Apresentamos no Capítulo 2 o conceito de sistema de ideais, que

é a ferramenta básica usada neste trabalho. Aí mostramos como a noção de sistema de ideais de um domínio de integridade, estudada por M. Griffin (por exemplo, em [Gr-1]) e por R. Gilmer em [G] Chap. V, §32, se enquadra como caso particular dos α -sistemas de grupos ordenados tratados por P. Jaffard em [J-1].

No Capítulo 3, estudamos os anéis com α -multiplicação do ponto de vista utilitário aos objetivos desta tese e, também, para assinalar a posição desta classe de anéis no contexto dos domínios integralmente fechados mais importantes.

Anéis com α -multiplicação foram estudados por N. Bourbaki em [Bo] com o nome de domínios pseudo-Prüferianos, também por M. Griffin em [Gr-1] e [Gr-2], e seu relacionamento com domínios essenciais foi estabelecido por W. Heinzer e J. Ohm em [H-O]. No Capítulo 5 estabelecemos a relação entre anéis com α -multiplicação e os chamados α -domínios, estudados por R. Gilmer em [G] Chap. V, § 34.

Em relação à generalização da teoria de Sheldón para anéis com α -multiplicação, são os seguintes os resultados obtidos neste trabalho, seguidos das referências em [Sh-1] de seus correspondentes em MDC-domínios, todos provados nos Capítulos 3 e 4 :

1. Sejam D um anel com α -multiplicação e P um ideal primo de D . P é essencial se, e somente se, $P_t \subset D$.

(Th. 2.2)

2. Em um anel com α -multiplicação, todo ideal primo é uma união de

ideais primos essenciais.

(Th. 3.1)

3. Em um anel com $\ast$ -multiplicação valem :

(i) Todo ideal primo próprio contém um ideal primo essencial próprio.

(ii) Toda não-unidade está contida em um ideal primo essencial.

(iii) Todo ideal primo minimal é um ideal primo essencial.

(Cor. 3.2)

4. Seja D um anel com $\ast$ -multiplicação. D é um domínio fatorial se, e somente se, todo ideal primo essencial é principal.

(Th. 3.3)

5. Um anel com $\ast$ -multiplicação com somente um número finito de ideais primos essenciais é um domínio de Bezout.

(Cor. 3.6)

6. Um anel com $\ast$ -multiplicação no qual os ideais primos essenciais são linearmente ordenados pela relação de inclusão é um anel de valorização.

(Cor. 3.8)

7. Seja D um anel com $\ast$ -multiplicação. D é um domínio de Prüfer se, e

somente se, os ideais primos de D formam uma árvore.

(Th. 3.7)

8. Um anel com $\ast$ -multiplicação de dimensão 1 é um domínio de Prüfer.

(Cor. 3.9)

9. Se D é um anel com $\ast$ -multiplicação que não é corpo, então:

(i) $1 \leq E\text{-dim}(D) \leq K\text{-dim}(D)$.

(ii) D Prüfer $\Rightarrow E\text{-dim}(D) = K\text{-dim}(D)$.

(Prop. 4.2)

10. Seja D um anel com $\ast$ -multiplicação com corpo de frações K . A semi-valorização canônica $\omega: K^* \longrightarrow G = G(D)$ induz uma bijeção que preserva inclusão entre o conjunto dos ideais primos essenciais próprios P de D tais que $P = P_t$ e o conjunto dos filtros primos do $\ast$ -grupo de Lorenzen $\Lambda_{\ast}$ de G , dada por $P \longmapsto \omega(P^*)_t$, onde $\omega(P^*)_t$ é o t -ideal gerado por $\omega(P^*)$ em $\Lambda_{\ast}$.

(§.5 de [Sh-1])

Finalmente, estabelecemos no Capítulo 5 alguns contra-exemplos sobre o relacionamento entre anéis com $\ast$ -multiplicação e $\ast$ -domínios, e sobre grupos ordenados "inf-densos" em grupos reticulados.

NOTAÇÕES.

[] : referência bibliográfica

■ : o fim de uma demonstração

$\subseteq$: inclusão

$\subset$: inclusão própria

$\cong$: o-isomorfismo

MDC(,) : máximo divisor comum

$\mathbb{Z}$ = conjunto dos números inteiros

$D^* = D \setminus \{0\}$

D^* = conjunto das unidades de D

$a|b$: a divide b

CAPÍTULO 1

Pré-requisitos

Ao longo deste trabalho usaremos a palavra domínio para significar domínio de integridade.

Se G é um grupo abeliano denotado aditivamente, diz-se que uma pré-ordem (relação reflexiva e transitiva) $\leq$, definida sobre G é compatível com a estrutura algébrica de G , se: para todo $a, b, c \in G$, $a \leq b \implies a + c \leq b + c$. Neste caso, diz-se que G é um grupo pré-ordenado.

Um grupo pré-ordenado é chamado um grupo ordenado se sua pré-ordem é uma ordem (isto é, uma relação reflexiva, anti-simétrica e transitiva).

Se a pré-ordem de um grupo pré-ordenado é total (isto é, quaisquer dois elementos são comparáveis), ele é dito em grupo totalmente pré-ordenado.

Um grupo ordenado G é dito **filtrante**, se: para quaisquer $a, b \in G$, existe $z \in G$ tal que $z \leq a, b$ (ou equivalentemente, existe $w \in G$ tal que $a, b \leq w$). O elemento z é chamado **minorante** de a e b . O elemento w é chamado **majorante** de a e b .

Se G é um grupo pré-ordenado $G_+ = \{x \in G; x \geq 0\}$ é chamado o **cone positivo** de G .

(1.1) **Proposição.** Um grupo ordenado é filtrante se, e somente se, ele é gerado pelo seu cone positivo.

Demonstração. [J-2], Chap.1, Th.2. ■

Um grupo pré-ordenado G é dito **reticulado**, se ele é um conjunto semi-reticulado inferiormente (isto é, para quaisquer $a, b \in G$ existe $c \in G$ tal que $c \leq a, b$ e $(x \leq a, b \text{ e } x \in G \Rightarrow x \leq c)$) ou, equivalentemente se ele é um conjunto semi-reticulado superiormente (isto é, para quaisquer $a, b \in G$ existe $d \in G$ tal que $a, b \leq d$ e $(a, b \leq x \text{ e } x \in G \Rightarrow d \leq x)$). O elemento c é chamado **ínfimo** de a e b , ele é representado por $\inf_G(a, b)$ ou $\inf(a, b)$. O elemento d é chamado o **supremo** de a e b , ele é representado por $\sup_G(a, b)$ ou $\sup(a, b)$.

Dados dois grupos ordenados G_1 e G_2 , um homomorfismo $f: G_1 \longrightarrow G_2$ é dito um **homomorfismo de ordem**, ou um **o-homomorfismo**, se: para quaisquer $x, y \in G_1$, $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$. Se além disso, f é invertível e sua inversa é um o-homomorfismo, então f é dito um

isomorfismo de ordem, ou um o-isomorfismo. Neste caso dizemos que G_1 e G_2 são o-isomorfos e denotamos $G_1 \cong_o G_2$.

Um domínio D é um domínio fatorial se todo elemento não nulo de D ou é unidade ou se fatora de modo único como o produto de um número finito de elementos irredutíveis de D , a menos da ordem dos fatores e multiplicação por unidades de D .

(1.2) Proposição. Um domínio D é fatorial se, e somente se, todo ideal primo não nulo de D contém um ideal primo principal.

Demonstração. [K], Chap.I, Th.5. ■

Um domínio D é um MDC-domínio se cada par a, b de elementos de D^* tem um máximo divisor comum, $\text{MDC}(a, b)$, em D (isto é, existe $d \in D^*$ tal que $d|a$, $d|b$ e, se $d' \in D^*$ é tal que $d'|a$ e $d'|b$, então $d'|d$).

Um domínio D é dito um domínio de Bezout, se todo ideal finitamente gerado de D é principal.

Um domínio D é dito um domínio de Prüfer, se os ideais fracionários finitamente gerados não nulos de D formam um grupo com a multiplicação de ideais.

(1.3) Proposição. Seja D um domínio. São equivalentes:

(i) D é Prüfer

(ii) D_P é anel de valorização para todo ideal primo P de D .

(iii) D_M é anel de valorização para todo ideal maximal M de D .

Demonstração. [E], Chap. II, Th. (11.4) ■

Um domínio é dito um domínio de Dedekind se os ideais fracionários não nulos de D formam um grupo. Equivalentemente, D é um domínio de Prüfer noetheriano. ([E], Chap. II, Th. (12.12)).

Um domínio D (com corpo de frações K) é um domínio de tipo Krull, se existe uma família Ω de valorizações de K tal que:

- (i) Ω é de caráter finito, isto é, para cada $x \in K^*$, $v(x) \neq 0$ apenas para um número finito de valorizações $v \in \Omega$.
- (ii) $D = \bigcap_{v \in \Omega} R_v$, onde R_v é o anel da valorização v .
- (iii) $D_{Z(v)} = R_v$, para todo $v \in \Omega$, onde $Z(v) = D \cap M_v$ e M_v é o ideal maximal do anel R_v .

Se na definição acima as valorizações da família Ω são discretas, diz-se que D é um domínio de Krull.

Dado um domínio D , o grupo ordenado filtrante $G(D)$ dos ideais fracionários principais não nulos de D (ordem: $aD \leq bD \iff aD \supseteq bD$) é chamado o grupo de divisibilidade de D .

Se K^* é o grupo multiplicativo do corpo quociente K de D e D^* é

o grupo das unidades de D , então $G(D) \cong \frac{K^*}{D^*}$, onde $aD^* \leq bD^*$ se, e somente se, $ba^{-1} \in D$. As seguintes propriedades são bem conhecidas:

$G(D)$ é filtrante.

$G(D)$ é totalmente ordenado se, e somente se, D é um anel de valorização.

$G(D)$ é reticulado se, e somente se, D é um MDC-domínio. ([G], Chap. III, Th. (16.2))

$G(D)$ é um grupo fatorial (isto é, $G(D) \cong \bigoplus_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^{(I)}$ = soma direta cardinal de cópias de $\mathbb{Z}$ indexada sobre um conjunto I) se, e somente se, D é um domínio fatorial. ([M], 4, Th. (4.3))

(1.4) **Proposição.** (Teorema de Krull-Jaffard-Ohm). Se G é um grupo abeliano reticulado, então existe um domínio de Bezout D com grupo de divisibilidade o-isomorfo a G .

Demonstração. [G], Chap. III, Th. (18.6) .■

O leitor interessado em maiores informações pode consultar, por exemplo, [R], [J-2], [G] ou [M].

CAPÍTULO 2

Sistemas de Ideais

Seja G um grupo (abeliano) pré-ordenado, denotado multiplicativamente. Seguiremos a terminologia de Jaffard (Cf. [J-1]). Para cada $a \in G$ denotamos: $\{a\} = aG_+ = \{x \in G; x \geq a\}$, onde $G_+ = \{x \in G; x \geq 1\}$ é o cone positivo de G .

$\mathcal{P}(G)$ = conjunto das partes (subconjuntos) de G .

$\mathcal{B}(G) = \{X \in \mathcal{P}(G); X \text{ é minorado, } X \neq \emptyset\}$.

$\mathcal{F}(G) = \{X \in \mathcal{B}(G); X \text{ é finito}\}$.

A letra $\mathcal{X}$ representará $\mathcal{F}$ ou $\mathcal{B}$.

Um sistema de ideais de um grupo pré-ordenado G filtrante (isto é, todo subconjunto finito de G tem um minorante, ou, equivalentemente, um majorante) é uma aplicação $\alpha: \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{P}(G)$, tal que:

$$X \longmapsto X_\alpha$$

para quaisquer $X, Y \in \mathcal{X}$ e $a \in G$, temos

$$(I_1) \quad X \subseteq X_\alpha$$

$$(I_2) \quad X \subseteq Y_\alpha \implies X_\alpha \subseteq Y_\alpha$$

$$(I_3) \{a\}_n = (a)$$

$$(I_4) (aX)_n = aX_n.$$

Se $\mathcal{X} = \mathcal{B}(G)$, dizemos que o sistema é total.

Se $\mathcal{X} = \mathcal{F}(G)$, dizemos que o sistema é finito.

O conjunto $\mathcal{X}$ é chamado origem do sistema.

Usaremos o termo $\mathcal{X}$ -sistema para indicar o sistema de ideais $\mathcal{X}$.

A imagem X_n de $X \in \mathcal{X}$ é chamada $\mathcal{X}$ -ideal, e X é chamado um conjunto de geradores de X_n . Se $X \in \mathcal{F}(G)$, X_n é dito finito, e se $X = \{x\}$, X_n é dito principal.

(2.1) Proposição. Um sistema de ideais é determinado por sua imagem.

