

# Natação em Espaços Curvos Via Teoria de Calibre

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Danilo Borim do Nascimento e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 20 de maio de 2010



Prof. Dr.: Ricardo Antonio Mosna  
Orientador

Banca Examinadora:

1. Prof. Dr. Ricardo Antonio Mosna (IMECC/UNICAMP)
2. Prof. Dr. Marcos Benevenuto Jardim (IMECC/UNICAMP)
3. Prof. Dr. George Emanuel Avraam Matsas (IFT/UNESP)

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em Matemática.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

Nascimento, Danilo Borim do  
N17n Natação em espaços curvos via teoria de calibre/Danilo Borim do  
Nascimento-- Campinas, [S.P. : s.n.], 2010.

Orientador : Ricardo Antonio Mosna  
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1.Fases geométricas. 2.Campos de calibre (Física). 3.Relatividade  
geral (Física). 4.Física matemática. I. Mosna, Ricardo Antonio.  
II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática,  
Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: A gauge theory approach to the swimming in curved spaces problem

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Geometric phases 2. Gauge fields (Physics).  
3. General relativity (Physics). 4. Mathematical physics.

Área de concentração: Geometria e Topologia

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Ricardo Antonio Mosna (IMECC – UNICAMP)  
Prof. Dr. George Emanuel Avraam Matsas (IFT - UNESP)  
Prof. Dr. Marcos Benevenuto Jardim (IMECC - UNICAMP)

Data da defesa: 20/05/2010

Programa de Pós-Graduação: Mestrado em Matemática

**Dissertação de Mestrado defendida em 20 de maio de 2010 e aprovada**

**Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**



---

**Prof.(a). Dr(a). RICARDO ANTONIO MOSNA**



---

**Prof. (a). Dr (a). MARCOS BENEVENUTO JARDIM**



---

**Prof. (a). Dr (a). GEORGE EMANUEL AVRAAM MATSAS**

# Agradecimentos

É motivo de orgulho que, apesar da desigualdade social da nossa sociedade e de todos os males dela decorrentes, procuremos romper com o nosso legado colonial através do investimento em ciência, mesmo em física teórica que, por vezes, produz resultados de pouca aplicação prática imediata.

Neste esforço de desenvolvimento fui de muitas formas privilegiado. Além da minha educação superior ter sido financiada pelo Estado, os contribuintes arcaram com meus custos através da FAPESP, que me concedeu duas bolsas de iniciação científica e a bolsa de mestrado com a qual me sustentei neste período, auxílio sem o qual não poderia ter dado prosseguimento aos meus estudos.

A minha formação, tendo sido custeada pelo esforço público, não pode ser, se não, uma coisa pública. Dentro desse contexto, não poderia apenas agradecer ao contribuinte e às instituições pelas quais ele me financiou. Agradeço e me comprometo a me dedicar a retornar à sociedade o que ela investiu em mim trabalhando com afinco em prol do desenvolvimento científico, buscando ser um cidadão atuante e preocupado com a coisa pública e buscando sempre meios de crescer com o Brasil, e nunca a suas custas.

Agradeço ao meu orientador, Ricardo Mosna, por me ensinar a importância de saber enxergar um problema hora com a visão de um matemático, hora com a visão de um físico. Por estar sempre disponível. Pela paciência. E pelas essenciais contribuições para a realização deste trabalho. No meu mestrado não tive apenas um grande mestre, mas ganhei também um grande amigo.

Agradeço aos meus pais, minha avó e a toda minha família, cujas contribuições para a realização desta obra, desde o meu nascimento, são tantas que não poderiam ser enumeradas.

Agradeço aos meus amigos, em especial ao Daniel, Eduardo e Piá, que além da agradável convivência, do apoio e da diversão, me proporcionaram instigantes discussões sobre assuntos que passam pela física e pela matemática, mas que ainda vão muito além, e que foram de grande importância para a minha formação acadêmica e pessoal.

Agradeço em especial a Ana Idalina, minha futura esposa e a pessoa que traz cor a minha vida. Sem você nada disso teria sentido.

Agradeço à FAPESP pela bolsa concedida.

# Resumo

No espaço euclidiano, deformações de corpos quase-rígidos podem gerar rotações globais líquidas que obedecem, em cada instante, a lei de conservação do momento angular (o problema do gato caindo é um exemplo). Em espaços curvos, um ciclo de deformações de um corpo pode gerar não só rotações, mas também translações globais. Este fenômeno é conhecido como efeito swimming, ou natação. Avron e Kenneth apresentaram recentemente um modelo físico para descrever este fenômeno [Avron JE, Kenneth O, *New J. Phys.* 8, 68 (2006)]. Os autores tratam de corpos compostos por um conjunto de massas puntiformes em variedades estáticas (no contexto não-relativístico) e calculam o deslocamento obtido por um ciclo de deformações infinitesimais. Tal deslocamento é então relacionado, no caso de corpos pequenos, à curvatura do espaço ambiente. Nesta dissertação, propomos uma nova formulação para o efeito swimming utilizando formalismo de fibrados e conexões. O espaço de configurações do sistema é descrito como o espaço total de um fibrado principal, cujo espaço base é dado pelo espaço dos formatos do sistema e o grupo estrutural é (essencialmente) dado pelas isometrias da variedade ambiente. Dotando o fibrado de uma conexão que carrega consigo a informação sobre as leis físicas de conservação, expressamos o ciclo de deformações como uma curva fechada no espaço base, o movimento do corpo como o levantamento horizontal desta curva e o deslocamento resultante como a holonomia da mesma. Por meio deste formalismo, sistematizamos o cálculo do deslocamento gerado por ciclos de deformações arbitrárias, além de obter, em cada instante e analiticamente, a evolução temporal do sistema em questão.

# Abstract

In Euclidean space, cyclic deformations of quasi-rigid bodies can lead to net global rotations even though they satisfy, at each moment, the angular momentum conservation law (the falling cat problem is an example). In curved spaces, cyclic changes in the body shape can also lead to rotations, but also to global translations. This phenomenon is known as the swimming effect. In a recent work, Avron and Kenneth developed a formalism to describe this phenomenon in the non-relativistic context [Avron JE, Kenneth O, New J. Phys. 8, 68 (2006)], which may be used to calculate the net displacement caused by an infinitesimal cycle of deformations of a given body. This displacement is then related, for small swimmers, to the curvature of the ambient space. In the present work, we propose a new formulation for the swimming effect in terms of principal bundles and connections. The configuration space of the system is described by the total space of a principal bundle, whose base space is given by the space of shapes of the body and whose structural group is (essentially) given by the isometries of the ambient manifold. A given deformation cycle of the body then corresponds to a loop in the base space. By defining a connection in this bundle which conveys the physical conservation laws of the system, the corresponding physical motion of the body is then given by the horizontal lift of this curve in the base space, while the net displacement of the body is given by the holonomy associated with this loop. As a result we obtain, in a systematical way, the displacement generated by arbitrary deformation cycles and we get, for each instant of time, the time evolution of the system analytically.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Conceitos Iniciais</b>	<b>4</b>
2.1	Grupos de Lie . . . . .	4
2.1.1	Campos Vetoriais e Colchetes de Lie . . . . .	4
2.1.2	Grupos de Lie e suas Álgebras de Lie . . . . .	8
2.1.3	Grupos de Transformações . . . . .	12
2.2	Teorema da Órbita Principal . . . . .	14
2.3	Fibrados . . . . .	16
2.4	Formas Diferenciais . . . . .	17
2.4.1	A Álgebra Exterior . . . . .	17
2.4.2	Formas Diferenciais . . . . .	19
2.5	Derivadas de Lie . . . . .	23
2.6	Fibrados Principais . . . . .	24
2.7	Conexão e Curvatura . . . . .	26
2.8	Levantamento Horizontal . . . . .	28
2.9	Holonomia . . . . .	30
2.10	A Holonomia pela Integração da Curvatura . . . . .	31
2.11	Geometria Riemanniana . . . . .	32
2.11.1	Métrica Riemanniana . . . . .	32
2.11.2	Conexões Afins . . . . .	34
2.11.3	Transporte Paralelo e Geodésicas . . . . .	34
2.11.4	Conexão Riemanniana . . . . .	36
2.11.5	Curvatura . . . . .	37
2.12	Isometrias e Vetores de Killing . . . . .	38
2.12.1	O Grupo de Isometrias . . . . .	38
2.12.2	Vetores de Killing . . . . .	40
2.13	Grupos de Transformações e Geometria Riemanniana . . . . .	42
2.13.1	A Ação de um Subgrupo Fechado de um Grupo de Isometrias é Própria . . . . .	42
2.13.2	A Ação de $G$ em $M \times \cdots \times M$ é Própria . . . . .	44

2.13.3	A Fibração $(M, M/G, \pi, G)$ . . . . .	46
<b>3</b>	<b>Nadando em Espaços Curvos Via Teoria de Calibre</b>	<b>47</b>
3.1	O Teorema da Órbita Principal e o Fibrado Principal $G \cdots \bar{M} \rightarrow \bar{M}/G$ . . .	50
3.1.1	O Teorema da Órbita Principal e a Variedade $\bar{M}$ . . . . .	51
3.1.2	O Fibrado Principal $G \cdots \bar{M} \rightarrow \bar{M}/G$ . . . . .	52
3.2	A Geometrização da Natação em Espaços Curvos . . . . .	53
3.2.1	As Leis de Conservação . . . . .	53
3.2.2	A Base $\{\bar{\xi}_i, \eta_j\}$ do Espaço Tangente de $\bar{M}$ . . . . .	54
3.2.3	A Métrica $B$ e a Conexão . . . . .	56
3.2.4	A 1-forma de Conexão $\omega$ . . . . .	58
3.2.5	O Ciclo de Deformações como Curvas Fechadas em $\bar{M}/G$ e a Natação como a Holonomia do seu Levantamento Horizontal . . . . .	60
3.2.6	A Base de Levantamentos Horizontais de Vetores Coordenados . . .	62
3.3	Natação para Pequenas Deformações . . . . .	63
3.4	Exemplos . . . . .	66
3.4.1	Robô em $\mathbb{R}^2$ . . . . .	66
3.4.2	Robô em $S^2$ . . . . .	73
3.4.3	Robô no Toro . . . . .	80
<b>4</b>	<b>Conclusão</b>	<b>88</b>

# Capítulo 1

## Introdução

As fases geométricas constituem um interessante fenômeno observado em vários contextos físicos [1, 2]. O efeito de fase geométrica em mecânica quântica é normalmente denominado fase de Berry [3]. A introdução deste conceito na mecânica quântica permitiu a compreensão de fenômenos que não eram bem entendidos, tal como o efeito Aharonov-Bohm [4]. Este efeito refere-se à fase global que ganha a função de onda de uma partícula carregada que se move em torno de um solenóide no qual existe um campo magnético. Esta fase depende do caminho percorrido pela partícula. Em mecânica clássica, encontramos as fases geométricas presentes em um grande número de problemas envolvendo corpos deformáveis. As rotações geradas por vibrações em moléculas ou, de maneira geral, o fenômeno de mudanças de orientação geradas por movimentos internos em corpos de  $n$  partículas, é um fenômeno de fase geométrica [5, 6]. Aqui, observa-se que movimentos internos em corpos de  $n$  partículas que não possuem, inicialmente, rotação, podem gerar rotação global líquida respeitando a conservação de momento angular. As fases geométricas se manifestam no problema do gato que cai [7, 8], que é o problema do gato que é solto no ar de pernas para cima, sem nenhuma rotação, e consegue se deformar de forma que ele inverta a sua orientação para pernas para baixo, conservando, no entanto, a todo momento, momento angular nulo. Outro exemplo que podemos apontar é o da natação de microorganismos em fluidos com número de Reynolds pequeno [9], onde observa-se que o movimento é puramente geométrico, ou seja, não depende da velocidade com que são realizados os ciclos de deformação, mas apenas dos ciclos em si. Observamos um efeito de fase geométrica mesmo em uma situação tão corriqueira quanto estacionar um carro [10].

O fenômeno das fases geométricas está relacionado com uma diferença de fase observada em sistemas que realizam mudanças cíclicas de configuração. Em geral, as fases geométricas podem ser descritas por modelos concretos de teorias de calibre. Definindo a ação do grupo de simetria relevante do sistema,  $G$ , sobre o espaço de configurações  $P$ , obtém-se um fibrado principal  $G \cdot \cdot \cdot P \rightarrow M = P/G$ . As transformações cíclicas são descritas por curvas fechadas em  $M$ , e dotando o fibrado com uma conexão natural pode-se, em geral, descrever a fase

geométrica como a holonomia relacionada com o levantamento horizontal da curva em  $M$ .

No caso clássico, quando tratamos de um corpo de  $n$  partículas, o grupo de simetrias de interesse é o grupo de simetrias de  $\mathbb{R}^3$ , o  $E(3)$ . Definido o espaço de configurações do sistema com as devidas restrições,  $P$ , define-se a ação sobre  $P$  através de rotações e translações globais do sistema, ou seja, movimentos rígidos. Os espaços das órbitas  $M = P/G$  desta ação pode ser identificado com o espaço dos formatos, ou *shape space*, cujos elementos são determinados pelas posições relativas das partículas constituintes do sistema. Obtemos, com esta construção (levando em consideração as devidas restrições do espaço de configurações), o fibrado principal  $E(3) \cdots P \rightarrow M$ . Um ciclo de deformações do corpo é descrito por uma curva fechada  $\gamma$  em  $M$ . Dotando o fibrado com uma conexão que exprima a imposição de conservação de momento angular nulo, o movimento do sistema de partículas no espaço é descrito pelo levantamento horizontal desta curva e as rotações, resultantes do ciclo de deformações, pela holonomia associada à curva  $\gamma$ .

Em 2003, Wisdom mostrou que corpos que realizam movimentos cíclicos em um espaço-tempo curvo podem obter uma translação líquida [11]. Ele tratou de um corpo que consiste de um tripé que tinha liberdade para abrir ou fechar as suas pernas e encolhê-las ou esticá-las, caindo livremente pela ação do campo gravitacional gerado por um corpo esfericamente simétrico, descrito pela métrica de Schwarzschild. Wisdom chegou a conclusão de que, dependendo do ciclo que realiza o tripé, ele poderia apressar ou retardar a sua queda. Esta auto-propulsão em nada tem a ver com a natação que conhecemos, que consiste em fazer fluir massa no sentido contrário ao movimento, sendo o movimento resultado da força de reação. O movimento descrito por Wisdom é consequência das leis de conservação no espaço curvo. É realizado exclusivamente pelas forças internas que geram as deformações, e não por forças externas ao corpo. Este movimento, no limite apropriado, não depende da velocidade em que se realiza o ciclo, mas apenas do próprio ciclo de deformações. É, pois, de natureza geométrica. Tal fenômeno se trata, então, de um fenômeno de fase geométrica. A este efeito se deu o nome de efeito *swimming*, ou natação.

Em 2006, J.E. Avron e O. Kenneth apresentaram um modelo para a natação em espaços curvos [12]. Os autores trataram de corpos que consistem de um número arbitrário de massas puntiformes e que realizam movimentos não relativísticos em variedades estáticas arbitrárias. Usando geometria riemanniana, os autores obtiveram uma expressão analítica para movimentos rígidos (a natação) gerados por um ciclo de deformações infinitesimal. Além disso, para o caso de corpos pequenos, Avron e Kenneth conseguiram relacionar a natação do corpo com a curvatura do espaço, demonstrando a dependência deste efeito com a curvatura intrínseca do meio em que ele ocorre.

Apesar de se tratar de um fenômeno de fase geométrica, não temos conhecimento de uma formulação própria de fases geométricas, em termos de fibrados principais e conexões, para a natação em espaços curvos. O desenvolvimento de um modelo que use teoria de calibre para natação em espaços curvos formalizaria a inclusão deste efeito no grupo de fenômenos de fases geométricas. Para obter-se tal modelo, seria necessário definir o fibrado  $G \cdots P \rightarrow M = P/G$ , onde  $P$  denota o espaço de configurações do corpo e  $G$ , o grupo de

simetrias relevante. Dotando o fibrado com uma conexão que carrega consigo as leis físicas que regem o sistema, poderíamos descrever os ciclos de deformações como curvas no espaço base  $M = P/G$  e a natação seria, então, a holonomia dada pelos levantamentos horizontais das curvas. Buscar este modelo para a natação no formalismo de fibrados principais e conexões é o objetivo do nosso trabalho.

Seguimos os moldes do modelo apresentado por Avron e Kenneth para desenvolver uma formulação da natação em espaços curvos usando o formalismo de fibrados principais e conexões. Vamos, no capítulo seguinte, apresentar os principais conceitos e as estruturas geométricas das quais faremos uso para buscar tal objetivo. No capítulo 3 apresentaremos o modelo para a natação em espaços curvos via teoria de calibre e alguns exemplos resolvidos neste formalismo. Na conclusão faremos um resumo do nosso trabalho destacando os resultados obtidos.

## Capítulo 2

# Conceitos Iniciais

Neste capítulo, apresentamos os conceitos e as várias estruturas geométricas que serão empregados no desenvolvimento deste trabalho. Assumimos o conhecimento prévio de álgebra linear avançada, tema sobre o qual nos remetemos às referências [13, 14], topologia básica, tema sobre o qual nos remetemos às referências [15, 16], análise no  $\mathbb{R}^n$  e variedades diferenciáveis, temas sobre os quais nos remetemos às referências [17, 18, 19]. Alguns destes conceitos serão ainda revisitados a seguir, para efeito de fixarmos a notação.

### 2.1 Grupos de Lie

Introduziremos, a seguir, os conceitos básicos relativos à teoria de grupos de Lie.

#### 2.1.1 Campos Vetoriais e Colchetes de Lie

Para começar, apresentamos alguns conceitos para estabelecer notação. Seja  $M$  uma variedade diferenciável real (com base enumerável) de dimensão  $d$  dotada de um atlas formado por cartas  $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^d$  [19] Seja  $u^i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  a projeção da  $i$ -ésima entrada de  $\mathbb{R}^d$ . Nos referiremos a  $x^i = u^i \circ x$  como **funções coordenadas** e a  $(U, (x^1, \dots, x^d))$  como um **sistema de coordenadas locais**. Se  $p \in U$  e  $x(p) = 0$ , dizemos que o sistema de coordenadas é centrado em  $p$ .

Definamos, a seguir, o conceito de **campo vetorial**:

**Definição 2.1.1.** *Seja  $M$  uma variedade real. Um campo vetorial é uma seção, local ou global, do fibrado tangente  $TM$ . Ou seja, um campo vetorial  $X$  é uma aplicação  $X : U \subset M \rightarrow TM$  tal que  $X(p) \in T_pM$ ,  $\forall p \in U$ . Dizemos que o campo vetorial é  $C^\infty$  se a aplicação  $X : U \subset M \rightarrow TM$  é  $C^\infty$  ou, equivalentemente, se  $U$  é aberto, e para toda função  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f \in C^\infty$ , a função definida por  $Xf$  é  $C^\infty$ . Observamos que  $Xf$  é a derivada de  $f$  na direção  $X(p)$  no ponto  $p \in M$ .*

Denotaremos por  $\mathfrak{X}(M)$  o conjunto dos campos vetoriais  $C^\infty$  cujo domínio é um aberto de  $M$ . Vamos denotar por  $C(M)$  o conjunto das funções  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  que são  $C^\infty$ .

Seguem das propriedades de derivação linear do vetor tangente [20] que:

1.  $X(f + \lambda g) = Xf + \lambda Xg$ ,
2.  $X(fg) = (Xf)g + f(Xg)$ ,

onde  $f, g \in C(M)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $X \in \mathfrak{X}(M)$ .

Seja  $M$  uma variedade,  $(U, x)$  um sistema de coordenadas locais em  $M$  e  $f \in C(M)$ . Definimos o **campo vetorial coordenado**  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  por:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p (f) = \frac{\partial (f \circ x^{-1})}{\partial x^i} \Big|_{x(p)}. \quad (2.1)$$

O conjunto dos campos vetoriais coordenados  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right\}$  é linearmente independente para cada  $p \in U$  e, assim, é uma base do espaço tangente  $T_p M$  [20].

Logo, em coordenadas locais, temos:

$$X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (2.2)$$

onde cada  $X^i \in C^\infty$  se e somente se  $X \in \mathfrak{X}(M)$  [21].

Definimos:

**Definição 2.1.2.** *Sejam  $M$  e  $N$  variedades reais e  $\Phi : M \rightarrow N$  uma aplicação diferenciável. Então  $X \in \mathfrak{X}(M)$  é  $\Phi$ -relacionado a  $Y \in \mathfrak{X}(N)$  se, para todo  $p \in M$ , temos:*

$$Y_{\Phi(p)} = d\Phi(X_p), \quad (2.3)$$

onde denotamos  $X(p)$  por  $X_p$ .

**Definição 2.1.3.** *Uma curva em  $M$  é uma função  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ . A curva é dita suave se é  $C^\infty$ .*

No caso de uma curva diferenciável, sua derivada é dada por [21]:

$$\dot{\gamma}(t) = d\gamma \left( \frac{\partial}{\partial t} \Big|_t \right). \quad (2.4)$$

**Definição 2.1.4.** *Seja  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Definimos uma curva integral de  $X$  como uma curva suave que satisfaz:*

$$\dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)}. \quad (2.5)$$

Em coordenadas locais, as curvas integrais ficam completamente determinadas pelas suas componentes  $\gamma^i = x^i(\gamma)$ , de forma que sua derivada é expressa por [20]:

$$\dot{\gamma} = d\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \sum_{i=1}^d \frac{d\gamma^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (2.6)$$

Desta forma, as curvas integrais podem ser obtidas em coordenadas pelas soluções das equações diferenciais ordinárias (EDOs) definidas pelas suas componentes:

$$\dot{\gamma}^i(t) = X^i(\gamma(t)). \quad (2.7)$$

Da teoria de EDOs, obtém-se o seguinte resultado:

**Proposição 2.1.1.** *Seja  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Para cada ponto  $p \in M$ , existe uma curva  $C^\infty$   $\gamma_p : (a_p, b_p) \rightarrow M$  que possui as seguintes propriedades:*

1.  $0 \in (a_p, b_p)$  e  $\gamma_p(0) = p$ ;
2.  $\gamma_p$  é uma curva integral;
3. Se  $\eta : (a, b) \rightarrow M$  é uma curva integral que satisfaz as duas condições anteriores então  $(a, b) \subset (a_p, b_p)$  e  $\gamma_p|_{(a,b)} = \eta$ .

**Definição 2.1.5.** A  $\gamma_p$  chamamos **curva integral maximal** de  $X$  que passa por  $p$ .

Definimos também:

**Definição 2.1.6.** Para cada  $t \in \mathbb{R}$ , seja:

$$D_t = \{p \in M | t \in (a_p, b_p)\}. \quad (2.8)$$

Dizemos que o campo vetorial  $X$  é um **campo vetorial completo** se, para a sua curva integral,  $D_t = M$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

**Definição 2.1.7.** Denominamos de **fluxo** do campo vetorial  $X \in \mathfrak{X}(M)$  a aplicação  $\phi_X^t : D_t \rightarrow M$  tal que  $\phi_X^t(p) = \gamma_p(t)$ .

Valem as seguintes propriedades [21]:

1. Para cada  $p \in M$ , existem uma vizinhança  $U$  de  $p$  e  $\epsilon > 0$  tal que a aplicação  $(-\epsilon, \epsilon) \times U \rightarrow M$ , dada por  $(t, q) \mapsto \phi_X^t(q)$ , está bem definida e é  $C^\infty$ ;
2.  $D_t$  é aberto  $\forall t \in \mathbb{R}$  e  $\bigcup_{t \in \mathbb{R}} D_t = M$ ;
3. Para cada  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\phi_X^t : D_t \rightarrow D_{-t}$  é um difeomorfismo e  $(\phi_X^t)^{-1} = \phi_X^{-t}$ ;

4.  $\forall s, t \in \mathbb{R}$ , o domínio de  $\phi_X^t \circ \phi_X^s$  está em  $D_{t+s}$  e  $\phi_X^{t+s} = \phi_X^t \circ \phi_X^s$ ;
5.  $\phi_{tX}^s = \phi_X^{st}$ .

Uma das estruturas centrais na teoria de Lie é dada pelos **colchetes de Lie**.

**Definição 2.1.8.** *Definimos os colchetes de Lie entre campos vetoriais  $X$  e  $Y$  como*

$$[X, Y](f) = XYf - YXf, \quad (2.9)$$

onde  $f \in C(M)$ .

Segue da definição que  $[X, Y](fg) = [X, Y](f)g + f[X, Y](g)$ , o que nos mostra que  $[X, Y]$  é, de fato, um campo vetorial. Sejam  $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  e  $Y = \sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ . Em coordenadas locais, temos:

$$[X, Y] = \sum_{i,j} \left( X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}. \quad (2.10)$$

Equivalentemente, podemos definir o colchete de Lie por [22]:

$$[X, Y](p) = \left. \frac{d}{dt} \left( (d\phi_X^{-t})_{\phi_X^t(p)} (Y(\phi_X^t(p))) \right) \right|_{t=0}. \quad (2.11)$$

Esta última expressão nos diz que o colchete de Lie  $[X, Y]$  avalia a variação de  $Y$  ao longo do fluxo de  $X$ . No entanto, há outra idéia geométrica que podemos fazer do colchete de Lie que nos será mais apropriada. A introduziremos a partir da seguinte proposição, cuja demonstração é encontrada em [20]:

**Proposição 2.1.2.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável. Sejam  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  campos vetoriais. Para cada  $p \in M$ , o comutador:*

$$\gamma_p(\epsilon) = \phi_X^{-\sqrt{\epsilon}} \circ \phi_Y^{-\sqrt{\epsilon}} \circ \phi_X^{\sqrt{\epsilon}} \circ \phi_Y^{\sqrt{\epsilon}}(p), \quad (2.12)$$

está bem definido para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno. Verifica-se, ainda, a igualdade:

$$[X, Y]_p = \left. \frac{d}{d\epsilon} \gamma_p(\epsilon) \right|_{\epsilon=0^+}. \quad (2.13)$$

Como a proposição acima nos diz, podemos entender o colchete de Lie como a medida da não comutatividade dos fluxos dos campos vetoriais. Quando percorrermos quantidades infinitesimais no fluxo de  $X$ , depois no de  $Y$ , e voltamos percorrendo o fluxo de  $X$  e depois novamente o de  $Y$ , obtemos o colchete de Lie como a variação dos pontos iniciais e finais deste caminho.

Obtemos, da definição, as propriedades:

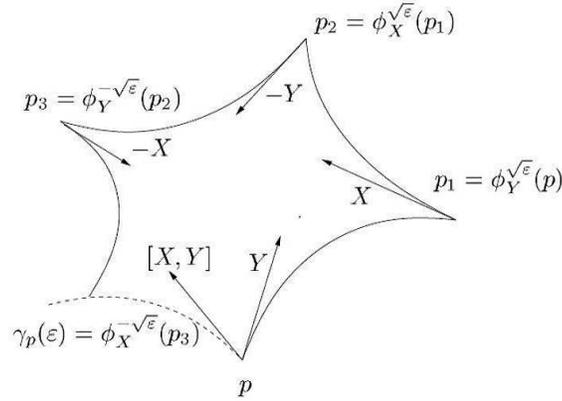


Figura 2.1: Compreensão geométrica do colchete de Lie [20]

1. O colchete de Lie é bilinear sobre  $\mathbb{R}$ ;
2.  $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X \quad \forall f, g \in C(M)$  e  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ;
3.  $[X, Y] = -[Y, X]$ ;
4. Identidade de Jacobi:  $[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]]$ .

Outra importante propriedade dos colchetes de Lie é que se  $X$  e  $Y$  são colchetes  $\psi$ -relacionados a  $Z$  e  $W$ , respectivamente, então  $[X, Y]$  é  $\psi$ -relacionado a  $[Z, W]$ . Uma maneira de provar essa propriedade é usando a definição 2.11, e a relação entre fluxos de campos vetoriais  $\psi$ -relacionados [22].

### 2.1.2 Grupos de Lie e suas Álgebras de Lie

**Definição 2.1.9.** *Um grupo de Lie é uma variedade diferenciável  $G$ , dotada de uma estrutura de grupo tal que o produto definido no grupo  $p : G \times G \rightarrow G$ ,  $(g, h) \mapsto gh$  e a inversão  $i : G \rightarrow G$ ,  $g \mapsto g^{-1}$  são diferenciáveis.*

São exemplos de grupos de Lie:

- $\mathbb{R}^n$  em relação à adição;
- $\mathbb{R}^*$  e  $\mathbb{C}^*$  em relação à multiplicação;
- $S^1$  em relação à multiplicação;
- O grupo das matrizes inversíveis  $Gl(n)$  em relação à multiplicação de matrizes.

**Definição 2.1.10.** *Introduzimos a aplicação **translação à direita** por  $g \in G$ ,  $R_g : G \rightarrow G$ ,  $h \mapsto hg$ . A **translação à esquerda** por  $g \in G$  é analogamente definida pela aplicação  $L_g : G \rightarrow G$ ,  $h \mapsto gh$ .*

Como a operação do grupo é diferenciável,  $L_{g^{-1}} = L_g^{-1}$  e  $R_{g^{-1}} = R_g^{-1}$  são diferenciáveis e, portanto, as translações no grupo são difeomorfismos para quaisquer  $g \in G$ .

**Definição 2.1.11.** *Definimos a aplicação **conjugação** no grupo de Lie por  $C_g : G \rightarrow G$ ,  $h \mapsto ghg^{-1}$ .*

A conjugação é um difeomorfismo já que é composição de aplicações diferenciáveis  $C_g = L_g \circ R_{g^{-1}}$  e, portanto, uma aplicação diferenciável. Ela também possui inversa diferenciável  $C_{g^{-1}}$ , pois a inversa é igualmente uma conjugação.

Com as definições anteriores podemos definir:

**Definição 2.1.12.** *Seja  $X \in \mathfrak{X}(G)$ .  $X$  é dito um **campo vetorial invariante à esquerda** se:*

$$d(L_g)_h X(h) = X(gh) \quad \forall g, h \in G. \quad (2.14)$$

$X$  é dito um **campo vetorial invariante à direita** se

$$d(R_g)_h X(h) = X(hg) \quad \forall g, h \in G. \quad (2.15)$$

Vamos denotar os campos invariantes à esquerda por  $\mathfrak{X}_{inve}(G)$  e os campos invariantes à direita por  $\mathfrak{X}_{invd}(G)$ .

Apresentaremos algumas importantes propriedades dos campos invariantes. Vamos tratar apenas dos campos invariantes à esquerda, já que o caso dos campos invariantes à direita é análogo. Os campos invariantes possuem as seguintes propriedades [21]:

1. Os campos invariantes são de classe  $C^\infty$ ;
2. Se  $X$  e  $Y$  são campos invariantes, então  $[X, Y]$  também é um campo invariante;
3. Os campos invariantes formam um espaço vetorial contido em  $\mathfrak{X}(G)$ .

Vamos agora mostrar uma propriedade notória do espaço dos campos vetoriais invariantes:

**Proposição 2.1.3.**  $\dim(T_e G) = \dim(\mathfrak{X}_{inve}(G))$ .

*Prova:* Notemos que, levando em consideração a estrutura de espaço vetorial dos campos invariantes, a aplicação  $\mathfrak{X}_{inve}(G) \rightarrow T_e G$ ,  $X \mapsto X_e$ , onde  $T_e G$  denota o espaço tangente do elemento neutro do grupo, é uma aplicação linear. Se  $X, Y \in \mathfrak{X}_{inve}(G)$  são tais que  $X_e = Y_e$ , então  $X_g = d(L_g)_e X_e = d(L_g)_e Y_e = Y_g \forall g \in G$ , o que implica  $X = Y$ . Logo, esta aplicação é injetiva. Por outro lado, dado  $A \in T_e G$ , podemos definir  $X \in \mathfrak{X}_{inve}(G)$  como  $X_g = d(L_g)_e A$ . Logo, para todo  $A \in T_e G$ , obtemos um campo invariante à esquerda que, na identidade, é

A. Isto nos mostra que  $X \mapsto X_e$  é sobrejetiva. Esta aplicação trata-se, portanto, de um isomorfismo de espaços lineares, o que nos mostra que  $\dim(T_e G) = \dim(\mathfrak{X}_{inve}(G))$ .  $\square$

De forma análoga demonstra-se que  $\dim(T_e G) = \dim(\mathfrak{X}_{invd}(G))$ . Consequentemente temos  $\dim(\mathfrak{X}_{invd}(G)) = \dim(\mathfrak{X}_{inve}(G))$ . Vamos apresentar agora o conceito de álgebra de Lie.

**Definição 2.1.13.** *Uma álgebra de Lie define-se como um espaço vetorial  $\mathcal{G}$ , dotado de uma operação  $[\cdot, \cdot] : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ , denominada colchetes de Lie, que satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *Antissimetria:*  $[X, Y] = -[Y, X]$ ;
2. *Bilinearidade:* se  $a$  é um escalar, então  $[aX, Y] = [X, aY] = a[X, Y]$ ;
3. *Identidade de Jacobi:*  $[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]]$ .

É natural, quando falamos de uma álgebra, que busquemos o conceito de subálgebras a ela associadas:

**Definição 2.1.14.** *Uma subálgebra de Lie é um subespaço vetorial de uma álgebra de Lie fechado em relação ao colchete de Lie.*

Concluimos, diretamente da definição de álgebras de Lie, que os campos vetoriais em  $M$ ,  $\mathfrak{X}(M)$ , formam uma álgebra de Lie, e os campos invariantes à esquerda, e os campos invariantes à direita são subálgebras de Lie da algebra de lie  $\mathfrak{X}(M)$ .

**Definição 2.1.15.** *Chamamos a álgebra de Lie dos campos invariantes à esquerda de álgebra de Lie associada a  $G$ .*

Podemos definir o colchete de Lie em  $T_e G$  da seguinte maneira:

**Definição 2.1.16.** *Sejam  $A, B \in \mathcal{G}$ . Definimos o colchete de Lie em  $T_e G$  por:*

$$[A, B] = [\bar{A}, \bar{B}]_e, \quad (2.16)$$

onde  $\bar{A}, \bar{B} \in \mathfrak{X}_{inve}(G)$ ,  $\bar{A}_g = d(L_g)_e A \forall g \in G$  e  $\bar{B}_g = d(L_g)_e B \forall g \in G$ .

Desta forma, atribuímos a  $T_e G$  estrutura de álgebra de Lie.  $T_e G$  é uma álgebra de Lie isomorfa à  $\mathfrak{X}_{inve}(G)$ . Portanto, podemos considerar tanto  $T_e G$  quanto  $\mathfrak{X}_{inve}(G)$  como a álgebra de Lie associada à  $G$ . Daqui em diante, quando nos referirmos à álgebra de Lie  $\mathcal{G}$  associada à  $G$ , estaremos nos referindo à  $T_e G$  ou  $\mathfrak{X}_{inve}(G)$ , dependendo do contexto.

**Definição 2.1.17.** *Definimos a aplicação exponencial  $exp : \mathcal{G} \rightarrow G$ , a qual denotaremos também por  $e^X$ , como:*

$$exp(X) = \phi_X^1(e). \quad (2.17)$$

Definida a aplicação exponencial, mostramos a proposição:

**Proposição 2.1.4.** *Valem as propriedades:*

1.  $e^{(t+s)X} = e^{tX}e^{sX}$ ;
2.  $e^{-t} = (e^t)^{-1}$ ;
3.  $exp$  é  $C^\infty$  e  $d(exp)_0 = I$ .

*Prova:* As duas primeiras propriedades são consequências das propriedades de fluxo de campos vetoriais. Para demonstrar a última propriedade, basta notar que, dado  $A \in \mathcal{G}$ ,  $d(exp)_0 A = \left. \frac{d}{dt} exp(0 + tA) \right|_{t=0}$ . Mas a propriedade  $e^{tA} = \phi_A^t(e)$  nos dá que  $d(exp)_0 A = A \forall A \in \mathcal{G}$ , o que implica  $d(exp)_0 = I$ .  $\square$

Como  $d(exp)_0 = I$  é inversível, temos, do teorema da função inversa, que a aplicação exponencial é um difeomorfismo entre uma vizinhança da identidade do grupo e uma vizinhança do elemento neutro da álgebra. Este é um resultado importante na teoria de grupos de Lie.

