ESFERAS MÍNIMAS

EM

VARIEDADES RIEMANNIANAS

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação devidamente corrigida e defendida pelo Sr. José Kenedy Martins e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas 16 de julho de 1991

Orientador : ....
Prof. Dr. Caio José C. Negreiros
Colleti

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciências da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Sou Grato a Deus

Por mais uma realização

Neste mundo ilusório

onde tentamos medir o imensurável

e simbolizar o tudo que é simplesmente nada

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

A questão de existência de imersões mínimas tem sido muito focalizada pela geometria diferencial. Nesta monografia nos dispomos a estudar este problema em variedades riemannianas compactas para o caso da esfera de Riemann, de acordo com os trabalhos publicados de Sacks-Uhlenbeck em [11] e Micallef-Moore em [6] , onde encontramos uma ampla análise tanto de existência e regularidade dessas imersões quanto de aplicações dos resultados lá obtidos.

Sejam M uma superfície compacta orientável com uma estrutura conforme e N uma variedade riemanniana sem bordo de dimensão maior ou igual a dois. Pelo teorema de Nash podemos considerar N mergulhada isometricamente em $\mathbb{R}^k$ para algum k. Assumiremos que M tem uma métrica riemanniana compatível com sua estrutura conforme e que essa métrica induz uma medida $d\mu$ em M.

Seja $\Omega_1 = L^2_1(M,N) \cap C^0(M,N)$ o espaço das aplicações contínuas $f:M \longrightarrow N$ cuja a primeira derivada distribucional está em L^2. Definimos neste espaço o funcional energia $E:\Omega_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$E(f) = \int_M |df|^2 d\mu$$

Chamamos de harmônicas as aplicações de Ω_1 que são pontos críticos desse funcional energia.

No caso em que M é a esfera de Riemann S^2 já sabemos que as imersões harmônicas são imersões mínimas. Assim para estudarmos as imersões mínimas de M em N, é suficiente investigar os pontos críticos do funcional energia.

Apesar da forma simples do funcional energia não é viável usa-lo diretamente para resolvermos o problema, pois de imediato teríamos um obstáculo natural que seria o de não podermos usar a teoria de pontos críticos uma vez que não podemos afirmar se o domínio deste funcional tem uma estrutura diferenciável. Para contornar esta dificuldade entre outras, fazemos uma pertubação no funcional energia, definindo o funcional α-ψ-energia que denotaremos $E_{\alpha,\psi}$.

$$E_{\alpha,\psi}(f) = \int_M (1+\|df\|^2)^\alpha d\mu + \int_M (f.\psi)d\mu$$

onde $f \in L_1^{2\alpha}(M,N)$, $\alpha > 1$, $\psi \in L^1(M,\mathbb{R}^k)$ e o ponto no segundo termo representa o produto interno usual de $\mathbb{R}^k$.

Cumpre, naturalmente observar que para $\alpha=1$ e $\psi=0$ temos o funcional energia, isto é,

$$E_{1,0}(f) = \text{volume}(M) + E(f)$$

O funcional $E_{\alpha,\psi}$ é do ponto de vista analítico, um instrumento mais adequado ao estudo dos pontos críticos de E que estamos interessados, pois em primeiro lugar seu domínio $L_1^{2\alpha}(M,N)$ tem uma estrutra de variedade de dimensão infinita modelada em um espaço de Banach, em segundo lugar o funcional $E_{\alpha,\psi}$ satisfaz a condição de Palais-Smale (condição-C) que nos permitir usar a teoria de Morse para garantirmos que ele possui um ponto crítico.

No primeiro capítulo deste trabalho nós fazemos os cálculos básicos sobre o funcional $E_{\alpha,\psi}$ de suas primeira e segunda variação, bem como provamos que ele satisfaz a condição C.

No segundo capítulo formalizamos a prova da existência de pontos críticos $f_{\alpha,\psi}$ de $E_{\alpha,\psi}$ e detalhamos a verificação da regularidade destes pontos críticos. Na última seção deste capítulo mostramos um dos teoremas principais deste trabalho a saber:

Dada uma variedade compacta, simplesmente conexa N^n, e k o menor inteiro tal que $\pi_k(N) \neq 0$. Então existe uma aplicação harmônica não constante $f: S^2 \longrightarrow N$ de índice $\leq k-2$.

Estudamos a regularidade dos pontos críticos usando a técnica clássica da análise empregada por C.B. Morrey em [8] que consiste em interpretar a questão do ponto de vista meramente variacional.

Precisamos ressaltar que na seção 2.1 do segundo capítulo onde tratamos da regularidade dos pontos críticos do funcional $E_{\alpha,\psi}$ foi inevitável a sobrecarga da notação devido ao próprio tratamento dado ao problema.

No terceito capítulo usamos o teorema supra-citado para mostrar que uma variedade compacta, simplesmente conexa com dimensão ≥ 4 e satisfazendo a condição de "curvatura positiva sobre bi-planos totalmente isotrópicos" é homeomorfa a uma esfera. Esta condição, a ser definida oportunamente, generaliza como veremos outras condições sobre curvatura já bem conhecidas e por conseguinte o teorema generaliza outros resultados tais como o teorema da esfera de Berger-Klingenberg-Rauch-Toponogov no caso de dimensão ≥ 4, e o fato de toda variedade compacta simplesmente conexa com operador curvatura positiva ser homeomorfa a uma esfera.

CAPÍTULO I

O FUNCIONAL ENERGIA PERTURBADO

1.1. Preliminares

Neste capítulo vamos estudar alguns aspectos do funcional α-energia perturbado que será uma ferramenta importante para resoluçaõ da questão da existência e regularidade de esferas harmônicas.

Faremos nesta seção uma apresentação de alguns fatos básicos sobre os quais apoiar-se-á o restante do capítulo.

Sejam M e N variedades riemannianas de dimensões m e n respectivamente, sendo N subvariedade mergulhada em $\mathbb{R}^k$.

Designamos por η o fibrado vetorial trivial sobre M cujo espaço total é $M\times\mathbb{R}^k$ e por ξ o fibrado sobre M cujo espaço total é MxN.

1.1.1. Definição:

Chamamos de espaço de Sobolev L^p_r associado às aplicações de M em N o conjunto:

$$L^p_r(\xi) = \{f:M \longrightarrow \xi / \ f \text{ é seção de } \xi \text{ e } \sum_{l=0}^{r} \int_M |\nabla^l(f)|^p d\mu < \infty \}$$

onde $d\mu$ é o elemento de volume de M.

A função $\|f\|_{L^p_r} = [\sum_{l=0}^{r} \int_M |\nabla^l(f)|^p d\mu]^{\frac{1}{p}}$ define uma norma para $L^p_r(\xi)$.

Analogamente definimos $L_r^p(\eta)$ como o espaço de Sobolev L_r^p associado às aplicações de M em $\mathbb{R}^k$.

Para fins de referência enunciaremos no teorema a seguir as propriedades clássicas destes espaços.

1.1.2. Teorema de Mergulho de Sobolev:

Sejam M e N variedades riemannianas C^∞ de dimensões m e n, respectivamente. Seja r um inteiro não negativo e p satisfazendo $1 \leq p < \infty$. Então valem os seguintes mergulhos:

Caso A: Se $rp < m$ então $L_r^p(\xi) \subset L^q(\xi)$ para todo $p \leq q \leq \dfrac{mp}{m-rp}$

Caso B: Se $rp = m$ então:

$L_r^p(\xi) \subset L^q(\xi)$ para todo $p \leq q < \infty$

Caso C: se $rp > m$, então:

$L_r^p(\xi) \subset C^j(\xi)$ para todo $0 \leq j < r - \dfrac{m}{p}$

onde

$C^j(\xi) = \{f:M \longrightarrow \xi \mid$ a derivada clássica $\nabla^s(f)$ exista e seja contínua para $s = 0,\ldots\ldots, j\}$.

Caso D: Se $1 \leq p,\ q < \infty$, $r - \dfrac{m}{p} \geq s - \dfrac{m}{q}$ então $L_r^p(\xi) \subset L_s^q(\xi)$ e a inclusão é contínua. Se $r - \dfrac{m}{p} > s - \dfrac{m}{q}$ e $r > s$ então a inclusão é completamente contínua, isto é, leva conjuntos limitados em relativamente compactos.

1.1.3 Teorema

Sejam ξ e η os fibrados acima definidos e $p' \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{N}$ números tais que $rp > m$, então:

(i) Os espaços de Sobolev $L_r^p(\eta)$ são espaços de Banach

(ii) Os espaços de Sobolev $L^p_r(\xi)$ têm uma estrutura diferenciável como subvariedade de Banach de $L^p_r(\eta)$.

A idéia para a demonstração da parte (ii) do teorema acima é considerar todos os subfibrados vetoriais abertos de ξ digamos $\mathcal{O}$ e a partir da inclusão $i_{\mathcal{O}}:\mathcal{O} \longrightarrow \xi$ definamos uma aplicação:

$$L^p_r(i_{\mathcal{O}}):L^p_r(\mathcal{O}) \longrightarrow L^p_r(\xi) \quad \text{por} \quad L^p_r(i_{\mathcal{O}})(f) = i_{\mathcal{O}} \circ f$$

Palais em [9] mostrou-nos que a família $\mathcal{F} = \{(\mathcal{O}, L^p_r(i_{\mathcal{O}})): \mathcal{O}$ subfibrado vetorial aberto de $\xi\}$ é um atlas diferencial para $L^p_r(\xi)$ e com essa estrutura $L^p_r(\xi)$ é uma subvariedade fechada de $L^p_r(\eta)$.

1.1.4. Observações:

(i) No teorema 1.1.2 chamamos especial atenção para o caso C onde vemos que a partir de uma majoração da norma $\| \|_{L^p_r}$ de uma aplicação podemos obter um certo grau de regularidade desta.

(ii) As estruturas obtidas no teorema 1.1.3 são condições necessárias mais adiante para podermos aplicar a teoria de pontos críticos ao funcional energia perturbado.

1.2. Primeira e Segunda Variação do Funcional $E_{\alpha,\psi}$

Aqui vamos fazer alguns cálculos necessários para podermos manusear com mais intimidade os operadores diferenciais obtidos na primeira e segunda variação do funcional α-ψ-energia.

1.2.1 Notação

$\Omega = L_1^{2\alpha}(\xi)$, $\bar{\Omega} = L_1^{2\alpha}(\eta)$

$\Omega_f = (T\Omega)_f = \{g:M \longrightarrow \mathbb{R}^k / g(p) \in TN_{f(p)} \quad \forall \; p \in M\} \subset \bar{\Omega}$.

Chamemos $\varepsilon_{\alpha,\psi}$ a extensão de $E_{\alpha,\psi}$ a $L_1^{2\alpha}(\eta)$

1.2.2. Primeira Variação de $E_{\alpha,\psi}$ (Notação: $\delta E_{\alpha,\psi}$)

Sejam $f \in \Omega$ e $V \in \Omega_f$, vamos calcular numa expressão para a derivada de $E_{\alpha,\psi}$ no ponto f aplicada a V. Com este propósito definamos a função:

$$H(t) = \varepsilon_{\alpha,\psi}(f+t.V) = \int_M \left[(1+\|d(f+tV)\|^2)^\alpha + f.\psi + t.V.\psi \right] dA$$

$$H'(t) = \int_M \left[\alpha(1+\|df+tdV\|^2)^{\alpha-1}(2\langle df,dV\rangle + 2t\langle dV,dV\rangle) + V.\psi \right] dA$$

$$(2.1) \qquad H'(0) = \int_M \left[2\alpha(1+\|df\|^2)^{\alpha-1}.\langle df,dV\rangle + V.\psi \right] dA$$

Para simplificar os cálculos chamaremos $g:M \longrightarrow \mathbb{R}$ a função $g(p) = 2\alpha(1+\|df_p\|^2)^{\alpha-1}$.

Note que como $V(p) \in TN_{f(p)}$ então $V.P_f(\psi) = V.\psi$.

Assim obtemos:

$$(2.2) \qquad \delta\varepsilon_{\alpha,\psi}\Big|_f (V) = H'(0) = \int_M \left[\langle g.df,dV\rangle + V.P_f(\psi) \right] dA$$

$$\int_M \langle g.df,dV\rangle = \int_M \langle d^*(gdf), V\rangle \quad \text{com} \quad d^*(gdf) = -tr(\nabla(gdf))$$

Desenvolvamos o segundo membro desta equação:

$$d^*.(gdf) = -\sum_{i=1}^{2} (\nabla e_i(gdf))(e_i) = \sum_{i=1}^{2} [\nabla_{e_i}^{f^*\mathbb{R}^k}(gdf)(e_i) - (g.df)(\nabla_{e_i}^M e_i)]$$

$$\text{onde: } \begin{cases} \nabla^{f^*\mathbb{R}^k}_{e_1}(gdf)(e_1) = dg(e_1)\, df(e_1) + g.\nabla^{f^*\mathbb{R}^k}_{e_1} df(e_1) \\ \quad = e_1(g)e_1(f) + g.\bar{\nabla}_{e_1(f)}e_1(f) \quad (\bar{\nabla} \text{ conexão de } \mathbb{R}^k) \\ \\ e_1(g) = 2\alpha(\alpha-1)(1+\|df\|^2)^{\alpha-2}\, e_1(|df|^2) \\ \quad = g.(\alpha-1)(1+\|df\|^2)^{-1}.e_1(|df|^2) \end{cases}$$

assim obtém-se:

$$d^*(gdf) = -g.\sum_{1=1,2} [(\alpha-1)(1+\|df\|^2)^{-1}e_1(|df|^2)e_1(f) + \bar{\nabla}_{e_1(f)}e_1(f) - df(\nabla^M_{e_1}e_1)]$$

usando a definição da segunda forma fundamental do mergulho de N em $\mathbb{R}^k$,

$$(B_N \circ f)(e_1 f, e_1 f) = \bar{\nabla}_{e_1(f)}e_1(f) - \nabla^N_{e_1(f)}e_1(f)$$

temos:

$$d^*(gdf) = -g.\sum_{1=1}^{2} [(\alpha-1)(1+\|df\|^2)^{-1}.e_1(|df|^2)e_1(f) + B_N \circ f(e_1(f), e_1(f)) +$$
$$+ \nabla^N_{e_1(f)}e_1(f) - df(\nabla^M_{e_1}e_1)$$

observando que: $\Delta f = \mathrm{tr}\nabla df = \sum_{1=1}^{2} [\nabla^N_{e_1(f)}e_1(f) - df(\nabla^M_{e_1} e_1)]$

temos:

$$d^*(gdf) = g.\{-\Delta f - (\alpha-1)(1+\|df\|^2)^{-1}.\sum e_1(|df|^2).e_1(f) - \sum_{1=1}^{2}(B_N \circ f)(e_1(f), e_1(f))\}$$

Assim denotando por $Q_{\alpha,\psi}$ o operador de $L_1^{2\alpha}(M,N)$ tal que:

$$Q_{\alpha,\psi}(f)=2\alpha(1+\|df\|^2)^{\alpha-1}.\left\{ \frac{(\alpha-1)}{(1+|df|^2)}.\left[\sum_{i=1}^{2} \ell_i(|df|^2)e_i(f)\right] + \Delta f + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{2} (B_N \circ f)(e_i(f), e_i(f)) - \frac{1}{2\alpha}(1+\|df\|^2)^{1-\alpha} P_f(\psi) \right\}$$

obtemos uma forma sintetizada para a primeira variação da energia perturbada:

(2.3) $$\delta E_{\alpha,\psi}\Big|_f(V) = \int_M -(Q_{\alpha,\psi}(f)).VdA$$

desse modo temos que os pontos críticos do funcional α-ψ-energia são as soluções fracas da equação diferencial parcial não-linear: $Q_{\alpha,\psi}(f)=0$ e são chamadas α-ψ-harmônicas.

1.2.3 Segunda Variação

Seja $f \in \Omega$ um ponto crítico de $E_{\alpha,\psi}$. Sejam $V, W \in \Omega_f$ dadas. Consideremos uma aplicação $\Theta:(-1,1)x(-1,1)xM \longrightarrow N$ diferenciável nas duas primeiras variáveis tal que

$$\begin{cases} \Theta(\mu_1,\mu_2,.) \in L_1^{2\alpha}(\xi) \text{ para todo } \mu_1,\mu_2 \in (-1,1) \\ \Theta(0,0,p) = f(p), \ \dfrac{\partial\Theta}{\partial\mu_1}(0,0,p) = V(p), \ \dfrac{\partial\Theta}{\partial\mu_2}(0,0,p) = W(p) \end{cases}$$

então se chamarmos $h(\mu_1,\mu_2) = E_{\alpha,\psi}(\Theta(\mu_1,\mu_2, .))$ teremos:

$$\delta^2 E_{\alpha,\psi}(f)(V,W) = \frac{\partial^2 h}{\partial\mu_1\,\partial\mu_2}(0,0)$$

fazendo-se $g\otimes = \otimes g(\mu_1,\mu_2,p) = 2\alpha(1+\|d\Theta_p\|^2)^{\alpha-1}$ tem-se pela primeira variação:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial\mu_1}(\mu_1,\mu_2) = \int_M [\langle gd\Theta, d\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\mu_2}\right)\rangle + \psi \cdot \left(\frac{\partial\Theta}{\partial\mu_2}\right)] \text{, donde segue:}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial\mu_1\partial\mu_2}(\mu_1,\mu_2) = \int_M \Big[\underbrace{\langle \overset{*}{\nabla}{}^{\Theta}_{\frac{\partial}{\partial\mu_1}}(gd\,\Theta), d\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\mu_2}\right)\rangle}_{\mathrm{I}} +$$

$$+ \underbrace{\langle gd\Theta, \overset{*}{\nabla}{}^{\Theta}_{\frac{\partial}{\partial\mu_1}}\left(d\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\mu_2}\right)\right)\rangle}_{\mathrm{II}} + \underbrace{\psi \cdot \frac{\partial^2\Theta}{\partial\mu_1\partial\mu_2}}_{\mathrm{III}} \Big]$$

Desenvolvendo melhor o segundo membro da equação acima temos:

$$\text{(I)} \quad \overset{*}{\nabla}{}^{\Theta}_{\frac{\partial}{\partial\mu_1}}(gd\Theta) = 2\alpha(\alpha-1)(1+\|d\Theta\|^2).2\langle d\Theta, \overset{*}{\nabla}{}^{\Theta}_{\frac{\partial}{\partial\mu_1}} d\Theta\rangle + g.\left(\overset{*}{\nabla}{}^{\Theta}_{\frac{\partial}{\partial\mu_1}} d\Theta\right)$$

podemos considerar $\left\{ \frac{\partial}{\partial\mu_1}, \frac{\partial}{\partial\mu_2}, e_1, e_2 \right\}$ campos canônicos de um sistema local de coordenadas da variedade $\mathbb{R}x\mathbb{R}xM$, daí $\left[\frac{\partial}{\partial\mu_1}, e_1\right] = 0$.

Observando-se que: $\overset{*}{\nabla}{}^{\Theta}_{\frac{\partial}{\partial\mu_1}}(d\Theta)e_1 = \overset{*}{\nabla}{}^{\Theta}_{\ell_1}\frac{\partial\Theta}{\partial\mu_1} + [e_1]$, temos

$$(2.5) \quad \overset{*}{\nabla}{}^{\Theta}_{\frac{\partial}{\partial\mu_1}}(gd\Theta)\Big|_{(0,0)} = 4\alpha(\alpha-1)(1+\|df\|^2)^{\alpha-2}.\langle df.dV\rangle df + 2\alpha(1+\|df\|^2)^{\alpha-1}dV$$

$$\text{(II)} \quad \overset{*}{\nabla}{}^{\Theta}_{\frac{\partial}{\partial\mu_1}} \overset{*}{\nabla}{}^{\Theta}_{e_1}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\mu_2}\right) = \overset{*}{\nabla}{}^{\Theta}_{\ell_1} \overset{*}{\nabla}{}^{\Theta}_{\frac{\partial}{\partial\mu_1}}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\mu_2}\right) - \overset{*}{R}{}^{\Theta}\left(e_1, \frac{\partial}{\partial\mu_1}\right)\frac{\partial}{\partial\mu_2} -$$

$$- \overset{*}{\nabla}{}^{\Theta}_{\left[e_1, \frac{\partial}{\partial\mu_1}\right]} \frac{\partial\Theta}{\partial\mu_2}$$

$$\left(\nabla^{\Theta^*}_{\frac{\partial}{\partial\mu_1}}\left(d\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\mu_2}\right)\right)\right)e_1 = \nabla^{\Theta^*}_{\frac{\partial}{\partial\mu_1}}\nabla^{\Theta^*}_{e_1}\frac{\partial\Theta}{\partial\mu_2} = \nabla^{\Theta^*}_{e_1}\nabla^{\Theta^*}_{\frac{\partial}{\partial\mu_1}}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\mu_2}\right) -$$

$$- R^{\Theta^*}\left(e_1, \frac{\partial}{\partial\mu_1}\right)\frac{\partial\Theta}{\partial\mu_2} = d\left(\nabla^N_{\frac{\partial\Theta}{\partial\mu_1}}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\mu_2}\right)\right)e_1 -$$

$$- R^N\left(e_1(\Theta), \frac{\partial\Theta}{\partial\mu_1}\right)\frac{\partial\Theta}{\partial\mu_2}.$$

assim temos:

$$\langle g.d\Theta, \nabla^{\Theta^*}_{\frac{\partial}{\partial\mu_1}} d\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\mu_2}\right)\rangle = \langle g.d\Theta, d\left(\nabla^N_{\frac{\partial\Theta}{\partial\mu_1}}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\mu_2}\right)\right)\rangle - \langle g.d\Theta, R^N\left(d\Theta, \frac{\partial\Theta}{\partial\mu_1}\right)\frac{\partial\Theta}{\partial\mu_2}\rangle$$

$$= \langle d^*(gd\Theta), \nabla^N_{\frac{\partial\Theta}{\partial\mu_1}}\frac{\partial\Theta}{\partial\mu_2}\rangle + g\langle R^N\left(\frac{\partial\Theta}{\Theta\mu_1}, d\Theta\right)\frac{\partial\Theta}{\partial\mu_2}, d\Theta\rangle$$

$$(2.6)\quad \langle g.d\Theta, \nabla^{\Theta^*}_{\frac{\partial}{\partial\mu_1}} d\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\mu_2}\right)\rangle\Big|_{(0,0)} = \langle d^*(gdf), \nabla^N_V W\rangle + g\langle R^N(V,df)W, df\rangle$$

notando que:

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial\mu_1\partial\mu_2} = \nabla^{\mathbb{R}^k}_{\frac{\partial\Theta}{\partial\mu_1}}\frac{\partial\Theta}{\partial\mu_2} = (B_N \circ \Theta)\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\mu_1}, \frac{\partial\Theta}{\partial\mu_2}\right) + \nabla^N_{\frac{\partial\Theta}{\partial\mu_1}}\frac{\partial\Theta}{\partial\mu_2}$$

obtemos somando com 2.6:

$$\langle g.d\Theta, \nabla^{\Theta^*}_{\frac{\partial}{\partial\mu_1}} d\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\mu_2}\right)\rangle\Big|_{(0,0)} + \psi \,.\, \nabla^N_{\frac{\partial\Theta}{\partial\mu_1}}\frac{\partial\Theta}{\partial\mu_2}\Big|_{(0,0)} = \langle d^*(gdf), \nabla^N_V W\rangle +$$

$$+ \psi \,.\nabla^N_V W - g\langle R^N(V,df)df, W\rangle + \psi \,.(B_N \circ f)(V,W)$$

Como f é ponto crítico de $E_{\alpha,\psi}$ tem-se que:

$$\int_M \langle d^*(gdf),\ \nabla^N_V W\rangle + \psi\ .\nabla^N_V W = \delta E_{\alpha,\psi}(f)(\nabla^N_V W) = 0$$

daí:

(2.7)

$$\delta^2 E_{\alpha,\psi}(f)(V,W)=4\alpha(\alpha-1)\int_M (1+\|df\|^2)^{\alpha-2}\langle df,dV\rangle\langle df,dW\rangle+2\alpha\int_M (1+\|df\|^2)^{\alpha-1}\langle dV,dW\rangle$$

$$-2\alpha\int_M (1+\|df\|^2)^{\alpha-1}.\langle R^N(V,df)df,\ W\rangle + \int_M (B_N o f)(V,W).\psi$$

1.3 A Condição - C (ou de Palais-Smale)

Mostraremos nesta seção que o funcional α-ψ-energia satisfaz a condição-C de Palais-Smale também chamada de condição PS, que definiremos logo a seguir. Dispondo dessa propriedade ganhamos através da teoria de Ljusternik-Schnirelman em [10] a existência de pontos críticos para o funcional α-ψ-energia.

1.3.1 Definição:

Dizemos que uma variedade de Banach M é uma variedade de Finsler se existe uma função $\|\ \|:TM \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para cada ponto $p \in M$ exista uma carta trivializante do fibrado tangente $\varphi:\mathcal{O}_p xV \longrightarrow TM$ onde $\mathcal{O}_p$ é uma vizinhança aberta de p em M e V um espaço de Banach, satisfazendo as propriedades:

(i) Para cada $q \in \mathcal{O}_p$ a aplicação $v \longmapsto (\|\ \| o \varphi)(q,v)$ é uma norma para V.