Demonstração. Seja $\{S_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ o conjunto imagem do $\mathcal{X}$ -sistema. Dado $X \in \mathcal{X}$:

$$X \subseteq S_\alpha \iff X_n \subseteq S_\alpha. \text{ Então, } X_n = \bigcap_{S_\alpha \supseteq X_n} S_\alpha = \bigcap_{S_\alpha \supseteq X} S_\alpha. \blacksquare$$

(2.2) Proposição. Seja $\mathcal{P} = \{S_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subseteq \mathcal{P}(G)$ tal que:

$$(I'_1) G_+ = (1) \in \mathcal{P}.$$

$$(I'_2) \text{ Dados } a \in G \text{ e } \alpha \in \Lambda: a \in S_\alpha \implies (a) \subseteq S_\alpha.$$

$$(I'_3) \text{ Dados } a \in G \text{ e } \alpha \in \Lambda: aS_\alpha \in \mathcal{P}.$$

Então, $\mathcal{X}: \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{P}(G)$ é um sistema de ideais de G .

$$X \longmapsto X_n = \bigcap_{S_\alpha \supseteq X} S_\alpha$$

Demonstração. (I₁):

$$\text{Dado } X \in \mathcal{X}: X_n = \bigcap_{S_\alpha \supseteq X} S_\alpha \supseteq X.$$

(I₂):

$$\text{Dados } X, Y \in \mathcal{X}: X \subseteq Y_n = \bigcap_{S_\alpha \supseteq Y} S_\alpha \Rightarrow X \subseteq S_\alpha, \text{ para todo } S_\alpha \supseteq Y \Rightarrow X_n =$$

$$\bigcap_{S_\alpha \supseteq X} S_\alpha \subseteq \bigcap_{S_\alpha \supseteq Y} S_\alpha = Y_n.$$

(I₃):

$$\text{Dado } a \in G: \{a\}_n = \bigcap_{S_\alpha \supseteq \{a\}} S_\alpha. \text{ De (I'_1) e (I'_3), } a(1) = (a) \in \mathcal{P}.$$

$$\text{De (I'_2), } a \in S_\alpha \Rightarrow (a) \subseteq S_\alpha. \text{ Logo, } \{a\}_n = (a).$$

(I₄):

$$\text{Dados } a \in G \text{ e } S_\beta \in \mathcal{P}. S_\beta = a(a^{-1}S_\beta) = aS_\alpha, \text{ onde } S_\alpha = a^{-1}S_\beta \in \mathcal{P}, \text{ por (I'_3). Então, } \mathcal{P} = \{aS_\alpha\}_{\alpha \in A}. \text{ Assim, dados } X \in \mathcal{X} \text{ e } a \in G$$

$$aX_n = a^{-1}a \bigcap_{S_\alpha \supseteq X} a^{-1}S_\alpha = \bigcap_{S_\alpha \supseteq aX} S_\alpha = (aX)_n. \blacksquare$$

Exemplo. O ν -sistema.

$$\text{Para cada } X \in \mathcal{X}, \text{ definimos } X_n = \bigcap_{(a) \supseteq X} (a). \text{ Basta tomar em (2.2)}$$

$$\mathcal{P} = \{(a)\}_{a \in G}.$$

Vamos supor que G está munido do ν -sistema.

Um ν -ideal X_n ($X \in \mathcal{X}$) é dito inteiro se $X \subseteq G_+ (\Leftrightarrow X_n \subseteq G_+)$.

(2.3) Proposição. (1) Dados $X, Y \in \mathcal{X}: X \subseteq Y \Rightarrow X_n \subseteq Y_n$.

(ii) Dados $a \in G$ e $X \in \mathcal{X}$: a é minorante de $X \iff a$ é minorante de X_n .

(iii) Se o n -sistema é total, $(X_n)_n = X_n$, para cada $X \in \mathcal{B}(G)$.

(iv) Dados $a \in G$ e $X \in \mathcal{X}$: $(a)X_n = aX_n$.

Demonstração. (i):

$$X \leq Y \leq Y_n \implies X_n \leq Y_n.$$

(ii):

a é minorante de $X \iff X \leq (a) \iff X_n \leq (a) \iff a$ é minorante de X_n .

(iii):

$$X_n \leq (X_n)_n. \quad X_n \leq X_n \implies (X_n)_n \leq X_n.$$

(iv):

$aX_n \leq (a)X_n$. Por outro lado, $z \in (a)X_n \implies z = uy$, $u \geq a$ e $y \in X_n$. Portanto, $z = uy \geq y \implies z \in (ay) = a(y) \leq aX_n$. ■

(2.4) **Proposição.** Os n -ideais inteiros determinam o n -sistema.

Demonstração. Dados $X \in \mathcal{X}$ e $a \in G$ um minorante de X , $X \leq (a) \iff$

$$a^{-1}X \leq (1) = G_+. \text{ Então, } X_n = (aa^{-1})X_n = a(a^{-1}X)_n. \blacksquare$$

Um n -ideal X_n é dito primo se: $X_n \subset G_+$ e $G_+ \setminus X_n$ é multiplicativamente fechado.

Um n -ideal X_n é dito maximal se: $X_n \subset G_+$ e $(X_n \subset Y_n \leq G_+ \implies Y_n = G_+)$.

Vamos representar por $\mathcal{R}$ o conjunto dos $\mathcal{r}$ -ideais de G . Consideramos em $\mathcal{R}$ a seguinte relação de ordem: $X_n \leq Y_n \Leftrightarrow X_n \supseteq Y_n$.

A aplicação canônica $\varphi: G \longrightarrow \mathcal{R}$ é crescente ($x \leq y \Leftrightarrow (x) \supseteq (y)$). Tem-se: φ injetora se, e somente se, G é ordenado ($(x) = (y) \Leftrightarrow x \leq y$ e $y \leq x$).

(2.5) Proposição. O conjunto $\mathcal{R}$ é um conjunto ordenado filtrante.

Demonstração. Dados X_n e $Y_n \in \mathcal{R}$.

Sejam $x \in X_n$, $y \in Y_n$ e $z \in G$ tais que $z \geq x, y$. Então, $(z) \supseteq X_n, Y_n$.

Agora, sejam x' e y' minorantes de X_n e Y_n (resp.). Seja $z' \in G$ tal que $z' \leq x', y'$. Então, $(z') \leq X_n, Y_n$. ■

Dados dois sistemas de ideais de G com mesma origem, digamos o $\mathcal{r}$ -sistema e o $\mathcal{q}$ -sistema. Dizemos que o $\mathcal{r}$ -sistema é mais fino do que o $\mathcal{q}$ -sistema, ou que o $\mathcal{q}$ -sistema é menos fino do que o $\mathcal{r}$ -sistema se: para todo $X \in \mathcal{X}$, $X_n \leq X_q$. Neste caso, se $\mathcal{X} = \mathcal{B}(G)$, $(X_q)_n = X_q = (X_n)_q$, para todo $X \in \mathcal{X}$. Em particular, todo $\mathcal{q}$ -ideal é um $\mathcal{r}$ -ideal.

De fato, $(X_q)_n \leq (X_q)_q = X_q \leq (X_q)_n$. Por outro lado, $X_n \leq X_q \Rightarrow (X_n)_q \leq X_q$. $X \leq X_n \Rightarrow X_q \leq (X_n)_q$.

Ainda supondo que o $\mathcal{r}$ -sistema é mais fino do que o $\mathcal{q}$ -sistema.

Se $\mathcal{X} = \mathcal{B}(G)$ ou $\mathcal{F}(G)$, temos: $X_n = Y_n \Rightarrow X_q = Y_q$; para quaisquer $X, Y \in \mathcal{X}$.

De fato, $X_q \geq X_n = Y_n \geq Y \Rightarrow X_q \geq Y_q$. Por simetria, $Y_q \geq X_q$.

Exemplo. O Δ -sistema.

Definimos para cada $X \in \mathcal{I}$, $X_\Delta = \bigcup_{x \in X} (x)$. O Δ -sistema é o mais fino e o ν -sistema é o menos fino entre todos os sistemas de ideais de G .

De fato, dados $X \in \mathcal{I}$ e $x \in G$, $x \in X \implies (x) \subseteq X_\Delta$. Então,

$$X_\Delta = \bigcup_{x \in X} (x) \subseteq X_\nu.$$

$$X \subseteq (x) \iff X_\nu \subseteq (x). \text{ Então } X_\nu \subseteq \bigcap_{(x) \supseteq X} (x) = X_\Delta.$$

Se o ν -sistema é total sua restrição ao conjunto $\mathcal{F}(G)$ é um sistema de ideais finito, chamado a restrição do ν -sistema total.

Partindo de um ν -sistema finito de G , dizemos que um q -sistema total de G é um prolongamento do ν -sistema se para cada $X \in \mathcal{F}(G)$ tivermos $X_\nu = X_q$, isto é, se o ν -sistema é a restrição do q -sistema.

A partir de um ν -sistema (finito ou total) de ideais de G , podemos definir um novo sistema de ideais total, o ν_Δ -sistema, pondo $X_{\nu_\Delta} = \bigcup_{\substack{Y \subseteq X \\ Y \in \mathcal{F}(G)}} Y_\nu$, para cada $X \in \mathcal{I}$. Dado $X \in \mathcal{F}(G)$, $X_{\nu_\Delta} = X_\nu$.

Se o q -sistema é um prolongamento do ν -sistema finito, $X_{\nu_\Delta} = \bigcup_{\substack{Y \subseteq X \\ Y \in \mathcal{F}(G)}} Y_\nu = \bigcup_{\substack{Y \subseteq X \\ Y \in \mathcal{F}(G)}} Y_q \subseteq X_q$, para todo $X \in \mathcal{B}(G)$. Portanto, o ν_Δ -sistema é o prolongamento mais fino do ν -sistema finito.

O ν -sistema total é dito de caráter finito se ele se identifica

ao $\mathcal{A}$ -sistema, isto é, $X_{\mathcal{A}} = X_{\mathcal{A}_{\mathcal{A}}}$ para cada $X \in \mathcal{B}(G)$.

Como exemplo de um sistema de ideais de caráter finito temos o $\mathcal{A}$ -sistema.

De fato, dado $X \in \mathcal{B}(G)$, $X_{\mathcal{A}_{\mathcal{A}}} = \bigcup_{\substack{Y \subseteq X \\ Y \in \mathcal{F}(G)}} Y_{\mathcal{A}}. Y \subseteq X \Rightarrow Y_{\mathcal{A}} \in X_{\mathcal{A}}.$ Assim,

$X_{\mathcal{A}_{\mathcal{A}}} \subseteq X_{\mathcal{A}}.$ Como $X_{\mathcal{A}} \subseteq X_{\mathcal{A}_{\mathcal{A}}}$, temos $X_{\mathcal{A}_{\mathcal{A}}} = X_{\mathcal{A}}.$

O $\mathcal{A}$ -sistema é de caráter finito qualquer que seja o $\mathcal{A}$ -sistema.

De fato, para cada $X \in \mathcal{B}(G)$, $\bigcup_{\substack{Y \subseteq X \\ Y \in \mathcal{F}(G)}} Y_{\mathcal{A}_{\mathcal{A}}} = \bigcup_{\substack{Y \subseteq X \\ Y \in \mathcal{F}(G)}} Y_{\mathcal{A}} = X_{\mathcal{A}_{\mathcal{A}}}.$

O $\mathcal{A}$ -sistema é chamado o t -sistema.

Exemplo. Os d -ideais de Dedekind.

Sejam D um domínio e K seu corpo de frações. Sabemos que K^* é um grupo multiplicativo pré-ordenado com a pré-ordem $x \leq y \Leftrightarrow yx^{-1} \in D^*.$ Definimos em K^* os d -ideais de (Dedekind) pondo $X_d = F_X^*$, onde F_X é o ideal fracionário de D gerado por X , para cada $X \in \mathcal{I}(K^*)$ (usamos também a notação (X) para denotar o ideal fracionário F_X). É fácil verificar que temos de fato um sistema de ideais de $K^*.$ Notemos que o d -sistema é de caráter finito.

De fato: Seja $X \in \mathcal{B}(K^*).$

$z \in X_d \Rightarrow z = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n, x_i \in X \text{ e } a_i \in D \Rightarrow z \in \{x_1, \dots, x_n\}_d \subseteq X_{d_{\mathcal{A}}}.$ Donde $X_d \subseteq X_{d_{\mathcal{A}}}.$ Como $X_{d_{\mathcal{A}}} \subseteq X_d,$ então $X_{d_{\mathcal{A}}} = X_d.$

Seja $\bar{G}$ o grupo ordenado associado ao grupo pré-ordenado $G.$

Isto é, $\bar{G} = \frac{G}{G_1}$, onde $G_1 = \{x \in G; x \geq 1 \text{ e } x \leq 1\}$. Seja $\pi: G \longrightarrow \bar{G}$ o homomorfismo canônico. $\bar{G}$ é ordenado por $\pi(x) \leq \pi(y) \iff x \leq y$. Então, $\pi(\mathcal{B}(G)) = \mathcal{B}(\bar{G})$ e $\pi(\mathcal{F}(G)) = \mathcal{F}(\bar{G})$.

Consideremos G munido do α -sistema.

(2.6) Lema. Dados $X, Y \in \mathcal{B}(G)$, $\pi(X) \leq \pi(Y) \implies X \leq Y_\alpha$.

Demonstração. $\pi(X) \leq \pi(Y) \implies X \leq G_1 Y \leq G_+ Y = (1)Y \leq (1)Y_\alpha = Y_\alpha$. ■

(2.7) Lema. Dado $X \in \mathcal{B}(G)$, $\pi^{-1}(\pi(X_\alpha)) = X_\alpha$.

Demonstração. Sabemos que $\pi^{-1}(\pi(X_\alpha)) \supseteq X_\alpha$. Vejamos que $\pi^{-1}(\pi(X_\alpha)) \subseteq X_\alpha$.

$x \in \pi^{-1}(\pi(X_\alpha)) \implies \pi(x) = \pi(y)$, para algum $y \in X_\alpha \iff xy^{-1} \in G_1 \leq G_+ \implies x \in yG_+ = (y) \leq X_\alpha$. ■

(2.8) Proposição. π induz naturalmente um sistema de ideais de $\bar{G}$ definido por $\pi(X)_{\bar{\alpha}} = \pi(X_\alpha)$, para cada $X \in \mathcal{B}(G)$.

Demonstração. Quaisquer que sejam $X, Y \in \mathcal{B}(G)$ e $a \in G$.

