



DANIELA DOS SANTOS DE OLIVEIRA

DERIVADA FRACIONÁRIA E AS FUNÇÕES DE MITTAG-LEFFLER

CAMPINAS
2014



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

**Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica**

DANIELA DOS SANTOS DE OLIVEIRA

DERIVADA FRACIONÁRIA E AS FUNÇÕES DE MITTAG-LEFFLER

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra em matemática aplicada.

Orientador: Edmundo Capelas de Oliveira

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELA ALUNA DANIELA DOS SANTOS DE OLIVEIRA, E ORIENTADA PELO PROF. DR. EDMUNDO CAPELAS DE OLIVEIRA.

Assinatura do Orientador

**CAMPINAS
2014**

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

OL4d Oliveira, Daniela dos Santos de, 1990-
Derivada fracionária e as funções de Mittag-Leffler / Daniela dos Santos de Oliveira. – Campinas, SP : [s.n.], 2014.

Orientador: Edmundo Capelas de Oliveira.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Caputo, Derivadas fracionárias de. 2. Mittag-Leffler, Funções de. 3. Laplace, Transformadas de. 4. Oscilador harmônico fracionário. I. Oliveira, Edmundo Capelas de, 1952-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Fractional derivative and the Mittag-Leffler functions

Palavras-chave em inglês:

Caputo fractional derivatives

Mittag-Leffler functions

Laplace transformations

Fractional harmonic oscillator

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Mestra em Matemática Aplicada

Banca examinadora:

Edmundo Capelas de Oliveira [Orientador]

Rubens de Figueiredo Camargo

Jayme Vaz Júnior

Data de defesa: 27-08-2014

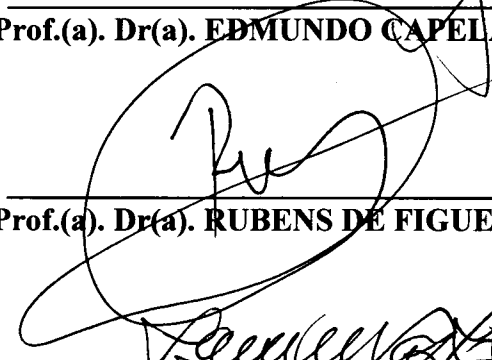
Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Dissertação de Mestrado defendida em 27 de agosto de 2014 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof.(a). Dr(a). EDMUNDO CAPELARI DE OLIVEIRA



Prof.(a). Dr(a). RUBENS DE FIGUEIREDO CAMARGO



Prof.(a). Dr(a). JAYME VAZ JÚNIOR

Abstract

This work presents a study about the one- two- and three-parameters Mittag-Leffler functions. We show that the Mittag-Leffler function is a generalization of the exponential function and present its relations to other special functions beta, gamma, incomplete gamma and error functions. We also approach fractional integration, which is necessary to introduce the concept of fractional derivatives. Two formulations for the fractional derivative are studied, the formulations proposed by Riemann-Liouville and by Caputo. We investigate which classical derivatives rules can be extended to these formulations. Finally, as an application, using the Laplace transform methodology, we discuss the fractional differential equation associated with the harmonic oscillator problem.

Keywords: Mittag-Leffler functions, fractional derivative, Laplace transform, fractional harmonic oscillator.

Resumo

Neste trabalho apresentamos um estudo sobre as funções de Mittag-Leffler de um, dois e três parâmetros. Discutimos a função de Mittag-Leffler como uma generalização da função exponencial bem como a relação que esta possui com outras funções especiais, tais como as funções beta, gama, gama incompleta e erro. Abordamos, também, a integração fracionária que se faz necessária para introduzir o conceito de derivação fracionária. Duas formulações para a derivada fracionária são estudadas, as formulações proposta por Riemann-Liouville e por Caputo. Investigamos quais regras clássicas de derivação são estendidas para estas formulações. Por fim, como uma aplicação, utilizamos a metodologia da transformada de Laplace para resolver a equação diferencial fracionária associada ao problema do oscilador harmônico.

Palavras-chave: Funções de Mittag-Leffler, derivada fracionária, transformada de Laplace, oscilador harmônico fracionário.

Sumário

Agradecimentos	xiii
Introdução	1
1 Transformadas Integrais	3
1.1 Introdução	3
1.2 Transformada de Fourier	5
1.2.1 Propriedades da Transformada de Fourier	6
1.3 Transformada de Laplace	11
1.3.1 Propriedades da Transformada de Laplace	12
1.3.2 Casos Particulares	14
1.4 Transformada de Laplace Inversa	15
1.4.1 Cálculo de Algumas Transformadas Inversas	16
2 Funções de Mittag-Leffler	19
2.1 Funções Gama e Beta	19
2.2 Funções de Mittag-Leffler	22
2.2.1 Função de Mittag-Leffler de Um Parâmetro, $E_{\alpha}(t)$	22
2.2.2 Função de Mittag-Leffler de Dois Parâmetros, $E_{\alpha,\beta}(t)$	23
2.2.3 Função de Mittag-Leffler de Três Parâmetros, $E_{\alpha,\beta}^{\rho}(t)$	23
2.3 Funções Gama Incompleta e Erro	24
2.4 Casos Particulares da Função de Mittag-Leffler $E_{\alpha,\beta}(t)$	27
2.5 Propriedades da Função de Mittag-Leffler, $E_{\alpha,\beta}(t)$	29
2.6 Transformada de Laplace da Função de Mittag-Leffler	34
3 Integração Fracionária	37
3.1 Notação	37
3.2 Origem da Integral Fracionária de Riemann-Liouville	37
3.2.1 Teorema de Leibniz para Diferenciação de uma Integral	38
3.2.2 Teorema de Cauchy para Integrais Repetidas	39
3.3 Lei dos Expoentes para Integrais Fracionárias	40
3.4 Exemplos	42

4	Derivadas Fracionárias de Riemann-Liouville e Caputo	45
4.1	A Derivada Fracionária Segundo Riemann-Liouville	45
4.1.1	Transformada de Laplace para Derivada Fracionária Segundo Riemann-Liouville	46
4.1.2	Exemplos	48
4.1.3	Lei dos Expoentes	50
4.1.4	Derivada Fracionária de Riemann-Liouville da Função de Mittag-Leffler . . .	53
4.2	A Derivada Fracionária Segundo Caputo	54
4.2.1	Exemplos	54
4.2.2	Transformada de Laplace para Derivada Fracionária Segundo Caputo	56
4.2.3	Lei dos Expoentes	57
4.2.4	Derivada Fracionária de Caputo da Função de Mittag-Leffler	59
4.3	Riemann-Liouville $\times$ Caputo	60
5	Regras de Derivação	63
5.1	Linearidade	63
5.1.1	Linearidade da Derivada de Ordem Inteira	63
5.1.2	Linearidade da Derivada Segundo Riemann-Liouville	64
5.1.3	Linearidade da Derivada Segundo Caputo	64
5.2	Regra de Leibniz	65
5.2.1	Regra de Leibniz para Derivada de Ordem Inteira	65
5.2.2	Regra de Leibniz para a Derivada de Riemann-Liouville	66
5.2.3	Regra de Leibniz Generalizada	69
5.2.4	Regra de Leibniz para a Derivada Fracionária de Caputo	72
5.3	Regra da Cadeia ou Fórmula de Faà di Bruno	72
5.3.1	Regra da Cadeia para a Derivada de Ordem Inteira	72
5.3.2	Regra da Cadeia para a Derivada de Riemann-Liouville	75
5.3.3	Regra da Cadeia para Derivada Fracionária de Caputo	78
6	O Oscilador Harmônico Fracionário	81
6.1	Oscilador Harmônico Clássico	81
6.1.1	Solução do Oscilador Harmônico Clássico via Série de Potências	82
6.1.2	Oscilador Harmônico Clássico via Transformada de Fourier	85
6.1.3	Solução do Oscilador Harmônico Clássico via Transformada de Laplace . . .	86
6.2	Oscilador Harmônico Fracionário	87
	Conclusão	89
	Referências	96
A	Propriedades do Coeficiente Binomial	97
A.1	Definições	97
A.2	Proposições	97

B	Série de Laurent, Singularidades e Resíduos	101
B.1	Série de Laurent	101
B.2	Singularidades	102
B.3	Resíduos	102
C	Caso Geral de uma Equação Diferencial Ordinária	105

Agradecimentos

Ao meu orientador e amigo Edmundo, o qual tenho imensa admiração, pela paciência, dedicação e exemplo.

Às minhas mães, Tereza e Solange, pelo amor e incentivo.

Ao meu irmão Eduardo pela compreensão, amizade e apoio incondicional.

À minha irmã Daiana, que mesmo longe, sempre dedicou um tempo para me escutar e apoiar.

Ao meu namorado Alessandro pelo companheirismo, amizade e compreensão.

Ao meu orientador de graduação Matheus por me incentivar nos estudos e me direcionar ao mestrado na Unicamp.

Aos meus amigos e colegas de curso, que sempre se mostraram dispostos a me ajudar, Tiara, Júnior, Eliana e Graziane.

Aos professores do Imecc que contribuíram para minha formação, em especial, ao professor Aurelio pela amizade.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Por fim, agradeço a Deus, por me dar forças para continuar em busca dos meus sonhos.

Introdução

O cálculo de ordem não inteira tem sua origem datada em 30 de setembro de 1695 quando l'Hospital escreveu uma carta a Leibniz perguntando qual seria o significado de uma derivada de ordem $1/2$. Outros importantes matemáticos, como Euler, Lagrange, Fourier, Abel, Heaviside, Liouville, entre outros, também contribuíram para o desenvolvimento de tal estudo [19].

Até a década de 70, os trabalhos eram esporádicos e não havia um canal comum que pudesse ser dedicado exclusivamente ao tema. No ano de 1974, por uma iniciativa de Ross [40] ocorreu o primeiro congresso internacional sobre o cálculo de ordem não inteira e só, quase vinte anos depois, em 1986, ocorreu o segundo encontro. Daí para a frente o desenvolvimento da teoria, agora com possíveis aplicações, se deu de forma ordenada e os veículos especializados só crescem. O décimo quarto encontro ocorreu em junho de 2014 na Catania, Itália.¹ Uma linha do tempo bastante recente pode ser encontrada em [48]. Hoje, o cálculo fracionário conta com vários meios especializados para a sua divulgação, em particular, revistas e congressos consolidados. A gama de aplicações conta com campos do saber, passando pela engenharia [41, 52], física [5, 52], finanças [42], Epidemiologia [16], dielétricos [10], dentre outros [9, 19, 29, 33, 47, 49, 52].

O objetivo principal deste trabalho é a resolução de uma equação diferencial fracionária que generaliza a clássica equação diferencial associada ao problema do oscilador harmônico clássico, através da metodologia das transformadas integrais, em particular, a transformada de Laplace. A fim de abordarmos este problema alguns requisitos são necessários conforme descrevemos a seguir. Elucidamos as transformadas integrais, visando discutir a resolução de equações diferenciais. Mencionamos as transformadas mais conhecidas como a transformada de Laplace, Fourier, Hankel e Mellin. A transformada de Hankel é um caso particular da transformada de Fourier dupla. Já a transformada de Mellin pode ser construída a partir de uma conveniente mudança de variável e redefinindo o núcleo na transformada de Laplace. Porém, nos concentramos no estudo das transformadas de Laplace e Fourier, bem como suas transformadas inversas. Apresentamos algumas propriedades de ambas as transformadas assim como alguns casos particulares.

No Capítulo 2, introduzimos a definição de algumas funções especiais, são elas, as funções beta, gama, gama incompleta e erro. Também neste capítulo apresentamos as funções de Mittag-Leffler

¹International Conference on Fractional Differentiation and its Applications, Catania, 23-25 junho de 2014. Nesta conferência, a partir de uma Mesa Redonda, foi criado um site [<http://www.fractalmo.org/QUO-VADIMUS>] com problemas em aberto em diferentes subáreas do cálculo de ordem não inteira.

de um, dois e três parâmetros. Estas funções são as mais importantes e as mais comuns relacionadas ao cálculo fracionário. Assim como a função exponencial é solução de equações diferenciais ordinárias com coeficientes constantes, a função de Mittag-Leffler surge naturalmente como solução de equações diferenciais fracionárias com coeficientes constantes. Por ser um dos métodos mais simples de resolução de uma equação diferencial, com coeficientes constantes, a transformada de Laplace, será utilizada para obter a solução da equação diferencial que vamos discutir. Por isso, calculamos a transformada de Laplace da função de Mittag-Leffler de três parâmetros a fim de utilizá-la na resolução de tal equação diferencial. Mostramos também alguns casos particulares da função de Mittag-Leffler de dois parâmetros, bem como algumas propriedades de tal função.

No Capítulo 3, introduzimos o teorema de Leibniz para diferenciação de uma integral a fim de fazer uso deste resultado na demonstração do teorema de Cauchy para integrais repetidas, onde a partir de sua generalização introduzimos a integral de ordem fracionária segundo Riemann-Liouville. O cálculo fracionário conforme proposto por Riemann-Liouville e Caputo emerge naturalmente da continuação analítica do teorema de Cauchy para integrais repetidas. Após introduzir o conceito de integração fracionária demonstramos a lei dos expoentes para estes operadores. Por fim, discutimos alguns exemplos.

No Capítulo 4, definimos as derivadas fracionárias no sentido de Caputo e no sentido de Riemann-Liouville, discutimos a lei dos expoentes e demonstramos alguns resultados a fim de motivar a apresentação de tais definições. Por fim, calculamos as transformadas de Laplace de ambas as derivadas, Riemann-Liouville e Caputo, com o objetivo de utilizar este último resultado na solução da equação diferencial que propomos resolver.

No Capítulo 5, estudamos quais generalizações das regras clássicas de derivação são estendidas para as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville e Caputo. Entre estas regras podemos citar a linearidade, a regra de Leibniz e a regra da cadeia ou fórmula de Faà di Bruno.

No Capítulo 6, abordamos a equação diferencial do oscilador harmônico clássico que é o protótipo de sistemas que envolvem oscilações. Resolvemos esta equação diferencial através do método de Frobenius e das transformadas de Fourier e Laplace. Logo em seguida introduzimos a versão fracionária da equação diferencial do oscilador harmônico, considerando as derivadas fracionárias no sentido de Caputo e, a fim de resolvê-la utilizamos a metodologia da transformada de Laplace.

Três apêndices concluem o trabalho. No primeiro demonstramos algumas propriedades referentes ao coeficiente binomial, propriedades estas que foram utilizadas no Capítulo 5. No segundo apêndice discutimos os conceitos de série de Laurent, teorema dos resíduos e o lema de Jordan. No terceiro apêndice abordamos a redução de uma equação diferencial ordinária linear, de segunda ordem e homogênea em sua forma mais geral, ao caso de equação diferencial associada ao problema do oscilador harmônico não amortecido.

Capítulo 1

Transformadas Integrais

Existem várias técnicas para discutir e resolver equações diferenciais, dentre elas, o método de Frobenius para uma equação diferencial ordinária e o método de separação de variáveis para uma equação diferencial parcial [8]. O método das transformadas integrais consiste basicamente em transformar uma equação diferencial (ordinária ou parcial) em uma outra equação diferencial, em princípio mais simples de ser resolvida que a equação inicial. Resolvida a equação transformada, inverte-se o processo, calculando a chamada transformada inversa para se obter a solução da equação de partida [12].

1.1 Introdução

Neste capítulo estudamos as transformadas integrais, as quais têm várias aplicações, em particular, na resolução de equações diferenciais. Seja $t \in \mathbb{R}$. Dada uma função $f(t)$ definida num intervalo da reta, I , uma transformada integral tem a seguinte forma geral

$$\mathcal{T}[f(t)] = F(s) = \int_I K(t, s)f(t)dt,$$

onde $F(s)$ é denominada a transformada da função $f(t)$, $K(t, s)$ o núcleo da transformada e I o conveniente intervalo de definição. O estudo das transformadas integrais associado a uma equação diferencial consiste em transformar o problema original em um outro problema no espaço das transformadas, em geral, mais simples de ser resolvido. Então, encontramos a solução no espaço das transformadas e recuperamos a solução do problema original (equação diferencial e condições) aplicando sua respectiva transformada inversa. A ilustração para tal fato pode ser mais bem compreendida através da seguinte Figura 1.1, [1, 14, 20].

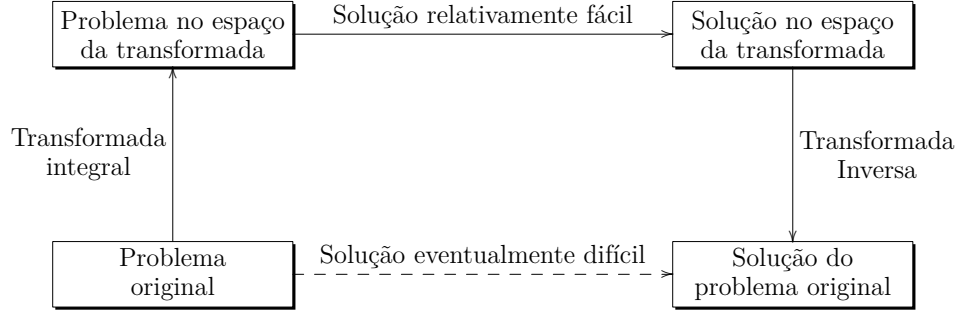


Figura 1.1: Esquema para transformadas integrais.

As transformadas integrais mais difundidas são as transformadas de Laplace, Fourier, Hankel, Mellin, dentre outras. Aqui, neste trabalho, discutimos apenas as transformadas de Laplace e Fourier, mencionando as principais propriedades bem como a respectiva transformada inversa. A seguir apresentamos uma tabela com as principais transformadas integrais, assim como seu respectivo núcleo, intervalo onde a integral está definida, o tipo de função que está sendo integrada e uma possível aplicação para cada uma delas. As funções consideradas serão contínuas por partes.

Transformada	Núcleo	Intervalo	Tipo de função	Aplicação
Fourier	$\frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{2\pi}}$	$-\infty < t < \infty$	$f(t)$: função absolutamente integrável.	É conveniente para problemas que possuam dependência espacial [11, 14, 15].
Laplace	e^{-st}	$0 < t < \infty$	$f(t)$: função admissível.	É conveniente para problemas de valor inicial que possuem dependência temporal [11, 14, 15].
Hankel	$tJ_\nu(ut)$	$0 < t < \infty$	$f(t)$: função de variável real.	É útil para resolver problemas em coordenadas cilíndricas com simetria axial [11, 15].
Mellin	t^{u-1}	$0 < t < \infty$	$f(t)$: função de variável real e u um número complexo.	É útil para problemas de valor na fronteira bem como para somar séries infinitas [11, 15].

Tabela 1.1: Transformadas integrais.

1.2 Transformada de Fourier

Aqui, apresentamos a definição e algumas propriedades da transformada de Fourier bem como a respectiva transformada de Fourier inversa.

Definição 1.2.1. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ com $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Definimos a integral de Fourier da seguinte maneira:

$$f(x) = \int_0^\infty [A(\omega) \cos(x\omega) + B(\omega) \sin(x\omega)] d\omega$$

onde

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(z) \cos(z\omega) dz$$

e

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(z) \sin(z\omega) dz.$$

Reescrevendo a integral de Fourier na forma complexa temos, substituindo $A(\omega)$ e $B(\omega)$ na expressão para $f(x)$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^\infty [A(\omega) \cos(x\omega) + B(\omega) \sin(x\omega)] d\omega \\ f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(z) [\cos(z\omega) \cos(x\omega) + \sin(z\omega) \sin(x\omega)] dz d\omega. \end{aligned}$$

Utilizando as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \cos(z\omega - x\omega) &= \cos(z\omega) \cos(x\omega) + \sin(z\omega) \sin(x\omega), \\ \cos(\theta) &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \end{aligned}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t) [\cos \omega(t-x)] dt d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t) \left[\frac{e^{i\omega(t-x)} + e^{-i\omega(t-x)}}{2} \right] dt d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t) [e^{i\omega(t-x)} + e^{-i\omega(t-x)}] dt d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t) e^{i\omega(t-x)} dt d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t) e^{-i\omega(t-x)} dt d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t) e^{i\omega(t-x)} dt d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^\infty f(t) e^{i\omega(t-x)} dt d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t) e^{i\omega(t-x)} dt d\omega. \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

A Eq.(1.2.1) é a forma complexa da integral de Fourier. Escrevendo a função exponencial que aparece nesta expressão como um produto de duas exponenciais, podemos escrever

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{iz\omega} dz \right\} e^{-i\omega x} d\omega.$$

A função entre chaves é uma função de ω e é chamada a **transformada de Fourier** da função $f(z)$, sendo denotada por

$$\mathcal{F}[f(z)] \equiv F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{i\omega z} dz.$$

Com isto temos que

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega x} d\omega \quad (1.2.2)$$

que é a chamada **transformada de Fourier inversa** denotada por $\mathcal{F}^{-1}[f(x)]$, que é uma consequência imediata das definições acima, ou seja,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f(z)] e^{-i\omega x} d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{i\omega z} dz \right] e^{-i\omega x} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{i\omega(z-x)} dz d\omega = f(x). \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

A transformada de Fourier existe desde que a função $f(x)$ seja contínua por partes, ou seja, tenha um número finito de descontinuidades em $(-\infty, +\infty)$, e que seja absolutamente integrável nesse intervalo, isto é, se [53]

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty.$$

1.2.1 Propriedades da Transformada de Fourier

A seguir apresentamos e demonstramos algumas propriedades envolvendo a transformada de Fourier [12, 32].

Propriedade 1: (Linearidade). Sejam $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ funções absolutamente integráveis e $a, b \in \mathbb{R}$, constantes, então

$$\mathcal{F}[af(z) + bg(z)] = a\mathcal{F}[f(z)] + b\mathcal{F}[g(z)].$$

Demonstração. A partir da definição da transformada de Fourier e da propriedade de linearidade da integral, temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[af(z) + bg(z)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [af(z) + bg(z)] e^{i\omega z} dz \right\} \\ &= a \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{i\omega z} dz \right\} + b \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(z) e^{i\omega z} dz \right\} \\ &= a\mathcal{F}[f(z)] + b\mathcal{F}[g(z)].\end{aligned}$$

Propriedade 2: (Simetria). Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função absolutamente integrável. Se

$$\mathcal{F}[f(z)] = F(\omega),$$

então

$$\mathcal{F}[F(z)] = \sqrt{2\pi} f(-\omega).$$

Demonstração. Note que, a partir da Eq.(1.2.2), temos

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega x} d\omega. \quad (1.2.4)$$

Efetuando, primeiro, a substituição $x \rightarrow \omega$, $\omega \rightarrow -x$ e, logo após, $\omega \rightarrow x$, $-x \rightarrow \omega$ na Eq.(1.2.4), obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{ix\omega} dx = \sqrt{2\pi} f(-\omega)$$

de onde segue-se a relação

$$\mathcal{F}[F(x)] = \sqrt{2\pi} f(-\omega).$$

Propriedade 3: (Escala) Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função absolutamente integrável e $a \in \mathbb{R}^*$, segue que

$$\mathcal{F}[f(az)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right),$$

onde

$$\mathcal{F}[f(z)] = F(\omega).$$

Demonstração. Consideramos $a \in \mathbb{R}^*$, isto é, $|a|$, então

- para $a > 0$, temos

$$y = az \Rightarrow z = \frac{y}{|a|}, \quad \text{logo} \quad dz = \frac{dy}{|a|}.$$

Segue que,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(az)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(az) e^{i\omega z} dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{i\omega \frac{y}{a}} \frac{dy}{a} \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{i\frac{\omega}{a} y} dy \\ &= \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right). \end{aligned}$$

- para $a < 0$, temos em analogia ao anterior

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(az)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\omega \left(\frac{-y}{a}\right)} \left(\frac{-dy}{a}\right) \\ &= -\left(\frac{1}{a}\right) \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{i\frac{\omega}{a} y} dy \right\} \\ &= -\frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right), \end{aligned}$$

onde $-\frac{1}{a} > 0$. Segue-se, em geral, a expressão

$$\mathcal{F}[f(az)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

■

Propriedade 4: (Deslocamento no Tempo) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função absolutamente integrável, então

$$\mathcal{F}[f(z - a)] = e^{i\omega a} F(\omega).$$

Demonstração. Introduzindo a mudança de variável, $y = z - a$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(z - a)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z - a) e^{i\omega z} dz \\ &= e^{i\omega a} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{i\omega y} dy \right\} \\ &= e^{i\omega a} F(\omega). \end{aligned}$$

■

Propriedade 5: (Deslocamento na Frequência) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função absolutamente integrável, então

$$\mathcal{F}[e^{iaz}f(z)] = F(\omega + a).$$

Demonstração. Utilizamos a definição da transformada de Fourier, obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[e^{iaz}f(z)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iaz}f(z)e^{i\omega z}dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{i(\omega+a)z}dz \\ &= F(\omega + a).\end{aligned}$$

■

Teorema 1.2.2 (Derivação no Tempo). Seja $f(z)$ contínua sobre o eixo z e $f(z) \rightarrow 0$ quando $|z| \rightarrow \infty$. Ainda mais, seja $f'(z)$ absolutamente integrável sobre o eixo z . Então, [12]

$$\mathcal{F}[f'(z)] = -i\omega\mathcal{F}[f(z)].$$

Demonstração. A partir da definição da transformada de Fourier, obtemos

$$\mathcal{F}[f'(z)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(z)e^{i\omega z}dz.$$

Integrando por partes e utilizando o fato de que $f(z) \rightarrow 0$ quando $|z| \rightarrow \infty$, segue

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f'(z)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ f(z)e^{i\omega z} \Big|_{-\infty}^{\infty} - i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{i\omega z}dz \right\} \\ &= -i\omega\mathcal{F}[f(z)].\end{aligned}$$

Em analogia à derivada primeira, isto é, utilizamos a integração por partes e as devidas condições impostas nas funções e derivadas, obtemos

$$\mathcal{F}[f''(z)] \equiv -i\omega\mathcal{F}[f'(z)] = (-i\omega)^2\mathcal{F}[f(z)],$$

ou ainda

$$\mathcal{F}[f''(z)] = -\omega^2\mathcal{F}[f(z)]. \tag{1.2.5}$$

Em geral, para ordens mais altas da derivada, temos

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(z)] = (-i)^n\omega^n\mathcal{F}[f(z)] = (-i)^n\omega^n F(\omega),$$

para $n = 0, 1, 2, \dots$

■

A fim de fazer uso do teorema de convolução na resolução do oscilador harmônico clássico via transformada de Fourier, vamos introduzir a definição de tal produto e logo após efetuar a transformada de Fourier deste produto, [7, 15].

Definição 1.2.3. A convolução de duas funções absolutamente integráveis, $f(x)$ e $g(x)$, denotada por $f(x) * g(x) \equiv (f * g)(x) \equiv f * g$ é definida pela integral

$$f * g = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \xi)g(\xi)d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)g(x - \xi)d\xi$$

desde que a integral exista.

Teorema 1.2.4 (Convolução). Sejam $F(\omega) = \mathcal{F}[f(x)]$ e $G(\omega) = \mathcal{F}[g(x)]$ as transformadas de Fourier das funções $f(x)$ e $g(x)$, respectivamente, então

$$\mathcal{F}[f(x) * g(x)] = F(\omega)G(\omega),$$

isto é, a transformada de Fourier do produto de convolução é o produto das respectivas transformadas. A partir da equação anterior podemos escrever, utilizando a correspondente transformada de Fourier inversa

$$f(x) * g(x) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)G(\omega)].$$

Demonstração. A partir da definição da transformada de Fourier, podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(x) * g(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \xi)g(\xi)d\xi \right\} e^{i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \xi)g(\xi)d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega \xi} g(\xi)d\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \xi)e^{i\omega(x - \xi)} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega \xi} g(\xi)d\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)e^{i\omega \eta} d\eta \\ &= G(\omega)F(\omega). \end{aligned}$$

Teorema 1.2.5 (Parseval). Seja $x \in \mathbb{R}$. Se $f(x)$ tem transformada de Fourier denotada por $F(\omega)$ e [18, 46]

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty,$$

então

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega.$$

Demonstração. Utilizamos a definição da transformada de Fourier inversa, logo

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \{f(x)\} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega x} d\omega \right] dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \right] d\omega \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) F(\omega) d\omega \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega.
\end{aligned}$$

■

1.3 Transformada de Laplace

Nesta seção, de modo análogo a seção anterior, apresentamos a definição da transformada de Laplace bem como algumas de suas propriedades. Posteriormente, no Capítulo 6, utilizaremos esta metodologia para resolver a versão clássica e fracionária do oscilador harmônico.

Definição 1.3.1. Seja $f(t)$ uma função de t definida para $t > 0$. Então, a transformada de Laplace de $f(t)$, denotada por $\mathcal{L}[f(t)]$ ou por $F(s)$, é definida por [12, 20]

$$\mathcal{L}[f(t)] \equiv F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

onde s é um parâmetro complexo.