(ii) Dados $q_o \in \mathcal{O}_p$ e $k>1$ existe uma vizinhança de q_o em $\mathcal{O}_p$ digamos $\mathcal{U}$ tal que para todo $q \in \mathcal{U}$ e $v \in V$:

$$\frac{1}{k}(\| \; \| \circ \varphi)(q_o,v) \leq (\| \; \| \circ \varphi)(q,v) \leq k\,(\| \; \| \circ \varphi)(q_o,v)$$

1.3.2 Definição:

Seja M uma variedade de Finsler $F:M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação. Dizemos que F satisfaz a condição-C se dado um subconjunto S de M satisfazendo:

(i) $|F|$ é limitado sobre S

(ii) Dado $n \in \mathbb{N}$ existe $p_n \in S$ tal que $\|df_{p_n}\| < \frac{1}{n}$

então F possui um ponto crítico em $\bar{S}$.

Veremos agora uma sequência de lemas que nos possibilitarão provar a condição-C para funcionais um tanto mais gerais.

1.3.3 Definição:

Chamamos a função $\ell: M x L^p_r(\eta) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\ell(x,s)=L(s(x))$ onde $F(s) = \int_M L(s)dA$ de lagrangeano associado com o funcional F.

1.3.4 Definição:

seja ℓ uma lagrangeano. Dizemos que ℓ é p-coercino se existe uma família $\{A_l\}_{l=1,\dots,s}$ de operadores diferenciais lineares de ordem ν de $L^p_r(\eta)$ em $L^p(\eta)$ com as seguintes propriedades:

(i) $\|s\|^p L^p_r(\eta) \leq c_1 \sum_{l=1}^{s} \|A_l s\|^p_{L^p(\eta)} + c_2 \|s\|^p_{L^p(\eta)} \quad \forall \; s \in L^p_r(\eta)$

(ii) $\dfrac{\partial^2 \ell}{\partial s^2}(V,V) \geq \sum_{l=1}^{s} |A_l V|^{p-2} . |A_l s|^2 \;\; \forall \;\; s,\ V \in C^\infty(\eta)$

1.3.5 Observações:

(a) os operadores A_l chegam na verdade em espaços $L^p(\xi_l)$ onde ξ_l é sub-fibrado vetorial de η; isto é, $L^p(\xi_l)$ é subespaço de $L^p(\eta)$.

(b) dizemos que ℓ é fortemente p-coercivo quando é possível tomar $C_2 = 0$.

1.3.6 Lema

O funcional α-ψ-energia $\varepsilon_{\alpha,\psi}$ possui um Lagrangeano p-coercivo.

Demonstração:

O lagrangeano do funcional $\varepsilon_{\alpha,\psi}$ é:

$$\ell_{\alpha,\psi}(f) = (1+\|df\|^2)^\alpha + f.\psi$$

$$\delta\ell_{\alpha,\psi}(f)(V) = 2\alpha\langle 1+\|df\|^2\rangle^{\alpha-1}.\langle df,dV\rangle + V.\psi$$

$$\delta^2\ell_{\alpha,\psi}(f)(V,W)=4\alpha(\alpha-1)(1+\|df\|^2)^{\alpha-2}.\langle df,dV\rangle\langle df,dW\rangle+2\alpha(1+\|df\|^2)^{\alpha-1}.\langle dV,dW\rangle$$

$$\delta^2\ell_{\alpha,\psi}(f)(V,V)=4\alpha(\alpha-1)(1+\|df\|^2)^{\alpha-2}\langle df,dv\rangle^2 + 2\alpha(1+\|df\|^2)^{\alpha-1}\,\|dv\|^2$$

$$\delta^2\ell_{\alpha,\psi}(f)(V,V) = 2\alpha(1+\|df\|^2)^{\alpha-1}\|dV\|^2.\left[1 + \frac{2(\alpha-1)\langle df,dV\rangle^2}{\|dV\|^2(1+\|df\|^2)}\right]$$

$$\delta^2\ell_{\alpha,\psi}(f)(V,V) \geq \|df\|^{2\alpha-2}.\|dV\|^2 \tag{3.1}$$

Pela definição da norma $L_1^{2\alpha}$ temos que o operador diferencial de 1ª ordem $\{d\}$ satisfaz a propriedade (i) da definição 1.3.3. Portanto o Lagrangeano $\ell_{\alpha,\psi}$ é p-coercivo.■

1.3.7 Lema:

Dado $m>0$ existe $c>0$ tal que $\forall\ x,\ y \in \mathbb{R}^k$ vale:

$$\int_0^1 |x + ty|^m dt \geq c|y|^m$$

Demonstração:

Se $y = 0$ a desigualdade é trivial para todo $c > 0$.

Se $y \neq 0$ dividimos por $|y|^m$ e obtemos:

$$F(x',y') = \int_0^1 \left| \frac{x}{|y|} + t\frac{y}{|y|} \right|^m dt = \int_0^1 |x'+ty'|^m dt \quad \text{onde} \quad \begin{cases} x' = \dfrac{x}{|y|} \in \mathbb{R}^k \\ \\ y' = \dfrac{y}{|y|} \in S^{k-1} \end{cases}$$

Reduzimos assim o problema a mostrar que existe $c>0$ tal que $F(x,y) \geq c \quad \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^k x S^{k-1}$.

Se $\|x\| \geq 2$ tem-se:

$$F(x,y) = \int_0^1 |x + ty|^m dt \geq \int_0^1 (|x|-|ty|)^m dt \geq \int_0^1 (2-1)^m dt = 1$$

Sendo a função F não-negativa e contínua temos que ela assume um mínimo no compacto $\bar{B}(0,2)xS^{k-1} \subset \mathbb{R}^k \times S^{k-1}$ digamos $F(x,y) \geq C_0$ $\forall\ (x,y) \in \bar{B}(0,2) \times S^{k-1}$. Agora é só tomarmos $c = \min \{1, C_0\}$.■

1.3.8 Lema:

Existe $c>0$ tal que $\forall\ f,g \in L_1^{2\alpha}(\eta)$ vale

$$\int_M (\delta\ell_{\alpha,\psi}(f)-\delta\ell_{\alpha,\psi}(g)(f-g)dA \geq c[\|f-g\|^2_{L_1^{2\alpha}} - \|f-g\|^{2\alpha}_{L_0^{2\alpha}}] \quad .$$

Demonstração:

Consideremos o caminho $h:[0,1] \longrightarrow \bar{\Omega}$ dado por $h(t) = g+t(f-g)$ então pelo lema 1.3.5 temos que dado $p \in M$:

$$\delta^2\ell_{\alpha,\psi}(h(t)(p))(f(p)-g(p), f(p)-g(p)) \geq \|d(h(t))p\|^{2\alpha-2}.\|d(f-g)p\|^2$$
$$\geq \|dg_p + td(f-g)_p\|^{2\alpha-2}.\|d(f-g)_p\|^2$$

por outro lado observando que:

$$\frac{d}{dt}(\delta\ell_{\alpha,\psi}(h(t))(f-g) = \delta^2\ell_{\alpha,\psi}(h(t))(f-g,h'(t))=\delta^2\ell_{\alpha,\psi}(h(t))(f-g,f-g)$$

obtemos usando o teorema fundamental do cálculo:

$$\int_0^1 \delta^2\ell_{\alpha,\psi}(h(t))(f-g,f-g)=\delta\ell_{\alpha,\psi}(h(1))(f-g)-\delta\ell_{\alpha,\psi}(h(0))(f-g) =$$
$$= [\ \delta\ell_{\alpha,\psi}(f) - \delta\ell_{\alpha,\psi}(g)]\ (f-g)$$

assim:

$$\int_M [\delta\ell_{\alpha,\psi}(f)-\delta\ell_{\alpha,\psi}(g)]\ (f-g) \geq \int_M \left[\ \int_0^1 |dg+td(f-g)|^{2\alpha-2}\right].|d(f-g)|^2$$

e pelo lema 1.3.6:

$$\int_M [\delta\ell_{\alpha,\psi}(f)-\delta\ell_{\alpha,\psi}(g)](f-g) \geq c\int_M |d(f-g)|^{2\alpha} = c[\|f-g\|^{2\alpha}_{L^{2\alpha}_1} - \|f-g\|^{2\alpha}_{L^{2\alpha}_0}\ ]\blacksquare$$

1.3.9 Observação:

Dado $\alpha>1$. A aplicação P de Ω em $L(\bar{\Omega}, \bar{\Omega})$ definida por P(f) onde P_f é a aplicação tal $P_f(\sigma)(p)$ = projeção ortogonal de $\sigma(p)$ sobre $TN_{f(p)}$ é C^∞ e leva conjuntos $L^{2\alpha}_1$-Limitados em conjuntos Limitados.

1.3.10. Lema

Dada uma sequência $L^p_r(\eta)$-limitada $\{S_i\} \subset L^p_r(\xi)$ então passando a uma subsequência podemos supor $(I-p_{s_i})(S_i-s_j) \xrightarrow{L^p_r(\eta)} 0$.

Demonstração:

Para cada $y \in N$ denotemos $q(y)$ a projeção ortogonal de $\mathbb{R}^k$ sobre TN_y assim $q:N \longrightarrow L(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^k)$ é uma aplicação C^∞ e considerando que N é subvariedade fechada C^∞ de $\mathbb{R}^k$ podemos estender q a uma aplicação C^∞ $Q:\eta \longrightarrow L(\eta,\eta)$ por $Q(x,v) = (x,q(v))$ que preserva as fibras, isto é, $Q(\eta_x) \subset L(\eta_x,\eta_x)$ e se $v \in N = \xi_x$ então $Q(x,v)$ é a projeção ortogonal de $T(\eta_x)_v = \mathbb{R}^k$ sobre $T(\xi_x)_v = TN_v$.

Sendo $(p_{s_i}\sigma)(x)$ é uma projeção ortogonal em $\mathbb{R}^k$ segue que $|(I-(p_{s_i}\sigma)(x)| \leq |\sigma(x)|$, logo pela definição de $\circledast\| \ \|_{L^p_0}$ temos $\|(I-p_{s_i})(\sigma)\|_{L^p_0} \leq \|\sigma\|_{L^p_0}$ em particular:

$$\|(I-p_{s_i})(s_i-s_j)\|_{L^p_0} \leq s_i-s_j\|_{L^p_0} \tag{3.2}$$

como no nosso caso $p=2\alpha$, $r=1$, $m=2$ podemos usar o caso D do teorema 1.1.2, isto é, $L^p_r(\eta) \subset L^p_0(\eta)$ e a inclusão é completamente contínua ou seja leva conjuntos $L^p_r(\eta)$-limitados em $L^p_0(\eta)$-relativamente compactos. Assim, como $\{s_i\}$ é limitada, podemos passar a uma subsequência que seja L^p_0-Cauchy e portanto da desigualdade 3.2 temos

$$\|(I-p_{s_i})(s_i-s_j)\|_{L^p_0} \longrightarrow 0$$

Pela compacidade de M podemos tomar um número finito de campos $X_1,\ldots..X_\nu$ tal que $\forall\ x \in M$ tenhamos TM_x = espaço gerado pelos vetores $X_1(x),\ldots.,X_\nu(x)$, assim definimos:

$$\|s\|^p_{L_k} = \|s\|^p_{L^p_0} + \sum_{i=1}^{\nu} \|X_i s\|^p_{L^p_{k-1}}$$

portanto basta mostrar que $\|X((I-p_{s_i})(s_i-s_j))\|_{L^p_{k-1}} \longrightarrow 0 \ \forall$ X campo C^∞ sobre M.

Provemos a identidade:

(3.3) $X((I-p_{s_i})(s_i-s_j) = (X(Q(s_i)))(s_i-s_j) + (Q(s_i)-Q(s_j))(Xs_j)$

sejam $s \in C^{\infty}(\xi)$ e $\sigma \in C^{\infty}(\eta)$. Definamos $Xp:C^{\infty}(\xi)xC^{\infty}(\eta) \longrightarrow C^{\infty}(\eta)$ $Xp(s,\sigma) = X(p_s\sigma) = X(Q(s)\sigma) = (X(Q(s)))\sigma + Q(s)(X\sigma)$ então a aplicação X_p se estende a uma aplicação C^{∞} de $L^p_k(\xi)xL^p_k(\eta)$ em $L^p_{k-0}(\eta)$ conforme o lema 19-10 em [9] ; usando esta definição temos:

(3.4) $X(I-p_{s_i})(s_i-s_j)) = Xs_i-Xs_j - Xp(s_i,s_i-s_j)$

$$= Xs_i-Xs_j - (X(Q(s_i)))(s_i-s_j)-Q(s_i)(Xs_i-Xs_j)$$

vejamos que $Xs = Q(s)(Xs)$ $\forall$ $s \in L^p_k(\xi)$ bastando para isso mostrarmo sno subespaço denso $C^{\infty}(\xi)$.

Com efeito,

Dado $s \in C^{\infty}$ temos $ds_x:TM_x \longrightarrow TN_{s(x)} = T(\xi_x)_{s(x)}$ como $(Xs)(x) = ds_x(X(x)) \in T(\xi_x)_{s(x)}$ então segue da definição de $Q(x,s(x))$ que $X_s = (Q(s))(Xs)$.

Usando a igualdade $X_s = Q(s)(Xs)$ na equação 3.4 obtemos a identidade 3.3.

Finalmente mostremos que:

$$X(Q(s_i))(s_i-s_j)+(Q(s_i)-Q(s_j))\ (Xs_j) \xrightarrow{L^p_{k-1}} 0$$

com efeito:

Tomemos $\varepsilon \in (0,1)$ tal que $k-\varepsilon > \frac{n}{p}$ então pelo teorema 1.1.2 caso D, $L^p_k(\eta) \subset L^p_{k-\varepsilon}(\eta)$ é completamente contínua daí passando a uma subsequência se necessário podemos supor $s_i \longrightarrow s_0$ em $L^p_{k-\varepsilon}(\eta)$, logo

(3.5) $\|s_i-s_j\|_{L^p_{k-\varepsilon}} \longrightarrow 0.$

Da continuidade da aplicação $P:L^p_{k-\varepsilon}(\eta) \longrightarrow L^p_{k-\varepsilon}(L(\eta,\eta))$ definida por $P(s)=Ps = Q(s)$ segue que $Q(s_i) \longrightarrow Q(s_0)$ em $L^p_{k-\varepsilon}(L(\eta,\eta))$, logo temos:

(3.6) $$\|Q(s_i) - Q(s_j)\|_{L^p_{k-\varepsilon}} \longrightarrow 0$$

conforme o lema 19.10, de [9], temos que a aplicação $\mathcal{H}_1$ definida de $L^p_a(L(\eta,\eta))xL^p_b(\eta)$ em $L^p_a(\eta)$ tal que $\mathcal{H}_1(H,\sigma)=H\sigma$, onde $(H\sigma)(x) = H(x)(\sigma(x))$ e $b > \frac{n}{p}$, $0 \leq a \leq b$ é bilinear e contínua, portanto:

$$\|H\sigma\|_{L^p_a} = \|\mathcal{H}_1(H,\sigma)\|_{L^p_a} \leq c_1.\|H\|_{L^p_a}.\|\sigma\|_{L^p_b}$$

observando que $Q(s_i) \in L^p_k(L(\eta,\eta))$ e $XQ(s_i) \in L^p_{k-1}(L(\eta,\eta))$ e tomando $H = X(Q(s_i))$, $\sigma = s_i - s_j$, $a = k-1$, $b = k - \varepsilon$ temos:

$$\|X(Q(s_i))(s_i-s_j)\|_{L^p_{k-1}} \leq c_1.\|X(Q(Si))\|_{L^p_{k-1}}.\|s_i-s_j\|_{L^p_{k-\varepsilon}}$$

Analogamente (ainda pelo lema 19.10) tem-se que a aplicação $\mathcal{H}_2$ definida de $L^p_b(L(\eta,\eta))xL^p_a(\eta)$ em $L^p_b(\eta)$ tal que $\mathcal{H}_2(H,\sigma) = H\sigma$ é bilinear e contínua, portanto:

$$\|H\sigma\|_{L^p_b} = \|\mathcal{H}_2(H,\sigma)\|_{L^p_b} \leq c_2.\|H\|_{L^p_b}.\|\sigma\|_{L^p_a}$$

observando que $L^p_k(L(\eta,\eta)) \subset L^p_{k-\varepsilon}(L(\eta,\eta))$ e tomando $H = Q(s_i) - Q(s_j) \in L^p_{k-\varepsilon}(L(\eta,\eta))$ e $\sigma = Xs_j \in L^p_{k-1}(\eta)$, temos,

$$\|(Q(s_i)-Q(s_j))(Xs_j)\|_{L^p_{k-\varepsilon}} \leq c_2\|Q(s_i)-Q(s_j)\|_{L^p_{k-\varepsilon}}.\|Xs_j\|_{L^p_{k-1}}$$

$$\|(Q(s_i)-Q(s_j))(Xs_j)\|_{L^p_{k-1}} \leq c_3\|(Q(s_i)-Q(s_j))(Xs_j)\|_{L^p_{k-\varepsilon}} \leq$$

$$\leq c_4\|Q(s_i)-Q(s_j)\|_{L^p_{k-\varepsilon}}.\|Xs_j\|_{L^p_{k-1}}$$

pela definição da norma $\| \|_{L^p_k}$ temos:

$$\|X(Q(s_l))\|_{L^p_{k-1}} \leq \|Q(s_l)\|_{L^p_k} \|Xs_j\|_{L^p_{k-1}} \leq \|s_j\|_{L^p_k}$$

assim obtemos a desigualdade:

$$\|X(Q(s_l))(s_l-s_j) + (Q(s_l)-Q(sj))(s_l-s_j)\|_{L^p_{k-1}} \leq$$

$$\leq \|X(Q(s_l))(s_l-s_j)\|_{L^p_{k-1}} + \|(Q(s_l)-Q(s_j)(s_l-s_j)\|_{L^p_{k-1}}$$

$$\leq c_1\|Q(s_l)\|_{L^p_k} \cdot \|s_l-s_j\|_{L^p_{k-\varepsilon}} + c_4\|Q(s_l)-Q(s_j)\|_{L^p_{k-\varepsilon}} \|s_j\|_{L^p_k}$$

Como $\|s_j\|_{L^p_k}$ é limitada então tem-se pela observação lema 1.3.8 que $\|Q(s_j)\|_{L^p_r}$ é limitada daí usando as convergências 3.5 e 3.6 temos:

$$X(Q(s_l))(s_l-s_j) + (Q(s_l)-Q(s_j))(s_l-s_j) \xrightarrow{L^p_{k-1}} 0. \blacksquare$$

1.3.11 Lema:

Seja $\mathcal{J}:L^p_k(\eta) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação c_1 com $d\mathcal{J}:L^p_k(\eta) \longrightarrow L^p_k(\eta)^*$ leva conjuntos limitados em conjuntos limitados. Seja $J = \mathcal{J}\big|_{L^p_r(\xi)}$ a restrição de $\mathcal{J}$ e seja $\{s_l\}$ uma sequência $L^p_k(\eta)$-limitada contida em $L^p_r(\xi)$ tal que $dJ_{s_l} \longrightarrow 0$, então passando a uma subsequência podemos supor $d\mathcal{J}_{s_l}(s_l-s_j) \longrightarrow 0$.

Demonstração:

Decompondo $s_i - s_j = p_{s_i}(s_i - s_j) + (I - P_{s_i})(s_i - s_j)$ e notando que $P_{s_i}(s_i - s_j) \in T(L^p_k(\xi))_{s_i} \Rightarrow d\mathcal{J}_{s_i}(P_{s_i}(s_i - s_j)) = dJ_{s_i}(P_{s_i}(s_i - s_j))$ obtemos:

$$d\mathcal{J}_{s_i}(s_i - s_j) = d\mathcal{J}_{s_i}(P_{s_i}(s_i - s_j)) + d\mathcal{J}_{s_i}((I - P_{s_i})(s_i - s_j))$$

$$= dJ_{s_i}(P_{s_i}(s_i - s_j)) + d\mathcal{J}_{s_i}((I - P_{s_i})(s_i - s_j))$$

portanto:

$$\|d\mathcal{J}_{s_i}(s_i - s_j)\| \leq \|dJ_{s_i}\| . \|p_{s_i}\| . \|s_i - s_j\|_{L^p_k} + \|d\mathcal{J}_{s_i}\| . \|(I - p_{s_i})(s_i - s_j)\|_{L^p_k}$$

Pela observação 1.3.9 $\|p_{s_i}\|$ é limitada.

Pelo lema 1.3.10 $\|(I - p_{s_i})(s_i - s_j)\| \longrightarrow 0$ (passando a uma subsequência), por hipótese temos que $\|s_i - s_j\|_{L^p_k}$ é limitada e $\|d\mathcal{J}_{s_i}\| \longrightarrow 0$ (por hipótese) assim concluímos da desigualdade acima o lema.■

1.3.12 Teorema:

O funcional α-ψ-energia $E_{\alpha,\psi}$ satisfaz a condição-C e é limitado inferiormente.

Demonstração:

Chamemos $\mathcal{J} = \varepsilon_{\alpha,\psi}$ e $J = \varepsilon_{\alpha,\psi}\Big|_{L^{2\alpha}_1(\xi)} = E_{\alpha,\psi}$, então:

$$(\delta\mathcal{J}_f - \delta\mathcal{J}_g)(V) = \int_M [\delta\ell_{\alpha,\psi}(f)(V) - \delta\ell_{\alpha,\psi}(g)(V)]\, dA$$

tomando $V=f-g$ e usando o lema 1.3.8 obtemos:

$$(\delta\mathcal{J}_f-\delta\mathcal{J}_g)(f-g) \geq c\, \|f-g\|^{2\alpha}_{L^{2\alpha}_1} - c\|f-g\|^{2\alpha}_{L^{2\alpha}_0},$$

ou ainda

$$(3.7)\quad (\delta\mathcal{J}_f-\delta\mathcal{J}_g)(f-g) \geq \|f-g\|_{L^{2\alpha}_1}\, \varphi(\|f-g\|_{L^{2\alpha}_1}) - \|f-g\|_{L^{2\alpha}_0}\, \varphi(\|f-g\|_{L^{2\alpha}_0})$$

onde $\qquad \varphi:\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \quad , \quad \varphi(t) = ct^{2\alpha-1}$

$1^{\underline{a}}$ Parte: J é limitado inferiormente.

Como N é compacta e está mergulhada isométricamente em $\mathbb{R}^k$ então N é limitada em $\mathbb{R}^k$, isto é, $I=\sup\{|x|:x\in N\} < \infty$.

Assim $\quad \|f\|^p_{L^p_0} = \int_M |f(x)|^p \leq I.\mathrm{vol}(M) \quad \forall \quad f \in L^{2\alpha}_1(\xi)$

portanto $L^{2\alpha}_1(\xi)$ é $L^{2\alpha}_0(\eta)$-limitado. Consequentemente o conjunto

$$U=\cap\{V\subset L^{2\alpha}_0(\eta) \text{ convexo com } L^{2\alpha}_1(\xi) \subset V\} \text{ (fecho convexo)}$$

é limitado também.

$$\text{Seja } A = \sup \{\|f\|_{L^{2\alpha}_0} : f \in U\}$$

como φ é uma função que leva limitado em limitado então existe $B_0>0$ tal que $\varphi((0,2A)) \subset (0,B_0)$ daí dados $f,\ g \in U$:

$$\|f-g\|_{L^{2\alpha}_0} \leq \|f\|_{L^{2\alpha}_0} + \|g\|_{L^{2\alpha}_0} < 2A \Rightarrow \varphi(\|f-g\|_{L^{2\alpha}_0}) < B_0$$

como $\|f-g\|_{L^{2\alpha}_0} \leq \|f-g\|_{L^{2\alpha}_1}$ temos:

$$(\delta\mathcal{J}_f-\delta\mathcal{J}_g)(f-g) \geq \|f-g\|_{L^{2\alpha}_1}.[\varphi(\|f-g\|_{L^{2\alpha}_1}) - B_0] \ \forall\ f,\ g \in U$$

Fixemos um $g \in L^{2\alpha}_1(\xi)$ e tomemos $f \in L^{2\alpha}_1(\xi)$ arbitrário.