**Definição 2.1.18.** *Uma aplicação  $\psi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  entre duas álgebras de Lie é dita um **homomorfismo de álgebras de Lie** se  $\psi$  é diferenciável e preserva os colchetes de Lie:*

$$\psi([X, Y]) = [\psi(X), \psi(Y)]. \quad (2.18)$$

**Definição 2.1.19.** *Definimos um **homomorfismo de grupos de Lie** como uma aplicação  $\psi : G \rightarrow H$  entre grupos de Lie que seja diferenciável e homomorfismo de grupos.*

Existe uma relação importante entre homomorfismos de grupos de Lie e homomorfismos de álgebras de Lie:

**Proposição 2.1.5.** *Seja  $\psi : G \rightarrow H$  um homomorfismo entre os grupos de Lie  $G$  e  $H$ , e  $\mathcal{G}$  e  $\mathcal{H}$  as álgebras de Lie associadas, respectivamente, a  $G$  e  $H$ . Definamos  $\psi_* : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  como a aplicação  $X \mapsto \psi_*(X)$ , onde  $\psi_*(X) \in \mathcal{H}$  é o campo vetorial invariante à esquerda, tal que  $\psi_*(X)_e = d(\psi)_e X_e$ . Então,  $\psi_*$  é homomorfismo de álgebras de Lie.*

*Prova:*  $\psi_*(X)$  é  $\psi$ -relacionado a  $X$ . De fato, como  $\psi$  é homomorfismo de grupo:

$$\begin{aligned} \psi_*(X)_{\psi(g)} &= d(L_{\psi(g)})_e d(\psi)_e X_e = d(L_{\psi(g)} \circ \psi)_e X_e = \\ &= d(\psi \circ L_g)_e X_e = d(\psi)_g d(L_g)_e X_e = d(\psi)_g X_g, \end{aligned} \quad (2.19)$$

$\forall g \in G$ . Como visto anteriormente, o colchete de Lie de vetores  $\psi$ -relacionados é  $\psi$ -relacionado. Segue que  $\psi_*$  é homomorfismo de álgebras de Lie.  $\square$

Esclarecida a relação entre homomorfismo de álgebras de Lie e homomorfismo de grupos de Lie, vamos introduzir um importante homomorfismo de álgebras de Lie para o desenvolvimento da teoria de fibrados principais e conexões. Consideremos a aplicação conjugação  $C_g : G \rightarrow G$ ,  $h \mapsto ghg^{-1}$ , no grupo de Lie. Esta aplicação induz um automorfismo:

**Definição 2.1.20.** *Seja  $g \in G$ . Definimos a aplicação adjunta de  $g$ ,  $Ad(g) : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ , como:*

$$Ad(g)X = (C_g)_*X. \quad (2.20)$$

Em grupos de matrizes, como a multiplicação entre matrizes é linear,  $C_g$  é linear. Logo, sua derivada é a própria aplicação, de forma que  $Ad(g)X = (C_g)X = gXg^{-1}$ .

Com os conceitos básicos de grupos de Lie e suas álgebras de Lie associadas, podemos tratar de ações de grupos de Lie sobre variedades.

### 2.1.3 Grupos de Transformações

**Definição 2.1.21.** *Sejam  $G$  um grupo de Lie e  $M$  uma variedade diferenciável. Uma ação à esquerda de  $G$  em  $M$  é uma aplicação diferenciável  $\varphi : G \times M \rightarrow M$  que satisfaz:*

1.  $\varphi(e, p) = p, \forall p \in M$ ;
2.  $\varphi(g_1, \varphi(g_2, p)) = \varphi(g_1g_2, p)$ .

Fixando um elemento de  $G$ , denotamos  $a(g)p = \varphi_g(p) = \varphi(g, p)$ , ou simplesmente  $g \cdot p$ . Analogamente, temos ações à direita, que satisfazem:

1.  $\varphi(e, p) = p \forall p \in M$ ;
2.  $\varphi(g_1, \varphi(g_2, p)) = \varphi(g_2g_1, p)$ .

Denotamos ainda  $a(g)p = \varphi_g(p) = \varphi(g, p)$  ou simplesmente  $p \cdot g$ . Trataremos aqui das ações à esquerda, sendo os resultados análogos para ações à direita. Como  $\varphi$  é uma aplicação diferenciável, a restrição  $\varphi_g$  é, também, diferenciável. Temos, assim, um difeomorfismo, já que  $(\varphi_g)^{-1} = \varphi_{g^{-1}}$ . Logo,  $a : G \rightarrow Dif(M)$ .

**Definição 2.1.22.** *Podemos classificar uma ação como:*

1. **transitiva** se, dados  $p_1, p_2 \in M$ , existe  $g \in G$  tal que  $p_1 = g \cdot p_2$ ;
2. **livre** se satisfaz:  $g \cdot p = p$  para algum  $p \in M \Rightarrow g = e$ ;
3. **efetiva** se  $Ker(a) = \{g \in G \mid g \cdot p = p \forall p \in M\} = \{e\}$ .

**Definição 2.1.23.** *Um grupo de transformações à esquerda é uma tripla  $(G, M, \varphi)$ , onde  $G$  é um grupo de Lie,  $M$  é uma variedade diferenciável e  $\varphi$  é uma ação diferenciável à esquerda  $\varphi : G \times M \rightarrow M$ .*

**Definição 2.1.24.** *A órbita de  $p$  pela ação  $\varphi$  é definida por:*

$$G \cdot p = Orb(p) = \{g \cdot p \in M \mid g \in G\}. \quad (2.21)$$

Lembramos a definição de **relação de equivalência**:

**Definição 2.1.25.** *Seja  $U$  um conjunto. Uma relação de equivalência em  $U$ , denotada por  $\sim$ , é uma relação que satisfaz as propriedades de:*

1. **Reflexividade:**  $x \sim x, \forall x \in U$ ;
2. **Simetria:** *se  $x \sim y$ , então  $y \sim x, \forall x, y \in U$ ;*
3. **Transitividade:** *se  $x \sim y$  e  $y \sim x$ , então  $x \sim z, \forall x, y, z \in U$ .*

Os elementos relacionados por uma relação de equivalência formam uma **classe de equivalência**:

**Definição 2.1.26.** *A classe de equivalência de  $x$ , denotada por  $[x]$  é conjunto*

$$[x] = \{y \in U | y \sim x\}. \quad (2.22)$$

*Denotamos o espaço das classes de equivalência por  $U/\sim$ .*

A idéia por trás de definir uma relação de equivalência é de classificar elementos de um conjunto. A classe de equivalência é o meio pelo qual se dá essa classificação. A relação de equivalência separa o conjunto inicial em subconjuntos disjuntos (as classes de equivalência), cada um deles contendo os elementos relacionados entre si. Por exemplo, podemos estabelecer, em  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , que dois pontos são equivalentes se eles pertencem à mesma reta que passaria pela origem. As classes de equivalência desta relação serão as retas que passariam pela origem contidas em  $\mathbb{R}^n$ . O conjunto das classes de equivalência será o espaço projetivo  $\mathbb{R}P^{n-1}$ .

Queremos agora mostrar a proposição:

**Proposição 2.1.6.** *Sejam  $x, y \in M$ . A relação definida por  $x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G$  tal que  $x = g \cdot y$ , é uma relação de equivalência.*

*Prova:* A relação definida é reflexiva, já que  $e \cdot x = x$ . É também transitiva, já que, se  $x = g \cdot y$ , então  $y = g^{-1} \cdot x$ . Para mostrar que a relação é transitiva, note que se  $x = g \cdot y$  e  $y = h \cdot z$ , então  $x = hg \cdot z$ . A relação  $x \sim y \Leftrightarrow x \in G \cdot y$  é, portanto, uma relação de equivalência cujas classes de equivalência são as órbitas da ação.  $\square$

Denotamos o conjunto das classes de equivalência da relação definida acima por  $M/G$ . O conjunto  $M/G$ , dotado com a topologia quociente, possui estrutura de espaço topológico. Por isso é costumeiro se referir a  $M/G$  por espaço das órbitas. Introduzimos ainda:

**Definição 2.1.27.** *O grupo de isotropia de  $p \in M$  é definido por:*

$$G_p = \{g \in G | g \cdot p = p\} \quad (2.23)$$

$G_p$  é também chamado de estabilizador de  $p$  em  $G$ .

Estabelecemos a relação de equivalência dentro do grupo de Lie:  $g \sim h \Leftrightarrow \exists a \in G_p | ag = h$ . As classes de equivalência serão denotadas por  $G_p g = [g]$ . Denotamos o conjunto das classes de equivalência desta relação de equivalência por  $G/G_p$ .

Apresentamos um importante resultado na teoria de ações de grupos de Lie sobre variedades diferenciáveis, cuja demonstração pode ser encontrada em [22], capítulo 5:

**Teorema 2.1.1.** *Seja  $G$  um grupo de Lie que age sobre a variedade  $M$  e  $p \in M$ . Então,  $G/G_p$  e  $p \cdot G$  possuem estrutura de variedade diferenciável e, além disso, a aplicação  $\psi_p : G/G_p \rightarrow p \cdot G$ ,  $G_p g \mapsto p \cdot g$  é um difeomorfismo.*

A relação de equivalência que determina  $G/G_p$  relaciona elementos que, quando agem em  $p$  pela direita, levam ao mesmo ponto de  $M$ . Dado  $h \in G_p g$ , existe  $a \in G_p$  tal que  $h = ag$ . Desta forma,  $p \cdot h = p \cdot ag = p \cdot g$ . Com isso, é fácil ver que  $\psi_p$  é bijetora. Este teorema nos diz que, além de uma aplicação bijetora, esta aplicação é um difeomorfismo. No caso em que  $G_p = \{e\}$ ,  $\psi_p$  é um difeomorfismo do grupo de Lie com a órbita de  $p$ . Este caso será de grande importância adiante no nosso trabalho.

Como uma ilustração do teorema acima, consideremos a ação de  $SO(2)$  em  $S^2$  por meio de rotações em relação ao eixo que passa pelos pólos norte e sul, que denotaremos por  $p_n$  e  $p_s$ . Esta ação é livre sobre  $S^2 \setminus \{p_n, p_s\}$ . Logo, dado  $p \in S^2 \setminus \{p_n, p_s\}$  temos  $G_p = \{e\}$  e  $\psi_p$  é um difeomorfismo entre  $SO(2)$  e a órbita de  $p$ , que é o paralelo em que ele se encontra. Se  $p$  é um pólo, então  $p$  é um ponto fixo da ação e, portanto,  $G_p = SO(2)$ . Dessa forma,  $\psi_p$  neste caso estabelece um difeomorfismo (trivial) entre os elementos  $[e] \in SO(2)/SO(2)$  e  $p \in S^2$ .

## 2.2 Teorema da Órbita Principal

Vistos estes conceitos iniciais sobre grupos de transformações, podemos falar sobre um teorema central no desenvolvimento do nosso trabalho: o teorema da órbita principal. Antes disso, veremos alguns conceitos necessário para podermos enunciar o teorema.

**Definição 2.2.1.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável. Uma ação própria  $\varphi : G \times M \rightarrow M$  é uma ação com a propriedade de que a aplicação  $\mu : G \times M \rightarrow M \times M$ ,  $(g, x) \mapsto (\varphi(g, x), x)$  é própria, isto é,  $\mu$  é tal que  $\mu^{-1}(K)$  é compacto se  $K$  é compacto. Equivalentemente,  $\mu$  é fechada e a imagem inversa de um ponto é compacta.*

Devemos destacar que, se o grupo de Lie  $G$  é compacto, toda a ação realizada por ele é própria [23]. Veremos, no decorrer deste trabalho, que ações de subgrupos fechados de grupos de isometria (não necessariamente compactos) de variedades riemannianas são ações próprias. Um exemplo de ações não próprias são ações de subgrupos fechados não-compactos  $H$  de grupos de Lie  $G$  agindo em  $G$  por translações. Por exemplo, o subgrupo  $H = Sl(n, \mathbb{R})$  do grupo de Lie  $G = Gl(n, \mathbb{R})$  [23].

**Definição 2.2.2.** Se  $H$  é um grupo de isotropia da ação de  $G$  em  $M$  e se  $x \in M$ , dizemos que uma órbita  $x \cdot G$  é uma **órbita tipo** ( $H$ ) se  $G_x$  é conjugado a  $H$ , ou seja, se  $G_x = g^{-1}Hg$  para algum  $g \in G$ . Podemos estabelecer uma relação de ordem parcial no conjunto das órbitas determinando que a órbita tipo ( $H$ ) é "menor ou igual" à órbita tipo ( $K$ ) ( $(H) \preceq (K)$ ) se e somente se  $K$  é conjugado a um subgrupo de  $H$ .

**Definição 2.2.3.** Chamamos uma órbita  $x \cdot G$  uma **órbita principal** se existe uma vizinhança aberta  $U \subset M$  de  $x$  tal que para todo  $y \in U$  temos  $(G_y) \preceq (G_x)$ . Neste caso chamamos  $G_x$  o subgrupo de isotropia principal. Os pontos pertencentes às órbitas principais são chamados **pontos regulares**. Denotamos o conjunto dos pontos regulares por  $M_r$ .

Como ilustração, tomemos a ação usual de  $O(n)$  em  $\mathbb{R}^n$ . Temos aqui dois tipos de órbitas. A origem  $O$  é um ponto fixo da ação e assim  $G_O = O(n)$ . Todas as outras órbitas são esferas centradas na origem, e o grupo de isotropia destes pontos é isomorfo a  $O(n-1)$ . Logo,  $(\mathbb{R}^n)_r = \mathbb{R}^n - O$ . Outro exemplo que podemos dar é da ação de  $SO(2)$  em  $\mathbb{R}P^2$  induzida da ação em  $S^2$  que fixa os pólos da esfera. Essa ação possui três tipos de órbitas: (i) a classe relativa aos pólos  $N$  é um ponto fixo da ação e assim  $G_N = SO(2)$ ; (ii) se  $P$  é uma classe resultante da projeção de um ponto do equador (onde a rotação de  $180^\circ$ ,  $-e$ , mantém os elementos fixos), temos  $G_P = \{e, -e\}$  e, por fim, (iii) se  $Q$  é uma classe resultante de um ponto que não pertence nem ao equador nem aos pólos, temos que seu subgrupo de isotropia é  $\{e\}$ . As órbitas, neste último caso, são as órbitas principais (notamos que são projeções dos paralelos) e a união destas nos dá os pontos regulares.

Podemos agora enunciar o teorema da órbita principal [23]:

**Teorema 2.2.1** (Teorema da Órbita Principal). *Seja  $M$  uma variedade diferenciável e  $G$  um grupo de Lie que age propriamente em  $M$ . Suponhamos  $M/G$  conexo. Então, existe uma órbita tipo ( $H$ ) maximal, ou seja, para qualquer subgrupo de isotropia  $K$ ,  $H$  é conjugado a um subgrupo de  $K$ . Estas órbitas maximais são exatamente as órbitas principais. Ainda,  $M_r$  é aberto e denso em  $M$  e a imagem  $M_r^* = \pi(M_r)$  da projeção  $\pi : M \rightarrow M/G$  é uma variedade diferenciável e conexa, com  $\pi : M_r \rightarrow M_r^*$  diferenciável.*

Este teorema nos traz bastante informação. Ele nos diz que, no caso em que a ação de  $G$  em  $M$  é própria e  $M/G$  é conexo, existe um órbita tipo ( $H$ ) maximal, ou seja, existe um grupo de isotropia mínimo em  $G$ . O teorema nos diz que estas órbitas tipo ( $H$ ) maximais são as órbitas principais e que o conjunto dos pontos regulares é aberto em  $M$ , de onde conclui-se que  $M_r$  possui estrutura de variedade diferenciável com a mesma dimensão que  $M$ . O teorema ainda nos diz que  $M_r$  é denso em  $M$ , ou seja, que ele é "quase todo  $M$ ". E ainda mais, o teorema nos diz que, satisfeitas suas hipóteses, a imagem da projeção canônica  $M_r^* = \pi(M_r)$ , que em geral não possui estrutura diferenciável, neste caso é variedade.

Os exemplos acima que ilustram as definições de órbitas tipo ( $H$ ) e órbitas principais são, também, exemplos da implementação do teorema da órbita principal, já que  $O(n)$  e  $SO(2)$

são compactos e, conseqüentemente, suas ações são próprias, e  $\mathbb{R}^n/O(n)$  e  $\mathbb{R}P^2/SO(2)$  são conexos.

Este robusto teorema será de grande importância no desenvolvimento do nosso trabalho.

## 2.3 Fibrados

Introduziremos nesta seção o conceito de fibrado, um conceito central no desenvolvimento do nosso trabalho.

**Definição 2.3.1.** *Um fibrado é composto por*

1. *Uma variedade chamada **espaço total**  $E$ ;*
2. *Uma variedade chamada **fibra padrão**  $F$ ;*
3. *Uma variedade chamada **espaço base**  $M$ ;*
4. *Um grupo  $G$ , chamado **grupo estrutural**, que age efetivamente em  $F$ ;*
5. *Uma projeção sobrejetora  $\pi : E \rightarrow M$ , sendo  $F_x = \pi^{-1}(x)$  homeomorfo a  $F$ .*

$E$  é localmente homeomorfo ao produto cartesiano entre  $M$  e  $F$ . Ou seja, existe uma cobertura aberta  $\{U_j\}_{j \in J}$  de  $M$  para a qual existem homeomorfismos  $T_j : \pi^{-1}(U_j) \rightarrow U_j \times F$  que são da forma  $T_j(p) = (\pi(p), s_j(p))$ , onde  $s_j$  denota a aplicação  $s_j : \pi^{-1}(U_j) \rightarrow F$ , sendo que  $s_j|_{F_x = \pi^{-1}(x)} : F_x \rightarrow F$  define um difeomorfismo. Os difeomorfismos  $T_j$  são chamados *trivializações locais*.

Para cada  $x \in U_i \cap U_j$ , o difeomorfismo induzido  $s_{j,x} \circ s_{i,x}^{-1} : F \rightarrow F$  corresponde à ação de um elemento do grupo estrutural  $G$ . Dado  $f \in F$ , temos  $\gamma_{j,i}(x) \in G$ , tal que  $s_{j,x} \circ s_{i,x}^{-1}(f) = \gamma_{j,i}(x) \cdot f$ . Os objetos  $\gamma_{j,i}(x)$  são chamados de *funções de transição* e satisfazem as seguintes propriedades:

1.  $\gamma_{i,i}(x) = e$ , onde  $e$  denota o elemento neutro de  $G$ ;
2.  $\gamma_{j,i}(x) = (\gamma_{i,j}(x))^{-1}$ ;
3.  $\gamma_{j,k}(x)\gamma_{k,l}(x)\gamma_{l,j}(x) = e \forall x \in U_j \cap U_k \cap U_l$ .

Denota-se, usualmente, um fibrado pelo conjunto  $(E, M, F, \pi, G)$ . Um exemplo bem conhecido de fibrado é a fita de Möbius [24].

**Definição 2.3.2.** *Um fibrado trivial é um fibrado no qual existe um difeomorfismo global  $h : M \times F \rightarrow E$  tal que  $\pi(h(x, f)) = x \forall x \in M$  e  $f \in F$ , ou seja, que preserva as fibras. Neste caso  $h^{-1}$  trivializa globalmente o fibrado.*

Um exemplo de fibrado trivial é o cilindro  $S^1 \times [-1, 1]$ , onde  $S^1 = F$ ,  $[-1, 1] = M$  e  $S^1 \times [-1, 1] = E$ . Neste caso  $\pi : E \rightarrow [-1, 1]$  é a projeção sobre a segunda coordenada.

**Definição 2.3.3.** *Definimos uma seção de um fibrado  $(E, M, F, \pi, G)$ , usualmente denotada por  $\sigma$ , pela aplicação diferenciável  $\sigma : M \rightarrow E$  que satisfaz:*

$$\pi \circ \sigma = id \tag{2.24}$$

## 2.4 Formas Diferenciais

### 2.4.1 A Álgebra Exterior

Começamos introduzindo os tensores covariantes.

**Definição 2.4.1.** *Um tensor covariante de ordem  $k$  sobre o espaço vetorial  $V$  é uma aplicação multilinear  $T : \overbrace{V \times \cdots \times V}^{k \text{ vezes}} \rightarrow \mathbb{R}$ .*

O conjunto dos tensores covariantes de ordem  $k$  sobre o espaço vetorial  $V$  possui estrutura de um espaço vetorial que denotaremos por  $T^k(V)$ .

**Definição 2.4.2.** *Um tensor covariante alternado de ordem  $p$  é um tensor covariante de ordem  $p$ , que denotaremos por  $T^{[p]}$ , tal que:*

$$T^{[p]}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_p) = -T^{[p]}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_p), \tag{2.25}$$

onde  $\mathbf{v}_s \in V$ ,  $\forall s \in \{1, \dots, p\}$

É comum encontrar, na literatura existente sobre o assunto, autores que se refiram aos tensores covariantes alternados de grau  $p$  por  **$p$ -tensores covariantes alternados**, ou  **$p$ -covetores**.

O espaço dos  $p$ -tensores alternados forma um espaço vetorial. Vamos denotar o espaço dos  $p$ -tensores alternados sobre o espaço vetorial  $V$  por  $\Lambda^p(V)$ . Note que  $\Lambda^0(V) = \mathbb{R}$  e  $\Lambda^1(V) = V^*$ , sendo  $V^*$  o espaço dual de  $V$ .

Sejam  $T^{[p]} \in \Lambda^p(V)$  e  $S^{[q]} \in \Lambda^q(V)$ . Se aplicarmos o produto tensorial  $T^{[p]} \otimes S^{[q]}$ , esse produto será um  $(p+q)$ -tensor mas não um  $(p+q)$ -tensor alternado. É natural que procuremos uma operação entre um  $p$ -tensor e um  $q$ -tensor alternados que leve a um  $(p+q)$ -tensor alternado.

Definimos:

**Definição 2.4.3.** *Sejam  $T^{[p]} \in \Lambda^p(V)$  e  $S^{[q]} \in \Lambda^q(V)$ . O produto exterior  $\wedge : \Lambda^p(V) \times \Lambda^q(V) \rightarrow \Lambda^{(p+q)}(V)$  é definido como:*

$$T^{[p]} \wedge S^{[q]}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\mu \in S_p} \text{sgn}(\mu) T^{[p]}(\mathbf{v}_{\mu(1)}, \mathbf{v}_{\mu(2)}, \dots, \mathbf{v}_{\mu(p)}) S^{[q]}(\mathbf{v}_{\mu(1)}, \mathbf{v}_{\mu(2)}, \dots, \mathbf{v}_{\mu(q)}), \tag{2.26}$$

onde  $\mu$  denota uma permutação do grupo de simetria  $S_p$ .

O produto exterior herda do produto tensorial a associatividade e a bilinearidade. Podemos destacar a seguinte propriedade [18]:  $T^{[p]} \wedge S^{[q]} = (-1)^{pq} S^{[q]} \wedge T^{[p]}$ .

Consideremos  $\dim V = n$ ,  $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}^i\}$  uma base de  $V^*$  e  $\mathcal{B}_p = \{\mathbf{e}^{i_1} \wedge \mathbf{e}^{i_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}^{i_p}\}$ , onde  $i_k = 1, 2, \dots, n$ . Devido à multilinearidade dos tensores alternados, podemos obter de  $\mathcal{B}_p$  uma base para  $\bigwedge^p(V)$ . Primeiramente, devemos notar que os elementos de  $\mathcal{B}_p$  com dois elementos iguais (isto é,  $\mathbf{e}^{i_r} = \mathbf{e}^{i_s}$  para algum  $r \neq s$ ) se anulam. Logo, temos  $n$  possibilidades para  $i_1$ ,  $(n-1)$  possibilidades para  $i_2$ , até  $(n-p+1)$  possibilidades para  $i_p$ , o que resulta em

$$n(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!} \quad (2.27)$$

elementos de  $\mathcal{B}_p$  que contribuem para gerar  $\bigwedge^p(V)$ . Mas nem todos os  $\frac{n!}{(n-p)!}$  elementos vão originar  $p$ -covetores linearmente independentes. Qualquer tensor que possa ser obtido de outro através de uma permutação, contribuirá da mesma forma. Para  $p$  elementos, temos  $p!$  permutações. Devemos dividir o número de elementos que não se anulam pelo número de permutações. Chegamos, assim ao número de elementos de  $\mathcal{B}_p$  que contribuem de maneira independente para gerar  $\bigwedge^p(V)$ :

$$\frac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p} = \dim \bigwedge^p(V). \quad (2.28)$$

Notemos que não existem  $(n+1)$ -covetores não-triviais se  $\dim V = n$  pois, nesse caso, o  $(n+1)$ -covetor seria escrito na forma  $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n \wedge \alpha_{(n+1)}$ , e um dos  $(n+1)$  covetores poderia ser escrito em função dos outros. Pela linearidade e por ser alternado, um  $(n+1)$ -covetor se anula.

Agora que sabemos a dimensão do espaço  $\bigwedge^p(V)$ , vamos determinar uma base para tal espaço. Considerando  $\bigwedge^2(V)$ , os bivectores linearmente independentes gerados por  $\mathcal{B}_2$  são

$$\begin{aligned} &\mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^3, \dots, \mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^n, \\ &\mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^3, \mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^4, \dots, \mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^n, \\ &\dots \\ &\mathbf{e}^{n-1} \wedge \mathbf{e}^n. \end{aligned}$$

Logo, qualquer 2-covetor pode ser escrito na forma:

$$A^{[2]} = \sum_{i < j} A_{ij} \mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j. \quad (2.29)$$

Este resultado pode ser imediatamente generalizado:

$$A^{[p]} = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_p} A_{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{e}^{i_1} \wedge \mathbf{e}^{i_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}^{i_p}. \quad (2.30)$$

O produto exterior age no produto cartesiano de um  $p$ -covetor com um  $q$ -covetor levando em um  $(p+q)$ -covetor,  $\wedge : \Lambda^p(V) \times \Lambda^q(V) \rightarrow \Lambda^{(p+q)}(V)$ . Mas se  $n = \dim V$  e  $(p+q) > n$ , então o produto exterior se anula. O covetor nulo está presente em todos os espaços  $\Lambda^k(V)$ , ( $k = 0, \dots, n$ ). Assim, se  $\Lambda^*(V) = \bigoplus_{p=0}^n \Lambda^p(V)$ , o produto exterior é fechado em  $\Lambda^*(V)$ , e podemos definir  $\wedge : \Lambda^*(V) \times \Lambda^*(V) \rightarrow \Lambda^*(V)$ . O par  $(\Lambda^*(V), \wedge)$ , ou seja, o espaço  $\Lambda^*(V)$  equipado com o produto exterior é chamado de **álgebra exterior** do espaço  $V^*$ .

**Definição 2.4.4.** *A álgebra exterior sobre o espaço  $V^*$  é definida como o par  $(\Lambda^*(V), \wedge)$ .*

Os elementos de  $\Lambda^*(V)$  são chamados **multicovetores**. A dimensão de  $\Lambda^*(V)$  é dada por:

$$\dim \Lambda^*(V) = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n. \quad (2.31)$$

## 2.4.2 Formas Diferenciais

Dada uma variedade diferenciável  $M$  de dimensão  $n$ , para cada espaço tangente  $T_p M$ ,  $p \in M$ , temos  $\Lambda^k(T_p M)$ , ou seja, o espaço dos  $k$ -tensores alternados sobre  $T_p M$ . Definimos:

**Definição 2.4.5.**

$$\Lambda^k(TM) = \bigcup_{p \in M} \Lambda^k(T_p M). \quad (2.32)$$

Analogamente, temos:

**Definição 2.4.6.**

$$\bigotimes^k(TM) = \bigcup_{p \in M} \bigotimes^k(T_p M). \quad (2.33)$$

Os espaços  $\bigotimes^k(TM)$  e  $\Lambda^k(TM)$  são variedades diferenciáveis [21]. Definimos também:

**Definição 2.4.7.**

$$\Lambda^*(TM) = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k(TM), \quad (2.34)$$

e

**Definição 2.4.8.**

$$\bigotimes(TM) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \bigotimes^k(TM). \quad (2.35)$$

$\bigotimes(TM)$  e  $\Lambda^*(TM)$  são também variedades diferenciáveis [21].

**Definição 2.4.9.** Uma forma diferencial de grau  $k$ ,  $\omega$ , é uma seção, local ou global, de  $\bigwedge^k(TM)$ . Ou seja, uma forma diferencial de grau  $k$  é uma aplicação  $\omega : U \subset M \rightarrow \bigwedge^k(TM)$  tal que  $\omega(p) \in \bigwedge^k(T_pM)$  para todo  $p \in M$ .

Podemos então definir:

**Definição 2.4.10.** Uma forma diferencial é uma seção  $\omega : M \rightarrow \bigwedge^*(TM)$ . Ou seja, uma forma diferencial é uma aplicação  $\omega : U \subset M \rightarrow \bigwedge^*(TM)$  tal que  $\omega(p) \in \bigoplus_{k=0}^n \bigwedge^k(T_pM)$ , para todo  $p \in M$ .

Em coordenadas locais, temos as expressões para formas de grau  $k$ :

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, \quad (2.36)$$

onde  $\{dx^i|_p\}$  denota a base coordenada de  $T_p^*M$  (onde  $T_p^*M$  denota o espaço dual de  $T_pM$ ), ou seja,  $dx^i(\partial/\partial x_j) = \delta_j^i$ . Dizemos que  $\omega$  é  $C^\infty$  se a aplicação  $\omega : M \rightarrow \bigwedge^k(TM)$  é  $C^\infty$ . As formas diferenciais de grau  $k$  formam um espaço vetorial que vamos denotar por  $\Omega^k(M)$ . Se definirmos o produto exterior entre as formas diferenciais  $\wedge : \Omega^k(M) \times \Omega^s(M) \rightarrow \Omega^{k+s}(M)$ , ele é fechado em  $\Omega(M) = \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(M)$ , de forma que o par  $(\Omega(M), \wedge)$  configura uma álgebra exterior.

Uma forma diferencial de grau  $k$  pode ser entendida como uma aplicação  $\omega_p : T_pM \times \dots \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ . Assim, dados  $k$  campos vetoriais, temos a função  $\omega(X_1, \dots, X_k) : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p \mapsto \omega_p(X_1(p), \dots, X_k(p))$ . Podemos, da mesma forma, entender as formas diferenciais como aplicações  $\omega : \mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$ .

**Definição 2.4.11.** Dada uma função  $f : M \rightarrow N$ ,  $f \in C^\infty$ ,  $M$  e  $N$  variedades diferenciáveis, definimos o **pull-back** de uma forma diferencial por  $f$  da seguinte maneira:

$$f^*\omega_p(X_1, \dots, X_k) = \omega_{f(p)}(df_p X_1, \dots, df_p X_k) \quad (2.37)$$

$\forall X_1, \dots, X_k \in T_pM$ .

Sejam  $\omega, \eta \in \Omega(N)$ . Destacamos as seguintes propriedades de pull-backs [18]:

1.  $f^*(a\omega + b\eta) = af^*\omega + bf^*\eta$ , para todo  $a, b \in \mathbb{R}$ ;
2.  $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta$ ;
3.  $f^*(g\omega) = (g \circ f) f^*\omega$ , para toda função  $g : N \rightarrow \mathbb{R}$ .

Definimos:

**Definição 2.4.12.** O operador diferencial exterior é o único operador  $d : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p+1}(M)$  que satisfaz as propriedades:

1.  $d(\alpha + \beta) = d\alpha + d\beta$ ;
2. Dada uma função diferenciável  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$  (diferencial usual de  $f$ );
3. Se  $\alpha \in \Omega^p(M)$  e  $\beta \in \Omega^q(M)$ , então  $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$ ;
4.  $d^2\alpha = d(d\alpha) = 0$  para todo  $\alpha$ .

Pode-se mostrar que o operador diferencial existe e é único [18].

Como exemplo, aplicamos  $d$  na 1-forma  $\alpha = \alpha_i dx^i$  definida em  $\mathbb{R}^3$ . Temos:

$$\begin{aligned}
d\alpha &= d(\alpha_1 dx^1 + \alpha_2 dx^2 + \alpha_3 dx^3) = d\alpha_1 \wedge dx^1 + d\alpha_2 \wedge dx^2 + d\alpha_3 \wedge dx^3 = \\
&= \left[ \left( \frac{\partial \alpha_1}{\partial x^1} dx^1 + \left( \frac{\partial \alpha_1}{\partial x^2} dx^2 + \left( \frac{\partial \alpha_1}{\partial x^3} dx^3 \right) \right) \right) \wedge dx^1 + \right. \\
&\quad \left[ \left( \frac{\partial \alpha_2}{\partial x^1} dx^1 + \left( \frac{\partial \alpha_2}{\partial x^2} dx^2 + \left( \frac{\partial \alpha_2}{\partial x^3} dx^3 \right) \right) \right) \wedge dx^2 + \right. \\
&\quad \left. \left[ \left( \frac{\partial \alpha_3}{\partial x^1} dx^1 + \left( \frac{\partial \alpha_3}{\partial x^2} dx^2 + \left( \frac{\partial \alpha_3}{\partial x^3} dx^3 \right) \right) \right) \wedge dx^3 = \right. \\
&= (\partial_2 \alpha_3 - \partial_3 \alpha_2) dx^2 \wedge dx^3 + (\partial_3 \alpha_1 - \partial_1 \alpha_3) dx^3 \wedge dx^1 + (\partial_1 \alpha_2 - \partial_2 \alpha_1) dx^1 \wedge dx^2. \quad (2.38)
\end{aligned}$$

Em coordenadas cartesianas, se definirmos um vetor  $\mathbf{v}$  com as componentes da 1-forma  $\alpha$ , ou seja,  $\alpha = v_i dx^i = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}$ , teremos então que a aplicação de  $d$  na 1-forma  $\alpha$  resulta em uma 2-forma cujas componentes são as componentes do rotacional de  $\mathbf{v}$ .

Se aplicarmos  $d$  em uma 2-forma  $\beta$ , temos:

$$\begin{aligned}
d\beta &= d\beta_1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + d\beta_2 \wedge dx^3 \wedge dx^1 + d\beta_3 \wedge dx^1 \wedge dx^2 = \\
&= [\partial_1 \beta_1 + \partial_2 \beta_2 + \partial_3 \beta_3] dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3. \quad (2.39)
\end{aligned}$$

Se as coordenadas são cartesianas, definindo um vetor  $\mathbf{v}$  com as componentes da 2-forma  $\beta$ , a componente da 3-forma resultante da aplicação da diferencial exterior  $d$  será o divergente de  $\mathbf{v}$ . Recordando que  $d^2 = 0$  (propriedade 4 acima), vemos que isto recupera a regra usual de que rotacional de gradiente e divergente de rotacional se anulam.

Uma importante relação para o cálculo da diferencial exterior é dado pela expressão a seguir. Dados  $p \in M$  e  $X, Y \in T_p M$ , temos:

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]). \quad (2.40)$$

Sua demonstração pode ser encontrada, por exemplo, em [24].

Uma importante propriedade para o cálculo de pull-backs e integração em formas é que o operador diferencial e o pull-back comutam entre si [18]:

$$f^* d = df^*. \quad (2.41)$$

---

<sup>1</sup>Estamos aqui utilizando a convenção de Einstein para a soma (isto é, soma sobre índices repetidos). Tal notação será usada com frequência nesta dissertação.

Terminamos, assim, de definir as principais operações associadas às formas diferenciais. Vamos agora generalizar a nossa noção de formas diferenciais.

**Definição 2.4.13.** *Definimos um  $k$ -covetor alternado sobre o espaço vetorial  $U$  com valores*

*em  $V$  por uma aplicação multilinear  $f : \overbrace{U \times \cdots \times U}^{k \text{ vezes}} \rightarrow V$  tal que:*

$$f(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_k) = -f(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_k). \quad (2.42)$$

Denotamos o espaço vetorial dos  $k$ -covetores alternados sobre o espaço vetorial  $U$  com valores em  $V$  por  $\Lambda^k(U, V)$ .

**Definição 2.4.14.** *Seja  $V$  um espaço vetorial  $d$ -dimensional. Definimos uma  **$k$ -forma com valores em  $V$  na variedade  $M$**  como uma aplicação  $\omega : M \rightarrow \Lambda^k(TM, V)$ , tal que, para cada  $p \in M$ ,  $\omega(p) \in \Lambda^k(T_pM, V)$ .*

Denotaremos o espaço vetorial das  $k$ -formas sobre  $M$  com valores em  $V$  por  $\Omega^k(M, V)$ . Seja  $\{\mathbf{e}_i\}$ ,  $i = 1, \dots, d$  uma base de  $V$ . Então, para cada  $k$ -forma com valores em  $V$ ,  $\omega$ , temos  $\omega^i \in \Omega^k(M)$ ,  $i = 1, \dots, d$ , tais que  $\omega(p)(X_1, \dots, X_k) = \sum_{i=1}^d \omega^i(p)(X_1, \dots, X_k) \mathbf{e}_i \forall X_1, \dots, X_k \in T_pM$ . Denotamos:

$$\omega = \sum_{i=1}^d \omega^i \otimes \mathbf{e}_i. \quad (2.43)$$

**Definição 2.4.15.** *Definimos a **diferencial exterior de uma  $k$ -forma com valores em  $V$** ,  $d\omega \in \Omega^{k+1}(M, V)$ , como:*

$$d\omega = \sum_{i=1}^d d\omega^i \otimes \mathbf{e}_i. \quad (2.44)$$

Tal definição não depende da escolha da base de  $V$ .

**Definição 2.4.16.** *Sejam  $U$ ,  $V$  e  $W$  espaços vetoriais e  $\rho : U \times V \rightarrow W$  uma aplicação bilinear. Sejam também  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_c\}$  e  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d\}$  bases de  $U$  e  $V$ , respectivamente,  $\eta \in \Omega^l(M, U)$  e  $\omega \in \Omega^k(M, V)$ . Definimos então a operação  $\wedge^\rho : \Omega^l(M, U) \times \Omega^k(M, V) \rightarrow \Omega^{k+l}(M, W)$  por*

$$\eta \wedge^\rho \omega = \sum_{i,j} \eta^i \wedge \omega^j \otimes \rho(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j). \quad (2.45)$$

Essa definição tampouco depende da escolha das bases dos espaços dos quais tratamos. Definiremos, mais adiante, a 1-forma de conexão em um fibrado principal, que é uma forma com valores em uma álgebra de Lie  $\mathcal{G}$ . Para tais formas, denotaremos a operação  $\wedge^{[\cdot, \cdot]}$  simplesmente por colchetes de Lie entre as formas. Por exemplo, se  $\omega_1$  e  $\omega_2$  são formas com valores em uma álgebra de Lie  $\mathcal{G}$ , denotaremos  $\omega_1 \wedge^{[\cdot, \cdot]} \omega_2$  por  $[\omega_1, \omega_2]$ .