A transformada de Laplace está definida para valores de 0 até ∞ , então não consideramos neste cálculo os valores da função $f(t)$ para $t < 0$. Vamos considerar no cálculo das transformadas de Laplace as chamadas funções causais, ou seja, $f(t) = 0$ para $t < 0$, [49]. A convergência da integral envolvida na definição da transformada de Laplace, numa região do plano complexo, pode ser garantida para uma classe bastante ampla de funções chamadas de *funções admissíveis*.

Definição 1.3.2. Uma função $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é dita admissível se as condições abaixo são satisfeitas:

1. A função f for contínua por partes em $[0, \infty)$.
2. Existirem¹ duas constantes positivas M e c tais que para todo $t \in [0, \infty)$ vale a desigualdade

$$|f(t)| < M e^{ct}.$$

¹Neste caso, também dizemos que $f(t)$ é de ordem exponencial c .

A prova de que a transformada de Laplace de uma função de ordem exponencial existe é dada pelo seguinte teorema [20].

Teorema 1.3.3. Seja $f(t)$ uma função de ordem exponencial c no intervalo $[0, \infty)$. Então, sua transformada de Laplace $F(s)$, existe para todos os pontos da região do plano complexo tais que $\text{Re}(s) > c$.

Demonstração. Por hipótese, temos que, $|f(t)| < Me^{ct}$, logo pela definição da transformada de Laplace, podemos escrever

$$\mathcal{L}[f(t)] \leq \int_0^\infty |f(t)e^{-st}| dt < \int_0^\infty Me^{ct-st} dt = M \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-(s-c)t}}{-(s-c)} - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-(s-c)t}}{-(s-c)} \right],$$

como $|e^{-(s-c)t}| = |e^{-t\text{Re}(s-c)}|$ para que o primeiro limite da equação acima exista devemos ter que $\text{Re}(s-c) > 0$, ou seja, $\text{Re}(s) > c$. ■

1.3.1 Propriedades da Transformada de Laplace

Apresentamos nesta seção a propriedade de linearidade da transformada de Laplace e o teorema da transformada de Laplace da derivada.

Propriedade 1: (Linearidade). Sejam $f(t)$ e $g(t)$ duas funções de ordens exponenciais α e β no intervalo $[0, \infty)$, respectivamente. Sejam a e b constantes reais ou complexas. A combinação linear

$$h(t) = af(t) + bg(t)$$

é de ordem exponencial maior que ou igual a $\gamma = \max\{a, b\}$, então vale a relação

$$\mathcal{L}[h(t)] = \mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)],$$

ou seja, a transformada de Laplace é linear, [20].

Enunciamos e demonstramos, a seguir, o teorema da transformada da derivada, isto é,

Teorema 1.3.4 (Transformada da Derivada). Se a função $f(t)$ e sua derivada $f'(t)$ são funções de ordem exponencial no intervalo $[0, \infty)$, então vale a relação

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0), \tag{1.3.1}$$

onde s é o parâmetro da transformada.

Demonstração. Partimos da definição da transformada de Laplace, ou seja,

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt,$$

integrando, por partes, segue-se

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f'(t)] &= e^{-st}f(t)\Big|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \\ &= [0 - f(0)] + s\mathcal{L}[f(t)].\end{aligned}$$

Logo, podemos escrever

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0). \quad (1.3.2)$$

Exigimos as mesmas condições anteriormente mencionadas, agora, para $f(t)$, $f'(t)$, e $f''(t)$, temos para a segunda derivada a relação

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2\mathcal{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0). \quad (1.3.3)$$

Definimos $f'(t) = g(t)$, a partir do que foi calculado anteriormente, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[g'(t)] &= s\mathcal{L}[g(t)] - g(0) \\ &= s\{\mathcal{L}[f'(t)]\} - f'(0),\end{aligned}$$

porém $\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0)$, então

$$\mathcal{L}[f''(t)] = \mathcal{L}[g'(t)] = s\{s\mathcal{L}[f(t)] - f(0)\} - f'(0).$$

Portanto, podemos escrever

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2\mathcal{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0). \quad (1.3.4)$$

Para o caso geral, temos

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n\mathcal{L}[f(t)] - s^{n-1}f(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0),$$

ou ainda,

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n\mathcal{L}[f(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k}f^{(k)}(0). \quad (1.3.5)$$

■

Utilizamos a definição para calcular a transformada de Laplace de algumas funções particulares, dentre elas, aquelas que serão úteis nas aplicações [55].

1.3.2 Casos Particulares

1. (Degrau Unitário). Consideremos a função Heaviside definida por

$$H(t - a) = \begin{cases} 1, & \text{se } t > a \\ 0, & \text{se } t < a. \end{cases}$$

Segue-se que a transformada de Laplace da função Heaviside, também conhecida como de grau unitário, é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[H(t - a)] &= \int_0^\infty e^{-st} H(t - a) dt, \quad t > a \\ &= \int_a^\infty e^{-st} dt. \end{aligned}$$

Introduzindo a mudança de variável $y = t - a$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[H(t - a)] &= e^{-as} \int_0^\infty e^{-sy} dy \\ &= \frac{e^{-as}}{s}. \end{aligned}$$

2. (Função Potência). A transformada de Laplace da função $f(t) = t^n$ é,

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \text{onde } n \in \mathbb{N}, \operatorname{Re}(s) > 0.$$

Novamente, utilizando a definição da transformada, obtemos

$$\mathcal{L}[t^n] = \int_0^\infty e^{-st} t^n dt,$$

e a partir de uma conveniente mudança de variável, $u = st$, segue

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t^n] &= \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{s}\right)^n \frac{du}{s} \\ &= \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^\infty e^{-u} u^{n+1-1} du. \end{aligned}$$

Notamos que a integral acima é a definição da função gama, que será vista no Capítulo 2, então podemos escrever

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

3. (Função Exponencial). A transformada de Laplace da função exponencial é dada por

$$\mathcal{L}[e^{kt}] = \frac{1}{s - k}$$

com $\operatorname{Re}(s) > k$.

4. (Função Seno). A transformada de Laplace da função seno é

$$\mathcal{L}[\sin(kt)] = \frac{k}{s^2 + k^2},$$

para $\text{Re}(s) > 0$.

5. (Função Cosseno). A transformada de Laplace da função cosseno é dada por

$$\mathcal{L}[\cos(kt)] = \frac{s}{s^2 + k^2}$$

para $\text{Re}(s) > 0$.

6. (Função Cosseno Hiperbólico). A transformada de Laplace da função $f(t) = \cosh(kt)$ é

$$\mathcal{L}[\cosh(kt)] = \frac{s}{s^2 - k^2}$$

com $\text{Re}(s) > k$.

7. (Função Seno Hiperbólico). A transformada de Laplace da função $f(t) = \sinh(kt)$ é,

$$\mathcal{L}[\sinh(kt)] = \frac{k}{s^2 - k^2}$$

com $\text{Re}(s) > k$.

1.4 Transformada de Laplace Inversa

Na resolução de uma equação diferencial, utilizando a metodologia das transformadas, nos deparamos com o problema de inversão. Transformamos o problema original em um problema no espaço das transformadas e obtemos a solução, porém para que possamos obter a solução do problema original devemos aplicar a transformada inversa e para isso enunciamos o teorema da integral complexa de inversão [12, 20].

Teorema 1.4.1. Se $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, então $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$ é dada por

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} F(s) ds \\ 0 \end{cases}$$

onde a integração deve ser efetuada ao longo de uma reta $s = \gamma$ no plano complexo, com $s = x + iy$. O número complexo γ deve ser escolhido de tal forma que todas as singularidades do integrando estejam à sua esquerda, isto é, $\text{Re}(s) > \gamma$.

Na prática, essa integral é calculada considerando-se a integral de contorno

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{st} F(s) ds$$

onde o contorno C é chamado de contorno de Bromwich, [12].

Demonstração. Ver [21]. ■

Enunciamos, agora, o teorema da convolução para a transformada de Laplace, isto é,

Teorema 1.4.2 (Convolução). Se $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ e $\mathcal{L}[g(t)] = G(s)$, então

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = \mathcal{L}[f(t)]\mathcal{L}[g(t)] = F(s)G(s).$$

Ou, equivalentemente, a partir da transformada de Laplace inversa

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)] = f(t) * g(t), \quad (1.4.1)$$

onde $f(t) * g(t)$ é chamada de convolução de $f(t)$ e $g(t)$ e é definida pela seguinte integral

$$f(t) * g(t) \equiv \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau \equiv \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau. \quad (1.4.2)$$

As integrais na Eq.(1.4.2) são chamadas de integrais de convolução e podem ser denotadas, simplesmente, por $(f * g)(t)$.

Demonstração. Veja [15]. ■

1.4.1 Cálculo de Algumas Transformadas Inversas

A seguir apresentamos o cálculo da transformada de Laplace inversa de algumas funções a fim de fazer uso nas aplicações.

1. Seja $F(s) = \frac{e^{-as}}{s}$ com $s \neq 0$, então, para $t > a$, obtemos

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-as}}{s}\right] = H(t - a).$$

Calculamos a transformada inversa através da integral complexa de inversão, isto é,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} F(s) ds$$

onde o contorno é o de Bromwich com $\gamma > 0$ e $F(s) = \frac{e^{-as}}{s}$, cujo polo está em $s = 0$. Utilizamos o teorema dos resíduos, apresentado no Apêndice B, para calcular a integral complexa, ou seja, podemos escrever

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \{2\pi i [\text{Res}(s = 0)]\}. \quad (1.4.3)$$

Calculamos o resíduo em $s = 0$, ou seja,

$$\text{Res}(s = 0) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(s \frac{e^{-as}}{s} e^{st} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} e^{(t-a)s} = 1.$$

Logo, substituímos o valor encontrado na Eq.(1.4.3), de onde segue

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \underbrace{[2\pi i \operatorname{Res}(s=0)]}_1 = 1, \quad t > a.$$

Para $t < a$, temos $f(t) = 0$.

2. Seja $F(s) = \frac{1}{s-k}$ com $\operatorname{Re}(s) > k$, logo

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s-k} \right] = e^{kt}.$$

3. Considere $F(s) = \frac{k}{s^2 + k^2}$ com $\operatorname{Re}(s) > 0$, então

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{k}{s^2 + k^2} \right\} = \operatorname{sen}(kt).$$

Considere a integral complexa de inversão

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} \frac{k}{s^2 + k^2} ds,$$

onde $F(s) = \frac{k}{s^2 + k^2}$ cujos polos estão em $s = \pm ik$. Efetuamos o cálculo da soma dos resíduos, isto é,

$$\operatorname{Res}(s=ik) + \operatorname{Res}(s=-ik) = \lim_{s \rightarrow ik} \left[(s-ik) \frac{k}{s^2 + k^2} e^{st} \right] + \lim_{s \rightarrow -ik} \left[(s+ik) \frac{k}{s^2 + k^2} e^{st} \right].$$

Note que, $s^2 + k^2 = (s-ik)(s+ik)$, logo segue-se

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \left[2\pi i \left(\frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{2i} \right) \right] = \operatorname{sen}(kt).$$

4. Seja $F(s) = \frac{s}{s^2 + k^2}$ com $\operatorname{Re}(s) > k$, temos, em analogia ao anterior

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{s^2 + k^2} \right] = \cos(kt).$$

Capítulo 2

Funções de Mittag-Leffler

Apresentamos neste capítulo as funções de Mittag-Leffler de um, dois e três parâmetros. Discutimos a função de Mittag-Leffler como uma generalização da função exponencial. Para tal, primeiramente, recuperamos alguns resultados envolvendo as funções gama, beta, gama incompleta e erro. Mostramos a relação existente entre a transformada de Laplace e estas funções de Mittag-Leffler. Abordamos ainda casos particulares bem como propriedades da função de Mittag-Leffler de dois parâmetros, [19, 21, 24, 39].

2.1 Funções Gama e Beta

Apresentamos as definições das funções gama e beta, a fim de introduzir a função de Mittag-Leffler de um parâmetro e possíveis generalizações.

Em vários campos da matemática a função gama desempenha papel muito importante, especificamente, no estudo das funções de Mittag-Leffler, em particular, como a generalização do fatorial. Existem várias maneiras de se introduzir o conceito de função gama. Aqui, vamos optar pela representação integral [19].

Definição 2.1.1. Definimos a função gama pela seguinte integral imprópria

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt,$$

para os reais, exceto os inteiros negativos.

Proposição 2.1.2 (Relação Funcional). Uma propriedade muito interessante da função gama é dada por:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \tag{2.1.1}$$

com x diferente de um inteiro negativo ou nulo. Em particular, se $x = n$ um inteiro não negativo, então vale

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!,$$

já que $\Gamma(1) = 0! = 1$. Neste sentido, interpretamos a função gama como uma generalização do conceito de fatorial.

Demonstração. Esta propriedade pode ser verificada facilmente através de integração por partes, onde

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^x dt.$$

Temos, então

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^x dt = [-e^{-t} t^x]_0^\infty + x \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = [-e^{-t} t^x]_0^\infty + x\Gamma(x).$$

Sabendo que, $\lim_{a \rightarrow \infty} e^{-a} a^x = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a^x}{e^a} = 0$, então a relação $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ se verifica. ■

Da relação $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, podemos generalizar a função gama, isolando $\Gamma(x)$,

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}. \quad (2.1.2)$$

Apesar de a definição ser válida para $z \in \mathbb{C}$, vamos considerar apenas $x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Z}_-^*)$. A figura abaixo mostra o gráfico para a função gama, [6].

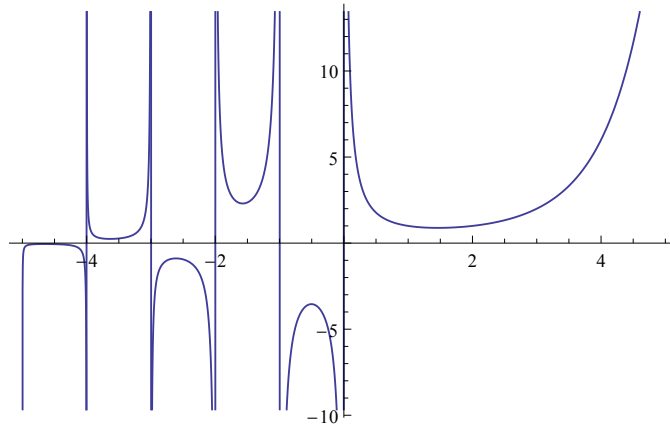


Figura 2.1: Gráfico da função gama.

Introduzimos, agora, o conceito da função beta bem como a relação que esta função possui com a função gama.

Definição 2.1.3. Dentre as funções relacionadas com a função gama, definimos a função beta [33], através da integral

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt, \quad \text{onde } p > 0, q > 0. \quad (2.1.3)$$

Apresentamos a seguir uma propriedade da função beta.

Proposição 2.1.4 (Simetria). A função beta tem a propriedade de simetria, isto é,

$$B(p, q) = B(q, p).$$

Demonstração. Por definição, temos que

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt.$$

Introduzindo a mudança de variável, $x = 1 - t$, obtemos

$$B(p, q) = \int_1^0 (1-x)^{p-1} x^{q-1} (-dx) = \int_0^1 (1-x)^{p-1} x^{q-1} dx = B(q, p).$$

■

Podemos, ainda, representar a função beta da seguinte forma

$$B(p, q) = 2 \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{2p-1} (\cos \theta)^{2q-1} d\theta. \quad (2.1.4)$$

Introduzindo a mudança de variável, $t = \cos^2 \theta$, na definição da função beta, Eq.(2.1.3), segue que

$$\begin{aligned} B(p, q) &= 2 \int_{\pi/2}^0 (1 - \cos^2 \theta)^{p-1} (\cos^2 \theta)^{q-1} (-\cos \theta \sin \theta) d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{2p-1} (\cos \theta)^{2q-1} d\theta. \end{aligned}$$

Proposição 2.1.5. Uma propriedade muito importante que relaciona a função beta com a função gama é dada através da seguinte equação [19]

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \quad (2.1.5)$$

Demonstração. Considere o produto

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx \int_0^\infty e^{-y} y^{q-1} dy. \quad (2.1.6)$$

Introduzindo as mudanças de variáveis $x = u^2$ e $y = v^2$, na Eq.(2.1.6), podemos escrever

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4 \int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)} \int_0^\infty u^{2p-1} v^{2q-1} du dv.$$

Introduzindo as coordenadas polares no plano

$$u = r \cos \theta \quad \text{e} \quad v = r \sin \theta$$

onde o jacobiano da transformação é r , então temos que $du dv = r dr d\theta$. Podemos, então escrever

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= 2 \int_0^\infty e^{-r^2} \left\{ 2 \int_0^{\pi/2} (r \cos \theta)^{2p-1} (r \sin \theta)^{2q-1} r dr d\theta \right\} \\ &= 2 \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2p+2q-1} dr \left\{ 2 \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{2p-1} (\sin \theta)^{2q-1} d\theta \right\}. \end{aligned}$$

Note que, a expressão entre chaves é exatamente a Eq.(2.1.4), portanto temos que

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 2B(p, q) \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2p+2q-1} dr. \quad (2.1.7)$$

Introduzindo, agora, a mudança de variável, $r^2 = \xi$, na integral da Eq.(2.1.7), obtemos

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = B(p, q) \int_0^\infty e^{-\xi} \xi^{p+q-1} d\xi.$$

Finalmente, podemos escrever

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

■

2.2 Funções de Mittag-Leffler

Nesta seção estudamos as funções de Mittag-Leffler que desempenham um papel extremamente importante no estudo das equações diferenciais fracionárias. A função de Mittag-Leffler por ser uma generalização da função exponencial admite como casos particulares as funções seno e cosseno trigonométricos e hiperbólicos. Estudamos a função de Mittag-Leffler com um, dois e três parâmetros bem como a relação da função de Mittag-Leffler de dois parâmetros com as funções gama incompleta e erro [21].

2.2.1 Função de Mittag-Leffler de Um Parâmetro, $E_\alpha(t)$

A função de Mittag-Leffler de um parâmetro, $E_\alpha(t)$, conforme introduzida por Mittag-Leffler [31] é uma função complexa que depende de um parâmetro complexo α , onde $\text{Re}(\alpha) > 0$, na forma de uma série

$$\begin{aligned} E_\alpha(t) &= 1 + \frac{t}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^2}{\Gamma(2\alpha+1)} + \cdots + \frac{t^k}{\Gamma(k\alpha+1)} + \cdots \\ E_\alpha(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}. \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

No caso em que $\alpha = 1$, temos:

$$E_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t,$$

o que nos permite dizer que a função de Mittag-Leffler admite, como caso particular, a função exponencial.

2.2.2 Função de Mittag-Leffler de Dois Parâmetros, $E_{\alpha,\beta}(t)$

A função de Mittag-Leffler de dois parâmetros, $E_{\alpha,\beta}(t)$, conforme introduzida por Wiman [54], é uma função complexa que depende de dois parâmetros complexos, α e β , onde $\text{Re}(\alpha) > 0$ e $\text{Re}(\beta) > 0$, dada por

$$E_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}. \quad (2.2.2)$$

Quando $\beta = 1$, a Eq.(2.2.2) se reduz à função de Mittag-Leffler de um parâmetro dada pela Eq.(2.2.1), ou seja,

$$E_{\alpha,1}(t) = E_{\alpha}(t).$$

2.2.3 Função de Mittag-Leffler de Três Parâmetros, $E_{\alpha,\beta}^{\rho}(t)$

Antes de definirmos a função de Mittag-Leffler de três parâmetros, vamos definir o símbolo de Pochhammer. Tal símbolo pode ser definido de duas formas, na forma ascendente e na forma descendente.

Definição 2.2.1. O símbolo de Pochhammer, na forma ascendente, é definido por:

$$(\rho)_n = \begin{cases} 1, & \text{para } n = 0 \\ \rho(\rho+1) \cdots (\rho+n-1), & \text{para } n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (2.2.3)$$

Para $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned} (\rho)_n &= \rho(\rho+1) \cdots (\rho+n-1) \\ &= \frac{(\rho+n-1)!}{(\rho-1)!} \\ &= \frac{\Gamma(\rho+n)}{\Gamma(\rho)}. \end{aligned}$$

Definição 2.2.2. Por outro lado, o símbolo de Pochhammer, na forma descendente, é definido por:

$$(\rho)_n = \begin{cases} 1, & \text{para } n = 0 \\ \rho(\rho-1) \cdots (\rho-n+1), & \text{para } n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (2.2.4)$$

Para $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned} (\rho)_n &= \rho(\rho-1) \cdots (\rho-n+1) \\ &= \frac{(\rho)!}{(\rho-n)!} \\ &= \frac{\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(\rho-n+1)}. \end{aligned}$$

A função de Mittag-Leffler de três parâmetros, $E_{\alpha,\beta}^\rho(t)$, conforme introduzida por Prabhakar [37], é uma função complexa que depende de três parâmetros, $\alpha, \beta, \rho \in \mathbb{C}$ onde $\text{Re}(\alpha) > 0$, $\text{Re}(\beta) > 0$ e $\text{Re}(\rho) > 0$, assim

$$E_{\alpha,\beta}^\rho(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{t^k}{k!}, \quad (2.2.5)$$

sendo $(\rho)_k$ o símbolo de Pochhammer. Notamos que esta função de Mittag-Leffler de três parâmetros generaliza aquela de dois parâmetros no sentido de que, para $\rho = 1$, obtemos

$$E_{\alpha,\beta}^1(t) = E_{\alpha,\beta}(t).$$

Existem estudos sobre as funções de Mittag-Leffler com quatro, cinco e até seis parâmetros [22, 49].

2.3 Funções Gama Incompleta e Erro

Apresentamos aqui as definições das funções gama incompleta e erro bem como a relação que possuem com a função de Mittag-Leffler. A função gama incompleta [19, 21], $\gamma(\alpha, t)$, que é uma função inteira na variável t é definida pela seguinte integral

$$\gamma(\alpha, t) = \int_0^t e^{-z} z^{\alpha-1} dz$$

com $\text{Re}(\alpha) > 0$. Introduzindo, agora, uma outra função gama incompleta, denotada por $\gamma^*(\alpha, t)$, conveniente para a demonstração da relação existente entre a função gama incompleta e a função de Mittag-Leffler de dois parâmetros, apresentada na Seção 2.2. Tal função é definida da seguinte forma

$$\gamma^*(\alpha, t) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \gamma(\alpha, t).$$

Teorema 2.3.1. A relação existente entre a função de Mittag-Leffler de dois parâmetros, definida na Seção 2.2, e a função gama incompleta é dada por

$$E_{1,a+1}(t) = e^t \gamma^*(a, t), \quad (2.3.1)$$

admitindo o primeiro parâmetro como sendo 1 na função de Mittag-Leffler de dois parâmetros.

Demonstração. A demonstração será feita explicitando o segundo membro da Eq.(2.3.1) e utilizando a definição da função gama incompleta, $\gamma^*(a, t)$, segue que

$$\begin{aligned} e^t \gamma^*(a, t) &= e^t \frac{t^{-a}}{\Gamma(a)} \int_0^t z^{a-1} e^{-z} dz \\ &= \frac{t^{-a}}{\Gamma(a)} \int_0^t z^{a-1} e^{-(z-t)} dz, \quad z < t \\ &= \frac{t^{-a}}{\Gamma(a)} \int_0^t z^{a-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-z)^k}{k!} dz \\ &= \frac{t^{-a}}{\Gamma(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_0^t z^{a-1} (t-z)^k dz. \end{aligned}$$

Introduzindo a seguinte mudança de variável, $z = t\xi$, temos

$$\begin{aligned}
e^t \gamma^*(a, t) &= \frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \int_0^1 \xi^{a-1} (1-\xi)^{k+1-1} d\xi \\
&= \frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} B(a, k+1) \\
&= \frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \frac{\Gamma(a)\Gamma(k+1)}{\Gamma(a+k+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(k+a+1)} = E_{1,a+1}(t).
\end{aligned}$$

■

Mostraremos a seguir que a função erro constitui um caso particular da função de Mittag-Leffler de dois parâmetros [19, 21]. A função erro é definida pela seguinte integral

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-z^2} dz.$$

Por outro lado, a função erro complementar é definida por

$$\operatorname{erfc}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_t^{\infty} e^{-z^2} dz.$$

Demonstraremos, agora, o teorema que relaciona a função de Mittag-Leffler de dois parâmetros com a função erro [19, 21].

Teorema 2.3.2. Para todo $t \in \mathbb{C}$, temos

$$E_{\frac{1}{2},1}(it) = e^{-t^2} [1 + \operatorname{erf}(it)] = e^{-t^2} [\operatorname{erfc}(-it)]. \quad (2.3.2)$$

Demonstração. Consideremos a seguinte relação [19, 21]

$$\frac{n!}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-z^n} dz = \frac{n!}{\sqrt{\pi}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p t^{np+1}}{(np+1)p!} \quad (2.3.3)$$

que, para $n = 2$, fornece uma representação para a função erro, em termos de um somatório¹

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-z^2} dz = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p t^{2p+1}}{(2p+1)p!}. \quad (2.3.4)$$

¹Note, pela Eq.(2.3.4), que a função erro é ímpar o que torna a segunda igualdade da Eq.(2.3.2) trivial.

Para demonstrar a Eq.(2.3.2) utilizamos a representação acima e a definição da função de Mittag-Leffler, ou seja

$$\begin{aligned} E_{\frac{1}{2},1}(it) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{\Gamma(\frac{k}{2} + 1)} \\ &= 1 + \frac{it}{\Gamma(1 + \frac{1}{2})} - t^2 - \frac{it^3}{\Gamma(2 + \frac{1}{2})} + \frac{t^4}{2!} + \frac{it^5}{\Gamma(3 + \frac{1}{2})} - \frac{t^6}{3!} - \dots \end{aligned}$$

Agrupando convenientemente os termos da expressão anterior podemos escrever²

$$\begin{aligned} E_{\frac{1}{2},1}(it) &= 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} - \frac{t^{10}}{5!} + \dots + \\ &+ i \left(\frac{t}{\Gamma(1 + \frac{1}{2})} - \frac{t^3}{\Gamma(2 + \frac{1}{2})} + \frac{t^5}{\Gamma(3 + \frac{1}{2})} - \frac{t^7}{\Gamma(4 + \frac{1}{2})} + \dots \right). \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Utilizando a relação de recorrência envolvendo a função gama [6],

$$\begin{aligned} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) \\ &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{3}{2}\right) \\ &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \left(n - \frac{5}{2}\right) \dots \left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

e lembrando da relação

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^k}{k!} = e^{-t^2}$$

podemos escrever, para a Eq.(2.3.5), que

$$\begin{aligned} -e^{-t^2} + E_{\frac{1}{2},1}(it) &= i \left[\frac{t}{\Gamma(1 + \frac{1}{2})} - \frac{t^3}{\Gamma(2 + \frac{1}{2})} + \frac{t^5}{\Gamma(3 + \frac{1}{2})} - \dots \right] \\ &= i \left[\frac{t}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} - \frac{t^3}{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} + \frac{t^5}{\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} - \dots \right] \\ &= \frac{2i}{\Gamma(\frac{1}{2})} \left[t - \frac{2t^3}{3} + \frac{2^2 t^5}{5 \cdot 3} - \frac{2^3 t^7}{7 \cdot 5 \cdot 3} + \dots \right], \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

ou ainda, utilizando o conceito de duplo fatorial e a relação $\sqrt{\pi} = \Gamma(1/2)$, na seguinte forma, [6]

$$E_{\frac{1}{2},1}(it) = e^{-t^2} + \frac{2i}{\Gamma(\frac{1}{2})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^k t^{2k+1}}{(2k+1)!!}. \quad (2.3.7)$$

²Vamos separar em parte real e parte imaginária.

