

ANÁLISE MATEMÁTICA DE ALGUNS MODELOS DO TIPO CAMPO DE FASES COM CONVECÇÃO

FERNANDO PEREIRA DE SOUZA

Orientador: Dr. JOSÉ LUIZ BOLDRINI

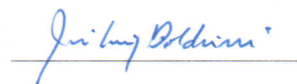
Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, da
Unicamp, como requisito para obtenção do Título de Doutor em Matemática.

8 de Junho de 2010

ANÁLISE MATEMÁTICA DE ALGUNS MODELOS DO TIPO CAMPO DE FASES COM CONVECÇÃO

Este exemplar corresponde à redação final
da tese devidamente corrigida e defendida
por Fernando Pereira de Souza e aprovada
pela comissão julgadora.

Campinas, 8 de Junho de 2010.



Dr. José Luiz Boldrini

Orientador

Banca Examinadora:

Prof. Dr. José Luiz Boldrini

Prof(a). Dr(a). Gabriela Del Valle Planas

Prof. Dr. Luiz Adauto da Justa Medeiros

Prof. Dr. Marcelo Moreira Cavalcanti

Prof. Dr. Ma To Fu

Tese apresentada ao Instituto de Matemática,
Estatística e Computação Científica, UNI-
CAMP, como requisito parcial para obtenção
do Título de Doutor em Matemática.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

Souza, Fernando Pereira de

So89a Análise matemática de alguns modelos do tipo campo de fases com
convecção/Fernando Pereira de Souza-- Campinas, [S.P. : s.n.], 2010.

Orientador : José Luiz Boldrini

Dissertação (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Solidificação. 2. Convecção (Meteorologia). 3. Equações
diferenciais parabólicas. I. Boldrini, José Luiz. II. Universidade Estadual
de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação
Científica. III. Título.

Título em inglês: Mathematical analyses of some phase field type models with convection

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Solidification. 2. Convection (Meteorology).
3. Parabolic differential equations

Área de concentração: Equações Diferenciais Parciais

Títuloção: Doutorado em Matemática Pura

Banca examinadora: Prof. Dr. José Luiz Boldrini (IMECC-UNICAMP)
Profª. Dra. Gabriela del Valle Planas (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Luiz Adauto da Justa Medeiros (UFRJ)
Prof. Dr. Marcelo Moreira Cavalcanti (UEM)
Prof. Dr. Ma To Fu (ICMC-USP)

Data da defesa: 08/06/2010

Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática Pura

Tese de Doutorado defendida em 08 de junho de 2010 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof(a). Dr(a). JOSÉ LUIZ BOLDRINI



Prof(a). Dr(a). GABRIELA DEL VALLE PLANAS



Prof(a). Dr(a). LUIZ ADAUTO DA JUSTA MEDEIROS



Prof(a). Dr(a). MARCELO MOREIRA CAVALCANTI



Prof(a). Dr(a). MA TO FU

Agradecimentos

Ao professor José Luiz Boldrini, pela excelente orientação, por compartilhar seus conhecimentos de uma forma clara e convincente.

A todos os professores e funcionários do IMECC.

Aos meus pais que me ensinaram a dar os primeiros passos para que hoje pudesse realizar mais esta conquista, e a todos meus familiares pela ótima convivência que temos.

Aos meus amigos, em especial André Vicente, Ariane e Janete pela agradável convivência durante esta jornada.

À minha esposa, que com muito carinho tem sido uma ótima e compreensiva companheira.

À Instituição FAPESP, pelo apoio financeiro durante os estudos.

À minha esposa Melina.

Resumo

Neste trabalho estudamos quatro modelos do tipo campo de fases para a evolução de processos de solidificação/liquefação de certos materiais, tanto puros quanto ligas binárias, com a possibilidade de movimentação da fase não-sólida.

As equações que governam o comportamento de materiais puros incluem a equação para o campo de fases, uma equação para a temperatura e uma equação singular do tipo de Navier-Stokes com um termo do tipo Carman-Kozeny e também um termo do tipo Boussinesq. Para ligas binárias, uma equação extra para a concentração do soluto é incluída.

Para materiais puros, tanto no caso bidimensional quanto no caso tridimensional, provamos a existência de soluções globais no tempo; no caso tridimensional, consideramos um modelo com dissipação mais intensa (não linear) do que no caso bidimensional. Para ligas binárias, obtivemos apenas a existência de soluções locais no tempo.

Tais soluções são obtidas da seguinte forma: primeiramente o problema é penalizado e uma sequência de soluções aproximadas é obtida usando o teorema do ponto fixo de Leray-Schauder; então, usando argumentos de compacidade, provamos que esta sequência tem um ponto limite, o qual é uma solução do problema original em um sentido generalizado.

Abstract

In this work we study four phase-field models for the evolution of a solidification/liquefaction process of certain pure material or certain binary alloys, with the possibility of motion of the melt phase. The governing equations for pure materials include a phase-field equation, a heat equation and a singular Navier-Stokes system with a term of Carman-Kozeny type and a Boussinesq type term. For binary alloys, an extra equation for solute concentration is included.

For pure materials, both in the two and three-dimensional cases we prove the existence of global in time solutions; in the three-dimensional, we consider a model with stronger (non-linear) dissipation than in the two-dimensional case. For alloys, both in the two-dimensional and three-dimensional case, we obtain just local in time solutions.

These solutions are obtained as follows: firstly the problem is penalized and a sequence of approximate solutions is obtained by using the Leray-Schauder's fixed point theorem; then, by using compactness arguments, we prove that this sequence has a limit point which is a solution of the original problem in a generalized sense.

Sumário

Introdução	1
1 Notações e Resultados Preliminares	7
1.1 Espaços funcionais	7
1.2 Lemas técnicos	9
2 Um Problema Auxiliar	15
3 Um Modelo para Materiais Puros: Existência Global no Caso Bidimensional	29
3.1 Apresentação do Modelo 1 e resultados	30
3.2 Existência de soluções de um problema penalizado	31
3.3 Passagem ao limite	45
4 Um Modelo para Materiais Puros: Existência Global no Caso Tridimensional	49
4.1 Apresentação do Modelo 2 e o resultado principal	50
4.2 Existência de soluções de um problema penalizado	55
4.3 Passagem ao Limite	76
5 Um Modelo para Ligas Binárias: Existência Local no Caso Bidimensional	83
5.1 Apresentação do Modelo 3 e resultados	84
5.2 Existência de soluções de um problema penalizado	86
5.3 Passagem ao limite	92

6	Um Modelo para Ligas Binárias: Existência Local no Caso Tridimensional	95
6.1	Apresentação do Modelo 4 e o resultado principal	96
6.2	Existência de soluções de um problema penalizado	98
6.3	Passagem ao limite	104
7	Conclusão	107
	Referências Bibliográficas	109

Introdução

Neste trabalho estudamos quatro sistemas de equações diferenciais parciais não lineares que correspondem a modelos matemáticos que podem ser utilizados para a descrição de processos de solidificação ou liquefação que ocorrem em certos materiais (em estado puro ou em mistura com outro material formando certas classes de ligas binárias).

Nestes modelos o mecanismo de mudança de fases sólido/líquido é descrito com o auxílio da metodologia de campo de fase; além disso, também se leva em conta a transferência de calor no material e os possíveis efeitos convectivos que ocorrem na parte não-sólida durante o processo.

Na sua forma mais simples, a metodologia usual do campo de fases é baseada na introdução de uma função escalar da posição e do tempo, φ , como mais uma variável incógnita do modelo e cujos valores servem para indicar a fase do material. Por exemplo, considera-se que um ponto x do domínio, no instante t está na fase sólida se $\varphi(x, t) = \varphi_s$; ele está na fase líquida se $\varphi(x, t) = \varphi_l$; e na fase *mushy* se $\varphi_l < \varphi(x, t) < \varphi_s$, onde φ_s, φ_l dependem do material envolvido e se φ tem ou não significado físico direto. Um modelo deste tipo foi proposto originalmente por Fix [11] e Langer [18] para materiais puros. Tal perspectiva foi posteriormente desenvolvida e generalizada por muitos pesquisadores; por exemplo Caginalp *et al.* [6, 7, 8, 9], Boettinger *et al.* [5], Beckermann *et al.* [2], Cherfils *et al.* [10].

Além disso, a metodologia campo de fase têm atraído o interesse da comunidade científica em várias áreas pela sua capacidade de modelar não somente transições de fase, mas também várias outras situações interessantes. Alguns exemplos de tais aplicações são encontrados em Folch *et al.* [12] para *viscous fingering*, Karma *et al.* [16] para dinâmica de fraturas, Biben *et al.* [3] para dinâmica de vesículas, Mullins [26] para estabilidade de uma interface

planar sólido-líquido, Lee [19] para crescimentos dendríticos, Lifshitz [20] para o processo de espessamento de uma mistura sólido-líquido.

Mais especificamente, nesta tese estamos interessados em estudar sistemas de equações diferenciais parciais parabólicas não lineares relacionadas a um modelo do tipo campo de fases apresentado em Beckermann *et al.* [2], em situações distintas.

O primeiro sistema que consideraremos modela processos de solidificação ou liquefação de materiais puros e é o seguinte:

$$\begin{aligned}
\varphi_t - \alpha \Delta \varphi &= -\varphi + 3\varphi^2 - 2\varphi^3 + (\theta_e - \theta)|\nabla \varphi| \quad \text{em } Q, \\
\theta_t - \beta \Delta \theta + v \cdot \nabla \theta &= \frac{L}{c_p} \varphi_t \quad \text{em } Q, \\
v_t - \nu \Delta v + v \cdot \nabla v + \nabla P &= -\frac{\varphi^2}{1 - \varphi} v + \vec{\sigma} \theta \quad \text{em } Q_{ml}, \\
\operatorname{div} v &= 0 \quad \text{em } Q_{ml}, \\
v &= 0 \quad \text{em } Q_s, \\
\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = \frac{\partial \theta}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{na } \partial \Omega \times (0, T), \quad v = 0 \quad \text{na } \partial Q_{ml}, \\
\varphi(0) = \varphi_0, \quad \theta(0) &= \theta_0, \quad \text{em } \Omega, \quad v(0) = v_0 \quad \text{em } \Omega_{ml}(0).
\end{aligned} \tag{P_1}$$

Aqui, $0 < T < \infty$ é o tempo máximo de interesse e Ω é um aberto, limitado com fronteira $\partial \Omega$ suave onde o processo de solidificação ou fusão está ocorrendo; denotamos $Q = \Omega \times (0, T)$. O campo de fases é denotado por φ ; as funções θ e v são respectivamente relacionadas com a temperatura e a velocidade do material; P é a pressão hidrostática, $\vec{\sigma}$ um vetor constante, em Boldrini *et al.* [28] este termo é usado na forma $\rho \mathbf{g}(\theta - \theta_e) + F$, onde ρ é a densidade média do material, $\mathbf{g}$ a força da gravidade e F uma função de $L^2(Q)$, mas por simplicidade usaremos apenas como um vetor constante. α é uma constante positiva, θ_e é o equilíbrio de temperatura de fusão do material; β é uma constante positiva relacionada com o coeficiente de difusão de calor; L é uma constante positiva relacionada com o calor latente e c_p é uma constante positiva relacionada ao calor específico do material. As densidades do líquido e sólido são assumidos iguais e constantes, as quais, sem perda de generalidade, podem ser supostas terem valor 1.

O modelo está ajustado para que os pontos da fase líquida correspondam a $\varphi = 0$, enquanto os pontos da fase sólida correspondem a $\varphi = 1$.

Observamos que as equações anteriores não valem todas no mesmo domínio e de fato o problema anterior é um problema de fronteira livre. Para entender este ponto, ressaltamos que o domínio espaço-tempo Q pode ser separado em três regiões disjuntas e não conhecidas a priori, Q_s , Q_m e Q_l , associadas respectivamente às regiões onde o material é totalmente sólido, *ushy* e totalmente líquido. Estas regiões dependem de φ e são definidas por

$$Q_s = \{(x, t) \in Q : \varphi(x, t) = 1\}, \quad (1)$$

$$Q_m = \{(x, t) \in Q : 0 < \varphi(x, t) < 1\}, \quad (2)$$

$$Q_l = \{(x, t) \in Q : \varphi(x, t) = 0\}. \quad (3)$$

Por Q_{ml} , que é a região onde vale a terceira das equações anteriores, denotamos a região não-sólida, i.e.,

$$Q_{ml} = Q_m \cup Q_l = \{(x, t) \in Q : 0 \leq \varphi(x, t) < 1\}. \quad (4)$$

Para cada $t \in [0, T]$, $\Omega_{ml}(t)$ é definido por

$$\Omega_{ml}(t) = \{x \in \Omega : 0 \leq \varphi(x, t) < 1\}. \quad (5)$$

Ressaltamos que a terceira equação, que governa o movimento na parte fluida, além de valer em uma região a priori desconhecida, é uma variante da equação de Navier-Stokes incluindo um termo que se torna singular na fase sólida.

Analizamos o problema anterior no caso bidimensional e provamos a existência de soluções globais no tempo.

O correspondente caso trimensional é tecnicamente mais complicado; ainda para o caso de materiais puros, fomos capazes de provar a existência de soluções generalizadas, globais no tempo, para o seguinte modelo com maior dissipação do que o anterior:

$$\begin{aligned} \varphi_t - \alpha \Delta \varphi + \alpha_0 \mathcal{B} \varphi &= -\varphi + 3\varphi^2 - 2\varphi^3 + (\theta_e - \theta)|\nabla \varphi| \quad \text{em } Q, \\ \theta_t - \beta \Delta \theta + v \cdot \nabla \theta &= \frac{L}{c_p} \varphi_t \quad \text{em } Q, \\ v_t - \nu \Delta v + \nu_0 \mathcal{A} v + v \cdot \nabla v + \nabla P &= -\frac{\varphi^2}{1 - \varphi} v + \vec{\sigma} \theta \quad \text{em } Q_{ml}, \end{aligned} \quad (P_2)$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} v &= 0 \quad \text{em } Q_{ml}, \\
v &= 0 \quad \text{em } Q_s, \\
\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} &= \frac{\partial \theta}{\partial \nu} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega \times (0, T), \quad v = 0 \quad \text{na } \partial Q_{ml}, \\
\varphi(0) &= \varphi_0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \text{em } \Omega, \quad v(0) = v_0 \quad \text{em } \Omega_{ml}(0).
\end{aligned}$$

Aqui as notações são as mesmas do modelo anterior; a equação de movimento da parte fluida, além do termo que se torna singular quando o material se torna sólido, também possui um termo adicional de viscosidade sugerido por Ladyzenskaya *et al.* [17] e Lions [22]. Este termo é $\nu_0 \mathcal{A}v$, onde ν_0 é uma constante positiva. Os operadores $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são respectivamente operadores p -Laplaceano e q -Laplaceano associados às expressões:

$$\mathcal{A}(v) = -\operatorname{div}(|\nabla v|^{p-2} \nabla v), \quad \mathcal{B}(\varphi) = -\operatorname{div}(|\nabla \varphi|^{q-2} \nabla \varphi). \quad (6)$$

A seguir consideramos processos de solidificação ou liquefação de ligas binárias, isto é, misturas de dois materiais, um deles geralmente presente em menor quantidade e denominado soluto (por exemplo, níquel) e outro geralmente presente em maior quantidade e denominado solvente (por exemplo, ferro). Neste caso, além das incógnitas dos modelos anteriores, usadas com as mesmas notações, é necessária a introdução de outra incógnita, c , que fornece a concentração do material soluto na matriz do solvente.

Como antes, analisamos o caso bidimensional para o seguinte modelo:

$$\begin{aligned}
\varphi_t - \alpha \Delta \varphi &= -\varphi + 3\varphi^2 - 2\varphi^3 + (\theta_e - \theta + c)|\nabla \varphi| \quad \text{em } Q, \\
\theta_t - \beta \Delta \theta + v \cdot \nabla \theta &= \frac{L}{c_p} \varphi_t \quad \text{em } Q, \\
c_t - \gamma \Delta c &= \frac{\varphi_t}{1 - \varphi + k\varphi} c + \frac{v - \nabla \varphi}{1 - \varphi + k\varphi} \nabla c, \quad \text{em } Q. \\
v_t - \nu \Delta v + v \cdot \nabla v + \nabla P &= -\frac{\varphi^2}{1 - \varphi} v + \vec{\sigma}_1 \theta + \vec{\sigma}_2 c \quad \text{em } Q_{ml}, \\
\operatorname{div} v &= 0 \quad \text{em } Q_{ml}, \\
v &= 0 \quad \text{em } Q_s, \\
\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} &= \frac{\partial \theta}{\partial \nu} = \frac{\partial c}{\partial \nu} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega \times (0, T), \quad v = 0 \quad \text{na } \partial Q_{ml}, \\
\varphi(0) &= \varphi_0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad c(0) = c_0 \quad \text{em } \Omega, \quad v(0) = v_0 \quad \text{em } \Omega_{ml}(0).
\end{aligned} \quad (P_3)$$

Novamente o caso tridimensional é, como antes, tecnicamente mais complicado e também requer um modelo com maior dissipação:

$$\begin{aligned}
\varphi_t - \alpha \Delta \varphi &= -\varphi + 3\varphi^2 - 2\varphi^3 + (\theta_e - \theta + c)|\nabla \varphi| \quad \text{em } Q, \\
\theta_t - \beta \Delta \theta + v \cdot \nabla \theta &= \frac{L}{c_p} \varphi_t \quad \text{em } Q, \\
c_t - \gamma \Delta c &= \frac{\varphi_t}{1 - \varphi + k\varphi} c + \frac{v - \nabla \varphi}{1 - \varphi + k\varphi} \nabla c, \quad \text{em } Q. \tag{P_4} \\
v_t - \nu \Delta v + \nu_0 \mathcal{A}v + v \cdot \nabla v + \nabla P &= -\frac{\varphi^2}{1 - \varphi} v + \vec{\sigma}_1 \theta + \vec{\sigma}_2 c \quad \text{em } Q_{ml}, \\
\operatorname{div} v &= 0 \quad \text{em } Q_{ml}, \\
v &= 0 \quad \text{em } Q_s, \\
\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = \frac{\partial \theta}{\partial \nu} = \frac{\partial c}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{na } \partial \Omega \times (0, T), \quad v = 0 \quad \text{na } \partial Q_{ml}, \\
\varphi(0) = \varphi_0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad c(0) = c_0 \quad \text{em } \Omega, \quad v(0) = v_0 \quad \text{em } \Omega_{ml}(0).
\end{aligned}$$

A introdução da equação extra para a concentração, com inclusão de novas não linearidades, torna a análise destes dois últimos modelos bastante mais difícil do que aquelas dos correspondente modelos para materiais puros. Como consequência, para os modelos de ligas binárias somente fomos capazes de mostrar a existência de soluções locais no tempo.

Para realizar as análises dos modelos anteriores, combinamos as técnicas usadas por Hoffmann e Jiang [15], Morosan e Motreanu [25] e Boldrini *et al.* [27]. O estudo de existência de solução para os tais modelos será feito usando uma técnica de regularização (penalização) similar já usada em Blanc *et al.* [4] e também usada em Boldrini *et al.* [27]; o objetivo desta regularização (penalização) é o de permitir o uso das equações de movimento do fluido em todo o domínio e não apenas na região não-sólida, a qual é a priori desconhecida. O problema regularizado (penalizado) será estudado usando argumentos de ponto fixo, compacidade e *bootstrapping*, e então passamos o limite para obter uma solução do problema original.

Este trabalho está organizado da seguinte forma. No Capítulo 1, fixamos as notações a serem utilizadas e apresentamos resultados necessários para a análise dos sistemas. No Capítulo 2, provamos a existência e a unicidade de soluções de um certo problema auxiliar associado aos nossos sistemas; provamos também que tais soluções satisfazem certas propriedades que serão muito importantes para as análises a serem feitas nos demais capítulos. No Capítulo

3 será feito um estudo sobre a existência de solução global no tempo para o modelo (P_1) . O modelo (P_2) é estudado no Capítulo 4, no qual estudamos a existência de solução global no tempo. Devido a equação da concentração ser muito complicada conseguimos apenas um resultado de existência local no tempo para os modelos (P_3) , estudado no Capítulo 5, e (P_4) estudado no Capítulo 6.

Capítulo 1

Notações e Resultados Preliminares

Neste capítulo fixamos as notações e os espaços funcionais que serão utilizados no decorrer deste trabalho, apresentamos alguns resultados clássicos de imersão de Sobolev e da teoria das equações diferenciais parciais parabólicas.

1.1 Espaços funcionais

Representamos por Ω um subconjunto aberto, limitado e conexo do $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2 , $T \in \mathbb{R}$ finito e $Q_t = \Omega \times (0, t)$, em particular, usaremos $Q_T = Q$. Usaremos notações usuais de espaços de Sobolev, por exemplo, representa-se por $W_p^m(\Omega)$ o espaço vetorial de todas funções u de $L^p(\Omega)$ tais que para todo $|j| \leq m$, $D^j u \in L^p(\Omega)$, onde $j = (j_1, \dots, j_n)$ é um multi-índice, $|j| = j_1 + \dots + j_n$, $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ para $i = 1, \dots, n$ e D^j é operador diferencial definido por

$$D^j = D_1^{j_1} \dots D_n^{j_n} = \frac{\partial^{|j|}}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}}.$$

Em particular, quando $m = 0$ temos

$$L^p(\Omega) = W_p^0(\Omega).$$

Para um estudo mais detalhado sobre os espaços de Sobolev veja Medeiros [23], Adams [1].

Para o estudo que envolverão as equações de Navier-Stokes usaremos alguns espaços funcionais que desempenham papel fundamental. Representamos por $\mathcal{V}$ o subespaço vetorial de

$(C_0^\infty(\Omega))^n$ constituído pelos campos vetoriais com divergência nula, isto é,

$$\mathcal{V} = \{\phi \in (C_0^\infty(\Omega))^n \text{ tal que } \operatorname{div}(\phi) = 0\},$$

onde $\operatorname{div}(\phi) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_i}{\partial x_i}$. O fecho de $\mathcal{V}$ em $(L^2(\Omega))^n$, $(H_0^1(\Omega))^n$ e em $(W_p^1(\Omega))^n$ são três espaços básicos para o estudo das equações de Navier-Stokes, os quais serão denotados por H , V e V^p , ou seja,

$$H = \overline{\mathcal{V}}^{(L^2(\Omega))^n}, \quad V = \overline{\mathcal{V}}^{(H_0^1(\Omega))^n}, \quad V^p = \overline{\mathcal{V}}^{(W_p^1(\Omega))^n}.$$

Para funções que dependem das variáveis espaciais e temporais, ou seja, funções definidas em Q , trabalharemos no seguinte espaço:

$$W_q^{2,1}(Q) = \{\phi \in L^q(Q); D^j \phi \in L^q(Q) \ 1 \leq j \leq 2, \text{ e } \phi_t \in L^q(Q)\},$$

cujas norma é dada por

$$\|\phi\|_{W_q^{2,1}(Q)} = \sum_{|j| \leq 2} \|D^j \phi\|_{L^q(Q)} + \|\phi_t\|_{L^q(Q)}.$$

Um estudo desses espaços pode ser encontrado em Ladyzenskaya [17], Lions [21], Mikhailov [24], por exemplo, podemos ter uma inclusão contínua de $W_q^{2,1}(Q)$ nos espaços $L^\infty(Q)$ e de Hölder, vejamos a seguir uma definição para tais espaços de Hölder.

Para cada $\tau > 0$ não inteiro, sendo $\tau = k + \alpha$, com $k \in \mathbb{N}$ e $0 < \alpha < 1$, definimos o espaço de Hölder $H^{\tau, \tau/2}(\overline{Q})$ como o espaço das funções $u \in C^0(\overline{Q})$ tais que $D_t^r D^s u \in C^0(\overline{Q})$, para $2r + |s| \leq \tau$, e para quais a norma

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^{\tau, \tau/2}(\overline{Q})} &= \sum_{i=0}^k \sum_{2r+s=j} \|D_t^r D^s u\|_{C^0(\overline{Q})} \\ &+ \sum_{2r+s=k} \langle D_t^r D^s u \rangle_{x,Q}^\tau + \sum_{0 < \frac{\tau-2r-|s|}{2} < 1} \langle D_t^r D^s u \rangle_{t,Q}^{\frac{\tau-2r-|s|}{2}} \end{aligned}$$

é finita. Onde,

$$\begin{aligned} \|v\|_{C^0(\overline{Q})} &= \max_{\overline{Q}} |v|, \\ \langle v \rangle_{x,Q}^\tau &= \sup_{(x,t), (x',t') \in \overline{Q}} \frac{|v(x,t) - v(x',t')|}{|x - x'|^\tau}, \\ \langle D_t^r D^s u \rangle_{t,Q}^\gamma &= \sup_{(x,t), (x',t') \in \overline{Q}} \frac{|v(x,t) - v(x',t')|}{|t - t'|^\gamma}. \end{aligned}$$

Denotaremos por $L^p(0, T, X)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço das (classes de) funções vetoriais $\phi : (0, T) \rightarrow X$ tais que a aplicação $t \mapsto \|\phi(t)\|_X^p$ é integrável a Lebesgue em $(0, T)$. A norma em $L^p(0, T, X)$ é dada por

$$\|\phi\|_{L^p(0, T, X)} = \left(\int_0^T \|\phi(t)\|_X^p dt \right)^{1/p}.$$

O caso $p = \infty$, $L^\infty(0, T, X)$ é o espaço das (classes de) funções vetoriais $\phi : (0, T) \rightarrow X$ tais que a aplicação $t \mapsto \|\phi(t)\|_X$ é essencialmente limitada em $(0, T)$ e a norma dada por

$$\|\phi\|_{L^\infty(0, T, X)} = \sup_{t \in (0, T)} \text{ess} \|\phi(t)\|_X.$$

Se X é um espaço de Hilbert então $L^2(0, T, X)$ também é um espaço de Hilbert com produto interno dado por

$$(\phi, \varphi)_{L^2(0, T, X)} = \int_0^T (\phi(t), \varphi(t))_X dt.$$

Durante este trabalho o espaço X será $L^2(\Omega)$ e as vezes usaremos como $W_2^1(\Omega)$. Na próxima seção veremos algumas propriedades destes espaços de funções vetoriais.

1.2 Lemas técnicos

Nesta seção veremos alguns resultados clássicos que serão usados durante o trabalho.

Lema 1.1 *Seja Ω aberto, limitado do $\mathbb{R}^n$, Ω de classe C^m , e $1 \leq p \leq \infty$. Então as seguintes imersões são compactas:*

- a) $W_p^m(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leq q < \frac{np}{n-mp}$ se $mp < n$,
- b) $W_p^m(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$ se $mp = n$,
- c) $W_p^m(\Omega) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega})$, $k < m - \frac{n}{p} \leq k + 1$ se $mp > n$,

onde k é um inteiro não negativo.

A demonstração desse Lema pode ser encontrada em Medeiros [23]. O seguinte resultado de imersão será de grande importância para mostrarmos a regularidade das funções do nosso modelo.

Lema 1.2 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave. então $W_q^{2,1}(Q)$ está imerso continuamente em $L^p(Q)$ com*

$$p = \begin{cases} \infty & \text{se } \frac{1}{q} - \frac{2}{n+2} < 0, \\ \text{qualquer número positivo} & \text{se } \frac{1}{q} - \frac{2}{n+2} = 0, \\ \left(\frac{1}{q} - \frac{2}{n+2}\right)^{-1} & \text{se } \frac{1}{q} - \frac{2}{n+2} > 0. \end{cases}$$

Além disso, a inclusão é compacta para todo $2 \leq \tilde{p} < p$, com p dado acima e pode ser encontrado em (Ladyzenskaya [17] p. 80 Lema 3.3).

Para obtermos uma inclusão compacta e contínua de $W_q^{2,1}(Q)$ em $L^\infty(Q)$ para q suficientemente grande precisaremos do seguinte resultado:

Lema 1.3 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio aberto, limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave. Se $2l - 2r - |s| - (n+2)/q > 0$, então*

$$W_q^{2l,l}(Q) \subset H^{\tau,\tau/2}(\overline{Q}), \text{ para } 0 \leq \tau < 2l - 2r - |s| - (n+2)/q.$$

Mais ainda,

$$\|u\|_{H^{\tau,\tau/2}(\overline{Q})} \leq C \|u\|_{W_q^{2l,l}(Q)},$$

com C dependendo de Ω, T, l, r, s, n , e q .

Além disso, se $2l - 2r - |s| - (n+2)/q$ não é inteiro, então as conclusões anteriores são válidas para $\tau = 2l - 2r - |s| - (n+2)/q$.

No caso particular onde $r = s = 0$, $l = 1$, temos:

Corolário 1.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio aberto, limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave. Se $q > (n+2)/2$, então*

$$W_q^{2,1}(Q) \subset H^{\tau,\tau/2}(\overline{Q}), \text{ para } 0 \leq \tau < 2 - (n+2)/q.$$

Além disso,

$$\|u\|_{H^{\tau,\tau/2}(\overline{Q})} \leq C \|u\|_{W_q^{2,1}(Q)}.$$

Este corolário nos permite demonstrar o seguinte resultado de imersão:

Corolário 1.2 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, aberto, limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave. Então para todo $q > 5/2$ temos*

$$W_q^{2,1}(Q) \subset L^\infty(Q),$$

com imersão contínua e compacta.

Demonstração: Segue do corolário anterior que a inclusão $W_q^{2,1}(Q) \subset H^{\tau,\tau/2}(\overline{Q})$ é contínua para $0 \leq \tau < 2 - 5/q$. Devido ao Teorema de Arzela-Ascoli a inclusão $H^{\tau,\tau/2}(\overline{Q}) \subset C^0(\overline{Q})$ é contínua e compacta, para $\tau > 0$ e a inclusão $C^0(\overline{Q}) \subset L^\infty(Q)$ é contínua, obtemos que a inclusão $W_q^{2,1}(Q) \subset L^\infty(Q)$ é contínua e compacta. ■

Observação 1.1 *Também usaremos o Corolário 1.2 no caso onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, e neste caso é preciso apenas $q > 2$.*

Agora enunciaremos o Teorema do ponto fixo devido a Leray-Schauder (Friedman [13] Teorema 3, pp. 189) o qual será usado nos capítulos 2, 3, e 4.

Teorema 1.1 (Teorema do ponto fixo de Leray-Schauder)

Seja $\mathcal{T}_\lambda : B \rightarrow B$, $0 \leq \lambda \leq 1$, uma família de operadores definida no espaço de Banach B . Suponha que:

- a)** $\mathcal{T}_\lambda x$ está bem definido $\forall x \in B$ e $\forall \lambda \in [0, 1]$.
- b)** $\forall \lambda \in [0, 1]$ fixo, $\mathcal{T}_\lambda : B \rightarrow B$ é um operador contínuo e compacto.
- c)** $\forall x \in A$, $A \subset B$ limitado, $\mathcal{T}_\lambda x$ é uma transformação uniformemente contínua com respeito a λ .
- d)** $\mathcal{T}_0$ possui um único ponto fixo em B .
- e)** Existe uma constante $M > 0$ finita tal que para toda possível solução de $\mathcal{T}_\lambda x = x$ para qualquer $\lambda \in [0, 1]$ satisfaz $\|x\|_B \leq M$.

Então existe pelo menos uma solução $x \in B$ da equação $\mathcal{T}_1 x = x$.

Usaremos frequentemente, nos capítulos 5 e 6 o Teorema do ponto fixo de Schauder, que pode ser encontrado em (Hale [14], p.10), vejamos aqui seu enunciado.

Teorema 1.2 (Teorema do ponto fixo de Schauder)

Sejam X um subconjunto convexo, compacto de um espaço de Banach B e $\mathcal{T} : X \rightarrow X$ um operador contínuo, então $\mathcal{T}$ possui um ponto fixo em X .

O seguinte resultado da teoria L^p para as equações parabólicas será utilizado em todos os seguintes capítulos deste trabalho e pode ser encontrado em (Ladyzenskaya [17] Teorema 9.1 pp. 341 e a observação no final da seção pp. 351).

Denotemos $\mathcal{L}(x, t, \partial/\partial x, \partial/\partial t)$ o operador diferencial parabólico linear com coeficientes reais

$$\mathcal{L}(x, t, \partial/\partial x, \partial/\partial t)u = \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i,j=1}^n a_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x, t)u.$$

Teorema 1.3 (Ladyzenskaya) *Sejam Ω um aberto de classe C^2 e $q > 1$. Suponha que os coeficientes a_{ij} do operador $\mathcal{L}$ são funções contínuas e limitadas em Q , enquanto os coeficientes $a_i \in L^r(Q)$, $a \in L^s(Q)$ com*

$$\begin{aligned} r &= \begin{cases} \max(q, n+2) & \text{para } q \neq n+2, \\ n+2+\epsilon & \text{para } q = n+2, \end{cases} \\ s &= \begin{cases} \max(q, \frac{n+2}{2}) & \text{para } q \neq \frac{n+2}{2}, \\ \frac{n+2}{2} + \epsilon & \text{para } q = \frac{n+2}{2}, \end{cases} \end{aligned}$$

$\epsilon > 0$. Então para cada $f \in L^q(Q)$, $u_0 \in W_q^{2-2/q}(\Omega)$ para $q \neq 3$, e satisfazendo a condição de compatibilidade $\partial u_0 / \partial \nu = 0$ na $\partial\Omega$ para $q > 3$, então existe uma única $u \in W_q^{2,1}(Q)$ tal que

$$\mathcal{L}(x, t, \partial/\partial x, \partial/\partial t)u = f(x, t)$$

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0.$$

Além disso,

$$\|u\|_{W_q^{2,1}(Q)} \leq C \left(\|f\|_{L^q(Q)} + \|u_0\|_{W_q^{2-2/q}(\Omega)} \right),$$

onde C depende de Ω , T e das normas anteriores dos coeficientes do operador $\mathcal{L}$.

O próximo resultado de imersão se encontra demonstrado em (Simon [29] pp. 85).

Lema 1.4 *Sejam X, B, Y espaços de Banach tais que $X \subset B \subset Y$. Suponha ainda que a imersão $X \hookrightarrow B$ seja compacta. Seja F um conjunto limitado em $L^p(0, T; X)$ onde $1 \leq p < \infty$, e $\partial F / \partial t$ limitado em $L^1(0, T; Y)$. Então F é relativamente compacto em $L^p(0, T; B)$.*

Se F é limitado em $L^\infty(0, T; X)$ e $\partial F / \partial t$ limitado em $L^r(0, T; Y)$ onde $r > 1$. Então F é relativamente compacto em $C([0, T]; B)$.

Um caso particular do Lema 1.4 muito usado nos capítulos posteriores é o seguinte corolário.

Corolário 1.3 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, aberto, limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave. Então*

$$W_2^{2,1}(Q) \subset L^2(0, T; L^\infty(\Omega))$$

com imersão compacta.

Demonstração: Note que

$$W_2^{2,1}(Q) = \{\phi \in L^2(0, T; W_2^2(\Omega)); \phi_t \in L^2(0, T; L^2(\Omega))\},$$

então usando Lema 1.1 temos que $W_2^2(\Omega)$ possui imersão compacta em $L^\infty(\Omega)$. Também temos que $L^\infty(\Omega)$ possui imersão contínua em $L^2(\Omega)$. Portanto o resultado segue do Lema 1.4 com $X = W_2^2(\Omega)$, $B = L^\infty(\Omega)$ e $Y = L^2(\Omega)$. ■

Usando o mesmo raciocínio obtemos também o seguinte corolário:

Corolário 1.4 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, aberto, limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave. Então*

$$W_2^{2,1}(Q) \subset L^2(0, T; H^1(\Omega)),$$

com imersão compacta.

Demonstração: Basta aplicar o Lema 1.4 com $X = W_2^2(\Omega)$, $B = H^1(\Omega)$ e $Y = L^2(\Omega)$. ■

O próximo lema será muito usado quando fizermos uso de argumentos do tipo *bootstrapping*.

Lema 1.5 (Desigualdade de interpolação)

Se $u \in L^{p_1}(0, T; L^{q_1}(\Omega)) \cap L^{p_2}(0, T; L^{q_2}(\Omega))$ com $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$, $1 \leq q_1 \leq q_2 \leq \infty$, então $u \in L^{p_\theta}(0, T; L^{q_\theta}(\Omega))$ para todo $p_1 \leq p_\theta \leq p_2$, $q_1 \leq q_\theta \leq q_2$, e se tem a desigualdade

$$\|u\|_{L^{p_\theta}(0, T; L^{q_\theta}(\Omega))} \leq \|u\|_{L^{p_1}(0, T; L^{q_1}(\Omega))}^\theta \|u\|_{L^{p_2}(0, T; L^{q_2}(\Omega))}^{1-\theta},$$

onde $0 \leq \theta \leq 1$ verifica

$$\frac{1}{q_\theta} = \frac{\theta}{q_1} + \frac{1-\theta}{q_2} \quad e \quad \frac{1}{p_\theta} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2}.$$

Demonstração: Basta usar duas vezes o Teorema de Interpolação que pode ser encontrado em Medeiros [23].

Um caso particular que usaremos nos próximos capítulos é o seguinte resultado.

Corolário 1.5 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto, limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave. Então a seguinte imersão é contínua*

$$L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)) \subset L^4(Q).$$

Capítulo 2

Um Problema Auxiliar

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados de existência e unicidade para o seguinte problema de valor inicial e de fronteira relacionado com o campo de fases $\varphi(x, t)$, o qual será de grande importância nas demonstrações dos nossos resultados. O problema consiste em encontrar uma função (campo de fases) φ tal que

$$\varphi_t - \alpha \Delta \varphi = -\varphi + 3\varphi^2 - 2\varphi^3 + f|\nabla \varphi| \quad \text{em } Q, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega \times (0, T), \quad (2.2)$$

$$\varphi(0) = \varphi_0 \quad \text{em } \Omega, \quad (2.3)$$

onde $f : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ e $\varphi_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ são dados. Começamos a estudar o problema (2.1)-(2.3) da seguinte forma, primeiro vamos supor que são dados $\varphi_0 \in W_2^1(\Omega)$, $f \in L^\infty(Q)$ então mostrar que existe $\varphi \in W_2^{2,1}(Q)$ solução de (2.1)-(2.3), depois veremos que a solução φ satisfaz a seguinte propriedade, $0 \leq \varphi \leq 1$ que está relacionada com fenômenos físicos, esta propriedade será de grande importância para mostrarmos certas estimativas que nos permitirão supor que $f \in L^2(0, T; L^\infty(\Omega))$ e ainda nos ajudar mostrar a unicidade de solução do problema (2.1)-(2.3).

Ainda neste capítulo mostraremos que no caso onde $\varphi_0 \in W_q^{2-2/q}(\Omega)$ e $f \in L^\infty(Q)$, então existe $\varphi \in W_q^{2,1}(Q)$ solução de (2.1)-(2.3).

Os resultados que envolvem $f \in L^2(0, T; L^\infty(\Omega))$ serão usados no capítulo 3, e os resultados que envolvem $f \in L^\infty(Q)$ serão usados nos capítulos 5 e 6.

Lema 2.1 *Sejam $0 < T < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, aberto, limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2 e α uma constante positiva. Suponha que são dados:*

$$\varphi_0 \in W_2^1(\Omega), \quad g \in L^2(Q), \quad f \in L^\infty(Q).$$

Então existe uma única $\varphi \in W_2^{2,1}(Q)$ tal que

$$\varphi_t - \alpha \Delta \varphi = g + f|\nabla \varphi| \quad \text{em } Q, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega \times (0, T), \quad (2.5)$$

$$\varphi(0) = \varphi_0 \quad \text{em } \Omega. \quad (2.6)$$

Demonstração: Aplicaremos o Teorema de ponto fixo de Leray-Schauder, (Teorema 1.1). Para este fim, consideramos a seguinte família de operadores $\mathcal{T}_\lambda$, $0 \leq \lambda \leq 1$, definido no espaço de Banach $B = L^2(0, T, H^1(\Omega))$ o qual aplica $\psi \in B$ na solução φ do seguinte problema:

$$\varphi_t - \alpha \Delta \varphi = g + \lambda f|\nabla \psi| \quad \text{em } Q, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega \times (0, T), \quad (2.8)$$

$$\varphi(0) = \varphi_0 \quad \text{em } \Omega. \quad (2.9)$$

É claro que φ é uma solução de (2.4)-(2.6) se, e somente se, é um ponto fixo do operador $\mathcal{T}_1$. A seguir mostraremos que $\mathcal{T}_\lambda$ satisfaz as hipóteses do Teorema do ponto fixo de Leray-Schauder.

Começamos mostrando que $\mathcal{T}_\lambda$ está bem definido.

Para isto, observe que $g + \lambda f|\nabla \psi| \in L^2(Q)$, aplicando a teoria L^p -parabólica (Teorema 1.3), existe uma única solução $\varphi \in W_2^{2,1}(Q)$ do problema (2.7)-(2.9). A imersão $W_2^{2,1}(Q)$ em $L^2(0, T, H^1(\Omega))$ (Simom [29], Corolário 4) garante então que o operador $\mathcal{T}_\lambda$ está bem definido de B em B .

A seguir provaremos a continuidade de $\mathcal{T}_\lambda$.

Para isto, seja $\psi_n \in B$ uma sequência convergindo fortemente para $\psi \in B$. Para cada n , seja $\varphi_n = \mathcal{T}_\lambda(\psi_n)$, temos que φ_n satisfaz a seguinte estimativa (Ladyzenskaya [17], p. 341);

$$\begin{aligned} \|\varphi_n\|_{W_2^{2,1}(Q)} &\leq C \left(\|\varphi_0\|_{W_2^1(\Omega)} + \|g + f|\nabla \psi_n|\|_{L^2(Q)} \right) \\ &\leq C \left(\|\varphi_0\|_{W_2^1(\Omega)} + \|g\|_{L^2(Q)} + \|f\|_{L^\infty(Q)} \|\nabla \psi_n\|_{L^2(Q)} \right), \end{aligned}$$

para alguma constante C independente de n . Desde que a imersão $W_2^{2,1}(Q)$ em $L^2(0, T, H^1(\Omega))$ é compacta (Corolário 1.4), existem uma subsequência de (φ_n) (a qual ainda denotaremos por (φ_n)) e $\tilde{\varphi} \in W_2^{2,1}(Q)$ tais que

$$\begin{aligned}\varphi_n &\rightharpoonup \tilde{\varphi} \text{ em } W_2^{2,1}(Q), \\ \varphi_n &\rightarrow \tilde{\varphi} \text{ em } L^2(0, T; H^1(\Omega)),\end{aligned}$$

e assim $\tilde{\varphi} = \mathcal{T}_\lambda(\psi)$, isto vale para qualquer subsequência de (φ_n) , então a sequência original (φ_n) converge fortemente para $\tilde{\varphi}$, o que implica que $\mathcal{T}_\lambda$ é contínuo para todo $0 \leq \lambda \leq 1$. Ao mesmo tempo, $\mathcal{T}_\lambda$ é limitado em $W_2^{2,1}(Q)$, e a imersão deste espaço em B é compacta, então concluímos que $\mathcal{T}_\lambda$ é um operador compacto para cada $\lambda \in [0, 1]$.