## 2.5 Derivadas de Lie

Definiremos, nesta seção, a derivada de Lie. Esta é uma operação que usamos para avaliar como campos tensoriais variam sobre o fluxo de um campo vetorial. Para tanto, vamos apresentar sua regra de aplicação para funções na variedade e, em seguida, para campos vetoriais, ou seja, objetos contravariantes. Para completar a descrição da derivada, vamos apresentar a regra para a aplicação em formas diferenciais na variedade, que são objetos covariantes. Com essas regras em mãos, poderemos generalizar a derivada de Lie para um campo tensorial geral através de uma regra recursiva.

**Definição 2.5.1.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável,  $X$  um campo vetorial em  $M$  e  $f$  uma função real sobre  $M$ . Definimos a **derivada de Lie de  $f$  ao longo de  $X$**  como:*

$$(\mathcal{L}_X f)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\phi_X^t(p)) - f(p)}{t} = X(f)_p. \quad (2.46)$$

A derivada de Lie é definida sobre campos vetoriais da seguinte maneira:

**Definição 2.5.2.** *Seja  $M$  uma variedade,  $X$  e  $Y$  campos vetoriais sobre  $M$  e  $p \in M$ . Definimos a **derivada de Lie de  $Y$  ao longo de  $X$**  como:*

$$(\mathcal{L}_X Y)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d\phi_X^{-t}(Y(\phi_X^t(p))) - Y(p)}{t}. \quad (2.47)$$

De acordo com a expressão 2.11, temos que:

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y]. \quad (2.48)$$

A derivada de Lie é definida sobre 1-formas da seguinte forma:

**Definição 2.5.3.** *Seja  $\omega$  uma 1-forma sobre a variedade diferenciável  $M$ . A **derivada de Lie de  $\omega$  sobre o campo vetorial  $X$**  é definida como:*

$$\mathcal{L}_X \omega_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_X^{t*}(\omega(\phi_X^t(p))) - \omega(p)}{t}. \quad (2.49)$$

Para generalizar a aplicação da derivada de Lie sobre um campo tensorial geral, apresentamos a seguinte proposição, cuja demonstração é encontrada em [25]:

**Proposição 2.5.1.** *Sejam  $T_1$  e  $T_2$  campos tensoriais sobre a variedade diferenciável  $M$ . Seja  $X$  um campo vetorial. A derivada de Lie sobre  $X$  satisfaz:*

1.  $\mathcal{L}_X(T_1 + T_2) = \mathcal{L}_X T_1 + \mathcal{L}_X T_2$
2.  $\mathcal{L}_X(T_1 \otimes T_2) = (\mathcal{L}_X T_1 \otimes T_2) + (T_1 \otimes \mathcal{L}_X T_2)$

Assim determinamos completamente como se dá a aplicação da derivada de Lie em campos tensoriais na variedade. Pode-se mostrar ainda que a derivada de Lie comporta-se bem (basicamente segue a regra de Leibniz) com relação à contração entre tensores [34].

## 2.6 Fibrados Principais

Discutimos anteriormente o conceito de fibrados. Vamos, agora, tratar de um exemplo especial de fibrado, o fibrado principal.

**Definição 2.6.1.** *Um fibrado principal é um fibrado em que a fibra padrão e o grupo estrutural coincidem e possuem estrutura de grupo de Lie. O fibrado principal consiste de uma variedade  $P$  como espaço total, um grupo de Lie  $G$  como fibra padrão, uma variedade  $M$  como espaço base e a projeção  $\pi : P \rightarrow M$ . Tais estruturas satisfazem as seguintes condições:*

1.  $G$  age diferenciavelmente e livremente à direita em  $P$ ;
2.  $\pi$  é sobrejetiva e  $\pi^{-1}(\pi(p)) = \{p \cdot g \mid g \in G\}$ ;
3. Para cada  $x \in M$ , existe  $U \subset M$  que contém  $x$ , e um difeomorfismo  $T_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$ , da forma  $T_U(p) = (\pi(p), s_U(p))$ , tal que  $s_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow G$  satisfaz  $s_U(pg) = s_U(p)g \forall g \in G$ .

Se  $x = \pi(p)$ , como dito na subseção 2.1.3,  $G/G_x$  é difeomorfo à  $G \cdot x = \pi^{-1}(\pi(p))$ . Como a ação de  $G$  sobre  $P$  é livre, temos que  $G_x = \{e\}$ . Segue que  $G$  é difeomorfo à  $\pi^{-1}(x)$ . Esta identificação não é canônica: ela se dá pela aplicação  $g \mapsto g \cdot p$  que depende de  $p$ . A trivialização local do fibrado principal é também chamada de escolha de gauge. Denotamos o fibrado principal por  $\pi : P \rightarrow M$  ou  $G \cdots P \rightarrow M$ .

Sejam  $U$  e  $V$  abertos de  $M$  com interseção não-vazia associados a trivializações locais. Se  $x = \pi(p) \in U \cap V$ , definimos as funções de transição do fibrado principal  $g_{UV} : U \cap V \rightarrow G$  da seguinte maneira

$$g_{UV}(x) = s_U(p) \cdot s_V(p)^{-1}. \quad (2.50)$$

Esta aplicação está bem definida pois, dados  $p, q \in \pi^{-1}(x)$ , existe um único  $g \in G$  tal que vale  $p = q \cdot g$ . Logo, temos:

$$\begin{aligned} s_U(p) \cdot s_V(p)^{-1} &= s_U(q \cdot g) \cdot s_V(q \cdot g)^{-1} = s_U(q) \cdot g \cdot (s_V(q) \cdot g)^{-1} = \\ &= s_U(q) \cdot g \cdot g^{-1} \cdot s_V(q)^{-1} = s_U(q) \cdot s_V(q)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Da mesma forma que no fibrado geral, em um fibrado principal as funções de transição obedecem às seguintes propriedades:

1.  $g_{U,U}(x) = e$ ;
2.  $g_{U,V}(x) = (g_{V,U}(x))^{-1}$ ;
3.  $g_{U_j, U_k}(x) g_{U_k, U_l}(x) g_{U_l, U_j}(x) = e \forall x \in U_j \cap U_k \cap U_l$ .

Podemos apontar como exemplos de fibrados principais o fibrado de Hopf  $S^1 \dots S^3 \rightarrow S^2$  [25] e o fibrado das bases de  $M$ ,  $Gl(n) \dots L(M) \rightarrow M$  [24].

**Definição 2.6.2.** Uma seção local do fibrado  $\pi : E \rightarrow M$  é uma aplicação  $\sigma_U : U \subset M \rightarrow E$  tal que  $\pi \circ \sigma = id$ .

Vemos que é equivalente definir uma seção local ou uma trivialização local de um fibrado principal. Dada uma trivialização local  $T_{U_i} : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times F$ , podemos definir a seção local

$$\sigma_{U_i}(x) = T_{U_i}^{-1}(x, e). \quad (2.52)$$

Reciprocamente, dada uma seção local  $\sigma_{U_i} : U_i \subset M \rightarrow E$ , podemos definir a trivialização local:

$$T_{U_i}(\sigma_{U_i}(x) \cdot g) = (x, g). \quad (2.53)$$

Segue que o fibrado principal é trivial se e somente se ele admite uma seção global. Definimos:

**Definição 2.6.3.** O espaço vertical no ponto  $p \in P$  é o subespaço do espaço tangente a  $p$ ,  $V_p = Ker(\pi_*)_p = \{Y_p \in T_pM \mid d\pi_p Y_p = 0\}$ . Ou seja, o espaço vertical  $V_p$  é o subespaço de  $T_pP$  tangente à fibra.

O conceito de espaço vertical será muito utilizado quando falarmos de conexões.

Dado  $A \in \mathcal{G}$ ,  $p \in P$ , o campo fundamental gerado por  $A$  é definido por

$$A_p^\# = \left. \frac{d}{dt} (p \cdot e^{tA}) \right|_{t=0}.$$

Note que  $A_p^\# \in V_p$ ,  $\forall A \in \mathcal{G}$ , já que:

$$d\pi_p A_p^\# = \left. \frac{d}{dt} \pi (p \cdot e^{tA}) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \pi (p) \right|_{t=0} = 0. \quad (2.54)$$

Na verdade, na definição de campo fundamental, basta que a curva seja dada por  $p \cdot e^{tA}$  ou qualquer outra curva  $g(t)$ , tal que  $g(0) = e$  e  $d/dt(g(t))|_{t=0} = A$ . Ou seja, podemos definir o campo fundamental de  $A$  por:

$$A_p^\# = \left. \frac{d}{dt} (p \cdot g(t)) \right|_{t=0}. \quad (2.55)$$

Podemos ainda mostrar que, se  $X \in \mathcal{G}$ , a aplicação  $X \mapsto X^\#(p)$  é um isomorfismo entre  $\mathcal{G}$  e  $V_p$ :

**Proposição 2.6.1.** A aplicação  $X \mapsto X^\#(p)$  é um isomorfismo entre  $\mathcal{G}$  e  $V_p$ , para todo  $p \in P$ .

*Prova:* Primeiro, precisamos mostrar que a aplicação acima é uma aplicação linear. Dado  $a \in \mathbb{R}$ , temos:

$$(aX)^\#(p) = \left. \frac{d}{dt} (p \cdot e^{taX}) \right|_{t=0} \stackrel{s=ta}{=} \left. \frac{ds}{dt} \frac{d}{ds} (p \cdot e^{sX}) \right|_{s=0} = a(X)^\#(p). \quad (2.56)$$

Agora, lembramos que a ação de  $G$  sobre  $P$ ,  $\varphi : P \times G \rightarrow P$ , é diferenciável. Assim, podemos definir a aplicação  $\varphi_p : G \rightarrow P$ ,  $g \mapsto \varphi_p(g) = \varphi(p, g)$ , e ela será diferenciável, pois  $\varphi$  é diferenciável. Desta forma, se  $X, Y \in \mathcal{G}$ , temos:

$$\begin{aligned} (X + Y)^\#(p) &= \left. \frac{d}{dt}(p \cdot e^{t(X+Y)}) \right|_{t=0} = \varphi_{p*} \left. \frac{d}{dt}(e^{t(X+Y)}) \right|_{t=0} = \varphi_{p*}(X + Y) = \\ &= \varphi_{p*}X + \varphi_{p*}Y = \left. \frac{d}{dt}(p \cdot e^{tX}) \right|_{t=0} + \left. \frac{d}{dt}(p \cdot e^{tY}) \right|_{t=0} = X^\#(p) + Y^\#(p). \end{aligned} \quad (2.57)$$

Logo, a aplicação relacionada ao campo fundamental é linear. Como  $d\pi|_p$  é sobrejetora<sup>2</sup>, temos  $\dim(\text{Im}(d\pi|_p)) = \dim(M)$ . Pelo teorema do núcleo e imagem:  $\dim(V_p) = \dim(\ker(d\pi|_p)) = \dim(P) - \dim(M) = \dim(G)$ . Desta forma, por dimensionalidade, basta mostrar que a aplicação  $X \mapsto X^\#(p)$  é injetora para concluir que ela é um isomorfismo. Em termos da aplicação  $\varphi_p$  acima, temos  $X^\# = \varphi_{p*}X$ . Dada uma trivialização local  $T_U$  com domínio apropriado, temos que  $T_U \circ \varphi_p(g) = (\pi(p \cdot g), s_u(p \cdot g)) = (\pi(p), s_u(p)g)$ . Logo,  $dT_U \cdot X_p^\# = d/dt(\pi(p), s_U(p)e^{tX})|_{t=0} = (0, dL_{s_U(p)} \cdot X)$ . Assim,  $X^\# = 0 \Rightarrow dL_{s_U(p)} \cdot X = 0 \Rightarrow X = 0$  já que a traslação à esquerda no grupo é um difeomorfismo. Assim, a aplicação relacionada ao campo fundamental é injetora e, portanto, um isomorfismo.  $\square$

Vamos, agora, definir a conexão e a curvatura da conexão em um fibrado principal, estruturas que vamos usar na descrição geométrica da natação.

## 2.7 Conexão e Curvatura

Uma conexão pode ser definida de três formas distintas.

**Definição 2.7.1.** *Consideremos o fibrado principal  $G \cdots P \xrightarrow{\pi} M$ . Uma **conexão** é uma regra que associa a cada  $p \in P$  um subespaço  $H_p \subset T_pP$  tal que  $T_pP = V_p \oplus H_p$  e  $(\varphi_g)_*H_p = H_{pg}$ , onde  $\varphi_g$  denota a ação à direita de  $G$  em  $P$ . Tal associação é uma distribuição diferenciável<sup>3</sup>, ou seja, dado  $p \in P$ , existem  $d$  campos diferenciáveis definidos em uma vizinhança  $V$  de  $p$  que geram  $H_q$ ,  $\forall q \in U$ .*

**Definição 2.7.2.** *Uma **conexão**, ou uma **1-forma de conexão**, é uma 1-forma  $\omega \in \Omega^1(P, \mathcal{G})$ , tal que:*

1.  $\omega(A_p^\#) = A$ ,  $\forall A \in \mathcal{G}$ ,
2.  $(\varphi_g)^*\omega = \text{Ad}(g^{-1})\omega$ ,

onde  $A_p^\#$  denota o campo fundamental de  $A$  em  $p$  e  $\varphi_g$  denota a ação à direita em  $M$  com  $g$  fixado.

<sup>2</sup>Basta notar que, dada uma seção local  $\sigma$ ,  $d\pi \circ d\sigma = \text{Id}|_M$ .

<sup>3</sup>Mas não necessariamente integrável.

Uma terceira definição de conexão é dada por:

**Definição 2.7.3.** *Sejam  $U, V \subset M$  abertos onde são definidas trivializações locais  $T_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$  e  $T_V : \pi^{-1}(V) \rightarrow V \times G$ . Uma **conexão** é o conjunto de 1-formas locais  $\omega_U \in \Omega(U, \mathcal{G})$  que satisfazem a seguinte propriedade: se  $U \cap V \neq \emptyset$  e  $g_{U,V} : U \cap V \rightarrow \mathcal{G}$  é a função de transição entre  $T_U$  e  $T_V$ , então:*

$$\omega_V(Y_x) = (L_{g_{U,V}(x)}^{-1})_*((g_{U,V})_*Y_x) + Ad_{g_{U,V}(x)^{-1}}(\omega_U(Y_x)) \quad (2.58)$$

$\forall Y_x \in T_x M, \forall x \in U \cap V$ .

Dadas as três definições de conexão, apresentamos um resultado central no desenvolvimento da teoria de conexões de fibrados, cuja demonstração é encontrada em [24]:

**Teorema 2.7.1.** *As definições 2.7.1, 2.7.2 e 2.7.3 acima são equivalentes.*

Mostrar a equivalência entre as definições 2.7.1 e 2.7.2 é relativamente simples. Dada uma 1-forma de conexão  $\omega$ , definimos  $H_p = \{X \in T_p M | \omega(X) = 0\}$ . Por outro lado, se temos a conexão como distribuição de espaços horizontais, dado um campo vetorial  $X$  em  $P$  podemos obter a decomposição (única)  $X = X^H + X^V$ , onde  $X^H \in H_p$  e  $X^V \in V_p$ . Ainda,  $X^V$  está associado a um único  $A \in \mathcal{G}$  por  $A^\# = X^V$ . Definimos então a 1-forma de conexão  $\omega$  associada a esta distribuição horizontal por  $\omega(X) = A$ , onde  $A^\# = X^V$ .

Dada uma 1-forma de conexão  $\omega$ , podemos obter as 1-formas locais de conexão da definição 2.7.3 da seguinte maneira. Dadas as trivializações locais  $T_{U_i} : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times G$ , vemos que podemos definir seções  $\sigma_{U_i} : U_i \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$  pela equação 2.52. As 1-formas locais de conexão são então dadas por  $\sigma_{U_i}^* \omega$ . Já mostrar que dadas 1-formas locais de conexão em  $M$  podemos obter a 1-forma global de conexão no espaço total é um pouco mais trabalhoso mas, grosseiramente, a equação 2.58 é justamente a condição que nos permite “colar” 1-formas induzidas por  $\omega_{U_i}$  de forma a obter uma 1-forma global  $\omega$ .

**Definição 2.7.4.** *Dado  $\eta \in \Omega^k(P, \mathcal{G})$ , definimos  $\eta^H$  por:*

$$\eta^H(X_1, \dots, X_k) = \eta(X_1^H, \dots, X_k^H), \quad (2.59)$$

onde  $X_i^H$  denota a componente horizontal de  $X_i$ , dada pela conexão.

**Definição 2.7.5.** *A derivada exterior covariante  $D^\omega : \Omega^k(P, \mathcal{G}) \rightarrow \Omega^{k+1}(P, \mathcal{G})$  é definida por:*

$$D^\omega \eta = (d\eta)^H. \quad (2.60)$$

O índice  $\omega$  deve-se à dependência da derivada exterior covariante com a conexão, que determina qual será o subespaço horizontal do espaço tangente. O lado direito da igualdade denota a derivada exterior usual.

Podemos definir, enfim, a **curvatura**  $\Omega^\omega$  da conexão  $\omega$ .

**Definição 2.7.6.** A curvatura  $\Omega^\omega$  da conexão  $\omega$  é dada por:

$$\Omega^\omega = D^\omega \omega. \quad (2.61)$$

Por simplicidade de notação, vamos denotar a curvatura por  $\Omega$ .

Assim como no caso da conexão, podemos fazer o pullback da curvatura pelas seções  $\sigma_{U_i}$  e obter 2-formas locais de curvatura  $\sigma_{U_i}^* \Omega$  em  $U_i \subset M$ .

Uma importante expressão para o cálculo da curvatura é a chamada **equação estrutural**. A demonstração de sua validade é encontrada em [24]:

**Proposição 2.7.1.**

$$\Omega^\omega = D^\omega \omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]. \quad (2.62)$$

Aqui,  $[\omega, \omega]$  é a notação usada para  $\omega \wedge [\cdot, \cdot] \omega$ , como explicado na seção sobre formas diferenciais.

## 2.8 Levantamento Horizontal

**Definição 2.8.1.** Seja o fibrado principal  $\pi : P \rightarrow M$  dotado da conexão  $\omega$ . Considere a curva suave  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ . Dizemos que a curva  $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow P$  é um **levantamento horizontal de  $\gamma$**  se:

1.  $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ :
2. Os vetores tangentes de  $\tilde{\gamma}$  pertencem, em todo ponto, ao espaço horizontal do espaço tangente.

O levantamento horizontal sempre existe no fibrado principal [25]. A condição 2 acima se expressa como uma equação diferencial, pois estabelece condições sobre a derivada da curva. De fato, a condição quer dizer que  $\omega(d/dt(\tilde{\gamma}(t))) = 0$ . Como a condição se trata de uma equação diferencial ordinária (EDO), existe uma liberdade na escolha da condição inicial  $\tilde{\gamma}(0)$ . Pela teoria de EDO's, fixada a condição inicial, o levantamento é único.

Vamos agora determinar como fazer o cálculo do levantamento de uma curva  $\gamma(t)$  arbitrária em  $M$ . Por simplicidade, vamos tratar do caso em que  $\gamma(t)$  está contida no domínio de uma dada seção.<sup>4</sup> Podemos escrever  $\tilde{\gamma}(t) = \sigma(\gamma(t)) \cdot g(t)$  e então determinar  $g(t)$ , que é uma curva em  $G$ , de maneira que  $\tilde{\gamma}(t)$  seja horizontal. Dada uma condição inicial  $\tilde{\gamma}(0)$

---

<sup>4</sup>Para o caso em que a curva não está contida no domínio da seção escolhida, realiza-se o levantamento dentro do aberto em que está definida a seção local e, em algum ponto da interseção dos domínios das seções, troca-se a descrição da curva usando a nova seção. Determina-se, assim, o levantamento na região da curva contida no domínio da nova seção e assim por diante.

escolhamos uma seção tal que  $g(0) = e$  (onde  $e$  denota o elemento neutro de  $G$ ).<sup>5</sup> Temos:

$$\tilde{\gamma}(t) = \frac{d}{dt} (\sigma(\gamma(t)) \cdot g(t)), \quad (2.63)$$

e assim

$$\frac{d}{dt} (\sigma(\gamma(t)) \cdot g(t)) = \varphi_{g(t)*} \sigma_* \dot{\gamma}(t) + \frac{d}{ds} \sigma(\gamma(t)) \cdot g(t+s) \Big|_{s=0}. \quad (2.64)$$

O lado direito da igualdade acima, por sua vez, é dado por:

$$\begin{aligned} & \varphi_{g(t)*} \sigma_* \dot{\gamma}(t) + \frac{d}{ds} \sigma(\gamma(t)) \cdot g(t+s) \Big|_{s=0} = \\ & \varphi_{g(t)*} \sigma_* \dot{\gamma}(t) + \frac{d}{ds} \sigma(\gamma(t)) \cdot g(t)g(t)^{-1}g(t+s) \Big|_{s=0} = \\ & \varphi_{g(t)*} \sigma_* \dot{\gamma}(t) + \left[ \frac{d}{ds} g(t)^{-1}g(t+s) \Big|_{s=0} \right]_{\sigma(\gamma(t)) \cdot g(t)}^{\#}. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Como o lado esquerdo da equação 2.64 é um vetor horizontal, este se anula ao aplicarmos a 1-forma de conexão. Desta forma, observando que  $g(t)^{-1}g(t+s) = g(t)^{-1}g(t+s)g(t)^{-1}g(t) = C_{g(t)^{-1}}(g(t+s)g(t)^{-1})$ , temos:

$$\begin{aligned} 0 &= Ad_{g(t)^{-1}} \omega(\sigma_* \dot{\gamma}(t)) + \frac{d}{ds} g(t)^{-1}g(t+s) \Big|_{s=0} = \\ & Ad_{g(t)^{-1}} \left[ \omega(\sigma_* \dot{\gamma}(t)) + \frac{d}{ds} g(t+s)g(t)^{-1} \Big|_{s=0} \right]. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Como  $Ad_{g(t)^{-1}}$  é um isomorfismo, temos:

$$0 = \omega(\sigma_* \dot{\gamma}(t)) + \frac{d}{ds} g(t+s)g(t)^{-1} \Big|_{s=0}. \quad (2.67)$$

Se denotarmos a 1-forma local de conexão por  $\sigma^* \omega = A$ , temos:

$$\frac{d}{ds} g(t+s)g(t)^{-1} \Big|_{s=0} = -A(\dot{\gamma}(t)). \quad (2.68)$$

Seja  $R_g$  o produto à direita do grupo estrutural  $G$ , ou seja,  $R_g(h) = hg$ . Obtemos então a seguinte equação diferencial para a determinação de  $g(t)$ :

$$\frac{d}{dt} g(t) = -R_{g(t)*} A(\dot{\gamma}(t)). \quad (2.69)$$

Com a condição inicial  $g(0) = e$ , determinamos completamente  $g(t)$  e, por conseguinte,  $\tilde{\gamma}(t)$ . No caso do grupo estrutural se tratar de matrizes, a equação 2.69 se reduz à:

$$\frac{d}{dt} g(t) = -A(\dot{\gamma}(t))g(t). \quad (2.70)$$

---

<sup>5</sup>Isso é sempre possível. Vejamos o caso em que escolhemos  $\tilde{\gamma}(0) = p$ , mas dispomos de uma seção tal que  $\sigma(\pi(p)) = q$ . Seja  $U$  o domínio de  $\sigma$ ,  $x \in U \subset M$  e  $g \in G$  tal que  $q \cdot g = p$ . Definindo uma nova seção por  $\bar{\sigma}(x) = \sigma(x) \cdot g$ , temos  $\bar{\sigma}(0) = p$ . Escrevendo o levantamento como  $\tilde{\gamma}(t) = \bar{\sigma}(\gamma(t)) \cdot g(t)$ , temos então  $g(0) = e$ .

## 2.9 Holonomia

Dada uma curva diferenciável  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  tal que  $\gamma(0) = x$  e  $\gamma(1) = y$ , o levantamento horizontal  $\tilde{\gamma}(t)$  de  $\gamma(t)$  nos dá uma aplicação natural  $\Gamma : \pi^{-1}(x) \rightarrow \pi^{-1}(y)$ . Seja  $u \in \pi^{-1}(x)$ . Escolhendo  $\tilde{\gamma}(0) = u$ , definimos

$$\Gamma_\gamma(u) = \tilde{\gamma}(1).$$

Dado  $q = u \cdot g$ , podemos definir a curva  $\eta(t) = \tilde{\gamma}(t) \cdot g$ . Definida desta forma,  $\eta$  é o levantamento horizontal de  $\gamma(t)$  tal que  $\eta(0) = q$ . Para mostrar esta afirmação, observemos que  $\pi(\eta(t)) = \pi(\tilde{\gamma}(t) \cdot g) = \pi(\tilde{\gamma}(t)) = \gamma(t)$ . Temos  $\frac{d\eta}{dt} = \frac{d}{dt}\tilde{\gamma}(t) \cdot g = \varphi_{g*} \frac{d\tilde{\gamma}(t)}{dt}$ . Como  $\varphi_{g*}H_p = H_{p \cdot g}$ ,  $\frac{d\eta}{dt}$  é horizontal. Logo,  $\eta$  é levantamento horizontal de  $\gamma$ . Assim, vale a propriedade  $\Gamma_\gamma(u \cdot g) = \Gamma_\gamma(u) \cdot g$ .

Seja  $\gamma$  uma curva fechada em  $M$ ,  $\gamma(0) = \gamma(1) = x$ , e seja  $u \in \pi^{-1}(x)$ . Temos, em geral,  $\Gamma_\gamma(u) \neq u$ . Como  $u$  e  $\Gamma_\gamma(u)$  estão na mesma fibra, existe  $g \in G$  tal que  $\Gamma_\gamma(u) = u \cdot g$ . Logo, podemos entender  $\Gamma_\gamma$  como a aplicação de  $\varphi_g$  para algum  $g \in G$ .

**Definição 2.9.1.** Denotamos  $g_\gamma \in G$  o elemento do grupo estrutural tal que  $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\gamma}(0) \cdot g_\gamma$ . A  $g_\gamma$  chamamos **holonomia** associada à curva  $\gamma$ .

Definimos o conjunto das curvas fechadas com base em  $x \in M$  por  $C_x(M) = \{\gamma : [0, 1] \rightarrow M \mid \gamma(0) = \gamma(1) = x\}$ . Este conjunto possui estrutura de grupo segundo o produto  $*$  que denota a aplicação:

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & \text{se } 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ \beta(2t - 1), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases} \quad (2.71)$$

onde  $\alpha, \beta \in C_x(M)$ . Segundo este produto,  $\alpha^{-1} = \alpha(1 - t)$  e o elemento neutro é a curva constante  $e(t) = x$ .

Visto que  $C_x(M)$  é um grupo, vamos mostrar que o conjunto das holonomias das curvas de  $C_x(M)$  também possui estrutura de grupo. Se  $\gamma = \alpha * \beta$ , temos que [25]:

$$g_\gamma = g_\beta \cdot g_\alpha. \quad (2.72)$$

Isto significa que o conjunto das holonomias é fechado em relação à multiplicação do grupo estrutural. Se  $c : [0, 1] \rightarrow M$  é a curva constante, seu levantamento horizontal  $\tilde{c}$  é também constante e  $g_c = e$ . Temos também que  $g_{\gamma^{-1}} = g_\gamma^{-1}$ . Logo, o conjunto das holonomias com base em  $x \in M$  possui uma estrutura de grupo, sendo subgrupo de  $G$ . Definimos:

**Definição 2.9.2.** O grupo de holonomia em  $p \in P$ , denotado por  $\Phi_p$ , é o grupo:

$$\Phi_p = \{g_\gamma \in G \mid \gamma \in C_p(M)\}. \quad (2.73)$$

A holonomia é de singular interesse no nosso trabalho porque vamos descrever a natação como a holonomia de uma curva no espaço dos formatos, que será o espaço base do fibrado principal em questão.

## 2.10 A Holonomia pela Integração da Curvatura

Nesta seção, vamos mostrar um caso em que a holonomia pode ser obtida através da integração da curvatura no caso em que o grupo é abeliano. Os exemplos que vamos resolver mais adiante recaem neste caso. Sem perda de generalidade, consideremos o caso em que a dimensão deste grupo abeliano  $G$  é 1. Neste caso há apenas duas possibilidades. Se  $G$  é não-compacto, então  $G = \mathbb{R}$  com sua estrutura aditiva. Se  $G$  é compacto, então  $G = U(1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ , que topologicamente é  $S^1$ .

Em ambos os casos, podemos escrever um elemento arbitrário  $g \in G$  como

$$g = e^{\alpha\iota}, \quad (2.74)$$

onde  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $\iota$  é um gerador de sua álgebra de Lie ( $\iota = 1$  para  $G = \mathbb{R}$  e  $\iota = i$  para  $G = U(1)$ ). Uma curva  $g(t)$ , então, é dada por  $g(t) = e^{\alpha(t)\iota}$ . Com isso,

$$\dot{g} = \dot{\alpha}\iota g \quad (2.75)$$

Sejam  $G \cdots P \rightarrow M$  um fibrado principal,  $\sigma$  uma seção do fibrado,  $\gamma(t)$  uma curva em  $M$  e  $\tilde{\gamma}(t) = \sigma(\gamma(t)) \cdot g(t)$  o levantamento horizontal de  $\gamma$ . Quando  $G$  é unidimensional, ou mesmo quando a ação  $\sigma(\gamma(t)) \cdot g(t)$  é realizada por um subgrupo unidimensional de  $G$ , podemos substituir a expressão acima na equação 2.70. Assim

$$\dot{\alpha}\iota = -A(\dot{\gamma}(t)), \quad (2.76)$$

onde, se  $\omega$  denota a 1-forma de conexão,  $A = \sigma^*\omega$ . Se  $\{\mathbf{e}_i\}$  é uma base de  $\mathcal{G}$  e  $A = a_{\mathbf{e}_i} \otimes \mathbf{e}_i$ , podemos escolher uma base de  $\mathcal{G}$  que contenha  $\iota$ . Neste caso, a equação nos dá

$$\dot{\alpha}\iota = -a(\dot{\gamma}(t))\iota \quad (2.77)$$

onde, para não sobrecarregar a notação, denotamos  $a_\iota$  simplesmente por  $a$ . Obtemos, assim, uma equação diferencial (em  $\mathbb{R}$ ) para  $\alpha$ :

$$\dot{\alpha} = -a(\dot{\gamma}(t)). \quad (2.78)$$

Como  $g(t)$  é completamente determinado por  $\alpha$ , e como a holonomia é dada por  $g(1)$ , esta é determinada pela integral

$$\alpha(1) = - \int_0^1 a(\dot{\gamma}(t)) dt. \quad (2.79)$$

Seja  $(U, x)$  um sistema de coordenadas locais tal que  $\gamma(t) \in U \forall t$ . Decompondo a 1-forma  $a$  como  $a = a_i dx^i$ , temos

$$\alpha(1) = - \int_0^1 a_i \dot{\gamma}^i dt = - \int_0^1 a_i \frac{dx^i}{dt} dt = - \int_\gamma a_i dx^i = - \int_\gamma a, \quad (2.80)$$

Segue do teorema de Stokes que:

$$\alpha(1) = - \int_{\gamma} a = - \int_S da, \quad (2.81)$$

onde  $S$  denota uma superfície com fronteira dada pela curva  $\gamma$ . No caso de um grupo unidimensional, e portanto abeliano (ou mesmo quando a ação  $\sigma(\gamma(t)) \cdot g(t)$  é realizada por um subgrupo unidimensional de  $G$ ), temos que a curvatura é simplesmente dada por  $\Omega = d\omega$  já que o termo  $\omega \wedge \omega$  se anula. Denotando  $F = \sigma^*\Omega$ , temos então  $F = dA$  de onde concluímos que a holonomia é dada pela integral da curvatura na área englobada pela curva  $\gamma$ :

$$g_{\gamma} = e^{-\int_S F}. \quad (2.82)$$

## 2.11 Geometria Riemanniana

Apresentamos, nesta seção, os conceitos mais fundamentais sobre geometria riemanniana a serem usados mais adiante.

### 2.11.1 Métrica Riemanniana

Um campo tensorial  $g$  sobre a variedade  $M$  é uma aplicação que, a cada ponto  $p \in M$ , associa um tensor  $g(p)$ .

**Definição 2.11.1.** *Uma métrica riemanniana é um campo tensorial diferenciável que associa a cada ponto  $x$  de uma variedade diferenciável  $M$  um produto interno  $g$  no espaço tangente  $T_x M$ .*

Por produto interno, nos referimos a uma forma bilinear simétrica positivo-definida. Dizemos que a métrica varia diferenciavelmente na variedade  $M$  no sentido que, dado um sistema de coordenadas  $(U, (x^1, \dots, x^d))$  centrado em  $p$ , e denotando  $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$ , temos que  $g_{ij} = g_{ij}(x^1, \dots, x^d)$  varia diferenciavelmente em  $U$ . Denotaremos por  $g^{ij}$  os elementos da matriz inversa à matriz  $(g_{ij})$ . Uma variedade diferenciável  $M$  dotada de uma métrica riemanniana é chamada de variedade riemanniana. A partir da métrica podemos estabelecer uma noção de comprimento.

**Definição 2.11.2.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade riemanniana. Seja  $c : [0, 1] \rightarrow M$  uma curva diferenciável em  $M$ . O comprimento da curva  $c$ , que denotaremos por  $\text{comp}(c)$ , é dado por:*

$$\text{comp}(c) = \int_{[0,1]} \sqrt{g(\dot{c}(t), \dot{c}(t))} dt. \quad (2.83)$$

Podemos, assim, introduzir o conceito de distância entre dois pontos:

**Definição 2.11.3.** *Sejam  $x_1$  e  $x_2$  dois pontos da variedade riemanniana  $M$ . Seja ainda  $C(x_1, x_2)$  o conjunto das curvas diferenciáveis  $c : [0, 1] \rightarrow M$  tais que  $c(0) = x_1$  e  $c(1) = x_2$ . Definimos a distância entre  $x_1$  e  $x_2$ , que denotaremos por  $\text{dist}(x_1, x_2)$ , por:*

$$\text{dist}(x_1, x_2) = \text{Inf}\{\text{comp}(c) | c \in C(x_1, x_2)\}, \quad (2.84)$$

onde  $\text{Inf}$  denota o ínfimo do conjunto.

A aplicação  $\text{dist}$  metriza a variedade riemanniana. Toda variedade riemanniana é, portanto, um espaço métrico.

Uma das propriedades bastante úteis da métrica é que ela permite, em um certo sentido, identificar formas diferenciais e campos vetoriais. Para isso definimos os isomorfismos musicais [26]:

**Definição 2.11.4.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade riemanniana,  $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  um campo vetorial em  $M$  e  $\omega = \omega_j dx^j$  uma 1-forma em  $M$ . Estabelecemos, para cada  $p \in M$ , o mapa  $\flat : T_p M \rightarrow T_p^* M$ , onde  $X_\flat$  é dado por:*

$$X_\flat(Y) = g(X, Y), \quad \forall Y \in \mathfrak{X}(M). \quad (2.85)$$

Definimos ainda, para cada  $p \in M$  o mapa  $\sharp : T_p^* M \rightarrow T_p M$ , onde  $\omega^\sharp$  é dado por:

$$g(\omega^\sharp, Y) = \omega(Y), \quad \forall Y \in \mathfrak{X}(M). \quad (2.86)$$

É fácil ver que  $\flat^{-1} = \sharp$  e  $\sharp^{-1} = \flat$ . Como os mapas definidos acima são aplicações lineares, eles são, de fato, isomorfismos. Denominamos estes mapas **isomorfismos musicais**.

Em coordenadas, temos:

$$X(p)_\flat(Y(p)) = g_p(X_p, Y_p) = g_{ij}(p)X^i(p)Y^j(p) = g_{ij}(p)X^i(p)dx_p^j(Y(p)), \quad (2.87)$$

$\forall p \in M$  e  $\forall Y \in \mathfrak{X}(M)$ . Desta forma, podemos definir a 1-forma  $X_\flat = g_{ij}X^i dx^j$ . Relacionamos, assim, um campo vetorial  $X$  a uma 1-forma  $X_\flat$ , cujas componentes em um sistema de coordenadas são dadas por  $g_{ij}X^i$ , que denotaremos por  $X_j = g_{ij}X^i$ . É comum referir-se a esta associação como operação de abaixar índices.

Para a 1-forma  $\omega$ , temos:

$$g(\omega(p)^\sharp, Y) = g_{ij}(\omega(p)^\sharp)^i Y^j = \omega(p)(Y) = \omega_j(p)Y^j. \quad (2.88)$$

Logo, temos que:

$$g_{ij}(\omega(p)^\sharp)^i = \omega_j(p) \Rightarrow (\omega(p)^\sharp)^i = g^{ij}\omega_j(p). \quad (2.89)$$

Desta maneira, o campo vetorial  $\omega^\sharp$  tem componentes dadas por  $(\omega^\sharp)^i \partial_i = g^{ij}\omega_j \partial_i$ . Denotamos  $g^{ij}\omega_j = \omega^i$ . É comum chamar essa associação de operação de levantar índices.