Para concluir que $E_{\frac{1}{2},1}(iz) = e^{-z^2}[1 + \operatorname{erf}(iz)]$ basta verificar que $e^{-t^2}\operatorname{erf}(it)$ é igual ao segundo termo do lado direito da Eq.(2.3.7). Para tanto, consideremos a representação para a função erro dada pela Eq.(2.3.4), ou seja,

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erf}(it) &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (it)^{2p+1}}{(2p+1)p!} \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{i(t)^{2p+1}}{(2p+1)p!}.\end{aligned}$$

Sendo assim, temos

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2i}e^{-t^2}\operatorname{erf}(it) = e^{-t^2} \left[t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5 \cdot 2!} + \frac{t^7}{7 \cdot 3!} + \frac{t^9}{9 \cdot 4!} + \cdots \right].$$

Utilizando a representação em série para e^{-t^2} , obtemos

$$\begin{aligned}e^{-t^2}\frac{\sqrt{\pi}}{2i}\operatorname{erf}(it) &= t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (t^2)^k}{k!} + \frac{t^3}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (t^2)^k}{k!} + \\ &+ \frac{t^5}{5 \cdot 2!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (t^2)^k}{k!} + \frac{t^7}{7 \cdot 3!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (t^2)^k}{k!} + \cdots.\end{aligned}$$

Expandindo os somatórios do lado direito da equação acima podemos escrever, já rearranjando

$$\begin{aligned}e^{-t^2}\frac{\sqrt{\pi}}{2i}\operatorname{erf}(it) &= t - \frac{t^3}{1!} + \frac{t^5}{2!} - \frac{t^7}{3!} + \cdots \\ &+ \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{3} + \frac{t^7}{3 \cdot 2!} - \frac{t^9}{3 \cdot 3!} + \cdots \\ &+ \frac{t^5}{5 \cdot 2!} - \frac{t^7}{5 \cdot 2!} + \frac{t^9}{5 \cdot 2! \cdot 2!} - \frac{t^{11}}{5 \cdot 2! \cdot 3!} + \cdots \\ &+ \frac{t^7}{7 \cdot 3!} - \frac{t^9}{7 \cdot 3!} + \frac{t^{11}}{7 \cdot 3! \cdot 2!} - \frac{t^{13}}{7 \cdot 3! \cdot 3!} + \cdots \\ &= t - \frac{2t^3}{3} + \frac{2^2 t^5}{5 \cdot 3} - \frac{2^3 t^7}{7 \cdot 5 \cdot 3} + \cdots\end{aligned}$$

de onde segue que

$$e^{-t^2}\operatorname{erf}(it) = \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^k t^{2k+1}}{(2k+1)!!}.$$

■

2.4 Casos Particulares da Função de Mittag-Leffler $E_{\alpha,\beta}(t)$

Por ser uma generalização da função exponencial, as funções seno e cosseno trigonométricos e hiperbólicos são casos particulares da função de Mittag-Leffler de dois parâmetros [19, 24]. De fato,

1. Seja $\alpha = 2$, $\beta = 1$ e $t \in \mathbb{C}$. A partir da função de Mittag-Leffler de dois parâmetros, Eq.(2.2.2), vale a seguinte relação

$$E_{2,1}(t^2) = \cosh(t).$$

Desenvolvendo a função do primeiro membro, temos que

$$E_{2,1}(t^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} = \cosh(t).$$

2. Seja $\alpha = 2$, $\beta = 2$ e $t \in \mathbb{C}$. A partir da Eq.(2.2.2), vale a relação

$$E_{2,2}(t^2) = \frac{\sinh(t)}{t}.$$

Novamente, desenvolvendo a função do primeiro membro, temos que

$$\begin{aligned} E_{2,2}(t^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k} t t^{-1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \frac{\sinh(t)}{t}. \end{aligned}$$

3. Seja $\alpha = 2$, $\beta = 1$ e $t \in \mathbb{C}$. A partir da definição da função de Mittag-Leffler de dois parâmetros, Eq.(2.2.2), vale a relação

$$E_{2,1}(-t^2) = \cos(t).$$

Para tal demonstração vamos explicitar o somatório do primeiro membro e logo em seguida desenvolvendo-o, temos que

$$\begin{aligned} E_{2,1}(-t^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^k}{\Gamma(2k+1)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(1)} - \frac{t^2}{\Gamma(3)} + \frac{t^4}{\Gamma(5)} - \frac{t^6}{\Gamma(7)} + \dots \\ &= 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots \\ &= \cos(t). \end{aligned}$$

4. Seja $\alpha = 2$, $\beta = 2$ e $t \in \mathbb{C}$. A partir da Eq.(2.2.2), vale a relação

$$E_{2,2}(-t^2) = \frac{\cos(t)}{t}.$$

Explicitando o somatório do primeiro membro e logo em seguida desenvolvendo-o, temos que

$$\begin{aligned}
E_{2,2}(-t^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^k}{\Gamma(2k+2)} \\
&= z \left[\frac{1}{\Gamma(2)} - \frac{t^2}{\Gamma(4)} + \frac{t^4}{\Gamma(6)} - \frac{t^6}{\Gamma(8)} + \dots \right] \frac{1}{t} \\
&= \frac{1}{t} \left[t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots \right] \\
&= \frac{\text{sen}(t)}{t}.
\end{aligned}$$

2.5 Propriedades da Função de Mittag-Leffler, $E_{\alpha,\beta}(t)$

A seguir apresentamos algumas propriedades envolvendo a função de Mittag-Leffler. As propriedades apresentadas abaixo são válidas para $\alpha \in \mathbb{C}$ onde $\text{Re}(\alpha) > 0$. Imediatamente após a propriedade apresentamos a demonstração [24].

Propriedade 1: Sejam $\text{Re}(\alpha) > 0$, $\text{Re}(\beta) > 0$ e $t \in \mathbb{C}$. Temos

$$E_{\alpha,\beta}(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + tE_{\alpha,\alpha+\beta}(t). \quad (2.5.1)$$

Demonstração. Com o auxílio da Eq.(2.2.2), temos que

$$E_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}.$$

Mudando o índice $k \rightarrow k+1$, vem que

$$\begin{aligned}
E_{\alpha,\beta}(t) &= \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{t^{k+1}}{\Gamma(\alpha(k+1) + \beta)} = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k+1}}{\Gamma(\alpha(k+1) + \beta)} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha + \beta)} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)} + tE_{\alpha,\alpha+\beta}(t).
\end{aligned}$$

■

Propriedade 2: Sejam $\text{Re}(\alpha) > 0$, $\text{Re}(\beta) > 0$ e $t \in \mathbb{C}$. Vale

$$\frac{d}{dt}[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(t^\alpha)] = t^{\beta-2}E_{\alpha,\beta-1}(t^\alpha).$$

Demonstração. Explicitando o somatório do primeiro membro e em seguida expandindo-o, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(t^\alpha)] &= \frac{d}{dt} \left[t^{\beta-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \right] \\
&= \frac{d}{dt} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha k + \beta - 1}}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \right] \\
&= \frac{d}{dt} \left[\frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} + \frac{t^{\alpha + \beta - 1}}{\Gamma(\alpha + \beta)} + \frac{t^{2\alpha + \beta - 1}}{\Gamma(2\alpha + \beta)} + \dots \right].
\end{aligned}$$

Derivando termo a termo, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(t^\alpha)] &= \left[\frac{(\beta-1)t^{\beta-2}}{\Gamma(\beta)} + \frac{(\alpha+\beta-1)t^{\alpha+\beta-2}}{\Gamma(\alpha+\beta)} + \frac{(2\alpha+\beta-1)t^{2\alpha+\beta-2}}{\Gamma(2\alpha+\beta)} + \dots \right] \\
&= \left[\frac{(\beta-1)t^{\beta-2}}{(\beta-1)!} + \frac{(\alpha+\beta-1)t^{\alpha+\beta-2}}{(\alpha+\beta-1)!} + \dots \right] \\
&= \left[\frac{\cancel{(\beta-1)}t^{\beta-2}}{\cancel{(\beta-1)}(\beta-2)!} + \frac{\cancel{(\alpha+\beta-1)}t^{\alpha+\beta-2}}{\cancel{(\alpha+\beta-1)}(\alpha+\beta-2)!} + \dots \right] \\
&= \frac{t^{\beta-2}}{\Gamma(\beta-1)} + \frac{t^{\alpha+\beta-2}}{\Gamma(\alpha+\beta-1)} + \dots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha k + \beta - 2}}{\Gamma(\alpha k + \beta - 1)} \\
&= t^{\beta-2}E_{\alpha,\beta-1}(t^\alpha).
\end{aligned}$$

■

Propriedade 3: Seja $\text{Re}(\alpha) > 0$ e $t \in \mathbb{C}$. A derivada da função de Mittag-Leffler de um parâmetro é dada e termos de sua função de Mittag-Leffler com dois parâmetros iguais, isto é,

$$\frac{d}{dt}[E_\alpha(t)] = \frac{1}{\alpha}E_{\alpha,\alpha}(t).$$

Demonstração. Vamos explicitar o somatório do primeiro membro e logo em seguida expandindo-o, vem que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[E_\alpha(t)] &= \frac{d}{dt} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \right] \\
&= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\Gamma(1)} + \frac{t}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{t^2}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \dots \right].
\end{aligned}$$

Derivando termo a termo, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[E_\alpha(t)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{2t}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{3t^2}{\Gamma(3\alpha+1)} + \dots \\
&= \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} + \frac{t}{\alpha\Gamma(2\alpha)} + \frac{t^2}{\alpha\Gamma(3\alpha)} + \dots \\
&= \frac{1}{\alpha} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} + \frac{t}{\Gamma(2\alpha)} + \frac{t^2}{\Gamma(3\alpha)} + \dots \right] \\
&= \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} = \frac{1}{\alpha} E_{\alpha,\alpha}(t).
\end{aligned}$$

■

Propriedade 4: Sejam $\text{Re}(\alpha) > 0$, $\text{Re}(\beta) > 0$ e $t \in \mathbb{C}$. Uma relação de recorrência envolvendo a derivada é dada por:

$$E_{\alpha,\beta}(t) = \beta E_{\alpha,\beta+1}(t) + \alpha t \frac{d}{dt} E_{\alpha,\beta+1}(t).$$

Demonstração. Escrevendo o segundo membro em termos de seus somatórios, temos que

$$\beta E_{\alpha,\beta+1}(t) + \alpha t \frac{d}{dt} E_{\alpha,\beta+1}(t) = \beta \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + \beta + 1)} \right] + \alpha t \frac{d}{dt} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + \beta + 1)} \right].$$

Explicitando o primeiro somatório e efetivando a derivada termo a termo, o segundo membro toma a forma

$$\begin{aligned}
\beta E_{\alpha,\beta+1}(t) + \alpha t \frac{d}{dt} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + \beta + 1)} \right] &= \beta \left[\frac{1}{\Gamma(\beta+1)} + \frac{t}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{t^2}{\Gamma(2\alpha+\beta+1)} + \dots \right] + \\
&+ \alpha t \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{2t}{\Gamma(2\alpha+\beta+1)} + \frac{3t^2}{\Gamma(3\alpha+\beta+1)} + \dots \right] \\
&= \frac{\beta}{\Gamma(\beta+1)} + \frac{\beta t}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{\beta t^2}{\Gamma(2\alpha+\beta+1)} + \dots + \\
&+ \frac{\alpha t}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{2\alpha t^2}{\Gamma(2\alpha+\beta+1)} + \frac{3\alpha t^3}{\Gamma(3\alpha+\beta+1)} + \dots
\end{aligned}$$

Finalmente, agrupando os termos semelhantes, segue que

$$\begin{aligned}
\beta E_{\alpha,\beta+1}(t) + \alpha t \frac{d}{dt} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + \beta + 1)} \right] &= \frac{\beta}{\beta!} + \frac{(\alpha+\beta)t}{(\alpha+\beta)!} + \frac{(2\alpha+\beta)t^2}{(2\alpha+\beta)!} + \frac{(3\alpha+\beta)t^3}{(3\alpha+\beta)!} + \dots \\
&= \frac{1}{(\beta-1)!} + \frac{t}{(\alpha+\beta-1)!} + \frac{t^2}{(2\alpha+\beta-1)!} + \frac{t^3}{(3\alpha+\beta-1)!} + \dots \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)} + \frac{t}{\Gamma(\alpha+\beta)} + \frac{t^2}{\Gamma(2\alpha+\beta)} + \frac{t^3}{\Gamma(3\alpha+\beta)} + \dots \\
&= E_{\alpha,\beta}(t).
\end{aligned}$$

■

Propriedade 5: Sejam $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$, $\operatorname{Re}(\beta) > 0$ e $t \in \mathbb{C}$. Uma relação de recorrência pura, isto é, sem a derivada, tem a forma:

$$E_{\alpha,\beta}(t) + E_{\alpha,\beta}(-t) = 2E_{2\alpha,\beta}(t^2).$$

Demonstração. Para a demonstração desta propriedade vamos explicitar os somatórios do segundo membro, então

$$\begin{aligned} E_{\alpha,\beta}(t) + E_{\alpha,\beta}(-t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} + \cancel{\frac{t}{\Gamma(\alpha + \beta)}} + \frac{t^2}{\Gamma(2\alpha + \beta)} + \dots + \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\beta)} - \cancel{\frac{t}{\Gamma(\alpha + \beta)}} + \frac{t^2}{\Gamma(2\alpha + \beta)} - \dots \\ &= \frac{2}{\Gamma(\beta)} + \frac{2t^2}{\Gamma(2\alpha + \beta)} + \frac{2t^4}{\Gamma(4\alpha + \beta)} + \dots \\ &= 2 \left[\frac{1}{\Gamma(\beta)} + \frac{t^2}{\Gamma(2\alpha + \beta)} + \frac{t^4}{\Gamma(4\alpha + \beta)} + \dots \right] \\ &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{\Gamma(2\alpha k + \beta)} = 2E_{2\alpha,\beta}(t^2). \end{aligned}$$

■

A seguir, apresentamos dois casos particulares da relação de recorrência pura.

- Sejam $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\beta = 1$ e $t \in \mathbb{C}$. Vale a relação

$$E_{\frac{1}{2},1}(t) + E_{\frac{1}{2},1}(-t) = 2E_{1,1}(t^2) = 2e^{t^2}.$$

Explicitando os somatórios do primeiro membro, temos que

$$\begin{aligned} E_{\frac{1}{2},1}(t) + E_{\frac{1}{2},1}(-t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\frac{1}{2}k + 1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-t^k}{\Gamma(\frac{1}{2}k + 1)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(1)} + \cancel{\frac{t}{\Gamma(\frac{1}{2} + 1)}} + \frac{t^2}{\Gamma(1 + 1)} + \cancel{\frac{t^3}{\Gamma(\frac{3}{2} + 1)}} + \dots + \\ &+ \frac{1}{\Gamma(1)} - \cancel{\frac{t}{\Gamma(\frac{1}{2} + 1)}} + \frac{t^2}{\Gamma(1 + 1)} - \cancel{\frac{t^3}{\Gamma(\frac{3}{2} + 1)}} + \dots \end{aligned}$$

Agrupando os termos semelhantes, segue que

$$\begin{aligned}
E_{\frac{1}{2},1}(t) + E_{\frac{1}{2},1}(-t) &= 2 + \frac{2t^2}{\Gamma(2)} + \frac{2t^4}{\Gamma(2+1)} + \frac{2t^6}{\Gamma(3+1)} + \cdots \\
&= 2 \left[1 + \frac{t^2}{\Gamma(2)} + \frac{t^4}{\Gamma(3)} + \frac{t^6}{\Gamma(4)} + \cdots \right] \\
&= 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{\Gamma(k+1)} \\
&= 2E_{1,1}(t^2) = 2e^{t^2}.
\end{aligned}$$

- Sejam $\alpha = 1$ e $\beta = 1$ e $t \in \mathbb{C}$. Vale a relação

$$E_{1,1}(t) + E_{1,1}(-t) = 2E_{2,1}(t^2) = 2 \cosh(t).$$

Expandindo os dois somatórios do primeiro membro, temos que

$$\begin{aligned}
E_{1,1}(t) + E_{1,1}(-t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(k+1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-t^k}{\Gamma(k+1)} \\
&= \frac{1}{\Gamma(1)} + \cancel{\frac{t}{\Gamma(2)}} + \frac{t^2}{\Gamma(3)} + \cancel{\frac{t^3}{\Gamma(4)}} + \cdots + \\
&+ \frac{1}{\Gamma(1)} - \cancel{\frac{t}{\Gamma(2)}} + \frac{t^2}{\Gamma(3)} - \cancel{\frac{t^3}{\Gamma(4)}} + \cdots.
\end{aligned}$$

Agrupando os termos semelhantes, segue que

$$\begin{aligned}
E_{1,1}(t) + E_{1,1}(-t) &= 2 \left[1 + \frac{t^2}{\Gamma(3)} + \frac{t^4}{\Gamma(5)} + \frac{t^6}{\Gamma(7)} + \cdots \right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \\
&= 2E_{2,1}(t^2) = 2 \cosh(t).
\end{aligned}$$

Propriedade 6: Sejam $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ e $t \in \mathbb{C}$. Vale a relação

$$E_{\alpha}(-t) = E_{2\alpha}(t^2) - tE_{2\alpha,\alpha+1}(t^2).$$

Demonstração. Desenvolvendo as duas funções do segundo membro, temos que

$$\begin{aligned}
E_{2\alpha}(t^2) &- tE_{2\alpha,\alpha+1}(t^2) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2\alpha k + 1)} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{\Gamma(2\alpha k + \alpha + 1)} \\
&= \frac{1}{\Gamma(1)} + \frac{t^2}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{t^4}{\Gamma(4\alpha + 1)} + \dots - \\
&- \left[\frac{t}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{t^3}{\Gamma(2\alpha + \alpha + 1)} + \frac{t^5}{\Gamma(4\alpha + \alpha + 1)} + \dots \right] \\
&= 1 + \frac{t^2}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{t^4}{\Gamma(4\alpha + 1)} + \dots - \frac{t}{\Gamma(\alpha + 1)} - \frac{t^3}{\Gamma(3\alpha + 1)} - \frac{t^5}{\Gamma(5\alpha + 1)} - \dots \\
&= 1 - \frac{t}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{t^2}{\Gamma(2\alpha + 1)} - \frac{t^3}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \frac{t^4}{\Gamma(4\alpha + 1)} - \frac{t^5}{\Gamma(5\alpha + 1)} + \dots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = E_{\alpha}(-t).
\end{aligned}$$

■

2.6 Transformada de Laplace da Função de Mittag-Leffler

Nesta seção obtemos a transformada de Laplace para a função de Mittag-Leffler de três parâmetros, que será utilizada no Capítulo 6, a partir desta recuperamos os casos particulares da transformada de Laplace das funções de Mittag-Leffler de um e dois parâmetros, [19, 29].

Teorema 2.6.1. A transformada de Laplace da função de Mittag-Leffler de três parâmetros é dada por

$$\mathcal{L}[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}^{\rho}(-\lambda t^{\alpha})] = \frac{s^{\alpha\rho-\beta}}{(s^{\alpha} + \lambda)^{\rho}}, \quad (2.6.1)$$

onde s é o parâmetro da transformada de Laplace e λ uma constante real ou complexa.

Demonstração. A partir da definição da transformada de Laplace, apresentada no Capítulo 1, e da representação em série para a função de Mittag-Leffler de três parâmetros, Eq.(2.2.5), segue-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}^{\rho}(-\lambda t^{\alpha})] &= \int_0^{\infty} e^{-st} t^{\beta-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{(-\lambda t^{\alpha})^k}{k!} dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k (\rho)_k}{\Gamma(\alpha k + \beta) k!} \int_0^{\infty} e^{-st} t^{\alpha k + \beta - 1} dt.
\end{aligned}$$

Introduzindo a mudança de variável $u = st$ na última integral, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}^{\rho}(-\lambda t^{\alpha})] &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k (\rho)_k}{\Gamma(\alpha k + \beta) k! s^{\alpha k + \beta}} \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-u} u^{\alpha k + \beta - 1} du}_{\Gamma(\alpha k + \beta)} \\
&= \frac{1}{s^{\beta}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(\rho + k)}{k! \Gamma(\rho)} \left(\frac{\lambda}{s^{\alpha}} \right)^k \\
&= \frac{1}{s^{\beta}} \frac{1}{\left(1 + \frac{\lambda}{s^{\alpha}}\right)^{\rho}}.
\end{aligned}$$

Enfim, podemos escrever

$$\mathcal{L}[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}^{\rho}(-\lambda t^{\alpha})] = \frac{s^{\alpha\rho-\beta}}{(s^{\alpha} + \lambda)^{\rho}}.$$

■

No caso em que $\rho = 1$ na Eq.(2.6.1), obtemos a transformada de Laplace da função de Mittag-Leffler de dois parâmetros, isto é,

$$\mathcal{L}[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^{\alpha})] = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha} + \lambda}.$$

Por outro lado, se $\beta = 1$ e $\rho = 1$ na Eq.(2.6.1), obtemos a transformada de Laplace da função de Mittag-Leffler de um parâmetro, dada por

$$\mathcal{L}[E_{\alpha}(-\lambda t^{\alpha})] = \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} + \lambda}.$$

Capítulo 3

Integração Fracionária

Neste capítulo, primeiramente, introduzimos uma notação conveniente que será utilizada no decorrer do texto. Após introduzimos a fórmula de Cauchy para integrais repetidas de onde segue imediatamente a fórmula para a integral de ordem $n \in \mathbb{N}$. Generalizamos a fórmula para integrais de ordem inteira e então obtemos a integral de ordem fracionária segundo Riemann-Liouville. Logo após, demonstramos a lei dos expoentes para os operadores de integração fracionários. Finalmente, apresentamos dois exemplos de integração fracionária, [19, 30, 33].

3.1 Notação

Definição 3.1.1. Denotamos o operador diferencial por D , logo a primeira derivada de uma função $f(t)$ é dada por

$$D[f(t)] := f'(t).$$

Definição 3.1.2. Definimos o operador de integração, à esquerda, da seguinte maneira

$${}_a J_t[f(t)] = \int_a^t f(x)dx,$$

admitimos f integrável no intervalo $[a, b]$ com $a \leq t \leq b$.

O operador de diferenciação é o inverso à esquerda do operador de integração, então

$$DJ[f(t)] = f(t).$$

3.2 Origem da Integral Fracionária de Riemann-Liouville

O cálculo fracionário conforme proposto por Riemann-Liouville e por Caputo é construído a partir da continuação analítica do teorema de Cauchy para integrais repetidas. Tendo obtido a integral fracionária, J^α , corretamente, obtemos, então, uma definição para a derivada fracionária. Começamos demonstrando o teorema de Leibniz para a diferenciação de uma integral, resultado

este que será necessário na demonstração do teorema de Cauchy para integrais repetidas. Generalizando o teorema de Cauchy para um número α qualquer, obtemos a chamada integral fracionária de Riemann-Liouville, [30, 33].

3.2.1 Teorema de Leibniz para Diferenciação de uma Integral

Teorema 3.2.1. Seja $f(t, x)$ uma função de duas variáveis, diferenciável em t , e sejam $g(t)$ e $h(t)$ funções diferenciáveis. Então, temos

$$\frac{d}{dt} \int_{g(t)}^{h(t)} f(t, x) dx = \int_{g(t)}^{h(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(t, x) dx + f(t, h(t)) \frac{dh(t)}{dt} - f(t, g(t)) \frac{dg(t)}{dt}. \quad (3.2.1)$$

Demonstração. Podemos identificar a integral $\int_{g(t)}^{h(t)} f(t, x) dx$ como sendo uma função de três variáveis, ou seja,

$$J(t, h, g) = \int_g^h f(t, x) dx,$$

onde h e g dependem somente de t . Sabemos, do teorema fundamental do cálculo, que

$$\frac{d}{dt} \int_a^t g(x) dx = g(t) \quad (3.2.2)$$

e que

$$\frac{d}{dt} \int_t^b g(x) dx = -\frac{d}{dt} \int_b^t g(x) dx = -g(t).$$

Calculando a derivada total da função $J(t, h, g)$ em relação a t , através da regra da cadeia, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J(t, h, g) &= \frac{\partial J}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial J}{\partial h} \frac{dh}{dt} + \frac{\partial J}{\partial g} \frac{dg}{dt} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} \int_g^h f(t, x) dx \right) \frac{dt}{dt} + \left(\frac{\partial}{\partial h} \int_g^h f(t, x) dx \right) \frac{d}{dt} h(t) + \left(\frac{\partial}{\partial g} \int_g^h f(t, x) dx \right) \frac{d}{dt} g(t) \\ &= \int_{g(t)}^{h(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(t, x) dx + f(t, h(t)) \frac{d}{dt} h(t) - f(t, g(t)) \frac{d}{dt} g(t), \end{aligned}$$

que é justamente o resultado que desejávamos. ■

Para a demonstração do teorema de Cauchy para integrais repetidas, vamos utilizar um caso particular da Eq.(3.2.1), isto é, $h(t) = t$ e $g(t) = a$. Neste caso, a Eq.(3.2.1) se reduz a

$$\frac{d}{dt} \int_a^t f(t, x) dx = \int_a^t \frac{\partial}{\partial t} f(t, x) dx + f(t, t). \quad (3.2.3)$$

Vamos, agora, introduzir a definição de integral repetida.

Definição 3.2.2. Seja $f(t)$ uma função integrável em $[a, b]$, onde $a \leq t \leq b$. Como mencionamos anteriormente o operador de diferenciação é o inverso do operador de integração, logo

$$D^{-1}[f(t)] = J[f(t)] = \int_a^t f(x)dx. \quad (3.2.4)$$

Se aplicamos novamente o operador de integração à Eq.(3.2.4), obtemos

$$D^{-2}[f(t)] = J^2[f(t)] = \int_a^t J[f(x)]dx = \int_a^t \left[\int_a^x f(s)ds \right] dx.$$

Podemos repetir o procedimento n vezes, obtendo, assim, o chamado teorema de Cauchy para integrais repetidas. Enunciamos este teorema logo a seguir, [33].

3.2.2 Teorema de Cauchy para Integrais Repetidas

Teorema 3.2.3. Seja f uma função integrável n vezes no intervalo $[a, t] \in \mathbb{R}$, com $n \in \mathbb{N}$. Então, vale a relação

$$[J_a^n f(x)](t) = \int_a^t f(x)(dx)^n \equiv \int_a^t dx_n \int_a^{x_n} \dots \int_a^{x_2} f(x_1)dx_1 = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t-x)^{n-1} f(x)dx. \quad (3.2.5)$$

Demonstração. Seja $p(t) = \int_a^t (t-x)^{n-1} f(x)dx$. Derivando $p(t)$ em relação a t e utilizando o resultado da Eq.(3.2.3), temos

$$\begin{aligned} D[p(t)] &= \frac{d}{dt} \int_a^t (t-x)^{n-1} f(x)dx \\ &= (t-x)^{n-1} f(x) \Big|_{x=t} + \int_a^t \frac{\partial}{\partial t} (t-x)^{n-1} f(x)dx \\ &= \int_a^t \frac{\partial}{\partial t} (t-x)^{n-1} f(x)dx = (n-1) \int_a^t (t-x)^{n-2} f(x)dx. \end{aligned}$$

Derivando $D[p(t)]$, temos

$$D^2[p(t)] = (n-1)(n-2) \int_a^t (t-x)^{n-3} f(x)dx.$$

Derivando $p(t)$, $n-1$ vezes, onde $n \in \mathbb{N}^*$ obtemos

$$\begin{aligned} D^{n-1}[p(t)] &= (n-1)! \int_a^t (t-x)^{n-n} f(x)dx \\ &= (n-1)! \int_a^t f(x)dx. \end{aligned}$$

Derivando, novamente, sabendo que vale a lei dos expoentes para derivadas de ordem inteira e utilizando a Eq.(3.2.2), obtemos

$$\begin{aligned} D\{D^{n-1}[p(t)]\} &= (n-1)! \frac{d}{dt} \int_a^t f(x)dx \\ D^n[p(t)] &= (n-1)! f(t). \end{aligned}$$

Portanto, podemos notar que, $p(t)/(n-1)!$ é a integral de ordem n de $f(t)$,

$$\frac{p(t)}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-x)^{n-1} f(x) dx, \quad (3.2.6)$$

ou seja, $J^n f(t)$. Ainda mais, podemos notar que

$$D^n \left[\frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-x)^{n-1} f(x) dx \right] = f(t),$$

isto é, D^n é o operador inverso, à esquerda, de J^n . Com isto, concluímos que o teorema de Cauchy para integrais repetidas é válido para $n = 1, 2, \dots$ ■

Generalizando a Eq.(3.2.6) para um número α qualquer obtemos a continuação analítica da fórmula de Cauchy para integrais repetidas, a qual é a definição, dada abaixo, do operador de integração fracionário segundo Riemann-Liouville.

Definição 3.2.4. Sejam $\alpha \in \mathbb{C}$ com $\text{Re}(\alpha) > 0$, f uma função integrável em qualquer subintervalo de $[a, b]$. Então, para $t \in [a, b]$ denotamos por J^α e definimos as integrais fracionárias de Riemann-Liouville de ordem α , à esquerda e à direita, respectivamente, como ${}_a J_t^\alpha f(t)$ e ${}_t J_b^\alpha f(t)$, ou seja, [19, 25]

$${}_a J_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-x)^{\alpha-1} f(x) dx, \quad t > a, \quad (3.2.7)$$

$${}_t J_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (x-t)^{\alpha-1} f(x) dx, \quad b > t. \quad (3.2.8)$$

Se $a = 0$, na Eq.(3.2.7) obtemos

$${}_0 J_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} f(x) dx, \quad t > 0 \text{ e } \text{Re}(\alpha) > 0. \quad (3.2.9)$$

Se $b = 0$, na Eq.(3.2.8) obtemos

$${}_t J_0^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^0 (x-t)^{\alpha-1} f(x) dx, \quad t < 0 \text{ e } \text{Re}(\alpha) > 0. \quad (3.2.10)$$

As integrais fracionárias são válidas para $\alpha \in \mathbb{C}$, porém neste trabalho consideramos apenas $\alpha \in \mathbb{R}$, salvo menção em contrário. Quando denotarmos $J^\alpha f(t)$, estamos utilizando o operador de integração de Riemann-Liouville à esquerda com limite inferior de integração $a = 0$.

