

A TENTATIVA DE OBTER UM NOVO ELEMENTO
FINITO LAGRANGIANO: ANÁLISE
NUMÉRICA E COMPARAÇÃO

Este exemplar corresponde à redação final da
tese devidamente corrigida e defendida pelo
Sr. Cedric Marcelo Augusto Ayala Bravo e
aprovada pela Comissão Julgadora.

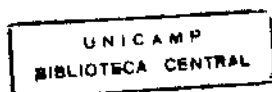
Campinas, 20 de novembro de 1995



Orientador: Prof. Dr. João Frederico da
Costa Azevedo Meyer

Dissertação apresentada ao Instituto de Ma-
temática, Estatística e Ciência da Com-
putação (IMECC - UNICAMP), como requi-
sito parcial para a obtenção do título de Mes-
tre em Matemática.

NOVEMBRO – 1995



CM-0 00 8508 0-0

UNIDADE	
N.º CHAMADA:	
V.	EX.
T. MBO BC/	2693 F
PROC.	667196
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	07/03/96
N.º CPD	

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	
V.	EX.
T. MBO BC/	2693 F
PROC.	667196
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	07/03/96
N.º CPD	

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Ayala Bravo, Cedric Marcelo Augusto

Ayl4t A tentativa de obter um novo elemento finito lagrangiano:
análise numérica e comparação/Cedric Marcelo Augusto Ayala
Bravo. -- Campinas, [S.P. :s.n.], 1995.

Orientador : João Frederico da Costa Azevedo Meyer.

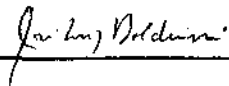
Dissertação [mestrado] - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação.

I . Método dos elementos finitos. 2. Análise numérica. 3.
Equações diferenciais parciais - Soluções numéricas. 4. Análise e
testes. I. Meyer, João Frederico da Costa Azevedo. II. Universidade
Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Ciência
da Computação. III. Título.

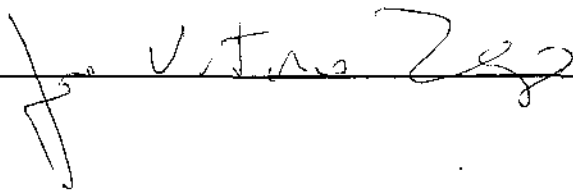
Tese de Mestrado defendida e aprovada em 20 de novembro de 1995
pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof (a). Dr (a).



Prof (a). Dr (a).



Prof (a). Dr (a).

Aos meus queridos pais

Victor Andres Ayala Aguirre

Eliana Bravo Bravo

À minha amada esposa

Edna Maria Poiatti.

Gostaria de manifestar minha gratidão ao meu orientador, aos professores da área de Análise Numérica, à Diretoria do IMECC, à Coordenadoria da Pós-Graduação e à FAEP pelo apoio manifestado durante a elaboração deste trabalho.

EPÍGRAFE

*A Matemática é trivial! ..., mais o que é
óbvio para alguns... é motivo de especulação
para outros.*

ÍNDICE

Introdução	i
Capítulo I. O PROBLEMA CONTÍNUO	1
Capítulo II. FERRAMENTAS DISCRETAS	20
Capítulo III. O PROBLEMA DISCRETO	42
Capítulo IV. DA CONVERGÊNCIA DE SOLUÇÕES APROXIMADAS	70
Capítulo V. ENSAIOS NUMÉRICOS	100
BIBLIOGRAFIA PRINCIPAL	122
BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR	124

INTRODUÇÃO

Neste trabalho, pretendemos analisar e testar comparativamente um tipo não conforme de Elemento Finito de Segunda Ordem. Este objetivo veio inicialmente da necessidade de trabalhar com Elementos Finitos Retangulares de ordem superior completa, por assim dizer. Este esforço irá exigir seis graus de liberdade, do tipo Lagrange, e seis pontos deveram ser escolhidos num retângulo.

Isto tem duas conseqüências: a primeira é que, tendo escolhido os quatro vértices do retângulo, restam apenas duas escolhas, impondo que a continuidade em todos os lados não pode ser garantida. Em segundo lugar, ao optar por dois pontos internos, um possível caminho seria o de se escolher dois pontos localizados simetricamente. Isto se revelou infrutífero, obviamente, não permitindo a definição das funções de base: é necessário que os pontos internos sejam escolhidos de modo não simétrico (seção 2.5) - e nenhuma continuidade das funções, do espaço gerado com este elemento, pode ser garantida sobre os quatro lados de cada elemento retangular.

Nossa expectativa foi a de que este novo Elemento Finito não seria competitivo nos casos padrão, mas que poderia se revelar útil em situações heterodoxas. Nas experiências computacionais efetuadas, isto ocorreu parcialmente. Embora a equação escolhida para os testes seja a mais clássica possível (a Equação Estacionaria da Difusão), ensaios numéricos mostraram que, em comparação com os Elementos Finitos usuais, este Elemento não conforme apresentou relativo sucesso na aproximação de soluções com comportamento particular. Porém seu desempenho foi menos eficiente naqueles exemplos de soluções 'boas'. Sabe-se ainda que este tipo de Elemento é aplicado com êxito para resolver equações de ordem igual ou superior a quatro onde o uso de Elementos conformes é bem mais complexo. Como mencionado em [9]: Este tipo de elemento permite obter uma boa representação de todos os gradientes de restrições simples..., e a seguir,... ele é usado por Engenheiros na prática para resolver problemas de elasticidade bi e tridimensionais formulados sobre domínios retangulares.

Estes ensaios mencionados estão no último capítulo, junto com estudos comparativos com outros Elementos Finitos (Elementos Triangulares de Primeira e Segunda Ordens, e Elementos Retangulares). A análise destes Elementos Finitos, as definições deste novo Elemento e o estudo dos erros estão nos capítulos seguintes.

Observemos porém que este trabalho tem sido desenvolvido visando passar ao leitor da forma mais clara possível, através do tratamento particularizado da equação em estudo, as noções gerais da metodologia de Elementos Finitos e temas afins, resultados teóricos e práticos aplicáveis em toda a sua extensão de modo geral. Também, uma quantidade razoável de referências bibliográficas é mencionada no transcurso da leitura em conexão com os conceitos, resultados e temas, para que o leitor possa melhor esclarecer as prováveis dúvidas e se aprofundar se for do interesse. A intenção do autor em quanto ao desenvolvimento deste trabalho é a mais fiel e espera que este esforço sirva de ajuda a quem se interessar pelo tema.

CAPÍTULO 1

O PROBLEMA CONTÍNUO

1.0. Introdução

Neste capítulo começamos apresentando o problema misto de Dirichlet-Neumann, aqui chamado de PMDN, na sua formulação clássica, e a seguir definimos os espaços de Sobolev H^1, H^2, H_0^1 onde procuraremos a solução do PMDN na sua formulação fraca ou variacional que daremos posteriormente. Em seguida provamos algumas propriedades das funções que entram na formulação variacional e com a ajuda do lema de Lax-Milgram garantimos a existência e unicidade da solução do PMDN na sua formulação fraca no tipo de espaço mencionado acima. Concluimos o capítulo colocando o problema mediante o método de Galerkin num espaço de dimensão finita onde iremos à procura da solução aproximada ou numérica pelo Método dos Elementos Finitos.

Isto é, neste capítulo descrevemos o caminho percorrido do PMDN em sua formulação clássica para a obtenção de Soluções Aproximadas da versão fraca do Problema Discreto.

1.1. Problema misto de Dirichlet-Neumann – Formulação clássica ou forte

Seja Ω um conjunto aberto, conexo e limitado de \mathbb{R}^2 de fronteira $\Gamma = \partial\Omega$ “suficientemente suave” (por exemplo, de classe C^2 , [15]) composta de duas partes complementares Γ_0 e Γ_1 , i.e.:

$$\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \quad \text{com} \quad \Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset.$$

A estes dados associamos o seguinte problema:

Dados α , um parâmetro escalar positivo e uma função f convenientemente definida sobre Ω , achar uma função u definida sobre Ω tal que

$$(1.1.1) \quad -\alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = f \quad \text{para} \quad (x, y) \quad \text{em} \quad \Omega$$

$$(1.1.2) \quad u = g_0 \text{ para } (x, y) \text{ em } \Gamma_0$$

$$(1.1.3) \quad \alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} = g_1 \text{ para } (x, y) \text{ em } \Gamma_1.$$

Esta é uma equação diferencial parcial elítica linear de segunda ordem com valores na fronteira conhecida como Problema de Contorno.

Aqui, $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ denota a derivada normal na direção η exterior (unitário) à fronteira Γ de Ω , isto é,

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \eta_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \eta_2 \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \eta = (\eta_1, \eta_2), \quad \|\eta\| = 1,$$

e $\frac{\partial}{\partial x}$ é a derivação no sentido usual ou clássico; Δu representa o operador $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

As restrições $u|_{\Gamma_0} = g_0$ (*Dirichlet*), $\alpha \frac{\partial u}{\partial \eta}|_{\Gamma_1} = g_1$ (*Neumann*), no sentido pontual, constituem uma condição suplementar necessária para a unicidade da solução e são ditas condições de contorno. Uma solução do problema clássico é, por exemplo, uma função $u \in C^2(\bar{\Omega})$ satisfazendo (1.1.1)-(1.1.3).

Para usar o Método dos Elementos Finitos (ou algum deles cf. [2]), na procura de uma solução aproximada ou numérica devemos reformular este problema. Tal formulação é dita fraca ou variacional, que como veremos depois, ela permite acomodar dados irregulares e soluções irregulares, além de é claro dados mui suaves (veja exemplos do capítulo 5), de tal forma que quando uma solução suave clássica existe ela também é solução do problema fraco. Assim nada se perde reformulando o problema de uma maneira variacional, ganhando a significativa vantagem de considerar problemas com dados e soluções irregulares.

Por outra parte são muitos os problemas a valores fronteiras em dois ou tres dimensões para os quais a solução exata não se consegue achar explicitamente, embora se saiba (prova-se) que ela existe.

É na solução destes problemas onde se revela o verdadeiro potencial do Método dos Elementos Finitos (MEF).

O tratamento de problemas clássicos de Dirichlet e de Neumann e do problema clássico misto e suas soluções assim como dos operadores de Laplace no qual este trabalho se apóia é, de modo geral, o de [2], [5], [9], [13], [15], [17]. Teoremas de existência são citados em [32].

No que se segue escrevemos as notações usuais

$$\Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) u$$

$$\nabla u \cdot \nabla v = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_2}$$

1.2. Espaços de Solução

Na procura de uma solução numérica via elementos finitos, transformamos um problema original em outro em algum sentido equivalente chamado de uma formulação variacional do problema clássico. Uma tal formulação é do tipo:

Achar $u \in V$, tal que:

$$(1.2.1) \quad \int_{\Omega} (\alpha \nabla u \cdot \nabla v + \alpha uv) dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in V$$

onde V é um espaço de funções que será caracterizado de acordo com o problema. Se uma solução $u \in V$ existe, fazendo $v = u$ em (1.2.1) teremos:

$$\alpha \int_{\Omega} \nabla u^2 dx + \alpha \int_{\Omega} u^2 dx = \int_{\Omega} f u dx$$

ou

$$\alpha \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx + \alpha \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dx + \alpha \int_{\Omega} u^2 dx = \int_{\Omega} f u dx ;$$

podemos então impor às funções de V assim como às suas primeiras derivadas que sejam de quadrados integráveis sobre Ω .

Ainda mais, é possível generalizar o conceito clássico de derivada por um de derivada fraca e obter uma teoria apta para resolver tanto teórica como numericamente este tipo de problema variacional. Motivados por estas considerações introduzimos a seguir estes e outros conceitos e resultados.

Começamos definindo o espaço das funções (na verdade, classes de funções) de quadrado integráveis sobre $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto, conexo e limitado. Resultados relevantes para o presente tema se apoiam neste tipo de conjunto, ver por exemplo, [2], [9], [13], etc. Seja então:

$$(1.2.2) \quad L^2(\Omega) = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / \int_{\Omega} |v|^2 dx < \infty\}$$

onde a integração se entende no sentido de Lebesgue^(o)(ver obras citadas no final do parágrafo anterior assim como [14], [33]). Observemos que uma função de $L^2(\Omega)$ pode perfeitamente não estar definida num subconjunto $C \subseteq \Omega$ de medida nula [13], já que

$$\int_{\Omega-C} |v|^k dx = \int_{\Omega} |v|^k dx, \quad \text{em particular para } k = 1, 2.$$

De fato, não distinguimos duas funções v, w em $L^2(\Omega)$ se é que $v(x) \neq w(x)$ só para $x \in C$ e, na linguagem usual, $v = w$ em quase toda parte (q.t.p.), isto é, v e w pertencem à mesma classe.

Com o produto interno

$$(1.2.3) \quad (v, w)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} v \cdot w dx$$

e a norma associada

$$(1.2.4) \quad \|v\|_{L^2(\Omega)} = \left[(v, v)_{L^2(\Omega)} \right]^{1/2} = \left(\int_{\Omega} |v|^2 dx \right)^{1/2}$$

$L^2(\Omega)$ é um espaço Hilbert (cf.[2]).

Definiremos adiante os espaços de Sobolev de ordem 1 e 2 sobre Ω denotados por $H^1(\Omega)$, $H^2(\Omega)$ respectivamente, mas, para isso, precisamos definir a noção de derivada fraca para funções de $L^2(\Omega)$.

Seja, para o domínio Ω , $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ com $\varphi \in C^\infty(\Omega)$.

Definimos o suporte de φ como sendo o conjunto fechado

$$\text{sup } \varphi = \overline{\{x \in \Omega / \varphi(x) \neq 0\}} \quad \text{e}$$

^(o) Este tipo de integração abrange um conjunto amplo de funções e propriedades que convém aos nossos propósitos (cf. [24], capítulo 3 observação **).

$$C_0^\infty(\Omega) = \{\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / \varphi \in C^n(\Omega) \quad \forall n \quad \text{e} \quad \text{sup} \varphi \subset \bar{\Omega}\}$$

Se $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ decorre, é claro que $\varphi|_\Gamma \equiv 0$, e também que $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in C_0^\infty(\Omega)$.

Dizemos que $v \in L^2(\Omega)$ tem derivada fraca com respeito a x_i se existir uma função denotada por $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ tal que

$$(1.2.5) \quad \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i} \varphi dx = (-1) \int_\Omega v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \quad \text{e} \quad i = 1, 2.$$

Observações

(1º) Se v for derivável no sentido clássico então usando integração por partes e o fato de φ ter suporte contido em Ω , temos que a derivada fraca $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ de v definida acima coincide com a derivada parcial de v no sentido clássico.

(2º) Nem toda função de $L^2(\Omega)$ é derivável no sentido fraco⁽¹⁾.

(3º) Exemplos de derivação fraca são dados no capítulo 5.

(4º) Sempre que aqui falarmos em derivada, de uma função v , estaremos implicitamente fazendo menção a (1.2.5).

Definimos agora $H^1(\Omega)$ como sendo o espaço das função $v \in L^2(\Omega)$ tais que suas derivadas fracas $\frac{\partial v}{\partial x_i} \quad i = 1, 2$ (1.2.5) existem e também pertencem a $L^2(\Omega)$ i.e.

$$(1.2.6) \quad H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) / \frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2} \in L^2(\Omega)\}$$

O fato que $\frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$, quer dizer que a integração em (1.2.5) existe (é finita) já que pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\|\frac{\partial v}{\partial x_i} \varphi\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i} \varphi \leq \left(\int_\Omega |\frac{\partial v}{\partial x_i}|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\varphi|^2 dx \right)^{1/2} = \|\frac{\partial v}{\partial x_i}\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}.$$

⁽¹⁾ Para este fim, ver [13]. Confira também o exemplo 6 do capítulo 5.

Definem-se, em $H^1(\Omega)$ o produto interno

$$(1.2.7) \quad \begin{aligned} (u, v)_{H^1(\Omega)} &= (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)} \\ &= \int_{\Omega} \left(uv + \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \right) dx \end{aligned}$$

e a norma correspondente

$$(1.2.8) \quad \|v\|_{H^1(\Omega)} = \left[(v, v)_{H^1(\Omega)} \right]^{1/2} = \left[\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^2 \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]^{1/2},$$

veja (1.2.4).

Com este produto interno e esta norma, $H^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert [9], [13].

No estudo dos problemas que abordamos neste trabalho, tratamos muitas vezes de funções $v \in H^1(\Omega)$ tais que $v|_{\Gamma} = 0$ onde $\Gamma \equiv \partial\Omega$. Para este caso, definimos:

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \mid v|_{\Gamma} = 0 \text{ q.t.p.}\}.$$

Neste espaço, a semi-norma em $H^1(\Omega)$ definida por

$$(1.2.9) \quad |v|_{H^1(\Omega)} = \left[\sum_{i=1}^2 \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]^{1/2},$$

é uma norma equivalente à norma dada em (1.2.8), ver [5].

$H_0^1(\Omega)$ também pode ser definida como a aderência ou fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H^1(\Omega)$, onde a restrição $v|_{\Gamma}$ deve ser entendida no sentido da aplicação traço discutida no próximo item, cf. [5], [15].

Por extensão da definição acima, definimos de modo análogo a derivada fraca de ordem 2 de $v \in L^2(\Omega)$ como a função (se existir) $\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}$ tal que

$$(1.2.10) \quad \int_{\Omega} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \varphi dx = \int_{\Omega} v \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} dx \quad ; \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

$H^2(\Omega)$ é, então, o conjunto das funções de $L^2(\Omega)$ para as quais existem as derivadas fracas de ordem 1 e 2 e também pertencem a $L^2(\Omega)$. Introduzindo uma notação mais compacta:

$$\text{Para } \alpha = (\alpha_1, \alpha_2), \quad \alpha_i \in \mathbb{N}_0, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 \quad \text{e}$$

$$(1.2.11) \quad \partial^\alpha v = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}}, \text{ teremos}$$

$$(1.2.12) \quad H^2(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) / \forall \alpha, |\alpha| \leq 2, \exists \partial^\alpha v \in L^2(\Omega) :$$

$$\int_{\Omega} \partial^\alpha v \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \partial^\alpha \varphi dx, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\},$$

Neste caso para (1.2.13), $\alpha_i \in \{0, 1, 2\}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 \leq 2$.

Podemos definir um produto interno em $H^2(\Omega)$ como se segue:

$$(1.2.13) \quad (u, v)_{H^2(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)} \\ + \sum_{0 \leq i \leq j \leq 2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{L^2(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq 2} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_{L^2(\Omega)} ;$$

e em consequência, a norma

$$(1.2.14) \quad \|v\|_{H^2(\Omega)}^2 = (v, v)_{H^2(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq 2} \|\partial^\alpha v\|_{L^2(\Omega)}^2 .$$

Verifica-se que $H^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert. Finalmente.

$$(1.2.15) \quad |v|_{H^2(\Omega)} = \left[\sum_{|\alpha|=2} \|\partial^\alpha v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]^{1/2}$$

define uma seminorma em $H^2(\Omega)$.

De forma análoga obtemos os mesmos resultados para $H^m(\Omega)$, $m \geq 2$, assim como para $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Para uma generalização destes e outros resultados recomendamos ao leitor [2], [5], [9], [15].

No que se segue, tentaremos dar sentido ao conceito de traço de uma função.

Teorema do Traço

O problema clássico exige que $v|_{\Gamma_0} = g_0$ isto é, $v(x) = g_0(x)$, $\forall x \in \Gamma$. Para $\Omega = (a, b)$ prova-se que uma função v de $H^1(\Omega)$ é igual, q.t.p. a uma (única) função

contínua definida sobre $[a, b]$ e, portanto, não há dificuldade em definirmos $v|_{\Gamma}$ como sendo $v(a)$ e $v(b)$. No entanto, para $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ nem toda função (ou classe de funções) de $H^1(\Omega)$ tem um representante contínuo⁽²⁾, isto é, dado $v \in H^1(\Omega)$ nem sempre podemos falar de $v(x)$ para qualquer $x \in \Omega$, e neste caso o sentido que daremos à restrição $v|_{\Gamma}$, valor no bordo Γ de Ω , é dado pelo seguinte resultado (cf. 1.3-1 de [17]).

1. Teorema. Seja Ω aberto e limitado em \mathbb{R}^2 com fronteira Γ suficientemente regular (por exemplo, C^1 por partes⁽³⁾).

Então $C_0^\infty(\bar{\Omega})$ é denso em $H^1(\Omega)$ e a aplicação linear e contínua

$$\begin{aligned} \gamma : C_0^\infty(\bar{\Omega}) &\longrightarrow C^0(\Gamma) \quad (4) \\ v &\longrightarrow \gamma v = v|_{\Gamma} \end{aligned}$$

se prolonga em uma aplicação linear e contínua

$$\begin{aligned} \hat{\gamma} : H^1(\Omega) &\longrightarrow L^2(\Gamma) \quad (5) \\ v &\longrightarrow \hat{\gamma} v. \end{aligned}$$

A função $\hat{\gamma}$ assim definida é chamada de aplicação traço e o seu valor $\hat{\gamma}v$ para $v \in H^1(\Omega)$ chamado de traço de v sobre Γ .

Notação: $v|_{\Gamma} = \hat{\gamma}v$.

Assim, o sentido que daremos à restrição $v|_{\Gamma} = g$ é dado pelo operador traço i.e. $\hat{\gamma}v = g$ q.t.p. sobre Γ , onde $\hat{\gamma}v$ é uma função $L^2(\Gamma)$ ⁽⁶⁾. Podemos verificar (cf. [5]) que $H_0^1(\Omega)$ é o núcleo da aplicação traço $\hat{\gamma}$, i.e.

$$H_0^1(\Omega) = \ker \hat{\gamma} = \{v \in H^1(\Omega) \mid v|_{\Gamma} = 0\}$$

Fórmulas de Green

Seja Ω aberto e limitado em \mathbb{R}^n de fronteira Γ C^1 por partes e $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ o vetor normal unitário exterior à fronteira Γ de Ω . Então

i) $\forall u, v \in H^1(\Omega)$

⁽²⁾ Veja contra exemplo em [13], [17].

⁽³⁾ Uma definição deste tipo de fronteira aparece em [17].

⁽⁴⁾ $C^0(\Gamma) = \{v : \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \mid v \text{ é contínua sobre } \Gamma\}$.

⁽⁵⁾ $L^2(\Gamma) = \{v : \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\Gamma} |v|^2 d\sigma < \infty\}$, $d\sigma$ denota a medida superficial, sobre o bordo Γ , [9].

⁽⁶⁾ Para uma revisão mais ampla do traço de uma função, ver [9], [17].

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx &= - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma} u v \eta_i d\sigma \\ \text{ii) } \forall u \in H^2(\Omega), v \in H^1(\Omega) \\ - \int_{\Omega} \Delta u v dx &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma \end{aligned}$$

Na integração sobre o bordo Γ de Ω , deve-se entender $u, v, \frac{\partial u}{\partial \eta}$ como sendo $\hat{\gamma}(u), \hat{\gamma}(v), \hat{\gamma}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$ respectivamente⁽⁷⁾.

1.3. Formulação fraca ou variacional do problema misto

Suponhamos a solução u do Problema Clássico de Contorno (1.1.1)-(1.1.3) suficientemente “regular” como por exemplo, $u \in H^2(\Omega)$ e definamos o seguinte espaço de funções:

$$(1.3.1) \quad V = \{v \in H^1(\Omega) \mid v|_{\Gamma_0} = 0\}$$

onde $\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$.

Multiplicando a igualdade $-\alpha \Delta u = f$ por uma função teste $v \in V$, e integrando sobre Ω , teremos

$$-\alpha \int_{\Omega} \Delta u v dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

Usando a fórmula de Green (ii) obtemos

$$\alpha \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx - \alpha \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma = \int_{\Omega} f v dx,$$

ou

$$\alpha \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx + \alpha \int_{\Gamma_0} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma + \alpha \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma.$$

Fazendo também uso de $v|_{\Gamma_0} = 0$ e $\alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} = g_1$ sobre Γ_1 (q.t.p.), vem:

$$(1.3.2) \quad \alpha \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_1} g_1 v d\sigma$$

Definamos $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$

$$(1.3.3) \quad a(u, v) = \alpha \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \alpha \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$$

⁽⁷⁾ Estas e outras fórmulas de Green são revistas em [5], [8], [15].

e $f : V \rightarrow \mathbb{R}$

$$(1.3.4) \quad f(v) = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_1} g_1 v d\sigma .$$

Então a formulação variacional (1.3.2) corresponde a:

$$(1.3.5) \quad \begin{aligned} &\text{Achar } u \in V \text{ t.q.} \\ &a(u, v) = f(v), \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

i.e. Achar $u \in V$ t.q.

$$(1.3.6) \quad \alpha \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) dx = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_1} g_1 v d\sigma \quad \forall v \in V .$$

Observação. Esta é uma formulação variacional do problema (1.1.1)–(1.1.3). Um dado problema clássico pode ter associado mais de uma formulação variacional. Uma tal formulação depende basicamente de como as condições de fronteira são consideradas, veja [2].

A importância de (1.3.5) é colocar o PMDN clássico em uma formulação variacional apropriada para o uso de resultados da teoria de aplicações lineares e bilineares sobre espaços de Hilbert como aqueles em que aqui devemos trabalhar. Na sequência, é apresentado um resultado que garante a existência e a unicidade da solução para o nosso problema variacional.

1.4. Lema de Lax-Milgram

2.lema. Seja V um espaço Hilbert e seja a aplicação, bilinear $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ contínua i.e. satisfazendo

$$(1.4.1) \quad \exists M : |a(u, v)| \leq M \|u\|_V \cdot \|v\|_V, \quad \forall u, v \in V .$$

Seja ainda $a(\cdot, \cdot)$ coerciva ou V -elítica no seguinte sentido

$$(1.4.2) \quad \exists \lambda > 0 \text{ t.q. } a(v, v) \geq \lambda \|v\|_V^2, \quad \forall v \in V ,$$

e ainda

$$(1.4.3) \quad f : V \rightarrow \mathbb{R} \text{ linear e contínua.}$$

Então o problema variacional

$$(1.4.4) \quad \text{Achar } u \in V \text{ t.q. } a(u, v) = f(v), \quad \forall v \in V$$

tem uma única solução.

Este resultado aparece, por exemplo, em [5], [13], [17] e uma generalização pode ser vista em [15].

A seguir mostraremos que a formulação variacional (1.3.5) satisfaz as condições do lema. Sem perda de generalidade para os nossos propósitos finais consideraremos $g_0 = 0$, $\alpha = 1$.

(1) V é Hilbert.

Obviamente $V = \{v \in H^1(\Omega) / v|_{\Gamma_0} = 0\}$ é subespaço de $H^1(\Omega)$ com a norma de V sendo a induzida de $H^1(\Omega)$ i.e. $\|v\|_V = \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in V$.

Consideremos as aplicações lineares e contínuas

$$\begin{aligned} \hat{\gamma} : H^1(\Omega) &\rightarrow L^2(\Gamma) & \Gamma = \partial\Omega \\ v &\rightarrow \hat{\gamma}v = v|_{\Gamma} & e \quad (\text{aplicação traço}) \\ \rho_0 : L^2(\Gamma) &\rightarrow L^2(\Gamma_0) & , \quad (\|\rho_0 w - \rho_0 v\|_{L^2(\Gamma_0)} \leq \|w - v\|_{L^2(\Gamma)}) \\ w &\rightarrow \rho_0 w = w|_{\Gamma_0} \end{aligned}$$

$\rho_0 \cdot \hat{\gamma} : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma_0)$ é contínua e

$V = (\rho_0 \cdot \hat{\gamma})^{-1}(\{0\})$, por definição de V ,

sendo fechada a imagem inversa do fechado $\{0\}$ por uma função contínua.

Seja (v_n) uma sequência de Cauchy em V . Sendo $H^1(\Omega)$ Hilbert, (v_n) é convergente em $H^1(\Omega)$ e, como V é fechado, o limite da sequência está em V .

(2) $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é bilinear.

Primeiramente mostramos que $a(\cdot, \cdot)$ é simétrica. Pela definição do operador a , temos

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = a(v, u).$$

Quanto à linearidade, provamos em seguida, dado $u \in V$, $a(u, \cdot)$ é linear

$$a(u, \alpha v + w) = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial(\alpha v + w)}{\partial x_i} dx = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \left(\alpha \frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) dx =$$

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) dx = \alpha \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} dx =$$

$$\alpha a(u, v) + a(u, w) .$$

Da simetria segue a bilinearidade i.e. $a(\alpha v + w, u) = \alpha a(v, u) + a(w, u)$ para cada $u \in V$, $\forall v, w \in V$.

(3) $a(\cdot, \cdot)$ é contínua.

Consideremos o espaço $[L^2(\Omega)] \times [L^2(\Omega)] = [L^2(\Omega)]^2$, é um espaço de Hilbert com o produto interno,

$$(u, v)_{[L^2(\Omega)]^2} = \int_{\Omega} (u, v)_{\mathbb{R}^2} dx = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} u_i v_i dx$$

para $u, v \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, que define a norma

$$\|v\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 = (v, v)_{[L^2(\Omega)]^2} = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} |v_i(x)|^2 dx = \sum_{i=1}^2 \|v_i(x)\|_{L^2(\Omega)}^2 .$$

Então,

$$|a(u, v)| = \left| \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \right| = |(\nabla u, \nabla v)_{[L^2(\Omega)]^2}|$$

usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz em $[L^2(\Omega)]^2$, tem-se:

$$|a(u, v)| = |(\nabla u, \nabla v)_{[L^2(\Omega)]^2}| \leq \|\nabla u\|_{[L^2(\Omega)]^2} \cdot \|\nabla v\|_{[L^2(\Omega)]^2} .$$

Ora,

$$\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1,2} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla v\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2$$

e, portanto,

$$|a(u, v)| \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \cdot \|v\|_{H^1(\Omega)} , \quad M = 1 .$$

Assim $a(\cdot, \cdot)$ é contínua em $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ como também é contínua em $V \times V$.

(4) $a(\cdot, \cdot)$ é coerciva.

Para provar isto usaremos o fato de que a seminorma

$$\begin{aligned} |\cdot|_{H^1(\Omega)} : H^1(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \quad , \\ |v|_{H^1(\Omega)} &= \left[\sum_{|\alpha|=1} \int_{\Omega} |\partial^\alpha v|^2 dx \right]^{1/2} = \left[\left\| \frac{\partial v}{\partial x_1} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial v}{\partial x_2} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]^{1/2} \end{aligned}$$

é uma norma sobre V equivalente à norma $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ desde que Γ_0 tenha medida superficial positiva ⁽⁸⁾, por exemplo Γ_0 não vazia e contínua.

Com isto

$$a(v, v) = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx = \sum_{i=1}^2 \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 = |v|_{H^1(\Omega)}^2 \geq \lambda \|v\|_{H^1(\Omega)}^2$$

sendo a última desigualdade resultante da equivalência entre as normas.

(5) $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ é linear e contínua, para

$$(1.4.5) \quad f(v) = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_1} g_1 v d\sigma$$

a linearidade de f é imediata.

Provemos então a continuidade.

Usando a desigualdade de Hölder [13], temos de (1.4.5)

$$\begin{aligned} |f(v)| &\leq \left| \int_{\Omega} f v dx \right| + \left| \int_{\Gamma_1} g_1 v d\sigma \right| \leq \int_{\Omega} |f v| dx + \int_{\Gamma_1} |g_1 v| d\sigma \leq \\ &\|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g_1\|_{L^2(\Gamma_1)} \|v\|_{L^2(\Gamma_1)} \end{aligned}$$

como $\Gamma_1 \subset \Gamma$, então

$$\|v\|_{L^2(\Gamma_1)} = \left(\int_{\Gamma_1} |v|^2 d\sigma \right)^{1/2} \leq \left(\int_{\Gamma} |v|^2 d\sigma \right)^{1/2} = \|v\|_{L^2(\Gamma)} \quad e$$

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g_1\|_{L^2(\Gamma_1)} \|v\|_{L^2(\Gamma_1)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g_1\|_{L^2(\Gamma_1)} \|v\|_{L^2(\Gamma)}$$

sendo que existe uma constante C que depende de Ω t.q., (cf. 1.2.3 de [5]),

$$\forall v \in H^1(\Omega) \quad , \quad \|v\|_{L^2(\Gamma)} \leq C(\Omega) \|v\|_{L^2(\Omega)} .$$

⁽⁸⁾ Com efeito, ver teorema 1.2.1 de [5].

Em consequência,

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g_1\|_{L^2(\Gamma_1)}\|v\|_{L^2(\Gamma)} &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} + C\|g_1\|_{L^2(\Gamma_1)}\|v\|_{L^2(\Omega)} = \\ &= [\|f\|_{L^2(\Omega)} + C\|g_1\|_{L^2(\Gamma_1)}] \cdot \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq M \cdot \|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Concluindo que $|f(v)| \leq M\|v\|_{H^1(\Omega)}$. A continuidade de $f(v)$ sendo decorrente da linearidade de f .

Com $f \in L^2(\Omega)$ e $g_1 \in L^2(\Gamma_1)$, teremos que f é contínua em $H^1(\Omega)$ e, portanto, também em V .

1.5. Formulação final apropriada para elementos finitos

Estamos agora em condições de formular de maneira mais precisa um problema variacional associado ao PMDN de 1.1 levando em consideração condições suficientes que garantem a existência e a unicidade da solução mediante o lema de Lax-Milgram.

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ um aberto, conexo e limitado de fronteira $\Gamma \in C^1$ por partes, com

$$\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \quad \text{e} \quad \Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$$

tendo ainda que Γ_0 é de medida $d\sigma$ positiva, e que

$$f \in L^2(\Omega) \quad \text{e} \quad g_1 \in L^2(\Gamma_1).$$

O problema formulado anteriormente se torna, então:

$$(1.5.1) \quad \text{Achar } u \in V = \{v \in H^1(\Omega) / v|_{\Gamma_0} = 0\} \quad \text{t.q.} \\ a(u, v) = f(v). \quad \forall v \in V.$$

Em (1.5.1), conforme anteriormente mencionado, temos

$$(1.5.2) \quad \alpha \int_{\Omega} \left[\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right] dx = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_1} g_1 v d\sigma. \quad \forall v \in V.$$

Fazendo uso da fórmula de Green (ii)

$$(1.5.3) \quad \alpha \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = -\alpha \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v dx + \alpha \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma$$

válidas para as funções $u \in H^2(\Omega)$ e $v \in H^1(\Omega)$.

Então de (1.5.2) e (1.5.3) temos

$$-\alpha \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v dx + \alpha \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_1} g_1 v d\sigma, \quad \forall v \in V$$

ou ainda, dado que $v \in V$, e, portanto

$$v|_{\Gamma_0} = 0 \quad \text{e que} \quad \alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} = g_1 \quad \text{em} \quad \Gamma_1$$

$$\int_{\Omega} \left\{ \left(-\alpha \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - f \right) v \right\} dx = 0, \quad \forall v \in V.$$

Dado que existe uma única função $u \in V$ verificando (1.5.2), concluímos que temos resolvido formalmente o problema a valores de contorno:

$$\alpha \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f \quad \text{q.t.p. em } \Omega. \quad \text{com}$$

$$u = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_0 \quad \text{e}$$

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} = g_1 \quad \text{em} \quad \Gamma_1.$$

Este é chamado de problema misto não homogêneo (seria homogêneo se $g_1 = 0$) para o operador

$$u \rightarrow -\alpha \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

cf. 1.2.28 de [5].

1.6. A procura de uma solução numérica

No intento de procurar uma solução $u(x)$ para o tipo de problema clássico, o ideal seria achar uma expressão analítica para u . Um método clássico nessa direção, por exemplo, é o método de separação de variáveis que funciona em várias situações (Análise de Fourier). Nem sempre, porém, existem técnicas de integração que permitam exibir uma solução de forma analítica. Neste último caso uma alternativa é recorrer a métodos numéricos para obter uma aproximação da solução.

Um dos caminhos para que, a partir de um problema clássico, cheguemos a um problema semelhante (em alguns sentidos) de aproximação numérica, se inicia com a expressão do problema original em sua formulação fraca, ou variacional.

Em geral isto consiste em definir um espaço V de funções e formas linear $f(\cdot)$ e bilinear $a(\cdot, \cdot)$ convenientes definidas sobre V e $V \times V$ respectivamente obtendo o seguinte problema dito variacional:

$$(1.6.1) \quad \text{Achar } u \in V \text{ t.q. } a(u, v) = f(v), \quad \forall v \in V,$$

onde as condições de contorno do problema original ou clássico estão agora implícitas na formulação variacional ou no espaço V , tornando o problema nesta formulação equivalente ao problema original em sua forma clássica.

Ilustremos mais uma vez estas idéias com um exemplo simples de Equação de Dirichlet Homogênea.