(I₁):

$$X \leq X_\alpha \implies \pi(X) \leq \pi(X_\alpha) = \pi(X)_{\bar{\alpha}}.$$

(I₂):

$$\begin{aligned} \pi(X) \leq \pi(Y)_{\bar{\alpha}} = \pi(Y_\alpha) &\implies X \leq (Y_\alpha)_\alpha = Y_\alpha \implies X_\alpha \leq Y_\alpha \implies \pi(X)_{\bar{\alpha}} = \pi(X_\alpha) \leq \\ \pi(Y_\alpha) &= \pi(Y)_{\bar{\alpha}} \end{aligned}$$

(I₃):

$$\{\pi(a)\}_{\bar{n}} = \pi(\{a\}_{\bar{n}}) = \pi((a)) = (\pi(a)).$$

(I₄):

$$\pi(a)\pi(X)_{\bar{n}} = \pi(a)\pi(X_{\bar{n}}) = \pi(aX_{\bar{n}}) = \pi((aX)_{\bar{n}}) = \pi(aX)_{\bar{n}} = (\pi(a)\pi(X))_{\bar{n}}. \blacksquare$$

(2.9) Proposição. Dado $\bar{n}$ um sistema de ideais de $\bar{G}$, obtemos um sistema de ideais de G definindo $X_{\bar{n}} = \pi^{-1}(\pi(X)_{\bar{n}})$, para qualquer $X \in \mathcal{B}(G)$.

Demonstração: Quaisquer que sejam $X, Y \in \mathcal{B}(G)$ e $a \in G$.

(I₁):

$$X \subseteq \pi^{-1}(\pi(X)_{\bar{n}}) = X_{\bar{n}}.$$

(I₂):

$$X \subseteq Y_{\bar{n}} = \pi^{-1}(\pi(Y)_{\bar{n}}) \Rightarrow \pi(X) \subseteq \pi(\pi^{-1}(\pi(Y)_{\bar{n}})) = \pi(Y)_{\bar{n}} \Rightarrow \pi(X)_{\bar{n}} \subseteq \pi(Y)_{\bar{n}} \Rightarrow X_{\bar{n}} = \pi^{-1}(\pi(X)_{\bar{n}}) \subseteq \pi^{-1}(\pi(Y)_{\bar{n}}) = Y_{\bar{n}}.$$

(I₃):

$$\{a\}_{\bar{n}} = \pi^{-1}(\pi(\{a\})_{\bar{n}}) = \pi^{-1}(\{\pi(a)\}_{\bar{n}}) = \pi^{-1}((\pi(a))) = \pi^{-1}(\pi((a))) = (a).$$

(I₄):

$$aX_{\bar{n}} = a\pi^{-1}(\pi(X)_{\bar{n}}) = \pi^{-1}(\pi(a)\pi(X)_{\bar{n}}) = \pi^{-1}((\pi(a)\pi(X))_{\bar{n}}) = \pi^{-1}(\pi(aX)_{\bar{n}}) = (aX)_{\bar{n}}. \blacksquare$$

(2.10) Proposição. π induz uma bijeção entre os conjuntos dos sistemas de ideais de G e dos sistemas de ideais de $\bar{G}$.

Demonstração. As aplicações $\iota \mapsto \bar{\iota}$ e $\bar{\iota} \mapsto \iota$, definidas pelas proposições (2.8) e (2.9) são inversas uma da outra.

De fato, dados ι e $\bar{\iota}$ sistemas de ideais de G e $\bar{G}$ (resp.).
 $\pi^{-1}(\pi(X_\iota)) = X_\iota$ (lema (2.7)) e $\pi(\pi^{-1}(\pi(X)_{\bar{\iota}})) = \pi(X)_{\bar{\iota}}$. ■

Em virtude das bijeções acima identificamos ι com $\bar{\iota}$, isto é,
 $\pi(X)_\iota = \pi(X)_\iota$ para cada $X \in \mathcal{B}(G)$.

Para qualquer ι -sistema de G , definimos para $X, Y \in \mathcal{X}$ o ι -produto $X_\iota \times_\iota Y_\iota = (XY)_\iota$. Notemos que $XY = \{xy; x \in X, y \in Y\} \in \mathcal{X}$.

(2.11) **Proposição.** Se o ι -sistema é total tem-se $(X_\iota Y_\iota)_\iota = (X_\iota Y)_\iota = (XY)_\iota$, para todos $X, Y \in \mathcal{B}(G)$.

Demonstração. $X_\iota Y = \bigcup_{y \in Y} X_\iota y = \bigcup_{y \in Y} (Xy)_\iota \subseteq (XY)_\iota$. Onde, $(X_\iota Y)_\iota \subseteq (XY)_\iota$.

Do mesmo modo, $(X_\iota Y_\iota)_\iota \subseteq (X_\iota Y)_\iota$. Então, $(X_\iota Y_\iota)_\iota \subseteq (XY)_\iota$.

Como $(XY)_\iota \subseteq (X_\iota Y_\iota)_\iota$, tem-se $(X_\iota Y_\iota)_\iota = (XY)_\iota$. ■

(2.12) **Corolário.** O ι -produto está bem definido.

Demonstração. Suponha que o ι -sistema é total. Dados $X, X', Y, Y' \in \mathcal{B}(G)$

tais que $X_\iota = X'_\iota$ e $Y_\iota = Y'_\iota$, então $X_\iota Y_\iota = X'_\iota Y'_\iota$.

Donde, $(XY)_\iota = (X'Y')_\iota$ ou, equivalentemente, $X_\iota \times_\iota Y_\iota = X'_\iota \times_\iota Y'_\iota$.

Suponhamos agora que o ι -sistema é finito. Temos então, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{F}(G)$: $X_\iota \times_\iota Y_\iota = (XY)_\iota = (XY)_{\Delta} = (X_\Delta Y_\Delta)_{\Delta} = (X_\iota Y_\iota)_{\Delta}$.

Portanto, o $\wedge$ -produto depende apenas dos $\wedge$ -ideais X_n e Y_n . ■

Para representar o $\wedge$ -produto usaremos x no lugar de x_n , quando não houver ambigüidade de notação.

(2.13) Proposição. $\mathcal{R}$ é um monóide comutativo, ordenado filtrante e semi-reticulado inferiormente.

Demonstração. É evidente que o $\wedge$ -produto é associativo, comutativo e compatível com a ordem de $\mathcal{R}$. A unidade de $\mathcal{R}$ é $(1) = G_+$,

$$X_n \times (1) = X_n \times \{1\}_n = (X\{1\})_n = X_n.$$

Já vimos anteriormente que $\mathcal{R}$ é filtrante.

Só falta verificarmos que $\mathcal{R}$ é semi-reticulado inferiormente.

De fato, tomando o prolongamento $\wedge_\Delta$, se necessário, podemos supor sem perda de generalidade, que o $\wedge$ -sistema é total. Temos, $(X \cup Y)_n = (X_n \cup Y_n)_n$, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{B}(G)$.

$$\begin{aligned} \text{Com efeito, } X \cup Y \leq X_n \cup Y_n &\Rightarrow (X \cup Y)_n \leq (X_n \cup Y_n)_n. \\ X, Y \leq X \cup Y &\Rightarrow X_n, Y_n \leq (X \cup Y)_n \Rightarrow X_n \cup Y_n \leq (X \cup Y)_n \Rightarrow \\ (X_n \cup Y_n)_n &\leq (X \cup Y)_n. \end{aligned}$$

Dados $X_n, Y_n \in \mathcal{R}$. Seja $W_n = (X \cup Y)_n$. W_n independe dos conjuntos geradores X e Y de X_n e Y_n (resp.).

$$W_n = (X_n \cup Y_n)_n \geq X_n, Y_n \Leftrightarrow W_n \leq X_n, Y_n.$$

$$\begin{aligned} \text{Seja } Z_n \in \mathcal{R} \text{ tal que } Z_n \leq X_n, Y_n. Z_n \geq X_n, Y_n &\Rightarrow Z_n \geq (X_n \cup Y_n)_n = W_n \Leftrightarrow \\ Z_n &\leq W_n. \end{aligned}$$

Logo, $W_n = \inf(X_n, Y_n)$. ■

(2.14) Proposição. Dado o $\mathcal{A}$ -sistema de G , seja $\bar{\mathcal{A}}$ seu correspondente em

$$\bar{G} = \frac{G}{G_1}, \text{ isto é, } \pi(X)_{\bar{\mathcal{A}}} = \pi(X_{\mathcal{A}}), \text{ para cada } X \in \mathcal{B}(G)$$

(Proposição (2.10)). Sejam $\bar{\mathcal{R}} = \{\bar{\mathcal{A}}\text{-ideais de } \bar{G}\}$, $\mathcal{R}_f = \{\mathcal{A}\text{-ideais finitos de } G\}$ e $\bar{\mathcal{R}}_f = \{\bar{\mathcal{A}}\text{-ideais finitos de } \bar{G}\}$. Então, $\mathcal{R} \cong_o \bar{\mathcal{R}}$ e $\mathcal{R}_f \cong_o \bar{\mathcal{R}}_f$.

Demonstração. Seja $\varphi: \mathcal{R} \longrightarrow \bar{\mathcal{R}}$. Dados $X, Y \in \mathcal{B}(G)$.

$$X_{\mathcal{A}} \longmapsto \pi(X_{\mathcal{A}})$$

$$\varphi(X_{\mathcal{A}} \times_{\mathcal{A}} Y_{\mathcal{A}}) = \varphi((XY)_{\mathcal{A}}) = \pi((XY)_{\mathcal{A}}) = \pi(XY)_{\bar{\mathcal{A}}} = (\pi(X)\pi(Y))_{\bar{\mathcal{A}}} =$$

$$= \pi(X)_{\bar{\mathcal{A}}} \times_{\bar{\mathcal{A}}} \pi(Y)_{\bar{\mathcal{A}}} = \varphi(X_{\mathcal{A}}) \times_{\bar{\mathcal{A}}} \varphi(Y_{\mathcal{A}}). \text{ Logo, } \varphi \text{ é homomorfismo.}$$

$$X_{\mathcal{A}} \leq Y_{\mathcal{A}} \iff X_{\mathcal{A}} \supseteq Y_{\mathcal{A}} \implies \varphi(X_{\mathcal{A}}) = \pi(X_{\mathcal{A}}) \supseteq \pi(Y_{\mathcal{A}}) = \varphi(Y_{\mathcal{A}}) \iff \varphi(X_{\mathcal{A}}) \leq \varphi(Y_{\mathcal{A}}).$$

Portanto, φ é crescente.

É claro que φ é sobrejetora.

$$\varphi(X_{\mathcal{A}}) = \varphi(Y_{\mathcal{A}}) \implies \pi(X_{\mathcal{A}}) = \pi(Y_{\mathcal{A}}) \implies \pi^{-1}(\pi(X_{\mathcal{A}})) = \pi^{-1}(\pi(Y_{\mathcal{A}})) \implies X_{\mathcal{A}} = Y_{\mathcal{A}}$$

(pelo Lema (2.7)). Isto é, φ é injetora.

Então, φ é um o-isomorfismo.

Como $\mathcal{F}(\bar{G}) = \pi(\mathcal{F}(G))$, então $\varphi|_{\mathcal{R}_f}$ é um o-isomorfismo. ■

Dados $X, Y \subseteq G$, define-se o condutor de Y em X como o conjunto $X:Y = \{x \in G; xY \subseteq X\}$.

Denotamos por Y^{-1} o conjunto $G_+:Y = \{x \in G; xY \subseteq G_+ = (1)\}$.

É evidente que: $X \subseteq Y \implies Y^{-1} \subseteq X^{-1}$.

Dado $x \in G$, $x \in X^{-1} \iff xX \subseteq G_+ \iff X \subseteq x^{-1}G_+ = (x^{-1})$. Portanto, temos $X^{-1} = \{x \in G; x^{-1} \text{ é minorante de } X\}$.

Temos ainda que: $Y \in \mathcal{B}(G) \iff Y^{-1} \in \mathcal{B}(G)$.

(2.15) Proposição. Para cada $X \in \mathcal{B}(G)$, valem:

$$(i) \quad X_{\mathcal{A}} = (X^{-1})^{-1}.$$

$$(ii) \quad (X^{-1})_{\mathcal{A}} = X^{-1}.$$

Assim, os $\mathcal{A}$ -ideais de G coincidem com os subconjuntos de G da forma X^{-1} , $X \in \mathcal{B}(G)$.

Demonstração. (i):

$$y \in X^{-1} \Leftrightarrow X \subseteq (y^{-1}) \Leftrightarrow X_{\mathcal{A}} \subseteq (y^{-1}).$$

$x \in X_{\mathcal{A}} \Rightarrow x \in (y^{-1})$, para todo $y \in X^{-1} \Rightarrow xy \in (1) = G_+$, para todo

$y \in X^{-1} \Rightarrow x \in (X^{-1})^{-1}$. Logo, $X_{\mathcal{A}} \subseteq (X^{-1})^{-1}$.

$(y) \supseteq X \Rightarrow y^{-1} \in X^{-1}$.

$x \in (X^{-1})^{-1} \Rightarrow xy^{-1} \in G_+ = (1)$, para todo $(y) \supseteq X \Rightarrow x \in (y)$, para

tudo $(y) \supseteq X$. Logo, $(X^{-1})^{-1} \subseteq X_{\mathcal{A}}$.

(ii):

Suponhamos que existe $x \in (X^{-1})_{\mathcal{A}}$ e $x \notin X^{-1}$.

$x \notin X^{-1} \Rightarrow$ existe $y \in X$ tal que $yx \notin G_+ \Leftrightarrow x \notin (y^{-1})$.

$y \in X \Rightarrow yX^{-1} \subseteq G_+ \Rightarrow X^{-1} \subseteq (y^{-1}) \Rightarrow (X^{-1})_{\mathcal{A}} \subseteq (y^{-1}) \Rightarrow x \in (y^{-1})$, o que é absurdo. Logo, $(X^{-1})_{\mathcal{A}} \subseteq X^{-1}$.

A outra inclusão é da definição de sistema de ideais. ■

(2.16) Proposição. Se $X, Y \in \mathcal{X}$, então, $X_n \times Y_n = (1)$ implica $Y_n = X^{-1} =$

$(X_n)^{-1}$. E, se o sistema é total, $Y_n = (X^{-1})_n$.