3.3 Lei dos Expoentes para Integrais Fracionárias

As integrais fracionárias de Riemann-Liouville preservam uma importante propriedade algébrica das integrais usuais, isto é, [23]

$$J^\gamma J^\beta f(t) = J^\beta J^\gamma f(t) = J^{\gamma+\beta} f(t),$$

onde $\gamma, \beta \geq 0$. Vamos demonstrar este resultado baseado em [19], porém antes vamos definir uma função auxiliar que será utilizada em tal demonstração e vamos mostrar, também, que podemos escrever a integral fracionária de Riemann-Liouville como um produto de convolução entre esta função auxiliar, função de Gel'fand-Shilov, e a função a ser integrada.

Definição 3.3.1. A função de Gel'fand-Shilov é definida por

$$\Phi_\lambda(x) = \begin{cases} \frac{x^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \quad (3.3.1)$$

Vimos que um caso particular da integral fracionária de Riemann-Liouville, Eq.(3.2.9), é dada por

$$J^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} f(x) dx, \quad t > 0 \quad \text{e} \quad \alpha > 0. \quad (3.3.2)$$

Podemos escrever, ainda, que

$$J^\alpha f(t) = \Phi_\alpha * f(t), \quad (3.3.3)$$

ou seja, a partir da definição da função de Gel'fand-Shilov, dada acima, e da definição do produto de convolução, apresentada no Capítulo 1, podemos escrever

$$\Phi_\alpha * f(t) = \int_0^t \frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(x) dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} f(x) dx,$$

que é justamente a definição do caso particular do operador de integração à esquerda, Eq.(3.2.9).

Teorema 3.3.2. Seja J o operador de integração fracionária, então

$$J^\gamma J^\beta = J^\beta J^\gamma = J^{\gamma+\beta},$$

com $\gamma, \beta \geq 0$. Esta é a chamada propriedade de semigrupo.

Demonstração. Já mostramos anteriormente que

$$J^\alpha f(t) = \Phi_\alpha(t) * f(t).$$

Vamos mostrar que

$$\Phi_\gamma(t) * \Phi_\beta(t) = \Phi_{\gamma+\beta}(t). \quad (3.3.4)$$

A partir da definição do produto de convolução, podemos escrever

$$\begin{aligned} \Phi_\gamma(t) * \Phi_\beta(t) &= \int_0^t \frac{\tau^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} \frac{(t-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} d\tau \\ &= \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta)} \int_0^t \tau^{\gamma-1} \left(1 - \frac{\tau}{t}\right)^{\beta-1} d\tau. \end{aligned}$$

Introduzindo a mudança de variável, $u = \frac{\tau}{t}$, obtemos

$$\begin{aligned}\Phi_\gamma(t) * \Phi_\beta(t) &= \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta)} \int_0^1 (ut)^{\gamma-1} (1-u)^{\beta-1} t du \\ &= \frac{t^{\gamma+\beta-1}}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta)} \int_0^1 u^{\gamma-1} (1-u)^{\beta-1} du.\end{aligned}$$

Podemos identificar esta última integral com a integral que define a função beta, Eq.(2.1.3), ou seja,

$$\Phi_\gamma(t) * \Phi_\beta(t) = \frac{t^{\gamma+\beta-1}}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta)} B(\gamma, \beta).$$

Utilizando, agora, a relação entre a função gama e a função beta, Eq.(2.1.5), obtemos

$$\Phi_\gamma(t) * \Phi_\beta(t) = \frac{t^{\gamma+\beta-1}}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma+\beta)}.$$

Segue que, utilizando a Eq.(3.3.1), para $t > 0$

$$\Phi_\gamma(t) * \Phi_\beta(t) = \frac{t^{\gamma+\beta-1}}{\Gamma(\gamma+\beta)} = \Phi_{\gamma+\beta}(t).$$

Considerando a Eq.(3.3.3) e a Eq.(3.3.4) que acabamos de mostrar, concluimos a demonstração da lei dos expoentes da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}J^\gamma J^\beta f(t) &= \Phi_\gamma(t) * J^\beta f(t) = \Phi_\gamma(t) * \Phi_\beta(t) * f(t) \\ &= \Phi_{\gamma+\beta}(t) * f(t) = J^{\gamma+\beta} f(t),\end{aligned}$$

onde f é tal que $J^\alpha f(t)$ faz sentido para todo $\alpha > 0$. ■

3.4 Exemplos

1. Começamos calculando a integral fracionária de ordem $\alpha \in \mathbb{R}$, da função constante, $J^\alpha k$, onde $n-1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{R}^*$, isto é,

$$\begin{aligned}{}_0J_t^\alpha k &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} k dx \\ &= \frac{k}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \left[t \left(1 - \frac{x}{t} \right) \right]^{\alpha-1} dx.\end{aligned}$$

Introduzindo a mudança de variável, $x = ut$, segue que

$$\begin{aligned}{}_0J_t^\alpha k &= \frac{k}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-u)^{\alpha-1} t du \\ &= \frac{t^\alpha k}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} du.\end{aligned}$$

Podemos identificar esta última integral com a definição da função beta, ou seja, $B(1, \alpha)$. Podemos, ainda, escrever a função beta em termos da função gama, Eq.(2.1.5), logo

$${}_0J_t^\alpha k = \frac{t^\alpha k}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(1)\cancel{\Gamma(\alpha)}}{\Gamma(\alpha+1)},$$

onde $\Gamma(1) = 1$. Finalmente, obtemos

$${}_0J_t^\alpha k = \frac{t^\alpha k}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

2. Vamos, agora, calcular a integral fracionária de ordem $\alpha \in \mathbb{R}$, da função potência, ou seja, $J^\alpha t^\nu$, onde $n-1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}$, $\nu > -1$ e $t > 0$, de onde segue que

$$\begin{aligned} {}_0J_t^\alpha t^\nu &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} x^\nu dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \left[t \left(1 - \frac{x}{t} \right) \right]^{\alpha-1} x^\nu dx. \end{aligned}$$

Introduzindo a mesma mudança de variável do exemplo anterior, $x = ut$, obtemos

$$\begin{aligned} {}_0J_t^\alpha t^\nu &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-u)^{\alpha-1} (ut)^\nu t du \\ &= \frac{t^{\alpha+\nu}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 u^\nu (1-u)^{\alpha-1} du. \end{aligned}$$

Podemos notar que esta última integral é a função beta, ou seja, $B(\nu+1, \alpha)$. Escrevendo a função beta em termos da função gama, Eq.(2.1.5), segue que

$${}_0J_t^\alpha t^\nu = \frac{t^{\alpha+\nu}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\nu+1)\cancel{\Gamma(\alpha)}}{\Gamma(\alpha+\nu+1)}.$$

Portanto, podemos escrever

$${}_0J_t^\alpha t^\nu = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\alpha+\nu+1)} t^{\alpha+\nu}. \quad (3.4.1)$$

Capítulo 4

Derivadas Fracionárias de Riemann-Liouville e Caputo

Neste capítulo definimos as derivadas fracionárias segundo Riemann-Liouville, à esquerda e à direita. Calculamos a transformada de Laplace da derivada fracionária segundo Riemann-Liouville. Fornecemos alguns exemplos, discutimos que nem sempre vale a lei dos expoentes para as derivadas fracionárias e calculamos a derivada de Riemann-Liouville para a função de Mittag-Leffler de dois parâmetros. As muitas versões da derivada fracionária podem ser encontradas em [13].

Introduzimos a definição da derivada fracionária segundo Caputo, bem como explicitamos dois exemplos a fim de ilustrar tal definição, calculamos a transformada de Laplace para a derivada fracionária de Caputo, calculamos, também, a derivada de Caputo da função de Mittag-Leffler de um parâmetro e por fim mostramos que a lei dos expoentes, para os operadores diferenciais fracionários no sentido de Caputo, é válida se satisfizer as condições impostas no lema enunciado.

4.1 A Derivada Fracionária Segundo Riemann-Liouville

Antes de introduzir a definição para as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville, lembramos que para $n, m \in \mathbb{N}$, com $m > n$ vale a identidade [33]

$$D^n f(t) = D^m J^{m-n} f(t),$$

onde D^n é uma derivada usual de ordem inteira n . Definimos, agora, o operador diferencial fracionário de Riemann-Liouville.

Definição 4.1.1. Seja $\alpha \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ e $n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1$, onde $[\operatorname{Re}(\alpha)]$ significa a parte inteira de $\operatorname{Re}(\alpha)$. O operador ${}_a D_t^\alpha$ definido por [33]

$${}_a D_t^\alpha f(t) = D^n {}_a J_t^{n-\alpha} f(t)$$

é chamado de operador diferencial fracionário de Riemann-Liouville à esquerda de ordem α . Para $\alpha = 0$, definimos ${}_a D_t^0 := I$, onde I é o operador identidade.

Definição 4.1.2 (Derivada Fracionária de Riemann-Liouville). As derivadas fracionárias de ordem $\alpha \in \mathbb{C}$ de Riemann-Liouville à esquerda e à direita são definidas, respectivamente, por ${}_aD_t^\alpha f(t) = {}_aD_t^n J_t^{n-\alpha} f(t)$ e ${}_tD_b^\alpha f(t) = (-1)^n {}_aD_t^n J_b^{n-\alpha} f(t)$ com $n = [\text{Re}(\alpha)] + 1$, onde $\text{Re}(\alpha) > 0$, ou seja, [45]

$${}_aD_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} D^n \int_a^t \frac{f(u)}{(t-u)^{\alpha-n+1}} du \quad (t > a), \quad (4.1.1)$$

$${}_tD_b^\alpha f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} D^n \int_t^b \frac{f(u)}{(u-t)^{\alpha-n+1}} du \quad (b > t). \quad (4.1.2)$$

onde D^n é uma derivada inteira de ordem n . As derivadas fracionárias de Riemann-Liouville são válidas para $\alpha \in \mathbb{C}$, porém neste trabalho consideramos apenas $\alpha \in \mathbb{R}$, salvo menção em contrário. Daqui para frente quando denotarmos $D^\alpha f(t)$, significa que estamos utilizando o operador diferencial de Riemann-Liouville à esquerda com limite inferior de integração $a = 0$.

4.1.1 Transformada de Laplace para Derivada Fracionária Segundo Riemann-Liouville

Nesta seção calculamos a transformada de Laplace da derivada fracionária segundo Riemann-Liouville através do seguinte teorema, [19, 23, 45, 49].

Teorema 4.1.3. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ com $n-1 < \alpha \leq n$ e $n \in \mathbb{N}$. A transformada de Laplace da derivada de Riemann-Liouville é dada por

$$\mathcal{L}[D^\alpha f(t)] = s^\alpha \mathcal{L}[f(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} g^{(k)}(0), \quad (4.1.3)$$

onde $g(t) = J^{n-\alpha} f(t)$.

Demonstração. Notemos que a integral fracionária de ordem α pode ser escrita como um produto de convolução, Eq.(3.3.3), isto é,

$$J^\alpha f(t) = \Phi_\alpha(t) * f(t).$$

Temos que

$$\mathcal{L}[D^\alpha f(t)] = \mathcal{L}[D^n J^{n-\alpha} f(t)] = \mathcal{L}[D^n g(t)].$$

Pela Eq.(1.3.5), Capítulo (1), temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[D^\alpha f(t)] &= s^n \mathcal{L}[g(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} g^{(k)}(0) \\ &= s^n \mathcal{L}[J^{n-\alpha} f(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} g^{(k)}(0). \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

Devemos calcular $\mathcal{L}[J^{n-\alpha}f(t)]$, isto é,

$$\mathcal{L}[J^{n-\alpha}f(t)] = \mathcal{L}[\Phi_\alpha(t) * f(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * f(t)\right] = \frac{\mathcal{L}[f(t)]}{s^{n-\alpha}}.$$

Voltando na Eq.(4.1.4), obtemos

$$\mathcal{L}[D^\alpha f(t)] = s^n s^{\alpha-n} \mathcal{L}[f(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} g^{(k)}(0),$$

de onde podemos, finalmente, escrever

$$\mathcal{L}[D^\alpha f(t)] = s^\alpha \mathcal{L}[f(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} g^{(k)}(0).$$

■

Já mencionamos que o operador de diferenciação é o inverso à esquerda do operador de integração, isto é, $D^n J^n = I$, onde $n \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar, através do seguinte teorema, porém que não o é à direita [19, 23].

Teorema 4.1.4. Seja $n \in \mathbb{N}$ e I o operador identidade, então vale a seguinte relação

$$J^n D^n f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} f^{(k)}(0), \quad t > 0. \quad (4.1.5)$$

Demonstração. Utilizamos a Eq.(3.2.6), temos que

$$\Omega \equiv J^n D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} f^{(n)}(\tau) d\tau$$

onde, pelo teorema da convolução, podemos notar que

$$\Omega = \frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)} * f^{(n)}(t). \quad (4.1.6)$$

Aplicamos a transformada de Laplace em ambos os lados da Eq.(4.1.6), e obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\Omega] &= \mathcal{L}\left[\frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)} * f^{(n)}(t)\right] \\ &= \mathcal{L}\left[\frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}\right] \mathcal{L}[f^{(n)}(t)] \\ &= s^{-n} \mathcal{L}[f^{(n)}(t)]. \end{aligned}$$

Utilizamos a Eq.(1.3.5), de onde segue-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\Omega] &= s^{-n} \left\{ s^n \mathcal{L}[f(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) \right\} \\ \mathcal{L}[\Omega] &= \mathcal{L}[f(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{-k-1} f^{(k)}(0). \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

Calculamos a transformada de Laplace inversa da Eq.(4.1.7), obtemos

$$\Omega = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) \mathcal{L}^{-1}[s^{-k-1}],$$

onde podemos escrever

$$\Omega = J^n D^n f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} f^{(k)}(0).$$

Note que, usamos o fato que $t^k = \Gamma(k+1) \mathcal{L}^{-1}[s^{-(k+1)}]$. ■

4.1.2 Exemplos

A fim de elucidar a definição apresentada para a derivada fracionária de Riemann-Liouville, calculamos a derivada de ordem $\alpha \in \mathbb{R}$ de algumas funções. Começamos demonstrando quanto vale a derivada da função potência, isto é, $D^\alpha t^k$, logo em seguida demonstramos que a derivada, segundo Riemann-Liouville, de uma constante não é nula, isto é, $D^\alpha k \neq 0$. Demonstramos, também, que a derivada que admite ser nula é $D^\alpha t^{\alpha-1}$, por fim calculamos a derivada fracionária da função exponencial, e^t [19, 33].

Exemplo 4.1.5. A derivada de Riemann-Liouville de ordem α , da função potência, $D^\alpha t^k$, com $k > -1$, $t > 0$ e $n-1 < \alpha \leq n$ onde $n \in \mathbb{N}$, é dada por

$$D^\alpha t^k = \begin{cases} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} t^{k-\alpha}, & \alpha - k \notin \mathbb{N} \\ 0, & \alpha - k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Para calcular o primeiro caso, onde $n-1 < \alpha \leq n$ e $\alpha - k \notin \mathbb{N}$, partimos da definição de Riemann-Liouville, isto é,

$$\begin{aligned} {}_0D_t^\alpha t^k &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} D^n \int_0^t \frac{u^k}{(t-u)^{\alpha-n+1}} du \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} D^n \int_0^t u^k \left[t \left(1 - \frac{u}{t} \right) \right]^{n-\alpha-1} du. \end{aligned}$$

Introduzimos a mudança de variável, $u = \eta t$, então

$$\begin{aligned} {}_0D_t^\alpha t^k &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} D^n \int_0^1 (t\eta)^k t^{n-\alpha-1} (1-\eta)^{n-\alpha-1} t d\eta \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} D^n [t^{k-\alpha+n}] \int_0^1 \eta^{k+1-1} (1-\eta)^{n-\alpha-1} d\eta \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left[\frac{\Gamma(n-\alpha+k+1)}{\Gamma(n-\alpha+k-n+1)} t^{n-\alpha+k-n} \right] \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(k+n-\alpha+1)}. \end{aligned} \tag{4.1.8}$$

Portanto,

$${}_0D_t^\alpha t^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} t^{k-\alpha}. \quad (4.1.9)$$

No segundo caso, basta notarmos que $D^n t^{n-(\alpha-k)} = 0$, na Eq.(4.1.9), quando $n - (\alpha - k) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Exemplo 4.1.6. Calculamos a derivada de Riemann-Liouville de ordem α da função constante, $D^\alpha c$ com $c \in \mathbb{R}^*$, para tanto partimos, novamente, da definição, isto é,

$$\begin{aligned} D^\alpha c &= D^n J^{n-\alpha} c \\ &= D^n \left\{ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{c}{(t-u)^{\alpha-n+1}} du \right\} \\ &= \frac{c}{\Gamma(n-\alpha)} D^n \left[\frac{t^{n-\alpha}}{n-\alpha} \right] \\ &= \frac{c \Gamma(n-\alpha+1) t^{-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha) \Gamma(n-\alpha-n+1) (n-\alpha)}. \end{aligned}$$

Podemos, assim, escrever

$$D^\alpha c = \frac{ct^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. \quad (4.1.10)$$

Admitindo $k = 0$, na Eq.(4.1.9), obtemos

$$D^\alpha 1 = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

que é exatamente a Eq.(4.1.10) no caso em que nesta temos $c = 1$.

Exemplo 4.1.7. Calculamos, agora, a derivada de Riemann-Liouville de ordem α da função $f(t) = t^{\alpha-1}$, isto é, $D^\alpha t^{\alpha-1} = 0$ com $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, para tanto utilizamos a Eq.(4.1.9), portanto

$$D^\alpha t^{\alpha-1} = \frac{\Gamma(\alpha-1+1)}{\Gamma(\alpha-1-\alpha+1)} t^{\alpha-1-\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(0)} t^{-1}.$$

Mostramos que a função $\Gamma(y)$ diverge quando $y \rightarrow 0$, isto é, $\Gamma(0) \rightarrow \infty$, para tanto utilizamos a definição da função gama

$$\Gamma(0) = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx, \quad x > 0. \quad (4.1.11)$$

Notemos que,

$$\int_1^\infty e^{-\eta x} d\eta = -\frac{e^{-\eta x}}{x} \Big|_1^\infty = \frac{e^{-x}}{x}, \quad x > 0. \quad (4.1.12)$$

Então, substituímos a Eq.(4.1.12) na Eq.(4.1.11), obtemos

$$\begin{aligned}
\Gamma(0) &= \int_0^\infty \int_1^\infty e^{-\eta x} d\eta dx = \int_1^\infty \int_0^\infty e^{-\eta x} dx d\eta \\
&= \int_1^\infty \left[-\frac{e^{-\eta x}}{\eta} \right]_0^\infty d\eta, \quad \text{onde } \eta > 0, \\
&= \int_1^\infty \frac{d\eta}{\eta} = \ln(\eta) \Big|_1^\infty \\
&= \ln(\infty) - \ln(1) \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Segue-se que, $\Gamma(0) \rightarrow \infty$ e daí obtemos

$$D^\alpha t^{\alpha-1} = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(0)} t^{-1} = 0.$$

Exemplo 4.1.8. Finalmente calculamos a derivada no sentido de Riemann-Liouville de ordem $\alpha \in \mathbb{R}$ da função $f(t) = e^t$, onde $n-1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}$. Utilizamos a representação da exponencial em série de Taylor, isto é,

$$e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(k+1)}.$$

Vimos que a função de Mittag-Leffler admite como caso particular a função exponencial, isto é,

$$E_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(k+1)} = e^t. \quad (4.1.13)$$

Utilizamos a Eq.(4.1.13) para calcular a derivada de ordem α , então

$$\begin{aligned}
{}_0D_t^\alpha e^t &= D_t^\alpha \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(k+1)} \right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} t^{k-\alpha} \right] \frac{1}{\Gamma(k+1)} \\
&= e^t t^{-\alpha} e^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(k-\alpha+1)}.
\end{aligned}$$

Utilizamos a definição da função gama incompleta, vista no Capítulo 2, obtemos

$${}_0D_t^\alpha e^t = e^t t^{-\alpha} \gamma^*(-\alpha, t).$$

4.1.3 Lei dos Expoentes

No cálculo fracionário, a lei dos expoentes é conhecida por ser geralmente verdade para os operadores integrais fracionários, no entanto, para os operadores de diferenciação fracionária, em geral, tal lei não se aplica. Esta lei será válida para os operadores diferenciais segundo Riemann-Liouville se satisfizer as condições do teorema que segue, [17].

Teorema 4.1.9. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tais que $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$, $\operatorname{Re}(\beta) > 0$ e consideremos $g \in L_1[a, b]$ e $f = J^{\alpha+\beta}g$, onde J é o operador de integração de Riemann-Liouville. Portanto, segue que

$$D^\alpha D^\beta f = D^{\alpha+\beta} f.$$

Não precisamos conhecer a função g , basta saber que ela existe.

Demonstração. Pela hipótese de f , pela definição do operador de diferenciação de Riemann-Liouville e denotando, por simplicidade, $[\alpha] = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1$, $[\beta] = [\operatorname{Re}(\beta)] + 1$, obtemos

$$D^\alpha D^\beta f = D^\alpha D^\beta J^{\alpha+\beta} g = D^{[\alpha]} J^{[\alpha]-\alpha} D^{[\beta]} J^{[\beta]-\beta} J^{\alpha+\beta} g.$$

A partir da propriedade de semigrupo dos operadores de integração fracionária, podemos reescrever a equação acima da seguinte maneira

$$\begin{aligned} D^\alpha D^\beta f &= D^{[\alpha]} J^{[\alpha]-\alpha} D^{[\beta]} J^{[\beta]+\alpha} g \\ &= D^{[\alpha]} J^{[\alpha]-\alpha} \underbrace{D^{[\beta]} J^{[\beta]}}_I J^\alpha g, \end{aligned}$$

onde I é o operador identidade. Segue-se, novamente pela propriedade de semigrupo dos operadores de integração fracionária, que

$$D^\alpha D^\beta f = D^{[\alpha]} J^{[\alpha]-\alpha} J^\alpha g = D^{[\alpha]} J^{[\alpha]} g.$$

Portanto, obtemos

$$D^\alpha D^\beta f = g.$$

De forma análoga, vamos demonstrar que $D^{\alpha+\beta} f = g$, isto é,

$$D^{\alpha+\beta} f = D^{\alpha+\beta} J^{\alpha+\beta} g = D^{[\alpha+\beta]} J^{[\alpha+\beta]-(\alpha+\beta)} J^{\alpha+\beta} g.$$

Pela propriedade de semigrupo, obtemos

$$D^{\alpha+\beta} f = D^{[\alpha+\beta]} J^{[\alpha+\beta]} g = g.$$

Enfim, segue-se que

$$D^\alpha D^\beta f = D^{\alpha+\beta} f.$$

■

Os exemplos a seguir ilustram casos em que as condições do teorema não são satisfeitas, então a lei dos expoentes, para as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville não é sempre válida, isto é, [19, 23, 25]

$$D^\alpha D^\beta f(t) = D^\beta D^\alpha f(t) \neq D^{\alpha+\beta} f(t), \quad (4.1.14)$$

$$D^\alpha D^\beta f(t) \neq D^\beta D^\alpha f(t) = D^{\alpha+\beta} f(t). \quad (4.1.15)$$

Para verificar como não necessariamente a derivada fracionária obedece a lei dos expoentes, explicitamos dois exemplos.

Exemplo 4.1.10. Para ilustrar a primeira relação em Eq.(4.1.14), consideramos $f(t) = t^{-1/2}$, com $\alpha = \beta = 1/2$. Para tal utilizamos a Eq.(4.1.9), de onde segue-se que

$$D^{1/2}t^{-1/2} = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2}) + 1}{\Gamma(-\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2})}t^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(0)}t^{-1} = 0,$$

$$D^{1/2}[D^{1/2}t^{-1/2}] = D^{1/2}0 = 0,$$

porém

$$\begin{aligned} D^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}t^{-1/2} &= D^1t^{-1/2} = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2} + 1)}{\Gamma(-\frac{1}{2} + 1 - 1)}t^{-\frac{1}{2}-1} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(-\frac{1}{2})}t^{-3/2} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{-2\Gamma(\frac{1}{2})}t^{-3/2} = \frac{t^{-3/2}}{2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$D^{1/2}D^{1/2}t^{-1/2} = D^{1/2}D^{1/2}t^{-1/2} \neq D^1t^{-1/2}.$$

Exemplo 4.1.11. Para ilustrar a segunda relação em Eq.(4.1.15), consideramos $f(t) = t^{1/2}$ com $\alpha = 1/2$ e $\beta = 3/2$. Utilizamos, novamente, a Eq.(4.1.9), então obtemos

$$D^{1/2}t^{1/2} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + 1)}{\Gamma(\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2})}t^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + 1)}{\Gamma(1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

e

$$D^{3/2}t^{1/2} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + 1)}{\Gamma(\frac{1}{2} + 1 - \frac{3}{2})}t^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}} = \frac{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(0)}t^{-1} = 0.$$

Então, $D^{1/2}D^{3/2}t^{1/2} = 0$, porém

$$\begin{aligned} D^{3/2}D^{1/2}t^{1/2} &= D^{3/2}[D^{1/2}t^{1/2}] = D^{3/2}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right] \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}D^{3/2}[1] = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(0 + 1)}{\Gamma(0 + 1 - \frac{3}{2})}t^{-3/2} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[\frac{1}{-2\Gamma(\frac{1}{2})}\right]t^{-3/2} = -\frac{t^{-3/2}}{4} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} D^{3/2}D^{1/2}t^{1/2} &= D^2t^{1/2} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + 1)}{\Gamma(\frac{1}{2} + 1 - 2)}t^{\frac{1}{2}-2} \\ &= \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(-\frac{1}{2})}t^{-3/2} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{-2\sqrt{\pi}}t^{-3/2} \\ &= -\frac{t^{-3/2}}{4}. \end{aligned}$$

Segue-se que

$$D^{1/2}D^{3/2}t^{1/2} \neq D^{3/2}D^{1/2}t^{1/2} = D^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}t^{1/2}.$$

4.1.4 Derivada Fracionária de Riemann-Liouville da Função de Mittag-Leffler

Nesta seção calculamos a derivada fracionária de Riemann-Liouville da função de Mittag-Leffler de três parâmetros e recuperamos, como casos particulares, a derivada de Riemann-Liouville das funções de Mittag-Leffler de um e dois parâmetros.

Teorema 4.1.12. Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $n - 1 < \alpha, \beta, \gamma \leq n$ onde $n \in \mathbb{N}$, então

$$D^\alpha [t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^\gamma(t^\alpha)] = t^{\beta-\alpha-1} E_{\alpha,\beta-\alpha}^\gamma(t^\alpha),$$

onde $\beta - \alpha > 0$.

Demonstração. A partir da definição do operador de Riemann-Liouville, obtemos que

$$D^\alpha [t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^\gamma(t^\alpha)] = D^n J^{n-\alpha} [t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^\gamma(t^\alpha)].$$

Escrevendo a função de Mittag-Leffler de três parâmetros em termos da sua série, Eq.(2.2.5), obtemos

$$D^\alpha [t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^\gamma(t^\alpha)] = D^n J^{n-\alpha} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{t^{\alpha k + \beta - 1}}{k!} \right],$$

onde, a partir da Eq.(3.4.1) e a derivada inteira de ordem n da função potência, podemos escrever

$$\begin{aligned} D^\alpha [t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^\gamma(t^\alpha)] &= D^n \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_k}{k! \Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{\Gamma(\alpha k + \beta)}{\Gamma(\alpha k + \beta + n - \alpha)} t^{\alpha k + \beta + n - \alpha - 1} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_k}{k! \Gamma(\alpha k + \beta + n - \alpha)} \frac{\Gamma(\alpha k + \beta + n - \alpha)}{\Gamma(\alpha k + \beta - \alpha)} t^{\alpha k + \beta - \alpha - 1} \\ &= t^{\beta-\alpha-1} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_k}{\Gamma(\alpha k + \beta - \alpha)} \frac{t^{\alpha k}}{k!} \right]. \end{aligned}$$

Enfim, obtemos

$$D^\alpha [t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^\gamma(t^\alpha)] = t^{\beta-\alpha-1} E_{\alpha,\beta-\alpha}^\gamma(t^\alpha),$$

onde $\beta - \alpha > 0$. ■

No particular caso que $\gamma = 1$, obtemos

$$D^\alpha [t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(t^\alpha)] = t^{\beta-\alpha-1} E_{\alpha,\beta-\alpha}(t^\alpha).$$

Por outro lado, no caso em que $\gamma = 1$ e $\beta = 1$, devemos ter $\alpha < 1$, logo

$$D^\alpha [E_\alpha(t^\alpha)] = t^{-\alpha} E_{\alpha,1-\alpha}(t^\alpha) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + E_\alpha(t^\alpha).$$

No caso em que $\alpha = n \in \mathbb{N}$, obtemos

$$D^n E_n(t^n) = E_n(t^n).$$

4.2 A Derivada Fracionária Segundo Caputo

Sejam $\alpha \in \mathbb{C}$ e $n = [\text{Re}(\alpha)] + 1$, o operador ${}^*D^\alpha f(t)$ definido por

$${}^*D^\alpha f(t) := J^{n-\alpha} D^n f(t)$$

é chamado de operador diferencial fracionário de Caputo de ordem α , [17, 23, 39, 45].