Achar $u \in V$ tal que:

$$(1.6.2) \quad -\Delta u = f \text{ em } \Omega, \text{ com}$$

$$(1.6.3) \quad u|_{\Gamma} = 0$$

Seja V um apropriado espaço de funções, como, por exemplo,

$$(1.6.4) \quad V = \{v : v \in H^1(\Omega) \mid v|_{\Gamma} = 0\} = H_0^1(\Omega)$$

Multiplicando $-\Delta u = f$ por uma função teste $v \in V$ e integrando (no sentido de Lebesgue) sobre Ω , obtemos

$$-\int_{\Omega} \Delta u v dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in V.$$

Usando agora uma conveniente fórmula de Green, temos

$$(1.6.5) \quad -\int_{\Omega} \Delta u v dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma = \int_{\Omega} f v dx.$$

Como $v|_{\Gamma} = 0$, isto se torna

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx,$$

de onde segue a formulação variacional:

Achar $u \in V$ tal que

$$(1.6.6) \quad a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx = f(v), \quad \forall v \in V$$

Aqui f e as funções de V devem ser tais que a integração na formulação variacional façam sentido e o espaço V e as formas linear $f(\cdot)$ e bilinear $a(\cdot, \cdot)$ com propriedades que garantam a existência e unicidade da solução do problema, como por exemplo aquelas impostas pelo lema da seção 1.4. Neste último caso bastaria definir $V = H_0^1(\Omega)$, para garantir uma solução de (1.6.6) associado ao Problema de Dirichlet (1.6.2)-(1.6.3).

Se u é solução do problema original é claro que u é solução do PV associado. A recíproca, porém, nem sempre é verdadeira. As vezes a solução do PV é solução do problema associado sob certas condições impostas a mais. Por exemplo, se a solução do PV for de classe C^2 então ela é a solução do problema original.

De posse da existência e unicidade da solução do problema variacional, prova-se ainda que o problema (1.6.1) é bem posto no sentido que a solução depende continuamente dos dados (obsevação 4 seção 1, [4]), isto quer dizer que pequenas variações nos dados acarretam pequenas variações na solução o que nos permite ir a procura de uma solução numérica ou aproximada denotada u_h onde $u_h \in V_h$, com V_h um espaço de dimensão finita N_h que pode ou não ser subespaço de V . O Método dos Elementos Finitos permite construir V_h pela montagem sistemática (capítulo 3) das funções da base que o geram. Assim sendo se tem:

$$(1.6.7) \quad V_h = \langle \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N_h} \rangle$$

Em seguida colocamos, de alguma forma, sobre V_h o PV definido sobre V . Agora u_h de vera ser a solução do seguinte problema variacional aproximado (PVA)

$$(1.6.8) \quad \text{Achar } u_h \in V_h \text{ t.q. } a_h(u_h, v_h) = f_h(u_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

onde $f_h(\cdot)$ e $a_h(\cdot, \cdot)$ definidas sobre V_h e $V_h \times V_h$ são representações das respectivas formas $f(\cdot)$ e $a(\cdot, \cdot)$ definidas sobre V e $V \times V$. Por exemplo, quando V_h é subespaço de V podemos definir

$$(1.6.9) \quad a_h(\cdot, \cdot) = a(\cdot, \cdot) /_{V_h \times V_h} \quad \text{e} \quad f_h(\cdot) = f(\cdot) /_{V_h}$$

A prova da existência e da unicidade da solução u_h de (1.6.8), considerando (1.6.9) no caso do V_h ser subespaço de V , é imediata, usando novamente o lema da seção 1.4.

Caso V_h não for subespaço de V a prova da existência e unicidade do PA não é tão imediata. As formas a_h e f_h devem ser convenientemente definidas, assim como uma norma apropriada deve ser considerada sobre V_h . Um tal método de aproximação é dito não conforme. Outro tipo de não conformidade esta relacionada com o uso de integração numérica para aproximar as formas a_h e f_h , [5], [18]. Para alguns destes e outros métodos não conformes é possível mostrar que existe a solução u_h do PA ou discreto e é única, e ainda que é convergente para a solução u do PV, com a nova norma definida sobre V_h . Uma forma de se conseguir isto é definir estes problemas, (1.6.8), com propriedades que permitam aplicar novamente o lema em 1.4. (cf. [4], [5], [9]). Aqui usaremos um método não conforme utilizando o elemento finito desenvolvido neste trabalho (cf. seções 2.5, 3.5.).

Agora como dimensão de V_h é finita. o problema se torna discreto, isto é, as funções v_h de V_h podem ser expressas em termos das funções ϕ_i ,

$$(1.6.10) \quad v_h = \sum_{i=1}^{N_h} \alpha_i \phi_i$$

para a base $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N_h}\}$ de V_h .

Na solução de Problemas Variacionais Aproximados. recorre-se muitas vezes a métodos como o de Galerkin (1915) (dado em (1.6.12) cf. [1], [10], [15], [17]).

Dado que V_h é gerado pelas ϕ_j 's, substituindo (1.6.10) em (1.6.8), concluímos que o problema (1.6.8) equivale a

$$(1.6.11) \quad \text{Achar } u_h \in V_h : a_h(u_h, \phi_j) = f_h(\phi_j) \quad \forall j, \quad 1 \leq j \leq N_h.$$

Então, construir $u_h \in V_h$ é procurar $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{N_h}) \in \mathbb{R}^{N_h}$ com

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_h} \alpha_i \phi_i$$

para o qual valha (1.6.11) i.e., dada a bilinearidade de a :

$$(1.6.12) \quad \sum_{i=1}^{N_h} \alpha_i a_h(\phi_i, \phi_j) = f_h(\phi_j), \quad \forall j, \quad 1 \leq j \leq N_h.$$

Na verdade, o que se resolve então é o sistema linear

$$(1.6.13) \quad \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{f} \quad ,$$

onde a matriz \mathbf{A} é dada por

$$\begin{aligned} a_{ij} &= a_h(\phi_i, \phi_j) \quad ; \quad i, j = 1, 2, \dots, N_h \quad , \text{ a solução é} \\ \boldsymbol{\alpha} &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{N_h}) \quad \text{e o termo } \mathbf{f} \text{ é dado por} \\ f_j &= f_h(\phi_j). \end{aligned}$$

No último exemplo mencionado acima, teremos

$$a(\phi_i, \phi_j) = \int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j dx$$

$$f(\phi_j) = \int_{\Omega} f \phi_j dx$$

Dada a unicidade de u_h , a matriz \mathbf{A} resulta ser não singular.

Se $a_h(\cdot, \cdot)$ for simétrica então \mathbf{A} também é, o que é uma vantagem para a solução numérica do sistema. Na escolha da base de V_h é interessante, do ponto de vista numérico, que a matriz \mathbf{A} seja esparsa, o que se consegue com o uso de Elementos Finitos. Outras características matriciais de \mathbf{A} podem estar relacionadas com as dos operadores a ou a_h , também.

Agora bem, ficam muitas perguntas: o que tem a ver a solução u_h de (1.6.11) com a solução u do PV? Será que u_h converge a u quando N_h cresce? De que forma pode ser provada esta convergência? Com que tipos de normas? Qual é a ordem dessa convergência?

Aqui entra a teoria de elementos finitos para dar respostas a estas questões e deve ser entendida como uma metodologia para a geração das funções ϕ_i da base dos espaços V_h de aproximação que não dependa do método variacional empregado para construir uma solução aproximada u_h de u , e que convirja de certo modo para u quando as dimensões espaciais da discretização (de momento identificadas simplesmente por h , veja observação 3 em 4.3) se aproximam de zero ou, equivalentemente, quando N_h cresce.

CAPÍTULO 2

FERRAMENTAS DISCRETAS

2.0. Introdução

O objetivo deste capítulo é dar a definição de elemento finito em \mathbb{R}^2 e apresentar vários exemplos de elementos finitos provando, nos vários casos, que satisfazem as propriedades enunciadas em sua definição. No final apresentamos um novo elemento de tipo não-conforme.

A idéia a explorar é a de construir um espaço V_h de dimensão finita, de funções definidas sobre Ω , onde procuramos montar uma aproximação u_h da solução u do PV convergente a u , quando a dimensão N_h de V_h cresce (e $h \rightarrow 0$).

V_h é construído particionando o domínio Ω por elementos finitos (discretização de Ω) e definindo sobre eles funções de base com pequenos suportes que geram V_h . Se V_h assim construído for subespaço de V o elemento escolhido na construção de V_h é dito de tipo conforme; caso contrário, i.e., se V_h não for subespaço de V , o elemento referido é dito não-conforme. Elementos do tipo não-conforme podem ser usados com vantagens para problemas de quarta ordem ou mais, onde o uso de elementos conformes se torna mais complexo. O novo elemento aqui apresentado, de tipo não-conforme, foi usado com êxito no PMDN proposto no capítulo anterior.

Uma vez construído V_h , resolvemos o PVA:

Achar $u_h \in V_h$ tal que

$$(2.1.1) \quad a_h(u_h, v_h) = f_h(v_h), \quad \forall v_h \in V_h$$

Onde h é um parâmetro relacionado com a dimensão N_h de V_h (com $h \rightarrow 0 \iff N_h \rightarrow \infty$).

Em seguida devemos provar que u_h converge para u em V , isto é

$$(2.1.2) \quad \|u - u_h\|_V \rightarrow 0 \quad h \rightarrow 0 \quad \text{ou} \quad N_h \rightarrow \infty.$$

Esta convergência é forte, isto é, na própria norma de V (na terminologia usual chamada norma da energia). Isto nem sempre se consegue para qualquer tipo de elementos ou para problemas de ordem superior a dois. Às vezes apenas conseguimos na literatura estimativas de erro da aproximação do tipo $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$, ou em alguma seminorma que envolva derivadas. Um exemplo é a convergência usando a semi-norma $|u - u_h|_{H^1}$, que pode ser de utilidade de acordo com o tipo de informação que se quer, ou que se consegue obter sobre a solução.

2.1. Elementos Finitos

Definição: Um elemento finito em \mathbb{R}^2 é uma terna (K, Σ, P) onde,

- (i) $K \subseteq \mathbb{R}^2$ é compacto, conexo. $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$, de fronteira ∂K Lipschitz contínua;
- (ii) Σ é um conjunto finito de N formas lineares $(\varphi_i)_{i=1}^N$, linearmente independentes, definidas sobre $C^\infty(K)$ chamadas de *graus de liberdade do elemento*; e
- (iii) P é um espaço de funções $p : K \rightarrow \mathbb{R}$ tal que Σ é P -unisolvente, i.e. dados N escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ existe um único $p \in P$ que satisfaça

$$(2.1.3) \quad \varphi_i(p) = \alpha_i \quad 1 \leq i \leq N$$

Observações:

1. A P -unisolvência de Σ é equivalente à existência de N funções $p_i \in P$ tais que para cada $i : 1 \leq i \leq N$:

$$(2.1.4) \quad \varphi_j(p_i) = \delta_{ij} \quad \forall j : 1 \leq j \leq N$$

que constituem uma base de P .

Isto se demonstra como se segue:

Em primeiro lugar, o conjunto $\{p_i, i = 1, \dots, N\}$ é linearmente independente (a P -unisolvência de Σ garante a existência das funções p_i definidas por (2.1.4)), de fato,

se $\sum_{i=1}^N \alpha_i p_i = 0$, aplicando uma função φ_j , obtemos

$$\varphi_j\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i p_i\right) = \sum_{i=1}^N \varphi_j(\alpha_i p_i) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_j(p_i) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j = \varphi_j(0) = 0, \quad 1 \leq j \leq N.$$

então se, $\sum_{i=1}^N \alpha_i p_i = 0$, $\alpha_j = 0$, $1 \leq j \leq N$.

Por outro lado, dado $p \in P$, seja $\alpha_i = \varphi_i(p)$, $1 \leq i \leq N$, a função $\sum_{j=1}^N \alpha_j p_j$ é a única em P (Σ é P -unisolvante) que satisfaz

$$(2.1.5) \quad \varphi_i\left(\sum_{j=1}^N \alpha_j p_j\right) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi_i(p_j) = \alpha_i = \varphi_i(p), \quad 1 \leq i \leq N$$

logo $p = \sum_{j=1}^N \alpha_j p_j$.

Reciprocamente dados $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$, tomando $p = \sum_{j=1}^N \alpha_j p_j$ (existência),

temos $\varphi_i(p) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi_i(p_j) = \alpha_i$.

Seja $q \in P$ tal que $\varphi_i(q) = \alpha_i$ (unicidade), então $q = \sum_{j=1}^N \beta_j p_j$ e

$$\alpha_i = \varphi_i(q) = \varphi_i\left(\sum_{j=1}^N \beta_j p_j\right) = \sum_{j=1}^N \beta_j \varphi_i(p_j) = \beta_i, \quad \text{para } 1 \leq i \leq N.$$

logo, $q = p$.

2. As funções p_j , $1 \leq j \leq N$ que satisfazem $\varphi_i(p_j) = \delta_{ij}$, $1 \leq i \leq N$ são chamadas de *funções de base do elemento*.
3. Da observação 1 se segue que uma condição necessária para a P -unisolvência de Σ é que a dimensão de P seja a cardinalidade do conjunto Σ , em símbolos:

$$\text{Dim } P = \#\Sigma$$

4. Falaremos do *elemento finito* K para nos referirmos à terna (K, Σ, P) .
5. No escopo deste trabalho, P será um espaço de polinômios e entenderemos ele associado ao elemento como $P(K)$

$$(2.1.6) \quad P(K) = \{p/K : p \in P\}.$$

O fato de P ser um espaço de polinômios é essencial, tanto para cálculos computacionais como para provar questões relativas à convergência das soluções aproximadas.

6. Mostrando a existência da base $\{p_j\}_{j=1}^N$ do elemento, verifica-se facilmente que o conjunto Σ é *l.i.*

Com efeito, se

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i(f) = 0 \quad , \quad \forall f \in C^\infty(K),$$

então fazendo $f = p_j$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i(p_j) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j = 0, \quad 1 \leq j \leq N.$$

7. Para mostrar a P -unisolvência de Σ é suficiente mostrar a existência de N funções de base p_i , $1 \leq i \leq N$ de P tais que

$$\varphi_j(p_i) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq j \leq N.$$

Assim, dados $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$, a função $p = \sum \alpha_j p_j$ é a única em P que satisfaz

$$\varphi_i(p) = \alpha_i$$

de onde a aplicação

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : P &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ p &\longmapsto \mathcal{L}(p) = \{\varphi_i(p)\}_{i=1}^N \end{aligned}$$

é linear e contínua entre espaços da mesma dimensão N , é uma bijeção, logo, dado

$$\{\alpha_i\}_{i=1}^N \quad \exists! p \in P \quad \text{tal que}$$

$$\varphi_i(p) = \alpha_i.$$

Uma outra forma empregada para provar a P -unisolvência de Σ é mostrar que $\text{Ker } \mathcal{L} = \{0\}$, i.e.

$$\text{se } \varphi_i(p) = 0, \quad \forall i : 1 \leq i \leq N \quad \text{então } p \equiv 0.$$

Exemplos de Elementos Finitos

Construiremos aqui, de acordo com o parágrafo anterior, alguns exemplos de elementos finitos.

2.2 Triângulo do tipo 1

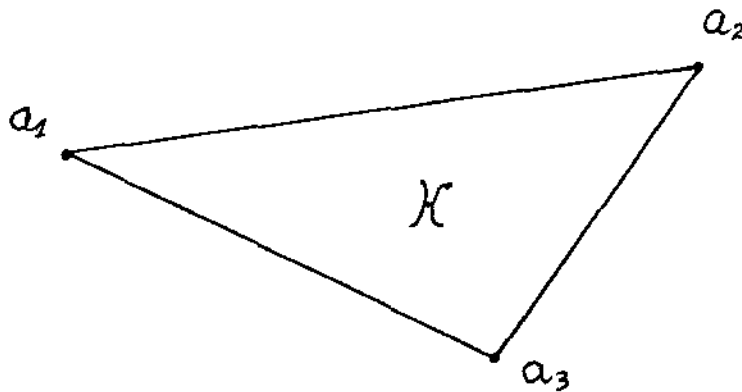


Figura 1

Seja K um triângulo em \mathbb{R}^2 com vértices a_1, a_2, a_3 , e definamos

$$\begin{aligned} \varphi_i : C^\infty(K) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \varphi_i(f) = f(a_i) \end{aligned}$$

K é compacto, conexo e de interior não vazio. Como a fronteira ∂K de K é poligonal, ela é Lipschitz-contínua.

Sejam $\Sigma = \{\varphi_i ; 1 \leq i \leq 3\}$ e

$$P_1 = \{a + bx + cy \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

P_1 é o espaço dos polinômios de primeiro grau em x e y . Podemos identificar P_1 com o conjunto de planos em \mathbb{R}^3 . Primeiro devemos verificar que:

$\dim P_1 = \# \Sigma = 3$, cf. observação 3 acima.

φ_i é linear

$$\begin{aligned} \varphi_i(\alpha f + g) &= (\alpha f + g)(a_i) = \alpha f(a_i) + g(a_i) \\ &= \alpha \varphi_i(f) + \varphi_i(g) \quad ; \quad 1 \leq i \leq 3, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Verificamos que

(i) Σ é *l.i.* mostraremos que se

$$\forall f \in C^\infty(K), \quad (\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \alpha_3 \varphi_3)(f) = 0 \text{ então } \alpha_i = 0, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

Dado que três pontos não colineares determinam um único plano definamos $p_i \in P$ para cada $i : 1 \leq i \leq 3$, por

$$(2.1.7) \quad p_i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(2.1.8) \quad p_i(a_j) = \delta_{ij} \quad 1 \leq j \leq 3.$$

Sejam $f_i = p_i/K \in C^\infty(K)$, $1 \leq i \leq 3$. Então

$$\text{como} \quad \left(\sum_{j=1}^3 \alpha_j \varphi_j \right)(f_i) = 0 \quad . \quad \text{teremos}$$

$$0 = \sum_{j=1}^3 \alpha_j \varphi_j(f_i) = \sum_{j=1}^3 \alpha_j \varphi_j(p_i/K) = \sum_{j=1}^3 \alpha_j p_i/K(a_j) = \alpha_i, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

(ii) Σ é P_1 -unisolvente.

Devemos mostrar que dados $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \exists! p \in P_1$ tal que $\varphi_i(p) = \alpha_i, \quad 1 \leq i \leq 3$.

$$\text{Seja} \quad p = \sum_{i=1}^3 \alpha_i p_i \in P_1,$$

$$\text{então} \quad \varphi_i(p) = \sum \alpha_j \varphi_i(p_j) = \sum \alpha_j p_j(a_i) = \sum \alpha_j \delta_{ij} = \alpha_i.$$

E, finalmente, p é único dado que é um plano definido em três pontos, a_1, a_2, a_3 , não colineares, com

$$(2.1.9) \quad p(a_i) = \alpha_i \quad 1 \leq i \leq 3$$

Observações

1. Os pontos a_1, a_2, a_3 são chamados os *nós* do elemento K e N_K denota o conjunto de nós do elemento K , i.e. $N_K = \{a_1, a_2, a_3\}$
2. Por simplicidade, denotaremos Σ por

$$\Sigma = \{f(a_i) / 1 \leq i \leq 3\}$$

3. As funções p_i/K formam uma base de $P_1(K)$ e, então, do elemento acima.
4. Os elementos nos quais os graus de liberdade em Σ são dados pelos valores da função nos nós são ditos do tipo de *Lagrange*, enquanto aqueles elementos onde alguns dos graus em Σ são definidos por derivadas são ditos do tipo *Hermite*.

Iremos aqui explicitar alguns dos itens mencionados no início desta parte.

Dado um triângulo com vértices $a : (a_1, a_2)$, $b : (b_1, b_2)$, $c : (c_1, c_2)$, seja

$$(2.1.10) \quad A = \begin{pmatrix} c_2 - a_2 & a_1 - c_1 \\ a_2 - b_2 & b_1 - a_1 \end{pmatrix}$$

então,

$$|A| = (c_2 - a_2)(b_1 - a_1) - (a_2 - b_2)(a_1 - c_1).$$

$$\lambda_a(x, y) = 1 + \frac{1}{|A|} [(b_2 - c_2)(x - a_1) + (c_1 - b_1)(y - a_2)]$$

$$\lambda_b(x, y) = \frac{1}{|A|} [(c_2 - a_2)(x - a_1) + (a_1 - c_1)(y - a_2)]$$

$$\lambda_c(x, y) = \frac{1}{|A|} [(a_2 - b_2)(x - a_1) + (b_1 - a_1)(y - a_2)]$$

Como podemos verificar,

$$(2.1.11) \quad \lambda_u(w) = \begin{cases} 1 & w = u \\ 0 & w \neq u \end{cases} \quad \text{para } u, w \in N_K = \{a, b, c\}$$

Uma típica função teste do elemento mais simples em \mathbb{R}^2 está esboçada na figura 2.

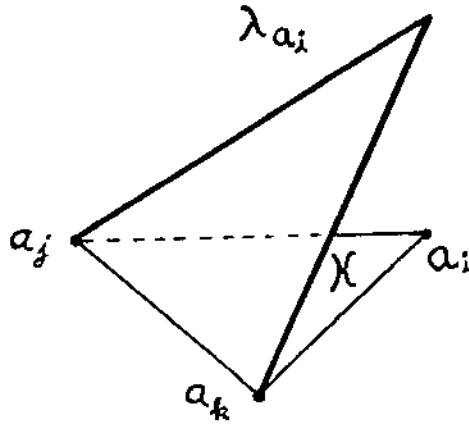


Figura 2

Ela é nula no segmento $\overline{a_k a_j}$.

Veremos no próximo capítulo que o espaço gerado V_h , com triângulos do tipo 1, é constituído de funções contínuas, i.e., $V_h \subseteq C^0(\overline{\Omega})$.

Por outro lado, as funções de V_h que serão montadas como sendo planas sobre cada $K \subseteq \Omega$, não estão em $C^1(\overline{\Omega})$, i.e., $V_h \not\subseteq C^1(\overline{\Omega})$.

Estas propriedades das funções de V_h , como veremos depois, estão estreitamente relacionadas com os nós comuns às interseções das fronteiras dos elementos.

2.3. Retângulo do tipo 1

Para definir um elemento K qualquer deste tipo, começamos com o quadrado unitário \widehat{K} de vértices $\widehat{a}_1(0,0), \widehat{a}_2(1,0), \widehat{a}_3(1,1), \widehat{a}_4(0,1)$. \widehat{K} é obviamente compacto, conexo, de interior não vazio e de fronteira Lipschitz-contínua.

O elemento $(\widehat{K}, \Sigma_{\widehat{K}}, \widehat{P})$ é então definido por

$$(2.1.12) \quad N_{\widehat{K}} = \{\widehat{a}_1, \widehat{a}_2, \widehat{a}_3, \widehat{a}_4\}, \quad \text{e}$$

$$(2.1.13) \quad \Sigma_{\widehat{K}} = \{f(\widehat{a}_i) / 1 \leq i \leq 4\}, \quad f \in C^\infty(\widehat{K}).$$

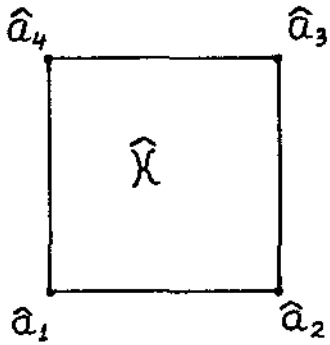


Figura 3

Tomamos $\widehat{P} = \widehat{Q}_1 = \{a + bx + cy + dxy / a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$.

\widehat{Q}_1 é o espaço de polinômios de primeiro grau em cada variável; \widehat{Q}_1 é um conjunto de polinômios incompletos de segundo grau, (por causa do termo xy).

$$\text{Dim } \widehat{Q}_1 = \#\Sigma_{\widehat{K}} = 4.$$

As funções de base de \widehat{K} são (figura 5)

$$(2.1.14) \quad \begin{aligned} \widehat{\lambda}_1 &= (x-1)(y-1) \\ \widehat{\lambda}_2 &= x(1-y) \\ \widehat{\lambda}_3 &= xy \\ \widehat{\lambda}_4 &= (1-x)y \end{aligned}$$

Elas são nulas nos segmentos $[\widehat{a}_k, \widehat{a}_l]$, $[\widehat{a}_k, \widehat{a}_j]$. Por construção os lados deste elemento \widehat{K} são paralelos aos eixos x, y .

Cada lado é descrito da forma, $x=\text{constante}$, $y=\text{constante}$, logo $\widehat{\lambda}_i / \text{lado}(\widehat{K})$ é uma reta, a reta que une $\widehat{\lambda}_i(\widehat{a})$ e $\widehat{\lambda}_i(\widehat{b})$, com \widehat{a} e \widehat{b} vértices contíguos, veja figura 5.

Como é facilmente verificado, estas funções $\widehat{\lambda}_i$ satisfazem

$$\widehat{\lambda}_i(\widehat{a}_j) = \delta_{ij}$$

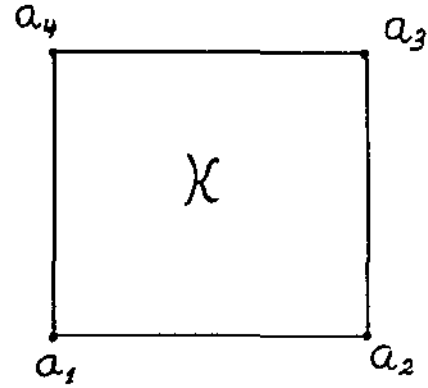
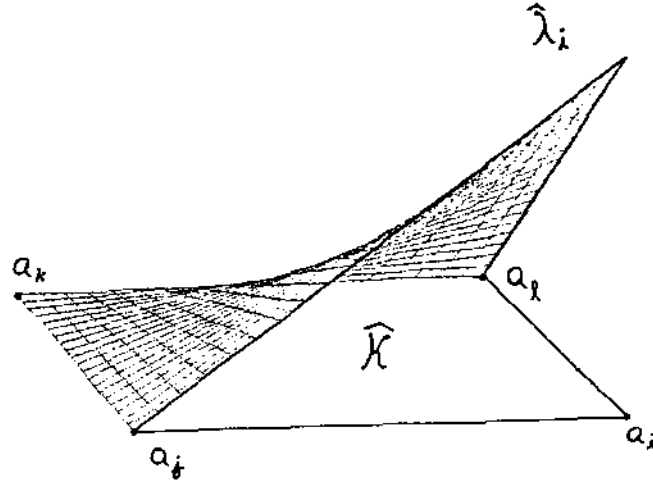


Figura 4



$$1 \leq i \leq 4$$

Figura 5

Conferimos a seguir:

(i) $\Sigma_{\widehat{K}}$ é l.i. :

$$\forall f \in C^\infty(\widehat{K}), \sum \alpha_i \varphi_i(f) = 0$$

Seja $f = \widehat{\lambda}_j$

$$\sum_{i=1}^4 \alpha_i \varphi_i(\widehat{\lambda}_j) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \widehat{\lambda}_j(a_i) = \alpha_j = 0, \quad 1 \leq j \leq 4.$$

Que $\Sigma_{\widehat{K}}$ é \widehat{Q}_1 -unisolvante segue da existência das funções de base do elemento. (Com efeito, observação 1, página 21).

Para um elemento retangular genérico K (fig. 4), seja, agora, (K, Σ_K, P_K) definido por

$$\begin{aligned} N_K &= \{a_1, a_2, a_3, a_4\}. \text{ Então:} \\ \Sigma_K &= \{f(a_i) / 1 \leq i \leq 4\} \text{ e} \\ Q_1 &= \{a + bx + cy + dxy\}. \end{aligned}$$

A definição das funções base para um retângulo genérico K de vértices a_1, a_2, a_3 e a_4 pode ser simplificada se for feito uso de uma transformação linear $F : \widehat{K} \rightarrow K$ definida de modo que $F(\widehat{a}_i) = a_i$, isto por si só garante que $F(\widehat{K})=K$, como é mostrado no exemplo 2 da seção 4.2. O mesmo acontece se \widehat{K} e K fossem triângulos, cf. exemplo 1 da mesma seção. As funções λ_i sobre K seriam construídas (ver figura 6 a seguir) usando F^{-1} e as funções base de \widehat{K} : $\lambda_i(\xi, \eta) = \widehat{\lambda}_i \circ F^{-1}(\xi, \eta) = \widehat{\lambda}_i(x, y)$ onde $(\xi, \eta) = F(x, y)$.

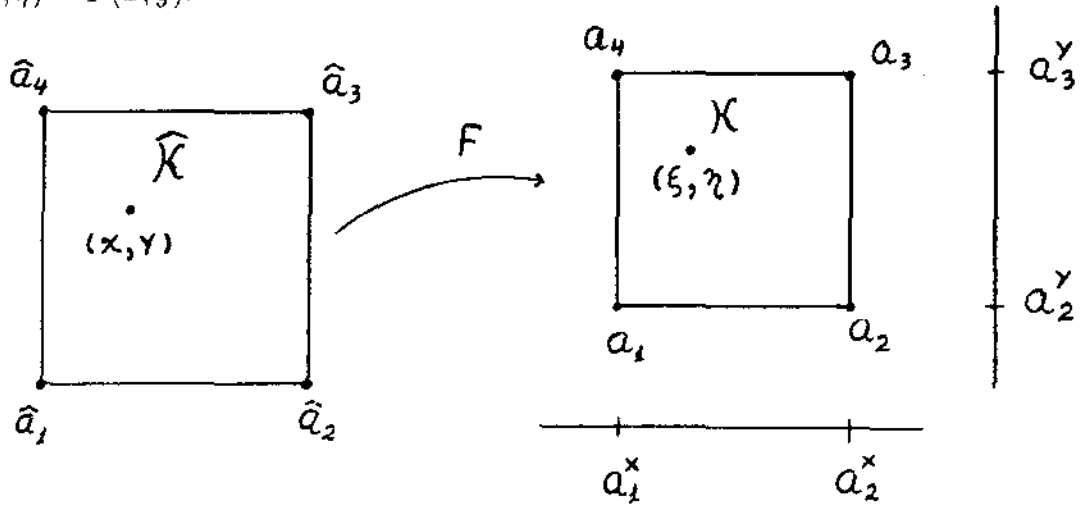


Figura 6

Fazendo $a_i = (a_i^x, a_i^y)$ tem-se

$$F^{-1}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_2^x - a_1^x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_3^y - a_2^y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{a_1^x}{a_1^x - a_2^x} \\ \frac{a_2^y}{a_2^y - a_3^y} \end{pmatrix}$$

Σ_K é então $Q_1(K)$ -unisolvante e as funções de base do elemento K dados acima verificam $\lambda_i(a_j) = \delta_{ij}$.

O espaço V_h gerado com retângulos de tipo 1 é constituído de funções contínuas (i.e. $V_h \subseteq C^0(\overline{\Omega})$), embora suas funções não sejam de classe $C^1(\overline{\Omega})$.

Observação:

1. Uma condição necessária e suficiente para que um quadrilátero K de vértices a_1, a_2, a_3, a_4 seja a imagem de \widehat{K} por uma transformação linear inversível F tal que $F(\widehat{a}_i) = a_i$, $1 \leq i \leq 4$, é que K seja um paralelogramo não degenerado de \mathbb{R}^2 (Com efeito ver [18]).

2.4. Triângulo do tipo 2

Neste próximo exemplo, os nós dos elementos finitos não serão apenas os vértices, mas incluirão também os pontos médios dos lados.

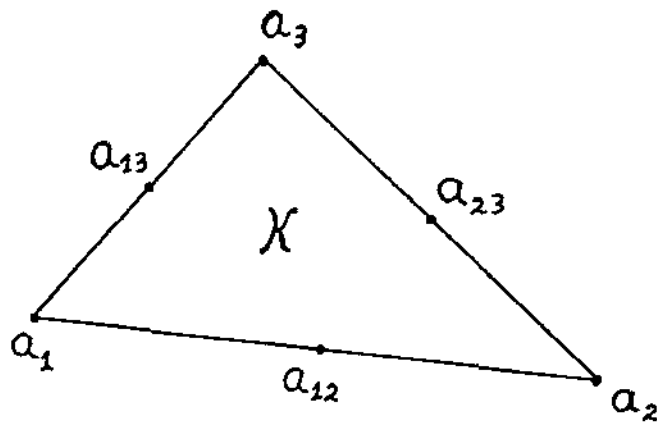


Figura 7

O conjunto N_K dos nós será:

$$N_K = \{a_i, 1 \leq i \leq 3; a_{ij}, 1 \leq i < j \leq 3\},$$

onde cada $a_{ij} = \frac{a_i + a_j}{2}$ é o ponto médio do lado $\overline{a_i a_j}$; também

$$\Sigma_K = \{f(a_i), 1 \leq i \leq 3; f(a_{ij}), 1 \leq i < j \leq 3\} \text{ e}$$

$$P_K = P_2 = \{a + bx + cy + dxy + \epsilon x^2 + fy^2 / a, b, c, d, \epsilon, f \in \mathbb{R}\}.$$

P_2 é o espaço dos polinômios de segundo grau em x, y .

A dimensão dos espaços P_2 é a cardinalidade de Σ_K : $\text{Dim } P_2 = \#\Sigma_K = 6$.

Sejam λ_i , $1 \leq i \leq 3$, as funções de base do triângulo do tipo 1, exemplo 2.2, definidas sobre este triângulo K .

$$\lambda_i(a_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq j \leq 3.$$

Elas satisfazem

$$\lambda_i(a_{kj}) = \lambda_i\left(\frac{a_k + a_j}{2}\right) = \frac{1}{2}[\lambda_i(a_k) + \lambda_i(a_j)]$$

logo,

$$\lambda_i(a_{kj}) = \frac{1}{2}[\delta_{ik} + \delta_{ij}] = \begin{cases} 0 & k \neq i \text{ e } j \neq i \\ \frac{1}{2} & k = i \text{ ou } j = i \end{cases}$$

As funções

$$\begin{aligned} p_i &= \lambda_i(2\lambda_i - 1) \quad 1 \leq i \leq 3 \\ p_{ij} &= 4\lambda_i\lambda_j \quad 1 \leq i < j \leq 3 \end{aligned}$$

constituem uma base de $P_2(K)$. Elas verificam

$$\begin{aligned} p_i &= \begin{cases} 1 & \text{em } a_i \\ 0 & \text{nos outros nós} \end{cases} \\ p_{ij} &= \begin{cases} 1 & \text{em } a_{ij} \\ 0 & \text{nos outros nós} \end{cases} \end{aligned}$$

Verificamos que as p_i e p_{ij} são \mathcal{L}_i :

$$\text{Aplicando} \quad \sum_{i=1}^3 \alpha_i p_i + \sum_{i < j \leq 3} \alpha_{ij} p_{ij}$$

em cada nó do elemento, obtemos

$$\alpha_i = \alpha_{ij} = 0 \quad \begin{aligned} &1 \leq i \leq 3, \\ &1 \leq i < j \leq 3. \end{aligned}$$

Dado $p \in P_2$ podemos escrever p como

$$p = \sum_{i=1}^3 \lambda_i(2\lambda_i - 1)p(a_i) + \sum_{i < j \leq 3} 4\lambda_i\lambda_j p(a_{ij})$$

de fato, ambas as funções estão em P_2 e coincidem nos 6 nós do elemento. Ainda,

$$V_h \subseteq C^0(\bar{\Omega}).$$

Visualização das funções de base (locais) para o triângulo do tipo 2

- (i) A figura 8 identifica uma função $p_i = \lambda_i(2\lambda_i - 1)$ que é localmente um polinômio de 2º grau e que vale 1 num dos vértices a_i do triângulo e ainda que é nula nos demais vértices a_j e pontos médios de cada lado, a_{ij} .

Observação. Cada lado $[a_i, a_j]$ de K é descrito da forma : $y=Ax+B$, $(x, y) \in [a_i, a_j]$, substituindo $y (=Ax+B)$ na função de base p_i de P_2 (figura 8), que tem a forma

$$p_i = a + bx + cy + dxy + \epsilon x^2 + fy^2,$$

se tem que $p_i/[a_i, a_j]$ corresponde na sua forma mais geral a um polinômio de 2º grau em x , sendo que ele é unicamente determinado por três graus de liberdade, como por exemplo o valor que assume nos três nós a_i, a_{ij}, a_j no lado $[a_i, a_j]$. Assim sendo como p_i é nula em a_j, a_{jk}, a_k , p_i é nula no segmento $\overline{a_j a_k}$, sendo que sobre $\overline{a_i a_j}$ ela é uma porção de parábola (figura 8).

Esta noção de $P_{K^!}$ -unisolvência de $\Sigma_{K^!}$, onde $K^!=[a_i, a_j]$ é um lado qualquer de K ,

$$P_{K^!} = P_K / K^! \quad \text{e} \quad \Sigma_{K^!} = \{v(a_i) : a_i \in K^! \cap N_K\},$$

$$\begin{aligned} \varphi_i \in \Sigma_{K^!} \quad , \quad \varphi_i : C_0^\infty(K^!) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \varphi_i(v) = v(a_i) \end{aligned}$$

é de interesse quando alguma suavidade é requerida das funções de V_h como continuidade delas ou de algumas das suas derivadas (cf. capítulo 3).

