

Gráficos de Controle Para Média de Um Processo, Com Limites de Advertência e Tamanhos Amostrais Variáveis

Ivanio Geraldo Lemos
ORIENTADOR: Prof. Dr. Sebastião de Amorim

09 de Setembro de 1991

L545g
14756/BC

Recebido em 09/09/91

Gráficos de Controle Para Média de Um Processo, Com Limites de Advertência e Tamanhos Amostrais Variáveis

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e definida pelo Sr. Ivania G. Lemos e aprovada pela comissão julgadora

Campinas, 30 de Setembro de 1991


Prof. Dr. Sebastião de Amorim ORIENTADOR

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como registro parcial ao Título de Mestre em Estatística

À minha esposa Valéria

À meus pais Pedro e Felícia

À meus irmãos Ismaene, Ivani e Itamar

AGRADECIMENTOS

Transmito, por este meio, meus sinceros agradecimentos:

ao Prof. Dr. Sebastião de Amorim, pela orientação e esforço constante durante o desenvolvimento deste trabalho. e também a Inês Carvalho de Azevedo e a Prof. Dra. Regina C. C. Moran pelo apoio moral;

aos meus amigos Américo, Beto, Chico, Elenei, Jorge, Maurício, Ruy, Harlen e Prof. Dr. Eikiti Tengnon

aos membros da banca:

Prof. Dr. Sebastião de Amorim

Prof. Dr. Antonio Fernando Branco Costa

Prof. Dr. Dalton Francisco de Andrade

pelas valiosas sugestões;

a minha esposa Valéria Lopes Lemos pela grande ajuda prestada na redação e na confecção das figuras que aparecem neste trabalho e também pelo o grande incentivo.

às instituições CNPq e CAPES pelo apoio financeiro recebido

RESUMO

Neste trabalho, nós consideramos o Esquema Clássico de Shewhart para a construção de gráficos de controle \bar{X} , com parâmetros n_0 , k_0 e h_0 . Numa tentativa de melhorar sua rapidez na detecção de perturbações estáveis na média do processo, nós estabelecemos, na região interna aos limites de controle, uma faixa central, definida por um limite inferior e um limite superior de alerta, tal que, se uma observação cair dentro dos limites de controle, a próxima amostra será de tamanho n_g se ela cair fora da faixa central, n_p , caso contrário, com $n_g > n_p$.

Este novo esquema, que denominamos nV, é mantido com os mesmos custos básicos que o Esquema Clássico Shewhart de referência, pela escolha conveniente de n_p , n_g e largura da faixa central, garantindo que $E[n / \bar{X} \in (LIC, LSC)] = n_0$ enquanto o processo estiver sob controle.

Nós desenvolvemos formalmente as propriedades básicas de estatísticas deste esquema, mostramos que ele melhora o ECS em termos do tempo médio esperado entre a ocorrência e a detecção de perturbações estáveis na média do processo, em vários contextos de importância práticas.

Os resultados são abundantemente ilustrados com simulações Monte Carlo.

ABSTRACT

In this work we consider Shewhart's Classical Scheme for the construction of \bar{X} control charts, with parameters n_0 , h_0 and k_0 . In an attempt to improve its promptness to detect stable shifts on the process' mean, we establish, in the region inside the control limits, a central stripe defined by a lower and an upper warning limit, such that, if one observation falls inside the control limits the next sample size will be n_p if it falls outside the warning limits and n_g , otherwise, with $n_g > n_p$.

This new scheme, which we call nV, is kept with the same basic costs as the reference Shewhart's scheme, by choosing n_p , n_g and the width of the central stripe such that $E[n / \bar{X} \in (UCL, LCL)] = n_0$, as long as the process is kept under control.

We formally develop the basic statistical properties of this new scheme, and show that it improves Shewhart's basic approach in terms of the expected time between occurrence and detection of the stable shift on the process' average, in several situations of practical interest.

The results are abundantly illustrated thru Monte Carlo simulations.

Conteúdo

1	Gráficos de Controle : Uma Revisão Histórica	8
1.1	Introdução	8
1.2	O Esquema Clássico de Shewhart, Suas Características e Limitações	14
1.3	Esquemas Alternativos Eficientes	18
2	Gráficos de Controle \bar{X}, Com Tamanho das Amostras Variável	21
2.1	Introdução	21
2.2	Gráfico de Controle \bar{X} , Com n Variável	25
2.3	Desenvolvimento Teórico do Plano Amostral Com n Variável	27
2.4	Eficiência Relativa : Desenvolvimento Matemático	31
2.5	Cálculo Em Alguns Casos Gerais Fixando n_0 , n_p e n_g	38

2.6	Curvas de Eficiência	41
2.7	Simulações de Monte Carlo	44
2.8	Conclusão	49

Lista de Figuras

1	Gráfico de controle \bar{X} com faixa de alerta	7
1.1.1	Um gráfico típico de controle para \bar{X}	10
1.2.2	Distribuição do volume empacotado X , com o processo sob controle. Os limites de tolerância se localizam à 3 desvios padrões de distância de M	16
1.2.3	Distribuição do volume empacotado X , com o processo sob controle. Os limites de tolerância se localizam à 2 desvios padrões de distância de M	16
2.1.1	Gráficos de controle para \bar{X} à intervalos variáveis	22
2.1.2	Esquema clássico de Shewhart	23
2.1.3	Esquema alternativo de Reynolds, Amin, Arnolds e Nachlas (88)	24
2.2.4	Distribuição de frequência para o Esquema Clássico de Shewhart	26

2.2.5 Distribuição de frequência para o esquema alternativo, com o tamanho das amostras variável	26
2.3.6 Gráfico de \bar{Z} com tamanho das amostras variável	27
2.3.7 Histograma para o esquema alternativo de amostras variáveis	30
2.6.8 Média do processo antes e após a ocorrência de falha	41
2.6.9 Curvas de eficiência no esquema nV relativa ao ECS	42
2.6.10 Curvas de eficiência no esquema nV relativas ao ECS	42
2.6.11 Curvas de eficiência no esquema nV relativa ao esquema hV	43
2.6.12 Curvas de eficiência no esquema hV relativa ao ECS	43
2.7.13 Distribuição de frequência para ECS	45
2.7.14 Distribuição de frequência para amostras variáveis	46
2.7.15 Distribuição de frequência para o ECS	47
2.7.16 Distribuição de frequência para o esquema nV	48

Lista de Tabelas

2.1	Tabela de eficiência no esquema nV relativa ao ECS	38
2.2	Tabela de eficiência no esquema nV relativa ao ECS	39
2.3	Tabela de eficiência no esquema nV relativa ao esquema hV	40

INTRODUÇÃO

Neste trabalho partimos do Esquema Clássico de Shewhart (ECS) para construção de gráficos de controle \bar{X} , definido pelos parâmetros n_0 , k_0 , h_0 , estabelecendo, na região interna aos limites de controle, uma faixa central, simétrica em torno do valor médio objetivo M

A região definida pelas duas faixa laterais, interna aos limites de controle mas externas à faixa central, denominamos Região de Alerta.

O nosso delineamento amostral diferencia do Esquema Clássico de Shewhart por adotar um tamanho amostral variável: Se \bar{X} cair na Faixa Central, a próxima amostra será de tamanho $n_p < n_0$ e se cair na Região de Alerta, a próxima amostra será de tamanho $n_g > n_0$. Os valores de n_p , n_g e a largura da faixa central serão escolhidos de modo a fazer com que o valor médio esperado de n , dado que \bar{X} caiu entre os limites de controle, seja igual ao valor de referência n_0 , desde que o sistema esteja em controle estatístico. A Região de Alerta é definida pelo fator constante k_a , menor que k_0 . Esta idéia foi originalmente proposta por Reynolds, Amin, Arnold e Nachlas (1988), só que eles fazem k e n constantes e h variável. Veremos que a alternativa n variável, além de enriquecer a idéia, tornando-a mais versátil e portanto mais adaptável a uma variedade de contextos práticos permite, em diversas situações, ganhos de eficiência bem maiores.

Nosso objetivo aqui é construir um esquema alternativo, mas de custo equivalente ao Esquema Clássico de Shewhart, que apresente maior agilidade na detecção de perturbações estáveis na média do processo.

Desta forma, partindo de um delineamento básico de referência definido por (k_0, n_0, h_0) , construímos outro, com mesmos valores k_0 e h_0 mas com n variável, de forma que, sob controle estatístico $E\{n/\bar{X} \in (LIC, LSC)\} = n_0$, onde LIC e LSC são os Limites Inferior e Superior de Controle, respectivamente, definidos por $LIC = M - k_0\sigma/\sqrt{n_0}$ e $LSC = M + k_0\sigma/\sqrt{n_0}$. Aqui, M é o valor objetivo de X , onde σ é o desvio padrão de X quando o sistema se encontra sob controle. Para maior simplicidade denominaremos nV o esquema amostral que propomos, com n variável. Ao esquema originalmente proposto por Reynolds,

Amin, Arnold e Nachlas (1988) denominaremos hV. Na Figura 1 a região de alerta é a faixa sombreada delimitada pelos Limites Inferior e Superior de Alerta (LIA e LSA); com $LIA = M - k_a\sigma/\sqrt{n_0}$ e $LSA = M + k_a\sigma/\sqrt{n_0}$.

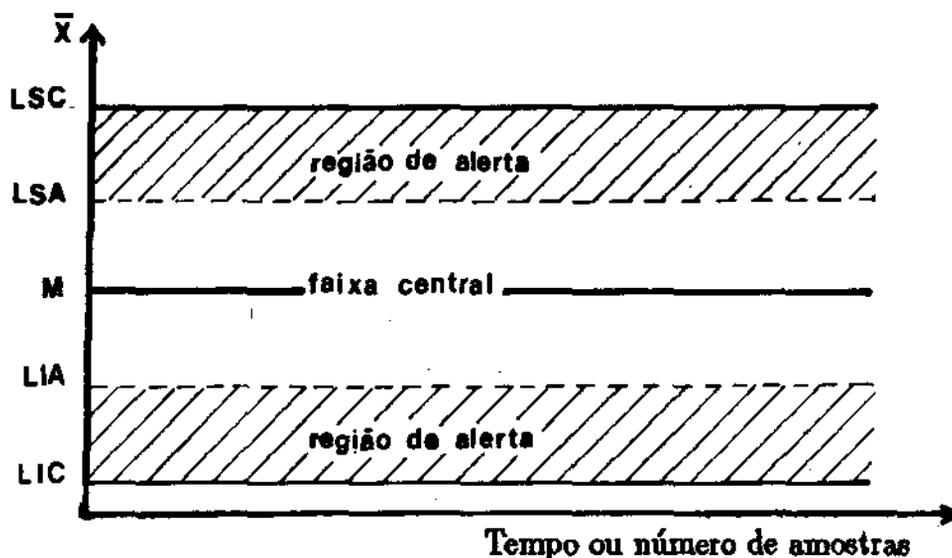


Figura 1: Gráfico de controle \bar{X} com faixa de alerta

Nós adotamos o Modelo Básico de Duncan (1956) que considera que, uma vez inicializado, o processo fica sob controle por um tempo aleatório T_1 , quando então ocorre a perturbação estável na média. Esta perturbação leva a média de M para $M + \delta\sigma$ com δ fixo, onde σ é o desvio padrão da variável de interesse X quando o processo está sob controle estatístico. Duncan admite ainda que a ocorrência de uma perturbação bloqueia outras ocorrências até que seja detectada e corrigida, iniciando-se outro ciclo. O intervalo de tempo desde a ocorrência da perturbação até sua detecção pelo gráfico de controle é denominado T_2 . Em seu Modelo Básico Duncan assume que T_1 tem uma distribuição exponencial com parâmetro θ . Esta consideração é irrelevante para nossos objetivos, neste trabalho.

Nós denominamos então T_2 como o tempo decorrido entre a perturbação estável na média do processo e sua detecção pelo gráfico de controle. A eficiência do Esquema nV, relativamente ao Esquema Clássico de Shewhart, será definida como a razão entre a esperança de T_2 sob o ECS e a esperança de T_2 sob o Esquema nV. Veremos, que os ganhos potenciais de eficiência dependerão, entre outras coisas, do fator de variação na média, δ , e podem ser realmente extraordinários em diversas situações de interesse.

Aqui desenvolvemos o método em seus aspectos teóricos e exploramos os ganhos possíveis em diversos contextos. Todos os resultados são abundantemente ilustrados por simulação Monte Carlo.

Capítulo 1

Gráficos de Controle : Uma Revisão Histórica

1.1 Introdução

Os gráficos de controle foram introduzidos por Shewhart, ainda nos anos vinte. Com eles iniciou-se o uso sistemático de técnicas estatísticas no controle de qualidade e de processos.

O fundamento teórico dos gráficos de controle é a diferenciação das causas de variação da qualidade, em sistemáticas e aleatórias. Na monitoração de processos industriais e, mais particularmente, no acompanhamento de processo de fabricações em série ou contínuas, frequentemente existe uma variável de interesse X , cuja a distribuição de probabilidade está associada ao estado de controle do processo. O processo é dito estar sob controle estatístico, se a distribuição de X , e particularmente, se a média (M) e a variância (σ^2) de X , não se alteram com o decorrer do processo. Em geral, em situações práticas, M é um valor ajustado de acordo com as especificações, e σ^2 mede uma variabilidade indesejável mas inerente ao processo.

Ocorre o desajuste do processo quando há uma variação na média ou um aumento na variância.

Observa-se que certas variações do processo pertencem à categoria de variações por causas comuns. As variações por causas comuns são em geral tecnicamente difíceis de serem evitadas, pois são o resultado de uma infinidade de causas complexas, cada uma contribuindo com uma parcela insignificante para a variação total.

Além dessas variações aleatórias, denominadas de causas comuns, outras variações podem ocorrer, geralmente produzidas por causas identificáveis. Essas variações, denominadas de causas especiais, podem alterar tanto a média quanto a variância do processo. São frequentemente indesejáveis, podendo causar prejuízos consideráveis. Tipicamente essas variações são causadas por intervenções indevidas no processo ("tampering"), defeitos na matéria prima, erros de operadores, desgaste das máquinas, etc. Um processo é dito estar sob controle estatístico se só apresenta variações de causas comuns. Em geral é pouco frutífero tentar estabelecer um programa de melhora de um processo que apresente variações por causas especiais, pois elas podem confundir o observador. Assim, colocar um processo sob controle estatístico é um passo preliminar no esforço para a melhoria contínua do mesmo.