Definição 4.2.1. As derivadas fracionárias de Caputo de ordem $\alpha \in \mathbb{C}$, à esquerda e à direita são definidas, respectivamente, por ${}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a J_t^{n-\alpha} D^n f(t)$ e ${}_t^C D_b^\alpha f(t) = (-1)^n {}_t J_b^{n-\alpha} D^n f(t)$ com $n = [\text{Re}(\alpha)] + 1$, onde $\text{Re}(\alpha) > 0$, ou seja,

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{D^n[f(u)]}{(t-u)^{\alpha-n+1}} du, \quad \alpha \in \mathbb{R}_+, a \in \mathbb{R} \quad (4.2.1)$$

$${}_t^C D_b^\alpha f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b \frac{D^n[f(u)]}{(u-t)^{\alpha-n+1}} du, \quad \alpha \in \mathbb{R}_+, b \in \mathbb{R} \quad (4.2.2)$$

onde $D^n[f(u)] = \frac{d^n f(u)}{du^n}$ é a derivada n de ordem inteira. As derivadas fracionárias de Caputo são válidas para $\alpha \in \mathbb{C}$, porém aqui consideramos apenas $\alpha \in \mathbb{R}$, salvo menção em contrário. Neste trabalho vamos considerar apenas a derivada fracionária de Caputo à esquerda com o limite inferior de integração $a = 0$. Assim, por simplicidade, denotaremos este operador por ${}^*D^\alpha f(t)$.

4.2.1 Exemplos

Discutimos a definição da derivada fracionária de Caputo a partir de dois exemplos enunciados a seguir.

Exemplo 4.2.2. A derivada fracionária segundo Caputo da função potência, com $\alpha \in \mathbb{R}$ é dada por [26]

$${}^*D^\alpha t^k = \begin{cases} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} t^{k-\alpha}, & n-1 < \alpha \leq n, \quad k > n-1, \quad k \in \mathbb{R} \\ 0, & n-1 < \alpha < n, \quad k \leq n-1, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Para calcular o primeiro caso, com $n-1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}$, $k > n-1$ e $k \in \mathbb{R}$, utilizamos a definição dada por Caputo, Eq.(4.2.1), ou seja,

$${}^*D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{D^n[f(u)]}{(t-u)^{\alpha-n+1}} du.$$

Sabemos que a derivada de ordem inteira n da função potência u^k é

$$\frac{d^n u^k}{du^n} = \frac{k!}{(k-n)!} u^{k-n} = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-n+1)} u^{k-n},$$

logo,

$$\begin{aligned} {}_*D^\alpha t^k &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-n+1)} u^{k-n} (t-u)^{n-\alpha-1} du \\ &= \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(k-n+1)} \int_0^t u^{k-n} \left[t \left(1 - \frac{u}{t} \right) \right]^{n-\alpha-1} du. \end{aligned}$$

Introduzimos a mudança de variável, $u = ty$, de onde segue-se,

$${}_D^\alpha t^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(k-n+1)} t^{k-\alpha} \int_0^1 y^{k-n+1-1} (1-y)^{n-\alpha-1} dy.$$

Relacionamos esta integral com a integral que define a função beta, logo

$$\begin{aligned} {}_*D^\alpha t^k &= \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(k-n+1)} t^{k-\alpha} B(k-n+1, n-\alpha) \\ &= \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(k-n+1)} \frac{\Gamma(k-n+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(k-n+1+n-\alpha)} t^{k-\alpha}. \end{aligned}$$

Finalmente, podemos escrever

$${}_D^\alpha t^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} t^{k-\alpha}. \quad (4.2.3)$$

Para calcular o segundo caso, basta notarmos que $D^n t^k = 0$, quando $k \leq n-1$ com $k, n \in \mathbb{N}$.

Note que, a derivada da função potência segundo Riemann-Liouville é dada pela Eq.(4.1.9) e coincide com a derivada da função potência segundo Caputo dada pela Eq.(4.2.3).

Exemplo 4.2.3. Mostramos que a derivada de Caputo de ordem $\alpha \in \mathbb{R}$ com $n-1 < \alpha \leq n$ onde $n \in \mathbb{N}$ da função constante é nula, ou seja, ${}_D^\alpha k = 0$, onde $k \in \mathbb{R}^*$.

A partir da definição da derivada fracionária segundo Caputo, obtemos

$${}_D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{D^n[f(u)]}{(t-u)^{\alpha-n+1}} du.$$

Note que,

$$\frac{d^n k}{du^n} = 0, \quad \text{onde } n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, obtemos

$${}_D^\alpha k = 0.$$

Exemplo 4.2.4. Calculamos a derivada fracionária de Caputo de ordem $\alpha \in \mathbb{R}$ com $n-1 < \alpha \leq n$ onde $n \in \mathbb{N}$, da função de Mittag-Leffler de um parâmetro, isto é, ${}_D^\alpha[E_\alpha(t^\alpha)]$. De fato, temos que

$$\begin{aligned} {}_D^\alpha[E_\alpha(t^\alpha)] &= {}_D^\alpha \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{{}_D[t^{\alpha k}]}{\Gamma(\alpha k + 1)}. \end{aligned}$$

A partir da derivada de Caputo da função potência, Eq.(4.2.3), podemos escrever

$$\begin{aligned} {}_D^\alpha[E_\alpha(t^\alpha)] &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha k + 1)} \frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{\Gamma(\alpha k - \alpha + 1)} t^{\alpha k - \alpha} \\ &\stackrel{k \rightarrow k+1}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)}. \end{aligned}$$

Finalmente, podemos escrever

$${}_D^\alpha[E_\alpha(t^\alpha)] = E_\alpha(t^\alpha). \quad (4.2.4)$$

Podemos notar que a derivada segundo Caputo da função de Mittag-Leffler de um parâmetro, ${}_D^\alpha[E_\alpha(t^\alpha)] = E_\alpha(t^\alpha)$ generaliza a propriedade $\frac{d}{dt}e^t = e^t$.

4.2.2 Transformada de Laplace para Derivada Fracionária Segundo Caputo

Nesta seção calculamos a transformada de Laplace da derivada fracionária segundo Caputo através do seguinte teorema, [23, 45].

Teorema 4.2.5. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ com $n-1 < \alpha \leq n$ e $n \in \mathbb{N}$. A transformada de Laplace da derivada de Caputo é dada por

$$\mathcal{L}[{}_D^\alpha f(t)] = s^\alpha \mathcal{L}[f(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} f^{(k)}(0).$$

Demonstração. Sabemos que

$${}_D^\alpha f(t) = J^{n-\alpha} D^n f(t)$$

segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[{}_D^\alpha f(t)] &= \mathcal{L}[J^{n-\alpha} D^n f(t)] \\ &= \mathcal{L} \left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-u)^{n-\alpha-1} D^n[f(u)] du \right]. \end{aligned}$$

Note que a integral acima pode ser escrita como um produto de convolução, isto é,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[J^{n-\alpha}D^n f(t)] &= \mathcal{L}\left[\frac{t^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} * D^n[f(t)]\right] \\ &= \mathcal{L}\left[\frac{t^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}\right] \mathcal{L}[D^n f(t)].\end{aligned}$$

Observamos que,

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}\right] = s^{\alpha-n}$$

e

$$\mathcal{L}[D^n f(t)] = s^n \mathcal{L}[f(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} f^{(k)}(0),$$

então

$$\mathcal{L}[J^{n-\alpha}D^n f(t)] = s^{\alpha-n} \left\{ s^n \mathcal{L}[f(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} f^{(k)}(0) \right\}.$$

Enfim, segue-se que

$$\mathcal{L}[*D^\alpha f(t)] = s^\alpha \mathcal{L}[f(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-1-k} f^{(k)}(0).$$

■

A transformada de Laplace para a derivada segundo Riemann-Liouville necessita do conhecimento das condições iniciais em termos da integral fracionária $J^{n-\alpha}$ e de suas derivadas de ordem $k = 1, 2, \dots, n-1$, por outro lado a transformada de Laplace da derivada fracionária segundo Caputo é mais apropriada visto que requer apenas o conhecimento das condições iniciais dadas e suas derivadas de ordem $k = 1, 2, \dots, n-1$ que são fisicamente interpretáveis, [19].

4.2.3 Lei dos Expoentes

Já vimos que a lei dos expoentes nem sempre é válida para os operadores diferenciais fracionários de Riemann-Liouville, porém a lei dos expoentes será válida para os operadores diferenciais segundo Caputo se satisfizer as condições do lema que segue.

Lema 4.2.6. Seja $a < b$ e $f \in C^k[a, b]$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Além disso, sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ com $\text{Re}(\alpha) > 0$ e $\text{Re}(\beta) > 0$, tal que exista algum $l \in \mathbb{N}$ com $l \leq k$ e $\beta, \beta + \alpha \in [l-1, l]$. Então, vale [17]

$$*D^\alpha *D^\beta f = *D^{\beta+\alpha} f.$$

Demonstração. O lema é trivial no caso em que $\beta = l - 1$ e $\alpha + \beta = l$. Note que, para valer a afirmação do lema devemos ter $0 < \alpha < 1$. Considerando $f^{(k)}(0) = 0$ para $k = 0, 1, 2, \dots, (n - 1)$ no teorema (4.3.1), temos que

$$D^\alpha f(t) = {}_*D^\alpha f(t).$$

quando $f(0) = 0$. Por simplicidade, denotamos $[\beta] = [\text{Re}(\beta)] + 1$. Vamos considerar três casos:

1. $\alpha + \beta \in \mathbb{N}$. Neste caso, temos que, $\alpha + \beta = [\text{Re}(\beta)] + 1 = [\beta]$, assim $\alpha = [\text{Re}(\beta)] + 1 - \beta = [\beta] - \beta$. Note que, $f(0) = 0$ e já vimos que a derivada de Caputo de uma constante é zero, logo ${}_{}^*D^\beta f(0) = 0 = D^\beta f(0)$. Assim,

$$\begin{aligned} {}_*D^\alpha {}_*D^\beta f &= D^\alpha {}_*D^\beta f = D^\alpha J^{[\beta] - \beta} D^{[\beta]} f = D^\alpha J^\alpha D^{[\beta]} f \\ &= D^{[\beta]} f = D^{\alpha + \beta} f = {}_*D^{\alpha + \beta} f. \end{aligned}$$

2. $\beta \in \mathbb{N}$. A partir da definição (4.1.1), temos

$${}_{}^*D^\alpha {}_*D^\beta f = {}_*D^\alpha D^\beta f = J^{1 - \alpha} D^{\beta + 1} f = {}_*D^{\alpha + \beta} f.$$

3. $[\beta] = [\text{Re}(\beta)] + 1 = [\text{Re}(\alpha + \beta)] + 1 = [\alpha + \beta]$, então

$$\begin{aligned} {}_*D^\alpha {}_*D^\beta f &= D^\alpha {}_*D^\beta f = D^\alpha {}_*D^{[\beta] - \beta} D^{[\beta]} f = D^1 J^{1 - \alpha} J^{[\beta] - \beta} D^{[\beta]} f \\ &= D^1 J^1 J^{[\alpha + \beta] - (\alpha + \beta)} D^{[\alpha + \beta]} f = {}_*D^{\alpha + \beta} f. \end{aligned}$$

■

Note que, a condição que exige a existência de um número l com as propriedades mencionadas no lema (4.2.6) é essencial. Para verificar como a lei dos expoentes não é válida se l não satisfizer as condições impostas consideramos o seguinte exemplo [17].

Exemplo 4.2.7. Consideramos $\alpha = \beta = 7/10$, ou seja, $7/10 = \beta < 1 < \alpha + \beta = 7/5$. Utilizamos a derivada de Caputo à esquerda com $a = 0$ e $f(t) = t$, então

$${}_{}^*D^{7/5} f(t) = J^{3/5} D^2 t = J^{3/5} 0 = 0,$$

porém

$${}_{}^*D^{7/10} f(t) = \frac{1}{\Gamma(13/10)} t^{3/10},$$

de onde segue-se

$${}_{}^*D^{7/10} [{}_{}^*D^{7/10} f(t)] = \frac{1}{\Gamma(3/5)} t^{-2/5}.$$

Enfim, podemos escrever

$$0 = {}_*D^{7/5} f(t) \neq {}_*D^{7/10} [{}_{}^*D^{7/10} f(t)] = \frac{1}{\Gamma(3/5)} t^{-2/5}.$$

4.2.4 Derivada Fracionária de Caputo da Função de Mittag-Leffler

Nesta seção calculamos a derivada fracionária de Caputo da função de Mittag-Leffler de três parâmetros e recuperamos, como casos particulares, a derivada de Caputo das funções de Mittag-Leffler de um e dois parâmetros.

Teorema 4.2.8. Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $n - 1 < \alpha, \beta, \gamma \leq n$ onde $n \in \mathbb{N}$, então

$${}_0D^\alpha[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}^\gamma(t^\alpha)] = t^{\beta-\alpha-1}E_{\alpha,\beta-\alpha}^\gamma(t^\alpha),$$

onde $\beta - \alpha > 0$.

Demonstração. Para demonstrar este resultado vamos utilizar a definição do operador diferencial de Caputo, bem como a derivada de ordem n da função potência e a integral fracionária desta mesma função, Eq.(3.4.1), ou seja,

$$\begin{aligned} {}_0D^\alpha[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}^\gamma(t^\alpha)] &= J^{n-\alpha}D^n[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}^\gamma(t^\alpha)] \\ &= J^{n-\alpha}D^n\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}\frac{t^{\alpha k + \beta - 1}}{k!}\right] \\ &= J^{n-\alpha}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_k}{k!\Gamma(\alpha k + \beta)}\frac{\Gamma(\alpha k + \beta)}{\Gamma(\alpha k + \beta - n)}t^{\alpha k + \beta - n - 1}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_k}{k!\Gamma(\alpha k + \beta - n)}\frac{\Gamma(\alpha k + \beta - n)}{\Gamma(\alpha k + \beta - \alpha)}t^{\alpha k + \beta - \alpha - 1}. \end{aligned}$$

Finalmente, podemos escrever

$${}_0D^\alpha[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}^\gamma(t^\alpha)] = t^{\beta-\alpha-1}E_{\alpha,\beta-\alpha}^\gamma(t^\alpha),$$

onde $\beta - \alpha > 0$. ■

No particular caso em que $\gamma = 1$, obtemos

$${}_0D^\alpha[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(t^\alpha)] = t^{\beta-\alpha-1}E_{\alpha,\beta-\alpha}(t^\alpha). \quad (4.2.5)$$

Admitindo $\beta - \alpha = 1$ na Eq.(4.2.5), temos que

$${}_0D^\alpha[t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(t^\alpha)] = E_\alpha(t^\alpha). \quad (4.2.6)$$

Utilizamos a **Propriedade 1** da função de Mittag-Leffler, Eq.(2.5.1), no caso em que nesta admitimos $\beta = 1$ e $t = t^\alpha$, ou seja,

$$E_\alpha(t^\alpha) - 1 = tE_{\alpha,\alpha+1}(t).$$

Substituindo esta última equação na Eq.(4.2.6), segue

$${}_0D^\alpha[E_\alpha(t^\alpha) - 1] = {}_0D^\alpha[E_\alpha(t^\alpha)] - {}_0D^\alpha[1] = {}_0D^\alpha[E_\alpha(t^\alpha)] = E_\alpha(t^\alpha),$$

que é justamente a Eq.(4.2.4).

4.3 Riemann-Liouville $\times$ Caputo

Nesta seção apresentamos as principais diferenças entre a derivada fracionária de Riemann-Liouville e a derivada fracionária segundo Caputo bem como a equação que relaciona estas duas formulações. Consideramos $f(t)$ uma função para a qual podemos aplicar a derivada e a integral de ordens fracionárias, então observamos que [19, 23]

$$D^\alpha f(t) = D^n J^{n-\alpha} f(t) \neq J^{n-\alpha} D^n f(t) = {}_*D^\alpha f(t), \quad (4.3.1)$$

ou seja, não é sempre possível comutar a integral fracionária com a derivada, se o fizermos estaremos alterando o resultado. Demonstramos, então, a equação que relaciona a derivada fracionária de Riemann-Liouville com a derivada fracionária de Caputo [28].

Teorema 4.3.1. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e $n - 1 < \alpha \leq n$ onde $n \in \mathbb{N}$. Então, a equação que relaciona a derivada fracionária de Riemann-Liouville com a derivada fracionária de Caputo é

$$D^\alpha f(t) = {}_*D^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(a), \quad t > 0. \quad (4.3.2)$$

Demonstração. Partimos da definição (4.1.1), isto é,

$$D^\alpha f(t) = D^n J^{n-\alpha} f(t).$$

Consideremos na Eq.(4.1.5), $f^{(k)}(a)$ com $t > a$, de onde segue que

$$\begin{aligned} D^\alpha f(t) &= D^n \left\{ J^{n-\alpha} \left[J^n D^n f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} f^{(k)}(a) \right] \right\} \\ &= \underbrace{D^n J^n}_I J^{n-\alpha} D^n f(t) + D^n J^{n-\alpha} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} f^{(k)}(a) \right] \\ &= J^{n-\alpha} D^n f(t) + D^n \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} J^{n-\alpha} [t^k] \right\} \\ &= {}_*D^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+n-\alpha)} D^n [t^{n-\alpha+k}] \\ &= {}_*D^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(a) \frac{1}{\Gamma(k+1+n-\alpha)} \frac{\Gamma(k+n-\alpha+1)}{\Gamma(k+n-\alpha+1-n)} t^{k+n-\alpha-n}. \end{aligned}$$

Finalmente, segue-se que

$$D^\alpha f(t) = {}_*D^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(a), \quad t > 0. \quad \blacksquare$$

Note que as formulações de Riemann-Liouville e Caputo serão iguais se, e somente se, $f^{(k)}(a) = 0$ para todo $k = 0, 1, \dots, (n-1)$.

O primeiro ponto em que as formulações de Riemann-Liouville e Caputo diferem é no cálculo da derivada da função constante. Uma vez que esta é nula segundo a formulação proposta por Caputo, o mesmo não ocorre com a formulação de Riemann-Liouville, ou seja,

$${}_*\mathcal{D}^\alpha c = 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{D}^\alpha c = \frac{ct^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

Outra importante diferença está no fato de que a derivada de Caputo da função de Mittag-Leffler de um parâmetro, que generaliza a função exponencial no caso em que este é igual a um, é a própria função de Mittag-Leffler de um parâmetro e isto não ocorre quando estamos considerando a derivada de Riemann-Liouville, isto é,

$${}_*\mathcal{D}^\alpha[E_\alpha(t^\alpha)] = E_\alpha(t^\alpha) \quad \text{e} \quad \mathcal{D}^\alpha[E_\alpha(t^\alpha)] \neq E_\alpha(t^\alpha).$$

Por fim, uma das diferenças mais importantes entre as formulações de Riemann-Liouville e Caputo e pela qual optamos pela formulação de Caputo para discutir a aplicação dada no Capítulo 6, é o fato de que a transformada de Laplace da derivada de Riemann-Liouville leva em consideração as condições iniciais em termos da integral fracionária e de suas derivadas de ordem inteira menores que ou iguais a $n - 1$. Já a transformada de Laplace da derivada de Caputo considera apenas as condições iniciais em termos de suas derivadas de ordem inteira menores que ou iguais a $n - 1$, isto é,

$$\mathcal{L}[{}_*\mathcal{D}^\alpha f(t)] = s^\alpha \mathcal{L}[f(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} f^{(k)}(0),$$

e

$$\mathcal{L}[\mathcal{D}^\alpha f(t)] = s^\alpha \mathcal{L}[f(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} g^{(k)}(0), \quad \text{onde} \quad g(t) = J^{n-\alpha} f(t),$$

respectivamente.

Capítulo 5

Regras de Derivação

No capítulo anterior apresentamos as definições para a derivada fracionária segundo Riemann-Liouville e Caputo. Neste capítulo vamos investigar quais generalizações das regras clássicas de derivação são estendidas para estas formulações. Iniciamos mostrando que a propriedade de linearidade, válida para os operadores de diferenciação usuais, é também válida para as formulações de Riemann-Liouville e Caputo. Posteriormente mostramos a regra de Leibniz para derivadas de ordem inteira e, em seguida, estendemos o resultado para as formulações de Riemann-Liouville e Caputo mencionando, porém, que é necessário impor outras condições. Por fim, demonstramos a regra da cadeia ou, também conhecida como, fórmula de Faà di Bruno para as derivadas de ordem inteira bem como para as formulações de Riemann-Liouville e Caputo, mencionando, aqui também, que são necessárias outras condições para ser possível a extensão deste resultado.

5.1 Linearidade

Uma das propriedades do cálculo usual envolvendo mais de uma função na mesma derivada é a propriedade de linearidade. Assim como as derivadas de ordem inteira possuem a propriedade de linearidade, pelo fato de seus operadores serem lineares, também os operadores diferenciais de Riemann-Liouville e Caputo possuem tal propriedade. Estes fatos estão enunciados, pelos seguintes teoremas, e demonstrados logo a seguir [5, 19, 36].

5.1.1 Linearidade da Derivada de Ordem Inteira

Teorema 5.1.1. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e f, g funções definidas em $[a, b]$ tais que $D^n f(t)$ e $D^n g(t)$ existam. Sejam ainda $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ duas constantes quaisquer, então $D^n[\lambda f(t) + \mu g(t)]$ existe e

$$D^n[\lambda f(t) + \mu g(t)] = \lambda D^n f(t) + \mu D^n g(t).$$

Demonstração. A prova deste teorema é feita a partir da definição da derivada usual, pois estes

operadores são lineares, isto é,

$$\begin{aligned}
D^n[\lambda f(t) + \mu g(t)] &= \frac{d^n}{dx^n}[\lambda f(t) + \mu g(t)] \\
&= \lambda \frac{d^n f(t)}{dt^n} + \mu \frac{d^n g(t)}{dt^n} \\
&= \lambda D^n f(t) + \mu D^n g(t).
\end{aligned}$$

■

5.1.2 Linearidade da Derivada Segundo Riemann-Liouville

Teorema 5.1.2. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ com $n - 1 < \alpha \leq n$ onde $n \in \mathbb{N}$ e f, g funções definidas em $[a, b]$ tais que ${}_a D_t^\alpha f(t)$ e ${}_a D_t^\alpha g(t)$ existam. Sejam ainda $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ duas constantes quaisquer, então ${}_a D_t^\alpha[\lambda f(t) + \mu g(t)]$ existe e

$${}_a D_t^\alpha[\lambda f(t) + \mu g(t)] = \lambda {}_a D_t^\alpha f(t) + \mu {}_a D_t^\alpha g(t).$$

Demonstração. A demonstração deste teorema é feita a partir da definição da derivada de Riemann-Liouville à esquerda, ou seja, Eq.(4.1.1), onde estes operadores são lineares, então

$$\begin{aligned}
{}_a D_t^\alpha[\lambda f(t) + \mu g(t)] &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} D^n \int_a^t (t - u)^{n - \alpha - 1} [\lambda f(u) + \mu g(u)] du \\
&= \frac{\lambda}{\Gamma(n - \alpha)} D^n \int_a^t (t - u)^{n - \alpha - 1} f(u) du + \frac{\mu}{\Gamma(n - \alpha)} D^n \int_a^t (t - u)^{n - \alpha - 1} g(u) du \\
&= \lambda {}_a D_t^\alpha f(t) + \mu {}_a D_t^\alpha g(t).
\end{aligned}$$

■

Este teorema também é válido para os operadores de Riemann-Liouville à direita.

5.1.3 Linearidade da Derivada Segundo Caputo

Teorema 5.1.3. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ com $n - 1 < \alpha \leq n$ onde $n \in \mathbb{N}$ e f, g funções definidas em $[a, b]$ tais que ${}_a^C D_t^\alpha f(t)$ e ${}_a^C D_t^\alpha g(t)$ existam. Sejam ainda $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ duas constantes quaisquer, então ${}_a^C D_t^\alpha[\lambda f(t) + \mu g(t)]$ existe, e

$${}_a^C D_t^\alpha[\lambda f(t) \pm \mu g(t)] = \lambda [{}_a^C D_t^\alpha f(t)] + \mu [{}_a^C D_t^\alpha g(t)].$$

Demonstração. A demonstração deste teorema é feita a partir da definição da derivada de Caputo à esquerda, ou seja, Eq.(4.2.1), onde estes operadores são lineares, então

$$\begin{aligned}
{}_a^C D_t^\alpha[\lambda f(t) + \mu g(t)] &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t (t - u)^{n - \alpha - 1} D^n[\lambda f(u) + \mu g(u)] du \\
&= \frac{\lambda}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t (t - u)^{n - \alpha - 1} D^n[f(u)] du + \frac{\mu}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t (t - u)^{n - \alpha - 1} D^n[g(u)] du \\
&= \lambda [{}_a^C D_t^\alpha f(t)] + \mu [{}_a^C D_t^\alpha g(t)].
\end{aligned}$$

■

Este teorema também é válido para os operadores de Caputo à direita.

5.2 Regra de Leibniz

Outra importante regra de derivação é a regra do produto, ou regra de Leibniz. Esta regra é utilizada, geralmente, quando queremos calcular a derivada do produto de duas funções. Primeiramente demonstramos esta regra para a derivada de ordem inteira, logo em seguida estendemos o resultado para derivadas de ordem $\alpha \in \mathbb{R}$ e $n - 1 < \alpha \leq n$ onde $n \in \mathbb{N}$. Esta extensão abrange as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville e Caputo [19, 34, 35, 36]. Vamos, aqui, apresentar uma definição que será utilizada posteriormente.

Definição 5.2.1. Se f é n diferenciável e $f^{(n)} \in C(I)$, onde I é um intervalo, então dizemos que f é de classe C^n em I , e escrevemos $f \in C^n(I)$.

5.2.1 Regra de Leibniz para Derivada de Ordem Inteira

Sabemos, do cálculo usual, que a regra de Leibniz para a derivada primeira do produto de duas funções $f(t)$ e $g(t)$ é dada por $D[f(t)g(t)] = f(t)g'(t) + f'(t)g(t)$. Esta regra pode ser facilmente estendida, por indução matemática, para a derivada de ordem inteira $n \in \mathbb{N}$. Enunciamos esta extensão através do teorema a seguir.

Teorema 5.2.2. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $f, g \in C^n[a, b]$ duas funções diferenciáveis. Então,

$$D^n[f(t)g(t)] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [D^k f(t)][D^{n-k} g(t)], \quad (5.2.1)$$

onde $D^0 f(t) = f(t)$ e $D^0 g(t) = g(t)$.

Demonstração. Mostremos que a regra é válida para $n = 1$

$$\begin{aligned} D[f(t)g(t)] &= f(t)g'(t) + f'(t)g(t) \\ &= \binom{1}{0} [D^0 f(t)][D^1 g(t)] + \binom{1}{1} [D^1 f(t)][D^{1-1} g(t)] \\ &= \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} [D^k f(t)][D^{1-k} g(t)]. \end{aligned}$$

Supondo que a fórmula é verdadeira para $n = m$, temos

$$D^m[f(t)g(t)] = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} [D^k f(t)][D^{m-k} g(t)].$$

Vamos mostrar que a fórmula é válida para $n = m + 1$, utilizando o fato de que a lei dos expoentes para as derivadas de ordem inteira é válida, isto é,

$$\begin{aligned} D^{m+1}[f(t)g(t)] &= \frac{d}{dt} \left[\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} [D^k f(t)][D^{m-k} g(t)] \right] \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} [D^k f(t)][D^{m-k+1} g(t)] + [D^{k+1} f(t)][D^{m-k} g(t)] \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} [D^k f(t)][D^{m-k+1} g(t)] + \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} [D^{k+1} f(t)][D^{m-k} g(t)]. \end{aligned}$$

Trocando o índice do segundo somatório $k \rightarrow k - 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
D^{m+1}[f(t)g(t)] &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} [D^k f(t)][D^{m-k+1}g(t)] + \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m}{k-1} [D^k f(t)][D^{m-k+1}g(t)] \\
&= [D^0 f(t)][D^{m+1}g(t)] + \sum_{k=1}^m \left[\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} \right] [D^k f(t)][D^{m-k+1}g(t)] + \\
&\quad + [D^{m+1}f(t)][D^0 g(t)] \\
&= f(x)[D^{m+1}g(t)] + \sum_{k=1}^m \binom{m+1}{k} [D^k f(t)][D^{m-k+1}g(t)] + [D^{m+1}f(t)]g(t).
\end{aligned}$$

Para detalhes do resultado $\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} = \binom{m+1}{k}$ veja Apêndice A. Note que,

$$\binom{m}{0} = \binom{m+1}{0} = 1 \quad \text{e} \quad \binom{m}{m} = \binom{m+1}{m+1} = 1.$$

Segue que,

$$D^{m+1}[f(t)g(t)] = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} [D^k f(t)][D^{m-k+1}g(t)],$$

portanto vale a Eq.(5.2.1). ■

É possível aplicar a regra de Leibniz para derivadas de ordem inteira para quaisquer funções de classe $C^n[a, b]$. Note que a regra é simétrica em relação as funções $f(t)$ e $g(t)$, isto é, a ordem das funções pode ser trocada na Eq.(5.2.1) o que não altera o resultado.