- (ii) A figura 9 mostra uma função $p_{ij} = 4\lambda_i\lambda_j$ que é um polinômio de grau 2 localmente que vale 1 no ponto médio a_{ij} de um dos lados e que se anula nos demais nós; ela é nula nos segmentos $\overline{a_k a_i}$ e $\overline{a_k a_j}$, sendo sobre o lado $\overline{a_i a_j}$, parabólica (próxima página).

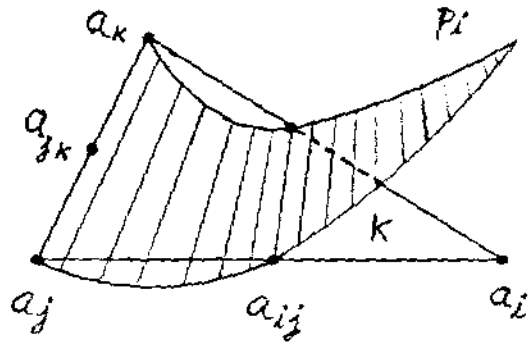


Figura 8

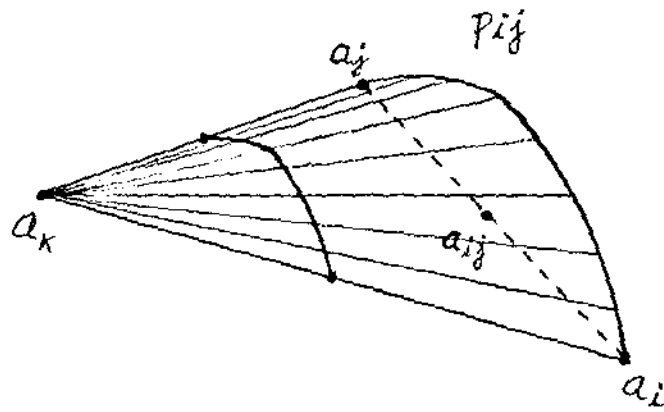


Figura 9

2.5. Um novo Elemento Finito

No elemento finito denominado retângulo do tipo 1, descrito no parágrafo 2.3. temos as funções aí definidas como polinômios ditos degenerados, devido aos 4 graus de liberdade. Um modo de melhorar o tipo de aproximação seria considerar os pontos médios de cada lado (8 graus de liberdade, figura 10) ou também o ponto centro do retângulo (9 graus de liberdade, figura 11).

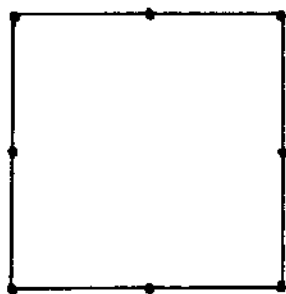


Figura 10

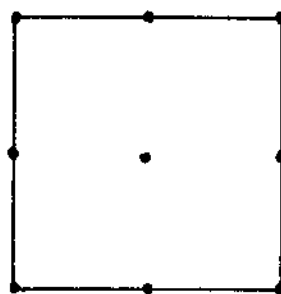


Figura 11

Uma tentativa de introduzir um elemento menos sofisticado esbarra na impossibilidade de localizar mais dois nós internos simetricamente dispostos (não existem as funções de base relativas a estes pontos). A solução é, então, a seguinte: usar um elemento retangular com 6 graus de liberdade (figura 12). Os nós escolhidos são os 4 vértices a_1, a_2, a_3 e a_4 e também os pontos internos a_5 e a_6 assimetricamente localizados, com respeito ao centro de massa.

$$(2.1.15) \quad a_5 = \frac{a_1 + 2a_2 + 3a_4}{6}$$

$$(2.1.16) \quad a_6 = \frac{2a_3 + a_1}{3}$$

$$(2.1.17) \quad N_K = \{a_i ; 1 \leq i \leq 6\}$$

$$(2.1.18) \quad \Sigma_K = \{f(a_i) ; 1 \leq i \leq 6\}$$

$$(2.1.19) \quad P_K = P_2$$

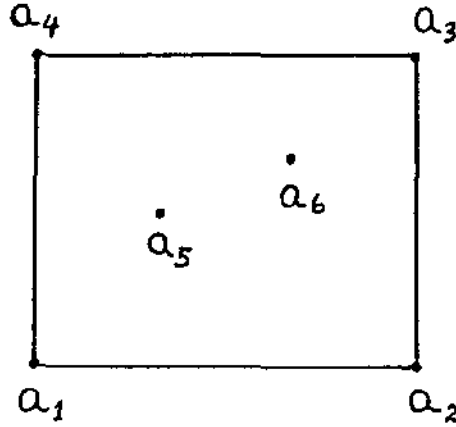


Figura 12

Para o caso de $a_1 = (x, y)$, $a_2 = (x + \Delta x, y)$, $a_3 = (x + \Delta x, y + \Delta y)$ e $a_4 = (x, y + \Delta y)$, temos $a_5 = (x + \frac{\Delta x}{3}, y + \frac{\Delta y}{2})$ e $a_6 = (x + \frac{2\Delta x}{3}, y + \frac{2\Delta y}{3})$.

As funções de base locais deste elemento são, no caso particular de $x = y = 0$ e $\Delta x = \Delta y = 1$ (previamente verificado que $\text{Dim } P_2 = \#\Sigma_K = 6$):

$$(2.1.20) \quad \hat{p}_1 = 1 + \frac{13}{2}x - 9y + xy - \frac{15}{2}x^2 + 8y^2$$

$$(2.1.21) \quad \hat{p}_2 = -2x + 2y - xy + 3x^2 - 2y^2$$

$$(2.1.22) \quad \hat{p}_3 = -12x + 10y + xy + 12x^2 - 10y^2$$

$$(2.1.23) \quad \hat{p}_4 = 3x - 3y - xy - 3x^2 + 4y^2$$

$$(2.1.24) \quad \hat{p}_5 = -36(x - y - x^2 + y^2)$$

$$(2.1.25) \quad \hat{p}_6 = \frac{81}{2}x - 36y - \frac{81}{2}x^2 + 36y^2$$

Para esta família, podemos verificar que, de fato (fig. 13.a)

$$\hat{p}_i(\hat{a}_j) = \delta_{ij}, \quad \text{para } 1 \leq i, j \leq 6$$

Para obter as 6 funções de base sobre um elemento finito genérico K desta família, podemos usar – como já foi feito antes, página 30 – uma transformação linear inversível F , sendo

$$F: \hat{K} \longrightarrow K$$

tal que $F(\hat{a}_i) = a_i$

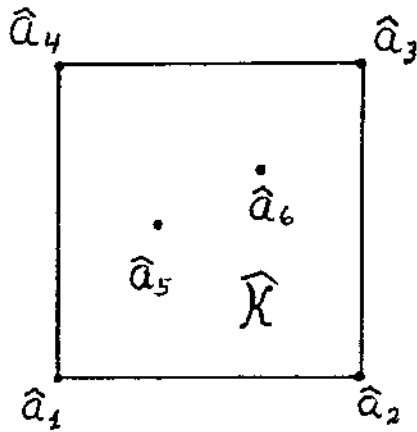


Figura 13a

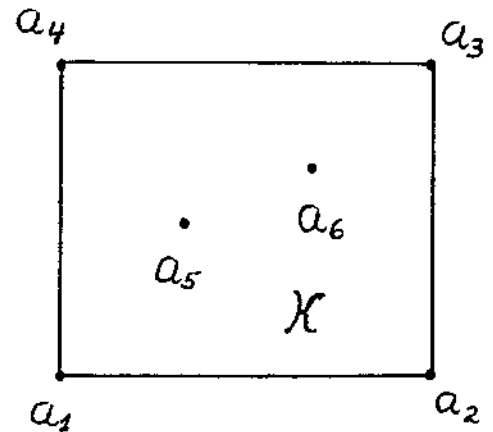


Figura 13b

Por exemplo, se K é dado pelos vértices $a_1 = (x_0, y_0)$, $a_2 = (x_0 + \Delta x, y_0)$, $a_3 = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ e $a_4 = (x_0, y_0 + \Delta y)$ com os nós

$$a_5 = \left(x + \frac{\Delta x}{3}, y + \frac{\Delta y}{2}\right)$$

$$a_6 = \left(x + \frac{2\Delta x}{3}, y + \frac{2\Delta y}{3}\right)$$

as funções de base locais serão:

$$p_1(x, y) = 1 + \frac{13}{2\Delta x}(x - x_0) - \frac{9}{\Delta y}(y - y_0) + \frac{1}{\Delta x \Delta y}(x - x_0)(y - y_0) - \frac{15}{2\Delta x^2}(x - x_0)^2 + \frac{8}{\Delta y^2}(y - y_0)^2$$

$$p_2(x, y) = -\frac{2}{\Delta x}(x - x_0) + \frac{2}{\Delta y}(y - y_0) - \frac{1}{\Delta x \Delta y}(x - x_0)(y - y_0) + \frac{3}{\Delta x^2}(x - x_0)^2 - \frac{2}{\Delta y^2}(y - y_0)^2$$

$$p_3(x, y) = -\frac{12}{\Delta x}(x - x_0) + \frac{10}{\Delta y}(y - y_0) + \frac{1}{\Delta x \Delta y}(x - x_0)(y - y_0) + \frac{12}{\Delta x^2}(x - x_0)^2 - \frac{10}{\Delta y^2}(y - y_0)^2$$

$$p_4(x, y) = +\frac{3}{\Delta x}(x - x_0) - \frac{3}{\Delta y}(y - y_0) - \frac{1}{\Delta x \Delta y}(x - x_0)(y - y_0) - \frac{3}{\Delta x^2}(x - x_0)^2 + \frac{4}{\Delta y^2}(y - y_0)^2$$

$$p_5(x, y) = -\frac{36}{\Delta x}(x - x_0) + \frac{36}{\Delta y}(y - y_0) + \frac{36}{\Delta x^2}(x - x_0)^2 - \frac{36}{\Delta y^2}(y - y_0)^2$$

$$p_6(x, y) = +\frac{81}{2\Delta x}(x - x_0) - \frac{36}{\Delta y}(y - y_0) - \frac{81}{2\Delta x^2}(x - x_0)^2 + \frac{36}{\Delta y^2}(y - y_0)^2$$

Tal como neste exemplo, teremos as funções de base local satisfazendo

$$(2.1.26) \quad p_i(a_j) = \hat{p}_i \circ F^{-1}(a_j) = \hat{p}_i(\hat{a}_j) = \delta_{ij}$$

e \sum_K é $P_2(K)$ -unisolvante.

Esboçamos a seguir dois exemplos de funções de base do novo elemento

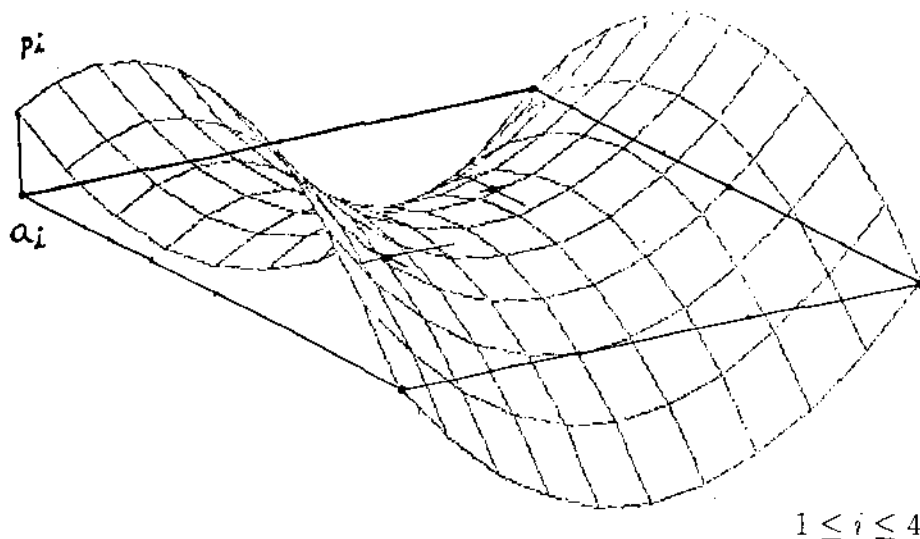


Figura 14

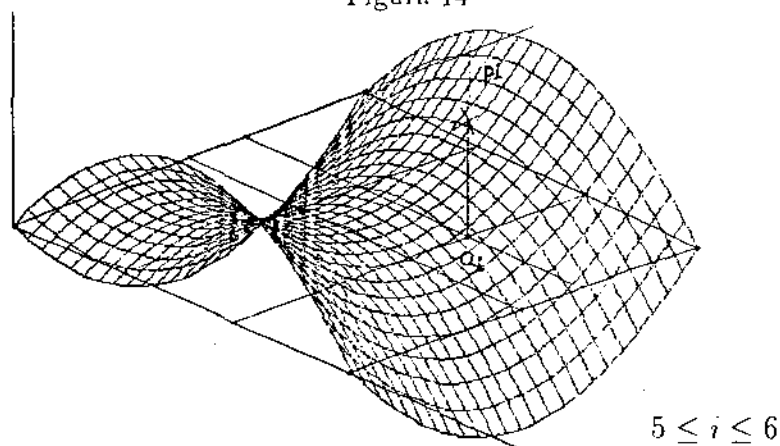


Figura 15

O espaço V_h gerado, como veremos depois é formado somente com funções quadrado integráveis mas não contínuas i.e. $V_h \subseteq L^2(\Omega)$ embora $V_h \not\subseteq C^0(\bar{\Omega})$. O presente elemento é então de tipo não conforme, já que V_h não é subespaço do espaço V onde está colocado o nosso PMDN, pois, como veremos no Capítulo 3, $V_h \subseteq V \iff V_h \subseteq C^0(\bar{\Omega})$.

O espaço V_h gerado com discretizações feitas com este novo elemento não é em

geral, formado por funções contínuas do ponto de vista global, muito embora sejam polinômios de grau 2 em cada elemento.

De fato, consideremos dois elementos adjacentes K_1 e K_2 , com vértices comuns a_i e a_j , os quais pertencem a uma discretização genérica T_h de Ω (seção 3.1), como mostra a figura:

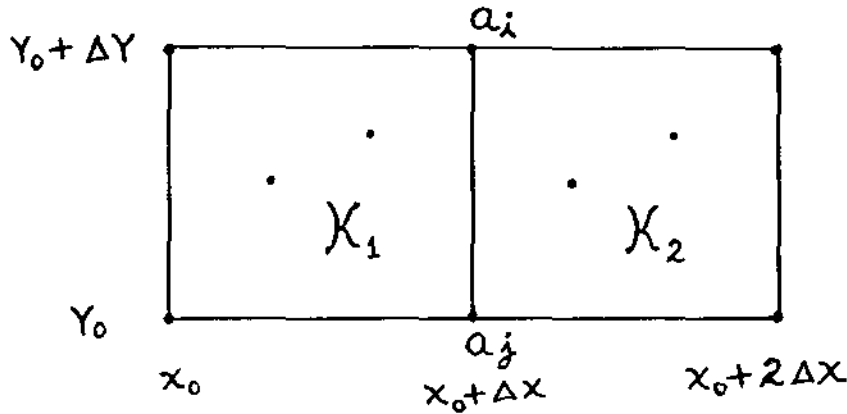


Figura 16

As funções $v_h \in V_h$ estão formadas por combinações das funções de base ψ_i globalmente definidas, i.e.

$$v_h = \sum_{i=1}^{N_h} v_i \psi_i$$

onde $v_i = v_h(a_i)$ e as ψ_i 's são definidas (próximo capítulo) como para elementos por (2.1.27) e (2.1.28), fixado i definamos :

$$(2.1.27) \quad \psi_i(a_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } j = i \text{ e} \\ 0, & \text{se } j \neq i; \end{cases}$$

com j tal que a_j percorre os nós de todos os elementos da discretização, e ainda com

$$(2.1.28) \quad \psi_i|_{K_j} \in P_2(K_j) \quad \forall j : a_i \in K_j.$$

$$\text{Como} \quad (\psi_i|_{K_j})(a_t) = \delta_{it}, \quad a_t \in N_{K_j}, \quad \text{cf. (2.1.27),}$$

então, $\psi_i|_{K_j}$ é a função de base local do elemento K_j associada ao nó a_i . Portanto, no presente caso, as restrições $v_1 = v_h|_{K_1}$ e $v_2 = v_h|_{K_2}$ são polinômios de 2º grau em

duas variáveis

$$v_r = a_r + b_r x + c_r y + d_r xy + e_r x^2 + f_r y^2 \quad r = 1, 2$$

que coincidem em a_i e a_j , mas em geral não coincidem no segmento $[a_i, a_j]$. Observemos que $v_1/[a_i, a_j]$ e $v_2/[a_i, a_j]$ podem ser vistas como polinômios quadráticos em uma variável que a priori só coincidem em 2 pontos, a saber a_i e a_j (cf. observação, página 33), e assim V_h é um espaço de funções descontínuas e não deriváveis embora estejam em $L^2(\Omega)$.

Por exemplo, considere uma discretização (capítulo 3), de $\Omega = [0, 2] \times [0, 1]$ de dois destes elementos, $K_1 = [0, 1]^2$, $K_2 = [1, 2] \times [0, 1]$ (como na figura 16 com $x_0=y_0=0$ e $\Delta x=\Delta y=1$), a função de base ψ_{11} de V_h associada ao nó $(1,1)$, usando as relações da página 38. é definida por

$$\psi_{11}/K_1 = -12x + 10y + xy + 12x^2 - 10y^2$$

$$\psi_{11}/K_2 = 3(x-1) - 3y - (x-1)y - 3(x-1)^2 + 4y^2$$

onde,

$$V_h = \langle \psi_{00}, \psi_{01}, \psi_{10}, \psi_{11}, \psi_{20}, \psi_{21} \rangle$$

e ψ_{11} vale 1 em $(1,1)$ e zero nos outros nós.

Para verificar que esta "função" de $L^2(\Omega)$ é descontínua, avaliamos estas restrições no ponto $(1,1/2)$ em $K_1 \cap K_2$,

$$\psi_{11}/K_1(1, 1/2) = 3 \quad \text{ao passo que} \quad \psi_{11}/K_2(1, 1/2) = -1/2$$

No próximo capítulo iremos esboçar o uso desta metodologia na conceituação prática - iremos, então definir a discretização do domínio Ω e as famílias de Elementos Finitos aí definidas.

CAPÍTULO 3

O PROBLEMA DISCRETO

3.0. Introdução

Do ponto de vista da utilização do Método dos Elementos Finitos na resolução de Problemas Aproximados – no sentido descrito no primeiro capítulo, faz-se necessário escolher os triângulos ou retângulos (no caso de \mathbb{R}^2) ou os tetraedros ou paralelepípedos (no caso do \mathbb{R}^3) que irão se constituir nos elementos com que se discretiza o domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ no qual se procura aproximar uma dada solução $u \in V$.

Iremos, neste capítulo, iniciar a descrição do processo de discretizar Ω , discretização essa que nos permitirá construir o espaço V_h onde será obtida a solução aproximada $u_h \in V_h$, solução discreta do PMDN. A partir das funções de base (local) de cada elemento, montaremos as funções de base (global) que geram o espaço V_h . Iremos fazer isto com cada um dos elementos apresentados como exemplos no capítulo 2 e mostraremos que com elementos conhecidos obtemos inclusões $V_h \subseteq C^0(\bar{\Omega})$, mas com o novo elemento (não conforme) só podemos obter $V_h \subseteq L^2(\Omega)$.

Um outro exemplo de elemento não conforme é o quadrado e o cubo de Wilson [4],[5],[9]. Outros tipos de não conformidade são apresentados em [8].

3.1. Discretização do polígono $\bar{\Omega}$

Definição: Seja $\bar{\Omega}$ um polígono em \mathbb{R}^2 , uma discretização (ou triangulação) T_h de $\bar{\Omega}$ é uma partição $\{K_i\}_{i=1}^M$ de $\bar{\Omega}$, i.e. $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^M K_i$, com as seguintes características:
 $\forall i, j : 1 \leq i, j \leq M$,

(3.1.1) (i) K_i é um triângulo ou um quadrilátero;

(3.1.2) (ii) para $i \neq j$, $\overset{\circ}{K}_i \cap \overset{\circ}{K}_j = \phi_i^{(1)}$; e

(3.1.3) (iii) para $i \neq j$, $\bar{K}_i \cap \bar{K}_j$ ou é vazio, ou é um vértice comum ou um lado

⁽¹⁾ $\overset{\circ}{K}_i$ denota o interior de K_i no sentido topológico clássico.

comum.

A figura 1 mostra uma partição de $\bar{\Omega} = [0, a] \times [0, b]$ com as características próprias de uma discretização enquanto a figura 2 mostra uma situação imprópria.

Na figura 1, a interseção de dois elementos ou é vazia ou é um vértice comum ou é um lado comum. Isto permite, como veremos logo, montar as funções de base de V_h a partir das funções de base de cada elemento e com boas propriedades, como por exemplo continuidade que corresponde ao caso de elementos conformes do tipo Lagrange. Para elementos finitos do tipo Hermite consegue-se ainda continuidade de algumas derivadas das funções do V_h correspondente.

Na figura 2, um dos lados de alguns dos elementos não coincide exatamente com o lado de algum outro contíguo.

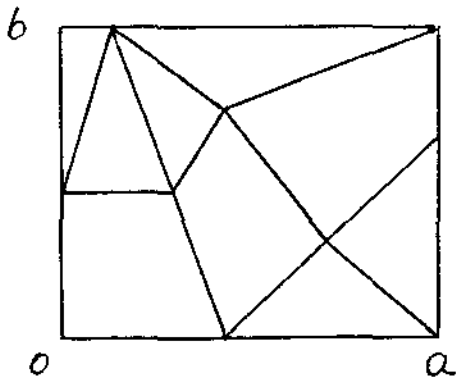


Figura 1 - Triangulação T_h de $\bar{\Omega}$.

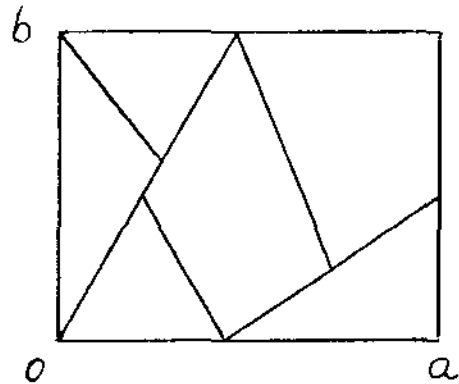


Figura 2 - Não triangulação de $\bar{\Omega}$.

Com uma dada discretização de $\bar{\Omega}$, dizemos que dois ou mais elementos da partição são adjacentes se têm um lado ou vértice comum.

Definimos o parâmetro h como sendo

$$(3.1.4) \quad h = \max_{K \in T_h} h_K \quad \text{onde} \quad h_K = \text{Diam}(K)$$

isto é, h_K é o maior dos lados no caso de triângulos, ou a maior das diagonais no caso de quadriláteros.

A cada elemento K , da discretização (e alguns nós neles) podemos associar um

elemento finito $(K_i, \Sigma_{K_i}, P_{K_i})$, e com ele, uma família de elementos F_h :

$$(3.1.5) \quad F_h = \{(K, \Sigma_K, P_K) / K \in T_h\}$$

Com uma dada triangulação T_h de $\bar{\Omega}$ e uma família de elementos F_h associada construímos o seguinte Espaço de Elementos Finitos

$$(3.1.6) \quad V_h = \{v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} \mid v_h/K \in P_K, \text{ para cada } K \in T_h\}.$$

Observamos de imediato que $V_h \subseteq L^2(\Omega)$, pois

$$\int_{\Omega} v_h^2 dx = \sum_{K \in T_h} \int_K (v_h/K)^2 dx < +\infty$$

onde v_h/K é univocamente definida dada a P_K -unisolvência de Σ_K .

A priori, na verdade, com uma dada discretização T_h de Ω , o espaço V_h definido acima é subespaço do espaço produto $\prod_{K \in T_h} P_K$, dado que as restrições $v_h/\partial K_1, v_h/\partial K_2$, onde K_1, K_2 são adjacentes, podem não coincidir no lado comum a K_1 e K_2 , i.e.:

$$V_h \subseteq \prod_{K \in T_h} P_K,$$

onde as "funções" $v_h = (v_K)_{K \in T_h} \in V_h$ em geral podem não ser funções no sentido usual do Análise clássica. Uma situação onde isto ocorre é com o elemento finito trabalhado no item 3.5 mais adiante. V_h é então definida como um espaço de funções polinomiais por partes (cf. (3.1.6)).

Se quisermos obter inclusões tais como

$$V_h \subseteq C^0(\bar{\Omega}), \quad V_h \subseteq C^1(\bar{\Omega}), \quad \text{etc.},$$

devemos observar algumas condições de compatibilidade nas fronteiras entre os elementos. Por exemplo, se dado dois elementos adjacentes quaisquer K_i, K_j , de uma triangulação T_h de Ω (com um lado comum)

$$\begin{aligned} v_i &= v_h/K_i, \quad v_j = v_h/K_j, \quad \text{e} \\ v_i/K^* &= v_j/K^*, \quad \text{onde } K^* = K_i \cap K_j. \end{aligned}$$

$\forall v_h \in V_h$, então as v_h são contínuas, $V_h \subseteq C^0(\bar{\Omega})$.

Dado que V_h consiste de funções polinomiais por partes podemos provar que

$$(3.1.7) \quad V_h \subseteq H^1(\Omega) \iff V_h \subseteq C^0(\bar{\Omega}).$$

O seguinte resultado pode ser encontrado em [4],[5],[6],[11].

1. Teorema. Suponhamos que $P_K \subseteq H^1(K)$, $\forall K \in T_h$ e que $V_h \subseteq C^0(\bar{\Omega})$, então $V_h \subseteq H^1(\Omega)$. Se além do mais, as funções de V_h são nulas na fronteira $\partial\Omega$, então $V_h \subseteq H_0^1(\Omega)$.

Se v_h for contínua na fronteira dos elementos, então a derivada Dv_h no sentido de distribuições existe e é contínua por partes (sobre cada elemento), é uma função polinomial, e, portanto, de quadrado integrável i.e.

$$(3.1.8) \quad Dv_h \in L^2(\Omega) \quad V_h \subseteq H^1(\Omega).$$

se $v_h(x) = 0, \forall x \in \partial\Omega$, então

$$\text{traço}(v_h) = v_h|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{e} \quad V_h \subseteq H_0^1(\Omega) \quad \square$$

Reciprocamente, se v_h não for contínua na fronteira dos elementos, a derivada Dv_h pode não existir como função de $L^2(\Omega)$ ⁽²⁾ e $v_h \notin H^1(\Omega)$. Assim (3.1.7) é verdadeira.

3.2. A construção de um espaço $V_h \subseteq C^0(\bar{\Omega})$ com triângulos do tipo 1

Nos ensaios numéricos deste trabalho, o domínio Ω sempre será um retângulo $[0, a] \times [0, b]$, veja figura 3a.

Seja T_h uma triangulação de $\bar{\Omega}$ formada de triângulos do tipo 1.

Para cada $K \in T_h$, $P_K = P_1(K)$, onde

$$(3.2.1) \quad P_1(K) = \{v|_K : v = a + bx + cy, \text{ com } a, b, c, \in \mathbb{R}\}$$

$$(3.2.2) \quad N_h = \bigcup_{K \in T_h} N_K.$$

N_h denota o conjunto de nós da triangulação T_h de Ω .

⁽²⁾ Veja, por exemplo [13].

Definamos

$$(3.2.3) \quad V_h = \{v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} \mid v|_K \in P_1, \text{ para cada } K \in T_h\}.$$

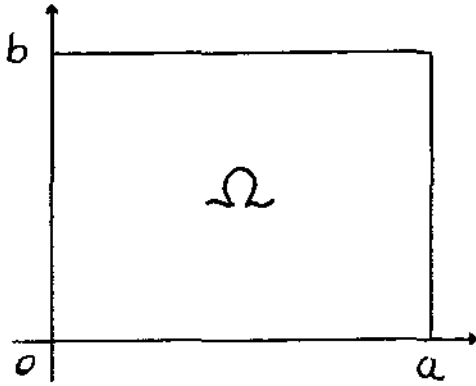


Figura 3a

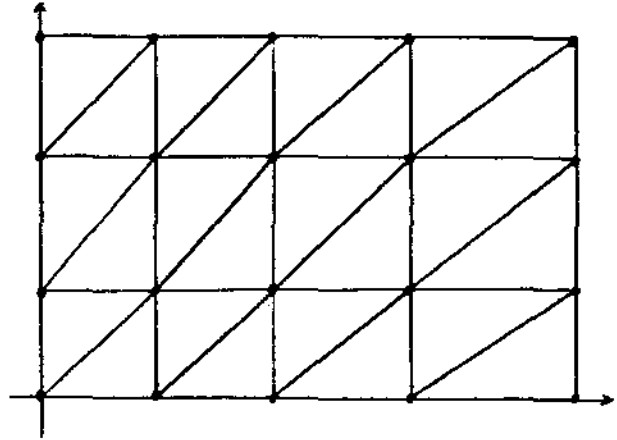


Figura 3b - Discretização de Ω com triângulos do tipo 1

Dado que em cada elemento $K \in T_h$, uma função $p \in P_1$ fica completamente definida especificando os valores de p nos nós de K , ou seja nos vértices de cada triângulo K , tem-se que uma função $v_h \in V_h$ ficará univocamente definida especificando todos os valores que assume v_h nos vértices de todos os triângulos de T_h , i.e. em N_h . Isto, por si só, garante que $v_h \in C^0(\bar{\Omega})$.

De fato, dados dois elementos adjacentes K_i e K_j (com um lado comum) de T_h , seja $K' = K_i \cap K_j = [a_r, a_s]$ a porção de reta que une a_r com a_s , então denotando por $v_i = v_h|_{K_i}$ e $v_j = v_h|_{K_j}$, verifica-se que tanto v_i quanto v_j são pedaços de retas definidas sobre o lado comum K' , e, pela construção de v_h , como $v_i(a_k) = v_j(a_k) \quad \forall k = r, s$, temos por tanto $v_i|_{K'} \equiv v_j|_{K'}$, mostrando a continuidade de v_h sobre $K_i \cap K_j$.

Para especificar uma única função $v_h \in V_h$ contínua, temos usado o que chamamos, por extensão "os graus de liberdade Σ_h " do espaço V_h :

$$(3.2.4) \quad \Sigma_h = \{v(a_j) \mid a_j \in N_h\}.$$

De fato, $\Sigma_h = \bigcup_{K \in T_h} \Sigma_K$, pois os graus de liberdade de elementos adjacentes

associados a um nó comum, no presente caso, coincidem, e de fato esta extensão é possível.

$$v_i(a_r) = v_j(a_r)$$

$$v_i(a_s) = v_j(a_s)$$

$$v_i/K \equiv v_j/K$$

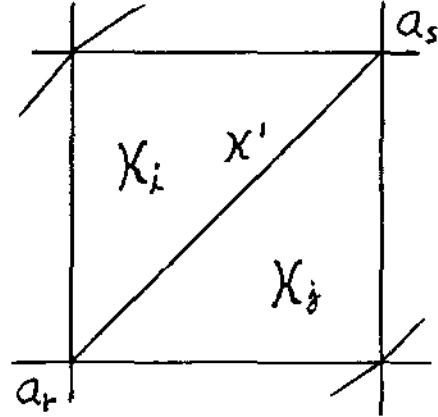


Figura 4

Podemos, então, definir

$$(3.2.5) \quad V_h = \{v_h : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} / \Sigma_h \text{ é especificado e } v_h/K \in P_1(K), \forall K \in T_h\}.$$

Toda função v_h que seja contínua e plana sobre cada triângulo $K \in T_h$ está em V_h , bastando - para verificar esta afirmação - definir V_h por

$$(3.2.6) \quad V_h = \{v \in C^0(\bar{\Omega}) \mid v/K \in P_1(K), \forall K \in T_h\}. \quad \square$$

Observações.

1 Se $\varphi_{i_h} \in \Sigma_h$ é o grau de liberdade associado ao nó a_i de uma discretização T_h , e se $\varphi_{i_h} : C^\infty(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que: $\varphi_{i_K} = \varphi_{i_h}/K$ para cada K que tenha a_i por nó, e onde $\varphi_{i_K} : C^\infty(K) \rightarrow \mathbb{R}$ é o grau de liberdade de Σ_K associado ao nó a_i ; então faz sentido a extensão

$$(3.2.7) \quad \Sigma_h = \bigcup_{K \in T_h} \Sigma_K$$

isto é, a extensão (3.2.7) é válida desde que os graus de liberdade para cada K sejam escolhidos de tal forma que eles não mudem de um elemento para outro. Isto é óbvio para graus de liberdade do tipo Lagrange mas não para graus de liberdade do tipo Hermite. Uma situação onde esta extensão não é possível é dado no triângulo de

Hermite do tipo 3 em [4]. Neste caso a derivada (dada pelo grau de liberdade) muda de direção de um triângulo para o imediato adjacente.

2 Em se tratando de Elementos Finitos do tipo Lagrange podemos falar, sem ambigüidade, da função de base relativa a um determinado nó, o que não é o caso para Elementos Finitos do tipo Hermite, onde freqüentemente a cada nó é associado mais de um grau de liberdade, como valor da função e algumas derivadas dela, avaliadas no mesmo nó.

Construção das funções Geradoras (Base) de V_h

Tendo caracterizado o espaço V_h , iremos agora exibir uma base para V_h .

Para definir uma base de V_h basta definir, como para elementos, funções ψ_i de V_h , $1 \leq i \leq N$, com

$$\psi_i(a_j) = \delta_{ij} \quad 1 \leq j \leq N.$$

Dado, então, $v_h \in V_h$ podemos escrever

$$v_h(x) = \sum_{j=1}^N v_h(a_j) \psi_j(x).$$

Ambas as expressões coincidem no conjunto N_h de nós da triangulação T_h .

As ψ_i 's são linearmente independentes:

De fato, se

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \psi_i(x) = 0 \quad , \quad \forall x \in \bar{\Omega}. \quad \text{então,}$$

escolhendo $x = a_j$, temos $\sum_{i=1}^N \alpha_i \psi_i(a_j) = \alpha_j = 0$, $1 \leq j \leq N$, concluindo:

$$(3.2.8) \quad V_h = \langle \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N \rangle .$$

Este tipo de base tem a vantagem de ter pequenos suportes, se $\{K_i\}_{i=1}^S$ é o conjunto de triângulos que tem a_j por nó comum, então o suporte de ψ_j é dado por

$$\text{Supp}(\psi_j) = \bigcup_{i=1}^S K_i .$$

Se a_j não é nó do triângulo K , então $\forall a_i \in N_K, \psi_j(a_i) = 0$, e, como $\psi_j|_K \in P_1 \Rightarrow \psi_j|_K \equiv 0$, o polinômio zero ou polinômio nulo.

Se $a_j \in K$, então, por definição

$$\psi_j(a_j) = 1 \quad \text{e} \quad \psi_j(a_k) = 0, \quad \text{para} \quad a_k \neq a_j, \quad \text{com} \quad \psi_j|_K \in P_1.$$

As figuras 5 e 6 ilustram funções de base (base global) de V_h para uma discretização T_h de Ω feita com triângulos do tipo 1.

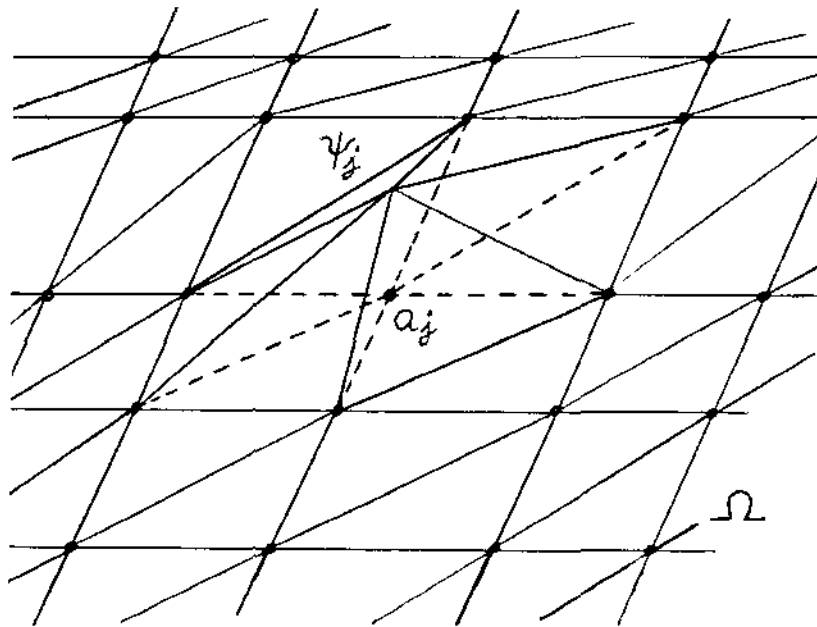


Figura 5 - Função base para um nó vértice interior a Ω .