Demonstração. $X_n \times Y_n = (1) \Leftrightarrow (XY)_n = (1) \Rightarrow XY \subseteq (1) \Rightarrow Y \subseteq X^{-1} \Rightarrow$

$Y_{\mathcal{A}} \subseteq (X^{-1})_{\mathcal{A}} = X^{-1}$ (por (2.15)). Como $Y_n \subseteq Y_{\mathcal{A}}$, então

$Y_n \subseteq X^{-1}$.

Reciprocamente, $y \in X^{-1} \Rightarrow yX \subseteq (1) \Rightarrow (yX)_n \subseteq (1)$.

$$(y) = y(1) = y(XY)_n = (yXY)_n = (yX)_n \times Y_n \subseteq (1) \times Y_n = Y_n \Rightarrow y \in Y_n.$$

Logo, $X^{-1} \subseteq Y_n$.

$$X \subseteq X_n \Rightarrow (X_n)^{-1} \subseteq X^{-1}.$$

Reciprocamente, $y \in X^{-1} \Rightarrow yX \subseteq (1) \Rightarrow (yX)_n \subseteq (1) \Rightarrow yX_n \subseteq (1) \Rightarrow y \in (X_n)^{-1}$. Logo, $X^{-1} \subseteq (X_n)^{-1}$.

Se o ν -sistema é total, $Y_n = X^{-1}$ implica $Y_n = (X^{-1})_n$. ■

(2.17) Proposição. Todo ν -ideal invertível é um ω -ideal.

Demonstração. Seja X_n invertível. $X_n \times Y_n = (1) \Rightarrow X_n = Y_n^{-1}$ ((2.16)).

Pela proposição (2.15), $X_n = (Y_n^{-1})_\omega = (X_n)_\omega = X_\omega$ (a última igualdade segue do fato que o ω -sistema é menos fino que o ν -sistema). ■

Seja D um domínio com corpo de frações K . Um sistema total de ideais de K^* , o ν -sistema, é dito aditivo, se dados $x, y \in K^*$ e $X \in \mathcal{B}(K^*)$: $x, y \in X_n \Rightarrow x + y \in X_n \cup \{0\}$, isto é, $X_n \cup \{0\}$ é um ideal fracionário de D .

Neste caso, $X_n = (F_X^*)_n$.

De fato, $F_X \subseteq X_n \cup \{0\} \Rightarrow F_X^* \subseteq X_n \Rightarrow (F_X^*)_n \subseteq X_n$. Por outro lado, como $F_X^* \in \mathcal{B}(K^*)$, e $X \subseteq F_X^*$ segue-se que $X_n \subseteq (F_X^*)_n$.

Dado um ν -sistema total aditivo de K^* , obtemos uma aplicação do conjunto $\mathcal{F}\mathcal{N}(D)$, dos ideais fracionários não-nulos de D , em si mesmo dada por $A \mapsto A_n = (A^*)_n \cup \{0\}$, a qual tem as seguintes propriedades:

(i) $A \subseteq A_n$, para todo $A \in \mathcal{F}n(D)$.

$$A^* \subseteq (A^*)_n \Rightarrow A \subseteq (A^*)_n \cup \{0\} = A_n.$$

(ii) $A \subseteq B_n \Rightarrow A_n \subseteq B_n$, para quaisquer $A, B \in \mathcal{F}n(D)$.

$$A \subseteq B_n = (B^*)_n \cup \{0\} \Rightarrow A^* \subseteq (B^*)_n \Rightarrow (A^*)_n \subseteq (B^*)_n \Rightarrow A_n \subseteq B_n.$$

(iii) $(xD)_n = xD$, para todo $x \in K^*$.

$$(xD)_n = ((xD)^*)_n \cup \{0\} = (xD^*)_n \cup \{0\} = x(D^*)_n \cup \{0\} = xD^* \cup \{0\} = xD.$$

(iv) $xA_n = (xA)_n$, para quaisquer $x \in K^*$ e $A \in \mathcal{F}n(D)$.

$$(xA)_n = ((xA)^*)_n \cup \{0\} = (xA^*)_n \cup \{0\} = x(A^*)_n \cup \{0\} = x((A^*)_n \cup \{0\}) = xA_n.$$

Uma aplicação $n: \mathcal{F}n(D) \longrightarrow \mathcal{F}n(D)$ com as propriedades (i) a (iv) acima é chamada um sistema de ideais de D , o n -sistema (Cf. [Gr-1], 1 e [Gr-2], 5). As imagens A_n são chamadas n -ideais de D .

Um n -ideal A_n é dito finito se existe um ideal fracionário de D finitamente gerado M tal que $M_n = A_n$.

Dado um sistema de ideais de D , o n -sistema, podemos definir para cada $X \in \mathcal{B}(K^*)$, $X_n = (F_X)^*_n$. Obtemos assim um sistema de ideais aditivo de K^* .

De fato, dados $X, Y \in \mathcal{B}(K^*)$ e $x \in K^*$.

$$X \subseteq F_X \subseteq (F_X)_n \Rightarrow X \subseteq (F_X)^*_n, \quad (I_1).$$

$$X \subseteq Y_n = (F_Y)^*_n \Rightarrow F_X \subseteq (F_Y)_n \Rightarrow (F_X)_n \subseteq (F_Y)_n \Rightarrow X_n = (F_X)^*_n \subseteq (F_Y)^*_n = Y_n, \quad (I_2).$$

$$\{x\}_n = (xD)^*_n = (xD)^* = xD^* = (x), \quad (I_3).$$

$$xX_n = x((F_X)^*_n) = (x(F_X)_n)^* = (xF_X)^*_n = (F_{xX})^*_n = (xX)_n, \quad (I_4).$$

Falta apenas verificar que o sistema é aditivo.

Sejam $x, y \in K^*$ e $X \in \mathcal{B}(K^*)$; $x, y \in X_n = (F_X)_n^* \Rightarrow x, y \in X_n \cup \{0\} = (F_X)_n \Rightarrow x + y \in X_n \cup \{0\}$.

(2.18) Proposição. Sejam $\mathcal{P} = \{\text{sistemas de ideais aditivos de } K^*\}$ e $S = \{\text{sistemas de ideais de } D\}$.

A aplicação $\varphi: \mathcal{P} \longrightarrow S$, onde $\varphi(n): A \longmapsto (A^*)_n \cup \{0\}$, é uma bijeção
 $n \longmapsto \varphi(n)$

com inversa $\xi: S \longrightarrow \mathcal{P}$, onde $\xi(u)X: \longmapsto (F_X)_u^*$.
 $u \longmapsto \xi(u)$

Demonstração. $n \in \mathcal{P}$ e $X \in \mathcal{B}(K^*)$.

$$X_{\xi \circ \varphi(n)} = (F_X)_{\varphi(n)}^* = ((F_X)_n^* \cup \{0\})^* = (F_X)_n^* = X_n. \text{ Logo,}$$

$$\xi \circ \varphi(n) = n.$$

Dados $u \in S$ e $A \in \mathcal{F}_n(D)$.

$$A_{\varphi \circ \xi(u)} = A_{\xi(u)}^* \cup \{0\} = (F_A)_u^* \cup \{0\} = A_u^* \cup \{0\} = A_u. \text{ Logo,}$$

$$\varphi \circ \xi(u) = u. \blacksquare$$

Vamos convencionar representar $\varphi(n)$ por n e $\xi(u)$ por u , isto é, dados $A \in \mathcal{F}_n(D)$, $A_n = (A^*)_n \cup \{0\}$, e dado $X \in \mathcal{B}(K^*)$, $X_u = (F_X)_u^*$.

(2.19) Corolário. Dado um sistema de ideais aditivo de K^* , o n -sistema, existe uma bijeção f entre $\mathcal{R}$ (o monóide dos n -ideais de K^*) e R o conjunto dos n -ideais de D .

Demonstração. A função $f: \mathcal{R} \longrightarrow R$ tem como inversa a função
 $X_n \longmapsto (F_X)_n$

$$g: R \longrightarrow \mathcal{R} \\ A_n \longmapsto (A^*)_n$$

$$f \circ g(A_n) = f((A^*)_n) = (A^*)_n \cup \{0\} = A_n. \quad g \circ f(X_n) = g((F_X)_n) = (F_X)_n^* = X_n. \blacksquare$$

Vamos considerar em K^* um sistema de ideais aditivo, o n -sistema.

Em R vamos definir uma operação, chamada n -produto, pondo

$$A_n \times B_n = f((A^*)_n) \times f((B^*)_n) := f((A^*)_n \times (B^*)_n) = f((A^*B^*)_n) = (F_{A^*B^*})_n = (A.B)_n, \text{ onde } A, B \in \mathcal{F}_n(D).$$

A operação acima está bem definida.

De fato, dados $A, B, C, E \in \mathcal{F}_n(D)$, $A_n = C_n$ e $B_n = E_n \Rightarrow (A^*)_n = (C^*)_n$ e $(B^*)_n = (E^*)_n \Rightarrow A_n \times B_n = f((A^*)_n \times (B^*)_n) = f((C^*)_n \times (E^*)_n) = C_n \times E_n$.

R com o n -produto é um monóide ordenado $(A_n \leq B_n \Leftrightarrow A_n \geq B_n)$, com identidade D .

De fato, dados $A, B, C \in \mathcal{F}_n(D)$, $A_n \times D = (A.D)_n = A_n$ e

$$A_n \leq B_n \Leftrightarrow (A^*)_n \geq (B^*)_n \Leftrightarrow (A^*)_n \leq (B^*)_n \Rightarrow (A^*)_n \times (C^*)_n \leq (B^*)_n \times (C^*)_n \Leftrightarrow (A^*C^*)_n \geq (B^*C^*)_n \Rightarrow f((A^*C^*)_n) \geq f((B^*C^*)_n) \Leftrightarrow (F_{A^*C^*})_n \geq (F_{B^*C^*})_n \Leftrightarrow (A.C)_n \geq (B.C)_n \Leftrightarrow A_n \times C_n \leq B_n \times C_n.$$

(2.20) Proposição. A aplicação $f: \mathcal{R} \longrightarrow R$ do corolário (2.19) é um o-isomorfismo.

Demonstração. $f(X_n \times Y_n) = f((XY)_n) = (F_{XY})_n = (F_X.F_Y)_n = (F_X)_n \times (F_Y)_n = f(X_n) \times f(Y_n)$. Logo, f é um homomorfismo de monóides. f é uma bijeção pelo corolário (2.19) e f, g são crescentes claramente. ■

As proposições (2.18) e (2.20) mostram que a noção de sistema de ideais de um domínio, como apresentada em [Gr-1], [Gr-2] ou [G]

pode ser consideradas como caso particular dos α -sistemas de Jaffard em [J-1].

Vejamos agora alguns exemplos de sistemas de ideais (segundo Jaffard) aditivos de K^* e seus correspondentes sistemas de ideais (segundo Griffin ou Gilmer) do domínio D .

Exemplo 1. O α -sistema de K^* é aditivo, e seu correspondente é definido por:

$$A_\alpha = (A^*)_\alpha \cup \{0\} = \left(\bigcap_{\alpha D^* \supseteq A^*} \alpha D^* \right) \cup \{0\} = \bigcap_{\alpha D^* \supseteq A^*} (\alpha D^* \cup \{0\}) = \bigcap_{\alpha D \supseteq A} \alpha D,$$

para todo $A \in \mathcal{F}_\alpha(D)$.

Exemplo 2. O d -sistema de K^* também é aditivo, $X_d = F_X^*$, para todo $X \in \mathcal{B}(K^*)$. O sistema de ideais de D que lhe corresponde é dado por:

$$A_d = (A^*)_d \cup \{0\} = F_A^* \cup \{0\} = A^* \cup \{0\} = A, \text{ para todo } A \in \mathcal{F}_d(D).$$

Exemplo 3. O t -sistema de K^* é definido por $X_t = \bigcup_{\substack{F \subseteq X \\ F \in \mathcal{F}(K^*)}} F_\alpha$, para todo $X \in \mathcal{B}(K^*)$.

Vejamos que o t -sistema de K^* é aditivo. Sejam $a, b \in K^*$ e $a, b \in X_t$ e $a + b \neq 0$. $a \in F_\alpha$ e $b \in F'_\alpha$, para F e $F' \subseteq X$, finitos e não vazios. $F_\alpha \cup F'_\alpha \subseteq (F \cup F')_\alpha$ e $F \cup F' \subseteq X$.

$a, b \in (F \cup F')_\alpha \Rightarrow a + b \in (F \cup F')_\alpha$ (pois o α -sistema é aditivo).

Portanto, $a + b \in X_t$.

Determinemos agora o seu correspondente sistema de ideais do

domínio D .

Para cada $A \in \mathcal{F}_h(D)$, $A_t = (A^*)_t \cup \{0\}$, $(A^*)_t = \bigcup_{\substack{X \subseteq A^* \\ X \in \mathcal{F}(K^*)}} X_{\mathcal{A}}$ e

$$X_{\mathcal{A}} = \bigcap_{xD \supseteq X} xD^*. \text{ Donde, } A_t = \bigcup_{\substack{X \subseteq A^* \\ X \in \mathcal{F}(K^*)}} \left[\bigcap_{xD \supseteq X} xD^* \right] \cup \{0\} = \\ = \bigcup_{\substack{X \subseteq A^* \\ X \in \mathcal{F}(K^*)}} \left[\left(\bigcap_{xD \supseteq X} xD^* \right) \cup \{0\} \right] = \bigcup_{\substack{X \subseteq A^* \\ X \in \mathcal{F}(K^*)}} \left[\bigcap_{xD \supseteq X} \left(xD^* \cup \{0\} \right) \right].$$

$X \subseteq A^* \Leftrightarrow F_X^* \subseteq A$. $xD^* \supseteq X \Leftrightarrow xD \supseteq F_X$. Portanto,

$$A_t = \bigcup_{\substack{F_X \subseteq A \\ X \in \mathcal{F}(K^*)}} \left[\bigcap_{xD \supseteq F_X} xD \right] = \bigcup_{\substack{F_X \subseteq A \\ X \in \mathcal{F}(K^*)}} (F_X)_{\mathcal{A}}.$$

Vejamos agora um exemplo de um sistema de ideais de K^* não aditivo. O Δ -sistema é um tal exemplo, quando D não é anel de valorização.