Usualmente para uma variável X existem limites de tolerância em torno do valor desejado M , denominados limite inferior de tolerância (LIT) e limite superior de tolerância (LST), especificados em projeto ou por contrato. Mesmo que o processo se encontre sob controle, é sempre possível que alguns itens sejam fabricados fora destas especificações.

O Esquema Clássico de Shewhart para construção de gráfico de controle para \bar{X} , estabelece que uma amostra de tamanho fixo n_0 seja retirada a cada intervalo constante de tempo h_0 . Os valores de X na amostra são medidos e a média obtida é plotada no gráfico \bar{X} como mostra a Figura 1.1.1.

Os limites de controle são escolhidos de maneira que, na ausência de causas identificáveis, praticamente todos os pontos caiam entre eles.

Durante o acompanhamento de um processo, se um ponto cair dentro dos limites de controle, assume-se que o processo está sob controle. Shewhart recomenda neste caso não intervir no processo: "leave it alone".

Se um ponto cair fora dos limites, entende-se que, o processo está fora de controle. Recomenda-se neste caso ações apropriadas de investigação e correção para encontrar e eliminar as causas especiais.

Existe uma estreita ligação entre gráficos de controle e o testes de hipóteses.

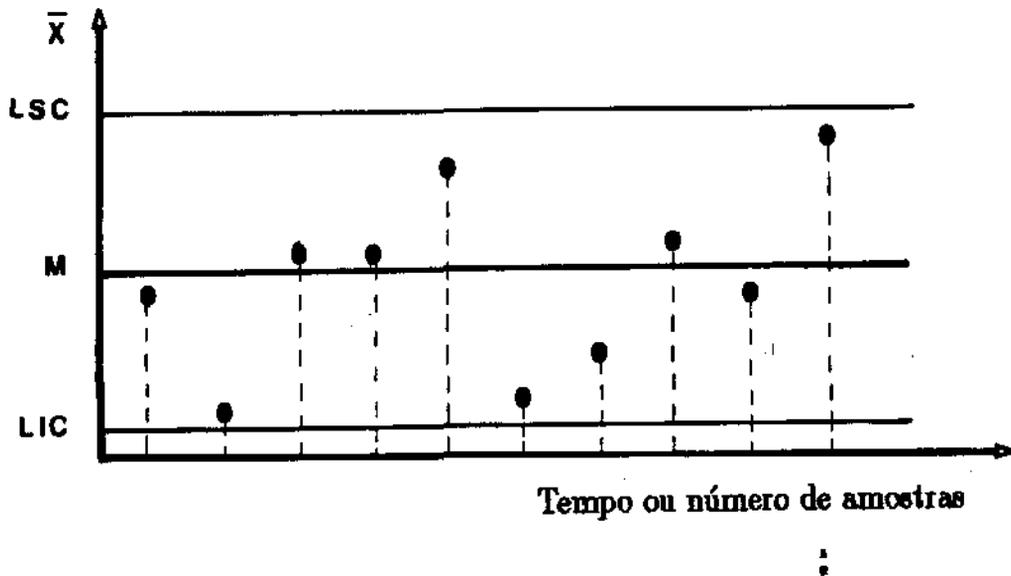


Figura 1.1.1: Um gráfico típico de controle para \bar{X}

Conceitualmente, o gráfico de controle é um teste de hipótese contínuo no tempo, isto é, pontos são plotados sequencialmente; um ponto plotado dentro dos limites de controle recomenda a não rejeição da hipótese de controle estatístico, enquanto que um ponto plotado fora dos limites de controle, recomenda a rejeição da hipótese do controle estatístico. Desta forma, como nos testes de hipóteses, pode se pensar na probabilidade do erro tipo I dos gráficos de controle, isto é, a probabilidade de se concluir que o processo está fora de controle, quando ele realmente está sob controle-e, reciprocamente, na probabilidade do erro tipo II. Tradicionalmente, os gráficos de controle têm sido planejados levando-se em conta apenas critérios estatísticos. De forma sumária, o planejamento de um gráfico de controle, consiste na escolha de 3 parâmetros :

tamanho da amostra (n_0) ,

intervalo entre amostragens (h_0)

e o fator de abertura dos limites de controle (k_0)

A este esquema denominamos aqui Esquema Clássico de Shewhart, e através de todo este trabalho será referido por ECS. Nestes casos, a menos que explicitamente especificado,

k_0 será igual a 3. A operação de um plano de qualidade baseado num gráfico de controle envolve diversos custos. Há os custos com *amostragem*, os custos associados a investigação de uma suposta falta de controle detectada pelo gráfico, e sua eventual correção, e os custos decorrentes das perdas adicionais de qualidade associados a operação do sistema fora de controle estatístico. Todos estes custos são influenciados pela escolha dos parâmetros n_0 , k_0 , h_0 . Desta forma é conveniente que, no planejamento de um gráfico de controle, estes custos sejam levados em consideração.

O primeiro modelo completo para o planejamento econômico de gráficos de controle foi introduzido por Duncan (1956), com uma metodologia formal para determinar a escolha ótima dos parâmetros n_0 , k_0 e h_0 .

O modelo básico de Duncan assume que, sob controle estatístico, a variável aleatória X apresenta uma distribuição Normal com média M e desvio padrão σ . Neste modelo o estado de controle estatístico é interrompido por uma perturbação estável na média de X , levando-a de M para $M + \delta\sigma$, com δ constante. Além disso, Duncan assume que a ocorrência de uma perturbação bloqueia a ocorrência de outras até que a mesma seja detectada e eliminada, iniciando-se outro ciclo de qualidade.

No modelo de Duncan o acompanhamento de um processo é composto de eventos e etapas :

Evento 1: O processo entra em operação

Evento 2: Uma perturbação estável ocorre na média

Evento 3: A perturbação é detectada pelo gráfico de controle

Evento 4: A perturbação é diagnosticada fisicamente

Evento 5: A perturbação é corrigida

Evento 6: O processo é reiniciado; e assim por diante. Entre dois eventos consecutivos temos uma Etapa.

Etapa 1: (entre os eventos 1 e 2): O processo está operando sob controle estatístico.

Etapa 2: (entre os eventos 2 e 3): O processo está operando fora de controle, sem o conhecimento do operador

Etapa 3: (entre os eventos 3 e 4): Ou o processo está paralizado, ou o processo está operando fora de controle, mas já com o conhecimento do operador

Etapa 4: (entre os eventos 4 e 5): Com as causas já identificadas e sendo corrigidas.

Etapa 5: (entre os eventos 5 e 6): Com os procedimentos para a reinicialização do processo.

O intervalo entre evento 1 e evento 6, isto é, entre dois reinícios consecutivos do processo, é denominado ciclo de qualidade.

Entre os eventos 1 e 2 podem ocorrer outros eventos indesejáveis: Os alarmes falsos ou, na terminologia dos testes de hipóteses, os Erros do tipo I.

O tempo decorrido entre o início de operação (ou reinício) do processo e a ocorrência da perturbação na média, é denominado T_1 . Diversos autores consideram que T_1 tem distribuição Exponencial com parâmetro θ . Em sua tese de doutorado, Costa (1989) considera um modelo onde T_1 tem distribuição de Weibull e introduz esquemas alternativos ao ECS. Este modelo permite tratar eficientemente sistemas com deterioração. Para nosso trabalho aqui contudo, esta questão é irrelevante.

O tempo decorrido entre a ocorrência da falha e sua detecção pelo gráfico de controle é definido como T_2 . Este tempo é importante neste trabalho pois nosso objetivo será exatamente criar delineamentos alternativos ao ECS que, sob condições idênticas, reduza $E(T_2)$.

Sem perda de generalidade, consideramos que as etapas seguintes do ciclo têm duração nula. Assim, o comprimento de um ciclo de qualidade será $T = T_1 + T_2$.

Além disto adotaremos a seguinte notação: N_1 é o número de amostras inspecionadas durante a etapa 1, e N_2 o número de amostras inspecionadas na etapa 2. Desta forma, no ECS $(N_2 - 1)h_0 \leq T_2 \leq N_2h_0$.

Neste trabalho adotamos o modelo de perturbações de Duncan, por sua simplicidade e relativa generalidade, já que a perturbação instantânea pode ser a representação formal de uma perturbação em rampa mas que se dá em um tempo curto relativo a h_0 . Ao final nós testamos nosso delineamento num contexto em que a média do processo varia de forma mais irregular em torno do valor objetivo.

1.2 O Esquema Clássico de Shewhart, Suas Características e Limitações

O ECS toma uma amostra de n_0 itens a cada intervalo de h_0 unidades de tempo. A média dos n_0 valores observados de X é plotado sequencialmente no gráfico \bar{X} onde são definidos os limites de controle.

Os limites de controle, são definidos por:

$$\text{LIC} = \mu - k_0\sigma/\sqrt{n_0} \text{ e } \text{LSC} = \mu + k_0\sigma/\sqrt{n_0}, \text{ onde:}$$

k_0 é o fator de abertura dos limites de controle

$\sigma/\sqrt{n_0}$ é o desvio padrão da média de \bar{X} .

EXEMPLO 1.2.1: No ECS geralmente adota-se $k_0 = 3$. Esta é uma escolha que fornece uma excelente proteção contra alarmes falsos mas, em contrapartida, torna muito lenta a detecção de pequenas perturbações no processo. Neste caso, a frequência média de alarmes falsos, é de 1 em cada 370 inspeções com o processo sob controle.

Esta alta proteção é importante. Boa parte da variabilidade verificada em situações práticas é decorrente de um excesso de intervenções no processo: Por desconhecimento da natureza estatística dos processos reais, operadores cuidadosos mas desinformados tendem a intervir no mesmo sempre que observam um valor de \bar{X} fora de uma vizinhança estreita de M . Este excesso de intervenções tem efeito contrário ao desejado, aumentando a variabilidade resultante do processo. Shewhart, entendendo a natureza estatística dos processos, sabendo da existência inevitável da variabilidade por causas comuns, advertiu severamente contra a intervenção indevida (tampering) no processo. O valor escolhido $k_0 = 3$ expressa esta preocupação: "Só intervenha no processo quando houver evidência muito forte de que o mesmo realmente saiu do estado de controle; " otherwise, leave the process alone! "

Por outro lado, como consequência desta alta proteção contra alarmes falsos, uma perturbação pequena na média pode passar muito tempo desapercebida. Por exemplo, uma

perturbação estável na média igual a $0,25\sigma$ tomará em média 281 inspeções para ser detectada se $n_0 = 1$, e 155 inspeções se $n_0 = 4$, e assim por diante. A redução do valor de k_0 diminuirá o tempo médio esperado entre a ocorrência e a detecção de uma perturbação mas, por outro lado, aumentará a frequência de alarmes falsos.

Para a variável de interesse X , existem em geral Limites de Tolerância em torno do valor desejado M , denominados :

Limite Inferior de Tolerância (LIT) e Limite Superior de Tolerância (LST), estes limites, em geral de natureza técnica, são frequentemente especificados em contrato para produtos finais, ou em projetos para produtos intermediários.

Devido à variabilidade por causas comuns, inerente a qualquer processo real de fabricação, mesmo que ele se encontre sob perfeito estado de controle, é sempre possível que alguns itens sejam fabricados fora das especificações, isto é, com X abaixo do LIT ou acima do LST.

A frequência com que itens são fabricados fora das especificações, estando o processo sob controle, depende da variabilidade do mesmo - representada pela variância σ^2 - e pela severidade dos limites de tolerância. Nas situações em que os limites de tolerância são folgados, muito raramente - ou quase nunca - itens fora das especificações são fabricados, desde que o processo esteja sob controle.

Em outras situações, os Limites de Tolerância são mais rígidos, relativamente à variabilidade natural do processo, tornando mais frequente a ocorrência de itens fora das especificações.

EXEMPLO 1.2.2 : Consideremos um processo de empacotamento de leite, em o que volume objetivo de leite por pacote é $M = 1000$ ml e o desvio padrão inerente do processo é $\sigma = 5$ ml. Se os Limites de Tolerância forem $LIT = 985$ ml e $LST = 1015$ ml sabemos que, enquanto o processo se mantiver sob controle, muito raramente serão produzidos itens fora das especificações. Neste exemplo, para X distribuído normalmente, a frequência de incidência de itens fora dos Limites de Tolerância será igual a $2(1-\Phi(3))$, ou 2,7 por 1000. Dizemos então que os Limites de Tolerância são folgados. Neste caso pequenas variações em M ou em σ não provocarão danos sensíveis em termos da frequência de itens não conformes, vide Figura 1.2.2.

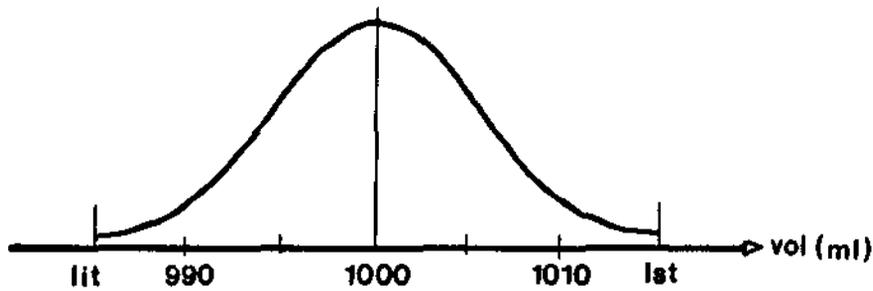


Figura 1.2.2: Distribuição do volume empacotado X, com o processo sob controle. Os limites de tolerância se localizam à 3 desvios padrões de distância de M.

Por outro lado, se $LIT = 990$ ml e $LST = 1010$ ml, temos uma situação crítica onde itens fora das especificações já são fabricados a uma taxa aproximada de 1 a cada 22, vide Figura 1.2.3.

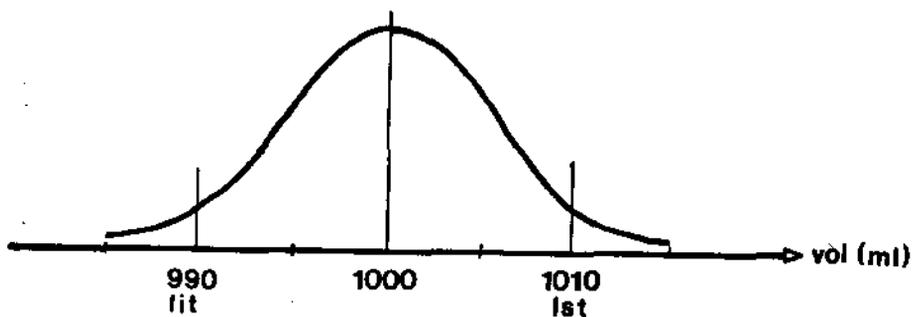


Figura 1.2.3: Distribuição do volume empacotado X, com o processo sob controle. Os limites de tolerância se localizam à 2 desvios padrões de distância de M.