O fato das funções da base de V_h terem pequenos suportes acarreta que a matriz resultante no problema discreto seja esparsa, e com uma adequada numeração dos nós a matriz resulta ser banda.

Para clarear estas idéias analisemos o seguinte exemplo, decorrente da equação de Dirichlet homogênea.

Da formulação clássica,

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{em} \quad \Omega \quad \text{com} \\ u|_{\Gamma} &= 0, \end{aligned}$$

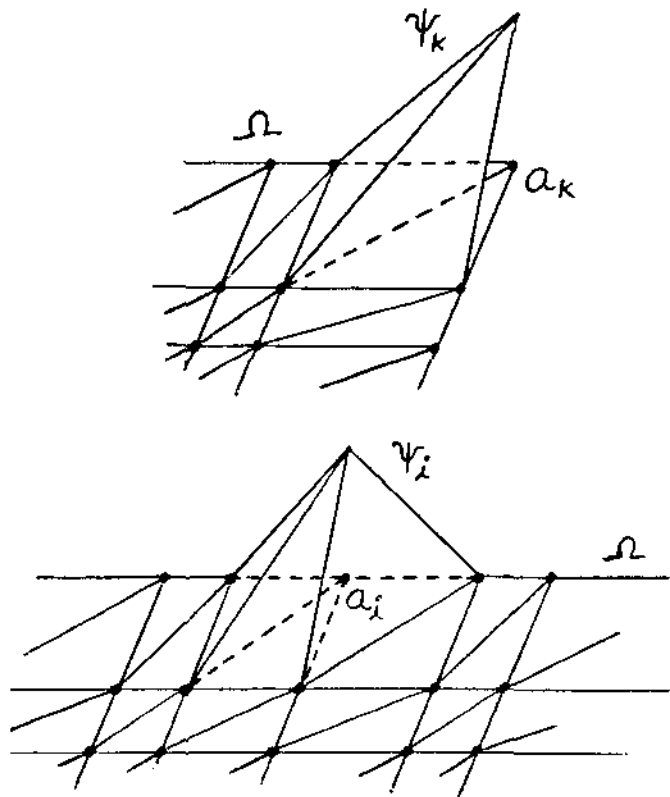


Figura 6 - Funções base para nós da fronteira. a_i , a_k .

obtem-se a formulação variacional

$$(3.2.9) \quad \int \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dy \, dx = \int \int_{\Omega} f v \, dy \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Fazendo, com uso do Método de Galerkin, uma aproximação deste problema, isto é substituindo em (3.2.9)

$$v = \psi_i \quad \text{e} \quad u = \sum_{j=1}^N x_j \psi_j \quad \text{para cada } i: 1 \leq i \leq N,$$

obtem-se a i -ésima equação do $N \times N$ sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{f}$, (1.6.11) a (1.6.13),

$$\sum_{j=1}^N x_j \int \int_{\Omega} \nabla \psi_j \cdot \nabla \psi_i \, dy \, dx = \int \int_{\Omega} f \psi_i \, dy \, dx, \quad \psi_i \text{ função de base de } V_h.$$

onde

$$f_i = \int \int_{\Omega} f \psi_i dy dx$$

$$a_{ij} = \int \int_{\Omega} \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j dy dx = \int \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) dy dx, \text{ temos}$$

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N} \quad \text{e} \quad \mathbf{f} = (f_i)_{i=1}^N \quad \text{com}$$

$$a_{ij} = \int \int_{\Omega} \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j dy dx = \int \int_{\text{sup } \psi_i \cap \text{sup } \psi_j} \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j dy dx = \sum_{K_l \subseteq \text{sup } \psi_i \cap \text{sup } \psi_j} \int \int_{K_l} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right) dy dx;$$

onde $\psi_i/K_l = \varphi_i$, $\psi_j/K_l = \varphi_j$, são as funções de base de K_l associadas aos nós a_i e a_j em K_l , respectivamente, e, sempre que $\text{sup } \psi_i \cap \text{sup } \psi_j = \emptyset$, tem-se $a_{ij} = 0$.

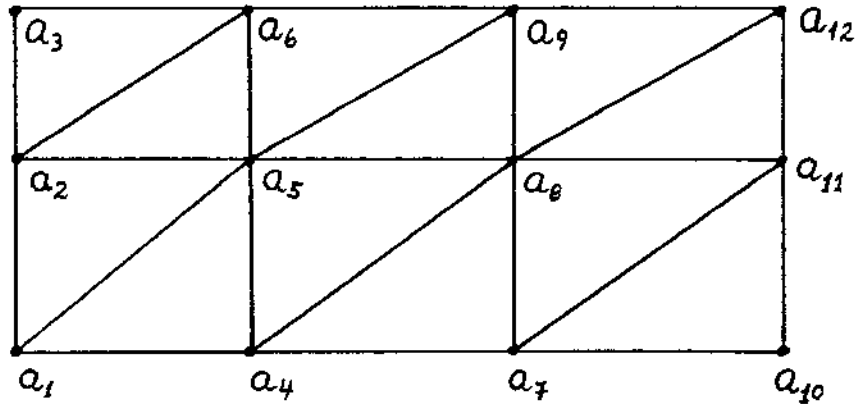


Figura 7

Os valores não nulos da matriz (de rigidez) A só acontecem quando os suportes de ψ_i e ψ_j tem elementos em comum, no caso da discretização esboçada na figura 7, com 12 elementos e 12 nós (apenas 2 nós interiores a Ω), fixando $k, 1 \leq k \leq 12$

$$a_{kj} = (\nabla \psi_k | \nabla \psi_j) = 0 \quad \text{sempre que} \quad |k - j| > 4,$$

i. e. sempre que $k - 5 \geq j \geq k + 5$, visto que $\text{sup } \psi_k \cap \text{sup } \psi_j = \emptyset \quad \forall j : |k - j| \geq 5$.

Quando $j : |k - j| < 5$, e $\text{sup } \psi_k \cap \text{sup } \psi_j \neq \emptyset$, a_{kj} pode ser não nulo, obtendo-se uma matriz A 12×12 de banda 5. Neste caso, a dimensão de V_h é 12.

As características do sistema linear dependem não só da discretização, mas também da escolha da numeração dos nós. No mesmo caso acima, mas com a nova enumeração, a estrutura da matriz piora, pois valores das entradas $a_{1,10}; a_{1,12}; a_{2,12}$ etc., não são necessariamente nulos (figura 9).

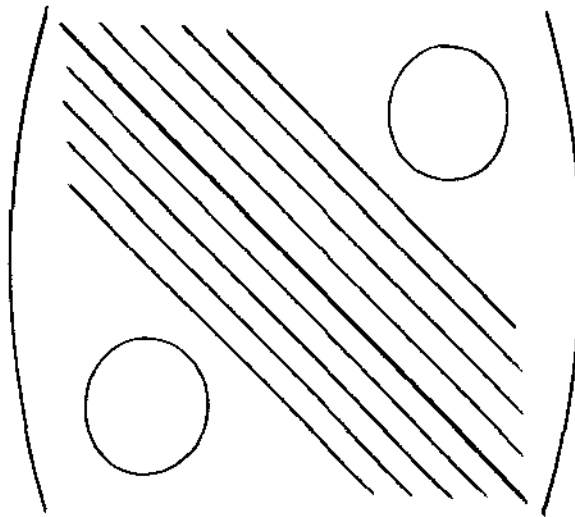


Figura 8 - Matriz A de banda 5.

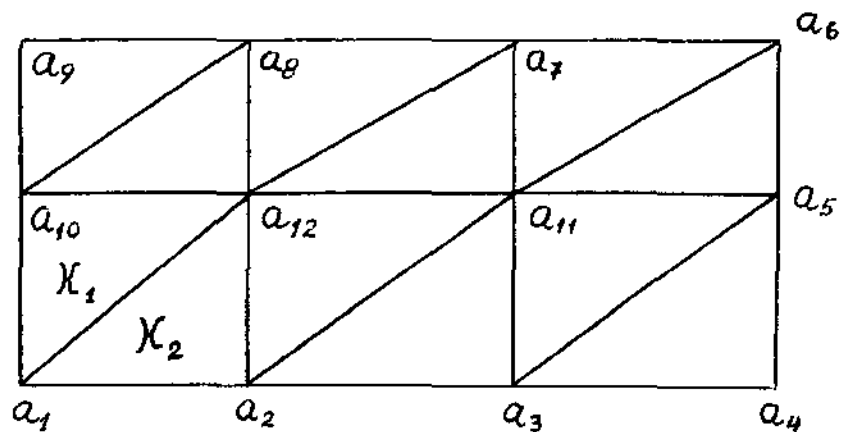
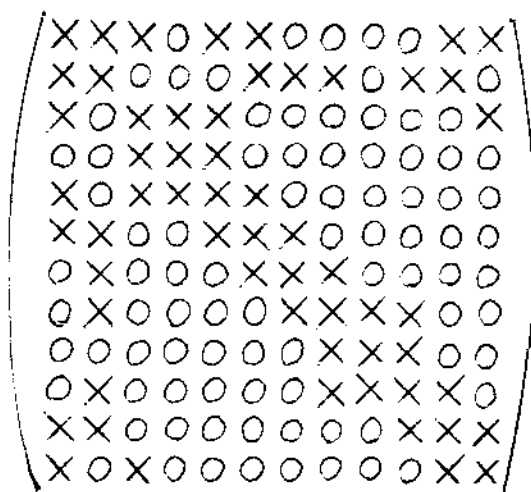


Figura 9

O sistema linear terá uma matriz de banda 12, pois como $\text{sup } \psi_1 \cap \text{sup } \psi_{12} = K_1 \cup K_2$, então

$$a_{1,12} = \int \int_{K_1 \cup K_2} \nabla \psi_1 \cdot \nabla \psi_{12} dy dx \neq 0.$$

A matriz A , muito embora tenha tantos elementos nulos neste caso quanto a matriz do caso anterior, não terá o aspecto indicado na figura 8, mais o da figura abaixo



X: possíveis valores não nulos

O: valores nulos. Interseção vazia dos suportes das bases.

Figura 10

No Problema Misto de Dirichlet-Neumann PMDN precisamos que a solução seja nula na parte Γ_0 da fronteira $\partial\Omega$. Exigimos então que as funções do espaço V_h satisfizessem

$$(3.2.10) \quad V_h \subseteq \{v \in H^1(\Omega) | v|_{\Gamma_0} = 0\}$$

ora, como qualquer $v_h \in V_h$ é contínua, então $v_h|_{\Gamma_0} = 0$ vale pontualmente, i.e.

$$(3.2.11) \quad v_h(x) = 0 \quad \forall x \in \Gamma_0$$

Para construir uma base de V_h , basta excluir as funções de base associadas aos

nós da fronteira pertencentes a Γ_0 , pois desta forma tem-se:

$$(3.2.12) \quad \forall i, \psi_i(x_0) = 0, \forall x_0 \in \Gamma_0, \text{ e}$$

$$(3.2.13) \quad u_h(x) = \sum_{i=1}^N u_h(a_i) \psi_i(x) \text{ satisfaz}$$

$$(3.2.14) \quad u_h(x) = 0 \quad \forall x \in \Gamma_0.$$

3.3 Construção de $V_h \subseteq C^0(\bar{\Omega})$ com retângulos do tipo 1. Funções de Base

Seja T_h uma discretização de $\bar{\Omega}$ formada com retângulos do tipo 1 (fig 11b), para os casos em que $\bar{\Omega} = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$.

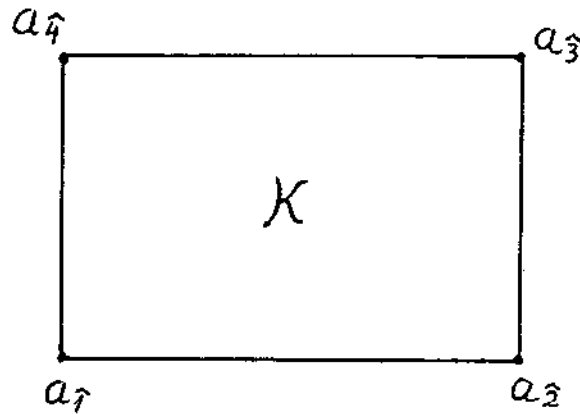


Figura 11a - Retângulo do tipo 1

Na notação adotada neste trabalho, teremos

$$(3.3.1) \quad P_K = Q_1 = \{a + bx + cy + dxy, (x, y) \in K\};$$

$$(3.3.2) \quad \Sigma_h = \{v(a_j) | a_j \in N_h, j = 1, 2, \dots, N\}.$$

onde N_h é o conjunto de nós da discretização T_h e N o número desses nós:

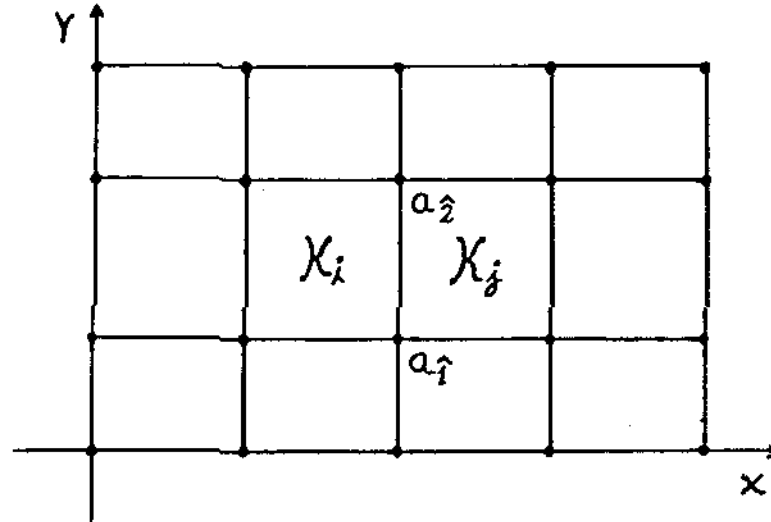


Figura 11b

$$(3.3.3) \quad N_h = \bigcup_{K \in T_h} N_K; \text{ e}$$

$$(3.3.4) \quad V_h = \{v_h : \Omega \rightarrow \mathbb{R} | v_h|_K \in Q_1, K \in T_h\}$$

Para verificar que espaços de elementos finitos assim construídos estão em $C^0(\bar{\Omega})$, sejam K_i, K_j dois elementos adjacentes (que tem lado comum) e $v_h \in V_h$ tq Σ_k é especificado, i.e. são dados os $\alpha_j \in \mathbb{R}, 1 \leq j \leq N : v_h(a_j) = \alpha_j$ então:

$$v_\gamma = v_h|_{K_\gamma} = a_\gamma + b_\gamma x + c_\gamma y + d_\gamma xy \quad , \gamma = i, j.$$

Como os retângulos tem lados paralelos aos eixos coordenados, nesses lados ou $x = \text{constante}$ ou $y = \text{constante}$. Para $v_\gamma|_{K_i \cap K_j}, \gamma = i, j$, então, tanto v_i quanto v_j são porções de retas definidas sobre $K_i \cap K_j$ e coincidem nos 2 nós do lado comum a K_i e K_j , e logo

$$(3.3.5) \quad v_i|_{K_i \cap K_j} \equiv v_j|_{K_i \cap K_j}$$

e v_h é contínua na intersecção dos elementos. Podemos concluir que:

Se $v_h/K \in Q_1 \quad \forall K \in T_h$, então $v_h \in V_h$ é contínua $\Leftrightarrow \Sigma_h$ for especificado.

Observação:

Notemos que esta última situação não seria verdadeira sem contar com a $Q_1(K)$ -unisolvência de Σ_K para cada $K \in T_h$ e sem ser possível a extensão dos graus locais de liberdade Σ_K aos globais Σ_h .

Podemos, finalmente, definir:

$$(3.3.6) \quad V_h = \{v_h : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} \mid \Sigma_h \text{ é especificado e } v_h/K \in Q_1 \quad \forall K \in T_h\}$$

ou, ainda:

$$(3.3.7) \quad V_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) \mid v_h/K \in Q_1, \quad \forall K \in T_h\}.$$

As funções da base de V_h

Como em parágrafos anteriores uma função de base ψ_i de V_h é definida por

$$(3.3.8) \quad \psi_i(a_j) = \delta_{ij} \quad a_j \in N_h \quad 1 \leq i, j \leq N$$

com $\psi_i/K \in Q_1$, $\forall K \in T_h$.

Onde, para $v_h \in V_h$,

$$(3.3.9) \quad v_h(x) = \sum_{i=1}^N v_h(a_i) \psi_i(x).$$

As figuras a seguir caracterizam visualmente estas ψ_i de V_h .

As funções de base global (i.e. do espaço V_h) podem ser obtidas das funções de base local, ou seja, das funções de base de cada elemento. Tomando como exemplo o presente caso.

Sejam: $\{K_i\}_{i=1}^S$ o conjunto de elementos em T_h que contem o nó a_j ; φ_{K_i} a função de base do elemento K_i associada ao nó a_j i.e.:

$$\varphi_{K_i}(a_j) = 1 \quad \text{e} \quad \varphi_{K_i}(a_k) = 0 \quad \text{para} \quad a_k \neq a_j \quad \forall a_k \in N_{K_i} \text{ e } \varphi_{K_i} \in Q_1(K_i).$$

Defina-se

$$\psi_j = \begin{cases} 0 & \text{em } K \in T_h \setminus \{K_i\}_{i=1}^S \\ \varphi_{K_i} & 1 \leq i \leq S. \end{cases} \quad (3)$$

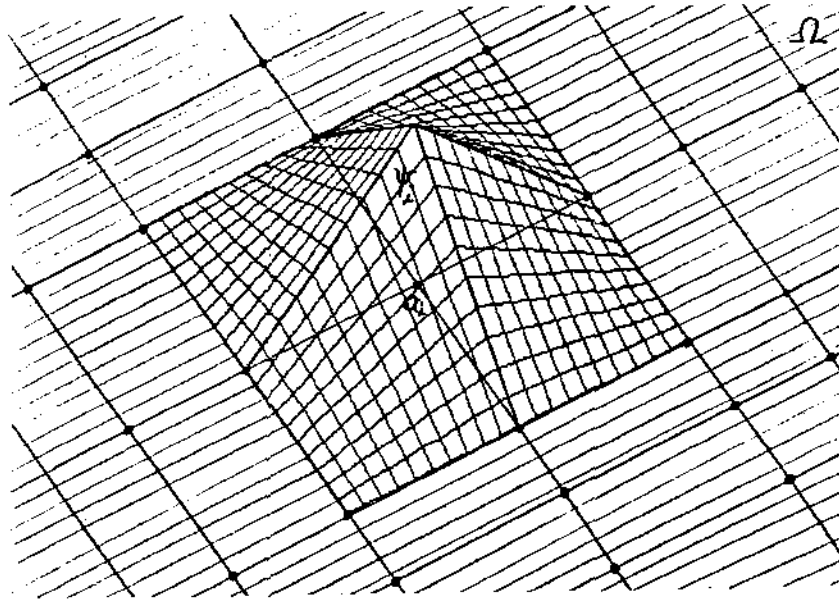


Figura 12 - Função base para o nó interior a_i .

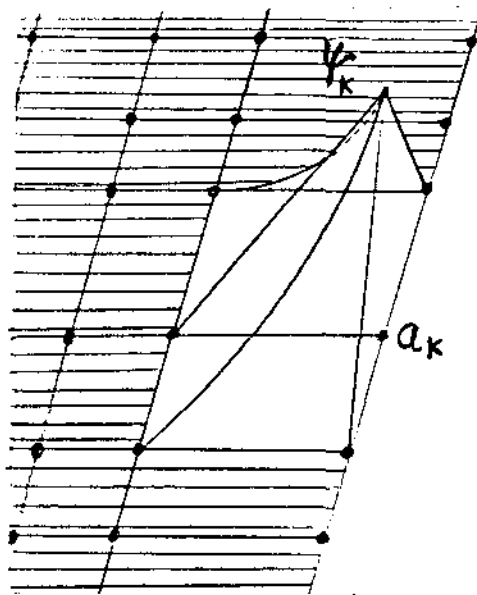


Figura 13

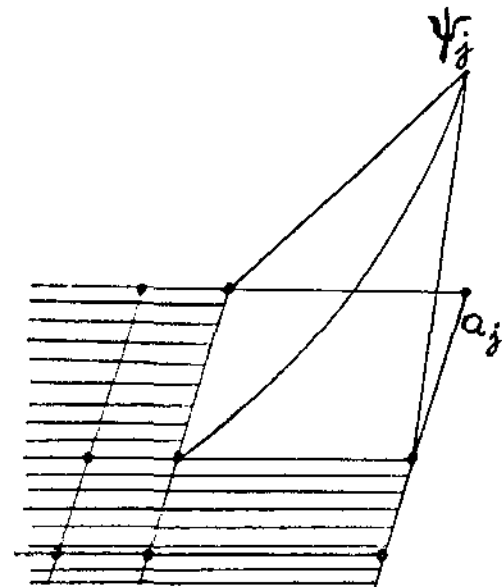


Figura 14

Funções base para nós na fronteira a_k, a_j

⁽³⁾o sinal "\ " aqui utilizado indica - como é usual - o "complementar relativo a".

Então $\psi_j \in V_h$ e

$$\psi_j(a_i) = \delta_{ij} \quad 1 \leq i \leq N, \quad ,$$

i.e. ψ_j é a função de base de V_h associada ao nó a_j :

$$\psi_j(a_j) = 1 \quad \psi_j(a_i) = 0 \quad i \neq j, \quad 1 \leq i \leq N, \quad \text{e } \psi_j|_K \in Q_1(K) \quad \forall K \in T_h.$$

3.4 Construção de $V_h \subseteq C^0(\bar{\Omega})$ com triângulos de tipo 2. Funções da Base geradora de V_h .

Seja T_h uma triangulação de $\bar{\Omega}$ feita com triângulos de tipo 2. isto é:

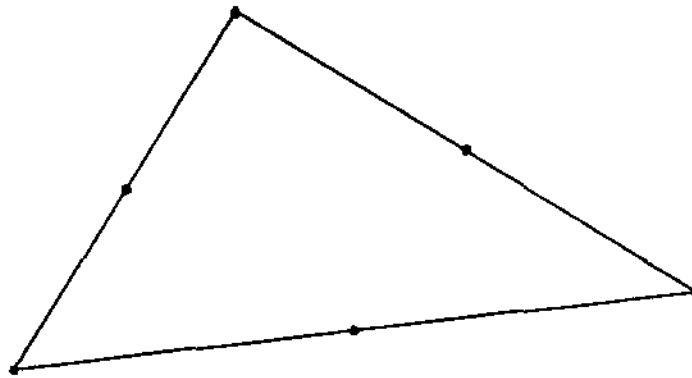


Figura 15 - Triângulo de Lagrange do tipo 2.

Teremos:

$$(3.4.1) \quad \Sigma_h = \{v(a_j)/a_j \in N_h\} = \bigcup_{K \in T_h} \Sigma_K;$$

$$(3.4.2) \quad N_h = \bigcup_{K \in T_h} N_K; \quad \text{e}$$

$$(3.4.3) \quad \Sigma_K = \{v(a_j)/a_j \in N_K\}.$$

Ainda

$$(3.4.4) \quad P_K = P_2(K) = \{a + bx + cy + dxy + ex^2 + fy^2, (x, y) \in K\},$$

com $\dim P_2 = 6 = \#\Sigma_K$.

$$(3.4.5) \quad V_h = \{v_h : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} | v_h|_K \in P_2, \forall K \in T_h\}$$

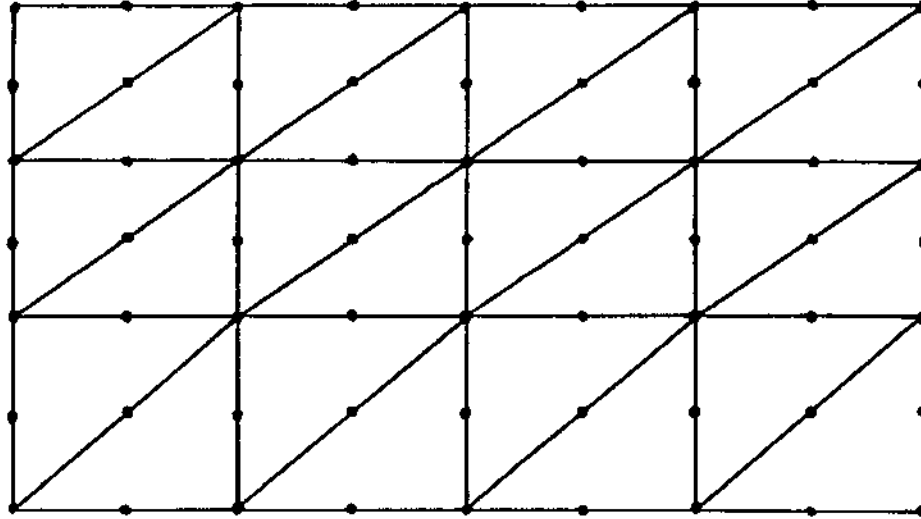


Figura 16 - Discretização T_h de Ω com triângulos do tipo 2.

Como antes, para construir uma função contínua $v_h \in V_h$ definida sobre Ω , basta atribuir valores aos graus de liberdade Σ_h de V_h i.e.

$$v_h(a_j) = \alpha_j \in \mathbb{R} \quad 1 \leq j \leq N,$$

e definir v_h/K pela $P_2(K)$ -unisolvência de Σ_K .

Sejam K_i e K_j dois elementos com um lado comum $K_i \cap K_j = K' = [a_r, a_s], r \neq s$, na figura 17 por exemplo, poderia ser $[a_{\hat{4}}, a_{\hat{3}}]$ ou o segmento que liga $a_{\hat{1}}$ e $a_{\hat{3}}$.

Seja $v_h \in V_h$ então

$$(3.4.6) \quad v_{\hat{1}} = v_h/K_i = a_{\hat{1}} + b_{\hat{1}}x + c_{\hat{1}}y + d_{\hat{1}}xy + e_{\hat{1}}x^2 + f_{\hat{1}}y^2 \quad v_{\hat{3}} = v_h/K_j \quad (4)$$

Na intersecção dos elementos, tem-se : $x = \text{constante}$ ou $y = \text{constante}$ ou $y = a + bx$; logo as $v_{\hat{1}}, v_{\hat{3}}$ variam quadraticamente nas intersecções dos elementos, coincidindo em três pontos, a saber, os nós de cada elemento adjacente ao longo da intersecção; assim, por exemplo, em $K_i \cap K_j$,

$$(3.4.7) \quad v_{\hat{1}}(a_k) = v_{\hat{3}}(a_k) \quad \text{para} \quad k = \hat{1}, \hat{3}, \hat{9}.$$

(4) Está sendo aqui utilizada a notação "Λ" para indicar uma numeração local dos nós.

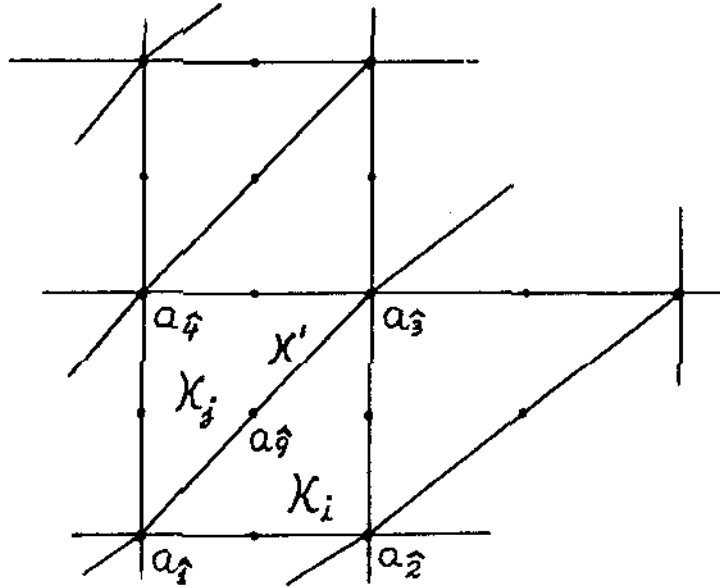


Figura 17

Portanto, como ambas funções v_i, v_j são quadráticas em apenas uma variável (sobre $[a_1, a_3]$) e coincidem em 3 pontos (uma quadrática em uma variável é univocamente definida por três graus de liberdade), v_h é contínua em $[a_1, a_3]$ e deste modo em todas as intersecções dos elementos de T_h sendo:

$$V_h \subseteq C^0(\bar{\Omega}).$$

Por outro lado seja $v \in C^0(\bar{\Omega})$ t.q. $v|_K \in P_2 \quad \forall K \in T_h$, definamos $v_h \in V_h$ por

$$v_h(a_i) = v(a_i) \quad \text{para cada } a_i \in N_h,$$

e $v_h|_K \in P_2(K)$ sendo determinada pela $P_2(K)$ -unisolvência de Σ_K . Se K_1, K_2 tem um lado comum $K' = K_1 \cap K_2$ e a_1, a_2, a_3 são os nós em K' , então por definição,

$$v_h(a_i) = v(a_i) \quad i = 1, 2, 3.$$

Portanto $v_h|_{K'} = v|_{K'}$ e $v_h|_K = v|_K$; concluindo,

$$v_h \equiv v \quad \text{sobre } \bar{\Omega}.$$

Assim podemos definir,

$$(3.4.8) \quad V = \{v \in C^0(\bar{\Omega}) \mid v_h/K \in P_2, \forall K \in T_h\}.$$

Funções base de V_h

Para $a_j \in N_h$ e $1 \leq i \leq N$ $\psi_i(a_j) = \delta_{ij}$ define uma base de V_h :

$$(3.4.9) \quad v_h(x) = \sum_{j=1}^N v_h(a_j) \psi_j(x),$$

onde ψ_j/K , com $a_j \in N_K$, é a função de base de $P_2(K)$ associada ao nó $a_j \in N_K$, $\forall K \in T_h$ ou

$$\varphi_{j/K}(a_i) = \delta_{ij} \quad a_i \in N_K.$$

As figuras abaixo caracterizam visualmente as funções de base de V_h para discretizações feitas com este elemento.

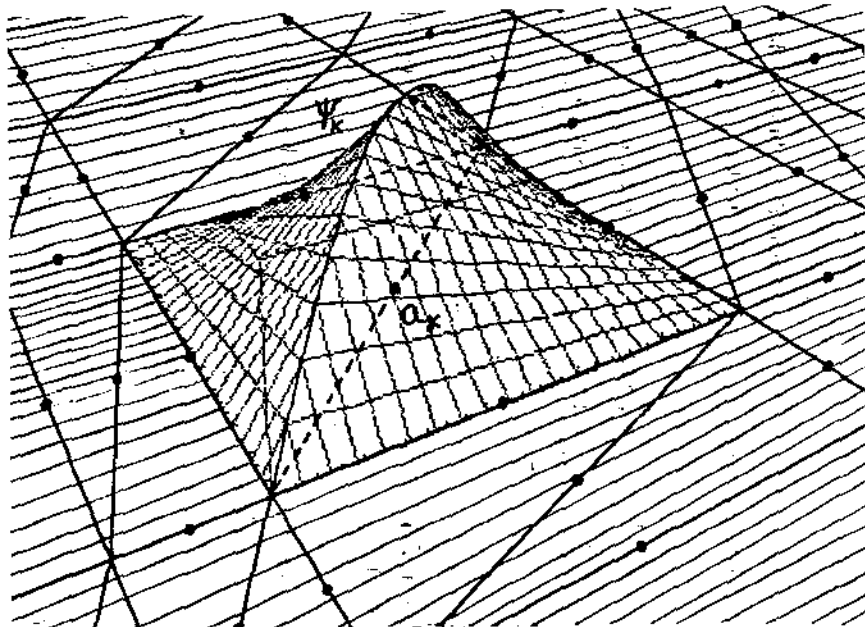


Figura 18 - Função base correspondendo ao nó ponto médio do lado de um elemento.

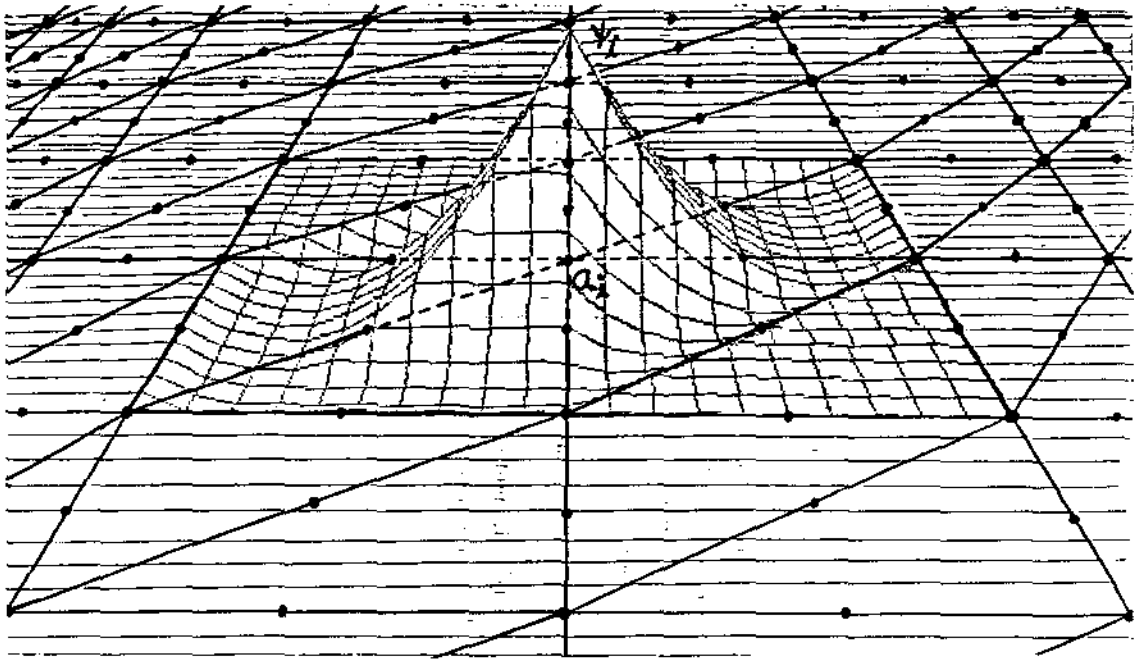


Figura 19 - Função base global correspondente a um nó vértice interior a Ω .

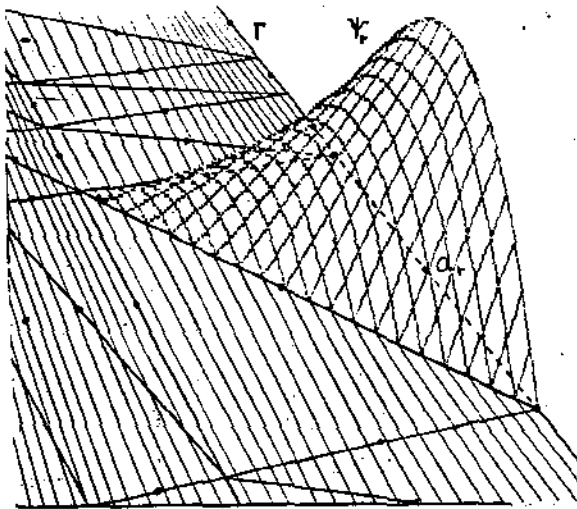


Figura 20

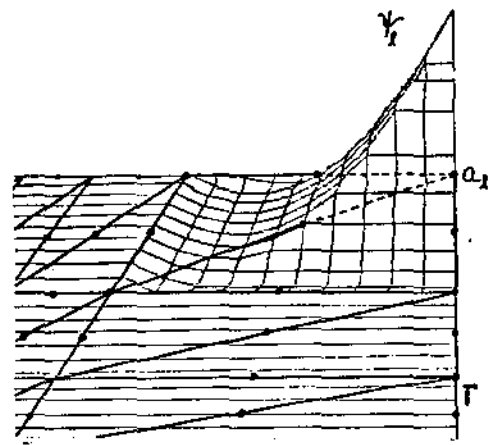


Figura 21

As figuras 20 e 21 são funções base associadas a nós ponto médio do lado e vértice do triângulo respectivamente na fronteira $\Gamma = \partial\Omega$.

3.5. Construção de um Espaço V_h com um Elemento Alternativo

$\bar{\Omega}$ continua sendo um retângulo com um dos vértices (sem risco de perda de generalidade) na origem, $\bar{\Omega} = [0, a] \times [0, b]$.