Consideremos o caminho $\sigma_f:[0,1] \longrightarrow L_1^{2\alpha}(\eta)$ dado por:

$$\sigma_f(t) = g + t(f-g) \Rightarrow \sigma_f(t) - g = t(f-g) \quad \text{então}$$

$$(\delta\mathcal{J}_{\sigma_f(f)} - \delta\mathcal{J}_g)(t(f-g)) \geq t\|f-g\|_{L_1^{2\alpha}} \cdot [\varphi(t\|f-g\|_{L_1^{2\alpha}}) - B_o] \text{ , logo,}$$

$$\mathcal{J}(f) = \mathcal{J}(g) + \int_0^1 d\mathcal{J}_{\sigma_f(t)}(f-g)dt = \mathcal{J}(g) + \int_0^1 \frac{1}{t}\, d\mathcal{J}_{\sigma_f(t)}(t.(f-g))dt$$

$$\mathcal{J}(f) \geq \mathcal{J}(g) + d\mathcal{J}_{(g)}(f-g) + \|f-g\|_{L_1^{2\alpha}} \cdot \int_0^1 [\varphi(t\|f-g\|_{L_1^{2\alpha}}) - B_o\}] \text{ dt.}$$

Verifica-se a partir da definição do funcional α-ψ-energia que o funcional linear $\delta\mathcal{J}_g$ é limitado, daí existe $K > 0$ tal que $\|\delta\mathcal{J}_g\| \leq K$ e portanto:

$$\delta\mathcal{J}_g(g-f) \leq \|f-g\|_{L_1^{2\alpha}} .K \Rightarrow \delta\mathcal{J}_g(f-g) \geq - \|f-g\|_{L_1^{2\alpha}} \cdot K$$

temos assim que:

$$\mathcal{J}(f) \geq \mathcal{J}(g) + \|f-g\|_{L_1^{2\alpha}} \cdot \int_0^1 [\varphi(t\|f-g\|_{L_1^{2\alpha}}) - B] \text{ dt} \quad \text{onde } B = B_o+K$$

como $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$, fixando $\delta>0$ existe $r > 0$ tal que $\varphi\left(\frac{r}{2}\right) > 2(1+\delta)B$, segue da monotonicidade crescente de φ que se $t \geq \frac{1}{2}$ e $\|f-g\|_{L_1^{2\alpha}} \geq r$ então:

$$\int_0^1 \varphi(t\|f-g\|_{L_1^{2\alpha}}) \text{ dt} > \int_{\frac{1}{2}}^1 \varphi(t\|f-g\|_{L_1^{2\alpha}}) > \int_{\frac{1}{2}}^1 2(1+\delta)B = (1+\delta)B$$

Assim temos:

(3.8) $\quad \mathcal{J}(f) \geq \mathcal{J}(g) + \delta.B\|f-g\|_{L_1^{2\alpha}} \geq \mathcal{J}(g)$ quando $\|f-g\| \geq r$ e

$$(3.9) \qquad \mathcal{J}(f) \geq \mathcal{J}(g) - K\|f-g\|_{L_1^{2\alpha}} \geq \mathcal{J}(g) - Kr \quad \text{quando } \|f-g\| < r$$

Portanto $\quad J \geq \min\{\mathcal{J}(g),\ \mathcal{J}(g) - Kir\}$.■

2ª Parte: J satisfaz a condição C.

(a) Da desigualdade 3.8 verificamos que um conjunto $S \subset L_1^{2\alpha}(\xi)$ no qual J é limitado, é $L_1^{2\alpha}$-limitado.

Com efeito:

Digamos $J(f) \leq T \ \ \forall \ f \in L_1^{2\alpha}(\xi)$ então de 3.8 tem-se:

$$\|f-g\|_{L_1^{2\alpha}} \leq \frac{T-J(g)}{\delta B} \Rightarrow \|f\|_{L_1^{2\alpha}} \leq \|g\|_{L_1^{2\alpha}} + \frac{T-J(g)}{\delta B} \text{ se } \|f-g\|_{L_1^{2\alpha}} \geq r$$

enquanto que se $\|f-g\|_{L_1^{2\alpha}} < r$ é claro que $\|f\|_{L_1^{2\alpha}} < \|g\|_{L_1^{2\alpha}} + r$.

(b) Seja $\{f_n\} \subset S$ uma sequência satisfazendo a hipótese (ii) da definição 1.3.2, isto é, $\|\delta J_{f_n}\| \longrightarrow 0$. Usando o lema 1.3.11 temos $\delta\mathcal{J}_{f_n}(f_n - f_m) \longrightarrow 0$ e consequentemente:

$$(\delta\mathcal{J}_{f_n})(f_n - f_m) \longrightarrow 0$$

(c) Como $L_1^{2\alpha}(\eta) \subset L_0^{2\alpha}(\eta)$ é completamente contínua (teorema 1.1.2) e $\{f_n\}$ é limitada podemos passar para um subsequência $L_0^{2\alpha}$-Cauchy, assim:

$$\|f_{m'} f_m\|_{L_0^{2\alpha}} \longrightarrow 0 \Rightarrow \|f_n - f_m\|_{L_0^{2\alpha}} \cdot \varphi(\|f_n - f_m\|_{L_0^{2\alpha}}) \longrightarrow 0$$

(d) segue da desigualdade de (b), de (c) e da desigualdade (3.7) que

$$f_n - f_m{}_{L_1^{2\alpha}} \cdot \varphi(f_n - f_m{}_{L_1^{2\alpha}}) \longrightarrow 0$$

dado $\varepsilon > 0$, como $\lim\limits_{t \to 0} \varphi(t) = 0$ e φ é estritamente monótona tem-se $\varepsilon\varphi(\varepsilon) > 0$, além disso se $t\varphi(t) < \varepsilon\, \varphi(\varepsilon)$ então é fácil ver que $t < \varepsilon$ assim tomando $\bar{\varepsilon} = \varepsilon\varphi(\varepsilon) > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\forall \quad n,m \geq N_0 \ . \ \|f_n - f_m\|_{L_1^{2\alpha}} \cdot \varphi(\|f_n - f_m\|_{L_1^{2\alpha}} < \varepsilon\, \varphi(\varepsilon) \Rightarrow \|f_n - f_m\|_{L_1^{2\alpha}} < \varepsilon$$

portanto $\{f_n\}$ é uma sequência $L_1^{2\alpha}$-Cauchy em $L_1^{2\alpha}(\xi)$ e sendo este um subespaço fechado de $L_1^{2\alpha}(\eta)$ segue que $f_n \longrightarrow f \in L_1^{2\alpha}(\xi)$. Da continuidade de δJ temos $\|\delta J_f\| = \lim \|\delta J_{f_m}\| = 0$, daí f é um ponto crítico de J aderente a S.■

CAPÍTULO II

REGULARIDADE E EXISTÊNCIA

2.1. Regularidade dos Pontos Críticos do Funcional $E_{\alpha,\psi}$.

Trabalharemos aqui com a versão variacional do problema, isto é consideraremos o funcional $E_{\alpha,\psi}$ na forma:

$$(1.1) \qquad I(z,G) = \int_G F(x,z(x),\ \nabla z(x))dx$$

onde $G \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio, $x = (x_1,x_2) \in G$, $z:G \longrightarrow \mathbb{R}^k$ é uma aplicação $L_1^{2\alpha}$ com $z=(z^1,\ldots,z^k)$, $dx=dx_1dx_2$ e $\nabla z=(p_r^i)= p$ onde $p_r^i = \dfrac{\partial z^i}{\partial x_r}$.

Considerando-se uma estrutura conforme para S^2 e $\varphi:G \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^2$ um sistema de coordenadas dessa estrutura então dada $s:S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^k$, $s \in L_1^{2\alpha}(\xi)$, obtemos a aplicação $z=s\circ\varphi:G \longrightarrow \mathbb{R}^k$ assim para o caso do funcional $E_{\alpha,\psi}$ o integrando é:

$$(1.2) \qquad F(x,z,p) = (1+|p|^2)^{\alpha}+z.\psi$$

Toda esta seção terá o intuito de mostrar o seguinte resultado.

2.1.1. Proposição:

Existe uma constante $\alpha_o>1$ tal que para $\alpha\in(1,\alpha_o]$ e $\psi\in L^{2\alpha}$ tem-se que todo ponto crítico de $E_{\alpha,\psi}$ está em $L_2^{2\alpha}$ além disso se $\psi\in C^{\infty}$ então os pontos críticos também são C^{∞}.

Obteremos esta proposição usando a abordagem feita por Morrey em [8] sobre a diferenciabilidade dos pontos críticos de funcionais do tipo 1.1. onde trabalha-se com os funcionais cujo o integrando F satisfaz certas hipóteses as quais chamaremos "condições de Morrey" a saber:

2.1.2. Definição "Condições de Morrey"

(i) $F \in C^2_\mu$ em todas as variáveis ou F e F_p estão em C^{n-1}_μ para algum $n \geq 3$ e $\mu(0,1)$.

(ii) $|F_z|^2+|F_{zx}|^2+|F_{zz}|^2 \leq M_1(R).V^{2\nu}$

(iii) $|F_z|^2+|F_{zp}|^2+|F_{xp}|^2 \leq M_1(R).V^{2\nu-2}$

(iv) $m_1(R).V^{\nu-2}|\pi|^2 \leq \sum F_{p^i_r p^j_s} \Pi^i_r \Pi^j_s \leq M_1(R).V^{\nu-2}|\Pi|^2$ para toda aplicação $\Pi:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^k$

onde, $\nu \geq 2$, $0 \leq m \leq M$, $0 < m_1(R) \leq M_1(R)$, $|x|^2+|z|^2 \leq R^2$
$V=(1+|p|^2)^{1/2}$, $|\Pi|^2 = \sum(\Pi^i_r)^2$

2.1.3 Vejamos agora que de fato o nosso integrando 1.2 satisfaz estas condições.

(i) é óbvio a partir da definição de F que tal condição de regularidade (C^2_μ) é verdadeira em todas variáveis.

(ii) Notando que ψ é contínua pois $L^{2\alpha} \subset C^0$ temos que existe $T>0$ tal que $|\psi| \leq T$, como $F_z = \psi$, $F_{zx} = 0$, $F_{zz} = 0$ temos
$|F_z|^2+|F_{zx}|^2+|F_{zz}|^2=|\psi| \leq T^2.V^{2\nu}$, onde $\nu = 2\alpha$

(iii) $F_p=\alpha(1+|p|^2)^{\alpha-1}.(2|p|)$, $F_{pz}=0$, $F_{px}=0$. Assim,
$|F_p|^2+|F_{pz}|^2+|F_{px}|^2=4\alpha^2.|p|^2.(1+|p|^2)^{2\alpha-2}=4\alpha^2.|p|^2.(V^2)^{2\alpha-2} =$
$=4\alpha^2.\dfrac{|p|^2}{V^2}.V^{2\nu-2} \leq 4\alpha^2.V^{2\nu-2}$

(iv) $F(x_1,x_2,z^1,z^2,\dots,z^k,p_1^1,p_2^1,\dots,p_1^k,p_2^k) = (1+\sum(p_r^i)^2)^{\alpha} + z.\psi$

$F_{p_r^i p_s^j} = \alpha(1+|p|^2)^{\alpha-1}.2\delta^{ij}.\delta^{rs}+\alpha(\alpha-1)(1+|p|^2)^{\alpha-2}.2|p_s^j|.2|p_r^i|$

assim dada $\Pi:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^k$

$\sum F_{p_r^i p_s^j}\, \Pi_r^i\Pi_s^j = 2\alpha(1+|p|^2)^{\alpha-1}.|\Pi|^2+4\alpha(\alpha-1)(1+|p|^2)^{\alpha-2}.\sum \Pi_r^i\Pi_s^j$

notando que $ab\leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ tem-se para $\alpha\leq 2$ que:

$\sum F_{p_r^i p_s^j}\, \Pi_r^i\Pi_s^j \leq 2\alpha(1+|p|^2)^{\alpha-1}.|\Pi|^2.[1+ \frac{(\alpha-1)}{1+|p|^2}] \leq 4\alpha.V^{\nu-2}.|\Pi|^2$

notando que $ab\geq \frac{-a^2-b^2}{2}$ temos para

$\alpha\leq \frac{3}{2}\ \sum_{p_r^i p_s^j} \Pi_r^i\Pi_s^j \geq\ \geq 2\alpha(1+|p|^2)^{\alpha-1}.|\Pi|^2.[1- \frac{(\alpha-1)}{1+|p|^2}] \geq \alpha.V^{\nu-2}.|\Pi|^2$

Portanto a aplicação F satisfaz as condições (i)-(iv) com $\nu=2\alpha$, $m_1=\alpha$, $M_1=\max\{4\alpha^2,\ T^2,\ 4\alpha\}$.

2.1.4 Associada ao funcional 1.1 temos a equação de Euler-Lagrange $\frac{\partial}{\partial x_r}.F_{p_r^i} = F_{z^i}$ ou equivalentemente na forma integral (usaremos a convenção de Einstein para o somatório):

$$(1.3)\qquad \int_G(\zeta_r^i A_i^r+\zeta^i B_i)dx = 0 \text{ para todo } \zeta \in L_1^{2\alpha}(G,\mathbb{R}^k) \text{ com } \zeta|\partial G\equiv 0$$

onde $A_i^r(x,z,p)=F_{p_r^i}(x,z,p)$ e $B_i(x,z,p)=F_{z^i}(x,z,p)$.

Sejam $0<|h|<a$, $\zeta:G \longrightarrow \mathbb{R}^k$ com suporte em $D'\subset\subset G_a$, onde $G_a=\{x \in G$ tal que $B(x,a)\subset G\}$ e e_1, e_2 vetores unitários na direção dos eixos x_1 e x_2 de $\mathbb{R}^2$ respectivamente. Definamos:

$\zeta^{hi}(x) = h^{-1}[\zeta^i(x-he_{\alpha})-\zeta^i(x)]$ e $z^{hi}(x)=h^{-1}.[z^i(x+he_{\alpha})-z^i(x)]$.

Usando ζ^h em 1.3 obtemos:

$$\int_{D'} h^{-1}[\zeta^l_r(x-he_\alpha)-\zeta^l_r(x)]\ A^r_l + h^{-1}[\zeta^l(x-he_\alpha)-\zeta^l(x)]\ B_l=0$$

com a mudança de variável $y=x+he_\alpha$ nos 1º e 3º termos tem-se:

$$\int_{D'} h^{-1}[\zeta^l_r\Delta A^r_l + \zeta^l\Delta B_l] = 0 \tag{1.4}$$

onde $\begin{cases} \Delta A^r_l=A^r_l(x+he_\gamma z(x+he_\gamma)\nabla z(x+he_\gamma)) - A^r_l(x,z(x),\nabla z(x)) \\ \Delta B_l=B_l(x+he_\gamma,z(x+he_\gamma)\nabla z(x+he_\gamma))- B_l(x,z(x),\Delta z(x)). \end{cases}$

Chamando $\Delta z = z(x+he_\gamma)-z(x)$ e $\Delta p=p(x+he_\gamma)-p(x)$ e usando a série de Taylor com resto integral obtemos:

$$\Delta A^r_l = A^r_l(x+he_\gamma,z+Dz,p+\Delta p)-A^r_l(x,z,p)$$

$$= [\int_0^1 dA^r_l|(x+the_\gamma,z+t\Delta z,p+t\Delta p)]\ (he_\gamma,\Delta z,\Delta p)$$

$$= h.\int_0^1 A^r_{lx_\gamma} +(\int_0^1 A^r_{lz^J})(\Delta z^J) + (\int_0^1 A^r_{lp^J_s})(\Delta_{p^J_s})$$

analogamente temos:

$$\Delta B_l = h\int_0^1 B_{lx_\gamma} +(\int_0^1 B_{lz^J})(\Delta z^J)+(\int_0^1 B_{lp^J_s})(\Delta p^J_s)$$

portanto fazendo-se as substituições a equação 1.4 fica:

$$\int_{D'} \zeta^l_r[\int_0^1 A^r_{lx_\gamma} +(\int_0^1 A^r_{lz^J})z^{hJ}+(\int_0^1 A^r_{lp^J_s})z^{hJ}_s]+\zeta^l[\int_0^1 B_{lx_\gamma} +(\int_0^1 B_{lz^J})z^{hJ} + \tag{1.5}$$

$$+ (\int_0^1 B_{lp^J_s})z^{hJ}_s] = 0.$$

onde $z^{hl} = h^{-1}.\Delta z^l$ e $z^{hl}_r=h^{-1}\Delta p^l_r$.

Definamos agora, várias aplicações que utilizaremos a seguir:

$$W(x,t) = 1+|z+t\Delta z|^2+|p+t\Delta p|^2$$

$$A_h(x) = \int_0^1 [W(x,t)]^{-1+\frac{\nu}{2}}(x,t), \quad P_h(x) := \frac{1}{A_h(x)}\int_0^1 W(x,t)^{\frac{\nu-1}{2}}$$

$$Q_h(x) = \frac{1}{A_h(x)}\int_0^1 W(x,t)^{\frac{\nu}{2}}$$

$$a^{rs}_{hij}(x) = \frac{1}{A_h}\int_0^1 A^r_{ip_s^j}\,(x+the_\gamma, z+t\Delta z, p+t\Delta p)$$

$$b^r_{hij}(x) = \frac{1}{P_h.A_h}\int_0^1 A^r_{izj}(.,.,.) \qquad C^r_{hij}(x) = \frac{1}{P_h.A_h}\int_0^1 A^r_{izj}(.,.,.)$$

$$d_{hij}(x) = \frac{1}{Q_h.A_h}\int_0^1 B_{izj}(.,.,.) \qquad e^{r\gamma}_{hi}(x) = \frac{1}{P_h.A_h}\int_0^1 A^r_{ixj}(.,.,.)$$

$$f^{\gamma}_{hi}(x) = \frac{1}{Q_h.A_h}\int_0^1 B_{ix\gamma}(.,.,.).$$

Substituindo-se as integrais internas da equação 1.5 pelas equações acima obtemos:

(1.6)

$$\int_{D'} A_h\{\zeta^i_r[a^{rs}_{hij}z^{hj}_s+P_h b^r_{hij}z^{hj}+P_h e^{r\gamma}_{hi}] + \zeta^i[P_h c^r_{hij}z^{hj}_r+Q_h d_{hij}z^{hj}+P_h Q_h f^{\gamma}_{hi}]\}=0$$

Fixemos $x_o \in D'$, sejam $R>0$, $h_o>0$ tais que $B = B(x_o, R+a) \subset G_{ho}$ e $a \leq R$. Seja $\eta \in Lip_o B(x_o,R+a)$ com $\eta(x) = 1$ para todo $x \in \overline{B(x_o,R)}$

Definamos $Z = \eta.z_h$ e $\zeta = \eta.Z$ daí $\nabla\zeta = \eta.\nabla Z + \nabla\eta.Z$ e $\nabla Z = \eta.\nabla z_h + \nabla\eta.z_h$. Substituindo em 1.5 e usando a convenção Einstein, temos:

$$\int_{B(x_o,R+a)} A_h\{((\nabla Z+\nabla\eta.z_h).[a_h(\nabla Z-\nabla\eta.z_h)+b_hP_hZ+\eta e_hP_h]+z.[c_hP_h(\nabla Z-\nabla\eta.z_h) +$$

$$+d_hQ_hZ+f_hQ_h]\} = 0$$

$$(1.7)\quad \int_B A_h|a_h||\nabla Z|^2=\left|\int_B A_na_h\nabla\eta^2.Z_h^2-\int_B A_n(\nabla Z+\nabla\eta.z_h)(b_hP_hZ+\eta.e_hP_h) -\right.$$

$$\left.-\int_B A_hZc_hp_h(\nabla Z-\nabla\eta.z_h)-\int_B Z^2d_hQ_hA_h-\int_B A_hf_hQ_hZ\right|$$

A partir da desigualdade 2.1.2 verifica-se imediatamente que: $m_1\leq|a_h|\leq M_1$; $|b_h|,\ |c_h|,|e_h|\leq\sqrt{M_1}$; $|d_h|,\ |f_h|\ \leq M_1$.

Majoremos adequadamente cada termo da equação 1.7:

1º Termo:

$$\left|\int_B A_na_n(\nabla\eta)^2z_h^2\right| \leq M_1.\int_B A_h|\nabla\eta|^2z_h^2$$

2º Termo:

$$\left|\int_B A_h(\nabla Z+\nabla\eta.z_h)(b_hP_hZ+\eta e_hP_h)\right|\leq\int_B \frac{A_h}{2}|\nabla Z+\nabla\eta.z_h|^2+\int_B \frac{A_h}{2}|b_hP_hZ+\eta e_hp_h|^2$$

$$\leq\int_B \frac{A_h}{2}|\nabla Z+\nabla\eta.z_h|^2+\int_B A_hb_h^2P_h^2Z^2+\int_B A_h\eta^2e_h^2P_h^2$$

$$\leq\int_B \frac{A_h}{2}|\nabla Z+\nabla\eta.z_h|^2+M_1\int_B A_hQ_hZ^2+KM_1\int_B A_hQ_h$$

3º Termo:

$$\left|\int_B A_hZc_hP_h.(\nabla Z-\nabla\eta z_h)\right|\leq\int_B \frac{A_h}{2}(\nabla Z-\nabla\eta.z_h)^2+\int_B \frac{A_h}{2}.\ Z^2c_h^2p_h^2$$

$$\leq\int_B \frac{A_h}{2}(\nabla Z-\nabla\eta.z_h)^2+\frac{M_1}{2}.\int_B A_hQ_hZ^2$$

4º Termo:

$$\left|\int_B d_hQ_hZ^2A_h\right|\leq M_1\int_B A_hQ_hZ^2$$

$5^{\underline{o}}$ Termo:

$$\left|\int_B f_h Q_h Z\right| \leq \int_B \frac{f_h^2 A_h Q_h}{2} + \int_B \frac{A_h Q_h Z^2}{2} \leq \frac{M_1^2}{2}\int_B A_h Q_h + \frac{1}{2}\int_B A_h Q_h Z^2$$

NOTA: Para obtermos as majorações acima valemo-nos dos seguintes argumentos:

$$\begin{cases} xy \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2) \\ \frac{|x+y|^2}{2} \leq |x|^2+|y|^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} P_h^2 \leq Q_h \\ |\eta| \leq K. \end{cases}$$

Usando as majorações acima e a desigualdade:

$$\frac{1}{2}[|\nabla Z+\nabla\eta . z_h|^2+\nabla Z-\nabla\eta . z_h|^2] \leq |\nabla Z|^2+|\nabla\eta|^2|z_h|^2 \text{ obtemos}$$

$$(1.8) \qquad \int_B A_h(|a_h|-1)|\nabla Z|^2 \leq (M_1+1)\int_B A_h|\nabla\eta|^2 . z_h^2 + \left(\frac{5M_1}{2}+\frac{1}{2}\right)\int_B A_h Q_h Z^2 + $$
$$+ \left(KM_1+\frac{M_1^2}{2}\right)\int_B A_h Q_h$$

como $|a_h| \geq m_1 = \alpha > 1$, chamando $Z_1 = \frac{5M_1+1}{2(m_1-1)}$, $Z_2 = \frac{M_1+1}{M_1-1}$, $Z_3 = \frac{2KM_1+M_1^2}{2(m_1-1)}$ concluímos que:

$$(1.9) \int_{B(x_0,R+a)} A_n|\nabla Z|^2 \leq Z_1\int_{B(x_0,R+a)} A_h Q_h Z^2 + Z_2\int_{B(x_0,R+a)} A_h|\nabla\eta|^2 z_h^2 +$$
$$+ Z_3\int_{B(x_0,R+a)} A_h Q_h$$

Para continuarmos a demonstração da proposição 2.1.1 precisamos do seguinte:

2.1.5. Lema:

Sejam A_1^r e B_1 satisfazendo as condições 2.1.2 com $\nu\geq 2$ e seja $z\in H_\nu^1(G)\cap C_\mu^0(\bar{G})$, com $0<\mu<1$ uma solução de 1.3. então existem $R_1,C_1>0$ tais que:

$$\int_{B(x_0,R)} V^\nu(x).\xi^2(x)dx \leq \int_{B(x_0,R)} V^{\nu-2}|\nabla\xi(x)|^2\, dx$$

onde $0<R<R_1$, $\xi\in \overset{0}{\mathcal{H}}{}_\nu^1[B(x_0,R)]$ e R_1, C_1 dependem somente de ν, m_1; M_1, μ $h_\mu(Z,\bar{G}) = \sup|z(x)-z(y)|.(|x-y|)^{-\mu} = L$.