5.2.2 Regra de Leibniz para a Derivada de Riemann-Liouville

O objetivo, agora, é estender a regra de Leibniz de ordem $n \in \mathbb{N}$ para $\alpha \in \mathbb{R}$ utilizando a derivada fracionária segundo Riemann-Liouville. Para tanto necessitamos do seguinte lema [17, 19, 44].

Lema 5.2.3. Se $f(t)$ é uma função de classe **C** no intervalo (a, b) , então

$$D^\alpha f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} [D^n f(t)] \tag{5.2.2}$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e $t \in (a, b)$. Denotemos

$$\begin{aligned}
[\alpha] &= \text{parte inteira de } \alpha; \\
\{\alpha\} &= \text{parte fracionária de } \alpha, 0 \leq \alpha < 1,
\end{aligned}$$

isto é, $\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$.

Demonstração. Vamos considerar dois casos. Primeiro o caso em que $\alpha < 0$ e logo após o caso em que $\alpha > 0$.

- Caso $\alpha < 0$. Visto que $\alpha < 0$ a derivada fracionária de Riemann-Liouville se reduz à integral fracionária, isto é,

$$D^\alpha f(t) = J^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^t (t-x)^{-\alpha-1} f(x) dx. \quad (5.2.3)$$

Como f é de classe $\mathbf{C}$ em (a, b) então ela é analítica em (a, b) e pode ser representada pela série

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n [D^n f(t)]}{n!} (t-x)^n. \quad (5.2.4)$$

Substituindo a Eq.(5.2.4) na Eq.(5.2.3), segue-se que¹

$$\begin{aligned} D^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^t (t-x)^{-\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n [D^n f(t)]}{n!} (t-x)^n dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n [D^n f(t)]}{n! \Gamma(-\alpha)} \int_a^t (t-x)^{n-\alpha-1} dx. \end{aligned}$$

Introduzindo a mudança de variável, $u = t - x$, obtemos

$$\begin{aligned} D^\alpha f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n [D^n f(t)]}{n! \Gamma(-\alpha)} \int_{t-a}^0 u^{n-\alpha-1} (-du) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n [D^n f(t)]}{n! \Gamma(-\alpha)} \int_0^{t-a} u^{n-\alpha-1} du \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n [D^n f(t)]}{n! \Gamma(-\alpha)} \left[\frac{u^{n-\alpha}}{n-\alpha} \right]_0^{t-a} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n [D^n f(t)]}{n! \Gamma(-\alpha)} \frac{(t-a)^{n-\alpha}}{n-\alpha}. \end{aligned}$$

Multiplicando e dividindo a última equação por $\Gamma(n-\alpha)$ e utilizando a relação funcional, Eq.(2.1.1), obtemos

$$\begin{aligned} D^\alpha f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(n-\alpha)}{n! \Gamma(-\alpha)} \frac{(t-a)^{n-\alpha+1}}{(n-\alpha) \Gamma(n-\alpha)} [D^n f(t)] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(n-\alpha)}{n! \Gamma(-\alpha)} \frac{(t-a)^{n-\alpha+1}}{\Gamma(n-\alpha+1)} [D^n f(t)] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \frac{(t-a)^{n-\alpha+1}}{\Gamma(n-\alpha+1)} [D^n f(t)]. \end{aligned}$$

Para detalhes do resultado $\binom{\alpha}{n} = \frac{(-1)^n \Gamma(n-\alpha)}{n! \Gamma(-\alpha)}$ veja Apêndice A.

¹Visto que f é de classe $\mathbf{C}$ podemos comutar o somatório com a integral.

- Caso $\alpha > 0$. Como² f é de classe **C** em (a, b) , então ela é analítica em (a, b) e pode ser, novamente, representada pela série dada pela Eq.(5.2.4), então

$$D^\alpha f(t) = D^{[\alpha]+1} J^{\{\alpha\}-1} f(t).$$

Utilizando o resultado anterior, temos

$$\begin{aligned} D^\alpha f(t) &= D^{[\alpha]+1} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\{\alpha\}-1}{n} \frac{(t-a)^{n-\{\alpha\}+1}}{\Gamma(n-\{\alpha\}+2)} [D^n f(t)] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\{\alpha\}-1}{n} D^{[\alpha]+1} \frac{(t-a)^{n-\{\alpha\}+1}}{\Gamma(n-\{\alpha\}+2)} [D^n f(t)]. \end{aligned}$$

Aplicando a regra de Leibniz para a derivada de ordem inteira, Eq.(5.2.1), no caso em que $f(t) = D^n[f(t)]$ e $g(t) = (t-a)^{n-\{\alpha\}+1}$, segue-se que

$$D^\alpha f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\{\alpha\}-1}{n} \sum_{k=0}^{[\alpha]+1} \binom{[\alpha]+1}{k} \frac{(t-a)^{n-\alpha+k} [D^{n+k} f(t)]}{\Gamma(n-\alpha+k+1)}.$$

Note que, podemos tomar o limite superior do segundo somatório sendo infinito, pois $\binom{n}{k} = 0$ se $n < k$, então

$$D^\alpha f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\{\alpha\}-1}{n} \binom{[\alpha]+1}{k} \frac{(t-a)^{n-\alpha+k} [D^{n+k} f(t)]}{\Gamma(n-\alpha+k+1)}.$$

Introduzindo a mudança de variável $j = n + k$, obtemos

$$\begin{aligned} D^\alpha f(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \left[\sum_{n=0}^j \binom{\{\alpha\}-1}{n} \binom{[\alpha]+1}{k} \right] \frac{(t-a)^{j-\alpha} [D^j f(t)]}{\Gamma(j-\alpha+1)} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha}{j} \frac{(t-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(j+1-\alpha)} [D^j f(t)]. \end{aligned}$$

■

Tendo demonstrado o lema anterior, podemos demonstrar, agora, a regra de Leibniz para a derivada fracionária de Riemann-Liouville [19, 44].

Teorema 5.2.4. Sejam $f(t)$ e $g(t)$ funções analíticas em $[a, b]$. Então,

$$D^\alpha [f(t)g(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} [D^k g(t)] [D^{\alpha-k} f(t)], \quad (5.2.5)$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\alpha \neq -1, -2, -3, \dots$

²Novamente, uma vez que, f é de classe **C** podemos comutar o somatório com a derivada.

Demonstração. Utilizando a Eq.(5.2.2), obtemos

$$D^\alpha[f(t)g(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)} D^n[f(t)g(t)].$$

Aplicamos, agora, a regra de Leibniz para o caso inteiro, Eq.(5.2.1), de onde segue-se que

$$D^\alpha[f(t)g(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [D^{n-k}f(t)][D^k g(t)].$$

Comutando os somatórios³ e utilizando, novamente, o fato de que $\binom{n}{k} = 0$ se $n < k$, obtemos

$$D^\alpha[f(t)g(t)] = \sum_{k=0}^n \sum_{n=k}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \binom{n}{k} \frac{(t-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)} [D^{n-k}f(t)][D^k g(t)].$$

Introduzindo a mudança de variável $n+k = n$, temos que

$$\begin{aligned} D^\alpha[f(t)g(t)] &= \sum_{k=0}^{\infty} [D^k g(t)] \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n+k} \binom{n+k}{k} \frac{(t-a)^{n+k-\alpha}}{\Gamma(n+k-\alpha+1)} [D^n f(t)] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} [D^k g(t)] \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha-k}{n} \frac{(t-a)^{n+k-\alpha}}{\Gamma(n+k-\alpha+1)} [D^n f(t)]. \end{aligned}$$

Finalmente, podemos escrever

$$D^\alpha[f(t)g(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} [D^k g(t)][D^{\alpha-k} f(t)]. \quad (5.2.6)$$

■

Diferentemente da regra de Leibniz para derivadas inteiras, Eq.(5.2.1), a regra de Leibniz para a derivada fracionária de Riemann-Liouville, Eq.(5.2.5), é aplicável às funções analíticas em um intervalo $[a, b]$, porém não está manifesta a simetria das funções $f(t)$ e $g(t)$.

5.2.3 Regra de Leibniz Generalizada

Embora o resultado da Eq.(5.2.5) esteja correto, não é trivial que a derivada fracionária de fg é igual a derivada fracionária de gf . Obtemos aqui a regra de Leibniz generalizada para as derivadas de Riemann-Liouville dada pelo teorema a seguir [5, 35]. A demonstração deste teorema será baseada em [19, 51].

³Note que $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty}$.

Teorema 5.2.5. Sejam $f(t)$ e $g(t)$ funções analíticas e sejam ainda $\alpha \in \mathbb{R}$ e γ um parâmetro arbitrário, então

$$D^\alpha[f(t)g(t)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \binom{\alpha}{k+\gamma} [D^{\alpha-k-\gamma}f(t)][D^{k+\gamma}g(t)]. \quad (5.2.7)$$

Demonstração. Uma vez que $f(t)$ e $g(t)$ são funções analíticas podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$f(t) = \frac{t^n}{\Gamma(n+1)} \quad \text{e} \quad g(t) = \frac{t^m}{\Gamma(m+1)}.$$

Utilizando o fato de que o operador diferencial de Riemann-Liouville é linear, podemos escrever

$$D^\alpha[f(t)g(t)] = D^\alpha \left[\frac{t^{n+m}}{\Gamma(n+1)\Gamma(m+1)} \right].$$

Multiplicando e dividindo a equação acima por $\Gamma(n+m+1)$, obtemos

$$D^\alpha[f(t)g(t)] = D^\alpha \left[\frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(m+1)} \frac{t^{n+m+1}}{\Gamma(n+m+1)} \right].$$

Aplicando o resultado da Eq.(4.1.9), isto é,

$$D^\alpha t^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} t^{k-\alpha},$$

segue que

$$D^\alpha[f(t)g(t)] = \frac{\Gamma(m+n+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(m+1)\cancel{\Gamma(m+n+1)}} \frac{\cancel{\Gamma(m+n+1)}}{\Gamma(n+m-\alpha+1)} t^{n+m-\alpha}.$$

Portanto, podemos escrever

$$D^\alpha[f(t)g(t)] = \frac{\Gamma(m+n+1)t^{n+m-\alpha}}{\Gamma(n+1)\Gamma(m+1)\Gamma(n+m-\alpha+1)}. \quad (5.2.8)$$

Note que, valem as relações

$$\begin{aligned} D^{\alpha-k-\gamma}f(t) &= D^{\alpha-k-\gamma} \left[\frac{t^n}{\Gamma(n+1)} \right] \\ &= \frac{1}{\cancel{\Gamma(n+1)}} \left[\frac{\cancel{\Gamma(n+1)}t^{n-\alpha+k+\gamma}}{\Gamma(n-\alpha+k+\gamma+1)} \right] \\ &= \frac{t^{n-\alpha+k+\gamma}}{\Gamma(n-\alpha+k+\gamma+1)} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
D^{k+\gamma}g(t) &= D^{k+\gamma} \left[\frac{t^m}{\Gamma(m+1)} \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(m+1)} \left[\frac{\Gamma(m+1)t^{m-k-\gamma}}{\Gamma(m-k-\gamma+1)} \right] \\
&= \frac{t^{m-k-\gamma}}{\Gamma(m-k-\gamma+1)}.
\end{aligned}$$

Substituindo a Eq.(5.2.8) do lado direito da Eq.(5.2.7), obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)t^{n-\alpha+k+\gamma}t^{m-k-\gamma}}{\Gamma(\alpha-k-\gamma+1)\Gamma(k+\gamma+1)\Gamma(n-\alpha+k+\gamma+1)\Gamma(m-k-\gamma+1)} &= \\
&= \frac{\Gamma(n+m+1)t^{n+m-\alpha}}{\Gamma(n+1)\Gamma(m+1)\Gamma(n+m-\alpha+1)}. \quad (5.2.9)
\end{aligned}$$

Devemos, então, mostrar que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+m-\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-k-\gamma+1)\Gamma(k+\gamma+1)\Gamma(n-\alpha+k+\gamma+1)\Gamma(m-k-\gamma+1)} = \frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(m+1)}.$$

Introduzimos os seguintes parâmetros

$$a = m - \gamma, \quad b = n + \gamma - \alpha, \quad c = \gamma, \quad e \quad d = \alpha - \gamma,$$

e, então, obtemos

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(a+b+1)}{\Gamma(a-k+1)\Gamma(b+k+1)} \frac{\Gamma(c+d+1)}{\Gamma(c+k+1)\Gamma(d-k+1)} = \frac{\Gamma(a+b+c+d+1)}{\Gamma(a+c+1)\Gamma(b+d+1)}.$$

Agora, comparamos os expoentes de t , isto é, do lado esquerdo da Eq.(5.2.9), temos

$$t^{n+\gamma-\alpha+k} = t^{b+k}, \quad t^{m-\gamma-k} = t^{a-k} \quad \Rightarrow \quad t^{b+k}t^{a-k} = t^{a+b}$$

e do lado direito da Eq.(5.2.9), temos

$$t^{m+n-\alpha} = t^{a+b}.$$

Então, temos que $t^{n+\gamma-\alpha+k}t^{m-\gamma-k} = t^{m+n-\alpha}$. Portanto, vale a Eq.(5.2.7). Note que, quando $\gamma = 0$ na Eq.(5.2.7) esta se reduz à Eq.(5.2.5). ■

Note que, quando admitimos $k = k - \gamma$ na Eq.(5.2.7), obtemos exatamente a Eq.(5.2.6).

5.2.4 Regra de Leibniz para a Derivada Fracionária de Caputo

Vamos, agora, demonstrar a regra de Leibniz para a derivada fracionária segundo Caputo, que está enunciada pelo seguinte teorema, [2, 26].

Teorema 5.2.6. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ com $n - 1 < \alpha \leq n$, onde $n \in \mathbb{N}$ e sejam ainda $f(t)$ e $g(t)$ funções analíticas em $[a, b]$, então

$${}_*\mathcal{D}^\alpha[f(t)g(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} [D^k g(t)][D^{\alpha-k} f(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^k[f(t)g(t)](0)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} t^{k-\alpha}.$$

Demonstração. Consideremos a equação que relaciona a derivada fracionária de Riemann-Liouville com a derivada fracionária de Caputo, Eq.(4.3.2), com $a = 0$, então temos que

$${}_*\mathcal{D}^\alpha f(t) = D^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k - \alpha + 1)} f^{(k)}(0).$$

Seja, agora, $f(t) = f(t)g(t)$ de onde segue-se

$${}_*\mathcal{D}^\alpha[f(t)g(t)] = D^\alpha[f(t)g(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^k[f(t)g(t)](0)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} t^{k-\alpha}.$$

Sabemos que a regra de Leibniz para a derivada fracionária de Riemann-Liouville é dada pela Eq.(5.2.6), então

$${}_*\mathcal{D}^\alpha[f(t)g(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} [D^k g(t)][D^{\alpha-k} f(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^k[f(t)g(t)](0)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} t^{k-\alpha}.$$

A regra de Leibniz para a derivada fracionária de Riemann-Liouville será igual a regra de Leibniz para a derivada fracionária de Caputo se, e somente se, $D^k[f(t)g(t)](0) = 0$. ■

5.3 Regra da Cadeia ou Fórmula de Faà di Bruno

Assim como generalizamos a regra de Leibniz, primeiro, para $n \in \mathbb{N}$ e logo após para os operadores diferenciais fracionários de Riemann-Liouville e Caputo, aqui faremos esta mesma generalização, agora, para a regra da cadeia também conhecida como fórmula de Faà di Bruno. Aqui faremos apenas a ilustração da fórmula, para o caso inteiro, com exemplos, visto que a demonstração foge do escopo do presente trabalho e pode ser encontrada em [27, 38, 43].

5.3.1 Regra da Cadeia para a Derivada de Ordem Inteira

Para introduzir a fórmula de Faà di Bruno para a derivada de ordem inteira, $k \in \mathbb{N}$, vamos começar calculando as primeiras derivadas da função $f(g(t))$.

Sabemos do cálculo usual que a derivada primeira da função composta $f(g(t))$ é dada pela regra da cadeia, [43].

Teorema 5.3.1 (Regra da Cadeia). Seja $f(g(t))$ com g diferenciável em t e f diferenciável em $g(t)$, então a primeira derivada de $f(g(t))$ é dada por

$$D[f(g(t))] = f'(g(t))g'(t).$$

Calculando mais algumas derivadas, utilizando a regra da cadeia junto com a regra de Leibniz, temos

$$\begin{aligned} D^2[f(g(t))] &= [g'(t)]^2 f''(g(t)) + f'(g(t))g''(t) \\ D^3[f(g(t))] &= 3g'(t)f''(g(t))g''(t) + [g'(t)]^3 f'''(g(t)) + f'(g(t))g'''(t) \\ D^4[f(g(t))] &= f'(g(t))g^{(4)}(t) + 4f''(g(t))g'(t)g'''(t) + 3f''(g(t))[g''(t)]^2 + \\ &+ 6f'''(g(t))[g'(t)]^2 g''(t) + f^{(4)}(g(t))[g'(t)]^4. \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

Para justificar as derivadas acima através da fórmula de Faà di Bruno⁴, precisamos considerar partições de um conjunto, [17, 43]. Por exemplo, para a derivada quarta, devemos considerar as partições do conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$. As possíveis partições, incluindo o próprio conjunto, estão descritas abaixo.

$$\begin{aligned} &\{1, 2, 3, 4\}; \\ &\{1\}, \{2, 3, 4\}; \quad \{2\}, \{1, 3, 4\}; \quad \{3\}, \{1, 2, 4\}; \quad \{4\}, \{1, 2, 3\}; \\ &\quad \{1, 2\}, \{3, 4\}; \quad \{1, 3\}, \{2, 4\}; \quad \{1, 4\}, \{2, 3\}; \\ &\{1\}, \{2\}, \{3, 4\}; \quad \{1\}, \{3\}, \{2, 4\}; \quad \{1\}, \{4\}, \{2, 3\}; \quad \{2\}, \{3\}, \{1, 4\}; \\ &\quad \{2\}, \{4\}, \{1, 3\}; \quad \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}; \\ &\quad \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}. \end{aligned}$$

Temos apenas uma partição contendo quatro elementos em um único bloco, isto é, $b_4 = 1$ e $b_3 = b_2 = b_1 = 0$. Seguindo esta ideia, podemos representar todas as partições do conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ da seguinte maneira.

$$\begin{aligned} (b_1, b_2, b_3, b_4) &= (0, 0, 0, 1) \\ (b_1, b_2, b_3, b_4) &= (1, 0, 1, 0) \\ (b_1, b_2, b_3, b_4) &= (0, 2, 0, 0) \\ (b_1, b_2, b_3, b_4) &= (2, 1, 0, 0) \\ (b_1, b_2, b_3, b_4) &= (4, 0, 0, 0). \end{aligned}$$

⁴Existem outras maneiras de demonstrar a fórmula de Faà di Bruno, [27].

Podemos, ainda, visualizar da seguinte maneira, [56].

$$g^{(4)}(t) \leftrightarrow (4) \leftrightarrow f'(g(t)) \leftrightarrow 1 \quad (5.3.2)$$

$$g'''(t)g'(t) \leftrightarrow (3, 1) \leftrightarrow f''(g(t)) \leftrightarrow 4 \quad (5.3.3)$$

$$[g''(t)]^2 \leftrightarrow (2, 2) \leftrightarrow f''(g(t)) \leftrightarrow 3 \quad (5.3.4)$$

$$g''(t)[g'(t)]^2 \leftrightarrow (2, 1, 1) \leftrightarrow f'''(g(t)) \leftrightarrow 6 \quad (5.3.5)$$

$$[g'(t)]^4 \leftrightarrow (1, 1, 1, 1) \leftrightarrow f^{(4)}(g(t)) \leftrightarrow 1 \quad (5.3.6)$$

Os números entre parênteses acima significam quantos blocos existem e quantos elementos cada bloco possui, por exemplo, $(1, 1, 1, 1)$ diz que existem quatro blocos, cada um com um elemento. O fator $[g''(t)]^2$, na Eq.(5.3.4), corresponde à partição $(2, 2)$, já o fator $f''(g(t))$ diz que existem apenas dois blocos para esta partição e o número três diz que temos exatamente três possíveis partições do conjunto com quatro elementos onde podemos particioná-lo em dois blocos cada um com dois elementos.

A fórmula geral para a regra da cadeia, fórmula de Faà di Bruno, é dada pelo seguinte teorema, [17, 27, 43].

Teorema 5.3.2 (Fórmula de Faà di Bruno). Sejam $f, g \in C^k[a, b]$ e $k \in \mathbb{N}$. Então,

$$D^k[f(g(t))] = \sum \frac{k!}{b_1!b_2!\dots b_k!} f^{(m)}(g(t)) \left(\frac{g'(t)}{1!}\right)^{b_1} \left(\frac{g''(t)}{2!}\right)^{b_2} \dots \left(\frac{g^{(k)}(t)}{k!}\right)^{b_k}, \quad (5.3.7)$$

onde a soma $\sum$ é sobre todas as diferentes combinações de inteiros não negativos $b_1, b_2, \dots, b_k$ com $m = b_1 + b_2 + \dots + b_k$ e $b_1 + 2b_2 + \dots + kb_k = k$.

Vamos verificar o teorema acima, calculando a derivada quarta de $f(g(t))$, isto é, quando $k = 4$ estamos considerando as partições de $\{1, 2, 3, 4\}$, calculadas anteriormente. Então, temos que $b_1 + 2b_2 + 3b_3 + 4b_4 = 4$, de onde segue-se

- $(b_1, b_2, b_3, b_4) = (0, 0, 0, 1)$ temos, também que, $m = 1$, logo

$$\frac{4!}{0!0!0!1!} f'(g(t)) \left(\frac{g'(t)}{1!}\right)^0 \left(\frac{g''(t)}{2!}\right)^0 \left(\frac{g'''(t)}{3!}\right)^0 \left(\frac{g^{(4)}(t)}{4!}\right)^1 = f'(g(t))g^{(4)}(t).$$

- $(b_1, b_2, b_3, b_4) = (1, 0, 1, 0)$ com $m = 2$, obtemos, então,

$$\frac{4!}{1!0!1!0!} f''(g(t)) \left(\frac{g'(t)}{1!}\right)^1 \left(\frac{g''(t)}{2!}\right)^0 \left(\frac{g'''(t)}{3!}\right)^1 \left(\frac{g^{(4)}(t)}{4!}\right)^0 = 4f''(g(t))g'(t)g'''(t).$$

- $(b_1, b_2, b_3, b_4) = (0, 2, 0, 0)$ com $m = 2$, segue-se que

$$\frac{4!}{0!2!0!0!} f''(g(t)) \left(\frac{g'(t)}{1!} \right)^0 \left(\frac{g''(t)}{2!} \right)^2 \left(\frac{g'''(t)}{3!} \right)^0 \left(\frac{g^{(4)}(t)}{4!} \right)^0 = 3f''(g(t))[g''(t)]^2.$$

- $(b_1, b_2, b_3, b_4) = (2, 1, 0, 0)$ com $m = 3$, segue-se que

$$\frac{4!}{2!1!0!0!} f'''(g(t)) \left(\frac{g'(t)}{1!} \right)^2 \left(\frac{g''(t)}{2!} \right)^1 \left(\frac{g'''(t)}{3!} \right)^0 \left(\frac{g^{(4)}(t)}{4!} \right)^0 = 6f'''(g(t))[g'(t)]^2 g''(t).$$

- $(b_1, b_2, b_3, b_4) = (4, 0, 0, 0)$ com $m = 4$, obtemos

$$\frac{4!}{4!0!0!0!} f^{(4)}(g(t)) \left(\frac{g'(t)}{1!} \right)^4 \left(\frac{g''(t)}{2!} \right)^0 \left(\frac{g'''(t)}{3!} \right)^0 \left(\frac{g^{(4)}(t)}{4!} \right)^0 = f^{(4)}(g(t))[g'(t)]^4.$$

Enfim, a expressão para a derivada quarta de $f(g(t))$ é dada por

$$\begin{aligned} D^4[f(g(t))] &= f'(g(t))g^{(4)}(t) + 4f''(g(t))g'(t)g'''(t) + 3f''(g(t))[g''(t)]^2 + \\ &+ 6f'''(g(t))[g'(t)]^2 g''(t) + f^{(4)}(g(t))[g'(t)]^4. \end{aligned}$$

Comparando esta equação, acima, com a Eq.(5.3.1), podemos notar que, de fato, esta é a expressão para a quarta derivada de $f(g(t))$.

5.3.2 Regra da Cadeia para a Derivada de Riemann-Liouville

Para a demonstração da fórmula de Faà di Bruno para a derivada fracionária segundo Riemann-Liouville apresentamos alguns resultados que serão necessários. Faremos a demonstração baseada em [36]. Começamos com a função de Gel'fand-Shilov, posteriormente definimos o fato de que a integral fracionária segundo Riemann-Liouville pode ser representada por um produto de convolução e logo após, da mesma maneira, definimos um operador, qualquer, de diferenciação fracionário que pode ser representado como um produto de convolução entre a função a ser diferenciada e a função de Gel'fand-Shilov, definida no Capítulo 3, Eq.(3.3.1).

Definição 5.3.3. A integral de Riemann-Liouville de ordem $\alpha \in \mathbb{R}$ com $n - 1 < \alpha \leq n$ onde $n \in \mathbb{N}$, pode ser escrita como um produto de convolução entre duas funções, isto é,

$$J^\alpha[f(t)] = f(t) * \Phi_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad t > 0. \quad (5.3.8)$$

Definimos, agora, o operador de diferenciação fracionário de ordem $\beta \in \mathbb{R}$. Aqui deve ficar claro que este operador não é o operador de Riemann-Liouville, embora a notação seja a mesma.

Definição 5.3.4. O operador de diferenciação fracionária de ordem $\beta \in \mathbb{R}$ pode, também, ser definido como um produto de convolução, isto é,

$$D^\beta[f(t)] = f(t) * \Phi_{-\beta}(t),$$

onde $f(t)$ é uma função que admite integração e diferenciação fracionária no sentido de Riemann-Liouville, pois se $\beta > 0$ obtemos o operador de diferenciação e no caso em que $\beta < 0$, temos o operador de integração fracionário, dado pela Eq.(5.3.8), por fim no caso em que $\beta = 0$, temos $D^0[f(t)] = f(t)$.

Lema 5.3.5. Sejam $p, q > 0$, então

$$\Phi_p(t-a) * \Phi_q(t) = \Phi_{p+q}(t-a).$$

Demonstração. A partir da definição do produto de convolução, Eq.(1.4.2), temos que

$$\Phi_p(t-a) * \Phi_q(t) = \int_a^t \frac{(\tau-a)^{p-1}}{\Gamma(p)} \frac{(t-\tau)^{q-1}}{\Gamma(q)} d\tau.$$

Introduzindo a mudança de variável, $\tau = a + \xi(t-a)$, na equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} \Phi_p(t-a) * \Phi_q(t) &= \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_0^1 [a + \xi(t-a) - a]^{p-1} [t-a - \xi(t-a)]^{q-1} (t-a) d\xi \\ &= \frac{(t-a)^{p+q-1}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \underbrace{\int_0^1 \xi^{p-1} (1-\xi)^{q-1} d\xi}_{B(p,q)}. \end{aligned}$$

Expressando a função beta em termos da função gama, Eq.(2.1.5), segue-se que

$$\Phi_p(t-a) * \Phi_q(t) = \frac{(t-a)^{p+q-1}}{\Gamma(p+q)} = \Phi_{p+q}(t-a).$$

■

Se substituirmos $\lambda = q + 1$ na definição da função de Gel'fand-Shilov, Eq.(3.3.1), obtemos

$$\Phi_{q+1}(t) = \begin{cases} \frac{t^q}{\Gamma(q+1)}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Note que, a derivada de ordem $\beta > 0$ desta função é dada por

$$D^\beta \left[\frac{(t-a)^q}{\Gamma(q+1)} \right] = \frac{(t-a)^{q-\beta}}{\Gamma(q-\beta+1)}, \quad t > 0.$$

Em particular, se $q = 0$, obtemos a derivada fracionária da função de Heaviside, ou seja,

$$D^\beta[H(t-a)] = \frac{(t-a)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}, \quad t > a. \quad (5.3.9)$$

Finalmente vamos mostrar a fórmula de Faà di Bruno para a derivada de Riemann-Liouville que está enunciada pelo seguinte teorema.