De fato, seja $x \in K^*$ tal que $x, x^{-1} \notin D$.

$\{1, x\}_{\Delta} = (1) \cup (x)$. Temos $1, x \in \{1, x\}_{\Delta}$, mas $1 + x \notin \{1, x\}_{\Delta}$.

Se $1 + x \in \{1, x\}_{\Delta}$, então $1 + x \in (1)$ ou $1 + x \in (x)$.

$1 + x \in (1) \Rightarrow x \in D$.

$1 + x \in (x) \Rightarrow 1 + x = sx, s \in D^* \Rightarrow 1 = x(s - 1) \Rightarrow s \neq 1 \Rightarrow 1 \in xD^* \Rightarrow x^{-1} \in D$.

Ambas as conclusões contrariam a hipótese $x \notin D$ e $x^{-1} \notin D$.

CAPÍTULO 3

Ideais Primos Essenciais em Anéis com $\ast$ -Multiplicação

Nosso objetivo neste capítulo é a generalização da teoria de Sheldon em [Sh-1] sobre ideais PF-primos em MDC-domínios, para anéis com $\ast$ -multiplicação. Esses ideais PF-primos - que são os primos essenciais em MDC-domínios - são explicados basicamente através da noção de sistemas de ideais tratada por W.Krull, J.Dieudonné e P. Lorenzen nas décadas dos 30 e 40, e sistematizada depois por P. Jaffard no clássico *Les Systèmes d'Ideaux* (1960).

Começamos então com um estudo sobre anéis com $\ast$ -multiplicação; tendo como meta estabelecer os resultados necessários ao objetivo precípuo deste trabalho, e, por outro lado, "situar" esses anéis entre os domínios integralmente fechados mais importantes.

Um domínio D é chamado um anel com $\ast$ -multiplicação, se o monóide dos $\ast$ -ideais finitos de $G(D)$ (= grupo de divisibilidade de D), é um grupo com o $\ast$ -produto.

Como $X_{\mathfrak{a}} = X_t$, para cada $X \in \mathcal{F}(G(D))$, D é um anel com $\mathfrak{a}$ -multiplicação se, e somente se, os t -ideais finitos formam um grupo com o t -produto. Há vantagem em trabalhar com um sistema total de caráter finito.

Pela proposição (2.14), D é um anel com $\mathfrak{a}$ -multiplicação se, e somente se, o monóide $\mathcal{R}_f$, dos $\mathfrak{a}$ -ideais finitos de K^* , é um grupo com o $\mathfrak{a}$ -produto. Observe que também $\mathcal{R}_f = \{t\text{-ideais finitos de } K^*\}$. Pela proposição (2.20) $\mathcal{R}_f \cong_o \mathcal{R}_f$, onde $\mathcal{R}_f = \{\mathfrak{a}\text{-ideais finitos de } D\}$. Assim, D é anel com $\mathfrak{a}$ -multiplicação se, e somente se, $\mathcal{R}_f$ é um grupo com o $\mathfrak{a}$ -produto. Temos também que $\mathcal{R}_f = \{t\text{-ideais finitos de } D\}$.

Uma questão que surge naturalmente a esta altura é a seguinte: porque definir anel com $\mathfrak{a}$ -multiplicação e não anel com $\mathfrak{r}$ -multiplicação; onde $\mathfrak{r}$ é um sistema de ideais arbitrários de D ? A resposta é simples: Da proposição (2.17) e da observação após a proposição (2.5), segue que definir anel com $\mathfrak{r}$ -multiplicação é equivalente a definir anel com $\mathfrak{a}$ -multiplicação, a razão da escolha é que quando trabalhamos com o $\mathfrak{a}$ -sistema, estamos lidando com um sistema de ideais concreto (os $\mathfrak{a}$ -ideais identificam-se com os ideais divisoriais em [Bo] VII 1.2).

(3.1) **Proposição.** Todo anel com $\mathfrak{a}$ -multiplicação é integralmente fechado

Demonstração. [Gr-1] Th.5 e Prop.4. ou [J-1] Chap I, § 4, Th.1, 3°. ■

A recíproca da proposição acima não é verdadeira, por exemplo, $D = K + M$ onde K é um corpo e M é o ideal maximal do anel de polinômios

$K(x)[y]$, gerado por y , é integralmente fechado mas não é anel com $\ast$ -multiplicação (veja demonstração no final do Capítulo 5).

(3.2) Lema. Seja D um MDC-domínio. D é Prüfer se, e somente se, D é Bezout.

Demonstração. Uma das implicações é óbvia. Na outra direção, seja I um ideal finitamente gerado de D , $I = F_X$, $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq D$. Como D é Prüfer, então existe $Y = \{y_1, \dots, y_m\} \subseteq K^*$, K = corpo de frações de D , tal que $F_X \circ F_Y = D$. Daí temos $Y \subseteq D^*$. Desde que $Y_d = (Y_{\ast})_d$ (pois $\ast$ é menos fino que d), então, $F_Y = F_{Y_d} = F_{(Y_{\ast})_d} = F_{Y_{\ast}}$. Como D é MDC-domínio, $Y_{\ast} = (y) = yD^*$, onde $y = \text{MDC}(y_1, \dots, y_m) \in D^*$. E, portanto, $F_Y = F_{Y_{\ast}} = F_{\{y\}}$. Assim, $D = F_X \circ F_{\{y\}}$. O que implica, $I = F_X = F_{\{y\}^{-1}}$. Logo D é Bezout. ■

(3.3) Proposição. Um domínio D é um anel com $\ast$ -multiplicação se, e somente se, seu grupo de divisibilidade $G(D)$ é subgrupo de um grupo reticulado G' e para cada $g' \in G'$ existem $g_1, \dots, g_n \in G$ tais que $g' = \inf_{G'} \{g_1, \dots, g_n\}$.

Demonstração. [H-0], Prop. 1.5. ■

(3.4) Corolário. Todo MDC-domínio é anel com $\ast$ -multiplicação.

Demonstração. Seja D um MDC-domínio. Por ([G], Chap. III, Th. (16.2)) o grupo de divisibilidade $G(D)$ de D é reticulado. Segue da

proposição (3.3.) que D é anel com $\ast$ -multiplicação. ■

A recíproca não é verdadeira, por exemplo $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ é anel com $\ast$ -multiplicação (pois é Dedekind) e não é MDC-domínio (p.ex., não existe MDC $(9, 3(2 + \sqrt{-5}))$).

(3.5) Proposição. Todo domínio de Prüfer é anel com $\ast$ -multiplicação.

Demonstração. Sejam D um domínio de Prüfer e K seu corpo de frações.

Seja $X \in \mathcal{F}(K^*)$. Como D é Prüfer, existe $Y \in \mathcal{F}(K^*)$ tal que $F_X \circ F_Y = D$. Assim, $F_{XY} = D$ ou, equivalentemente, $F_{XY}^* = D^*$. Isto é, $(XY)_d = (1)$. Então, $X_{\ast} \times Y_{\ast} = (XY)_{\ast} = ((XY)_d)_{\ast} = (1)_{\ast} = (1)$. ■

A recíproca da proposição acima também não é verdadeira, basta tomar um MDC-domínio D que não é Bezout. Segue do lema (3.2) e do corolário (3.4) que D é anel com $\ast$ -multiplicação e não é Prüfer. Por exemplo: $\mathbb{Z}[x]$ é um MDC-domínio que não é Bezout ($(2, x)$ não é principal).

(3.6) Proposição. As seguintes condições sobre um domínio D são equivalentes:

- (1) D é um anel com $\ast$ -multiplicação tal que o grupo reticulado dos $\ast$ -ideais finitos satisfaz a seguinte condição: cada elemento positivo é maior que somente um número finito de elementos dois a dois disjuntos.
- (2) D é um anel com $\ast$ -multiplicação no qual um elemento não nulo per-

tence a apenas um número finito de t -ideais maximais.

(3) D é um anel de tipo Krull.

Demonstração. [Gr-1], Th.7. ■

(3.7) **Corolário.** Todo anel de tipo Krull é um anel com $\ast$ -multiplicação.

A recíproca não vale, tome como exemplo um domínio D que tenha grupo de divisibilidade $G(D) \cong \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \dots$ (produto cardinal infinito). Um tal domínio existe pelo Teorema de Krull-Jaffard-Ohm. D é anel com $\ast$ -multiplicação (pois é Bezout). D não é do tipo Krull, pois: $(1, 1, \dots) \in G(D)_+$ e $(1, 1, \dots) \geq (1, 0, \dots), (0, 1, 0, \dots), \dots$ que são dois a dois disjuntos.

Um ideal primo P , de um domínio D , tal que D_P é anel de valorização é chamado um ideal primo essencial. (Cf. [Sh-1], Th.2.2).

Observação. Se P e Q são ideais primos de um domínio D , $D_P \subseteq D_Q$ se, e somente se, $Q \subseteq P$.

(3.8) **Proposição.** Um ideal primo contido num ideal primo essencial é essencial.

Demonstração. Sejam P um ideal primo e Q ideal primo essencial de um domínio D . Suponhamos que $P \subseteq Q$. Pela observação acima $D_Q \subseteq D_P$. Como D_Q é anel de valorização, então é D_P anel de valorização, isto é, P é ideal primo essencial. ■

Um conjunto parcialmente ordenado no qual dois elementos não comparáveis não têm cota superior é chamado uma *árvore*.

(3.9) Proposição. Sejam D um domínio e P um ideal primo essencial de D .

O conjunto dos ideais primos de D contidos em P é linearmente ordenado. Portanto, o conjunto dos ideais primos essenciais de D é uma *árvore*.

Demonstração. $\{D_Q; Q \text{ é um ideal primo de } D \text{ e } Q \subseteq P\}$ é um conjunto de sobre-anéis do anel de valorização D_P . Portanto é linearmente ordenado ([E], Th.6.6) Segue daí que $\{Q; Q \text{ é um ideal primo de } D \text{ e } Q \subseteq P\}$ é linearmente ordenado. ■

(3.10) Lema. Sejam D um domínio com corpo quociente K e $S \subseteq D$ multiplicativamente fechado. Dados $a_1, \dots, a_n \in D^*$, $(a_1, \dots, a_n)_S = D$ implica $((a_1, \dots, a_n)_{D_S})_S = D_S$.

Demonstração. $(a_1, \dots, a_n)_S = \bigcap_{\substack{yD \ni a_i \\ y \in K^*}} yD = D \Leftrightarrow 1 \in yD$, para qualquer $y \in K^*$ tal que $yD \ni \{a_1, \dots, a_n\}$.

Queremos provar que $1 \in xD_S$, para qualquer $x \in K^*$ tal que $xD_S \ni \{a_1, \dots, a_n\}$.

$xD_S \ni \{a_1, \dots, a_n\} \Leftrightarrow$ existem $d_1, \dots, d_n \in D^*$ e $s \in S$ tais que $a_i = x \frac{d_i}{s} = xd_i s^{-1} = d_i (xs^{-1}) \in (xs^{-1})D$, para todo $i = 1, \dots, n \Leftrightarrow (xs^{-1})D \ni \{a_1, \dots, a_n\}$, para algum $s \in S \Rightarrow (xs^{-1})D \ni 1$, para algum $s \in S \Leftrightarrow 1 = xs^{-1}d$, para algum $d \in D^* \Leftrightarrow 1 \in xD_S$. Portanto, $((a_1, \dots, a_n)_{D_S})_S = D_S$. ■

(3.11) Teorema. Sejam D um anel com $\ast$ -multiplicação e P um ideal primo de D . P é essencial se, e somente se, $P_t \subset D$.

Demonstração. Seja K o corpo quociente de D . Suponhamos P essencial.

Sabemos que $P_t \subseteq D$. Queremos provar que $P_t \subset D$.

Suponhamos, por absurdo que $D = P_t = \bigcup_{\substack{F \subseteq P \\ F \in \mathcal{F}(K^*)}} (F)_{\ast}$. Então, $D = (F)_{\ast}$, para

algum $F \subseteq P$ finito e não vazio, digamos $F = \{a_1, \dots, a_n\}$, $a_i \in P$. Pelo lema (3.10), $((a_1, \dots, a_n)D_P)_{\ast} = D_P$. Como D_P anel de valorização, $(a_1, \dots, a_n)D_P = a_i D_P$, para algum $i = 1, \dots, n$. Consequentemente $D_P = ((a_1, \dots, a_n)D_P)_{\ast} = (a_i D_P)_{\ast} = a_i D_P \subseteq P D_P$, o que é absurdo, pois $P D_P$ é o ideal maximal de D_P . Logo, $P_t \subset D$.

Reciprocamente, suponhamos que $P_t \subset D$. Então, existe um t -ideal maximal M de D tal que $P_t \subseteq M$ ([J-1], Chap. I, §4, Th.9). Por um teorema de Griffin, D_M é um anel de valorização ([Gr-1], Th.5). Como $P \subseteq P_t \subseteq M$, segue-se que $D_M \subseteq D_P$. Logo, D_P é anel de valorização, isto é, P é essencial. ■

(3.12) Proposição. Se P é um ideal primo de um MDC-domínio D , então as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) $P = P_t$, isto é, P é um t -ideal.
- (ii) $P_t \subset D$.
- (iii) P é essencial.
- (iv) P é PF-primo.

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii):

Claro, pois P é ideal primo

(ii) $\Rightarrow$ (iii):

Todo MDC-domínio é anel com $\ast$ -multiplicação. Logo, pelo teorema (3.11), P é essencial.