Demonstração:

Consideremos apenas o caso $\xi\in C_c^\infty\ [B(x_0,R)]$ (pois o caso geral fazemos por aproximação.) Definamos:

$$\xi^1(x) = \xi^2(x).[z^1(x)-z^1(x_0)]$$

Aproximando-se z por uma sequência $z_n\in C^\infty[B(x_0,R)]$ podemos usar ξ na equação 1.3, assim temos,

$$(1.10) \qquad 0=\int_{B(x_0,R)} \xi^2.[p_r^1A_1^r+(z^1-z_0)B_1] + 2(z^1-z_0)\xi.\xi_rA_1^r$$

$$A_1^r(x,z,p)-A_1^r(x,z,0)= \left[\int_0^1 dA_1^r|_{(x,z,tp)}\right](p)=p_s^j.\int_0^1 A^r_{1p_s^j}(x,z,tp)$$

$$p_r^1A_1^r(x,z,p)=p_r^1A_1^r(x,z,0) + p_r^1p_s^j\int_0^1 A^r_{1p_s^j}(x,z,tp)$$

$$\geq p_r^1A_1^r(x,z,0)+m_1|p|^2\int_0^1[1+t^2|p|^2]^{\frac{\nu}{2}-1} \text{ (condição 2.1.2)}$$

$$(1.11) \qquad \geq m_2V^\nu-K_2$$

Esta última desigualdade é obtida de: $\mu(t) = 1+t^2|p|^2 d\mu =$

$$=2t|p|^2 \Rightarrow |p|^2\int_0^1 [1+t^2|p|^2]^{\frac{\nu}{2}-1} dt \geq \frac{1}{2}\int_0^1 \mu^{\frac{\nu}{2}-1} d\mu = \frac{1}{\nu}.[\mu(1)^{\frac{\nu}{2}}-\mu(0)^{\frac{\nu}{2}}]$$

assim como $A_1^r(x,z,0) = F_{p_r^1}(x,z,0)=0$ temos:

$$p_r^1 A_1^r(x,z,p) \geq \frac{m_1}{\nu} V^{\nu} - \frac{m_1}{\nu}$$

Usando a desogualdade 1.11 na equação 1.10, temos as seguintes majorações;

$$m_2\int_B \xi^2.V^{\nu} \leq K_2\int_B \xi^2 - \int_B \xi^2(z^1-z_0^1)\xi\xi_r A_1^r \quad \begin{cases} |A| \leq M_1 V^{\nu-1} \\ |B| \leq M_1 V^{\nu} \end{cases}$$

$$m_2\int_B \xi^2.V^{\nu} \leq K_2\int_B \xi^2 + LR^{\mu}M_1[\int_B \xi^2.V^{\nu} + \int_B 2|\xi||\nabla\xi|V^{\nu-1}]$$

usando o fato: $\int_B 2|\xi||\nabla\xi|V^{\nu-1} = \int_B 2(|\xi|).(|\nabla\xi|)V^{\nu-2} \leq \int_B (\xi^2V^2+|\nabla\xi|^2)V^{\nu-2}$

temos:

$$m_2\int_B \xi^2V^{\nu} \leq K_2\int_B \xi^2 + LR^{\mu}M_1\int_B \xi^2V^{\nu} + LR^{\mu}M_1\int_B \xi^2V^{\nu} + LR^{\mu}M_1\int_B |\nabla\xi|^2V^{\nu-2}$$

usando a desigualdade de Poincaré (em [6] teorema 3.2.1) tem-se $\int_B \xi^2 \leq \frac{1}{2}R^2\int_B |\nabla\xi|^2$ e como $V^{\nu-2}\geq 1$ temos para R suficientemente pequeno (tal que $R^{2-\mu}\leq 1$): $\int_B \xi^2 \leq \frac{1}{2}R^{\mu}\int_B V^{\nu-2}.|\nabla\xi|^2$ daí:

$$(m_2-2LR^{\mu}M_1)\int_B \xi^2V^{\nu} \leq \left(\frac{K_2R^{\mu}}{2} + LR^{\mu}M_1\right)\int_B |\nabla\xi|^2.V^{\nu-2}$$

Portanto tomando $C_1=\left(\frac{K_2}{2}+LM_1\right) / (m_2-2LR^{\mu}M_1)$ e $R_1>0$ tal que $m_2>2LR_1^{\mu}M_1$, obtemos o lema.■

(2.1.6) Afirmação:

$$Z_1\int_{B(x_0,R+a)} A_h Q_h |z|^2 \leq Z_4 (R+a)^{\mu}.\int_{B(x_0,R+a)} A_h.|\nabla z|^2$$

Para provarmos essa afirmação utilizaremos as desigualdades:

(i) $C_1[(1+|a|^2)^r+(1+|b|^2)^r] \leq \int_0^1 [1+|a|^2+|b-a|^2.t]^r$

(ii) $\int_0^1 [1+|a|^2+|b-a|^2.t]^r \leq C_2.[(1+|a|^2)^r+(1+|b|^2)^r]$

$$Z_1\int_B A_h Q_h |z|^2 = Z_1\int_B \int_0^1 [1+|z+t\Delta z|^2+|p+t\Delta p|^2]^{\nu/2}.|z|^2$$

$\leq C_3\int_B \int_0^1 [1+|p+t\Delta p|^2]^{\nu/2}|z|^2$ pois z é contínua

$\leq 2C_3\int_B \int_0^1 [1+|p|^2+t|\Delta p|^2]^{\nu/2}|z|^2$

fazendo-se $a=p(x)$ e $b=p(x+he_\gamma)$ e usando (ii) tem-se

$$\leq C_4\int_B [(1+|p(x)|^2)^{\nu/2}+(1+|p(x+he_\gamma)|^2)^{\nu/2}]\ |z|^2$$

aplicando-se agora o lema 2.1.5 ás funções $V(x)=(1+|p(x)|^2)^{\frac{1}{2}}$ e $V(x+he_\gamma)=(1+|p(x+he_\gamma|^2)^{1/2}$ obtemos para $R+a<R_1$:

$$z_1\int_B A_h Q_h |z|^2 \leq C_5 (R+a)^{\mu}\int_B [(1+|p(x)|^2)^{\frac{\nu-2}{2}}+(1+|p(x+he_\gamma)|^2)^{\frac{\nu-2}{2}}]\ |\nabla z|^2$$

$$\leq C_6 (R+a)^{\mu}\int_B [\int_0^1 (1+|p|^2+t|\Delta p|^2)^{\frac{\nu-2}{2}}]\ .|\nabla z|^2$$

sendo a função real $\dfrac{1+|p|^2+t|\Delta p|^2}{1+|z+t\Delta z|^2+|p+t\Delta p|^2}$ contínua em [0,1] então existe $C>0$ tal que $1+|p|^2+t|\Delta p|^2 \leq C.(1+|z+t\Delta z|^2+|p+t\Delta p|^2)$, portanto

$$Z_1\int_B A_h Q_h |z|^2 \leq Z_4(R+a)^{\mu}\int_B A_h|\nabla z|^2 \;\blacksquare$$

Agora usando o fato de $|\nabla z|$ ser limitada e a afirmação 2.1.6 concluímos que:

$$\int_{B(x_0,R)} A_h|\nabla z|^2 \leq \int_{B(x_0,R+a)} A_h|\nabla z|^2 \leq z_5\left[\int_{B(x_0,R+a)} A_h|z_h|^2+\int_{B(x_0,R+a)} A_h Q_h\right].$$

Pela definição de η temos $\nabla z|_{B(x_0,R)}=\nabla z_h$ e sendo $A_h \geq 1$ segue que:

$$\int_{B(x_0,R)} |\nabla z_h|^2 \leq \int_{B(x_0,R)} A_h|\nabla z|^2 \leq Z_5\left[\int_{B(x_0,R+a)} A_h|z_h|^2+\int_{B(x_0,R+a)} A_h Q_h\right]$$

Da fórmula de Taylor com resto integral deduzimos

$z_h(x)=\int_0^1 z_{\gamma}(x+the_{\gamma})dt$ conforme teorema 3.6.8 em [8] vemos que as sequências $z_h \in L^{\nu}$, $A_h \in L^{\frac{\nu}{\nu-2}}$, $A_h Q_h \in L^1$ convergem nesses espaços em suas respectivas normas, para $z_h \longrightarrow p_{\gamma}$, $A_h \longrightarrow W_1$, $A_h Q_h \longrightarrow W_2^1$.

Da desigualdade de Hölder $\int_B A_h|z_h| \leq \|A_h\|_{L^{\frac{\nu}{\nu-2}}} \cdot \| |z_h|^2\|_{L^{\frac{\nu}{2}}}$

Portanto existe $\delta > 0$, tal que, para todo $|h| < \delta$, vale:

$$(1.12)\int_{B(x_0,R)} |\nabla z_h|^2 \leq \int_B A_h|\nabla z_h|^2 \leq [\, A_h \cdot |z_h|^2 + A_h Q_h \,]z_5 < M(\text{constante})$$

Assim z_h é uma sequência limitada em L^2_1, logo possui uma subsequência fracamente convergente $z_h \longrightarrow \mu$ em L^2_1. Daí como $z_h \longrightarrow p_\gamma$ em L^ν concluímos que $\mu = p_\gamma \in L^2_1$ isto é:

$$z \in L^2_2 \ \blacksquare$$

2.1.7 Prova da Proposição 2.1.1.

Acabamos de mostrar que as soluções fracas do problema variacional 1.1, ou seja as soluções de 1.3 estão em L^2_2. Em particular os pontos críticos do funcional α-ψ-Energia.

Vejamos agora que se $\psi \in L^{2\alpha}$ então os pontos críticos estão em $L^{2\alpha}_2$.

Seja s ponto crítico de $E_{\alpha,\psi}$, isto é, $Q_{\alpha,\psi}(s)=0$, daí:

$$(1.13)\quad \Delta s = -\frac{(\alpha-1)(d^2s,ds)}{(1+|ds|^2)}ds + A(ds,ds) + \frac{1}{2\alpha(1+|ds|^2)^{\alpha-1}}P_s(\psi),$$

onde A é a segunda forma fundamental do mergulho de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}^r$ com $|A|<C_1$

Logo $|\Delta s| \leq (\alpha-1)|d^2s| + C_1|ds|^2 + C_2|P_s(\psi)|$.

Usando Minkowski,

$$\|\Delta s\|_{L^{2\alpha}} \leq C_3(\alpha-1)\|d^2s\|_{L^{2\alpha}} + C_4\|ds\|_{L^{4\alpha}} + C_5\|P_s(\psi)\|_{L^{2\alpha}}$$

$$\leq C_3(\alpha-1)\|s\|_{L^{2\alpha}_2} + C_4\|s\|_{L^{4\alpha}_1} + C_5\|P_s(\psi)\|_{L^{2\alpha}}$$

Seja $C(2\alpha) = \|\Delta^{-1}\|_{L^P}$ então $\|s\|_{L^P_2} = \|\Delta^{-1}(\Delta s)\|_{L^P_2} \leq C(p)\|\Delta s\|_{L^P}$ assim

$$C(p)^{-1}.\|s\|_{L^{2\alpha}_2} \leq C_3(\alpha-1)\|s\|_{L^{2\alpha}_2} + C_4\|s\|_{L^{4\alpha}_1} + C_5\|P_s(\psi)\|_{L^{2\alpha}}$$

$$[C(p)^{-1} - C_3(\alpha-1)]\ \|s\|_{L^{2\alpha}_2} \leq C_4\|s\|_{L^{4\alpha}_1} + C_5\|P_s(\psi)\|_{L^{2\alpha}}$$

Utilizaremos um Teorema de Mergulho de Sobolev (em [ ]) que diz :

$$\begin{cases} L_{j+m}(\Omega \subset \mathbb{R}^n) \longrightarrow L_j^q\,(\Omega' \subset \mathbb{R}^k) \\ \text{se } mp = n,\ 1 \leq k \leq n,\ p \leq q < \infty \end{cases}$$

Daí tomando $m = j = 1$, $p = k = n = 2$ e $q = 4\alpha$ temos $L_2^2 \subset L_1^{4\alpha}$

portanto:

$$\|s\|_{L_2^{2\alpha}} < \infty \Rightarrow s \in L_2^{2\alpha}$$

A segunda parte da proposição 2.1.1 decorre agora do fato de os coeficientes A_r^l, B_l satisfazerem as hipóteses do teorema 5.6.3 em [8].

2.2. Lemas Auxiliares

Nesta seção mostraremos alguns resultados que utilizaremos na seção 2.3, quando trataremos da existência de esferas harmônicas.

A partir do integrando da segunda variação da α-Energia perturbada (Equação 2.7) obtemos o operador de Jacobi $L_{\alpha,\psi}(f)$ para $E_{\alpha,\psi}$, em um ponto crítico f, definindo-o de $L_2^{2\alpha}(f^*TN)$ em $L^{2\alpha}(f^*TN)$

tal que, $$\delta^2 E_{\alpha,\psi}(f)(V,W) = -\int_M \langle L_{\alpha,\psi}(f)(V),(W)\rangle dA$$

Usando a formulação variacional do funcional $\varepsilon_{\alpha,\psi}$ (Equação 1.1) obtemos:

$$\delta^2\varepsilon_{\alpha,\psi}(f)(V,W)=\int_M F_{z^l z^j}\langle V^l,W^j\rangle + F_{z^l p^j_s}\langle V^l,W^j_s\rangle + F_{p^j_s z^l}\langle V^l_r W^j\rangle + F_{p^l_j p^j_s}\rangle V^l_r,W^j_s\rangle$$

onde $V=(V^1,\dots,V^k)$, $W=(W^1,\dots,W^k)$, $V^i_r = \dfrac{\partial V_i}{\partial x_r}$, $W^j_s = \dfrac{\partial W^j}{\partial x_s}$

Como $F_{zz} = F_{zp} = F_{pz} = 0$ Temos

$$\delta^2\varepsilon_{\alpha,\psi}(f)(V,W)=\int_M F_{p^i_r p^j_s}\langle V^i_r, W^j_s\rangle = -\int_M \langle \frac{\partial}{\partial x_s}(F_{p^i_r p^j_s}).V^i_r + F_{p^i_r p^j_s} V^i_{rs}, W^j \rangle$$

assim o operador $\ell_{\alpha,\psi}(f)$ definido como a extensão de $L_{\alpha,\psi}(f)$ a todo $L^{2\alpha}_1(\eta)$ se escreve como:

$$\ell_{\alpha,\psi}(f)(V)= \frac{\partial}{\partial x_s}(F_{p^i_r p^j_s})V^i_r + F_{p^i_r p^j_s} V^i_{rs} = A\nabla^2 V + B\nabla V + C.V$$

onde $A^{ij}_{rs}=F_{p^i_r p^j_s}$, $B^{ij}_r = \dfrac{\partial}{\partial x_s}(F_{p^i_r p^j_s})$, $C^{ij} = 0$ observando-se que A^{ij}_{rs} satisfaz a condição 2.1.2 (iv) concluimos que $\ell_{\alpha,\psi}(f)$ é um operador elíptico e portanto sua restrição $\ell_{\alpha,\psi}(f)$ também é um operador diferencial de 2ª ordem elíptico.

É fácil observar na equação (2.7) do capítulo 1 que $\delta^2 E_{\alpha,\psi}(f)$ é simétrica e portanto $L_{\alpha,\psi}(f)$ é auto-adjunto.

2.2.1. Definição

Chamamos de operador de Fredholm uma aplicação linear contínua $L:E_1 \longrightarrow E_2$ entre espaços de Banach que possue imagem fechada, bem como núcleo e conúcleo (= E_2/Imagem) de dimensões finitas.

Chamamos índice de L ao número inteiro: DimKerL - DimcokerL onde KerL é o núcleo de L, e coker é o conúcleo de L.

Chamamos uma aplicação $h:V \longrightarrow W$, entre as variedades V (conexa) e W, de Fredholm, se h é C^1 e $dh|_x:TV_x$ —— TW_x for operador de Fredholm para cada x.

Da teoria clássica de operadores elípticos tem-se que todo operador T, elíptico, possui núcleo e conúcle dė dimensões finitas.

Vejamos sucintamente o processo que nos mostra isso:

Todo operador elíptico L datisfaz a desigualdade de Görding: $(\mu,L\mu)\geq C_1 \|\mu\|^2_{L^2_1}-C_2\|\mu\|^2_{L^2_0}$ (encontramos esse fato demonstrado por exemplo em [18] pag. 198). Nessa mesma referência pag. 199 obtém-se a partir da desigualdade de Görding que o operador $M=(L+\lambda_0)$ é completamente contínuo, isto é, leva conjuntos limitados em conjuntos relativamente compactos.

Seja $\{\mu_n\}\subset KerL$, uma sequência limitada então:

$$M^{-1}\mu_n=L\mu_n+\lambda_0\mu_n=\lambda_0\mu_n \Rightarrow M\mu_n = \frac{1}{\lambda_0}\mu_n$$

daí como M é completamente contínua temos que $M\mu_n$ possui uma subsequência convergente e portanto $\{\mu_n\}$ possui uma subsequência convergente daí pela caracterização de espaços de Banach de dimensão finita por sequências tem-se que dim Ker L $< \infty$.

Usando a propriedade clássica de operadores, Ker T = coker T^*,e o fato de $L_{\alpha,\psi}(f)$ ser auto-adjunto obtemos que $L_{\alpha,\psi}(f)$ é uma aplicação de Fredholm de índice zero.

2.2.2. Definição

Dado um espaço topológico X dizemos que um subconjunto de X é residual se ele pode ser expresso como intersecção de uma coleção enumerável de subconjuntos abertos e denso de X. Pelo teorema da categoria de Baire um subconjunto residual de um espaço métrico completo é denso.

2.2.3. Lema:

$ND^A=\{\psi \in L^{2\alpha}(M,\mathbb{R}^k) |$ tal que $\operatorname{Ker} L_{\alpha,\psi}(f) = 0$ para todo ponto crítico f de $E_{\alpha,\psi}$ com $E_{\alpha,\psi}(f) \leq A$ $\}$ é aberto e denso em $L^{2\alpha}(M,\mathbb{R}^k)$ para todo $A>0$.

Demonstração:

Seja f ponto crítico de $E_{\alpha,\psi}$. Para cada seção V do fibrado pull-back f^*TN definamos a aplicação $f_v:M \longrightarrow N$ por $f_v(x)=\exp_{f(x)}V(x)$, onde $\exp_{f(x)}:N_{f(x)} \longrightarrow N$ é a exponencial clássica.

Para r=0 ou 2 consideremos $\mathcal{U}_r$ vizinhanças da seção nula do fibrado $L_r^{2\alpha}(M,f^*TN)$ e definamos as aplicações $\varphi_r:\mathcal{U}_r — L_r^{2\alpha}(M,\mathbb{R}^k)$ por $\varphi_r(V)=f_v$. Notando que $\varphi_r(0)=f$ e $d\varphi_r|_0=$ identidade, temos pelo teorema da função inversa que existem vizinhanças $\mathcal{U}_r$ tal que $\varphi_r:\mathcal{U}_r — \varphi_r(\mathcal{U}_r)$ são difeomorfismos. Ao invés de vizinhanças de f trabalharemos no que se segue com as vizinhanças $\mathcal{U}_r$ da seção nula.

Definamos a aplicação $\mathcal{F}:\mathcal{U}_2 x L^{2\alpha}(M,\mathbb{R}^k) \longrightarrow L^{2\alpha}(M,f^*TN)$ tal que $\mathcal{F}(V,\chi) = (d\varphi o|_V)^{-1}.(Q_{\alpha,\psi}(fv))$.

$$\mathcal{F}:\mathcal{U}_2 x L^{2\alpha}(M,\mathbb{R}^k) \longrightarrow L^{2\alpha}(M,f^*TN)$$
$$(V,\chi) \longrightarrow (d\varphi_o|_v)^{-1}.(Q_{\alpha,\chi}(f_v))$$

Calculando a diferencial em $(0,\psi)$ obtemos

$$\delta\mathcal{F}|_{(o,\psi)}(V,\chi)=\delta(d\varphi_o|_O)^{-1}|_{Q_{\alpha,\psi}(f)}[\delta Q_{\alpha,\chi}(f_v)|_{(o,\psi)}.(V,\chi)]$$
$$=id.\left[\frac{\partial Q_{\alpha,\chi}(f_v)}{\partial f}\bigg|_{(o,\psi)}(V,\chi)+\frac{\partial Q_{\alpha,\chi}(f_v)}{\partial \chi}\bigg|_{(o,\psi)}.(V,\chi)\right]$$
$$=(\frac{\partial}{\partial f}Q_{\alpha,\psi}(f))(V)-P_f(\chi)$$

Pela definição de $Q_{\alpha,\psi}(f)$ e $L_{\alpha,\psi}(f)$ temos $(L_{\alpha,\psi}(f))(V)=(\frac{\partial Q_{\alpha,\psi}(f)}{\partial f})(V)$ assim obtemos:

$$\delta\mathcal{F}|_{(o,\psi)}(V,\chi)=(L_{\alpha,\psi}(f))(V)-P_f(\chi)$$

Concluímos que $\delta\mathcal{F}|_{(o,\psi)}$ é sobrejetiva pois dado $W\in L^{2\alpha}(M,f^*TN)$ tomando $V=0$ e $\chi=-N$ tem-se

$$\delta\mathcal{F}|_{(o,\psi)}(0,-W)=-P_f(-W)=P_f(W)=W.$$

Vejamos agora que o núcleo de $\delta\mathcal{F}|_{(o,\psi)}$ decompõe-se $L_2^{2\alpha}(M,f^*,TN)\oplus L^{2\alpha}(M,\mathbb{R}^k)$. Com efeito,

Sendo $L_{a,\psi}(f)$ uma aplicação de Fredholm temos que $L_2^{2\alpha}(M,f^*TN)= K\oplus X$ e $L^{2\alpha}(M,f^*TN)=\tilde{K}\oplus Y$, onde $K=\ker(L_{\alpha,\psi}(f))$, $Y=\mathrm{Im}(L_{\alpha,\psi}(f))$ com K e $\tilde{K}$ subespaços de dimensão finita.

Seja $L^{2\alpha}(M,(f^*TN)^{\perp}) = (I-P_f)(L^{2\alpha}(M,\mathbb{R}^k))$ onde I=identidade então:

$$\mathrm{Ker}\ \delta\mathcal{F}|_{(o,\psi)}=\{(k+V,W^{\perp}+L_{\alpha,\psi}(f)(V)):k\in K;\ v\in X,\ W^{\perp}\in L^{2\alpha}(M,f^*TN)\}$$

pois:

$\delta\mathcal{F}|_{(o,\psi)}(V,\chi)=0$ se só se $P_f(\chi)=L_{\alpha,\psi}(f)(V)$ se só se $\chi=W^1+L_{\alpha,\psi}(f)(V)$ assim chamando $F = X \times \tilde{K}$ temos que:

$$L_2^{2\alpha}(M,f^*TN) \oplus L^{2\alpha}(M,\mathbb{R}^k)= \text{Ker } \delta\mathcal{F}|_{(o,\psi)} \oplus F$$

Como $\delta\mathcal{F}|_{(o,\psi)}$ é sobrejetiva e Ker $\delta\mathcal{F}|_{(O,\psi)}$ decompõe-se concluímos pelo teorema da função implícita que:

$\mu=\{(f,\psi)|\mathcal{F}(\varphi_2(f),\psi)=0\} = \{(f,\psi)|Q_{\alpha,\psi}(f) = 0\}$

$=\{(f,\psi)|$ f é ponto crítico de $E_{\alpha,\psi}\}$ é uma subvariedade de $L_2^{2\alpha}(M,N) \times L^{2\alpha}(M,\mathbb{R}^k)$.

Afirmação: $\Pi:\mu \longrightarrow L^{2\alpha}(M,\mathbb{R}^k)$ dada por $\Pi(f,\psi)=\psi$ é uma aplicação de Fredholm de índice zero e $\delta\pi|_{(f,\psi)}$ é sobrejetiva se só se $L_{\alpha,\psi}(f)$ é sobrejetiva.

Com efeito,

Sabemos que o espaço tangente a μ em (f,ψ) é:

$$T\mu_{(f,\psi)}=\text{Ker } \delta\mathcal{F}|_{(o,\psi)}=\{(V,\chi)|L_{\alpha,\psi}(f)(V) - P_f(\chi) = 0 \}$$

assim temos,

2.1. $$\delta\pi|_{(f,\psi)}(V,\chi)= \chi = P_f(\chi) + \chi^{\perp} = L_{\alpha,\psi}(f)(V) + \chi^{\perp}$$

Seja $(V,\chi) \in \text{Ker } \delta\pi|_{(f,\psi)}$, isto é, $\delta\pi|_{(f,\psi)}(V,\chi)=0$ então $\chi = 0$ e daí $L_{\alpha,\psi}(f)(V)=P_f(\chi)=P_f(0)=0 \Rightarrow V \in \text{Ker } L_{\alpha,\psi}(f)$ portanto $\text{Ker } \delta\pi|_{(f,\psi)} \subset \text{Ker } L_{\alpha,\psi}(f) \oplus \{0\}$. Por outro lado tomando $(V,0) \in$ $\in \text{Ker } L_{\alpha,\psi}(f) + \{0\}$ temos $(V,0) \in T\mu_{(f,\psi)}$ pois: $L_{\alpha,\psi}(f)(V)=0=P_f(0)$ e $\delta\pi|_{(f,\psi)}(V,0)=0 \Rightarrow \text{Ker } L_{\alpha,\psi}(f) \oplus \{0\} \subset$ $\subset \text{Ker } \delta\pi|_{(f,\psi)}$ assim:

2.2. $$\text{Ker } \delta\pi|_{(f,\psi)} = \text{Ker } L_{\alpha,\psi}(f) \oplus \{0\}$$

Mostremos a igualdade

2.3. $$\operatorname{Im} \delta\pi|_{(f,\psi)} = \operatorname{Im} L_{\alpha,\psi}(f) \oplus L^{2\alpha}(M,(f^{*}TN)^{\perp})$$

Com efeito, das desigualdades em 2.1 temos obviamente a inclusão $\subset$, seja $W \in \operatorname{Im} L_{\alpha,\psi}(f)$ e $\chi^{\perp} \in L^{2\alpha}(M,(f^{*}TN)^{1})$ então tomando $V=L^{-1}_{\alpha,\psi}(f)(W)$ e $\chi = W + \chi^{1}$ obtemos:

.$(V,\chi)\in T\mu_{(f,\psi)}$ pois $P_f(\chi)=P_f(W)+P_f(\chi^{\perp})=W+0 = L_{\alpha,\psi}(f)(V)$

.$W+\chi^{\perp} \in \operatorname{Im} \delta\pi|_{(f,\psi)}$ pois $\delta\pi|_{(f,\psi)}(V,\chi)=L_{\alpha,\psi}(f)(V)+\chi^{1}=W+\chi^{1}$

assim tem-se a inclusão $\supset$.