Para provar que para ψ em um conjunto limitado de B , $\mathcal{T}_\lambda$ é uniformemente contínuo com respeito a λ , sejam $0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 1$ e $\varphi_i = \mathcal{T}_{\lambda_i}(\psi)$. Note que $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ satisfaz o seguinte problema:

$$\begin{aligned}\varphi_t - \alpha \Delta \varphi &= (\lambda_1 - \lambda_2) f |\nabla \psi| \quad \text{em } Q, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{na } \partial \Omega \times (0, T), \\ \varphi(0) &= 0 \quad \text{em } \Omega,\end{aligned}$$

e portanto φ satisfaz a seguinte estimativa (Ladyzenskaya [17], p. 341);

$$\|\varphi\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C |\lambda_1 - \lambda_2| \|f\|_{L^\infty(Q)} \|\nabla \psi\|_{L^2(Q)},$$

onde C é independente de λ_i . Portanto $\mathcal{T}_\lambda$ é uniformemente contínuo em λ .

Falta-nos estimar o conjunto de todos os pontos fixos de $\mathcal{T}_\lambda$. Seja $\varphi \in B$ um ponto fixo, i.e., solução do seguinte problema

$$\varphi_t - \alpha \Delta \varphi = g + \lambda f |\nabla \varphi| \quad \text{em } Q, \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 \quad \text{na } \partial \Omega \times (0, T), \tag{2.11}$$

$$\varphi(0) = \varphi_0 \quad \text{em } \Omega. \tag{2.12}$$

Multiplicando (2.10) por φ , após integração por partes e as desigualdades de Hölder e Young, obtemos de maneira usual a seguinte estimativa:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varphi^2 + \alpha \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 = \int_{\Omega} g \varphi + \lambda \int_{\Omega} f |\nabla \varphi| \varphi$$

$$\leq \int_{\Omega} g^2 + \epsilon \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 + (1 + \|f\|_{L^\infty(\Omega)}^2) \int_{\Omega} \varphi^2,$$

tomando $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, podemos aplicar o Lema de Gronwall para obter

$$\|\varphi\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq (\|\varphi_0\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(Q)}) e^{T+\|f\|_{L^\infty(Q)}^2} := M.$$

Finalmente, para $\lambda = 0$, é claro que o problema (2.7)-(2.9) tem uma única solução. Podemos então aplicar o Teorema de ponto fixo de de Leray-Schauder, assim, existe pelo menos um ponto fixo $\varphi \in B \cap W_2^{2,1}(Q)$ do operador $\mathcal{T}_1$ o qual corresponde a uma solução do problema (2.4)-(2.6).

Vamos mostrar que a solução é única. Sejam φ_1, φ_2 possíveis soluções de (2.4)-(2.6) e note que $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ satisfaz o seguinte problema:

$$\varphi_t - \alpha \Delta \varphi = f(|\nabla \varphi_1| - |\nabla \varphi_2|) \quad \text{em } Q, \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 \quad \text{na } \partial \Omega \times (0, T), \quad (2.14)$$

$$\varphi(0) = 0 \quad \text{em } \Omega. \quad (2.15)$$

Multiplicando (2.13) por φ , integrando por partes e usando a propriedade $||a| - |b|| \leq |a - b|$, obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varphi^2 + \alpha \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 = \int_{\Omega} f(|\nabla \varphi_1| - |\nabla \varphi_2|) \varphi \leq \int_{\Omega} |f| |\nabla \varphi| |\varphi|,$$

agora, usando a desigualdade de Young e integrando em t

$$\int_{\Omega} \varphi^2 + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 \leq C \|f\|_{L^\infty(Q)}^2 \int_0^t \int_{\Omega} \varphi^2,$$

podemos então usar o Lema de Gronwall e obter

$$\int_{\Omega} \varphi^2 + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 \leq 0.$$

A prova do Lema 2.1 está então completa. ■

Agora, vamos de fato considerar o problema (2.1)-(2.3); usaremos o Lema 2.1 como base da demonstração de existência de soluções.

Lema 2.2 *Sejam $0 < T < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2 e α uma constante positiva. Suponha que são dados*

$$\varphi_0 \in W_2^1(\Omega), \quad f \in L^\infty(Q).$$

Então existe $\varphi \in W_2^{2,1}(Q)$ solução do problema (2.1)-(2.3).

Demonstração: Considere o operador $\mathcal{T}_\lambda$, $0 \leq \lambda \leq 1$, definido no espaço de Banach $B = L^6(Q)$ o qual aplica $\psi \in B$ na solução φ do seguinte problema:

$$\varphi_t - \alpha \Delta \varphi = \lambda(-\psi + 3\psi^2 - 2\psi^3) + f|\nabla \varphi| \quad \text{em } Q, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega \times (0, T), \quad (2.17)$$

$$\varphi(0) = \varphi_0 \quad \text{em } \Omega. \quad (2.18)$$

Mostraremos que $\mathcal{T}_\lambda$ satisfaz as hipóteses do Teorema do ponto fixo de Leray-Schauder (Teorema 1.1) e obter então um ponto fixo para $\mathcal{T}_1$, tal ponto fixo será uma solução do problema (2.1)-(2.3).

Certamente $\lambda(-\psi + 3\psi^2 - 2\psi^3) \in L^2(Q)$, o Lema 2.1 garante que existe uma única solução $\varphi \in W_2^{2,1}(Q)$ do problema (2.16)-(2.18). Da imersão $W_2^{2,1}(Q)$ em B , temos que o operador $\mathcal{T}_\lambda$ está bem definido de B em B .

Para provar a continuidade de $\mathcal{T}_\lambda$, sejam $\psi_n \in B$ uma sequência que converge fortemente para $\psi \in B$ e $\varphi_n = \mathcal{T}_\lambda(\psi_n)$, i.e., solução do problema

$$\varphi_{n,t} - \alpha \Delta \varphi_n = \lambda(-\psi_n + 3\psi_n^2 - 2\psi_n^3) + f|\nabla \varphi_n| \quad \text{em } Q, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega \times (0, T), \quad (2.20)$$

$$\varphi_n(0) = \varphi_0 \quad \text{em } \Omega. \quad (2.21)$$

Vamos mostrar que φ_n é limitada em $W_2^{2,1}(Q)$, e usar a compacidade deste espaço em $L^6(Q)$, para isto multiplicamos (2.19) por φ_n e integramos em Ω

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varphi_n^2 + \alpha \int_{\Omega} |\nabla \varphi_n|^2 &= \lambda \int_{\Omega} (-\psi_n + 3\psi_n^2 - 2\psi_n^3) \varphi_n + \int_{\Omega} f |\nabla \varphi_n| \varphi_n \\ &\leq \int_{\Omega} \psi_n^2 + 9\psi_n^4 + 4\psi_n^6 + \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} |\nabla \varphi_n|^2 + C(1 + \|f(t)\|_{L^\infty(\Omega)}^2) \int_{\Omega} \varphi_n^2, \end{aligned}$$

agora integramos em t e obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varphi_n^2 + \frac{\alpha}{2} \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla \varphi_n|^2 &\leq \frac{1}{2} \|\varphi_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\psi_n\|_{L^2(Q)}^2 + 9\|\psi_n\|_{L^4(Q)}^4 \\ &\quad + 4\|\psi_n\|_{L^6(Q)}^6 + C \int_0^t (1 + \|f(t)\|_{L^\infty(\Omega)}^2) \int_{\Omega} \varphi_n^2. \end{aligned} \quad (2.22)$$

O próximo passo é multiplicar (2.19) por $\varphi_{n,t}$, e assim temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi_{n,t}^2 + \frac{\alpha}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla \varphi_n|^2 &= \lambda \int_{\Omega} (-\psi_n + 3\psi_n^2 - 2\psi_n^3) \varphi_{n,t} + \int_{\Omega} f |\nabla \varphi_n| \varphi_{n,t} \\ &\leq C \int_{\Omega} \psi_n^2 + \psi_n^4 + \psi_n^6 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varphi_{n,t}^2 + C \|f(t)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \int_{\Omega} |\nabla \varphi_n|^2, \end{aligned}$$

integrando em t

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} \varphi_{n,t}^2 + \alpha \int_{\Omega} |\nabla \varphi_n|^2 &\leq \alpha \|\nabla \varphi_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \left(\|\psi_n\|_{L^6(Q)}^2 \right. \\ &\quad \left. + \|\psi_n\|_{L^4(Q)}^4 + \|\psi_n\|_{L^6(Q)}^6 \right) + C \int_0^t \|f(t)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \int_{\Omega} |\nabla \varphi_n|^2. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Por último, multiplicamos (2.19) por $-\Delta \varphi_n$, e então temos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla \varphi_n|^2 + \alpha \int_{\Omega} (\Delta \varphi_n)^2 \\ &= -\lambda \int_{\Omega} (-\psi_n + 3\psi_n^2 - 2\psi_n^3) \Delta \varphi_n - \int_{\Omega} f |\nabla \varphi_n| \Delta \varphi_n \\ &\leq C \int_{\Omega} \psi_n^2 + \psi_n^4 + \psi_n^6 + \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} (\Delta \varphi_n)^2 + C \|f(t)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \int_{\Omega} |\nabla \varphi_n|^2, \end{aligned}$$

por fim, integramos em t

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \varphi_n|^2 + \alpha \int_0^t \int_{\Omega} |\Delta \varphi_n|^2 &\leq \|\nabla \varphi_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \left(\|\psi_n\|_{L^6(Q)}^2 \right. \\ &\quad \left. + \|\psi_n\|_{L^4(Q)}^4 + \|\psi_n\|_{L^6(Q)}^6 \right) + C \int_0^t \|f(t)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \int_{\Omega} |\nabla \varphi_n|^2. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Somando (2.22)-(2.24) e ajustando as constantes chegamos a seguinte estimativa para φ_n ,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\varphi_n^2 + |\nabla \varphi_n|^2) + \|\varphi_n\|_{W_2^{2,1}(Q)}^2 &\leq C \|\varphi_0\|_{W_2^1(\Omega)}^2 + C \left(\|\psi_n\|_{L^6(Q)}^2 \right. \\ &\quad \left. + \|\psi_n\|_{L^4(Q)}^4 + \|\psi_n\|_{L^6(Q)}^6 \right) + C \int_0^t (1 + \|f\|_{L^\infty(\Omega)}^2) \int_{\Omega} (\varphi_n^2 + |\nabla \varphi_n|^2). \end{aligned}$$

Desde que (ψ_n) é limitada em B , o Lema de Gronwall nos garante que φ_n é limitada em $W_2^{2,1}(Q)$, e esse mesmo espaço está imerso compactamente em $L^6(Q) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))$,

(Corolário 1.5), segue que existem $\tilde{\varphi}$ e uma subsequência de φ_n (a qual ainda denotaremos por φ_n) tal que

$$\begin{aligned}\varphi_n &\rightharpoonup \tilde{\varphi} \text{ em } W_2^{2,1}(Q), \\ \varphi_n &\rightarrow \tilde{\varphi} \text{ em } L^6(Q) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)).\end{aligned}$$

Segue que $\tilde{\varphi}$ satisfaz (2.16)-(2.18) e pela unicidade de solução, segue que $\tilde{\varphi} = \mathcal{T}_\lambda(\psi)$, independente da subsequência tomada. Consequentemente a sequência original (φ_n) converge fortemente para $\mathcal{T}_\lambda(\psi)$, e assim o operador $\mathcal{T}_\lambda$ é contínuo de B em B .

Para provar que para ψ em um conjunto limitado de B , $\mathcal{T}_\lambda$ é uniformemente contínuo com respeito a λ , seja $\varphi_i = \mathcal{T}_{\lambda_i}(\psi)$, então $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ satisfaz o seguinte problema:

$$\begin{aligned}\varphi_t - \alpha \Delta \varphi &= (\lambda_1 - \lambda_2)(-\psi + 3\psi^2 - 2\psi^3) + f(|\nabla \varphi_1| - |\nabla \varphi_2|) \quad \text{em } Q, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{na } \partial \Omega \times (0, T), \\ \varphi(0) &= 0 \quad \text{em } \Omega.\end{aligned}$$

De modo análogo a (2.22)-(2.24) chegamos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega} (\varphi^2 + |\nabla \varphi|^2) + \|\varphi\|_{W_2^{2,1}(Q)}^2 \leq C|\lambda_1 - \lambda_2|^2 \left(\|\psi\|_{L^6(Q)}^2 \right. \\ &\left. + \|\psi_n\|_{L^6(Q)}^4 + \|\psi_n\|_{L^6(Q)}^6 \right) + C \int_0^t (1 + \|f(s)\|_{L^\infty(\Omega)}^2) \int_{\Omega} (\varphi^2 + |\nabla \varphi|^2) .\end{aligned}$$

Aplicando o Lema de Gronwall temos

$$\|\varphi\|_{L^6(Q)} \leq \|\varphi\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C|\lambda_1 - \lambda_2|,$$

onde C depende de $\|\psi\|_{L^6(Q)}$ e $\|f\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))}$. Portanto, $\mathcal{T}_\lambda$ é uniformemente contínuo em λ . Agora, vamos estimar o conjunto de todos pontos fixos de $\mathcal{T}_\lambda$, seja $\varphi \in B$ um ponto fixo, i.e. solução do seguinte problema

$$\varphi_t - \alpha \Delta \varphi = \lambda(-\varphi + 3\varphi^2 - 2\varphi^3) + f|\nabla \varphi|, \tag{2.25}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0, \tag{2.26}$$

$$\varphi(0) = \varphi_0. \tag{2.27}$$

Usaremos a mesma técnica usada para mostrar (2.22)-(2.24). Vamos primeiro multiplicar (2.25) por φ ,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varphi^2 + \alpha \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 = \lambda \int_{\Omega} -\varphi^2 + 3\varphi^3 - 2\varphi^4 + \int_{\Omega} f |\nabla \varphi| \varphi.$$

Seja $c_1 = \max_{y \in \mathbb{R}} \{-y^2 + 3y^3 - y^4\}$, então

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varphi^2 + \alpha \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 + \lambda \int_{\Omega} \varphi^4 \leq C + \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 + C \|f(t)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \int_{\Omega} \varphi^2,$$

agora, integrando em t e usando a desigualdade de Gronwall, obtemos

$$\int_{\Omega} \varphi^2 + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 + \lambda \int_0^t \int_{\Omega} \varphi^4 \leq C(1 + \|\varphi_0\|_{L^2(\Omega)}^2) e^{\|f\|_{L^\infty(Q)}^2}. \quad (2.28)$$

Multiplicamos (2.25) por φ_t para obter

$$\int_{\Omega} \varphi_t^2 + \frac{\alpha}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 = \lambda \int_{\Omega} (-\varphi + 3\varphi^2 - 2\varphi^3) \varphi_t + \int_{\Omega} f |\nabla \varphi| \varphi_t,$$

a idéia agora é usar a desigualdade de Schwarz e $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \varphi^4 = 2\varphi^3 \varphi_t$ nos termos da primeira integral do lado direito, fazendo isso obtemos

$$\int_{\Omega} \varphi_t^2 + \alpha \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 \leq C \int_{\Omega} \varphi^2 + \varphi^4 - \frac{\lambda}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varphi^4 + \|f(t)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2.$$

Agora nos falta integrar em t , usar (2.28) e o lema de Gronwall para obter

$$\int_0^t \int_{\Omega} \varphi_t^2 + \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 + \frac{\lambda}{2} \varphi^4 \leq C(1 + \|\nabla \varphi_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\varphi_0\|_{L^4(\Omega)}^4) e^{\|f\|_{L^\infty(Q)}^2}. \quad (2.29)$$

De modo análogo, multiplicamos (2.25) por $-\Delta \varphi$, e assim temos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 + \alpha \int_{\Omega} (\Delta \varphi)^2 = \lambda \int_{\Omega} (\varphi - 3\varphi^2 + 2\varphi^3) \Delta \varphi - \int_{\Omega} f |\nabla \varphi| \Delta \varphi,$$

vamos usar agora a seguinte propriedade básica da integração por partes:

$$\int_{\Omega} \Delta \varphi \varphi^3 = - \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 \varphi^2,$$

e assim teremos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 + \alpha \int_{\Omega} (\Delta \varphi)^2 + |\nabla \varphi|^2 \varphi^2 \\ & \leq C \int_{\Omega} \varphi^2 + \varphi^4 + \|f(t)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2, \end{aligned}$$

novamente, integrando em t , usando (2.28) e o lema de Gronwall obtemos

$$\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 + \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta \varphi)^2 + |\nabla \varphi|^2 \varphi^2 \leq C(1 + \|\nabla \varphi_0\|_{L^2(\Omega)}^2) e^{\|f\|_{L^\infty(Q)}^2}. \quad (2.30)$$

De (2.28)-(2.30) temos

$$\|\varphi\|_{L^6(Q)} \leq C\|\varphi\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C(1 + \|\varphi_0\|_{W_2^1(\Omega)}^2 + \|\varphi_0\|_{L^4(\Omega)}^4) e^{\|f\|_{L^\infty(Q)}^2} := M.$$

Ao mesmo tempo $\mathcal{T}_\lambda$ é limitado em $W_2^{2,1}(Q)$ e a imersão deste espaço em B é compacta. Portanto $\mathcal{T}_\lambda$ é também um operador compacto no espaço de Banach B .

Finalmente, para $\lambda = 0$, é claro que o problema (2.16)-(2.18) tem uma única solução. Portanto podemos aplicar o Teorema do ponto fixo de Leray-Schauder dizendo que existe pelo menos um ponto fixo $\varphi \in W_2^{2,1}(Q) \cap B$ do operador $\mathcal{T}_1$, i.e. $\varphi = \mathcal{T}_1(\varphi)$. Esta função é uma solução do problema (2.1)-(2.3). ■

Para mostrarmos que podemos supor $f \in L^2(0, T; L^\infty(\Omega))$ precisaremos de uma estimativa melhor para a norma de φ em $W_2^{2,1}(Q)$, mas para isto precisamos primeiro mostrar que $0 \leq \varphi \leq 1$.

Lema 2.3 *Suponha que $0 \leq \varphi_0 \leq 1$, então a solução do problema (2.1)-(2.3) também satisfaz:*

$$0 \leq \varphi \leq 1, \quad q.s. \text{ em } Q.$$

Demonstração: Primeiramente vamos escrever $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$, onde

$$\begin{aligned} \varphi^+ &= \max_{(x,t) \in Q} \{\varphi(x, t), 0\}, \\ \varphi^- &= \max_{(x,t) \in Q} \{-\varphi(x, t), 0\}. \end{aligned}$$

Então multiplicamos (2.1) por φ^- e obtemos

$$\int_{\Omega} \varphi_t \varphi^- - \alpha \int_{\Omega} \Delta \varphi \varphi^- = \int_{\Omega} -\varphi \varphi^- + 3\varphi^2 \varphi^- - 2\varphi^3 \varphi^- + \int_{\Omega} f |\nabla \varphi| \varphi^-,$$

e

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\varphi^-)^2 - \alpha \int_{\Omega} |\nabla \varphi^-|^2 = \int_{\Omega} (\varphi^-)^2 + 3(\varphi^-)^3 + 2(\varphi^-)^4 + \int_{\Omega} f |\nabla \varphi^-| \varphi^-,$$

usando desigualdade de Young, integrando em t e usando o fato que $\varphi_0^- = 0$ temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\varphi^-)^2 + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla \varphi^-|^2 &\leq - \int_{\Omega} (\varphi^-)^2 + 3(\varphi^-)^3 + 2(\varphi^-)^4 \\ &\quad + \|f\|_{L^\infty(Q)}^2 \int_0^t \int_{\Omega} (\varphi^-)^2 \\ &\leq \|f\|_{L^\infty(Q)}^2 \int_0^t \int_{\Omega} (\varphi^-)^2. \end{aligned}$$

Pelo Lema de Gronwall, temos que $\varphi^- = 0$, assim $\varphi \geq 0$. Para provar que $\varphi \leq 1$, denotamos $\psi = \varphi - 1$ e provaremos que $\psi \leq 0$. Observe que ψ satisfaz o seguinte problema:

$$\psi_t - \alpha \Delta \psi = -\psi - 3\psi^2 - 2\psi^3 + f|\nabla \psi| \quad \text{em } Q, \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \nu} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega \times (0, T), \quad (2.32)$$

$$\psi(0) = \varphi_0 - 1 = \psi_0 \quad \text{em } \Omega. \quad (2.33)$$

onde $\psi_0^+ = 0$. Multiplicando (2.31) por ψ^+

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\psi^+)^2 + \alpha \int_{\Omega} |\nabla \psi^+|^2 &= - \int_{\Omega} (\psi^+)^2 + (\psi^+)^3 + (\psi^+)^4 + \int_{\Omega} f|\nabla \psi| \psi^+ \\ &\leq C \|f(t)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \int_{\Omega} (\psi^+)^2. \end{aligned}$$

Novamente pelo Lema de Gronwall, temos que $\psi^+ = 0$, assim $\varphi \leq 1$. ■

O Lema 2.3 nos permite demonstrar o seguinte resultado.

Lema 2.4 *Suponham que são dados $f \in L^\infty(Q)$, $\varphi_0 \in W_2^1(\Omega)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$. Então a solução do problema (2.1)-(2.3) dada pelo Lema 2.2 satisfaz:*

$$\|\varphi\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C_1 \left(1 + \|\varphi_0\|_{W_2^1(\Omega)}\right) e^{\|f\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))}^2}. \quad (2.34)$$

Demonstração: Usaremos fortemente que $\|\varphi\|_{L^\infty(Q)} \leq 1$. Primeiro, multiplicamos (2.1) por φ , para obter

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varphi^2 + \alpha \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 &= \int_{\Omega} -\varphi^2 + 3\varphi^3 - 2\varphi^4 + \int_{\Omega} f|\nabla \varphi| \varphi \\ &\leq C|\Omega| + \frac{2}{\alpha} \|f(t)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \int_{\Omega} \varphi^2 + \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2. \end{aligned}$$

Agora, multiplicamos (2.1) por φ_t

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi_t^2 + \frac{\alpha}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 &= \int_{\Omega} -\varphi \varphi_t + 3\varphi^2 \varphi_t - 2\varphi^3 \varphi_t + \int_{\Omega} f |\nabla \varphi| \varphi_t \\ &\leq C|\Omega| + C\|f(t)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varphi_t^2. \end{aligned}$$

A seguir, multiplicamos (2.1) por $-\Delta \varphi$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 + \alpha \int_{\Omega} (\Delta \varphi)^2 &= - \int_{\Omega} (-\varphi + 3\varphi^2 - 2\varphi^3) \Delta \varphi - \int_{\Omega} f |\nabla \varphi| \Delta \varphi \\ &\leq C|\Omega| + C\|f(t)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 + \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} (\Delta \varphi)^2. \end{aligned}$$

Somando as três desigualdades, após integrar em $(0, T)$ obtemos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\varphi^2 + |\nabla \varphi|^2) + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 + (\Delta \varphi)^2 + \varphi_t^2 &\leq C \left(T + \|\varphi_0\|_{W_2^1(\Omega)}^2 \right) \\ &\quad + C \int_0^t \|f(s)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \int_{\Omega} (\varphi^2 + |\nabla \varphi|^2), \end{aligned}$$

o qual, após aplicar o Lema de Gronwall obtemos (2.34). ■

Com o Lema 2.4 demonstrado, segue o seguinte Lema que será utilizado no capítulo 3.

Lema 2.5 *Suponha que $f \in L^2(0, T; L^\infty(\Omega))$, $\varphi_0 \in W_2^1(\Omega)$, α uma constante positiva. Então existe $\varphi \in W_2^{2,1}(Q)$, solução do problema (2.1)-(2.3).*

Demonstração: Seja $(f_n) \subset C^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))$ uma sequência tal que

$$f_n \longrightarrow f \text{ em } L^2(0, T; L^\infty(\Omega)). \quad (2.35)$$

Dos Lemas 2.2, 2.3 e 2.4, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\varphi_n \in W_2^{2,1}(Q)$, tal que $0 \leq \varphi_n \leq 1$ e

$$\varphi_{n,t} - \alpha \Delta \varphi_n = -\varphi_n + 3\varphi_n^2 - 2\varphi_n^3 + f_n |\nabla \varphi_n| \quad \text{em } Q, \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega \times (0, T), \quad (2.37)$$

$$\varphi_n(0) = \varphi_0 \quad \text{em } \Omega. \quad (2.38)$$

Observe que, de (2.34), φ_n é limitada em $W_2^{2,1}(Q)$. Então, existem uma subsequência (φ_{n_k}) e $\varphi \in W_2^{2,1}(Q)$, tal que:

$$\varphi_{n_k} \rightharpoonup \varphi \quad \text{em } W_2^{2,1}(Q),$$

$$\varphi_{n_k} \longrightarrow \varphi \quad \text{em } L^6(Q),$$

$$\nabla \varphi_{n_k} \longrightarrow \nabla \varphi \quad \text{em } L^2(Q).$$

A última convergência segue do fato que $W_2^{2,1}(Q)$ está imerso compactamente em $L^2(0, T; W_2^1(\Omega))$. Estas convergências são suficientes para passar o limite em (2.36)-(2.38) e mostrar que φ satisfaz (2.1)-(2.3). Para mostrar que $0 \leq \varphi \leq 1$ basta repetir as contas do lema 2.3. ■

Até agora, mostramos que se dados $\varphi_0 \in W_2^1(\Omega)$ e $f \in L^2(0, T; L^\infty(\Omega))$, então existe $\varphi \in W_2^{2,1}(Q)$ solução de (2.1)-(2.3) e $0 \leq \varphi \leq 1$. Vamos mostrar agora que no caso onde $f \in L^\infty(Q)$, se tivermos $\varphi_0 \in W_q^{2-2/q}(\Omega)$ então podemos obter uma solução em $W_q^{2,1}(Q)$ e este resultado será importante para mostrarmos os resultados dos capítulos 5 e 6.

Lema 2.6 *Sejam $0 < T < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2 e α uma constante positiva. Suponha que são dados*

$$\begin{aligned} &\varphi_0 \in W_q^{2-2/q}(\Omega), q \geq 2, q \neq 3, \text{ satisfazendo a condição de compatibilidade} \\ &\frac{\partial \varphi_0}{\partial \nu} = 0 \text{ para } q > 3 \text{ e } 0 \leq \varphi_0 \leq 1, \\ &f \in L^\infty(Q). \end{aligned}$$

Então existe uma única $\varphi \in W_q^{2,1}(Q)$ solução do problema (2.1)-(2.3) tal que $0 \leq \varphi \leq 1$ e

$$\|\varphi\|_{W_q^{2,1}(Q)} \leq C \left(\|\varphi_0\|_{W_q^{2-2/q}(\Omega)}, T \|f\|_{L^\infty(Q)} \right) \quad (2.39)$$

Demonstração: Usaremos argumentos de *bootstrapping* para mostrar que $\varphi \in W_q^{2,1}(Q)$. O Lema 2.2 nos garante $\varphi \in W_2^{2,1}(Q)$, e neste mesmo Lema em (2.30) temos $\nabla \varphi \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ e do fato que $\varphi \in W_2^{2,1}(Q)$ tem-se

$$\nabla \varphi \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; W_2^1(\Omega)) \hookrightarrow L^3(Q),$$

($n = 2, 3$), então $-\varphi + 3\varphi^2 - 2\varphi^3 + f|\nabla \varphi| \in L^3(Q)$, aplicando a teoria L^p -parabólica no problema (2.1)-(2.3) temos $\varphi \in W_{\bar{q}}^{2,1}(Q)$ onde $\bar{q} = \min\{q, 3\}$. Se $q < 33$ acabou, caso contrário $\varphi \in W_3^{2,1}(Q)$ e então

$$\nabla \varphi \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^3(0, T; W_3^1(\Omega)) \hookrightarrow L^4(Q),$$

e assim $-\varphi + 3\varphi^2 - 2\varphi^3 + f|\nabla \varphi| \in L^4(Q)$, e novamente pela teoria L^p -parabólica $\varphi \in W_{\bar{q}}^{2,1}(Q)$ onde $\bar{q} = \min\{q, 4\}$. Procedendo este método sucessivamente obtemos $\varphi \in W_q^{2,1}(Q)$.

Unicidade.

Sejam φ_1, φ_2 soluções de (2.1)-(2.3). Para $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ vale:

$$\varphi_t - \alpha \Delta \varphi = D\varphi + f(|\nabla \varphi_1| - |\nabla \varphi_2|) \quad \text{em } Q, \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 \quad \text{na } \partial \Omega \times (0, T), \quad (2.41)$$

$$\varphi(0) = 0 \quad \text{em } \Omega. \quad (2.42)$$

onde $D = -1 + 3\varphi_1 + 3\varphi_2 - 2\varphi_1^2 - 2\varphi_1\varphi_2 - 2\varphi_2^2$ e usando o Lema 2.3 concluimos que $D \leq 5$.

Multiplicando (2.40) por φ

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varphi^2 + \alpha \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 \leq C (1 + \|f(t)\|_{L^\infty(\Omega)}^2) \int_{\Omega} \varphi^2 + \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2.$$

Pelo lema de Gronwall, obtemos $\varphi = 0$ como queríamos.

Estimativa.

Primeiro note que do Lema 2.4 temos

$$\|\varphi\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C_1 \left(1 + \|\varphi_0\|_{W_2^1(\Omega)}\right) e^{T\|f\|_{L^\infty(Q)}^2}. \quad (2.43)$$

Usaremos agora argumentos de interpolação, observe que

$$\nabla \varphi \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T, W_2^1(\Omega)) \hookrightarrow L^{10/3}(Q).$$

Seja $\bar{q} = \min\{q, 3\}$, pela teoria L^p -parabólica, vale a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{W_{\bar{q}}^{2,1}(Q)} &\leq C_1 \left(\|\varphi_0\|_{W_{\bar{q}}^{2-2/\bar{q}}(\Omega)} + \|-\varphi + 3\varphi^2 - 2\varphi^3 + f|\nabla \varphi|\|_{L^{\bar{q}}(Q)} \right) \\ &\leq C_1 \left(1 + \|\varphi_0\|_{W_{\bar{q}}^{2-2/\bar{q}}(\Omega)} + \|f|\nabla \varphi|\|_{L^{\bar{q}}(Q)} \right) \\ &\leq C_1 \left(1 + \|\varphi_0\|_{W_{\bar{q}}^{2-2/\bar{q}}(\Omega)} + \|f\|_{L^s(Q)}^{\bar{q}} \|\nabla \varphi\|_{L^{10/3}(Q)}^{\bar{q}} \right), \end{aligned}$$

onde s é tal que $1/s + 3/10 = 1/\bar{q}$, além disso

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{W_{\bar{q}}^{2,1}(Q)} &\leq C_1 (1 + \|\varphi_0\|_{W_{\bar{q}}^{2-2/\bar{q}}(\Omega)} \\ &\quad + T^{\bar{q}} \|f\|_{L^\infty(Q)}^{\bar{q}} \|\nabla \varphi\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^{2\bar{q}/5} \|\nabla \varphi\|_{L^2(0,T;W_{1,2}(\Omega))}^{3\bar{q}/5}), \end{aligned}$$

usando novamente o Lema 2.4 concluimos que

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{W_q^{2,1}(Q)} &\leq C_1(1 + \|\varphi_0\|_{W_q^{2-2/\bar{q}}(\Omega)} \\ &+ T^{\bar{q}}\|f\|_{L^\infty(Q)}^{\bar{q}}(1 + \|\varphi_0\|_{H^1(\Omega)})^{\bar{q}} e^{\bar{q}T\|f\|_{L^\infty(Q)}^2}). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Então, se $q < 3$ o lema aqui termina, caso contrário, verificamos que

$$\nabla\varphi \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) \cap L^3(0, T, W_3^1(\Omega)) \hookrightarrow L^{15}(Q).$$

e denotando agora $\bar{q} = \min\{q, 10\}$ temos

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{W_q^{2,1}(Q)} &\leq C_1 \left(\|\varphi_0\|_{W_q^{2-2/\bar{q}}(\Omega)} + \|-\varphi + 3\varphi^2 - 2\varphi^3 + f|\nabla\varphi|\|_{L^{\bar{q}}(Q)} \right) \\ &\leq C_1 \left(1 + \|\varphi_0\|_{W_q^{2-2/\bar{q}}(\Omega)} + \|f|\nabla\varphi|\|_{L^{\bar{q}}(Q)} \right) \\ &\leq C_1 \left(1 + \|\varphi_0\|_{W_q^{2-2/\bar{q}}(\Omega)} + \|f\|_{L^s(Q)}^{\bar{q}} \|\nabla\varphi\|_{L^{15}(Q)}^{\bar{q}} \right) \\ &\leq C_1 \left(1 + \|\varphi_0\|_{W_q^{2-2/\bar{q}}(\Omega)} + T^{\bar{q}}\|f\|_{L^\infty(Q)}^{\bar{q}} \|\varphi\|_{W_3^{2,1}(Q)}^{\bar{q}} \right), \end{aligned}$$

onde s é tal que $1/s + 1/15 = 1/\bar{q}$ e usando (2.44) concluimos que se $q \leq 10$ o Lema termina, caso contrário usamos esse raciocínio até obtermos $\bar{q} = q$. ■

Capítulo 3

Um Modelo para Materiais Puros: Existência Global no Caso Bidimensional

Durante este capítulo discutiremos a questão da existência e regularidade de soluções para um modelo do tipo campo de fases para solidificação e/ou liquefação de materiais puros no caso bidimensional (o que chamamos de Modelo 1).

Na primeira seção apresentaremos o modelo a ser estudado e enunciamos o resultado principal deste capítulo; na segunda seção apresentaremos uma família de problemas aproximados, obtidos pela introdução de um parâmetro de penalização no problema original, bem como um correspondente resultado de existência e estimativas de soluções; por fim, na última seção deste capítulo passaremos ao limite no parâmetro do problema penalizado e assim obteremos soluções do problema original.

As técnicas usadas neste capítulo são: Teorema do ponto fixo de Leray-Schauder para obtermos a existência de solução para cada problema penalizado, argumentos de compacidade e do tipo *bootstrapping* para passarmos ao limite.

3.1 Apresentação do Modelo 1 e resultados

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto, limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave, $T \in \mathbb{R}$ finito e $Q = \Omega \times (0, T)$.

Consideremos o problema com condições de fronteira e condições iniciais:

$$\begin{aligned}
\varphi_t - \alpha \Delta \varphi &= -\varphi + 3\varphi^2 - 2\varphi^3 + (\theta_e - \theta)|\nabla \varphi| \quad \text{em } Q, \\
\theta_t - \beta \Delta \theta + v \cdot \nabla \theta &= \frac{L}{c_p} \varphi_t \quad \text{em } Q, \\
v_t - \nu \Delta v + v \cdot \nabla v + \nabla P &= -\frac{\varphi^2}{1 - \varphi} v + \vec{\sigma} \theta \quad \text{em } Q_{ml}, \\
\operatorname{div} v &= 0 \quad \text{em } Q_{ml}, \\
v &= 0 \quad \text{em } Q_s, \\
\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = \frac{\partial \theta}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{na } \partial\Omega \times (0, T), \quad v = 0 \quad \text{na } \partial Q_{ml}, \\
\varphi(0) &= \varphi_0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \text{em } \Omega, \quad v(0) = v_0 \quad \text{em } \Omega_{ml}(0).
\end{aligned} \tag{3.1}$$

onde $Q_{ml}, Q_s, \Omega_{ml}(0)$ estão definidos em (1)-(5). O campo de fases é denotado por φ , as funções θ e v estão respectivamente relacionadas com a temperatura e velocidade do material. Aqui ν denotará o vetor normal exterior à $\partial\Omega$, α, β, γ são constantes positivas, L uma constante positiva relacionada ao calor latente e c_p uma constante relacionada ao calor específico do material. $\vec{\sigma}$ é uma constante relacionada com a densidade do material e a força da gravidade. O principal resultado deste capítulo é o seguinte:

Teorema 3.1 *Sejam $0 < T < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto, limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2 . Suponha que*

$$\begin{aligned}
\varphi_0 &\in W_q^{2-2/q}(\Omega), \quad q > 2, q \neq 3 \text{ tal que } 0 \leq \varphi_0 \leq 1, \\
\theta_0 &\in W_s^{2-2/s}(\Omega), \quad s \geq 2, s \neq 3, \\
v_0 &\in H, \text{ com } v_0 = 0 \text{ em } \Omega_s(0) = \{x \in \Omega; \varphi_0(x) = 1\},
\end{aligned}$$

satisfazendo a condição de compatibilidade

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial \nu} = \frac{\partial \theta_0}{\partial \nu} = 0 \text{ na } \partial\Omega,$$

para $q, s > 3$. Então existem funções (φ, θ, v) tais que

$$\varphi \in W_q^{2,1}(Q), \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0, \varphi(0) = \varphi_0 \text{ e } 0 \leq \varphi \leq 1 \text{ q.s. em } Q,$$

$$\theta \in W_r^{2,1}(Q), r < \min\{s, q, 4\}, \frac{\partial \theta}{\partial \nu} = 0, \theta(0) = \theta_0,$$

$$v \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H), v(0) = v_0 \text{ em } \Omega_{ml}(0),$$

e tal que

$$\varphi_t - \alpha \Delta \varphi = -\varphi + 3\varphi^2 - 2\varphi^3 + (\theta_e - \theta)|\nabla \varphi| \text{ q.s. em } Q, \quad (3.2)$$

$$\theta_t - \beta \Delta \theta + v \cdot \nabla \theta = \frac{L}{c_p} \varphi_t \text{ q.s. em } Q, \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} (v(t), \eta(t)) - \int_0^t (v, \eta_t) ds + \nu \int_0^t (\nabla v, \nabla \eta) + \int_0^t (v \cdot \nabla v, \eta) \\ = (v_0, \eta(0)) - \int_0^t \left(\frac{\varphi^2}{1 - \varphi} v, \eta \right) ds + \int_0^t (\vec{\sigma} \theta, \eta), \end{aligned} \quad (3.4)$$

$t \in (0, T)$, para qualquer $\eta \in L^2(0, T; V)$ com suporte compacto contido em $Q_{ml} \cup \Omega_{ml}(0) \cup \Omega_{ml}(T)$ e $\eta_t \in L^2(0, T; V')$.

Além disso $v = 0$ quase sempre em Q_s .

Onde Q_s e $\Omega_{ml}(t)$ são conjuntos relacionados a φ e definidos respectivamente em (1) e (5).

Observação 3.1 A condição $q > 2$ nos assegura a continuidade do campo de fase φ pois $W_q^{2,1}(Q) \subset H^{\tau, \tau/2}(\overline{Q})$, com $\tau = 2 - 4/q$. (Ladyzenskaya [17] p. 80).

Para obtermos uma solução do problema (3.1) primeiro introduzimos uma versão penalizada do problema original.

3.2 Existência de soluções de um problema penalizado

Introduzimos nesta seção uma família de problemas aproximados que são versões penalizadas do problema original. A idéia da penalização é a de modificar o modelo (3.1) de tal modo que a equação do tipo de Navier-Stokes seja válida em todo domínio Ω .

Mais especificamente, a nossa intenção é de encontrar para cada $\delta > 0$ funções $(\varphi^\delta, \theta^\delta, v^\delta)$ tais que:

$$\varphi_t^\delta - \alpha \Delta \varphi^\delta = -\varphi^\delta + 3(\varphi^\delta)^2 - 2(\varphi^\delta)^3 + (\theta_e - \theta^\delta)|\nabla \varphi^\delta| \text{ em } Q,$$

$$\begin{aligned}
\theta_t^\delta - \beta \Delta \theta^\delta + v^\delta \cdot \nabla \theta^\delta &= \frac{L}{c_p} \varphi_t^\delta \quad \text{em } Q, \\
v_t^\delta - \nu \Delta v^\delta + v^\delta \cdot \nabla v^\delta + \nabla P^\delta &= -\frac{(\varphi^\delta)^2}{1 - \varphi^\delta + \delta} v^\delta + \vec{\sigma} \theta^\delta \quad \text{em } Q, \\
\operatorname{div} v^\delta &= 0 \quad \text{em } Q, \\
v^\delta &= 0 \quad \text{em } Q_s, \\
\frac{\partial \varphi^\delta}{\partial \nu} &= \frac{\partial \theta^\delta}{\partial \nu} = 0 \quad \text{na } \partial \Omega \times (0, T), \quad v^\delta = 0 \quad \text{na } \partial Q, \\
\varphi^\delta(0) &= \varphi_0, \quad \theta^\delta(0) = \theta_0, \quad v^\delta(0) = v_0 \quad \text{em } \Omega.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Aplicaremos o teorema do ponto fixo de Leray-Schauder para obtermos uma solução do problema (3.5).

Para simplificar as notações denotaremos

$$F^\delta(\varphi) = \frac{\varphi^2}{1 - \varphi + \delta}.$$

Faremos uso também do seguinte operador de truncamento $Tr : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$Tr(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0, \\ x & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

O próximo resultado nos garante a existência de solução para o problema penalizado (3.5).