Neste caso, pequenas variações em M ou em σ^2 podem provocar aumentos consideráveis naquela proporção.

A ocorrência de alguma perturbação no processo, pode provocar variações nos parâmetros da distribuição da variável de interesse X. Em particular, a média pode se deslocar do valor ajustado M ou a variância pode crescer, ou as duas coisas podem ocorrer concomitantemente. Devido à variabilidade natural do processo, tais perturbações podem não

ser imediatamente percebidas pelo operador. Na verdade, a menos que ela seja de grande magnitude, dificilmente serão percebidas sem o recurso de ferramentas estatísticas especiais. O problema é que mesmo pequenas perturbações em relação ao estado de controle de X podem provocar, se não detectadas rapidamente, perdas consideráveis, não apenas na maior frequência de casos de não conformidade, como aumento da proporção de itens conformes, mas distantes do valor objetivo M . Ou seja, mesmo as pequenas variações provocarão sempre mais perdas, mais retrabalho e menos qualidade.

Tradicionalmente tem-se adotado o princípio, profundamente equivocado, de que qualquer valor de X é igualmente bom, desde que esteja entre os Limites de Tolerância. Mais recentemente, com crescimento da importância que vem assumindo as questões relativas à qualidade dos produtos, tem crescido a aceitação do princípio que estabelece uma função de perda associada à variável X . Esta função só é zero quando $X = M$ e cresce com $|X - M|$. Em particular, a função quadrática $\mathcal{L}(X, M) = k_0(X - M)^2$ para $X \in (LIT, LST)$ tem sido frequentemente empregada. Neste contexto a detecção rápida, mesmo de pequenas perturbações nos parâmetros da distribuição de X , ganha importância. Ver, a respeito, Taguchi (1990).

Além disto é importante ressaltar que Limites de Tolerância não podem ser estáticos. Em vez disto, eles devem ser escolhidos de forma a estimular e acompanhar a melhoria permanente da qualidade. Desta forma, Limites de Tolerância folgados por implicarem numa atitude, consciente ou não, de desconsideração com os propósitos de melhoria contínua da qualidade, são um equívoco perigoso.

EXEMPLO 1.2.3 : Voltando à situação do exemplo anterior, com $M = 1000$ ml, $\sigma = 5$ ml, $LIT = 990$ ml e $LST = 1010$ ml, se a média se deslocar de 1000 ml para 1002,5 ml uma variação 0,5 desvio padrão, a taxa de ocorrência de itens fora das especificações crescerá de 4,6% para 7,3%. Além disto a distância quadrática média entre o valor de X e o valor objetivo M , para os itens conformes, crescerá de 19,35 para 21,81. Com $\delta = 1$, a d.m.q. entre X e M seria 28,26.

Fica evidente que o esforço para a detecção rápida de perturbações estáveis, mesmo pequenas, no processo, é importante.

Avanços consideráveis têm sido feito no sentido de desenvolver esquemas alternativos ao ECS que acelerem a detecção de pequenas perturbações, conforme veremos a seguir.

1.3 Esquemas Alternativos Eficientes

O ECS tem a vantagem da simplicidade conceitual e operacional, indispensável a meio século atrás, mas ainda importante em diversos contextos atuais. Sua desvantagem é a lentidão na detecção de pequenas perturbações.

Esta lentidão pode ser corrigida, variando-se os parâmetros k , h e n , mas qualquer variação aí implica em custos adicionais. A redução de k acelera a detecção de variações estáveis na média mas penaliza com um aumento na taxa de alarmes falsos. A redução de h ou o aumento de n tem efeito análogo, mas aumenta os custos amostrais.

Duncan (1956) desenvolveu um esquema que, estabelecendo custos diversos e um modelo de tempo de falha, determina a escolha ótima k , h e n .

Diversas alternativas ao ECS permitem acelerar a detecção, sem alteração de custos, apenas utilizando esquemas mais sofisticados que fazem uso mais eficiente das informações contida nos dados. Estes esquemas são, geralmente, mais complexos, o que os tornariam inadequados no ambiente de fábrica dos anos 20 e 30. Hoje, contudo, com a enorme difusão de uma cultura matemática básica, e mesmo dos conceitos estatísticos fundamentais, eles já podem ser, realisticamente, considerados como alternativas.

Regras adicionais podem ser introduzidas no ECS. Por exemplo, mesmo que não se verifique um valor de \bar{X} fora dos limites de controle, a hipótese nula pode ser rejeitada se uma das condições abaixo for verificada:

- Duas observações sucessivas afastadas da média de mais de dois desvios padrões amostrais, isto é, fora do intervalo $(M-2\sigma/\sqrt{n_0}, M+2\sigma/\sqrt{n_0})$.
- Cinco observações consecutivas afastadas da média de mais de um desvio padrão amostral, isto é, fora do intervalo $(M-1\sigma/\sqrt{n_0}, M+1\sigma/\sqrt{n_0})$.
- Dez observações consecutivas abaixo (ou acima) da média.
- etc.

Estas regras adicionais de controle aumentam a agilidade do ECS, mas tiram-lhe muito da simplicidade conceitual e operacional. Além disto tornam mais complexo o controle da frequência de alarmes falsos. Estes vão aumentando à medida que novas regras de controle vão sendo incluídas tornando necessárias revisões no valor de k_0 . Diversas outras alternativas modificam mais profundamente o ECS.

O esquema das somas acumuladas proposto originalmente por Page (1954), por exemplo, trabalha não com o último \bar{X} , mas com a soma acumulada dos desvios $|X - M|$. Esta alternativa acelera a detecção de perturbações estáveis na média do processo. A determinação dos limites de controle, variáveis no tempo, fica um pouco complicada. A este respeito ver Ewan (1963) e Woodward e Goldsmith (1964).

Uma característica criticável das somas acumuladas é que ela toma decisões baseadas em todas as observações pretéritas, com pesos iguais independente da antiguidade das mesmas. Duas alternativas buscam corrigir esta falha. O esquema das Médias Móveis, e o das Médias Móveis Ponderadas Exponencialmente.

O primeiro trabalha não com o último \bar{X} , mas apenas com a média dos "m's" últimos valores observados de \bar{X} (Nelson 1983). O segundo trabalha com a média móvel ponderada exponencialmente,

$$\bar{Y}_i = \lambda \bar{X}_i + \lambda(1 - \lambda) \bar{X}_{i-1} + \lambda(1 - \lambda)^2 \bar{X}_{i-2} + \dots$$

A escolha de λ , no intervalo $(0, 1)$, permite dar maior ou menor peso às observações passadas. Em particular $\lambda = 1$ nos leva ao ECS, e $\lambda \Rightarrow 0$ nos leva ao esquema das somas acumuladas. Esta alternativa, proposta originalmente por Roberts (1959) está elegantemente apresentada e discutida em Hunter (1986). O problema da escolha ótima de λ , bem como diversas considerações teóricas importantes são bem abordadas por Alexandre (1990). Neste trabalho os ganhos de eficiência do esquema são determinados detalhadamente e algumas complicações inerente ao esquema são resolvidas.

A proposta de Reynolds, Amin, Arnold e Nachlas (1988) é nova. Ela estabelece uma faixa central aos limites de controle, definidas por um novo parâmetro k_a , menor que k_0 . A região interna aos limites de controle, mas externa à faixa central, é denominada Região de Alerta. Nesta proposta o tempo de espera até a próxima observação depende do último valor de \bar{X} . Se este estiver na faixa central, o tempo de espera será $h = h_l > h_0$; se estiver na faixa de alerta teremos $h = h_c < h_0$. Tomando os mesmos valores k_0 e n_0 do ECS de referência, e escolhendo h_c e h_l e k_a tais que $E(h/\bar{X} \in (LIC, LSC)) = h_0$ enquanto o sistema estiver sob

controle, teremos um esquema de mesmos custos que o ECS. Os ganhos de eficiência permitidos não são desprezíveis, conforme veremos adiante.

Este esquema é importante e bastante estudado neste trabalho pois o que fazemos é alterá-lo no sentido de fazer o último valor observado de \bar{X} determinar, não o próximo intervalo h , mas o próximo tamanho amostral n , entre duas alternativas : $n_p < n_0$ e $n_g > n_0$, onde os índices p e g representam "pequeno" e "grande", respectivamente.

Capítulo 2

Gráficos de Controle \bar{X} , Com Tamanho das Amostras Variável

2.1 Introdução

Os gráficos de controle são utilizados para dois tipos de finalidades diferentes:

Dirigir (run) um Processo

Melhorar a qualidade do Processo

Dirigir um processo é uma operação análoga a dirigir um carro : Queremos mante-lo na estrada, com mínimo de variações laterais que for possível. Já melhorar um processo implica em gradativamente eliminar as causas especiais de variabilidade, reduzir variabilidade por causas comuns e melhorar os níveis médios (aumentando-os ou diminuindo-os conforme o objetivo).

Na atividade rotineira de dirigir um processo, queremos uma ferramenta que detecte rapidamente as variações tais como, um deslocamento brusco e estável ou o surgimento

de uma tendência na média ou na variância do processo.

Em particular estamos interessados, neste trabalho, em desenvolver alternativas ao esquema clássico de Shewhart que reduzam o tempo médio esperado entre a ocorrência e a detecção de uma variação estável na média de um processo, sem contudo impactar negativamente na frequência de alarmes falsos nem nos custos de operação do esquema de controle.

Consideramos sempre, como referência, o ECS com parâmetros n_0 , k_0 e h_0 . O objetivo é desenvolver esquemas alternativos que reduzam $E[T_2]$ sem incorrer em aumentos nem nos custos amostrais nem na frequência de alarmes falsos.

Em Reynolds, Amin, Arnold e Nachlas (1988) temos uma alternativa interessante ao esquema clássico de Shewhart : Em vez de amostrar a intervalos regulares, eles fazem com que o tempo de espera até a próxima inspeção dependa do último valor de \bar{X} observado. Assim um valor de \bar{X} próximo do valor objetivo, M , determina um tempo de espera grande até a próxima inspeção. Já um valor de \bar{X} dentro da faixa de controle, mas próximo dos seus limites, determina uma espera pequena até a próxima inspeção.

Ganhos substanciais de eficiência são conseguidos, trabalhando-se com dois comprimentos de intervalos, $h_p < h_g$, e uma faixa central, interna aos limites de controle. Se \bar{X} cai dentro da faixa interna, a próxima inspeção se dará após h_g unidades de tempo. Caso contrário, após h_p . Como ilustra a Figura 2.1.1.

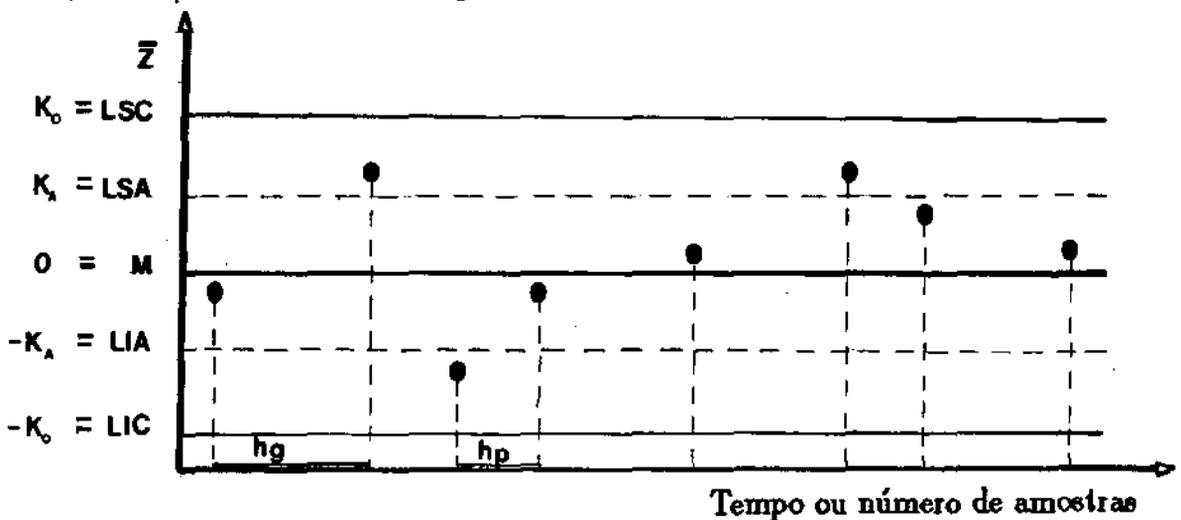


Figura 2.1.1: Gráficos de controle para \bar{X} à intervalos variáveis

Os valores do LSA (Limite Superior de Alerta) e do LIA (Limite Inferior de Alerta), bem como os comprimentos, h_p e h_g são escolhidos de forma a se ter $E[h] = h_0$

quando o processo está sob controle estatístico. Os outros parâmetros, n_0 e k_0 são mantidos iguais. Desta forma garante-se que os dois delineamentos sejam equivalentes em termos de custos amostrais e frequência de alarmes falsos.

Exemplo 2.1: Ao esquema clássico de Shewhart com $n_0 = 4$, $h_0 = 10\text{min}$, $k_0 = 3$, podemos contrapor uma alternativa com, por exemplo, $n = n_0 = 4$, $h_p = 1\text{min}$, $h_g = 20\text{min}$ e $k=k_0 = 3$. Os LSA e LIA definidos pela constante, $k_a = 0,631682$, são determinados fazendo-se $E[h] = 10\text{min}$ para o sistema em controle.

As Figuras 2.1.2 e 2.1.3 abaixo apresentam os histogramas para o tempo decorrido entre a ocorrência e a detecção, de uma perturbação estável de $1,0\sigma$ na média do processo, para ECS e para o esquema alternativo com h variável. Os histogramas sumarizam os resultados de 1000 simulações independentes.