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv):

[Sh-1], Th.2.2.

(iv) $\Rightarrow$ (i):

Seja K o corpo quociente de D . Temos que $P_t = \bigcup_{\substack{F \subseteq P \\ F \in \mathcal{F}(K^*)}} (F)_{\ast}$. Se

$$F = \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq P, \quad (a_1, \dots, a_n)_{\ast} = \bigcap_{\substack{(b) \supseteq (a_1, \dots, a_n) \\ b \in K^*}} (b) = (c), \quad \text{onde } c =$$

$= \text{MDC}(a_1, \dots, a_n) \in P$. Logo, $P_t \subseteq P$. Como $P \subseteq P_t$, então $P = P_t$. ■

(3.13) Teorema. Em um anel com o $\ast$ -multiplicação, todo ideal primo é uma união de ideais primos essenciais.

Demonstração. Sejam D um anel com o $\ast$ -multiplicação e P um ideal primo

de D . Seja $S = D \setminus P$. Dado $a \in P$, temos $(a)_t = (a) \subseteq P$,

isto é, $(a)_t \cap S = \emptyset$. Logo, existe um t -ideal primo $P_a \supseteq (a)_t$ tal que

$P_a \cap S = \emptyset$, ([J-1], Chap. I, §4, Th.9). Então $P_a \subseteq P$, donde $P = \bigcup_{a \in P} (a) \subseteq$

$\subseteq \bigcup_{a \in P} P_a \subseteq P$, isto é, $P = \bigcup_{a \in P} P_a$. Como $(P_a)_t = P_a \subseteq P \subset D$, temos que

cada P_a é um ideal primo essencial. ■

(3.14) Corolário. Em um MDC-domínio todo ideal primo é uma união de ideais PF-primos.

Demonstração. Todo MDC-domínio é anel com $\ast$ -multiplicação, e os ideais PF-primos coincidem com os primos essenciais em MDC-domínios. ■

(3.15) **Corolário.** Em um anel com $\ast$ -multiplicação vale:

- (i) Todo ideal primo próprio (ideal primo $\neq (0)$) contém um ideal primo essencial próprio.
- (ii) Toda não-unidade está contida em um ideal primo essencial.
- (iii) Todo ideal primo minimal é um ideal primo essencial.

Demonstração. Seja D um anel com $\ast$ -multiplicação.

(i):

Seja P um ideal primo próprio de D . Por (4.5) $P = \bigcup_{i \in I} P_i$, onde P_i é ideal primo essencial para todo $i \in I$. Ora, como P é um ideal primo próprio, então P_i é primo essencial próprio para algum $i \in I$. Logo, P contém um primo essencial próprio.

(ii):

Se $d \in D \setminus D^*$, então $d \in P$, para algum ideal primo P de D , e $P = \bigcup_{i \in I} P_i$, P_i primo essencial de D para todo $i \in I$. Então, existe $i \in I$ tal que $d \in P_i$.

(iii):

Seja P um ideal primo minimal de D . $P = \bigcup_{i \in I} P_i$, P_i primo essencial de D para todo $i \in I$. Logo, $P = P_i$ para todo $i \in I$. Então, P é um ideal primo essencial. ■

(3.16) Corolário. Em um MDC-domínio valem

(i), (ii) e (iii) de (3.15).

([Sh-1], Cor.3.2).

(3.17) Teorema. Seja D um anel com $\ast$ -multiplicação. Então, D é domínio fatorial se, e somente se, todo ideal primo essencial é principal.

Demonstração. Suponhamos que D é um domínio fatorial. Seja P um ideal primo essencial de D . Então, $P \supseteq (x) \neq (0)$, (x) um ideal primo principal. (Cf. [K], Th.5). Logo, $D_P \subseteq D_{(x)} \subset K$, e portanto $D_{(x)}$ é anel de valorização (pois D_P é anel de valorização). Ora, D_P é domínio fatorial (pois D é domínio fatorial), isto é, $G(D_P)$ é uma soma cardinal de cópias de $\mathbb{Z}$. Por outro lado, D_P é anel de valorização, isto é, $G(D_P)$ é um grupo totalmente ordenado. Portanto, $G(D_P) = \mathbb{Z}$. Logo, D_P é anel de valorização discreta de posto 1. Assim, $D_P = D_{(x)}$, o que acarreta $P = (x)$. De fato, $y \in P \Rightarrow y \in PD_P = (x)D_{(x)} \Rightarrow y = \frac{r}{s}$, $r \in (x)$ e $s \notin (x) \Rightarrow y \in (x)$.

Reciprocamente, se P é um ideal primo de D , então P contém um ideal primo essencial. Logo, P contém um ideal primo principal, isto é, D é domínio fatorial ([K], Th.5). ■

(3.18) Corolário. Seja D é um MDC-domínio. Então, D é domínio fatorial se, e somente se, todo ideal primo essencial de D é principal.

([Sh-1], Th.3.3).

Observação. No artigo "Prime Ideals in GCD - Domains", Sheldon mostra que um MDC-domínio Noetheriano é um domínio fatorial (Cor. 3.4). Para anéis com $\ast$ -multiplicação isto não vale, basta tomar um domínio de Dedekind não-fatorial ($[\mathbb{Z}\sqrt{-5}]$ é um exemplo).

(3.19) **Proposição.** Todo anel com $\ast$ -multiplicação é uma interseção de sobre-anéis de valorização essenciais. Em particular, se D é um anel com $\ast$ -multiplicação, $D = \bigcap_{P \in \Lambda} D_P$, onde Λ é o conjunto dos ideais primos essenciais ou o conjunto dos ideais primos essenciais maximais D .

Demonstração. Dados $x_1, \dots, x_n \in D$, $(x_1, \dots, x_n)_{\ast} = (x_1, \dots, x_n)_t$.

Logo, o conjunto dos t -ideais finitos de D , com o t -produto, é um grupo. Assim, D_P é um anel de valorização para todo t -ideal maximal P de D ([Gr-1], Th.5), isto é, todo t -ideal maximal é primo essencial. Então, $D = \bigcap_{\substack{P \text{ } t\text{-ideal} \\ \text{maximal}}} D_P \supseteq \bigcap_{\substack{P \text{ primo} \\ \text{essencial}}} D_P \supseteq D$ ([Gr-1], Prop.4). ■

(3.20) **Corolário.** Um anel com $\ast$ -multiplicação com somente um número finito de ideais primos essenciais maximais é um domínio de Bezout.

Demonstração. Pela proposição anterior D é uma interseção finita de anéis de valorização, portanto D é de Bezout ([K], Th.

(3.21) Corolário. Um MDC-domínio com somente um número finito de ideais primos essenciais maximais é um domínio de Bezout.

([Sh-1], Cor.3.6).

(3.22) Corolário. Um anel com $\ast$ -multiplicação no qual os primos essenciais estão linearmente ordenados é um anel de valorização.

Demonstração. Seja D anel com $\ast$ -multiplicação com a hipótese acima.

Então, D tem um único ideal primo essencial maximal P .

Logo, D é um anel de Bezout local, isto é, D é anel de valorização $\mathfrak{u}$.

(3.23) Corolário. Um MDC-domínio no qual os primos essenciais são linearmente ordenados é um anel de valorização.

([Sh-1], Cor.3.8).

(3.24) Teorema. Seja D um anel com $\ast$ -multiplicação. Então, D é domínio de Prüfer se, e somente se, os ideais primos de D formam uma árvore.

Demonstração. Se D é domínio de Prüfer, então todo ideal primo é primo essencial. Portanto, os ideais primos formam uma árvore.

Reciprocamente, seja P um ideal primo de D . $P = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} P_\alpha$, P_α

ideal primo essencial para cada $\alpha \in \Lambda$. Os P_α formam uma cadeia (pois estão contidos em P). Queremos provar que D_P é anel de valorização ou,

equivalentemente, $P_t \subset D$. Suponhamos que $P_t = D$, ($P_t \subseteq D$). Assim, $1 \in P_t = \left[\bigcup_{\alpha \in \Lambda} P_\alpha \right]_t$, o que implica que existem $a_1, \dots, a_n \in \bigcup_{\alpha \in \Lambda} P_\alpha$ tais que $1 \in (a_1, \dots, a_n)_\omega$. Como $\{P_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ é uma cadeia, existe P_α tal que $a_i \in P_\alpha$, para todo $i = 1, \dots, n$. Logo, $1 \in (a_1, \dots, a_n)_\omega \subseteq (P_\alpha)_t$, isto é, $(P_\alpha)_t = D$, o que é absurdo, pois P_α essencial. Logo, $P_t \subset D$. ■

(3.25) Corolário. Seja D um MDC-domínio. D é domínio de Bezout se, e somente se, os ideais primos formam uma árvore.

([Sh-1], Th.3.7).

Demonstração. Como D é um MDC-domínio, então D é Bezout se, e somente se, D é Prüfer. ■

(3.26) Corolário. Todo anel com ω -multiplicação de dimensão (de Krull) 1 é um domínio de Prüfer.

Demonstração. Toda cadeia de ideais primos de D é da forma $(0) \subset P$, o que implica que os primos formam uma árvore. Logo, D é de Prüfer. ■

(3.27) Corolário. Um MDC-domínio D de dimensão 1 é domínio de Bezout.

([Sh-1], Cor.3.9).

A dimensão essencial de um domínio D , denotada $E\text{-dim}(D)$, é o supremo dos comprimentos das cadeias de ideais primos essenciais.

Denotamos por $K\text{-dim}(D)$, a dimensão de Krull de D .

(3.28) Proposição. Se D é um anel com $\ast$ -multiplicação que não é corpo, então:

(i) $1 \leq E\text{-dim}(D) \leq K\text{-dim}(D)$.

(ii) D domínio de Prüfer $\Rightarrow E\text{-dim}(D) = K\text{-dim}(D)$.

Demonstração. (i):

Evidentemente $E\text{-dim}(D) \leq K\text{-dim}(D)$. D não corpo $\Rightarrow D$ possui ideal primo não nulo $\Rightarrow D$ possui ideal primo essencial não nulo $\Rightarrow 1 \leq E\text{-dim}(D)$.

(ii):

D Prüfer $\Leftrightarrow$ todo ideal primo é primo essencial $\Rightarrow E\text{-dim}(D) = K\text{-dim}(D)$. ■

(3.29) Corolário. Seja D um MDC-domínio que não é corpo. Então:

(i) $1 \leq E\text{-dim}(D) \leq K\text{-dim}(D)$.

(ii) D Bezout $\Rightarrow PF\text{-dim}(D) = K\text{-dim}(D)$.

([Sh-1], Prop. 4.2).

Sheldon no seu artigo [Sh-1] conjectura que: se D é um MDC-domínio e $PF\text{-dim}(D) = K\text{-dim}(D) < \infty$, então D é um domínio de Bezout.

No caso de D ser um anel com $\ast$ -multiplicação e $E\text{-dim}(D) = K\text{-dim}(D) = 1$ temos que D é Prüfer. Esta última afirmação nos leva a conjecturar que: se D é um anel com $\ast$ -multiplicação e $E\text{-dim}(D) = K\text{-dim}(D)$, então D é um domínio de Prüfer. Esta conjectura nos parece mais acessível, mas até agora não conseguimos prova para a mesma.

CAPÍTULO 4

Uma Correspondência 1-1 entre Ideais Primos Essenciais e Filtros Primos

Generalizando um resultado de Krull para anéis de valorização, Sheldon estabelece em [Sh-1] uma bijeção que preserva inclusão entre os ideais PF-primos de um MDC-domínio D e os filtros de seu grupo de divisibilidade $G(D)$, induzida pela demi-valorização canônica $\omega: K^* \longrightarrow G(D)$, onde K é o corpo de frações de D . Quando D é um domínio de Bezout (em particular se D é anel de valorização) os filtros primos correspondem a todos os ideais primos de D . Em nosso trabalho generalizamos esses resultados para anéis com ω -multiplicação; neste caso, os t -ideais primos próprios de D (isto é, os ideais primos próprios essenciais P de D tais que $P_t = P$) correspondem aos filtros primos do ω -grupo de Lorenzen de $G(D)$.

Dado um grupo ordenado G munido de um ω -sistema de ideais tal que $\mathcal{R}_f$ é um semi-grupo cancelativo (isto é, G tem a propriedade ω - γ finita segundo Jaffard), está naturalmente associado a G o ω -grupo de

Lorenzen Λ_n . Os elementos de Λ_n são de forma $\frac{X_n}{Y_n}$, onde X_n e $Y_n \in \mathcal{R}_f$, e, $\frac{X_n}{Y_n} = \frac{X'_n}{Y'_n}$ se, e somente se, $X_n \times Y'_n = X'_n \times Y_n$. A operação em Λ_n é definida por $\frac{X_n}{Y_n} \circ \frac{X'_n}{Y'_n} = \frac{X_n \times X'_n}{Y_n \times Y'_n}$, o elemento unidade de Λ_n é $1 = \frac{X_n}{X_n}$, $X_n \in \mathcal{R}_f$. Além disso, Λ_n está ordenado por: $\frac{X_n}{Y_n} \geq 1$ se, e somente se, $X_n \geq Y_n$ (isto é, $X_n \leq Y_n$).

As aplicações $G \longrightarrow \mathcal{R}_f$ e $\mathcal{R}_f \longrightarrow \Lambda_n$ são o-homomorfismos

$$x \longmapsto (x) \qquad X_n \longmapsto \frac{X_n}{(1)}$$

injetores, assim a aplicação $G \longrightarrow \Lambda_n$ é um o-homomorfismo injetor,

$$x \longmapsto \frac{(x)}{(1)}$$

e, portanto, G pode ser considerado como subgrupo de Λ_n .