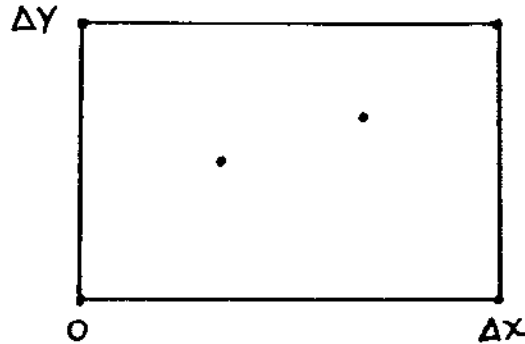


Figura 22

Geométricamente – veja figura 22 – os nós relativos a este novo elemento se localizam nos quatro vértices: $(0, 0)$, $(\Delta x, 0)$, $(\Delta x, \Delta y)$, $(0, \Delta y)$. e também no interior, em disposição assimétrica

$$\left(\frac{\Delta x}{3}, \frac{\Delta y}{2}\right) \text{ e } \left(\frac{2\Delta x}{3}, \frac{2\Delta y}{3}\right).$$

com 6 graus de liberdade, o espaço a ser construído terá funções que, no interior de cada elemento, serão da forma:

$$(3.5.1) \quad a + bx + cy + dxy + ex^2 + fy^2 .$$

isto é, $P_K = P_2$.

Na nomenclatura usual, para completar a definição para a construção de um espaço V_h com este elemento, será necessário caracterizar ainda N_h e Σ_h , como antes

$$(3.5.2) \quad N_h = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} N_K ,$$

$$(3.5.3) \quad \Sigma_h = \{v(a_j) \mid a_j \in N_h\}.$$

Os nós da malha, indicados localmente acima, compõem o conjunto N_h , conforme indicado na figura 23.

O espaço V_h para este elemento é dado por

$$(3.5.4) \quad V_h = \{v_h : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} \mid v_h|_K \in P_2, \forall K \in T_h\}.$$

Já foi visto que $V_h \subset L^2(\Omega)$, mas no presente caso, $V_h \not\subset C^0(\bar{\Omega})$, como veremos mais adiante. Esta última restrição faz com que V_h não seja subespaço de V , (1.5.1), (3.1.7). Para definir funções base de cada elemento, iremos proceder da seguinte maneira:

Sejam K_1 e K_2 elementos genéricos conforme indicado na figura 24, e seja \widehat{K} um elemento de referência de lados unitários e nós internos em $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ e $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, com funções de base local identificadas por $\widehat{\phi}_i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

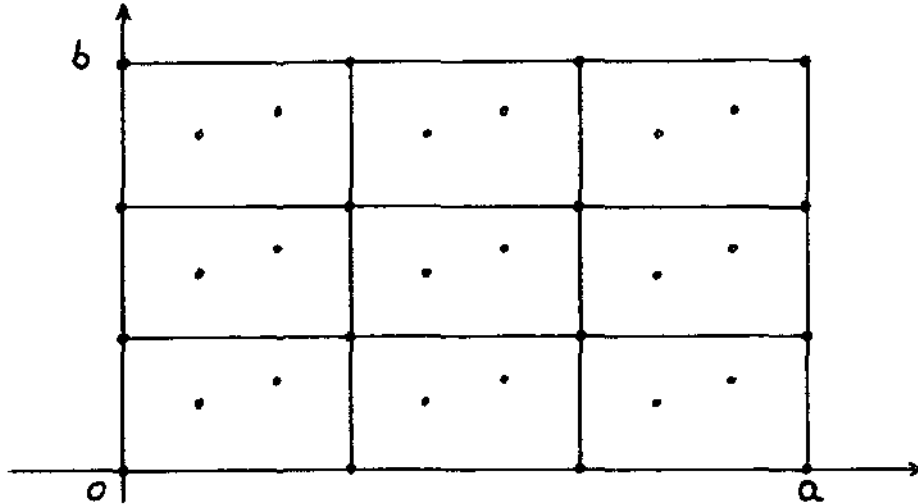


Figura 23 - Discretização T_h de Ω composta por retângulos do tipo alternativo

Definindo-se a transformação linear $\sigma_{K_1} : K_1 \rightarrow \widehat{K}$ de modo que

$$(3.5.5) \quad \sigma_{K_1}(a_r) = \widehat{a}_r$$

onde os a_r e os \widehat{a}_r são, respectivamente os 6 nós de K_1 e de \widehat{K} , i.e.:

$$(3.5.6) \quad \sigma_{K_1}(x, y) = \left(\frac{x-a}{c-a}, \frac{y-b}{d-b} \right).$$

Pode-se definir as funções ϕ_i^1 da base local de K_1 pela composição

$$(3.5.7) \quad \phi_i^1 = \widehat{\phi}_i \circ \sigma_{K_1}, \quad i = 1, 2, \dots, 6.$$

Analogamente, considerando o elemento identificado como K_2 na figura 24, as funções da base local para este elemento serão:

$$\phi_i^2 = \hat{\phi}_i \circ \sigma_{K_2}, \quad i = 1, 2, \dots, 6.$$

Dada uma função $v_h \in V_h$ teremos $v_1 = v_h|_{K_1}$ e $v_2 = v_h|_{K_2}$ dadas (localmente) por:

$$(3.5.8) \quad v_1 = \sum_{a_i \in N_{K_1}} v_h(a_i) (\hat{\phi}_i \circ \sigma_{K_1})$$

e

$$(3.5.9) \quad v_2 = \sum_{a_\ell \in N_{K_2}} v_h(a_\ell) (\hat{\phi}_\ell \circ \sigma_{K_2})$$

respectivamente.

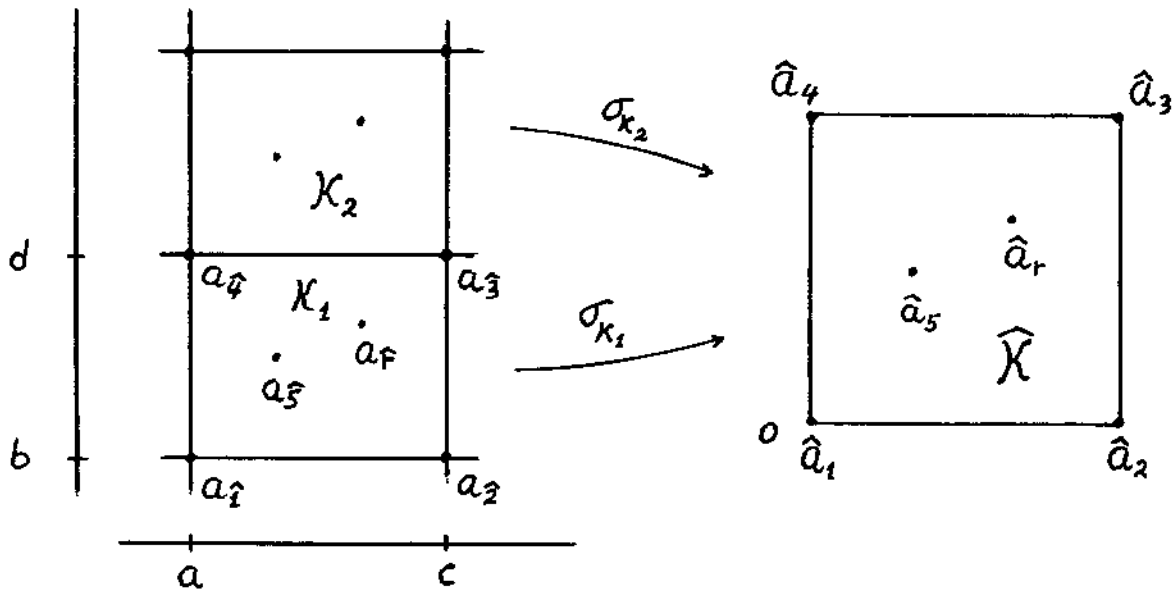


Figura 24

Um fator que irá diferenciar este novo tipo de Elemento Finito dos anteriormente mencionados é que não temos a inclusão do V_h em $C^0(\bar{\Omega})$. Como já vimos no final do capítulo 2 com um exemplo que, $v_1|_{K_1 \cap K_2} \neq v_2|_{K_1 \cap K_2}$. Isto vem do fato de que:

Embora cada $v_h \in V_h$ seja geralmente determinada de modo global especificando os valores que assume nos graus de liberdade global – e, sendo, sobre cada retângulo, um polinômio do segundo grau, será de se esperar a descontinuidade, ainda mais porque, considerando como $\{K_r\}$ o conjunto de elementos que tem certo nó genérico a_k como nó comum, e sendo v_{K_r} o grau de liberdade ($v_{K_r} \in \Sigma_{K_r}$) do elemento K_r , associado a esse nó, temos – ver figura 25:

$$(3.5.10) \quad v_{K_i}(a_k) = v_{K_j}(a_k), \quad \text{quaisquer } K_i, K_j \in \{K_r\},$$

onde $v_h|_{K_r}$ é univocamente definida pela $P_2(K_r)$ -unisolvência de Σ_{K_r} , isto é, por construção v_h é contínua nos nós de todos os elementos da discretização T_h .

Como v_h é um polinômio de 2º grau em K_1 e (em geral) outro polinômio de 2º grau em K_2 , por exemplo, coincidindo apenas em a_j e a_k , não há porque coincidirem ao longo do segmento $[a_j, a_k] = K_1 \cap K_2$ (observe que uma função do espaço restrição $P_2|_{[a_j, a_k]}$ depende de três graus de liberdade, e as funções $v_h|_{K_1}$ e $v_h|_{K_2}$ não são coincidentemente definidas a priori num terceiro ponto entre a_j e a_k) – há descontinuidade de v_h , descontinuidade que poderá se repetir sobre todos segmentos que compõem as fronteiras entre elementos adjacentes.

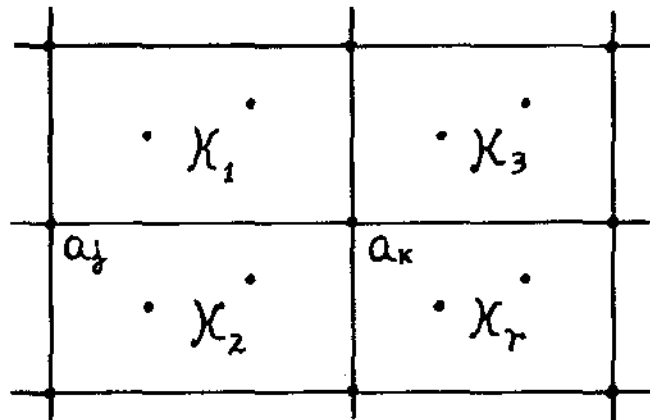


Figura 25

De fato, as próprias funções de base de V_h são descontínuas, ver figuras adiante:

$$(3.5.11) \quad v_h \in V_h, \quad v_h \notin C^0(\bar{\Omega}).$$

Mas especificamente, como já foi mencionado no capítulo 1,

$$(3.5.12) \quad V_h \subsetneq \prod_{K \in T_h} P_2(K),$$

sendo as "funções" de V_h a priori, por definição, contínuas nos nós comuns às fronteiras dos elementos.

Funções Base do Elemento não Conforme

Como antes, construímos o espaço V_h a partir das funções de base global ψ_k associada a cada nó $a_k \in N_h$, $1 \leq k \leq N$, e definidas por:

$$\psi_k(a_j) = \delta_{kj} \quad \text{para cada } a_j \in N_h, 1 \leq j \leq N,$$

e para $v_h \in V_h$, como é usual,

$$(3.5.13) \quad v_h = \sum_{i=1}^N v_h(a_i) \psi_i.$$

Neste caso como já foi mencionado no final do análise do item anterior, se K^1 é um lado qualquer de K (por exemplo paralelo ao eixo X , $y = \bar{y}$ é constante), Σ_{K^1} não é P_{K^1} -unisolvente pois

$$(3.5.14) \quad P_{K^1} = \{a + bx + cx^2, (x, \bar{y}) \in K^1\} \quad \text{onde}$$

$$(3.5.15) \quad \Sigma_{K^1} = \{v(a_i) : a_i \in K^1 \cap N_K\} \quad a_i \in K^1 \text{ é vértice em } K.$$

Com $\text{Dim } P_{K^1} = 3 \neq \#(\Sigma_{K^1}) = 2 = \#K^1 \cap N_K$.

Neste caso infinitas funções em P_{K^1} podem assumir prefixados valores nos dois nós $a_i \in K^1 \cap N_K$.

As figuras que encerram este capítulo exibem alguns casos das funções de base ψ_i de V_h – além de ilustrar (3.5.11) e (3.5.12).

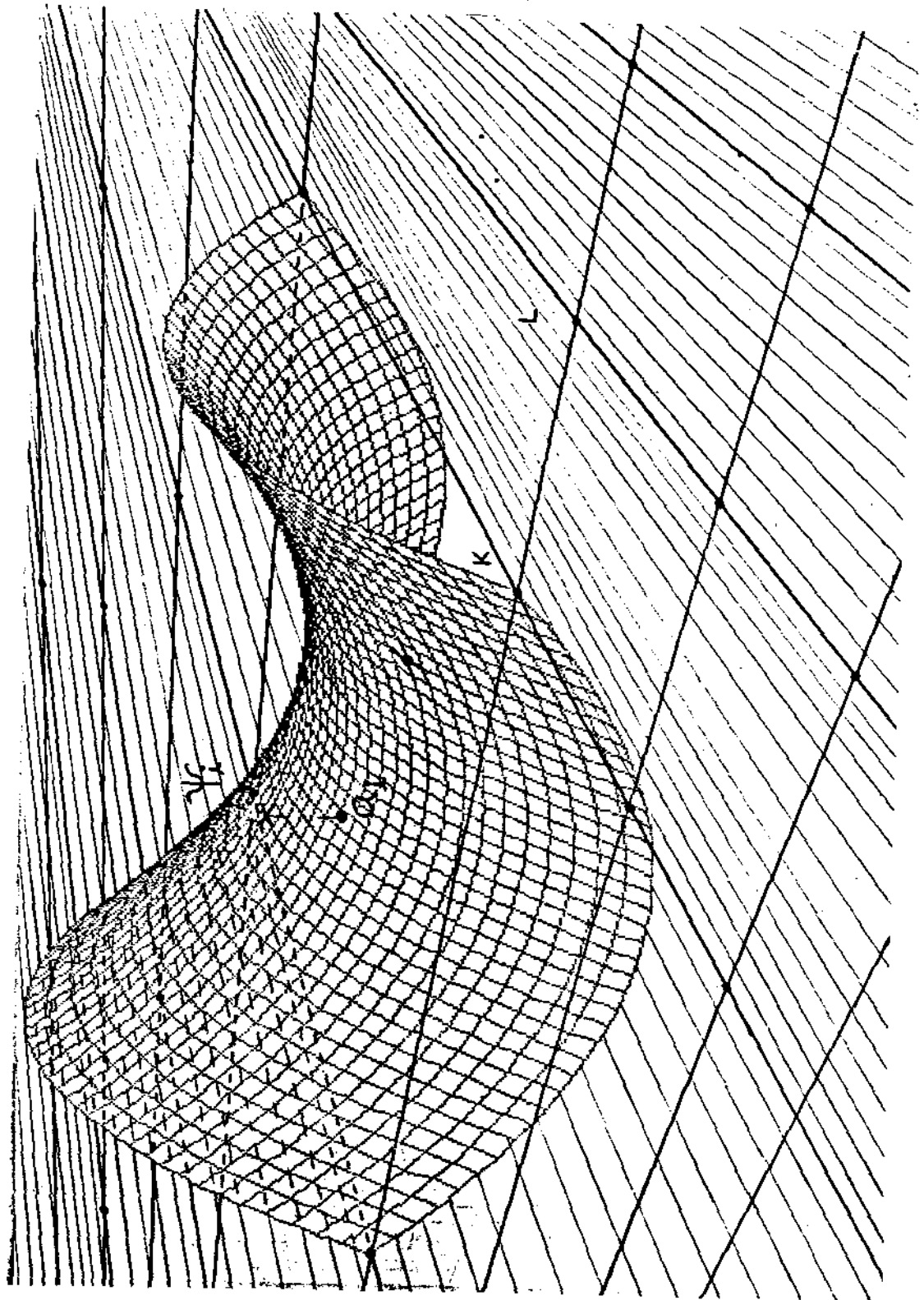


Figura 26 - Função de base global ψ_i associada ao nó a , interior a K . $\psi_i|_L \equiv 0, \forall L \in T_h \setminus K$.

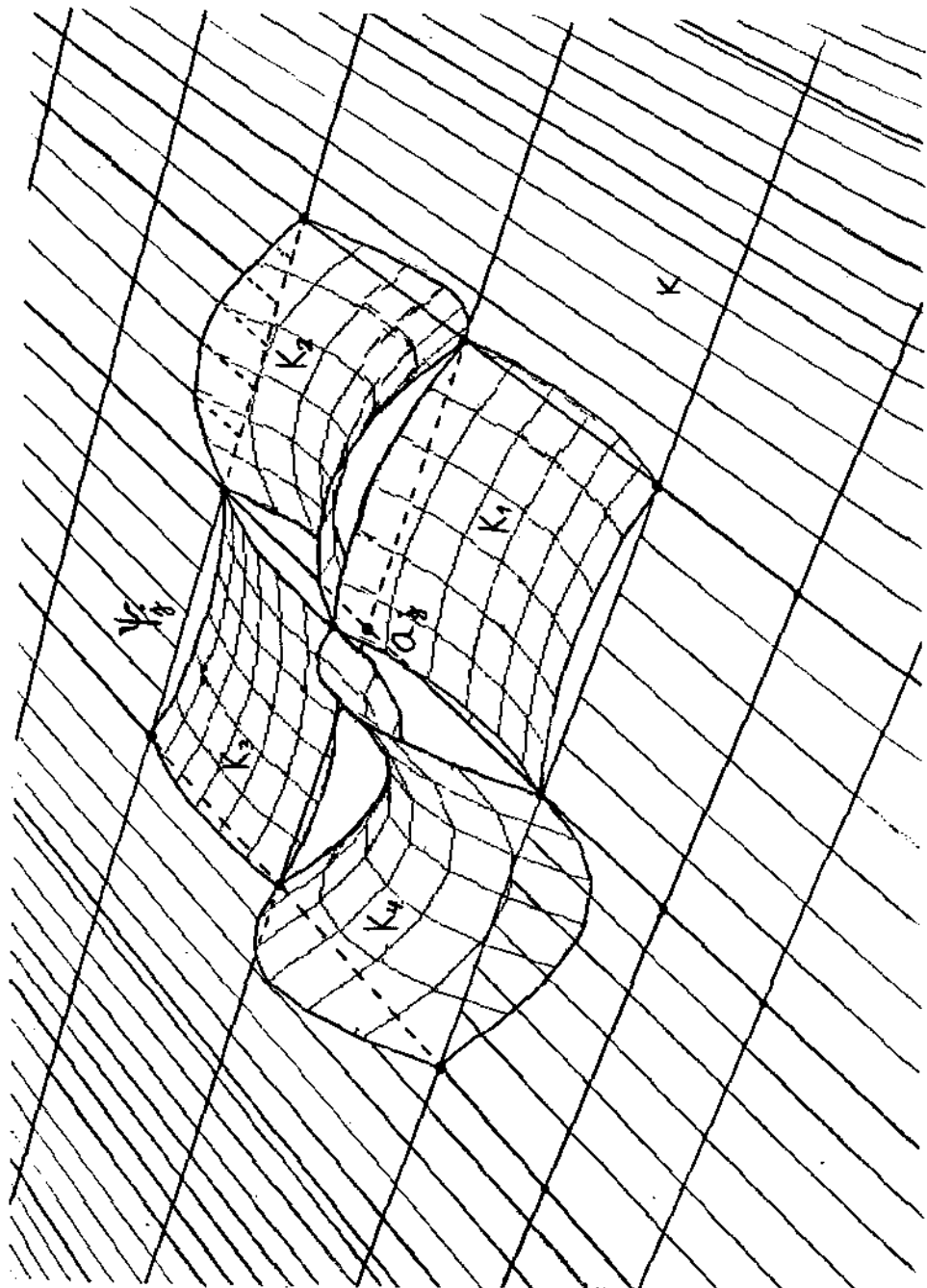


Figura 27 - Função ψ_j de base de V_h associada ao nó vértice a_j , $\psi_j|_K \equiv 0, \forall K \in T_h \setminus \{K_i\}_{i=1}^4$.

CAPÍTULO 4

DA CONVERGÊNCIA DE SOLUÇÕES APROXIMADAS

4.0. Introdução

No presente capítulo serão introduzidos alguns conceitos sobre elementos finitos e suas famílias, conceitos que nos permitirão aplicar resultados que garantam a convergência da solução aproximada u_h à solução exata u do PV, com u_h sendo solução do problema discreto no espaço V_h , associado ao PMDN sobre o espaço V , onde V_h , subespaço de V , é por exemplo um daqueles apresentados no capítulo anterior.

Posteriormente iremos definir o interpolante $\Pi_h u \in V_h$ de $u \in V$ que, junto com as outras noções apresentadas, nos permitirão fazer uso da teoria de interpolação sobre espaços de Sobolev para obter estimativas a priori de $\|u - u_h\|_V$ sobre cada um dos tipos de elementos conforme já estudados.

4.1. Elementos e famílias de elementos afim-equivalentes

1. Definição. Dois elementos $(\bar{K}, \bar{\Sigma}, \bar{P})$, (K, Σ, P) são ditos *afim-equivalentes* se existe uma transformação linear inversível F :

$$(4.1.1) \quad \begin{aligned} F : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \bar{x} &\rightarrow F(\bar{x}) = B\bar{x} + b \end{aligned}$$

tal que valham

$$(4.1.2) \quad \begin{cases} K = F(\bar{K}), \\ a_i = F(\bar{a}_i) \\ \varepsilon_{ik} = B\bar{\varepsilon}_{ik}, \quad e \end{cases}$$

$$(4.1.3) \quad P = \{p : K \rightarrow \mathbb{R} / p = \bar{p} \circ F^{-1}, \bar{p} \in \bar{P}\},$$

com $a_i \in N_K$, $\bar{a}_i \in N_{\bar{K}}$.

- (4.1.4) $\xi_{ik}, \bar{\xi}_{ik}$ entram na definição dos graus de liberdade $Dp(a_i) \cdot \xi_{ik}, Dp(\bar{a}_i) \cdot \bar{\xi}_{ik}$ de Σ e $\bar{\Sigma}$ respectivamente. Veja na figura 1 uma descrição visual.

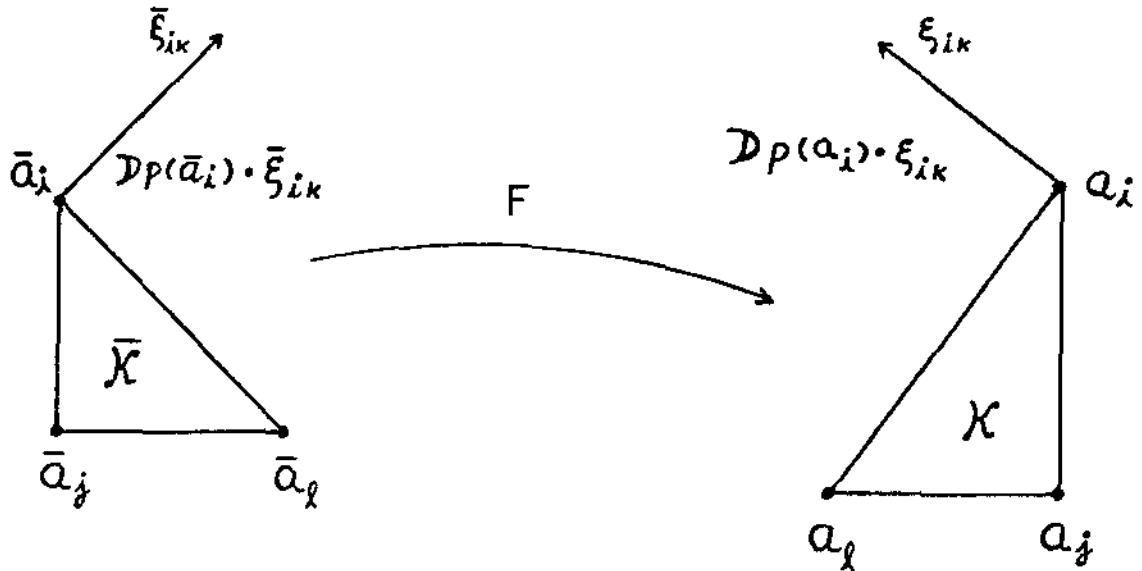


Figura 1

Verifica-se o seguinte resultado:

Se $(\bar{K}, \bar{\Sigma}, \bar{P})$ é um elemento finito e (K, Σ, P) é definido pelas relações anteriores (4.1.1)-(4.1.4), sendo F uma transformação linear inversível, então (K, Σ, P) é também um elemento finito afim-equivalente, com $(\bar{K}, \bar{\Sigma}, \bar{P})$.

Uma família de elementos finitos é chamada *família afim-equivalente* ou simplesmente *família afim*, se cada um dos seus elementos é *afim-equivalente* a um mesmo elemento o qual é chamado *elemento de referência* da família. Cabe citar que nem toda família de elementos é uma família *afim*.

4.2. Exemplo de famílias afins: triângulos do tipo 1 e 2, quadriláteros de tipo 1

Exemplo 1. Considere, na figura 2 uma triangulação T_h de $\Omega = [0, a] \times [0, b]$ composta por triângulos de tipo 1.

Então a família

$$F_h = \{(K, \Sigma_K, P_1) / K \in T_h\} \text{ é uma família afim.}$$

Seja K_i um elemento da família F_h , e \bar{K} elemento de referência com $\bar{a}_1(0,0), \bar{a}_2(1,0), \bar{a}_3(0,1)$, figura 3.

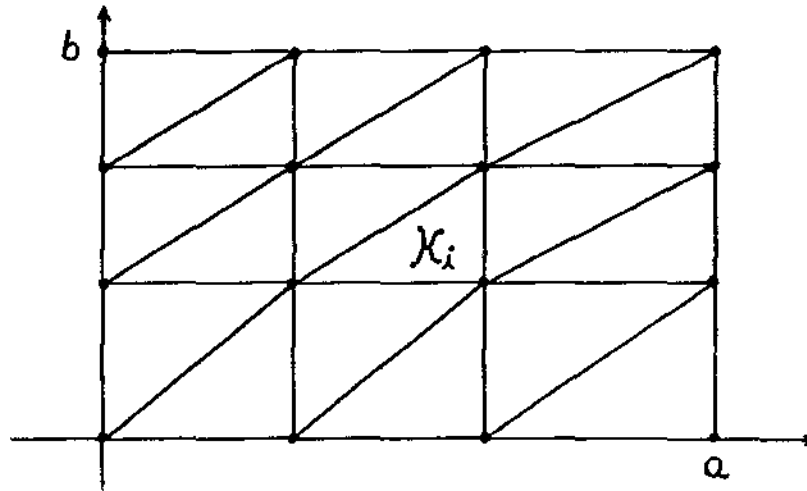


Figura 2

Define-se uma transformação linear $F_i : \bar{K} \rightarrow K_i$, $F_i(\bar{x}, \bar{y}) = (A\bar{x} + B, C\bar{y} + D)$, onde A,B,C,D são constantes a determinar com ajuda do sistema (4.2.1):

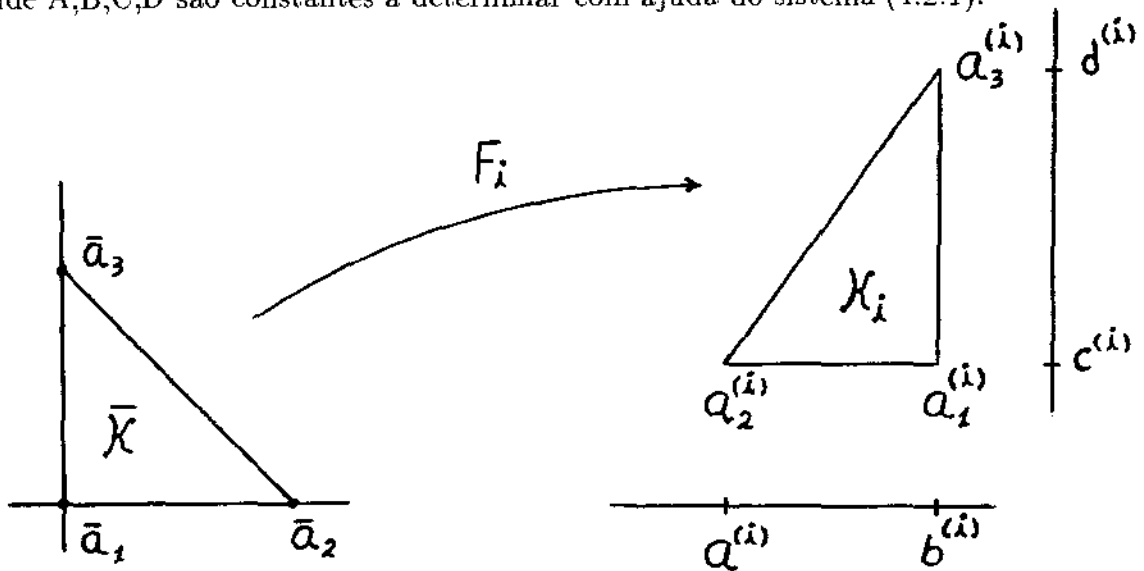


Figura 3 - Elementos afim-equivalentes: K, K_i

$$\begin{aligned}
(4.2.1) \quad & F_i(\bar{a}_1) = F_i(0, 0) = a_1^{(i)} \\
& F_i(\bar{a}_2) = F_i(1, 0) = a_2^{(i)} \\
& F_i(\bar{a}_3) = F_i(0, 1) = a_3^{(i)} \quad \text{então}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4.2.2) \quad F_i(\bar{x}, \bar{y}) &= \begin{pmatrix} a^{(i)} - b^{(i)} & 0 \\ 0 & d^{(i)} - c^{(i)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^{(i)} \\ c^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= B^{(i)} \underline{\bar{x}} + \underline{b}^{(i)} \quad \text{ou}
\end{aligned}$$

$$(4.2.3) \quad F_i(\bar{x}, \bar{y}) = ((a^{(i)} - b^{(i)})\bar{x} + b^{(i)}, (d^{(i)} - c^{(i)})\bar{y} + c^{(i)}) = (x, y)$$

onde $B^{(i)}$ é não-singular, logo F_i é inversível com

$$(4.2.4) \quad \underline{\bar{x}} = B_i^{-1} \begin{pmatrix} x - b^{(i)} \\ y - c^{(i)} \end{pmatrix} = F_i^{-1}(x, y) = \left(\frac{x - b^{(i)}}{a^{(i)} - b^{(i)}}, \frac{y - c^{(i)}}{d^{(i)} - c^{(i)}} \right)$$

$$1^\circ) K_i = F_i(\bar{K})$$

$$\bar{K} = \{(\bar{x}, \bar{y}) / 0 \leq \bar{x} \leq 1, 0 \leq \bar{y} \leq -\bar{x} + 1\}$$

$$K_i = \{(x, y) / a^{(i)} \leq x \leq b^{(i)}, c^{(i)} \leq y \leq \left(\frac{d^{(i)} - c^{(i)}}{b^{(i)} - a^{(i)}} \right) x + \left(\frac{b^{(i)}c^{(i)} - a^{(i)}d^{(i)}}{b^{(i)} - a^{(i)}} \right)\}$$

(a última expressão sendo a porção de reta $\overline{a_2^{(i)}a_3^{(i)}}$), quando $a^{(i)} \leq x \leq b^{(i)}$, figura 3.)

No que segue iremos, por simplicidade omitir o índice (i) .

Se $0 \leq \bar{x} \leq 1$ então

$$a \leq x = (a - b)\bar{x} + b \leq b \quad (\text{ver figura 3) e (4.2.3).}$$

Se, ainda, $0 \leq \bar{y} \leq -\bar{x} + 1$, então usando (4.2.3) tem-se

$$c \leq y = c + (d - c)\bar{y} \leq c + (d - c)(-\bar{x} + 1)$$

que é o mesmo que escrever

$$c \leq y \leq \left(\frac{d - c}{b - a} \right) ((a - b)\bar{x} + b) + \left(\frac{bc - ad}{b - a} \right),$$

ou

$$c \leq y \leq \left(\frac{d-c}{b-a} \right) x + \left(\frac{bc-ad}{b-a} \right),$$

esta última expressão é a reta que contém $\overline{a_2 a_3}$, fig. 3.

2º) Por construção, $a_k = F_i(\overline{a}_k)$ $1 \leq k \leq 3$.

3º) Prova-se que: $P_1 = \{p : K_i \rightarrow \mathbb{R} \mid p = \overline{p} \circ F_i^{-1}, \overline{p} \in \overline{P}_1\}$. Visualmente:

$$\begin{array}{ccccc} K_i & \xrightarrow{F_i^{-1}} & \overline{K} & \xrightarrow{\overline{p}} & \mathbb{R} \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \overline{p} \circ F_i^{-1} & & \end{array}$$

Dado $p \in P_1$, existe $\overline{p} \in \overline{P}_1$ tal que $p = \overline{p} \circ F_i^{-1}$. De fato, basta escolher $\overline{p} = p \circ F_i \in \overline{P}_1$, ou, usando uma descrição esquemática:

$$\begin{array}{ccccc} \overline{K} & \xrightarrow{F_i} & K_i & \xrightarrow{p} & \mathbb{R} \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \overline{p} = p \circ F_i & & \end{array}$$

Assim, $p = p \circ F \circ F^{-1} = \overline{p} \circ F^{-1}$. De outra forma sejam:

$$p = A + Bx + Cy \in P_1 \quad \text{e usando (4.2.3)}$$

$$\overline{p} = p \circ F = (A + Bb + Cc) + B(a-b)\overline{x} + C(d-c)\overline{y} \in \overline{P}_1$$

então usando (4.2.4)

$$\overline{p} \circ F^{-1}(x, y) = \overline{p}(F^{-1}(x, y)) = \overline{p}\left(\frac{x-b}{a-b}, \frac{y-c}{d-c}\right) =$$

$$(A + Bb + Cc) + B(a-b)\left(\frac{x-b}{a-b}\right) + C(d-c)\left(\frac{y-c}{d-c}\right) = A + Bx + Cy = p.$$

Reciprocamente $\forall \overline{p} \in \overline{P}_1, p = \overline{p} \circ F_i^{-1} \in P_1$.

Esta família, é, em suma, afim-equivalente.

Exemplo 2.

Sejam $\bar{\Omega} = [0, a] \times [0, b]$, T_h formada de quadriláteros do tipo 1.

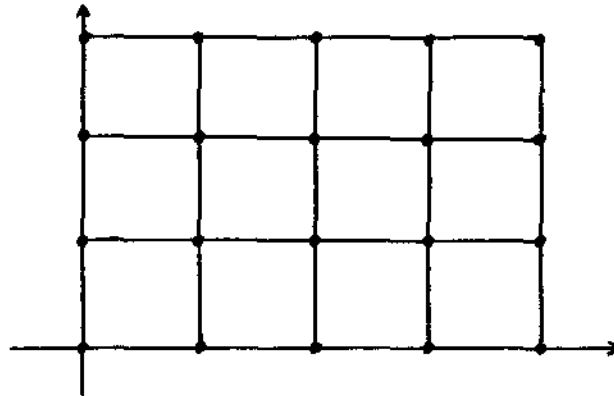
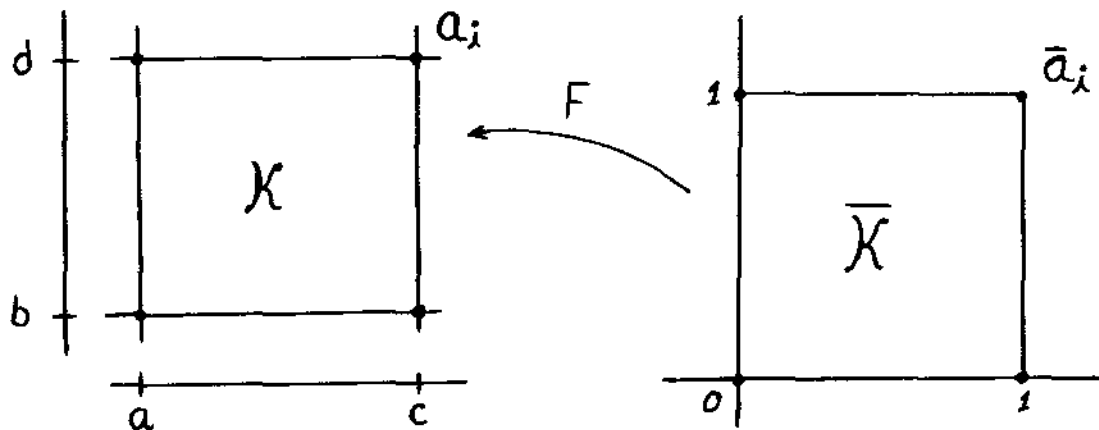


Figura 4

Consideremos $F_h = \{(K, \Sigma_K, Q_1) / K \in T_h\}$. Iremos também aqui verificar que F_h é família afim.