Proposição 3.1 *Sejam $0 < T < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto, limitado com fronteira $\partial \Omega$ de classe C^2 . Suponha que*

$$\begin{aligned}
\varphi_0 &\in W_q^{2-2/q}(\Omega), \quad q > 2, q \neq 3 \text{ tal que } 0 \leq \varphi_0 \leq 1, \\
\theta_0 &\in W_s^{2-2/s}(\Omega), \quad s \geq 2, s \neq 3, \\
v_0 &\in H, \quad \text{com } v_0 = 0 \text{ em } \Omega_s(0) = \{x \in \Omega; \varphi_0(x) = 1\},
\end{aligned}$$

satisfazendo a condição de compatibilidade

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial \nu} = \frac{\partial \theta_0}{\partial \nu} = 0 \quad \text{na } \partial \Omega,$$

para $q, s > 3$. Então, para cada $\delta > 0$, existem funções $(\varphi^\delta, \theta^\delta, v^\delta)$ tais que

$$\varphi^\delta \in W_q^{2,1}(Q), \quad \frac{\partial \varphi^\delta}{\partial \nu} = 0, \quad \varphi^\delta(0) = \varphi_0 \text{ e } 0 \leq \varphi^\delta \leq 1 \text{ q.s. em } Q,$$

$$\begin{aligned}\theta^\delta &\in W_r^{2,1}(Q), r < \min\{s, q, 4\}, \frac{\partial \theta^\delta}{\partial \nu} = 0, \theta^\delta(0) = \theta_0, \\ v^\delta &\in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H), v^\delta(0) = v_0 \text{ em } \Omega,\end{aligned}$$

satisfazendo

$$\varphi_t^\delta - \alpha \Delta \varphi^\delta = -\varphi^\delta + 3(\varphi^\delta)^2 - 2(\varphi^\delta)^3 + (\theta_e - \theta^\delta)|\nabla \varphi^\delta| \quad \text{em } Q, \quad (3.6)$$

$$\theta_t^\delta - \beta \Delta \theta^\delta + v^\delta \cdot \nabla \theta^\delta = \frac{L}{c_p} \varphi_t^\delta \quad \text{em } Q, \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(v^\delta, u) + \nu(\nabla v^\delta, \nabla u) + (v^\delta \cdot \nabla v^\delta, u) \\ = - \left(\frac{(\varphi^\delta)^2}{1 - \varphi^\delta + \delta} v^\delta, u \right) + (\vec{\sigma} \theta^\delta, u) \quad \forall u \in V \quad \text{em } (0, T).\end{aligned} \quad (3.8)$$

Demonstração: Considere a seguinte família de operadores $\mathcal{T}_\lambda$, $0 \leq \lambda \leq 1$, definido no espaço de Banach $B = L^4(Q) \times L^2(0, T; L^\infty(\Omega)) \times L^2(Q)$ o qual aplica $(\widehat{\varphi}^\delta, \widehat{\theta}^\delta, \widehat{v}^\delta) \in B$ na solução $(\varphi^\delta, \theta^\delta, v^\delta)$ do problema

$$\varphi_t^\delta - \alpha \Delta \varphi^\delta = -\varphi^\delta + 3(\varphi^\delta)^2 - 2(\varphi^\delta)^3 + \lambda(\theta_e - \widehat{\theta}^\delta)|\nabla \varphi^\delta| \quad \text{em } Q, \quad (3.9)$$

$$\theta_t^\delta - \beta \Delta \theta^\delta + v^\delta \cdot \nabla \theta^\delta = \frac{L}{c_p} \varphi_t^\delta \quad \text{em } Q, \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(v^\delta, u) + \nu(\nabla v^\delta, \nabla u) + (v^\delta \cdot \nabla v^\delta, u) \\ = -\lambda(F^\delta(Tr(\widehat{\varphi}^\delta))\widehat{v}^\delta, u) + \lambda(\vec{\sigma} \widehat{\theta}^\delta, u) \quad \forall u \in V, \quad \text{em } (0, T),\end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial \varphi^\delta}{\partial \nu} = \frac{\partial \theta^\delta}{\partial \nu} = 0 \quad \text{na } \partial \Omega \times (0, T), \quad (3.12)$$

$$\varphi^\delta(0) = \varphi_0, \quad \theta^\delta(0) = \theta_0, \quad v^\delta(0) = v_0 \quad \text{em } \Omega. \quad (3.13)$$

Vamos mostrar que o operador $\mathcal{T}_\lambda$ satisfaz as hipóteses do Teorema do ponto fixo de Leray-Schauder (Teorema 1.1).

Começamos verificando que $\mathcal{T}_\lambda$ está bem definido.

Para isto, observe que $\lambda(\theta_m - \widehat{\theta}^\delta) \in L^2(0, T; L^\infty(\Omega))$ e, pelo Lema 2.5, existe uma única $\varphi^\delta \in W_2^{2,1}(Q)$, solução de (3.9).

A Equação (3.11) é a equação clássica de Navier-Stokes, e do fato que $-\lambda F^\delta(Tr(\widehat{\varphi}^\delta))\widehat{v}^\delta + \lambda \vec{\sigma} \widehat{\theta}^\delta \in L^2(Q)$ existe uma única solução $v^\delta \in L^2(0, T, V) \cap L^\infty(0, T, H) \cap L^4(Q)$ (Temam [30] p. 198) de (3.11).

Como $\varphi_t^\delta \in L^2(Q)$ e $v^\delta \in L^4(Q)$, aplicamos a teoria de regularidade L^p para equações parabólicas (Teorema 1.3) à equação (3.10) e assim concluir que existe uma única solução $\theta^\delta \in W_2^{2,1}(Q)$ de (3.10). Em particular, $\theta^\delta \in L^2(0, T; L^\infty(\Omega))$ e além disso temos

$$\|\theta^\delta\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C_1(\|v^\delta\|_{L^4(Q)})(\|\theta_0\|_{W_2^1(\Omega)} + \|\varphi_t^\delta\|_{L^2(Q)}). \quad (3.14)$$

Agora consideremos a continuidade de $\mathcal{T}_\lambda$.

Para isto, suponhamos que $(\widehat{\varphi}_k^\delta, \widehat{\theta}_k^\delta, \widehat{v}_k^\delta)$ convirja fortemente para $(\widehat{\varphi}^\delta, \widehat{\theta}^\delta, \widehat{v}^\delta)$ em B e seja $(\varphi_k^\delta, \theta_k^\delta, v_k^\delta) = \mathcal{T}_\lambda(\widehat{\varphi}_k^\delta, \widehat{\theta}_k^\delta, \widehat{v}_k^\delta)$, ou seja, cada $(\varphi_k^\delta, \theta_k^\delta, v_k^\delta)$ é solução do problema

$$\varphi_{k,t}^\delta - \alpha \Delta \varphi_k^\delta = -\varphi_k^\delta + 3(\varphi_k^\delta)^2 - 2(\varphi_k^\delta)^3 + \lambda(\theta_e - \widehat{\theta}_k^\delta)|\nabla \varphi_k^\delta| \text{ em } Q, \quad (3.15)$$

$$\theta_{k,t}^\delta - \beta \Delta \theta_k^\delta + v_k^\delta \cdot \nabla \theta_k^\delta = \frac{L}{c_p} \varphi_{k,t}^\delta \text{ em } Q, \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(v_k^\delta, u) + \nu(\nabla v_k^\delta, \nabla u) + (v_k^\delta \cdot \nabla v_k^\delta, u) \\ &= -\lambda(F^\delta(Tr(\widehat{\varphi}_k^\delta))\widehat{v}_k^\delta, u) + \lambda(\vec{\sigma}\widehat{\theta}_k^\delta, u), \quad \forall u \in V \text{ em } (0, T), \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial \varphi_k^\delta}{\partial \nu} = \frac{\partial \theta_k^\delta}{\partial \nu} = 0 \quad \text{em } \partial\Omega \times (0, T), \quad (3.18)$$

$$\varphi_k^\delta(0) = \varphi_0, \quad \theta_k^\delta(0) = \theta_0, \quad v_k^\delta(0) = v_0 \quad \text{em } \Omega. \quad (3.19)$$

Vamos mostrar que $(\varphi_k^\delta, \theta_k^\delta, v_k^\delta)$ converge fortemente para $(\varphi^\delta, \theta^\delta, v^\delta) = \mathcal{T}_\lambda(\widehat{\varphi}^\delta, \widehat{\theta}^\delta, \widehat{v}^\delta)$ em B . Para isto, necessitamos antes obter algumas estimativas para $(\varphi_k^\delta, \theta_k^\delta, v_k^\delta)$ que sejam independentes de k .

Primeiro, tomamos $u = v_k^\delta$ na Eq. (3.17). Então

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega |v_k^\delta|^2 dx + \nu \int_\Omega |\nabla v_k^\delta|^2 dx &= -\lambda \int_\Omega F^\delta(Tr(\widehat{\varphi}_k^\delta))\widehat{v}_k^\delta v_k^\delta + \lambda \int_\Omega \vec{\sigma}\widehat{\theta}_k^\delta v_k^\delta \\ &\leq C \int_\Omega (\widehat{v}_k^\delta)^2 + \|\vec{\sigma}\|_{\mathbb{R}^2}^2 \int_\Omega (\widehat{\theta}_k^\delta)^2 + \int_\Omega (v_k^\delta)^2. \end{aligned}$$

Pelo lema de Gronwall e que $\widehat{\theta}_k^\delta, \widehat{v}_k^\delta$ são limitadas em $L^2(Q)$, obtemos

$$\begin{aligned} \|v_k^\delta\|_{L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)} &\leq C \left(\|v_0\|_{L^2(\Omega)} + \|\widehat{v}_k^\delta\|_{L^2(Q)} + \|\widehat{\theta}_k^\delta\|_{L^2(Q)} \right) \\ &\leq C. \end{aligned} \quad (3.20)$$

De (3.17), tem-se

$$\|v_{k,t}^\delta\|_{V'} \leq C \left(\|v_k^\delta\|_V + \|v_k^\delta\|_{L^4(\Omega)}^2 + \|\widehat{v}_k^\delta\|_{L^2(\Omega)} + \|\widehat{\theta}_k^\delta\|_{L^2(\Omega)} \right),$$

e usando (3.20) temos

$$\|v_{k,t}^\delta\|_{L^2(0,T;V')} \leq C. \quad (3.21)$$

Da estimativa (2.34) e que $\widehat{\theta}_k^\delta$ é limitada em $L^2(0,T;L^\infty(\Omega))$, temos que

$$\|\varphi_k^\delta\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C. \quad (3.22)$$

Agora, de (3.14), (3.20) e (3.22) resulta

$$\|\theta_k^\delta\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C. \quad (3.23)$$

Portanto, de (3.20)-(3.23), concluímos que as sequências (φ_k^δ) e (θ_k^δ) são limitadas em $W_2^{2,1}(Q)$ e a sequência (v_k^δ) limitada em $W = \{w \in L^2(0,T;V); w_t \in L^2(0,T;V')\}$.

Desde que $W_2^{2,1}(Q)$ está imerso compactamente em $L^p(Q)$, $p \geq 1$, e em $L^2(0,T;L^\infty(\Omega))$, W em $L^2(Q) \cap C([0,T];V')$ (Simom [29] Cor. 4), segue que existem $(\widetilde{\varphi}^\delta, \widetilde{\theta}^\delta, \widetilde{v}^\delta)$ e uma subsequência de $(\varphi_k^\delta, \theta_k^\delta, v_k^\delta)$ (o qual ainda denotaremos por $(\varphi_k^\delta, \theta_k^\delta, v_k^\delta)$), tal que, quando $k \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} \varphi_k^\delta &\rightarrow \widetilde{\varphi}^\delta && \text{em } L^p(Q), \\ \varphi_k^\delta &\rightharpoonup \widetilde{\varphi}^\delta && \text{em } W_2^{2,1}(Q), \\ \theta_k^\delta &\rightarrow \widetilde{\theta}^\delta && \text{em } L^2(0,T;L^\infty(\Omega)), \\ \theta_k^\delta &\rightharpoonup \widetilde{\theta}^\delta && \text{em } W_2^{2,1}(Q), \\ v_k^\delta &\rightarrow \widetilde{v}^\delta && \text{em } L^2(Q) \cap C([0,T];V'), \\ v_k^\delta &\rightharpoonup \widetilde{v}^\delta && \text{em } L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H). \end{aligned}$$

Agora, falta-nos passar ao limite em (3.15)-(3.19) quando $k \rightarrow +\infty$.

Do fato que φ_k^δ converge fracamente para $\widetilde{\varphi}^\delta$ em $W_2^{2,1}(Q)$ então $\varphi_{k,t}^\delta, \Delta\varphi_k^\delta$ convergem respectivamente para $\widetilde{\varphi}_t^\delta, \Delta\widetilde{\varphi}^\delta$ fracamente em $L^2(Q)$. Escolhendo $p = 6$ temos que $(\varphi_k^\delta)^3$ converge fortemente para $(\widetilde{\varphi}^\delta)^3$ em $L^2(Q)$. Desde que a imersão $W_2^{2,1}(Q)$ em $L^2(0,T;W_2^1(\Omega))$ é compacta, temos que $\nabla\varphi_k^\delta$ converge fortemente para $\nabla\widetilde{\varphi}^\delta$ em $L^2(Q)$, então $(\theta_e - \widehat{\theta}_k^\delta)|\nabla\varphi_k^\delta|$ converge fortemente para $(\theta_e - \widehat{\theta}^\delta)|\nabla\widetilde{\varphi}^\delta|$ em $L^1(0,T;L^2(\Omega))$, podemos então passar o limite em (3.15).

Como v_k^δ converge fortemente para $\widetilde{v}^\delta$ em $L^2(Q)$ e $\nabla\theta_k^\delta$ converge fracamente para $\nabla\widetilde{\theta}^\delta$ em $L^2(Q)$, temos que $v_k^\delta \cdot \nabla\theta_k^\delta$ converge para $\widetilde{v}^\delta \cdot \nabla\widetilde{\theta}^\delta$ fracamente em $L^1(Q)$ e podemos então passar ao limite em (3.16).

O limite em (3.17) segue do fato que $-\lambda F^\delta(T_r(\widehat{\varphi}_k^\delta))\widehat{v}_k^\delta + \lambda \vec{\sigma} \widehat{\theta}_k^\delta$ converge fortemente para $-\lambda(T_r(\widehat{\varphi}^\delta))\widehat{v}^\delta + \lambda \vec{\sigma} \widehat{\theta}^\delta$ em $L^2(Q)$.

Resta-nos passar ao limite em (3.18) e (3.19).

O limite em (3.18) segue da seguinte forma: observe que $\nabla \varphi_k^\delta, \nabla \theta_k^\delta$ convergem fracamente para $\nabla \widehat{\varphi}^\delta, \nabla \widehat{\theta}^\delta$ em $L^2(0, T; W_2^1(\Omega))$ então $\nabla \varphi_k^\delta|_{\partial\Omega}, \nabla \theta_k^\delta|_{\partial\Omega}$ convergem fracamente para $\nabla \widehat{\varphi}^\delta|_{\partial\Omega}, \nabla \widehat{\theta}^\delta|_{\partial\Omega}$ em $L^2(0, T; H^{1/2}(\Omega))$ mas como $\nabla \varphi_k^\delta|_{\partial\Omega} \cdot \nu = \partial \varphi_k^\delta / \partial \nu = 0$ e $\nabla \theta_k^\delta|_{\partial\Omega} \cdot \nu = \partial \theta_k^\delta / \partial \nu = 0$ então temos que $\partial \widehat{\varphi}^\delta / \partial \nu = \partial \widehat{\theta}^\delta / \partial \nu = 0$. O limite em (3.19) segue do fato que $\varphi_k^\delta(0), \theta_k^\delta(0)$ convergem para $\widehat{\varphi}^\delta(0), \widehat{\theta}^\delta(0)$ em $W_2^1(\Omega)$ e $v_k^\delta(0)$ converge para $\widehat{v}^\delta(0)$ em V' .

Assim, existe uma subsequência de $(\varphi_k^\delta, \theta_k^\delta, v_k^\delta)$ convergindo para $(\widehat{\varphi}^\delta, \widehat{\theta}^\delta, \widehat{v}^\delta)$, o qual é uma solução de (3.9)-(3.13). Pela unicidade de solução de (3.9)-(3.13), segue que $(\widehat{\varphi}^\delta, \widehat{\theta}^\delta, \widehat{v}^\delta) = \mathcal{T}_\lambda(\widehat{\varphi}^\delta, \widehat{\theta}^\delta, \widehat{v}^\delta)$, isto vale para qualquer subsequência de $(\varphi_k^\delta, \theta_k^\delta, v_k^\delta)$, então a sequência original $(\varphi_k^\delta, \theta_k^\delta, v_k^\delta)$ converge fortemente para $(\widehat{\varphi}^\delta, \widehat{\theta}^\delta, \widehat{v}^\delta)$ em B , o que implica que $\mathcal{T}_\lambda$ é contínuo.

Para a compacidade dos operadores, note que $\mathcal{T}_\lambda$ é limitado em

$$W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q) \times \{w \in L^2(0, T, V); w_t \in L^2(0, T; V')\},$$

mas a imersão deste espaço em B é compacta, então concluímos que $\mathcal{T}_\lambda$ é compacto.

Para provar que para $(\widehat{\varphi}^\delta, \widehat{\theta}^\delta, \widehat{v}^\delta)$ em um conjunto limitado de B , $\mathcal{T}_\lambda$ é uniformemente contínuo em λ , sejam $0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 1$ e $(\varphi_i^\delta, \theta_i^\delta, v_i^\delta)$ as soluções correspondentes de (3.9)-(3.13). É fácil ver que $\varphi^\delta = \varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta$, $\theta^\delta = \theta_1^\delta - \theta_2^\delta$ e $v^\delta = v_1^\delta - v_2^\delta$ satisfazem:

$$\varphi^\delta - \alpha \Delta \varphi^\delta = D \varphi^\delta + (\theta_e - \widehat{\theta}^\delta)(\lambda_1 |\nabla \varphi_1^\delta| - \lambda_2 |\nabla \varphi_2^\delta|) \quad \text{em } Q, \quad (3.24)$$

$$\theta_t^\delta - \beta \Delta \theta^\delta + v_1^\delta \cdot \nabla \theta^\delta + v^\delta \cdot \nabla \theta_2^\delta = \frac{L}{c_p} \varphi_t^\delta \quad \text{em } Q, \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(v^\delta, u) + \nu(\nabla v^\delta, \nabla u) + (v_1^\delta \cdot \nabla v_1^\delta, u) - (v_2^\delta \cdot \nabla v_2^\delta, u) \\ &= -(\lambda_1 - \lambda_2) \left((F^\delta(T_r(\widehat{\varphi}^\delta))\widehat{v}^\delta, u) + (\vec{\sigma} \widehat{\theta}^\delta, u) \right) \quad \forall u \in V \quad \text{em } (0, T), \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial \varphi^\delta}{\partial \nu} = \frac{\partial \theta^\delta}{\partial \nu} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega \times (0, T), \quad (3.27)$$

$$\varphi^\delta(0) = 0, \quad \theta^\delta(0) = 0, \quad v^\delta(0) = 0 \quad \text{em } \Omega, \quad (3.28)$$

onde $D = -1 + 3(\varphi_1^\delta + \varphi_2^\delta) - 2((\varphi_1^\delta)^2 + \varphi_1^\delta \varphi_2^\delta + (\varphi_2^\delta)^2) \leq 6$, pois $0 \leq \varphi_1^\delta, \varphi_2^\delta \leq 1$ (lema 2.3).

Multiplicando (3.24) por φ^δ e integrando em Ω , temos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\varphi^\delta)^2 + \alpha \int_{\Omega} |\nabla \varphi^\delta|^2 = \int_{\Omega} D(\varphi^\delta)^2 + \int_{\Omega} (\theta_e - \widehat{\theta}^\delta) (\lambda_1 |\nabla \varphi_1^\delta| - \lambda_2 |\nabla \varphi_2^\delta|) \varphi^\delta$$

Somando e subtraindo $\int_{\Omega} (\theta_e - \widehat{\theta}^\delta) \lambda_2 |\nabla \varphi_1^\delta| \varphi^\delta$, usando a seguinte desigualdade $||a| - |b|| \leq |a - b|$ e Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\varphi^\delta)^2 + \int_{\Omega} |\nabla \varphi^\delta|^2 \leq 6 \int_{\Omega} (\varphi^\delta)^2 \\ & + \|\theta_e - \widehat{\theta}^\delta\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} |\lambda_1 - \lambda_2| |\nabla \varphi_1^\delta| \varphi^\delta + \|\theta_e - \widehat{\theta}^\delta\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} \lambda_2 |\nabla \varphi^\delta| \varphi^\delta \\ & \leq |\lambda_1 - \lambda_2|^2 \|\theta_e - \widehat{\theta}^\delta\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \int_{\Omega} |\nabla \varphi_1^\delta|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \varphi^\delta|^2 \\ & + C \left(1 + \|\theta_e - \widehat{\theta}^\delta\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \right) \int_{\Omega} (\varphi^\delta)^2, \end{aligned}$$

o que ajustando os termos fornece

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\varphi^\delta)^2 + \int_{\Omega} |\nabla \varphi^\delta|^2 & \leq |\lambda_1 - \lambda_2|^2 \|\theta_e - \widehat{\theta}^\delta\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \int_{\Omega} |\nabla \varphi_1^\delta|^2 \\ & + C \left(1 + \|\theta_e - \widehat{\theta}^\delta\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \right) \int_{\Omega} (\varphi^\delta)^2. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Agora multiplicamos (3.25) por $\theta^\delta - \frac{L}{c_p} \varphi^\delta$ e integramos em Ω para obtermos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\theta^\delta - \frac{L}{c_p} \varphi^\delta)^2 + \beta \int_{\Omega} |\nabla \theta^\delta|^2 - \frac{L\beta}{c_p} \nabla \theta^\delta \cdot \nabla \varphi^\delta \\ & = \frac{L}{c_p} \int_{\Omega} v_1^\delta \cdot \nabla \theta^\delta \varphi^\delta - \int_{\Omega} v^\delta \cdot \nabla \theta_2^\delta \theta^\delta + \frac{L}{c_p} \int_{\Omega} v^\delta \cdot \nabla \theta_2^\delta \varphi^\delta \\ & \leq C \|v_1^\delta\|_{L^4(\Omega)} \|\nabla \theta^\delta\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi^\delta\|_{L^4(\Omega)} + C \|v^\delta\|_{L^4(\Omega)} \|\nabla \theta_2^\delta\|_{L^2(\Omega)} \|\theta^\delta\|_{L^4(\Omega)} \\ & + C \|v^\delta\|_{L^4(\Omega)} \|\nabla \theta_2^\delta\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi^\delta\|_{L^4(\Omega)}. \end{aligned}$$

Usando então a desigualdade de Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\theta^\delta - \frac{L}{c_p} \varphi^\delta)^2 + \beta \int_{\Omega} |\nabla \theta^\delta|^2 - \frac{L\beta}{c_p} \nabla \theta^\delta \cdot \nabla \varphi^\delta \\ & \leq C \|v_1^\delta\|_{L^4(\Omega)}^2 \|\varphi^\delta\|_{L^4(\Omega)}^2 + \epsilon \|\nabla \theta^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \|v^\delta\|_{L^4(\Omega)}^2 \\ & + C \|\nabla \theta_2^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\theta^\delta\|_{L^4(\Omega)}^2 + C \|v^\delta\|_{L^4(\Omega)}^2 + C \|\nabla \theta_2^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\varphi^\delta\|_{L^4(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

agora aplicamos a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg e chegamos à seguinte desigualdade

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\theta^\delta - \frac{L}{c_p} \varphi^\delta)^2 + \beta \int_{\Omega} |\nabla \theta^\delta|^2 - \frac{L\beta}{c_p} \nabla \theta^\delta \cdot \nabla \varphi^\delta$$

$$\begin{aligned}
&\leq C\|v_1^\delta\|_{L^4(\Omega)}^2\|\varphi^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2\|\nabla\varphi^\delta\|_{L^2(\Omega)} + \epsilon\|\nabla\theta^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|v^\delta\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v^\delta\|_{L^2(\Omega)} \\
&+ C\|\nabla\theta_2^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2\|\theta^\delta\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\theta^\delta\|_{L^2(\Omega)} + C\|\nabla\theta_2^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2\|\varphi^\delta\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\varphi^\delta\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \epsilon\|\nabla\varphi^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \epsilon\|\nabla v^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \epsilon\|\nabla\theta^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|\nabla\theta_2^\delta\|_{L^2(\Omega)}^4\|\theta^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&+ C\left(\|v_1\|_{L^4(\Omega)}^4 + \|\nabla\theta_2^\delta\|_{L^2(\Omega)}^4\right)\|\varphi^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|v^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Tomando $u = v^\delta$ em (3.26) teremos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}|v^\delta|^2 + \nu\int_{\Omega}|\nabla v^\delta|^2 \\
&= \int_{\Omega}v^\delta \cdot \nabla v_1^\delta v^\delta - (\lambda_1 - \lambda_2)\int_{\Omega}F^\delta(T_r(\widehat{\varphi}^\delta))\widehat{v}^\delta v^\delta + (\lambda_1 - \lambda_2)\int_{\Omega}\widehat{\sigma}\widehat{\theta}^\delta v^\delta \\
&\leq \|v^\delta\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v^\delta\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v_1^\delta\|_{L^2(\Omega)} \\
&+ |\lambda_1 - \lambda_2|^2\|\widehat{v}^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 + |\lambda_1 - \lambda_2|^2\|\widehat{\theta}^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2,
\end{aligned} \tag{3.31}$$

multiplicando (3.29) por $A \in \mathbb{R}$ suficientemente grande, tomando ϵ suficientemente pequeno e somando com (3.30), (3.31) e após integrar em t chegamos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega}(\varphi^\delta)^2 + (\theta^\delta)^2 + (v^\delta)^2 + \int_0^t \int_{\Omega}|\nabla\varphi^\delta|^2 + |\nabla\theta^\delta|^2 + |\nabla v^\delta|^2 \\
&\leq C|\lambda_1 - \lambda_2|^2\left(\|\nabla\varphi_1^\delta\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\|\widehat{\theta}^\delta\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))} + \|\widehat{v}^\delta\|_{L^2(Q)}^2 + \|\widehat{\theta}^\delta\|_{L^2(Q)}^2\right) \\
&+ C\int_0^t\left(1 + \|\widehat{\theta}^\delta\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + \|v_1^\delta\|_{L^4(\Omega)}^4 + \|\nabla\theta_2^\delta\|_{L^2(\Omega)}^4\right)\int_{\Omega}(\varphi^\delta)^2 + (\theta^\delta)^2 + (v^\delta)^2,
\end{aligned}$$

portanto, pelo lema de Gronwall obtemos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
&\|\varphi^\delta\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|\nabla\varphi^\delta\|_{L^2(Q)} + \|\theta^\delta\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|\nabla\theta^\delta\|_{L^2(Q)} \\
&+ \|v^\delta\|_{L^\infty(0,T;H)} + \|\nabla v^\delta\|_{L^2(Q)} \leq C|\lambda_1 - \lambda_2|,
\end{aligned} \tag{3.32}$$

onde C é uma constante que depende de $\|\nabla\varphi_1^\delta\|_{L^2(Q)}$, $\|\widehat{v}^\delta\|_{L^2(Q)}$, $\|\widehat{\theta}^\delta\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))}$, $\|v_1^\delta\|_{L^4(Q)}$, $\|\nabla\theta_2^\delta\|_{L^4(0,T;L^2(\Omega))}$ mas independente de λ_i .

Multiplicamos agora (3.24) por φ_t^δ para obter

$$\int_{\Omega}(\varphi_t^\delta)^2 + \frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}|\nabla\varphi^\delta|^2 = \int_{\Omega}D\varphi^\delta\varphi_t^\delta + \int_{\Omega}(\theta_e - \widehat{\theta}^\delta)(\lambda_1|\nabla\varphi_1^\delta| - \lambda_2|\nabla\varphi_2^\delta|)\varphi_t^\delta,$$

de modo semelhante a (3.29) chegamos a seguinte desigualdade

$$\int_{\Omega}(\varphi_t^\delta)^2 + \frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}|\nabla\varphi^\delta|^2 \leq C\int_{\Omega}(\varphi^\delta)^2 + \|\theta_e - \widehat{\theta}^\delta\|_{L^\infty(\Omega)}\int_{\Omega}|\lambda_1 - \lambda_2||\nabla\varphi_1^\delta|\varphi_t^\delta$$

$$\begin{aligned}
& + \|\theta_e - \widehat{\theta}^\delta\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} \lambda_2 |\nabla \varphi^\delta| \varphi_t^\delta \\
& \leq C \int_{\Omega} (\varphi^\delta)^2 + |\lambda_1 - \lambda_2|^2 \|\theta_e - \widehat{\theta}^\delta\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \int_{\Omega} |\nabla \varphi_1^\delta|^2 \\
& \quad + C \|\theta_e - \widehat{\theta}^\delta\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \int_{\Omega} |\nabla \varphi^\delta|^2,
\end{aligned}$$

pelo lema de Gronwall e (3.32) obtemos

$$\|\varphi_t^\delta\|_{L^2(Q)} + \|\nabla \varphi^\delta\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C|\lambda_1 - \lambda_2|. \quad (3.33)$$

Nosso próximo passo é multiplicar (3.25) por θ_t^δ

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\theta_t^\delta)^2 + \frac{\beta}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla \theta^\delta|^2 = - \int_{\Omega} v_1^\delta \cdot \nabla \theta^\delta \theta_t^\delta - \int_{\Omega} v^\delta \cdot \nabla \theta_2^\delta \theta_t^\delta + \frac{L}{c_p} \int_{\Omega} \varphi_t^\delta \theta_t^\delta \\
& \leq C \|v_1^\delta\|_{L^4(\Omega)}^2 \|\nabla \theta^\delta\|_{L^4(\Omega)}^2 + C \|v^\delta\|_{L^4(\Omega)}^2 \|\nabla \theta_2^\delta\|_{L^4(\Omega)}^2 + \|\varphi_t^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\theta_t^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2,
\end{aligned}$$

a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg nos dá

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\theta_t^\delta)^2 + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla \theta^\delta|^2 \leq C \|v_1^\delta\|_{L^4(\Omega)}^2 \|\nabla \theta^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \epsilon \|\Delta \theta^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \quad + C \|v^\delta\|_{L^4(\Omega)}^2 \|\nabla \theta_2^\delta\|_{L^4(\Omega)}^2 + \|\varphi_t^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

Antes de usar o lema de Gronwall multiplicaremos (3.25) por $-\Delta \theta^\delta$

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla \theta^\delta|^2 + \beta \int_{\Omega} (\Delta \theta^\delta)^2 \leq C \|v_1^\delta\|_{L^4(\Omega)}^2 \|\nabla \theta^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \epsilon \|\Delta \theta^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \quad + C \|v^\delta\|_{L^4(\Omega)}^2 \|\nabla \theta_2^\delta\|_{L^4(\Omega)}^2 + \|\varphi_t^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

Tomando ϵ suficientemente pequeno e somando as duas últimas desigualdades teremos

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla \theta^\delta|^2 + \int_{\Omega} (\theta_t^\delta)^2 + (\Delta \theta^\delta)^2 \leq C \|v_1^\delta\|_{L^4(\Omega)}^2 \|\nabla \theta^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \quad + C \|v^\delta\|_{L^4(\Omega)}^2 \|\nabla \theta_2^\delta\|_{L^4(\Omega)}^2 + \|\varphi_t^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2,
\end{aligned}$$

agora podemos usar o lema de Gronwall junto com (3.32) e (3.33) e ter

$$\|\nabla \theta^\delta\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|\theta_t^\delta\|_{L^2(Q)} + \|\Delta \theta^\delta\|_{L^2(Q)} \leq C|\lambda_1 - \lambda_2|. \quad (3.34)$$

De (3.32)-(3.34) temos

$$\|\varphi^\delta\|_{L^4(Q)} + \|\theta^\delta\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|v^\delta\|_{L^4(Q)} \leq C|\lambda_1 - \lambda_2|,$$

onde C é independente de λ_i , isso mostra que $\mathcal{T}_\lambda$ é uniformemente contínuo com respeito a λ .

Para $\lambda = 0$, é claro que o problema (3.9)-(3.13) tem uma única solução $(\widehat{\varphi}^\delta, \widehat{\theta}^\delta, \widehat{v}^\delta)$ satisfazendo $\mathcal{T}_0(\widehat{\varphi}^\delta, \widehat{\theta}^\delta, \widehat{v}^\delta) = (\widehat{\varphi}^\delta, \widehat{\theta}^\delta, \widehat{v}^\delta)$.

Resta agora mostrar que o conjunto dos possíveis pontos fixos de $\mathcal{T}_\lambda$ é limitado. Seja $(\varphi^\delta, \theta^\delta, v^\delta) \in B$ um possível ponto fixo, i.e.

$$\varphi_t^\delta - \alpha \Delta \varphi^\delta = -\varphi^\delta + 3(\varphi^\delta)^2 - 2(\varphi^\delta)^3 + \lambda(\theta_e - \theta^\delta)|\nabla \varphi^\delta| \quad \text{em } Q, \quad (3.35)$$

$$\theta_t^\delta - \beta \Delta \theta^\delta + v^\delta \cdot \nabla \theta^\delta = \frac{L}{c_p} \varphi_t^\delta \quad \text{em } Q, \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(v^\delta, u) + \nu(\nabla v^\delta, \nabla u) + (v^\delta \cdot \nabla v^\delta, u) \\ &= -\lambda(F^\delta(T_r(\varphi^\delta))v^\delta, u) + \lambda(\vec{\sigma}\theta^\delta, u) \quad \forall u \in V, \quad \text{em } (0, T), \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial \varphi^\delta}{\partial \nu} = \frac{\partial \theta^\delta}{\partial \nu} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega \times (0, T), \quad (3.38)$$

$$\varphi^\delta(0) = \varphi_0, \quad \theta^\delta(0) = \theta_0, \quad v^\delta(0) = v_0 \quad \text{em } \Omega. \quad (3.39)$$

As estimativas serão feitas de modo usual, mas agora podemos aplicar o Lema 2.3 na equação (3.35) e usar que $0 \leq \varphi^\delta \leq 1$, assim $T_r(\varphi^\delta) = \varphi^\delta$ e tomando $u = v^\delta$ na equação (3.37) temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega (v^\delta)^2 + \nu \int_\Omega |\nabla v^\delta|^2 &= -\lambda \int_\Omega F^\delta(\varphi^\delta)(v^\delta)^2 + \lambda \int_\Omega \vec{\sigma}\theta^\delta v^\delta \\ &\leq C \int_\Omega (\theta^\delta)^2 + \int_\Omega (v^\delta)^2, \end{aligned}$$

agora, integrando em t

$$\frac{1}{2} \int_\Omega (v^\delta)^2 + \nu \int_0^t \int_\Omega |\nabla v^\delta|^2 \leq \frac{1}{2} \int_\Omega v_0^2 + C \int_0^t \int_\Omega (\theta^\delta)^2 + \int_0^t \int_\Omega (v^\delta)^2. \quad (3.40)$$

Do mesmo modo, multiplicamos (3.35) por φ^δ

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega (\varphi^\delta)^2 + \alpha \int_\Omega |\nabla \varphi^\delta|^2 &= \int_\Omega -(\varphi^\delta)^2 + 3(\varphi^\delta)^3 - 2(\varphi^\delta)^4 \\ &\quad + \int_\Omega (\theta_e - \theta^\delta)|\nabla \varphi^\delta| \varphi^\delta, \end{aligned}$$

usando a desigualdade de Schwarz, integrando em t e que $0 \leq \varphi^\delta \leq 1$ obtemos

$$\int_\Omega (\varphi^\delta)^2 + \int_0^t \int_\Omega |\nabla \varphi^\delta|^2 \leq C + C \int_\Omega \varphi_0^2 + C \int_0^t \int_\Omega (\theta^\delta)^2. \quad (3.41)$$

Na equação (3.36) multiplicamos $(\theta^\delta - \frac{L}{c_p}\varphi^\delta)$ e então

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\theta^\delta - \frac{L}{c_p}\varphi^\delta)^2 + \beta \int_{\Omega} |\nabla \theta^\delta|^2 - \frac{L\beta}{c_p} \int_{\Omega} \nabla \theta^\delta \cdot \nabla \varphi^\delta = - \int_{\Omega} v^\delta \cdot \nabla \theta^\delta \varphi^\delta,$$

usando novamente a desigualdade de Schwarz e que $0 \leq \varphi^\delta \leq 1$ temos, após integrar em t que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\theta^\delta - \frac{L}{c_p}\varphi^\delta)^2 + \beta \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla \theta^\delta|^2 - \frac{L\beta}{c_p} \int_{\Omega} \nabla \theta^\delta \cdot \nabla \varphi^\delta \\ \leq C \int_{\Omega} \varphi_0^2 + C \int_{\Omega} \theta_0^2 + \int_0^t \int_{\Omega} (v^\delta)^2. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Multiplicando (3.41) por A e somando com (3.42)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} A(\varphi^\delta)^2 + (\theta^\delta - \frac{L}{c_p}\varphi^\delta)^2 + \int_0^t \int_{\Omega} A|\nabla \varphi^\delta|^2 + \beta|\nabla \theta^\delta|^2 - \frac{L\beta}{c_p} \nabla \theta^\delta \cdot \nabla \varphi^\delta \\ \leq C \left(1 + \|\varphi_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\theta_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v^\delta\|_{L^2(Q)}^2 + \int_0^t \int_{\Omega} (\theta^\delta)^2 + (\varphi^\delta)^2 \right), \end{aligned}$$

onde $A \in \mathbb{R}$ é arbitrário, escolhendo A suficientemente grande, e somando com (3.40), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\varphi^\delta)^2 + (\theta^\delta)^2 + (v^\delta)^2 + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla \varphi^\delta|^2 + |\nabla \theta^\delta|^2 + |\nabla v^\delta|^2 \leq \\ C \left(1 + \|\varphi_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\theta_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + C \int_0^t \int_{\Omega} (\varphi^\delta)^2 + (\theta^\delta)^2 + (v^\delta)^2. \end{aligned}$$

Aplicamos agora o Lema de Gronwall para obter a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} \|\varphi^\delta\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|\theta^\delta\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|v^\delta\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 \\ + \|\nabla \varphi^\delta\|_{L^2(Q)}^2 + \|\nabla \theta^\delta\|_{L^2(Q)}^2 + \|\nabla v^\delta\|_{L^2(Q)}^2 \\ \leq C \left(1 + \|\varphi_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\theta_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.43)$$

A desigualdade (3.43) é suficiente para mostrar que φ^δ, v^δ são limitadas independentes de λ , mas para mostrarmos que θ^δ também é limitada precisamos multiplicar (3.35) por φ_t , e de modo usual obtemos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\varphi_t^\delta)^2 + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla \varphi^\delta|^2 &\leq C + \|\theta^\delta\|_{L^4(\Omega)}^2 \|\nabla \varphi^\delta\|_{L^4(\Omega)}^2 \\ &\leq C + C \|\theta^\delta\|_{L^4(\Omega)}^2 \|\nabla \varphi^\delta\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta \varphi^\delta\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C + \|\theta^\delta\|_{L^4(\Omega)}^4 \|\nabla \varphi^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \epsilon \|\Delta \varphi^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned} \quad (3.44)$$

e ainda multiplicando (3.35) por $-\Delta\varphi^\delta$ também obtemos

$$\int_{\Omega} (\Delta\varphi^\delta)^2 + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla\varphi^\delta|^2 \leq C + \|\theta^\delta\|_{L^4(\Omega)}^4 \|\nabla\varphi^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (3.45)$$

Somando (3.44) e (3.45) chegamos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\Omega} (\varphi_t^\delta)^2 + (\Delta\varphi^\delta)^2 + \int_{\Omega} |\nabla\varphi^\delta|^2 &\leq C + C \int_{\Omega} |\nabla\varphi_0|^2 \\ &\quad + C \int_0^t \|\theta^\delta\|_{L^4(\Omega)}^4 \int_{\Omega} |\nabla\varphi^\delta|^2. \end{aligned}$$

De (3.43) concluimos que $\theta^\delta \in L^4(Q)$ e limitada nesse mesmo espaço, então pelo Lema de Gronwall obtemos

$$\|\varphi_t^\delta\|_{L^2(Q)}^2 + \|\Delta\varphi^\delta\|_{L^2(Q)}^2 + \|\nabla\varphi^\delta\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq C. \quad (3.46)$$

De modo análogo a (3.46) prova-se que

$$\|\theta_t^\delta\|_{L^2(Q)}^2 + \|\Delta\theta^\delta\|_{L^2(Q)}^2 + \|\nabla\theta^\delta\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq C. \quad (3.47)$$

As possíveis diferentes constantes C dependem de T , $\|\varphi_0\|_{W_2^1(\Omega)}$, $\|\theta_0\|_{W_2^1(\Omega)}$, e $\|v_0\|_{L^2(\Omega)}$. Segue então que o conjunto dos pontos fixos de $\mathcal{T}_\lambda$ é limitado em B independente de λ . Podemos então aplicar o Teorema do ponto fixo de Leray-Schauder, assim existe pelo menos um ponto fixo $(\varphi^\delta, \theta^\delta, v^\delta) \in B$ de $\mathcal{T}_1$, mas pelo lema 2.3 temos que $0 \leq \varphi^\delta \leq 1$, assim $T_r(\varphi^\delta) = \varphi^\delta$ e portanto $(\varphi^\delta, \theta^\delta, v^\delta)$ é uma solução de (3.6)-(3.8).

Falta mostrarmos que $\varphi^\delta \in W_q^{2,1}(Q)$ e $\theta^\delta \in W_r^{2,1}(Q)$, para isto usaremos argumentos de interpolação e *bootstrapping*, observe que $\theta^\delta \in W_2^{2,1}(Q) \hookrightarrow L^p(Q)$, $1 < p < \infty$, de (3.43) e (3.46) temos

$$\nabla\varphi^\delta \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega)) \hookrightarrow L^4(Q),$$

isto implica que $-\varphi^\delta + 3(\varphi^\delta)^2 - 2(\varphi^\delta)^3 + (\theta_e - \theta^\delta)|\nabla\varphi^\delta| \in L^3(Q)$ e portanto $\varphi^\delta \in W_{\bar{q}}^{2,1}(Q)$, onde $\bar{q} = \min\{q, 3\}$. Se $q \leq 3$ acabou, caso contrário temos

$$\nabla\varphi^\delta \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^3(0,T;W^{1,3}(\Omega)) \hookrightarrow L^5(Q),$$

e assim $-\varphi^\delta + 3(\varphi^\delta)^2 - 2(\varphi^\delta)^3 + (\theta_e - \theta^\delta)|\nabla\varphi^\delta| \in L^4(Q)$ e portanto $\varphi^\delta \in W_{\bar{q}}^{2,1}(Q)$, onde $\bar{q} = \min\{q, 4\}$. Procedendo este argumento concluimos que $\varphi^\delta \in W_q^{2,1}(Q)$. De $v^\delta \in L^4(Q)$

e $\varphi_t^\delta \in L^q(Q)$, usamos a teoria L^p -parabólica, (Teorema 1.3) para obter que $\theta^\delta \in W_r^{2,1}(Q)$, $1 < r < \min\{4, q, s\}$. ■

Os Lemas seguintes nos darão estimativas para as funções $(\varphi^\delta, \theta^\delta, v^\delta)$ que são independentes de δ ; tais estimativas nos permitirão passar ao limite em (3.6)-(3.8).