Como $L_{\alpha,\psi}(f)$ é Fredholm temos $\operatorname{Dim}\left[\operatorname{Ker} L_{\alpha,\psi}(f)\right]$ e

$\operatorname{Dim}\left[\dfrac{L^{2\alpha}(M,f^{*}TN}{\operatorname{Im} L_{\alpha,\psi}(f)}\right]$ finitas, logo segue das igualdades 2.2 e 2.3 que:

$\operatorname{Dim}[\operatorname{Ker} \delta\pi|_{(f,\psi)}] < \infty$

$\operatorname{Dim}[L^{2\alpha}(M,\mathbb{R}^{k})/\operatorname{Im} \delta\pi|_{(f,\psi)}] < \infty$, pois

$$\frac{L^{2\alpha}(M,\mathbb{R}^{k})}{\operatorname{Im} \delta\pi|_{(f,\psi)}} = \frac{L^{2\alpha}(M,f^{*}TN)\oplus L^{2\alpha}(M,(f^{*}TN)^{\perp})}{\operatorname{Im} L_{\alpha,\psi}(f) \oplus L^{2\alpha}(M,(f^{*}TN)^{\perp})} \simeq \frac{L^{2\alpha}(M,f^{*}TN)}{\operatorname{Im} L_{\alpha,\psi}(f)}$$

Deste último isomorfismo obtemos também que $\operatorname{Dim}[\operatorname{coker} L_{\alpha,\psi}(f)] = \operatorname{Dim}[\operatorname{coker} \delta\pi|_{(f,\psi)}]$ e portanto π é Fredholm também de índice zero (pois $L_{\alpha,\psi}$ tem índice zero). Devido a igualdade 2.3 temos que $\delta\pi|_{(f,\psi)}$ é sobrejetiva se só se $L_{\alpha,\psi}(f)$ o for.

Concluímos da afirmação acima que ND^{A} é o conjunto dos valores regulares de $\pi|_{\mu^{A}}$.

Vejamos que ND^{A} é aberto e denso, para isso usaremos o procedimento de S. Smale em [12] :

ND^A é aberto, pois

Seja $\{\psi_n\} \subset L^{2\alpha}(M,\mathbb{R}^k)\backslash ND^A$, isto é cada $n \in \mathbb{N}$ existe um ponto crítico p_n de $\pi|_{\mu^A}$ com $\pi(p_n)=\psi_n$. Suponhamos $\psi_n \longrightarrow \psi$. Como $E_\alpha(p_n) \leq A \ \forall\ n$, então $E_{\alpha,\psi}$ é limitado sobre $\{p_n\}$ daí pela condição-C (teorema 1.3.11) existe uma subsequência de $\{p_n\}$ convergente, digamos $p_n \longrightarrow p$. Daí pela continuidade da π e $\delta\pi$ tem-se: $\pi(p)=\text{Lim } \pi(p_n) = \text{Lim } \psi_n = \psi$ e $\delta\pi|_p = \text{Lim } \delta\pi|_{p_n} = 0$. Logo p é ponto crítico e ψ é valor crítico de π, isto é, $\psi \in L^{2\alpha}(M,\mathbb{R}^k)\backslash ND^A$ portanto $L^{2\alpha}(M,\mathbb{R}^k)\backslash ND^A$ é fechado.

ND^A é denso, pois

Sejam $x_0 \in \mu^A$ e $\mathcal{U}_1$ vizinhança em $L^{2\alpha}(M,\mathbb{R}^k)$ de $\pi(x_0)$. Seja $V \subset \mu^A$ uma vizinhança de x_0 e $\varphi: U\subset E \longrightarrow V$ uma carta local para μ^A em x_0, onde E é um espaço de banach e $\varphi(y_0)=x_0$. Seja $f=\pi\circ\varphi: U \longrightarrow L^{2\alpha}(M,\mathbb{R}^k)=E'$ então como $\ker\ \delta\pi|_{x_0}$ tem dimensão finita podemos escrever $E = E_1 \times \text{Ker } df|_{x_0}$. Chamando $y_0 = (p_0,q_0)$ vemos que a diferencial de f com relação a primeira variável é injetiva para todo (p,q) bem próximos de (p_0,q_0) logo usando o teorema da função implícita existe vizinhança $D_1 x D_2$ de (p_0,q_0) em $E_1 x \text{ Ker } df|_{x_0}$ tal que f restrita a $D_1 x \{q\}$ é difeomorfismo para todo $q \in D_2$. Assim a sobrejetividade de f em $D_1 x\ D_2$ depende da sobrejetividade na $2^{\underline{a}}$ variável.

Seja $P: E' \longrightarrow E'/\text{Im } df|_{x_0}$ a projeção canônica. Considere a aplicação $\Phi: \{p_0\} x\ D_2 \longrightarrow E'/\text{Im } df|_{x_0}$ dada por $\Phi(q)=(P\circ f)(p_0,q)$, como

π é Fredholm temos Dim (Ker $df|_{x_0}$) $< \infty$ e Dim (E'/Im $df|_{x_0}$)$< \infty$. Logo pelo teorema de Sard existe $z \in P(\mathcal{U}_1)$ valor regular de Φ. Assim tomando $\psi \in P^{-1}(z) \cap U_1$ vemos que ψ é uma valor regular de π em $\mathcal{U}_1$.

2.2.4. Observação:

Considerando que $C^{\infty}(M,\mathbb{R}^k)$ é denso em $L^{2\alpha}(M,\mathbb{R}^k)$ e que ND^A é aberto nós podemos tomar $\psi \in C^{\infty}(M,\mathbb{R}^k) \cap ND^A$ de norma $L^{2\alpha}$ arbitrariamente pequena. Assim pela proposição 2.1.1 para tais ψ tem-se que todos os pontos críticos de $E_{\alpha,\psi}$ são C^{∞}. Vemos então pelo teorema de Uhlenbeck em [5] pg. 443 que todos os pontos críticos de $E_{\alpha,\psi}$ de α-Energia $E_{\alpha} \leq A$ são fracamente não-degenerados de índice finito portanto a teoria de Morse sobre variedades de Banach pode ser aplicada a $E_{\alpha,\psi}$.

2.2.5 Lema:

Seja α_0 dado pela proposição 2.1.1, e $\alpha \in (1,\alpha_0)$. Seja N uma variedade compacta com $\pi_0(N)=\ldots=\pi_{r-1}(N)=0$ e $\pi_r(N)\neq 0$. Então existe um ponto crítico não-constante para $E_{\alpha}:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, cujo índice é $\leq r-2$, onde $\Omega = L_1^{2\alpha}(S^2,N)$. Além disso existe uma constante B, idependente de α, tal que o ponto crítico pode ser escolhido de modo que tenha α-Energia $\leq (1+B^2)^{\alpha}$.

Demonstração:

Seja $\pi:\Omega \longrightarrow M$, a função dada por $\pi(f)=f(\infty)$ onde ∞ é o polo norte de S^2. π é uma fibração cuja fibra é o espaço das aplicações de S^2 em M que preservam o ponto base. A sequência exata da fibração:

$$\cdots \longrightarrow \pi_{l-2}(\text{FIBRA}) \longrightarrow \pi_{l-2}(\Omega) \xrightarrow{\pi_*} \pi_{l-2}(N) \longrightarrow \cdots$$

ainda , a aplicação de cisão i_* sendo induzida pela aplicação $i:N \longrightarrow \Omega$ dada por $i(x) \equiv$constante $= x$. Assim nós temos uma sequência exata curta:

$$2.4. \quad 0 \longrightarrow \pi_{l-2}(\text{FIBRA}) \longrightarrow \pi_{l-2}(\Omega) \underset{\pi_*}{\overset{i_*}{\rightleftarrows}} \pi_{l-2}.(N) \longrightarrow 0$$

Considerando que $\pi_{r-2}(\text{FIBRA}) \cong \pi_r(N) \neq 0$ segue de 2.4 que $\pi_{r-2}(\Omega, i(N)) \neq 0$.

Tomemos $A>0$ e $\varepsilon>0$ constantes tais que:

(2.5) $\|\psi\|_{L^{2\alpha}} < \varepsilon \Rightarrow E^{-1}_{\alpha,\psi}((-\infty,A]\ ) \subset E^{-1}_{\alpha}((-\infty,\ A+1]\ )$, e a aplicação

$\pi_{r-2}(E^{-1}_{\alpha,\psi}((-\infty,A]\ ),\ i(N)) \longrightarrow \pi_{r-2}(\Omega, i(N))$, seja não nula.

Usando a desigualdade de Morse: (pg. 64 em [13]):

$$\sum_{m=0}^{r-2} (-1)^{r-2-m}.R_m \leq \sum_{m=0}^{r-2} (-1)^{r-2-m}.\ C_m$$

onde:

$R_m = \dim H_m(E^{-1}_{\alpha,\psi}\ [-\infty,A]\ ) =$ i-ésimo número de betti.

$C_m =$ número de pontos críticos de $E_{\alpha,\psi}$ de índice m.

temos que $C_m \neq 0$ para algum $m \leq r-2$ pois $R_1 = \ldots = R_{r-3} = 0$ e $R_{r-2} \neq 0$. Assim existe um ponto crítico $f_{\alpha,\psi}$ para $E_{\alpha,\psi}$ em $E^{-1}_{\alpha,\psi}((-\infty,A]\ )$, isto é, $E_{\alpha,\psi}(f)_{\alpha,\psi} \leq A$. com índice $\leq r-2$ que representa um elemento não-nulo de $\pi_{r-2}(\Omega, i(N))$.

Suponhamos mostrado a seguinte:

2.2.6. Afirmação:

Existem constantes positivas B (independente de α), δ e C tais que $f_{\alpha,\psi}$ satisfaz:

2.6. $$E_{\alpha,\psi}(f_{\alpha,\psi}) \geq 1 + \delta - C\|\psi\|_{L^{2\alpha}}$$

2.7. $$E_{\alpha,\psi}(f_{\alpha,\psi}) \leq (1+B^2)^{\alpha}+C\|\psi\|_{L^{2\alpha}}$$

Então escolhendo uma sequência $\psi_n \longrightarrow 0$ em $L^{2\alpha}$ e f_{α,ψ_n} os pontos críticos fracamente não-degenerados de índice $\leq k-2$ temos:

(i) $E_{\alpha}(f_{\alpha,\psi_n}) \leq A+1$ (segue de 2.5 e $E_{\alpha,\psi_n}(f_{\alpha,\psi_n}) \leq A$)

(ii) para cada $i \in \mathbb{N}$, $\exists\ \eta_i \in \mathbb{N}$ tq $\|\delta E_{\alpha}(f_{\alpha,\psi_{n_i}})\| \leq \frac{1}{n_i}$

Pois $$\delta E_{\alpha}(f_{\alpha,\psi_n})(V) = \delta E_{\alpha,\psi_n}(f_{\alpha,\psi_n})(V) - \int_M V.\psi_n = - \int V.\psi_n$$ e

$$\|E_{\alpha}(f_{\alpha,\psi_n})\| \leq \|\psi_n\|_{L^{2\alpha}} \longrightarrow 0$$

Como $E_{\alpha}=E_{\alpha,0}$ satisfaz a condição C (teorema 1.3.11) então f_{α,ψ_n} possui uma subsequência convergindo para um ponto crítico f_{α} de índice $\leq k-2$ e de 2.6 e 2.7 temos $1+\delta \leq E_{\alpha}(f_{\alpha}) \leq (1+B^2)^{\alpha}$. Logo f_{α} é não constante pois $E_{\alpha}(f_{\alpha})>1$.

Portanto o lema 2.2.5 é uma consequência da afirmação 2.2.6 a qual trataremos agora de mostrar.

Considere a subvariedade $N_0=\{s \in L_1^{2\alpha}(M,N) |$ s é constante das aplicações triviais de Ω. (Note que $N_0=E_\alpha^{-1}(1)$).

Observe que dado $y \in N_0 \subset L_1^{2\alpha}(M,N)$ então:

$TL_1^{2\alpha}(M,N)y=L_1^{2\alpha}(M,TN_y)$ e $TN_{0y} = \{a \in TL_1^{2\alpha}(M,N)_y/da \equiv 0\}$

assim construimos um fibrado normal para N_0 em um sentido L^2-Fraco:

$$\eta_y=\{v \in L_1^{2\alpha}(M,TN_y):\langle v,a\rangle = \int_M v.a=0 \ \forall \ a \in TN_{oy} \ \}$$

$$\eta = \bigcup_{y\in N_o} \eta_y \subset TL_1^{2\alpha}(M\oplus N)|_{N_o}$$

Usemos a exponencial exp: $TN \longrightarrow N$ para definir a aplicação $e:TL_1^{2\alpha}(M,N) \longrightarrow L_1^{2\alpha}(M,N)$ dada por:

$$e(s,v)(x) = \exp(s(x),\ v(x))$$

Então vale a seguinte:

2.2.7. Afirmação:

A restrição da aplicação e a η é um difeoformismo de uma vizinhança da seção nula de η em uma vizinhança de $N_0 \subset L_1^{2\alpha}(M,N)$.

De fato,

note que $e(y,0) = \exp(y,0)=y$, isto é, $e(y,0)\in N_0$ calculando a diferencial de e temos :

$$de|_{(y,0)}(a,v)(x)= d\exp|_{(y,0)}(a,v(x)) \ \forall \ a \in TN_y \quad e \quad v \in \eta_y$$

escolhendo η_y de modo que $de_{(y,0)}:TN_y \oplus \eta_y \longrightarrow TL_1^{2\alpha}(M,N)_y$ seja um isomorfismo a afirmação é uma consequência imediata do teorema da função implícita.

2.2.8. Lema

Dado $\alpha > 1$, existe um $\delta > 0$ dependendo de α e uma retração $\sigma : E_\alpha^{-1}[1,1+\delta] \times [0,1] \longrightarrow L_1^{2\alpha}(M,N)$ de $E_\alpha^{-1}[1,1+\delta)$ sobre $E_\alpha^{-1}[1]$, isto é, σ satisfaz:

(i) é continua

(ii) $\sigma(s,0) \in E_\alpha^{-1}[1]$ e $\sigma(s,1)=s \quad \forall \quad s \in E_\alpha^{-1}[1,1+\sigma]$

(iii) $\sigma(s,t) \in E_\alpha^{-1}[1,1+\delta] \;\forall\; t \in [0,1]$

Demonstração:

Seja $s \in E_\alpha^{-1}[1,1+\delta]$, isto é, $E_\alpha(s)=\int_M (1+|ds|^2)^2 \in [1,1+\delta]$ usando o fato que $(1+\lambda)^2 \geq 1+\lambda^2 \;\forall\; \alpha>1$ e $\lambda \geq 0$, temos (considerando $M=S^2$ e $\int_{S^2} dA = 1$, $\Delta + \int_M |ds|^{2\alpha} \leq \int_M (1+|ds|^2)^\alpha \leq 1+\delta$, donde $\int_M |ds|^{2\alpha} < \delta$

Considerando-se a desigualdade e Poincaré:

$$\int |s|^{2\alpha} \leq C_\alpha . \int |ds|^{2\alpha} \quad \forall \quad s \in L_1^{2\alpha}(M,\mathbb{R}^k) \text{ temos}$$

$$\|s-\int_M s\|_{L_1^{2\alpha}}^{2\alpha} = \int_M |s-\int s|^{2\alpha} dA + \int_M |d(s-\int s)|^{2\alpha} dA$$

$$\leq K_\alpha \int_M |d(s-\int s)|^{2\alpha} = K_\alpha . \int_M |ds|^{2\alpha} < K_\alpha . \delta$$

assim,

$$\|s-\int_M \|_{L_1^{2\alpha}} < K_\alpha . \delta^{\frac{1}{2\alpha}}$$

Portanto pela afirmação 2.2.27 para δ suficientemente pequeno existe $y \in N$ e $v \in \eta_y$, pela afirmação 2.2.7, tais que $e(y,v)=s$ e tanto v_∞ quanto $\int |dv|^{2\alpha}$ podem ser tomados arbitrariamente pequenos.

Definamos o candidato para a retração:

$$\sigma : E_\alpha^{-1}[1,1+\delta] \times [0,1] \longrightarrow L_1^{2\alpha}(M,N)$$

$$(s,t) \longrightarrow e(y,tv)$$

então $\sigma(s,0) = y \in N \simeq N_0 = E_\alpha^{-1}[1]$ e $\sigma(s,1) = e(y,v) = s$, portanto σ satisfaz (ii).

σ satisfaz (i) pois para δ pequeno σ é contínua.

Para verificarmos (iii), isto é, que $E_\alpha(\sigma(s,t)) \in [1,1+\delta]$ $\forall$ S, $\forall$ t. Basta provarmos que $E_\alpha(\sigma(s,t))$ é função não decrescente de t, isto é, $\frac{d}{dt}(E_\alpha(\sigma(s,t)) \geq 0$.

Com efeito:

Seja $\mu=\sigma(s,t)=\exp(y,tv)$ então:

$\frac{d\mu}{dt} = d\exp|_{(y,tv)}.v$ logo como $d\exp|_{(y,0)}$=identidade temos que $\frac{d\mu}{dt}|_{t=0} = v$ e $\mu(o) = y$ assim:

$\mu(t) = \mu(0) + \frac{d\mu}{dt}|_{t=0}t + R(t\mu)$

$\mu(t) = y + v.t + R(t\mu)$

diferenciando a igualdade acima e notando que a grandeza de μ depende diretamente da grandeza de v temos:

$$d\mu = t.dv + O(\|v\|_\infty).td\mu$$

daí,

$\frac{d}{dt}(d\mu) = dv \Rightarrow \frac{d}{dt}|\mu|^2 = 2\langle d\mu, \frac{d}{dt}(d\mu)\rangle = 2\langle d\mu, dv\rangle$ usando estas igualdades acima obtemos:

$$\frac{d}{dt}E_\alpha(\sigma(s,t)) = 2\alpha\int_M (1+|d\mu|^2)^{\alpha-1}.\langle d\mu,dv\rangle dA$$

$$\leq \frac{2\alpha}{t}\int_M (1+|d\mu|^2)^{\alpha-1}.|d\mu|^2.[1-tO(\|v\|_\infty)]$$

Logo para δ suficientemente pequeno e portanto v_∞ temos $\frac{d}{dt}E_\alpha(\sigma(s,t)) \geq 0$.

2.2.9. Prova da Desigualdade 2.6

Como N é compacta e está mergulhada isométricamente em $\mathbb{R}^k$, existe C>0 tal que $|x|\leq C$ $\forall$ $x \in N$ ($|\ |$= normal $\mathbb{R}^n$) assim $|f_{\alpha,\psi}(x)|\leq C$ $\forall$ $x \in M$ lofo disto e da desigualdade de HÖlder temos:

$$\int_M |f_{\alpha,\psi}\psi| \leq C\ \|\psi\|_{L^{2\alpha}}$$

assim,

$$E_{\alpha,\psi}(f_{\alpha,\psi})=\int_M (1+|df_{\alpha,\psi}|^2)+\int_M f_{\alpha,\psi}\psi = E_\alpha(f_{\alpha,\psi}\psi)+\int f_{\alpha,\psi}\psi \geq E_\alpha(f_{\alpha,\psi})-C\ \psi_{L^{2\alpha}}$$

Logo basta ver que $E_\alpha(f_{\alpha,\psi})> 1 + \delta$.

Com efeito suponha que não, isto é, $E_\alpha(f_{\alpha,\psi}) \in [1,1+\delta]$ então definamos a aplicação $F:M \times [0,1] \longrightarrow N$ tal que $(x,t) \longrightarrow (\sigma(f_{\alpha,\psi}t))(x)$

F é contínua pois σ e $f_{\alpha,\psi}$ o são.

$F(\cdot,0)\equiv$constante e $F(\cdot,1)=f_{\alpha,\psi}$ logo obtemos uma contradição pois $f_{\alpha,\psi}$ é um representante de uma classe de Homotopia não-nulo.

2.2.10. Prova da desigualdade 2.7

Como E_α satisfaz a condição-C, ele assume um mínimo em toda componente de $L_1^{2\alpha}(M,N)$, portanto escolhendo em cada componente $L_1^{2\alpha}(M,N)$ um elemento μ de classe C^∞ e tamanho $B = \max|d\mu(x)|$ temos que $E_\alpha(f) \leq (1+B^2)^\alpha$. Para obtermos a desigualdade 2.7 basta então em 2.5 tomarmos $A = (1 + B^2)^\alpha-1$, pois assim teremos:

$$E_{\alpha,\psi}(f_{\alpha,\psi}) \leq E_\alpha(f_{\alpha,\psi}) + C\|\psi\|_{L^{2\alpha}} \leq (1+B^2)^\alpha + C\|\psi\|_{L^{2\alpha}}$$

Mostraremos agora um Lema que utilizaremos na próxima seção onde demonstraremos a existência de esferas Harmônicas não-triviais. Essencialmente o Lema nos diz que o índice de uma esfera harmônica não-constante não é afetado quando removemos um número finito de pontos.

2.2.11. Lema:

Seja m o índice de uma esfera harmônica $f:S^2 \longrightarrow N$. Dado um conjunto de pontos $\{p_1,\dots,p_\ell\}$ em S^2 existe um subespaço Linear $\mathcal{V}$ de $\Gamma(f^* TN)$ de dimensão m tal que:

(i) A forma de índice I é negativa definida sobre $\mathcal{V}$.

(ii) $V \in \mathcal{V} \Rightarrow V$ anula-se em uma vizinhança aberta de p_i $(i=1,\dots,\ell)$.

Demonstração:

Por hipótese, existe um subespaço linear $\mathcal{V}_o$ de $\Gamma(f^* TN)$ de dimensão m sobre o qual a forma de índice é negativa definida, isto é, $\delta^2 E(f)(V,V) \le 0 \ \forall \ V \in \mathcal{V}_0$.

Consideremos a esfera unitária de $\mathcal{V}_o$:

$$\mathcal{T} = \{V \in \mathcal{V}_o \text{ tal que } \int_{S^2} \langle V,V\rangle dA = 1 \} \text{ , onde } \int_{S^2} dA=1$$

Chamemos $D(p_i,r_0) \subset S^2$ o disco de raio r_0 e centro p_i. Sendo $\{p_1,\dots,p_\ell\}$ finito existe um número r_0 tal que $D(p_i,r_0) \cap D(p_j,r_0)=\phi$ para $1\le i\ne j\le \ell$, e tal que cada função radial $r_i:D(p_i,r_0)-\{p_i\} \longrightarrow R$ seja C^1.

Para cada Θ tal que $0<\Theta<\min \Theta\{r_0,1\}$, seja $\eta_\Theta:S^2 \longrightarrow [0,1]$ a aplicação dada por:

$$\eta_\Theta(p)=\begin{cases} 0 & \text{se } 0\le r_i(p) < \Theta^2 \quad \text{para algum } i \\ (\log(\Theta^2)-\log r_i(p))/(\log \Theta) & \text{se } \Theta^2 \le r_i(p) \le \Theta \quad \text{para algum } i \\ 1 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

calculando a derivada de η_Θ e majorando adequadamente vemos que existe e, independente de Θ tal que:

$$\int_{S^2} |d\eta_\Theta|^2 \leq C/|\log_\Theta|$$

notando que $\nabla(\eta_\Theta V) = \eta_\Theta \nabla V + \nabla\eta_\Theta . V$ temos:

$$\|\nabla(\eta_\Theta V\|^2 = (|\eta_\Theta \nabla V + \nabla\eta_\Theta . V|)^2 \leq 2|\eta_\Theta|^2|\nabla V|^2+2|\nabla\eta_\Theta|^2|V|^2$$

No caso em que $\Theta^2 \leq r_1(p) \leq \Theta$ obtemos:

$2\log_\Theta \leq \log r_1(p) \leq \log_\Theta$ (para Θ pequeno $\log_\Theta < 0$)

$$\Rightarrow 1 \leq \frac{\log r_1(p)}{\log_\Theta} \leq 2.$$

Portanto $0 \leq \eta_\Theta(p) \leq 1 \quad \forall \quad p \in S^2$, usando isto e a inequação 2.8 obtemos em 2.9:

$$\int_{S^2} |\nabla(\eta_\Theta V)|^2 dA \leq 2.\int_{S^2} |\nabla V|^2 + \frac{2.C}{\log\Theta} . \sup \{|V(p)|^2 : p \in S^2\}$$

assim tomando $\alpha=1$ e $\psi=0$ na equação 2.7 do capítulo 1 temos:

$$I(\eta_\Theta V, \eta_\Theta V) = \delta^2 E(f)(\eta_\Theta V, \eta_\Theta V)$$

$$= 2\int_{S^2} [\|\nabla(\eta_\Theta V)\|^2 - \langle \mathbb{R}(\eta_\Theta V, df)df, \eta_\Theta V\rangle]$$

$$\leq 4\int_{S^2} [\|\nabla V\|^2 - \eta_\Theta^2 \langle R(V,df)df,V\rangle] + \frac{2C}{\log_\Theta} \sup\left\{|V(p)|_1^2 \ ; \ p \in S^2\right\}$$

Como $I(V,V) = \int_{S^2} \|\nabla V\|^2 - \langle R(V,df)df,V\rangle \leq 0$ tem-se:

$$\int_{S^2} \langle R(V,df)df,V\rangle \geq \int_{S^2} \|\nabla V\|^2 \geq 0$$

assim $\exists\ C_1>0,\ C_2$ constantes tais que:

$$I(\eta_\Theta V,\eta_\Theta V) = C_1 I(V,V) + C_2/\log\Theta ,$$

e para Θ suficientemente pequeno

$$I(\eta_\Theta V,\eta_\Theta V)<0 \quad \forall \quad V\in\mathcal{T} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{V} = \{\eta_\Theta V \mid V\in\mathcal{V}_o\}$$

é um subespaço Linear de $\Gamma(f^* TN)$ de dimensão m o qual satisfaz as condições (i) e (ii)■

2.3. Existência de Esferas Harmônicas

Nesta seção garantiremos a existência de esferas harmônicas no caso de certas variedades compactas, mais precisamente provaremos o teorema 2.3.11, assegurando assim a existência para o caso de uma variedade compacta N, com $\pi_k(N)\neq 0$ para algum $k\geq 2$. Para a prova deste teorema precisaremos de alguns resultados, os quais tratamos agora de exibir e provar.