Como $\mathcal{R}_f$ é reticulado inferiormente, Λ_n é um grupo reticulado,

$$\text{onde } \inf_{\Lambda_n} \left[\frac{X_n}{Y_n}, \frac{X'_n}{Y'_n} \right] = \frac{\inf_{\mathcal{R}_f} [X_n \times Y'_n, X'_n \times Y_n]}{Y_n \times Y'_n}.$$

Os resultados apresentados sucintamente acima encontram-se em [J-1], Chap. II, §2. Notemos que $\Lambda_n = \mathcal{R}_f$ se D é um anel com α -multiplicação, pois neste caso $\mathcal{R}_f$ é um grupo com o n -produto.

(4.1) Proposição. Todo grupo reticulado é o-isomorfo a seu α -grupo de Lorenzen.

Demonstração. Seja G um grupo reticulado. Todo α -ideal finito de G é principal.

De fato, dado $\{x_1, \dots, x_n\} \leq G$, $(y) \supseteq \{x_1, \dots, x_n\} \Leftrightarrow x_1, \dots, x_n \geq y \Rightarrow z = \inf\{x_1, \dots, x_n\} \geq y \Leftrightarrow (y) \supseteq (z)$.

Por outro lado, $(z) \supseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ pois $z \leq x_1, \dots, x_n$.

Logo, $\{x_1, \dots, x_n\}_{\Lambda_3} = (z)$.

Agora as aplicações $G \longrightarrow \mathcal{R}_f$ e $\mathcal{R}_f \longrightarrow \Lambda_{\Lambda_3}$ são o-isomorfismos

$$x \longmapsto (x) \quad (x) \longmapsto \frac{(x)}{(1)}$$

(dados $(x), (y) \in \mathcal{R}_f$, $\frac{(x)}{(y)} = \frac{(xy^{-1})}{(1)}$). Portanto, a aplicação $G \longrightarrow \Lambda_{\Lambda_3}$

$$x \longmapsto \frac{(x)}{(1)}$$

é um o-isomorfismo. ■

(4.2) Lema. Sejam D um domínio, K seu corpo de frações e

$$w: K^* \longrightarrow G = \frac{K^*}{D}, \text{ a semi-valorização canônica.}$$

Se P é um ideal primo essencial próprio de D tal que $P = P_t$, então $w(P^*)$ é um t -ideal primo de D .

$$\begin{aligned} \text{Demonstração. } w(P^*)_t &= \bigcup_{w(x_1) \in w(P^*)} \{w(x_1), \dots, w(x_n)\}_{\Lambda_3} = \\ &= \bigcup_{x_1 \in P^*} \{w(x_1), \dots, w(x_n)\}_{\Lambda_3}. \end{aligned}$$

$$\{w(x_1), \dots, w(x_n)\}_{\Lambda_3} = \bigcap_{(w(y)) \supseteq w(x_1)} (w(y)) = \bigcap_{(y) \supseteq x_1} (w(y)).$$

$$w(z) \in w(P^*)_t \implies w(z) \in \{w(x_1), \dots, w(x_n)\}_{\Lambda_3}, \text{ para } x_1, \dots, x_n \in P^*.$$

$$w(z) \in \{w(x_1), \dots, w(x_n)\}_{\Lambda_3} \iff w(z) \in (w(y)), \text{ para todo } (y) \supseteq x_1,$$

$$i = 1, \dots, n, \iff z \in (y), \text{ para todo } (y) \supseteq x_i, i = 1, \dots, n \iff$$

$$z \in \{x_1, \dots, x_n\}_{\Lambda_3} \subseteq P_t = P.$$

Como $z \in K^*$, então $z \in P^*$. E portanto, $w(z) \in w(P^*)$.

Logo, $w(P^*)_t \subseteq w(P^*)$. Então, $w(P^*) = w(P^*)_t$.

Vejamos agora que $w(P^*) = w(P^*)_t$ é primo.

$$P^* \subseteq D^* \implies w(P^*) \subseteq w(D^*) = G_+.$$

Sejam $w(x), w(y) \in G_+$ tais que $w(x) + w(y) \in w(P^*)$.

$w(x) + w(y) = w(xy) \in w(P^*) \Rightarrow xy \in P^* \Rightarrow x \in P^*$ ou $y \in P^* \Rightarrow w(x) \in w(P^*)$ ou $w(y) \in w(P^*)$. ■

(4.3) Lema. Sejam D um domínio, K seu corpo de frações e $w: K^* \longrightarrow G = \frac{K^*}{D}$ a semi-valorização canônica.

Se Σ é um t -ideal primo de G , então $\xi(\Sigma) = w^{-1}(\Sigma) \cup \{0\}$ é um ideal primo essencial próprio de D tal que $\xi(\Sigma)_t = \xi(\Sigma)$.

Demonstração. Sejam Σ t -ideal primo de G e $\xi: \Sigma \longmapsto w^{-1}(\Sigma) \cup \{0\}$.

Vamos provar que $\xi(\Sigma)_t = \xi(\Sigma)$ e que $\xi(\Sigma)$ é um ideal primo de D .

$\xi(\Sigma)$ é um ideal de D :

$\Sigma \subseteq G_+ = w(D^*) \Rightarrow w^{-1}(\Sigma) \subseteq w^{-1}(w(D^*)) = D^* \Rightarrow \xi(\Sigma) \subseteq D$. $\xi(\Sigma) \neq \emptyset$.

Sejam $x, y \in \xi(\Sigma)^* = w^{-1}(\Sigma)$. Se $x - y = 0$, então $x - y \in \xi(\Sigma)$.

Se $w(z)$ é tal que $w(z) \leq w(x), w(y)$ (ou equivalentemente $(w(z)) \ni w(x), w(y) = w(-y)$), então $w(z) \leq w(x - y)$ (ou equivalentemente $w(x - y) \in (w(z))$).

Portanto, $w(x - y) \in \bigcup_{(w(z)) \ni w(x), w(y)} (w(z)) = \{w(x), w(y)\}_{w} \subseteq \Sigma_t = \Sigma$. O que

implica que $x - y \in w^{-1}(\Sigma)$. Logo; $x, y \in \xi(\Sigma) \Rightarrow x - y \in \xi(\Sigma)$.

Sejam $a \in D^*$ e $x \in \xi(\Sigma)^* = w^{-1}(\Sigma)$.

$w(x) \in \Sigma$ e $w(a) \in G_+ \Rightarrow w(ax) = w(a) + w(x) \in (w(x)) \subseteq \Sigma_t = \Sigma \Rightarrow ax \in w^{-1}(\Sigma)$. Logo; $a \in D$ e $x \in \xi(\Sigma) \Rightarrow ax \in \xi(\Sigma)$.

$\xi(\Sigma)$ é primo:

$xy \in w^{-1}(\Sigma) = \xi(\Sigma)^* \Rightarrow w(xy) = w(x) + w(y) \in \Sigma \Rightarrow w(x) \in \Sigma$ ou $w(y) \in \Sigma \Rightarrow x \in w^{-1}(\Sigma)$ ou $y \in w^{-1}(\Sigma)$. Logo, $xy \in \xi(\Sigma) \Rightarrow x \in \xi(\Sigma)$ ou $y \in \xi(\Sigma)$.

Finalmente vejamos que $\xi(\Sigma)_t = \xi(\Sigma)$.

Basta mostrarmos que $\xi(\Sigma)_t \subseteq \xi(\Sigma)$.

$$\xi(\Sigma)_t = \bigcup_{x_1 \in \xi(\Sigma)} \{x_1, \dots, x_n\}_{\omega}.$$

$\{x_1, \dots, x_n\}_{\omega} = \bigcap_{(y) \ni x_1} (y)$. Podemos supor $x_1 \neq 0$, pois $0 \in (y) = yD$ para

todo y . Então, $\xi(\Sigma)_t = \bigcup_{x_1 \in \omega^{-1}(\Sigma)} \{x_1, \dots, x_n\}_{\omega}$.

Seja $z \in \xi(\Sigma)_t$, $z \neq 0$.

$z \in \{x_1, \dots, x_n\}_{\omega}$, para $x_1, \dots, x_n \in \omega^{-1}(\Sigma) \Rightarrow z \in yD$, para todo $yD \ni x_1$, $i = 1, \dots, n \Rightarrow z \in yD^*$, para todo $yD^* \ni x_1$, $i = 1, \dots, n \Rightarrow \omega(z) \in \omega(yD^*) = \omega((y))$, para todo $(y) \ni x_1$, $i = 1, \dots, n \Rightarrow$

$$\omega(z) \in \bigcap_{(y) \ni x_1} \omega((y)) = \bigcap_{(\omega(y)) \ni \omega(x_1)} (\omega(y)) = \{\omega(x_1), \dots, \omega(x_n)\}_{\omega} \subseteq$$

$$\omega(\omega^{-1}(\Sigma))_t = \Sigma_t = \Sigma. \text{ Portanto, } z \in \omega^{-1}(\Sigma) = \xi(\Sigma)^*$$

Logo, $(\xi(\Sigma))_t \subseteq \xi(\Sigma)$. ■

(4.4) Proposição. Seja D um domínio com corpo de frações K . A semi-valorização canônica $\omega: K^* \longrightarrow G = \frac{K^*}{D}$ induz uma bijeção entre o conjunto dos ideais primos essenciais próprios P de D tais que $P = P_t$ e o conjunto dos t -ideais primos de G , dada por $\varphi: P \longmapsto \omega(P^*)$.

Demonstração. φ tem como inversa a aplicação $\xi: \Sigma \longmapsto \omega^{-1}(\Sigma) \cup \{0\}$.

De fato, $\varphi \circ \xi(\Sigma) = \varphi(\omega^{-1}(\Sigma) \cup \{0\}) = \omega(\omega^{-1}(\Sigma)) = \Sigma$ e $\xi \circ \varphi(P) = \xi(\omega(P^*)) = \omega^{-1}(\omega(P^*)) \cup \{0\} = P^* \cup \{0\} = P$. ■

Na demonstração acima usamos que $\omega^{-1}(\omega(P^*)) = P^*$. Decorre da teoria dos conjuntos que $\omega^{-1}(\omega(P^*)) \supseteq P^*$. Vejamos que, neste caso, temos também $\omega^{-1}(\omega(P^*)) \subseteq P^*$.

$$x \in \omega^{-1}(\omega(P^*)) \iff \omega(x) \in \omega(P^*) \iff \omega(x) = \omega(y), y \in P^* \iff xy^{-1} \in \text{Ker}(\omega) = D' \implies x = ay, a \in D' \implies x \in P^*.$$

(4.5) Proposição. Seja D um anel com ω -multiplicação com corpo de frações K . Seja $G = \frac{K^*}{D}$. Existe uma bijeção entre o conjunto dos t -ideais primos de G e o conjunto dos t -ideais primos de $\mathcal{R}_f$.

Demonstração. Como D é um anel com ω -multiplicação $\mathcal{R}_f$ é um grupo reticulado. Dado X_t um t -ideal primo de G , seja $X_{t'}$ o t -ideal primo gerado por X em $\Lambda_{\omega} = \mathcal{R}_f$.

X_t é primo se, e somente se, $X_{t'}$ é primo.

Se X_t é primo, então $X_t = Y_{t'} \cap G$, onde $Y_{t'}$ é um t -ideal primo de Λ_{ω} , $Y \leq G$ ([J-1], Chap. II §3, Prop. 2).

Como $X_t = X_{t'} \cap G$, então $X_{t'} = Y_{t'}$. Consequentemente, $X_{t'}$ é primo.

Suponhamos que $X_{t'}$ é primo. $X_t = X_{t'} \cap G$.

$x, y \in G_+ \setminus X_t \implies x, y \in (\Lambda_{\omega})_+ \setminus X_{t'} \implies x + y \in (\Lambda_{\omega})_+ \setminus X_{t'}$ ($X_{t'}$ é primo).

$x, y \in G \implies x + y \in ((\Lambda_{\omega})_+ \setminus X_{t'}) \cap G = [(\Lambda_{\omega})_+ \cap G] \setminus [X_{t'} \cap G] = G_+ \setminus X_t$. Donde X_t é primo.

A aplicação $\psi: X_t \longmapsto X_{t'}$ é uma bijeção.

De fato, para todo $X \in \mathcal{F}(G)$, $X_{\omega} = X_{\omega} \cap G$, onde X_{ω} é o ω -ideal gerado por X em $\Lambda_{\omega} = \mathcal{R}_f$. ([J-1], Chap. II, §3, Prop. 7).

Para todo $Y \in \mathcal{B}(G)$, $Y_t = \bigcup_{\substack{X \subseteq Y \\ X \in \mathcal{F}(G)}} X_{\omega} = \bigcup_{\substack{X \subseteq Y \\ X \in \mathcal{F}(G)}} [X_{\omega} \cap G] = \left[\bigcup_{\substack{X \subseteq Y \\ X \in \mathcal{F}(G)}} X_{\omega} \right] \cap G$

$\cap G = Y_{t'}$.

Segue daí que ψ está bem definida.

ψ é sobrejetora. ([J-1], Chap. II, §3, Th. 3).

ψ é injetiva.

$$X_{t'} = Y_{t'} \Rightarrow X_t = X_{t'} \cap G = Y_{t'} \cap G = Y_t. \blacksquare$$

(4.6) Lema. Em um grupo reticulado filtro é o mesmo que t -ideal.

Demonstração. Seja Λ um grupo reticulado.

Seja P um filtro de Λ , isto é,

$$(i) \quad x \in P \text{ e } y \geq x \Rightarrow y \in P$$

$$(ii) \quad x, y \in P \Rightarrow \inf(x, y) \in P.$$

Vamos mostrar que $P_t \subseteq P$. $P_t = \bigcup_{x_1 \in P} \{x_1, \dots, x_n\}_{\text{as}}$.

$\{x_1, \dots, x_n\}_{\text{as}} = (z)$, onde $(*) \quad z = \inf(x_1, \dots, x_n) \in P$ (por (ii)).