Lema 3.1 *Para cada $\delta > 0$, considere as soluções dadas na Proposição 3.1. Então existe uma constante C independente de δ tal que:*

$$\|v^\delta\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;V)} + \int_0^T \int_\Omega \frac{(\varphi^\delta)^2}{1 - \varphi^\delta + \delta} |v^\delta|^2 dx dt \leq C, \quad (3.48)$$

$$\|\varphi^\delta\|_{W_q^{2,1}(Q)} \leq C, \quad (3.49)$$

$$\|\theta^\delta\|_{W_r^{2,1}(Q)} \leq C. \quad (3.50)$$

Demonstração: As estimativas (3.48) e para $\varphi^\delta, \theta^\delta$ em $W_2^{2,1}(Q)$ seguem de modo análogo a (3.40)-(3.46), tomando $u = v^\delta$ em (3.6) obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega (v^\delta)^2 + \nu \int_\Omega |\nabla v^\delta|^2 + \int_\Omega F^\delta(\varphi^\delta)(v^\delta)^2 \leq C \int_\Omega (\theta^\delta)^2 + \int_\Omega (v^\delta)^2,$$

e então basta somar com (3.41) e (3.42) e usar o Lema de Gronwall.

Observe a seguir que $-\varphi^\delta + 3(\varphi^\delta)^2 - 2(\varphi^\delta)^3 + (\theta_e - \theta^\delta)|\nabla \varphi^\delta| \in L^3(Q)$, então para $\epsilon > 0$ tal que $2 + \epsilon < \min\{q, 3\}$, vale a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} \|\varphi^\delta\|_{W_{2+\epsilon}^{2,1}(Q)} &\leq C \left(\|\varphi_0\|_{W_{2+\epsilon}^{2-\frac{2}{2+\epsilon}}(\Omega)} \right. \\ &\quad \left. + \|\varphi^\delta + 3(\varphi^\delta)^2 - 2(\varphi^\delta)^3 + (\theta_e - \theta^\delta)|\nabla \varphi^\delta|\|_{L^{2+\epsilon}(Q)} \right) \\ &\leq C \left(1 + \|\varphi_0\|_{W_q^{2-2/q}(\Omega)} + \|\theta^\delta\|_{L^s(Q)} \|\nabla \varphi^\delta\|_{L^4(Q)} \right) \\ &\leq C \left(1 + \|\varphi_0\|_{W_q^{2-2/q}(\Omega)} + \|\theta^\delta\|_{W_2^{2,1}(Q)} \|\nabla \varphi^\delta\|_{L^2(Q)}^{\frac{1}{2}} \|\Delta \varphi^\delta\|_{L^2(Q)}^{\frac{1}{2}} \right) \\ &\leq C \left(1 + \|\varphi_0\|_{W_q^{2-2/q}(\Omega)} + \|\theta^\delta\|_{W_2^{2,1}(Q)} \|\varphi^\delta\|_{W_2^{2,1}(Q)} \right) \\ &\leq C, \end{aligned}$$

onde, $1/s + 1/4 = 1/(2 + \epsilon)$. Para este mesmo ϵ , temos da teoria de regularidade L^p para equações parabólicas que

$$\begin{aligned} \|\theta^\delta\|_{W_{2+\epsilon}^{2,1}(Q)} &\leq C \left(\|\theta_0\|_{W_{2+\epsilon}^{2-\frac{2}{2+\epsilon}}(\Omega)}, \|v^\delta\|_{L^4(Q)}, \|\varphi_t^\delta\|_{L^{2+\epsilon}(Q)} \right) \\ &\leq C. \end{aligned}$$

Portanto, θ^δ é limitada em $W_{2+\epsilon}^{2,1}(Q)$, o qual está imerso continuamente em $L^\infty(Q)$. Assim,

$$\|\theta^\delta\|_{L^\infty(Q)} \leq C \|\theta^\delta\|_{W_{2+\epsilon}^{2,1}(Q)} \leq C,$$

e então (3.49) segue do Lema 2.6, e novamente da teoria L^p -parabólica temos

$$\begin{aligned} \|\theta^\delta\|_{W_r^{2,1}(Q)} &\leq C \left(\|\theta_0\|_{W_r^{2-2/r}(\Omega)}, \|v^\delta\|_{L^4(Q)}, \|\varphi_t^\delta\|_{L^r(Q)} \right) \\ &\leq C, \end{aligned}$$

o que mostra (3.50). ■

Observação 3.2 *A condição $q > 2$ nos garante que $W_q^{2,1}(Q)$ está imerso em $H^{\tau,\tau/2}(\overline{Q})$, com $\tau = 2 - 4/q$ e portanto existe φ e uma subsequência de (φ^δ) (o qual ainda denotaremos por φ^δ), tal que φ^δ converge uniformemente para φ em $\overline{Q}$. Além disso, esta imersão nos garante que φ é contínua e portanto o domínio $Q_{ml} = \{(x, t) \in Q; 0 \leq \varphi < 1\}$ é aberto.*

Lema 3.2 *Dados $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$, $U \subset \Omega_{ml}(t_1)$ tal que $\overline{U} \times [t_1, t_2] \subset Q_{ml} \cup \Omega_{ml}(0) \cup \Omega_{ml}(T)$, existe $\delta_0(U, t_1, t_2) > 0$ e uma constante $C(\delta_0)$ tal que, para todo $\delta < \delta_0$,*

$$\|v_t^\delta\|_{L^2(t_1, t_2; V(U)')} \leq C. \quad (3.51)$$

Demonstração: Sejam $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$, $U \subset \Omega_{ml}(t_1)$ tal que $\overline{U} \times [t_1, t_2] \subset Q_{ml} \cup \Omega_{ml}(0) \cup \Omega_{ml}(T)$. De (3.8) e q.s. $t \in (t_1, t_2)$,

$$\begin{aligned} (v_t^\delta, u) &= -\nu \int_U \nabla v^\delta \nabla u - \int_U v^\delta \cdot \nabla v^\delta u - \int_U \frac{(\varphi^\delta)^2}{1 - \varphi^\delta + \delta} v^\delta u \\ &\quad + \int_U \tilde{\sigma} \theta^\delta u \quad \forall u \in V(U). \end{aligned}$$

Note que para $(x, t) \in \overline{U} \times [t_1, t_2]$,

$$\frac{\varphi^2}{1 - \varphi + \delta} \leq \frac{C}{2}.$$

Da convergência uniforme de φ^δ para φ em qualquer subconjunto compacto, existe δ_0 tal que para todo $\delta \in (0, \delta_0)$ e para todo $(x, t) \in \overline{U} \times [t_1, t_2]$,

$$\frac{(\varphi^\delta)^2}{1 - \varphi^\delta + \delta} \leq C,$$

assim,

$$\|v_t^\delta\|_{V(U)'} \leq C \left(\|v^\delta\|_V + \|v^\delta\|_{L^4(\Omega)}^2 + \|v^\delta\|_{L^2(\Omega)} + \|\theta^\delta\|_{L^2(\Omega)} \right).$$

Consequentemente, (3.51) segue do Lema 3.1. ■

3.3 Passagem ao limite

Usando (3.48) e (3.51) vemos que (v^δ) é limitado em $\{v \in L^2(t_1, t_2; V(U)); v_t \in L^2(t_1, t_2; V(U)')\}$ mas, a imersão desse espaço em $L^2(U \times (t_1, t_2))$ é compacta, assim, existem v e uma subsequência de (v^δ) (o qual ainda denotaremos por v^δ) tal que v^δ converge fortemente para v em $L^2(U \times (t_1, t_2))$. Lembremos que Q_{ml} é aberto, pois φ é contínua, então pode ser coberto por um número enumerável de conjuntos abertos $U_i \times (t_i, t_{i+1})$ tal que $U_i \subset \Omega_{ml}(t_i)$.

Seja K um conjunto compacto de $Q_{ml} \cup \Omega_{ml}(0) \cup \Omega_{ml}(T)$, então K pode ser coberto por um número finito de abertos do tipo $U_i \times (t_i, t_{i+1})$. Para cada i existem $\delta_i(U_i, t_i, t_{i+1})$ e uma constante $C_i(\delta_0^i)$ tal que para todo $\delta < \delta_i$,

$$\|v_t^\delta\|_{L^2(t_i, t_{i+1}; V(U_i)')} \leq C_i.$$

Sejam $\bar{\delta} = \min_i \{\delta_i\}$ e $C = \max_i \{C_i\}$, então

$$\|v_t^\delta\|_{L^2(t_i, t_{i+1}; V(U_i)')} \leq C, \quad \forall i \text{ e } \delta < \bar{\delta}.$$

Segue então que

$$v^\delta \rightarrow v \quad \text{em} \quad L_{loc}^2(Q_{ml} \cup \Omega_{ml}(0) \cup \Omega_{ml}(T)) \quad \text{fortemente.} \quad (3.52)$$

Além disso, de (3.48) temos que $v \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ e

$$v^\delta \rightharpoonup v \quad \text{em} \quad L^2(0, T; V) \quad \text{fracamente,} \quad (3.53)$$

$$v^\delta \xrightarrow{*} v \quad \text{em} \quad L^\infty(0, T; H) \quad \text{fracamente estrela.} \quad (3.54)$$

Do Lema 3.1 e imersão compacta, existem $\varphi \in W_q^{2,1}(Q)$, $\theta \in W_r^{2,1}(Q)$ e uma subsequência $(\varphi^\delta, \theta^\delta)$ (o qual ainda denotaremos por $(\varphi^\delta, \theta^\delta)$) tal que, quando $\delta \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned}\varphi^\delta &\rightarrow \varphi && \text{uniformemente em } Q, \\ \varphi^\delta &\rightarrow \varphi && \text{em } L^2(0, T; W_2^1(\Omega)), \text{ fortemente,} \\ \varphi^\delta &\rightharpoonup \varphi && \text{em } W_q^{2,1}(Q), \text{ fracamente,} \\ \theta^\delta &\rightharpoonup \theta && \text{em } W_r^{2,1}(Q), \text{ fracamente.}\end{aligned}\tag{3.55}$$

Resta-nos passarmos o limite em (3.6)-(3.8) quando $\delta \rightarrow 0$, para isto, seja $\eta \in L^2(0, T; V)$ com suporte compacto contido em $Q_{ml} \cup \Omega_{ml}(0) \cup \Omega_{ml}(T)$ e $\eta_t \in L^2(0, T; V')$, tomando $u = \eta(t)$ em (3.8), integrando sobre $(0, t)$ obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^t (v_t^\delta, \eta) + \nu(\nabla v^\delta, \nabla \eta) + (v^\delta \cdot \nabla v^\delta, \eta) + \left(\frac{(\varphi^\delta)^2}{1 - \varphi^\delta + \delta} v^\delta, \eta \right) ds \\ = \int_0^t (\vec{\sigma} \theta^\delta, v^\delta) ds.\end{aligned}$$

Além disso, observe que

$$\int_0^t (v_t^\delta, \eta) ds = - \int_0^t (v^\delta, \eta_t) ds + (v^\delta(t), \eta(t)) - (v_0, \eta(0)).$$

Desde que $\text{supp } \eta \subset Q_{ml} \cup \Omega_{ml}(0) \cup \Omega_{ml}(T)$ temos então que $\text{supp } \eta(t) \subset \Omega_{ml}(t)$ para quase todo $t \in [0, T]$, portanto

$$\begin{aligned}(v^\delta(t), \eta(t)) + \int_0^t \nu(\nabla v^\delta, \nabla \eta) + (v^\delta \cdot \nabla v^\delta, \eta) + \int_0^t \left(\frac{(\varphi^\delta)^2}{1 - \varphi^\delta + \delta} v^\delta, \eta \right) ds \\ = (v_0, \eta(0)) + \int_0^t (v^\delta, \eta_t) ds + \int_0^t (\vec{\sigma} \theta^\delta, v^\delta) ds.\end{aligned}\tag{3.56}$$

Da convergência uniforme de φ^δ para φ , segue que $\frac{(\varphi^\delta)^2}{1 - \varphi^\delta + \delta}$ converge para $\frac{\varphi^2}{1 - \varphi}$ uniformemente em conjuntos compactos de $Q_{ml} \cup \Omega_{ml}(0) \cup \Omega_{ml}(T)$ e de (3.52)-(3.55) podemos passar o limite em (3.56) para obter (3.4).

Para mostrarmos que $v = 0$ quase sempre em Q_s , dado $\epsilon > 0$ existe $\bar{\delta}(\epsilon)$ tal que se $\delta < \bar{\delta}$ então $|\varphi^\delta(x, t) - \varphi(x, t)| \leq \epsilon$ para todo $(x, t) \in Q$, em particular para $(x, t) \in Q_s = \{(x, t) \in Q; \varphi(x, t) = 1\}$ nós temos $1 - \epsilon \leq \varphi^\delta$, assim de (3.48) obtemos

$$\frac{1}{\epsilon + \delta} \int_{Q_s} (\varphi^\delta)^2 |v^\delta|^2 dx dt \leq \int_0^T \int_\Omega \frac{(\varphi^\delta)^2}{1 - \varphi^\delta + \delta} |v^\delta|^2 dx dt \leq C_1.\tag{3.57}$$

Lembremos que $\varphi^\delta \rightarrow 1$ uniformemente em Q_s e que $v^\delta \rightharpoonup v$ em $L^2(Q_s)$ quando $\delta \rightarrow 0$, então $\varphi^\delta v^\delta \rightharpoonup v$ em $L^2(Q_s)$. Portanto

$$\int_{Q_s} v^2 \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \int_{Q_s} |\varphi^\delta v^\delta|^2 \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} C_1(\epsilon + \delta) \leq C_1\epsilon,$$

e do fato que ϵ é arbitrário temos que $v = 0$ quase sempre em Q_s .

Para passar o limite em (3.6) observamos que φ^δ converge fracamente para φ em $W_q^{2,1}(Q)$ então $\varphi_t^\delta, \Delta \varphi^\delta$ convergem respectivamente para $\varphi_t, \Delta \varphi$ fracamente em $L^q(Q)$, além disso $-\varphi^\delta + 3(\varphi^\delta)^2 - 2(\varphi^\delta)^3$ converge uniformemente para $-\varphi + 3\varphi^2 - 2\varphi^3$ em Q . Desde que a imersão $W_q^{2,1}(Q)$ em $L^q(0, T; W_q^1(\Omega))$ é compacta, temos que $\nabla \varphi^\delta$ converge fortemente para $\nabla \varphi$ em $L^q(Q)$, do fato que θ^δ converge fortemente para θ em $L^p(Q)$, $p \geq 2$, temos que $(\theta_e - \theta^\delta)|\nabla \varphi^\delta|$ converge fortemente para $(\theta_e - \theta)|\nabla \varphi|$ em $L^s(Q)$, $s < q$, então podemos então passar o limite em (3.6) e obter (3.2).

O limite em (3.7) segue da seguinte forma, observe que v^δ converge fracamente para v fracamente em $L^4(Q)$, pois $L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V) \hookrightarrow L^4(Q)$, e também temos que $\nabla \theta^\delta$ converge fracamente para $\nabla \theta$ em $L^q(Q)$ e então $v^\delta \cdot \nabla \theta^\delta$ converge fracamente para $v \cdot \nabla \theta$ em $L^s(Q)$, $1/s = 1/4 + 1/q$, passamos então o limite em (3.16) e obtemos (3.3).

Finalmente, de (3.55) temos que $\partial \varphi^\delta / \partial \nu$ converge fracamente para $\partial \varphi / \partial \nu$ em $L^q(0, T; W_q^{1/2}(\partial \Omega))$ enquanto que $\partial \theta^\delta / \partial \nu$ converge fracamente para $\partial \theta / \partial \nu$ em $L^r(0, T; W_r^{1/2}(\partial \Omega))$. Disto segue que $\partial \varphi / \partial \nu = \partial \theta / \partial \nu = 0$ na $\partial \Omega \times (0, T)$. A condição inicial segue do fato que $\varphi^\delta, \theta^\delta$ convergem respectivamente para φ, θ em $C([0, T]; L^2(\Omega))$ e $v^\delta(0) \rightharpoonup v(0)$ em $V(U)'$, logo $v(0) = v_0$ em $\Omega_{ml}(0)$. A prova do Teorema 3.1 está então completa. ■

Capítulo 4

Um Modelo para Materiais Puros: Existência Global no Caso Tridimensional

Neste capítulo estudaremos a existência de soluções para um outro modelo do tipo campo de fases, e que tem uma maior dissipação do que o modelo do capítulo anterior, para solidificação e/ou liquefação de materiais puros no caso em que o processo ocorre em um domínio limitado tridimensional.

Observamos que o fato o caso tridimensional traz dificuldades técnicas para o modelo do capítulo anterior, basicamente porque os valores dos expoentes que aparecem na desigualdade de Gagliardo-Nirenberg neste caso não são adequados e impedem que se prove como antes a existência global no tempo.

Por outro lado, se dissipações mais intensas estiverem presentes, pode-se esperar a existência de soluções, uma vez assim que maiores regularidades seriam esperadas. Um tal caso ocorre, pelo menos para soluções em um sentido generalizado, quando o material em estado fluido é modelado apresentando uma dissipação viscosa não linear adicional à viscosidade usual (tal viscosidade adicional será dada por um termo envolvendo o p -Laplaceano da velocidade), e, além disso, a equação do campo de fases também apresenta um termo dissipativo não linear adicional (envolvendo um q -Laplaceano do campo de fases). As equações de tal modelo, que

chamaremos de Modelo 2, serão descritas na primeira seção deste capítulo.

O capítulo está organizado da seguinte forma: na primeira seção apresentaremos o modelo e enunciaremos o nosso resultado principal; na segunda seção apresentaremos uma aproximação com penalização adequada ao problema, juntamente com um resultado de existência de soluções e; por fim, na última seção passaremos ao limite no problema aproximado e mostraremos que o modelo original possui solução.

Os argumentos principais a serem utilizados neste capítulo estão baseados nos seguintes resultados e técnicas: o teorema do ponto fixo de Leray-Schauder juntamente com o método de Faedo-Galerkin para obtermos a existência de soluções para os problemas aproximados; a seguir, argumentos de compacidade são utilizados para passarmos ao limite.

4.1 Apresentação do Modelo 2 e o resultado principal

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um aberto, limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave, $T \in \mathbb{R}$ e $Q = \Omega \times (0, T)$. Consideremos o problema:

$$\begin{aligned}
\varphi_t - \alpha \Delta \varphi + \alpha_0 \mathcal{B}(\varphi) &= -\varphi + 3\varphi^2 - 2\varphi^3 + (\theta_e - \theta)|\nabla \varphi| \quad \text{em } Q, \\
\theta_t - \beta \Delta \theta + v \cdot \nabla \theta &= \frac{L}{c_p} \varphi_t \quad \text{em } Q, \\
v_t - \nu \Delta v + \nu_0 \mathcal{A}(v) + v \cdot \nabla v + \nabla P &= -\frac{\varphi^2}{1 - \varphi} v + \vec{\sigma} \theta \quad \text{em } Q_{ml}, \\
\operatorname{div} v &= 0 \quad \text{em } Q_{ml}, \\
v &= 0 \quad \text{em } Q_s, \\
\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = \frac{\partial \theta}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{na } \partial\Omega \times (0, T), \quad v = 0 \quad \text{na } \partial Q_{ml}, \\
\varphi(0) = \varphi_0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \text{em } \Omega, \quad v(0) = v_0 &\quad \text{em } \Omega_{ml}(0).
\end{aligned} \tag{4.1}$$

onde $Q_{ml}, Q_s, \Omega_{ml}(0)$ estão definidos em (1)-(5).

Os operadores $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são definidos respectivamente por

$$\mathcal{A}(v) = -\operatorname{div} (|\nabla v|^{p-2} \nabla v),$$

$$\mathcal{B}(\varphi) = -\operatorname{div} (|\nabla \varphi|^{q-2} \nabla \varphi).$$

O campo de fases é denotado por φ e as funções θ e v são respectivamente a temperatura e velocidade do material. Neste capítulo discutiremos existência e regularidade de solução do problema (4.1). O principal resultado deste capítulo é o seguinte resultado:

Teorema 4.1 *Sejam $0 < T < \infty$, $p \geq 3$, $q \geq 5$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio aberto limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2 . Suponha também que*

$$\begin{aligned} \varphi_0 &\in W_q^1(\Omega) \text{ tal que } 0 \leq \varphi_0 \leq 1 \text{ e } \frac{\partial\varphi_0}{\partial\nu} = 0 \text{ em } \partial\Omega, \\ \theta_0 &\in W_2^1(\Omega), \\ v_0 &\in H, \text{ com } v_0 = 0 \text{ em } \Omega_s(0) = \{x \in \Omega; \varphi_0(x) = 1\}. \end{aligned}$$

Então existem funções $(\varphi, \theta, v, \chi)$, que constituem uma solução generalizada de (4.1) no seguinte sentido:

$$\begin{aligned} \varphi &\in W_2^{2,1}(Q) \cap L^\infty(0, T; W_q^1(\Omega)), \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0, \varphi(0) = \varphi_0 \text{ e } 0 \leq \varphi \leq 1, \\ \theta &\in W_2^{2,1}(Q), \frac{\partial\theta}{\partial\nu} = 0, \theta(0) = \theta_0, \\ v &\in L^p(0, T; V^p) \cap L^\infty(0, T; H), v(0) = v_0 \text{ em } \Omega, \\ \chi &\in L^{p'}(0, T; (V^p)'), \end{aligned}$$

e são tais que

$$\begin{aligned} &\int_0^t (\varphi_t, \omega) + \alpha \int_0^t (\nabla\varphi, \nabla\omega) + \alpha_0 \int_0^t (|\nabla\varphi|^{q-2} \nabla\varphi, \nabla\omega) \\ &= \int_0^t -(\varphi, \omega) + 3(\varphi^2, \omega) - 2(\varphi^3, \omega) + \int_0^t ((\theta_t - \theta)|\nabla\varphi|, \omega), \end{aligned} \quad (4.2)$$

$t \in (0, T)$, para qualquer $\omega \in L^q(0, T; W_q^1(\Omega))$,

$$\theta_t - \beta\Delta\theta + v \cdot \nabla\theta = \frac{L}{c_p} \varphi_t \text{ q.s. em } Q, \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} &(v(t), \eta(t)) - \int_0^t (v, \eta_t) ds + \nu \int_0^t (\nabla v, \nabla\eta) + \nu_0 \int_0^t (\chi, \eta) + \int_0^t (v \cdot \nabla v, \eta) \\ &= (v_0, \eta(0)) - \int_0^t \left(\frac{\varphi^2}{1-\varphi} v, \eta \right) ds + \int_0^t (\vec{\sigma}\theta, \eta) ds, \end{aligned} \quad (4.4)$$

$t \in (0, T)$, para qualquer $\eta \in \mathcal{W}_\varphi$, onde

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_\varphi &= \{\eta \in L^p(0, T; V^p) : \eta \text{ com suporte compacto em} \\ &Q_{ml} \cup \Omega_{ml}(0) \cup \Omega_{ml}(T) \text{ e } \eta_t \in L^{p'}(0, T; (V^p)')\}, \end{aligned}$$

e $Q_{ml} = \{(x, t) \in Q : 0 \leq \varphi(x, t) < 1\}$ e $\Omega_{ml} = \{x \in \Omega : 0 \leq \varphi(x, t) < 1\}$.

Além disso, $v = 0$ quase sempre em $Q_s = \{(x, t) \in Q : \varphi(x, t) = 1\}$.

As funções $(\varphi, \theta, v, \chi)$ constituem uma solução generalizada pois com as seguintes condições adicionais de regularidade: a condição de integrabilidade $\varphi^2/(1-\varphi) \in L^s(0, T; L^{1+\delta}(\Omega_{ml}(t)))$, para $s = p/(p-2)$ e algum $\delta > 0$ quando $p = 3$ ou $\delta = 0$ quando $p > 3$, e também a condição de aproximação $v \in \overline{\mathcal{W}_\varphi}$, onde o fecho é tomado na norma natural $\|\cdot\|_{L^p(0, T; V^p)} + \|\cdot\|_{L^{p'}(0, T; (V^p)')}$, então podemos concluir que $\chi = \mathcal{A}v$ e a solução generalizada se torna uma solução fraca no sentido usual.

Cabem alguns comentários sobre o resultado descrito neste teorema:

Observação 4.1 O índice φ no espaço $\mathcal{W}_\varphi$ vem do fato que Q_{ml} , $\Omega_{ml}(0)$ e $\Omega_{ml}(T)$ são definidos a partir da função φ .

Observação 4.2 No enunciado do teorema procuramos evidenciar condições gerais que permitam a identificação $\chi = \mathcal{A}v$.

A condição de integrabilidade descrita na última parte do enunciado anterior é basicamente uma condição sobre como φ se aproxima do valor 1 na fronteira de $\Omega_{ml}(t)$.

A condição de aproximação está fortemente relacionada com o fato de que $v = 0$ q.t.p em Q_s .

De fato, se por exemplo a fronteira entre a zona sólida e a zona não sólida em cada instante t , a qual é dada pela fronteira de $\Omega_{ml}(t)$, for Lipschitz, então o traço de v nesta fronteira está bem definido e, além disso, o mesmo resultado é obtido tanto quando se considera o traço usando a restrição de $v(\cdot, t)$ a $\Omega_{ml}(t)$ ou quando se considera a restrição de $v(\cdot, t)$ a $\Omega_s(t)$ (obtem-se o mesmo traço pelos dois lados da fronteira comum, Adams [1]). Como já sabemos que $v = 0$ em Q_s , concluímos então que $v(\cdot, t) = 0$ na $\partial\Omega_{ml}(t)$ para q.t.p. $t \in [0, T]$. Isto implica que para tais instantes de tempo temos $v(\cdot, t) \in V^p(\Omega_{ml}(t))$. Como está se supondo que a fronteira é Lipschitziana, temos também que $\mathcal{V}(\Omega_{ml}(t)) = \{\phi \in (C_0^\infty(\Omega_{ml}))^n \text{ tal que } \operatorname{div}(\phi) = 0\}$ é denso em $V^p(\Omega_{ml}(t))$. Como consequência, para q.t.p. $t \in [0, T]$, $v(\cdot, t)$ é o limite de funções com o suporte compacto em $\Omega_{ml}(t)$. Portanto, é natural conjecturar que a condição

de aproximação descrita no enunciado do teorema seja satisfeita no caso em que estamos considerando; a dificuldade é a de conseguir agregar as aproximações que existem para q.t.p. $t \in [0, T]$ de tal forma a se obter as integrabilidades no tempo, bem como a diferenciabilidade, requeridas em $\mathcal{W}_\varphi$.

Por outro lado, a condição de aproximação é cumprida, por exemplo, mesmo que a fronteira entre a zona sólida e a zona não sólida em cada instante não seja Lipschitz, no caso em que Ω é estrelado com respeito a um ponto (assumido ser a origem, sem perda de generalidade) e Q_{mi} também preservar este tipo de simetria no sentido de que para todo tempo $t \in [0, T]$, temos que $\Omega_{mi}(t)$ é estrelado com respeito à origem. Neste caso, definindo $\tilde{v}$ igual a v em Ω e nulo fora dele, e como consequência de $v = 0$ q.t.p. em Q_s , temos que para $\lambda > 1$, as funções $v_\lambda(x, t) = \tilde{v}(\lambda x, t)$ satisfazem $v_\lambda \in \mathcal{W}_\varphi$ e facilmente se prova que $v_\lambda \rightarrow v$ quando $\lambda \rightarrow 1^+$ na norma descrita no enunciado do teorema. Ou seja, neste caso temos $v \in \overline{\mathcal{W}_\varphi}$.

Estes pontos levantam questões interessantes e delicadas sobre aspectos geométricos e de aproximação que certamente merecem ser analisadas.

Observação 4.3 A necessidade técnica da presença de um termo como o p -Laplaceano na equação da velocidade no caso tridimensional se justifica pelos seguintes argumentos.

Note que, no caso bidimensional analisado no capítulo anterior, em um certo ponto da argumentação foi necessário utilizar que $v \in L^4(Q)$ (e ter as correspondentes estimativas uniformemente limitadas para as velocidades do problemas aproximados). Naquele caso isto era consequência das estimativas mais baixas (estimativas de energia) obtidas para a velocidade e que são basicamente as únicas que valem uniformemente para as velocidades dos problemas aproximados.

No caso tridimensional, entretanto, para prosseguir com os argumentos similares aos do capítulo anterior, devemos ter agora a condição que $v \in L^5(Q) \cap L^8(0, T; L^4(\Omega))$ (e também ter as correspondentes estimativas uniformemente limitadas para as velocidades dos problemas aproximados).

Contudo, com o modelo envolvendo apenas o Laplaceano, tais estimativas não podem ser obtidas no caso tridimensional a partir das estimativas da energia para a velocidade. É a presença do p -Laplaceano, com $p \geq 3$, na equação da velocidade do presente modelo que

garante que a partir das estimativas mais baixas se tenha que a velocidade esteja em $L^5(Q) \cap L^8(0, T; L^4(\Omega))$ e assim permite prosseguir com os argumentos.

A presença do q -Laplaceano na equação do campo de fases também é tecnicamente necessária no caso tridimensional.

Note que no caso bidimensional usamos a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg ao obter as estimativas para os pontos fixos, veja (3.30). No caso tridimensional, contudo, as potências que aparecem em tal desigualdade são tais que ela não nos ajuda na derivação das estimativas para os pontos fixos.

O q -Laplaceano na equação do campo de fases nos permite contornar tal dificuldade e nos garante estimativas mais fortes para φ sem a necessidade de usar Gagliardo-Nirenberg, quando $q \geq 5$. Neste caso, o termo problemático na obtenção de tais estimativas poderá ser estimado como

$$\|\theta|\nabla\varphi|\varphi_t\|_{L^1(Q)} \leq \|\theta\|_{L^{10/3}(Q)}\|\nabla\varphi\|_{L^q(Q)}\|\varphi_t\|_{L^2(Q)}.$$

Observação 4.4 Há outras opções para a equação que governa o escoamento e que poderiam ser consideradas no lugar da terceira equação em (4.1).

Por exemplo, uma equação que está relacionada com uma que modela escoamentos de fluidos com densidade variável, e que pode ser encontrada em (Lions[22] pp. 208), é a seguinte:

$$v_t - (\nu + \nu_0\|v(t)\|_V^2)\Delta v + v \cdot \nabla v + \nabla P = -\frac{\varphi^2}{1-\varphi}v + \vec{\sigma}\theta.$$

A substituição da terceira equação em (4.1) por esta última forneceria um modelo bastante interessante de ser analisado e que será objeto de estudos futuros.

Como no capítulo anterior, para construirmos uma solução do problema (4.1), e assim demonstrar o teorema, primeiro introduziremos e analisaremos uma versão penalizada do problema original. Isto será feito na próxima seção.

4.2 Existência de soluções de um problema penalizado

Utilizaremos uma penalização semelhante àquela do capítulo anterior para obter problemas aproximados e continuaremos utilizando argumentos que envolvem o Teorema de ponto fixo de Leray-Schauder, a idéia é encontrar para cada $\delta > 0$ funções $(\varphi^\delta, \theta^\delta, v^\delta)$ tais que:

$$\begin{aligned}
\varphi_t^\delta - \alpha \Delta \varphi^\delta + \alpha_0 \mathcal{B}(\varphi^\delta) &= -\varphi^\delta + 3(\varphi^\delta)^2 - 2(\varphi^\delta)^3 + (\theta_e - \theta^\delta) |\nabla \varphi^\delta| \quad \text{em } Q, \\
\theta_t^\delta - \beta \Delta \theta^\delta + v^\delta \cdot \nabla \theta^\delta &= \frac{L}{c_p} \varphi_t^\delta \quad \text{em } Q, \\
v_t^\delta - \nu \Delta v^\delta + \nu_0 \mathcal{A}(v^\delta) + v^\delta \cdot \nabla v^\delta + \nabla P^\delta &= -\frac{(\varphi^\delta)^2}{1 - \varphi^\delta + \delta} v^\delta + \vec{\sigma} \theta^\delta \quad \text{em } Q, \\
\operatorname{div} v^\delta &= 0 \quad \text{em } Q, \\
v^\delta &= 0 \quad \text{em } Q_s, \\
\frac{\partial \varphi^\delta}{\partial \nu} = \frac{\partial \theta^\delta}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{na } \partial \Omega \times (0, T), \quad v^\delta = 0 \quad \text{na } \partial Q, \\
\varphi^\delta(0) &= \varphi_0, \quad \theta^\delta(0) = \theta_0, \quad \text{em } \Omega, \quad v^\delta(0) = v_0 \quad \text{em } \Omega.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Para este sistema provaremos o seguinte resultado:

Proposição 4.1 *Suponha dados $0 < T < \infty$, $p \geq 3$, $q \geq 5$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ com fronteira $\partial \Omega$ de classe C^2 . Suponha também que*

$$\begin{aligned}
\varphi_0 &\in W_q^1(\Omega), \quad \text{tal que } 0 \leq \varphi_0 \leq 1 \text{ e } \frac{\partial \varphi_0}{\partial \nu} = 0 \text{ na } \partial \Omega, \\
\theta_0 &\in W_2^1(\Omega), \\
v_0 &\in H \text{ com } v_0 = 0 \text{ em } \Omega_s(0) = \{x \in \Omega; \varphi_0(x) = 1\}.
\end{aligned}$$

Então, para cada $\delta > 0$, existem funções $(\varphi^\delta, \theta^\delta, v^\delta)$ tais que

$$\begin{aligned}
\varphi^\delta &\in W_2^{2,1}(Q) \cap L^\infty(0, T; W_q^1(\Omega)), \quad \frac{\partial \varphi^\delta}{\partial \nu} = 0, \quad \varphi^\delta(0) = \varphi_0 \text{ e } 0 \leq \varphi^\delta \leq 1, \\
\theta^\delta &\in W_2^{2,1}(Q), \quad \frac{\partial \theta^\delta}{\partial \nu} = 0, \quad \theta^\delta(0) = \theta_0, \\
v^\delta &\in L^p(0, T; V^p) \cap L^\infty(0, T; H) \cap L^{p5/3}(Q), \quad v^\delta(0) = v_0 \text{ em } \Omega,
\end{aligned}$$

satisfazendo

$$(\varphi_t^\delta, w) + \alpha(\nabla \varphi^\delta, \nabla w) + \alpha_0(|\nabla \varphi^\delta|^{q-2} \nabla \varphi^\delta, \nabla w) = -(\varphi^\delta, w) + 3((\varphi^\delta)^2, w)$$

$$-2((\varphi^\delta)^3, w) + ((\theta_e - \theta^\delta)|\nabla\varphi^\delta|, w), \forall w \in W_q^1(\Omega) \text{ em } (0, T), \quad (4.6)$$

$$\theta_t^\delta - \beta\Delta\theta^\delta + v^\delta \cdot \nabla\theta^\delta = \frac{L}{c_p}\varphi_t^\delta \text{ em } Q, \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(v^\delta, u) + \nu(\nabla v^\delta, \nabla u) + \nu_0(\mathcal{A}v^\delta, u) + (v^\delta \cdot \nabla v^\delta, u) \\ &= -\left(\frac{(\varphi^\delta)^2}{1 - \varphi^\delta + \delta}v^\delta, u\right) + (\vec{\sigma}\theta^\delta, u), \forall u \in V^p \text{ em } (0, T). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Entretando, para provar esta proposição, teremos antes que provar a existência de soluções para uma versão "discreta" de (4.6)-(4.8) usando o método de Faedo-Galerkin espectral aplicado na equação da velocidade e também na equação do campo de fases.

Para isto, consideramos a base em $L^2(\Omega)$ formada pelas autofunções $\{w_j\}_{j=1}^\infty$ do Laplaceano com condições de fronteira do tipo Neumann, isto é,

$$\begin{aligned} -\Delta w_j &= \lambda_j w_j, \quad \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial w_j}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{na } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Para cada natural m consideramos então os espaços de dimensão finita gerados pelas m primeiras autofunções, isto é,

$$W_m = \text{span}[w_1, \dots, w_m].$$

A seguir, consideramos o espaço V_s ,

$$V_s = \overline{\mathcal{V}}^{(H^s(\Omega))^3}, \quad s \geq 1,$$

munido do produto interno

$$((u, v))_s = \sum_{j=1}^3 (u_j, v_j)_{H^s(\Omega)}.$$

Escolhendo $s > 5/2$ temos que se $v \in H^s(\Omega)$ então

$$D_i v \in H^{s-1}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega), \text{ pois } \frac{1}{2} - \frac{s-1}{3} < 0,$$

em particular $D_i v \in L^p(\Omega)$, assim

$$V_s \subset V^p \subset H \subset H' \subset (V^p)' \subset V'_s.$$

Também consideramos o problema spectral

$$((u, v))_s = \mu(u, v), \quad \forall v \in V_s,$$

o qual admite uma sequência de autofunções $\{u_j\}_{j=1}^\infty$ que correspondem à sequência de autovalores μ_j .

Para cada m consideramos o espaço de dimensão finita gerados pelas m primeiras autofunções, isto é,

$$V_m = \text{span}[u_1, \dots, u_m].$$

O resultado seguinte descreve com detalhes os problemas aproximados que estaremos considerando e enuncia a existência das respectivas soluções.

Lema 4.1 *Suponha dados $0 < T < \infty$, $p \geq 3$, $q \geq 5$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2 . Suponha que*

$$\varphi_{0m} \in W_m, \varphi_{0m} \rightarrow \varphi_0 \text{ em } W_q^1(\Omega) \text{ tal que } 0 \leq \varphi_{0m} \leq 1,$$

$$\theta_0 \in W_2^1(\Omega),$$

$$v_{0m} \in V_m, v_{0m} \rightarrow v_0 \text{ em } H.$$

Então existem funções $(\varphi_m^\delta, \theta_m^\delta, v_m^\delta)$ tais que

$$\varphi_m^\delta \in W_2^{2,1}(Q) \cap L^\infty(0, T; W_q^1(\Omega)), \frac{\partial \varphi_m^\delta}{\partial \nu} = 0, \varphi_m^\delta(0) = \varphi_{0m} \text{ e } 0 \leq \varphi_m^\delta \leq 1,$$

$$\theta_m^\delta \in W_2^{2,1}(Q), \frac{\partial \theta_m^\delta}{\partial \nu} = 0, \theta_m^\delta(0) = \theta_0,$$

$$v_m^\delta \in L^p(0, T; V^p) \cap L^\infty(0, T; H) \cap L^{p5/3}(Q), v_m^\delta(0) = v_{0m} \text{ em } \Omega,$$

e elas satisfazem para $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} &(\varphi_{m,t}^\delta, w_j) + \alpha(\nabla \varphi_m^\delta, \nabla w_j) + \alpha_0(|\nabla \varphi_m^\delta|^{q-2} \nabla \varphi_m^\delta, \nabla w_j) = -(\varphi_m^\delta, w_j) \\ &+ 3((\varphi_m^\delta)^2, w_j) - 2((\varphi_m^\delta)^3, w) + ((\theta_e - \theta_m^\delta)|\nabla \varphi_m^\delta|, w_j), j = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\theta_{m,t}^\delta - \beta \Delta \theta_m^\delta + v_m^\delta \cdot \nabla \theta_m^\delta = \frac{L}{c_p} \varphi_{m,t}^\delta \text{ em } Q, \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(v_m^\delta, u_j) + \nu(\nabla v_m^\delta, \nabla u_j) + \nu_0(\mathcal{A}v_m^\delta, u_j) + (v_m^\delta \cdot \nabla v_m^\delta, u_j) \\ &= -\left(\frac{(\varphi_m^\delta)^2}{1 - \varphi_m^\delta + \delta} v_m^\delta, u_j\right) + (\vec{\sigma} \theta_m^\delta, u_j), j = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Observação 4.5 *Para entendermos a necessidade de se empregar o método de Faedo-Galerkin na equação do campo de fases, consideremos o que ocorreria se não utilizássemos tal método e deixássemos a equação do campo de fases na forma contínua. Neste caso, uma vez que θ seja conhecido, de modo análogo ao resultado que se encontra em (Lions [22] p. 208) temos a existência de uma solução $\varphi \in L^q(0, T; W_q^1(\Omega))$ para o seguinte problema:*

$$\begin{aligned}\varphi_t - \alpha \Delta \varphi + \alpha_0 \mathcal{B} \varphi &= -\varphi + 3\varphi^2 - 2\varphi^3 + (\theta_e - \theta)|\nabla \varphi|, \text{ em } Q, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} &= 0, \text{ na } \partial\Omega \times (0, T), \\ \varphi(0) &= \varphi_0 \text{ em } \Omega,\end{aligned}$$

Contudo, tal resultado não nos dá boas informações sobre φ_t . Por outro lado, este termo aparece na equação da temperatura e, pelos argumentos que teremos que usar para dar conta das não linearidades e termos boas estimativas para θ , deveríamos garantir pelo menos que $\varphi_t \in L^2(Q)$. Mas tal regularidade não está disponível da equação de φ , não podemos em prosseguir com este tipo de argumentos.

O uso do método de Faedo-Galerkin espectral para a equação do campo de fases permitirá contornar esta dificuldade porque poderemos utilizar multiplicadores adequados para obter estimativas para os campos de fase aproximados tais que $\varphi_m \in W_q^{2,1}(Q) \cap L^\infty(0, T; W_q^1(\Omega))$, o que por sua vez fornecerá boas estimativas para $\varphi_{m,t}$ e assim permitirá que resolvamos adequadamente a equação da temperatura.

Observação 4.6 *Usaremos também o método de Faedo-Galerkin na equação da velocidade, mas observamos aqui que poderíamos usar na forma contínua, pois em (Lions [22] p. 216) encontra-se um resultado de existência e unicidade para a equação da velocidade.*

Estes pontos ficarão mais claros na seguinte demonstração.