Por razões que ficarão claras logo adiante, trabalharemos localmente, isto é, consideraremos um disco $D(R) \subset S^2$ de raio R e o funcional α-Energia restrito a ele $E_\alpha = E_\alpha|_{D(R)}: D(R) \longrightarrow \mathbb{R}$. Chamando D o disco unitário de S^2, através de uma expansão conforme de D em D(R) obtemos:

$$E_\alpha(s) = \int_{D(R)} 1+|ds|^2)^\alpha d\mu = R^{2(1-\alpha)}.\int_D (R^2+|ds|'^2)^\alpha.d\mu'$$

Assim neste caso a equação de Euler-Lagrange (1.2.3) sofre uma pequena alteração:

$$(3.1) \qquad \Delta s + \frac{2(\alpha-1)(d^2s,ds)}{(R^2+|ds|^2)}\, ds + A(ds,ds) = 0$$

2.3.1 Proposição:

Existe $\varepsilon>0$ e $\alpha_0>1$ tais que se $s:D \longrightarrow N$ é um ponto crítico de E_α, com $E(s)<\varepsilon$ e $1\leq\alpha\leq\alpha_0$, então para cada $p \in (1,\infty)$ e $D'\subset D$ existe uma constante $C(p,D')$ tal que $\|ds\|_{L_1^p(D')} \leq C(p,D').\|ds\|_{L^2}$.

Demonstração:

Seja $\varphi: D \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função C^1 tal que φ é identicamente 1 em D'. Sem perda de generalidade admitamos $\int_D s = 0$ $\left[\text{pois se } a = \int_D s\right.$ então $\int_D (s - \frac{a}{VoL(D)}) = 0$ e $S - \frac{a}{VoL(D)}$ ainda satisfaz (3.1) uma vez que $\left. ds = d(s - \frac{a}{VoL(D)})\right]$.

observando que:

$\Delta(\varphi.s) = (\Delta\varphi).s + \varphi.\Delta s$

$d^2(\varphi.s) = (d^2\varphi).s + 2(d\varphi)(ds) + \varphi.d^2 s$

$d(\varphi.s) = \varphi.ds + s.d\varphi$

multiplicando-se (3.1) por φ e substituindo-se esses valores obtém-se:

$$\Delta(\varphi s) + \frac{2(\alpha-1)(d^2(\varphi s),ds)}{k^2+|ds|^2} ds + A(d(\varphi s),ds) =$$

$$(\Delta\varphi).5 + \left(\frac{2(\alpha-1)}{k^2+|ds|^2}\right)((d^2\varphi)5 + 2(d\varphi)(ds),ds) + A(sd\varphi,ds)$$

Assim temos,

$$\left|A(\varphi s) + \frac{2(\alpha-1)(d^2(\varphi s),ds)}{k^2+|ds|^2} ds + A(d(\varphi s),ds)\right| \leq$$

$$\leq |\Delta\varphi|.|s| + \frac{2(\alpha-1)|d^2\varphi|\,|ds|^2|s|}{k^2+|ds|^2} + \frac{4(\alpha-1)|d\varphi|\,|ds|^2}{k^2+|ds|^2}.|ds| + |A|_\infty |d\varphi|\,|s|\,|s|$$

$$\leq [|\Delta\varphi| + 2(\alpha-1)|d^2\varphi|]\ |s| + [4(\alpha-1)|d\varphi| + |A|_\infty |d\varphi|\,|s|_\infty]\ |ds|$$

$$\leq h(\varphi).(|ds| + |s|).$$

onde $h(\varphi) = \max \{ |\Delta\varphi| + 2(\alpha-1)|d^2\varphi|; 4(\alpha-1)|d\varphi| + |A|_\infty|d\varphi||s|_\infty \}$

assim obtemos:

$$|\Delta(\varphi s)| \leq \frac{2(\alpha-1)|ds|^2}{k^2+|ds|^2} \cdot |d^2(\varphi s)| + |A|_\infty|d(\varphi s||ds| + h(\varphi)(|ds| + |s|)$$

$$|\Delta(\varphi s)| \leq 2(\alpha-1)|d^2(\varphi(s))| + |A|_\infty d(\varphi s)|ds| + h(\varphi)(|ds| + |s|)$$

calculando-se a norma L^p_0 em ambos os lados da desigualdade e usando Minkowsky obtemos:

$$\|\Delta(\varphi s)\|_{L^p_0} \leq 2(\alpha-1)\| d^2(\alpha s)\|_{L^p_0} + |A|_\infty \| |d(\varphi s).|ds| \|_{L^p_0} + h(\varphi)(\|ds\|_{L^p_0} + \|s\|_{L^p_0}$$

usando os fatos que $\|d^2(\varphi s)\|_{L^p_0} \leq \|\varphi s\|_{L^p_2}$ e $\| |ds|+|s| \|_{L^p_0} \leq 2^p . \|s\|_{L^p_1}$

obtém-se:

(3.2) $\|\Delta(\varphi s)\|_{L^p_0} \leq 2(\alpha-1)\|\varphi s\|_{L^p_2} + |A|_\infty \| |d(\varphi s)|.|ds| \|_{L^p_0} + h(\varphi)\|s\|_{L^p_1}$

seja $C(p)$ a norma do operador Δ^{-1} como uma aplicação de L^p_0 em L^p_2 então:

$$C(p)^{-1}\|\varphi s\|_{L^p_2} = C(p)^{-1}\|\Delta^{-1}(\Delta(\varphi s))\|_{L^p_2} \leq \|\Delta(\varphi s)\|_{L^p_0}$$

assim a desigualdade (3.2) fica:

(3.3) $C(p)^{-1}\|\varphi s\|_{L^p_2} \leq 2(\alpha-1)\|\varphi s\|_{L^p_2} + |A|_\infty . \| |d(\varphi s)|.|ds| \|_{L^p_0} + h(\varphi) \|s\|_{L^p_1}$

tomando $p=2$ e α suficientemente próximo de 1 tal que $C(2)^{-1}-2(\alpha-1)$ seja positivo, então:

$$(3.4)\ [C(2)^{-1}-2(\alpha-1)]\ \|\varphi s\|_{L^2_2} \leq \|A\|_\infty.\|\varphi s\|_{L^4_1} + \|s\|_{L^4_1} + h(\varphi).\|s\|_{L^2_1}$$

onde usamos a desigualdade de Hölder generalizada para obter:

$$\|\,|d(\varphi s)|\,|ds|\,\|_{L^2_0} \leq \|d(\varphi s)\|_{L^4_0}.\|ds\|_{L^4_0}$$

chamando $D'' = \{x \in D$ tal que $\varphi(x) = 1\}$ temos pela definição de $h(\varphi)$ que $h(\varphi)|_{D''} \equiv 0$ pois $\varphi \equiv$ em D". logo substituindo em (3.4) tem-se:

$$\|s\|_{L^2_2(D'')} \leq C_1.\|s\|^2_{L^4_1(D'')} \qquad \text{onde} \qquad C_1 = \|A\|_\infty/(C(2)^{-1} - 2(\alpha-1))$$

Daí por um teorema de mergulho de Sobolev tem-se:

$$\|s\|_{L^q_1(D'')} \leq C_2.\|s\|^2_{L^4_1} \qquad \forall\ q \in (0,\infty)$$

Agora usando novamente a inequação (3.3) para um p qualquer e φ tendo suporte em D" temos:

$$\|s\|_{L^p_1(D'')} \leq \|A\|_\infty.\left[\int_{D''}|ds|^{2p}\right]^{1/p} \leq \|A\|_\infty.\|s\|^2_{L^{2p}_1(D'')} \leq \|A\|_\infty.C_2^2.\|s\|^4_{L^4_1(D'')}$$

como $s \in L^p_2 \subset C^1$ então existe C_3 constante tal que:

$$\left[\int_{D''}|ds|^4\right]^{3/4} \leq C_3 \Rightarrow \int_{D''}|ds|^4 \leq C_3\left[\int_{D''}|ds|^4\right]^{1/4} \Rightarrow \|s\|^4_{L^4_1(D'')} \leq C_3.\|s\|_{L^4_1}$$

Daí:

$$\|s\|_{L^p_2(D')} \leq C_4.\|s\|_{L^4_1(D')}$$

como $\int s = 0$ temos:

$$\|ds\|_{L^p_1(D')} \leq \|s\|_{L^p_2(D')} \leq C\|s\|_{L^4_1(D')} \leq C_5.\|ds\|_{L^4_0(D')}$$

isto é:

(3.5)
$$\|ds\|_{L_1^p(D')} \leq C_5.\|ds\|_{L_0^4(D')}$$

Para obtermos a estimativa da proposição basta então mostrarmos que $\|ds\|_{L_0^4(D')} \leq C\|ds\|_{L_0^2(D')}$ e usarmos a inequação (3.5), de fato: tomando $p = 4/3$ em (3.3) e usando o fato que:

$$\|d(\varphi s)|\,|ds|\,\|_{L_0^{4/3}} = \left[\int_{D'} |d(\varphi s)|^{4/3}.|ds|^{4/3}\right]^{3/4} \leq \left(\int_{D'} |d(\varphi s)|^2\right)^{1/2} \left(\int_{D'} |ds|^4\right)^{1/4} =$$

$$= \|d(\varphi s)\|_{L_0^4} \, . \, \|ds\|_{L_0^2}$$

temos:

(3.6)
$$[C(4/3)^{-1}-2(\alpha-1)]\ \|\varphi s\|_{L_2^{4/3}} \leq \|A\|_\infty.\|d(\varphi s)\|_{L_0^4}.\|ds\|_{L_0^2} + h(\varphi).\|ds\|_{L_0^{4/3}}$$

substituindo-se em (3.6) as inequações:

$$\|ds\|_{L_0^{4/3}} \leq \|ds\|_{L_0^2}$$

$\|d(\varphi s)\|_{L_0^4} \leq k'.\|s\|_{L_2^{4/3}}$ [onde k' é constante do mergulho de Sobolev $L_2^{4/3}(D,\mathbb{R}^k) \subset L_1^4(D,\mathbb{R}^k)$].

tem-se:

$\|ds\|_{L_0^4(D')} \leq C.\|ds\|_{L_0^2}$ onde $C = k'.[\|A\|_\infty.\|s\|_{L_0^4} + h(\varphi)] \,/\, (C(4/3)^{-1}-2(\alpha-1))$

2.3.2. Corolário

Existem $\alpha_o>0$ e $\varepsilon>0$ tais que se $E(s) < \varepsilon$ e s for ponto crítico de E_α com $\alpha \in (0, \alpha_o)$ então $s \in N_0$ i.e $E(s) = 0$.

Demonstração:

Da inequação (3.6) com dominio M ao invés de D e $\varphi\equiv 1$ temos:

$$[C(4/3)^{-1}-2(\alpha-1)] \;.\; \|s\|_{L_2^{4/3}} \leq \|A\|_\infty . k' . \sqrt{E(s)} . \|s\|_{L_2^{4/3}}$$

tomando $\sqrt{\varepsilon} < \dfrac{C(4/3)^{-1}-2(\alpha-1)}{k' . \|A\|_\infty} = K$, se $E(s) < \varepsilon$ então:

$$K . \|s\|_{L_2^{4/3}} \leq \sqrt{E(s)} . \|s\|_{L_2^{4/3}} < \sqrt{\varepsilon} \;.\; \|s\|_{L_2^{4/3}}$$

Logo:

$$\|s\|_{L_2^{4/3}} = 0 \Rightarrow \int_M |ds|^{4/3} = 0 \;\Rightarrow\; ds = 0 \;\Rightarrow\; s = \text{constante}, \Rightarrow s \in \mathbb{N}_0.$$

2.3.3. Lema

Existe um $\varepsilon > 0$ tal que se $\int_{D(2)} |ds|^2 d\mu < \varepsilon$ então existe uma constante $C > 0$, tal que:

$$|ds(x)|\,|x| \leq C . \left(\int_{D(2|x|)} |ds|^2 d\mu \right)^{1/2} \quad \forall \quad x \in D$$

Demonstração:

Consideremos o $\varepsilon > 0$ dado pela proposição 2.3.1 para $p = 4$ e $\alpha = 1$, dado $x_0 \in D$ definamos $\tilde{s}(x) = s(x_0+|x_0|x)$ então:

$$\int_D |d\tilde{s}|^2 d\mu = \int_{D(x_0,|x_0|} |ds|^2 d\mu < \int_{D(2)} |ds|^2 d\mu < \varepsilon$$

Sendo s uma aplicação harmônica $\tilde{s}$ também é harmônica donde usando a proposição 2.3.1 e o mergulho de Sobolev $L_1^4 \subset C^1$ obtemos: $\max \{|d\tilde{s}(x)|: x \in D(1/2)\} \leq \tilde{C}\|d\tilde{s}\|_{L_1^4(D(1/2))} \leq \tilde{C}.C(4).\|d\tilde{s}\|_{L_0^2(D)}$, donde observando que $|ds(x_0)|\,|x_0| = |d\tilde{s}(0)|$ e $\|d\tilde{s}\|_{L_0^2(D)} = \|ds\|_{L_0^2(D(x_0,|x_0|))}$ tem-se:

$$|ds(x_0)|\,|x_0| = |d\tilde{s}(0)| \leq \tilde{C}.C(4).\|ds\|_{L_0^2(D(x_0,|x_0|))} \leq C.\|ds\|_{L_0^2(D(2|x_0|))}$$

2.3.4. Lema:

Seja $s: D\backslash\{0\} \longrightarrow N$ $(N \subset \mathbb{R}^k)$ uma aplicação harmônica tal que $E(s) < \infty$. Então considerando um sistema de coordenadas isotérmicas tem-se:

$$\int_0^{2\pi} |s_\Theta(z)|^2 d\Theta = r^2.\int_0^{2\pi} |s_r(z)|^2 d\Theta \quad \text{onde} \quad z = x+yi \quad \text{com} \quad \begin{cases} x = r\cos\Theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\Theta \end{cases}$$

Demonstração:

Como s é harmônica então a aplicação $W(z) = |s_x|^2 - |s_y|^2 + 2\langle s_x, s_y\rangle i$ é holomorfa, em $D\backslash\{0\}$

$$|W(z)| \leq 2|s_x|^2 + 2|s_y|^2 = 2|ds(z)|^2.$$

Pelo Lema 2.3.3 tem-se $|ds(z)|^2.|z|^2 \leq C.E(S)$ Logo:

$$|W(Z)| \leq C'.|z|^{-2} \quad \text{onde} \quad C'= 2C.E(s)$$

Logo $\lim_{z\to 0} W(z)z^3 = 0$ e daí $W(z)z^3$ tem uma singularidade removível em zero e portanto pólo de ordem no máximo dois. Como o coeficiente a_{-2} da série de Laurent de $W(z)$ é dado por:

$$a_{-2} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma} zW(z)dz \quad \text{com} \quad \gamma = \rho e^{i\alpha},\ \rho\in(0,1) \quad \text{e} \quad \alpha \in [0,2\pi]$$

então segue da desigualdade:

$$|a_{-2}| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma} |z|\,|W(z)| \leq \int_{\gamma} |W(z)| \leq 2E(s).(2\pi\rho) \longrightarrow 0 \text{ quando } \rho \longrightarrow 0$$

que $a_{-2} = 0$. Assim $z = 0$ é pólo de ordem no máximo um. Calculemos explicitamente a função $\operatorname{Re} w(z)z^2$:

$$W(z)z^2 = (|s_x|^2-|s_y|^2 + 2\langle s_x,s_y\rangle i)(x^2-y^2+2xyi)$$

$$\operatorname{Re}(W(z)z^2) = (x^2-y^2)(|s_x|^2-|s_y|^2)-4xy\langle s_x,s_y\rangle$$

Calculando $s_\Theta = s_x \cdot \frac{\partial x}{\partial \Theta} + s_y \frac{\partial y}{\partial \Theta} = -r \operatorname{sen}\Theta\ s_x + r \cos\Theta\ s_y$ e

$$s_r = s_x \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + s_y \frac{\partial y}{\partial r} = \cos\Theta\ s_x + \operatorname{sen}\Theta\ s_y$$

verificamos que:

$$\operatorname{Re}(W(z)z^2) = |s_\Theta(z)|^2 - |z|^2.|s_r(z)|^2$$

observando que $\int_{|z|=r} zW(z)\, dz = i\int_{0\,|z|=r}^{2\pi} z^2W(z)d\Theta$ temos que:

$$\int_0^{2\pi} |s_\Theta(z)|^2 d\Theta - \int_0^{2\pi} r^2 |s_r(z)|^2 d\Theta = \mathrm{Re}\int_{0\,|z|=r}^{2\pi} z^2 W(z) d\Theta = \mathrm{Im}\int_{|z|=r} zW(z) = \mathrm{Im}\ a_{-2} = 0 \blacksquare$$

2.3.5. Teorema:

Seja $s: D\setminus\{0\} \longrightarrow N$ uma aplicação harmônica de energia finita. Então s se estende a uma aplicação harmônica e C^∞, $s: D \longrightarrow N$.

Demonstração:

Como $\int_D |ds|^2 d\mu < \infty$ então $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{D(R)} |ds|^2 d\mu = 0$ logo por meio de uma expansão conforme de $D(R)$ para $D(2)$ podemos assumir que $\int_{D(2)} |ds|^2 d\mu < \varepsilon$, onde ε é aquele dado pelo lema 2.3.3.

Definamos uma função $q: [0,2\pi] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ como:

$$q(r,\alpha) = \begin{cases} \dfrac{q(2^{-m}) - q(2^{-m+1})}{2^{-m} - 2^{-m+1}} \cdot (r - 2^{-m+1}), & r \in (2^{-m}, 2^{-m+1}) \\[2ex] \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} s(2^{-m},\Theta)d\Theta, & r = 2^{-m},\ m \in \mathbb{N} \end{cases}$$

isto é, q só depende da coordenada radial e é linear nos intervalos $(2^{-m}, 2^{-m+1})$ $m \in \mathbb{N}$.

Portanto no domínio $[0,2\pi] \times (2^{-m}, 2^{-m+1})$ q é harmônica para $r \in [2^{-m}, 2^{-m+1}]$:

$$|q(r,\alpha) - s(r,\alpha)| \leq |q(2^{-m}) - q(2^{-m+1})| \cdot \left| \frac{r - 2^{-m+1}}{2^{-m} - 2^{-m+1}} \right| + |s(r,\alpha) - q(2^{-m+1})|$$

(3.7) $$\leq |q(2^{-m}) - q(2^{-m+1})| + |s(r,\alpha) - q(2^{-m+1})|$$

pela desigualdade do valor médio temos:

$$\max \{|s(x)-s(y)|:|x| \text{ e } |y| \in [2^{-m}, 2^{-m+1}] \} \leq$$

$$\leq 2^{-m+3}.\max \{|ds|(x):|x| \in [2^{-m}, 2^{-m+1}] \}$$

$$\leq 2^{3}.C \left(\int_{|x|\leq 2^{-m+1}} |ds|^2 d\mu \right)^{1/2}$$

onde a última desigualdade segue do lema 2.3.4.

Usando esta majoração na inequação (3.7) obtemos:

$$(3.8) \qquad |q(r,\alpha)-s(r,\alpha)| \leq 2^{4}.C.\left(\int_{|x|\leq 2^{-m+1}} |ds|^2 d\mu \right)^{1/2} \leq 2^{4}.C.\varepsilon^{1/2}$$

vamos fazer uma estimativa para a norma L_1^2 de (q-s):

Por integração temos:

$$\int_D |dq-ds|^2 d\mu = \int_D d(q-s).d(q-s)d\mu =$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[r\int_0^{2\pi} (q(r,\alpha)-s(r,\alpha)).(s_r(r,\alpha)-\frac{\partial q}{\partial r}(r,\alpha)d\alpha \right]_{2^{-m}}^{2^{-m+1}} - \int_D (q-s).d^{*}d(q-s).d\mu.$$

como

$$\int_{r=1} (s-q).(s_r-q') \leq \left(\int_{r=1} |s-q|^2 \right)^{1/2} \left[\int_{r=1} |s_r-q'|^2 \right]^{1/2} \leq \left(\int_{r=1} |s-q|^2 \right)^{1/2}$$

$$.\left(\int_{r=1} |s_r|^2 \right)^{1/2}$$

obtemos:

$$\int_D |dq-ds|^2 d\mu \leq \left(\int_{r=1} |s-q|^2 \right)^{1/2} . \left(\int_{r=1} |s_r|^2 \right)^{1/2} + \lim_{m\to\infty} 2^{-m+1}.$$

$$.\int_0^{2\pi} \left[q(2^{-m+1})-s(2^{-m+1},\Theta \right] \left[s_r(2^{-m+1},\Theta)-q'(2^{-m+1}) \right] d\Theta - \int_D (q-s)\Delta(q-s)d\mu.$$

da inequação (3.8) segue que o limite acima quando $m \to \infty$ é zero. Como $(q-s)$ é harmônica $\Delta(q-s) = -A(s)(ds,ds)$, assim estimamos:

$$-\int_D (q-s)\Delta(q-s)d\mu = \int_D (q-s).A(s)(ds,ds) \leq \|A\|_\infty \|q-s\|_\infty \int_D |ds|^2 d\mu \leq$$

$$\leq \|A\|_\infty . 2^4 . C . \sqrt{\varepsilon} . \|ds\|^2_{L^2}$$

chamando $\delta = 2^4.C.\sqrt{\varepsilon}$ tem-se em (3.9):

(3.10)

$$\int_D |dq-ds|^2 d\mu \leq \left(\int_{r=1} |s-q|^2 d\Theta \right)^{1/2} . \left(\int_{r=1} |s_r|^2 d\Theta \right)^{1/2} + \delta \int_{D(1)} |ds|^2 d\mu.$$

observando que:

$$\int_D |d(q-s)|^2 d\mu = \int |s_r - q_r|^2 + |s_\Theta - q_\Theta|^2 \geq \int_D |s_\Theta|^2 dxdy, \text{ pois } q_\Theta = 0$$

$$\geq \frac{1}{2} \left[\int_D |s_\Theta|^2 dxdy + \int_D |s_\Theta|^2 drd\Theta \right]$$

$$\geq \frac{1}{2} \left[\int_D |s_\Theta|^2 dxdy + \int_D |s_\Theta|^2 . \frac{1}{r^2} drd\Theta \right], \text{pois } dxdy = r^2 drd\Theta$$

$$\geq \frac{1}{2} \left[\int_D |s_\Theta|^2 dxdy + \int_D |s_r|^2 \, drd\Theta \right] \text{ (segue do lema 2.3.4)}$$

$$\geq \frac{1}{2} \left[\int_D |s_\Theta|^2 + |s_r|^2 \right] = \frac{1}{2} \int_D |ds|^2$$

e considerando a definição de q e o lema 2.3.4 tem-se:

$$\int_{r=1} |s-q|^2 d\Theta \leq \left(\int_{r=1} |s_\Theta|^2 d\Theta\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\int_D |ds|^2 d\Theta = \left(\int_{r=1} |s_r|^2 d\Theta\right)^{1/2}$$

assim substituindo-se estas desigualdades em (3.10):

$$(1-2\delta)\int_{D(1)} |ds|^2 d\mu \leq \int_{r=1} |ds|^2 d\Theta$$

por uma expansão do disco $D(t)$ em $D(1)$ $t \leq 1$ obtém-se:

$$(1-2\delta)\int_{D(t)} |ds|^2 d\mu \leq t.\int_{r=1} |ds|^2 d\Theta$$

daí:

$$\int_{D(t)} |ds|^2 d\mu \leq t^{(1-2\delta)}.\int_D |ds|^2 d\mu$$

aplicando o lema 2.3.3 para $0 < |x_0| < \frac{1}{2}$ obtemos:

$$|ds(x_0)|\,|x_0| \leq C.\left(\int_{D(2|x_0|} |ds|^2\right)^{1/2} \leq C.\left(2|x_0|\right)^{\frac{1-2\delta}{2}}.\left(\int_D |ds|^2 d\mu\right)^{1/2}$$

assim se $s \in L_1^{2\alpha}(D,N)$.Repetindo o método da proposição 2.1.1 obtemos a regularidade de s.∎

Veremos agora como obter a existência de esferas mínimas ou mais precisamente mostraremos que uma sequência de pontos críticos s_α de E_α quando $\alpha \longrightarrow 1$, converge para uma aplicação harmônica ou então existe uma esfera mínima agindo como uma obstrução.