Usamos notações bastante parecidas para os isomorfismos musicais e para os campos fundamentais. Não devemos, no entanto, confundí-los. O último faz sentido no contexto de fibrados principais, e associa elementos da álgebra de Lie do grupo estrutural a campos vetoriais no espaço total. Já o primeiro é um isomorfismo que depende apenas da métrica e relaciona covetores e vetores.

### 2.11.2 Conexões Afins

Quando queremos comparar vetores  $X \in T_pM$  e  $Y \in T_qM$ , com  $p \neq q$  (isto é, em espaços tangentes diferentes), precisamos de alguma maneira relacionar  $X$  a um vetor de  $T_qM$  (ou  $Y$  a um vetor de  $T_pM$ ). Isto é necessário já que não faz sentido comparar vetores de espaços vetoriais diferentes. Quando estamos em  $\mathbb{R}^n$  com a métrica usual, simplesmente transportamos estes vetores assumindo que suas componentes em relação à base canônica não se alteram. No entanto, em uma variedade riemanniana arbitrária, em geral não existem bases definidas globalmente e mesmo quando estas existem, não há uma escolha natural de uma delas.

Para que seja possível comparar vetores de espaços vetoriais diferentes, introduzimos o conceito de conexão afim em uma variedade riemanniana  $M$ . Seja  $\mathfrak{X}(M)$  o espaço dos campos vetoriais em  $M$ , e  $C(M)$  o espaço das funções reais  $C^\infty$  em  $M$ .

**Definição 2.11.5.** *Sejam  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $f, g \in C(M)$  e  $(U, x^1, \dots, x^n)$  um sistema de coordenadas. Uma **conexão afim**  $\nabla$  em uma variedade riemanniana é um mapa*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M), \quad (2.90)$$

denotado por  $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$  que satisfaz as seguintes propriedades:

1. Dados  $f, g \in C(M)$ ,  $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$ ;
2.  $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$ ;
3.  $\nabla_X fY = f\nabla_X Y + X(f)Y$ .

Para tratarmos da conexão da variedade riemanniana, definimos os **coeficientes da conexão**:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}. \quad (2.91)$$

Especificar os coeficientes da conexão é equivalente a declarar a conexão. Com os coeficientes, podemos calcular  $\nabla$  em quaisquer campos vetoriais:

$$\nabla_X Y = X^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} = X^i \left( \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + Y^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right) = X^i \left( \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + Y^j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x^k}. \quad (2.92)$$

### 2.11.3 Transporte Paralelo e Geodésicas

Como dito anteriormente, a conexão é o instrumento pelo qual podemos comparar vetores de espaços vetoriais diferentes. Para associar um vetor  $X \in T_pM$  a outro vetor em um espaço tangente  $T_qM$ , transportamos esse vetor ao longo de uma curva para o espaço tangente  $T_qM$ . A conexão nos indica uma maneira “natural” de como esse vetor se transporta ao longo de curvas na variedade, ou seja, de como transportar esse vetor ao longo de uma curva “sem mudá-lo”. Este transporte é chamado transporte paralelo.

**Definição 2.11.6.** *Seja  $X$  um campo vetorial definido, ao menos, ao longo de uma curva  $c : (a, b) \rightarrow M$ . Dizemos que  $X$  é transportado paralelamente ao longo de  $c$  se:*

$$\nabla_{\dot{c}} X = 0. \quad (2.93)$$

A igualdade acima pode ser expressa em termos de componentes por:

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{c}} X &= \nabla_{(dx^i/dt)\partial/\partial x^i} X^j \frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{dx^i}{dt} X^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} = \\ &= \frac{dX^j}{dt} \frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{dx^i}{dt} X^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} = \left( \frac{dX^k}{dt} + \frac{dx^i}{dt} X^j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x^k} = 0, \end{aligned} \quad (2.94)$$

onde os termos acima são calculados no ponto  $c(t)$ . Desta forma, a expressão que as componentes devem satisfazer para realizar um transporte paralelo ao longo de  $c$  é:

$$\frac{dX^k}{dt} + \frac{dx^i(c(t))}{dt} X^j \Gamma_{ij}^k = 0. \quad (2.95)$$

A conexão nos permite, também, determinar a curva que determina o menor caminho entre dois pontos (o caminho “mais reto”, no qual não se observa nenhuma mudança na direção do vetor velocidade, ou nenhuma “aceleração intrínseca”):

**Definição 2.11.7.** *Uma curva geodésica é uma curva  $c$  que satisfaz:*

$$\nabla_{\dot{c}} \dot{c} = 0, \quad (2.96)$$

A expressão anterior, em coordenadas locais, assume a forma:

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{c}} \dot{c} &= \nabla_{(dx^i/dt)\partial/\partial x^i} \frac{dx^j}{dt} \frac{\partial}{\partial x^j} = (dx^i/dt) \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{dx^j}{dt} \frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} = \\ &= \frac{d^2 x^j}{dt^2} \frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} = \left( \frac{d^2 x^k}{dt^2} + \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x^k} = 0, \end{aligned} \quad (2.97)$$

onde os termos são calculados no ponto  $c(t)$ . Assim:

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} + \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \Gamma_{ij}^k = 0. \quad (2.98)$$

Pode-se pensar, em um primeiro momento, que a condição (2.96) para que a curva  $c$  seja o caminho mais curto que liga dois pontos é muito forte. Intuitivamente, podemos pensar que devemos apenas exigir que

$$\nabla_{\dot{c}} \dot{c} = f \dot{c}, \quad (2.99)$$

onde  $f \in C(M)$ , ou seja, que  $\dot{c}$  varie apenas na direção de  $\dot{c}$ . Podemos, no entanto, reparametrizar tal  $c$  de forma que satisfaça (2.96). De fato, usando a reparametrização  $t \rightarrow t'$  tal que

$$\frac{d^2 t'}{dt^2} = f \frac{dt'}{dt}, \quad (2.100)$$

a equação (2.99) passa a satisfazer (2.96) [25].

Assumiremos aqui que nossas variedades são sempre completas de maneira que, pelo teorema de Hopf-Rinow [26], as variedades aqui consideradas são sempre geodesicamente completas (isto é, qualquer geodésica  $\gamma(t)$  é definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ ).

#### 2.11.4 Conexão Riemanniana

Apresentaremos, agora, uma conexão natural que surge do estudo de geometria riemanniana.

**Definição 2.11.8.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade riemanniana e  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  campos de vetores. Uma conexão  $\nabla$  é dita **compatível com a métrica** se, para qualquer curva diferenciável  $c$ ,  $g(X, Y)$  se mantém constante quando  $X$  e  $Y$  são transportados paralelamente ao longo de  $c$ .*

Definimos:

**Definição 2.11.9.** *Seja  $M$  uma variedade riemanniana e  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . O tensor de torção  $T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  é definido por:*

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]. \quad (2.101)$$

**Definição 2.11.10.** *Sejam  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . Uma conexão é dita **simétrica** se seu tensor de torção se anula, ou seja, se ela satisfaz:*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]. \quad (2.102)$$

Em coordenadas, do fato da conexão ser simétrica segue que os coeficientes da conexão são simétricos em relação aos índices contravariantes, ou seja,  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} = [\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0 \Rightarrow \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ .

Apresentamos agora um teorema central no desenvolvimento da teoria de geometria riemanniana, cuja demonstração pode ser encontrada em [27]:

**Teorema 2.11.1** (Levi-Civita). *Dada  $(M, g)$  uma variedade riemanniana, existe uma única conexão  $\nabla$  simétrica e compatível com a métrica.*

A conexão que satisfaz essas duas propriedades é chamada de conexão de Levi-Civita ou conexão riemanniana. Sejam  $g^{ij}$  os elementos da matriz inversa da matriz do tensor métrico  $(g_{ij})$ . Os coeficientes da conexão riemannianas são dados por [25]:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}). \quad (2.103)$$

### 2.11.5 Curvatura

Os conceitos anteriores nos permitem definir uma curvatura intrínseca da variedade:

**Definição 2.11.11.** *Seja  $M$  uma variedade riemanniana. A curvatura de  $M$ , denotada por  $R$ , é uma aplicação  $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  dada por:*

$$R(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \quad (2.104)$$

onde  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ .

A curvatura é também denotada por  $R(X, Y)Z$ , onde é pensada como um operador que age sobre  $Z$ . Fica claro, pela definição, que a curvatura é anti-simétrica em relação aos dois primeiros argumentos,  $R(X, Y, Z) = -R(Y, X, Z)$ . A curvatura obedece à seguinte propriedade [25]:

$$R(fX, gY, hZ) = fghR(X, Y, Z), \quad (2.105)$$

$\forall f, g, h \in C(M)$ . Assim temos, em coordenadas,

$$R(X, Y, Z) = X^i Y^j Z^l R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right). \quad (2.106)$$

Se definirmos agora:

$$R(\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j, \partial/\partial x^l) = R_{ijl}^k \partial/\partial x^k, \quad (2.107)$$

obter a curvatura será equivalente a obter os coeficientes  $R_{ijl}^k$ , já que:

$$R(X, Y, Z) = X^i Y^j Z^l R_{ijl}^k \partial/\partial x^k. \quad (2.108)$$

Um cálculo direto da definição nos dá [27]:

$$R_{ijl}^k = \Gamma_{il}^s \Gamma_{js}^k - \Gamma_{jl}^s \Gamma_{is}^k + \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{il}^k - \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma_{jl}^k. \quad (2.109)$$

Denotando  $R_{ijl}^k g_{ks} = R_{ijls}$ , obtemos as propriedades [27]:

1.  $R_{ijls} + R_{jlis} + R_{lij s} = 0$ ;
2.  $R_{ijls} = -R_{jils}$ ;
3.  $R_{ijls} = R_{ijsl}$ ;
4.  $R_{ijls} = R_{lsij}$ .

Duas combinações da curvatura merecem destaque. Seja  $d = \dim M$ , e  $v = z_d$  um vetor unitário em  $T_p M$ . Tomamos uma base ortonormal  $\{z_1, \dots, z_{d-1}\}$  do hiperplano ortonormal a  $v$ . Definimos:

**Definição 2.11.12.** A curvatura de Ricci na direção de  $v$ , calculada em  $p \in M$ , é definida por:

$$Ric_p(v) = \frac{1}{d-1} \sum_{i=1}^{d-1} g_p(R(v, z_i)v, z_i). \quad (2.110)$$

Definimos também:

**Definição 2.11.13.** A curvatura escalar calculada em  $p \in M$  é definida por:

$$R(p) = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d Ric_p(z_i) = \frac{1}{d} \frac{1}{d-1} \sum_{i \neq j} \sum_{j=1}^{d-1} g_p(R(z_i, z_j)z_i, z_j). \quad (2.111)$$

Sobre estas definições, devemos citar o seguinte resultado, cuja demonstração é encontrada em [27]:

**Proposição 2.11.1.** As definições de curvatura de Ricci e curvatura escalar não dependem da escolha da base de  $T_pM$ .

A curvatura escalar, como mostra a equação que a define, se trata de uma média da curvatura no espaço.

## 2.12 Isometrias e Vetores de Killing

### 2.12.1 O Grupo de Isometrias

**Definição 2.12.1.** Sejam  $M$  e  $N$  variedades riemannianas com métricas  $g$  e  $h$  respectivamente e  $f : M \rightarrow N$  um difeomorfismo. Dizemos que  $f$  é uma **isometria** se  $f^*h = g$ . Ou seja, se dado  $p \in M$ ,  $h_{f(p)}(dfX, dfY) = g_p(X, Y)$ , para todo  $X, Y \in T_pM$ .

Estamos interessados nas isometrias de uma variedade riemanniana nela mesma. Nesse caso, se  $(M, g)$  é uma variedade riemanniana com sua métrica, uma isometria é um difeomorfismo tal que  $f^*g = g$ . Denotaremos o conjunto das isometrias da variedade riemanniana  $M$  por  $\text{Iso}(M)$ .

Como exemplos de isometrias, podemos apontar translações e rotações em  $\mathbb{R}^n$ . Se pensarmos no  $S^2$  mergulhado em  $\mathbb{R}^3$  com o centro da esfera na origem do sistema de coordenadas do espaço euclidiano, rotações em relação a eixos que passam pela origem de  $\mathbb{R}^3$  são isometrias de  $S^2$ . Apresentaremos a seguir uma importante propriedade das isometrias.

**Proposição 2.12.1.** Seja  $M$  uma variedade riemanniana. A aplicação  $\text{dist}$  (definida na subseção 2.11.1) em  $M$  é invariante por isometrias de  $M$ .

*Prova:* Seja  $i$  uma isometria de  $M$ . Para demonstrar a proposição, vamos primeiro demonstrar o lema:

**Lema 2.12.1.** *Seja  $C(x_1, x_2)$  o conjunto das curvas diferenciáveis  $c : [0, 1] \rightarrow M$  tais que  $c(0) = x_1$  e  $c(1) = x_2$ . Então  $C(i(x_1), i(x_2)) = i(C(x_1, x_2))$ , onde  $i(C(x_1, x_2)) = \{i \circ c \mid c \in C(x_1, x_2)\}$ .*

*Prova do Lema:* Seja  $c \in C(x_1, x_2)$ . A curva  $i \circ c$  é diferenciável com  $i \circ c(0) = i(x_1)$  e  $i \circ c(1) = i(x_2)$ . Logo,  $C(i(x_1), i(x_2)) \supset i(C(x_1, x_2))$ . Seja agora  $c \in C(i(x_1), i(x_2))$ . Se definirmos a curva  $i^{-1} \circ c$ , temos que  $i^{-1} \circ c$  é diferenciável e  $i^{-1} \circ c(0) = x_1$  e  $i^{-1} \circ c(1) = x_2$ . Logo,  $C(i(x_1), i(x_2)) \subset i(C(x_1, x_2))$ . Assim,  $C(i(x_1), i(x_2)) = i(C(x_1, x_2))$ .  $\square$

Voltando à proposição acima, temos pela definição de dist que:

$$\begin{aligned} \text{dist}(i(x_1), i(x_2)) &= \text{Inf}\{\text{comp}(c) \mid c \in C(i(x_1), i(x_2))\} = \\ &= \text{Inf}\{\text{comp}(i \circ c) \mid c \in C(x_1, x_2)\} = \\ &= \text{Inf}\left\{\int_{[0,1]} \sqrt{g(di \circ \dot{c}(t), di \circ \dot{c}(t))} dt \mid c \in C(x_1, x_2)\right\} = \\ &= \text{Inf}\left\{\int_{[0,1]} \sqrt{g(\dot{c}(t), \dot{c}(t))} dt \mid c \in C(x_1, x_2)\right\} = \\ &= \text{Inf}\{\text{comp}(c) \mid c \in C(x_1, x_2)\} = \text{dist}(x_1, x_2). \end{aligned} \tag{2.112}$$

$\square$

Pode-se mostrar que vale a recíproca desta afirmação [28]:

**Teorema 2.12.1.** *Seja  $M$  uma variedade riemanniana e  $f : M \rightarrow M$  uma aplicação que preserva distâncias, isto é, que  $\text{dist}(f(x), f(y)) = \text{dist}(x, y)$ , para quaisquer  $x, y \in M$ . Então  $f$  é uma isometria.*

A aplicação identidade  $\text{id}$  é uma isometria e temos que  $f \circ \text{id} = \text{id} \circ f = f \forall f \in \text{Iso}(M)$ . Sejam  $f_1, f_2 \in \text{Iso}(M)$ . Como  $f_1$  e  $f_2$  são difeomorfismos de  $M$ ,  $f_1 \circ f_2$  é, também, um difeomorfismo. Temos  $g_{f_1 \circ f_2(p)}(df_1 \circ df_2 X, df_1 \circ df_2 Y) = g_{f_2(p)}(df_2 X, df_2 Y) = g_p(X, Y)$ . Logo  $f_1 \circ f_2$  é também uma isometria. Como as isometrias são difeomorfismos, cada  $f \in \text{Iso}(M)$  possui a sua inversa  $f^{-1}$  de forma que  $f \circ f^{-1} = \text{id}$ . Assim, temos que  $g_p(X, Y) = g_p(df \circ df^{-1} X, df \circ df^{-1} Y) = g_{f^{-1}(p)}(df^{-1} X, df^{-1} Y)$ . Logo,  $f^{-1}$  é também uma isometria. O conjunto  $\text{Iso}(M)$  das isometrias de  $M$  possui, portanto, estrutura de grupo.

Vamos apresentar o Teorema de Meyer-Steenrod, cuja demonstração encontramos em [29, 30]:

**Teorema 2.12.2** (Teorema de Meyer-Steenrod). *Todo grupo de isometrias de uma variedade riemanniana é um grupo de Lie.*<sup>6</sup>

É surpreendente que, além de possuir estrutura de grupo, o conjunto das isometrias de uma variedade riemanniana seja também grupo de Lie.

Vamos, agora, introduzir as isometrias infinitesimais.

---

<sup>6</sup>Segundo a topologia compacto-aberta [29].

### 2.12.2 Vetores de Killing

**Definição 2.12.2.** *Seja  $M$  uma variedade riemanniana com métrica  $g$ . Um **vetor de killing** ou **isometria infinitesimal** é um campo vetorial  $X$  tal que a derivada de Lie da métrica por  $X$  é nula, ou seja:*

$$\mathcal{L}_X g = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_t^{X*} g - g}{t} = 0. \quad (2.113)$$

O que a definição acima diz é que ao longo do fluxo de  $X$ ,  $\phi_t^X$ , a geometria da variedade não se altera, ou seja, o vetor de Killing aponta em uma direção de simetria de  $M$ . Outra forma de colocar o significado da expressão acima é que a transformação de coordenadas  $x^i \mapsto x^i + \epsilon X$ , com  $\epsilon$  infinitesimal, é uma isometria.

Desenvolvendo a expressão 2.113, chegamos à conclusão que os campos vetoriais de Killing satisfazem a seguinte equação, que chamaremos equação de Killing [25]:

$$X^k \partial_k g_{ij} + (\partial_i X^k) g_{kj} + (\partial_j X^k) g_{ik} = 0. \quad (2.114)$$

Esta equação também pode ser escrita em termos da conexão riemanniana da seguinte forma [25]:

$$(\nabla_i X)_j + (\nabla_j X)_i = \partial_i X_j + \partial_j X_i - 2\Gamma_{ij}^k X_k = 0. \quad (2.115)$$

Podemos obter mais vetores de Killing do que a dimensão do espaço do qual tratamos, já que o número de vetores de Killing de uma variedade está relacionado às suas simetrias, e não diretamente à dimensão do espaço. No entanto, o número máximo de vetores de Killing de um espaço tem relação com a dimensão da variedade. Se  $d$  é a dimensão da variedade riemanniana  $M$ , o valor máximo de vetores de Killing de  $M$  é  $d(d+1)/2$  [33]. Se  $M$  possui  $d(d+1)/2$  vetores de killing,  $M$  é dita uma variedade **maximalmente simétrica**.

Um exemplo de variedade maximalmente simétrica é o  $\mathbb{R}^n$ . Há  $n$  vetores de Killing associados à translações e  $n(n-1)/2$  vetores de Killing associados às rotações. Outra variedade maximalmente simétrica é o  $S^n$  cujos vetores de Killing estão relacionados com rotações em  $n(n+1)/2$  planos independentes de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Observe que uma combinação linear com coeficientes escalares de campos de Killing é também um campo de Killing.<sup>7</sup> O colchete de Lie de campos vetoriais de vetores de Killing é também um vetor de Killing [25]. Logo, os vetores de Killing formam uma álgebra de Lie.

Como explicamos na subseção anterior, o grupo de isometrias de uma variedade riemanniana é um grupo de Lie [29, 30]. Vimos que todo grupo de Lie possui uma álgebra de Lie associada. Os conceitos de grupo de isometrias e de campos de vetores de Killing se relacionam quando analisamos as álgebras de Lie associadas aos grupos de isometrias. Apresentamos esta relação como um teorema cuja demonstração é encontrada em [32, 33]:

**Teorema 2.12.3.** *A álgebra de Lie associada ao grupo de isometrias de uma variedade riemanniana  $M$  é isomorfa à álgebra de Lie dos campos de vetores de Killing.*

<sup>7</sup> Isso é falso se os coeficientes forem funções e não coeficientes numéricos.

Este teorema será de singular importância no desenvolvimento da descrição geométrica da natação em espaços curvos.

## Os Vetores de Killing e a Curvatura do Espaço

Às formas associadas aos campos de vetores de Killing  $\xi_i$  via isomorfismos musicais, que denotaremos por  $(\xi_i)_b$ , chamamos de **1-formas de Killing**. Chamamos, ainda,  $d(\xi_i)_b$  de 2-forma de Killing. As 2-formas de Killing contém informações sobre a curvatura (riemanniana) da variedade.

Isso é mais facilmente visto utilizando coordenadas normais de Riemann [26] (também chamadas de referencial euclidiano local). Estas coordenadas são construídas a partir de geodésicas. Dado  $x_0 \in M$  e  $V \in T_{x_0}M$ , denotamos por  $\gamma_V$  a geodésica tal que  $\gamma_V(0) = x_0$  e  $\dot{\gamma}(0) = V$ . Pode-se mostrar que a aplicação  $\epsilon_{x_0} : T_{x_0}M \rightarrow M$ ,  $V \mapsto \gamma_V(1)$ , é um difeomorfismo entre uma vizinhança aberta  $U_{x_0}$  de  $x_0$  e uma vizinhança aberta  $A_0$  da origem de  $T_{x_0}M$  [26]. Dada uma base ortonormal  $\{E_i\}$  de  $T_{x_0}M$ , podemos definir o isomorfismo natural  $E : \mathbb{R}^d \rightarrow T_{x_0}M$ ,  $E(x^1, \dots, x^d) = x^i E_i$ . As coordenadas normais de Riemann centradas em  $x_0$ ,  $\phi : U_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}^d$ , serão dadas por:

$$\phi := E^{-1} \Big|_{A_0} \circ \epsilon_{x_0}^{-1}. \quad (2.116)$$

Uma vantagem de se trabalhar com as coordenadas normais é que elas trazem de forma natural noções euclidianas, ainda que de forma aproximada. Nestas coordenadas temos  $g_{ij}(x_0) = \delta_{ij}$  e  $\Gamma_{ij}^k(x_0) = 0$ , para todos os índices  $k, i, j$ . As coordenadas normais sempre existem, embora não sejam únicas (podemos sempre efetuar uma rotação arbitrária na base  $\{E_i\}$  acima).

Vamos analisar os campos de Killing associados à noção (aproximada) de uma translação em  $x_0$  (em oposição a uma rotação). Um vetor de Killing<sup>8</sup>  $\xi_{(s)}$  é determinado na vizinhança de  $x_0$  pelo seu valor neste ponto,  $\xi_{(s)}(x_0)$ , e pelo valor de  $\nabla_{[i}\xi_{(s)j]}(x_0) = \nabla_i\xi_{(s)j}(x_0) - \nabla_j\xi_{(s)i}(x_0)$ , já que a combinação simétrica  $\nabla_i\xi_{(s)j} + \nabla_j\xi_{(s)i}$  é sempre nula pela equação de Killing 2.115. Associaremos a idéia de translação na direção  $s$  ao campo de Killing  $\xi_{(s)}$  que satisfaz:

$$\xi_{(s)i}(x_0) = \delta_{si}, \quad \nabla_{[i}\xi_{(s)j]}(x_0) = 0. \quad (2.117)$$

Tais condições determinam o comportamento do vetor  $\xi_{(s)}$  longe de  $x_0$  através da equação diferencial satisfeita por vetores de Killing [31]:

$$\nabla_i\nabla_j\xi_{(s)r} = -R_{jri}^h\xi_{(s)h}. \quad (2.118)$$

---

<sup>8</sup>Denotaremos aqui vetores de Killing por  $\xi_{(s)}$  para evitar confusões entre o índice do vetor de Killing e o de suas componentes.

Como os coeficientes da conexão se anulam na origem, temos que  $\nabla_i \nabla_j \xi_{(s)r} = \partial_i \nabla_j \xi_{(s)r}$ . Substituindo 2.117 em 2.118 e integrando, obtemos:

$$\nabla_j (\xi_{(s)})_h = -x^i R_{jh is}(x_0) + o(x^2), \quad (2.119)$$

onde  $o(x^2)$  denota correções de ordens maiores ou iguais a 2 nas coordenadas  $x^i$ . Com este termo, podemos obter as componentes da 2-forma associada ao  $s$ -ésimo vetor de Killing  $d(\xi_{(s)})_b$ , já que  $d(\xi_{(s)})_b = \partial_j \xi_{(s)i} dx^j \wedge dx^i$ . Para pontos próximos à origem, podemos desprezar os termos  $o(x^2)$  e temos uma relação bastante simples entre as coordenadas de  $d(\xi_{(s)})_b$  e a curvatura do seu espaço ambiente:

$$d(\xi_{(s)})_b = -x^r R_{ijrs} dx^i \wedge dx^j + o(x^2),$$

No caso em que a variedade tem dimensão 2, temos apenas uma componente independente para o tensor de Riemann, que pode então ser escrito como

$$R_{ijrs} = (g_{ir}g_{js} - g_{is}g_{jr})R,$$

onde  $R$  é o escalar de curvatura. Neste caso, a expressão acima toma as formas

$$d(\xi_{(1)})_b = 2R x^2 dx^1 \wedge dx^2 \quad d(\xi_{(2)})_b = -2R x^1 dx^1 \wedge dx^2. \quad (2.120)$$

## 2.13 Grupos de Transformações e Geometria Riemanniana

Vimos, em seções anteriores, alguns conceitos acerca de grupos de transformações e de variedades riemannianas. Vamos agora explorar algumas propriedades dos grupos de transformações  $(G, M, \varphi)$  no caso em que  $M$  é uma variedade riemanniana e  $G$  seu grupo de isometrias.

### 2.13.1 A Ação de um Subgrupo Fechado de um Grupo de Isometrias é Própria

Começamos mostrando que a ação de um subgrupo fechado do grupo de isometrias em uma variedade riemanniana é sempre própria. Para tanto, devemos mostrar a seguinte equivalência:

**Proposição 2.13.1.** *Uma ação é própria se, e somente se, a convergência das sequências  $x_n \rightarrow x$  e  $x_n \cdot g_n \rightarrow y$  implica que  $\{g_n\}$  possui uma subsequência convergente.*

*Prova:* Lembramos que (definição 2.2.1) a ação  $\varphi : G \times M \rightarrow M$  é própria se, e somente se, a função  $\mu : G \times M \rightarrow M \times M$ ,  $\mu(b, m) = (\varphi(b, m), m)$  é própria. Começamos assumindo que  $\varphi : G \times M \rightarrow M$  é uma ação própria. Suponhamos que  $x_n \rightarrow x$  e  $x_n \cdot g_n \rightarrow y$ . Segue do fato de  $M$  ser localmente euclidiano que  $M$  é localmente compacto. Logo  $M \times M$  é

localmente compacto e assim  $(y, x)$  possui uma vizinhança compacta. Temos, fora dessa vizinhança, apenas um número finito de pontos da sequência  $(x_n \cdot g_n, x_n)$ . Como todo ponto é compacto em um espaço localmente euclidiano, a união  $K$  entre a vizinhança compacta e os pontos da sequência fora do compacto continua sendo um conjunto compacto. Como  $\varphi$  é própria,  $\mu^{-1}(K)$  é compacto e a sequência  $(g_n, x_n)$  possui uma subsequência  $(g_{n_j}, x_{n_j})$  convergente. Se definirmos a projeção  $\pi : G \times M \rightarrow G$ ,  $(g, m) \mapsto g$ , esta será contínua e, portanto,  $g_{n_j} = \pi(g_{n_j}, x_{n_j})$  é convergente. Logo  $g_n$  possui uma subsequência convergente.

Reciprocamente, suponhamos que a convergência das sequências  $x_n \rightarrow x$  e  $x_n \cdot g_n \rightarrow y$  implique a convergência de uma subsequência de  $\{g_n\}$ . Seja  $F$  um subconjunto fechado de  $G \times M$  e  $\mu(F)$  a imagem de  $F$ . Tome uma sequência convergente em  $\mu(F)$ ,  $(x_n \cdot g_n, x_n) \rightarrow (y, x)$ . Com isso,  $x_n \rightarrow x$  e  $x_n \cdot g_n \rightarrow y$ . Por hipótese,  $g_n$  possui uma subsequência convergente  $g_{n_k} \rightarrow g$ , de maneira que  $(g_{n_k}, x_{n_k}) \rightarrow (g, x)$ . Como  $F$  é fechado,  $(g, x) \in F$  e, como  $\mu$  é contínua,  $(x_{n_k} \cdot g_{n_k}, x_{n_k}) \rightarrow (x \cdot g, x) \in \mu(F)$ . Ainda,  $x_n \cdot g_n \rightarrow y$  nos dá que  $x_{n_k} \cdot g_{n_k} \rightarrow y$ . Como  $M \times M$  é Hausdorff, cada sequência converge para um único ponto e temos que  $y = x \cdot g$ . Com isso,  $y \in \mu(F)$  e, assim,  $\mu(F)$  é fechado. Portanto,  $\mu$  é uma aplicação fechada.

Seja agora um ponto  $(y, x) \in M \times M$  e tome  $\mu^{-1}(y, x) = Y \times \{x\}$ , onde  $Y = \{g \in G \mid x \cdot g = y\}$ . Consideremos a sequência  $(g_n, x_n) \in Y \times \{x\}$ . Temos que  $\mu(g_n, x_n) = (x_n \cdot g_n, x_n) = (y, x)$ . Logo  $x_n \rightarrow x$  e  $x_n \cdot g_n \rightarrow y$  e, por hipótese, existe uma subsequência convergente de  $g_n$ . Assim,  $Y$  é compacto, de forma que  $Y \times \{x\}$  é compacto, de onde segue que a imagem inversa de um ponto por  $\mu$  é compacto. Como  $\mu$  é também fechada, temos que  $\mu$  é própria e, portanto, a ação  $\varphi$  é própria.  $\square$

Agora podemos demonstrar a afirmação

**Proposição 2.13.2.** *Seja  $F \subset G$  um subgrupo fechado do grupo de isometrias de  $M$ . Então  $G$  age propriamente em  $M$ .*

*Prova:* Seja  $x_n \rightarrow x$  e  $x_n \cdot g_n \rightarrow y$  com  $x_n \in M$  e  $g_n \in F$ . Então temos

$$\text{dist}(x \cdot g_n, y) \leq \text{dist}(x \cdot g_n, x_n \cdot g_n) + \text{dist}(x_n \cdot g_n, y). \quad (2.121)$$

Como  $g_n$  são isometrias, temos que<sup>9</sup>  $\text{dist}(x \cdot g_n, x_n \cdot g_n) = \text{dist}(x, x_n)$ , de onde segue que  $x \cdot g_n \rightarrow y$ . Agora fazemos uso do resultado enunciado abaixo ([34] vol. 1 pp. 46-49):

**Lema 2.13.1.** *Sejam  $(X, h)$  um espaço métrico (métrica  $h$ ), conexo e localmente compacto, e  $\{\phi_i\}$  uma sequência de isometrias em  $(X, h)$ . Se existe um  $x \in X$  tal que  $\phi_i(x)$  converge, então existe uma subsequência  $\{\phi_{i_k}\}$  que converge, uniformemente sobre compactos, a uma isometria  $\phi$  de  $(X, h)$ .*

Pelo lema acima existe uma subsequência  $\{g_{n_k}\} \in F$  que converge (uniformemente sobre compactos) a uma isometria  $g$  que é suave. Como  $F$  é fechado,  $g \in F$  e a ação é, de fato, própria.  $\square$

---

<sup>9</sup>A ação do grupo de isometrias em  $M$  se dá, naturalmente, pela aplicação da isometria em  $M$  (ou, por exemplo, pela aplicação do inverso da isometria, para que se tenha uma ação à direita).

### 2.13.2 A Ação de $G$ em $M \times \cdots \times M$ é Própria

Na subseção anterior, mostramos que a ação de um subgrupo fechado do grupo de isometrias de uma variedade riemanniana é própria. Seja  $M$  uma variedade riemanniana conexa de dimensão  $d$ , com métrica  $g_{\mu\nu}$ , e  $G$  seu grupo de isometrias. Vamos definir uma ação de  $G$

sobre  $\widetilde{M} = \overbrace{M \times \cdots \times M}^{n \text{ vezes}}$ , e vamos usar o resultado da subseção anterior para mostrar que esta ação é própria. Este fato será de especial importância no capítulo seguinte.

Seja  $p \in M$ . Definamos a ação à direita de  $G$  na variedade  $M$  por:

$$(g, p) \mapsto p \cdot g = g^{-1}(p), \quad (2.122)$$

Escolhemos, acima, agir com a isometria  $g$  através de sua inversa  $g^{-1}$  simplesmente para termos uma ação à direita e não à esquerda. Essa escolha não é importante, mas facilitará nosso trabalho no capítulo seguinte.

Os elementos de  $\widetilde{M}$  são da forma  $(x_1, \cdots, x_n)$ , onde cada  $x_i$  pertence a uma cópia de  $M$ . Definimos, então, a ação à direita de  $G$  em  $\widetilde{M}$  por:

$$((x_1, \cdots, x_n), g) \mapsto (x_1, \cdots, x_n) \cdot g = (x_1 \cdot g, \cdots, x_n \cdot g). \quad (2.123)$$

Introduzimos agora um produto interno em  $\widetilde{M}$  que fará desta variedade uma variedade riemanniana. Seja  $V$  um campo vetorial em  $\widetilde{M}$ . Observamos que  $V$  possui  $dn$  componentes. Se  $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \widetilde{M}$ , denotamos  $V_{x_i}(x)$  o vetor tangente de  $M$  dado por

$$V_{x_i}(x) = V^{d(i-1)+1}(x) \frac{\partial}{\partial x_i^1} + \cdots + V^{d(i-1)+d}(x) \frac{\partial}{\partial x_i^d}.$$

Ou seja, temos que  $T\widetilde{M} = \overbrace{TM \oplus \cdots \oplus TM}^{n \text{ vezes}}$  e o vetor  $V_{x_i}(x)$  é o vetor corresponde à  $i$ -ésima cópia de  $TM$ . Se  $\widetilde{M}$  é o espaço de configurações de um corpo de  $n$  partículas em  $M$  e  $V$  é o vetor que descreve a velocidade do corpo em  $\widetilde{M}$ ,  $V_{x_i}(x)$  é a velocidade da  $i$ -ésima partícula em  $M$ .

Seja  $g_{x_i}$  o tensor métrico no ponto  $x_i \in M$ . Vamos dotar  $\widetilde{M}$  da seguinte métrica:

$$\tilde{g}(x) = \begin{bmatrix} c_1(g_{\mu\nu}(x_1)) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2(g_{\mu\nu}(x_2)) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & c_n(g_{\mu\nu}(x_n)) \end{bmatrix}, \quad (2.124)$$

onde  $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \widetilde{M}$  e  $c_1, \cdots, c_n$  são constantes positivas. Verifiquemos, antes de mais nada, que  $\tilde{g}$  é de fato um produto interno.

**Proposição 2.13.3.**  $\tilde{g}$  é um produto interno.

*Prova:* Vemos imediatamente que  $\tilde{g}$  é bilinear e simétrico. Além disso, como  $(M, g)$  é uma variedade riemanniana, temos que  $g(u_{x_i}, u_{x_i}) \geq 0$ , valendo a igualdade somente se  $u_{x_i}$  é nulo. Como  $c_i > 0 \forall i$ , se  $u \neq 0$  temos  $\tilde{g}(u, u) > 0$ . Portanto,  $B$  é um produto interno em  $\widetilde{M}$ .  $\square$

Observamos que a ação de  $G$  em  $\widetilde{M}$  definida acima corresponde à aplicação dos **elementos diagonais** de  $\overbrace{G \times \cdots \times G}^{n \text{ vezes}}$ . Seja  $DG = \{(g, \dots, g), g \in G\}$  o espaço de tais elementos.

**Proposição 2.13.4.**  *$DG$  é subgrupo de  $\text{Iso}(\widetilde{M})$  segundo a métrica  $\tilde{g}$ .*

*Prova:* É imediato ver que  $DG$  possui estrutura de grupo. Basta, assim, mostrar que  $DG \subset \text{Iso}(\widetilde{M})$ . Se  $f \in DG$ , podemos escrever  $f = (a, \dots, a)$ , onde  $a$  é uma isometria de  $M$ . Temos  $f^* \tilde{g}_{f(x)} = (a^* c_1 g_{a(x_1)}, \dots, a^* c_n g_{a(x_n)}) = (c_1 g_{x_1}, \dots, c_n g_{x_n}) = \tilde{g}_x$ , de onde segue que  $DG \subset \text{Iso}(\widetilde{M})$ .  $\square$

Assim, mostramos que  $DG$  é um subgrupo do grupo de isometrias  $\text{Iso}(\widetilde{M})$ . Pelo resultado da subseção anterior, a aplicação de subgrupos fechados do grupo de isometrias de uma variedade riemanniana constitui uma ação própria. Como a nossa ação equivale à aplicação de  $DG$  em  $\widetilde{M}$ , se mostrarmos que  $DG$  é um subgrupo fechado de  $\text{Iso}(\widetilde{M})$ , alcançaremos nosso objetivo de mostrar que a ação de  $G$  em  $\widetilde{M}$  definida acima é própria.