Como no capítulo anterior, para simplificar as notações denotaremos

$$F^\delta(\varphi) = \frac{\varphi^2}{1 - \varphi + \delta},$$

e também faremos uso do operador de truncamento $T_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$T_r(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0, \\ x & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Demonstração do Lema 4.1: Para simplificar a notação, omitiremos o índice δ usado em $(\varphi_m^\delta, \theta_m^\delta, v_m^\delta)$. Consideremos a seguinte família de operadores $\mathcal{T}_\lambda$, parametrizada por $0 \leq \lambda \leq 1$, definidos no espaço de Banach

$$B = L^2(Q) \times L^{10/3}(Q) \times L^2(0, T; H)$$

o qual aplica $(\widehat{\varphi}_m, \widehat{\theta}_m, \widehat{v}_m) \in B$ na solução $(\varphi_m, \theta_m, v_m)$ do seguinte problema

$$\begin{aligned} &(\varphi_{m,t}, w_j) + \alpha(\nabla \varphi_m, \nabla w_j) + \alpha_0(|\nabla \varphi_m|^{q-2} \nabla \varphi_m, \nabla w_j) = -(\varphi_m, w_j) \\ &+ 3(\varphi_m^2, w_j) - 2(\varphi_m^3, w_j) + \lambda((\theta_e - \widehat{\theta}_m)|\nabla \varphi_m|, w_j), \quad j = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\theta_{m,t} - \beta \Delta \theta_m + v_m \cdot \nabla \theta_m = \frac{L}{c_p} \varphi_{m,t} \quad \text{em } Q, \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(v_m, u_j) + \nu(\nabla v_m, \nabla u_j) + \nu_0(|\nabla v_m|^{p-2} \nabla v_m, \nabla u_j) + (v_m \cdot \nabla v_m, u_j) \\ &= -\lambda(F^\delta(T_r(\widehat{\varphi}_m))\widehat{v}_m, u_j) + \lambda(\vec{\sigma} \widehat{\theta}_m, u_j), \quad j = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial \nu} = \frac{\partial \theta_m}{\partial \nu} = 0 \quad \text{na } \partial \Omega \times (0, T), \quad (4.15)$$

$$\varphi_m(0) = \varphi_{0m}, \quad \theta_m(0) = \theta_0, \quad v_m(0) = v_{0m} \quad \text{em } \Omega, \quad (4.16)$$

e tal que para cada $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \varphi_m : [0, T] &\rightarrow W_m \\ t &\mapsto \varphi_m(t) = \sum_{j=1}^m g_{jm}(t) w_j, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_m : [0, T] &\rightarrow V_m \\ t &\mapsto v_m(t) = \sum_{j=1}^m h_{jm}(t) u_j. \end{aligned}$$

É claro que $(\varphi_m, \theta_m, v_m)$ é uma solução de (4.9)-(4.11) se, e somente se, é um ponto fixo do operador $\mathcal{T}_1$. No que segue provaremos que $\mathcal{T}_1$ possui pelo menos um ponto fixo usando o Teorema do ponto fixo de Leray-Schauder (Teorema 1.1).

Primeiro vamos verificar que $\mathcal{T}_\lambda$ está bem definido, para isto, observe que (4.12) é equivalente a um sistema de equações diferenciais ordinárias para o qual pode ser aplicado o Teorema de Existência e Unicidade pois o segundo membro é localmente Lipschitziana. Portanto existe uma única solução em $[0, t_m]$. A seguir faremos estimativas que nos permitirão estender a solução a todo intervalo $[0, T]$.

De (4.12) temos a seguinte equação aproximada

$$\begin{aligned} (\varphi'_m, w) + \alpha(\nabla \varphi_m, \nabla w) + \alpha_0(|\nabla \varphi_m|^{q-2} \nabla \varphi_m, \nabla w) &= -(\varphi_m, w) \\ + 3(\varphi_m^2, w) - 2(\varphi_m^3, w) + \lambda((\theta_e - \widehat{\theta}_m)|\nabla \varphi_m|, w), \forall w \in W_m. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Antes de fazermos as estimativas, vamos mostrar que $0 \leq \varphi_m \leq 1$, para isto, vamos escrever $\varphi_m = \varphi_m^+ - \varphi_m^-$, onde

$$\begin{aligned} \varphi_m^+ &= \max_{(x,t) \in Q} \{\varphi_m(x,t), 0\}, \\ \varphi_m^- &= \max_{(x,t) \in Q} \{-\varphi_m(x,t), 0\}. \end{aligned}$$

Então tomando $w = \varphi_m^-$ em (4.17) obtemos

$$\begin{aligned} (\varphi_{m,t}, \varphi_m^-) + \alpha(\nabla \varphi_m, \nabla \varphi_m^-) + \alpha_0(|\nabla \varphi_m|^{q-2} \nabla \varphi_m, \nabla \varphi_m^-) &= -(\varphi_m, \varphi_m^-) \\ + 3(\varphi_m^2, \varphi_m^-) - 2(\varphi_m^3, \varphi_m^-) + \lambda((\theta_e - \widehat{\theta}_m)|\nabla \varphi_m|, \varphi_m^-), \end{aligned}$$

e, então

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\varphi_m^-\|_{L^2(\Omega)}^2 - \alpha \|\nabla \varphi_m^-\|_{L^2(\Omega)}^2 - \alpha_0 \|\nabla \varphi_m^-\|_{L^q(\Omega)}^q \\ &= \|\varphi_m^-\|_{L^2(\Omega)}^2 + 3\|\varphi_m^-\|_{L^3(\Omega)}^3 + 2\|\varphi_m^-\|_{L^4(\Omega)}^4 + \lambda \int_{\Omega} (\theta_e - \widehat{\theta}_m) |\nabla \varphi_m^-| \varphi_m^-, \end{aligned}$$

multiplicando por -1 , usando desigualdade de Young, integrando em t e usando o fato que $\varphi_{0m}^- = 0$ temos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \|\varphi_m^-\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \|\nabla \varphi_m^-\|_{L^2(Q)}^2 + \alpha_0 \|\nabla \varphi_m^-\|_{L^q(Q)}^q \\ &= -\|\varphi_m^-\|_{L^2(Q)}^2 - 3\|\varphi_m^-\|_{L^3(Q)}^3 - 2\|\varphi_m^-\|_{L^4(Q)}^4 - \lambda \int_{\Omega} (\theta_e - \widehat{\theta}_m) |\nabla \varphi_m^-| \varphi_m^- \\ &\leq \|\theta_e - \widehat{\theta}_m\|_{L^{10/3}(Q)} \|\nabla \varphi_m^-\|_{L^q(Q)} \|\varphi_m^-\|_{L^2(Q)} \\ &\leq C(\epsilon) \|\theta_e - \widehat{\theta}_m\|_{L^{10/3}(Q)}^2 \|\varphi_m^-\|_{L^2(Q)}^2 + \epsilon \|\nabla \varphi_m^-\|_{L^q(Q)}^q. \end{aligned}$$

Tomando ϵ pequeno e usando o Lema de Gronwall, temos que $\varphi_m^- = 0$, assim $\varphi_m \geq 0$. Para provar que $\varphi_m \leq 1$, denotamos $\psi_m = \varphi_m - 1$ e provaremos que $\psi_m \leq 0$. Observe que ψ_m satisfaz o seguinte problema:

$$\begin{aligned} &(\psi_{m,t}, w) + \alpha(\nabla \psi_m, \nabla w) + \alpha_0(|\nabla \psi_m|^{q-2} \nabla \psi_m, \nabla w) = -(\psi_m, w) \\ &-3(\psi_m^2, w) - 2(\psi_m^3, w) + \lambda((\theta_e - \widehat{\theta}_m)|\nabla \psi_m|, w), \quad \forall w \in W_m, \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial \psi_m}{\partial \nu} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega \times (0, T), \quad (4.19)$$

$$\psi_m(0) = \varphi_{0m} - 1 = \psi_{0m} \quad \text{em } \Omega. \quad (4.20)$$

Note que $\psi_{0m}^+ = 0$, assim tomando $w = \psi_m^+$ em (4.18)

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\psi_m^+\|^2 + \alpha \|\nabla \psi_m^+\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha_0 \|\nabla \psi_m^+\|_{L^q(\Omega)}^q \\ &= -\|\psi_m^+\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\psi_m^+\|_{L^3(\Omega)}^3 - \|\psi_m^+\|_{L^4(\Omega)}^4 + \lambda \int_{\Omega} (\theta_e - \widehat{\theta}_m) |\nabla \psi_m^+| \psi_m^+ \\ &\leq \|\theta_e - \widehat{\theta}_m\|_{L^{10/3}(\Omega)} \|\nabla \psi_m^+\|_{L^q(\Omega)} \|\psi_m^+\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C(\epsilon) \|\theta_e - \widehat{\theta}_m\|_{L^{10/3}(\Omega)}^2 \|\psi_m^+\|_{L^2(\Omega)}^2 + \epsilon \|\nabla \psi_m^+\|_{L^q(\Omega)}^q. \end{aligned}$$

Novamente, tomando ϵ pequeno e usando o lema de Gronwall, temos que $\psi_m^+ = 0$, assim $\varphi_m \leq 1$. As estimativas a seguir nos permitirão dizer que podemos tomar $t_m = T$ e em qual espaço encontramos φ_m .

Estimativa 1: Tomando $w = 2\varphi_m$ em (4.17) temos

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varphi_m^2 + 2\alpha \int_{\Omega} |\nabla \varphi_m|^2 + 2\alpha_0 \int_{\Omega} |\nabla \varphi_m|^q \\ &= \int_{\Omega} -2\varphi_m^2 + 6\varphi_m^3 - 4\varphi_m^4 + \lambda \int_{\Omega} 2(\theta_e - \widehat{\theta}_m) |\nabla \varphi_m| \varphi_m \\ &\leq 6|\Omega| + \alpha \|\nabla \varphi_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\widehat{\theta}_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{|\theta_e|^2}{\alpha} \|\varphi_m\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

integrando em t e usando o lema de Gronwall obtemos

$$\begin{aligned} &\|\varphi_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|\nabla \varphi_m\|_{L^2(Q)}^2 + \|\nabla \varphi_m\|_{L^q(Q)}^q \\ &\leq C(1 + \|\varphi_{0m}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\widehat{\theta}_m\|_{L^2(Q)}^2) \leq C. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Estimativa 2: Do fato que $(w_j)_{j=1}^\infty$ é uma base de autovetores, temos que $-\Delta\varphi_m \in V_m$, então podemos tomar $w = -\Delta\varphi_m$ em (4.17), e assim obter

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla \varphi_m|^2 + \alpha \int_{\Omega} (\Delta \varphi_m)^2 + \alpha_0 \int_{\Omega} |\nabla \varphi_m|^{q-2} \nabla \varphi_m \nabla (-\Delta \varphi_m) \\ &= \int_{\Omega} \varphi_m \Delta \varphi_m - 3\varphi_m^2 \Delta \varphi_m + 2\varphi_m^3 \Delta \varphi_m - \lambda \int_{\Omega} (\theta_e - \widehat{\theta}_m) |\nabla \varphi_m| \Delta \varphi_m. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \nu}(\Delta \varphi_m) &= \frac{\partial}{\partial \nu}(\Delta(a_1 w_1 + \cdots + a_m w_m)) \\ &= \frac{\partial}{\partial \nu}(a_1 \Delta w_1 + \cdots + a_m \Delta w_m) \\ &= \frac{\partial}{\partial \nu}(-a_1 \lambda_1 w_1 - \cdots - a_m \lambda_m w_m) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, usando integração por partes temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla \varphi_m|^{q-2} \nabla \varphi_m \nabla (-\Delta \varphi_m) &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(|\nabla \varphi_m|^{q-2} \nabla \varphi_m) \Delta \varphi_m \\ &= (q-1) \int_{\Omega} |\nabla \varphi_m|^{q-2} (\Delta \varphi_m)^2. \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla \varphi_m|^2 + \alpha \int_{\Omega} (\Delta \varphi_m)^2 + \alpha_0 (q-1) \int_{\Omega} |\nabla \varphi_m|^{q-2} (\Delta \varphi_m)^2 \\ &\leq \int_{\Omega} \varphi_m^2 + 9\varphi_m^2 + 4\varphi_m^6 + \|\theta_e - \widehat{\theta}_m\|_{L^{10/3}(\Omega)} \|\nabla \varphi_m\|_{L^q(\Omega)} \|\Delta \varphi_m\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C + C(\epsilon) \|\theta_e - \widehat{\theta}_m\|_{L^{10/3}(\Omega)}^{10/3} + \|\nabla \varphi_m\|_{L^q(\Omega)}^q + \epsilon \|\Delta \varphi_m\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

integrando em t , usando (4.21) e o lema de Gronwall obtemos

$$\begin{aligned} & \|\nabla \varphi_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|\Delta \varphi_m\|_{L^2(Q)}^2 \\ &\leq C(1 + \|\varphi_{0m}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \varphi_{0m}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\widehat{\theta}_m\|_{L^2(Q)}^2 + \|\widehat{\theta}_m\|_{L^{10/3}(Q)}^{10/3}) \\ &\leq C. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Estimativa 3: Note que

$$\varphi_{m,t} = \sum_{j=1}^m g'_{jm}(t)w_j \in V_m,$$

logo, podemos tomar $w = \varphi_{m,t}$ em (4.17), então

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\varphi_{m,t})^2 + \frac{\alpha}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla \varphi_m|^2 + \alpha_0 \int_{\Omega} |\nabla \varphi_m|^{q-2} \nabla \varphi_m \nabla \varphi_{m,t} \\ &= \int_{\Omega} -\varphi_m \varphi_{m,t} + 3\varphi_m^2 \varphi_{m,t} - 2\varphi_m^3 \varphi_{m,t} + \lambda \int_{\Omega} (\theta_e - \widehat{\theta}_m) |\nabla \varphi_m| \varphi_{m,t}, \end{aligned}$$

mas

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla \varphi_m|^q &= \int_{\Omega} \frac{d}{dt} (|\nabla \varphi_m|^2)^{q/2} \\ &= \frac{q}{2} \int_{\Omega} (|\nabla \varphi_m|^2)^{\frac{q}{2}-1} 2 \nabla \varphi_m \nabla \varphi_{m,t} \\ &= q \int_{\Omega} |\nabla \varphi_m|^{q-2} \nabla \varphi_m \nabla \varphi_{m,t}. \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \varphi_{m,t}^2 + \frac{\alpha}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla \varphi_m|^2 + \frac{\alpha_0}{q} |\nabla \varphi_m|^q \\ & \leq C + C(\epsilon) \|\widehat{\theta}_m\|_{L^{10/3}(\Omega)}^{10/3} + \|\nabla \varphi_m\|_{L^q(\Omega)}^q + \epsilon \|\varphi_{m,t}\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

tomando ϵ pequeno, integrando em t e usando (4.21) obtemos

$$\begin{aligned} & \|\varphi_{m,t}\|_{L^2(Q)}^2 + \|\nabla \varphi_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|\nabla \varphi_m\|_{L^\infty(0,T;L^q(\Omega))}^q \\ & \leq C(1 + \|\nabla \varphi_{0m}\|_{L^2(Q)}^2 + \|\nabla \varphi_{0m}\|_{L^q(Q)}^q + \|\widehat{\theta}_m\|_{L^{10/3}(Q)}^{10/3}) \\ & \leq C. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Portanto existe $\varphi_m \in W_2^{2,1}(Q) \cap L^\infty(0,T;W_q^1(\Omega))$, $0 \leq \varphi_m \leq 1$ solução de (4.12), além disso

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_m}{\partial \nu} &= \frac{\partial}{\partial \nu} \sum_{j=1}^m g_{jm} w_j \\ &= \sum_{j=1}^m g_{jm} \frac{\partial}{\partial \nu} w_j \\ &= 0. \end{aligned}$$

Agora, observe que (4.14) também é equivalente a um sistema de equações diferenciais ordinárias, portanto existe uma única solução em $[0, t_m]$. A seguir faremos estimativas que nos permitirão estender a solução a todo intervalo $[0, T]$.

Primeiramente multiplicamos (4.14) por $h_{jm}(t)$, somando em $j = 1, \dots, m$, usando a desigualdade de Hölder e o fato de que $(v_m \cdot \nabla v_m, v_m) = 0$ temos

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |v_m|^2 + \nu \int_{\Omega} |\nabla v_m|^2 + \nu_0 \int_{\Omega} |\nabla v_m|^p \leq C \int_{\Omega} |\widehat{v}_m|^2 + \int_{\Omega} (\widehat{\theta}_m)^2 + \int_{\Omega} |v_m|^2,$$

então, integrando em t e usando o lema de Gronwall, chegamos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} \|v_m\|_{L^\infty(0,T;H)}^2 + \|\nabla v_m\|_{L^p(Q)}^p &\leq C \left(\|v_{0m}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\widehat{v}_m\|_{L^2(Q)}^2 + \|\widehat{\theta}_m\|_{L^2(Q)}^2 \right) \\ &\leq C. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Usando agora o teorema de interpolação (Teorema 1.5) obtemos

$$\|v_m\|_{L^{p5/3}(Q)} \leq C.$$

Portanto, existe $v_m \in L^\infty(0, T; H) \cap L^p(0, T; V^p) \cap L^{p5/3}(Q)$ de (4.14). Desde que $\varphi_{m,t} \in L^2(Q)$, $v_m \in L^{p5/3}(Q)$ e do fato que $p \geq 3$ temos da teoria L^p -parabólica (Teorema 1.3) que existe $\theta_m \in W_2^{2,1}(Q)$, solução de (4.13) e deste mesmo teorema

$$\|\theta_m\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C_1(\|v_m\|_{L^{p5/3}(Q)})(\|\theta_0\|_{W_2^1(\Omega)} + \|\varphi_{m,t}\|_{L^2(Q)}). \quad (4.25)$$

Segue que $\mathcal{T}_\lambda$ está bem definido.

Agora provaremos a continuidade de $\mathcal{T}_\lambda$, para isto suponha que $(\widehat{\varphi}_m^k, \widehat{\theta}_m^k, \widehat{v}_m^k)$ convirja para $(\widehat{\varphi}_m, \widehat{\theta}_m, \widehat{v}_m)$ em B . Seja $(\theta_m^k, v_m^k, \varphi_m^k) = \mathcal{T}_\lambda(\widehat{\varphi}_m^k, \widehat{\theta}_m^k, \widehat{v}_m^k)$, ou seja, solução do problema

$$\begin{aligned} (\varphi_{m,t}^k, w) + \alpha(\nabla \varphi_m^k, \nabla w) + \alpha_0(\mathcal{B}(\varphi_m^k), w) &= -(\varphi_m^k, w) \\ + 3((\varphi_m^k)^2, w) - 2((\varphi_m^k)^3, w) + \lambda((\theta_e - \widehat{\theta}_m^k)|\nabla \varphi_m^k|, w), \forall w \in W_m, \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\theta_{m,t}^k - \beta \Delta \theta_m^k + v_m^k \cdot \nabla \theta_m^k = \frac{L}{c_p} \varphi_{m,t}^k \text{ em } Q, \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(v_m^k, u) + \nu(\nabla v_m^k, \nabla u) + \nu_0(\mathcal{A}(v_m^k), u) + (v_m^k \cdot \nabla v_m^k, u) \\ = -\lambda(F^\delta(T_r(\widehat{\varphi}_m^k))\widehat{v}_m^k, u) + \lambda(\widehat{\sigma}\widehat{\theta}_m^k, u), \forall u \in V_m \text{ em } (0, T), \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial \varphi_m^k}{\partial \nu} = \frac{\partial \theta_m^k}{\partial \nu} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega \times (0, T), \quad (4.29)$$

$$\varphi_m^k(0) = \varphi_{0m}, \quad \theta_m^k(0) = \theta_0, \quad v_m^k(0) = v_{0m} \quad \text{em } \Omega. \quad (4.30)$$

Vamos mostrar que a sequência $(\varphi_m^k, \theta_m^k, v_m^k)$ converge fortemente em B para $(\varphi_m, \theta_m, v_m) = \mathcal{T}_\lambda(\widehat{\varphi}_m, \widehat{\theta}_m, \widehat{v}_m)$, para isto, vamos obter estimativas para a sequência $(\varphi_m^k, \theta_m^k, v_m^k)$ independente de k .

Note que de (4.24) temos

$$\begin{aligned} \|v_m^k\|_{L^\infty(0,T;H)}^2 + \|\nabla v_m^k\|_{L^p(Q)}^p &\leq C \left(\|v_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\widehat{v}_m^k\|_{L^2(Q)}^2 + \|\widehat{\theta}_m^k\|_{L^2(Q)}^2 \right) \\ &\leq C. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Seja agora P_m o projetor de H em V_m . Note que P_m é um projetor V_s -ortogonal em V_m e assim $\|P_m\|_{\mathcal{L}(V_s, V_s)} \leq 1$. Observe também que o operador $\mathcal{A}$ satisfaz $\|\mathcal{A}(v)\|_{(V^p)'} \leq C\|v\|_{V^p}^{p-1}$, então da equação (4.28), obtemos

$$\|v_{m,t}^k\|_{(V_s)'} \leq C \left(\|v_m^k\|_V + \|v_m^k\|_{V^p}^{p-1} + \|v_m^k\|_{L^{2p'}(\Omega)}^2 + \|\widehat{v}_m^k\|_{L^{p'}(\Omega)} + \|\widehat{\theta}_m^k\|_{L^{p'}(\Omega)} \right),$$

agora, usando (4.31) e desde que $2p' \leq p \frac{5}{3}$, temos

$$\|v_{m,t}^k\|_{L^{p'}(0,T;(V_s)')} \leq C. \quad (4.32)$$

De (4.21)-(4.23) e que $\widehat{\theta}_m^k$ é limitada em $L^{10/3}(Q)$, deduzimos

$$\|\varphi_m^k\|_{W_2^{2,1}(Q) \cap L^\infty(0,T;W_q^1(\Omega))} \leq C. \quad (4.33)$$

De (4.25), (4.31) e (4.33) temos

$$\|\theta_m^k\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C. \quad (4.34)$$

Assim, de (4.31)-(4.34), concluímos que a sequência (φ_m^k) é limitada em $W_2^{2,1}(Q) \cap L^\infty(0,T;W_q^1(\Omega))$, (θ_m^k) limitada em $W_2^{2,1}(Q)$ e a sequência (v_m^k) limitada em $W = \{w \in L^p(0,T;V^p); w_t \in L^{p'}(0,T;(V_s)')\}$.

Do fato que $W_2^{2,1}(Q)$ está imerso compactamente em $L^p(Q)$, $1 \leq p < 10$, W imerso compactamente em $L^2(Q) \cap C([0,T];(V^p)'),$ segue que existem funções $(\widetilde{\varphi}_m, \widetilde{\theta}_m, \widetilde{v}_m)$ e uma subsequência de $(\varphi_m^k, \theta_m^k, v_m^k)$ (a qual ainda denotaremos por $(\varphi_m^k, \theta_m^k, v_m^k)$), tal que, quando

$k \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned}
\varphi_m^k &\rightarrow \tilde{\varphi}_m && \text{em } L^p(Q), p \in [1, 10), \text{ e em } L^2(0, T; W_2^1(\Omega)) \\
\varphi_m^k &\rightharpoonup \tilde{\varphi}_m && \text{em } W_2^{2,1}(Q) \cap L^\infty(0, T; W_q^1(\Omega)), \\
\mathcal{B}(\varphi_m^k) &\rightharpoonup \xi && \text{em } L^{q'}(0, T; (W_q^1(\Omega))'). \\
\theta_m^k &\rightarrow \tilde{\theta}_m && \text{em } L^p(Q), p \in [2, 10), \\
\theta_m^k &\rightharpoonup \tilde{\theta}_m && \text{em } W_2^{2,1}(Q), \\
v_m^k &\rightarrow \tilde{v}_m && \text{em } L^2(Q) \cap C([0, T]; V'), \\
v_m^k &\rightharpoonup \tilde{v}_m && \text{em } L^p(0, T; V^p), \\
\mathcal{A}(v_m^k) &\rightharpoonup \chi && \text{em } L^{p'}(0, T; (V^p)').
\end{aligned}$$

Passando o limite em (4.26) vemos que $\tilde{\varphi}_m$ satisfaz

$$\begin{aligned}
&(\tilde{\varphi}_{m,t}, w) + \alpha(\nabla \tilde{\varphi}_m, \nabla w) + \alpha_0(\xi, w) = -(\tilde{\varphi}_m, w) \\
&+ 3((\tilde{\varphi}_m)^2, w) - 2((\tilde{\varphi}_m)^3, w) + \lambda((\theta_e - \hat{\theta}_m)|\nabla \tilde{\varphi}_m|, w), \forall w \in W_m.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Vamos mostrar que $\xi = \mathcal{B}(\tilde{\varphi}_m)$. Seja $\psi \in L^q(0, T; W_q^1(\Omega))$, definimos

$$X_k^s = \alpha_0 \int_0^s (\mathcal{B}(\varphi_m^k) - \mathcal{B}(\psi), \varphi_m^k - \psi) + \frac{1}{2} \|\varphi_m^k(s)\|_{L^2(\Omega)}^2. \tag{4.36}$$

A menos de tomarmos uma subsequência, podemos supor

$$\varphi_m^k(s) \rightharpoonup \tilde{\varphi}_m(s) \quad \text{em } L^2(\Omega).$$

Utilizando a monotonicidade do operador $\mathcal{B}$, deduzimos de (4.36) que

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} X_k^s \geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \|\varphi_m^k(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \frac{1}{2} \|\tilde{\varphi}_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2. \tag{4.37}$$

Do fato que φ_m^k satisfaz (4.26) temos

$$\begin{aligned}
X_k^s &= \alpha_0 \int_0^s (\mathcal{B}(\varphi_m^k), \varphi_m^k) - \alpha_0 \int_0^s (\mathcal{B}(\varphi_m^k), \psi) - \alpha_0 \int_0^s (\mathcal{B}(\psi), \varphi_m^k - \psi) \\
&= \int_0^s -(\varphi_m^k)^2 + 3(\varphi_m^k)^3 - 2(\varphi_m^k)^4 + \lambda \int_0^s ((\theta_e - \hat{\theta}_m^k)|\nabla \varphi_m^k|, \varphi_m^k) \\
&\quad - \frac{1}{2} \|\varphi_m^k(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\varphi_{0m}\|_{L^2(\Omega)}^2 - \alpha \int_0^s \|\nabla \varphi_m^k\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\quad - \alpha_0 \int_0^s (\mathcal{B}(\varphi_m^k), \psi) - \alpha_0 \int_0^s (\mathcal{B}(\psi), \varphi_m^k - \psi).
\end{aligned}$$

Passando o limite quando $k \rightarrow \infty$ concluímos que $X_k^s \rightarrow X^s$, onde

$$\begin{aligned} X^s &= \int_0^s -(\tilde{\varphi}_m)^2 + 3(\tilde{\varphi}_m)^3 - 2(\tilde{\varphi}_m)^4 + \lambda \int_0^s ((\theta_e - \hat{\theta}_m)|\nabla \tilde{\varphi}_m|, \tilde{\varphi}_m) \\ &\quad - \frac{1}{2} \|\tilde{\varphi}_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\varphi_{0m}\|_{L^2(\Omega)}^2 - \alpha \int_0^s \|\nabla \tilde{\varphi}_m\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad - \alpha_0 \int_0^s (\xi, \psi) - \alpha_0 \int_0^s (\mathcal{B}(\psi), \tilde{\varphi}_m - \psi). \end{aligned}$$

usando (4.37) temos

$$X^s \geq \frac{1}{2} \|\tilde{\varphi}_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

e, somando com (4.35), chegamos à seguinte desigualdade

$$\alpha_0 \int_0^s (\xi - \mathcal{B}(\psi), \tilde{\varphi}_m - \psi) dt \geq \frac{1}{2} \|\tilde{\varphi}_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq 0,$$

portanto, $\xi = \mathcal{B}(\tilde{\varphi}_m)$.

O limite em (4.27) segue do fato que $\nabla \theta_m^k, v_m^k$ convergem, respectivamente, para $\nabla \tilde{\theta}_m, \tilde{v}_m$ fortemente em $L^2(Q)$, e então $v_m^k \cdot \nabla \theta_m^k$ converge para $\tilde{v}_m \cdot \nabla \tilde{\theta}_m$ fortemente em $L^1(Q)$.

Das estimativas obtidas para v_m^k e do fato que $-\lambda F^\delta(T_r(\hat{\varphi}_m^k))\hat{v}_m^k + \lambda \vec{\sigma} \hat{\theta}_m^k$ converge fortemente para $-\lambda F^\delta(T_r(\hat{\varphi}_m))\hat{v}_m + \lambda \vec{\sigma} \hat{\theta}_m$ em $L^2(Q)$, podemos passar o limite em (4.28) e ver que $\tilde{v}_m$ satisfaz

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(\tilde{v}_m, u) + \nu(\nabla \tilde{v}_m, \nabla u) + \nu_0(\chi, u) + (\tilde{v}_m \cdot \nabla \tilde{v}_m, u) \\ &= -\lambda(F^\delta(T_r(\hat{\varphi}_m))\hat{v}_m, u) + \lambda(\vec{\sigma} \hat{\theta}_m, u) \forall u \in V_m, \quad t \in (0, T). \end{aligned}$$

De modo análogo à (4.36) se mostra que $\chi = \mathcal{A}(\tilde{v}_m)$ definindo

$$X_k^s = \nu_0 \int_0^s (\mathcal{A}(v_m^k) - \mathcal{A}(\psi), v_m^k - \psi) + \frac{1}{2} \|v_m^k(s)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Estas convergências implicam imediatamente que o limite $(\tilde{\varphi}_m, \tilde{\theta}_m, \tilde{v}_m)$ é uma solução de (4.12)-(4.16). Pela unicidade de solução de (4.12)-(4.16), segue que $(\tilde{\varphi}_m, \tilde{\theta}_m, \tilde{v}_m) = (\varphi_m, \theta_m, v_m)$, isto vale para qualquer subsequência de $(\varphi_m^k, \theta_m^k, v_m^k)$, portanto a sequência original $(\varphi_m^k, \theta_m^k, v_m^k)$ converge para $(\varphi_m, \theta_m, v_m)$ o que mostra que $\mathcal{T}_\lambda$ é contínuo.

Observe que $\mathcal{T}_\lambda$ é limitado em $W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q) \times \{v \in L^p(0, T, V^p); v_t \in L^{p'}(0, T; (V^p)')\}$ e a imersão desse espaço em B é compacta, então concluímos que $\mathcal{T}_\lambda$ é compacto.

Para provar que para $(\widehat{\varphi}_m, \widehat{\theta}_m, \widehat{v}_m)$ em um conjunto limitado de B , $\mathcal{T}_\lambda$ é uniformemente contínuo em λ , seja $0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 1$ e $(\varphi_m^{(i)}, \theta_m^{(i)}, v_m^{(i)})$ as correspondentes soluções de (4.12)-(4.16). Pode-se provar facilmente que para $\varphi_m = \varphi_m^{(1)} - \varphi_m^{(2)}$, $\theta_m = \theta_m^{(1)} - \theta_m^{(2)}$ e $v_m = v_m^{(1)} - v_m^{(2)}$ satisfaz

$$(\varphi_{m,t}, w) + \alpha(\nabla \varphi_m, \nabla w) + \alpha_0(\mathcal{B}(\varphi_m^{(1)}) - \mathcal{B}(\varphi_m^{(2)}), w) = (D\varphi_m, w) + ((\theta_e - \widehat{\theta}_m)(\lambda_1|\nabla \varphi_m^{(1)}| - \lambda_2|\nabla \varphi_m^{(2)}|), w), \quad \forall w \in W_m, \quad (4.38)$$

$$\theta_{m,t} - \beta \Delta \theta_m + v_m^{(1)} \cdot \nabla \theta_m + v_m \cdot \nabla \theta_m^{(2)} = \frac{L}{c_p} \varphi_{m,t} \quad \text{em } Q, \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(v_m, u) + \nu(\nabla v_m, \nabla u) + \nu_0(\mathcal{A}(v_m^{(1)}) - \mathcal{A}(v_m^{(2)}), u) + (v_m^{(1)} \cdot \nabla v_m^{(1)}, u) \\ - (v_m^{(2)} \cdot \nabla v_m^{(2)}, u) = -(\lambda_1 - \lambda_2) \left((F^\delta(T_r(\widehat{\varphi}_m))\widehat{v}_m, u) + (\vec{\sigma}\widehat{\theta}_m, u) \right) \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial \nu} = \frac{\partial \theta_m}{\partial \nu} = 0 \quad \text{na } \partial \Omega \times (0, T), \quad (4.41)$$

$$\varphi_m(0) = 0, \quad \theta_m(0) = 0, \quad v_m(0) = 0 \quad \text{em } \Omega. \quad (4.42)$$

onde $D = -1 + 3(\varphi_m^{(1)} + \varphi_m^{(2)}) - 2((\varphi_m^{(1)})^2 + \varphi_m^{(1)}\varphi_m^{(2)} + (\varphi_m^{(2)})^2)$ e do lema 2.3 tem-se $0 \leq \varphi_m^{(1)}, \varphi_m^{(2)} \leq 1$ e assim $D \leq 6$. Primeiro tomamos $u = v_m$ em (4.40) e teremos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |v_m|^2 + \nu \int_{\Omega} |\nabla v_m|^2 + \nu_0 \int_{\Omega} (\mathcal{A}(v_m^{(1)}) - \mathcal{A}(v_m^{(2)}), v_m) + \int_{\Omega} v_m \cdot \nabla v_m v_m^{(1)} \\ = -(\lambda_1 - \lambda_2) \int_{\Omega} F^\delta(T_r(\widehat{\varphi}_m))\widehat{v}_m v_m + (\lambda_1 - \lambda_2) \int_{\Omega} \vec{\sigma}\widehat{\theta}_m v_m \\ \leq \|v_m\|_{L^4(\Omega)} \|\nabla v_m\|_{L^2(\Omega)} \|v_m^{(1)}\|_{L^4(\Omega)} \\ + |\lambda_1 - \lambda_2|^2 \|\widehat{v}_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + |\lambda_1 - \lambda_2|^2 \|\widehat{\theta}_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v_m\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \leq C \|v_m\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{4}} \|\nabla v_m\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{7}{4}} \|v_m^{(1)}\|_{L^4(\Omega)} \\ + |\lambda_1 - \lambda_2|^2 \left(\|\widehat{v}_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\widehat{\theta}_m\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \|v_m\|_{L^2(\Omega)}^2, \\ \leq C \|v_m\|_{L^2(\Omega)}^2 \|v_m^{(1)}\|_{L^4(\Omega)}^8 + \frac{\nu}{2} \|\nabla v_m\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ + |\lambda_1 - \lambda_2|^2 \left(\|\widehat{v}_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\widehat{\theta}_m\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \|v_m\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

usando o fato que o operador $\mathcal{A}$ é monótono, após integrar em t obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |v_m|^2 + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla v_m|^2 \leq |\lambda_1 - \lambda_2|^2 \left(\|\widehat{v}_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\widehat{\theta}_m\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ + C \int_0^t \left(1 + \|v_m^{(1)}\|_{L^4(\Omega)}^8 \right) \int_{\Omega} |v_m|^2, \end{aligned}$$

de (4.31) temos que $v_m^{(1)} \in L^8(0, T; L^4(\Omega))$ e limitada nesse mesmo espaço, portanto podemos aplicar o Lema de Gronwall para obter

$$\|v_m\|_{L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)} \leq C|\lambda_1 - \lambda_2| \left(\|\widehat{v}_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\widehat{\theta}_m\|_{L^2(\Omega)}^2 \right), \quad (4.43)$$

onde C é independente de λ .

Agora, tomando $w = \varphi_m$ em (4.38) temos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varphi_m^2 + \alpha \int_{\Omega} |\nabla \varphi_m|^2 + \alpha_0 \int_{\Omega} (\mathcal{B}(\varphi_m^{(1)}) - \mathcal{B}(\varphi_m^{(2)}), \varphi_m^{(1)} - \varphi_m^{(2)}) \\ &= \int_{\Omega} D\varphi_m^2 + \int_{\Omega} (\theta_e - \widehat{\theta}_m)(\lambda_1 |\nabla \varphi_m^{(1)}| - \lambda_2 |\nabla \varphi_m^{(2)}|) \varphi_m, \end{aligned}$$

somando e subtraindo $\int_{\Omega} (\theta_e - \widehat{\theta}_m) \lambda_2 |\nabla \varphi_m^{(1)}| \varphi_m$ e usando a monotonicidade do operador $\mathcal{B}$ obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varphi_m^2 + \alpha \int_{\Omega} |\nabla \varphi_m|^2 \\ & \leq 6 \int_{\Omega} \varphi_m^2 + \int_{\Omega} (\theta_e - \widehat{\theta}_m) ((\lambda_1 - \lambda_2) |\nabla \varphi_m^{(1)}| + \lambda_2 (|\nabla \varphi_m^{(1)}| - |\nabla \varphi_m^{(2)}|)) \varphi_m \\ & \leq 6 \int_{\Omega} \varphi_m^2 + |\lambda_1 - \lambda_2| \|\theta_e - \widehat{\theta}_m\|_{L^{10/3}(\Omega)} \|\nabla \varphi_m^{(1)}\|_{L^q(\Omega)} \|\varphi_m\|_{L^2(\Omega)} \\ & \quad + \lambda_2 \|\nabla \varphi_m\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi_m\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

usando a desigualdade de Schwarz e integrando em t chegamos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi_m^2 + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla \varphi_m|^2 & \leq C|\lambda_1 - \lambda_2|^2 \|\theta_e - \widehat{\theta}_m\|_{L^{10/3}(\Omega)}^2 \\ & \quad + C \int_{\Omega} (1 + \|\nabla \varphi_m^{(1)}\|_{L^q(\Omega)}^2) \int_{\Omega} \varphi_m^2. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Por último, multiplicamos (4.39) por $\theta_m - \frac{L}{c_p} \varphi_m$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\theta_m - \frac{L}{c_p} \varphi_m)^2 + \beta \int_{\Omega} |\nabla \theta_m|^2 - \int_{\Omega} \frac{L\beta}{c_p} \nabla \theta_m \cdot \nabla \varphi_m \\ &= \frac{L}{c_p} \int_{\Omega} v_m^{(1)} \cdot \nabla \theta_m \varphi_m - \int_{\Omega} v_m \cdot \nabla \theta_m^{(2)} \theta_m + \frac{L}{c_p} \int_{\Omega} v_m \cdot \nabla \theta_m^{(2)} \varphi_m \\ & \leq \|v_m^{(1)}\|_{L^4(\Omega)} \|\nabla \theta_m\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi_m\|_{L^4(\Omega)} + \|v_m\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \theta_m^{(2)}\|_{L^2(\Omega)} \|\theta_m\|_{L^\infty(\Omega)} \\ & \quad + \|v_m\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \theta_m^{(2)}\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

após integrar em t chegamos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\theta_m - \frac{L}{c_p} \varphi_m)^2 + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla \theta_m|^2 \\
& \leq C \|v_m^{(1)}\|_{L^4(Q)}^2 \|\varphi_m\|_{L^4(Q)}^2 + C \|v_m\|_{L^2(Q)} \|\nabla \theta_m^{(2)}\|_{L^2(Q)} \\
& + C \|v_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \|\nabla \theta_m^{(2)}\|_{L^2(Q)} \|\theta_m\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))}, \tag{4.45}
\end{aligned}$$

agora multiplicamos (4.44) por A suficientemente grande e somando com (4.45) obtemos

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\varphi_m)^2 + (\theta_m)^2 + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla \varphi_m|^2 + |\nabla \theta_m|^2 \leq C |\lambda_1 - \lambda_2|^2 \|\theta_e - \hat{\theta}_m\|_{L^3(Q)}^2 \\
& + C \|v_m\|_{L^2(Q)} \|\nabla \theta_m^{(2)}\|_{L^2(Q)} + C \|v_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \|\nabla \theta_m^{(2)}\|_{L^2(Q)} \|\theta_m\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))} \\
& + C \int_0^t (1 + \|\nabla \varphi_m^{(1)}\|_{L^q(\Omega)}^2 + \|v_m^{(1)}\|_{L^4(\Omega)}^2) \int_{\Omega} (\varphi_m)^2,
\end{aligned}$$

mas observe que $\varphi_m^{(1)}$ satisfaz (4.33), $\theta_m^{(2)}$ satisfaz (4.34), $v_m^{(1)}$ satisfaz (4.31), além disso

$$\begin{aligned}
\|\theta_m\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))} & \leq \|\theta_m^{(1)}\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))} + \|\theta_m^{(2)}\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))} \\
& \leq \|\theta_m^{(1)}\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|\theta_m^{(2)}\|_{W_2^{2,1}(Q)} \\
& \leq C,
\end{aligned}$$

então, usando o lema de Gronwall junto com (4.43) teremos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
& \|\varphi_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|\nabla \varphi_m\|_{L^2(Q)} + \|\theta_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|\nabla \theta_m\|_{L^2(Q)} \\
& \leq C |\lambda_1 - \lambda_2|,
\end{aligned}$$

isto mostra que o operador $\mathcal{T}_\lambda$ é uniformemente contínuo com respeito a λ .