Elemento genérico da família (K, Σ_K, Q_1)

Elemento de referência $(\bar{K}, \bar{\Sigma}, \bar{Q}_1)$

Figura 5

Definamos, de forma análoga ao exemplo anterior, uma transformação linear $F : \bar{K} \rightarrow K, F(\bar{x}, \bar{y}) = (A\bar{x} + B, C\bar{y} + D)$ pelo sistema $F(\bar{a}_i) = a_i$. Então,

$$F(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{bmatrix} c-a & 0 \\ 0 & d-b \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = ((c-a)\bar{x} + a, (d-b)\bar{y} + b) = (x, y)$$

De fato é simples verificar que $a_i = F(\bar{a}_i)$. Também

$$(4.2.5) \quad F^{-1}(x, y) = \left(\frac{x-a}{c-a}, \frac{y-b}{d-b} \right) = (\bar{x}, \bar{y}).$$

$$\bar{K} = \{(\bar{x}, \bar{y}) / 0 \leq \bar{x}, \bar{y} \leq 1\} \quad e$$

$$K = \{(x, y) / a \leq x \leq c, b \leq y \leq d\}.$$

1º) $K = F(\bar{K})$ Se $0 \leq \bar{x} \leq 1$, então $a \leq x = (c-a)\bar{x} + a \leq c$.

Se $0 \leq \bar{y} \leq 1$, então $b \leq y = (d-b)\bar{y} + b \leq d$

2º) Por definição, vale $a_i = F(\bar{a}_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$.

3º) Iremos provar que:

$$Q_1 = \{q: K \rightarrow \mathbb{R} / q = \bar{q} \circ F^{-1}, \bar{q} \in \bar{Q}_1\}.$$

$$\text{Seja } q = Axy + Bx + Cy + D \in Q_1,$$

como antes, escolheremos $\bar{q} = q \circ F$. Então $q = q \circ F \circ F^{-1} = \bar{q} \circ F^{-1}$, ou ainda

$$\begin{aligned} \bar{q} = q \circ F = q(F(\bar{x}, \bar{y})) &= \bar{q} = A(c-a)(d-b)\bar{x}\bar{y} + (B-Ab)(c-a)\bar{x} \\ &+ (Aa+C)(d-b)\bar{y} + (D+(B-Ab)a+Cb) \in \bar{Q}_1 \end{aligned}$$

$$e \quad q = \bar{q} \circ F^{-1}, \text{ isto é } \bar{q}(F^{-1}(x, y)) = \bar{q}\left(\frac{x-a}{c-a}, \frac{y-b}{d-b}\right) =$$

$$\begin{aligned} A(x-a)(y-b) + (B-Ab)(x-a) + (Aa+C)(y-b) + (D+(B-Ab)a+Cb) = \\ Axy + Bx + Cy + D = q \in Q_1, \end{aligned}$$

reciprocamente, dado $\bar{q} \in \bar{Q}_1$, $q = \bar{q} \circ F^{-1} \in Q_1$.

Pois sendo as componentes de F^{-1} , a primeira de grau um em x e a segunda de grau um em y o grau de \bar{q} não é alterado, sendo o grau de q igual ao grau de \bar{q} .

Esquemáticamente

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{F^{-1}} & \bar{K} & \xrightarrow{\bar{q}} & \mathbb{R} \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \bar{q} \circ F^{-1} & & \end{array}$$

$$q = \bar{q} \circ F^{-1} = Axy + Bx + Cy + D \in Q_1 .$$

Observações.

1. Uma transformação linear $F : \bar{K} \rightarrow K$ onde \bar{K} e K são triângulos, preserva os pontos médios dos lados, logo, usando a mesma transformação do exemplo 1, podemos mostrar de maneira similar que uma família de triângulos de tipo 2 é uma família afim. Também de maneira análoga ao exemplo 2 prova-se que uma família de elementos do tipo alternativo é uma família afim.

2. Para cálculos envolvendo elementos finitos, ao invés de calcular as funções base de cada elemento de uma discretização, são usadas as funções de base do elemento de referência e as respectivas transformações lineares aqui explicitadas, relativas a esses elementos, sendo que só é requerido guardar as coordenadas cartesianas dos nós dessa discretização. Por exemplo, para calcular as entradas do sistema linear associado ao PVA usando integração exata ou utilizando uma quadratura numérica, etc.

4.3. Família Regular de Discretizações e Elementos Finitos de Classe C^0 . Teorema de Convergência.

1. Definição. um elemento finito é dito de classe C^0 , (respectivamente de classe C^1) quando é o elemento de referência de uma discretização e o respectivo espaço gerado V_h , associado a essa discretização, satisfaz a inclusão $V_h \subseteq C^0(\bar{\Omega})$, (respectivamente, $V_h \subseteq C^1(\bar{\Omega})$).

1. Observação. Anteriormente, viu-se que o espaço V_h gerado com discretizações feitas com triângulos do tipo 1, ou triângulos do tipo 2 ou ainda quadriláteros do tipo 1 satisfaz $V_h \subseteq C^0(\bar{\Omega})$ e como as famílias associadas a cada uma dessas discretizações são famílias afins, segue-se que os respectivos elementos de referência são de classe

C^0 . Observemos, porém, que eles não são de classe C^1 , pois para $v_h \in V_h$, $\frac{\partial v_h}{\partial x_i}$, é, em cada um dos casos de quadrado integrável mas não necessariamente contínua, nas interseções dos elementos. Da mesma forma o elemento de referência dado em 2.5, (2.1.20) a (2.1.25), não é de classe C^0 pois não fazemos com ele um espaço V_h de funções contínuas, porém só de quadrado integráveis.

Família regular de discretizações

Considere-se uma família de discretizações $(T_h)_{h \in \tau}$, onde $h \rightarrow 0$, $h \in \tau \subseteq (0, 1)$, e com cada discretização T_h , $h \in \tau$, uma família associada F_h de elementos finitos.

Definamos:

$$(4.3.1) \quad h_K = \text{diâmetro de } K = \text{Sup}\{d(x, y), \text{ para quaisquer } x, y \in K\} \quad \text{e}$$

$$(4.3.2) \quad \rho_K = \text{Sup}\{\text{diam}(S), \text{ sendo } S \text{ uma bola contida em } K\},$$

veja as figuras 6 e 7.

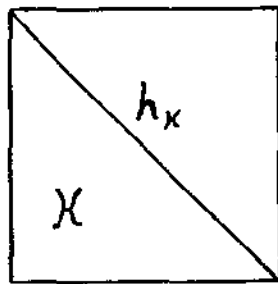


Figura 6

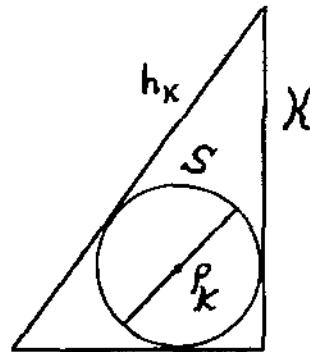


Figura 7

2. Definição. Uma família de discretizações $(T_h)_{h \in \tau}$ é dita *regular* se:

i) para cada $h \in \tau$, F_h é afim-equivalente a um único elemento finito de referência $(\bar{K}, \bar{\Sigma}, \bar{P})$, i.e.

$$(4.3.3) \quad \bigcup_{h \in \tau} F_h \text{ é afim-equivalente a } (\bar{K}, \bar{\Sigma}, \bar{P})$$

ii) existe uma constante σ tal que para cada $h \in \tau$:

$$(4.3.4) \quad \frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma \quad \forall K \in T_h ; e$$

iii) τ é t.q. $h \rightarrow 0$.

Onde, como em (3.1.4) definimos o parâmetro h como sendo

$$(4.3.5) \quad h = \sup_{K \in T_h} h_K .$$

Exemplo 1. Seja $\bar{\Omega} = [0, 1] \times [0, 1]$. Com triângulos do tipo 1 construímos discretizações T_h de Ω dividindo o intervalo $[0, 1]$ em n partes iguais tanto no eixo X como no eixo Y , como mostra o desenho da figura 8.

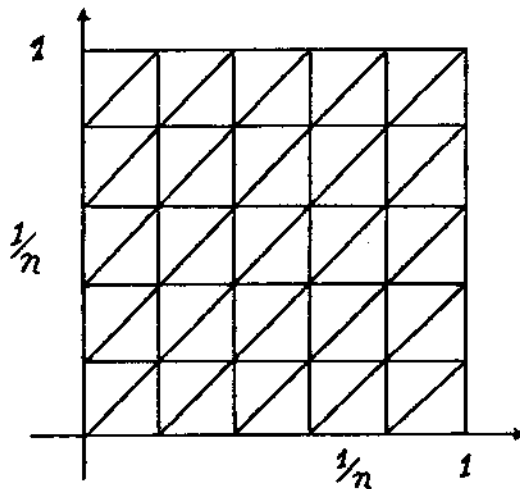


Figura 8

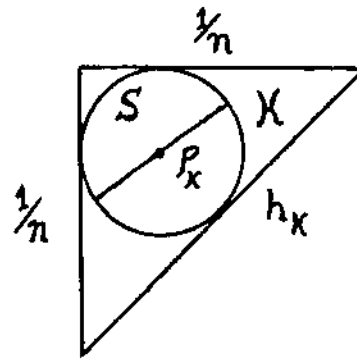


Figura 9

Assim em cada triângulo obtido temos a seguinte situação:

$$(4.3.6) \quad h_K = \frac{\sqrt{2}}{n} \quad \forall K \in T_h \quad e, \text{ logo. } h = \frac{\sqrt{2}}{n}, \text{ com}$$

$$(4.3.7) \quad \tau = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{n} / n \geq 2 \right\} \subseteq (0, 1).$$

Veja a figura 9. Então

$$(4.3.8) \quad \rho_K = \frac{2}{n(2 + \sqrt{2})}, \quad \text{onde}$$

$$(4.3.9) \quad \frac{h_K}{\rho_K} = \sigma = 1 + \sqrt{2}, \quad \forall K \in T_h \quad \text{e além do mais, } \forall h \in \tau.$$

Já foi visto no parágrafo 4.2 que uma tal família F_h , para $h \in \tau$, é *afim-equivalente* a um elemento de referência de vértices $(0, 0); (1, 0); (0, 1)$. A constante σ é dada em (4.3.9) e podemos fazer $h \rightarrow 0$, com $h \in \tau$ ($n \rightarrow \infty$).

Assim, $(T_h)_{h \in \tau}$ é uma *família regular* de discretizações.

Uma condição equivalente ao requerimento (ii) acima, a saber, que

$$\exists \sigma \quad \text{tal que} \quad \frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma \quad \forall K \in T_h, \quad h \in \tau, \quad \text{é a seguinte}$$

Se θ_K é o menor ângulo do triângulo K , então

$$(4.3.10) \quad \exists \theta_0 \quad \text{tal que para cada} \quad h \in \tau \quad \theta_K \geq \theta_0 \quad \forall K \in T_h.$$

No exemplo anterior, tínhamos $\theta_K = \theta_0 = \frac{\pi}{4}$, $\forall K \in T_h$ e $\forall h \in \tau$.

Quando K é um retângulo de altura a_K e largura ℓ_K ($a_K \geq \ell_K$), a condição (ii) é equivalente á existência de uma constante C_0 tal que

$$(4.3.11) \quad \forall h \in \tau \quad \forall K \in T_h, \quad \frac{a_K}{\ell_K} \leq C_0$$

Um exemplo onde estas situações *não* ocorrem é quando se fixa o número de divisões como m no eixo Y , e fazendo o número de divisões n no eixo X crescer indefinidamente, isto é, fazer $n \rightarrow \infty$. Então

$$\forall \theta_0 > 0 \quad (\text{ou } \forall C_0 > 0) \quad \exists h \in \tau \quad \text{e} \quad \exists K \in T_h$$

tais que $\theta_K < \theta_0$ (respectivamente $\frac{a_K}{\ell_K} > C_0$). Veja o esquema da figura 10.

De se manter esta situação a condição (iii) acima não se cumprira pois, não teremos $h_K \rightarrow 0$, ao invés disso $h_K \rightarrow \frac{1}{m}$, portanto, o erro que é limitado por h_K (veja Teorema 7 a seguir e subseqüentes aplicações) não podera ser feito menor que uma determinada tolerância (precisão requerida do erro).

Como na prática só computamos um número finito de vezes, θ_K *não* pode ser feito

arbitrariamente pequeno, nem a_K/ℓ_K ilimitado.

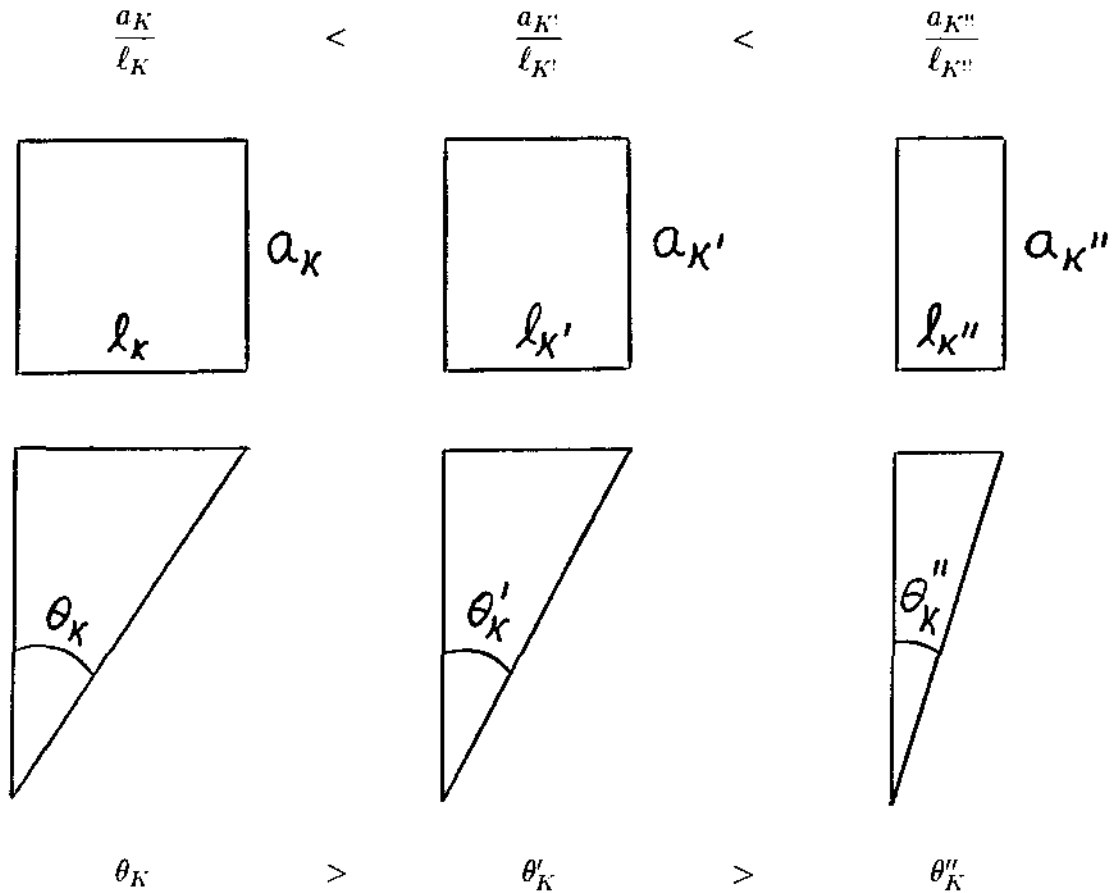


Figura 10

3. Observação

Neste trabalho é usada a h-versão do MEF, onde procuramos aproximarmos a u pelo incremento do refinamento da malha ou discretização, cf. 2.0 e iii) acima. A p-versão do MEF consiste em fixar uma malha grosseira e achar soluções aproximadas u_h pelo aumento do grau dos polinômios de elementos. Indicadores de erro são usados sobre cada elemento para verificar se uma dada tolerância tem sido atingida e assim determinar quais deles serão p-incrementados. Uma terceira versão combina as duas anteriores. Nesta hp-versão do MEF os indicadores ajudaram a determinar quais elementos serão subdivididos e quais p-incrementados. Em todos estes métodos

convergência é conseguida pelo aumento dos graus de liberdade Σ_h do espaço V_h .

A seguir é enunciado sem demonstração um teorema que garante a convergência "forte" da solução aproximada u_h para a solução fraca u do PMDN, sendo u_h aproximada com o uso de certos elementos finitos, i.e., usando a "convergência na norma $\|\cdot\|_{H^1}$ do espaço $H^1(\Omega)$ ao qual u pertence".

1. Teorema (de acordo com [5]). Seja $(T_h)_{h \in \tau}$ uma família regular de discretizações de classe C^0 com elemento de referência $(\bar{K}, \bar{\Sigma}, \bar{P})$, onde a ordem máxima das derivadas parciais ocorrendo na definição de $\bar{\Sigma}$ é s , com $s = 0$ ou $s = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Se } u \in V = H^1(\Omega) \text{ ou } u \in V = H_0^1(\Omega) \\ \text{e se } P_1 \subseteq \bar{P} \subseteq H^1(\bar{K}) \end{aligned}$$

Então

$$(4.3.12) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{H^1} = 0.$$

Vale lembrar que $h = \max\{\text{diam}(K), K \in T_h\}$

Logo, a convergência $u_h \rightarrow u$ em norma $\|\cdot\|_{H^1}$ está garantida para famílias regulares $(T_h)_{h \in \tau}$ de discretizações feitas com triângulos de tipo 1, ou com triângulos de tipo 2 ou ainda com retângulos de tipo 1. Como o novo elemento não é de classe C^0 , i.e., $V_h \not\subseteq C^0(\bar{\Omega})$, não podemos usar o presente teorema para garantir a convergência de u_h para u .

Ver em [5] um exemplo da convergência de u_h para u usando elementos finitos não conformes, feito para o caso do cubo de Wilson. De momento, posso dizer que provei, usando uma adaptação simplificada para \mathbb{R}^2 e considerando graus de liberdade somente do tipo Lagrange na demonstração, em [5], da convergência para o cubo de Wilson, convergência de ordem h^2 , em norma $\|\cdot\|_h$ para o nosso elemento alternativo usado na formulação fraca do PMDN.

4.4. Estimativa de Erro a Priori

Uma vez garantida a convergência da solução aproximada u_h para a solução exata u , seria desejável poder medir a qualidade de tal aproximação bem como a ordem dessa

convergência, isto é, medir as estimativas de $u - u_h$, em alguma norma ou seminorma apropriada. O seguinte resultado é de muita utilidade para tal objetivo.

1.Lema de Céa. Existe uma constante C independente dos subespaços V_h de aproximação, tal que:

$$(4.4.1) \quad \|u - u_h\|_V \leq C \operatorname{Inf}_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$$

onde u e u_h são as soluções de

$$(4.4.2) \quad a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in V$$

$$(4.4.3) \quad a(u_h, v_h) = f(v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

Onde a, f, V satisfazem as hipóteses do Lema de Lax-Milgran, (veja o capítulo 1). Fazendo $v = v_h$ em (4.4.2) e combinando com (4.4.3) obtemos

$$(4.4.4) \quad a(u - u_h, v_h) = 0 \quad , \quad \forall v_h \in V_h .$$

Usando a coercividade e a continuidade de a e (4.4.4), temos:

$$\lambda \|u - u_h\|_V^2 \leq |a(u - u_h, u - u_h)| \leq |a(u - u_h, u - v_h)| \leq M \|u - u_h\|_V \|u - v_h\|_V . \quad \forall v_h \in V_h ,$$

de onde

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\lambda} \|u - v_h\|_V , \quad \forall v_h \in V_h .$$

Então

$$\|u - u_h\|_V \leq C \operatorname{Inf}_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V \quad \text{com} \quad C = \frac{M}{\lambda} .$$

Do lema anterior segue que uma condição suficiente para a convergência de u_h para u é que exista uma família (V_h) de subespaços de V tal que:

$$(4.4.5) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \operatorname{Inf}_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V = 0 .$$

Usando o lema, a melhor estimativa de erro resulta de usar a projeção Pu da solução u sobre cada V_h , isto é, de acordo com a figura 11.

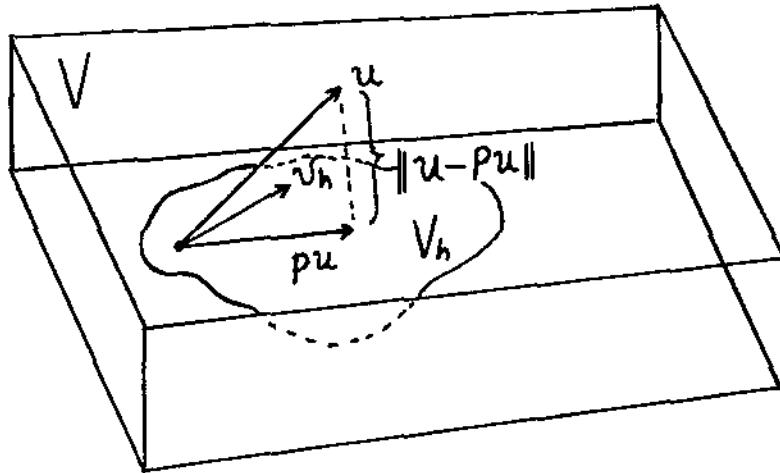


Figura 11

$$(4.4.6) \quad ||u - Pu||_V = \text{Inf}_{v_h \in V_h} ||u - v_h||_V.$$

O problema, então de estimar o erro $||u - u_h||_V$ é reduzido a um problema em teoria de aproximação: avaliar a distância entre a solução u e o subespaço V_h :

$$(4.4.7) \quad d(u, V_h) = ||u - Pu||_V.$$

Como não é fácil de trabalhar com essa projeção é frequentemente usado o $\Pi_h u$ -interpolante em V_h de u em V para limitar o erro. Dado $v \in V$ define-se este interpolante $\Pi_h v \in V_h$ de $v \in V$ como sendo:

$$(4.4.8) \quad \Pi_h v = \sum_{\phi_j \in \Sigma_h} \phi_j(v) \psi_j.$$

onde ψ_j é a função de base global associada ao grau ϕ_j e v sendo suficientemente suave de modo que $\phi_j(v)$ esteja definido. $\Pi_h v$ é o único elemento de V_h que toma os mesmos valores que v e algumas de suas derivadas nos nós da triangulação, i.e.,

$$\phi_j(\Pi_h v) = \phi_j(v), \quad \forall \phi_j \in \Sigma_h.$$

Como

$$(4.4.9) \quad \|u - u_h\| \leq C \mathop{\text{Inf}}_{v_h \in V_h} \|u - v_h\| \leq C \|u - \Pi_h u\| \quad ,$$

podemos estimar o erro, estimando $\|u - \Pi_h u\|$ na forma $\|u - \Pi_h u\| \leq Ch^\beta$ onde C é uma constante por determinar, h é o parâmetro associado à discretização, T_h , $h = \max_{K \in T_h} h_K$, e $\beta > 0$ é uma constante chamada de ordem de convergência (estimada) de u_h a u .

Dizemos então que a convergência de u_h a u é da ordem β o qual abreviamos por:

$$(4.4.10) \quad \|u - u_h\| = \theta(\beta).$$

Dado que $\Sigma_h = \bigcup_{K \in T_h} \Sigma_K$ temos que

$$(4.4.11) \quad \Pi_h u|_K = \Pi_K u \quad , \quad \text{para cada } K \in T_h \quad (\text{ver Teorema 2.3.2 de [5]}).$$

Aqui, $\Pi_K u$ é o interpolado em P_K de $u|_K$ definido por

$$(4.4.12) \quad \Pi_K u = \sum_{\xi_i \in \Sigma_K} \xi_i(u) p_i \quad (P_K\text{-interpolante}),$$

com $p_i \in P_K$ sendo a função de base do elemento K , associada ao grau ξ_i .

$\Pi_K u$ também é caracterizado por

$$(4.4.13) \quad \Pi_K u \in P_K \quad \text{e} \quad \xi_i(\Pi_K u) = \xi_i(u) \quad , \quad \forall \xi_i \in \Sigma_K.$$

Em consequência, fazendo $v = u - \Pi_h u$ e usando a linearidade da integral, temos

$$(4.4.14) \quad \begin{aligned} \|u - \Pi_h u\|_{H^1(\Omega)} &= \left(\int_{\Omega} |v|^2 dx + \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{1/2} = \\ &= \left(\sum_{K \in T_h} \left[\int_K |v|^2 dx + \sum_{i=1}^2 \int_K \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx \right] \right)^{1/2} = \\ &= \left(\sum_{K \in T_h} \|u - \Pi_K u\|_{H^1(K)}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Desta igualdade tiramos que o problema de estimar o erro $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$ é reduzido ao problema de avaliar os erros locais

$$\|u - \Pi_K u\|_{L^2(K)} \quad , \quad |u - \Pi_K u|_{H^1(K)} \quad \text{e} \quad \|u - \Pi_K u\|_{H^1(K)}.$$

Com relação aos operadores de projeção Π_K , temos:

$$\text{Dom } \Pi_K = \begin{cases} C^0(K) & \text{em se tratando de elementos e Lagrange, e} \\ C^s(K) & \text{para elementos de Hermite sendo } s \text{ a ordem da} \\ & \text{derivada maior ocorrendo em } \Sigma_K \end{cases}$$

Passaremos a seguir e em ordem a esclarecer e interpretar, teoremas que nos garantam *convergência* e *ordem* dessa convergência para o caso de vários elementos finitos (em particular, para aqueles analisados no capítulo 2).

Enunciaremos a seguir, então, sem demonstração alguns teoremas e resultados gerais (cf. [5]), e iremos particularizando para cada caso específico relacionado com o PMDN.

Começamos com as definições relativas aos espaços de Sobolev de ordem (m, p) sobre $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$:

Sejam:

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n \quad \text{e} \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \quad .$$

Define-se a derivada de ordem α de v :

$$\partial^\alpha v = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \dots \partial^{\alpha_n} x_n} ;$$

para $\partial^\alpha v$ satisfazendo:

$$\int_{\Omega} \partial^\alpha v \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \partial^\alpha \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) ,$$

derivação no sentido de distribuições (capítulo 1). O espaço de Sobolev, denotado por $W^{m,p}(\Omega)$ é, então, dado por:

$$(4.4.15) \quad W^{m,p}(\Omega) = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \partial^\alpha v \in L^p(\Omega), \forall \alpha, 0 \leq |\alpha| \leq m\} .$$

Onde $w \in L^p(\Omega)$ quer dizer que:

$$(4.4.16) \quad \|w\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |w|^p dx \right)^{1/p} < \infty$$

$W^{m,p}(\Omega)$ é geralmente equipado com a norma

$$(4.4.17) \quad \|v\|_{m,p,\Omega} = \left[\int_{\Omega} \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} |\partial^{\alpha} v|^p dx \right]^{1/p} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|\partial^{\alpha} v\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$$

Com esta norma, e a topologia induzida, $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach. Em particular temos — ou denotamos: para $1 \leq p \leq \infty$

$$(4.4.18) \quad \begin{aligned} W^{0,p}(\Omega) &= L^p(\Omega) \\ W^{0,2}(\Omega) &= L^2(\Omega) \\ W^{1,2}(\Omega) &= H^1(\Omega) \\ W^{2,2}(\Omega) &= H^2(\Omega) \\ W^{m,2}(\Omega) &= H^m(\Omega). \end{aligned}$$

$H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com a norma (4.4.17), $p = 2$. Frequentemente se faz uso também da semi-norma

$$(4.4.19) \quad |v|_{m,p,\Omega} = \left[\int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=m} |\partial^{\alpha} v|^p dx \right]^{1/p}.$$

$$\text{Para } p = 2, \quad |v|_{H^m(\Omega)} = \left[\sum_{|\alpha|=m} \|\partial^{\alpha} v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]^{1/2}.$$

Um estudo mais detalhado destes espaços e suas propriedades pode ser encontrado, por exemplo em [2], [15].

Frequentemente faz-se necessário medir, para $W^{m,p}(\Omega)$, o grau de suavidade de suas funções isto é, verificar se $W^{m,p}(\Omega) \subseteq C^s(\Omega)$ para algum $s \geq 0$. A resposta a esta questão está incorporada às imersões de Sobolev.

Diz-se que um espaço normado U está *imerso* em um espaço normado V , de normas $\|\cdot\|_U$ e $\|\cdot\|_V$ se:

- (i) U é um subespaço linear de V ,
- (ii) A injeção, a saber, o operador identidade $i : U \rightarrow V$, é contínua.

Esta última condição é equivalente a:

$$\exists C \in \mathbb{R}, \quad C > 0 \text{ tal que } \|u\|_V \leq C\|u\|_U, \quad \forall u \in U.$$

Para denotar tal imersão, escreve-se

$$(4.4.20) \quad U \hookrightarrow V.$$

2. Teorema de Imersão de Sobolev (cf. 1.3.2. de [15]). Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω de Lipschitz, e seja Γ^k um domínio k -dimensional obtido da intersecção de Ω com um hiperplano de dimensão k de \mathbb{R}^n , $1 \leq k \leq n$ e sejam j e m inteiros não negativos. Então existem as imersões seguintes:

(i) se $mp < n$ e $n - mp < k \leq n$

$$W^{m+j,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Gamma^k) \quad \text{desde que} \quad p \leq q \leq \frac{kp}{n - mp}$$

(ii) se $mp = n \quad \forall k, \quad 1 \leq k \leq n$

$$W^{m+j,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Gamma^k) \quad \text{se} \quad p \leq q < \infty$$

(iii) se $mp > n$

$$W^{m+j,p}(\Omega) \hookrightarrow \overline{C}^j(\Omega).$$

No caso de interesse local, temos $n = p = q = 2$ e, então para $m = 1$, (ii) se torna,

$$\text{para} \quad k = n, \quad \Gamma^2 = \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \quad \text{com}$$

$$W^{1+j,2}(\Omega) = H^{1+j}(\Omega) \hookrightarrow H^j(\Omega) = W^{j,2}(\Omega), \quad \text{para} \quad j \geq 0$$

$$\text{i.e.} \quad H^1(\Omega) \hookrightarrow H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$$

$$H^2(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega)$$

$$H^3(\Omega) \hookrightarrow H^2(\Omega)$$

... e assim por diante,

de onde:

$$\dots \hookrightarrow H^{k+1} \hookrightarrow H^k \hookrightarrow \dots \hookrightarrow H^3 \hookrightarrow H^2 \hookrightarrow H^1 \hookrightarrow L^2$$

em particular,

$$(4.4.21) \quad H^s \hookrightarrow H^r \quad \forall s, r, \quad s \geq r \geq 0.$$

Além disso, de (iii) com $mp > n$ para $m > 1$, sendo $j \geq 0$ e $p = 2$ tem-se

$$W^{m+j,2}(\Omega) = H^{m+j}(\Omega) \hookrightarrow \overline{C}^j(\Omega).$$

Como $\overline{C}^j(\Omega) \subset C^j(\Omega)$, (ver definições em [15]), temos $\overline{C}^j(\Omega) \hookrightarrow C^j(\Omega)$ e

$$H^{m+j}(\Omega) \hookrightarrow C^j(\Omega), \quad j \geq 0, \quad m \geq 2$$

ou então

$$\dots \hookrightarrow H^{3+j}(\Omega) \hookrightarrow H^{2+j}(\Omega) \hookrightarrow C^j(\Omega), \quad j \geq 0$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \dots &\hookrightarrow H^3(\Omega) \hookrightarrow H^2(\Omega) \hookrightarrow C(\Omega) \\ \dots &\hookrightarrow H^4(\Omega) \hookrightarrow H^3(\Omega) \hookrightarrow C^1(\Omega) \\ \dots &\hookrightarrow H^5(\Omega) \hookrightarrow H^4(\Omega) \hookrightarrow C^2(\Omega), \text{ etc.} \end{aligned}$$

Para enunciar os próximos teoremas precisamos estender a definição de elementos afim equivalentes K e \widehat{K} para dois conjuntos quaisquer Ω e $\widehat{\Omega}$.

Dizemos que dois conjuntos abertos Ω e $\widehat{\Omega}$ de \mathbb{R}^2 são *afim-equivalentes* se existir uma função linear inversível F tal que:

$$(4.4.22) \quad F : \widehat{x} \in \mathbb{R}^2 \longmapsto F(\widehat{x}) = B\widehat{x} + b \in \mathbb{R}^2$$

satisfazendo $\Omega = F(\widehat{\Omega})$.

No que segue usaremos as correspondências

$$(4.4.23) \quad \widehat{x} \in \widehat{\Omega} \Rightarrow x = F(\widehat{x}) \in \Omega \quad \text{e}$$

$$(4.4.24) \quad (\widehat{v} : \widehat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}) \Rightarrow (v = \widehat{v} \circ F^{-1} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}),$$

entre pontos $\widehat{x} \in \widehat{\Omega}$ e $x \in \Omega$ e entre funções definidas sobre $\widehat{\Omega}$ e Ω . Assim sendo

$$(4.4.25) \quad \widehat{v}(\widehat{x}) = v(x), \quad \forall x, \widehat{x} \text{ e } \widehat{v}, v$$

que satisfaçam (4.4.22) a (4.4.24) acima.

No caso das funções v e \widehat{v} serem definidas q.t.p., como no próximo teorema, é entendida que as relações acima serão verdadeiras q.t.p. em $\widehat{\Omega}$ e Ω .

3. Teorema (cf. [5]). Sejam Ω e $\hat{\Omega}$ dois conjuntos abertos afim-equivalentes de \mathbb{R}^n . Se a função $v \in W^{m,p}(\Omega)$, para $m \geq 0$ e $p \in [1, \infty]$, então a função $\hat{v} = v \circ F \in W^{m,p}(\hat{\Omega})$, e existe uma constante $C = C(m, n)$ tal que $\forall v \in W^{m,p}(\Omega)$,

$$(4.4.26) \quad |\hat{v}|_{m,p,\hat{\Omega}} \leq C \|B\|^m |\det(B)|^{-1/p} |v|_{m,p,\Omega},$$

onde B é a matriz da transformação F dada em (4.4.22).

Analogamente tem-se

$$(4.4.27) \quad \forall \hat{v} \in W^{m,p}(\hat{\Omega}), |v|_{m,p,\Omega} \leq C \|B^{-1}\|^m |\det(B)|^{-1/p} |\hat{v}|_{m,p,\hat{\Omega}}.$$

Sabendo-se que $|\det(B)| = \frac{\text{medida}(\Omega)}{\text{medida}(\hat{\Omega})}$, seria desejável avaliar as normas $\|B\|$ e $\|B^{-1}\|$ em termos de simples quantidades geométricas. Esse é o objetivo do próximo teorema onde usaremos as seguintes notações:

$$(4.4.28) \quad h = \text{diam}(\Omega), \quad \hat{h} = \text{diam}(\hat{\Omega})$$

$$(4.4.29) \quad \rho = \sup\{\text{diam}(S); \text{ para qualquer bola } S \text{ contida em } \Omega\}$$

$$(4.4.30) \quad \hat{\rho} = \sup\{\text{diam}(\hat{S}); \text{ para qualquer bola } \hat{S} \text{ contida em } \hat{\Omega}\}.$$

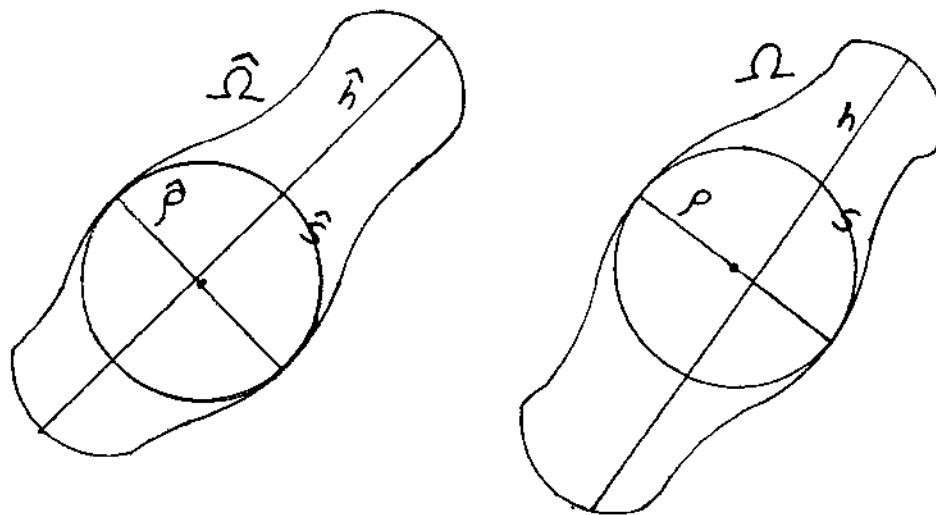


Figura 12

4. Teorema(cf. [5]). Sejam $\hat{\Omega}$ e $\Omega = F(\hat{\Omega})$ dois subconjuntos abertos afim-equivalentes de \mathbb{R}^2 , onde $F : \hat{x} \in \mathbb{R}^2 \mapsto (B\hat{x} + b) \in \mathbb{R}^2$ é uma função afim (linear) inversível.