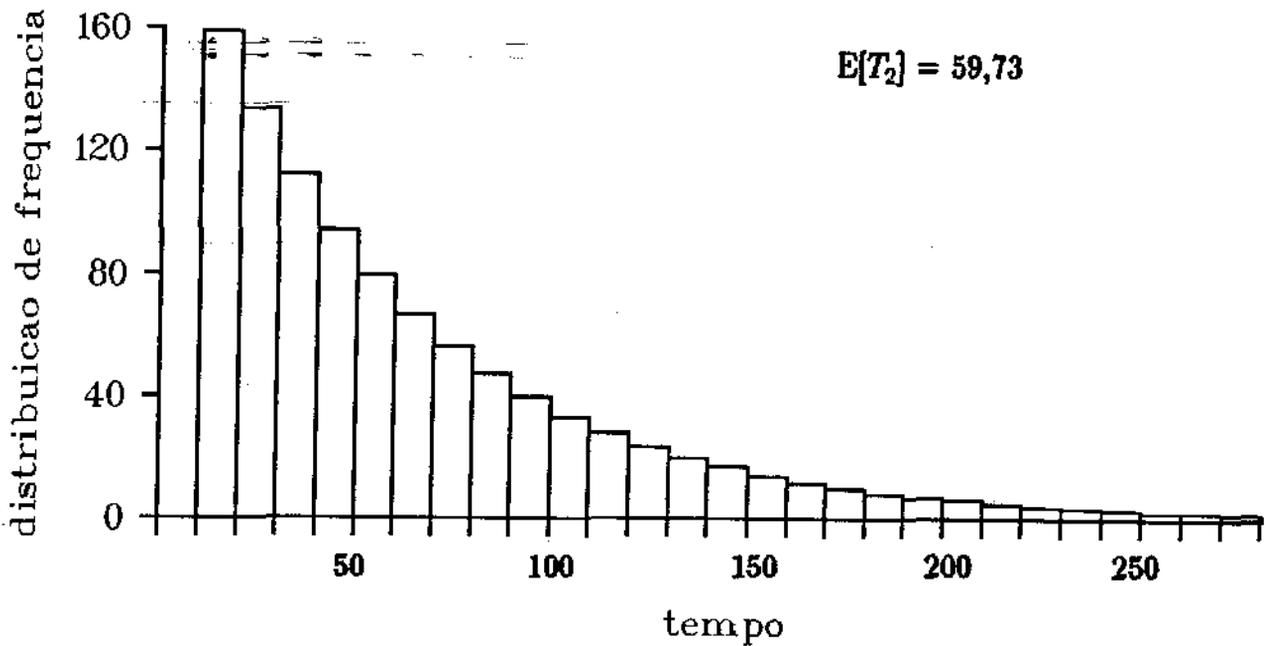


Figura 2.1.2: Esquema clássico de Shewhart

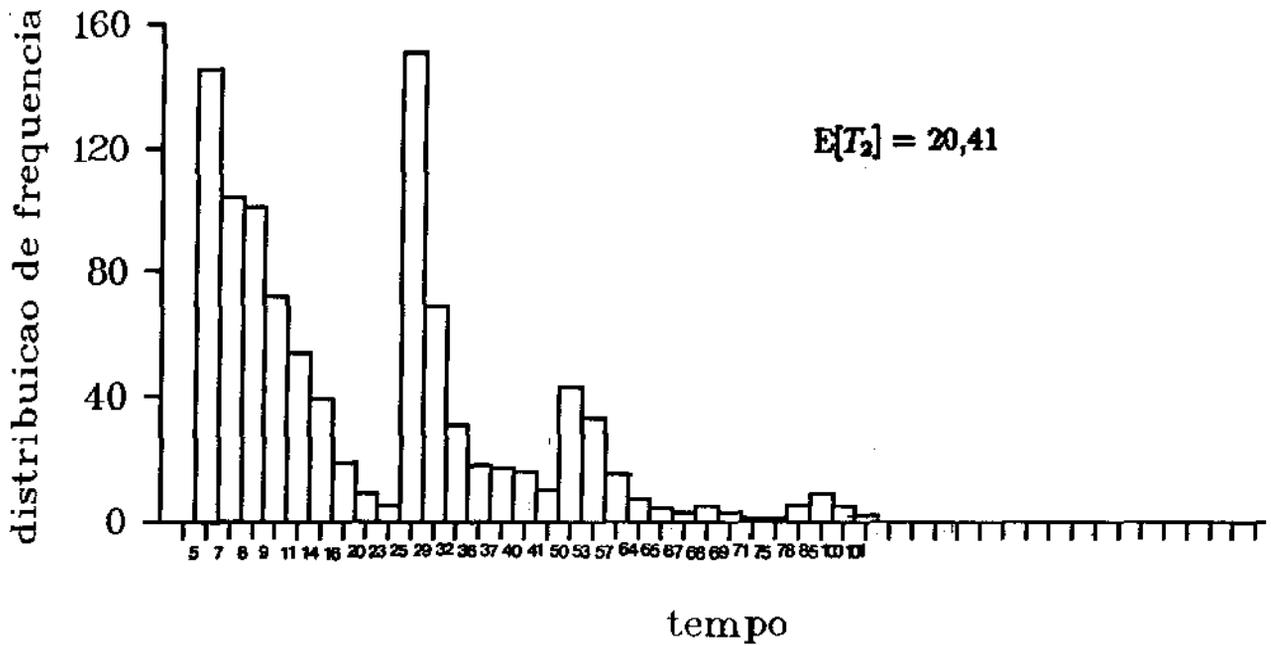


Figura 2.1.3: Esquema alternativo de Reynolds, Amin, Arnolds e Nachlas (88)

A redução no tempo médio entre a ocorrência e detecção da perturbação é bem visível. No esquema ECS a média dos 1000 valores observados foi igual a 59,7 minutos, enquanto que no esquema alternativo foi de apenas 20,41 minutos.

2.2 Gráfico de Controle \bar{X} , Com n Variável

O que vamos fazer aqui é explorar a idéia básica de Reynolds, Amim, Arnold e Nachlas (1988), numa outra direção : Em vez de fazer variar o tempo de espera, variaremos o tamanho da amostra.

Partimos da mesma idéia básica proposta por Reynolds, Arnold, Amin e Nachlas (1988), mas mantemos h constante e fazemos o tamanho amostral n variar segundo o último valor observado de \bar{X} : Se \bar{X} cair muito próximo do valor objetivo M , o próximo tamanho amostral será $n_p < n_0$. Caso contrário, se \bar{X} cair ainda dentro dos limites de controle, mas afastado de M , na denominada Região de Alerta, o próximo tamanho amostral será $n_g > n_0$. Aqui os índices p e g representam "pequeno" e "grande", respectivamente.

A variação no tamanho amostral n faz com que o desvio padrão de \bar{X} seja também variável. Assim, os Limites de Controle deveriam também variar de acordo com n . Para evitar este problema trabalharemos com a variável Z , definida por $Z = \sqrt{n}(\bar{X} - M)/\sigma$, que terá média 0 e desvio padrão 1, enquanto o processo se mantiver sob controle.

Para termos um esquema de custo equivalente ao ECS de referência, isto é, o ECS com $k = k_0$, $n = n_0$ e $h = h_0$, tomamos também $k = k_0$ e $h = h_0$, e escolhemos k_a , o fator que determina os Limites de Alerta, de tal forma que, escolhidos os valores n_p e n_g , tenhamos $E(n/\bar{X} \in (LIC, LSC)) = n_0$ enquanto o processo se mantiver sob controle.

Como h é mantido constante, a comparação entre os dois esquemas pode ser feita com base em $E(N_2)$.

No item 2.3 trataremos deste esquema alternativo com detalhe. contudo, como motivação inicial consideremos aqui um exemplo.

EXEMPLO 2.2.1 : Seja o ECS com $k_0 = 3$ e $n_0 = 4$, e o nosso esquema alternativo, com $k_0 = 3$, $n_p = 1$ e $n_g = 10$. Na figura abaixo mostramos a distribuição de N_2 sob o nosso esquema alternativo, baseado em 1000 simulações Monte Carlo. Tomando em

ambos os casos, $\delta = 1$. Lembramos que no ECS, N_2 tem distribuição geométrica com $p = \frac{1}{1 - \Phi(k_0 - \delta/\sqrt{n_0}) + \Phi(-k_0 - \delta/\sqrt{n_0})}$.

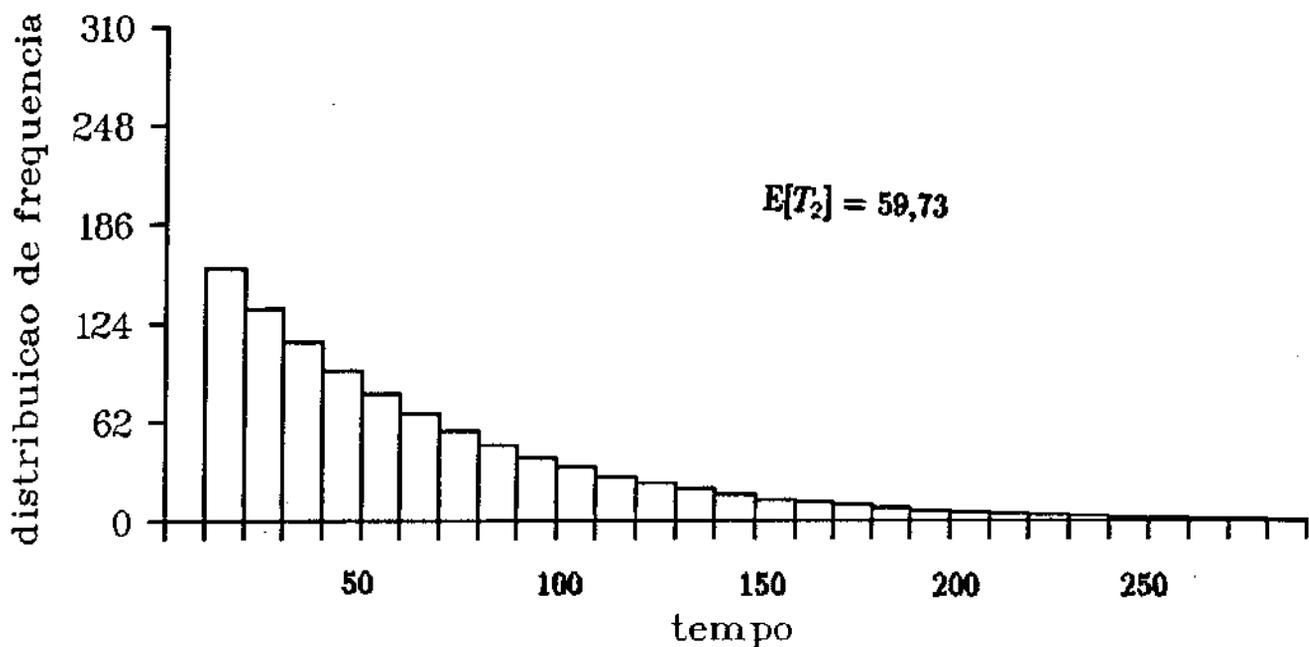


Figura 2.2.4: Distribuição de frequência para o Esquema Clássico de Shewhart

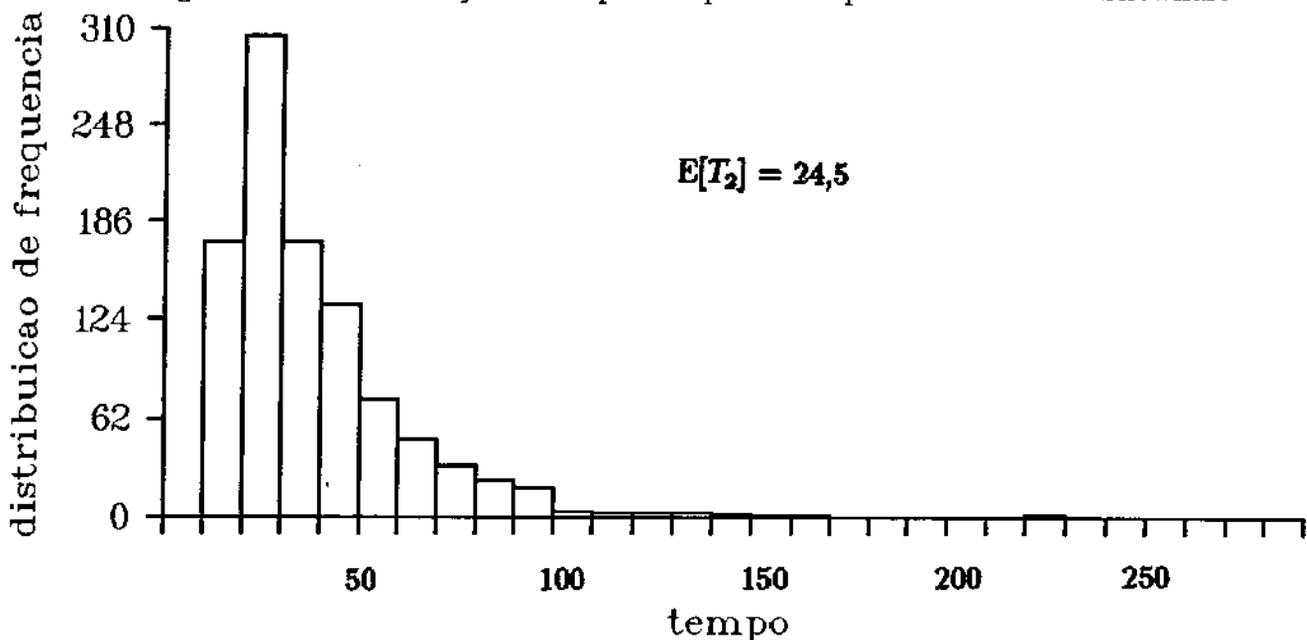


Figura 2.2.5: Distribuição de frequência para o esquema alternativo, com o tamanho das amostras variável

O ganho de eficiência, neste caso, é evidente.

2.3 Desenvolvimento Teórico do Plano Amostral Com n Variável

Partindo do esquema clássico de Shewhart, estabelecemos, na região interna aos limites de controle, uma faixa central e duas faixas laterais, que denominamos faixa de alerta, conforme Figura 2.3.6. Para maior simplicidade plotaremos, em vez de \bar{X} , a sua transformação

$$\bar{Z} = \frac{(\bar{X} - M)\sqrt{n}}{\sigma}$$

Assim a variância fica estabilizada, sem influência do tamanho amostral. Desta forma, temos $LIC = -k_0$, $LSC = k_0$, $LIA = -k_1$ e $LSA = k_1$. O tamanho n_i da i -ésima amostra é determinado por \bar{Z}_{i-1} . A primeira amostra tem sempre tamanho n_0 .