**Proposição 2.13.5.**  *$DG \subset \text{Iso}(\widetilde{M})$  é fechado.*

*Prova:* Seja  $((a_i, \dots, a_i))$  uma sequência que converge a um elemento  $f \in \text{Iso}(\widetilde{M})$ . Como  $(a_i, \dots, a_i)$  é convergente, cada entrada é convergente de forma que  $f = (a, \dots, a)$ . Se mostrarmos que  $a$  é uma isometria, então teremos mostrado que qualquer sequência convergente de  $DG$  converge a um elemento de  $DG$ , de onde segue que  $DG$  é fechado. Seja  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \widetilde{M}$  e  $X = X_1 \oplus \cdots \oplus X_n, Y = Y_1 \oplus \cdots \oplus Y_n \in T_x \widetilde{M}$ . Como  $g$  é uma isometria, temos:

$$\begin{aligned} c_1 g_{x_1}(X_1, Y_1) + \cdots + c_n g_{x_n}(X_n, Y_n) &= \tilde{g}_x(X, Y) = \tilde{g}_{f(x)}(dfX, dfY) = \\ &= \tilde{g}_{f(x)}(daX_1 \oplus \cdots \oplus daX_n, daY_1 \oplus \cdots \oplus daY_n) = \\ &= c_1 g_{a(x_1)}(daX_1, daY_1) + \cdots + c_n g_{a(x_n)}(daX_n, daY_n). \end{aligned} \quad (2.125)$$

Como a equação acima vale para quaisquer vetores tangentes  $X, Y \in T_x \widetilde{M}$  e para todo  $x \in \widetilde{M}$ , podemos tomar um ponto diagonal de  $\widetilde{M}$ ,  $y = (p, \dots, p)$ , e vetores tangentes  $Z \oplus \cdots \oplus Z, W \oplus \cdots \oplus W \in T_y \widetilde{M}$ , de forma que a relação acima resulte em:

$$(c_1 + \cdots + c_n) g_p(Z, W) = (c_1 + \cdots + c_n) g_{a(p)}(daZ, daW), \quad (2.126)$$

para todo  $Z, W \in T_p M$  e  $p \in M$ . Logo,  $a$  é uma isometria de  $M$  e  $DG$  é fechado em  $\text{Iso}(\widetilde{M})$ .  $\square$

Mostramos, assim, que a ação de  $G$  em  $\widetilde{M}$  é uma ação própria.

### 2.13.3 A Fibrção $(M, M/G, \pi, G)$

Reservamos uma subseção para apresentar um teorema bastante importante no desenvolvimento do nosso trabalho. Este teorema é provado em [23], (teorema 2.17).

**Teorema 2.13.1.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável e  $G$  um grupo de Lie. Suponhamos que  $G$  age livremente e propriamente em  $M$ . Então, denotando por  $\pi : M \rightarrow M/G$  o mapa quociente,  $(M, M/G, \pi, G)$  é um fibrado principal.*

É interessante notar que este é um resultado onde se encontram todos os conceitos que introduzimos até agora. Primeiro, apresentamos a teoria de grupos de Lie para introduzirmos o conceito de grupos de transformações e apresentar o teorema da órbita principal. Depois, seguimos o caminho que nos pareceu mais natural, o de introduzir as formas diferenciais para depois introduzir os conceitos de fibrados e conexões. Discorremos brevemente sobre geometria riemanniana e falamos depois de seus grupos de isometrias e vetores de Killing. Nesta seção mostramos que a ação de um grupo de isometrias em uma variedade riemanniana é uma ação própria e, depois, introduzimos uma ação de  $G$  em  $\widetilde{M} = M \times \cdots \times M$ , que mostramos ser própria. Agora, apresentamos este teorema que nos permite concluir que, se a ação de  $G$  em  $\widetilde{M}$  for livre, podemos obter um fibrado principal. É restringindo apropriadamente  $\widetilde{M}$  e usando o teorema da órbita principal que obteremos uma ação livre para escrever a notação com o formalismo de fibrados e conexões.

## Capítulo 3

# Nadando em Espaços Curvos Via Teoria de Calibre

Como discutido na introdução, a proposta desta dissertação é geometrizar o modelo de Avron e Kenneth para a natação em espaços curvos [12]. No capítulo anterior, introduzimos os conceitos necessários para este fim. Neste capítulo, vamos apresentar a natação via teoria de calibre.

Para tratar o problema de um conjunto de  $n$  partículas em um espaço chato (um espaço de curvatura nula), é usual fazer uma distinção entre forças externas ao sistema de partículas e forças internas [35]. Quando tratamos de  $n$  partículas em  $\mathbb{R}^3$ , a força sobre a  $i$ -ésima partícula do sistema é dada por:

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \frac{d^2}{dt^2}(m_i \mathbf{r}_i) = \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_j \mathbf{F}_{ij}, \quad (3.1)$$

onde  $m_i$  é a massa da partícula  $i$ ,  $\mathbf{r}_i$  é sua posição,  $\mathbf{p}_i$  seu momento linear,  $\mathbf{F}_i^{(e)}$  a força externa aplicada sobre a partícula  $i$  e  $\mathbf{F}_{ij}$  é a força sobre a partícula  $i$  devido à partícula  $j$  (tomamos  $\mathbf{F}_{ij} = 0$  se  $i = j$ ). Para obter a força resultante sobre o sistema, somamos a expressão anterior sobre todas as partículas:

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_i \dot{\mathbf{p}}_i = \frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{ij} \mathbf{F}_{ij}. \quad (3.2)$$

Pela lei da ação e reação, temos que  $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ . Logo  $\sum_{ij} \mathbf{F}_{ij} = 0$  e, se  $\mathbf{F}^{(e)} = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)}$ , temos:

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \mathbf{r}_i = \mathbf{F}^{(e)}. \quad (3.3)$$

Denotando a massa total do sistema por

$$m = \sum_i m_i$$

e a posição do centro de massa por

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{m}, \quad (3.4)$$

obtemos a expressão:

$$m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{R} = \mathbf{F}^{(e)}. \quad (3.5)$$

Podemos, a partir da expressão acima, concluir que o centro de massa, se inicialmente em repouso, se desloca apenas na presença de uma força externa resultante.

Observamos que, para obter este resultado, supusemos que  $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ . Em um espaço curvo, esta suposição não é válida. Na verdade, esta expressão nem mesmo faz sentido neste caso, pois os vetores de força relevantes estão em espaços tangentes à variedade em pontos diferentes, e não podemos compará-los livremente, como no caso do espaço chato. Além disso, como a equivalência entre pontos do espaço e vetores tangentes não existe em um espaço curvo, não podemos somar pontos, de forma que a expressão  $\mathbf{R} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i / m$  também não está bem definida. De fato, o conceito de centro de massa perde seu sentido em espaços curvos.

Para o caso de partículas em uma variedade riemanniana arbitrária, a ação e reação entre duas partículas se dá ao longo da geodésica que as liga. Logo, grosseiramente falando, para o caso de espaços curvos, não vale a expressão  $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ , e a lei de ação e reação não cancela as forças internas. É possível, falando ainda grosseiramente, observar uma força interna resultante não nula. Seria possível, assim, que ocorresse uma aceleração do sistema como um todo (e, conseqüentemente, um deslocamento global do sistema) devido exclusivamente a forças internas. Em princípio, então, não podemos descartar a possibilidade de obtermos um deslocamento global após um ciclo<sup>1</sup> de deformações no corpo provocadas apenas por forças internas.

Se isso ocorresse no espaço euclidiano, poderíamos concluir que podemos mover o centro de massa apenas com forças internas (isto, como vimos pela equação 3.5 acima, não pode acontecer). No entanto, em espaços curvos, a noção de centro de massa não faz sentido, de modo que, para exprimir mais precisamente a idéia do "deslocamento do corpo como um todo", precisamos introduzir os conceitos de formato do corpo e movimentos rígidos.

Seja  $M$  a variedade riemanniana na qual se encontra nosso sistema de  $n$  partículas, a qual chamaremos de **espaço ambiente**. Denotamos por  $G$  o grupo de isometrias de  $M$ . Para descrever a configuração de um conjunto de massas puntiformes, ou seja, a posição

---

<sup>1</sup>Por ciclo queremos dizer uma sequência de deformações em que o formato final do corpo é o mesmo que o inicial.

de cada uma de suas massas, podemos definir um espaço de configurações composto por  $n$  cópias da variedade  $M$ , onde cada cópia descreva a posição de uma partícula. Seja

$$\widetilde{M} = \overbrace{M \times \cdots \times M}^{n \text{ vezes}}$$

o espaço de configurações das partículas. Definimos a ação de  $G$  sobre  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \widetilde{M}$  como  $(x, g) \mapsto x \cdot g := (x_1 \cdot g, \dots, x_n \cdot g) = (g^{-1}(x_1), \dots, g^{-1}(x_n))$ . Notamos que esta é justamente a ação definida na subseção 2.13.2.<sup>2</sup>

**Definição 3.0.1.** *O formato do corpo é definido como um elemento do conjunto  $\widetilde{M}/G$ .*

A ação de  $G$  em  $\widetilde{M}$  consiste na aplicação de uma isometria de  $M$  em cada ponto que descreve a posição de uma partícula do corpo. Como, segundo esta ação, todo o corpo irá se deslocar em uma mesma direção isométrica de  $M$  (ou seja, em uma direção em que a geometria de  $M$  não se altera), a geometria da configuração não irá se alterar. O formato do corpo é, portanto, uma característica geométrica da configuração.

Podemos definir agora, em espaços possivelmente curvos, a noção de **movimento rígido** de um corpo.

**Definição 3.0.2.** *Definimos um movimento rígido como um deslocamento do corpo na variedade ambiente que não altera o seu formato.*

Como o formato da configuração é uma órbita em  $\widetilde{M}$  definida pela ação de  $G$ , um movimento rígido é, portanto, um movimento descrito por  $x \mapsto x \cdot g = (x_1 \cdot g, \dots, x_n \cdot g)$ . Se o corpo se desloca na variedade por um movimento que não é rígido, ou seja, um movimento que não se dá de uma forma isométrica na variedade, a geometria da configuração das partículas se altera e obtemos um novo formato para o corpo. Um movimento rígido é, desta forma, um movimento que não altera a geometria da disposição das partículas do corpo na variedade  $M$ .

Entendido o que significa o formato de uma configuração de partículas em  $M$  e o que é um movimento rígido deste sistema de partículas, podemos responder à pergunta: que tipo de deslocamento podemos obter, na ausência de forças externas, após um ciclo de deformações de um corpo? A resposta, naturalmente, é que podemos obter (possivelmente) movimentos rígidos.

Em espaço chato, há dois tipos distintos de movimentos rígidos: translações e rotações. Em espaços curvos, essa categorização é mais problemática. Podemos no entanto chamar de translações os movimentos que, ao menos para corpos não muito grandes, não deixam nenhum ponto do “interior do corpo” fixado. Mais precisamente, dizemos que um subconjunto  $A$  de uma variedade riemanniana  $N$  é convexo se, para quaisquer pontos  $p, q \in A$ , existe uma única geodésica minimizante ligando  $p$  a  $q$  contida em  $A$ . Definimos ainda o

---

<sup>2</sup>Definimos a ação como a aplicação  $g^{-1}$  ao invés de  $g$  para obtermos uma ação à direita (e não à esquerda), o que será útil mais adiante.

fecho convexo  $HB$  de um conjunto  $B$  como o menor subconjunto convexo que contém  $B$ , ou seja, se  $D$  é um subconjunto convexo que contém  $B$ ,  $HB \subset D$  [36]. Por pontos no “interior do corpo”, entendemos pontos que pertencem ao seu fecho convexo.

Vemos da discussão acima que, em espaços curvos, um corpo pode sofrer, em princípio, uma translação após um ciclo de deformações provocado apenas por forças internas. Este fenômeno é chamado de **efeito swimming** ou, simplesmente, **natação**. Segue da discussão no início deste capítulo que não pode haver natação em espaço chato.

Vemos ainda que a natação é apenas permitida em espaços que possuem um grupo de isometrias não trivial. Em espaços em que o grupo de isometrias é trivial, a posição das massas determina completamente o formato do corpo. A natação pode permitir acesso a regiões limitadas da variedade, dependendo do seu grupo de isometrias. Para que um corpo possa nadar livremente pela variedade, esta deverá ser simétrica, como a esfera ou o espaço hiperbólico.

O tratamento dado pelo modelo que vamos apresentar se restringe a “nadadores” que consistem de um conjunto de massas puntiformes, não-relativísticas, em variedades estáticas. Consideraremos ainda, no que segue, apenas isometrias “contínuas”, isto é, geradas por vetores de Killing (em oposição a isometrias discretas como, por exemplo, uma reflexão em  $\mathbb{R}^3$ ). Desta forma, estamos interessados apenas em isometrias pertencentes à componente conexa da identidade (isometrias que podem ser escritas como produto de exponenciais de vetores de Killing, ou ainda, isometrias que sejam uma composição de fluxos de campos de Killing), pois são estas isometrias que descrevem os movimentos rígidos.

### 3.1 O Teorema da Órbita Principal e o Fibrado Principal

$$G \cdots \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}/G$$

Introduzidos os conceitos de movimentos rígidos, deformações e efeito swimming, estamos preparados para tratar a natação em espaços curvos com formalismo matemático próprio de fenômenos de fases geométricas, dado pela teoria de fibrados e conexões. Descrevendo a posição das partículas que formam um corpo na variedade  $M$  por pontos do espaço de configurações  $\widetilde{M}$ , os movimentos rígidos do corpo são descritos pela ação do grupo de isometrias  $G$  em  $\widetilde{M}$ . Nos parece, então, natural pensar que essa ação pode gerar um fibrado principal  $G \cdots \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}/G$ , onde  $\widetilde{M}/G$  é o espaço dos formatos do corpo. Neste caso, poderíamos exprimir deformações do corpo como curvas no espaço base  $\widetilde{M}/G$ . Assim, se definirmos uma conexão no fibrado na qual estejam embutidas as leis físicas que regem o sistema, poderíamos estudar a natação como a holonomia gerada por levantamentos horizontais de curvas fechadas no espaço base. Obteríamos, assim, a descrição da natação em espaços curvos com o formalismo de fibrados e conexões. Isso não pode ser feito exatamente desta maneira mas, como veremos a seguir, uma restrição apropriado do espaço  $\widetilde{M}$  nos permite cumprir este programa.

### 3.1.1 O Teorema da Órbita Principal e a Variedade $\overline{M}$

O espaço ambiente  $M$  é aqui considerado uma variedade riemanniana completa, conexa, de dimensão  $d$  e com métrica  $g$ , onde estão definidas  $n$  partículas pontuais com massas  $m_i$ ,  $i = 1, \dots, d$ . Denotamos as coordenadas da partícula  $i$ , em uma carta local  $(U, x^1, \dots, x^d)$ , por  $x_i = (x_i^1, \dots, x_i^d)$ . Denotamos por  $G$  o grupo de isometrias de  $M$ .

Nesta seção, abordamos o seguinte problema, introduzido acima. O objeto  $G \cdots \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}/G$  é um fibrado principal? Mostraremos que, se restringirmos o espaço  $\widetilde{M}$  a um subespaço adequado  $\overline{M}$ , obtemos, de fato, um fibrado principal  $G \cdots \overline{M} \rightarrow \overline{M}/G$ .

Como vimos na subseção 2.13.3, se a ação de  $G$  em  $\widetilde{M}$  for própria e livre, então  $G \cdots \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}/G$  será um fibrado principal. Já sabemos, da subseção 2.13.2, que a ação de  $G$  em  $\widetilde{M}$  é própria. Assim, a ação de  $G$  em  $\widetilde{M}$  define um fibrado principal se ela for livre. No entanto, isto não é, em geral, verificado. Por exemplo, se consideramos, em  $\mathbb{R}^3$ , uma configuração de duas ou mais partículas colineares, qualquer rotação sobre o eixo formado pelas partículas não altera a configuração do sistema. Em  $S^2$ , se tivermos duas partículas diametralmente opostas, qualquer rotação no eixo que forma as partículas não altera a sua configuração. Assim, a ação de  $G$  em  $\widetilde{M}$  não é livre nestes casos.

Podemos, no entanto, escolher restringir  $\widetilde{M}$  a um subconjunto onde a ação seja livre. Seja  $E = \{x \in \widetilde{M} | G_x \neq \{e\}\}$ , onde  $e$  é o elemento neutro de  $G$  e  $G_x$  é o grupo de isotropia de  $x \in \widetilde{M}$ . Um elemento de  $E$  pode ser pensado como uma configuração de partículas na variedade que não se altera por alguma isometria não-trivial (como, por exemplo, partículas colineares em  $\mathbb{R}^3$  que ficam invariantes sob a ação de uma rotação em torno do eixo por elas definido). Consideramos, então, apenas os pontos de  $\widetilde{M}$  onde a ação é livre definindo:

$$\overline{M} = \widetilde{M} - E. \quad (3.6)$$

Em palavras,  $\overline{M}$  é o subconjunto de  $\widetilde{M}$  obtido após retirarmos todas as configurações que não se alteram sob a ação de alguma isometria.

Temos, agora, um outro problema. Nada nos garante, a priori, que  $\overline{M}$  é razoavelmente bem comportado para nossos objetivos, isto é, que  $\overline{M}$  tem estrutura de variedade. Esta questão é resolvida recorrendo ao teorema da órbita principal. Como vimos na seção 2.2, tal teorema assegura que se a ação de  $G$  em  $N$  é própria e  $N/G$  é conexo, então existe uma órbita tipo  $(H)$  maximal e que o conjunto dos pontos regulares de  $N$ ,  $N_r$ , é aberto e denso em  $N$ . Um conjunto aberto de uma variedade diferenciável é uma subvariedade com a mesma dimensão que a variedade original. Assim,  $N_r$  é uma variedade diferenciável com a mesma dimensão que  $N$ .<sup>3</sup> Estamos interessados no caso em que o grupo  $H$  é trivial (isto é,  $H = \{e\}$ ) já que, neste caso, a ação será livre em  $N_r$ . Com isso, teremos de fato uma estrutura de fibrado principal  $G \cdots N_r \rightarrow N_r/G$ , onde, no nosso caso,  $N = \widetilde{M} = M \times \cdots \times M$  e  $N_r = \overline{M}$ .

<sup>3</sup>Na verdade, mais que isso:  $N_r$  é um aberto denso em  $N$ , ou seja, é “quase” todo  $N$ .

Vamos fazer a hipótese (bastante fraca) de que nosso sistema contém pelo menos uma configuração de partículas que não é fixada por nenhuma isometria não trivial. O caso extremo de um corpo formado por apenas uma massa puntiforme, digamos, sobre uma esfera, não obedece tal condição, pois qualquer rotação sobre o eixo que passa por ele fixa esta configuração. É fácil ver, no entanto, que um corpo com duas ou mais massas puntiformes sobre tal esfera sempre obedecerá tal condição. Com isso, garantimos que o grupo de isotopia  $H$  (vide acima) é necessariamente  $\{e\}$  e que  $\overline{M} \neq \emptyset$  sempre.

Antes de seguir adiante, precisamos mostrar que as hipóteses do teorema da órbita principal são satisfeitas para  $G$ ,  $\widetilde{M}$  e a ação de  $G$  em  $\widetilde{M}$ . Já mostramos que a ação é própria em 2.13.2. Resta mostrar que  $\widetilde{M}/G$  é conexo. Sabemos, de topologia básica, que o produto de espaços conexos é conexo se e somente se cada espaço do produto é conexo. Logo,  $\widetilde{M} = M \times \cdot \times M$  é conexo. Sabemos também, de topologia básica, que a imagem contínua de um conjunto conexo é conexo. Como a projeção canônica  $\pi : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}/G$  é contínua e sobrejetiva, temos que  $\widetilde{M}/G = \pi(\widetilde{M})$ , o que nos mostra que  $\widetilde{M}/G$  é conexo.

Logo  $G$ ,  $\widetilde{M}$ , e a ação de  $G$  em  $\widetilde{M}$  satisfazem as condições do teorema e  $\overline{M}$ , dado pelo conjunto dos pontos regulares de  $\widetilde{M}$ , é uma variedade diferenciável.

### 3.1.2 O Fibrado Principal $G \cdots \overline{M} \rightarrow \overline{M}/G$

Antes de considerar o fibrado  $G \cdots \overline{M} \rightarrow \overline{M}/G$  temos ainda que responder à seguinte questão: faz sentido falar em ação de  $G$  em  $\overline{M}$ , isto é, tal ação está bem definida? Sejam  $x \in \overline{M}$ ,  $g \in G$ , e  $a : G \times \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$  a ação de  $G$  em  $\widetilde{M}$ . Como  $\overline{M}$  é a união das órbitas principais de  $\widetilde{M}$ ,  $x \cdot g$  pertence a  $\overline{M}$ , e a restrição de  $a$ ,  $a : G \times \overline{M} \rightarrow \overline{M}$ , está bem definida. A ação de  $G$  em  $\overline{M}$  é também diferenciável, pois se trata da restrição de uma ação diferenciável a um aberto. Esta ação é ainda, por construção, livre.

Agora, para que possamos usar o teorema 2.13.1 e chegar à conclusão de que  $G \cdots \overline{M} \rightarrow \overline{M}/G$  é um fibrado principal, precisamos mostrar que a ação de  $G$  em  $\overline{M}$  é própria. Mostramos na subseção 2.13.1 que, se  $N$  é uma variedade riemanniana e  $\text{Iso}(N)$  é seu grupo de isometrias, a ação de um subgrupo fechado de  $\text{Iso}(N)$  em  $N$  é própria. Usamos esse resultado para mostrar, na subseção 2.13.2, que a ação de  $G$  em  $\widetilde{M}$  é própria atribuindo à  $\widetilde{M}$  a métrica  $\tilde{g}$ , fazendo de  $\widetilde{M}$  uma variedade riemanniana, e mostrando que esta ação equivale à aplicação de um subgrupo fechado do grupo  $\text{Iso}(\widetilde{M})$ . Podemos, de forma análoga, mostrar que a ação de  $G$  em  $\overline{M}$  é própria. A métrica  $\tilde{g}$  varia diferenciavelmente em  $\widetilde{M}$ . Se restringirmos a métrica  $\tilde{g}$  à  $\overline{M}$ , por se tratar de uma restrição a um subdomínio aberto,  $\tilde{g}$  será diferenciável em  $\overline{M}$ . Assim,  $(\overline{M}, \tilde{g})$  é uma variedade riemanniana.

Como a métrica de  $\overline{M}$  é a métrica de  $\widetilde{M}$  restrita a  $\overline{M}$ , o grupo  $DG$  das isometrias diagonais será um subgrupo de  $\text{Iso}(\overline{M})$ . Podemos seguir, então, a demonstração de que  $DG$  é um subgrupo fechado em  $\text{Iso}(\overline{M})$  (subseção 2.13.2), para mostrar que  $DG$  é um subgrupo fechado de  $\text{Iso}(\overline{M})$ . A ação de  $G$  em  $\overline{M}$  é, assim, própria.

Sendo a ação de  $G$  em  $\overline{M}$  própria e livre, vale o teorema 2.13.1 e concluímos que, de fato,  $G \cdots \overline{M} \rightarrow \overline{M}/G$  é um fibrado principal. Assim, mostramos que se restringirmos

adequadamente  $\widetilde{M}$  à  $\overline{M}$ , obtemos o fibrado principal  $G \cdots \overline{M} \rightarrow \overline{M}/G$ , e podemos seguir com a idéia de geometrizar a natação em espaços curvos descrevendo-a como a holonomia de uma curva fechada na espaço base  $\overline{M}/G$ .

## 3.2 A Geometrização da Natação em Espaços Curvos

Vamos desenvolver, nesta seção, a descrição da natação em espaços curvos como a holonomia de curvas fechadas em  $\overline{M}/G$ , curvas estas que representam um ciclo de deformações do corpo. Obtemos a conexão para o levantamento horizontal da curva fechada no espaço base através das leis da físicas que regem o comportamento do sistema de partículas que compõe o corpo.

### 3.2.1 As Leis de Conservação

Precisamos dotar o fibrado principal de uma conexão que expresse as leis que regem o comportamento do sistema, de forma que o levantamento horizontal das curvas descreva movimentos fisicamente permitidos. Para que os movimentos sejam fisicamente permitidos, eles deverão respeitar as leis de conservação. Busquemos, então, as leis de conservação do sistema.

Suponhamos que a lagrangiana do sistema das  $n$  partículas na variedade  $M$  de dimensão  $d$  e métrica  $g$  assuma a forma:

$$L = \frac{1}{2} \sum_i m_i g(\dot{x}_i, \dot{x}_i) - \sum_{i < j} V_{ij}(\text{dist}(x_i, x_j), t), \quad (3.7)$$

onde  $V_{ij}$  é o potencial entre as partículas  $i$  e  $j$ ,  $m_i$  é a massa da  $i$ -ésima partícula,  $x_i$  sua posição e  $(x_i^1, \dots, x_i^d)$  suas coordenadas. Mostramos, no capítulo anterior, que a métrica e a distância em  $M$  são invariantes por isometrias. Logo, esta lagrangiana é invariante por isometrias.

Como visto no capítulo 2, a derivada de Lie da métrica  $g$  por um vetor de Killing  $\xi$  se anula, ou seja,  $\mathcal{L}_\xi g = 0$ . A lagrangiana é, então, invariante pela transformação infinitesimal  $x \mapsto x + \epsilon \xi$ . Assim,  $\frac{\partial L}{\partial \epsilon} = 0$ . Temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \epsilon} &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i^\alpha} \frac{\partial \dot{x}_i^\alpha}{\partial \epsilon} + \frac{\partial L}{\partial x_i^\alpha} \frac{\partial x_i^\alpha}{\partial \epsilon} + \frac{\partial L}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \epsilon} = \\ &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i^\alpha} \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i^\alpha}{\partial \epsilon} + \frac{\partial L}{\partial x_i^\alpha} \frac{\partial x_i^\alpha}{\partial \epsilon} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i^\alpha} \dot{\xi}^\alpha(x_i) + \frac{\partial L}{\partial x_i^\alpha} \xi^\alpha(x_i). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Definindo os momentos generalizados

$$P_{\xi_i} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j^\alpha} \xi_i^\alpha(x_j), \quad (3.9)$$

temos:

$$\frac{d}{dt}P_{\xi_i} = \sum_j \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j^\alpha} \right) \xi_i^\alpha(x_j) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j^\alpha} \dot{\xi}_i^\alpha(x_j). \quad (3.10)$$

Os momentos físicos do sistema satisfazem as equações de Euler-Lagrange [35]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_j^\alpha} = 0. \quad (3.11)$$

Com isso, utilizando a equação 3.8, temos:

$$\frac{d}{dt}P_{\xi_i} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i^\alpha} \xi_i^\alpha(x_i) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i^\alpha} \dot{\xi}_i^\alpha(x_i) = \frac{\partial L}{\partial \epsilon} = 0. \quad (3.12)$$

Desta forma, os momentos generalizados são quantidades do movimento que se conservam. Para a lagrangiana acima, os momentos generalizados são simplesmente:

$$P_{\xi_i} = \sum_j m_j g(\xi_i(x_j), \dot{x}_j).$$

Suponhamos que os momentos generalizados são inicialmente nulos. Então, a relação

$$P_{\xi_i} = \sum_j m_j g(\xi_i(x_j), \dot{x}_j) = 0 \quad (3.13)$$

deve valer para todo  $t$ . A conexão deve, portanto, trazer consigo a informação desta lei de conservação.

### 3.2.2 A Base $\{\bar{\xi}_i, \eta_j\}$ do Espaço Tangente de $\bar{M}$

Neste ponto será mais fácil trabalhar com as relações de conservação expressando os vetores tangentes do espaço de configurações  $\bar{M}$  em termos de deslocamentos rígidos e deformações. Como explicamos anteriormente, um movimento rígido em um espaço curvo é definido por um deslocamento de todas as partículas do corpo em uma direção em que a geometria da variedade não se altera. Seja  $\xi_i$  um vetor de Killing em  $M$ .  $\xi_i$  é uma isometria infinitesimal, ou seja, em qualquer ponto em que seja avaliado, ele aponta na direção em que a geometria

da variedade não muda. Definimos o campo vetorial  $\bar{\xi}_i = \overbrace{\xi_i \oplus \dots \oplus \xi_i}^{n \text{ vezes}}$  em  $\bar{M}$ . Se descrevermos um corpo como um ponto no espaço de configurações  $\bar{M}$ ,  $\bar{\xi}_i$  gera um movimento em que todas as partículas do corpo se deslocam pela ação de uma mesma isometria, ou seja, gera um movimento rígido do sistema de partículas em  $M$ .

Assim, chamaremos os  $\bar{\xi}_i$  de **vetores de movimento rígido**. Se  $M$  possui  $k$  vetores de Killing linearmente independentes, temos em  $\bar{M}$  apenas estas  $k$  direções em que podemos realizar um movimento rígido. Vamos mostrar que  $\{\bar{\xi}_i\}_{i=1}^k$  é um conjunto linearmente independente (LI).

**Proposição 3.2.1.** *O conjunto de vetores  $\{\bar{\xi}_i\}_{i=1}^k$  é LI.*

*Prova:* Consideremos o mapa  $\psi_x : G \rightarrow \bar{M}$ ,  $g \mapsto x \cdot g$ , com  $x \in \bar{M}$  fixado. Como a ação é livre em  $\bar{M}$ , temos que  $d(\psi_x)_e : T_e G \rightarrow T_x \bar{M}$  é injetora. De fato, como vimos no capítulo anterior, se denotarmos a restrição da ação  $\psi_x : G \rightarrow \bar{M}$ ,  $g \mapsto x \cdot g$ , com  $x \in \bar{M}$  fixado, esta função é um difeomorfismo entre  $G/G_x$  e  $x \cdot G$ . Como a ação de  $G$  em  $\bar{M}$  é livre, temos  $G_x = \{e\}$  e assim  $\psi_x$  é um difeomorfismo entre  $G$  e  $x \cdot G$ .

Desta forma, a derivada da aplicação  $d(\psi_x)_e$  é um isomorfismo entre  $T_e G$  e um subspaço de  $T_x \bar{M}$  e, como tal, leva uma base de  $T_e G$  (espaço das isometrias infinitesimais) em um conjunto de vetores LI de  $T_x \bar{M}$ . Estes últimos nos dão exatamente os campos vetoriais de movimentos rígidos  $\bar{\xi}_i$  avaliados em  $x$ . Mais precisamente, seja  $\phi_\xi^t$  o fluxo do vetor de Killing  $\xi$  em  $M$  e  $p \in M$ . Pela definição de fluxo de campos vetoriais, vale  $\frac{d}{dt} \phi_\xi^t(p) = \xi(\phi_\xi^t(p))$   $\forall p \in M$ , de forma que  $\frac{d}{dt} \phi_\xi^t = \xi \circ \phi_\xi^t$  e assim  $\frac{d}{dt} \phi_\xi^t|_0 = \xi$  [33]. Seja  $\{\xi_i\}$  uma base da álgebra de Lie de  $G$  e  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \bar{M}$ . Então:

$$\begin{aligned} d(\psi_x)_e \xi_i &= d(\psi_x)_e \left( \frac{d}{dt} \phi_{\xi_i}^t \Big|_0 \right) = \frac{d}{dt} [\psi_x(\phi_{\xi_i}^t)] \Big|_0 = \frac{d}{dt} [x \cdot (\phi_{\xi_i}^t)] \Big|_0 = \\ &= \frac{d}{dt} [(\phi_\xi^{-t}(x_1), \dots, \phi_\xi^{-t}(x_n))] \Big|_0 = -\bar{\xi}_i(x). \end{aligned}$$

Portanto,  $\{\bar{\xi}_i|_x\}_{i=1}^k$  é LI.  $\square$

Os vetores de movimento rígido podem ser usados para caracterizar completamente o espaço vertical  $V_x$  do fibrado.

**Proposição 3.2.2.** *Dado  $x \in \bar{M}$ ,*

$$V_x = \text{span}\{\bar{\xi}_i(x)\}_{i=1}^k.$$

*Segue que  $\{\bar{\xi}_i|_x\}_{i=1}^k$  é base de  $V_x$ .*

*Prova:* Como vimos anteriormente, o espaço vertical do fibrado  $G \cdots \bar{M} \rightarrow \bar{M}/G$  em  $p \in \bar{M}$  é dado por  $V_p = \{X \in T_p \bar{M} | \pi_* X = 0\}$ . Observemos que:

$$\pi_* \bar{\xi}_i(x) = \frac{d}{dt} \pi(\phi_{\xi_i}^t(x_1), \dots, \phi_{\xi_i}^t(x_n)) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} [(x_1, \dots, x_n)] \Big|_{t=0} = 0. \quad (3.14)$$

Logo  $\text{span}\{\bar{\xi}_i(x)\}_{i=1}^k \subset V_x$ . Mas, como vimos no capítulo 2, o espaço vertical é isomorfo à álgebra de Lie do grupo estrutural. A dimensão da álgebra de Lie de  $G$  é, assim,  $k$ . Logo,  $\dim(V_x) = k$ . Como os  $k$  vetores  $\{\bar{\xi}_i(x)\}_{i=1}^k$  são LI, segue por dimensionalidade que  $V_x = \text{span}\{\bar{\xi}_i(x)\}_{i=1}^k$ .  $\square$

Desta forma, podemos obter uma base local do fibrado tangente de  $\bar{M}$  que contenha o conjunto  $\{\bar{\xi}_i\}_{i=1}^k$ . No entanto, o espaço tangente de  $\bar{M}$  possui dimensão igual a  $dn$ , e ainda nos restam  $dn - k$  vetores para completar o conjunto  $\{\bar{\xi}_i\}_{i=1}^k$  a uma base. Como

as possibilidades de movimentos rígidos se esgotaram, estes vetores faltantes representam deformações do corpo. Se completarmos  $\{\bar{\xi}_i\}_{i=1}^k$  com  $l = dn - k$  vetores LI,  $\{\eta_i\}_{i=1}^l$ , obteremos a expansão do espaço tangente na base  $\{\bar{\xi}_i, \eta_j\}$ , com  $i \in \{1, \dots, k\}$  e  $j \in \{1, \dots, l\}$ . Chamaremos  $\eta_i$  de **campos de deformação**.

Podemos, desta forma, representar o vetor velocidade  $\dot{x}$  de uma curva em  $\bar{M}$  na base  $\{\bar{\xi}_i, \eta_j\}$  por:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^d \tau^i \bar{\xi}_i(x) + \sum_{j=1}^l \sigma^j \eta_j(x). \quad (3.15)$$

### 3.2.3 A Métrica $B$ e a Conexão

Introduziremos agora um produto interno em  $\bar{M}$  que nos permitirá expressar as leis de conservação de forma bastante compacta e clara. Seja  $m = \sum_i m_i$  (como definido anteriormente). A matriz associada a este tensor métrico é:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} m_1 g_{\mu\nu}(x_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} m_2 g_{\mu\nu}(x_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \frac{1}{m} m_n g_{\mu\nu}(x_n) \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Vemos que  $B$  é um caso particular de  $\tilde{g}$ , definido na subseção 2.13.2, onde  $c_i = m_i/m$ . Logo,  $B$  é um produto interno.

Com o auxílio deste produto interno, na base de movimentos rígidos e deformações, podemos escrever nossas  $k$  equações de conservação de forma bem mais enxuta:

$$\tau^i B(\bar{\xi}_j, \bar{\xi}_i) + \sigma^a B(\bar{\xi}_j, \eta_a) = 0, \quad (3.17)$$

Como os  $\bar{\xi}_i$  são LI, a matriz de Gram  $B_{ij} = B(\bar{\xi}_i, \bar{\xi}_j)$  é inversível. Com isso, podemos obter sempre uma única solução para os  $\tau^i$  em função da deformação infinitesimal correspondente a  $\sigma^a$ .

É ainda sempre possível (ainda que não necessário) escolher os vetores de deformação  $\eta_a$  como sendo todos  $B$ -ortogonais (ponto a ponto) aos vetores de movimentos rígidos  $\bar{\xi}_i$  (lembramos que os vetores  $\eta_a$  foram justamente escolhidos de maneira a completar o conjunto LI de vetores  $\{\bar{\xi}_i\}$  a uma base do espaço tangente de  $\bar{M}$  em um dado ponto). Com isso, a equação acima se reduz a

$$\tau^i B(\bar{\xi}_j, \bar{\xi}_i) = 0, \quad (3.18)$$

e conseqüentemente  $\tau^i = 0 \forall i$ . Ou seja, aplicando as leis de conservação ao movimento descrito por  $\dot{x} = \tau^i \bar{\xi}_i(x) + \sigma^j \eta_j(x)$ , vemos que o movimento físico em  $\bar{M}$  se dá na direção apontada pelos campos vetoriais  $\eta_a$ .

Os movimentos fisicamente permitidos ao sistema são, desta forma, os que se dão na direção do espaço  $B$ -ortogonal a  $\text{span}\{\bar{\xi}_i(x)\}_{i=1}^k = V_x$ . Nada mais natural, então, que definir uma conexão no fibrado  $G \cdots \bar{M} \rightarrow \bar{M}/G$  onde o espaço horizontal  $H_x$ , em cada ponto  $x \in \bar{M}$ , é dado pelo complemento ortogonal de  $V_x$  em  $T_x \bar{M}$ . Com isso, os movimentos físicos do sistema correspondem a curvas horizontais em  $\bar{M}$ .

Vamos mostrar que tal escolha para  $H_x$  é de fato uma conexão. Para isso, precisamos inicialmente mostrar que, se  $\phi_g$  denota a ação de  $g$  em  $\bar{M}$ , então  $\phi_{g*}H_x = H_{x \cdot g}$ .