Então são verdadeiras as cotas superiores:

$$(4.4.31) \quad \|B\| \leq \frac{h}{\hat{\rho}} \quad \text{e} \quad \|B^{-1}\| \leq \frac{\hat{h}}{\rho}$$

Para uma família T_h de elementos afim-equivalentes para a qual $\hat{\Omega} = \widehat{K} \subseteq \mathbb{R}^2$ é o elemento de referência, os teoremas 3 e 4 com

$$(i) \quad p = q = n = 2 ,$$

$$(ii) \quad \text{onde } F_K : \hat{x} \in \mathbb{R}^2 \mapsto F_K(\hat{x}) = B_K \hat{x} + b \in \mathbb{R}^2 \text{ é tal que } K = F_K(\widehat{K}),$$

para $K \in T_h$,

$$(iii) \quad \text{com } |\det(B_K)| = C_1 \text{ medida}(K) \text{ e } \|B_K\| \leq C_2 h , \text{ levam aos resulta-}$$

dos:

$$(4.4.32) \quad |\hat{v}|_{H^m(\widehat{K})} \leq \bar{C}_1 h^m (\text{medida}(K))^{-1/2} |v|_{H^m(K)} \quad \text{e}$$

$$(4.4.33) \quad |v|_{H^m(K)} \leq \bar{C}_2 \rho^{-m} (\text{medida}(K))^{-1/2} |\hat{v}|_{H^m(\widehat{K})} .$$

O seguinte teorema prova uma estimativa relevante para operadores preservando polinômios, quer dizer satisfazendo uma relação da forma (4.4.35) a seguir para $k \geq 0$, como é o caso do operador de projeção Π_K definido por (4.4.12), (4.4.13).

5. Teorema Para alguns inteiros $k \geq 0$ e $m \geq 0$ e números reais $p, q \in [1, \infty)$, sejam $W^{k+1,p}(\hat{\Omega})$ e $W^{m,q}(\Omega)$ espaços de Sobolev satisfazendo as inclusões

$$(4.4.34) \quad W^{k+1,p}(\hat{\Omega}) \hookrightarrow W^{m,q}(\Omega)$$

e seja $\hat{\Pi} : W^{k+1,p}(\hat{\Omega}) \rightarrow W^{m,q}(\hat{\Omega})$ um operador linear tal que:

$$(4.4.35) \quad \forall \hat{p} \in P_k(\hat{\Omega}) , \quad \hat{\Pi} \hat{p} = \hat{p} .$$

Para qualquer conjunto aberto Ω afim-equivalente a $\hat{\Omega}$, definamos a função Π_Ω por

$$(4.4.36) \quad (\widehat{\Pi_\Omega v}) = \hat{\Pi} \hat{v} ,$$

para as funções $\hat{v} \in W^{k+1,p}(\hat{\Omega})$ e $v \in W^{k+1,p}(\Omega)$ na correspondência definida por (4.4.22) a (4.4.25). Então existe uma constante que depende de $\hat{\Pi}$ e $\hat{\Omega}$, $C(\hat{\Pi}, \hat{\Omega})$ tal que para todos os conjuntos afim-equivalentes Ω , $\forall v \in W^{k+1,p}(\Omega)$,

$$(4.4.37) \quad |v - \Pi_\Omega v|_{m,q,\Omega} \leq C(\hat{\Pi}, \hat{\Omega}) (\text{medida}(\Omega))^{(1/q-1/p)} \frac{h^{k+1}}{\rho^m} |v|_{k+1,p,\Omega} ,$$

onde h, ρ são os parâmetros definidos para o Teorema 4.

Para esclarecer a definição de Π_Ω observemos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 v & & (\Pi_\Omega v = w = \hat{w} \circ F^{-1}) \\
 \\
 W^{k+1,p}(\Omega) & \xrightarrow{\Pi_\Omega} & W^{m,q}(\Omega) \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \hat{v} = v \circ F & & w = \hat{w} \circ F^{-1} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 W^{k+1,p}(\hat{\Omega}) & \xrightarrow{\hat{\Pi}} & W^{m,q}(\hat{\Omega}) \\
 \hat{v} & & \hat{\Pi} \hat{v} = \hat{w}
 \end{array}$$

Dado $v \in W^{k+1,p}(\Omega)$, sejam $\hat{v} = v \circ F \in W^{k+1,p}(\hat{\Omega})$, Teorema 3 e $\hat{\Pi} \hat{v} = \hat{w} \in W^{m,q}(\hat{\Omega})$, Teorema 5.

Então Π_Ω é definida como

$$\Pi_\Omega(v) = \hat{w} \circ F^{-1} = (\hat{\Pi} \hat{v}) \circ F^{-1} \quad \text{i.e.}$$

$$(\Pi_\Omega v) \circ F = \hat{\Pi} \hat{v} \quad \text{ou}$$

$$(\widehat{\Pi_\Omega v}) = \hat{\Pi} \hat{v} .$$

O próximo resultado particulariza o Teorema 5 para operadores P_K -interpolantes Π_K definidos para elementos finitos, (4.4.12). (4.4.13) .

Para o caso $p = q = n = 2$ e $\Omega = K$, $\hat{\Omega} = \hat{K}$, sendo elementos afim-equivalentes podemos tomar $\Pi_\Omega = \Pi_K$ (4.4.12) e $\hat{\Pi} = \Pi_{\hat{K}}$ e ainda

$$(4.4.38) \quad H^{k+1}(\hat{K}) \hookrightarrow H^m(\hat{K}) ,$$

inclusão esta que é válida para $k \geq m \geq 0$ segundo concluímos do Teorema de imersão de Sobolev e vale (cf. próximo Teorema)

$$(4.4.39) \quad \forall v \in H^{k+1}(K), \quad |v - \Pi_K v|_{H^m(K)} \leq C(\Pi_{\hat{K}}, \hat{K}) \frac{h^{k+1}}{\rho^m} |v|_{H^{k+1}(K)} .$$

Esta expressão se revela de grande importância para obter ordens de convergência em normas e seminormas para espaços construídos com famílias regulares de elementos finitos como mostrarão os dois próximos teoremas.

Particularizando o teorema anterior para elementos finitos obtemos estimativas do erro de interpolação $|v - \Pi_K v|_{m,q,K}$.

6. Teorema. Seja $(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma})$ um elemento finito, com s denotando a maior ordem da derivada parcial ocorrendo na definição de $\widehat{\Sigma}$. Se as seguintes inclusões são verdadeiras para inteiros $m \geq 0$, $k \geq 0$ e números $p, q \in [0, \infty]$,

$$(4.4.40) \quad W^{k+1,p}(\widehat{K}) \hookrightarrow C^s(\widehat{K}),$$

$$(4.4.41) \quad W^{k+1,p}(\widehat{K}) \hookrightarrow W^{m,q}(\widehat{K}),$$

$$(4.4.42) \quad P_k(\widehat{K}) \subset \widehat{P} \subset W^{m,q}(\widehat{K}).$$

Então existe uma constante $C(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma})$ t.q. para todos os elementos afim-equivalentes (K, Σ, P) e todas as funções $v \in W^{k+1,p}(K)$

$$(4.4.43) \quad |v - \Pi_K v|_{m,q,K} \leq C(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma}) (\text{medida}(K))^{(1/q-1/p)} \frac{h_K^{k+1}}{\rho_K^m} |v|_{k+1,p,K},$$

onde $\Pi_K v$ denota o P_K -interpolante de v , medida de K é a d -medida de K

$$h_K = \text{diam}(K)$$

$$\rho_K = \sup\{\text{diam}(S) : S \text{ bola contida em } K\}.$$

Finalmente para famílias regulares de discretizações $(T_h)_{h \in \tau}$, o erro de interpolação (4.4.43) pode imediatamente ser convertido em estimativas da forma $\|v - \Pi_K v\|_{m,q,K}$, lembrando que para tais famílias tem-se a propriedade:

$$\forall K, \frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma \quad \forall T_h, h \in \tau \quad \text{onde } \sigma \text{ é constante,}$$

de onde $\frac{1}{\rho_K^m} \leq \overline{C} \frac{1}{h_K^m}$ e (4.4.43) se torna, fazendo

$$C = C(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma}) (\text{medida}(K))^{(1/q-1/p)} \overline{C}$$

$$(4.4.44) \quad |v - \Pi_K v|_{m,q,K} \leq C h_K^{k+1-m} |v|_{k+1,p,K}.$$

No caso $p = q = n = 2$, e $s = 0$, como já vimos,

$$(4.4.45) \quad H^{k+1}(\widehat{K}) \hookrightarrow C(\widehat{K}) \quad \text{para } k+1 \geq 2, \text{ i.e., } \forall k \geq 1,$$

$$(4.4.46) \quad H^{k+1}(\widehat{K}) \hookrightarrow H^m(\widehat{K}) \quad \text{para } k+1 \geq m, \text{ i.e., } 0 \leq m \leq k+1, \text{ e}$$

$$(4.4.47) \quad P_k(\widehat{K}) \subseteq \widehat{P} \subseteq H^m(\widehat{K})$$

Para triângulos de tipo 1 $\widehat{P} = P_1(\widehat{K})$, $k = 1$; quadriláteros de tipo 1 $\widehat{P} = Q_1(\widehat{K})$, $P_1(\widehat{K}) \subset Q_1(\widehat{K})$, $k = 1$; e, para triângulos de tipo 2 $\widehat{P} = P_2(\widehat{K})$, $k = 2$.

Agora bem, usando (4.4.17), (4.4.19) e (4.4.44):

$$\begin{aligned} \|v - \Pi_K v\|_{H^m(K)} &= \left(\sum_{i=0}^m |v - \Pi_K v|_{H^i(K)}^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=0}^m \bar{C} h_K^{2(k+1-i)} |v|_{H^{k+1}(K)}^2 \right)^{1/2} = \\ &= |v|_{H^{k+1}(K)} \left(\sum_{i=0}^m \bar{C} h_K^{2(k+1-i)} \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

sendo h_K um parâmetro tendendo a zero ($h_K \leq 1$) então,

$$h_K^{2(k+1-i)} \leq h_K^{2(k+1-m)}, \quad \text{pois } i \leq m \text{ de onde}$$

$$|v|_{H^{k+1}(K)} \left(\sum_{i=0}^m \bar{C} h_K^{2(k+1-i)} \right)^{1/2} \leq |v|_{H^{k+1}(K)} \left(\sum_{i=0}^m \bar{C} h_K^{2(k+1-m)} \right)^{1/2} = \bar{C}' h_K^{k+1-m} |v|_{H^{k+1}(K)},$$

ou seja, concluímos que para $k \geq 1$ e $0 \leq m \leq k+1$,

$$(4.4.48) \quad \|v - \Pi_K v\|_{H^m(K)} \leq C h_K^{k+1-m} |v|_{H^{k+1}(K)}.$$

Um resultado mais geral é dado pelo seguinte teorema:

7. Teorema. Seja dada uma família afim-regular de elementos finitos (K, Σ_K, P_K) cujo elemento finito de referência $(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma})$ satisfaz:

$$(4.4.49) \quad W^{k+1,p}(\widehat{K}) \hookrightarrow C^s(\widehat{K}),$$

$$(4.4.50) \quad W^{k+1,p}(\widehat{K}) \hookrightarrow W^{m,q}(\widehat{K}), \text{ e}$$

$$(4.4.51) \quad P_k(\widehat{K}) \subseteq \widehat{P} \subseteq W^{m,q}(\widehat{K}).$$

Então existe uma constante $C(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma})$ tal que para todos os elementos finitos K na família, e todas as funções $v \in W^{k+1,p}(K)$

$$(4.4.52) \quad \|v - \Pi_K v\|_{m,q,K} \leq C(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma})(\text{med}(K))^{1/q-1/p} h_K^{k+1-m} |v|_{k+1,p,K}$$

No caso de maior interesse aqui, para $p = q = n = 2$, a estimativa acima se torna:

$$(4.4.53) \quad \|v - \Pi_K v\|_{H^m(K)} \leq C h_K^{k+1-m} |v|_{H^{k+1}(K)}, \quad \text{para}$$

$$k \geq 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq m \leq k+1,$$

como concluímos anteriormente, (4.4.44).

Observação: Notemos que nos teoremas 6 e 7 a partir de certas hipóteses sobre os espaços de Sobolev montados em cima do elemento de referência \widehat{K} podemos concluir estimativas do erro de interpolação para funções de espaços definidos sobre elementos de uma família F_h afim associada.

Levando em consideração que

$$(4.4.54) \quad |u|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{K \in T_h} |u|_{H^m(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \quad \text{e que portanto}$$

$$(4.4.55) \quad \|v\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{K \in T_h} \|v\|_{H^m(K)}^2 \right)^{1/2},$$

obtemos de (4.4.52) a ordem global de convergência (sobre Ω) a partir da convergência local (sobre K , o elemento em questão), da solução aproximada u_h para a solução exata u , tendo suposto, de saída, que a família de espaços de aproximação é construída com elementos finitos do tipo K .

Tomando $h = \max_{K \in T_h} h_K$ tem-se:

$$\sum_{K \in T_h} \|v - \Pi_K v\|_{H^m(K)}^2 \leq \sum_{K \in T_h} \bar{C} h^{2(k+1-m)} |v|_{H^{k+1}(K)}^2 = \bar{C} h^{2(k+1-m)} |v|_{H^{k+1}(\Omega)}^2,$$

de onde concluímos, usando (4.4.9), (4.4.11) e (4.4.55) para

$$k \geq 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq m \leq k+1, \quad \text{que} \quad \|u - u_h\|_{H^m(\Omega)} \leq C h^{k+1-m} |v|_{H^{k+1}(\Omega)}.$$

Vejamos mais alguns casos relativos a elementos finitos apresentados neste trabalho:

(1) Ordem estimada de convergência para o triângulo do tipo 1.

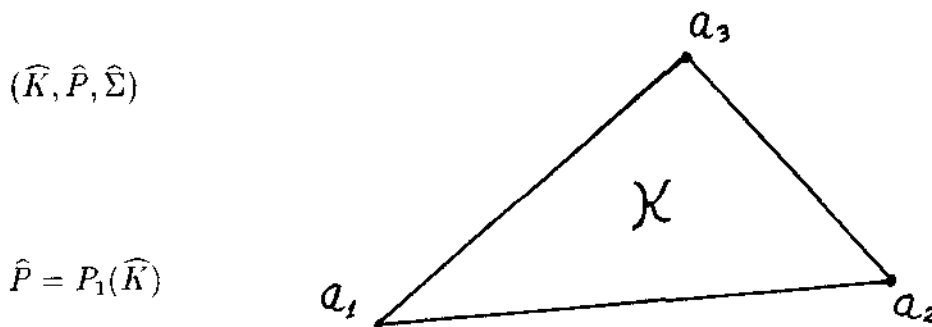


Figura 13

Para discretizações feitas com triângulos K do tipo 1:

hipótese (4.4.49) $H^2(\widehat{K}) \hookrightarrow C^0(\widehat{K})$ $k = 1$, consequência do Teorema 2

hipótese (4.4.50) $H^2(\widehat{K}) \hookrightarrow H^m(\widehat{K})$ $0 \leq m \leq 2$, cf (4.4.21)

hipótese (4.4.51) $P_k(\widehat{K}) = P_1(\widehat{K}) = \widehat{P} \subseteq H^m(\widehat{K})$ $k = 1$ $m \geq 0$, trivial.

$$\|v - \Pi_K v\|_{H^m(K)} \leq C h_K^{2-m} |v|_{H^2(K)}, \quad 0 \leq m \leq 2$$

cf. (4.4.53) com $k = 1$, onde pelo menos devemos ter $v \in H^2(K)$ como mostra a última expressão.

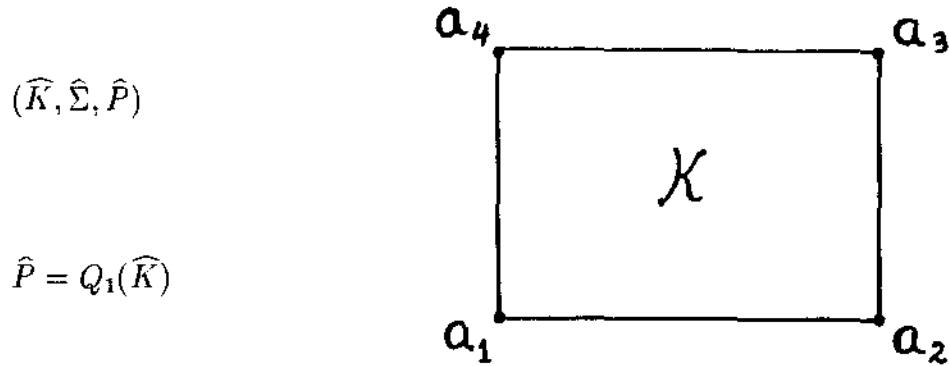
para $m = 0$, $\|v - \Pi_K v\|_{L^2(K)} \leq C h_K^2 |v|_{H^2(K)}$,

para $m = 1$, $\|v - \Pi_K v\|_{H^1(K)} \leq C h_K |v|_{H^2(K)}$, e

para $m = 2$, $\|v - \Pi_K v\|_{H^2(K)} \leq C |v|_{H^2(K)}$.

Onde a última estimativa ($m=2$) significa que o erro em norma $\|u - u_h\|_{H^2(\Omega)}$ é limitada por uma constante.

(2) Ordem estimada de convergência para o quadrilátero do tipo 1.



Para discretizações feitas com quadriláteros do tipo 1:

$$H^2(\widehat{K}) \hookrightarrow C^0(\widehat{K}) \quad (k = 1)$$

$$H^2(\widehat{K}) \hookrightarrow H^m(\widehat{K}) \quad 0 \leq m \leq 2$$

$$P_k(\widehat{K}) = P_1(\widehat{K}) \subseteq Q_1(\widehat{K}) = \widehat{P} \subseteq H^m(\widehat{K}) \quad m \geq 0, k = 1$$

e então, para $v \in H^2(K)$,

$$\|v - \Pi_K v\|_{H^m(K)} \leq C h_K^{2-m} |v|_{H^2(K)}, \quad 0 \leq m \leq 2.$$

$$\text{para } m = 0, \|v - \Pi_K v\|_{L^2(K)} \leq C h_K^2 |v|_{H^2(K)},$$

$$\text{para } m = 1, \|v - \Pi_K v\|_{H^1(K)} \leq C h_K |v|_{H^2(K)}, \text{ e}$$

$$\text{para } m = 2, \|v - \Pi_K v\|_{H^2(K)} \leq C |v|_{H^2(K)}.$$

Para obter a ordem global de convergência devemos ter na verdade $u \in H^2(\Omega)$ desta forma $u|_K \in H^2(K)$ e vale (4.4.55), confira observação na página 95.

(3) Ordem estimada de convergência para o triângulo de tipo 2.

$$(\widehat{K}, \widehat{\Sigma}, \widehat{P})$$

$$\widehat{P} = P_2(\widehat{K})$$

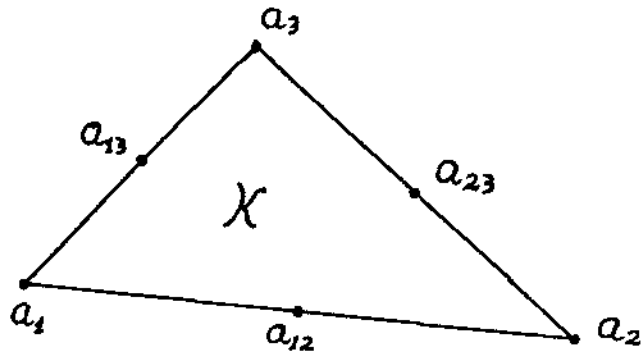


Figura 15

$$k = 2$$

$$H^3(\widehat{K}) \hookrightarrow C^0(\widehat{K})$$

$$H^3(\widehat{K}) \hookrightarrow H^m(\widehat{K}) \quad 0 \leq m \leq 3$$

$$P_k(\widehat{K}) = \widehat{P} = P_2(\widehat{K}) \subseteq H^m(\widehat{K})$$

$$\|v - \Pi_K v\|_{H^m(K)} \leq C h_K^{3-m} |v|_{H^3(K)}, \quad 0 \leq m \leq 3,$$

onde necessitamos ter $v \in H^3(K)$.

$$\text{para } m = 0, \quad \|v - \Pi_K v\|_{L^2(K)} \leq C h_K^3 |v|_{H^3(K)},$$

$$\text{para } m = 1, \quad \|v - \Pi_K v\|_{H^1(K)} \leq C h_K^2 |v|_{H^3(K)}.$$

$$\text{para } m = 2, \quad \|v - \Pi_K v\|_{H^2(K)} \leq C h_K |v|_{H^3(K)}, \quad e$$

$$\text{para } m = 3, \quad \|v - \Pi_K v\|_{H^3(K)} \leq C |v|_{H^3(K)}.$$

Considerando $k = 1$

$$H^2(\widehat{K}) \hookrightarrow C^0(\widehat{K})$$

$$H^2(\widehat{K}) \hookrightarrow H^m(\widehat{K}) \quad 0 \leq m \leq 2$$

$$P_k(\widehat{K}) = P_1(\widehat{K}) \subseteq P_2(\widehat{K}) = \widehat{P} \subseteq H^m(\widehat{K})$$

$$\|v - \Pi_K v\|_{H^m(K)} \leq C h_K^{2-m} |v|_{H^2(K)}, \quad 0 \leq m \leq 2,$$

onde só necessitamos $v \in H^2(K)$, ainda que a ordem de convergência é inferior ao caso de $v \in H^3(K)$, com $k = 2$.

$$m = 0, \quad \|v - \Pi_K v\|_{L^2(K)} \leq C h_K^2 |v|_{H^2(K)},$$

$$m = 1, \quad \|v - \Pi_K v\|_{H^1(K)} \leq C h_K |v|_{H^2(K)},$$

$$m = 2, \quad \|v - \Pi_K v\|_{H^2(K)} \leq C |v|_{H^2(K)}.$$

Estimativas a priori para estes e outros tipos de elementos de Lagrange e de Hermite podem ser encontradas em [4], [5], [18].

CAPÍTULO 5

ENSAIOS NUMÉRICOS

5.0. Introdução

Neste capítulo são apresentados alguns testes comparativos efetuados pela implementação (em Fortran) dos elementos finitos expostos no texto precedente para a resolução do PVA da formulação fraca do PMDN dada em 1.5. Comparam-se os erros relativos cometidos. A aproximação será via Método de Galerkin, com cada um dos elementos e espaços de elementos finitos trabalhados nos capítulos anteriores. Comparamos e verificamos a ordem de convergência $O(h^p)$ a posteriori (estimada) com a ordem a priori provada no capítulo anterior para cada um destes elementos. Em todas os ensaios foi usado o seguinte PMDN:

$$(5.0.1) \quad -\alpha \Delta u = f \quad (x, y) \in \Omega, \text{ com}$$

$$(5.0.2) \quad u|_{\Gamma_0} = 0 \quad \text{e}$$

$$(5.0.3) \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \eta} \right|_{\Gamma_1} = g$$

O PVA que aqui foi implementado usando o método de Galerkin é o de (1.6.11), (1.6.12) e (1.6.13) onde (com Ω dado na figura 1):

$$a_{ij} = a_h(\phi_i, \phi_j) = \int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j dx \quad ;$$
$$f_j = f_h(\phi_j) = f(\phi_j) = \int_{\Omega} f \phi_j dx + \int_{\Gamma_1} (g/\Gamma_1)(\phi_j/\Gamma_1) d\gamma \quad ,$$

também
$$d\gamma = \begin{cases} dx & \text{em } \Gamma_1^{(1)} \\ dy & \text{em } \Gamma_1^{(2)} \end{cases}$$

$$e \quad V_h = \langle \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N_h} \rangle \quad ,$$

onde as ϕ_i são as funções da base global de elementos finitos em correspondência com os nós em $N_h - (N_h \cap \Gamma_0)$.

As entradas a_{ij} da matriz do sistema foram calculadas exatamente (precisão dupla de máquina, 10^{-16}), as componentes f_j usando integração Gaussiana, em geral com dois ou três pontos por eixo na maioria dos exemplos (com exceções) o que é suficiente para obter uma boa aproximação. Com $n=3$ pontos é calculado em forma exata a integração de polinômios de grau $2n+1=7$. O sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$ é resolvido usando a decomposição de Cholesky, onde a matriz é guardada como um vetor no qual só tem sido armazenada a banda dela. Os tempos de CPU correspondem á soma dos tempos da montagem de A , do cálculo de \mathbf{f} e da resolução do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$.

A não ser que esteja indicado diferentemente, teremos:

$$(5.0.4) \quad \bar{\Omega} = [0, 1] \times [0, 1] \quad ,$$

$$(5.0.5) \quad \partial\Omega \equiv \Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$$

e (ver figura a continuação):

$$(5.0.6) \quad \Gamma_0 = \Gamma_0^{(1)} \cup \Gamma_0^{(2)}, \text{ onde } \begin{cases} \Gamma_0^{(1)} = \{0\} \times [0, 1] \text{ e} \\ \Gamma_0^{(2)} = [0, 1] \times \{0\} ; \end{cases}$$

$$(5.0.7) \quad \Gamma_1 = \Gamma_1^{(1)} \cup \Gamma_1^{(2)}, \text{ onde } \begin{cases} \Gamma_1^{(1)} = \{1\} \times [0, 1] \text{ e} \\ \Gamma_1^{(2)} = [0, 1] \times \{1\} . \end{cases}$$

Obviamente a fronteira Γ de Ω é C^1 por partes (cf. 1.5) e Γ_0 tem medida 'superficial' $d\sigma (=d\gamma)$ positiva.

5.1. Estimativa a posteriori

Cada tabela aqui apresentada exhibe os resultados numéricos obtidos que correspondem a uma dada solução conhecida. Como pelo nosso estudo já sabemos que

os elementos convergem em $\|\cdot\|_{L^2}$, $\|\cdot\|_{H^1}$, $\|\cdot\|_{H^2}$ e $\|\cdot\|_h$ e conhecemos a ordem dessa convergência é que temos usado uma estimativa do erro diferente para indagar o seu comportamento.

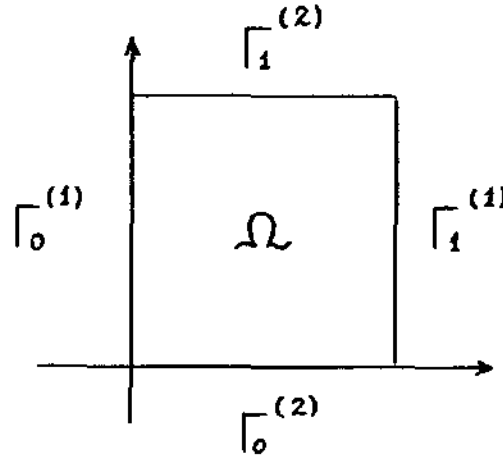


Figura 1

Usamos, nas estimativas a posteriori, o erro relativo em norma Euclideana correspondente a uma convergência pontual em \mathbb{R}^k , k sendo o número de nós da malha nos quais a solução aproximada é conhecida. A nossa expectativa é que conhecendo a priori a convergência em média quadrática ($p=q=2$ em (4.4.53)) do erro ou das suas derivadas de ordem um ou dois, obtenhamos uma convergência pontual de alguma determinada ordem. A fórmula usada para o erro relativo ou percentual é da forma, por exemplo para triângulos ou retângulos do tipo 1:

$$(5.1.1) \quad \frac{\|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{\mathbb{R}^k}}{\|\bar{u}\|_{\mathbb{R}^k}} = \frac{\left(\sum_{i,j=1}^N (u(x_i, y_j) - u_h(x_i, y_j))^2 \right)^{1/2}}{\left(\sum_{i,j=1}^N (u(x_i, y_j))^2 \right)^{1/2}},$$

onde o vetor \bar{u} é a solução exata conhecida e calculada nos k nós da malha, \bar{u}_h é a solução aproximada calculada nos nós da malha. N identifica a ordem da malha visto que usamos N subdivisões no eixo x e N subdivisões no eixo y ; (x_i, y_j) são os nós da malha sobre o domínio Ω de u , com $1 \leq i, j \leq N$, e k é o número total de nós da partição em Ω ($k = N \times N$, no caso atual (5.1.1)).

Cada uma das tabelas apresenta 5 colunas. A primeira da esquerda dá a ordem N da malha assim como o h correpondente (veja o exemplo 1 do capítulo anterior), identificando o refinamento relativo da malha.

As quatro colunas restantes dão o erro relativo mencionado acima e o tempo de CPU, soma dos tempos da montagem da matriz A , do vetor independente f e da resolução x do sistema $Ax = f$, para os respectivos elementos, a saber triângulos do tipo 1, retângulos do tipo 1, triângulos do tipo 2 e o elemento aqui desenvolvido.

No extremo inferior de cada coluna figura a ordem do erro estimado a posteriori.

$N(h)$	T1	R1	T2	NE
$N(h=)$	ERRO CPU	ERRO CPU		ERRO CPU
ordem	h^n	h^m	h^k	h^t

A notação para cada tipo de Elemento Finito será a seguinte:

Triângulos de tipo 1: "T1"

Retângulos de tipo 1: "R1"

Triângulos de tipo 2: "T2"

Novo Elemento: "NE"

Os tempos de CPU, em geral nos exemplos são obtidos tomando 3 pontos no eixo x e 3 pontos no eixo y para a Quadratura Numérica por Gauss, na montagem do lado f do sistema $Ax = f$ o que retornou nos exemplos práticos uma boa estimativa do erro em relação a outro número de pontos qualquer.

A ordem de convergência a posteriori, dada na última linha de cada tabela a continuação, corresponde a melhor ordem inteira verificada para os erros apresentados.

Lembramos que para a ordem k de convergência do erro existe uma constante C que pode depender de u mas que não dependen de h (ou N) tal que:

$$(5.1.2) \quad \text{erro} = \|u - u_h\| \leq Ch^k$$

ou equivalentemente,

$$(5.1.3) \quad \frac{\text{erro}}{h^k} \leq C \quad \text{para } h \in \tau, h \rightarrow 0.$$

Conseqüentemente para cada τ existem seqüências C_N^1 e C_N^2 :

$$(5.1.4) \quad C_N^1 = \frac{\text{erro}}{h^k}, \quad C_N^2 = \frac{\text{erro}}{h^{k+1}}, \quad \text{onde}$$

C_N^1 é limitada (decrescente ou não crescente): $C_N^1 \leq C \quad \forall N$; C_N^2 não é limitada (crescente ou divergente): $\forall C, \exists N : C_N^2 \geq C$. Sendo baseado nisso o nosso critério para obter (até onde for possível) estimativas a posteriori.

Exemplos. Análise e comentários.

A ordem de convergência verificada nos dados da tabela do exemplo 1, para cada elemento, última linha, concorda com o melhor erro a priori estimado para cada um deles. Podemos verificar nesta tabela, por exemplo para T2,

$$C \geq C_5^1 \geq C_{10}^1 \geq C_{15}^1 \geq C_{20}^1 \geq C_{30}^1 \geq \dots \text{ao passo que}$$

$$C_5^2 \leq C_{10}^2 \leq C_{15}^2 \leq C_{20}^2 \leq C_{30}^2 \leq \dots$$

com efeito (5.1.4) com $k = 3$. Os erros lançados por R1 são menores que os obtidos por T1 sendo h^2 a ordem de convergência de ambos. Também nos tempos, R1 se apresenta melhor do que T1, o que é de se esperar já que os polinômios de elementos R1 contem o termo xy a mais de aproximação que os correspondentes de T1, mesmo assim não é suficiente para aumentar em um o grau de convergência do R1 sobre o grau de convergência do T1, so melhora a constante limitante do erro. NE se mostra, neste exemplo, inferior tanto no erro como na ordem de convergência e no tempo de CPU. Mesmo sendo h a ordem de convergência do NE os erros, para malha idênticas, são praticamente da mesma ordem que os de T1 que é de convergência h^2 . isto talvez evidencia a característica quadrática do NE contra a característica linear do T1. Por último na constatação dos erros por NE não devemos esquecer que ele é um elemento não conforme ($V_h \subsetneq C^0(\Omega)$), na aproximação das funções contínuas (q.t.p.) deste exemplo e dos subseqüentes. Também a ordem h^2 provada a priori para NE é baseada na

norma $\|\cdot\|_h$ que não usa a função e sem a sua derivada.

Exemplo 1: Consideramos $u = \sin x \sin y$; $u \in C^\infty(\Omega)$

$N(h)$	T1	R1	T2	NE
5(0.2828)	1.21×10^{-2} 12	3.23×10^{-3} 13	1.43×10^{-4} 30	2.13×10^{-2} 22
10(0.1414)	3.02×10^{-3} 62	8.33×10^{-4} 38	1.3×10^{-5} 191	6.4×10^{-3} 126
15(0.0943)	1.34×10^{-3} 161	3.7×10^{-4} 103	3.15×10^{-6} 683	3.19×10^{-3} 423
20(0.0707)	7.54×10^{-4} 284	2.08×10^{-4} 194	1.16×10^{-6} 1931	1.96×10^{-3} 1024
30(0.0471)	3.35×10^{-4} 724	9.26×10^{-5} 504	2.81×10^{-7} 8421	9.99×10^{-4} 4232
ordem	h^2	h^2	h^3	h

Trivialmente:

$$f = -\Delta u = 2 \sin x \sin y \in L^2(\Omega) \text{ e}$$

$$(5.1.5) \quad g = \begin{cases} \cos x \sin y & \text{em } \Gamma_1^{(1)} \\ \sin x \cos y & \text{em } \Gamma_1^{(2)} \end{cases}$$

é tal que $g \in L^2(\Gamma_1)$.

Com o qual a solução do PVA esta garantida assim com a convergência de u_h a u (1.5 e 4.4)

Comentários: Neste 1º exemplo a solução u é muito bem comportada como se pode apreciar pelos erros. O valor de $h = \frac{\sqrt{2}}{N}$ (confira exemplo 1 do capítulo 4) é arredondado nas tabelas para quatro dígitos decimais.

Pode-se apreciar claramente o melhor desempenho dos T2 tanto nos tempos de CPU como nos erros de aproximações. Por exemplo para T2 com $N=10$ e tempo de CPU 191, o erro correspondente 1.3×10^{-5} e inferior que (melhor):
 7.54×10^{-4} , erro dado por T1 para $N=20$ e tempo de CPU 284;
 2.08×10^{-4} , erro dado por R1 para $N=20$ e tempo de CPU 194;
 3.19×10^{-3} , erro dado por NE para $N=15$ e tempo de CPU 423.

Exemplo 2: Para $u(x, y) = -x^3y^3 \ln(xy)$, $u \in H^3(\Omega)$, $u \notin H^4(\Omega)$, (cf. exemplo 7).

$N(h)$	T1	R1	T2	NE
5(0.2828)	0.20 9	7.28×10^{-2} 8	1.42×10^{-2} 30	7.81×10^{-2} 24
10(0.1414)	5.03×10^{-2} 57	1.47×10^{-2} 38	1.36×10^{-3} 180	2.41×10^{-2} 122
15(0.0943)	2.07×10^{-2} 136	5.98×10^{-3} 90	3.36×10^{-4} 665	1.28×10^{-2} 378
20(0.0707)	1.09×10^{-2} 253	3.2×10^{-3} 175	1.24×10^{-4} 1824	8.26×10^{-3} 1010
30(0.0471)	4.41×10^{-3} 714	1.35×10^{-3} 441	3×10^{-5} 8199	4.46×10^{-3} 4151
ordem	h^2	h^2	h^3	h

Comentários: Os erros obtidos por NE são menores em cada partição do que os erros dados por T1, para valores de N menores que 30 e mesmo assim a convergência a posteriori do NE é h e a de T1 é h^2 , o que é verificado quando, para $N=30$, o erro dado por NE ultrapassa ao erro dado por T1. Comparando erros e tempos de CPU o desempenho do NE, para malhas menores do que 15×15 , e similar ao de T1. Estas comparações ficaram mais evidentes nos exemplos 4.1 e 4.2. A ordem de convergência dos 4 elementos e preservada tanto na teoria como na prática. Como antes T2 tem um comportamento superior que o de R1 que por sua vez mostra um desempenho melhor do que T1.