Logo, $P_t = \bigcup_{z \in P} (z) \subseteq P$ (por (i)).

$$(*) \quad (y) \supseteq \{x_1, \dots, x_n\} \Leftrightarrow x_1, \dots, x_n \geq y \Rightarrow z = \inf(x_1, \dots, x_n) \geq y \\ \Leftrightarrow z \in (y) \Leftrightarrow (z) \subseteq (y).$$

Por outro lado, $z \leq x_1, \dots, x_n \Rightarrow (z) \supseteq \{x_1, \dots, x_n\}$.

Logo, $\{x_1, \dots, x_n\}_{\text{as}} = (z)$.

Reciprocamente, seja P um t -ideal de Λ .

Vamos mostrar que valem (i) e (ii).

$$(i). \quad x \in P \text{ e } y \geq x.$$

$$y \geq x \Leftrightarrow y \in (x) \subseteq P_t = P.$$

$$(ii). \quad x, y \in P.$$

$$(\inf(x, y)) = \{x, y\}_{\text{as}} \subseteq P_t = P \Rightarrow \inf(x, y) \in P. \blacksquare$$

(4.7) Teorema. Seja D um anel com ω -multiplicação com corpo de frações

K . A semi-valorização canônica $\omega: K^* \longrightarrow G = \frac{K^*}{D^*}$ induz

uma bijeção que preserva inclusão entre o conjunto dos ideais primos essenciais próprios P de D tais que $P = P_t$ e o conjunto dos filtros primos do ω -grupo de Lorenzen Λ_ω de G , dada por $P \longmapsto \omega(P^*)_t$, onde $\omega(P^*)_t$ é o t -ideal gerado por $\omega(P^*)$ em Λ_ω .

Demonstração. Dado P um ideal primo essencial próprio de D tal que $P_t =$

P , temos $\psi \circ \varphi(P) = \omega(P^*)_t$, onde φ e ψ são as bijeções das proposições (4.4) e (4.5). Então por (4.6) temos uma bijeção como no enunciado do teorema. ■

(4.8) Corolário. Seja D um MDC-domínio com grupo de divisibilidade G .

Existe uma bijeção que preserva inclusão entre os ideais PF-primos e os filtros primos de G_+ .

(Apresentado por Sheldon nos artigos [Sh-1] e [Sh-2]).

Demonstração. D MDC-domínio $\implies G$ é reticulado $\implies G = \mathcal{R}_f = \Lambda_\omega$. Seja P

um ideal primo de D . Pela proposição (3.12) P é PF-primo se, e somente se, $P = P_t$. O resultado segue do teorema (4.4). ■

CAPÍTULO 5

Anéis com $\ast$ -Multiplicação, $\ast$ -Domínios e Grupos de Divisibilidade

Uma das condições que caracterizam um domínio de Prüfer é que seus d -ideais finitos com o d -produto (ou, equivalentemente, os ideais fracionários finitamente gerados não nulos de D com produto de ideais) formam um grupo. Um teorema devido a Prüfer (Cf. [J-1], Chap. I, §4, Th. 4) mostra que D é domínio de Prüfer se o monóide dos d -ideais finitos de D é cancelativo (isto é, o monóide dos ideais fracionários finitamente gerados não nulos de D é cancelativo).

Em [G], Chap. V, §34, Gilmer estuda os domínios cujos $\ast$ -ideais finitos formam um monóide cancelativo com o $\ast$ -produto, chamados $\ast$ -domínios. Por analogia com os domínios de Prüfer, poderíamos conjecturar que um domínio D é anel com $\ast$ -multiplicação se, e somente se, D é $\ast$ -domínio. Essa equivalência não vale como mostra o seguinte exemplo, dado por Dieudonné em [D].

Contra-exemplo 1. Seja D a k -álgebra de monóide do produto cardinal

$\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$, onde k é um corpo arbitrário e $\mathbb{R}_{\geq 0}$ é o

monóide dos números reais maiores ou iguais que zero com a adição usual. Pode-se mostrar que D é um domínio completo integralmente fechado (isto é, para qualquer x pertencente ao corpo de frações de D , se existe $c \in D^*$ tal que $cx^n \in D$, para todo $n > 0$, então $x \in D$), mas o ω -ideal finito gerado por $X^{(0,1)}$ e $X^{(1,1)}$ não tem ω -inverso finito. Assim, D não é anel com ω -multiplicação. Entretanto, por [J-1], Chap. I, §4, Th 7, o grupo de divisibilidade $G = G(D)$ é totalmente ω -fechado, isto é, G tem a propriedade ω - δ total (e portanto tem a propriedade ω - δ finita). Mas, ω - δ finita é equivalente a ω - γ finita (Cf. [J-1], Chap. II, §2, Cor. 2), isto é, D é um ω -domínio.

Já vimos no Capítulo 3 que, um domínio D é anel com ω -multiplicação se, e somente se, $G(D)$ é um subgrupo inf-denso de um grupo reticulado G' , isto é, para cada $g' \in G'$ existem $g_1, \dots, g_n \in G(D)$ tais que $g' = \inf_{G'} \{g_1, \dots, g_n\}$. Sabemos também que todo grupo reticulado é grupo de divisibilidade de um domínio de Bezout (Teorema de Krull-Jaffard - Ohm). Poderíamos perguntar se os subgrupos inf-densos de grupos reticulados são grupos de divisibilidade (de anéis com ω -multiplicação). A resposta é não, como mostra o seguinte exemplo devido a Jaffard:

Contra-exemplo 2. Em [J-3], Jaffard mostrou que $J = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; a + b \equiv 0 \pmod{2}\}$ é um grupo ordenado filtrante, mas não é grupo de divisibilidade. Entretanto, J é inf-denso em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, pois: $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - J \Rightarrow a + b \not\equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow a + b + 1 \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow (a, b + 1) \text{ e } (a + 1, b) \in J$. E, $(a, b) = \inf_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} \{(a + 1, b), (a, b + 1)\}$.

Mais geralmente, basta tomar qualquer subgrupo de Jaffard J de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, como mostra [B], Th.2.

Finalmente, damos um exemplo de um domínio integralmente fechado que não é $\mathfrak{u}$ -domínio.

Contra-exemplo 3. Seja $R = K[x, y]$ o anel dos polinômios em duas indeterminadas sobre um corpo arbitrário K , e consideremos no corpo de frações $K(x, y)$ o seguinte subanel: $D = K + yK(x)[y]$. Temos que D integralmente fechado, mas D não é $\mathfrak{u}$ -domínio.

Suponhamos por absurdo que D é $\mathfrak{u}$ -domínio.

Como $\{\frac{1}{x}\}_{\mathfrak{u}} \times \{1, x\}_{\mathfrak{u}} \subseteq \{1, x\}_{\mathfrak{u}}$, então $\{\frac{1}{x}\}_{\mathfrak{u}} \subseteq D$ ([J-1], Chap. I, §4, Prop. 1), o que é uma contradição, pois $\frac{1}{x} \notin D$.

Vejamos que $\{\frac{1}{x}\}_{\mathfrak{u}} \times \{1, x\}_{\mathfrak{u}} \subseteq \{1, x\}_{\mathfrak{u}}$.

$$\{\frac{1}{x}\}_{\mathfrak{u}} \times \{1, x\}_{\mathfrak{u}} = \{1, \frac{1}{x}\}_{\mathfrak{u}} = \bigcap_{\substack{w \in K(x, y) \\ Dw \supseteq \{1, \frac{1}{x}\}}} Dw \quad \text{e} \quad \{1, x\}_{\mathfrak{u}} = \bigcap_{\substack{w \in K(x, y) \\ Dw \supseteq \{1, x\}}} Dw.$$

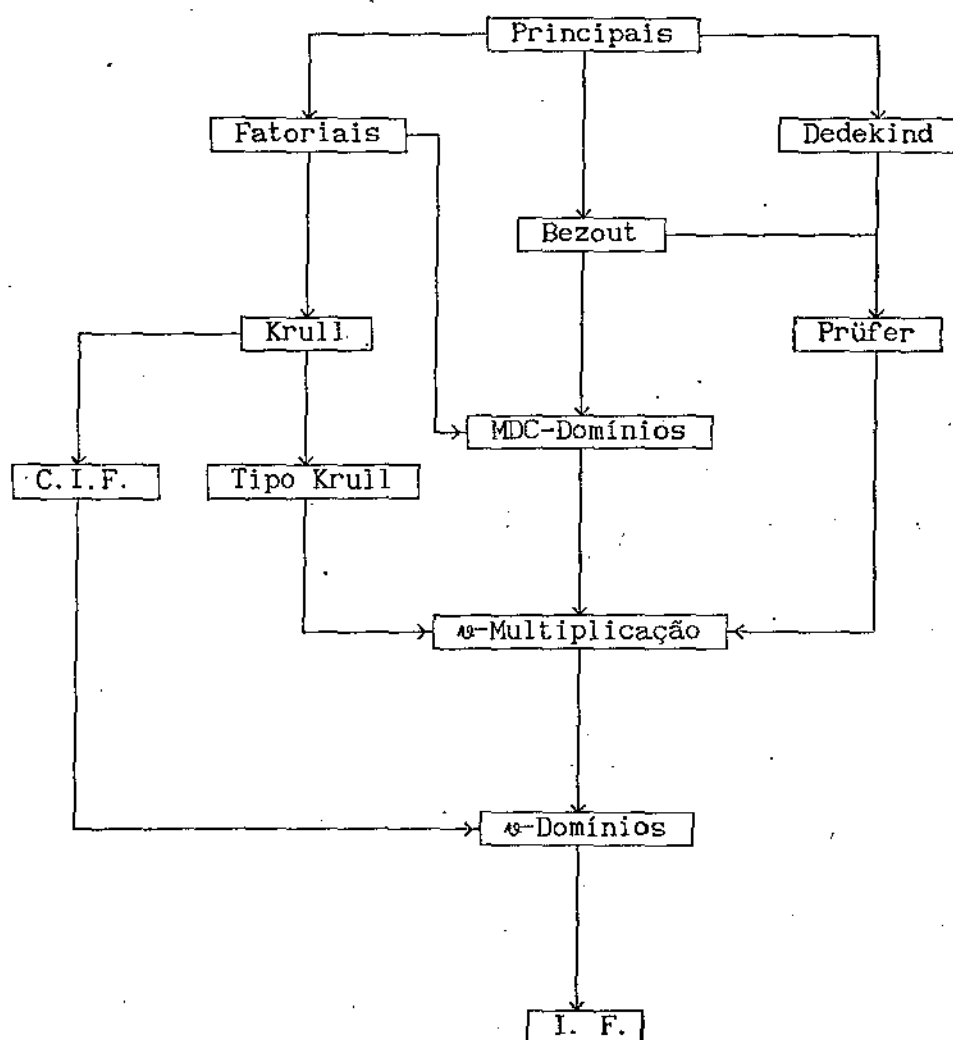
Basta provarmos que, se $Dw \supseteq \{1, x\}$, então $Dw \ni \frac{1}{x}$.

Como $1 \in Dw$, então $1 = dw$, $d \in D^*$. Como $x \in Dw$, então $x = d'w$, $d' \in D^*$.

Donde, $dx = d' \in D^* \setminus K$. Daí, $\frac{d}{x} = \frac{dx}{x^2} \in yK(x)[y] \subseteq D$. Como $\frac{1}{d} = w \in Dw$,

então $\frac{1}{x} = \frac{1}{d} \cdot \frac{d}{x} \in Dw$.

Diagrama de Domínios Integralmente Fechados



No diagrama acima a seta indica inclusão estrita. Obviamente, algumas dessas inclusões se trivializam para domínios noetherianos, por exemplo, Completo Integralmente Fechado (C.I.F) = Integralmente Fechado (I.F) e, portanto, w -Domínio = Integralmente Fechado; Bezout = Principal, etc

BIBLIOGRAFIA.

- [B] Bastos, G .G. - A new class of ordered abelian groups which are not groups of divisibility, C. R. Acad. Sci. Paris, t.306, Série I (1988), 17-20.
- [Bo] Bourbaki, N. - Commutative Algebra, Herman, Paris, 1965.
- [D] Diendoné, J. - Sur la Théorie de la divisibilité, Bull. Soc. Math. France, vol. 49 (1941), 133.
- [E] Endler, O. - Valuation Theory, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1972.
- [G] Gilmer, R. - Multiplicative Ideal Theory, Marcel Dekker Inc, New York, 1972.
- [Gr-1] Griffin, M. - Some results on α -multiplication rings, Can. J. Math. 19 (1967), 711-722.
- [Gr-2] Griffin, M. - Rings of Krull type, J. für. Math., 229 (1966), 1-27.
- [H-0] Heinzer, W. e Ohm, J. -An essential ring which is not a α -multiplication ring, Can. J. Math., 25, N^o 4, (1973) 856-861.
- [J-1] Jaffard, P. - Les systèmes d'idéaux, Dunod, Paris, 1960.

- [J-2] Jaffard, P. - Contributions à l'étude des groupes ordonnés,
Journal des Math. Pures et Appl., 32 (1953), 203-280.
- [J-3] Jaffard, P. - Un exemple concernant les groupes de divisibilité,
C. R. Acad. Sci. Paris 243 (1956), 1264-1266.
- [K] Kaplansky, I. - Commutative rings, The University of Chicago
Press, Chicago, 1974.
- [M] Mott, J. L. - The group of divisibility and its applications,
Springer - Verlag Lectures Notes in Math., 311 (1972).
- [R] Ribenboim, P. - Théorie des groupes ordonnés, Universidad
Nacional del Sur, Bahia Blanca, 1959.
- [Sh-1] Sheldon, P. B. - Prime idels in GCD-domains, Can. J. Math.,
26 (1974), 98-107.
- [Sh-2] Sheldon, P. B. - Two Counterexamples involving complete integral
closure in finite - dimensional Prüfer domains, J. of Algebra,
27 (1973), 462-474