**Proposição 3.2.3.**  $\phi_{g*}H_x = H_{x \cdot g}$

*Prova:* Dada  $f : M \rightarrow M$  diferenciável, esta aplicação induz uma aplicação  $f : \bar{M} \rightarrow \bar{M}$ ,  $f(x_1, \dots, x_n) = (f(x_1), \dots, f(x_n))$  (que escreveremos, por abuso de notação, ainda como  $f$ ). Seja  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$  um campo vetorial tal que  $Y(x)$  é horizontal, e seja  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$  sua curva integral. Temos:

$$\phi_{g*}Y(x) = \frac{d}{dt}\phi_g\gamma(t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}g^{-1}(\gamma(t))\Big|_{t=0} = d(g^{-1})_x Y(x) \quad (3.19)$$

e assim

$$B(\bar{\xi}_i(x \cdot g), \phi_{g*}Y(x)) = B(\bar{\xi}_i(x \cdot g), d(g^{-1})_x Y(x)) = B(d(g^{-1})_x d(g)_{x \cdot g} \bar{\xi}_i(x \cdot g), d(g^{-1})_x Y(x)). \quad (3.20)$$

Como  $g$  age por isometrias, temos:

$$B(d(g^{-1})_x d(g)_{x \cdot g} \bar{\xi}_i(x \cdot g), d(g^{-1})_x Y(x)) = B(d(g)_{x \cdot g} \bar{\xi}_i(x \cdot g), Y(x)). \quad (3.21)$$

Por outro lado,

$$d(g)_{x \cdot g} \bar{\xi}_i(x \cdot g) = \frac{d}{dt}g(\phi_{\xi_i}^t(x \cdot g))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(g \circ \phi_{\xi_i}^t \circ g^{-1}(x_1), \dots, g \circ \phi_{\xi_i}^t \circ g^{-1}(x_n))\Big|_{t=0}. \quad (3.22)$$

Mas  $g \circ \phi_{\xi_i}^t \circ g^{-1}$  é uma curva no grupo de isometrias  $G$  e, assim,

$$\begin{aligned} & \pi_* \frac{d}{dt}(g \circ \phi_{\xi_i}^t \circ g^{-1}(x_1), \dots, g \circ \phi_{\xi_i}^t \circ g^{-1}(x_n))\Big|_{t=0} = \\ & = \frac{d}{dt}\pi(g \circ \phi_{\xi_i}^t \circ g^{-1}(x_1), \dots, g \circ \phi_{\xi_i}^t \circ g^{-1}(x_n))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}[(x_1, \dots, x_n)]\Big|_{t=0} = 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Ou seja,  $d(g)_{x \cdot g} \bar{\xi}_i(x \cdot g)$  é um vetor vertical e portanto pode escrito como uma combinação de  $\{\bar{\xi}_i(x)\}_{i=1}^k$  no ponto  $x$ . Como  $Y(x)$  é horizontal, temos de 3.21 que

$$B(\bar{\xi}_i(x \cdot g), \phi_{g*}Y(x)) = B(d(g)_{x \cdot g} \bar{\xi}_i(x \cdot g), Y(x)) = 0. \quad (3.24)$$

Desta forma,  $\phi_{g*}Y(x)$  é horizontal e  $\phi_{g*}H_p \subset H_{pg}$ . Mas, como  $\phi_{g*}$  é um difeomorfismo e  $\dim(H_p) = \dim(H_{pg})$ , por dimensionalidade temos que  $\phi_{g*}H_p = H_{pg}$ .  $\square$

O espaço vertical, como mostramos, é uma distribuição diferenciável em  $\bar{M}$ . Como  $B$  é uma métrica diferenciável, o espaço horizontal, sendo o complemento ortogonal do espaço vertical, é uma distribuição diferenciável. Como vimos no capítulo anterior, uma conexão pode ser definida como uma distribuição diferenciável que obedece à propriedade  $\phi_{g*}H_p = H_{pg}$ . Logo, vemos que a distribuição  $B$ -ortogonal a  $V_p$  é, de fato, uma conexão.

### 3.2.4 A 1-forma de Conexão $\omega$

Vamos, agora, determinar a 1-forma associada a esta conexão. Como vimos no capítulo 2, a 1-forma de conexão  $\omega$  é uma 1-forma  $\mathcal{G}$ -valorizada que deve satisfazer às duas propriedades:

$$\omega(X^\#) = X, \quad \forall X \in \mathcal{G}, \quad (3.25)$$

$$\omega(Y) = 0, \quad \forall Y \in H_p, \quad (3.26)$$

onde  $\mathcal{G}$  é a álgebra de Lie do grupo estrutural  $G$ ,  $H_x$  é o espaço horizontal em  $x \in \overline{M}$  e  $X^\#$  é o campo fundamental do elemento  $X \in \mathcal{G}$ .

Podemos determinar  $\omega$  a partir da distribuição dos espaços horizontais, como discutido no capítulo 2. Escrevendo a expressão geral para uma 1-forma com valores em  $\mathcal{G}$ ,

$$\omega = \sum_i \omega_i \otimes \xi_i, \quad (3.27)$$

podemos determinar as 1-formas  $\omega_i$  aplicando as condições 3.25 e 3.26. Com isso:

$$\omega(\xi_i^\#) = \xi_i, \quad i = 1, \dots, d, \quad (3.28)$$

$$\omega(\eta_j) = 0, \quad j = 1, \dots, l, \quad (3.29)$$

onde  $\xi_i^\#$  denota o campo fundamental associado a  $\xi_i$ , que determinamos a seguir.

**Proposição 3.2.4.**  $\xi_i^\# = -\bar{\xi}_i$

*Prova:* Por definição, se  $g(t)$  é uma curva em  $G$  tal que  $g(0) = e$  e  $\dot{g}(0) = \xi_i$ , temos:

$$\xi_i^\#(x) = \left. \frac{d}{dt} x \cdot g(t) \right|_{t=0}. \quad (3.30)$$

Como vimos na demonstração da proposição 3.2.1,  $\frac{d}{dt} \phi_{\xi_i}^t = \xi_i \circ \phi_{\xi_i}^t$ , de forma que  $\frac{d}{dt} \phi_{\xi_i}^t|_0 = \xi_i$ . Logo, se  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , obtemos

$$\xi_i^\#(x) = \left. \frac{d}{dt} x \cdot \phi_{\xi_i}^t \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} (\phi_{\xi_i}^{-t}(x_1), \dots, \phi_{\xi_i}^{-t}(x_n)) \right|_{t=0} = -\bar{\xi}_i(x), \quad (3.31)$$

$\forall x \in \overline{M}$ . Portanto:

$$\xi_i^\#(x) = -\bar{\xi}_i(x). \quad (3.32)$$

□

Desta forma as equações 3.28 e 3.29 são equivalentes a:

$$\omega(\bar{\xi}_i) = -\xi_i \quad \forall i, \quad (3.33)$$

$$\omega(\eta_j) = 0, \quad \forall j. \quad (3.34)$$

Sejam  $\tilde{\xi}_j$  e  $\tilde{\eta}_a$  as 1-formas associadas aos vetores  $\bar{\xi}_j$  e  $\eta_a$  pela métrica  $B$  (via isomorfismo musical, como definido na subseção 2.11.1), ou seja,  $\tilde{\xi}_j(x)(Y) = B(\bar{\xi}_j(x), Y)$  e  $\tilde{\eta}_a(x)(Y) = B(\eta_a(x), Y) \forall Y \in T_x \bar{M}$  e  $\forall x \in \bar{M}$ . Expandindo as componentes da conexão:

$$\omega_i = \sum_j \omega_{ij} \tilde{\xi}_j + \sum_a \omega_{ia} \tilde{\eta}_a, \quad (3.35)$$

e impondo as condições 3.33 e 3.34 sobre  $\omega$ , obtemos:

$$\omega(\bar{\xi}_i) = -\xi_i \Rightarrow \omega_j(\bar{\xi}_i) = -\delta_{ji} \Rightarrow \sum_s \omega_{js} \tilde{\xi}_s(\bar{\xi}_i) = -\delta_{ji} \Rightarrow \sum_s \omega_{js} B(\bar{\xi}_s, \bar{\xi}_i) = -\delta_{ji}, \quad (3.36)$$

e

$$\omega(\eta_i) = 0 \Rightarrow \omega_j(\eta_i) = 0 \forall j, i \Rightarrow \sum_s \omega_{js} \tilde{\eta}_s(\eta_i) = 0 \Rightarrow \sum_s \omega_{js} B(\eta_s, \eta_i) = 0. \quad (3.37)$$

Temos em 3.37 a matriz de Gram de  $l$  vetores LI, o que significa que a matriz  $A_{si} = B(\eta_s, \eta_i)$  é inversível, e para cada  $j \in \{1, \dots, k\}$  temos  $\omega_{js} = 0$ , onde  $s$  pertence ao conjunto de índices dos vetores de deformação  $\eta_i$ . Por outro lado, se denotarmos  $B_{ij} = B(\bar{\xi}_i, \bar{\xi}_j)$ , como os  $\{\bar{\xi}_i\}_{i=1}^k$  são LI,  $B_{ij}$  é inversível. Se denotarmos a inversa de  $B_{ij}$  por  $(B_{ij})^{-1} = B^{ij}$ , temos então, de 3.36 que  $\omega_{js} = -B^{js}$ , onde  $s$  pertence ao conjunto de índices dos vetores de movimento rígido  $\bar{\xi}_i$ . Obtemos, assim, a 1-forma de conexão:

$$\omega = -B^{js} \tilde{\xi}_s \otimes \xi_j. \quad (3.38)$$

Se definirmos  $\{\bar{\xi}^1, \dots, \bar{\xi}^k\}$  como a base dual da base do espaço vertical  $\{\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_k\}$ , ou seja,  $\bar{\xi}^i(\bar{\xi}_j) = \delta_j^i$ , é imediato ver que  $\tilde{\xi}_i = B_{is} \bar{\xi}^s$  e, assim,

$$\bar{\xi}^i = B^{is} \tilde{\xi}_s.$$

É importante não confundir as 1-formas  $\bar{\xi}^i$  e  $\tilde{\xi}_i$ . Os isomorfismos musicais relacionam campos vetoriais com formas diferenciais pela métrica, enquanto que, acima, relacionamos duas formas diferenciais entre si com a métrica. Temos que  $\tilde{\xi}_i = (\bar{\xi}_i)_b$ , enquanto  $\bar{\xi}^i$  é a forma dual de  $\bar{\xi}_i$ . Com esta notação a expressão da 1-forma de conexão fica:

$$\omega = -\bar{\xi}^j \otimes \xi_j. \quad (3.39)$$

Provamos na subseção anterior que a distribuição  $B$ -ortogonal a  $V_p$  é uma conexão. Logo, tal  $\omega$  é a 1-forma de conexão associada à conexão definida anteriormente. No entanto, por completude, mostramos abaixo diretamente que  $\omega$  é, de fato, uma 1-forma de conexão.

**Proposição 3.2.5.**  $\omega$  é uma 1-forma de conexão.

*Prova:* Como vimos no capítulo 2, para que esta seja uma 1-forma de conexão, ela deve satisfazer três propriedades: (1) ser diferenciável, (2) ser tal que  $\omega(\xi_i^\#) = \xi$ , e (3)  $\phi_g^* \omega = Ad_{g^{-1}} \omega$ . A condição (1) é diretamente verificada pois  $B^{js}$  é composição de um campo tensorial diferenciável com campos vetoriais diferenciáveis e, logo, diferenciável. Já  $\tilde{\xi}_s = B(\tilde{\xi}_s, \cdot)$  é a 1-forma  $B$ -dual ao campo vetorial  $\tilde{\xi}_s$  e, portanto, diferenciável. Assim  $\omega$  é diferenciável. A condição (2) vale por construção.

Para mostrar que vale a condição (3), seja  $X = V + Y \in T_x \overline{M}$  a decomposição de um vetor tangente de  $\overline{M}$  em suas componentes vertical  $V$  e horizontal  $Y$ . Para a componente horizontal, como  $\phi_{g*} H_x = H_{x \cdot g}$ , temos que  $\phi_g^* \omega(Y) = \omega(\phi_{g*} Y) = 0 = Ad_{g^{-1}} \omega(Y)$ . Logo (3) vale para vetores horizontais. Para vetores verticais, como  $\xi \mapsto \xi^\#(x)$  é um isomorfismo entre a álgebra de Lie e o espaço vertical  $V_x$ , temos que  $V = \xi^\#(x)$  para algum vetor de Killing  $\xi$ . Logo

$$\begin{aligned} \omega_{x \cdot g}(\phi_{g*} \xi^\#(x)) &= \omega_{x \cdot g} \left( \frac{d}{dt} \phi_{g*} x \cdot \exp(t\xi) \Big|_{t=0} \right) = \omega_{x \cdot g} \left( \frac{d}{dt} x \cdot \exp(t\xi) g \Big|_{t=0} \right) = \\ &= \omega_{x \cdot g} \left( \frac{d}{dt} x \cdot g g^{-1} \exp(t\xi) g \Big|_{t=0} \right) = \omega_{x \cdot g} \left( \frac{d}{dt} (x \cdot g) \cdot \exp(t Ad_{g^{-1}} \xi) \Big|_{t=0} \right) = \\ &= \omega_{x \cdot g}((Ad_{g^{-1}} \xi)^\#(x \cdot g)) = Ad_{g^{-1}} \xi = Ad_{g^{-1}} \omega_x(\xi^\#(x)) \end{aligned} \quad (3.40)$$

Assim, a condição (3) também é satisfeita e  $\omega$  é, de fato, uma 1-forma de conexão.  $\square$

### 3.2.5 O Ciclo de Deformações como Curvas Fechadas em $\overline{M}/G$ e a Natação como a Holonomia do seu Levantamento Horizontal

Podemos, com a 1-forma de conexão em mãos, calcular os levantamentos horizontais de curvas fechadas em  $\overline{M}/G$ . Obteremos, assim, os deslocamentos rígidos resultantes de um ciclo de deformações do corpo como a holonomia de curvas fechadas no nosso espaço base. Para fins operacionais, precisamos dotar  $\overline{M}/G$  de um sistema de coordenadas. Usaremos como coordenadas funções reais induzidas, em  $\overline{M}/G$ , por funções reais  $G$ -invariantes no espaço total  $\overline{M}$  [37].

**Definição 3.2.1.** *Sejam  $N$  uma variedade,  $G$  um grupo de Lie agindo sobre  $N$  e  $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ . A função  $f$  é dita  $G$ -invariante se  $f(x \cdot g) = f(x) \forall x \in N$  e  $\forall g \in G$ .*

O que a definição anterior nos diz, em palavras, é que as funções  $G$ -invariantes são funções que se mantêm constantes ao longo de uma órbita.

Dada uma função real  $G$ -invariante no espaço total,  $\bar{\ell} : \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}$ , podemos induzir uma função  $\ell : \overline{M}/G \rightarrow \mathbb{R}$ , no espaço dos formatos, definindo:

$$\ell([x]) = \bar{\ell}(x). \quad (3.41)$$

Queremos tomar um conjunto de  $l$  funções<sup>4</sup>  $G$ -invariantes independentes  $\{\bar{\ell}^1, \dots, \bar{\ell}^l\}$  tal que

<sup>4</sup>Aqui chamamos a atenção para o fato de que, como  $M$  possui  $k$  vetores de Killing linearmente independentes, e como a álgebra de Lie dos vetores de Killing é isomorfa à álgebra de Lie de  $G = \text{Iso}(M)$ , temos  $\dim G = k$  e, portanto,  $\dim \overline{M}/G = \dim \overline{M} - \dim G = dn - k = l$ .

suas funções induzidas em  $\overline{M}/G$ ,  $\{\ell^1, \dots, \ell^l\}$  também sejam independentes. Por exemplo, podemos tomar como  $\ell^i$  funções como a distância (medida no espaço ambiente  $M$ ) entre pontos que formam nosso corpo, ou ângulos entre as geodésicas que ligam algum ponto  $x_i \in M$  aos pontos  $x_j$  e  $x_k$  (figura 3.1). Neste caso,  $\ell = (\ell^1, \dots, \ell^l) : \overline{M}/G \rightarrow \mathbb{R}^l$  estabelece um homeomorfismo entre um aberto  $U \subset \overline{M}/G$  e  $\mathbb{R}^l$ , e  $(U, (\ell^1, \dots, \ell^l))$  é um sistema de coordenadas em  $\overline{M}/G$ .

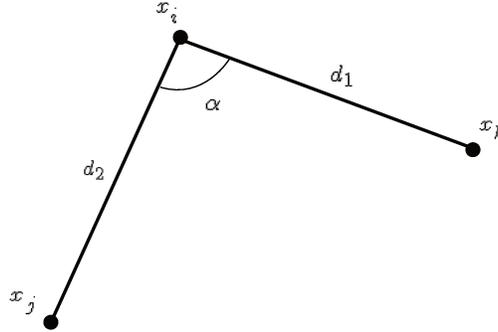


Figura 3.1: Ilustração das funções descritas acima. Aqui,  $\alpha$  é a função ângulo entre as geodésicas que ligam  $x_i$ ,  $x_j$  e  $x_k$ ,  $d_1$  é a função distância (dist) entre  $x_i$  e  $x_k$  e  $d_2$  é a função distância entre  $x_i$  e  $x_j$ .

Estabelecido um sistema de coordenadas, a holonomia pode ser diretamente calculada através do levantamento horizontal de curvas no espaço base de um fibrado principal. Como vimos no capítulo 2, se temos uma curva  $\gamma(t) : [0, t_1] \rightarrow \overline{M}/G$  tal que  $\gamma(t_1) = \gamma(0)$ , podemos expressar o levantamento  $\tilde{\gamma}(t)$  na forma  $\tilde{\gamma}(t) = \sigma(\gamma(t)) \cdot g(t)$ , onde  $\sigma$  é uma seção do fibrado e  $g(t)$  é uma curva em  $G$ . Escolhemos  $\sigma$  tal que  $g(0) = e$ , onde  $e$  denota o elemento neutro de  $G$ . Determinamos, assim, o levantamento, encontrando  $g(t)$  através da equação diferencial 2.69:

$$\frac{d}{dt}g(t) = -R_{g(t)*}(\sigma^*\omega)_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)), \quad (3.42)$$

onde  $R_g$  denota a multiplicação à direita no grupo:  $R_g(h) = hg$ ,  $g, h \in G$ . A holonomia será então dada por  $g(t_1)$ .

Resolvendo esta equação, obtemos o movimento do corpo em função do tempo como uma curva em  $\overline{M}$ , levantamento horizontal da curva em  $\overline{M}/G$ , que descreve o ciclo de deformações que o corpo realiza.

Alcançamos, assim, o objetivo de obter uma descrição geométrica do efeito swimming. Definido o espaço de configurações  $\overline{M}$  e o espaço dos formatos  $\overline{M}/G$ , dotamos o fibrado principal  $G \cdots \overline{M} \rightarrow \overline{M}/G$  de uma conexão que traz consigo as leis de conservação. Expressamos o vetor velocidade no espaço das configurações  $\overline{M}$  em termos dos vetores que geram

movimentos rígidos e dos que geram deformações. Estabelecemos o espaço horizontal como o espaço das deformações fisicamente possíveis. Obtivemos um sistema de coordenadas para o espaço dos formatos  $\overline{M}/G$  usando funções reais  $G$ -invariantes em  $\overline{M}$ . A natação pode ser expressa, desta forma, como a holonomia do levantamento horizontal de curvas fechadas em  $\overline{M}/G$ .

### 3.2.6 A Base de Levantamentos Horizontais de Vetores Coordenados

Estabelecido um sistema de coordenadas  $(U, (\ell^1 \dots \ell^l))$  em  $\overline{M}/G$ , vamos apresentar uma base para o espaço horizontal  $H_x$ ,  $x \in \pi^{-1}(U)$ , composta por vetores que consistem de levantamentos horizontais dos vetores coordenados  $\frac{\partial}{\partial \ell^i}$ . Faremos isto para deixar mais claro de onde surgem os vetores de deformação  $\eta_i$   $B$ -ortogonais aos vetores de movimentos rígidos  $\bar{\xi}_i$ .

Para determinar a base de levantamentos de vetores coordenados, vamos, primeiramente, exibir uma base apropriada para  $T_x^* \overline{M}$  cuja base dual contém a base de  $H_x$  composta pelo levantamento horizontal dos vetores coordenados  $\frac{\partial}{\partial \ell^i}$ .

Nosso primeiro passo é verificar que as formas  $\bar{\xi}^i$  e  $d\bar{\ell}^j$  são linearmente independentes. Vamos mostrar este fato mostrando que  $\bar{\xi}^i$  e  $d\bar{\ell}^j$  são ortogonais.

Podemos induzir, a partir da métrica  $B$  em  $\overline{M}$ , uma métrica  $\bar{B}$  definida no espaço dual do espaço tangente a cada ponto  $p$  de  $\overline{M}$ . Se  $\alpha$  e  $\beta$  são elementos de  $T_p^* \overline{M}$ ,  $B$  induz  $\bar{B}$  da seguinte forma [34]:

$$\bar{B}(\alpha, \beta) = B(\alpha^\sharp, \beta^\sharp). \quad (3.43)$$

Mostremos que  $\bar{\xi}^i$  e  $d\bar{\ell}^j$  são ortogonais segundo a métrica  $\bar{B}$ :

$$\bar{B}(\bar{\xi}^i, d\bar{\ell}^j) = B((\bar{\xi}^i)^\sharp, (d\bar{\ell}^j)^\sharp) = d\bar{\ell}^j(\bar{\xi}^i)^\sharp = d\bar{\ell}^j B^{is}(\tilde{\xi}_s)^\sharp, \quad (3.44)$$

agora, lembrando que  $(\tilde{\xi}_i)^\sharp = \bar{\xi}_i$  e que  $\bar{\xi}_i(p) = d/dt[p \cdot \exp(-t\xi_i)]|_{t=0}$ , temos:

$$\bar{B}(\bar{\xi}^i, d\bar{\ell}^j) = B^{is} d\bar{\ell}^j \bar{\xi}_s = \sum_s B^{is} \frac{d}{dt} \bar{\ell}^j(p \cdot \exp(-t\xi_s)) = 0, \quad (3.45)$$

pois  $\bar{\ell}$  é função  $G$ -invariante em  $\overline{M}$ . Vemos assim que  $\bar{\xi}^i \perp d\bar{\ell}^j$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, k\}$  e  $\forall j \in \{1, \dots, l\}$ . Logo, o conjunto  $\{\bar{\xi}^1(p), \dots, \bar{\xi}^k(p), d\bar{\ell}^1(p), \dots, d\bar{\ell}^l(p)\}$  é um conjunto de covetores linearmente independentes. Por dimensionalidade, este conjunto forma uma base local de  $T^* \overline{M}$ .

Definimos  $\bar{\eta}^a = (d\bar{\ell}^a)^\sharp$ . Como os  $d\bar{\ell}^a$  são LI e  $\sharp$  é um isomorfismo,  $\bar{\eta}^a$  são LI, e a matriz de Gram desses elementos será inversível. Denotamos  $A^{ab} = B(\bar{\eta}^a, \bar{\eta}^b)$ , e  $A_{ab}$  os elementos da matriz inversa a  $(A^{ab})$ . Definimos  $\bar{\eta}_a = A_{as} \bar{\eta}^s$ . Logo,  $\bar{\eta}^a = A^{as} \bar{\eta}_s$ . Como a matriz  $A_{as}$  possui posto máximo, os vetores  $\bar{\eta}_a$  são linearmente independentes. Temos que:

$$B(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_a) = B(\bar{\xi}_i, A_{as} \bar{\eta}^s) = A_{as} B(\bar{\xi}_i, (d\bar{\ell}^s)^\sharp) = A_{as} d\bar{\ell}^s(\bar{\xi}_i) = 0. \quad (3.46)$$

Logo,  $\bar{\eta}_a \perp \bar{\xi}_i$ , o que mostra que  $\{\bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_l\}$  é uma base de  $H_p$ , e que  $\{\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_k, \bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_l\}$  é um conjunto LI. Por dimensionalidade,  $\{\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_k, \bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_l\}$  é uma base do espaço tangente  $T_p \bar{M}$ . Mas observe que:

$$d\bar{\ell}^a(\bar{\eta}_b) = B((d\bar{\ell}^a)^\sharp, \bar{\eta}_b) = B(\bar{\eta}^a, \bar{\eta}_b) = A_{bs}B(\bar{\eta}^a, \bar{\eta}^s) = A_{bs}A^{as} = \delta_b^a. \quad (3.47)$$

Assim,  $\{\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_k, \bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_l\}$  é a base dual da base  $\{\bar{\xi}^1, \dots, \bar{\xi}^k, d\bar{\ell}^1, \dots, d\bar{\ell}^l\}$  de  $T_p^* \bar{M}$ .

Vimos que  $\{\bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_l\}$  é uma base de  $H_p$ . Vamos mostrar, por fim, que esta base é exatamente a base dos levantamentos horizontais dos vetores coordenados  $\frac{\partial}{\partial \ell^a}$ . Temos:

$$d\ell^a(\pi_* \bar{\eta}_b) = \pi^* d\ell^a(\bar{\eta}_b) = d\pi^* \ell^a(\bar{\eta}_b) = d\bar{\ell}^a(\bar{\eta}_b) = \delta_b^a. \quad (3.48)$$

Logo,  $\pi_* \bar{\eta}_b = \frac{\partial}{\partial \ell^b}$ . Como  $\bar{\eta}_b$  é sempre horizontal,  $\bar{\eta}_b$  é o levantamento horizontal de  $\frac{\partial}{\partial \ell^b}$ .

Assim, concluímos que, dado um conjunto de funções  $G$ -invariantes  $\{\bar{\ell}^1, \dots, \bar{\ell}^l\}$  em  $\bar{M}$ , que induzem um sistema de coordenadas  $(U, (\ell^1, \dots, \ell^l))$  em  $\bar{M}/G$ , este sistema de coordenadas determina naturalmente uma base do espaço tangente a um ponto  $p$  de  $\bar{M}$ ,  $\{\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_k, \bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_l\}$ , sendo  $\{\bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_l\}$  exatamente a base do espaço horizontal dada pelos levantamentos horizontais de  $\frac{\partial}{\partial \ell^a}$ .

### 3.3 Natação para Pequenas Deformações

Tendo obtido uma descrição geométrica da natação, vamos calcular o deslocamento gerado por ciclos pequenos de deformação. Como visto no capítulo 2, o colchete de Lie mede a não-comutatividade dos fluxos dos campos de vetores envolvidos, ou seja, mede o quanto uma curva infinitesimal, que percorre os fluxos dos campos de vetores envolvidos, se distancia do seu ponto inicial (ver figura 2.1). Consideramos dois campos de vetores  $V$  e  $W$  em  $\bar{M}/G$  com  $[V, W] = 0$  (por exemplo, os dois campos coordenados  $V = \frac{\partial}{\partial \ell^i}$  e  $W = \frac{\partial}{\partial \ell^j}$ ,  $i \neq j$ ). Desta forma, o laço infinitesimal gerado por  $V$  e  $W$  é fechado e pode ser pensado como um ciclo infinitesimal no espaço de formatos do corpo. Para seguir a notação que adotamos neste capítulo para campos horizontais em  $\bar{M}$ , denotamos por  $\eta_i$  e  $\eta_j$  os levantamentos horizontais de  $V$  e  $W$  (se  $V = \frac{\partial}{\partial \ell^i}$  e  $W = \frac{\partial}{\partial \ell^j}$  temos, da subseção anterior,  $\eta_i = \bar{\eta}_i$  e  $\eta_j = \bar{\eta}_j$ ). O comutador  $[\eta_i, \eta_j]$  não é necessariamente zero (tais vetores não são coordenados), mas sempre resulta em um vetor vertical:

$$\pi_* [\eta_i, \eta_j] = [\pi_* \eta_i, \pi_* \eta_j] = [V, W] = 0. \quad (3.49)$$

Logo,  $[\eta_i, \eta_j]$  nos dá uma medida do movimento rígido (sendo um vetor vertical) gerado pelo ciclo infinitesimal de deformações. O vetor  $[\eta_i, \eta_j]$  é uma aproximação linear do deslocamento. Ou seja, em uma expansão de Taylor do deslocamento gerado por um ciclo infinitesimal de deformações ao longo dos fluxos de  $\eta_i$  e  $\eta_j$ ,  $[\eta_i, \eta_j]$  é o termo de primeira ordem. Se  $\Delta S$  denota a área infinitesimal determinada por tal ciclo,  $[\eta_i, \eta_j] \Delta S$  é a aproximação em primeira ordem do deslocamento rígido gerado pelo ciclo de deformações.

Uma outra maneira de ver isto é através da curvatura da conexão  $\omega$ . Como  $[\eta_i, \eta_j]$  é vertical, podemos escrever  $[\eta_i, \eta_j] = A_p^\#$ , com  $A \in \mathcal{G}$ . Segue que  $\omega([\eta_i, \eta_j]) = A$ . Seja  $\Omega$  a curvatura da conexão. Pela equação de estrutura de Cartan, (equação 2.62), temos:

$$\Omega(\eta_i, \eta_j) = d\omega(\eta_i, \eta_j) + \omega(\eta_i) \wedge \omega(\eta_j). \quad (3.50)$$

Mas, por construção,  $\omega(\eta_a) = 0$ ,  $\forall a$ . Logo,  $\Omega(\eta_i, \eta_j) = d\omega(\eta_i, \eta_j)$ . Lembrando da equivalência (equação 2.40):

$$d\omega(\eta_i, \eta_j) = \eta_i(\omega(\eta_j)) - \eta_j(\omega(\eta_i)) - \omega([\eta_i, \eta_j]) = -\omega([\eta_i, \eta_j]), \quad (3.51)$$

obtemos uma relação entre a variação gerada pelo ciclo infinitesimal do formato e a curvatura da conexão:

$$\omega([\eta_i, \eta_j]) = -d\omega(\eta_i, \eta_j) = -\Omega(\eta_i, \eta_j). \quad (3.52)$$

Logo, a curvatura da conexão nos dá a medida da holonomia gerada pelo ciclo infinitesimal do formato. A seguir calculamos a curvatura da conexão.

$$d\omega(\eta_a, \eta_b) = d(-B^{js}\tilde{\xi}_s)(\eta_a, \eta_b)\xi_j = ((-dB^{js} \wedge \tilde{\xi}_s - B^{js}d\tilde{\xi}_s)(\eta_a, \eta_b)\xi_j, \quad (3.53)$$

mas, como  $\tilde{\xi}_s(\eta_a) = 0$ ,  $\forall s, a$ , temos:

$$\Omega(\eta_i, \eta_j) = d\omega(\eta_a, \eta_b) = (-B^{js}d\tilde{\xi}_s)(\eta_a, \eta_b)\xi_j. \quad (3.54)$$

Determinamos, assim, a expressão para a curvatura da conexão, que nos dá a medida da variação infinitesimal gerada por um ciclo infinitesimal no espaço dos formatos. Como um vetor arbitrário no espaço tangente a  $\bar{M}$  pode ser expresso na base  $\{\bar{\xi}_i, \eta_j\}$ , e como  $\Omega$  se anula quando aplicada a vetores verticais, a expressão acima determina completamente a 2-forma de curvatura.

Finalmente obtemos a expressão para o deslocamento infinitesimal gerado pelos campos vetoriais  $\eta_a$  e  $\eta_b$ , que denotamos por  $h$ :

$$h = \Omega(\eta_a, \eta_b)^\# = ((B^{js}d\tilde{\xi}_s)(\eta_a, \eta_b)\xi_j)^\# = -(B^{js}d\tilde{\xi}_s)(\eta_a, \eta_b)\bar{\xi}_j, \quad (3.55)$$

Observamos, assim, uma relação entre a natação gerada por uma curva pequena no espaço dos formatos, e as derivadas exteriores das formas associadas aos vetores de deslocamento rígido.

No caso do movimento rígido ser descrito pela ação de um subgrupo unidimensional de  $G$ , podemos integrar a curvatura da conexão para obter a holonomia, como vimos na seção 2.10. Neste caso, vale a equação 2.82 que não é restrita a apenas pequenas deformações. Nos exemplos a seguir vamos voltar a este ponto.

## Holonomia e Curvatura do Espaço Ambiente

Vamos agora considerar um dos principais resultados apresentados no trabalho de Avron e Kenneth [12] que é a relação entre a curvatura do espaço ambiente e a natação de pequenos nadadores gerada por ciclos infinitesimais de deformações. Para mostrar esta relação, vamos usar as coordenadas normais de Riemann, introduzidas na subseção 2.12.2. Nestas coordenadas, vimos que pode-se fazer uma descrição particularmente clara dos vetores de Killing relacionados a translações.

Definimos, para um nadador pequeno, os **momentos de multipolo**. Eles são expressos em coordenadas normais de Riemann como:

$$Q^{ij\dots k} = \sum_s m_s x_s^i x_s^j \dots x_s^k. \quad (3.56)$$

Os momentos estão bem definidos até termos de ordem menor que  $o(RL^2)$ , onde  $L$  é a dimensão linear típica do corpo e  $R$  é a curvatura escalar do espaço ambiente. Quando os primeiros momentos se anulam,  $Q^j = 0$ , dizemos que a noção aproximada de centro de massa do corpo está na origem. Adotaremos pontos que satisfazem tal propriedade como origem.

Observando a equação da natação 3.55, vemos que o deslocamento do corpo em  $M$  na direção  $\xi_j$  é dado por:

$$-(B^{js} d\tilde{\xi}_s)(\eta_a, \eta_b). \quad (3.57)$$

Assim, para analisarmos apenas a quantidade deslocada em uma direção relacionada à translação, analisamos os termos que multiplicam os vetores de deslocamento rígido relacionados à translação.

Tomamos coordenadas normais na vizinhança do corpo em torno de um ponto  $p$ , tal que a origem corresponda ao centro de massa aproximado ( $Q^j = 0$ ). Nestas coordenadas, vetores de Killing associados a translações e vetores de Killing associados a rotações são, até a ordem dominante em  $RL^2$ , mutuamente ortogonais. Como escolhemos, na origem, normalizar os vetores de Killing relacionados à translação (equação 2.117), se  $\bar{\xi}_j$  é relacionado a translação, temos (até a ordem dominante)  $B_{ij} = \delta_{ij}$  (com  $j$  fixo). Assim,  $B^{ij} = \delta^{ij}$ , de forma que o corpo se desloca na direção  $\xi_j$  por:

$$-d\tilde{\xi}_j(\eta_a, \eta_b). \quad (3.58)$$

Lembrando que:

$$d\tilde{\xi}_j = d\frac{1}{m} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\xi_j)_b = \frac{1}{m} \sum_{\alpha} m_{\alpha} d(\xi_j)_b \Big|_{x_{\alpha}} = \frac{1}{m} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \partial_l (\xi_j)_r \Big|_{x_{\alpha}} dx_{\alpha}^l \wedge dx_{\alpha}^r, \quad (3.59)$$

e usando a expressão 2.119, temos:

$$d\tilde{\xi}_j(\eta_a, \eta_b) = \frac{1}{m} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \partial_l (\xi_j)_r (\eta_a^l \eta_b^r - \eta_a^r \eta_b^l) \Big|_{x_{\alpha}} = -R_{lrij} \frac{2}{m} \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha}^i \eta_a^l \eta_b^r \Big|_{x_{\alpha}}, \quad (3.60)$$

onde o tensor de curvatura é calculado na origem.

No caso de uma variedade de dimensão 2, com dois vetores de Killing relacionados a translações,  $\xi_1$  e  $\xi_2$ , pelas relações expressas em 2.120, a quantidade transladada da direção de  $\xi_1$ ,  $\delta x^1$ , e na direção de  $\xi_2$ ,  $\delta x^2$ , são dadas por:

$$\delta x^1 = -\frac{2}{m} \left( \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha}^2 (\eta_a^1 \eta_b^2 - \eta_a^2 \eta_b^1)_{x_{\alpha}} \Delta S \right) R, \quad (3.61)$$

e

$$\delta x^2 = \frac{2}{m} \left( \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha}^1 (\eta_a^1 \eta_b^2 - \eta_a^2 \eta_b^1)_{x_{\alpha}} \Delta S \right) R, \quad (3.62)$$

onde  $R$  é a curvatura escalar do espaço ambiente e  $\Delta S$  é a área coordenada infinitesimal englobada pelo laço.

### 3.4 Exemplos

Nos exemplos abaixo, realizaremos uma análise detalhada de um corpo extenso em  $\mathbb{R}^2$ ,  $S^2$  e  $T^2 = S^1 \times S^1$  (toro imerso em  $\mathbb{R}^3$ ). Este sistema, introduzido por J. E. Avron, trata-se de um corpo de 3 massas puntiformes iguais, conectadas por duas linhas geodésicas de massa desprezível. Duas massas são conectadas por uma geodésica enquanto a outra geodésica liga a terceira massa à primeira geodésica formando um ângulo de 90 graus. Vamos nos referir a este corpo simplesmente por robô. Às linhas que ligam uma massa à outra chamamos braços, nos referindo a cada segmento de geodésica entre a massa e o ponto de encontro com a segunda linha por um braço. À linha que liga a terceira massa à primeira linha chamamos de perna do robô. Rotulamos o ponto massivo da perna como massa 3, o ponto massivo do braço que, seguindo a linha 2 até o ponto de encontro com a linha 1 a partir da massa 3 fica à direita, rotulamos por massa 1 e ao ponto massivo à esquerda de massa 2. Ilustramos este corpo na figura 3.2.