Exemplo 3: $u(x, y) = x^2y^2$; $u \in C^\infty(\Omega)$

$N(h)$	T1	R1	T2	NE
5(0.2828)	5.86×10^{-2} 4	1.29×10^{-2} 3	1.02×10^{-3} 12	4.01×10^{-2} 12
10(0.1414)	1.48×10^{-2} 25	3.35×10^{-3} 17	1.0×10^{-4} 116	1.66×10^{-2} 75
15(0.0943)	6.37×10^{-3} 58	1.51×10^{-3} 38	2.52×10^{-5} 534	9.44×10^{-3} 300
20(0.0707)	3.49×10^{-3} 110	8.52×10^{-4} 77	9.37×10^{-6} 1597	6.26×10^{-3} 855
30(0.0471)	1.5×10^{-3} 307	3.81×10^{-4} 153	2.31×10^{-6} 7605	3.48×10^{-3} 3888
ordem	h^2	h^2	h^3	h

Comentários: Neste exemplo usamos 2 pontos em cada eixo para a quadratura numérica por Gauss, o que é suficiente para integrar exatamente (10^{-16} , precisão de máquina) polinômios de grau $2n+1$ ($=5$ para $n=2$). Os tempos de CPU, assim como os erros respectivos são menores para R1 do que para T1, sendo a convergência de h^2 para ambos. O comportamento de T2 é claramente superior, sendo que o desempenho de NE é inferior ao dos outros elementos.

Exemplo 4: $u(x, y) = x^6y^6$, $u \in C^\infty(\Omega)$

$N(h)$	T1	R1	T2	NE
5(0.2828)	0.29 12	0.103 8	3.43×10^{-2} 24	0.105 18
10(0.1414)	0.104 46	2.96×10^{-2} 35	4.47×10^{-3} 146	4.83×10^{-2} 111
15(0.0943)	5×10^{-2} 111	1.36×10^{-2} 74	1.22×10^{-3} 642	3.22×10^{-2} 376
20(0.0707)	2.85×10^{-2} 255	7.78×10^{-3} 176	4.69×10^{-4} 1824	2.33×10^{-2} 1019
30(0.0471)	1.24×10^{-2} 616	3.5×10^{-3} 446	1.19×10^{-4} 8426	1.42×10^{-2} 4266
ordem	h^2	$\approx h^2$	h^3	h

Comentários: Podemos ver neste exemplo que para malhas de ordem menores ou iguais do que 15, o desempenho de NE é próximo ou até melhor que o de T1, isto também é observado para potências maiores de xy como mostram os exemplos 4.1 e 4.2 a seguir, em eles a comparação é feita pelo tempo de CPU. As colunas indicam o tempo de CPU dos respectivos elementos assim como a ordem da malha e o erro cometido na aproximação de u por u_h .

Exemplo 4.1 $u(x, y) = (x \cdot y)^6$

N	CPU	T1	N	CPU	NE
8	34	0.15	6	33	8.19×10^{-2}
9	46	0.12	7	46	6.86×10^{-2}
10	61	0.10	8	63	5.98×10^{-2}
12	81	7.55×10^{-2}	9	86	5.34×10^{-2}
14	117	5.69×10^{-2}	10	115	4.83×10^{-2}
16	152	4.41×10^{-2}	11	153	4.41×10^{-2}

Exemplo 4.2 $u(x, y) = (x \cdot y)^9$

N	CPU	T1	N	CPU	NE
9	65	0.22	7	61	0.11
10	85	0.19	8	77	9.34×10^{-2}
13	143	0.13	10	145	7.03×10^{-2}
15	190	0.10	11	188	6.33×10^{-2}
17	247	8.16×10^{-2}	12	239	5.79×10^{-2}
19	323	6.68×10^{-2}	13	305	5.35×10^{-2}
22	441	5.08×10^{-2}	14	372	4.98×10^{-2}
23	479	4.67×10^{-2}	15	474	4.67×10^{-2}
24	549	4.30×10^{-2}	16	566	4.39×10^{-2}

Comentários: Para malhas de ordem maior, o erro dado por T1 decresce mais rapidamente que o erro obtido com NE. Estas características também podem ser observadas

em outros exemplos. Isto é, claro, devido a ordem de convergência, h^2 para T1 e h a posteriori para NE.

Exemplo 5: $u(x, y) = (x \cdot y)^{1.75}$, $u \in H^2(\Omega)$, $u \notin H^3(\Omega)$

$N(h)$	T1	R1	T2	NE
5(0.2828)	4.73×10^{-2} 49	9.4×10^{-3} 34	5.45×10^{-4} 103	3.65×10^{-2} 65
10(0.1414)	1.17×10^{-2} 214	2.42×10^{-3} 147	6.0×10^{-5} 507	1.44×10^{-2} 278
15(0.0943)	5.06×10^{-3} 498	1.09×10^{-3} 334	1.93×10^{-5} 1453	8.09×10^{-3} 764
20(0.0707)	2.78×10^{-3} 939	6.15×10^{-4} 627	9.32×10^{-6} 3282	5.32×10^{-3} 1666
30(0.0471)	1.2×10^{-3} 2182	2.75×10^{-4} 1465	3.56×10^{-6} 11459	2.93×10^{-3} 5684
ordem	h^2	$\approx h^2$	h^2	h

Comentários: Lembremos que para erros a priori nos obtivemos no capítulo anterior:

Para triângulos do tipo 1, $\|v - \Pi_K v\|_{L^2(\Omega)} \leq ch^2 |v|_{H^2(\Omega)}$, para $v \in H^2(\Omega)$

Para quadriláteros do tipo 1, $\|v - \Pi_K v\|_{L^2(\Omega)} \leq ch^2 |v|_{H^2(\Omega)}$, para $v \in H^2(\Omega)$

E, para triângulos do tipo 2, $\|v - \Pi_K v\|_{L^2(\Omega)} \leq ch^3 |v|_{H^3(\Omega)}$, para $v \in H^3(\Omega)$.

$\|v - \Pi_K v\|_{L^2(\Omega)} \leq ch^2 |v|_{H^2(\Omega)}$, para $v \in H^2(\Omega)$.

O comportamento da convergência pontual por nos adotada, claramente, como mostram os exemplos, obedece as estimativas a priori obtidas em norma L^2 , $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$, que é a melhor. No presente exemplo $u \notin H^3(\Omega)$, de fato sobre Ω $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ não é de quadrado integrável, cf.

$$\int \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)^2 dx dy = \left(\frac{21}{64} \right)^2 \int_0^1 y^{7/2} \int_0^1 x^{-5/2} dx dy = +\infty,$$

e portanto a priori não é de se esperar uma convergência cúbica para T2 como mostra a última estimativa acima, o que viria a explicar o fato de se obtermos uma convergência

quadrática a posteriori com T2, para este exemplo. Com tudo o desempenho do T2 é em termos de CPU superior ao dos outros elementos. No próximo exemplo também a solução u não esta em $H^3(\Omega)$, porém a convergência a posteriori atinge a ordem h^3 .

Exemplo 6: $u = \begin{cases} 0 & (x, y) \notin [1, 2] \times [1, 2], \\ (x - 1)^2 (y - 1)^2 & 1 \leq x, y \leq 2 \end{cases}$, ver figura 2.

Então $u \in H^2(\Omega)$ e $u \notin H^3(\Omega)$; $\Omega = [0, 2] \times [0, 2]$.

$N(h)$	T1	R1	T2	NE
6(0.4714)	.14 8	3.8×10^{-2} 4	5.4×10^{-3} 21	7.1×10^{-2} 18
10(0.2828)	5.8×10^{-2} 22	1.5×10^{-2} 16	1.10×10^{-3} 114	4.1×10^{-2} 94
16(0.1768)	2.3×10^{-2} 62	5.9×10^{-3} 45	2.2×10^{-4} 674	2.3×10^{-2} 416
22(0.1286)	1.2×10^{-2} 134	3.2×10^{-3} 103	7.3×10^{-5} 2311	1.5×10^{-2} 1284
30(0.0943)	6.3×10^{-3} 331	1.7×10^{-3} 252	2.5×10^{-5} 7764	9.5×10^{-3} 4084
40(0.0707)	3.4×10^{-3} 841	9.8×10^{-4} 696		
ordem	h^2	$\approx h^2$	h^3	h

Comentários: Aqui só foram usados 2 pontos de Gauss por cada eixo o que é suficiente para obter uma boa aproximação na quadratura usada para o lado f do sistema já que u é, por partes, no máximo um polinômio de grau 2 em cada variável. $u \notin H^3(\Omega)$, de fato $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ é uma função descontínua sobre Ω ,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \begin{cases} 0 & (x, y) \notin [1, 2] \times [1, 2] \\ 2(y - 1)^2 & 1 \leq x, y \leq 2 \end{cases}$$

$\{1\} \times (1, 2]$ é o conjunto de pontos em Ω onde esta “função” é descontínua. Assim não

existe $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$, com efeito

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dy &= \int_1^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \varphi \Big|_{x=1}^{x=2} - \underbrace{\int_1^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \varphi dx}_{=0} \right) dy = \\ &= \int_1^2 \left(2(y-1)^2 \varphi \Big|_{x=1}^{x=2} \right) dy = -2 \int_1^2 (y-1)^2 \varphi(1, y) dy \quad , \end{aligned}$$

este último termo não sendo necessariamente nulo para qualquer $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, ao passo que

$$\int_0^2 \int_0^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \varphi dx dy = \int_1^2 \int_1^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \varphi dx dy = 0, \quad \forall \varphi.$$

Logo $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ não é derivável segundo distribuições pois (1.2.5) não é satisfeita.

Neste exemplo o Laplaciano de u

$$\Delta u = \begin{cases} 0 & (x, y) \in \Omega - ([1, 2] \times [1, 2]) \\ 2((x-1)^2 + (y-1)^2) & 1 \leq x, y \leq 2 \quad , \end{cases}$$

é uma função descontínua no conjunto $(\{1\} \times (1, 2]) \cup ((1, 2] \times \{1\})$, e assim a malha deve ser escolhida de tal forma que esses pontos de descontinuidade estejam contidos na fronteira dos elementos da discretização para que a quadratura

$$\int \int_{K_i} f \varphi_j dx dy \quad , \quad f = -\Delta u \quad \text{sobre } \Omega \quad , \quad K_i \subseteq \Omega$$

pre-programada decorrente do problema discreto não envie um dado errado para a resolução do sistema. De momento basta escolher N par.

Como já foi mencionado, a priori não era de se esperar uma convergência cúbica com T2, mas foi atingida, como podemos verificar nos dados da tabela.

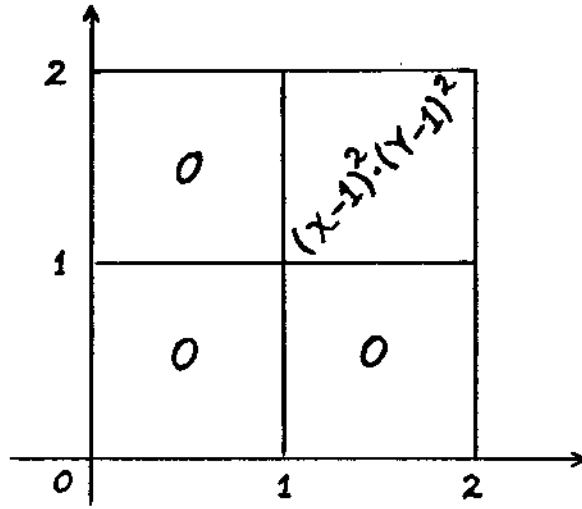


Figura 2

Exemplo 7: $u(x, y) = -xy \ln xy$, $u \in H^1(\Omega)$, $v \notin H^2(\Omega)$

$N(h)$	T1	R1	T2	NE
5(0.2828)	4.77×10^{-2}	1.77×10^{-2}	8.85×10^{-3}	0.12
	6	4	13	15
10(0.1414)	1.22×10^{-2}	3.95×10^{-3}	2.84×10^{-3}	4.12×10^{-2}
	23	18	113	80
15(0.0943)	5.82×10^{-3}	1.69×10^{-3}	1.43×10^{-3}	2.23×10^{-2}
	56	43	529	310
20(0.0707)	3.49×10^{-3}	9.28×10^{-4}	8.82×10^{-4}	1.45×10^{-2}
	105	79	1581	873
30(0.0471)	1.71×10^{-3}	4.04×10^{-4}	4.49×10^{-4}	7.88×10^{-3}
	305	247	7641	3858
ordem	h	h^2	h	h

Comentários: Neste exemplo só temos $v \in H^1(\Omega)$, como veremos a seguir. Felizmente nos temos o seguinte resultado (Teorema 1. capítulo 4), cf. teorema 5.1-4 em [17], sob as mínimas hipóteses do que a solução $u \in H^1(\Omega)$ e que $P_1(K) \subseteq P_K$ para $K \in T_h$, então

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} = 0 .$$

Isto é claro, caso a solução do problema esteja garantida. A ordem de convergência, em norma $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$, dada pelo teorema é h , se $u \in H^2(\Omega)$, mais para

o presente caso nada é garantido com respeito a ordem dessa convergência pois u só pertence a $H^1(\Omega)$. Com tudo podemos verificar na tabela do exemplo 7, convergências a posteriori da ordem h para T1, h^2 para R1, h para T2 e h para NE. Lembremos que usamos, nas estimativas a posteriori, um erro relativo em norma Euclideana e que ele se comporta como nas estimativas a priori em norma $\| \cdot \|_{L^2(\Omega)}$, como pode ser constatado nos exemplos aqui analisados. Verificamos agora que este exemplo faz sentido e que somente temos $u \in H^1(\Omega)$.

A solução u é duas vezes diferenciável (segundo distribuições) com respeito a cada variável, seja $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$(5.1.6) \quad \int \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dy = \int_0^1 (u\varphi \Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x} \varphi dx) dy = - \int \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \varphi dx dy$$

basta mostrar que

$$(5.1.7) \quad u\varphi \Big|_{x=0}^{x=1} = u(1, y)\varphi(1, y) - u(0, y)\varphi(0, y) = 0 \quad \text{q.t.p.} \quad ,$$

com efeito

$$\begin{aligned} u(1, y)\varphi(1, y) &= -y \ln y \cdot 0 = 0 \quad \forall y \in (0, 1], \text{ (i.e. q.t.p sobre } [0, 1]), \text{ e} \\ u(0, y)\varphi(0, y) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} u(\varepsilon, y) \cdot \underbrace{\varphi(0, y)}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

pois usando a regra de L'hôpital,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} u(\varepsilon, y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln \varepsilon y}{\varepsilon y} = y \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\frac{-1}{\varepsilon}}{\frac{1}{\varepsilon^2}} = y \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon = 0$$

Analogamente mostramos a existência de $\frac{\partial u}{\partial y}$. E sobre $\overset{\circ}{\Omega}$

$$(5.1.8) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -y(\ln xy + 1) \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -x(\ln xy + 1)$$

Agora testamos a derivabilidade de $\frac{\partial u}{\partial x}$.

$$(5.1.9) \quad \int \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dy = \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \varphi \Big|_{x=0}^{x=1} \right) dy - \int \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \varphi dx dy =$$

$$- \int \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \varphi dx dy.$$

já que podemos mostrar que

$$(5.1.10) \quad \frac{\partial u}{\partial x} \varphi \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) \varphi(1, y) - \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) \varphi(0, y) = 0 \quad \text{q.t.p.}$$

com efeito

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1, y) \varphi(1, y) = -y(\ln y + 1) \cdot \varphi(1, y) = 0 \quad \text{q.t.p. e}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) \varphi(0, y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\partial u}{\partial x}(\varepsilon, y) \varphi(\varepsilon, y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} -y \varphi(\varepsilon, y) (\ln \varepsilon + \ln y + 1) =$$

$$-y \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varphi(\varepsilon, y) \ln \varepsilon - \underbrace{y \varphi(0, y) (\ln y + 1)}_{=0 \quad \text{q.t.p.}} = 0$$

com efeito

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(\varepsilon, y)}{\frac{1}{\ln \varepsilon}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\varphi'(\varepsilon, y)}{\frac{-1}{\varepsilon \ln^2 \varepsilon}} = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \ln^2 \varepsilon \cdot \varphi'(\varepsilon, y) = 0$$

já que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varphi'(\varepsilon, y) = \varphi'(0, y) = 0 \quad \text{por definição, e}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \ln^2 \varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln^2 \varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{2 \ln \varepsilon}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = -2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \ln \varepsilon = 0$$

como já vimos ao testar a derivabilidade de u .

Analogamente mostramos a derivabilidade de u e $\frac{\partial u}{\partial y}$ com respeito a y . Assim o Δu está definido q.t.p. sobre $\bar{\Omega}$.

De (5.1.8) nos temos q.t.p sobre Ω

$$(5.1.11) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -y \left(\frac{1}{xy} y + 0 \right) = -\frac{y}{x}$$

$$(5.1.12) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -x \left(\frac{1}{xy} x + 0 \right) = -\frac{x}{y}$$

$u \notin H^2(\Omega)$, com efeito

$$\begin{aligned} \int \int_{\Omega} \left(\frac{-y}{x}\right)^2 dx dy &= \int_0^1 \frac{1}{x^2} \left(\int_0^1 y^2 dy\right) dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = \\ \frac{1}{3} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 \frac{1}{x^2} dx &= \frac{1}{3} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{x}\Big|_{\epsilon}^1\right) = \frac{1}{3} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(-1 + \frac{1}{\epsilon}\right) = +\infty. \end{aligned}$$

$u \in H^1(\Omega)$, primeiro mostremos que $u \in L^2(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int \int_{\Omega} u^2 dx dy &= \int \int_{\Omega} (xy \ln x + xy \ln y)^2 dx dy = \\ \int_0^1 y^2 \left(\int_0^1 x^2 \ln^2 x dx\right) dy &+ 2 \int_0^1 y^2 \ln y \left(\int_0^1 x^2 \ln x dx\right) dy \\ + \int_0^1 y^2 \ln^2 y \left(\int_0^1 x^2 dx\right) dy \end{aligned}$$

bastando verificar que as seguintes integrais existem

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 \ln^2 x dx &= \left(\frac{x^3}{3} \ln^2 x - \frac{2}{9} x^3 \ln x + \frac{2}{27} x^3\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{27} \\ \int_0^1 x^2 \ln x dx &= \left(\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9}\right)\Big|_0^1 = -\frac{1}{9} \end{aligned}$$

considerando que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln^2 x = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln x = 0 \quad ,$$

e ainda $\frac{\partial u}{\partial x} \in L^2(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx dy &= \int \int_{\Omega} y^2 (\ln x + \ln y + 1)^2 dx dy \\ &= \int_0^1 y^2 \left(\int_0^1 \ln^2 x dx\right) dy + 2 \int_0^1 y^2 \ln y \left(\int_0^1 \ln x dx\right) dy \\ + 2 \int_0^1 y^2 \left(\int_0^1 \ln x dx\right) dy &+ \int_0^1 \int_0^1 y^2 \ln^2 y dy dx + \int_0^1 \int_0^1 y^2 \ln y dy dx + \int_0^1 \int_0^1 y^2 dy dx \end{aligned}$$

onde é suficiente que existam as integrais

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln^2 x dx &= (x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x)\Big|_0^1 = 2 \\ \int_0^1 \ln x dx &= (x \ln x - x)\Big|_0^1 = -1 \end{aligned}$$

onde

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^2 x = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \quad \square$$

Até aqui temos provado que, $u \in H^1(\Omega)$, $u \notin H^2(\Omega)$ e Δu está definido q.t.p. sobre Ω (de uma generalização deste exemplo por indução, seguindo o mesmo tratamento dado aqui, prova-se que

$$u = (xy)^n \ln xy \in H^n(\Omega) \quad \text{e} \quad u \notin H^{n+1}(\Omega).$$

Para que ao menos o problema fraco faça sentido as integrais envolvidas na formulação devem existir. Não devemos esquecer aqui que para usar o Teorema de existência, de u , requisitamos $f \in L^2(\Omega)$ que não é o presente caso, com tudo, este exemplo mostra uma clara convergência do método, através da convergência dos erros.

Vale também dizer que se $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \notin L^2(\Omega)$ então também $f \notin L^2(\Omega)$, como em (5.1.11), (5.1.12).

Assim na formulação aproximada,

$$\int_{\Omega} \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j d\bar{x} = \int_{\Omega} f \psi_j d\bar{x} + \int_{\Gamma_1} \gamma_0 \frac{\partial u}{\partial \eta} \gamma_0 \psi_j d\sigma$$

podemos observar que as integrais existem. Na parte Γ_1 da fronteira não encontramos dificuldade para integrar o termo $\gamma_0 \frac{\partial u}{\partial \eta} \gamma_0 \psi_j$.

Para elementos K com um dos seus lados na parte Γ_0 da fronteira, a integral

$$\int_K f d\bar{x} = \int \int_K \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) dx dy$$

é indeterminada, mas a integração

$$\int_K f \varphi_j d\bar{x} \quad (\varphi_j = \psi_{j/K} \in P_K)$$

existe, com efeito, φ_j é um polinômio tal que

$$\varphi_j|_{\Gamma_0} = 0 \quad \text{logo} \quad \varphi_j|_{\Gamma_1} = x \cdot p \quad \text{e} \quad \varphi_j|_{\Gamma_2} = yq$$

onde p e q são polinômios, e para o caso do K ser um quadrilátero com um vértice na origem $\varphi_j|_K = xyp$ onde p é um polinômio.

Por último, é interessante comparar este exemplo com a solução de $H^1(\Omega)$ a seguir,

Exemplo 8: $u = \frac{2}{3}(x - x^2)^{3/2}y$, $u \notin H^2(\Omega)$,

cuja ordem a posteriori de convergência é menor do que h para os quatro elementos. Com efeito, $u \in H^1(\Omega)$. Como podemos trivialmente verificar $u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ pertencem a $L^2(\Omega)$. Agora bem, usando (5.1.9) e (5.1.10) concluímos que $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ existe e (veja 1.1-8 e subsequente análise em [17])

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{(1 - 8x + 8x^2)}{2(x - x^2)^{1/2}} y, \text{ mais } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \notin L^2(\Omega), \text{ com efeito} \\ \int \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx dy &= \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{(1 - 8x + 8x^2)}{(x - x^2)} \left(\int_0^1 y^2 dy \right) dx, \text{ onde} \\ \int_0^1 \frac{(1 - 8x + 8x^2)^2}{(x - x^2)} dx &= -16 - 16x + 32x^2 - \frac{64}{3}x^3 + \ln \frac{x}{1-x} \Big|_0^1 \end{aligned}$$

a integrabilidade dependendo do último termo,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \ln \frac{x}{1-x} \Big|_{\epsilon}^{1/2} + \lim_{\epsilon \rightarrow 1^-} \ln \frac{x}{1-x} \Big|_{1/2}^{\epsilon} = +\infty$$

logo $u \notin H^2(\Omega)$.

$$\Delta u = \frac{(1 - 8x + 8x^2)}{2(x - x^2)^{1/2}} y \quad \text{q.t.p. sobre } \Omega .$$

As expressões $\frac{x^m}{(x - x^2)^{1/2}}$, $m \geq 0$ são integráveis sobre qualquer compacto contido em Ω (ver fórmulas integrais números 86,89,90,91), logo o lado f do sistema está garantido, já que

$$(5.1.13) \quad f_j = \int \int_{\text{sup } \varphi_j} f \varphi_j dx dy + \int_{\Gamma_1} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \varphi_j \right) /_{\Gamma_1} d\gamma ,$$

onde $f = -\Delta u$ e $\varphi_j \in P_K$, $K \subseteq \Omega$ e

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \eta_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \eta_2 \frac{\partial u}{\partial y} , \quad \eta = (\eta_1, \eta_2)$$

onde η é normal e exterior a fronteira $\partial\Omega$. Com 3 coordenadas por eixo na quadratura Gaussiana obteve-se os seguintes resultados

$N(h)$	T1	R1	T2	NE
5(0.2828)	.12 59	.12 38	.1 119	.13 80
10(0.1414)	7.4×10^{-2} 263	7.4×10^{-2} 192	7×10^{-2} 608	7.5×10^{-2} 383
15(0.0943)	5.8×10^{-2} 628	5.9×10^{-2} 431	5.7×10^{-2} 1522	5.8×10^{-2} 963
20(0.0707)	5×10^{-2} 1127	5×10^{-2} 787	4.9×10^{-2} 3410	4.9×10^{-2} 2059
30(0.0471)	4×10^{-2} 2620	4×10^{-2} 1962	4×10^{-2} 11704	4×10^{-2} 6493
ordem	$< h$	$< h$	$< h$	$< h$

Usando uma quadratura Gaussiana mais refinada: 9 pontos por eixo, o erro diminui consideravelmente como mostra a próxima tabela.

$N(h)$	T1	R1	T2	NE
5(0.2828)	1.1×10^{-2}	9.2×10^{-3}	8.4×10^{-3}	1×10^{-2}
10(0.1414)	6.7×10^{-3}	6.4×10^{-3}	6.3×10^{-3}	6.4×10^{-3}
15(0.0943)	5.4×10^{-3}	5.3×10^{-3}	5.3×10^{-3}	5.3×10^{-3}
20(0.0707)	4.6×10^{-3}	4.6×10^{-3}	4.6×10^{-3}	4.6×10^{-3}
30(0.0471)	3.38×10^{-3}	3.8×10^{-3}	3.8×10^{-3}	3.8×10^{-3}
ordem	$< h$	$< h$	$< h$	$< h$

Nestes últimos dados a ordem h de convergência não é atingida para nenhum dos quatro elementos. Nas últimas duas tabelas os erros lançados pelos testes são idênticos para os quatro elementos (???) saindo com vantagem R1 que usa menor tempo de CPU, em seguida T1, NE e T2 respectivamente. Provavelmente a baixa convergência dos resultados, neste exemplo, é devido aos dados aproximados pela quadratura nas entradas f_j em (5.1.13) causadas pelo termo assintótico

$$f\varphi_j = \frac{P}{(x-x^2)^{1/2}}, \quad P \text{ polinômio em } x \text{ e } y.$$

Por último, a ordem de convergência para este exemplo é superior a $h^{1/2}$, para os quatro elementos.

Exemplo 9:

$$u(x, y) = x^{1/2}y^7, \quad u \in L^2(\Omega), \quad u \notin H^1(\Omega)$$

u é derivável no sentido de desitribuições e

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{2}x^{-1/2}y^7, \text{ mais } \frac{\partial u}{\partial x} \notin L^2(\Omega), \text{ com efeito} \\ \int \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx dy &= \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{x} \left(\int_0^1 y^{14} dy\right) dx = \\ \frac{1}{60} \int_0^1 \frac{1}{x} dx &= \frac{1}{60} \ln x \Big|_0^1 = -\frac{1}{60} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ln \varepsilon = +\infty \end{aligned}$$

logo $u \notin H^1(\Omega)$.

O laplaciano Δu esta definido q.t.p sobre Ω e

$$\Delta u = 42x^{1/2}y - \frac{1}{4}x^{-3/2}y^7$$

Além do mais é possível efetuar a integração das entradas do lado f do sistema decorrente da discretização (como no exemplo 7). Portanto o problema discreto está definido.

$N(h)$	T1	R1	T2	NE
5(0.2828)	9.8×10^{-2} 22	4.3×10^{-2} 17	1.1×10^{-2} 54	8.9×10^{-2} 36
10(0.1414)	3×10^{-2} 99	1.7×10^{-2} 66	8.1×10^{-3} 272	5.5×10^{-2} 173
15(0.0943)	1.6×10^{-2} 234	1.1×10^{-2} 169	7×10^{-3} 930	3.8×10^{-2} 522
20(0.0707)	1.1×10^{-2} 443	8.5×10^{-3} 302	6.3×10^{-3} 2211	2.8×10^{-2} 1195
30(0.0471)	6.8×10^{-3} 1079	6.2×10^{-3} 778	5.3×10^{-3} 9293	1.8×10^{-2} 4518
ordem	h	h	$< h$	h

Enquanto T1, R1 e NE atingem a ordem h de convergência T2 não chega a uma ordem de convergência de $h^{1/2}$.

Observação: Verifica-se que as componentes (a maioria) do vetor $\vec{u} - \vec{u}_h$, isto é, $|u(x_i) - u_h(x_i)|$, tem uma convergência da mesma ordem do que o erro percentual.

Exemplo 10:

$$u = (xy)^{3/5}, u \in H^1(\Omega), u \notin H^2(\Omega)$$

$N(h)$	T1	R1	T2	NE
5(0.2828)	1.2×10^{-2} 48	6.4×10^{-3} 34	1.2×10^{-2} 109	7.5×10^{-2} 63
10(0.1414)	7.2×10^{-3} 220	6.8×10^{-3} 143	7.1×10^{-3} 549	3.5×10^{-2} 315
15(0.0943)	5.2×10^{-3} 508	5.9×10^{-3} 328	5.5×10^{-3} 1520	2.3×10^{-2} 838
20(0.0707)	4.3×10^{-3} 889	5.2×10^{-3} 630	4.7×10^{-3} 3237	1.7×10^{-2} 1683
30(0.0471)	3.3×10^{-3} 2186	4.3×10^{-3} 1512	3.7×10^{-3} 11529	1.1×10^{-2} 5679
ordem	$< h$	$< h$	$< h$	h

Sobre o interior de Ω u é indefinidamente diferenciável, isto é

$$u \in C^\infty(\overset{\circ}{\Omega}),$$

onde $\Omega - \overset{\circ}{\Omega} = \partial\Omega$ é um conjunto de medida nula. Assim

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}x^{-2/5}y^{3/5}\right)^2 = \frac{9}{25}x^{-4/5}y^{6/5} \quad \text{então}$$

$$\int \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx dy = \frac{9}{25} \int_0^1 x^{-4/5} \left(\int_0^1 y^{6/5} dy\right) dx =$$

$$\frac{45}{275} \int_0^1 x^{-4/5} dx = \frac{45}{275} \cdot 5x^{1/5} \Big|_0^1 < \infty.$$

Analogamente com respeito a y , logo $u \in H^1(\Omega)$.

$$\int \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx dy = \frac{36}{625} \int_0^1 x^{-14/5} \left(\int_0^1 y^{6/5} dy \right) dx =$$

$$\frac{36}{625} \cdot \frac{5}{11} \int_0^1 x^{-14/5} dx = \frac{36}{625} \cdot \frac{5}{11} \cdot \left(-\frac{5}{9} \right) x^{-9/5} \Big|_0^1 = \infty.$$

Observações e conclusões finais

Pelos exemplos analisados aqui pode ser observado que em geral os erros dados a priori (no caso atual para valores da função) coincidem com a melhor ordem inteira estimada a posteriori com exceção do exemplo 6 onde para uma função de H^2 , $T2$ obteve 'uma' ordem de convergência a mais da esperada a priori.

Também obteve-se convergência para exemplos não previstos em teoria, como nos últimos.

Levando em consideração estes últimos exemplos, é desejável achar condições gerais que permitam garantir soluções e até ordens de convergência para funções u exclusivamente de $H^1(\Omega)$ ou $L^2(\Omega)$, como as dos exemplos 7,8,9 e 10 onde as propriedades que garantem uma solução e uma aproximação a ela foram enfraquecidas e ainda assim foi obtida uma clara convergência do método.

BIBLIOGRAFIA PRINCIPAL

- [01] E.B. Becker, G. F. Carey, J.T. Oden - Finite Elements, An Introduction, Vol. I, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1983.
- [02] G.F. Carey, J.T. Oden - Finite Elements, Vol. II, A Second Course, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1983.
- [03] G.F. Carey, J.T. Oden - Finite Elements, Computational Aspects, Vol. III, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1984.
- [04] P.G. Ciarlet - Numerical Analysis of The Finite Element Method, Les Presses de L'Université de Montreal, Canada, 1976.
- [05] P.G. Ciarlet - The Finite Element Method for Elliptic Problems, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, N.Y., Oxford, 1978.
- [06] P.G. Ciarlet - Quelques Methodes D'Elements Finis pour le Problème D'une Plaque Encastrée, Lecture Notes in Computer Science 10 (1983), 157-176, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1974.
- [07] R. Dautray, J.L. Lions - Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques, Vol. I, Modèles Physiques, Masson, Paris, New York, Barcelone, Milan, Mexico, São Paulo, 1987.
- [08] R. Dautray, J.L. Lions - Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques, Vol. II, L'Operateur de Laplace, Masson, Paris, N. Y., Barcelone, Milan, Mexico, São Paulo, 1987.
- [09] R. Dautray, J.L. Lions - Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques, Vol. III, Transformations, Sobolev, Operateurs, Masson, Paris, Barcelone, Mexico, São Paulo, 1987.

- [10] G. Fairweather - Finite Element Galerkin Methods for Differential Equations, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 1978.
- [11] C. Johnson - Numerical Solution of Partial Differential Equations by The Finite Element Method, Cambridge University Press, Cambridge, New York, New Rochelle, Melbourne, Sydney, 1987.
- [12] P.Linz - Theoretical Numerical Analysis an Introduction to Advanced Techniques, John Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, 1979.
- [13] L.A. Medeiros, M.M. Miranda - Introdução aos Espaços de Sobolev e as Equações Diferenciais Parciais, Rio de Janeiro, R.J., 1989.
- [14] V.P. Mijailov - Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales, Mir, Moscu, 1978.
- [15] J.T. Oden, G.F. Carey - Finite Elements, Vol. IV, Mathematical Aspects, Prentice-Halls Inc., Englewood Cliffs, new York, 1983.
- [16] I.N. Sneddon - Fourier Transforms, Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1951.
- [17] P.A. Raviart, J.M. Thomas - Introduction a L'Analyse Numérique des Equations aux Derivées Partielles, Masson, Paris. Milan, Barcelone, Mexico, 1983.
- [18] P.A. Raviart, J.M. Thomas - Méthode des Éléments Finis, Université de Paris IV, Laboratoire D'Analyse Numérique. 1971-1972.
- [19] F.J. Thayer - Notes on Partial Differential Equations, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1980.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

- [20] A. Broman - Introduction to Partial Differential Equation from Fourier Series to Boundary-Value Problems, Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, 1968.
- [21] S.D. Conte - Elementary Numerical Analysis Mc Graw-Hill Book Company, New York, Toronto, St. Louis, London, San Francisco, Sydney, 1965.
- [22] C.S. Desai., J.F. Abel - Introduction to the Finite Element Method, A Numerical Method for Engineering Analysis, Van Nostrand Reinhold Company, New York, Cincinnati, Toronto, London, Melbourne, 1972.
- [23] I.S. Duff, A.M. Erisman, J.K. Reid - Direct Methods for Sparse Matrices, Clarendon Press, Oxford, 1986.
- [24] D. G. Figueiredo - Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1977.
- [25] I. Fried - Numerical Solution of Differential Equations, Academic Press, New York, San Francisco, London, 1979.
- [26] R.H. Gallager, J.T. Oden, C. Taylor, O.C. Zienkiewics - Finite Elements in Fluids, Vol. I, Viscous Flow and Hydrodynamics, John Wiley & Sons, London, New York, Sidney, Toronto, 1975.
- [27] R.H. Gallager, J.T. Oden, C. Taylor, O.C. Zienkiewics - Finite Elements in Fluids, Vol. II, Mathematical Foundations, Aerodynamics and Lubrications, John Wiley & Sons, London, New York, Sidney, Toronto, 1975.
- [28] E. Hinton, D.R.J. Owen - Finite Element Programming. Academic Press, London, New York, San Francisco, 1977.

- [29] B. Hun - Numerical Methods in Applied Fluids Dynamics, Academic Press, London, New York, Toronto, Sydney, San Francisco, 1980.
- [30] A. Iserles, M. J. D. Powell - The State of Art in Numerical Analysis, Clarendon Press, Oxford, 1987.
- [31] V.V. Ivanov - The Theory of Approximate Methods and their Application to the Numerical Solution of Singular Integral Equations, Noord Hoff International Publishing, Leyden, 1976.
- [32] J.Kevorkian - Partial Differential Equations, Analytical Techniques, Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Pacific Grove, California, 1990.
- [33] H. Kardestuncer, D.H. Norrie (editores) - Finite Element Hand Book, Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1987.
- [34] B. Mercier - Topics In Finite Element Solution of Elliptic Problems, Springer-Verlag, Berlin, 1979.
- [35] K.C. Rockey, H.R. Evans, D.W. Griffiths, D.A. Nethercot - The Finite Element Method, A Basic Introduction, A Halsted Book, John Wiley & Sons. New York. 1975.
- [36] T.M. Shis - Numerical Heat Transfer, Hemisphere Publishing Corporation. Washington, New York, London, 1984.
- [37] P.Tong, J.N. Rossettos - Finite Element Method, Basic Techniques and Implementation, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, England, 1977.
- [38] R. Vichnevetsky - Computer Methods for Differential Equations, Vol. I, Elliptic Equations and the Finite-Element Method, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1981.
- [39] E. Zauderer - Partial Differential Equations of Applied Mathematics, John Wiley & Sons, Singapore, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, 1989.