Para $\lambda = 0$, é claro que o problema (4.12)-(4.16) possui uma única solução. Resta nos estimar o conjunto dos pontos fixos de $\mathcal{T}_\lambda$. Seja $(\varphi_m, \theta_m, v_m) \in B$ um possível ponto fixo, i.e., solução do seguinte problema

$$\begin{aligned}
& (\varphi_{m,t}, w) + \alpha(\nabla \varphi_m, \nabla w) + \alpha_0(|\nabla \varphi_m|^{q-2} \nabla \varphi_m, \nabla w) = -(\varphi_m, w) \\
& + 3(\varphi_m^2, w) - 2(\varphi_m^3, w) + \lambda((\theta_e - \theta_m)|\nabla \varphi_m|, w), \forall w \in W_m, \tag{4.46}
\end{aligned}$$

$$\theta_{m,t} - \beta \Delta \theta_m + v_m \cdot \nabla \theta_m = \frac{L}{c_p} \varphi_{m,t} \quad \text{em } Q, \tag{4.47}$$

$$\frac{d}{dt} (v_m, u) + \nu(\nabla v_m, \nabla u) + \nu_0(\mathcal{A}(v_m), u) + (v_m \cdot \nabla v_m, u)$$

$$= -\lambda(F^\delta(T_r(\varphi_m))v_m, u) + \lambda(\vec{\sigma}\theta_m, u) \quad \forall u \in V_m \text{ em } (0, T), \quad (4.48)$$

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial \nu} = \theta_m = 0 \quad \text{na} \quad \partial\Omega \times (0, T), \quad (4.49)$$

$$\varphi_m(0) = \varphi_{0m}, \quad \theta_m(0) = \theta_0, \quad v_m(0) = v_{0m} \quad \text{em} \quad \Omega. \quad (4.50)$$

Observe que se tomarmos $u = v_m$ em (4.48) teremos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (v_m)^2 + \nu \int_{\Omega} |\nabla v_m|^2 + \nu_0 \int_{\Omega} |\nabla v_m|^p \\ &= -\lambda \int_{\Omega} F^\delta(T_r(\varphi_m))(v_m)^2 + \lambda \int_{\Omega} \vec{\sigma}\theta_m v_m \\ &\leq C \int_{\Omega} (\theta_m)^2 + \int_{\Omega} (v_m)^2. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Agora, tomando $w = \varphi_m$ em (4.46) e usando o fato que $0 \leq \varphi_m \leq 1$ temos

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\varphi_m)^2 + \int_{\Omega} |\nabla \varphi_m|^2 + \int_{\Omega} |\nabla \varphi_m|^q \leq C + \int_{\Omega} (\theta_m)^2. \quad (4.52)$$

Por último, multiplicamos (4.47) por $\theta_m - \frac{L}{c_p}\varphi_m$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\theta_m - \frac{L}{c_p}\varphi_m)^2 + \beta \int_{\Omega} |\nabla \theta_m|^2 - \frac{L\beta}{c_p} \nabla \theta_m \nabla \varphi_m \\ &= - \int_{\Omega} v_m \cdot \nabla \theta_m \varphi_m \leq \int_{\Omega} |v_m|^2 + \int_{\Omega} |\nabla \theta_m|^2. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Multiplicando (4.52) por $A \in \mathbb{R}$ suficientemente grande, somando com (4.51) e (4.53), após integrar em t e usar o Lema de gronwall obtemos

$$\begin{aligned} & \|\varphi_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|\nabla \varphi_m\|_{L^2(Q)}^2 + \|\nabla \varphi_m\|_{L^q(Q)}^q + \|\theta_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \\ & \|\nabla \theta_m\|_{L^2(Q)}^2 + \|v_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|\nabla v_m\|_{L^2(Q)}^2 + \|\nabla v_m\|_{L^p(Q)}^p \leq C. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Concluimos que o conjunto dos pontos fixos de $\mathcal{T}_\lambda$ é limitado em B independente de λ . Podemos então aplicar o Teorema de ponto fixo de Leray-Schauder, assim existe pelo menos um ponto fixo $(\varphi_m, \theta_m, v_m) \in B$ de $\mathcal{T}_1$, além disso, $v_m \in L^p(0, T; V^p) \cap L^\infty(0, T; H)$, $\varphi_m \in W_2^{2,1}(Q) \cap L^\infty(0, T; W_q^1(\Omega))$, e $\theta_m \in W_2^{2,1}(Q)$. ■

Lema 4.2 *Existe uma constante C independente de m tal que*

$$\|v_m^\delta\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^p(0,T;V^p)} \leq C, \quad (4.55)$$

$$\|v_{m,t}^\delta\|_{L^{p'}(0,T;V'_s)} \leq C, \quad (4.56)$$

$$\|\varphi_m^\delta\|_{W_2^{2,1}(Q) \cap L^\infty(0,T;W_q^1(\Omega))} \leq C, \quad (4.57)$$

$$\|\theta_m^\delta\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C, \quad (4.58)$$

Demonstração: Fazendo $w = \varphi_m^\delta$ em (4.9), multiplicando (4.10) por $\theta_m^\delta - \frac{L}{c_p}\varphi_m^\delta$, tomando $u = v_m^\delta$ em (4.11) e usando o fato que $0 \leq \varphi_m^\delta \leq 1$ obtemos as seguintes estimativas

$$\int_\Omega (\varphi_m^\delta)^2 + \alpha \int_0^t \int_\Omega |\nabla \varphi_m^\delta|^2 + \alpha_0 \int_0^t \int_\Omega |\nabla \varphi_m^\delta|^q \leq C + \int_0^t \int_\Omega (\theta_m^\delta)^2. \quad (4.59)$$

$$\int_\Omega (\theta_m^\delta - \frac{L}{c_p}\varphi_m^\delta)^2 + \beta \int_0^t \int_\Omega |\nabla \theta_m^\delta|^2 - \nabla \theta_m^\delta \nabla \varphi_m^\delta \leq \int_0^t \int_\Omega |v_m^\delta|^2. \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned} & \int_\Omega (v_m^\delta)^2 + \nu \int_0^t \int_\Omega |\nabla v_m^\delta|^2 + \nu_0 \int_0^t \int_\Omega |\nabla v_m^\delta|^p + \int_0^t \int_\Omega \frac{(\varphi_m^\delta)^2}{1 - \varphi_m^\delta + \delta} |v_m^\delta|^2 \\ & \leq \int_0^t \int_\Omega (\theta_m^\delta)^2 + \int_0^t \int_\Omega (v_m^\delta)^2. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Multiplicando (4.59) por $A \in \mathbb{R}$ suficientemente grande, somando com (4.60) e (4.61) e usando o lema de gronwall obtemos (4.55) e

$$\begin{aligned} & \|\varphi_m^\delta\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|\nabla \varphi_m^\delta\|_{L^2(Q)}^2 + \|\nabla \varphi_m^\delta\|_{L^q(Q)}^q + \|\theta_m^\delta\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \\ & \|\nabla \theta_m^\delta\|_{L^2(Q)}^2 + \|v_m^\delta\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|\nabla v_m^\delta\|_{L^2(Q)}^2 + \|\nabla v_m^\delta\|_{L^p(Q)}^p \leq C. \end{aligned} \quad (4.62)$$

De modo análogo a (4.23) temos

$$\begin{aligned} & \|\varphi_{m,t}^\delta\|_{L^2(Q)}^2 + \|\nabla \varphi_m^\delta\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|\nabla \varphi_m^\delta\|_{L^\infty(0,T;L^q(\Omega))}^q \\ & \leq C(1 + \|\nabla \varphi_{0m}\|_{L^2(Q)}^2 + \|\nabla \varphi_{0m}\|_{L^q(Q)}^q + \|\theta_m^\delta\|_{L^{10/3}(Q)}^{10/3}) \\ & \leq C(1 + \|\nabla \varphi_0\|_{L^2(Q)}^2 + \|\nabla \varphi_0\|_{L^q(Q)}^q), \end{aligned} \quad (4.63)$$

na última desigualdade usamos a seguinte imersão contínua

$$L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;W_2^1(\Omega)) \hookrightarrow L^{10/3}(Q).$$

De (4.22) temos

$$\begin{aligned}
& \|\nabla \varphi_m^\delta\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|\Delta \varphi_m^\delta\|_{L^2(Q)}^2 \\
& \leq C(1 + \|\varphi_{0m}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \varphi_{0m}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\theta_m^\delta\|_{L^2(Q)}^2 + \|\theta_m^\delta\|_{L^{10/3}(Q)}^{10/3}) \\
& \leq C(1 + \|\varphi_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \varphi_0\|_{L^2(\Omega)}^2).
\end{aligned} \tag{4.64}$$

Portanto, de (4.62)-(4.64) obtemos (4.57). A estimativa (4.58) segue de (4.25) e (4.56) segue de modo análogo a (4.32). ■

Demonstração da Proposição 4.1

O Lema 4.3 e imersões compactas usuais nos garantem que existem

$$\begin{aligned}
\varphi^\delta & \in W_2^{2,1}(Q) \cap L^\infty(0, T; W_q^1(\Omega)), \\
\theta^\delta & \in W_2^{2,1}(Q), \\
v^\delta & \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^p(0, T; V^p) \text{ com } v^\delta \in L^{p'}(0, T; V_s'),
\end{aligned}$$

e uma subsequência de $(\varphi_m^\delta, \theta_m^\delta, v_m^\delta)$ (o qual ainda denotaremos por $(\varphi_m^\delta, \theta_m^\delta, v_m^\delta)$), tal que, quando $m \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned}
\varphi_m^\delta & \rightarrow \varphi^\delta & \text{em } L^2(0, T; W_2^1(\Omega)) \text{ fortemente,} \\
\varphi_m^\delta & \rightharpoonup \varphi^\delta & \text{em } W_2^{2,1}(Q) \cap L^\infty(0, T; W_q^1(\Omega)), \text{ fracamente,} \\
\theta_m^\delta & \rightharpoonup \theta^\delta & \text{em } W_2^{2,1}(Q), \text{ fracamente.} \\
\theta_m^\delta & \rightarrow \theta^\delta & \text{em } L^2(0, T; W_2^1(\Omega)) \text{ fortemente,} \\
v_m^\delta & \rightharpoonup v^\delta & \text{em } L^p(0, T; V^p) \text{ fracamente,} \\
v_m^\delta & \rightarrow v^\delta & \text{em } L^p(Q) \text{ fortemente,} \\
v_{m,t}^\delta & \rightharpoonup v_t^\delta & \text{em } L^{p'}(0, T; V_s') \text{ fracamente,}
\end{aligned}$$

Como $\mathcal{A}v_m^\delta$ é limitado em $L^{p'}(0, T, (V^p)')$, existe $\chi \in L^{p'}(0, T, (V^p)')$ tal que

$$\mathcal{A}v_m^\delta \rightharpoonup \chi \quad \text{em } L^{p'}(0, T; (V^p)') \text{ fracamente.}$$

Do mesmo modo $\mathcal{B}\varphi_m^\delta$ é limitado em $L^{q'}(0, T, (W_q^1(\Omega))')$, assim existe $\xi \in L^{q'}(0, T, (W_q^1(\Omega))')$ tal que

$$\mathcal{B}\varphi_m^\delta \rightharpoonup \xi \quad \text{em } L^{q'}(0, T; (W_q^1(\Omega))') \text{ fracamente.}$$

Do fato que φ_m^δ converge fracamente para φ^δ em $W_2^{2,1}(Q)$ então $\varphi_{m,t}^\delta, \Delta\varphi_m^\delta$ convergem respectivamente para $\varphi_t^\delta, \Delta\varphi^\delta$ fracamente em $L^2(Q)$, além disso $W_2^{2,1}(Q)$ está compactamente imerso em $L^6(Q)$ e então $(\varphi_m^\delta)^3$ converge fortemente para $(\varphi^\delta)^3$ em $L^2(Q)$. Note também que $\nabla\varphi_m^\delta$ converge fortemente para $\nabla\varphi^\delta$ em $L^2(Q)$, então $(\theta_e - \theta_m^\delta)|\nabla\varphi_m^\delta|$ converge fortemente para $(\theta_e - \theta^\delta)|\nabla\varphi^\delta|$ em $L^1(0, T; L^2(\Omega))$, podemos então passar o limite em (4.9) e obter

$$\begin{aligned} &(\varphi_t^\delta, w_j) + \alpha(\nabla\varphi^\delta, \nabla w_j) + \alpha_0(\xi^\delta, \nabla w_j) = -(\varphi^\delta, w_j) \\ &+ 3((\varphi^\delta)^2, w_j) - 2((\varphi^\delta)^3, w_j) + ((\theta_e - \theta^\delta)|\nabla\varphi^\delta|, w_j), j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

De modo análogo a (4.36) pode-se mostrar que $\xi^\delta = \mathcal{B}(\varphi^\delta)$, e por densidade, concluimos que

$$\begin{aligned} &(\varphi_t^\delta, w) + \alpha(\nabla\varphi^\delta, \nabla w) + \alpha_0(|\nabla\varphi^\delta|^{q-2}\nabla\varphi^\delta, \nabla w) = -(\varphi^\delta, w) \\ &+ 3((\varphi^\delta)^2, w) - 2((\varphi^\delta)^3, w) + ((\theta_e - \theta^\delta)|\nabla\varphi^\delta|, w), \forall w \in W_q^1(\Omega). \end{aligned}$$

Como v_m^δ converge fortemente para v^δ em $L^2(Q)$ e $\nabla\theta_m^\delta$ converge fracamente para $\nabla\theta^\delta$ em $L^2(Q)$, temos que $v_m^\delta \cdot \nabla\theta_m^\delta$ converge para $v^\delta \cdot \nabla\theta^\delta$ fracamente em $L^1(Q)$ e podemos então passar ao limite em (4.10) e obter

$$\theta_t^\delta - \beta\Delta\theta^\delta + v^\delta \cdot \nabla\theta^\delta = \frac{L}{c_p}\varphi_t^\delta \quad \text{em } Q.$$

O limite em (4.11) segue do fato que $-\lambda F^\delta(T_r(\varphi_m^\delta))v_m^\delta + \lambda\vec{\sigma}\theta_m^\delta$ converge fortemente para $-\lambda F^\delta(T_r(\varphi^\delta))v^\delta + \lambda\vec{\sigma}\theta^\delta$ em $L^2(Q)$, então fazendo $m \rightarrow \infty$ em (4.11) obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(v^\delta, u_j) + \nu(\nabla v^\delta, \nabla u_j) + \nu_0(\chi, u_j) + (v^\delta \cdot \nabla v^\delta, u_j) \\ &= -\left(\frac{(\varphi^\delta)^2}{1 - \varphi^\delta + \delta}v^\delta, u_j\right) + (\vec{\sigma}\theta^\delta, u_j), j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Pode-se mostrar usando a mesma idéia que em (4.36) que $\chi^\delta = \mathcal{A}(v^\delta)$, e por densidade, concluimos que

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(v^\delta, u) + \nu(\nabla v^\delta, \nabla u) + \nu_0(\mathcal{A}v^\delta, u) + (v^\delta \cdot \nabla v^\delta, u) \\ &= -\left(\frac{(\varphi^\delta)^2}{1 - \varphi^\delta + \delta}v^\delta, u\right) + (\vec{\sigma}\theta^\delta, u), \forall u \in V_s, \end{aligned} \tag{4.65}$$

e do fato que $p \geq 3$, a forma $(v^\delta \cdot \nabla v^\delta, u)$ é contínua em V^p (Lions, p. 212) e por continuidade, é verdade que (4.65) vale para todo $u \in V^p$. ■

Os Lemas seguintes fornecerão estimativas independentes de δ para as soluções da Proposição 4.1; tais estimativas serão suficientes para passarmos o limite no problema penalizado e obtermos uma solução generalizada do problema original.

Lema 4.3 *Existe uma constante C independente de δ tal que*

$$\|v^\delta\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^p(0,T;V^p)} + \int_0^T \int_\Omega \frac{(\varphi^\delta)^2}{1 - \varphi^\delta + \delta} |v^\delta|^2 dx dt \leq C, \quad (4.66)$$

$$\|\varphi^\delta\|_{W_2^{2,1}(Q) \cap L^\infty(0,T;W_q^1(\Omega))} \leq C, \quad (4.67)$$

$$\|\theta^\delta\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C, \quad (4.68)$$

Demonstração: A prova deste resultado é análoga à do Lema 4.2, tomando $w = v^\delta$ em (4.8) obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega (v^\delta)^2 + \nu \int_0^t \int_\Omega |\nabla v^\delta|^2 + \nu_0 \int_0^t \int_\Omega |\nabla v^\delta|^p + \int_0^t \int_\Omega \frac{(\varphi^\delta)^2}{1 - \varphi^\delta + \delta} |v^\delta|^2 \\ \leq \int_0^t \int_\Omega (v^\delta)^2 + \int_0^t \int_\Omega (\theta_m^\delta)^2, \end{aligned}$$

após somar com (4.59), (4.60) e usar o Lema de Gronwall obtemos o resultado. ■

Observação 4.7 *O Lema 4.3 nos garante que φ^δ é limitada em*

$$W = \{\psi \in L^\infty(0, T; W_q^1(\Omega)); \psi_t \in L^2(0, T; L^2(\Omega))\},$$

mas note que também temos $W_q^1(\Omega) \xhookrightarrow{c} C(\overline{\Omega}) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e então pelo Lema 1.4, W é relativamente compacto em $C([0, T]; C(\overline{\Omega})) = C(\overline{Q})$. Consequentemente existem φ e uma subsequência de (φ^δ) (a qual ainda denotaremos por φ^δ), tal que φ^δ converge uniformemente para φ em $\overline{Q}$.

Para o lema seguinte é bom lembrarmos que $Q_{ml} = \{(x, t) \in Q; 0 \leq \varphi < 1\}$ e $\Omega_{ml}(t) = \{x \in \Omega; 0 \leq \varphi(x, t) < 1\}$.

Lema 4.4 *Dados $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$, $U \subset \Omega_{ml}(t_1)$ tal que $[t_1, t_2] \times \overline{U} \subset Q_{ml} \cup \Omega_{ml}(0) \cup \Omega_{ml}(T)$, existem $\delta_0(U, t_1, t_2) > 0$ e uma constante $C(\delta_0)$ tal que, para todo $\delta < \delta_0$,*

$$\|v_t^\delta\|_{L^{p'}(t_1, t_2; V_s(U)')} \leq C. \quad (4.69)$$

Demonstração: A prova deste resultado é análoga à do Lema 3.2. ■

4.3 Passagem ao Limite

As estimativas (4.55) e (4.69) nos garantem que (v^δ) é limitada em

$$\{v \in L^p(t_1, t_2; V^p(U)); v_t \in L^{p'}(t_1, t_2; V_s(U)')\},$$

e, por outro lado, a imersão desse espaço em $L^p(U \times (t_1, t_2))$ é compacta. Assim, existem v e uma subsequência de (v^δ) (a qual ainda denotaremos por v^δ) tal que v^δ converge fortemente para v em $L^p(U \times (t_1, t_2))$. Do fato que Q_{ml} pode ser coberto por um número contável de conjuntos abertos $U_i \times (t_i, t_{i+1})$ tal que $U_i \subset \Omega_{ml}(t_i)$, então

$$v^\delta \rightarrow v \quad \text{em} \quad L_{loc}^p(Q_{ml} \cup \Omega_{ml}(0) \cup \Omega_{ml}(T)) \quad \text{fortemente.} \quad (4.70)$$

Além disso, de (4.46) temos que $v^\delta \in L^p(0, T; V^p) \cap L^\infty(0, T; H)$ e

$$v^\delta \rightharpoonup v \quad \text{em} \quad L^p(0, T; V^p) \quad \text{fracamente,} \quad (4.71)$$

$$v^\delta \xrightarrow{*} v \quad \text{em} \quad L^\infty(0, T; H) \quad \text{fracamente estrela.} \quad (4.72)$$

Como $\mathcal{A}v^\delta$ é limitado em $L^{p'}(0, T, (V^p)')$, existe $\chi \in L^{p'}(0, T, (V^p)')$ tal que

$$\mathcal{A}v^\delta \rightharpoonup \chi \quad \text{em} \quad L^{p'}(0, T; (V^p)') \quad \text{fracamente.} \quad (4.73)$$

Agora, o Lema 4.3 e imersões compactas garantem que existem $\varphi, \theta \in W_2^{2,1}(Q)$, e uma

subsequência de $(\varphi^\delta, \theta^\delta)$ (a qual ainda denotaremos por $(\varphi^\delta, \theta^\delta)$) tal que, quando $\delta \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned}
\varphi^\delta &\rightarrow \varphi && \text{uniformemente em } Q, \\
\varphi^\delta &\rightarrow \varphi && \text{em } L^2(0, T; W_2^1(\Omega)) \text{ fortemente,} \\
\varphi^\delta &\rightharpoonup \varphi && \text{em } W_2^{2,1}(Q) \cap L^\infty(0, T; W_q^1(\Omega)), \text{ fracamente,} \\
\mathcal{B}\varphi^\delta &\rightharpoonup \xi && \text{em } L^{q'}(0, T; (W_q^1(\Omega))'), \text{ fracamente,} \\
\theta^\delta &\rightharpoonup \theta && \text{em } W_2^{2,1}(Q), \text{ fracamente.}
\end{aligned} \tag{4.74}$$

Resta passarmos o limite em (4.6)-(4.8) quando $\delta \rightarrow 0$. O limite em (4.8) segue da seguinte forma. Seja $\eta \in L^p(0, T; V^p)$ com suporte compacto contido em $Q_{ml} \cup \Omega_{ml}(0) \cup \Omega_{ml}(T)$ e $\eta_t \in L^{p'}(0, T; (V^p)'),$ tomando $u = \eta(t)$ em (4.8), e integrando em $(0, t)$ teremos

$$\begin{aligned}
\int_0^t (v_t^\delta, \eta) + \nu(\nabla v^\delta, \nabla \eta) + \nu_0(\mathcal{A}v^\delta, \eta) + (v^\delta \cdot \nabla v^\delta, \eta) = \\
- \int_0^t \left(\frac{(\varphi^\delta)^2}{1 - \varphi^\delta + \delta} v^\delta, \eta \right) ds.
\end{aligned}$$

Desde que $\text{supp } \eta \subset Q_{ml} \cup \Omega_{ml}(0) \cup \Omega_{ml}(T)$ então, $\text{supp } \eta(t) \subset \Omega_{ml}(t)$ para quase todo $t \in [0, T]$, portanto

$$\begin{aligned}
(v^\delta(t), \eta(t)) - \int_0^t (v^\delta, \eta_t) + \nu \int_0^t (\nabla v^\delta, \nabla \eta) + \nu_0 \int_0^t (\mathcal{A}v^\delta, \eta) \\
+ \int_0^t (v^\delta \cdot \nabla v^\delta, \eta) = - \int_0^t \left(\frac{(\varphi^\delta)^2}{1 - \varphi^\delta + \delta} v^\delta, \eta \right) + (v_0, \eta(0)).
\end{aligned} \tag{4.75}$$

Lembramos que φ^δ converge uniformemente para φ , então $\frac{(\varphi^\delta)^2}{1 - \varphi^\delta + \delta}$ converge para $\frac{\varphi^2}{1 - \varphi}$ uniformemente em conjuntos compactos de $Q_{ml} \cup \Omega_{ml}(0) \cup \Omega_{ml}(T)$ e de (4.70)-(4.73) podemos passar o limite em (4.75) e obter

$$\begin{aligned}
(v(t), \eta(t)) - \int_0^t (v, \eta_t) ds + \nu \int_0^t (\nabla v, \nabla \eta) + \nu_0 \int_0^t (\chi, \eta) + \int_0^t (v \cdot \nabla v, \eta) \\
= - \int_0^t \left(\frac{\varphi^2}{1 - \varphi} v, \eta \right) ds + (v_0, \eta(0)),
\end{aligned} \tag{4.76}$$

Para provar que $v = 0$ quase sempre em Q_s , dado $\epsilon > 0$ existe $\bar{\delta}(\epsilon)$ tal que se $\delta < \bar{\delta}$ então $|\varphi^\delta(x, t) - \varphi(x, t)| \leq \epsilon$ para todo $(x, t) \in Q$, em particular para $(x, t) \in Q_s = \{(x, t) \in Q; \varphi(x, t) = 1\}$ temos $1 - \epsilon \leq \varphi^\delta$, assim de (4.55) obtemos

$$\frac{1}{\epsilon + \delta} \int_{Q_s} (\varphi^\delta)^2 |v^\delta|^2 dx dt \leq \int_0^T \int_\Omega \frac{(\varphi^\delta)^2}{1 - \varphi^\delta + \delta} |v^\delta|^2 dx dt \leq C_1. \tag{4.77}$$

Lembremos que $\varphi^\delta \rightarrow 1$ uniformemente em Q_s e que $v^\delta \rightharpoonup v$ em $L^2(Q_s)$ quando $\delta \rightarrow 0$, então $\varphi^\delta v^\delta \rightharpoonup v$ em $L^2(Q_s)$. Portanto

$$\int_{Q_s} v^2 \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \int_{Q_s} |\varphi^\delta v^\delta|^2 \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} C_1(\epsilon + \delta) \leq C_1\epsilon,$$

e do fato que ϵ é arbitrário temos que $v = 0$ quase sempre em Q_s .

Para passar o limite em (4.6) procedemos da seguinte forma, multiplicamos (4.6) por $\phi \in C_0^\infty([0, T])$ e obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^t (\varphi_t^\delta, \phi w) + \alpha \int_0^t (\nabla \varphi^\delta, \nabla \phi w) + \alpha_0 \int_0^t (\mathcal{B} \varphi^\delta, \nabla \phi w) \\ &= - \int_0^t (\varphi^\delta, \phi w) + 3((\varphi^\delta)^2, \phi w) - 2((\varphi^\delta)^3, \phi w) \\ &+ \int_0^t ((\theta_l - \theta^\delta) |\nabla \varphi^\delta|, \phi w). \end{aligned} \quad (4.78)$$

De (4.70)-(4.74), podemos passar o limite em (4.78) e obter

$$\begin{aligned} & \int_0^t (\varphi_t, \phi w) + \alpha \int_0^t (\nabla \varphi, \nabla \phi w) + \alpha_0 \int_0^t (\xi, \nabla \phi w) \\ &= - \int_0^t (\varphi, \phi w) + 3(\varphi^2, \phi w) - 2(\varphi^3, \phi w) \\ &+ \int_0^t ((\theta_l - \theta) |\nabla \varphi|, \phi w). \end{aligned} \quad (4.79)$$

De modo análogo a (4.36) pode-se mostrar que $\xi = \mathcal{B} \varphi$. Do fato que (4.79) vale para toda $\phi \in C_0^\infty([0, T])$ e todo $w \in W_q^1(\Omega)$ então por densidade temos

$$\begin{aligned} & \int_0^t (\varphi_t, \omega) + \alpha \int_0^t (\nabla \varphi, \nabla \omega) + \alpha_0 \int_0^t (|\nabla \varphi|^{q-2} \nabla \varphi, \nabla \omega) \\ &= - \int_0^t (\varphi, \omega) + 3(\varphi^2, \omega) - 2(\varphi^3, \omega) + \int_0^t ((\theta_l - \theta) |\nabla \varphi|, \omega), \end{aligned}$$

para todo $\omega \in L^q(0, T; W_q^1(\Omega))$.

Agora, vamos provar sob a hipótese adicional de integrabilidade do Teorema que $\chi = \mathcal{A}v$. Para isto, seja $\psi \in L^p(0, T; V^p)$ com suporte compacto contido no fecho de $Q_{ml} \cup \Omega_{ml}(0) \cup \Omega_{ml}(T)$ e definimos

$$\begin{aligned} X_\delta^t &= \nu_0 \int_0^t (\mathcal{A}v^\delta - \mathcal{A}\psi, v^\delta - \psi) ds + \frac{1}{2} \|v^\delta(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &+ \nu \int_0^t \|\nabla v^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \int_0^t \int_\Omega F^\delta(\varphi^\delta) |v^\delta|^2 dx ds. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Desde que o operador $\mathcal{A}$ é monótono e $\Omega_{ml}(t) \subset \Omega$, temos

$$\begin{aligned} X_\delta^t &\geq \frac{1}{2} \|v^\delta\|_{L^2(\Omega_{ml}(t))}^2 + \nu \int_0^t \|\nabla v^\delta\|_{L^2(\Omega_{ml}(s))}^2 ds \\ &\quad + \int_0^t \|(F^\delta(\varphi^\delta))^{1/2} v^\delta\|_{L^2(\Omega_{ml}(s))}^2 ds. \end{aligned}$$

Agora, multiplicamos a última desigualdade por uma função não negativa $\phi \in L^\infty([0, T])$ e integramos em $[0, T]$ para obter

$$\begin{aligned} \int_0^T X_\delta^t \phi(t) dt &\geq \frac{1}{2} \int_0^T \|v^\delta(t)\|_{L^2(\Omega_{ml}(t))}^2 \phi(t) dt \\ &\quad + \nu \int_0^T \int_0^t \|\nabla v^\delta(s)\|_{L^2(\Omega_{ml}(s))}^2 ds \phi(t) dt \\ &\quad + \int_0^T \int_0^t \|(F^\delta(\varphi^\delta(s)))^{1/2} v^\delta(s)\|_{L^2(\Omega_{ml}(s))}^2 ds \phi(t) dt. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Vamos considerar cada um dos três termos do lado direito de (4.81). De (4.71) e que $p \geq 3$, temos que $v^\delta \rightharpoonup v$ em $L^p(Q)$ e assim $v^\delta \phi^{1/2} \rightharpoonup v \phi^{1/2}$ em $L^p(Q)$. Portanto

$$\begin{aligned} \liminf_{\delta \rightarrow 0} \int_0^T \|v^\delta(t)\|_{L^2(\Omega_{ml}(t))}^2 \phi(t) dt &= \liminf_{\delta \rightarrow 0} \|v^\delta \phi^{1/2}\|_{L^2(Q_{ml}(t))}^2 \\ &\geq \|v \phi^{1/2}\|_{L^2(Q_{ml}(t))}^2 = \int_0^T \|v(t)\|_{L^2(\Omega_{ml}(t))}^2 \phi(t) dt. \end{aligned}$$

Veremos agora o segundo termo, fazendo mudança de variáveis obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^t \|\nabla v^\delta(s)\|_{L^2(\Omega_{ml}(s))}^2 ds \phi(t) dt &= \int_0^T \int_s^T \|\nabla v^\delta(s)\|_{L^2(\Omega_{ml}(s))}^2 \phi(t) dt ds \\ &= \int_0^T \|\nabla v^\delta(s)\|_{L^2(\Omega_{ml}(s))}^2 \int_s^T \phi(t) dt ds = \int_0^T \|\nabla v^\delta(s) \tilde{\phi}^{1/2}(s)\|_{L^2(\Omega_{ml}(s))}^2 ds \\ &= \|\nabla v^\delta \tilde{\phi}^{1/2}\|_{L^2(Q_{ml})}^2, \end{aligned}$$

onde $\tilde{\phi} = \int_0^T \phi(t) dt$. Novamente de (4.71) temos que $\nabla v^\delta \rightharpoonup \nabla v$ em $L^p(Q)$, concluímos como antes que

$$\begin{aligned} \liminf_{\delta \rightarrow \infty} \int_0^T \int_0^t \|\nabla v^\delta(s)\|_{L^2(\Omega_{ml}(s))}^2 ds \phi(t) dt &= \liminf_{\delta \rightarrow 0} \|\nabla v^\delta \tilde{\phi}^{1/2}\|_{L^2(Q_{ml})}^2 \\ &\geq \|\nabla v \tilde{\phi}^{1/2}\|_{L^2(Q_{ml})}^2 = \int_0^T \int_0^t \|\nabla v(s)\|_{L^2(\Omega_{ml}(s))}^2 ds \phi(t) dt. \end{aligned}$$

De (4.70) e que $F^\delta(\varphi^\delta) \rightarrow \varphi^2/(1-\varphi)$ q.s. em Q_{ml} , concluímos que $F^\delta(\varphi^\delta) v^\delta \rightarrow \varphi^2/(1-\varphi) v$ q.s. em Q_{ml} . De (4.55) obtemos a seguinte desigualdade

$$\int_0^t \|(F^\delta(\varphi^\delta))^{1/2} v^\delta\|_{L^2(\Omega_{ml}(s))}^2 ds \leq C_1.$$

Portanto, $(F^\delta(\varphi^\delta))^{1/2} v^\delta \rightharpoonup (\varphi^2/(1-\varphi))^{1/2} v$ em $L^2(Q_{ml})$ (Lions [22], Lema 1.3, p. 12), do mesmo modo que no segundo termo, obtemos

$$\begin{aligned} & \liminf_{\delta \rightarrow 0} \int_0^T \int_0^t \| (F^\delta(\varphi^\delta(s)))^{1/2} v^\delta(s) \|_{L^2(\Omega_{ml}(s))}^2 ds \phi(t) dt \\ & \geq \int_0^T \int_0^t \| (\varphi^2(s)/(1-\varphi(s)))^{1/2} v(s) \|_{L^2(\Omega_{ml}(s))}^2 ds \phi(t) dt \end{aligned}$$

usando esses resultados em (4.81), concluimos que

$$\begin{aligned} \liminf_{\delta \rightarrow 0} \int_0^T X_\delta^t \phi(t) dt & \geq \frac{1}{2} \int_0^T \|v(t)\|_{L^2(\Omega_{ml}(t))}^2 \phi(t) dt \\ & \quad + \nu \int_0^T \int_0^t \|\nabla v(s)\|_{L^2(\Omega_{ml}(s))}^2 ds \phi(t) dt \\ & \quad + \int_0^T \int_0^t \| (\varphi^2(s)/(1-\varphi(s)))^{1/2} v(s) \|_{L^2(\Omega_{ml}(s))}^2 ds \phi(t) dt. \end{aligned} \quad (4.82)$$

Por outro lado, tomando $u = v^\delta$ em (4.8) e integrando em $[0, t]$ chegamos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \nu_0 \int_0^t (\mathcal{A}v^\delta, v^\delta) & = -\frac{1}{2} \|v^\delta(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \nu \int_0^t \|\nabla v^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ & \quad - \int_0^t (F^\delta(\varphi^\delta)v^\delta, v^\delta) + \frac{1}{2} \|v_0\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

e substituindo em (4.80) teremos

$$X_\delta^t = \frac{1}{2} \|v_0\|_{L^2(\Omega)}^2 - \nu_0 \int_0^t (\mathcal{A}v^\delta, \psi) ds - \nu_0 \int_0^t (\mathcal{A}\psi, v^\delta - \psi) ds.$$

Multiplicando essa última igualdade pela função ϕ e integrando em $[0, T]$ obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^T X_\delta^t \phi(t) dt & = \frac{1}{2} \int_0^T \|v_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \phi(t) dt \\ & \quad - \nu_0 \int_0^T \int_0^t (\chi, \psi) ds \phi(t) dt - \nu_0 \int_0^T \int_0^t (\mathcal{A}\psi, v - \psi) ds \phi(t) dt \\ & = \frac{1}{2} \int_0^T \|v_0\|_{L^2(\Omega_{ml}(0))}^2 \phi(t) dt \\ & \quad - \nu_0 \int_0^T \int_0^t (\chi, \psi) ds \phi(t) dt - \nu_0 \int_0^T \int_0^t (\mathcal{A}\psi, v - \psi) ds \phi(t) dt, \end{aligned}$$

Esta última igualdade junto com (4.71) nos dá

$$\frac{1}{2} \int_0^T \|v_0\|_{L^2(\Omega_{ml}(0))}^2 \phi(t) dt - \nu_0 \int_0^T \int_0^t (\chi, \psi) ds \phi(t) dt$$

$$\begin{aligned}
& -\nu_0 \int_0^T \int_0^t (A\psi, v - \psi) ds \phi(t) dt \\
& \geq \frac{1}{2} \int_0^T \|v(t)\|_{L^2(\Omega_{ml}(t))}^2 \phi(t) dt + \nu \int_0^T \int_0^t \|\nabla v(s)\|_{L^2(\Omega_{ml}(s))}^2 ds \phi(t) dt \\
& + \int_0^T \int_0^t \|(\varphi^2(s)/(1 - \varphi(s)))^{1/2} v(s)\|_{L^2(\Omega_{ml}(s))}^2 ds \phi(t) dt.
\end{aligned} \tag{4.83}$$

Lembremos que (4.4) vale para quase todo $t \in (0, T)$ e $\eta \in L^p(0, T; V^p)$ com suporte compacto contido em $Q_{ml} \cup \Omega_{ml}(0) \cup \Omega_{ml}(T)$ e tal que $\eta_t \in L^{p'}(0, T; (V^p)')$. Nossas estimativas a priori e a hipótese adicional do teorema nos permite usar argumentos de densidade para concluir que (4.4) vale para toda $\eta \in L^p(0, T; V^p)$ com suporte compacto contido no fecho de $Q_{ml} \cup \Omega_{ml}(0) \cup \Omega_{ml}(T)$ e tal que $\eta_t \in L^{p'}(0, T; (V^p)')$. Em particular, v possui esta propriedade, e podemos tomar $\eta = v$ em (4.4), fazendo isto, após integração por partes, multiplicando o resultado por ϕ e comparando com (4.83) temos

$$\int_0^T \int_0^t (\chi - \mathcal{A}\psi, v - \psi) ds \phi(t) dt \geq 0.$$

Como $\phi(\cdot)$ é uma função arbitrária e não negativa em $L^\infty([0, T])$, concluimos que

$$\int_0^t (\chi - \mathcal{A}\psi, v - \psi) ds \geq 0 \quad \text{q.s. } t.$$

Portanto, usando a hemicontinuidade do operador $\mathcal{A}$ (Lions [22] Cap. 2), concluimos que $\chi = \mathcal{A}v$, e a prova do teorema 4.1 está completa. ■

Capítulo 5

Um Modelo para Ligas Binárias: Existência Local no Caso Bidimensional

Neste capítulo apresentaremos resultados de existência e regularidade para um modelo bidimensional do tipo campo de fases para solidificação e/ou liquefação de ligas binárias, isto é, misturas de dois materiais puros. O modelo apresentado neste capítulo inclui uma equação adicional para a concentração $c(x, t)$ do soluto na mistura, cujas não linearidades tornam o modelo bem mais complexo.

Na primeira seção apresentaremos o modelo e o resultado principal. Na segunda seção, apresentaremos o modelo penalizado, a penalização usada neste capítulo é a mesma usada no modelo (3.1), mostraremos também um resultado de existência de solução e as estimativas que a solução do modelo penalizado satisfaz, obtendo assim uma sequência de soluções aproximadas, então por fim, na última seção passaremos o limite e mostraremos que o modelo original possui solução.

Diferentemente do Capítulo 3, usaremos aqui o teorema do ponto fixo de Schauder em vez de usar o teorema do ponto fixo de Leray-Schauder para mostrarmos a existência de solução do modelo penalizado, o motivo de usarmos tal teorema vem do fato que podemos agora definir o operador em conjuntos convexos, fechados e limitados. Os argumentos de compacidade e

bootstrapping são os mesmos do capítulo anterior.

5.1 Apresentação do Modelo 3 e resultados

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto, limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave, $T \in \mathbb{R}$ finito e $Q = \Omega \times (0, T)$. Considere o problema com condições de fronteira e condições iniciais que consiste encontrar funções (φ, θ, c, v) tais que:

$$\begin{aligned}
\varphi_t - \alpha \Delta \varphi &= -\varphi + 3\varphi^2 - 2\varphi^3 + (\theta_e - \theta + C)|\nabla \varphi| \quad \text{em } Q, \\
\theta_t - \beta \Delta \theta + v \cdot \nabla \theta &= \frac{L}{c_p} \varphi_t \quad \text{em } Q, \\
c_t - \gamma \Delta c &= \frac{\varphi_t}{1 - \varphi + k\varphi} c + \frac{v - \nabla \varphi}{1 - \varphi + k\varphi} \nabla c, \quad \text{em } Q. \\
v_t - \nu \Delta v + v \cdot \nabla v + \nabla P &= -\frac{\varphi^2}{1 - \varphi} v + \vec{\sigma}_1 \theta + \vec{\sigma}_2 c \quad \text{em } Q_{ml}, \\
\operatorname{div} v &= 0 \quad \text{em } Q_{ml}, \\
v &= 0 \quad \text{em } Q_s, \\
\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = \frac{\partial \theta}{\partial \nu} = \frac{\partial c}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{na } \partial\Omega \times (0, T), \quad v = 0 \quad \text{na } \partial Q_{ml}, \\
\varphi(0) = \varphi_0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad c(0) = c_0 \quad \text{em } \Omega, \quad v(0) = v_0 \quad \text{em } \Omega_{ml}(0).
\end{aligned} \tag{5.1}$$

O campo de fases é denotado por φ , as funções θ e v estão respectivamente relacionadas com a temperatura e velocidade do material e a função c é a concentração do soluto na mistura. Os domínios $Q_{ml}, Q_s, \Omega_{ml}(0)$ estão definidos em (1)-(5). Aqui ν denotará o vetor normal exterior à $\partial\Omega$, α, β, γ são constantes positivas, L uma constante positiva relacionada ao calor latente e c_p uma constante relacionada ao calor específico do material. $\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2$ são constantes relacionadas com a densidade do material e a força da gravidade. O principal resultado desse capítulo é o seguinte teorema de existência de solução local no tempo para o problema (5.1).

Teorema 5.1 *Seja $0 < T < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2 . Suponha que*

$$\begin{aligned}
\varphi_0 &\in W_q^{2-2/q}(\Omega), \quad q > 2, \quad q \neq 3 \quad \text{tal que } 0 \leq \varphi_0 \leq 1, \\
\theta_0 &\in W_{s_1}^{2-2/s_1}(\Omega), \quad s_1 > 2, \quad s_1 \neq 3,
\end{aligned}$$

$$c_0 \in W_{s_2}^{2-2/s_2}(\Omega), s_2 > 2, s_2 \neq 3,$$

$$v_0 \in H \text{ com } v_0 = 0 \text{ em } \Omega_s(0) = \{x \in \Omega; \varphi_0(x) = 1\},$$

satisfazendo a condição de compatibilidade

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial \nu} = \frac{\partial \theta_0}{\partial \nu} = \frac{\partial c_0}{\partial \nu} = 0 \text{ na } \partial\Omega \times (0, T),$$

para $q, s_1, s_2 > 3$. Então existem $\bar{T} \in (0, T]$ e funções (φ, θ, c, v) tais que

$$\varphi \in W_q^{2,1}(Q_{\bar{T}}), \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0, \varphi(0) = \varphi_0 \text{ e } 0 \leq \varphi \leq 1 \text{ q.s. em } Q_{\bar{T}},$$

$$\theta \in W_{r_1}^{2,1}(Q_{\bar{T}}), r_1 < \min\{4, q, s_1\}, \frac{\partial \theta}{\partial \nu} = 0, \theta(0) = \theta_0,$$

$$c \in W_{r_2}^{2,1}(Q_{\bar{T}}), r_2 < \min\{4, q, s_2\}, \frac{\partial c}{\partial \nu} = 0, c(0) = c_0,$$

$$v \in L^2(0, \bar{T}; V) \cap L^\infty(0, \bar{T}; H), v(0) = v_0 \text{ em } \Omega_{ml}(0),$$

satisfazendo

$$\varphi_t - \alpha \Delta \varphi = -\varphi + 3\varphi^2 - 2\varphi^3 + (\theta_e - \theta + c)|\nabla \varphi| \text{ q.s. em } Q_{\bar{T}}, \quad (5.2)$$

$$\theta_t - \beta \Delta \theta + v \cdot \nabla \theta = \frac{L}{c_p} \varphi_t \text{ q.s. em } Q_{\bar{T}}, \quad (5.3)$$

$$c_t - \gamma \Delta c = \frac{\varphi_t}{1 - \varphi + k\varphi} c + \frac{v - \nabla \varphi}{1 - \varphi + k\varphi} \cdot \nabla c \text{ em } Q_{\bar{T}}, \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} & (v(t), \eta(t)) - \int_0^t (v, \eta_t) ds + \nu \int_0^t (\nabla v, \nabla \eta) + \int_0^t (v \cdot \nabla v, \eta) \\ &= (v_0, \eta(0)) - \int_0^t \left(\frac{\varphi^2}{1 - \varphi} v, \eta \right) ds + \int_0^t (\vec{\sigma}_1 \theta, \eta) ds + \int_0^t (\vec{\sigma}_2 c, \eta) ds, \end{aligned} \quad (5.5)$$

$t \in (0, \bar{T})$, para qualquer $\eta \in L^2(0, \bar{T}; V)$ com suporte compacto contido em $(Q_{\bar{T}})_{ml} \cup \Omega_{ml}(0) \cup \Omega_{ml}(\bar{T})$ e $\eta_t \in L^2(0, \bar{T}; V')$.