Atribuímos ao nosso robô uma configuração bem específica. O robô será capaz de realizar dois movimentos independentes apenas, o de esticar e encolher a perna e o de esticar e encolher os braços, de forma que o comprimento de um braço seja sempre igual ao do outro. Analisaremos o comportamento deste sistema em três espaços ambientes:  $\mathbb{R}^2$  (curvatura nula),  $S^2$  (curvatura positiva) e o toro  $S^1 \times S^1$  (em sua região de curvatura negativa).

Nos exemplos abaixo vamos analisar o seguinte ciclo de deformações: esticar os braços, esticar a perna, encolher os braços para seus comprimentos originais e, por fim, encolher a perna para seu comprimento original. Ilustramos este ciclo na figura 3.3.

#### 3.4.1 Robô em $\mathbb{R}^2$

O primeiro passo para analisar a natação em  $\mathbb{R}^2$  é determinar o nosso espaço de configurações  $\overline{M}$ . Vamos tratar do plano real com sua métrica usual  $g_{ij} = \delta_{ij}$ . Com essa

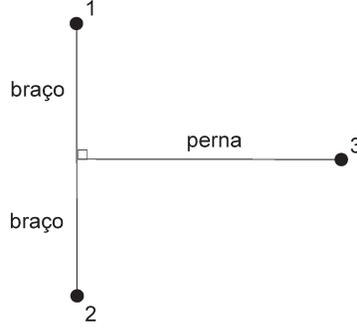


Figura 3.2: Ilustração do robô.

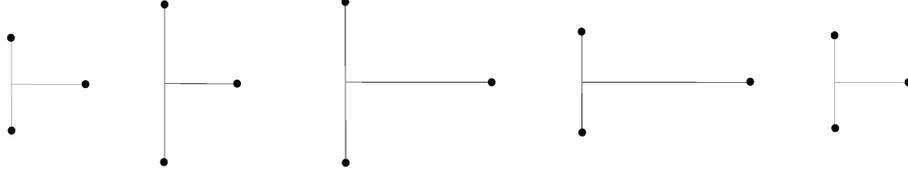


Figura 3.3: Ilustração do ciclo realizado pelo robô.

métrica,  $\mathbb{R}^2$  é uma variedade riemanniana de curvatura nula. O grupo de isometrias de  $\mathbb{R}^2$  é  $E(2)$ , o grupo euclidiano, que consiste de translações e rotações em  $\mathbb{R}^2$ . A ação de  $E(2)$  sobre  $\mathbb{R}^2$  pode ser expressa por uma rotação  $R \in SO(2)$  seguida por uma translação:  $(x, y) \mapsto R \cdot (x, y) + \mathbf{r}$ , com  $\mathbf{r} = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$ . Esta ação pode ser escrita na forma matricial se representarmos elementos de  $\mathbb{R}^2$  pela matriz coluna  $(x, y, 1)^t$ . Com isso, um elemento arbitrário de  $E(2)$  pode ser expresso da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & r_1 \\ -\sin \phi & \cos \phi & r_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.63)$$

Vemos que, na notação das seções anteriores, temos neste caso:  $M = \mathbb{R}^2$ ,  $G = E(2)$  e  $\widetilde{M} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ . Se  $g \in E(2)$  e  $p = (p_1, p_2, p_3) \in \widetilde{M}$ , a ação de  $E(2)$  sobre  $\widetilde{M}$  será  $p \cdot g = (g^{-1} \cdot p_1, g^{-1} \cdot p_2, g^{-1} \cdot p_3)$ . Se os 3 pontos massivos do nosso robô forem coincidentes, qualquer rotação em relação ao ponto massivo não altera a configuração. Se desconsiderarmos estes pontos de  $\widetilde{M}$ , a ação será livre. Temos, assim,  $\overline{M} = \widetilde{M} \setminus E$  onde  $E = \{x \in \widetilde{M} | G_x \neq \{e\}\} = \{p \in \widetilde{M} | p_1 = p_2 = p_3\}$ .

Determinado  $\bar{M}$ , vamos calcular a conexão. Para isso vamos determinar os vetores de movimento rígido, suas 1-formas  $B$ -associadas e a matriz de Gram  $B_{ij}$  dos campos vetoriais de Killing. Se usarmos coordenadas cartesianas  $\{x, y\}$ , os vetores de Killing do plano são:

$$\xi_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad (3.64)$$

relacionado a translações na direção do eixo  $x$ ,

$$\xi_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad (3.65)$$

relacionado a translações na direção do eixo  $y$  e, por fim,

$$\xi_3 = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}, \quad (3.66)$$

relacionado a rotações em relação à origem. Os vetores que descrevem os movimentos rígidos são, então:

$$\bar{\xi}_1 = \frac{1}{3} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \right), \quad (3.67)$$

$$\bar{\xi}_2 = \frac{1}{3} \left( \frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial y_2} + \frac{\partial}{\partial y_3} \right) \quad (3.68)$$

e

$$\bar{\xi}_3 = \frac{1}{3} \left( x_1 \frac{\partial}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial y_2} - y_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial y_3} - y_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right). \quad (3.69)$$

As 1-formas associadas aos campos vetoriais de movimento rígido são:

$$\tilde{\xi}_1 = \frac{1}{3} (dx_1 + dx_2 + dx_3), \quad (3.70)$$

$$\tilde{\xi}_2 = \frac{1}{3} (dy_1 + dy_2 + dy_3), \quad (3.71)$$

e

$$\tilde{\xi}_3 = \frac{1}{3} (x_1 dy_1 - y_1 dx_1 + x_2 dy_2 - y_2 dx_2 + x_3 dy_3 - y_3 dx_3). \quad (3.72)$$

Para calcular a matriz de Gram dos vetores de movimento rígido segundo o produto interno  $B$ , podemos, por exemplo, avaliar a expressão  $\tilde{\xi}_i(\tilde{\xi}_j) = B_{ij}$ . Temos:

$$(B_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3) \\ 0 & 1 & \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) \\ -\frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3) & \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) & \frac{1}{3}(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + x_3^2 + y_3^2) \end{pmatrix}. \quad (3.73)$$

A sua inversa  $(B^{ij})$  é também simétrica e, portanto, determinada por seus elementos abaixo:

$$\begin{aligned}
B^{11} &= \frac{9(-(1/9)(x_1+x_2+x_3)^2+1/3(x_1^2+x_2^2+x_3^2+y_1^2+y_2^2+y_3^2))}{2(x_1^2+x_2^2-x_2x_3+x_3^2-x_1(x_2+x_3)+y_1^2-y_1y_2+y_2^2-y_1y_3-y_2y_3+y_3^2)}, \\
B^{12} &= -\frac{((x_1+x_2+x_3)(y_1+y_2+y_3))}{(2(x_1^2+x_2^2-x_2x_3+x_3^2-x_1(x_2+x_3)+y_1^2-y_1y_2+y_2^2-y_1y_3-y_2y_3+y_3^2))}, \\
B^{13} &= \frac{3(y_1+y_2+y_3)}{2(x_1^2+x_2^2-x_2x_3+x_3^2-x_1(x_2+x_3)+y_1^2-y_1y_2+y_2^2-y_1y_3-y_2y_3+y_3^2)}, \\
B^{22} &= \frac{3x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2y_1^2-2y_1y_2+2y_2^2-2y_1y_3-2y_2y_3+2y_3^2}{2(x_1^2+x_2^2-x_2x_3+x_3^2-x_1(x_2+x_3)+y_1^2-y_1y_2+y_2^2-y_1y_3-y_2y_3+y_3^2)}, \\
B^{23} &= -\frac{3(x_1+x_2+x_3)}{2(x_1^2+x_2^2-x_2x_3+x_3^2-x_1(x_2+x_3)+y_1^2-y_1y_2+y_2^2-y_1y_3-y_2y_3+y_3^2)}, \\
B^{33} &= \frac{9}{2(x_1^2+x_2^2-x_2x_3+x_3^2-x_1(x_2+x_3)+y_1^2-y_1y_2+y_2^2-y_1y_3-y_2y_3+y_3^2)}.
\end{aligned} \tag{3.74}$$

Determinamos, assim, a conexão, de acordo com a expressão 3.38:

$$\omega = -B^{js} \tilde{\xi}_s \otimes \xi_j. \tag{3.75}$$

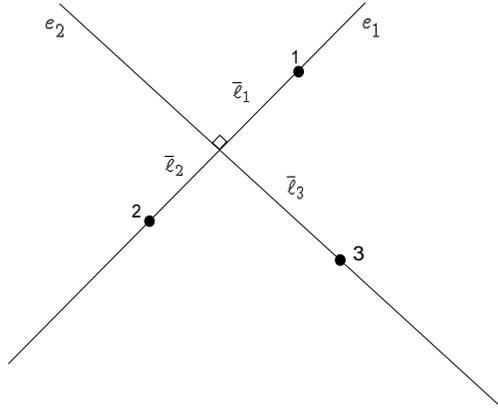


Figura 3.4: Sistema de coordenada de  $\mathbb{R}^2/E(2)$ .

Vamos agora escolher um sistema de coordenadas conveniente para o espaço quociente  $\overline{M}/E$ , de forma que possamos expressar curvas no espaço dos formatos e levantá-las para obter a natação como a holonomia destas curvas. Dados os três pontos massivos do nosso robô, traçamos uma reta que liga as massas 1 e 2, a qual chamamos eixo  $e_1$ . Traçamos outra reta que passa pela massa 3 e tangencia o eixo  $e_1$  formando um ângulo de  $90^\circ$ . Chamamos esta reta de eixo  $e_2$  e o ponto em que  $e_1$  e  $e_2$  se cruzam de origem  $O$ . A estas coordenadas atribuímos a orientação usual de  $\mathbb{R}^2$  dando o sentido positivo de  $e_1$  de forma que a massa 1 esteja sobre o semi-eixo positivo. Definimos então a coordenada  $\ell^1$  como a função induzida em  $\overline{M}/E(2)$  pela função  $\tilde{\ell}^1$ , a distância da massa 1 à origem  $O$  com sinal positivo se a coordenada  $e_1$  da massa 1 é positiva. Definimos a coordenada  $\ell^2$  como a função induzida em  $\overline{M}/E(2)$  pela função  $\tilde{\ell}^2$ , a distância entre a massa 2 e a origem  $O$  com sinal positivo se a coordenada  $e_1$  da massa 2 é negativa. Por fim, definimos a coordenda  $\ell^3$  como a função

induzida em  $\overline{M}/E(2)$  pela função  $\overline{\ell}^e$ , a distância entre a massa 3 e a origem  $O$  com sentido positivo se a coordenada  $e_2$  da massa 3 é positiva.

O conjunto de funções  $\{\ell^1, \ell^2, \ell^3\}$  forma um sistema de coordenadas para o aberto que compreende o interior do seu quadrante positivo  $\{(\ell^1, \ell^2, \ell^3) | \ell^1 > 0, \ell^2 > 0, \ell^3 > 0\}$ , que é justamente onde nosso robô realiza seus movimentos. Neste sistema de coordenadas, o ciclo de deformação do nosso robô é dado pela curva:

$$\gamma(t) = \begin{cases} (b + at, b + at, p) & \text{se } 0 \leq t < 1, \\ (b + a, b + a, p + l(t - 1)) & \text{se } 1 \leq t < 2, \\ (b + a - (t - 2)a, b + a - (t - 2)a, p + l) & \text{se } 2 \leq t < 3, \\ (b, b, p + l - (t - 3)l) & \text{se } 3 \leq t \leq 4, \end{cases} \quad (3.76)$$

e os campos vetoriais tangentes a esta curva são:

$$\begin{aligned} v_1 &= a\partial_{\ell^1} + a\partial_{\ell^2} & \text{se } 0 \leq t < 1, \\ v_2 &= l\partial_{\ell^3} & \text{se } 1 \leq t < 2, \\ -v_1 & & \text{se } 2 \leq t < 3, \\ -v_2 & & \text{se } 3 \leq t \leq 4. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Como sabemos qual é a conexão, podemos determinar o levantamento horizontal  $\tilde{\gamma}$  da curva  $\gamma$  da maneira descrita na subseção 2.8. Escrevendo  $\tilde{\gamma}(t) = \sigma(\gamma(t)) \cdot g(t)$ , onde  $\sigma$  é uma seção do fibrado principal e  $g(t)$  é uma curva no grupo estrutural com  $g(0) = e$ , a equação do levantamento para grupo de matrizes é (equação 2.70):

$$\dot{g}(t) = -A(\dot{\gamma}(t))g(t), \quad (3.78)$$

onde  $\dot{\gamma}(t) = v^i \frac{\partial}{\partial \ell^i}$  e  $\sigma^*\omega = A$ .

Consideremos a seguinte a seção  $\sigma$  definida no quadrante positivo do espaço dos formatos (aqui expressa, por simplicidade, diretamente em coordenadas):

$$\sigma(\ell^1, \ell^2, \ell^3) = (0, \ell^1, 0, -\ell^2, \ell^3, 0). \quad (3.79)$$

Fazendo o pullback da conexão por esta seção, se escrevermos a conexão na forma  $\omega = \sum_i \omega_i \otimes \xi_i$ , obtemos  $A = \sum_i A_i \otimes \xi_i$ :

$$A_1 = \sigma^*\omega_1 = \frac{-3d\ell^3((\ell^1)^2 + (\ell^2)^2) + (d\ell^1 - d\ell^2)(\ell^1 - \ell^2)\ell^3 - 2d\ell^3(\ell^3)^2}{6((\ell^1)^2 + \ell^1\ell^2 + (\ell^2)^2 + (\ell^3)^2)}, \quad (3.80)$$

$$A_2 = \sigma^*\omega_2 = \frac{d\ell^3(\ell^1 - \ell^2)\ell^3 - (d\ell^1 - d\ell^2)(2((\ell^1)^2 + \ell^1\ell^2 + (\ell^2)^2) + 3(\ell^3)^2)}{6((\ell^1)^2 + \ell^1\ell^2 + (\ell^2)^2 + (\ell^3)^2)}, \quad (3.81)$$

$$A_3 = \sigma^*\omega_3 = \frac{d\ell^3(-\ell^1 + \ell^2) + (d\ell^1 - d\ell^2)\ell^3}{2((\ell^1)^2 + \ell^1\ell^2 + (\ell^2)^2 + (\ell^3)^2)}. \quad (3.82)$$

Podemos agora calcular  $g(t)$ . Temos de 3.78:

$$A_{\gamma(t)}(v_1) = 0, \quad (3.83)$$

para  $0 \leq t < 1$ . Logo  $\frac{d}{dt}g(t) = 0$  neste intervalo e, assim,  $g(t) = e$  para o trecho  $0 \leq t < 1$ . No próximo trecho temos

$$A_{\gamma(t)}(v_2) = -\frac{l}{3}\xi_1, \quad (3.84)$$

para  $1 \leq t < 2$ . Neste intervalo de tempo, a ação se dá por um grupo unidimensional (abeliano), já que a equação diferencial acima é unidimensional. Desta forma, podemos proceder como explicado na seção 2.10, propondo a forma  $g(t) = e^{\alpha(t)\xi_1}$  e usando a equação 2.78 para determinar o  $\alpha$  e, conseqüentemente, a curva em  $\text{Iso}(\mathbb{R}^2)$  que realiza o levantamento.

Neste contexto,  $\xi_1$  pode ser entendido como o gerador de translação na direção  $\partial/\partial x$  na variedade ambiente, e a exponencial de  $\alpha(t)\xi_1$  seria a translação de  $\alpha(t)$  ao longo do eixo  $x$ . Uma outra maneira de entender a exponencial, neste caso, é como uma exponencial de matriz. Existe um isomorfismo de álgebras de Lie que relaciona  $\xi_1$  com a matriz da álgebra de Lie de  $E(2)$ ,  $e(2)$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.85)$$

A exponencial da matriz acima multiplicada por  $\alpha(t)$  é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.86)$$

que é justamente o elemento de  $E(2)$  relacionado a translação por  $\alpha(t)$  ao longo do eixo  $x$ .

Prosseguindo com os nossos cálculos, temos:

$$\frac{d}{dt}\alpha(t) = \frac{l}{3}, \quad (3.87)$$

com a condição inicial  $g(1) = e$ , de onde segue que  $\alpha(1) = 0$ . Obtemos, assim, a solução:

$$\alpha(t) = \frac{l}{3}(t-1), \quad (3.88)$$

para  $1 \leq t < 2$ . Logo,  $g(t) = e^{\frac{l}{3}(t-1)\xi_1}$  para o intervalo  $1 \leq t < 2$ .

Podemos, da mesma forma, determinar  $g(t)$  no intervalo  $2 \leq t < 3$ . Aplicando  $A$  ao vetor velocidade da curva para este intervalo,  $-v_1$ , temos:

$$A_{\gamma(t)}(-v_1) = 0. \quad (3.89)$$

A condição inicial é dada pelo trecho anterior:

$$g(2) = e^{\frac{l}{3}\xi_1}. \quad (3.90)$$

A solução da EDO para  $\alpha$  é, obviamente, constante, e temos:

$$g(t) = e^{\frac{l}{3}\xi_1}, \quad (3.91)$$

para  $2 \leq t < 3$ .

Finalmente, para  $3 \leq t \leq 4$ , aplicamos a conexão  $A$  ao vetor velocidade da curva neste intervalo,  $-v_2$ :

$$A_{\gamma(t)}(-v_2) = \frac{l}{3}. \quad (3.92)$$

Analogamente ao caso  $1 \leq t < 2$ , temos que resolver a equação diferencial:

$$\frac{d}{dt}\alpha(t) = -\frac{l}{3}, \quad (3.93)$$

com as condições iniciais

$$g(3) = e^{\frac{l}{3}\xi_1}, \quad (3.94)$$

de onde segue que:

$$\alpha(3) = \frac{l}{3}. \quad (3.95)$$

A solução será:

$$\alpha(t) = \frac{l}{3}(4-t), \quad (3.96)$$

para  $3 \leq t \leq 4$ . Logo,  $g(t) = e^{\frac{l}{3}(4-t)\xi_1}$ . Desta forma, vemos que:

$$g(4) = e,$$

ou seja, a holonomia é nula. Não observamos natação em  $\mathbb{R}^2$ , como era de se esperar pela discussão no início deste capítulo.

Levando em consideração que nossa ação se dá por

$$(p_1, p_2, p_3) \cdot g = (g^{-1}(p_1), g^{-1}(p_2), g^{-1}(p_3)),$$

onde  $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}^2$ , o levantamento horizontal de  $\gamma$  é:

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} (0, b + at, 0, -b - at, p, 0), & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ (-\frac{l}{3}(t-1), b + a, -\frac{l}{3}(t-1), -b - a, p + \frac{2}{3}l(t-1), 0), & \text{se } 1 \leq t < 2 \\ (-\frac{l}{3}, b + a(3-t), -\frac{l}{3}, -b - a(3-t), p + \frac{2}{3}l, 0), & \text{se } 2 \leq t < 3 \\ (-\frac{l}{3}(4-t), b, -\frac{l}{3}(4-t), -b, p + \frac{2}{3}l(4-t), 0), & \text{se } 3 \leq t \leq 4 \end{cases}. \quad (3.97)$$

Note que, devido à simetria do robô, o grupo de isometria age nesta configuração de partículas apenas através de seu subgrupo abeliano gerado por  $\xi_1$ . Desta forma, podemos obter a holonomia integrando a curvatura da conexão, como explicado na seção 2.10, através do teorema de Stokes. Antes disso, façamos a seguinte mudança de variáveis:

$$e = \ell^1 + \ell^2, \quad s = \ell^1 - \ell^2, \quad (3.98)$$

de forma que:

$$\ell^1 = \frac{e + s}{2}, \quad \ell^2 = \frac{e - s}{2}. \quad (3.99)$$

Nestas coordenadas, o movimento realizado se limita ao plano  $s = 0$ .

Nas coordenadas  $\{e, s, \ell^3\}$ , a curvatura será dada por<sup>5</sup>  $\Omega = f_{es}de \wedge ds + f_{e\ell^3}de \wedge d\ell^3 + f_{s\ell^3}ds \wedge d\ell^3$ . Como o movimento descrito pelo robô se dá em  $s$  constante,  $ds = 0$ , e o integrando se resumirá à  $f_{e\ell^3}de \wedge d\ell^3$ . Calculando a curvatura usando a equação estrutural, temos que  $f_{e\ell^3} = 0$ . Assim, o integrando é nulo, e não observamos holonomia.

O resultado está em concordância com o cálculo que fizemos anteriormente. No entanto, integrando diretamente a curvatura, obtemos a holonomia resultante das deformações, e não a expressão analítica da evolução temporal do movimento, a qual obtemos com o levantamento da curva que descreve o movimento no espaço dos formatos.

### 3.4.2 Robô em $S^2$

Para tratar do caso do nosso robô em  $S^2$ , usaremos coordenadas esféricas  $\{r, \theta, \phi\}$ . Aqui  $\theta$  é o ângulo do vetor posição com o eixo  $z$ , sendo  $\theta = 0$  quando o raio for paralelo ao sentido positivo do eixo  $z$ , e  $\phi$  é o ângulo entre a projeção do vetor raio no eixo  $xy$  e o semi-eixo positivo de  $x$ , com valores positivos para rotações no sentido anti-horário quando olhamos o plano  $xy$  da região em que  $z > 0$  (figura 3.5). A métrica usual nessas coordenadas para a esfera de raio  $r$  é:

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (3.100)$$

Vamos determinar o nosso espaço de configurações. Tomando  $S^2$  mergulhado em  $\mathbb{R}^3$ ,  $S^2 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$ , o grupo de isometrias de  $S^2$  é  $SO(3)$ . Segundo a notação das seções anteriores,  $\widetilde{M} = S^2 \times S^2 \times S^2$  e, dado  $u = (u_1, u_2, u_3) \in \widetilde{M}$ , a ação de  $s \in SO(3)$  sobre  $u$  é:  $u \cdot s = (s^{-1}(u_1), s^{-1}(u_2), s^{-1}(u_3))$ . Quando tratamos de 3 partículas na esfera, a ação descrita não é livre apenas no caso em que as três partículas coincidem, ou se duas delas coincidirem e a outra estiver diametralmente oposta às duas primeiras na esfera. A configuração do nosso robô não deve admitir nenhum ponto de  $\widetilde{M}$  para o qual a ação não é livre. Tirando todas as possíveis configurações desses casos, obtemos  $\overline{M}$ .

---

<sup>5</sup>Até agora, quando tratamos de formas  $\mathcal{G}$  valorizadas, utilizamos a forma  $\alpha = \sum_i \alpha_i \otimes e_i$ , onde  $e_i$  é um elemento de uma base de  $\mathcal{G}$ . No entanto podemos, equivalentemente, escrever uma  $r$ -forma  $\alpha$  como  $\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_r} f_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$ , onde  $f_{i_1 \dots i_r}$  é uma função  $\mathcal{G}$  valorizada.

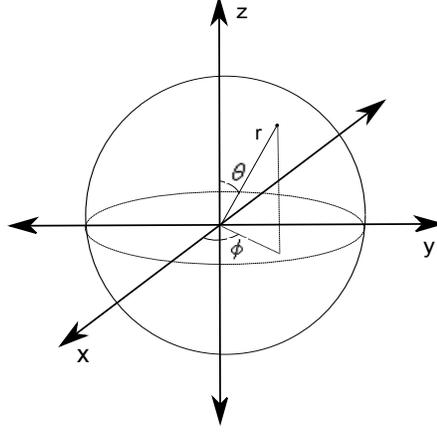


Figura 3.5: Parametrização da esfera.

Agora, para determinar a conexão, vamos determinar quais são os vetores de deslocamento rígidos, as suas 1-formas  $B$ -associadas e a matriz  $B^{ij}$ . Os vetores de Killing da esfera são [25]:

$$\xi_1 = \sin \phi \partial_\theta + \cot \theta \cos \phi \partial_\phi, \quad (3.101)$$

que está relacionado a rotações sobre o eixo  $x$ ,

$$\xi_2 = -\cos \phi \partial_\theta + \cot \theta \sin \phi \partial_\phi, \quad (3.102)$$

que está relacionado a rotações sobre o eixo  $y$ , e

$$\xi_3 = \partial_\phi, \quad (3.103)$$

que está relacionado a rotações sobre o eixo  $z$ .

Os campos vetoriais que descrevem movimentos rígidos em  $\bar{M}$  são, desta forma:

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_1 = & \sin \phi_1 \partial_{\theta_1} + \cot \theta_1 \cos \phi_1 \partial_{\phi_1} + \sin \phi_2 \partial_{\theta_2} + \\ & \cot \theta_2 \cos \phi_2 \partial_{\phi_2} + \sin \phi_3 \partial_{\theta_3} + \cot \theta_3 \cos \phi_3 \partial_{\phi_3}, \end{aligned} \quad (3.104)$$

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_2 = & -\cos \phi_1 \partial_{\theta_1} + \cot \theta_1 \sin \phi_1 \partial_{\phi_1} - \cos \phi_2 \partial_{\theta_2} + \\ & \cot \theta_2 \sin \phi_2 \partial_{\phi_2} - \cos \phi_3 \partial_{\theta_3} + \cot \theta_3 \sin \phi_3 \partial_{\phi_3}, \end{aligned} \quad (3.105)$$

e, por fim,

$$\bar{\xi}_3 = \partial_{\phi_1} + \partial_{\phi_2} + \partial_{\phi_3}. \quad (3.106)$$

As 1-formas associadas a estes campos vetorias são:

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_1 = \frac{r^2}{3} & (\sin \phi_1 d\theta_1 + \sin \theta_1 \cos \theta_1 \cos \phi_1 d\phi_1 + \sin \phi_2 d\theta_2 + \\ & \sin \theta_2 \cos \theta_2 \cos \phi_2 d\phi_2 + \sin \phi_3 d\theta_3 + \sin \theta_3 \cos \theta_3 \cos \phi_3 d\phi_3), \end{aligned} \quad (3.107)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_2 = \frac{r^2}{3} & (-\cos \phi_1 d\theta_1 + \sin \theta_1 \cos \theta_1 \sin \phi_1 d\phi_1 - \cos \phi_2 d\theta_2 + \\ & \sin \theta_2 \cos \theta_2 \sin \phi_2 d\phi_2 - \cos \phi_3 d\theta_3 + \sin \theta_3 \cos \theta_3 \sin \phi_3 d\phi_3), \end{aligned} \quad (3.108)$$

e

$$\tilde{\xi}_3 = \frac{r^2}{3} (\sin(\theta_1)^2 d\phi_1 + \sin(\theta_2)^2 d\phi_2 + \sin(\theta_3)^2 d\phi_3). \quad (3.109)$$

A matriz de Gram dos vetores de deslocamento rígido segundo o produto interno  $B$ ,  $(B_{ij})$ , é simétrica e, portanto, determinada pelos elementos:

$$\begin{aligned} B_{11} &= \frac{r^2}{3} (1 - \cos(\phi_1)^2 \sin(\theta_1)^2 + 1 - \cos(\phi_2)^2 \sin(\theta_2)^2 + 1 - \cos(\phi_3)^2 \sin(\theta_3)^2), \\ B_{12} &= -\frac{1}{2} \frac{r^2}{3} (\sin(2\phi_1) \sin(\theta_1)^2 + \sin(2\phi_2) \sin(\theta_2)^2 + \sin(2\phi_3) \sin(\theta_3)^2), \\ B_{13} &= \frac{1}{2} \frac{r^2}{3} (\sin(2\theta_1) \cos(\phi_1) + \sin(2\theta_2) \cos(\phi_2) + \sin(2\theta_3) \cos(\phi_3)), \\ B_{22} &= \frac{r^2}{3} (1 - \sin(\phi_1)^2 \sin(\theta_1)^2 + 1 - \sin(\phi_2)^2 \sin(\theta_2)^2 + 1 - \sin(\phi_3)^2 \sin(\theta_3)^2), \\ B_{23} &= \frac{1}{2} \frac{r^2}{3} (\sin(2\theta_1) \sin(\phi_1) + \sin(2\theta_2) \sin(\phi_2) + \sin(2\theta_3) \sin(\phi_3)), \\ B_{33} &= \frac{r^2}{3} (\sin(\theta_1)^2 + \sin(\theta_2)^2 + \sin(\theta_3)^2). \end{aligned} \quad (3.110)$$

Os elementos da inversa da matriz de Gram  $(B^{ij})$  são muito extensos e seria um trabalho pouco frutífero apresentá-los aqui. Logo, vamos omiti-los. No entanto, pode-se facilmente inverter a matriz  $B_{ij}$  acima usando algum software apropriado, como o Mathematica, por exemplo.

Precisamos agora escolher um sistema de coordenadas para o espaço quociente  $\overline{M}/SO(3)$  (espaço dos formatos). Para tanto, traçamos a geodésica que liga a massa 1 à massa 2. A essa geodésica chamamos  $e_1$ . Traçamos uma geodésica que passa pela massa 3 e que cruza  $e_1$  formando um ângulo de  $90^\circ$ . A essa geodésica chamamos  $e_2$ .  $e_1$  e  $e_2$  se encontram em 2 pontos diametralmente opostos. Ao ponto de encontro entre  $e_1$  e  $e_2$  mais próximo da massa 1 chamamos a origem  $O$ , e ao mais distante chamamos  $O'$ . Ao meridiano que liga  $O$  e  $O'$  no qual se encontra a massa 1, chamamos  $e_{1+}$ , e ao seu meridiano complementar,  $e_{1-}$ . A partir de  $e_{1+}$  se rodarmos a esfera  $90^\circ$  no eixo  $OO'$  no sentido anti-horário olhando a esfera para o ponto  $O$ , chegamos ao meridiano de  $e_2$  que chamaremos  $e_{2+}$ , e a seu meridiano complementar chamaremos  $e_{2-}$ . A figura 3.6 ilustra tal construção.

A coordenada  $\ell^1$  será a função induzida em  $\overline{M}/SO(3)$  pela função  $\bar{\ell}^1$ , que é a distância da massa 1 à origem  $O$ , sempre com sinal positivo. A coordenada  $\ell^2$  será a função induzida em  $\overline{M}/SO(3)$  pela função  $\bar{\ell}^2$ , que é a distância da massa 2 à origem com o sinal negativo se ela estiver no mesmo meridiano  $e_{1+}$  e com sinal positivo se no meridiano  $e_{1-}$ . A coordenada

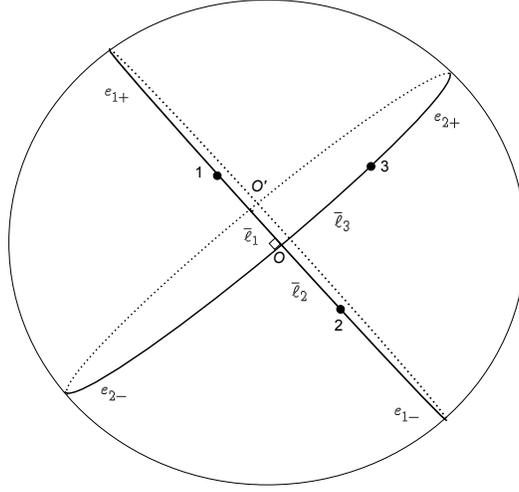


Figura 3.6: Sistema de coordenadas de  $\overline{M}/SO(3)$ .

$\ell^3$  será a função induzida em  $\overline{M}/SO(3)$  pela função  $\bar{\ell}^3$ , que é a distância entre  $O$  e a massa 3, com sinal positivo se a massa 3 estiver sobre  $e_{2+}$ , e com sinal negativo se a massa estiver no seu meridiano complementar de  $e_2$ ,  $e_{2-}$ .

Desta forma definimos um sistema de coordenadas bastante conveniente para o aberto  $U = \{(\ell^1, \ell^2, \ell^3) | 0 < \ell^1 < (\pi r)/2, 0 < \ell^2 < (\pi r)/2, 0 < \ell^3 < (\pi r)/2\}$ , que é onde nosso robô realiza seus movimentos. A curva que descreve o ciclo de deformações do robô nessas coordenadas é:

$$\gamma(t) = \begin{cases} (b + at, b + at, p) & \text{se } 0 \leq t < 1, \\ (b + a, b + a, p + l(t - 1)) & \text{se } 1 \leq t < 2, \\ (b + a - (t - 2)a, b + a - (t - 2)a, p + l) & \text{se } 2 \leq t < 3, \\ (b, b, p + l - (t - 3)l) & \text{se } 3 \leq t \leq 4, \end{cases} \quad (3.111)$$

com vetor velocidade dado por:

$$\begin{aligned} v_1 &= a\partial_{\ell^1} + a\partial_{\ell^2} & \text{se } 0 \leq t < 1, \\ v_2 &= l\partial_{\ell^3} & \text{se } 1 \leq t < 2, \\ -v_1 & & \text{se } 2 \leq t < 3, \\ -v_2 & & \text{se } 3 \leq t \leq 4. \end{aligned} \quad (3.112)$$

Definamos ainda a seção

$$\sigma(\ell^1, \ell^2, \ell^3) = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\ell^1}{r}, 0, \frac{\pi}{2} + \frac{\ell^2}{r}, 0, \frac{\pi}{2}, \frac{\ell^3}{r}\right), \quad (3.113)$$

que será usada para obter o levantamento horizontal  $\tilde{\gamma}(t) = \sigma(\gamma(t))g(t)$  de  $\gamma(t)$ . Escrevendo a conexão como  $\omega = \sum_{i=1}^3 \omega_i \otimes \xi_i$ , temos imediatamente que

$$\sigma^* \omega_i = f_i / Q_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (\text{sem soma em } i),$$

onde:

$$f_1 = 2(d\ell^3(5 + \cos(\frac{2\ell^3}{r}))(\sin(\frac{2\ell^1}{r}) - \sin(\frac{2\ell^2}{r})) - (d\ell^1 - d\ell^2)(4 + \cos(\frac{2\ell^1}{r}) + \cos(\frac{2\ell^2}{r})) \sin(\frac{2\ell^3}{r})), \quad (3.114)$$

$$Q_1 = r(-5 + \cos(\frac{2\ell^3}{r}))(\sin(\frac{2\ell^1}{r}) - \sin(\frac{2\ell^2}{r}))^2 + 2(1 + \cos(\frac{\ell^1}{r})^2 + \cos(\frac{\ell^2}{r})^2) \times \\ \times (-5 + \cos(\frac{2\ell^3}{r}))(-3 + \cos(\frac{2\ell^1}{r}) + \cos(\frac{2\ell^2}{r}) + \cos(\frac{2\ell^3}{r})) - \sin(\frac{2\ell^3}{r})^2), \quad (3.115)$$

$$f_2 = 2((d\ell^1 - d\ell^2)(\cos(\frac{2\ell^1}{r}) + \cos(\frac{2\ell^2}{r}) + 2(-5 + \cos(\frac{2(\ell^1 + \ell^2)}{r}))) + \\ + (d\ell^1 - d\ell^2)(4 + \cos(\frac{2\ell^1}{r}) + \cos(\frac{2\ell^2}{r})) \cos(\frac{2\ell^3}{r}) + \\ + d\ell^3(\sin(\frac{2\ell^1}{r}) - \sin(\frac{2\ell^2}{r})) \sin(\frac{2\ell^3}{r})), \quad (3.116)$$

$$Q_2 = r(-5 + \cos(\frac{2\ell^3}{r}))(\sin(\frac{2\ell^1}{r}) - \sin(\frac{2\ell^2}{r}))^2 + 2(1 + \cos(\frac{\ell^1}{r})^2 + \cos(\frac{\ell^2}{r})^2) \times \\ \times (-5 + \cos(\frac{2\ell^3}{r}))(-3 + \cos(\frac{2\ell^1}{r}) + \cos(\frac{2\ell^2}{r}) + \cos(\frac{2\ell^3}{r})) - \sin(\frac{2\ell^3}{r})^2), \quad (3.117)$$

$$f_3 = 2(d\ell^3(-14 + 5 \cos(\frac{2\ell^1}{r}) + 5 \cos(\frac{2\ell^2}{r}) + (2 + \cos(\frac{2\ell^1}{r}) + \cos(\frac{2\ell^2}{r})) \times \\ \times \cos(\frac{2\ell^3}{r})) + (d\ell^1 - d\ell^2)(\sin(\frac{2\ell^1}{r}) - \sin(\frac{2\ell^2}{r})) \sin(\frac{2\ell^3}{r})) \quad (3.118)$$

e

$$Q_3 = r(-5 + \cos(\frac{2\ell^3}{r}))(\sin(\frac{2\ell^1}{r}) - \sin(\frac{2\ell^2}{r}))^2 + 2(1 + \cos(\frac{\ell^1}{r})^2 + \cos(\frac{\ell^2}{r})^2) \times \\ \times (-5 + \cos(\frac{2\ell^3}{r}))(-3 + \cos(\frac{2\ell^1}{r}) + \cos(\frac{2\ell^2}{r}) + \cos(\frac{2\ell^3}{r})) - \sin(\frac{2\ell^3}{r})^2). \quad (3.119)$$

Resta-nos determinar a curva  $g(t)$  em  $SO(3)$  através da EDO 2.70. Procedendo como no exemplo anterior, e denotando novamente  $A = \sigma^* \omega$ , obtemos

$$A_{\gamma(t)}(v_1) = 0, \quad (3.120)$$

para  $0 \leq t < 1$ . Logo:

$$\frac{d}{dt}g(t) = 0. \quad (3.121)$$

Com a condição inicial  $g(0) = e$ , a solução da EDO é  $g(t) = e$ , para  $0 \leq t < 1$ . Para o intervalo  $1 \leq t < 2$ , temos

$$A_{\gamma(t)}(v_2) = -\frac{l}{r(2 + \cos(\frac{2(a+b)}{r}))} \xi_3. \quad (3.122)$$

Neste intervalo de tempo, a ação se dá por um grupo unidimensional (abeliano), já que a equação diferencial é unidimensional. Desta forma, podemos proceder como explicado na seção 2.10, propondo a forma  $g(t) = e^{\alpha(t)\xi_3}$  e usando a equação 2.78 para determinar o  $\alpha$  e, conseqüentemente, a curva no grupo de isometrias que realiza o levantamento.