Teorema 5.3.6. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$, $n - 1 < \alpha \leq n$, onde $n \in \mathbb{N}$, f uma função analítica e $g(t)$ uma função suficientemente diferenciável, então a fórmula de Faà di Bruno para a derivada de Riemann-Liouville é dada por

$$\begin{aligned} D^\alpha[f(g(t))] &= \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} f(g(t)) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} \sum \frac{k!}{b_1! b_2! \dots b_k!} f^{(m)}(g(t)) \left(\frac{g'(t)}{1!} \right)^{b_1} \left(\frac{g''(t)}{2!} \right)^{b_2} \dots \left(\frac{g^{(k)}(t)}{k!} \right)^{b_k}, \end{aligned} \quad (5.3.10)$$

onde a soma $\sum$ é sobre todas as diferentes combinações de inteiros não negativos $b_1, b_2, \dots, b_k$ com $m = b_1 + b_2 + \dots + b_k$ e $b_1 + 2b_2 + \dots + kb_k = k$.

Demonstração. Consideremos a regra de Leibniz para a derivada de Riemann-Liouville, Eq.(5.2.5) e $f(t) = H(t-a)$, isto é,

$$D^\alpha[g(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} [D^k g(t)] [D^{\alpha-k} H(t-a)].$$

Utilizando a Eq.(5.3.9), podemos reescrever a equação acima da seguinte maneira

$$D^\alpha[g(t)] = \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} g(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} [D^k g(t)] \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}. \quad (5.3.11)$$

Agora, supomos que $g(t) = f(g(t))$. Então, a k -ésima derivada de $g(t)$, $k \in \mathbb{N}$, dada pela Eq.(5.3.7), é

$$D^k[f(g(t))] = \sum \frac{k!}{b_1! b_2! \dots b_k!} f^{(m)}(g(t)) \left(\frac{g'(t)}{1!} \right)^{b_1} \left(\frac{g''(t)}{2!} \right)^{b_2} \dots \left(\frac{g^{(k)}(t)}{k!} \right)^{b_k}, \quad (5.3.12)$$

onde a soma $\sum$ é sobre todas as diferentes combinações de inteiros não negativos $b_1, b_2, \dots, b_k$ com $m = b_1 + b_2 + \dots + b_k$ e $b_1 + 2b_2 + \dots + kb_k = k$. Substituindo $g(t)$ e a Eq.(5.3.12) na Eq.(5.3.11), obtemos

$$\begin{aligned} D^\alpha[f(g(t))] &= \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} f(g(t)) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} \sum \frac{k!}{b_1! b_2! \dots b_k!} f^{(m)}(g(t)) \left(\frac{g'(t)}{1!} \right)^{b_1} \left(\frac{g''(t)}{2!} \right)^{b_2} \dots \left(\frac{g^{(k)}(t)}{k!} \right)^{b_k}, \end{aligned}$$

onde a soma $\sum$ e os coeficientes $b_1, b_2, \dots, b_k$ já foram explicitados acima. ■

5.3.3 Regra da Cadeia para Derivada Fracionária de Caputo

Para a demonstração da fórmula de Faà di Bruno para a derivada fracionária segundo Caputo utilizamos a equação que relaciona a derivada de Riemann-Liouville com a derivada de Caputo, bem como a fórmula de Faà di Bruno para a derivada de Riemann-Liouville, [17].

Teorema 5.3.7. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$, $n - 1 < \alpha \leq n$, onde $n \in \mathbb{N}$, f uma função analítica e $g(t)$ uma função suficientemente diferenciável, então a fórmula de Faà di Bruno para a derivada de Caputo é dada por

$$\begin{aligned} {}_a D^\alpha [f(g(t))] &= \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} f(g(t)) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} \sum \frac{k!}{b_1! b_2! \dots b_k!} f^{(m)}(g(t)) \left(\frac{g'(t)}{1!} \right)^{b_1} \left(\frac{g''(t)}{2!} \right)^{b_2} \dots \left(\frac{g^{(k)}(t)}{k!} \right)^{b_k} - \\ &- \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} D^k [f(g(t))](a), \end{aligned} \quad (5.3.13)$$

onde a soma $\sum$ é sobre todas as diferentes combinações de inteiros não negativos $b_1, b_2, \dots, b_k$ com $m = b_1 + b_2 + \dots + b_k$ e $b_1 + 2b_2 + \dots + kb_k = k$.

Demonstração. Consideremos a equação que relaciona a derivada fracionária de Riemann-Liouville com a derivada fracionária de Caputo, Eq.(4.3.2), ou seja,

$${}_a D^\alpha f(t) = D^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(a). \quad (5.3.14)$$

Seja, agora, $f(t) = f(g(t))$ na Eq.(5.3.14), de onde segue-se

$${}_a D^\alpha [f(g(t))] = D^\alpha [f(g(t))] - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} D^k [f(g(t))](a).$$

Sabemos que a fórmula de Faà di Bruno para a derivada fracionária de Riemann-Liouville é dada pela Eq.(5.3.10), então

$$\begin{aligned} {}_a D^\alpha [f(g(t))] &= \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} f(g(t)) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} \sum \frac{k!}{b_1! b_2! \dots b_k!} f^{(m)}(g(t)) \left(\frac{g'(t)}{1!} \right)^{b_1} \left(\frac{g''(t)}{2!} \right)^{b_2} \dots \left(\frac{g^{(k)}(t)}{k!} \right)^{b_k} - \\ &- \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} D^k [f(g(t))](a), \end{aligned}$$

onde a soma $\sum$ e os coeficientes $b_1, b_2, \dots, b_k$ já foram explicitados acima. ■

Vamos exemplificar a fórmula de Faà di Bruno para a derivada de Caputo através de um exemplo simples que poderá ser verificado, facilmente, utilizando a definição.

Exemplo 5.3.8. Sejam $\alpha = \frac{7}{3}$, $2 < \alpha \leq 3$ e $f(g(t)) = t^3$, $g(t) = t$, $f(t) = t^3$. A partir disto, vamos calcular $*D^{7/3}t^3$. Visto que a derivada que vamos calcular é de ordem $\alpha = 7/3$, devemos considerar as partições dos conjuntos $\{1\}$, $\{1, 2\}$ e $\{1, 2, 3\}$, ou seja,

- Partições de $\{1\}$:

$$\{1\}; \Rightarrow (b_1) = 1, \quad m = 1.$$

- Partições de $\{1, 2\}$:

$$\begin{aligned} \{1, 2\}; &\Rightarrow (b_1, b_2) = (0, 1), \quad m = 1; \\ \{1\}, \{2\}; &\Rightarrow (b_1, b_2) = (2, 0), \quad m = 2. \end{aligned}$$

- Partições de $\{1, 2, 3\}$:

$$\begin{aligned} \{1, 2, 3\}; &\Rightarrow (b_1, b_2, b_3) = (0, 0, 1), \quad m = 1; \\ \{1\}, \{2, 3\}; \quad \{2\}, \{1, 3\}; \quad \{3\}, \{1, 2\}; &\Rightarrow (b_1, b_2, b_3) = (1, 1, 0), \quad m = 2; \\ \{1\}, \{2\}, \{3\}; &\Rightarrow (b_1, b_2, b_3) = (3, 0, 0), \quad m = 3. \end{aligned}$$

A partir da Eq.(5.3.13), considerando $a = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} *D^{7/3}t^3 &= \frac{t^{-\frac{7}{3}}}{\Gamma\left(1 - \frac{7}{3}\right)} f(g(t)) + \binom{7/3}{1} \frac{t^{1-\frac{7}{3}}}{\Gamma\left(1 - \frac{7}{3} + 1\right)} f'(g(t))g'(t) + \\ &+ \binom{7/3}{2} \frac{t^{2-\frac{7}{3}+1}}{\Gamma\left(2 - \frac{7}{3} + 1\right)} \left[\frac{2!}{0!1!} f'(g(t)) \underbrace{\left(\frac{g''(t)}{2!}\right)^1}_{=0} + \frac{2!}{2!0!} f''(g(t)) \underbrace{\left(\frac{g'(t)}{1!}\right)^2}_{6t} \right] + \binom{7/3}{3} \frac{t^{3-\frac{7}{3}}}{\Gamma\left(3 - \frac{7}{3} + 1\right)} \\ &\times \left[\frac{3!}{0!0!1!} f'(g(t)) \underbrace{\left(\frac{g'''(t)}{3!}\right)^1}_{=0} + \frac{3!}{1!1!0!} f''(g(t)) \underbrace{\left(\frac{g'(t)}{1!}\right)^1}_{=0} \underbrace{\left(\frac{g''(t)}{2!}\right)^1}_{=0} + \frac{3!}{3!0!0!} f'''(g(t)) \underbrace{\left(\frac{g'(t)}{1!}\right)^3}_6 \right] - \\ &- \frac{t^{-\frac{7}{3}}}{\Gamma\left(1 - \frac{7}{3}\right)} \underbrace{[f(g(t))](0)}_{=0} - \frac{t^{1-\frac{7}{3}}}{\Gamma\left(1 - \frac{7}{3} + 1\right)} \underbrace{[f'(g(t))](0)}_{=0} - \frac{t^{2-\frac{7}{3}}}{\Gamma\left(2 - \frac{7}{3} + 1\right)} \underbrace{[f''(g(t))](0)}_{=0}, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} *D^{7/3}t^3 &= \frac{t^{-\frac{7}{3}}}{\Gamma\left(-\frac{4}{3}\right)} t^3 + \frac{\Gamma\left(\frac{7}{3} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)} \frac{t^{-\frac{4}{3}}}{\Gamma\left(-\frac{1}{3}\right)} 3t^2 + \frac{\Gamma\left(\frac{7}{3} + 1\right)}{2!\Gamma\left(\frac{7}{3} - 2 + 1\right)} \frac{6t^{\frac{2}{3}}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} + \frac{\Gamma\left(\frac{7}{3} + 1\right)}{3!\Gamma\left(\frac{7}{3} - 3 + 1\right)} \frac{6t^{\frac{2}{3}}}{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)} \\ &= \frac{t^{\frac{2}{3}}}{\Gamma\left(-\frac{4}{3}\right)} + \frac{7}{3} \frac{3t^{\frac{2}{3}}}{\Gamma\left(-\frac{1}{3}\right)} + \frac{28}{3} \frac{t^{\frac{2}{3}}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} + \frac{14}{9} \frac{t^{\frac{2}{3}}}{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}. \end{aligned}$$

Através da Eq.(2.1.2), obtemos $\Gamma\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{9}{4}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)$ e $\Gamma\left(-\frac{1}{3}\right) = -3\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)$. Assim, podemos escrever

$${}_*D^{7/3}t^3 = \left(\frac{4}{9} - \frac{7}{3} + \frac{28}{3} + \frac{14}{9}\right) \frac{t^{\frac{2}{3}}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)},$$

enfim, obtemos

$${}_*D^{7/3}t^3 = \frac{9t^{\frac{2}{3}}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}. \quad (5.3.15)$$

É possível verificar o resultado da Eq.(5.3.15) utilizando a Eq.(4.2.3), isto é,

$${}_*D^{7/3}t^3 = \frac{\Gamma(3+1)}{\Gamma\left(3 - \frac{7}{3} + 1\right)} t^{3-\frac{7}{3}} = \frac{9t^{\frac{2}{3}}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}.$$

Capítulo 6

O Oscilador Harmônico Fracionário

Existem muitos fenômenos físicos que podem ser bem representados por equações diferenciais de segunda ordem, lineares e com coeficientes constantes, um destes fenômenos é o oscilador harmônico. Estudaremos o movimento de uma massa presa a uma mola, pois é de fácil entendimento o comportamento deste sistema simples.

Existem várias formas de se abordar o problema do oscilador harmônico. A partir do caso geral, Apêndice C, escolhendo as convenientes constantes e obtemos a equação diferencial do oscilador harmônico clássico. Vamos resolver este problema através de série de potências, transformada de Fourier e por fim através da metodologia da transformada de Laplace. O oscilador harmônico fracionário é um dos poucos problemas que pode ser completamente resolvido, isto é, apresenta uma solução analítica. Vamos introduzir a equação diferencial para o caso geral e resolver este problema através da transformada de Laplace, considerando as derivadas envolvidas no sentido de Caputo, que como mencionado anteriormente é de mais simples uso do que a transformada de Laplace da derivada de Riemann-Liouville, bem como o fato de ser fisicamente interpretável. As funções de Mittag-Leffler, estudadas no Capítulo 2, aparecem como solução da equação diferencial ordinária do oscilador harmônico fracionário [4, 25, 39, 50].

6.1 Oscilador Harmônico Clássico

Obtemos aqui a equação diferencial do oscilador harmônico clássico, sem amortecimento, considerando um sistema massa-mola. Seja uma massa m presa a uma mola, cuja constante elástica é k . Quando a massa é deslocada para a direita de uma distância x a partir da posição de equilíbrio, a mesma ficará sujeita a uma força F em sentido contrário e cujo valor é dado pela lei de Hooke, isto é, [3]

$$F_x = -kx. \quad (6.1.1)$$

Desprezando-se o atrito, essa força fará com que a mola descreva um movimento harmônico simples em torno da posição de equilíbrio. A equação diferencial que descreverá o movimento dessa mola será dada pela segunda lei de Newton, isto é,

$$F_x = m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad (6.1.2)$$

onde $x = x(t)$. Substituindo a Eq.(6.1.1) na Eq.(6.1.2), obtemos

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) + kx(t) = 0,$$

ou ainda na forma

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) + \omega^2 x(t) = 0 \quad (6.1.3)$$

onde $\omega^2 = \frac{k}{m}$.

6.1.1 Solução do Oscilador Harmônico Clássico via Série de Potências

Para obter a solução da equação diferencial do oscilador harmônico clássico não amortecido, Eq.(6.1.3), com as seguintes condições iniciais

$$x(0) = x_0 \quad \text{e} \quad x'(0) = 0, \quad (6.1.4)$$

onde $x(0)$ é o deslocamento inicial e $x'(0)$ é a velocidade inicial, via série de potências, consideramos o método de Frobenius que consiste em um procedimento analítico para encontrar soluções de equações diferenciais ordinárias, lineares e homogêneas, na forma de série em torno de um ponto, neste caso, $t = 0$, com um parâmetro livre, isto é, estamos procurando uma solução na forma [14, 6]

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r}, \quad (6.1.5)$$

com $a_0 \neq 0$ e r um parâmetro. Supomos que a série pode ser derivada termo a termo, então

$$\frac{d}{dt} x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) t^{n+r-1}$$

e

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) t^{n+r-2}. \quad (6.1.6)$$

Substituindo a Eq.(6.1.5) e a Eq.(6.1.6) na equação diferencial do oscilador e rearranjando, obtemos

$$r(r-1)a_0 t^{r-2} + r(r+1)a_1 t^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} [(n+r+2)(n+r+1)a_{n+2} + \omega_0^2 a_n] t^{n+r} = 0.$$

A partir da equação acima, com $a_0 \neq 0$, temos

(i) $r(r-1) = 0$ (Equação indicial)

(ii) $r(r+1)a_1 = 0$

(iii) $(n + r + 2)(n + r + 1)a_{n+2} + \omega_0^2 a_n = 0, \quad n \geq 0$ (Fórmula de recorrência).

A partir da equação indicial, segue que

$$r_1 = 0 \quad \text{e} \quad r_2 = 1.$$

A fórmula de recorrência é dada por

$$a_{n+2} = -\frac{\omega_0^2 a_n}{(n + r + 2)(n + r + 1)}, \quad n \geq 0.$$

Começamos por encontrar uma solução com $r_1 = 0$. A menor raiz, $r_1 = 0$, nos fornece a solução geral da equação diferencial, sem que seja necessário utilizar a segunda raiz. A fórmula de recorrência, neste caso, é dada por

$$a_{n+2} = -\frac{\omega_0^2 a_n}{(n + 2)(n + 1)}, \quad n \geq 0.$$

Note que,

- $a_0 \rightarrow$ arbitrário;
- $a_1 \rightarrow$ arbitrário;
- $a_2 = -\frac{\omega_0^2 a_0}{2 \cdot 1};$
- $a_3 = -\frac{\omega_0^2 a_1}{3 \cdot 2} = -\frac{\omega_0^2 a_1}{3!};$
- $a_4 = -\frac{\omega_0^2 a_2}{4 \cdot 3} = -\frac{\omega_0^2}{4 \cdot 3} \left(-\frac{\omega_0^2 a_0}{2 \cdot 1} \right) = \frac{\omega_0^4 a_0}{4!};$
- $a_5 = -\frac{\omega_0^2 a_3}{5 \cdot 4} = -\frac{\omega_0^2}{5 \cdot 4} \left(-\frac{\omega_0^2 a_1}{3!} \right) = \frac{\omega_0^4 a_1}{5!};$
- $a_6 = -\frac{\omega_0^2 a_4}{6 \cdot 5} = -\frac{\omega_0^2}{6 \cdot 5} \left(\frac{\omega_0^4 a_0}{4!} \right) = -\frac{\omega_0^6 a_0}{6!};$
- $\vdots$

Então, podemos escrever

$$a_{2n+1} = (-1)^n \frac{\omega_0^{2n}}{(2n+1)!} a_1 \quad \text{e} \quad a_{2n} = (-1)^n \frac{\omega_0^{2n}}{(2n)!} a_0. \quad (6.1.7)$$

Temos que, a_{2n+1} fornece uma solução $x_1(t)$ e a_{2n} fornece a outra solução linearmente independente, $x_2(t)$. Substituindo a Eq.(6.1.7) na Eq.(6.1.5), obtemos

$$x_1(t) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\omega_0^{2n}}{(2n)!} t^{2n}$$

e

$$x_2(t) = \frac{a_1}{\omega_0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\omega_0 t)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Portanto, podemos escrever a solução para a equação diferencial do oscilador harmônico da seguinte maneira

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) + x_2(t) \\ x(t) &= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\omega_0 t)^{2n}}{(2n)!} + \frac{a_1}{\omega_0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\omega_0 t)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ x(t) &= a_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{a_1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t). \end{aligned} \quad (6.1.8)$$

Vamos, então, aplicar as condições iniciais na Eq.(6.1.8), isto é,

$$x(0) = a_0 \Rightarrow x(0) = a_0 = x_0.$$

Para aplicar a condição $x'(0) = 0$ devemos derivar a Eq.(6.1.8), ou seja,

$$\begin{aligned} x'(t) &= -a_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t) + a_1 \cos(\omega_0 t), \\ x'(0) &= a_1 \Rightarrow x'(0) = a_1 = 0. \end{aligned}$$

Portanto, a solução geral da equação diferencial ordinária do oscilador harmônico clássico satisfazendo as condições iniciais dadas é

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t).$$

Segue-se, abaixo, o gráfico da solução

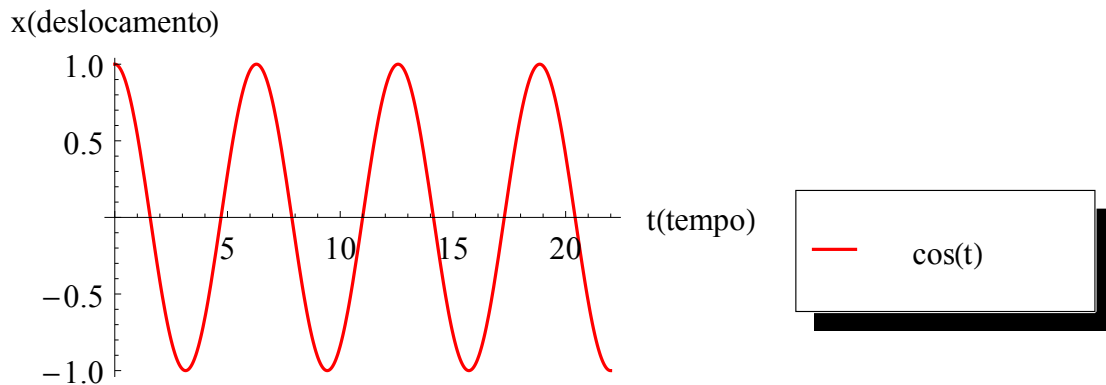


Figura 6.1: Solução do oscilador harmônico clássico não amortecido.

6.1.2 Oscilador Harmônico Clássico via Transformada de Fourier

Utilizamos a transformada de Fourier para obter a solução do oscilador harmônico clássico não amortecido, dado pela equação abaixo [7]

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \omega^2 x(t) = f(t) \quad (6.1.9)$$

com $\omega^2 > 0$ e supomos que $f(t)$ admite transformada de Fourier. Aplicamos a transformada de Fourier em ambos os lados da igualdade, então obtemos

$$\mathcal{F}\left[\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right] + \omega_0^2 \mathcal{F}[x(t)] = \mathcal{F}[f(t)].$$

Utilizando a Eq.(1.2.5), que fornece a transformada de Fourier para a derivada segunda, obtemos

$$\begin{aligned} -\omega^2 \mathcal{F}[x(t)] + \omega_0^2 \mathcal{F}[x(t)] &= \mathcal{F}[f(t)] \\ \mathcal{F}[x(t)][\omega_0^2 - \omega^2] &= \mathcal{F}[f(t)]. \end{aligned}$$

Denotemos $\mathcal{F}[x(t)] = X(\omega)$ e $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, então obtemos

$$X(\omega) = -\frac{F(\omega)}{\omega^2 - \omega_0^2}.$$

Seja

$$X(\omega) = -F(\omega)G(\omega) \quad (6.1.10)$$

onde $G(\omega) = \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2}$. Para obter a solução do problema basta tomar a transformada de Fourier inversa na Eq.(6.1.10), ou seja,

$$\mathcal{F}^{-1}[X(\omega)] = -\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)G(\omega)].$$

Utilizando o teorema da convolução (1.2.4), obtemos

$$x(t) = -\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)G(\omega)] = -\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] * \mathcal{F}^{-1}[G(\omega)]. \quad (6.1.11)$$

Vamos calcular, explicitamente, $\mathcal{F}^{-1}[G(\omega)]$ através do teorema dos resíduos, isto é,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2}\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\pi i [\text{Res}(\omega = \omega_0) + \text{Res}(\omega = -\omega_0)] \\ &= \frac{2\pi i}{\sqrt{2\pi}} \left[\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \cancel{(\omega - \omega_0)} \frac{e^{-i\omega t}}{(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)} + \lim_{\omega \rightarrow -\omega_0} \cancel{(\omega + \omega_0)} \frac{e^{-i\omega t}}{(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)} \right] \\ &= i\sqrt{2\pi} \left[\frac{e^{-i\omega t}}{2\omega} - \frac{e^{i\omega t}}{2\omega} \right] \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\omega} \left[\frac{e^{i\omega t}}{2i} - \frac{e^{-i\omega t}}{2i} \right]. \end{aligned}$$

Logo, obtemos

$$\mathcal{F}^{-1} \left[\frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \right] = \frac{\sqrt{2\pi}}{\omega} \text{sen}(\omega t).$$

Voltando na Eq.(6.1.11), temos que

$$\begin{aligned} x(t) &= -\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] * \mathcal{F}^{-1}[G(\omega)] = f(t) * \left[\frac{\sqrt{2\pi}}{\omega} \text{sen}(\omega t) \right] \\ x(t) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \xi) \left[\frac{\sqrt{2\pi}}{\omega} \text{sen}(\omega \xi) \right] d\xi. \end{aligned}$$

Finalmente, segue que, a solução para o oscilador harmônico clássico não amortecido via transformada de Fourier, é dada por

$$x(t) = -\frac{1}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \xi) \text{sen}(\omega \xi) d\xi.$$

6.1.3 Solução do Oscilador Harmônico Clássico via Transformada de Laplace

Aqui, vamos introduzir a metodologia da transformada de Laplace a fim de resolver a equação diferencial ordinária associada ao problema do oscilador harmônico não amortecido. O caso geral desta equação diferencial ordinária é denotado no Apêndice C. Consideramos a equação diferencial do oscilador harmônico clássico não amortecido, Eq.(6.1.9), com as condições iniciais dadas pela Eq.(6.1.4). Aplicamos a transformada de Laplace nesta equação, obtendo assim [1]

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[\frac{d^2 x(t)}{dt^2} \right] + \omega^2 \mathcal{L}[x(t)] &= \mathcal{L}[f(t)], \\ s^2 X(s) - \underbrace{s x(0)}_{x_0} - \underbrace{x'(0)}_0 + \omega^2 X(s) &= F(s), \end{aligned}$$

onde $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ e $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$. Logo, explicitando $X(s)$, temos

$$X(s) = \frac{F(s) + s x_0}{s^2 + \omega^2}. \quad (6.1.12)$$

Introduzimos $G(s) = \frac{1}{s^2 + \omega^2}$ de onde segue-se

$$X(s) = F(s)G(s) + x_0 \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

Tomando a transformada de Laplace inversa da Eq.(6.1.12) e utilizando o teorema da convolução (1.4.2), podemos escrever

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{s^2 + \omega^2} \right] + \mathcal{L}^{-1}[F(s)] * \mathcal{L}^{-1}[G(s)] \\ &= x_0 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{s^2 + \omega^2} \right] + \int_0^t f(t - \xi) g(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

onde $g(\xi) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$ e $f(\xi) = \mathcal{L}^{-1}[f(t)]$, de onde segue-se a solução para o problema

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega} \int_0^t f(t - \xi) \sin(\omega \xi) d\xi.$$

No caso em que $f(t) = 0$, o gráfico da solução é dada pela Figura (6.1).

6.2 Oscilador Harmônico Fracionário

Nesta seção vamos discutir o caso do oscilador harmônico fracionário a fim de recuperar, como caso limite, o oscilador harmônico clássico. A equação diferencial fracionária de ordem $1 < \alpha \leq 2$ é dada por [25]

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} x(t) + A \frac{d^\beta}{dt^\beta} x(t) + Bx(t) = g(t), \quad (6.2.1)$$

onde $0 < \beta \leq 1$, A e B constantes e satisfazendo as seguintes condições iniciais

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = 0.$$

Consideramos $1 < \alpha \leq 2$, pois no caso em que $\alpha = 2$, com as escolhas apropriadas das constantes, recuperamos a solução do oscilador harmônico clássico. Tomando a transformada de Laplace da equação diferencial fracionária, onde estas derivadas são no sentido de Caputo, obtemos

$$s^\alpha F(s) - s^{\alpha-1} \underbrace{x(0)}_{x_0} - s^{\alpha-2} \underbrace{x'(0)}_0 + A[s^\beta F(s) - s^{\beta-1} \underbrace{x(0)}_{x_0}] + BF(s) = G(s),$$

onde $F(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ e $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$. Segue-se que,

$$(s^\alpha + As^\beta + B)F(s) = x_0 s^{\alpha-1} + Ax_0 s^{\beta-1} + G(s)$$

ou ainda

$$F(s) = x_0 \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + As^\beta + B} + Ax_0 \frac{s^{\beta-1}}{s^\alpha + As^\beta + B} + \frac{G(s)}{s^\alpha + As^\beta + B}. \quad (6.2.2)$$

Seja

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^\alpha + As^\beta + B} &= \frac{1}{s^\alpha + B} \left(\frac{1}{1 + \frac{As^\beta}{s^\alpha + B}} \right) \\ &= \frac{1}{s^\alpha + B} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A^k \frac{s^{\beta k}}{(s^\alpha + B)^k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A^k \frac{s^{\beta k}}{(s^\alpha + B)^{k+1}} \end{aligned}$$

para $\left| \frac{As^\beta}{s^\alpha + B} \right| < 1$. Voltando na Eq.(6.2.2), obtemos

$$\begin{aligned} F(s) &= x_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A^k \frac{s^{\beta k + \alpha - 1}}{(s^\alpha + B)^{k+1}} + Ax_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A^k \frac{s^{\beta k + \beta - 1}}{(s^\alpha + B)^{k+1}} + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A^k \frac{G(s) s^{\beta k}}{(s^\alpha + B)^{k+1}}. \end{aligned}$$

Calculando a transformada de Laplace inversa, segue que

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-A)^k \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s^{\beta k + \alpha - 1}}{(s^\alpha + B)^{k+1}} \right] + Ax_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-A)^k \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s^{\beta k + \beta - 1}}{(s^\alpha + B)^{k+1}} \right] + \\ &+ g(t) * \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (-A)^k \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s^{\beta k}}{(s^\alpha + B)^{k+1}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

Calculamos, na Seção 2.6, a transformada de Laplace da função de Mittag-Leffler de três parâmetros, segue-se que

$$\mathcal{L}[t^{\xi-1} E_{\nu, \xi}^{\gamma}(\pm at^{\nu})] = \frac{s^{\nu\gamma-\xi}}{(s^{\nu} \mp a)^{\gamma}} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s^{\nu\gamma-\xi}}{(s^{\nu} \mp a)^{\gamma}} \right] = t^{\xi-1} E_{\nu, \xi}^{\gamma}(\pm at^{\nu}).$$

Voltando na Eq.(6.2.3), podemos escrever

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-A)^k t^{(\alpha-\beta)k} E_{\alpha, (\alpha-\beta)k+1}^{k+1}(-Bt^{\alpha}) + Ax_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-A)^k t^{(\alpha-\beta)(k+1)} E_{\alpha, (\alpha-\beta)(k+1)+1}^{k+1}(-Bt^{\alpha}) + \\ &+ g(t) * \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-A)^k t^{(\alpha-\beta)k+\alpha-1} E_{\alpha, (\alpha-\beta)k+\alpha}^{k+1}(-Bt^{\alpha}) \right], \end{aligned}$$

ou ainda explicitando o produto de convolução

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-A)^k t^{(\alpha-\beta)k} E_{\alpha, (\alpha-\beta)k+1}^{k+1}(-Bt^{\alpha}) + Ax_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-A)^k t^{(\alpha-\beta)(k+1)} E_{\alpha, (\alpha-\beta)(k+1)+1}^{k+1}(-Bt^{\alpha}) + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} (-A)^k \int_0^t g(t-\xi) \xi^{(\alpha-\beta)k+\alpha-1} E_{\alpha, (\alpha-\beta)k+\alpha}^{k+1}(-B\xi^{\alpha}) d\xi. \end{aligned}$$

No particular caso do oscilador harmônico fracionário não amortecido, devemos ter $A = 0$, $B = \omega^2$ e $g(t) = 0$. Visto que estamos interessado no caso onde o oscilador não possui atrito, não devemos ter o termo envolvendo a primeira derivada, isto é, $A \rightarrow 0$. Segue-se, enfim, a partir da solução $x(t)$, dada acima, a solução para o problema

$$x(t) = x_0 E_{\alpha, 1}^1(-\omega^2 t^{\alpha}) = x_0 E_{\alpha}(-\omega^2 t^{\alpha}).$$

A representação gráfica da solução é, para diferentes valores do parâmetro α , dada pela Figura (6.2).