Além disso, $v = 0$ quase sempre em $(Q_{\bar{T}})_s$.

Onde Q_s e $\Omega_{ml}(t)$ estão definidos respectivamente em (1) e (5).

Observação 5.1 O fato de $s_1, s_2 > 2$ nos garante a imersão compacta de $W_{s_i}^{2,1}(Q)$ em $L^\infty(Q)$, $i = 1, 2$. O termo que nos impede de termos existência global no tempo é φ_t na equação da concentração. Neste caso, mesmo a existência dos p -Laplaceano não nos garantiria uma existência global.

5.2 Existência de soluções de um problema penalizado

Nesta seção introduzimos uma versão regularizada do problema original, o propósito é encontrar para cada $\delta > 0$, $\bar{T} \in (0, T]$ independente de δ e funções $(\varphi^\delta, \theta^\delta, c^\delta, v^\delta)$ tais que:

$$\begin{aligned} \varphi_t^\delta - \alpha \Delta \varphi^\delta &= -\varphi^\delta + 3(\varphi^\delta)^2 - 2(\varphi^\delta)^3 \\ &\quad + (\theta_e - \theta^\delta + c^\delta) |\nabla \varphi^\delta| \quad \text{em } Q_{\bar{T}}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\theta_t^\delta - \beta \Delta \theta^\delta + v^\delta \cdot \nabla \theta^\delta = \frac{L}{c_p} \varphi_t^\delta \quad \text{em } Q_{\bar{T}}, \quad (5.7)$$

$$c_t^\delta - \gamma \Delta c^\delta = \frac{\varphi_t^\delta}{1 - \varphi^\delta + k\varphi^\delta} c^\delta + \frac{v^\delta - \nabla \varphi^\delta}{1 - \varphi^\delta + k\varphi^\delta} \cdot \nabla c^\delta \quad \text{em } Q_{\bar{T}}, \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(v^\delta, u) + \nu(\nabla v^\delta, \nabla u) + (v^\delta \cdot \nabla v^\delta, u) &= -\left(\frac{(\varphi^\delta)^2}{1 - \varphi^\delta + \delta} v^\delta, u\right) \\ &\quad + (\vec{\sigma}_1 \theta^\delta, u) + (\vec{\sigma}_2 c^\delta, u), \quad \forall u \in V \quad \text{em } (0, \bar{T}), \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial \varphi^\delta}{\partial \nu} = \frac{\partial \theta^\delta}{\partial \nu} = \frac{\partial c^\delta}{\partial \nu} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega \times (0, \bar{T}), \quad (5.10)$$

$$\varphi^\delta(0) = \varphi_0, \quad \theta^\delta(0) = \theta_0, \quad c^\delta(0) = c_0, \quad v^\delta(0) = v_0 \quad \text{em } \Omega. \quad (5.11)$$

Como já foi dito, usaremos o Teorema do ponto fixo de Schauder para obtermos uma solução do modelo (5.6)-(5.11), para isto iremos definir um operador definido em um convexo fechado e limitado, para este propósito definimos os espaços X_t , Y_t e Z_t por

$$X_t = \{\xi \in L^\infty(Q_t) : \|\xi\|_{L^\infty(Q_t)} \leq R_1\},$$

$$Y_t = \{v \in L^2(Q_t); \|v\|_{L^2(Q_t)} \leq R_2\},$$

$$Z_t = \{\psi \in L^2(Q_t); 0 \leq \psi \leq 1\},$$

onde $Q_t = \Omega \times (0, t)$. As constantes R_1, R_2 serão escolhidas no decorrer da demonstração da seguinte proposição:

Proposição 5.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2 . Suponha $\delta > 0$ e que*

$$\varphi_0 \in W_q^{2-2/q}(\Omega), q > 2, q \neq 3 \text{ tal que } 0 \leq \varphi_0 \leq 1,$$

$$\theta_0 \in W_{s_1}^{2-2/s_1}(\Omega), s_1 > 2, s_1 \neq 3,$$

$$c_0 \in W_{s_2}^{2-2/s_2}(\Omega), s_2 > 2, s_2 \neq 3,$$

$$v_0 \in H \text{ com } v_0 = 0 \text{ em } \Omega_s(0) = \{x \in \Omega; \varphi_0(x) = 1\},$$

satisfazendo a condição de compatibilidade

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial \nu} = \frac{\partial \theta_0}{\partial \nu} = \frac{\partial c_0}{\partial \nu} = 0 \text{ na } \partial \Omega \times (0, T),$$

para $q, s_1, s_2 > 3$. Então existem $\bar{T} \in (0, T]$, independente de δ , e funções $(\varphi^\delta, \theta^\delta, c^\delta, v^\delta)$ tais que

$$\begin{aligned} \varphi^\delta &\in W_q^{2,1}(Q_{\bar{T}}), \frac{\partial \varphi^\delta}{\partial \nu} = 0, \varphi^\delta(0) = \varphi_0, 0 \leq \varphi^\delta \leq 1, \\ \theta^\delta &\in W_{r_1}^{2,1}(Q_{\bar{T}}), r_1 < \min\{q, s_1, 4\}, \frac{\partial \theta^\delta}{\partial \nu} = 0, \theta^\delta(0) = \theta_0, \\ c^\delta &\in W_{r_2}^{2,1}(Q_{\bar{T}}), r_2 < \min\{q, s_2, 4\}, \frac{\partial c^\delta}{\partial \nu} = 0, c^\delta(0) = c_0, \\ v^\delta &\in L^2(0, \bar{T}; V) \cap L^\infty(0, \bar{T}; H), v^\delta(0) = v_0, \end{aligned}$$

satisfazendo

$$\begin{aligned} \varphi_t^\delta - \alpha \Delta \varphi^\delta &= -\varphi^\delta + 3(\varphi^\delta)^2 - 2(\varphi^\delta)^3 \\ &\quad + (\theta_e - \theta^\delta + c^\delta) |\nabla \varphi^\delta| \text{ em } Q_{\bar{T}}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\theta_t^\delta - \beta \Delta \theta^\delta + v^\delta \cdot \nabla \theta^\delta = \frac{L}{c_p} \varphi_t^\delta \text{ em } Q_{\bar{T}}, \quad (5.13)$$

$$c_t^\delta - \gamma \Delta c^\delta = \frac{\varphi_t^\delta}{1 - \varphi^\delta + k\varphi^\delta} c^\delta + \frac{v^\delta - \nabla \varphi^\delta}{1 - \varphi^\delta + k\varphi^\delta} \cdot \nabla c^\delta \text{ em } Q_{\bar{T}}, \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(v^\delta, u) + \nu(\nabla v^\delta, \nabla u) + (v^\delta \cdot \nabla v^\delta, u) &= -\left(\frac{(\varphi^\delta)^2}{1 - \varphi^\delta + \delta} v^\delta, u\right) \\ &\quad + (\vec{\sigma}_1 \theta^\delta, u) + (\vec{\sigma}_2 c^\delta, u), \quad \forall u \in V \text{ em } (0, \bar{T}). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Demonstração: Usaremos aqui o Teorema de ponto fixo de Schauder (Teorema 1.2). Considere o seguinte operador, $\mathcal{T} : K \rightarrow K$, onde K é o convexo $Z_t \times X_t \times X_t \times Y_t$ e $\mathcal{T}$ o operador que aplica $(\widehat{\varphi}^\delta, \widehat{\theta}^\delta, \widehat{c}^\delta, \widehat{v}^\delta) \in K$ na solução $(\varphi^\delta, \theta^\delta, c^\delta, v^\delta)$ do seguinte problema:

$$\begin{aligned} \varphi_t^\delta - \alpha \Delta \varphi^\delta &= -\varphi^\delta + 3(\varphi^\delta)^2 - 2(\varphi^\delta)^3 \\ &\quad + (\theta_e - \widehat{\theta}^\delta + \widehat{c}^\delta) |\nabla \varphi^\delta| \text{ em } Q_t, \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\theta_t^\delta - \beta \Delta \theta^\delta + v^\delta \cdot \nabla \theta^\delta = \frac{L}{c_p} \varphi_t^\delta \text{ em } Q_t, \quad (5.17)$$

$$c_t^\delta - \gamma \Delta c^\delta = \frac{\varphi_t^\delta}{1 - \varphi^\delta + k\varphi^\delta} c^\delta + \frac{v^\delta - \nabla \varphi^\delta}{1 - \varphi^\delta + k\varphi^\delta} \cdot \nabla c^\delta \text{ em } Q_t, \quad (5.18)$$

$$\frac{d}{dt}(v^\delta, u) + \nu(\nabla v^\delta, \nabla u) + (v^\delta \cdot \nabla v^\delta, u) = -(F^\delta(\widehat{\varphi}^\delta) v^\delta, u)$$

$$+(\vec{\sigma}_1 \widehat{\theta}^\delta, u) + (\vec{\sigma}_2 \widehat{c}^\delta, u), \quad \forall u \in V, \quad \text{em } (0, t), \quad (5.19)$$

$$\frac{\partial \varphi^\delta}{\partial \nu} = \frac{\partial \theta^\delta}{\partial \nu} = \frac{\partial c^\delta}{\partial \nu} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega \times (0, t), \quad (5.20)$$

$$\varphi^\delta(0) = \varphi_0, \quad \theta^\delta(0) = \theta_0, \quad c^\delta(0) = c_0, \quad v^\delta(0) = v_0 \quad \text{em } \Omega. \quad (5.21)$$

No que segue mostraremos que o operador $\mathcal{T}$ satisfaz as hipóteses do Teorema do ponto fixo de Schauder. Primeiramente vamos encontrar $\bar{T} \in (0, T]$ para que o operador $\mathcal{T}$ esteja bem definido. Note que $(\theta_e - \widehat{\theta}^\delta + \widehat{C}^\delta) \in L^\infty(Q_t)$, então pelo Lema 2.6 existe uma única $\varphi^\delta \in W_q^{2,1}(Q_t)$, solução de (5.16) e $0 \leq \varphi^\delta \leq 1$, logo $\varphi^\delta \in Z_t$ e além disso

$$\begin{aligned} \|\varphi^\delta\|_{W_q^{2,1}(Q)} &\leq C(\|\varphi_0\|_{W_q^{2-2/q}(\Omega)}, t\|\widehat{\theta}^\delta\|_{L^\infty(Q)}, t\|\widehat{C}^\delta\|_{L^\infty(Q)}) \\ &\leq C(\|\varphi_0\|_{W_q^{2-2/q}(\Omega)}, tR_1). \end{aligned}$$

Observe que a equação (5.19) é uma variante da equação clássica de Navier-Stokes, do fato que $\vec{\sigma}_1 \widehat{\theta}^\delta + \vec{\sigma}_2 \widehat{c}^\delta \in L^\infty(Q_t)$ e usando o método de Faedo-Galerkin, pode-se mostrar que existe uma única $v^\delta \in L^2(0, t, V) \cap L^\infty(0, t, H)$ solução de (5.19) e se tomarmos $u = v^\delta$ em (5.19) nós obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_\Omega |v^\delta|^2 dx + \nu \int_\Omega |\nabla v^\delta|^2 dx &= - \int_\Omega F^\delta(\widehat{\varphi}^\delta)(v^\delta)^2 + \int_\Omega \vec{\sigma}_1 \widehat{\theta}^\delta v^\delta + \int_\Omega \vec{\sigma}_2 \widehat{c}^\delta v^\delta \\ &\leq \int_\Omega (\widehat{\theta}^\delta)^2 + \int_\Omega (\widehat{c}^\delta)^2 + \int_\Omega (v^\delta)^2 \\ &\leq 2R_1^2 |\Omega| + \int_\Omega (v^\delta)^2. \end{aligned}$$

integrando em $(0, t)$ temos

$$\|v^\delta\|_{L^\infty(0,t;H) \cap L^2(0,t;V)} \leq C(\|v_0\|_{L^2(\Omega)} + t^{1/2} R_1 |\Omega|). \quad (5.22)$$

Observe que $v^\delta \in L^4(Q_t)$ e $\varphi_t^\delta \in L^q(Q_t)$, aplicando a teoria L^p -parabólica (Teorema 1.3) na equação (5.17) obtemos uma solução $\theta^\delta \in W_{r_1}^{2,1}(Q_t)$, $r_1 < \min\{4, q, s_1\}$ de (5.17), deste mesmo Teorema e do Lema 2.6 temos

$$\begin{aligned} \|\theta^\delta\|_{W_{r_1}^{2,1}(Q_t)} &\leq C(\|\theta_0\|_{W_{r_1}^{2-2/r_1}(\Omega)} + \|\varphi_t^\delta\|_{L^{r_1}(Q_t)}) \\ &\leq C(\|\theta_0\|_{W_{s_1}^{2-2/s_1}(\Omega)} + \|\varphi_0\|_{W_q^{2-2/q}(\Omega)} + tR_1), \end{aligned} \quad (5.23)$$

onde C depende de $\|v^\delta\|_{L^4(Q_t)}$.

Aplicando agora a teoria L^p -parabólica na equação (5.18) obtemos a existência de $c^\delta \in W_{r_2}^{2,1}(Q_t)$, $r_2 < \min\{4, q, s_2\}$, pois $\varphi_t^\delta, \nabla \varphi^\delta \in L^q(Q_t)$ e $v^\delta \in L^4(Q_t)$, e deste mesmo teorema obtemos

$$\begin{aligned} \|c^\delta\|_{W_{r_2}^{2,1}(Q_t)} &\leq C(\|c_0\|_{W_{r_2}^{2-2/r_2}(\Omega)} + \|\varphi_t^\delta\|_{L^{r_2}(Q_t)}) \\ &\leq C_2(\|c_0\|_{W_{s_2}^{2-2/s_2}(\Omega)} + \|\varphi_0\|_{W_q^{2-2/q}(\Omega)} + tR_1), \end{aligned} \quad (5.24)$$

onde C depende de $\|v^\delta\|_{L^4(Q_t)}$ e $\|\nabla \varphi^\delta\|_{L^{r_2}(Q_t)}$. Usando (5.22) em (5.23) e (5.24) concluimos que

$$\begin{aligned} \|\theta^\delta\|_{W_{r_1}^{2,1}(Q_t)} + \|c^\delta\|_{W_{r_2}^{2,1}(Q_t)} &\leq \|\theta_0\|_{W_{s_1}^{2-2/s_1}(\Omega)} + \|c_0\|_{W_{s_2}^{2-2/s_2}(\Omega)} \\ &\quad + \|\varphi_0\|_{W_q^{2-2/q}(\Omega)} + \|v_0\|_{L^2(\Omega)} + t^{1/2}R_1. \end{aligned}$$

Assim, fixando R_1 suficientemente grande, podemos tomar $t \in (0, T]$ suficientemente pequeno independente de δ tal que $\|\theta^\delta\|_{W_{r_1}^{2,1}(Q_t)}, \|c^\delta\|_{W_{r_2}^{2,1}(Q_t)} \leq R_1$, como $r_1, r_2 > 2$ temos $W_{r_i}^{2,1}(Q_t) \hookrightarrow L^\infty(Q_t)$, $i = 1, 2$. Portanto $\theta^\delta, c^\delta \in X_t$, assim também podemos fixar R_2 grande de tal modo que $v^\delta \in Y_t$, denotamos $\bar{T} \in (0, T]$ tal que o operador $\mathcal{T}$ esteja bem definido de K em K .

Para provarmos a continuidade de $\mathcal{T}$ suponhamos que $(\widehat{\varphi}_k^\delta, \widehat{\theta}_k^\delta, \widehat{c}_k^\delta, \widehat{v}_k^\delta)$ convirja fortemente para $(\widehat{\varphi}^\delta, \widehat{\theta}^\delta, \widehat{c}^\delta, \widehat{v}^\delta)$ em K , e para cada k seja $(\varphi_k^\delta, \theta_k^\delta, c_k^\delta, v_k^\delta) = \mathcal{T}(\widehat{\varphi}_k^\delta, \widehat{\theta}_k^\delta, \widehat{c}_k^\delta, \widehat{v}_k^\delta)$, ou seja, solução do problema

$$\begin{aligned} \varphi_{k,t}^\delta - \alpha \Delta \varphi_k^\delta &= -\varphi_k^\delta + 3(\varphi_k^\delta)^2 - 2(\varphi_k^\delta)^3 \\ &\quad + (\theta_e - \widehat{\theta}_k^\delta + \widehat{c}_k^\delta) |\nabla \varphi_k^\delta| \text{ em } Q_{\bar{T}}, \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\theta_{k,t}^\delta - \beta \Delta \theta_k^\delta + v_k^\delta \cdot \nabla \theta_k^\delta = \varphi_{k,t}^\delta \text{ em } Q_{\bar{T}}, \quad (5.26)$$

$$c_{k,t}^\delta - \gamma \Delta c_k^\delta = \frac{\varphi_{k,t}^\delta}{1 - \varphi_k^\delta + K \varphi_k^\delta} c_k^\delta + \frac{v_k^\delta - \nabla \varphi_k^\delta}{1 - \varphi_k^\delta + K \varphi_k^\delta} \cdot \nabla c_k^\delta \text{ em } Q_{\bar{T}}, \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(v_k^\delta, u) + \nu(\nabla v_k^\delta, \nabla u) + (v_k^\delta \cdot \nabla v_k^\delta, u) &= -(F(\widehat{\varphi}_k^\delta) v_k^\delta, u) \\ &\quad + (\vec{\sigma}_1 \widehat{\theta}_k^\delta, u) + (\vec{\sigma}_2 \widehat{c}_k^\delta, u), \quad \forall u \in V, t \in (0, \bar{T}), \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\frac{\partial \varphi_k^\delta}{\partial \nu} = \frac{\partial \theta_k^\delta}{\partial \nu} = \frac{\partial c_k^\delta}{\partial \nu} = 0 \quad \text{na } \partial \Omega \times (0, \bar{T}), \quad (5.29)$$

$$\varphi_k^\delta(0) = \varphi_0, \quad \theta_k^\delta(0) = \theta_0, \quad c_k^\delta(0) = c_0, \quad v_k^\delta(0) = v_0 \quad \text{em } \Omega. \quad (5.30)$$

Mostraremos que $(\varphi_k^\delta, \theta_k^\delta, c_k^\delta, v_k^\delta)$ converge fortemente em K para $(\varphi^\delta, \theta^\delta, c^\delta, v^\delta) = T(\widehat{\varphi}^\delta, \widehat{\theta}^\delta, \widehat{c}^\delta, \widehat{v}^\delta)$.

De (5.22) concluimos

$$\|v_k^\delta\|_{L^\infty(0, \overline{T}; H) \cap L^2(0, \overline{T}; V)} \leq C \|v_0\|_{L^2(\Omega)}. \quad (5.31)$$

Voltando a equação (5.28) obtemos também que

$$\|v_{k,t}^\delta\|_{V'} \leq C \left(\|v_k^\delta\|_V + \|v_k^\delta\|_{L^4(\Omega)}^2 + \|v_k^\delta\|_{L^2(\Omega)} + \|\widehat{\theta}_k^\delta\|_{L^2(\Omega)} + \|\widehat{c}_k^\delta\|_{L^2(\Omega)} \right),$$

e de (5.31) e que $\|\widehat{\theta}_k^\delta\|_{L^2(\Omega)}, \|\widehat{c}_k^\delta\|_{L^2(\Omega)} \leq C$ obtemos

$$\|v_{k,t}^\delta\|_{L^2(0, \overline{T}; V')} \leq C. \quad (5.32)$$

Do lema 2.6 e que $\|\widehat{\theta}_k^\delta\|_{L^\infty(Q_{\overline{T}})}, \|\widehat{c}_k^\delta\|_{L^\infty(Q_{\overline{T}})} \leq C$, obtemos

$$\|\varphi_k^\delta\|_{W_q^{2,1}(Q_{\overline{T}})} \leq C. \quad (5.33)$$

Agora, de (5.23) e (5.24)

$$\|\theta_k^\delta\|_{W_{r_1}^{2,1}(Q_{\overline{T}})} \leq C, \quad \|c_k^\delta\|_{W_{r_2}^{2,1}(Q_{\overline{T}})} \leq C. \quad (5.34)$$

Portanto de (5.31)-(5.34) existem $(\widetilde{\varphi}^\delta, \widetilde{\theta}^\delta, \widetilde{c}^\delta, \widetilde{v}^\delta)$ e uma subsequência de $(\varphi_k^\delta, \theta_k^\delta, c_k^\delta, v_k^\delta)$ que ainda denotaremos por $(\varphi_k^\delta, \theta_k^\delta, c_k^\delta, v_k^\delta)$, tal que, quando $k \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} \varphi_k^\delta &\rightarrow \widetilde{\varphi}^\delta && \text{em } L^p(Q_{\overline{T}}), \\ \varphi_k^\delta &\rightharpoonup \widetilde{\varphi}^\delta && \text{em } W_q^{2,1}(Q_{\overline{T}}), \\ \theta_k^\delta &\rightarrow \widetilde{\theta}^\delta && \text{em } L^\infty(Q_{\overline{T}}), \\ \theta_k^\delta &\rightharpoonup \widetilde{\theta}^\delta && \text{em } W_{r_1}^{2,1}(Q_{\overline{T}}), \\ c_k^\delta &\rightarrow \widetilde{c}^\delta && \text{em } L^\infty(Q_{\overline{T}}), \\ c_k^\delta &\rightharpoonup \widetilde{c}^\delta && \text{em } W_{r_2}^{2,1}(Q_{\overline{T}}), \\ v_k^\delta &\rightarrow \widetilde{v}^\delta && \text{em } L^2(Q_{\overline{T}}) \cap C([0, \overline{T}]; V'), \\ v_k^\delta &\rightharpoonup \widetilde{v}^\delta && \text{em } L^2(0, \overline{T}; V) \cap C([0, \overline{T}]; V'). \end{aligned}$$

Agora nos falta passar o limite quando $k \rightarrow +\infty$ em (5.25)-(5.30). O limite nas equações (5.25), (5.26) e (5.28) são feitas de modo análogo ao capítulo 4.

Para passar o limite em (5.27) nós observamos que $\frac{1}{1 - \varphi_k^\delta + K\varphi_k^\delta}$ converge fortemente para $\frac{1}{1 - \tilde{\varphi}^\delta + K\tilde{\varphi}^\delta}$ e c_k^δ converge fortemente para $\tilde{c}^\delta$ em $L^\infty(Q_{\overline{T}})$, $\varphi_{k,t}^\delta \rightharpoonup \tilde{\varphi}_t^\delta$ em $L^2(Q_{\overline{T}})$ e assim $\frac{(\varphi_{k,t}^\delta)^2}{1 - \varphi_k^\delta + K\varphi_k^\delta} c_k^\delta$ converge para $\frac{(\tilde{\varphi}_t^\delta)^2}{1 - \tilde{\varphi}^\delta + K\tilde{\varphi}^\delta} \tilde{c}^\delta$ fracamente em $L^2(Q_{\overline{T}})$. Note também que $v_k^\delta \rightarrow \tilde{v}^\delta$, $\nabla \varphi_k^\delta \rightarrow \nabla \tilde{\varphi}^\delta$ em $L^2(Q_{\overline{T}})$, $\frac{1}{1 - \varphi_k^\delta + K\varphi_k^\delta} \rightarrow \frac{1}{1 - \tilde{\varphi}^\delta + K\tilde{\varphi}^\delta}$ em $L^\infty(Q_{\overline{T}})$ e $\nabla c_k^\delta \rightarrow \nabla \tilde{c}^\delta$ em $L^2(Q_{\overline{T}})$, portanto podemos passar o limite em (5.27).

Assim, existe uma subsequência de $(\varphi_k^\delta, \theta_k^\delta, c_k^\delta, v_k^\delta)$ que converge fortemente para $(\tilde{\varphi}^\delta, \tilde{\theta}^\delta, \tilde{c}^\delta, \tilde{v}^\delta)$ o qual é uma solução de (5.9)-(5.18), e pela unicidade de solução de (5.9)-(5.18) temos que $(\tilde{\varphi}^\delta, \tilde{\theta}^\delta, \tilde{c}^\delta, \tilde{v}^\delta) = \mathcal{T}(\tilde{\varphi}^\delta, \tilde{\theta}^\delta, \tilde{c}^\delta, \tilde{v}^\delta)$, e isto vale para qualquer subsequência de $(\varphi_k^\delta, \theta_k^\delta, c_k^\delta, v_k^\delta)$, mostrando assim que a sequência original $(\varphi_k^\delta, \theta_k^\delta, c_k^\delta, v_k^\delta)$ converge fortemente para $(\tilde{\varphi}^\delta, \tilde{\theta}^\delta, \tilde{c}^\delta, \tilde{v}^\delta)$ em K , portanto $\mathcal{T}$ é contínuo.

Falta nos mostrar que $\mathcal{T}$ é um operador compacto, mas para isto basta notar que $\mathcal{T}$ é limitado em $W_q^{2,1}(Q_{\overline{T}}) \times W_{r_1}^{2,1}(Q_{\overline{T}}) \times W_{r_2}^{2,1}(Q_{\overline{T}}) \times \{v \in L^2(0, \overline{T}, V); v_t \in L^2(0, \overline{T}; V')\}$ e que este espaço tem imersão compacta em K . Portanto podemos aplicar o Teorema de Schauder, assim existe pelo menos um ponto fixo $(\varphi, \theta, c, v) \in K$ de $\mathcal{T}_1$. ■

A existência de solução para o modelo penalizado está garantida pelo Lema 5.1, agora precisamos de estimativas suficientes para podermos passar o limite em (5.12)-(5.15), o seguinte Lema nos dá as estimativas desejadas.

Lema 5.1 *Existe uma constante C tal que, para todo $\delta > 0$,*

$$\|v^\delta\|_{L^\infty(0, \overline{T}; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, \overline{T}; V)} + \int_0^{\overline{T}} \int_\Omega \frac{(\varphi^\delta)^2}{1 - \varphi^\delta + \delta} |v^\delta|^2 dx dt \leq C, \quad (5.35)$$

$$\|\varphi^\delta\|_{W_q^{2,1}(Q_{\overline{T}})} \leq C, \quad (5.36)$$

$$\|\theta^\delta\|_{W_{r_1}^{2,1}(Q_{\overline{T}})} \leq C, \quad 1 \leq r_1 < \min\{4, q, s_1\}, \quad (5.37)$$

$$\|c^\delta\|_{W_{r_2}^{2,1}(Q_{\overline{T}})} \leq C, \quad 1 \leq r_2 < \min\{4, q, s_2\}. \quad (5.38)$$

Demonstração: Note que para todo $\delta > 0$, $\|\theta^\delta\|_{L^\infty(Q_{\overline{T}})}, \|c^\delta\|_{L^\infty(Q_{\overline{T}})} \leq R_1$; então, tomando

$u = v^\delta$ em (5.9), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |v^\delta|^2 + \nu \int_{\Omega} |\nabla v^\delta|^2 + \int_{\Omega} \frac{(\varphi^\delta)^2}{1 - \varphi^\delta + \delta} (v^\delta)^2 &= \int_{\Omega} \vec{\sigma}_1 \theta^\delta v^\delta + \int_{\Omega} \vec{\sigma}_2 c^\delta v^\delta \\ &\leq C \int_{\Omega} (\theta^\delta)^2 + C \int_{\Omega} (c^\delta)^2 + \int_{\Omega} (v^\delta)^2 \\ &\leq C + \int_{\Omega} (v^\delta)^2. \end{aligned}$$

Integrando em t e usando o Lema de Gronwall, obtemos então (5.35). O Lema 2.6 nos garante (5.36) e as estimativas (5.37) e (5.38) seguem de (5.34). ■

Para passarmos o limite na equação de Navier-Stokes, precisamos de uma estimativa para v_t^δ , mas devido ao termo $\varphi/(1-\varphi)$ ser singular em Q_s , seremos capazes de obter tal estimativa uniformemente em δ apenas localmente em Q_{ml} .

Lema 5.2 *Dados $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$, $U \subset \Omega_{ml}(t_1)$ tal que $\overline{U} \times [t_1, t_2] \subset Q_{ml} \cup \Omega_{ml}(0) \cup \Omega_{ml}(T)$, existe $\delta_0(U, t_1, t_2) > 0$ e uma constante $C(\delta_0)$ tal que, para todo $\delta < \delta_0$,*

$$\|v_t^\delta\|_{L^2(t_1, t_2; V(U)')} \leq C. \quad (5.39)$$

Demonstração: Análoga à demonstração do Lema 3.2.

5.3 Passagem ao limite

Os Lemas 5.1 e 5.2 nos garantem que (v^δ) é limitada em

$$\{v \in L^2(t_1, t_2; V(U)); v_t \in L^2(t_1, t_2; V(U)')\}.$$

Agora, da imersão compacta deste espaço em $L^2(U \times (t_1, t_2))$ concluímos que existe v e uma subsequência de (v^δ) (a qual ainda denotaremos por v^δ) tal que v^δ converge fortemente para v em $L^2(U \times (t_1, t_2))$. Observe que Q_{ml} é um conjunto aberto e pode ser coberto por uma família enumerável de conjuntos abertos $U_i \times (t_i, t_{i+1})$ tal que $U_i \subset \Omega_{ml}(t_i)$, então por argumentos de diagonal, obtemos

$$v^\delta \rightarrow v \quad \text{em} \quad L_{loc}^2(Q_{ml} \cup \Omega_{ml}(0) \cup \Omega_{ml}(\overline{T})) \quad \text{fortemente.} \quad (5.40)$$

Além disso, de (5.35) nós temos que $v \in L^2(0, \bar{T}; V) \cap L^\infty(0, \bar{T}; H)$ e

$$v^\delta \rightharpoonup v \quad \text{em } L^2(0, \bar{T}; V) \text{ fracamente,} \quad (5.41)$$

$$v^\delta \xrightarrow{*} v \quad \text{em } L^\infty(0, \bar{T}; H) \text{ fracamente estrela.} \quad (5.42)$$

Agora nós pressupomos do Lema 5.1 e usando imersões compactas que existe $\varphi \in W_q^{2,1}(Q_{\bar{T}})$, $\theta \in W_{r_1}^{2,1}(Q_{\bar{T}})$ e $c \in W_{r_2}^{2,1}(Q_{\bar{T}})$, e uma subsequência de $(\varphi^\delta, \theta^\delta, c^\delta)$ (a qual ainda denotaremos por $(\varphi^\delta, \theta^\delta, c^\delta)$) tal que, quando $\delta \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} \varphi^\delta &\rightarrow \varphi && \text{uniformemente em } Q_{\bar{T}}, \\ \varphi^\delta &\rightarrow \varphi && \text{em } L^2(0, \bar{T}; W_2^1(\Omega)) \text{ fortemente,} \\ \varphi^\delta &\rightharpoonup \varphi && \text{em } W_q^{2,1}(Q_{\bar{T}}) \text{ fracamente,} \\ \theta^\delta &\rightharpoonup \theta && \text{em } W_{r_1}^{2,1}(Q_{\bar{T}}), \ 1 \leq r_1 < \min\{4, q, s_1\} \text{ fracamente,} \\ c^\delta &\rightharpoonup c && \text{em } W_{r_2}^{2,1}(Q_{\bar{T}}), \ 1 \leq p < \min\{4, q, s_2\} \text{ fracamente.} \end{aligned} \quad (5.43)$$

Resta nos passar o limite quando $\delta \rightarrow 0$ em (5.6)-(5.11). Seja $\eta \in L^2(0, \bar{T}; V)$ com suporte compacto em $Q_{ml} \cup \Omega_{ml}(0) \cup \Omega_{ml}(\bar{T})$ e $\eta_t \in L^2(0, \bar{T}; V')$, tomando $u = \eta(t)$ em (5.9) e integrando em $(0, t)$ obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^t (v_t^\delta, \eta) + \nu(\nabla v^\delta, \nabla \eta) + (v^\delta \cdot \nabla v^\delta, \eta) + \left(\frac{(\varphi^\delta)^2}{1 - \varphi^\delta + \delta} v^\delta, \eta \right) ds \\ = \int_0^t (\vec{\sigma}_1 \theta^\delta \eta) ds + \int_0^t (\vec{\sigma}_2 c^\delta, \eta) ds. \end{aligned}$$

Desde que $\text{supp } \eta \subset Q_{ml} \cup \Omega_{ml}(0) \cup \Omega_{ml}(\bar{T})$ nós temos que $\text{supp } \eta(t) \subset \Omega_{ml}(t)$ para quase todo $t \in [0, \bar{T}]$, portanto

$$\begin{aligned} (v^\delta(t), \eta(t)) - \int_0^t (v^\delta, \eta_t) + \nu \int_0^t (\nabla v^\delta, \nabla \eta) + \int_0^t (v^\delta \cdot \nabla v^\delta, \eta) \\ = (v_0, \eta(0)) - \int_0^t \left(\frac{(\varphi^\delta)^2}{1 - \varphi^\delta + \delta} v^\delta, \eta \right) + \int_0^t (\vec{\sigma}_1 \theta^\delta \eta) ds + \int_0^t (\vec{\sigma}_2 c^\delta, \eta) ds. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Da convergência uniforme de φ^δ para φ segue que $\frac{(\varphi^\delta)^2}{1 - \varphi^\delta + \delta}$ converge para $\frac{\varphi^2}{1 - \varphi}$ uniformemente em subconjuntos compactos de $Q_{ml} \cup \Omega_{ml}(0) \cup \Omega_{ml}(\bar{T})$ e de (5.40)-(5.43) podemos passar o limite em (5.44) e obter (5.5).

Vamos mostrar que $v = 0$ quase sempre em $(Q_{\bar{T}})_s$. Dado $\epsilon > 0$ existe $\bar{\delta}(\epsilon)$ tal que se $\delta < \bar{\delta}$ então $|\varphi^\delta(x, t) - \varphi(x, t)| \leq \epsilon$ para todo $(x, t) \in Q_{\bar{T}}$, em particular para $(x, t) \in (Q_{\bar{T}})_s =$

$\{(x, t) \in Q_{\bar{T}}; \varphi(x, t) = 1\}$ temos $1 - \epsilon \leq \varphi^\delta$, logo de (3.48) temos

$$\frac{1}{\epsilon + \delta} \int_{(Q_{\bar{T}})_s} (\varphi^\delta)^2 |v^\delta|^2 dx dt \leq \int_0^{\bar{T}} \int_{\Omega} \frac{(\varphi^\delta)^2}{1 - \varphi^\delta + \delta} |v^\delta|^2 dx dt \leq C.$$

Lembremos que $\varphi^\delta \rightarrow 1$ uniformemente em Q_s e que $v^\delta \rightharpoonup v$ em $L^2(Q_s)$ quando $\delta \rightarrow 0$, então $\varphi^\delta v^\delta \rightharpoonup v$ em $L^2(Q_s)$. Portanto

$$\int_{Q_s} v^2 \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \int_{Q_s} |\varphi^\delta v^\delta|^2 \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} C(\epsilon + \delta) \leq C\epsilon,$$

e do fato que ϵ é arbitrário temos que $v = 0$ quase sempre em Q_s .

O Lema 5.1 nos dá estimativas suficientes para podermos passar o limite em (5.6)-(5.9) e obter (5.2)-(5.5). Finalmente de (5.43) temos que $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = \frac{\partial \theta}{\partial \nu} = \frac{\partial c}{\partial \nu} = 0$ na $\partial\Omega \times (0, \bar{T})$ e $\varphi(0) = \varphi_0$, $\theta(0) = \theta_0$, $c(0) = c_0$ e do Lema 5.2 temos que $v^\delta(0) \rightharpoonup v(0)$ em $V(U)'$, logo $v(0) = v_0$ em $\Omega_{ml}(0)$. Portanto a prova do Teorema 5.1 está terminada. ■

Capítulo 6

Um Modelo para Ligas Binárias: Existência Local no Caso Tridimensional

Neste capítulo apresentaremos resultados de existência e regularidade para um modelo tridimensional do tipo campo de fases para ligas binárias com maior dissipação do que o do modelo do capítulo anterior.

O motivo para isto é que agora, à dificuldade de controlar o acoplamento com a concentração, temos adicionalmente um problema de uma dimensão maior, o que torna piores as possibilidades de imersões de espaços e de desigualdades de interpolação. Como consequência desta maior dificuldade, se adotássemos um modelo semelhante ao do capítulo anterior considerado agora no caso tridimensional, com técnicas análogas à daquele capítulo, não conseguiríamos nem mesmo provar um resultado de existência local.

Por outro lado, considerando um modelo de fluido com uma maior dissipação viscosa na parte não-sólida pela incorporação na equação do movimento do termo envolvendo um certo p -Laplaceano da velocidade, conseguiremos um pouco mais de integrabilidade para a velocidade, compensando o fato de estarmos no caso tridimensional. Com isto, obteremos uma solução generalizada num sentido semelhante àquela do Capítulo 4, porém apenas local no tempo.

Outra observação é a de que uma possível presença de um q -Laplaceano na equação do

campo de fases (necessária no Capítulo 4 para a existência global no tempo), ou mesmo na equação da concentração, não nos seria suficiente para provar a existência de soluções globais no tempo, pois o termo φ_t na equação da concentração nos impede de obtermos estimativas baixas para (φ, θ, c, v) . Por outro lado, como veremos, para obter soluções locais no tempo, não será necessário dispor de maior integrabilidade do campo de fases ou da concentração. Por esta razão, consideramos neste capítulo apenas um modelo que apresenta o mínimo de dissipação para o qual conseguimos provar que existe tais soluções locais no tempo, isto é, uma maior dissipação foi incluída apenas na equação da velocidade.

Finalmente, observamos que técnicas usadas neste capítulo são similares à do capítulo anterior.

6.1 Apresentação do Modelo 4 e o resultado principal

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um aberto, limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave, $T \in \mathbb{R}$ finito e $Q = \Omega \times (0, T)$. Considere o seguinte problema de fronteira livre que consiste em encontrar funções (φ, θ, c, v) tais que:

$$\begin{aligned}
\varphi_t - \alpha \Delta \varphi &= -\varphi + 3\varphi^2 - 2\varphi^3 + (\theta_e - \theta + c)|\nabla \varphi| \text{ em } Q, \\
\theta_t - \beta \Delta \theta + v \cdot \nabla \theta &= \frac{L}{c_p} \varphi_t \text{ em } Q, \\
c_t - \gamma \Delta c &= \frac{\varphi_t}{1 - \varphi + k\varphi} c + \frac{v - \nabla \varphi}{1 - \varphi + k\varphi} \cdot \nabla c \text{ em } Q, \\
v_t - \nu \Delta v + \nu_0 \mathcal{A}v + v \cdot \nabla v &= -\frac{\varphi^2}{1 - \varphi} v + \vec{\sigma}_1 \theta + \vec{\sigma}_2 c, \text{ em } Q_{ml}, \\
\operatorname{div} v &= 0 \text{ em } Q_{ml}, \\
v &= 0 \text{ em } Q_s, \\
\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = \frac{\partial \theta}{\partial \nu} = \frac{\partial c}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{na } \partial\Omega \times (0, T), \quad v = 0 \text{ na } \partial Q_{ml}, \\
\varphi(0) = \varphi_0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad c(0) = c_0, \quad v(0) = v_0 &\text{ em } \Omega,
\end{aligned} \tag{6.1}$$

onde os domínios $Q_{ml}, Q_s, \Omega_{ml}(0)$ estão definidos em (1)-(5).

Como antes, o campo de fases é denotado por φ , as funções θ e v estão respectivamente relacionadas com a temperatura e velocidade do material e a função c é a concentração do

soluta na mistura. $\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2$ são constantes relacionadas com a densidade do material e a força da gravidade e ν denotará o vetor normal exterior à $\partial\Omega$. α, β, γ são constantes positivas, L uma constante positiva relacionada ao calor latente e c_p uma constante relacionada ao calor específico do material.

$\mathcal{A}$ é o operador p -Laplaceano, o qual é um operador monotônico maximal associado a expressão:

$$\mathcal{A}(v) = -\operatorname{div}(|\nabla v|^{p-2} \nabla v).$$

O resultado principal desse capítulo é o seguinte teorema de existência de solução local no tempo para o problema (6.1).