Neste contexto,  $\xi_3$  pode ser entendido como o gerador de rotação da esfera em relação ao eixo  $z$ , e a exponencial de  $\alpha(t)\xi_3$  seria a rotação pelo ângulo  $\alpha(t)$  em relação ao eixo  $z$ . Uma outra maneira de entender a exponencial, neste caso, é como uma exponencial de matriz. Existe um isomorfismo de álgebras de Lie que relaciona  $\xi_3$  com a matriz da álgebra de Lie de  $SO(3)$ ,  $so(3)$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.123)$$

A exponencial da matriz acima multiplicada por  $\alpha(t)$  é:

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha(t)) & \sin(\alpha(t)) & 0 \\ -\sin(\alpha(t)) & \cos(\alpha(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.124)$$

que é justamente o elemento de  $SO(3)$  relacionado a rotação pelo ângulo  $\alpha(t)$  em relação ao eixo  $z$ .

A equação diferencial que determina  $\alpha(t)$  neste trecho é:

$$\frac{d}{dt}\alpha(t) = \frac{l}{r(2 + \cos(\frac{2(a+b)}{r}))}, \quad (3.125)$$

com condição inicial dada por  $g(1) = e$ , de onde segue que  $\alpha(1) = 0$ . A solução desta EDO é:

$$\alpha(t) = \frac{l}{r(2 + \cos(\frac{2(a+b)}{r}))}(t - 1), \quad (3.126)$$

para  $1 \leq t < 2$ , de onde temos  $g(t) = \exp\left[\frac{l}{r(2 + \cos(\frac{2(a+b)}{r}))}(t - 1)\xi_3\right]$ .

Para determinarmos a equação diferencial de  $g(t)$ , no intervalo  $2 \leq t < 3$ , aplicamos a conexão no vetor velocidade de  $\gamma$ :

$$A_{\gamma(t)}(-v_1) = 0. \quad (3.127)$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}g(t) = 0, \quad (3.128)$$

e assim  $g(t)$  é constante para  $2 \leq t < 3$ .

Finalmente, para determinarmos a equação diferencial de  $g(t)$  no intervalo  $3 \leq t \leq 4$ , aplicamos a conexão no vetor velocidade de  $\gamma$  neste intervalo:

$$A_{\gamma(t)}(-v_2) = \frac{l}{r(2 + \cos(\frac{2b}{r}))} \xi_3. \quad (3.129)$$

Obtemos, portanto, a seguinte equação para  $\alpha$ :

$$\frac{d}{dt}\alpha(t) = -\frac{l}{r(2 + \cos(\frac{2b}{r}))}, \quad (3.130)$$

com a condição inicial:

$$\alpha(3) = \frac{l}{r(2 + \cos(\frac{2(a+b)}{r}))}. \quad (3.131)$$

A solução desta equação diferencial com condição inicial será:

$$\alpha(t) = -\frac{l}{r(2 + \cos(\frac{2b}{r}))}(t - 3) + \frac{l}{r(2 + \cos(\frac{2(a+b)}{r}))}. \quad (3.132)$$

Observamos, assim, que  $g(4)$  se trata de uma rotação sobre o eixo  $z$  pelo ângulo:

$$-\frac{l}{r(2 + \cos(\frac{2b}{r}))} + \frac{l}{r(2 + \cos(\frac{2(a+b)}{r}))}. \quad (3.133)$$

A ação de  $s \in \text{Iso}(S^2)$  sobre  $u \in \overline{M}$  é:  $u \cdot s = (s^{-1}(u_1), s^{-1}(u_2), s^{-1}(u_3))$ . Logo observamos, ao final do ciclo de deformações, um movimento rígido dado pela adição na coordenada  $\phi$  do ângulo:

$$\frac{l}{r(2 + \cos(\frac{2b}{r}))} - \frac{l}{r(2 + \cos(\frac{2(a+b)}{r}))}. \quad (3.134)$$

Ou seja, observa-se o efeito swimming. Observe também que o ângulo resultante é negativo já que  $\pi/2 > (a + b)/r > b/r > 0$ .

Novamente, devido à simetria deste exemplo, o grupo de isometria age aqui através de seu subgrupo abeliano gerado por  $\xi_3$ . Assim, como explicado na seção 2.10, podemos

novamente usar o teorema de Stokes e obter a holonomia através da integração da curvatura na área determinada pelo laço das deformações. Consideremos novamente a transformação de coordenadas:

$$e = \ell^1 + \ell^2, \quad s = \ell^1 - \ell^2, \quad (3.135)$$

de forma que:

$$\ell^1 = \frac{e + s}{2}, \quad \ell^2 = \frac{e - s}{2}. \quad (3.136)$$

Nestas coordenadas, o movimento realizado se limita ao plano  $s = 0$ . A curvatura, sendo uma 2-forma, pode ser escrita como  $\Omega = f_{es}de \wedge ds + f_{e\ell^3}de \wedge d\ell^3 + f_{s\ell^3}ds \wedge d\ell^3$ . Como o movimento descrito pelo robô se dá em  $s$  constante,  $ds = 0$ , o integrando se resumirá à  $f_{e\ell^3}de \wedge d\ell^3$ . Calculando a curvatura usando a equação estrutural, temos que:

$$f_{e\ell^3} = -\frac{\sin(\frac{e}{r})}{r^2 (2 + \cos(\frac{e}{r}))^2} \xi_3. \quad (3.137)$$

Integrando o coeficiente da forma sobre a área  $A$  determinada pelo laço da deformação, temos que:

$$\int_A f_{e\ell^3}de \wedge d\ell^3 = \int_A f_{e\ell^3}ded\ell^3 = \int_p^{p+l} d\ell^3 \int_{2b}^{2(b+a)} de \left( -\frac{\sin(\frac{e}{r})}{r^2 (2 + \cos(\frac{e}{r}))^2} \right). \quad (3.138)$$

O resultado da integral acima é:

$$\frac{l}{r(2 + \cos(\frac{2b}{r}))} - \frac{l}{r(2 + \cos(\frac{2(a+b)}{r}))}. \quad (3.139)$$

Pela equação 2.82, temos, então, que  $g(4) = \exp\left[-\frac{l}{r(2 + \cos(\frac{2b}{r}))} + \frac{l}{r(2 + \cos(\frac{2(a+b)}{r}))}\right] \xi_3$ , a ação resulta na rotação em relação a  $z$  pelo ângulo  $\frac{l}{r(2 + \cos(\frac{2b}{r}))} - \frac{l}{r(2 + \cos(\frac{2(a+b)}{r}))}$ . Este é exatamente o resultado que obtivemos com o cálculo que fizemos anteriormente. No entanto, observamos novamente que, integrando diretamente a curvatura, obtemos a holonomia resultante das deformações e não a expressão analítica da evolução temporal do movimento.

### 3.4.3 Robô no Toro

Para parametrizar o toro, usaremos duas coordenadas angulares  $\{\theta, \phi\}$  com os raios maior e menor fixos  $a$  e  $b$ .  $\theta$  é o ângulo entre o raio  $a$  e o semi-eixo positivo de  $x$  no plano  $xy$ , com valores positivos para rotações no sentido anti-horário, quando olhamos o plano  $xy$  da região em que  $z > 0$ .  $\phi$  é o angulo do raio  $b$  com o raio  $a$ , sendo  $\phi = 0$  quando o raio  $b$  for paralelo ao raio  $a$  com sentidos opostos e o sentido positivo de  $\phi$  é o das rotações no sentido horário quando tomamos a seção do toro sobre o plano  $xz$  e olhamos para o círculo no semi-eixo positivo de  $x$  de uma região de  $y < 0$ .

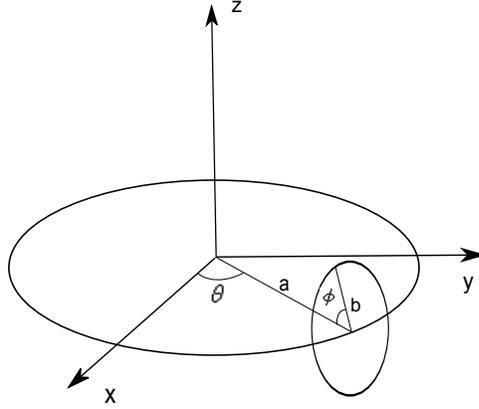


Figura 3.7: Parametrização do toro.

A métrica de acordo com essa parametrização é:

$$\begin{pmatrix} (a - b \cos \phi)^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} \quad (3.140)$$

O primeiro passo para a análise do nosso robô no toro, que denotamos por  $T^2 = S^1 \times S^1$ , é determinar  $\overline{M}$ . Enxergando o toro mergulhado em  $\mathbb{R}^3$ , seu grupo de isometrias será o grupo de rotações sobre o eixo  $z$ , que denotaremos por  $R_z$ . Temos então, segundo a notação das seções anteriores,  $M = T^2$ ,  $\widetilde{M} = T^2 \times T^2 \times T^2$  e  $G = R_z$ . Se  $s \in R_z$  e  $u = (u_1, u_2, u_3) \in \widetilde{M}$ , a ação de  $R_z$  em  $\widetilde{M}$  se dá por  $u \cdot s = (s^{-1}(u_1), s^{-1}(u_2), s^{-1}(u_3))$ . Essa ação é livre em  $\widetilde{M}$  e, portanto,  $\overline{M} = \widetilde{M}/G$ .

Determinado  $\overline{M}$ , devemos obter a conexão do nosso fibrado  $R_z \cdots \overline{M} \rightarrow \overline{M}/R_z$ . Para isto vamos determinar os vetores de movimentos rígidos, suas 1-formas  $B$ -associadas e a matriz  $B_{ij}$ . O único vetor de Killing do toro é:

$$\xi_1 = \partial_\theta, \quad (3.141)$$

e, portanto, o campo vetorial que descreve movimento rígido em  $\overline{M}$  é:

$$\overline{\xi}_1 = \partial_{\theta_1} + \partial_{\theta_2} + \partial_{\theta_3}. \quad (3.142)$$

A 1-forma associada à esse vetor é

$$\widetilde{\xi}_1 = (a - b \cos \phi_1)^2 d\theta_1 + (a - b \cos \phi_2)^2 d\theta_2 + (a - b \cos \phi_3)^2 d\theta_3. \quad (3.143)$$

A nossa matriz de Gram neste caso é apenas um número dado por:

$$B_{11} = (a - b \cos \phi_1)^2 + (a - b \cos \phi_2)^2 + (a - b \cos \phi_3)^2. \quad (3.144)$$

A matriz inversa é, então, simplesmente:

$$B^{11} = B_{11}^{-1} = \frac{1}{(a - b \cos \phi_1)^2 + (a - b \cos \phi_2)^2 + (a - b \cos \phi_3)^2}. \quad (3.145)$$

Assim, a conexão é dada por:

$$\omega = \frac{(a - b \cos \phi_1)^2 d\theta_1 + (a - b \cos \phi_2)^2 d\theta_2 + (a - b \cos \phi_3)^2 d\theta_3}{(a - b \cos \phi_1)^2 + (a - b \cos \phi_2)^2 + (a - b \cos \phi_3)^2} \otimes \xi_1. \quad (3.146)$$

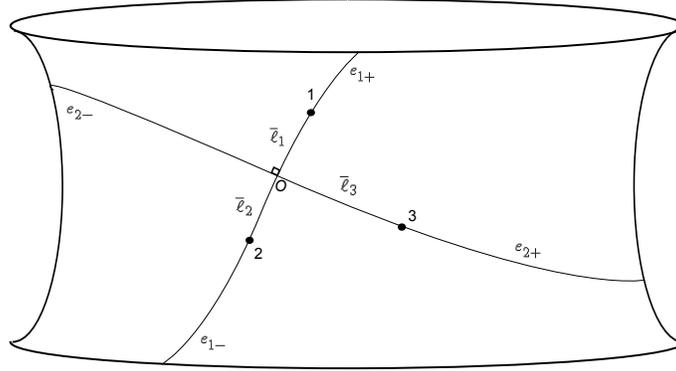


Figura 3.8: Sistema de coordenadas de  $\overline{M}/R_z$ .

Agora escolhemos um sistema de coordenadas conveniente para o nosso problema. Primeiro traçamos a geodésica entre a massa 1 e a massa 2. Chamamos essa geodésica de  $e_1$ . Traçamos então a geodésica que passa pela massa 3 e cruza  $e_1$  em um ângulo de  $90^\circ$ . Denotamos esta geodésica por  $e_2$ . O ponto em que  $e_1$  e  $e_2$  se cruzam chamamos de origem  $O$ . O segmento da geodésica que começa na origem e segue a curva na qual se encontra a massa 1, chamamos  $e_{1+}$ . O segmento complementar da geodésica chamamos  $e_{1-}$ . Se tomarmos um vetor tangente à geodésica  $e_1$  que aponta para  $e_{1+}$ , olhando de fora do toro, se rodarmos o vetor velocidade em  $90^\circ$  no sentido anti-horário, obteremos o vetor velocidade da curva geodésica  $e_2$  que aponta para o segmento  $e_{2+}$ . Cada segmento da geodésica  $e_2$  começa na origem e parte em uma das duas direções possíveis.

A coordenada  $\ell^1$  será a função induzida em  $\overline{M}/R_z$  pela função  $\bar{\ell}^1$ , que é a distância entre a massa 1 e a origem, sempre com sinal positivo. A coordenada  $\ell^2$  será a função induzida em  $\overline{M}/R_z$  pela função  $\bar{\ell}^2$ , que é a distância entre a massa 2 e a origem, com sinal positivo se a massa 2 estiver em  $e_{1-}$ , e com sinal negativo se em  $e_{1+}$ . A coordenada  $\ell^3$  será a função induzida em  $\overline{M}/R_z$  pela função  $\bar{\ell}^3$ , que é a distância entre a massa 3 e a origem, com sinal positivo se a massa 3 estiver em  $e_{2+}$ , ou com sinal negativo caso a massa 3 esteja sobre  $e_{2-}$  (figura 3.8).

Estas funções são um sistema de coordenadas sobre o aberto  $U = \{(\ell^1, \ell^2, \ell^3) | 0 < \ell^1 < b\pi, 0 < \ell^2 < b\pi, 0 < \ell^3 < a\pi\}$ , que é onde nosso robô realiza seus movimentos. Nessas coordenadas a curva que descreve o ciclo de deformações do nosso robô é:

$$\gamma(t) = \begin{cases} (m + rt, m + rt, p) & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ (m + r, m + r, p + l(t - 1)) & \text{se } 1 \leq t < 2 \\ (m + r - (t - 2)r, m + r - (t - 2)r, p + l) & \text{se } 2 \leq t < 3 \\ (b, b, p + l - (t - 3)l) & \text{se } 3 \leq t \leq 4 \end{cases}, \quad (3.147)$$

e o campo vetorial tangente à curva será:

$$\begin{aligned} v_1 &= r\partial_{\ell^1} + r\partial_{\ell^2} & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ v_2 &= l\partial_{\ell^3} & \text{se } 1 \leq t < 2 \\ -v_1 & & \text{se } 2 \leq t < 3 \\ -v_2 & & \text{se } 3 \leq t \leq 4 \end{aligned}. \quad (3.148)$$

Para o levantamento  $\tilde{\gamma}$  da curva  $\gamma$  propomos a forma  $\tilde{\gamma}(t) = \sigma(\gamma(t))g(t)$ , com  $\sigma$  uma seção do aberto  $V$  para o espaço das configurações  $\overline{M}$ , e  $g(t)$  uma curva em  $R_z$ , com  $g(0) = e$ . Definimos a seção  $\sigma$  que usaremos para o levantamento:

$$\sigma(\ell^1, \ell^2, \ell^3) = \left(0, \frac{\ell^1}{b}, 0, -\frac{\ell^2}{b}, \frac{\ell^3}{a-b}, 0\right). \quad (3.149)$$

Se denotarmos o pullback da conexão segundo essa seção  $A = \sigma^*\omega$ , temos:

$$A = -\frac{(a-b)d\ell^3}{(a-b)^2 + (a-b\cos(\frac{\ell^1}{b}))^2 + (a-b\cos(\frac{\ell^2}{b}))^2}. \quad (3.150)$$

Como o grupo  $R_z$  é unidimensional (abeliano), podemos proceder como descrito na seção 2.10 e descrever a curva  $g(t)$  em  $R_z$  envolvida no levantamento horizontal por  $g(t) = e^{\alpha(t)\xi_1}$ , de forma que o trabalho de resolver as equações diferenciais se resume a resolver a equação 2.78 para  $\alpha$  (EDO em  $\mathbb{R}$ ).

Neste contexto,  $\xi_1$  pode ser entendido como o gerador de rotação da esfera em relação ao eixo  $z$ , e a exponencial de  $\alpha(t)\xi_3$  seria a rotação pelo ângulo  $\alpha(t)$  em relação ao eixo  $z$ . Uma outra maneira de entender a exponencial, neste caso, é como uma exponencial de matriz. Existe um isomorfismo de álgebras de Lie que relaciona  $\xi_1$  com a matriz da álgebra de Lie de  $R_z$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.151)$$

A exponencial da matriz acima multiplicada por  $\alpha(t)$  é:

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha(t)) & \sin(\alpha(t)) & 0 \\ -\sin(\alpha(t)) & \cos(\alpha(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.152)$$

que é justamente o elemento de  $R_z$  relacionado a rotação pelo ângulo  $\alpha(t)$  em relação ao eixo  $z$ .

Para determinarmos a equação diferencial de  $g(t)$  no intervalo  $0 \leq t < 1$ , aplicamos a conexão  $A$  no vetor velocidade de  $\gamma$ , que neste intervalo é  $v_1$ . Temos:

$$A_{\gamma(t)}(v_1) = 0. \quad (3.153)$$

A equação diferencial é, então:

$$\frac{d}{dt}g(t) = 0, \quad (3.154)$$

com a condição inicial  $g(0) = e$ . A curva é, portanto, constante:  $g(t) = e$ , para  $0 \leq t < 1$ .

Para determinarmos a equação diferencial de  $g(t)$  no intervalo  $2 \leq t < 3$ , aplicamos a conexão no vetor velocidade de  $\gamma$ . Temos:

$$A_{\gamma(t)}(v_2) = -\frac{(a-b)l}{(a-b)^2 + 2(a-b \cos(\frac{m+r}{b}))^2} \xi_1. \quad (3.155)$$

A equação diferencial para  $\alpha(t)$  que obtemos fica, então:

$$\frac{d}{dt}\alpha(t) = \frac{(a-b)l}{(a-b)^2 + 2(a-b \cos(\frac{m+r}{b}))^2}. \quad (3.156)$$

Da condição inicial dada pelo trecho anterior,  $g(1) = e$ , obtemos  $\alpha(1) = 0$ . A solução da equação diferencial para este valor inicial é:

$$\alpha(t) = \frac{(a-b)l}{(a-b)^2 + 2(a-b \cos(\frac{m+r}{b}))^2} (t-1), \quad (3.157)$$

para  $1 \leq t < 2$ . Logo,

$$g(t) = \exp \left[ \frac{(a-b)l}{(a-b)^2 + 2(a-b \cos(\frac{m+r}{b}))^2} (t-1) \xi_1 \right], \quad (3.158)$$

para  $1 \leq t < 2$ .

Para determinarmos a equação diferencial de  $g(t)$  no intervalo  $2 \leq t < 3$ , aplicamos a conexão no vetor velocidade de  $\gamma$  neste intervalo. Temos:

$$A_{\gamma(t)}(-v_1) = 0. \quad (3.159)$$

Logo:

$$\frac{d}{dt}g(t) = 0, \quad (3.160)$$

para  $2 \leq t < 3$ . A solução é constante neste intervalo e , portanto,

$$g(t) = \exp \left[ \frac{(a-b)l}{(a-b)^2 + 2(a-b \cos(\frac{m+r}{b}))^2} \xi_1 \right], \quad (3.161)$$

para  $2 \leq t < 3$ .

Para determinarmos a equação diferencial de  $g(t)$  em  $3 \leq t \leq 4$ , aplicamos a conexão no vetor velocidade de  $\gamma$  neste intervalo. Temos:

$$A_{\gamma(t)}(-v_2) = \frac{(a-b)l}{(a-b)^2 + 2(a-b \cos(\frac{m}{b}))^2} \xi_3. \quad (3.162)$$

Obtemos a equação diferencial:

$$\frac{d}{dt}\alpha(t) = -\frac{(a-b)l}{(a-b)^2 + 2(a-b \cos(\frac{m}{b}))^2}. \quad (3.163)$$

A condição inicial é dada pelo trecho anterior  $\alpha(3) = \frac{(a-b)l}{(a-b)^2 + 2(a-b \cos(\frac{m+r}{b}))^2}$ , e a solução da equação diferencial é:

$$\alpha(t) = -\frac{(a-b)l}{(a-b)^2 + 2(a-b \cos(\frac{m}{b}))^2}(t-3) + \frac{(a-b)l}{(a-b)^2 + 2(a-b \cos(\frac{m+r}{b}))^2}, \quad (3.164)$$

para  $3 \leq t \leq 4$ , de forma que:

$$g(t) = e^{-\frac{(a-b)l}{(a-b)^2 + 2(a-b \cos(\frac{m}{b}))^2}(t-3) + \frac{(a-b)l}{(a-b)^2 + 2(a-b \cos(\frac{m+r}{b}))^2} \xi_1}. \quad (3.165)$$

Observamos que  $g(4)$  é a isometria que descreve uma rotação no eixo  $z$  pelo ângulo:

$$-\frac{(a-b)l}{(a-b)^2 + 2(a-b \cos(\frac{m}{b}))^2} + \frac{(a-b)l}{(a-b)^2 + 2(a-b \cos(\frac{m+r}{b}))^2}. \quad (3.166)$$

Mas como a ação de  $s \in R_z$  sobre  $u \in \overline{M}$  é:  $u \cdot s = (s^{-1}(u_1), s^{-1}(u_2), s^{-1}(u_3))$ . Observamos um movimento resultante do nosso robô, ao final do ciclo de deformação, que corresponde a uma rotação no eixo  $z$  por um ângulo de:

$$\frac{(a-b)l}{(a-b)^2 + 2(a-b \cos(\frac{m}{b}))^2} - \frac{(a-b)l}{(a-b)^2 + 2(a-b \cos(\frac{m+r}{b}))^2}. \quad (3.167)$$

Ou seja, observa-se o efeito swimming. Queremos um ciclo dentro dos limites  $\pi/2 > (m+r)/b > m/b > 0$ , desta forma o ângulo resultante do ciclo de deformações na região de curvatura negativa do toro é positivo, ao contrário do caso do  $S^2$ , de curvatura positiva, em relação ao mesmo ciclo de deformações.

Estamos tratando com um problema cujo grupo de isometrias que age na nossa configuração é unidimensional. Vamos, como nos exemplos anteriores (e como explicado na seção 2.10), usar o teorema de Stokes para obter a holonomia através da integração direta da curvatura. O elemento  $g = e^{\alpha \xi_1}$  será a rotação em relação ao eixo  $z$  pelo ângulo  $\alpha$ . Faremos a mesma transformação de variáveis dos exemplos anteriores:

$$e = \ell^1 + \ell^2, \quad s = \ell^1 - \ell^2, \quad (3.168)$$

de forma que:

$$\ell^1 = \frac{e+s}{2}, \quad \ell^2 = \frac{e-s}{2}. \quad (3.169)$$

Para este exemplo, novamente, o movimento realizado se limita ao plano  $s = 0$ .

Nas coordenadas  $\{e, s, \ell^3\}$ , a curvatura será dada por  $\Omega = (f_{es}de \wedge ds + f_{e\ell^3}de \wedge d\ell^3 + f_{s\ell^3}ds \wedge d\ell^3)$ . Como o movimento descrito pelo robô se dá em  $s$  constante,  $ds = 0$ , e, integrando a 2-forma associada à curvatura, o integrando se resumirá à  $f_{e\ell^3}de \wedge d\ell^3$ . Calculando a curvatura pela equação estrutural, temos que:

$$f_{e\ell^3} = \frac{2(a-b)(a-b \cos[\frac{e}{2b}]) \sin[\frac{e}{2b}]}{(a-b)^2 + 2(a-b \cos[\frac{e}{2b}])^2} \xi_1. \quad (3.170)$$

Integrando o termo  $f_{e\ell^3}$  da forma sobre a área  $A$  determinada pelo laço da deformação, temos que:

$$\int_A f_{e\ell^3}de \wedge d\ell^3 = \int_A f_{e\ell^3}ded\ell^3 = \int_p^{p+l} d\ell^3 \int_{2m}^{2(m+r)} de \left( \frac{2(a-b)(a-b \cos[\frac{e}{2b}]) \sin[\frac{e}{2b}]}{(a-b)^2 + 2(a-b \cos[\frac{e}{2b}])^2} \right). \quad (3.171)$$

O resultado da integral acima é:

$$\frac{(a-b)l}{(a-b)^2 + 2(a-b \cos(\frac{m}{b}))^2} - \frac{(a-b)l}{(a-b)^2 + 2(a-b \cos(\frac{m+r}{b}))^2}. \quad (3.172)$$

Pela equação 2.82, temos, então, que:

$$g(4) = \exp\left[\left(-\frac{(a-b)l}{(a-b)^2 + 2(a-b \cos(\frac{m}{b}))^2} + \frac{(a-b)l}{(a-b)^2 + 2(a-b \cos(\frac{m+r}{b}))^2}\right)\xi_1\right]. \quad (3.173)$$

Desta forma, a ação de  $g(4)$  resulta em uma rotação em relação a  $z$  pelo ângulo

$$\frac{(a-b)l}{(a-b)^2 + 2(a-b \cos(\frac{m}{b}))^2} - \frac{(a-b)l}{(a-b)^2 + 2(a-b \cos(\frac{m+r}{b}))^2}.$$

Este é exatamente o resultado que obtivemos com o cálculo que fizemos anteriormente. No entanto, integrando diretamente a curvatura, obtemos a holonomia resultante das deformações, e não a expressão analítica da função temporal do movimento, a qual obtemos com o levantamento da curva que descreve o movimento no espaço dos formatos.

Resolvemos, assim, três exemplos de natação em espaços curvos como a holonomia de uma curva fechada no espaço dos formatos do nosso corpo. Um exemplo do nosso tratamento para natação em espaços curvos em  $\mathbb{R}^2$ , de curvatura nula, um exemplo em  $S^2$ , cuja curvatura é positiva, e na região do toro de curvatura negativa. Observamos que no plano, de curvatura nula, não há translações resultantes de forças internas, como já previsto pela mecânica clássica. No caso do  $S^2$ , realizamos um ciclo de deformações para o qual observamos um deslocamento resultante na coordenada  $\phi$  em seu sentido negativo. Realizamos um ciclo semelhante, na região de curvatura negativa do toro, e observamos um deslocamento resultante contrário ao do  $S^2$ , no sentido positivo da coordenada que expressa o ângulo no plano  $xy$ .

## Capítulo 4

# Conclusão

Em 2003, Wisdom descobriu um novo fenômeno para corpos quase-rígidos compostos por massas puntiformes em espaços-tempos curvos: o efeito da natação. Ele previu que, em espaços-tempos curvos, um corpo quase-rígido realizaria movimentos relacionados com traslações devido exclusivamente a ciclos de deformações gerados por forças internas do corpo. Esta natação é bem diferente da natação usual, que consiste em empurrar o fluido no sentido contrário ao movimento fazendo uso da força de reação. A natação em espaços curvos é um movimento gerado por forças internas. Ela não depende da velocidade que os ciclos de deformações são realizados, mas apenas dos ciclos em si. Logo, este é um fenômeno de fase geométrica. Em 2006, Avron e Kenneth apresentaram um modelo para a natação em espaços curvos. Este modelo trata de corpos compostos por um conjunto de massas puntiformes arbitrário, que realizam movimentos não relativísticos em uma variedade estática arbitrária. Avron e Kenneth obtiveram uma expressão para a natação gerada por um ciclo de deformações infinitesimal e, para o caso de corpos pequenos, relacionaram a natação obtida por um ciclo infinitesimal de deformações à curvatura do espaço ambiente. Em nosso trabalho, seguimos os moldes do modelo estabelecido por Avron e Kenneth para buscar uma nova formulação para a natação, em termos de fibrados principais e conexões, própria de fenômenos de fases geométricas.

Introduzimos no capítulo 2 os conceitos básicos para o desenvolvimento do nosso trabalho. Apresentamos a teoria dos grupos de Lie e suas álgebras de Lie associadas, partindo de uma introdução dos conceitos de campos de vetores e dos colchetes de Lie. Exploramos um pouco mais a fundo as idéias geométricas envolvidas no conceito de colchetes de Lie de campos de vetores. Trabalhamos com o conceito de ações de grupos de Lie em variedades diferenciáveis, um conceito fundamental para a compreensão do formalismo de de fibrados principais. Introduzimos o teorema da órbita principal, que foi um conceito central no desenvolvimento do nosso trabalho. Tratamos de formas diferenciais, estrutura por trás do conceito de conexão. Apresentamos, então, os conceitos de fibrados principais, conexões e holonomia, introduzindo o formalismo que usamos para descrever a natação. Para tratar dos

espaços curvos, ambiente dos corpos que realizam a natação, introduzimos os conceitos básicos de geometria riemanniana. Definimos e exploramos algumas propriedades relevantes da métrica riemanniana, conexões afins, transporte paralelo e geodésicas, da conexão riemanniana e da curvatura. Tratamos dos conceitos de isometrias de uma variedade riemanniana e de seus vetores de Killing, estrutura que usamos para descrever os movimentos rígidos dos corpos em espaços curvos. Por fim, exploramos algumas propriedades de grupos de transformações em que a variedade é riemanniana e o grupo de Lie seu grupo de isometrias. Mostramos que a ação que descreve movimentos rígidos no espaço de configurações é uma ação própria e apresentamos ainda o teorema 2.13.1, que usamos para definir o fibrado  $G \cdots \bar{M} \rightarrow \bar{M}/G$ .

No capítulo 3, definimos de maneira precisa movimentos rígidos e deformações de um corpo em um espaço curvo, e descrevemos o que significa a natação em espaço curvo. Mostramos, através do teorema da órbita principal, que restringindo adequadamente  $\tilde{M} = M \times \cdots \times M$ , restrição que denotamos  $\bar{M}$ , obtemos o fibrado principal  $G \cdots \bar{M} \rightarrow \bar{M}/G$ . Desenvolvemos o tratamento geométrico da natação, descrevendo-a como a holonomia do levantamento horizontal de curvas fechadas no espaço dos formatos do corpo,  $\bar{M}/G$ . Obtivemos uma expressão para a natação por pequenas deformações, que relacionamos com a curvatura da conexão. Por fim, resolvemos exemplos, usando o formalismo de fibrados e conexões, de um robô de três massas puntiformes em espaços bidimensionais. Para mostrar a influência da curvatura do espaço ambiente no movimento, resolvemos o problema do robô em um espaço de curvatura nula,  $\mathbb{R}^2$ , em um espaço de curvatura positiva,  $S^2$ , e na região de curvatura negativa do toro  $T^2 = S^1 \times S^1$ .

Destacamos que, com o uso do formalismo próprio de fases geométricas, obtivemos uma maneira sistematizada de calcular a natação de corpos que desenvolvem ciclos de deformações arbitrários, e de obter analiticamente a função temporal da configuração do corpo, o que nos proporciona um entendimento completo da dinâmica do movimento. Esta sistematização vem a ser uma ferramenta importante no estudo do efeito da natação para corpos que realizam ciclos de deformações mais complexos, como para deformações assimétricas.

Podemos apontar ao menos duas direções que os trabalhos futuros que utilizem o formalismo de fibrados e conexões para a descrição da natação podem seguir. O primeiro, como já dissemos, é o estudo da natação gerada por ciclos complexos de deformações, em especial as assimétricas, que são descritas pela ação de um subgrupo não-abeliano no espaço das configurações. Outra possibilidade de trabalho que pode se beneficiar com a utilização do formalismo de fibrados e conexões é o estudo da natação gerada por ciclos de deformações extensos no contexto não-abeliano, particularmente em espaços ambientes não simplesmente conexos.

# Referências Bibliográficas

- [1] A. Shapere, F. Wilczek, *Geometric Phases in Physics*, World Scientific, London, 1989;
- [2] D. Chruscinski, A. Jamiolkowski, *Geometric Phases in Classical and Quantum Mechanics*, Birkhäuser, Boston, 2004;
- [3] M. V. Berry, *Quantal Phase Factors Accompanying Adiabatic Changes*, Proc. Roy. Soc. Lond. A **392**, 45-57 (1984);
- [4] Y. Aharonov, D. Bohm, *Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory*, Phys. Rev. **115** 485-491 (1959);
- [5] A. Guichardet, *On Rotation and Vibration Motions of Molecules*, Annales de l'Institut Henry Poincaré (A) **40**, 329-342 (1984);
- [6] R. G. littlejohn, M. Reinsch, *Gauge Fields in Separation of Rotations and Internal Motions in the n-body Problem*, Review of Modern Physics, vol. 69, 1 (1997); (1984);
- [7] R. Montgomery, *The Isoholonomic Problem and Some of its Applications*, Comm. Math. Phus. **128**, 565-592 (1990)
- [8] R. Montgomery, *Gauge Theory of the Falling Cat*, in *Dynamics and Control of Mechanical Systems, The Falling Cat and Related Problems*, v. 1, Fields Institute Communications, ed. M. Enos, AMS pub. (1993);
- [9] A. Shapere, F. Wilczek, *Geometry of Self-Propulsion at Low Reynolds Number*, J. Fluid Mech. **198**, 557-585 (1989);
- [10] M. Fecko, *Gauge-Potential Approach to the Kinematics of a Moving Car*, Il Nuovo Cimento B, vol. 111 (11), pp. 1315-1332, (1996)
- [11] J. Wisdom, *Swimming in Space Time: Motion by Cyclic Changes in Body Shape*, Science, **299**, 1865 (2003);
- [12] J. E. Avron e O. Kenneth, *Swimming in Curved Space or the Baron and the Cat*, New Journal of Physics, **8**, 68 (2006);

- [13] A. Kostrikin, Yu Manin, *Linear Algebra and Geometry*, CRC Press, 1989;
- [14] K. Hoffman, R. Kunze, *Linear Algebra*, 2ª edição, Prentice Hall Inc., Englewoods Cliffs, New Jersey, 1971;
- [15] M. A. Armstrong, *Basic Topology*, Springer, 1983;
- [16] J. Munkres, *Topology*, 2ª edição, Prentice Hall, 2000;
- [17] Elon Lages Lima, *Curso de Análise*, vol. 2, 10ª edição, IMPA, 1995;
- [18] M. Spivak, *Calculus on Manifolds*, Addison-Wesley Publishing Company, 1965;
- [19] J. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer, 2002;
- [20] R. L. Fernandes, *Lições de Geometria Diferencial*, Instituto Superior Técnico, (2003), notas de aula disponíveis na página do autor, <http://www.math.ist.utl.pt/~rfern/GD/#notas>;
- [21] F. W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer, 1983;
- [22] L. A. B. San Martin, Notas de aula do curso sobre Grupos de Lie, UNICAMP, 2006, <http://www.ime.unicamp.br/~smartin/cursos/grupolie-2006>;
- [23] M. M. Alexandrino, L. Biliotti, R. Pedrosa, *Lecture on Isometric Actions*, IMPA, 2008;
- [24] D. Bleecker, *Gauge Theory and Variational Principle*, Addison-Wesley Publishing Company, 1981;
- [25] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, 2<sup>nd</sup> edition, Bristol: Institute of Physics Publishing, 2003
- [26] J. M. Lee, *Riemannian Manifolds, an Introduction to Curvature*, Springer-Verlag, 1997;
- [27] M. P. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, quarta edição, IMPA, 2008;
- [28] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*, Academic Press, 1978;
- [29] S. Kobayashi, *Transformations Groups in Differential Geometry*, Springer-Verlag, 1972;
- [30] S. Gallot, D. Hullin, J. Lafontaine, *Riemannian Geometry*, 3ª edição, Springer, 2004;

- [31] R. W. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press, 1984;
- [32] Jürgen Berndt, Sergio Console, Carlos Olmos, *Submanifolds and holonomy*, Chapman & Hall/CRC research notes in mathematics series;
- [33] T. Sakai *Riemannian Geometry*, American Mathematical Society, 1992;
- [34] S. Kobayashi e K. Nomizo, *Foundations of Differential Geometry*, vol. 1, John Wiley and sons, 1963;
- [35] H. Goldstein, C. Poole, J. Safko, *Classical Mechanics*, Third Edition, Edisson Wesley;
- [36] J. Chavel, *Riemannian Geometry: a Modern Introduction*, 2<sup>a</sup> edição, Cambridge University Press, 2006;
- [37] P.J. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, GTM 107, Springer-Verlag, New York, 1986;