2.3.6. Observação: Como estamos trabalhando com $M=S^2$, admitiremos M coberta por discos de raio tão pequeno quanto queiramos. Digamos $R=2^{-1}(i\in\mathbb{N})$ tal que os discos com metade desse raio, ainda continuam cobrindo M, e métrica sobre esses discos estejam uniformemente próximas da métrica plana; e ainda consideremos que cada ponto de M pertence a no máximo h discos, onde h independe de $R=2^{-1}$. Expandindo estes discos D(R) ao adisco unitário D e restringindo o funcional α-Energia a este disco temos:

$$E_\alpha(s) = \int_D (R^2 + |ds|^2)^\alpha d\mu$$

2.3.7 Lema:

Seja $s_\alpha : D(R) \longrightarrow \mathbb{N}$ uma sequência de pontos críticos do funcional E_α tal que quando $\alpha \longrightarrow 1$ temos s_α convergindo para s em $L_1^{2\alpha}(D(R),\mathbb{R}^k)$. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que se $E(s_\alpha) \leq \varepsilon$ tem-se $s_\alpha \longrightarrow s$ em $C^1(D(R/2),N)$ e a aplicação $s:D(R/2) \longrightarrow \mathbb{N}$ é harmônica e C^∞.

Demonstração:

Pela invariância conforme basta considerarmos R=1. Consideremos $\varepsilon > 0$ dado pela estimativa da proposição 2.3.1 com p=4 e D'=D(1/2). Assim a partir de um α suficientemente pequeno, a saber, $\alpha<\alpha_0$ (onde α_0 é dado pela prop. 2.3.1) tem se:

$$\|ds_\alpha\|_{D(1/2),1,4} \leq C(4,\ D(1/2)).\varepsilon$$

Seja o mergulho compacto de Sobolev: $L^p_2(D(1/2),\mathbb{R}^k \subset C^1(D(1), \mathbb{R}^k)$ temos então que a sequência s_α possui uma subsequência convergente em $C^1(D(1/2), \mathbb{R}^k)$, logo a partir da convergência fraca $s_\alpha \longrightarrow s$ em $L^{2\alpha}_1(D,\mathbb{R}^k)$ tem-se $s_\alpha \longrightarrow s$ em $C^1(D(1/2), \mathbb{R}^k)$. Sendo a convergência em C^1 podemos obter a equação de Euler-Lagrange de s, simplesmente passando-se ao limite na equação (3.1), isto é, $\Delta s+A(ds.ds)=0$ e portanto s é harmônica■

2.3.8 Proposição:

Seja $\mathcal{U}\subset M$ um conjunto aberto e $s_\alpha:\mathcal{U} \longrightarrow N\subset\mathbb{R}^k$ uma sequência de pontos críticos de E_α com $\alpha \longrightarrow 1$, s_α convergindo fracamente para s em $L^2_1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^k)$ e $E_\alpha(s_\alpha) < B$. Fixado $m \in \mathbb{N}$ considere o conjunto

$$\mathcal{U}_m = \{x \in \mathcal{U} : D(x, 2^{-m+1}) \subset \mathcal{U}\}$$

Então existe uma subsequência $\{\alpha(\ell)\} \subset \{\alpha\}$ e um número finito de pontos $\{x_{1,m},\dots\dots,x_{\ell,m}\}$, onde ℓ depende de B e N mas não depende de m, tal que $s_{\alpha(\ell)} \longrightarrow s$ em $C^1(\mathcal{U}_m\setminus U^{\ell}_{1=1} D(x_{1,m}, 2^{-m-1}),N)$.

Demonstração:

Cubramos $\mathcal{U}_m$ com discos $D(x_1, 2^{-m}) \subset \mathcal{U}$ tal que cada ponto $x \in \mathcal{U}$ seja coberto no máximo h vezes e os discos $D(x_1,2^{-m-1})$ ainda continuem cobrindo $\mathcal{U}_m$ (veja observação 2.3.6).

Assim temos:

$$\sum_1 \int_{D(x_1,2^{-m+1})} |ds_\alpha|^2 d\mu \le h\ E_\alpha(s_\alpha) < h.B$$

Daí para cada α há no máximo Bh/ε discos sobre os quais

$$\int_{D_{(x_1,2^{-m+1})}} |ds_\alpha|^2 d\mu > \varepsilon$$

onde ε é a constante do lema 2.3.7. Vejamos que é possível escolher uma subsequência $\{\alpha(\ell)\}$ de $\{\alpha\}$ de modo que $s_{\alpha(\ell)}$ convirja para s em $C^1(D(x_1, 2^{-m-1}), N)$ exceto sobre $\ell < hB/\varepsilon + 1$ discos. De fato, pelo lema 2.3.7 acima podemos por um processo recursivo finito achar uma subsequência $\{\alpha(\ell)\}$ que convirja para s em $C^1(D(x_1, 2^{-m-1}), \mathbb{N})$ para todo os discos tais que:

$$\int_{D(x_1, 2^{-m+1})} |ds_\alpha|^2 d\mu \leq \varepsilon$$

e portanto a convergência de tal subsequência apenas não está garantida nos discos onde:

$$\int_{D(x_1, 2^{-m+1})} |ds_\alpha|^2 d\mu > \varepsilon$$

isto é no máximo em $\ell < \dfrac{Bh}{\varepsilon} + 1$ discos■

2.3.9 Teorema:

Seja $\mathcal{U} \subset M$ um conjunto aberto e $s_\alpha: \mathcal{U} \longrightarrow N$ um ponto crítico de E_α com $E(s_\alpha) < B$, $\alpha \longrightarrow 1$ e convergindo fracamente para s em $L_1^2(\mathcal{U}, \mathbb{R}^k)$. Então existe uma subsequência $\{\beta\} \subset \{\alpha\}$ e um número finito de pontos $\{x_1, \ldots, x_\ell\}$, onde ℓ independe de $\mathcal{U}$, tal que s_β converge para s em $C^1(\mathcal{U} - \{x_1, \ldots\ldots, x_\ell\}, \mathbb{N})$. Além disso $s: \mathcal{U} \longrightarrow N$ é uma aplicação harmônica e C^∞.

Demonstração:

Pela proposição acima construimos uma série de subsequências $\{\alpha(m)\} \subset \{\alpha(m-1)\} \subset \ldots \subset \{\alpha(2)\} \subset \{\alpha(1)\} \subset \{\alpha\}$ com $\alpha(m) \longrightarrow 1$ e $s_{\alpha(m)} \longrightarrow s$ em $C^1(\mathcal{U}_m \setminus \bigcup_{1 \leq \ell} D(x_{1,m}, 2^{-m}), N)$ para cada $m \in \mathbb{N}$, onde $\ell < Bh/\varepsilon + 1$.

Escolhendo uma subsequência diagonal $\{\beta\}$ das sequências $\{\alpha(m)\}$ temos que $s_\beta \longrightarrow s$ em:

$$C^1(\bigcup_m(\mathcal{U}_m \setminus \bigcup_{1\leq \ell} D(x_{1,m}, 2^{-m}), N) = C^1(\mathcal{U}\setminus\bigcap_m(\bigcup_{1\leq \ell} D((x_{1,m}, 2^{-m})), N)$$

Assim $s_\beta \longrightarrow s$ em $C^1(\mathcal{U}\setminus\{x_1,\dots,x_\ell\}, N)$.

Considere o funcional linear $F\in[L_1^2(\mathcal{U},\mathbb{R}^k)]^*$ dado por: $F(f) = \int_{\mathcal{U}} \langle df, ds\rangle$

como $s_\beta \longrightarrow s$ fracamente em $L_1^2(\mathcal{U}, \mathbb{R}^k)$ temos que $F(s_\beta) \longrightarrow F(s)$ assim:

$$0 \leq \int_{\mathcal{U}} \langle ds_\beta - ds,\, ds_\beta - ds\rangle = \int_{\mathcal{U}} |ds_\beta|^2 + \int_{\mathcal{U}} |ds|^2 - 2\int \langle ds_\beta, ds\rangle$$

Donde:

$$E(s) = \int_{\mathcal{U}} |ds|^2 \leq \lim \int_{\mathcal{U}} |ds_\beta|^2 = \lim E(s_\beta) \leq B$$

Portanto aplicando o teorema 2.3.5 s se estende a uma aplicação C^∞ e harmônica de $\mathcal{U}$ em N.∎

Observação:

Pelo teorema acima não podemos assegurar C^1-convergência de $s_\beta \longrightarrow s$ nos pontos $\{x_1,\dots,x_\ell\}$. Mas se existir um $\delta>0$ tal que $\max_{x\in D(x_1,\delta)}|ds_\alpha(x)| \leq B < \infty$ entáo podemos garantir que $s_\beta \longrightarrow s$ em $C^1(D(x_1,\delta), N)$. Com efeito:

Considere ε dado pelo lema 2.3.7 e $R>0$ tal que $\pi R^2 B<\varepsilon$ e $D(x_1, R) \subset D(x_1,\delta)$ então:

$$\int_{D(x_1,R)} |ds_\alpha|^2 d\mu \leq \pi R^2 B < \varepsilon$$

E assim a convergência $s_\beta \longrightarrow s$ em $C^1(D(x_1,R/2))$ é garantida pelo lema.

2.3.10. Teorema:

Seja s_α uma sequência de pontos críticos de E_α com $\alpha \to 1$, $E_\alpha(s_\alpha) < B$, e $s_\alpha \longrightarrow s$ em $C^1(M-\{x_1,\dots x_\ell\}, N)$ mas não convergindo em $C^1(M\setminus\{x_2,\dots, x_\ell\}, N)$. Então existe uma aplicação harmônica $\tilde{s}:S^2 \longrightarrow N$ não-trivial tal que:

$$\tilde{s}(S^2) \subset \bigcap_{m=1}^{\infty}\Big(\bigcap_{\alpha\to 1} \bigcup_{\beta\leq\alpha} s_\beta(D(x_1, 2^{-m})\Big)$$

além disso:

$$E(s) + E(\tilde{s}) \leq \overline{\lim_{\alpha\to 1}}\, E(s_\alpha)$$

Demonstração:

Seja $b_\alpha = \max\,\{|ds_\alpha(x)|: x \in D(x_1, 2^{-m})\}$ e seja $x_\alpha \in D(x_1,2^{-m})$ um ponto onde o máximo b_α é assumido. Como por hipótese não temos convergência C^1 em x_1 então pela observação acima devemos ter $\lim_{\alpha\to 1} b_\alpha = \infty$, passando-se a uma subsequência se necessário. Além disso como $s_\alpha \longrightarrow s$ em $C^1(M\setminus\{x_1,\dots,x_\ell\}, N)$ temos que $x_\alpha \longrightarrow x_1$.

Definimos $\tilde{s}_\alpha(x) = s_\alpha(x_\alpha + b_\alpha^{-1}.x)$. Então $\tilde{s}_\alpha:D(0,2^{-m}b_\alpha) \longrightarrow N$ é um ponto crítico de E_α e:

$|d\tilde{s}_\alpha(x)| = |ds_\alpha(x_\alpha + b_\alpha^{-1}x)|.b_\alpha^{-1} \leq 1 \quad \forall \quad x \in D(0,2^{-m}.b_\alpha)$

$|d\tilde{s}_\alpha(0)| = |ds_\alpha(x_\alpha)|.b_\alpha^{-1} = b_\alpha \,.\, b_\alpha^{-1} = 1 \quad \forall \quad \alpha$

Observe que para m fixo e $\alpha \longrightarrow 1$ temos $2^{-m}.b_\alpha \longrightarrow \infty$ logo usando a observação acima e teorema 2.3.9 temos que para todo $R<\infty$ podemos achar uma subsequência $\{\alpha(R)\}$ tal que $\tilde{s}_{\alpha(R)} \longrightarrow \tilde{s}$ em $C^1(D(R), N)$ onde $\tilde{s}:D(R) \longrightarrow N$ é harmônica e C^∞. Como $|d\tilde{s}(0)| = 1$ é claro que $\tilde{s}$ é não trivial. Assim tomando-se uma subsequência diagonal temos $\tilde{s}_\beta \longrightarrow \tilde{s}$ em $C^1(\mathbb{R}^2, N)$.

Também é fácil notar que:

$$E(\tilde{s})+E(s|M\setminus D(x_1,2^{-m}) \leq \overline{\lim_{\beta\to 1}} \{E(\tilde{s}_\beta|D(0,2^{-m}b_\beta)) + E(s_\beta|M\setminus D(x_1, 2^{-m}))\}$$

$$\leq \overline{\lim_{\beta\to 1}} \; E(s_\beta)$$

Tomando o limite quando $m \longrightarrow \infty$ temos:

$$E(\tilde{s}) \leq E(\tilde{s}) + E(s) \leq \overline{\lim_{\beta\to 1}} \; E(s_\beta) \leq \overline{\lim_{\beta\to 1}} \; E_\beta(s_\beta) < \infty$$

logo como $\mathbb{R}^2$ e S^2 {pólo} são conformemente equivalentes temos pelo teorema 2.3.5 que $\tilde{s}$ se estende a uma aplicação C^∞ e harmônica $\tilde{s}:S^2 \longrightarrow N$.■

2.3.11 Teorema:

seja N^n uma variedade riemanniana compacta tal que $\pi_1(N)=0$ para todo $i < k$, e $\pi_k(N)\neq 0$ com $k\geq 2$. Então existe uma aplicação harmônica não constante $f:S^2 \longrightarrow N$ de índice $\leq k-2$.

Demonstração:

Pelo lema 2.2.5 temos uma sequência de pontos críticos não constantes $f_{\alpha(i)}$ de $E_{\alpha(i)}$ com $\alpha(i) \longrightarrow 1$, o índice de $E_{\alpha(i)}$ em $f_{\alpha(i)}$ menor ou igual $k-2$ e $E_{\alpha(i)}(f_{\alpha(i)}) \leq (1+B^2)^{\alpha(i)}$, B independente de $\alpha(i)$. Como as aplicações $f_{\alpha(i)}$ são não triviais, isto é, $f_{\alpha(i)} \notin N_0$, segue do corolário 2.3.2 que: $E_{\alpha(i)}(f_{\alpha(i)})\geq\varepsilon$, ε independente de $\alpha_{(i)}$.

Fazendo $\alpha(i)\longrightarrow 1$ temos pelo teorema 2.3.9 que após passarmos a uma subsequência, se necessário, a sequência $f_{\alpha(i)}$ converge em $C^1(S^2\setminus\{p_1,..,p_\ell\}, N)$ para uma aplicação C^∞ e harmônica $f_1:S^2 \longrightarrow N$.

Caso I: f_1 é não constante.

Basta então mostrarmos que o índice m de $f_1 \leq k-2$.

Considere o diagrama de fibrados vetoriais,

$$\begin{tikzcd} f_1^*TM \arrow[r] \arrow[d] & \Pi_2^*TM \arrow[r] \arrow[d] & TM \arrow[d] \\ S^2 \arrow[r, "(id,f_1)"'] & S^2xM \arrow[r, "\pi_2"'] & M \end{tikzcd}$$

onde π_2 é a projeção na segunda variável.

Pelo lema 2.2.11 existem m seções $V_1,\ldots,V_m$ de f^*TM, linearmente independentes tais que:

(i) A forma do índice é negativa-definida sobre o espaço gerado por

$V_1,\ldots,V_m$.

(ii) $V_0,\ldots,V_m$ anulam-se em vizinhanças de $\{p_1,\ldots p_2\}$.

Estendamos $V_1,\ldots V_m$ a seções diferenciáveis $\tilde{V}_1,\ldots,\tilde{V}_m$ de Π_2^*TM com suporte em uma vizinhança tubular de $(id,f_1)(S^2)$, e seja:

$$V_r(i) = (id,f_{\alpha(i)})^*(\tilde{V}_r), \text{ onde } r = 1, \ldots, m$$

se nós olharmos para $V_r(i)$ como uma aplicação de S^2 em TM tal que $V_r(i)(p) \in T_{f_{\alpha(i)}(p)}M$, então teremos:

$$V_r(i) \longrightarrow (id,f_1)^*(\tilde{V}_r) = V_r \text{ em } C^1$$

Conforme a equação 2.7 do capítulo 1 temos que a segunda variação de $E_\alpha = E_{\alpha,0}$ se escreve em U e $V \in L^{2\alpha}_1(f_\alpha^*TM)$ como:

$$(3.11)\quad \delta^2E_\alpha(f_\alpha)(U,V) = 4\alpha(\alpha-1)\int_{S^2}(1+\|df_\alpha\|^2)^{\alpha-2}.\langle df_\alpha, \nabla U\rangle\langle df_\alpha, \nabla V\rangle dA +$$

$$+2\alpha\int_{S^2}(1+\|df_\alpha\|^2)^{\alpha-1}.\{\langle\nabla U,\nabla V\rangle-\langle\mathcal{H}(U),V\} \, dA$$

como a sequência $b_i = \left|\int_{S^2}(1+\|df_{\alpha(i)}\|^2)^{\alpha(i)-1} .\|\nabla V_r(i)\|.\|\nabla V_s(i)\|dA\right|$

é limitada então:

(3.12)

$$(\alpha(i)-1).\left|\int_{S^2}(1+\|df_{\alpha(i)}\|^2)^{\alpha(i)-2}.\langle df_{\alpha(i)},\nabla V_r(i)\rangle.\langle df_{\alpha(i)}\nabla V_s(i)\rangle dA\right| \leq$$

$$\leq (\alpha-1).b_i \longrightarrow 0$$

Portanto segue de (3.11) e (3.12) que:

$$\delta^2 E_{\alpha(i)} f_{\alpha(i)}(V_r(i),V_s(i)) \longrightarrow 2\int_{S^2}\{\langle\nabla V_r,\nabla V_s\rangle-\langle\mathcal{H}(V_r),V_s\rangle\}dA=2I(V_r,V_s)$$

onde I é a forma do índice para a energia usual. Logo para um certo $\alpha(i)$ bem próximo de um temos que $\delta^2 E_{\alpha(i)}(f_{\alpha(i)})(V_r(i),\ V_r(i)) < 0$ portanto o índice de $f_{\alpha(i)}$ é pelo menos m isto é,

$$m \leq \text{índice de } f_{\alpha(i)} \leq k-2.\blacksquare$$

Caso II: f_1 é constante.

Se $f_{\alpha(i)}$ convergisse em $C^1(S^2,N)$ então $E(f_1) = \lim E(f_\alpha)_{(i)}$ que não acontece pois $E(f_1) = 0$ e $E(f_{\alpha(i)}) \geq \varepsilon$. Logo existe um ponto digamos $x \in S^2$ onde a convergência C^1 falha. Através de uma rotação conveniente podemos supor $x = 0$ na representação plana $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Para cada i seja $p_i \in S^2$ um ponto tal que:

$$\|df_{\alpha(i)}(p_i)\| = \max\{\|df_{\alpha(i)}(p)\|:p \in S^2\} = \frac{1}{r^i}$$

através de uma rotação conveniente podemos supor cada $p_i = 0$ na representação $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Assim conforme a mesma demonstração que fizemos do teorema 2.3.10 temos: $r_i \longrightarrow 0$ e definindo $\tilde{f}_i:\mathbb{C} \longrightarrow N$ como $\tilde{f}_i = f_{\alpha(i)} \circ g_i$ onde $g_i(z) = r_i z$ é uma dilatação conforme, temos:

$$\|d\tilde{f}_i(0)\| = 1 \quad e \quad \|d\tilde{f}_i\| \leq 1 \quad \text{em } \mathbb{C}$$

e passando-se a uma subsequência $\tilde{f}_i$ converge em C^1 sobre os subconjuntos compactos do plano complexo para uma aplicação harmônica, não constante $\tilde{f}_\infty$ que se estende a S^2. Agora basta mostrarmos que m = índice de $\tilde{f}_\infty \leq k-2$.

Como E_α não é conformemente invariante precisamos trabalhar com outro funcional $\tilde{E}_i$ tal que $\tilde{E}_i(\tilde{f}_i) = E_{\alpha(i)}(f_{\alpha(i)})$. Explicitamente:

$$\tilde{E}_i(\tilde{f}_i) = \int_{\mathbb{C}} (1+\|d\tilde{f}_i\|_i^2)^{\alpha(i)}.dA_i$$

onde $dA_i = g_i^*(dA)$

$\|d\tilde{f}_i\|_i$ = norma de $d\tilde{f}_i$ com respeito a medida $ds_i^2 = g_i^*$(métrica de S^2)

analogamente temos através de mudança variável que:

(3.13)

$$\delta^2\tilde{E}_i(\tilde{f}_i)(\mathcal{U},V)=4\alpha(i)(\alpha(i)-1)\int_{\mathbb{C}} (1+\|d\tilde{f}_i\|_i^2)^{\alpha(i)-2}.\langle d\tilde{f}_i,\nabla V\rangle\langle d\tilde{f}_i,\nabla V\rangle_i dA_i$$

$$+\ 2\alpha(i)\int_{\mathbb{C}} (1+\|d\tilde{f}_i\|_i^2)^{\alpha(i)-1}\{\langle\nabla u,\nabla V\rangle_i-\langle\mathcal{H}_i(U),V\rangle_i\}\ dA_i$$

onde $\langle,\rangle_i$ denota o produto interno com respeito a métrica ds_i^2 e $\mathcal{H}_i(V) = [R(V,e_1(i))e_1(i) + R(V_i,\ e_2(i))e_2(i)]$ sendo $e_1(i)$ e $e_2(i)$ base ortogonal com relação a ds_i^2.

Seja $K \subset \mathbb{C}$ um subconjunto compacto, então:

$\left(\frac{1}{r_i}\right)^2 ds_i^2 \longrightarrow \left(\frac{1}{\pi}\right)(dx^2 + dy^2)$ uniformemente sobre K.

Como $d\tilde{f}_i \longrightarrow d\tilde{f}_\infty$ uniformemente sobre K segue que

$r_i^2(\|d\tilde{f}_i\|_i)^2 \longrightarrow \|d\tilde{f}_\infty\|_E$ uniformemente sobre K onde

$\|\ \|_E$ = norma Euclidiana.

A fim de assegurar a limitação do lado direito da equação (3.13) multipliquemos tudo por $(r_i)^{2\alpha(i)-2}$, obtendo:

$$(r_1)^{2\alpha-2}.\delta E_1(\tilde{f}_1)(U,V)=4\alpha(\alpha-1)\int_{\mathbb{C}}(r_1)^{2\alpha-2}.(1+\|df_1\|_1^2)^{\alpha-2}.\langle d\tilde{f}_1,\nabla U\rangle_1.$$

$$.\ \langle d\tilde{f}_1,\nabla V\rangle_1 dA_1 + 2\alpha\int_{\mathbb{C}}(r_1^2+r_1^2\|d\tilde{f}_1\|_1^2)^{\alpha-1}.\ \{\langle\nabla U,\nabla V\rangle_1-\langle\mathcal{H}_1(U),V\rangle_1\}\ dA_1.$$

Como no caso I, sejam $V_1,\dots,V_m$ campos S^2 linearmente independente dados pelo lema 2.2.11, isto é, que anulam-se em vizinhanças dos pontos de ramificações de $\tilde{f}_\infty$, e em uma vizinhança de ∞; e sobre os quais a forma do índice é negativa definida. Estendemos $V_1,\dots,V_m$ a seções diferenciáveis $\tilde{V}_1,\dots,\tilde{V}_m$ de π_2^*TM e definimos:

$$\tilde{V}_r(i) = (id,\tilde{f}_1)^*(\tilde{V}_r).$$

Usando $U = \tilde{V}_r(i)$ e $V = \tilde{V}_s(i)$ em (3.14) temos através de uma desigualdade análoga a (3.12) que o primeiro termo em (3.14) converge para zero quando $i \longrightarrow \infty$.