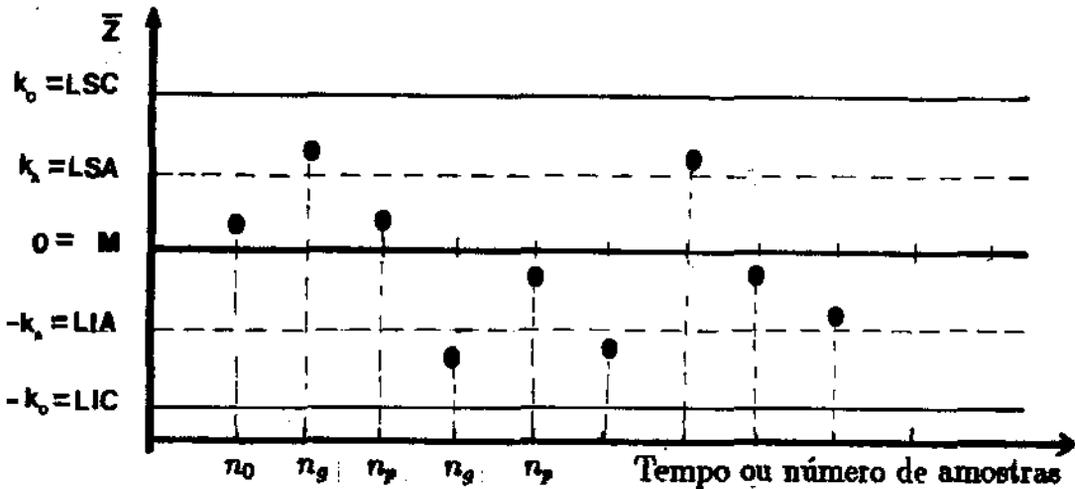


Figura 2.3.6: Gráfico de \bar{Z} com tamanho das amostras variável

Se \bar{Z} estiver na faixa central, a próxima amostra terá tamanho pequeno, n_p . Se \bar{Z} estiver na Região de Alerta (superior ou inferior), a próxima amostra, terá tamanho grande, n_g .

Nosso objetivo é construir um esquema alternativo, mas de custo equivalente ao Esquema Clássico de Shewhart que apresente, maior agilidade na detecção de pequenas perturbações estáveis na média do processo.

Desta forma, partindo de um delineamento básico de referência definido por k_0 , n_0 e h_0 construímos outro, com mesmos valores k_0 e h_0 mas com n variável, de forma que:

$$E\{n/\bar{Z} \in (LIC, LSC)\} = n_0,$$

enquanto o sistema permanecer sob controle.

RESULTADO 2.1 : No esquema nV, tomando-se tamanhos amostrais n_p e n_g , os limites de alerta são definidos por

$$k_a = \Phi^{-1}\left[1/2\left\{\frac{n_g - n_0}{n_g - n_p}[2\Phi(k_0) - 1] + 1\right\}\right]$$

Prova : No esquema nV temos

$$E[n/\bar{Z} \in (-k_0, k_0)] = n_p P[\bar{Z} \in (-k_a, k_a) / \bar{Z} \in (-k_0, k_0)] +$$

$$n_g P[\bar{Z} \in ((-k_0, -k_a) \cup (k_a, k_0)) / \bar{Z} \in (-k_0, k_0)] = n_p P[\bar{Z} \in (-k_a, k_a) / \bar{Z} \in (-k_0, k_0)] +$$

$$n_g P[\bar{Z} \in (-k_0, -k_a) \cup (k_a, k_0) / \bar{Z} \in (-k_0, k_0)]$$

definido

$$P_p = P[\bar{Z} \in (-k_a, k_a) / \bar{Z} \in (-k_0, k_0)] = \frac{P[\bar{Z} \in (-k_a, k_a)]}{P[\bar{Z} \in (-k_0, k_0)]}$$

$$P_g = P[\bar{Z} \in (-k_0, -k_a) \cup (k_a, k_0) / \bar{Z} \in (-k_0, k_0)] = \frac{P[\bar{Z} \in (-k_0, -k_a) \cup (k_a, k_0)]}{P[\bar{Z} \in (-k_0, k_0)]}$$

com $P_g = 1 - P_p$, assim $E[n/\bar{Z} \in (-k_0, k_0)] = n_p P_p + n_g P_g = n_g - (n_g - n_p) P_p$

Admitindo-se que \bar{X} tem distribuição Normal, temos então

$$P_p = \frac{\Phi(k_a) - \Phi(-k_a)}{\Phi(k_0) - \Phi(-k_0)}$$

onde $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$ é a função de distribuição acumulada de prob. da Normal padrão. Fazendo agora $E[n/\bar{Z} \in (-k_0, k_0)] = n_0$, temos

$$P_p = \frac{(n_g - n_0)}{(n_g - n_p)},$$

logo

$$\Phi(k_a) - \Phi(-k_a) = \frac{(n_g - n_0)}{(n_g - n_p)} [\Phi(k_0) - \Phi(-k_0)]$$

mas $\Phi(x) - \Phi(-x) = 2\Phi(x) - 1$

logo

$$\Phi(k_a) = 1/2 \left\{ \frac{n_g - n_0}{n_g - n_p} [2\Phi(k_0) - 1] + 1 \right\}$$

$$\text{ou } k_a = \Phi^{-1} \left[1/2 \left\{ \frac{n_g - n_0}{n_g - n_p} [2\Phi(k_0) - 1] + 1 \right\} \right]$$

conforme enunciado.

EXEMPLO 2.2 : Na mesma situação do exemplo 2.1, vamos agora testar a alternativa com n variável, que denominamos esquema nV . Fazendo $n_p = 1$ e $n_g = 20$, mantemos $k = k_0 = 3$ e $h = h_0 = 10$ min. Com base em 1000 simulações independentes estimamos o tempo médio necessário para a detecção de uma perturbação estável igual a $1,0\sigma$ na média do processo.

Os limites de alerta são estabelecidos buscando obter $E(n) = n_0$ enquanto o processo estiver sob controle. Do resultado 2.1 obtemos, então $k_a = 1,40458$.

Como \bar{X} é calculado ora com base numa amostra de tamanho n_g , ora com base numa amostra de tamanho n_p , o desvio padrão de \bar{X} é variável. Consequentemente os limites de controle e de alerta serão também variáveis. Esta complicação técnica é superada com um procedimento simples. Em vez de trabalhar com \bar{X} , trabalhamos com $\bar{Z} = \frac{\bar{X}-M}{\sigma} \sqrt{n}$. Assim, enquanto o sistema estiver sob controle, \bar{Z} terá média zero e desvio padrão igual a 1.

Na Figura 2.3.7 vemos o histograma dos 1000 valores obtidos para T_2 .

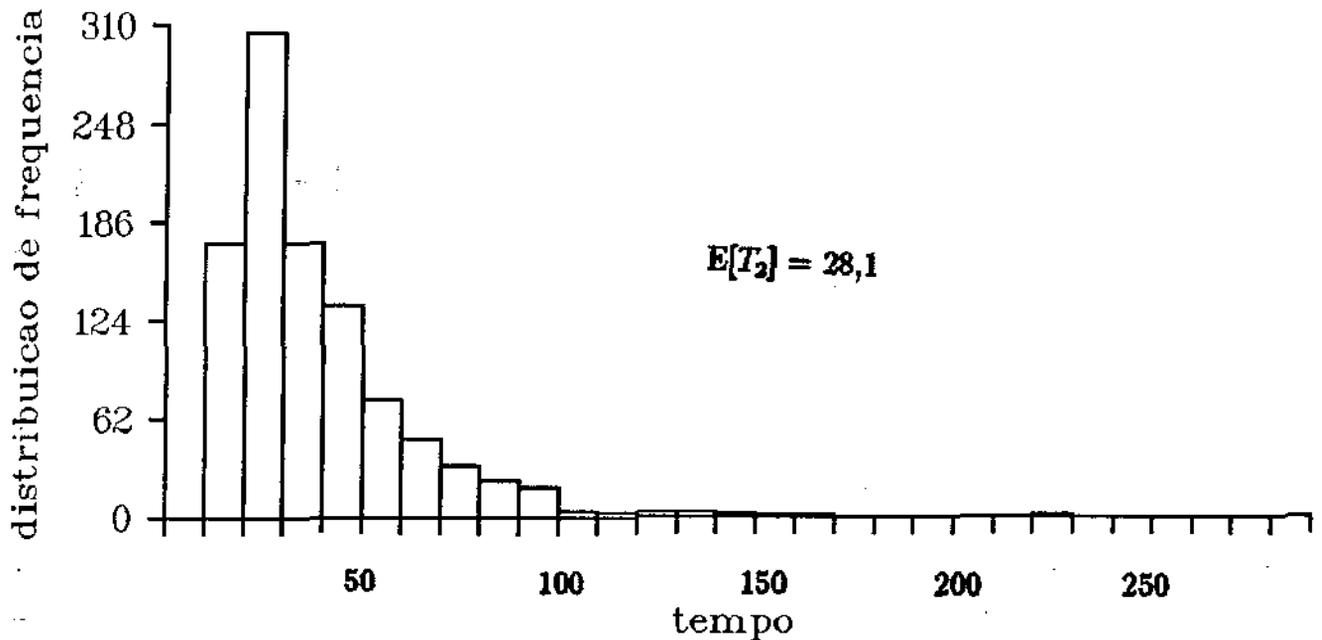


Figura 2.3.7: Histograma para o esquema alternativo de amostras variáveis

A média dos 1000 valores foi igual a 28,1, a eficiência do esquema nV relativa ao ECS foi, neste caso igual a $\frac{59,73}{28,1} = 2,1256$.

2.4 Eficiência Relativa : Desenvolvimento Matemático

Nosso objetivo neste trabalho, é melhorar a eficiência, ou seja, conseguir maior agilidade na detecção de pequenas perturbações na média do processo, a custos equivalentes ao Esquema Clássico de Shewhart.

A eficiência relativa depende basicamente da variação n_p e n_g e o tamanho do deslocamento na média, δ .

Vamos definir :

$E_s[N_2]$ = é o número médio esperado de inspeções, desde a ocorrência até a detecção de uma falha, no esquema clássico de Shewhart.

$E_n[N_2]$ = é o número médio esperado de inspeções, desde a ocorrência até a detecção de uma falha, no esquema nV.

Assim, independente de n , a distribuição de Z antes da perturbação é normal, de média zero e variância 1. Após a ocorrência da perturbação - um deslocamento na média do processo igual a $\delta\sigma$ - a distribuição de \tilde{Z} se modifica para $N(\delta\sqrt{n}, 1)$, já agora dependente do tamanho amostral variável n .

No esquema nV não conhecemos a distribuição de N_2 , nosso objetivo neste paragrafo é determinar a distribuição de N_2 , a qual depende de alguns resultados auxiliares. Primeiro vamos definir alguns conceitos básicos:

1. Seja P_{p_i} a probabilidade de $\tilde{X}_{i-1} \in (LIA, LSA)$, ou seja, a probabilidade de que o tamanho amostral na i -ésima inspeção, dado que $\tilde{X}_j \in (LIC, LSC)$, $\forall j < i$, seja pequeno.
2. $G(k, n) = \Phi(k - \delta\sqrt{n}) - \Phi(-k - \delta\sqrt{n})$, é igual a $P[Z \in (-k - \delta\sqrt{n}, k - \delta\sqrt{n})]$, com $Z \sim N(0, 1)$
3. $D_k = G(k, n_p) - G(k, n_g)$

4. U_i é o i -ésimo valor de Z após a perturbação. Assim, se a perturbação ocorre entre a N_1 -ésima e a $N_1 + 1$ -ésima inspeções, então $U_i = Z_{N_1+1}$
5. P_i é a probabilidade de que o alarme venha ocorrer na i -ésima inspeção após a perturbação, ou seja, $P[U_i \notin (LIC, LSC) / U_j \in (LIC, LSC) \forall j = 1, 2, 3, \dots, i-1]$

RESULTADO 2.2.a : Com P_{p_i} definido acima, temos :

$$P_{p_i} = D_{k_a}^{i-1} P_p + G(k_a, n_g) [1 + D_{k_a} + \dots + D_{k_a}^{i-2}]$$

temos; Prova : O problema resume-se em determinar os valores P_{p_i} , $i = 1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned} P_{p_1} &= P[m_1 = n_p] = P[Z_{n_1} \in (-k_a, k_a) / Z_{n_1} \in (-k_0, k_0)] \\ &= \frac{P[Z_{n_1} \in (-k_a, k_a) \cap Z_{n_1} \in (-k_0, k_0)]}{P[Z_{n_1} \in (-k_0, k_0)]} \\ &= \frac{P[Z_{n_1} \in (-k_a, k_a)]}{P[Z_{n_1} \in (-k_0, k_0)]} = \frac{G(k_a, 0)}{G(k_0, 0)} = P_p \end{aligned}$$

$$P_{p_1} = 1 - P_{g_1} \quad (2.2.4.1)$$

determinando P_{p_2}

$$\begin{aligned} P_{p_2} &= P[m_2 = n_p] = P[U_1 \in (-k_a, k_a) / U_1 \in (-k_0, k_0)] \\ &= P[U_1 \in (-k_a, k_a) / \{m_1 = n_p\} \cap \{U_1 \in (-k_0, k_0)\}] * P[\{m_1 = n_p\} \cap \{U_1 \in (-k_0, k_0)\}] \\ &\quad + P[U_1 \in (-k_a, k_a) / \{m_1 = n_g\} \cap \{U_1 \in (-k_0, k_0)\}] * P[\{m_1 = n_g\} \cap \{U_1 \in (-k_0, k_0)\}] \\ &= \frac{G(k_a, n_p)}{G(k_0, n_p)} P[\{m_1 = n_p\} \cap \{U_1 \in (-k_0, k_0)\}] \\ &\quad + \frac{G(k_a, n_g)}{G(k_0, n_g)} P[\{m_1 = n_g\} \cap \{U_1 \in (-k_0, k_0)\}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{G(k_a, n_p)}{G(k_0, n_p)} P[m_1 = n_p] * P[U_1 \in (-k_0, k_0)] \\
&+ \frac{G(k_a, n_g)}{G(k_0, n_g)} P[m_1 = n_g] * P[U_1 \in (-k_0, k_0)] = \\
&\quad \frac{G(k_a, n_p)}{G(k_0, n_p)} P[m_1 = n_p] * G(k_0, n_p) + \\
&\quad \frac{G(k_a, n_g)}{G(k_0, n_g)} P[m_1 = n_g] * G(k_0, n_g) \\
&= G(k_a, n_p) * P[m_1 = n_p] + G(k_a, n_g) * P[m_1 = n_g]
\end{aligned}$$

logo,

$$P_{p_2} = G(k_a, n_p)P_{p_1} + G(k_a, n_g)P_{g_1}$$

a generalização é imediata;

$$P_{p_i} = G(k_a, n_p)P_{p_{i-1}} + G(k_a, n_g)P_{g_{i-1}}$$

$$\text{já que } P_{g_i} = 1 - P_{p_i}, \forall i$$

$$P_{p_i} = \{G(k_a, n_p) - G(k_a, n_g)\}P_{p_{i-1}} + G(k_a, n_g)$$

por dedução;

$$P_{p_2} = D_{k_a}P_p + G(k_a, n_g)$$

$$P_{p_3} = D_{k_a}P_{p_2} + G(k_a, n_g) =$$

$$D_{k_a}(D_{k_a}P_p + G(k_a, n_g)) + G(k_a, n_g) =$$

$$D_{k_a}^2P_p + G(k_a, n_g)(1 + D_{k_a})$$

portanto temos :

$$P_{p_i} = D_{k_a}^{i-1}P_p + G(k_a, n_g)(1 + D_{k_a} + \dots + D_{k_a}^{i-2}) \quad (2.2.4.2)$$

conforme enunciado.