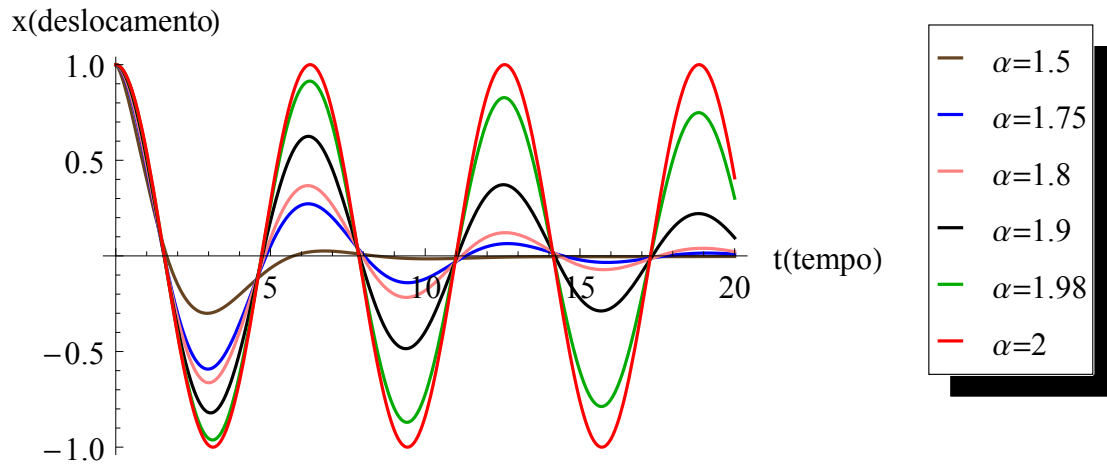


Figura 6.2: Solução do oscilador harmônico fracionário.

O oscilador harmônico fracionário recupera o movimento harmônico simples, através de um conveniente processo de limites, com a vantagem de que a modelagem fracionária aparenta ser mais precisa que a modelagem inteira, visto que com a modelagem fracionária é possível admitir o efeito do atrito na ordem da derivada, [17].

Conclusão

A metodologia das transformadas integrais como ferramenta para encontrar a solução de uma equação diferencial (ordinária ou parcial), consiste em transformar o problema de partida em um problema, em geral, mais simples de ser resolvido. Tendo resolvido este novo problema, aplicamos a transformada inversa e recuperamos a solução do problema de partida. Discutimos as transformadas de Fourier e Laplace, assim como algumas de suas propriedades.

As funções de Mittag-Leffler desempenham um papel fundamental no cálculo fracionário, pois surgem como solução de equações diferenciais fracionárias com coeficientes constantes, desempenhando um papel similar ao da função exponencial no cálculo usual. Introduzimos o conceito das funções de Mittag-Leffler de um, dois e três parâmetros bem como calculamos a transformada de Laplace destas funções, pois na resolução da equação diferencial proposta se fez necessário o uso da transformada de Laplace da função de Mittag-Leffler de três parâmetros. Mostramos também propriedades e casos particulares da função de Mittag-Leffler de dois parâmetros.

Apresentamos o teorema de Cauchy para integrais repetidas e a partir de sua continuação analítica obtivemos a integral de ordem inteira. Generalizando esta integral, obtivemos a integral de ordem fracionária. Definimos as derivadas fracionárias no sentido de Riemann-Liouville e Caputo, bem como apresentamos alguns exemplos para cada uma destas formulações. Calculamos a transformada de Laplace de ambas as derivadas a fim de fazer uso, da transformada de Caputo, na aplicação envolvendo o oscilador harmônico fracionário.

No capítulo referente as regras clássicas de derivação, concluímos que a única regra que pode ser estendida, para os operadores de Riemann-Liouville e Caputo, é a de linearidade devido ao fato destes operadores serem lineares. Por outro lado, a regra de Leibniz e a regra da cadeia, ou fórmula de Faà di Bruno, não podem ser estendidas naturalmente para estes operadores, para tanto são necessárias outras condições.

Por fim, introduzimos a equação diferencial fracionária associada ao problema do oscilador harmônico e resolvemos utilizando a formulação de Caputo, pois ela traz consigo a vantagem da derivada da constante ser nula, fato este que possui uma interpretação física. Outro fato que justifica a utilização da derivada de Caputo é que a transformada de Laplace, metodologia apresentada e discutida anteriormente a fim de utilizá-la na resolução desta equação diferencial, da derivada fracionária ser dada apenas em termos de suas derivadas de ordem inteira.

Como uma continuação deste trabalho efetua-se um estudo sistemático envolvendo uma equação diferencial fracionária e condições iniciais/de contorno fisicamente coerentes. A partir das diversas abordagens da derivada de ordem não inteira, justificar a formulação de Caputo como a mais conveniente nos sistemas fracionários pelos motivos já apresentados anteriormente. A derivada da constante ser nula, a transformada de Laplace ser dada em termos apenas da derivadas de ordem inteira e pelo fato de a derivada de Caputo da função de Mittag-Leffler de um parâmetro ser exatamente a função de Mittag-Leffler de um parâmetro, o que generaliza o resultado que conhecemos do cálculo usual, isto é, que a derivada da função exponencial é ela própria. Como consequência, abordar as regras de Leibniz na formulação de Caputo, [13].

Referências Bibliográficas

- [1] G. Arfken and H. Weber, *Física Matemática: Métodos Matemáticos para Engenharia e Física*, Campus/Elsevier, Rio de Janeiro, (2007).
- [2] D. Baleanu and J. I. Trujillo, *A New Method of Finding the Fractional Euler-Lagrange and Hamilton Equations within Caputo Fractional Derivatives*, Comm. Nonl. Sci. Num. Simulat., **15**, 1111-1115, (2010).
- [3] J. M. F. Bassalo e M. S. D. Cattani, *Osciladores Harmônicos Clássicos e Quânticos*, Editora Livraria da Física, São Paulo, (2009).
- [4] W. E. Boyce and R. C. DiPrima, *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, LTC Editora, Oitava Edição, Rio de Janeiro, (2006).
- [5] P. L. Butzer and U. Westphal, *An Introduction to Fractional Calculus*, R. Hilfer (Editor), World Scientific, Singapore, (2000).
- [6] E. Capelas de Oliveira, *Funções Especiais com Aplicações*, Segunda Edição, Editora Livraria da Física, São Paulo, (2011).
- [7] E. Capelas de Oliveira, *Métodos Analíticos de Integração*, Editora Livraria da Física, São Paulo, (2010).
- [8] E. Capelas de Oliveira e J. Emílio Maiorino, *Introdução aos Métodos da Matemática Aplicada*, Terceira Edição, Editora da Unicamp, Campinas, (2014).
- [9] E. Capelas de Oliveira, F. Mainardi and J. Vaz Jr., *Fractional Models of Anomalous Relaxation Based on the Kilbas and Saigo Function*, Meccanica: New Trends in Fluid and Solid Mechanical Models, DOI 10.1007/s11012-014-9930-0, (2014).
- [10] E. Capelas de Oliveira, F. Mainardi and J. Vaz Jr., *Models Based on Mittag-Leffler Functions for Anomalous Relaxation in Dielectrics*, Eur. Phys. J. Spec. Topics, **193**, 161-171, (2011). [Edição revisada: <http://arxiv.org/abs/1106.1761>].
- [11] E. Capelas de Oliveira e J. Vaz Jr., *Equações Diferenciais, Teorema dos Resíduos e as Transformadas Integrais*, Notas em Matemática Aplicada, **37**, São Carlos, (2012).
- [12] E. Capelas de Oliveira e W. A. Rodrigues Jr., *Introdução às Variáveis Complexas e Aplicações*, Editora Livraria da Física, São Paulo, (2006).

- [13] E. Capelas de Oliveira and J. A. Tenreiro Machado, *A Review of Definitions for Fractional Derivatives and Integral*, Math. Prob. Engineering, **2014**, Article ID 238459, (2014).
- [14] E. Capelas de Oliveira e M. Tygel, *Métodos Matemáticos para a Engenharia*, Segunda Edição, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, (2010).
- [15] L. Debnath and D. Bhatta, *Integral Transform and Their Applications*, Second Edition, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, (2007).
- [16] K. Diethelm, *Epidemiology: Spreading of Infections Diseases*, Nonlinear Dynamics, **71**, 613-619, (2013).
- [17] K. Diethelm, *The Analysis of Fractional Differential Equations: An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, (2010).
- [18] P. P. G. Dyke, *An Introduction to Laplace Transforms and Fourier Series*, Springer Undergraduate Mathematics Series, Springer London LTD, (1999).
- [19] R. Figueiredo Camargo, *Cálculo Fracionário e Aplicações*, Tese de Doutorado, Unicamp, Campinas, (2009).
- [20] R. Figueiredo Camargo, *Do Teorema de Cauchy ao Método de Cagniard*, Dissertação de Mestrado, Unicamp, Campinas, (2005).
- [21] R. Figueiredo Camargo, E. Capelas de Oliveira e A. O. Chiacchio, *Sobre a Função de Mittag-Leffler*, Relatório de Pesquisa 15/06, Imecc-Unicamp, (2006).
- [22] K. S. Gehlot, *The Generalized K-Mittag-Leffler Function*, Int. J. Contemp. Math. Sciences, **7**, 2213 - 2219, (2012).
- [23] R. Gorenflo and F. Mainardi, *Fractional Calculus: Integral and Differential Equations of Fractional Order*, CISM Lectures Notes, 223-273, (2000).
- [24] J. W. Hanneken, B. N. N. Achar, R. Puzio and D. M. Vaught, *Properties of the Mittag-Leffler Function for Negative alpha*, University of Memphis, Physics Department, USA, (2009).
- [25] R. Herrmann, *Fractional Calculus. An Introduction for Physicists*, World Scientific, New Jersey, (2011).
- [26] M. Ishteva, R. Scherer and L. Boyadjiev, *On the Caputo Operator of Fractional Calculus and C-Laguerre Function*, Math. Sci. Res. J., **9**, 161-170, (2005).
- [27] W. P. Johnson, *The Curious History of Faà di Bruno's Formula*, The American Mathematical Monthly, **109**, 217-234, (2002).

- [28] Y. Luchko and R. Gorenflo, *An Operational for Solving Fractional Differential Equations with the Caputo Derivatives*, Acta Mathematica Vietnamica, **24**, 207-233, (1999).
- [29] F. Mainardi, *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity: An Introduction to Mathematical Models*, Imperial College Press, Singapore, (2010).
- [30] K. S. Miller and B. Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, John Wiley & Sons, Wiley-Interscience, (1993).
- [31] M. G. Mittag-Leffler, *Sur la Nouvelle Fonction $E_\alpha(x)$* , C. R. Acad. Sci., **137**, 554-558, (1903).
- [32] R. L. N6s, *S6ries - Transformadas*, Departamento Acad6mico de Matem6tica, Universidade Tecnol6gica Federal do Paran6, Curitiba, (2011).
- [33] D. S. Oliveira, *Introdu76o ao C6lculo Fracion6rio*, Trabalho de Conclus6o de Curso, Rio Grande, (2012).
- [34] T. J. Osler, *A Further Extension of the Leibniz Rule to Fractional Derivatives and its Relation to Parseval's Formula*, SIAM J. Math. Anal., **3**, 1-16, (1972).
- [35] T. J. Osler, *The Fractional Derivative of a Composite Function*, SIAM J. Math. Anal., **1**, 288-293, (1970).
- [36] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Mathematics in Science and Engineering, Vol. 198, Academic Press, San Diego, (1999).
- [37] T. R. Prabhakar, *A Singular Integral Equation with a Generalized Mittag-Leffler Function in the Kernel*, Yokohama Math. J., **19**, 7-15, (1971).
- [38] S. Roman, *The Formula of Faà di Bruno*, American Mathematical Monthly, **87**, 805-809, (1980).
- [39] D. C. Rosendo, *Sobre a Fun76o de Mittag-Leffler*, Disserta76o de Mestrado, Unicamp, Campinas, (2008).
- [40] B. Ross, *Fractional Calculus and its Applications*, Proceedings of the International Conference held at the University of New Heaven, Springer Berlin Heidelberg, (1974).
- [41] J. Sabatier, O. Agrawal, J. A. Tenreiro Machado, (Editors) *Advances in Fractional Calculus: Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering*, Springer, Berlin, (2007).
- [42] E. Scalas, *Applications of Continuous-time Random Walks in Finances and Economics*, Physica A, **362**, 225-239, (2006).
- [43] K. A. Scott, *Employing the Umbral Algebra to Prove the Faà di Bruno Formula*, PhD Thesis, Iowa State University, (2007).

- [44] S. G. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives - Theory and Applications*, Gordon and Breach, Amsterdam, (1993).
- [45] F. Silva Costa, *Função H de Fox e Aplicações no Cálculo Fracionário*, Tese de Doutorado, Unicamp, Campinas, (2011).
- [46] I. N. Sneddon, *Fourier Transform*, Courier Dover Publications, New York, (1995).
- [47] V. E. Tarasov, *Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media*, Springer Science & Business Media, New York, (2011).
- [48] J. A. Tenreiro Machado, V. Kyriakova and F. Mainardi, *Recent History of Fractional Calculus*, Commun. Nonlinear Sci. Numeric. Simulat., **16**, 1140-1153 (2011); *A poster about the Recent History of Fractional Calculus*, J. Fract. Cal. & Appl. Anal., **13**, 447-454 (2010).
- [49] G. S. Teodoro, *Cálculo Fracionário e as Funções de Mittag-Leffler*, Dissertação de Mestrado, Unicamp, Campinas, (2014).
- [50] A. Tofighi, *An Especial Fractional Oscillator*, Int. J. Stat. Mech., **2013**, 1-5, (2013).
- [51] K. Trincevski, *New Approach to the Fractional Derivatives*, Int. J. Math. Math., **2003**, 315-325, (2003).
- [52] V. V. Uchaikin, *Fractional Derivatives for Physicists and Engineering*, Vol.1 Background and theory. Vol.2, Applications, Springer and Higher Education Press, (2013).
- [53] R. L. Viana, *Transformadas Integrais*, Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, (2013).
- [54] A. Wiman, *Über den Fundamental Satz in der Theorie der Funktionen $E_\alpha(x)$* , Acta Math., **29**, 191-201 (1905).
- [55] D. G. Zill e M. R. Cullen, *Equações Diferenciais*, Terceira Edição, Volume 1, Pearson Makron Books, São Paulo, (2001).
- [56] Faà di Bruno's Formula, http://en.wikipedia.org/wiki/Faa_di_Bruno_formula. Acesso em: abril de 2014.

Apêndice A

Propriedades do Coeficiente Binomial

Este apêndice tem por objetivo demonstrar alguns resultados envolvendo o coeficiente binomial, que foram utilizados no decorrer do texto.

A.1 Definições

O coeficiente binomial é definido por

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

onde $n, k \in \mathbb{N}$ e $n \geq k$. Generalizando para $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ com $\alpha \neq -1, -2, \dots$ obtemos, então, o chamado, coeficiente binomial generalizado, que é dado em termos da função gama, ou seja,

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha-\beta+1)}. \quad (\text{A.1.1})$$

A identidade que relaciona a função gama com a função seno é dada por

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}. \quad (\text{A.1.2})$$

onde $x \in \mathbb{R}$ e $0 < x < 1$, conhecida pelo nome de fórmula de reflexão.

A.2 Proposições

Mostramos a seguir alguns resultados envolvendo o coeficiente binomial, resultados estes que foram utilizados na demonstração da regra de Leibniz.

Proposição A.2.1. Sejam $m, k \in \mathbb{N}$, então

$$\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k} = \binom{m+1}{k}.$$

Demonstração. Utilizando a definição do coeficiente binomial generalizado, Eq.(A.1.1), obtemos

$$\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(k)\Gamma(m-k+2)} + \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(m-k+1)}.$$

Rearranjando a equação acima, temos que

$$\begin{aligned} \binom{m}{k-1} + \binom{m}{k} &= \frac{(k)\Gamma(m+1) + (m-k+1)\Gamma(m+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(m-k+2)} \\ &= \frac{(m+1)\Gamma(m+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(m-k+2)}. \end{aligned}$$

Utilizamos, agora, a relação funcional, Eq.(2.1.1), de onde segue-se que

$$\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k} = \frac{\Gamma(m+2)}{\Gamma(k+1)\Gamma(m-k+2)}.$$

Finalmente, podemos escrever

$$\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k} = \binom{m+1}{k}.$$

■

Proposição A.2.2. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}_-$ e $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{(-1)^n \Gamma(n-\alpha)}{n! \Gamma(-\alpha)}.$$

Para esta demonstração serão necessários dois resultados, a definição do coeficiente binomial generalizado, Eq.(A.1.1), isto é,

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{n! \Gamma(\alpha-n+1)} \tag{A.2.1}$$

e a Eq.(A.1.2)

$$\Gamma(\alpha+1) = \frac{-\pi}{\operatorname{sen}(\pi\alpha)\Gamma(-\alpha)}. \tag{A.2.2}$$

Demonstração. A partir da definição do binomial, temos

$$\begin{aligned} \binom{\alpha}{n} &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{n! \Gamma(\alpha-n+1)} \\ &= \frac{-\pi}{\operatorname{sen}(\pi\alpha)n! \Gamma(-\alpha)\Gamma(\alpha-n+1)} \\ &= \frac{1}{n! \Gamma(-\alpha)} \left\{ \frac{-\pi}{\operatorname{sen}(\pi\alpha)(\alpha-n)\Gamma(\alpha-n)} \right\} \end{aligned}$$

Consideramos, agora,

$$z = n - \alpha \quad \Rightarrow \quad \Gamma(\alpha - n)\Gamma(1 + n - \alpha) = \frac{-\pi}{\operatorname{sen}[\pi(n - \alpha)]}$$

$$\begin{aligned} \binom{\alpha}{n} &= \frac{1}{n!\Gamma(-\alpha)} \left\{ \frac{\operatorname{sen}[\pi(n - \alpha)]\Gamma(n - \alpha + 1)}{\operatorname{sen}(\pi\alpha)(\alpha - n)} \right\} \\ &= \frac{1}{n!\Gamma(-\alpha)} \left\{ \frac{\operatorname{sen}[\pi(n - \alpha)](n - \alpha)\Gamma(n - \alpha)}{\operatorname{sen}(\pi\alpha)(\alpha - n)} \right\} \\ &= \frac{\Gamma(n - \alpha)}{n!\Gamma(-\alpha)} \left\{ \frac{-\operatorname{sen}[\pi(n - \alpha)](\cancel{\alpha - n})}{\operatorname{sen}(\pi\alpha)(\cancel{\alpha - n})} \right\} \\ &= \frac{\Gamma(n - \alpha)}{n!\Gamma(-\alpha)} \left\{ \frac{\cos(n\pi)\cancel{\operatorname{sen}(\alpha\pi)}}{\cancel{\operatorname{sen}(\pi\alpha)}} \right\}. \end{aligned}$$

Finalmente, podemos escrever

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{(-1)^n \Gamma(n - \alpha)}{n!\Gamma(-\alpha)}.$$

■

Proposição A.2.3. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $n, k \in \mathbb{N}$, então temos que

$$\binom{\alpha}{n+k} \binom{n+k}{k} = \binom{\alpha}{k} \binom{\alpha-k}{n}.$$

Demonstração. Utilizamos a definição do binomial generalizado, obtemos

$$\binom{\alpha}{n+k} \binom{n+k}{k} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\cancel{n+k+1})\Gamma(\alpha-n-k+1)} \frac{\Gamma(\cancel{n+k+1})}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+\cancel{k}-\cancel{k}+1)}.$$

Multiplicando e dividindo a equação acima por $\Gamma(\alpha - k + 1)$, obtemos

$$\begin{aligned} \binom{\alpha}{n+k} \binom{n+k}{k} &= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha-k+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-n-k+1)\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-k+1)} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k+1)} \frac{\Gamma(\alpha-k+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-k-n+1)}. \end{aligned}$$

Portanto, segue que

$$\binom{\alpha}{n+k} \binom{n+k}{k} = \binom{\alpha}{k} \binom{\alpha-k}{n}.$$

■

Apêndice B

Série de Laurent, Singularidades e Resíduos

Discutimos, anteriormente, a transformada de Laplace, porém para que possamos discutir a sua transformada inversa devemos, no caso geral, introduzir as variáveis complexas, em particular, os conceitos de: série de Laurent, teorema dos resíduos e lema de Jordan.

B.1 Série de Laurent

Sejam C_1 e C_2 duas circunferências com mesmo centro $z = a$ e de raios R_1 e R_2 ($R_1 < R_2$), respectivamente. Suponhamos que $f(z)$ é uma função analítica sobre C_1 e C_2 e, também sobre a coroa circular compreendida entre as circunferências. Então, podemos escrever $f(\xi)$ em termos da chamada *Série de Laurent* [6, 8, 12]

$$f(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\xi - a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\xi - a)^{-n} \quad (\text{B.1.1})$$

onde ξ é um ponto qualquer da coroa circular $R_1 < \xi < R_2$ e os coeficientes a_n e b_n são dados, respectivamente, por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} dz \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} (z - a)^{n-1} dz. \quad (\text{B.1.2})$$

A soma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\xi - a)^n$ é chamada de *parte analítica* da série de Laurent e o restante da série, que consiste na soma $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(\xi - a)^{-n}$ é sua *parte principal*. Se a parte principal é nula a série se reduz a uma série de Taylor.

B.2 Singularidades

Os pontos do plano complexo nos quais uma função deixa de ser analítica são chamados de singularidades da função $f(z)$. No caso em que $f(z)$ é analítica em uma vizinhança do ponto a , dizemos que $f(z)$ possui uma *singularidade isolada* neste ponto [8, 12, 20]. As singularidades isoladas podem ser classificadas de acordo com o comportamento da função $f(z)$ quando $z \rightarrow a$ da seguinte maneira.

Definição B.2.1 (Singularidade Removível). Se uma função $f(z)$ não for definida em $z = a$, mas existir $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$, então $z = a$ é uma singularidade removível. Neste caso, definimos $f(a) = \lim_{z \rightarrow a} f(z)$, de forma que a função passa a ser analítica em a e na vizinhança original do ponto.

Definição B.2.2 (Polos). Se $f(z)$ tem na parte principal de sua série de Laurent um número finito de termos dados por [8]

$$\frac{a_{-1}}{z-a} + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{a_{-n}}{(z-a)^n}$$

onde $a_{-n} \neq 0$, então $z = a$ é um polo de ordem n . Se $f(z)$ tem um polo em $z = a$ então $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = \infty$.

Definição B.2.3 (Singularidade Essencial). Qualquer singularidade isolada de uma função $f(z)$ que não seja um polo ou uma singularidade removível será uma singularidade essencial. Em tais casos $f(z)$ não é limitada nem tende (em módulo) ao infinito, mas oscila de maneira rápida quando $z \rightarrow a$. A série de Laurent para $f(z)$ terá a parte principal com infinitos termos.

O desenvolvimento da série de Laurent permite estudar o desenvolvimento da função em torno de uma singularidade isolada a . Tal desenvolvimento permite representar a função em uma série de potências negativas e positivas de $z - a$, isto é, podemos escrever para o desenvolvimento em série de Laurent a seguinte série

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n,$$

onde a_n é dado pela Eq.(B.1.2).

B.3 Resíduos

O método que permite o cálculo de integrais de funções reais a partir de integrais de funções complexas utilizando-se um conveniente caminho de integração no plano complexo é extremamente útil no cálculo da transformada de Laplace inversa. Para discutirmos tais integrais é necessário o teorema dos resíduos. Mencionaremos, também, o lema de Jordan que é fundamental no cálculo de integrais reais quando efetuadas através de integração no plano complexo [12, 20].

Antes de enunciarmos o teorema dos resíduos, vamos explicar brevemente o que é um resíduo e como ele é usado para resolver uma integral do tipo

$$\oint_C f(z)dz$$

onde C é um caminho fechado, orientado e simples. Considere uma função $f(z)$ que apresenta uma singularidade em $z = a$. A série de Laurent de $f(z)$ é

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

sendo os coeficientes a_n dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz. \quad (\text{B.3.1})$$

Note que, no caso em que $n = -1$ na equação acima, temos

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz,$$

ou ainda, na seguinte forma

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i a_{-1}. \quad (\text{B.3.2})$$

A expressão acima nos diz que, a_{-1} é o resíduo de f em $z = a$. Logo, para calcular o resíduo de uma função em um ponto, basta expandir a função em série de Laurent em torno de tal ponto e tomar o coeficiente a_{-1} da potência z^{-1} . Note que este é o único valor de n de modo que o denominador na Eq.(B.3.1) não contribui para a integral.

No caso em $z = a$ é um polo de ordem k , temos¹

$$a_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z-a)^k f(z)].$$

Enunciaremos, agora, o teorema dos resíduos.

Teorema B.3.1. Seja $f(z)$ uma função analítica na região interna ao caminho fechado e simples C , bem como sobre C exceto para um número finito de pontos singulares $z_1, z_2, \dots, z_k$ dentro de C . Então,

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}_{z=z_j} f(z).$$

com a integral sendo tomada no sentido anti-horário no caminho C .

¹Os detalhes da demonstração desta expressão podem ser encontrados em [20].

Demonstração. Ver [6, 12, 20]. ■

O lema de Jordan junto com o teorema dos resíduos é utilizado para calcular integrais no plano complexo, em particular no cálculo da transformada de Laplace inversa.

Lema B.3.2. Seja C_R uma semicircunferência de raio R no semiplano (complexo) superior e centrada na origem. Seja $f(z)$ uma função que tende uniformemente a zero mais rápido que $1/|z|$ para $\arg(z) \in [0, \pi]$ quando $|z| \rightarrow \infty$. Seja α um número real não negativo, então

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_R \equiv \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{i\alpha z} f(z) dz = 0.$$

Demonstração. Ver [6, 12, 20]. ■

Apêndice C

Caso Geral de uma Equação Diferencial Ordinária

Neste Apêndice vamos apresentar a redução de uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem, em sua forma mais geral, para uma equação diferencial ordinária que não contém o termo proporcional à derivada de ordem um. Como caso particular recuperamos a equação diferencial ordinária associada ao problema do oscilador harmônico sem amortecimento. Dada a equação diferencial ordinária

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 2A\frac{d}{dt}y(t) + By(t) = g(t),$$

com $A, B \in \mathbb{R}$, o fator de 2 é colocado por conveniência e $g(t)$ uma função real de variável real. Seja $y(t) = x(t)e^{\alpha t}$, onde α será escolhido de modo que não tenhamos o termo da derivada primeira. Derivando $y(t)$ e substituindo na equação diferencial, podemos escrever

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + 2\alpha\frac{d}{dt}x(t) + \alpha^2x(t) + 2A\frac{d}{dt}x(t) + 2\alpha Ax(t) + Bx(t) = e^{-\alpha t}g(t).$$

Escolhemos $\alpha = -A$, de modo que tenhamos

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \beta^2x(t) = f(t) \quad \text{com} \quad f(t) = e^{-At}g(t),$$

onde

$$\alpha^2 + 2\alpha A + B = \beta^2 = A^2 - 2A^2 + B \quad \Rightarrow \quad \beta^2 = B - A^2.$$

Para obter a equação diferencial associada ao problema do oscilador harmônico clássico, Eq.(6.1.9), devemos escolher $\beta^2 = \omega^2$ e para que esta equação diferencial represente o caso do oscilador harmônico não forçado, Eq.(6.1.3), devemos ter $f(t) = 0$.