Considerando-se que: $(r_1^2 + r_1^2\|d\tilde{f}_1\|_1^2)^{\alpha-1} \longrightarrow (\|d\tilde{f}_\infty\|_E^2)^0 = 1$

Uniformemente sobre qualquer subconjunto compacto K do plano complexo menos os pontos de ramificação de $\tilde{f}_\infty$ e considerando que a integral:

$$2\int_{\mathbb{C}}\{\langle\nabla\tilde{V}_r(i),\ \nabla\tilde{V}_s(i)\rangle_1-\langle\mathcal{H}_1(\tilde{V}_r(i)),\ \tilde{V}_s(i)\rangle\}dA_1$$

é invariante sobre mudança conforme de métrica, temos que:

$$(r_1)^{2\alpha-2}.\delta^2\tilde{E}_1(\tilde{f}_1)(\tilde{V}_r(i),\tilde{V}_s(i)) \longrightarrow 2\int_{\mathbb{C}}\{\langle\nabla\tilde{V}_r,\nabla\tilde{V}_s\rangle-\langle\mathcal{H}(\tilde{V}_r),\tilde{V}_s\rangle\}\ dA =$$

$$= 2I(\tilde{V}_r,\ \tilde{V}_s)$$

onde I é a forma de índice para a energia usual da aplicação harmônica não-constante $\tilde{f}_\infty : S^2 \longrightarrow N$.

Portanto para i suficientemente grande $\delta^2\tilde{E}_i(\tilde{f}_i)$ é negativo definido e portanto colocando $V_r(i) = \tilde{V}_r(i) \circ g_i^{-1}$ temos que:

$$[\delta^2 E_{\alpha(i)}(f_{\alpha(i)})(V_r(i),\ V_s(i))]_{r,s}$$

é uma matriz negativa-definida e portanto o índice de $f_{\alpha(i)}$ deve ser pelo menos m, logo $m \leq$ índice de $f_{\alpha(i)} \leq k-2$.■

CAPÍTULO III

APLICAÇÃO

3.1. Preliminares

Veremos que uma variedade riemanniana, compacta, simplesmente conexa de dimensão $n \geq 2$, sob certa condição sobre o operador curvatura é homeomorfa a uma esfera. Esta condição, que apresentaremos claramente abaixo, é a positividade do operador curvatura sobre os bi-planos totalmente isotrópicos; ela generaliza alguns resultados particulares já conhecidos tais como: no caso n=2 com a curvatura seccional positiva, e no caso n=3 com o operador curvatura positivo sendo o primeiro uma consequência imediata do Teorema de Gauss-Bonnet e o segundo uma consequência de um teorema recente de Hamilton [4] o qual mostra na verdade que tem-se um difeomorfismo se a curvatura de Ricci for positiva. Em [5] Hamilton usando métodos de equação do calor provou que no caso n=4 e com operador curvatura positivo tem-se difeomorfismo. É também interessante notar que para n=5 e n=6 tem-se também difeormorfismos pois vemos em [7] que S^5 e S^6 têm apenas uma estrutura diferenciável.

3.1.1. Condição sobre curvatura:

Seja M uma variedade riemanniana de dimensão n com espaço tangente T_pM no ponto $p \in M$. Lembramos que o operador curvatura em p é o endomorfismo linear auto-adjunto $\mathcal{R}:\Lambda^2 T_pM \longrightarrow \Lambda^2 T_pM$ da potência exterior $\Lambda^2 T_pM$ do espaço tangente, definido por:

$$\langle \mathcal{R}(x \wedge y),\ u \wedge v\rangle = \langle R(x,y)v,u\rangle, \text{ para todo } x,y,u,v \in T_pM$$

onde $\langle,\rangle$ é o produto interno proveniente da métrica Riemanniana e R é o tensor curvatura usual.

A métrica Riemanniana $\langle,\rangle$ de T_pM pode ser estendida naturalmente a uma forma bilinear complexa $(,)$ e a um produto interno Hermitiano $\langle\langle,\rangle\rangle$ sobre o espaço tangente complexificado $T_pM \otimes \mathbb{C}$; sendo que estas extensões se relacionam pela igualdade:

$$\langle\langle z,w\rangle\rangle = (z,\bar{w}) \quad \text{para} \quad z,\ w \in T_pM \otimes \mathbb{C}$$

Analogamente a métrica Riemanniana $\langle,\rangle$ de $\Lambda^2 T_pM$ pode ser estendida de dois modos sobre $\Lambda^2(T_pM \otimes \mathbb{C})$.

Nós estendemos o operador curvatura a uma aplicação linear complexa:

$$\mathcal{R}:\Lambda^2(T_pM \otimes \mathbb{C}) \longrightarrow \Lambda^2(T_pM \otimes \mathbb{C})$$

e a cada bi-plano $\sigma \subset T_pM \otimes \mathbb{C}$ associamos uma curvatura seccional complexa $K(\sigma) \in \mathbb{R}$ dada por

$$K(\sigma) = (\langle\langle \mathcal{R}(z \wedge w),\ z \wedge w\rangle\rangle)/(\|z \wedge W\|)^2$$

onde $\{z,w\}$ é uma base para σ.

Chamamos um elemento $z \in T_pM \otimes \mathbb{C}$ de <u>isotrópico</u> se $(z,z)=0$. Um subespaço linear complexo V de $T_pM \otimes \mathbb{C}$ é chamado <u>totalmente isotrópico</u> se $(z,z) = 0$ para todo $z \in V$.

Dizemos que a curvatura de uma variedade Riemanniana M é positiva sobre bi-planos totalmente isotrópicos se $K(\sigma)>0$ para todo bi-plano σ totalmente isotrópico contido em $T_pM \otimes \mathbb{C}$ em qualquer ponto $p \in M$.

Observe que a dimensão de um subespaço totalmente isotrópico de $T_pM \otimes \mathbb{C}$ é menor ou igual a $\frac{n}{2}$ logo só teremos bi-planos totalmente isotrópicos se $n \geq 4$ e portanto apenas para variedades de dimensão acima de 4 é que a condição acima é definida.

3.1.2. Definições

(1) Dizemos que o opearador curvatura $\mathcal{R}: \Lambda^2 T_pM \longrightarrow T_pM$, é positivo quando tem autovalores positivos.

(2) o posto de um elemento $\omega \in \Lambda^2 T_pM$ é o menor inteiro ℓ tal que ω pode ser expresso na forma $\omega = \sum_{i=1}^{\ell} v_i \Lambda \omega_i$, v_i e $\omega_i T_pM$. Dizemos que $\mathcal{R}$ é (k,ℓ)-positivo se $\sum_{i=1}^{k} \langle \mathcal{R}(\omega_i), \omega_i \rangle > 0$ para todo conjunto ortonormal $\{\omega_1, \ldots\ldots, \omega_k\}$ de k elementos de $\Lambda^2 T_pM$, sendo cada um de posto menor ou igual a ℓ.

(3) Dizemos que a curvatura seccional de uma variedade M tem pinching $\delta (0 < \delta \leq 1)$ se existe uma função positiva k sobre M tal que:

$$\delta . k(p) \leq K(\sigma) \leq k(p)$$

para todo plano $\sigma \subset T_pM$ em todo ponto $p \in M$ o pinching é dito ser global se k puder ser tomada constante e estrito se uma das desigualdades é estrita.

3.1.3. Proposição

Seja M uma variedade Riemaniana de dimensão n, $n \geq 4$. Então a condição de positividade da curvatura sobre bi-planos totalmente isotrópicos decorre de qualquer uma das seguintes condições:

(i) M tem operador curvatura positivo,

(ii) M tem operador curvatura (2,2)-positivo,

(iii) M tem curvatura seccional de pinching $\frac{1}{4}$ estrito.

Demonstração: (i) e (ii)

Como (i) implica (ii), pois se o operador curvatura tem autovalores positivos então ele é (k,ℓ)-positivo para todo $k,\ell \in \mathbb{N}$, basta mostrarmos que (ii) implica nossa condição.

De fato, seja $\sigma \subset T_pM \otimes \mathbb{C}$ um bi-plano totalmente isotrópico.

Seja $\{z,w\}$ base de σ com $z = e_1 + ie_2$ e $w = e_z+ie_4$ tal que $\|z\| = \|w\| = \sqrt{2}$ e $\langle\langle z,w\rangle\rangle = 0$. É imediato notar que essas condições implicam que $\langle e_j, e_k\rangle = \delta_{jk}$ para $1 \leq j,k \leq 4$

$$z\wedge w = (e_1+ie_2) \wedge (e_3+ie_4) = (e_1\wedge e_3-e_2\wedge e_4) + i(e_1\wedge e_4+e_2\wedge e_3)$$

temos consequentemente que:

$$(1.1) \quad \langle\langle \mathcal{R}(z\wedge w),z\wedge w\rangle\rangle = \langle \mathcal{R}(e_1\wedge e_3-e_2\wedge e_4),e_1\wedge e_3-e_2\wedge e_4 \rangle +$$
$$\langle \mathcal{R}(e_1\wedge e_4+e_2\wedge e_3),e_1\wedge e_4+e_2\wedge e_3\rangle$$

Logo como os elementos $(e_1\wedge e_3-e_2\wedge e_4)$ e $(e_1\wedge e_4+e_2\wedge e_3)$ têm posto menor ou igual a 2 temos que (2,2)-positividade implica:

$$\langle\langle \mathcal{R}(z\wedge w),\ z\mathcal{L}w\rangle\rangle > 0$$

isto é, $\mathcal{R}$ é positivo sobre os bi-planos totalmente isotrópicos.

(iii) Da equação (1.1) tem-se:

$$\langle\langle \mathcal{R}(z\wedge w),z\wedge w\rangle\rangle=\langle R(e_1,e_3)e_3,e_1\rangle+\langle R(e_2,e_4)e_4,e_2\rangle+\langle R(e_1,e_4)e_4,e_1\rangle$$
$$+\langle R(e_2,e_3)e_3,e_2\rangle-2\langle R(e_1,e_2)e_3,e_4\rangle.$$

Por hipótese os quatro primeiros termos são maiores que $\frac{1}{4}k(p)$. Pela desigualdade de Berger temos:

$$|\langle R(e_1,e_2)e_3,e_4\rangle| < \frac{1}{2}k(p)$$

portanto:

$$\langle\langle\mathcal{R}(z\wedge w),z\wedge w\rangle\rangle > 4.\frac{1}{4}k(p) - 2.\frac{1}{2}k(p) = 0 \blacksquare$$

3.2. Teorema de Micallef-Moore:

Sejam Σ uma superfície de Rieman, M uma variedade Riemanniana, e $f:\Sigma \longrightarrow M$ uma aplicação harmônica não constante. Consideraremos aqui o caso em que Σ é a esfera de Rieman S^2. Nesse caso sabemos que uma aplicação harmônica é uma imersão mínima conforme.

O fibrado f^*TM sobre Σ (pull-bak de TM por f) herda uma métrica $\langle,\rangle$ e uma conexão ∇ pull-bak da métrica riemanniana e da conexão de Levi-Civita de TM. Conforme observamos em 3.1.1 a métrica $\langle,\rangle$ pode ser estendida ao fibrado complexificado $E = f^*TM \otimes \mathbb{C}$ como uma forma bilinear complexa (,) ou como um produto interno hermitiano $\langle\langle,\rangle\rangle$. A conexão ∇ também se estende a uma conexão linear complexa sobre E.

Seja $\mathcal{A}^{p,q}(E)$ o espaço das (p.q)-formas sobre Σ com valores em E; em um sistema de coordenadas complexo local $z=x+iy$ sobre Σ, $\mathcal{A}^{1,0}(E)$ é gerado por dz e $\mathcal{A}^{0,1}(E)$ é gerado por $d\bar{z}$. A conexão ∇ decompõe-se em $\nabla = \nabla'+\nabla''$ onde,

$$\nabla':\mathcal{A}^{0,0}(E) \longrightarrow \mathcal{A}^{1,0}(E) \qquad \text{e} \qquad \nabla'':\mathcal{A}^{0,0}(E) \longrightarrow \mathcal{A}^{0,1}(E)$$

sabemos [19] que existe uma única estrutura holomorfa sobre E com relação a qual ∇'' é o operador $\bar{\partial}$ sobre E, assim nesta estrutura uma seção W de E é holomorfa

$$\Longleftrightarrow \nabla''W = 0 \Longleftrightarrow \nabla_{\frac{\partial}{\partial\bar{z}}} W = 0$$

onde $$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

Podemos considerar $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ como uma seção local do fibrado $f^{*}TM \otimes \mathbb{C}$ uma vez que:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)(p) = f_{*p}\left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)(p) = f_{*p}\left(\frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\cdot\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) - i\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)\right]$$

Com essa notação expressamos o fato de f ser harmônica pela equação:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

Logo $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ é uma seção local holomorfa de E.

Por outro lado, a conformidade de f será expressa por: $\left(\dfrac{\partial f}{\partial z} , \dfrac{\partial f}{\partial z} \right) = 0$ portanto $\left(\dfrac{\partial f}{\partial z} \right)(p)$ é isotrópico para todo $p \in \Sigma$.

A forma de índice I que definimos na introdução deste trabalho como:

$$(2.1) \qquad I(V,V) = \int_{\Sigma} \left\{ \|\nabla V\|^2 - \langle \mathcal{H}(V), V \rangle \right\} dA$$

pode ser estendida a uma forma bilinear simétrica hermitiana sobre as seções de $E = f^{*}TM \otimes \mathbb{C}$, bastando para isso considerar o produto hermitiano $\langle\langle , \rangle\rangle$ em E e a extensão do endomorfismo $\mathcal{H}$ de $\Gamma(f^{*}TM)$ para um endomorfismo de $\Gamma(E)$. Assim transferimos para o espaço das seções de E as definições de índice, nulidade e campos de Jacobi.

3.2.1 Lema:

$$I(W,W) = 4\int_{\Sigma}\left\{\|\nabla_{\partial/\partial\bar{z}}\, W\|^2 - \langle\langle \mathcal{R}(W(\partial f/\partial z)),\ W\wedge(\partial f/\partial z)\rangle\rangle\right\} dx\wedge dy$$

para toda seção W de E.

Demonstração:

Via integração por parte tem-se:

$$\int_{\Sigma}\|\nabla_{\partial/\partial\bar{z}}\, W\|^2 dx\wedge dy = -\int_{\Sigma}\langle\langle\nabla_{\partial/\partial z}\nabla_{\partial/\partial\bar{z}}\, W,\ W\rangle\rangle\ dx\wedge dy$$

$$=-\frac{1}{4}\int_{\Sigma}\langle\langle(\nabla_{\partial/\partial x}\nabla_{\partial/\partial x}+\nabla_{\partial/\partial y}\nabla_{\partial/\partial y})W,\ W\rangle\rangle\ dx\wedge dy$$

$$-\ \frac{i}{4}\int_{\Sigma}\langle\langle(\nabla_{\partial/\partial x}\nabla_{\partial/\partial y}-\nabla_{\partial/\partial y}\nabla_{\partial/\partial x})W,W\rangle\rangle\ dx\wedge dy$$

$$=\ \frac{1}{4}\int_{\Sigma}\left\{\|\nabla_{\partial/\partial x}W\|^2 + \|\nabla_{\partial/\partial y}W\|^2\right\}\ dx\wedge dy$$

$$-\ \frac{i}{4}\int_{\Sigma}\langle\langle R(\partial f/\partial x,\ \partial f/\partial y)W,W\rangle\rangle\ dx\wedge dy.$$

Assim em (2.1) temos:

$$(2.2)\quad I(W,W) = \int_{\Sigma}\left\{4\|\nabla_{\partial/\partial\bar{z}}W\|^2 + i\langle\langle R(\partial f/\partial x,\ \partial f/\partial y)W,\ W\rangle\rangle\right.$$

$$\left. -\langle\langle R(W,\partial f/\partial x)\partial f/\partial x,W\rangle\rangle\ -\ \langle\langle R(W,\partial f/\partial y)\partial f/\partial y,W\rangle\rangle\right\}\ dx\wedge dy$$

Denotemos $W = U+iV$ onde U e V são seções a valores reais de $f^{*}TM$, então:

$$i\langle\langle R(\partial f/\partial x,\partial f/\partial y)W,W\rangle\rangle-\langle\langle R(W,\partial f/\partial x)\partial f/\partial x,W\rangle\rangle-\langle\langle R(W,\partial f/\partial y)\partial f/\partial y,W\rangle\rangle =$$

$$\begin{aligned}
&= -2\langle\mathcal{R}(U\wedge\partial f/\partial x),\ U\wedge\partial f/\partial y\rangle - \langle\mathcal{R}(U\wedge\partial f/\partial y),\ V\wedge\partial f/\partial x\rangle \\
&\quad - \langle\mathcal{R}(U\wedge\partial f/\partial x),\ U\wedge\partial f/\partial x\rangle - \langle\mathcal{R}(U\wedge\partial f/\partial y),\ U\wedge\partial f/\partial y\rangle \\
&\quad - \langle\mathcal{R}(V\wedge\partial f/\partial x),\ V\wedge\partial f/\partial x\rangle - \langle\mathcal{R}(V\wedge\partial f/\partial y),\ V\wedge\partial f/\partial y\rangle \\
&= - \langle\mathcal{R}(U\wedge\partial f/\partial x + V\wedge\partial f/\partial y),\ U\wedge\partial f/\partial x + V\wedge\partial f/\partial y\rangle \\
&\quad - \langle\mathcal{R}(V\wedge\partial f/\partial x - U\wedge\partial f/\partial y),\ V\wedge\partial f/\partial x - U\wedge\partial f/\partial y\rangle
\end{aligned}$$

$$(2.3) \qquad = - 4\langle\langle\mathcal{R}(W\wedge(\partial f/\partial z)),\ W\wedge(\partial f/\partial z)\rangle\rangle$$

onde a primeira igualdade decorre da simetria de Bianchi do tensor curvatura enquanto a última decorre de

$$W\wedge 2(\partial f/\partial z)=(U+iV)\wedge(\partial f/\partial x-i\partial f/\partial y)=(U\wedge\partial f/\partial x+V\wedge\partial f/\partial y)+i(V\wedge\partial f/\partial x-U\partial f/\partial y)$$

Substituindo-se (2.3) em (2.2) provamos o Lema.■

3.2.2 Teorema

Seja M uma variedade riemanniana n-dimensional com curvatura positiva sobre bi-planos totalmente isotrópicos. Então toda aplicação harmônica conforme não constante $f:S^2\longrightarrow M$ tem índice maior ou igual a $(n-3)/2$.

Demonstração

Um teorema de Grothendick (em [2]) nos assegura que podemos decompor o fibrado E em uma soma direta de fibrados de linha holomorfos,

$$(2.4) \qquad E = L_1\oplus L_2\oplus\ldots\ldots\oplus L_n$$

Ordenando os índices convenientemente podemos considerar:

$$(2.5) \qquad c_1(L_1) \geq c_1(L_2) \geq \ldots\ldots\geq c_1(L_n)$$

onde $c_1(L_i)$ denota o primeiro número de Chern de L_i.

Uma vez que a forma bilinear complexa $(,)$ é preservada por translação paralela, ela pode ser considerada como uma seção de $\otimes^2 E^*$ e ela estabelece um isomorfismo holomorfo entre E e E^*. Assim como a sequência das classes de Cherns é invariante do fibrado holomorfo devemos ter que:

(2.6) $$c_1(L_i) = c_1(L_{n-i+1}) \quad \text{para} \quad i = 1,\dots, n$$

Se W_i W_j e são seções holomorfas de L_i e L_j respectivamente tais que a aplicação $(W_i,W_j):S^2 \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ não é identicamente nula, então seu grau deve ser zero, assim $c_1(L_i) + c_1(L_j) = 0$ em outras palavras,

$$c_1(L_i) + c_1(L_j) \neq 0 \Rightarrow (L_i,L_j) = 0$$

de fato, em [2] vemos que podemos escrever:

$$E = E_0 \oplus \sum \{ L_i \oplus L_{n-i+1} / c_1(L_i) > 0 \}$$

onde $E_0 = \oplus \sum \{L_j / c_1(L_j) = 0\}$, e os somandos E_0, $L_i \oplus L_{n-i+1}$ são ortogonais entre si com relação a $(,)$ logo se $c_1(L_i)+c_1(L_j) \neq 0$ então devido a equação (2.6) temos $i \neq n-j+1$ e $j \neq n-i+1$ e portanto:

$$(L_i,L_j) = 0$$

Em particular $E_+ = \sum \{L_i / c_1(L_i) > 0\}$ é um subfibrado isotrópico de E pois nesse caso $c_1(L_i) + c_1(L_j) > 0$ e $(,)$ é não degenerada em E_0. Além disso considerando $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ e $z=x+iy$ as coordenadas sobre a esfera de Riemann temos que $\frac{\partial f}{\partial z}$ é uma seção holomorfa de E_+ porque ela se anula em ∞ e em todos os pontos de ramificação de f.

Do teorema de Riemann-Roch tem-se:

$$\dim_{\mathbb{C}} \{\text{seções holomorfas de } L_i\} = \begin{cases} c_1(L_i)+1 & , \text{ se } c_1(L_i) \geq 0, \\ 0 & , \text{ se } c_1(L_i) < 0. \end{cases}$$

se W_i e W_j são seções holomorfas de E_0, tem-se que (W_i,W_j) é constante e portanto podemos escolher seções holomorfas $\{W_1,W_2,..\}$ de E_0 que constituam uma base ortonormal complexa em cada ponto com relação a $(,)$. Seja $\mathcal{V}$ o subespaço linear complexo de $\Gamma(E)$ gerado pelas seções isotrópicas W_1+W_2, W_3+iW_4,.... de E_0 e as seções holomorfas de E_+, que como observamos são isotrópicas.

Em cada ponto p o subespaço linear complexo $\mathcal{V}(p)=\{W(p)\,|\,W\in\mathcal{V}\}$ tem dimensão maior ou igual a $\frac{n-1}{2}$. Logo $\mathcal{V}$ contém um subespaço linear complexo de dimensão maior ou igual a $\frac{n}{2} - \frac{3}{2}$ consistindo de seções holomorfas isotrópicas de $E = f^*TM \otimes \mathbb{C}$ tal que se W é um elemento não nulo de $\mathcal{V}_0$, então $W\Lambda(\partial f/\partial z) \neq 0$.

Portanto segue do lema 3.2.1 que para $W \in \mathcal{V}_0$,

$$I(W,W) = -4\int_{S^2} \langle\langle \mathcal{R}(W\Lambda(\partial f/\partial z)), W\Lambda(\partial f/\partial z)\rangle\rangle \, dx\Lambda dy$$

como W e $\frac{\partial f}{\partial z}$ são seções isotrópicas temos que $W(p)$ e $\frac{\partial f}{\partial z}(p)$ gera um bi-plano totalmente isotrópico em $T_{f(p)}M \otimes \mathbb{C}$ para cada $p\in S^2$ e assim a hipótese de curvatura positiva sobre bi-planos totalmente isotrópicos implica:

$$I(W,W) < 0 \quad \text{para todo} \quad W \in \mathcal{V}_0$$

ou seja:

$$\text{índice de } f \geq \text{dimensão de } \mathcal{V}_0 \geq \frac{n-3}{2}. \blacksquare$$

3.2.3 Teorema de Micallef-Moore

Seja M uma variedade riemanniana compacta, simplesmente conexa, n-dimensional ($n \geq 4$) cuja curvatura é positiva sobre bi-planos totalmente isotrópicos. Então M é homeomorfa a uma esfera.

Demonstração:

Seja k o menor inteiro tal que $\pi_k(M) \neq 0$, como M é simplesmente conexa $k \geq 2$.

Pelo teorema 2.3.11 existe uma aplicação harmônica não constante $f: S^2 \longrightarrow M$ de índice $m \leq k-2$. Por outro lado temos do teorema 3.2.2 que $m \geq \frac{n-3}{2}$, logo $k > \frac{n}{2}$.

Pelo teorema de isomorfismo de Hurewicz e pela dualidade de Poincaré devemos ter $k=n$. Assim como M é um CW-complexo temos do teorema de Whitehead que M tem o mesmo tipo de homotopia que a esfera. Pelas soluções das conjecturas generalizadas de Poincaré para $n \geq 4$ concluímos que M é homeomorfa a uma esfera.■

BIBLIOGRAFIA

[1] R.Adams, Sobolev Spaces

[2] A. Grothendieck, "Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphere de Riemann" Amer.J. Math.79 (1957), 121-138.

[3] J.Eells-L.Lemaire, Selected topics in Harmonic Maps.

[4] R.Hamilton,"Three-manifolds with positive curvature operator" J. Diff. Geometry - 17 (1982), 255-306.

[5] R.Hamilton, "Four-manifolds with positive curvature operator" J. Diff. Geomnetry - 24 (1986), 153-179.

[6] M.J. Micallef - J.D. Moore, "Minimal two-spheres and the topology of manifolds with positive curvature on totally isotropic two-planes", Annals of Math., AMS, 127 (1988), 199-227.

[7] J. Milnor, "Lectures on H-Cobordism Theorem", Math. notes n$\underline{o}$ 01 Princeton, University Press (1965).

[8] C.B. Morrey, Multiple integrals in the calculus of variation.

[9] R.S. Palais, Foundation of global non linear analisys. Benjamin, (1968), New York.

[10] R.S. Palais, "Lusternik-Schnirelman Theory on Banach manifolds" Topology 5,115-132.

[11] J. Sacks-K.Uhlenbeck, "The existence of minimal immersions of two-spheres", Annals of Math., 113 (1981), 1-24.

[12] S. Smale, "An infinite version of Sard's Theorem", Amer. J. Math., 87 (1965), 861-866.

[13] A.J. Tromba, "A general approach to Morse Theory", J. Diff.Geom. V. 12, n$\underline{o}$ 1, (1977), pg. 47-86.