RESULTADO 2.2.b : Com Π_i definido acima, temos :

$$\Pi_i = 1 - D_{k_0} P_{p_i} - G(k_0, n_g)$$

Prova : Cumpre-nos, determinar Π_i , $i = 1, 2, 3, \dots$, começamos então por Π_1

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= P[U_1 \notin (-k_0, k_0)] = P[U_1 \notin (-k_0, k_0)/m_1 = n_p] \\ &= P[m_1 = n_p] + P[U_1 \notin (-k_0, k_0)/m_1 = n_p] * P[m_1 = n_g] \end{aligned}$$

mas

$$\begin{aligned} P[U_i \notin (-k_0, k_0)/m_i = n_p] &= 1 - P[U_i \in (-k_0, k_0)/m_i = n_p], \\ U_i = Z_{n_1+i} &\sim N(\delta\sqrt{n_p}, 1) \end{aligned}$$

tem-se

$$P[U_i \notin (-k_0, k_0)/m_i = n_p] = 1 - \Phi(k_0 - \delta\sqrt{n_p}) + \Phi(-k_0 - \delta\sqrt{n_p})$$

independente de $j = 1, 2, 3, \dots$, assim,

$$\Pi_1 = (1 - G(k_0, n_p)) * P[m_1 = n_p] + (1 - G(k_0, n_g)) * P[m_1 = n_g]$$

$$\Pi_2 = (1 - G(k_0, n_p)) * P[m_2 = n_p] + (1 - G(k_0, n_g)) * P[m_2 = n_g]$$

⋮

$$\Pi_i = (1 - G(k_0, n_p)) * P[m_i = n_p] + (1 - G(k_0, n_g)) * P[m_i = n_g]$$

definindo

$$P_{p_i} = P[m_i = n_p] \text{ e } P_{g_i} = P[m_i = n_g] = 1 - P_{p_i}$$

então,

$$\Pi_i = (1 - G(k_0, n_p)) * P_{p_i} + (1 - G(k_0, n_g)) * P_{g_i}$$

por outro lado temos

$$\Pi_i = 1 - D_{k_0} P_{p_i} - G(k_0, n_g) \tag{2.2.4.3}$$

conforme enunciado, onde $D_{k_0} = G(k_0, n_p) - G(k_0, n_g)$

RESULTADO 2.2 : No esquema nV, a distribuição de N_2 é dada por:

$$\begin{aligned} P[N_2 = i] &= [D_k P_p + G(k, n_g)][D_k P_{p_1} + G(k, n_g)] \\ &\dots [1 - D_k P_{p_i} - G(k, n_g)] \end{aligned}$$

Prova : No esquema nV temos:

U_i é o i -ésimo valor de Z após a falha, isto é, $U_i = Z_{n_1 + i}$

U_j é o j -ésimo valor de Z antes da falha, isto é, $U_j = Z_j$

$$P[N_2 = i] = P[U_j \in (-k_0, k_0), \forall j = 1, 2, 3, \dots, i-1]$$

$$*P[U_i \in (-k, k)/U_j \in (-k_0, k_0), \forall j = 1, 2, \dots, i-1]$$

então,

$$1 - \Pi_i = P[U_i \in (-k_0, k_0)/U_j \in (-k_0, k_0), \forall j = 1, 2, \dots, i-1]$$

logo;

$$1 - \Pi_1 = P[U_1 \in (-k_0, k_0)]$$

$$1 - \Pi_2 = P[U_2 \in (-k_0, k_0)/U_1 \in (-k_0, k_0)]$$

$$1 - \Pi_3 = P[U_3 \in (-k_0, k_0)/U_2, U_1 \in (-k_0, k_0)]$$

⋮

assim por diante, temos :

$$P[U_j \in (-k_0, k_0), \forall j = 1, 2, \dots, i-1] = (1 - \Pi_1)(1 - \Pi_2) \dots (1 - \Pi_{i-1})$$

logo

$$P[N_2 = i] = (1 - \Pi_1)(1 - \Pi_2) \dots \Pi_i \tag{2.2.4.4}$$

onde,

- no resultado 2.2.b temos, $\Pi_i = 1 - D_{k_0} P_{p_i} - G(k_0, n_g)$
- no resultado 2.2.a tem-se, $P_{p_i} = D_{k_a}^{i-1} P_p + G(k_a, n_g)[1 + D_{k_a} + \dots + D_{k_a}^{i-2}]$

portanto temos

$$P[N_2 = i] = [D_{k_0} P_p + G(k, n_g)][D_{k_0} P_{p_i} + G(k_0, n_g)] \dots [1 - D_{k_0} P_{p_i} - G(k_0, n_g)]$$

conforme enunciado.

EXEMPLO 2.3 : considerem o caso em que : $\delta = 1$, $k_0 = 3$, $n_0 = 4$

$$\left. \begin{array}{l} n_p = 1 \\ n_g = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow E[n] = n_p P_p + n_g (1 - P_p) = n_0$$

$$\text{logo } P_p + 10(1 - P_p) = 4$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_p = 2/3 \\ P_g = 1/3 \end{array} \right.$$

tem-se

$$P_p = \frac{P[Z \in (-k_a, k_a)]}{P[Z \in (-k_0, k_0)]} = 2/3$$

como $Z \sim (0,1)$ $k_0 = 3$ tem-se,

$$P[Z \in (-3, 3)] = 0,9973, \text{ para } P[Z \in (-k_a, k_a)] = 0,66487,$$

com auxílio de uma tabela normal, ou por cálculos numéricos em computador, encontra-se o valor de k_a . Neste exemplo temos $k_a = 0,963825$.

$$G(k_a, n_p) = \Phi(k_a - \delta\sqrt{n_p}) - \Phi(-k_a - \delta\sqrt{n_p}) = 0,4608$$

$$G(k_a, n_g) = \Phi(k_a - \delta\sqrt{n_g}) - \Phi(-k_a - \delta\sqrt{n_g}) = 0,0139$$

logo,

$$D_{k_a} = 0,4469$$

portanto :

$$P_{p_i} = D_{k_a} P_{p_{i-1}} + G(k_a, n_g) = 0,4469 P_{p_{i-1}} + 0,0139$$

assim,

$$P_{p_1} = 0,66667 = P_p$$

$$P_{p_2} = G(k_a, n_p) P_p + G(k_a, n_g) P_g = 0,3118$$

$$P_{p_3} = 0,1533$$

$$P_{p_4} = 0,08244$$

$$P_{p_5} = 0,0508$$

converge para aproximadamente 0,0252.

Nota : já que, do resultado 2.2.2 temos,

$$P_{p_i} = D_{k_a}^{i-1} P_p + (1 + D_{k_a} + \dots + D_{k_a}^{i-2})(G(k_a, n_g))$$

então,

$$\text{Lim}_{i \rightarrow \infty} P_{p_i} = \frac{1}{1 - D_{k_a}} G(k_a, n_g)$$

Assim no exemplo acima temos :

$$\text{Lim}_{i \rightarrow \infty} P_{p_i} = \frac{1}{1 - 0,4469} 0,0139 = 0,0252$$

mas temos do resultado 2.2 que :

$$P[N_2 = i] = (D_{k_0} P_p + G(k_0, n_g))(D_{k_0} P_{p_1} + G(k_0, n_g)) \dots (1 - D_{k_0} P_{p_i} - G(k_0, n_g))$$

temos :

$$E_a[N_2] = \sum_{i=1}^{\infty} i P[n_2 = i],$$

no exemplo anterior tem-se :

$$\Pi_i = 1 - 0,4128 P_{p_i} - 0,5644$$

$$E_a[N_2] = 2,7481$$

Definindo eficiência relativa como :

$$\text{Efic. relat.} = \frac{E_s[N_2]}{E_a[N_2]}$$

$$E_s[N_2] = 6,30.$$

Como no esquema Clássico de Shewhart, N_2 tem distribuição geométrica de parâmetro p conhecido, onde :

$$p = \frac{1}{E_s[N_2]},$$

logo :

$$\text{Efic. Relat.} = \frac{6,30}{2,7481} = 2,294.$$

2.5 Cálculo Em Alguns Casos Gerais Fixando n_0 , n_p e n_g

Vamos agora determinar, para diversas escolhas de n_0 , n_p , n_g e k_a , e calcular a eficiência relativa, onde foi definida na seção anterior.

A Tabela 2.1, mostra a eficiência no esquema nV relativa ao ECS com os seguintes parâmetros $n_0 = 4$, $k_0 = 3$ e $h_0 = h$. No esquema nV consideramos diversas alternativas para n_p , n_g . A eficiência relativa é determinada para δ variando de 0.1 a 1.9.

δ	eficiência relativa						
	(n_p, n_g) k_a	(1,10)	(1,20)	(1,50)	(2,6)	(3,5)	(1,5)
		0.963285	1.40458	1.85385	0.67237	0.67237	0.31775
0.1		1.0092	1.0203	1.0511	1.0036	1.0021	1.0026
0.2		1.0885	1.2194	1.6414	1.0271	1.0118	1.0167
0.3		1.3001	1.8273	3.9079	1.0869	1.0367	1.0508
0.4		1.6540	2.9930	7.7368	1.1814	1.0766	1.1008
0.5		2.1058	4.3876	8.1826	1.2993	1.1272	1.1588
0.6		2.5317	5.0011	6.4540	1.4216	1.1816	1.2161
0.7		2.7723	4.6453	4.6973	1.5248	1.2311	1.2645
0.8		2.7643	3.8965	3.4013	1.5886	1.2675	1.2972
0.9		2.5720	3.1243	2.5206	1.6036	1.2855	1.3109
1.0		2.2936	2.4657	1.9246	1.5735	1.2839	1.3055
1.1		1.9975	1.9523	1.5156	1.5101	1.2650	1.2832
1.2		1.7213	1.5697	1.2292	1.4268	1.2333	1.2485
1.3		1.4811	1.2911	1.0257	1.3360	1.1941	1.2057
1.4		1.2816	1.0892	0.8792	1.2456	1.1522	1.1590
1.5		1.1213	0.9429	0.7734	1.1618	1.1108	1.1110
1.6		0.9958	0.8368	0.6968	1.0882	1.0732	1.0650
1.7		0.8999	0.7599	0.6422	1.0253	1.0409	1.0222
1.8		0.8280	0.7049	0.6038	0.9749	1.0148	0.9843
1.9		0.7757	0.6665	0.5784	0.9362	0.9953	0.9518

Tabela 2.1: Tabela de eficiência no esquema nV relativa ao ECS

Conforme mostra as tabelas, o esquema nV ganha eficiência a um determinado valor de delta, δ . Em todas as situações das Tabelas 2.1 e 2.2 houve maior ganho de eficiência para pequenas variações na média do processo conforme podemos observar, para grandes variações na média o esquema nV perde eficiência, isto é, já não é mais eficiente do que o ECS.

Um outro fator importante no ganho de eficiência é a distância entre as amostras, isto é, quanto maior for diferença entre os tamanhos amostrais maior será o ganho de eficiência, conforme Tabela 2.1 e 2.2.

A Tabela 2.2, mostra a eficiência no esquema nV relativa ao ECS, onde o delineamento do ECS é: $n_0 = 15$, $k_0 = 3$ e h_0 h, já o esquema nV tem-se o seguinte delineamento com $n_0 = 15$ (fixo) e variamos n_p , n_g e respectivamente k_a , com os demais parâmetros fixos.

δ	eficiência relativa					
	(n_p, n_g) k_a	(1,30)	(1,40)	(1,60)	(5,25)	(3,19)
0.1		0.69964	0.91402	1.17669	0.67237	0.31775
0.1		1.0617	1.0996	1.1731	1.0149	1.0166
0.2		1.4233	1.7340	2.4187	1.1002	1.1021
0.3		1.9641	2.7040	4.1379	1.2414	1.2227
0.4		2.2456	2.9489	3.7454	1.3605	1.3131
0.5		2.0735	2.4177	2.5744	1.3873	1.3312
0.6		1.7051	1.7853	1.6747	1.3226	1.2805
0.7		1.3503	1.2996	1.1328	1.2152	1.1911
0.8		1.0765	0.9805	0.8321	1.1079	1.0926
0.9		0.8886	0.7885	0.6681	1.0243	1.0049
1.0		0.7709	0.6793	0.5794	0.9721	0.9361
1.1		0.7040	0.6213	0.5342	0.9482	0.8895
1.2		0.6699	0.5940	0.5148	0.9462	0.8633
1.3		0.6558	0.5845	0.5106	0.9563	0.8528
1.4		0.6528	0.5847	0.5145	0.9703	0.8535
1.5		0.6554	0.5900	0.5227	0.9825	0.8609
1.6		0.6604	0.5973	0.5328	0.9909	0.8719
1.7		0.6666	0.6056	0.5438	0.9958	0.8848
1.8		0.6734	0.6144	0.5552	0.9983	0.8983
1.9		0.6806	0.6235	0.5668	0.9994	0.9121

Tabela 2.2: Tabela de eficiência no esquema nV relativa ao ECS

A Tabela 2.3, mostra a eficiência no esquema nV relativa ao esquema hV, e com seus respectivos delineamento descrito na tabela. É evidente que o esquema nV é muito mais eficiente do que o esquema hV para todos os casos apresentados.

Este ganho de eficiência é maior quando há pequenas variações na média do processo, já grandes variações na média do processo a eficiência tende a diminuir, em alguns casos o esquema hV é mais eficiente do que o esquema nV, isto para grandes variações na média, para pequenas variações na média do processo o esquema nV é muito mais eficiente do que o esquema nH em todas as situações.