Teorema 6.1 *Sejam $0 < T < \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um aberto, limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2 . Suponha que*

$$\begin{aligned} \varphi_0 &\in W_q^{2-2/q}(\Omega), q > 3, \text{ tal que } \frac{\partial \varphi_0}{\partial \nu} = 0 \text{ e } 0 \leq \varphi_0 \leq 1, \\ \theta_0 &\in W_{s_1}^{2-2/s_1}(\Omega), s_1 > 3, \text{ tal que } \frac{\partial \theta_0}{\partial \nu} = 0, \\ c_0 &\in W_{s_2}^{2-2/s_2}(\Omega), s_2 > 3, \text{ tal que } \frac{\partial c_0}{\partial \nu} = 0, \\ v_0 &\in H \text{ com } v_0 = 0 \text{ em } \Omega_s(0) = \{x \in \Omega; \varphi_0(x) = 1\}. \end{aligned}$$

Então existem $\bar{T} \in (0, T]$ e funções $(\varphi, \theta, c, v, \chi)$ tais que

$$\begin{aligned} \varphi &\in W_q^{2,1}(Q_{\bar{T}}), \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0, \varphi(0) = \varphi_0 \text{ e } 0 \leq \varphi \leq 1 \text{ q.s. em } Q_{\bar{T}}, \\ \theta &\in W_{r_1}^{2,1}(Q_{\bar{T}}), r_1 < \min\{p\frac{5}{3}, q, s_1\}, \frac{\partial \theta}{\partial \nu} = 0, \theta(0) = \theta_0, \\ c &\in W_{r_2}^{2,1}(Q_{\bar{T}}), r_2 = \min\{p\frac{5}{3}, q, s_2\}, \frac{\partial c}{\partial \nu} = 0, c(0) = c_0, \\ v &\in L^p(0, \bar{T}; V^p) \cap L^\infty(0, \bar{T}; H), v(0) = v_0 \text{ em } \Omega_{ml}(0), \\ \chi &\in L^{p'}(0, \bar{T}; (V^p)'), \end{aligned}$$

satisfazendo

$$\varphi_t - \alpha \Delta \varphi = -\varphi + 3\varphi^2 - 2\varphi^3 + (\theta_e - \theta + c)|\nabla \varphi| \text{ q.s. em } Q_{\bar{T}}, \quad (6.2)$$

$$\theta_t - \beta \Delta \theta + v \cdot \nabla \theta = \frac{L}{c_p} \varphi_t \text{ q.s. em } Q_{\bar{T}}, \quad (6.3)$$

$$c_t - \gamma \Delta c = \frac{\varphi_t}{1 - \varphi + k\varphi} c + \frac{v - \nabla \varphi}{1 - \varphi + k\varphi} \cdot \nabla c \quad \text{em } Q_{\overline{T}}, \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} & (v(t), \eta(t)) - \int_0^t (v, \eta_t) ds + \nu \int_0^t (\nabla v, \nabla \eta) + \nu_0 \int_0^t (\chi, \eta) ds + \int_0^t (v \cdot \nabla v, \eta) \\ &= (v_0, \eta(0)) - \int_0^t \left(\frac{\varphi^2}{1 - \varphi} v, \eta \right) ds + \int_0^t (\vec{\sigma}_1 \theta, \eta) ds + \int_0^t (\vec{\sigma}_2 c, \eta) ds, \end{aligned} \quad (6.5)$$

$t \in (0, T)$, para qualquer $\eta \in \mathcal{W}_\varphi$, onde

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_\varphi = \{ \eta \in L^p(0, T; V^p) : \eta \text{ com suporte compacto em} \\ Q_{ml} \cup \Omega_{ml}(0) \cup \Omega_{ml}(T) \text{ e } \eta_t \in L^{p'}(0, T; (V^p)') \}, \end{aligned}$$

e $Q_{ml} = \{(x, t) \in Q : 0 \leq \varphi(x, t) < 1\}$ e $\Omega_{ml} = \{x \in \Omega : 0 \leq \varphi(x, t) < 1\}$.

Além disso, $v = 0$ quase sempre em $Q_s = \{(x, t) \in Q : \varphi(x, t) = 1\}$.

As funções $(\varphi, \theta, c, v, \chi)$ constituem uma solução generalizada pois com as seguintes condições adicionais de regularidade: a condição de integrabilidade $\varphi^2/(1 - \varphi) \in L^s(0, T; L^{1+\delta}; (\Omega_{ml}(t)))$, para $s = p/(p-2)$ e algum $\delta > 0$ quando $p = 3$ ou $\delta = 0$ quando $p > 3$, e também a condição de aproximação $v \in \overline{\mathcal{W}_\varphi}$, onde o fecho é tomado na norma natural $\|\cdot\|_{L^p(0, T; V^p)} + \|\cdot\|_{L^{p'}(0, T; (V^p)')}$, então podemos concluir que $\chi = \mathcal{A}v$ e a solução generalizada se torna uma solução fraca no sentido usual.

Observação 6.1 O fato de termos $s_1, s_2 > 3$, nos garante a imersão compacta de $W_{s_i}^{2,1}$ em $C(\overline{Q})$, $i = 1, 2$.

Observação 6.2 Valem os mesmos comentários da observação 4.2 feita no Capítulo 4.

6.2 Existência de soluções de um problema penalizado

Nesta seção, de forma análoga aos capítulos anteriores, iremos definir uma família de problemas aproximados obtidos por penalização do problema original e obter os correspondentes resultados de existência.

Passemos aos problemas aproximados: para cada $\delta > 0$ queremos encontrar funções $(\varphi^\delta, \theta^\delta, c^\delta, v^\delta)$ tais que:

$$\begin{aligned}\varphi_t^\delta - \alpha \Delta \varphi^\delta &= -\varphi^\delta + 3(\varphi^\delta)^2 - 2(\varphi^\delta)^3 \\ &\quad + (\theta_e - \theta^\delta + c^\delta) |\nabla \varphi^\delta| \text{ em } Q,\end{aligned}\tag{6.6}$$

$$\theta_t^\delta - \beta \Delta \theta^\delta + v^\delta \cdot \nabla \theta^\delta = \frac{L}{c_p} \varphi_t^\delta \text{ em } Q,\tag{6.7}$$

$$c_t^\delta - \gamma \Delta c^\delta = \frac{\varphi_t^\delta}{1 - \varphi^\delta + k\varphi^\delta} c^\delta + \frac{v^\delta - \nabla \varphi^\delta}{1 - \varphi^\delta + k\varphi^\delta} \cdot \nabla c^\delta \text{ em } Q,\tag{6.8}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(v^\delta, u) + \nu(\nabla v^\delta, \nabla u) + \nu_0(\mathcal{A}v^\delta, u) + (v^\delta \cdot \nabla v^\delta, u) &= -(F^\delta(\varphi^\delta)v^\delta, u) \\ &\quad + (\vec{\sigma}_1 \theta^\delta, u) + (\vec{\sigma}_2 c^\delta, u), \quad \forall u \in V^p, \text{ em } (0, T),\end{aligned}\tag{6.9}$$

$$\frac{\partial \varphi^\delta}{\partial \nu} = \frac{\partial \theta^\delta}{\partial \nu} = \frac{\partial c^\delta}{\partial \nu} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega \times (0, T),\tag{6.10}$$

$$\varphi^\delta(0) = \varphi_0, \quad \theta^\delta(0) = \theta_0, \quad c^\delta(0) = c_0, \quad v^\delta(0) = v_0 \text{ em } \Omega.\tag{6.11}$$

Na análise deste problema, daremos mais atenção aos detalhes relativo à equação (6.8), pois as outras equações são analisadas de modo análogo ao do Capítulo 4.

A proposição seguinte nos garante a existência de soluções de (6.6)-(6.11).

Proposição 6.1 *Sejam $0 < T < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto, limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2 .*

Suponha $\delta > 0$ e que

$$\begin{aligned}\varphi_0 &\in W_q^{2-2/q}(\Omega), \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial \nu} = 0, \quad q > 3, \quad 0 \leq \varphi_0 \leq 1, \\ \theta_0 &\in W_{s_1}^{2-2/s_1}(\Omega), \quad s_1 > 3, \quad \frac{\partial \theta_0}{\partial \nu} = 0, \\ c_0 &\in W_{s_2}^{2-2/s_2}(\Omega), \quad s_2 > 3, \quad \frac{\partial c_0}{\partial \nu} = 0, \\ v_0 &\in H \text{ com } v_0 = 0 \text{ em } \Omega_s(0) = \{x \in \Omega; \varphi_0(x) = 1\}.\end{aligned}$$

Então existem $\bar{T} \in (0, T]$ e funções $(\varphi^\delta, \theta^\delta, C^\delta, v^\delta)$ tais que

$$\begin{aligned}\varphi^\delta &\in W_q^{2,1}(Q_{\bar{T}}), \quad \frac{\partial \varphi^\delta}{\partial \nu} = 0, \quad \varphi^\delta(0) = \varphi_0, \quad 0 \leq \varphi^\delta \leq 1, \\ \theta^\delta &\in W_{r_1}^{2,1}(Q_{\bar{T}}), \quad r_1 < \min\{q, p5/3, s_1\}, \quad \frac{\partial \theta^\delta}{\partial \nu} = 0, \quad \theta^\delta(0) = \theta_0, \\ c^\delta &\in W_{r_2}^{2,1}(Q_{\bar{T}}), \quad r_2 < \min\{q, p5/3, s_2\}, \quad \frac{\partial c^\delta}{\partial \nu} = 0, \quad c^\delta(0) = c_0, \\ v^\delta &\in L^p(0, \bar{T}; V^p) \cap L^\infty(0, \bar{T}; H), \quad v^\delta(0) = v_0,\end{aligned}$$

satisfazendo

$$\begin{aligned} \varphi_t^\delta - \alpha \Delta \varphi^\delta &= -\varphi^\delta + 3(\varphi^\delta)^2 - 2(\varphi^\delta)^3 \\ &\quad + (\theta_e - \theta^\delta + c^\delta) |\nabla \varphi^\delta| \text{ em } Q, \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\theta_t^\delta - \beta \Delta \theta^\delta + v^\delta \cdot \nabla \theta^\delta = \frac{L}{c_p} \varphi_t^\delta \text{ em } Q, \quad (6.13)$$

$$c_t^\delta - \gamma \Delta c^\delta = \frac{\varphi_t^\delta}{1 - \varphi^\delta + k\varphi^\delta} c^\delta + \frac{v^\delta - \nabla \varphi^\delta}{1 - \varphi^\delta + k\varphi^\delta} \nabla c^\delta \text{ em } Q, \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(v^\delta, u) + \nu(\nabla v^\delta, \nabla u) + \nu_0(\mathcal{A}v^\delta, u) + (v^\delta \cdot \nabla v^\delta, u) &= -(F^\delta(\varphi^\delta)v^\delta, u) \\ &\quad + (\vec{\sigma}_1 \theta^\delta, u) + (\vec{\sigma}_2 c^\delta, u), \quad \forall u \in V^p, \text{ em } (0, T). \end{aligned} \quad (6.15)$$

Demonstração: Como nos capítulos anteriores denotaremos

$$F^\delta(\varphi) = \frac{\varphi^2}{1 - \varphi + \delta}.$$

Considere o seguinte operador, $\mathcal{T} : K \rightarrow K$, onde K é o convexo $Z_t \times X_t \times X_t \times Y_t$, t a ser escolhido no decorrer da demonstração, $\mathcal{T}$ o operador que aplica $(\widehat{\varphi}^\delta, \widehat{\theta}^\delta, \widehat{c}^\delta, \widehat{v}^\delta) \in K$ na solução $(\varphi^\delta, \theta^\delta, c^\delta, v^\delta)$ do seguinte problema

$$\varphi_t^\delta - \Delta \varphi^\delta = -\varphi^\delta + 3(\varphi^\delta)^2 - 2(\varphi^\delta)^3 + (\theta_e - \widehat{\theta}^\delta + \widehat{c}^\delta) |\nabla \varphi^\delta| \text{ em } Q_t, \quad (6.16)$$

$$\theta_t^\delta - \beta \Delta \theta^\delta + v^\delta \cdot \nabla \theta^\delta = \frac{L}{c_p} \varphi_t^\delta \text{ em } Q_t, \quad (6.17)$$

$$c_t^\delta - \gamma \Delta c^\delta = \frac{\varphi_t^\delta}{1 - \varphi^\delta + k\varphi^\delta} c^\delta + \frac{v^\delta - \nabla \varphi^\delta}{1 - \varphi^\delta + k\varphi^\delta} \nabla c^\delta \text{ em } Q_t, \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(v^\delta, u) + \nu(\nabla v^\delta, \nabla u) + \nu_0(\mathcal{A}v^\delta, u) + (v^\delta \cdot \nabla v^\delta, u) \\ = -(F^\delta(\widehat{\varphi}^\delta)v^\delta, u) + (\vec{\sigma}_1 \widehat{\theta}^\delta, u) + (\vec{\sigma}_2 \widehat{c}^\delta, u), \quad \forall u \in V^p, \text{ em } (0, t), \end{aligned} \quad (6.19)$$

$$\frac{\partial \varphi^\delta}{\partial \nu} = \frac{\partial \theta^\delta}{\partial \nu} = \frac{\partial c^\delta}{\partial \nu} = 0 \quad \text{na } \partial \Omega \times (0, t), \quad (6.20)$$

$$\varphi^\delta(0) = \varphi_0, \quad \theta^\delta(0) = \theta_0, \quad c^\delta(0) = c_0, \quad v^\delta(0) = v_0 \text{ em } \Omega, \quad (6.21)$$

Para verificar que $\mathcal{T}$ está bem definido, observe que $(\theta_e - \widehat{\theta}^\delta + \widehat{c}^\delta) \in L^\infty(Q_t)$, pelo Lema 2.6 existe uma única $\varphi^\delta \in W_q^{2,1}(Q_t)$, solução de (6.16) e $0 \leq \varphi^\delta \leq 1$, logo $\varphi^\delta \in Z_t$.

Agora, observe que (6.19) é uma variante da equação de Navier-Stokes, e portanto existe uma única solução $v^\delta \in L^\infty(0, T; H) \cap L^p(0, T; V^p) \cap L^{p5/3}(Q)$ (Lions [22] p. 216), no que segue faremos estimativas para mostrarmos que $v^\delta \in Y_t$.

Tomando $u = v^\delta$ em (6.19) teremos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |v^\delta|^2 + \int_{\Omega} \nu |\nabla v^\delta|^2 + \nu_0 |\nabla v^\delta|^p \\ &= - \int_{\Omega} F^\delta(\widehat{\varphi}^\delta)(v^\delta)^2 + \int_{\Omega} \vec{\sigma}_1 \widehat{\theta}^\delta v^\delta + \int_{\Omega} \vec{\sigma}_2 \widehat{c}^\delta v^\delta \\ &\leq (\|\vec{\sigma}_1\|_{\mathbb{R}^3}^2 + \|\vec{\sigma}_2\|_{\mathbb{R}^3}^2) R_1^2 |\Omega| + \int_{\Omega} (v^\delta)^2, \end{aligned}$$

Integrando em t e usando o lema de Gronwall obtemos a seguinte estimativa

$$\|v^\delta\|_{L^\infty(0,t;H) \cap L^p(0,t;V^p)} \leq Ct + C\|v_0\|_{L^2(\Omega)}, \quad (6.22)$$

onde C depende apenas de $\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2, \nu, \nu_0$ e R_1 , então tomando R_2 suficientemente grande temos $v^\delta \in Y_t$.

Do fato que $v^\delta \in L^{p5/3}(Q_t)$, e $\varphi_t^\delta \in L^q(Q_t)$, aplicando a teoria L^p -parabólica (Teorema 1.3) na equação (6.17), vemos que existe $\theta^\delta \in W_{r_1}^{2,1}(Q_t)$, com $r_1 < \min\{p5/3, q, s_1\}$, solução de (6.17), desse mesmo Teorema, do Lema 2.6 e de (6.22) temos

$$\begin{aligned} \|\theta^\delta\|_{W_{r_1}^{2,1}(Q_t)} &\leq C(\|\theta_0\|_{W_{r_1}^{2-2/r_1}(\Omega)} + \|\varphi_t^\delta\|_{L^{r_1}(Q)}) \\ &\leq C(\|\theta_0\|_{W_{s_1}^{2-2/s_1}(\Omega)} + \|\varphi_0\|_{W_q^{2-2/q}(\Omega)} + tR_1), \end{aligned} \quad (6.23)$$

onde C depende de $\|v^\delta\|_{L^{p5/3}(Q)}$. Agora note que do fato que $\varphi^\delta \in W_q^{2,1}(Q_t)$ e $v^\delta \in L^{p5/3}(Q_t)$, temos novamente da teoria L^p -parabólica, agora na equação (6.18), que existe $c^\delta \in W_{r_2}^{2,1}(Q_t)$, $r_2 < \min\{p5/3, q, s_2\}$, solução de (6.18), junto desse Teorema, do Lema 2.6 e de (6.22)

$$\begin{aligned} \|c^\delta\|_{W_{r_2}^{2,1}(Q_t)} &\leq C(\|c_0\|_{W_{r_2}^{2-2/r_2}(\Omega)}, \|v^\delta\|_{L^{r_2}(Q)}, \|\varphi_t^\delta\|_{L^{r_2}(Q)}, \|\nabla \varphi^\delta\|_{L^{r_2}(Q)}) \\ &\leq C(\|c_0\|_{W_{s_2}^{2-2/s_2}(\Omega)}, tR_1 + \|v_0\|_{L^2(\Omega)}, \|\varphi_0\|_{W_q^{2-2/q}(\Omega)} + tR_1), \end{aligned} \quad (6.24)$$

assim fixando R_1 suficientemente grande, podemos tomar $t \in (0, T]$ suficientemente pequeno independente de δ tal que $\|\theta^\delta\|_{W_{r_1}^{2,1}(Q_t)}, \|c^\delta\|_{W_{r_2}^{2,1}(Q_t)} \leq R_1$ e portanto $\theta^\delta, c^\delta \in X_t$. Denotamos $\bar{T} \in (0, T]$ tal que o operador $\mathcal{T}$ esteja bem definido de K em K .

Para provar a continuidade de $\mathcal{T}$ suponhamos que $(\widehat{\varphi}_k^\delta, \widehat{\theta}_k^\delta, \widehat{c}_k^\delta, \widehat{v}_k^\delta)$ convirja fortemente para $(\widehat{\varphi}^\delta, \widehat{\theta}^\delta, \widehat{c}^\delta, \widehat{v}^\delta)$ em K , quando $k \rightarrow \infty$ e seja $(\varphi_k^\delta, \theta_k^\delta, c_k^\delta, v_k^\delta)$ a solução do problema:

$$\varphi_{k,t}^\delta - \alpha \Delta \varphi_k^\delta = -\varphi_k^\delta + 3(\varphi_k^\delta)^2 - 2(\varphi_k^\delta)^3$$

$$+(\theta_e - \widehat{\theta}_k^\delta + \widehat{c}_k^\delta)|\nabla\varphi_k^\delta| \text{ em } Q_{\overline{T}}, \quad (6.25)$$

$$\theta_{k,t}^\delta - \beta\Delta\theta_k^\delta + v_k^\delta \cdot \nabla\theta_k^\delta = \frac{L}{c_p}\varphi_{k,t}^\delta \text{ em } Q_{\overline{T}}, \quad (6.26)$$

$$c_{k,t}^\delta - \gamma\Delta c_k^\delta = \frac{\varphi_{k,t}^\delta}{1 - \varphi_k^\delta + k\varphi_k^\delta}c_k^\delta + \frac{v_k^\delta - \nabla\varphi_k^\delta}{1 - \varphi_k^\delta + k\varphi_k^\delta}\nabla c_k^\delta \text{ em } Q_{\overline{T}}, \quad (6.27)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(v_k^\delta, u) + \nu(\nabla v_k^\delta, \nabla u) + \nu_0(\mathcal{A}v_k^\delta, u) + (v_k^\delta \cdot \nabla v_k^\delta, u) \\ &= -(F^\delta(\widehat{\varphi}_k^\delta)v_k^\delta, u) + (\vec{\sigma}_1\widehat{\theta}_k^\delta, u) + (\vec{\sigma}_2\widehat{c}_k^\delta, u), \quad \forall u \in V^p \text{ em } (0, \overline{T}), \end{aligned} \quad (6.28)$$

$$\frac{\partial\varphi_k^\delta}{\partial\nu} = \frac{\partial\theta_k^\delta}{\partial\nu} = \frac{\partial c_k^\delta}{\partial\nu} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega \times (0, \overline{T}), \quad (6.29)$$

$$\varphi_k^\delta(0) = \varphi_0, \quad \theta_k^\delta(0) = \theta_0, \quad c_k^\delta(0) = c_0, \quad v_k^\delta(0) = v_0 \quad \text{em } \Omega. \quad (6.30)$$

Vamos mostrar que a sequência $(\varphi_k^\delta, \theta_k^\delta, c_k^\delta, v_k^\delta)$ converge fortemente em K para $(\varphi^\delta, \theta^\delta, c^\delta, v^\delta) = \mathcal{T}(\widehat{\varphi}^\delta, \widehat{\theta}^\delta, \widehat{c}^\delta, \widehat{v}^\delta)$, para isto, vamos obter estimativas para $(\varphi_k^\delta, \theta_k^\delta, c_k^\delta, v_k^\delta)$ independente de k .

De (6.22) obtemos a seguinte estimativa para v_k^δ

$$\|v_k^\delta\|_{L^\infty(0, \overline{T}; H) \cap L^p(0, \overline{T}; V^p)} \leq C. \quad (6.31)$$

Observe que o operador $\mathcal{A}$ satisfaz $\|\mathcal{A}v^\delta\|_{(V^p)'} \leq C\|v^\delta\|_{V^p}^{p-1}$, então da equação (6.28), obtemos

$$\begin{aligned} \|v_{k,t}^\delta\|_{(V^p)'} &\leq C \left(\|v_k^\delta\|_V + \|v_k^\delta\|_{V^p}^{p-1} + \|v_k^\delta\|_{L^{2p'}(\Omega)}^2 + \|v_k^\delta\|_{L^2(\Omega)} \right. \\ &\quad \left. + \|\widehat{\theta}_k^\delta\|_{L^2(\Omega)} + \|\widehat{c}_k^\delta\|_{L^2(\Omega)} \right), \end{aligned}$$

e usando (6.31) e que $\|\widehat{\theta}_k^\delta\|_{L^\infty(Q)}, \|\widehat{c}_k^\delta\|_{L^\infty(Q)} \leq R_1$ teremos

$$\|v_{k,t}^\delta\|_{L^{p'}(0, \overline{T}; (V^p)')} \leq C. \quad (6.32)$$

Do Lema 2.6 e que $\widehat{\theta}_k^\delta, \widehat{c}_k^\delta$ são limitadas em $L^\infty(Q_{\overline{T}})$, deduzimos

$$\|\varphi_k^\delta\|_{W_q^{2,1}(Q_{\overline{T}})} \leq C. \quad (6.33)$$

Agora, de (6.23), (6.24) obtemos

$$\|\theta_k^\delta\|_{W_{r_1}^{2,1}(Q_{\overline{T}})} \leq C, \quad \|c_k^\delta\|_{W_{r_2}^{2,1}(Q_{\overline{T}})} \leq C. \quad (6.34)$$

Portanto, de (6.31)-(6.34) usando imersões compactas, existem

$(\widetilde{\varphi}^\delta, \widetilde{\theta}^\delta, \widetilde{c}^\delta, \widetilde{v}^\delta)$ e uma subsequência de $(\varphi_k^\delta, \theta_k^\delta, c_k^\delta, v_k^\delta)$ a qual ainda denotaremos por $(\varphi_k^\delta, \theta_k^\delta, c_k^\delta, v_k^\delta)$,

tal que, quando $k \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned}
\varphi_k^\delta &\rightarrow \tilde{\varphi}^\delta && \text{em } L^p(Q_{\overline{T}}), \\
\varphi_k^\delta &\rightharpoonup \tilde{\varphi}^\delta && \text{em } W_q^{2,1}(Q_{\overline{T}}), \\
\theta_k^\delta &\rightharpoonup \tilde{\theta}^\delta && \text{em } W_{r_1}^{2,1}(Q_{\overline{T}}). \\
\theta_k^\delta &\rightarrow \tilde{\theta}^\delta && \text{em } L^\infty(Q_{\overline{T}}), \\
c_k^\delta &\rightharpoonup \tilde{c}^\delta && \text{em } W_{r_2}^{2,1}(Q_{\overline{T}}). \\
c_k^\delta &\rightarrow \tilde{c}^\delta && \text{em } L^\infty(Q_{\overline{T}}), \\
v_k^\delta &\rightarrow \tilde{v}_k^\delta && \text{em } L^2(Q_{\overline{T}}) \cap C([0, \overline{T}]; H), \\
v_k^\delta &\rightharpoonup \tilde{v}_k^\delta && \text{em } L^p(0, \overline{T}; V^p), \\
\mathcal{A}(v_k^\delta) &\rightharpoonup \chi && \text{em } L^{p'}(0, \overline{T}; V^{p'}).
\end{aligned}$$

O limite nas equações (6.25), (6.26) é feita de modo análogo ao capítulo 4 e o limite na equação (6.27) é feita de modo análogo à do Capítulo 5. Do fato que $F^\delta(T_r(\varphi_k^\delta))\tilde{v}_k^\delta$ converge fortemente para $F^\delta(T_r(\tilde{\varphi}^\delta))\tilde{v}^\delta$ em $L^2(Q)$ e das estimativas obtidas para v^δ , podemos passar o limite em (6.28) e ver que $\tilde{v}^\delta$ satisfaz

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\tilde{v}_k^\delta, u) + \nu(\nabla \tilde{v}^\delta, \nabla u) + \nu_0(\chi, u) + (\tilde{v}^\delta \cdot \nabla \tilde{v}^\delta, u) \\
&= -(F^\delta(\tilde{\varphi}^\delta)\tilde{v}^\delta, u) + (\tilde{\sigma}_1 \tilde{\theta}^\delta, u) + (\tilde{\sigma}_2 \tilde{c}^\delta, u) \quad \forall u \in V^p \text{ em } (0, \overline{T}).
\end{aligned}$$

De modo análogo ao capítulo 4 se mostra que $\chi = \mathcal{A}(\tilde{v}^\delta)$ definindo

$$X_s^\delta = \nu_0 \int_0^s (\mathcal{A}(v_k^\delta) - \mathcal{A}(\varphi), v_k^\delta - \varphi) + \frac{1}{2} \|v_k^\delta(s)\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (6.35)$$

Assim, existe uma subsequência de $(\varphi_k^\delta, \theta_k^\delta, c_k^\delta, v_k^\delta)$ convergindo fortemente para $(\tilde{\varphi}^\delta, \tilde{\theta}^\delta, \tilde{c}^\delta, \tilde{v}^\delta)$. Estas convergências implicam imediatamente que o limite $(\tilde{\varphi}^\delta, \tilde{\theta}^\delta, \tilde{c}^\delta, \tilde{v}^\delta)$ é uma solução de (6.16)-(6.21). Pela unicidade de solução de (6.16)-(6.21), segue que $(\tilde{\varphi}^\delta, \tilde{\theta}^\delta, \tilde{c}^\delta, \tilde{v}^\delta) = (\hat{\varphi}^\delta, \hat{\theta}^\delta, \hat{c}^\delta, \hat{v}^\delta)$, isto vale para qualquer subsequência, portanto $\mathcal{T}$ é contínuo. Observe que $\mathcal{T}$ é limitado em $W_q^{2,1}(Q_{\overline{T}}) \times W_{r_1}^{2,1}(Q_{\overline{T}}) \times W_{r_2}^{2,1}(Q_{\overline{T}}) \times \{v \in L^p(0, T, V^p); v_t \in L^{p'}(0, T; (V^p)')\}$ mas, a imersão desse espaço em K é compacta, então concluímos que $\mathcal{T}$ é compacto.

Podemos então aplicar o teorema de ponto fixo de Schauder, assim existe pelo menos um ponto fixo $(\varphi^\delta, \theta^\delta, c^\delta, v^\delta) \in K$ de $\mathcal{T}$. ■

De modo análogo aos capítulos anteriores, precisamos de estimativas para passarmos o limite no modelo penalizado, mas neste caso também temos estimativas suficientes, veja o seguinte lema.

Lema 6.1 *Existe uma constante C tal que, para todo $\delta > 0$,*

$$\|v^\delta\|_{L^\infty(0,\bar{T};L^2(\Omega))\cap L^p(0,\bar{T};V^p)} + \int_0^{\bar{T}} \int_\Omega \frac{(\varphi^\delta)^2}{1-\varphi^\delta+\delta} |v^\delta|^2 dxdt \leq C, \quad (6.36)$$

$$\|\varphi^\delta\|_{W_q^{2,1}(Q_{\bar{T}})} \leq C, \quad (6.37)$$

$$\|\theta^\delta\|_{W_{r_1}^{2,1}(Q_{\bar{T}})} \leq C, \quad (6.38)$$

$$\|c^\delta\|_{W_{r_2}^{2,1}(Q_{\bar{T}})} \leq C. \quad (6.39)$$

Demonstração: Análoga à demonstração do Lema 5.1. ■

Observação 6.3 *Lembremos que $q > 5/2$, então de (6.37) temos, φ^δ limitada em $W_q^{2,1}(Q)$, e da imersão desse espaço em $H^{\tau,\tau/2}(\overline{Q})$, existe φ e uma subsequência de (φ^δ) (a qual ainda denotaremos por φ^δ), tal que φ^δ converge uniformemente para φ em $\overline{Q}$, além disso φ é contínua e portanto o domínio $Q_{ml} = \{(x,t) \in Q; 0 \leq \varphi < 1\}$ é aberto.*

Lema 6.2 *Dados $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$, $U \subset \Omega_{ml}(t_1)$ tal que $[t_1, t_2] \times \overline{U} \subset Q_{ml} \cup \Omega_{ml}(0) \cup \Omega_{ml}(T)$, existem $\delta_0(U, t_1, t_2) > 0$ e uma constante $C(\delta_0)$ tal que, para todo $\delta < \delta_0$,*

$$\|v_t^\delta\|_{L^{p'}(t_1, t_2; V^p(U)')} \leq C. \quad (6.40)$$

Demonstração: Análoga à demonstração do Lema 5.2. ■

6.3 Passagem ao limite

Usando (6.36) e (6.40) obtemos que (v^δ) é limitada em

$$\{v \in L^p(t_1, t_2; V^p(U)); v_t \in L^{p'}(t_1, t_2; V^p(U)')\},$$

mas, a imersão desse espaço em $L^p(U \times (t_1, t_2))$ é compacta, assim, existem v e uma subsequência de (v^δ) (a qual ainda denotaremos por v^δ) tal que v^δ converge fortemente para v em $L^p(U \times (t_1, t_2))$. Do fato que Q_{ml} pode ser coberto por um número enumerável de conjuntos abertos $U_i \times (t_i, t_{i+1})$ tal que $U_i \subset \Omega_{ml}(t_i)$, então

$$v^\delta \rightarrow v \quad \text{em} \quad L^p_{loc}(Q_{ml} \cup \Omega_{ml}(0) \cup \Omega_{ml}(T)) \quad \text{fortemente.} \quad (6.41)$$

Além disso, de (6.36) temos que $v \in L^p(0, T; V^p) \cap L^\infty(0, T; H)$ e

$$v^\delta \rightharpoonup v \quad \text{em} \quad L^p(0, T; V^p) \quad \text{fracamente,} \quad (6.42)$$

$$v^\delta \xrightarrow{*} v \quad \text{em} \quad L^\infty(0, T; H) \quad \text{fracamente estrela.} \quad (6.43)$$

Desde que $\mathcal{A}v^\delta$ é limitado em $L^{p'}(0, T, (V^p)')$, existe $\chi \in L^{p'}(0, T, (V^p)')$ tal que

$$\mathcal{A}v^\delta \rightharpoonup \chi \quad \text{em} \quad L^{p'}(0, T; (V^p)') \quad \text{fracamente.} \quad (6.44)$$

O lema 6.1 e imersões compactas garantem que existem $\theta \in W^{2,1}_{r_1}(Q_{\overline{T}})$, $c \in W^{2,1}_{r_2}(Q_{\overline{T}})$, $\varphi \in W^{2,1}_q(Q_{\overline{T}})$ e uma subsequência de $(\varphi^\delta, \theta^\delta, c^\delta)$ (a qual ainda denotaremos por $(\varphi^\delta, \theta^\delta, c^\delta)$) tal que, quando $\delta \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} \varphi^\delta &\rightarrow \varphi && \text{uniformemente em } Q, \\ \varphi^\delta &\rightarrow \varphi && \text{em } L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega)) \text{ fortemente,} \\ \varphi^\delta &\rightharpoonup \varphi && \text{em } W^{2,1}_2(Q), \text{ fracamente,} \\ \theta^\delta &\rightharpoonup \theta && \text{em } W^{2,1}_{r_1}(Q), \text{ fracamente,} \\ c^\delta &\rightharpoonup c && \text{em } W^{2,1}_{r_2}(Q), \text{ fracamente.} \end{aligned} \quad (6.45)$$

Resta passarmos o limite em (6.6)-(6.11) quando $\delta \rightarrow 0$. Seja $\eta \in L^p(0, T; V^p)$ com suporte compacto contido em $Q_{ml} \cup \Omega_{ml}(0) \cup \Omega_{ml}(T)$ e $\eta_t \in L^{p'}(0, T; (V^p)')$, tomando $u = \eta(t)$ em (6.9), e integrando em $(0, t)$ teremos

$$\begin{aligned} &\int_0^t (v_t^\delta, \eta) + \nu(\nabla v^\delta, \nabla \eta) + \nu_0(\mathcal{A}v^\delta, \eta) + (v^\delta \cdot \nabla v^\delta, \eta) ds \\ &= - \int_0^t \left(\frac{(\varphi^\delta)^2}{1 - \varphi^\delta + \delta} v^\delta, \eta \right) ds + \int_0^t (\vec{\sigma}_1 \theta^\delta, \eta) ds + \int_0^t (\vec{\sigma}_2 c^\delta, \eta) ds. \end{aligned}$$

Desde que $\text{supp } \eta \subset Q_{ml} \cup \Omega_{ml}(0) \cup \Omega_{ml}(T)$ então, $\text{supp } \eta(t) \subset \Omega_{ml}(t)$ para quase todo $t \in [0, T]$, portanto

$$\begin{aligned} (v^\delta(t), \eta(t)) - \int_0^t (v^\delta, \eta_t) + \nu \int_0^t (\nabla v^\delta, \nabla \eta) + \nu_0 \int_0^t (\mathcal{A}v^\delta, \eta) \\ + \int_0^t (v^\delta \cdot \nabla v^\delta, \eta) = (v_0, \eta(0)) - \int_0^t \left(\frac{(\varphi^\delta)^2}{1 - \varphi^\delta + \delta} v^\delta, \eta \right) \\ + \int_0^t (\vec{\sigma}_1 \theta^\delta, \eta) + \int_0^t (\vec{\sigma}_2 c^\delta, \eta). \end{aligned} \quad (6.46)$$

Lembramos que φ^δ converge uniformemente para φ , então $\frac{(\varphi^\delta)^2}{1 - \varphi^\delta + \delta}$ converge para $\frac{\varphi^2}{1 - \varphi}$ uniformemente em conjuntos compactos de $Q_{ml} \cup \Omega_{ml}(0) \cup \Omega_{ml}(\overline{T})$ e de (6.41)-(6.45) podemos passar o limite em (6.46) e obter (6.5). Sob a hipótese adicional de integrabilidade do Teorema podemos mostrar de modo análogo ao Capítulo 4 que $\chi = \mathcal{A}v$.

Para provar que $v = 0$ quase sempre em Q_s , dado $\epsilon > 0$ existe $\bar{\delta}(\epsilon)$ tal que se $\delta < \bar{\delta}$ então $|\varphi^\delta(x, t) - \varphi(x, t)| \leq \epsilon$ para todo $(x, t) \in Q$, em particular para $(x, t) \in Q_s = \{(x, t) \in Q; \varphi(x, t) = 1\}$ temos $1 - \epsilon \leq \varphi^\delta$, assim de (6.36) obtemos

$$\frac{1}{\epsilon + \delta} \int_{Q_s} (\varphi^\delta)^2 |v^\delta|^2 dx dt \leq \int_0^T \int_\Omega \frac{(\varphi^\delta)^2}{1 - \varphi^\delta + \delta} |v^\delta|^2 dx dt \leq C. \quad (6.47)$$

Lembremos que $\varphi^\delta \rightarrow 1$ uniformemente em Q_s e que $v^\delta \rightharpoonup v$ em $L^2(Q_s)$ quando $\delta \rightarrow 0$, então $\varphi^\delta v^\delta \rightharpoonup v$ em $L^2(Q_s)$. Portanto

$$\int_{Q_s} v^2 \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \int_{Q_s} |\varphi^\delta v^\delta|^2 \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} C(\epsilon + \delta) \leq C\epsilon,$$

e do fato que ϵ é arbitrário temos que $v = 0$ quase sempre em Q_s .

Do Lema 6.1 podemos passar o limite em (6.6)-(6.8) e obter (6.2)-(6.4). Finalmente, de (6.45) temos que $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = \frac{\partial \theta}{\partial \nu} = \frac{\partial c}{\partial \nu} = 0$ na $\partial \Omega$ e $\varphi(0) = \varphi_0$, $\theta(0) = \theta_0$, $c(0) = c_0$, e do Lema 6.2 temos que $v^\delta(0) \rightharpoonup v(0)$ em $V(U)'$, logo $v(0) = v_0$ em $\Omega_{ml}(0)$. A prova de que $\chi = \mathcal{A}v$ sob hipóteses adicionais é análoga ao capítulo 4. Portanto a prova do teorema 6.1 está terminada. ■

Capítulo 7

Conclusão

Neste trabalho foi apresentado alguns resultados de existência de solução para problemas do tipo campo de fases com a possibilidade de movimentação na parte não sólida.

Estudamos tais problemas nas dimensões 2, 3. Tais problemas modelam processos de solidificação/liquefação de certos materiais puros ou ligas. No caso de materiais puros obtivemos existência de solução global no tempo, já no caso de ligas obtivemos apenas soluções locais no tempo.

Referências Bibliográficas

- [1] R.A. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, new York, 1975.
- [2] C. Beckermann, H.J. Diepers, I. Steinbach, A. Karma, X. Tong, Modeling melt convection in phase-field simulations of solidification, J. Comp. Phys. 154 (1999) pp. 468-496.
- [3] T. Biben, K. Kassner, C. Misbah, Phase-field approach to three-dimensional vesicle dynamics, Phys. Rev. E 72, 041921 (2005) pp. 1-15.
- [4] Ph. Blanc, L. Gasser, J. Rappaz, Existence for a stationary model of binary alloy solidification, RAIRO Modél. Math. Anal. Numér. 29 (1995) pp. 687-699.
- [5] W. J. Boettinger, J. A. Warren, C. Beckermann, A. Karma, Phase-field simulation of solidification, Annu. Rev. Mater. Res. 32 (2002) pp. 163-194.
- [6] G. Caginalp, An Analysis of phase field model of a free boundary, Arch. Rat. Mech. Anal. 92, 1986, pp. 205-245.
- [7] G. Caginalp, Stefan and Hele-Shaw type model as asymptotic limits of the phase-field equations, Phys. Rev. A, vol 39, No. 11, 1989, pp. 5887-5896.
- [8] G. Caginalp, The dynamic of a conserved phase-field system: Stefan-like, Hele-Shaw and Cahn-Hilliard Models as asymptotic limits, IMA J. Appl. Math. 44, 1990, pp. 77-94.
- [9] G. Caginalp and J. Jones, A derivation and analysis of phase field models of thermal alloy, Annals of Phys, 237, 1995, pp. 66-107.

- [10] L. Cherfils, S. Gatti, A. Miranville, Existence of global solutions to the Caginalp phase-field system with dynamic boundary conditions and singular potentials, *J. Math. Anal. Appl.* 343 (2008) pp. 557-566.
- [11] G.J. Fix, Phase field models for free boundary problems in *Free Boundary Problems: Theory and Applications*, Ed. A. Fasano and M. Primicerio, Pitman Boston, (1983) pp. 580-589.
- [12] R. Folch, J. Casademunt, A. Hernández-Machado, L. Ramírez-Piscina, Phase-field model for Hele-Shaw flows with arbitrary viscosity contrast. II. Numerical study, *Phys. Rev. E* 60 (1999) pp. 1734 - 1740.
- [13] A. Friedman, *Partial Differential Equation of Parabolic Type*, Prentice-Hall.
- [14] J.K. Hale, *Ordinary Differential Equations*, Robert E. Krieger Publishing Company Huntington, New York, 1980
- [15] K.H. Hoffmann and L. Jiang, Optimal Control a phase field model for solidification, *Numer. Funct. Anal. Optimiz.* 13 (1 e 2) (1992) pp. 11-27.
- [16] A. Karma, D.A. Kessler, H. Levine, Phase-Field Model of Mode III Dynamic Fracture, *Phys. Rev. Lett.* 87, 045501 (2001) pp. 1-4.
- [17] O. A. Ladyzenskaya, V.A. Solonnikov, N.N. Ural'ceva, *Linear and Quasi Linear Equations of Parabolic Type*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968.
- [18] J.S. Langer, Models of pattern formation in first-order phase transitions, in *Directions in Condensed Matter Physics* p. 165, Ed. G. Grinstein and G. Mazenko, World Scientific, Singapore, (1986).
- [19] Y.W. Lee, R.N. Smith, M.E. Glicksman, M.B. Koss, Effects of buoyancy on the growth of dendritic crystals, *Annual Review of Heat Transfer*, editado por C.L. Tien (Begell House) New York, Vol. 7, (1996) pp. 59.
- [20] M. Lifshitz, V.V. Slyozov, The Kinetics of precipitation from supersaturated solid solutions, *J. Phys. Chem. Solids* 19, (1961) pp. 35.

- [21] J.L. Lions, Contrôle des Systèmes Distribués Singuliers, Gauthier-Villars, 1983.
- [22] J.L. Lions, Quelques méthodes de resolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod, Gauthier-Villars, 1969.
- [23] L.A. Medeiros, M.M. Miranda, Espaços de Sobolev, IM-UFRJ, 2008.
- [24] V.P. Mikhailov, Partial Differential Equations, Mir. Publishers, Moscow, 1978.
- [25] C. Morosanu and Motreanu, A generalized phase-field system, J. Math. Anal. Appl., vol. 273 (1999) pp. 515-540.
- [26] W.W. Mullins, R.F. Sekerka, Stability of a planar interface during solidification of a dilute binary alloy, J. Appl. Phys. Vol. 35 (1964) pp. 444-451.
- [27] G. Planas, J.L. Boldrini, A bidimensional phase-field model with convection for change phase of an alloy, J. Math. Anal. Appl. 303 (2205) pp. 669-687.
- [28] G. Planas, J.L. Boldrini, A Tridimensional phase-field model with convection for phase change of an alloy, Discrete and Continuous Dynamical Syztems, Vol. 13, (2005) pp. 429-450.
- [29] J. Simon, Compacts sets in the space $L^p(0, T; B)$, Ann. Mat. Pura Appl. 146 (1987) pp. 65-96.
- [30] R. Temam, Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis, North-Holland Publishing Company, 1977.