δ	eficiência relativa							
	(n_o, n_p, n_g) k_a	(4,1,10)	(4,1,20)	(4,1,20)	(4,3,5)	(15,5,25)	(15,5,25)	(15,5,25)
	(h_o, h_p, h_g) k_a	(4,1,50)	(4,1,50)	(10,1,50)	(4,1,50)	(4,1,50)	(4,3,5)	(10,1,50)
0.1		1.001	1.013	1.010	0.995	0.989	1.03	0.98
0.2		1.035	1.016	1.148	0.962	1.022	1.19	0.98
0.3		1.154	1.626	1.586	0.920	1.043	1.44	0.94
0.4		1.343	2.454	2.343	0.871	0.961	1.60	0.79
0.5		1.542	3.300	3.061	0.816	0.821	1.56	0.61
0.6		1.665	3.450	3.081	0.758	0.714	1.40	0.52
0.7		1.644	2.919	2.489	0.699	0.658	1.19	0.50
0.8		1.497	2.224	1.801	0.644	0.632	1.00	0.52
0.9		1.294	1.634	1.258	0.597	0.617	0.84	0.55
1.0		1.099	1.204	0.890	0.563	0.611	0.74	0.57
1.1		0.940	0.914	0.663	0.543	0.613	0.68	0.59
1.2		0.814	0.724	0.527	0.538	0.629	0.66	0.62
1.3		0.720	0.604	0.451	0.547	0.659	0.67	0.65
1.4		0.650	0.525	0.408	0.566	0.694	0.70	0.69
1.5		0.599	0.474	0.385	0.591	0.736	0.74	0.74
1.6		0.559	0.442	0.374	0.625	0.781	0.78	0.78
1.7		0.531	0.422	0.370	0.661	0.826	0.83	0.83
1.8		0.512	0.411	0.372	0.696	0.868	0.87	0.87
1.9		0.500	0.506	0.377	0.734	0.904	0.90	0.90

Tabela 2.3: Tabela de eficiência no esquema nV relativa ao esquema hV

2.6 Curvas de Eficiência

Para construção de curvas de eficiência, consideramos que a média se desloca de M para $M + \delta\sigma$, entre uma determinada inspeção e a seguinte, conforme ilustrado na Figura 2.6.8.

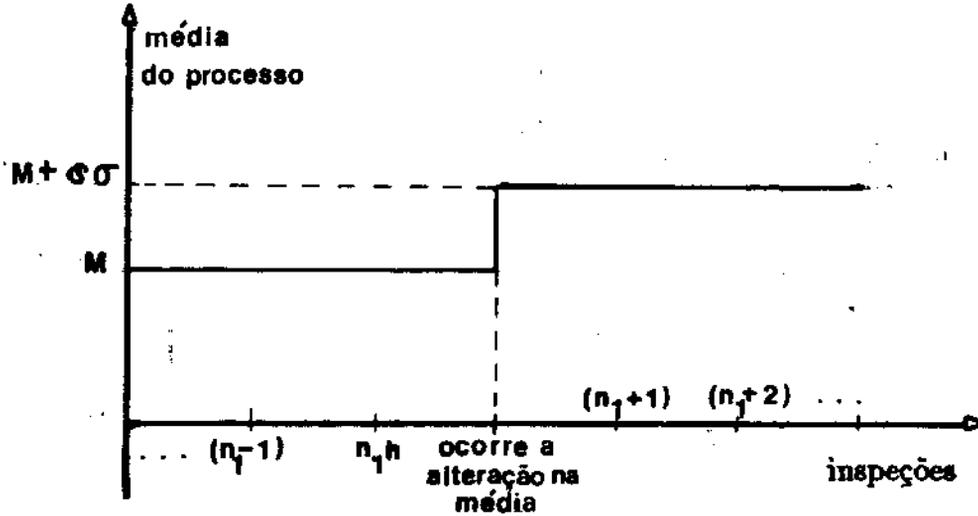


Figura 2.6.8: Média do processo antes e após a ocorrência de falha

Após esta alteração, calcula-se o tempo médio esperado, entre a ocorrência, e a detecção de uma perturbação, usando o esquema clássico de Shewhart, $E_s[N_2]$, nas mesmas condições, calcula-se o tempo médio esperado entre a ocorrência e a detecção de perturbações através do esquema nV , $E_n[N_2]$, a eficiência relativa é dada por :

$$Efic. Rel. = \frac{E_s[N_2]}{E_n[N_2]}$$

Então, para construir a curva de eficiência, varia-se o valor de δ , isto é, para cada δ tem-se uma de eficiência relativa, ou seja, um ponto no gráfico. Aqui nós consideramos $\delta = 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 1.9$.

A Figura 2.6.9 apresenta três curvas de eficiência no esquema nV relativa ao ECS, com os respectivos delineamento.

Nota-se que o esquema nV é mais eficiente do que o ECS, para valores de $\delta \in [0.2, 1.0]$ e também um outro fator importante no ganho de eficiência é a variação do tamanho amostral, isto é, quanto maior for a diferença entre os tamanhos amostrais maior será o seu ganho de eficiência conforme é apresentada no gráfico.

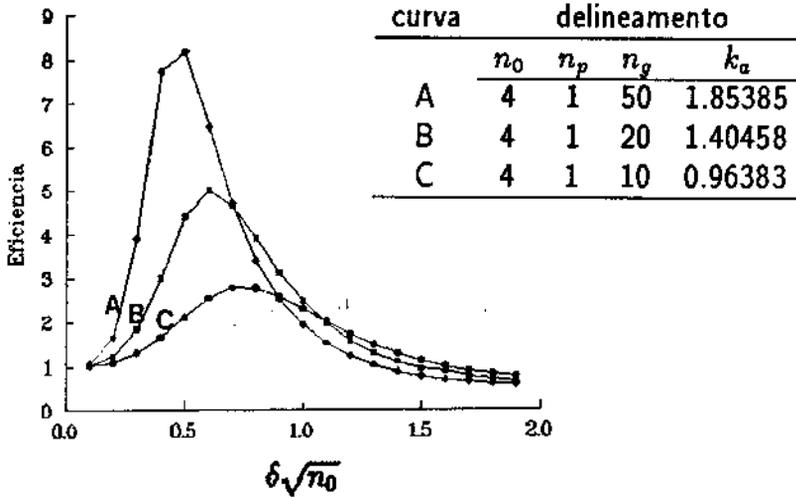


Figura 2.6.9: Curvas de eficiência no esquema nV relativa ao ECS

A Figura 2.6.10 apresenta três curvas de eficiência no esquema nV relativa ao ECS, com seus respectivos delineamentos. Nota-se que a eficiência relativa nestas situações em particular não apresenta ganhos tão significativos quanto nos delineamentos apresentados na Figura 2.5.7, esta diferença no ganho de eficiência, se deve ao fato de que n_p e n_g estão próximos, isto é, a diferença entre os tamanhos amostrais são pequenas em relação aos delineamentos da Figura 2.5.7

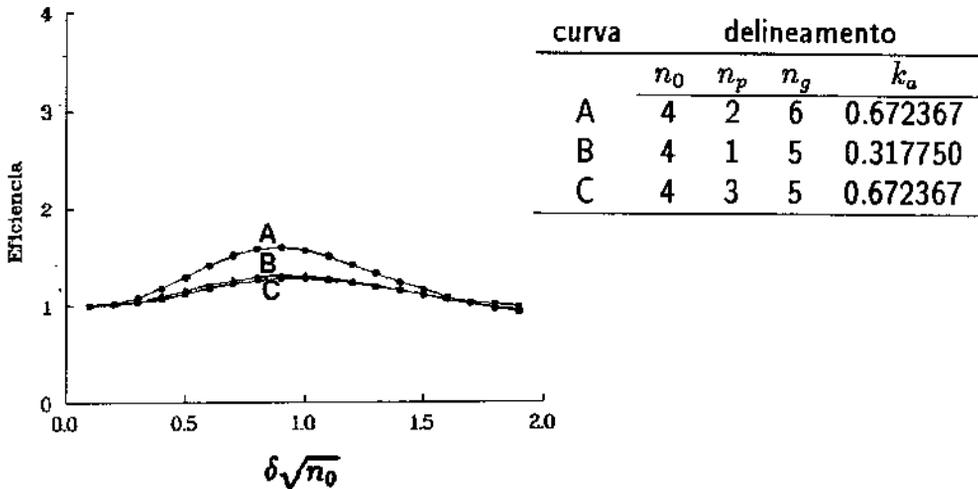
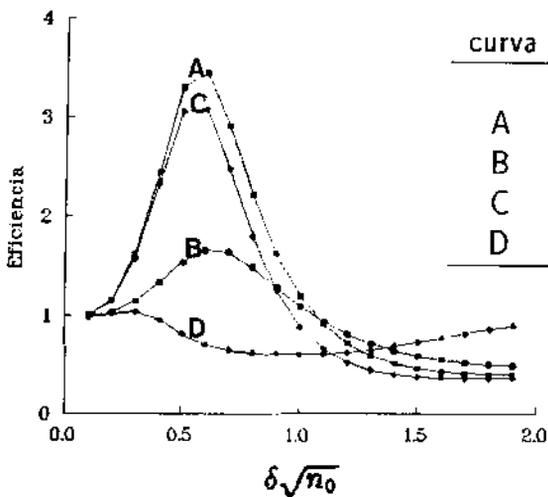


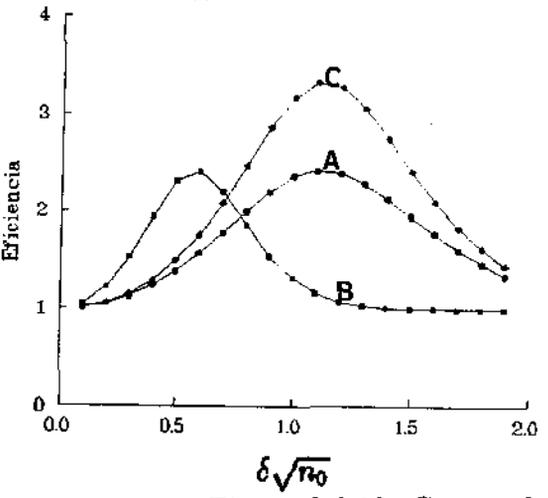
Figura 2.6.10: Curvas de eficiência no esquema nV relativas ao ECS

As Figuras 2.6.11 e 2.6.12, apresentam curvas de eficiência no esquema nV relativa ao esquema hV, com seus respectivos delineamentos. Nota-se que as curvas apresentam as mesmas características, isto é, no sentido do ganho de eficiência, como foi observado anteriormente, para pequenas variações na média do processo a eficiência é maior do que para grandes variações, e também quanto maior a diferença entre os tamanhos amostrais maior é o ganho de eficiência, conforme são apresentados nos gráficos.



curva	delineamento							
	n_0	n_p	n_g	k_a	h_0	h_p	h_g	k_a
A	4	1	20	1.40458	4	1	50	0.07660
B	4	1	10	0.96383	4	1	50	0.07660
C	4	1	20	1.40458	10	1	50	0.23163
D	4	3	5	0.67237	4	1	50	0.07660

Figura 2.6.11: Curvas de eficiência no esquema nV relativa ao esquema hV



curva	delineamento				
	n_0	h_0	h_p	h_g	k_a
A	4	4	1	50	0.07660
B	15	4	1	50	0.07660
C	4	10	1	50	0.07660

Figura 2.6.12: Curvas de eficiência no esquema hV relativa ao ECS

2.7 Simulações de Monte Carlo

Para se determinar a distribuição de frequência de N_2 no esquema nV, após ter sofrido uma alteração na média do processo, utilizamos do procedimento simulações de Monte Carlo, efetuamos o mesmo procedimento, para determinar-se a distribuição de frequência de N_2 no ECS, após a alteração na média do processo (N_2 tem uma distribuição geométrica de parâmetro p conhecido):

$$p = \frac{1}{E_s[N_2]},$$

mas determinamos para comparar-se as distribuições.

Para cada distribuição de frequência, utilizamos 1000 repetições de Monte Carlo, em cada repetição, foi registrado o número de inspeções até a falha, isto foi contado em 1000 repetições. Ao final, temos a distribuição de frequência para os delineamentos, isto é, para o ECS e para o esquema nV.

A Figura 2.7.13 ilustra a distribuição de frequência para o ECS, após a média do processo ter sofrido um deslocamento de $\delta = 1.0$, com o seguinte delineamento :

$$n_0 = 4$$

$$\sigma = 1$$

$$k_0 = 3,$$

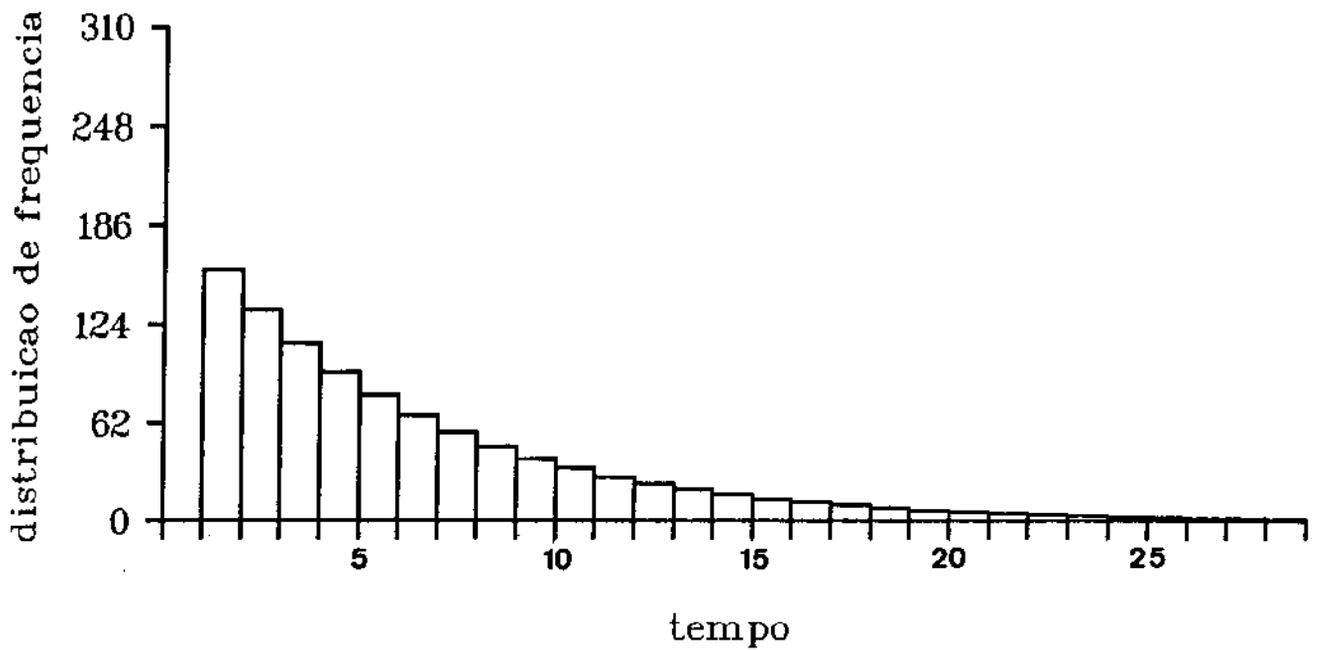


Figura 2.7.13: Distribuição de frequência para ECS

Para a distribuição de frequência de N_2 temos:

$$E_s[N_2] = 6.34$$

$$V_s[N_2] = 34.44$$

Este processo gastou em média, próximo a seis inspeções, para se detectar a alteração na média do processo, $\delta = 1.0$.

A Figura 2.7.14 mostra a distribuição de frequência, para o esquema nV, com o mesmo delineamento do ECS, isto é, com as respectivas alterações, com n variável onde:

$$k_a = 0.963825 \text{ (limite de advertência)}$$

$$n_p = 1$$

$$n_g = 10$$

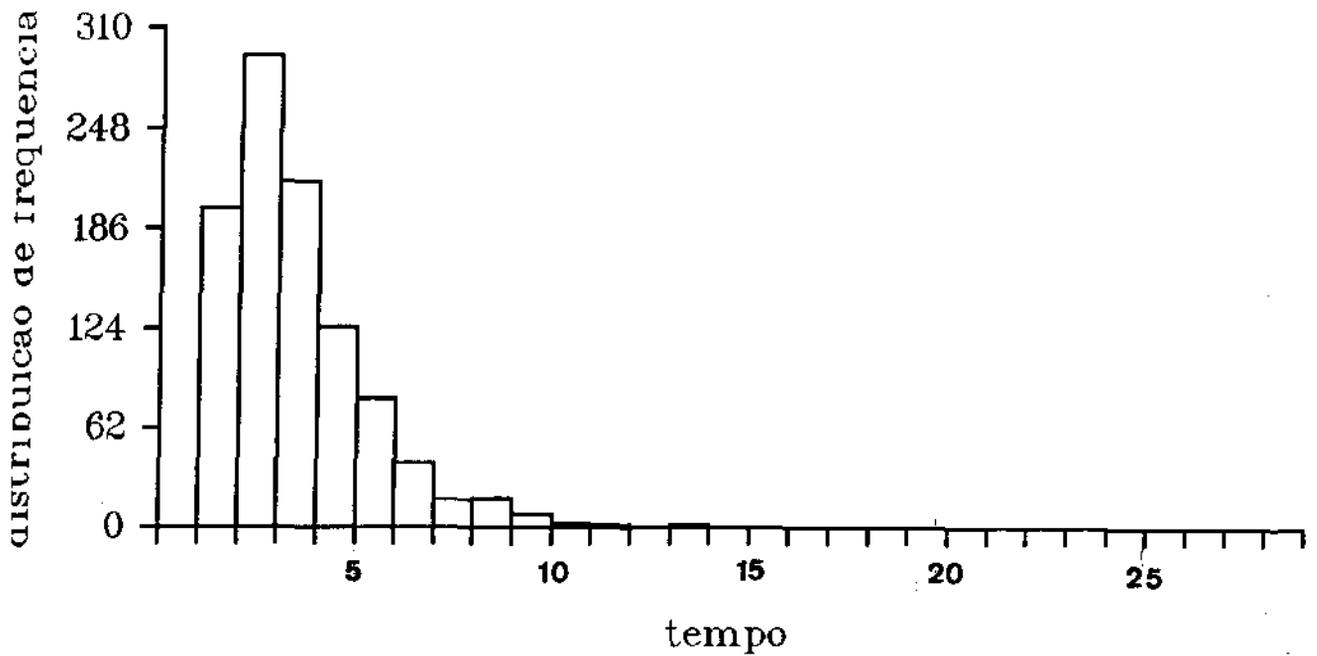


Figura 2.7.14: Distribuição de frequência para amostras variáveis

Na distribuição de frequência N_2 , temos:

$$E_n[N_2] = 2.95$$

$$V_n[N_2] = 3.17$$

Podemos observar, que a distribuição para o ECS, é mais dispersa, com relação ao esquema nV.

No ECS, utiliza-se em média, próximo de seis inspeções, para detectar-se a falha, enquanto no esquema nV, nas mesmas condições, gasta-se em média próximo de três inspeções, ou seja, aproximadamente a metade das inspeções, acarretando um ganho de eficiência de 50%.

A Figura 2.7.15 apresenta uma distribuição de frequência de n_2 no ECS, após ter sofrido uma alteração na média do processo, o delineamento para a distribuição de N_1 é:

$$n_0 = 10$$

$$\sigma = 1.0$$

$$k_0 = 3$$

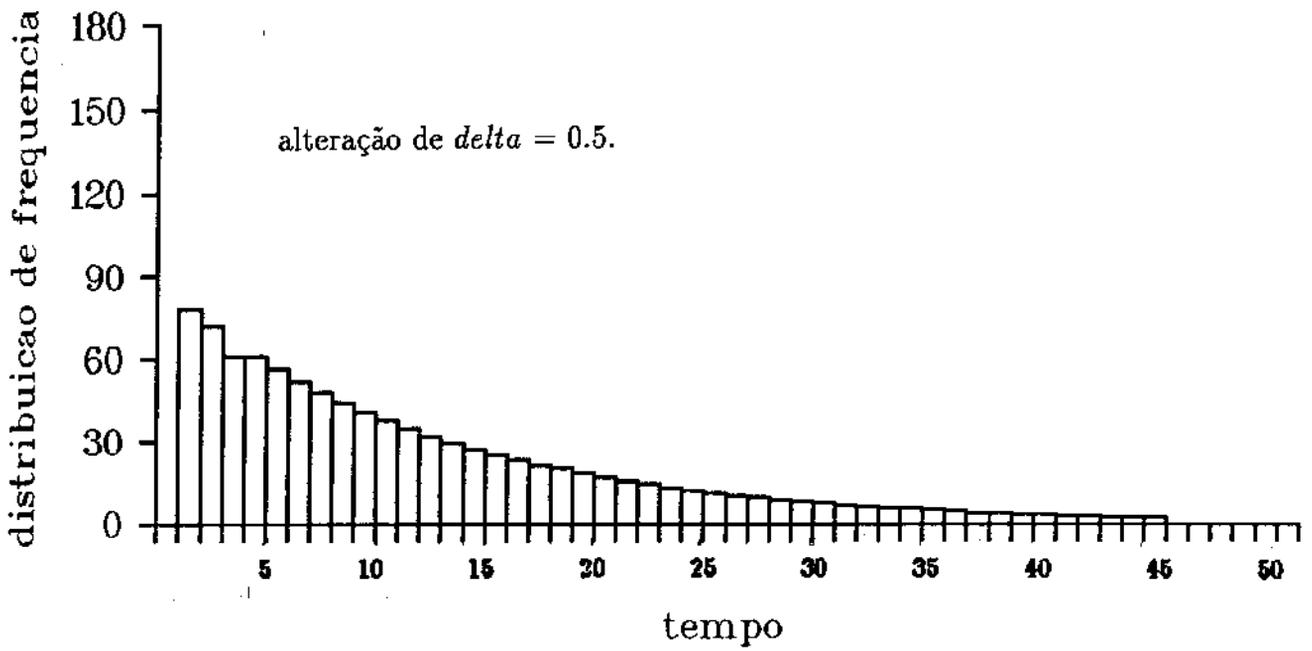


Figura 2.7.15: Distribuição de frequência para o ECS

Neste caso tem-se para distribuição de frequência N_2 no ECS:

$$E_s[N_2] = 13.07$$

$$V_s[N_2] = 170.86$$

A distribuição de frequência de N_2 no esquema nV, é apresentado na Figura 2.7.16, com o mesmo delineamento da Figura 2.7.15, onde:

$$k_a = 1.32287$$

$$n_p = 1$$

$$n_g = 50$$

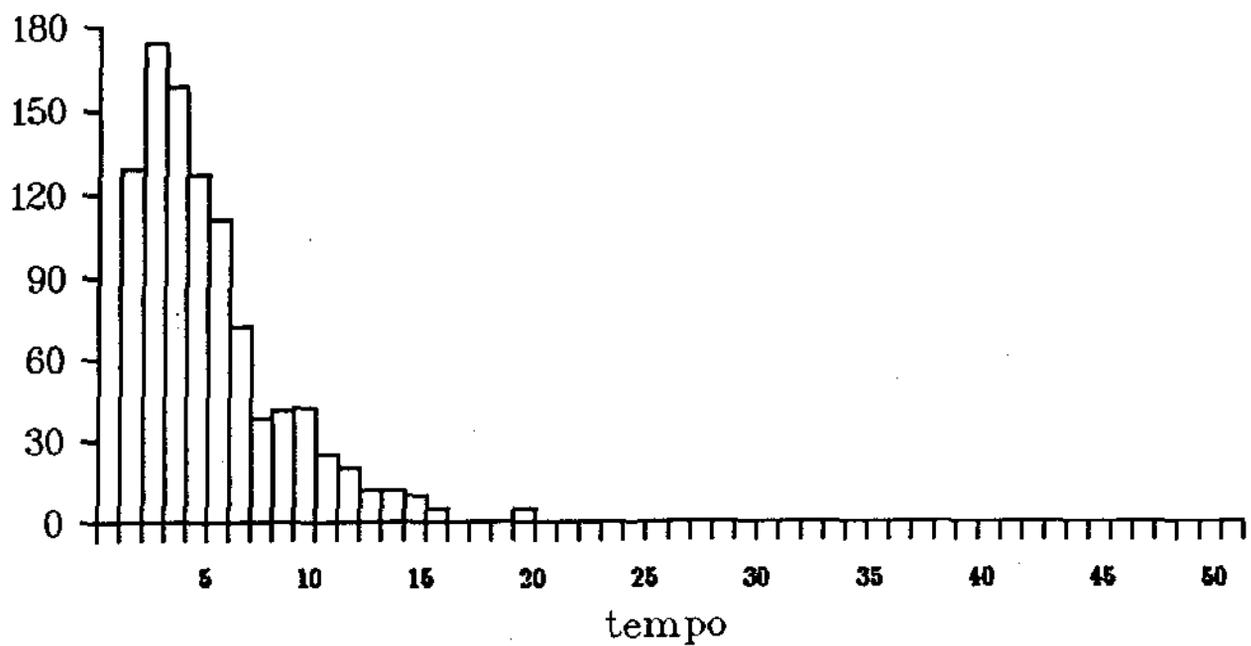


Figura 2.7.16: Distribuição de frequência para o esquema nV

Onde, a distribuição de frequência para N_2 tem-se :

$$E_n[N_2] = 4.89$$

$$V_n[N_2] = 15.93$$

Neste caso, o ECS gasta em média próximo de treze inspeções para detectar-se a falha, já o esquema nV gasta-se em média próximo de quatro inspeções para detectar-se a falha.

O esquema nV, é em média aproximadamente três vezes mais rápido do que o ECS, tendo um ganho de eficiência de 75%.

Foram apresentados duas situações, entre várias situações reais, concluindo-se então, que o esquema nV demonstra ser mais eficiente do que o ECS, em diversas situações reais de interesse.

2.8 Conclusão

Neste trabalho nos propusemos a desenvolver um esquema alternativo para a construção dos gráficos de controle para a média de um processo que, mantendo os mesmos custos operacionais básicos que o Esquema Clássico de Shewhart, melhorasse na rapidez de detecção de perturbações estáveis na média do processo.

O esquema nV que propusemos se mostra muito eficiente para deslocamentos na média do processo, entre $0,2\sqrt{n_0}$ e $1,2\sqrt{n_0}$ desvios padrões de X . Suas propriedades estatísticas básicas foram estabelecidas de forma completa.

Acreditamos que resultados interessantes poderão ser também obtidos nos gráficos para controle da variância do processo. Também podem ainda ser testadas situações onde a média do processo se desloca de forma gradual, de M para $M + \delta$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 ALEXANDRE, J. W. C. (1989) "A Média Móvel Ponderada Exponencialmente Como Alternativa a \bar{X} na Construção de Gráficos de Controle." Tese de Mestrado - Departamento de Estatística - IMECC - UNICAMP
- 2 COSTA, A. F. B. (1989) "O Projeto Econômico do Gráfico de Controle \bar{X} Para Sistemas Com Deterioração." Tese de Doutorado - Departamento de Engenharia - FEE - UNICAMP
- 3 DUNCAN, A. J. (1956) "The Economic Design Of \bar{X} Chart Used To Maintain Current Control Of Process." Journal Of Quality technology 51, pg 228 - 242
- 4 EWAN, W. D. (1963) "When And How To Use CUSUM Charts." Technometrics 5, pg 1 - 22
- 5 HUNTER, J. S. (1986) "The Exponentially Weighted Moving Average." Journal Of Quality Technology 4, pg 203 - 210
- 6 NELSON, L. S. (1983) "The Deceptiveness Of Moving Averages." Journal Of Quality Technology 15, pg 99
- 7 PAGE, E. S. (1954) "Continuous Inspection Schemes." Biometrika 41, pg 100 - 115
- 8 REYNOLDS, M. R. Jr., AMIN, R. W., ARNOLD, J. C. e NACHLAS, J. A. (1988) " \bar{X} Charts With Variable Sampling Intervals." Technometrics 30, pg 181 - 192
- 9 ROBERTS, S. W. (1959) "Control Charts Tests Based On Geometric Moving Averages." Technometrics 1, pg 239 - 250
- 10 SHEWHART, W. A. (1931) "Economic Control Quality Of Manufacturing Product." New York: Van Nostrand.
- 11 TAGUCHI, G., Elsayed A. Elsayed e Tomas C. Hsiang (1990) "Engenharia da Qualidade em Sistemas de Produção" cap. 2.
- 12 VERDI, L. A. R. (1991) "Gráficos de Controle Com Amostragem a Tempos Variáveis, Comandados Pelas M Últimas Observações." Tese de Mestrado - Departamento de Estatística - IMECC - UNICAMP
- 13 WOODWARD, R. H. E. e GOODSMITH, P. L. (1964) "Cumulative Sum Techniques." Published For Imperial Chemical Industries, Oliver & Boyd, London, England