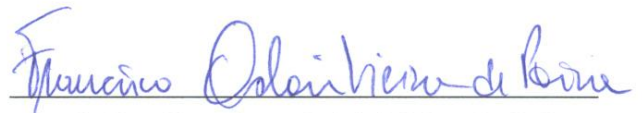


Existência e Multiplicidade de Soluções para a Equação de Schrödinger Não-Linear em $\mathbb{R}^N$

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Mazílio Coronel Malavazi e aprovada pela comissão julgadora

Campinas - SP, 09 de março de 2007.



Prof. Dr. Francisco Odair Vieira de Paiva
Orientador



Prof. Dr. Aloísio Freiria Neves
Co-orientador

Banca Examinadora:

1. Prof. Dr. Francisco Odair Vieira de Paiva
2. Prof. Dr. Marcelo Fernandes Furtado
3. Prof. Dr. Marcelo da Silva Montenegro

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecária: Miriam Cristina Alves – CRB8a / 5094

Mazílio Coronel Malavazi

M457e Existência e multiplicidade de soluções para a Equação de Schrödinger não-linear em $\mathbb{R}^n$ / Mazílio Coronel Malavazi -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2007.

Orientador : Francisco Odair Vieira de Paiva

Co-orientador: Aloísio Freiria Neves

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Schrödinger, Equação de. 2. Equações diferenciais elípticas. 3. Morse, Teoria de. 4. Cálculo das variações. I. Paiva, Francisco Odair Vieira de. II. Neves, Aloísio Freiria. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

(mca/imecc)

Título em inglês: Existence and multiplicity of solutions for the non-linear Schrödinger Equation in $\mathbb{R}^n$

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Schrödinger equation. 2. Elliptics differential equation. 3. Morse theory. 4. Calculus of variations.

Área de concentração: Equações diferenciais parciais

Titulação: Mestre em Matemática

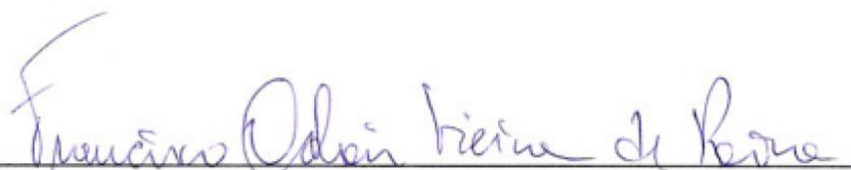
Banca examinadora: Prof. Dr. Francisco Odair Vieira de Paiva (IMECC-Unicamp)
Prof. Dr. Marcelo Fernandes Furtado (UnB)
Prof. Dr. Marcelo da Silva Montenegro (IMECC-Unicamp)

Data da defesa: 16/02/2007

Programa de Pós-Graduação: Mestrado em Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 16 de fevereiro de 2007 e aprovada

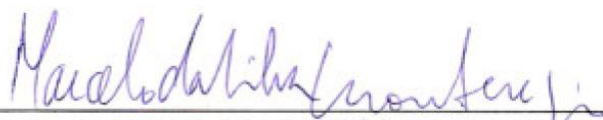
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof. (a). Dr (a). FRANCISCO ODAIR VIEIRA DE PAIVA



Prof. (a). Dr (a). MARCELO FERNANDES FURTADO



Prof. (a). Dr (a). MARCELO DA SILVA MONTENEGRO

*... à minha família, em especial a
meus pais.*

"O importante é isto: Estar pronto para, a qualquer momento, sacrificar o que somos pelo que podemos vir a ser".
(Charles Du Bois)

Agradecimentos

- Aos professores Odair e Aloísio, pela orientação.
- À minha família.
- Aos professores do Departamento de Matemática da Unicamp, em especial ao professor Djairo, professora Sueli e a todos aqueles que contribuíram para a realização deste trabalho.
- Aos professores do Departamento de Matemática da Unemat, em especial a professora Maria Zoraide.
- Ao amigo e professor Luiz Antônio, o principal responsável por eu estar aqui hoje.
- Aos amigos Cristiano, Gláucia, Rogério, Guierino e Nilzo.
- Aos companheiros de luta aqui da Unicamp.
- Aos funcionários do Imecc/Unicamp, em especial os da secretaria de pós-graduação e do café.
- Ao Imecc/Unicamp.
- À Capes, pelo apoio financeiro.
- Àqueles que, lamentavelmente não me lembro neste momento, mas que de alguma forma colaboraram com minha formação.

Resumo

Nesta dissertação obtemos resultados de multiplicidade de soluções fracas não triviais para o problema

$$-\Delta u + V(x)u = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

onde V é contínua, f é C^1 , com $f(x, 0) = 0$ e f é assintoticamente linear. Utilizamos métodos variacionais e a teoria de grupos críticos, para obtermos e distinguirmos as soluções. Apresentamos também resultados de existência de solução não trivial para o problema

$$-\Delta u + V(x)u = f(u), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

onde V e f são funções contínuas. Utilizamos as técnicas de concentração de compacidade e de aproximação do domínio por subconjuntos limitados, para obtermos a solução.

Palavras-Chave: Equação de Schrödinger, Assintoticamente Linear, Multiplicidade de Soluções, Teoria de Morse, Métodos Variacionais, Concentração de Compacidade, Aproximação por Domínio Limitado, Problemas Elípticos, Existência de Solução.

Abstract

In this dissertation we get resulted of multiplicity of not trivial weak solutions for the problem

$$-\Delta u + V(x)u = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

where V is continuous, f is C^1 , with $f(x, 0) = 0$ and f is asymptotically linear. We use variational methods and the theory of critical groups, to get and to distinguish the solutions. We also present results of existence of not trivial solution for the problem

$$-\Delta u + V(x)u = f(u), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

where V and f are continuous functions. We use the techniques of concentration of compactness and approximation of the domain for bounded subsets, to get the solution.

Palavras-Chave: Schrödinger Equation, Asymptotically Linear, Multiplicity of Solutions, Morse Theory, Variational Methods, Concentration of Compactness, Approximation for Bounded Domains, elliptic Problems, Existence of Solution.

Sumário

Introdução	10
1 Multiplicidade de Soluções	14
1 Preliminares	18
2 Demonstração dos Resultados Principais	26
2.1 Demonstração do Teorema 1.1	27
2.2 Demonstração do Teorema 1.2	28
Apêndice A: Propriedades do Espaço H	31
Apêndice B: Teoria Espectral	34
B.1 Operadores Compactos Simétricos	34
B.2 Autovalores do Operador $-\Delta + V(x)$	38
Apêndice C: Teoria de Pontos Críticos	43
Apêndice D: Preliminares para a Compacidade	47
Apêndice E: Preliminares para a Geometria	51
2 Existência de Solução	53
1 Geometria do Passo da Montanha	56
2 Existência de uma Seqüência (z_n) Limitada em H	60
3 Existência de uma Seqüência de Cerami (u_n) Limitada em H	64
4 Um Ponto Crítico Não-trivial para o Funcional I	74
5 Demonstração dos Resultados Principais	82
Apêndice F: Problemas Autônomos	83
Apêndice G: Existência da Primeira Autofunção	87
Referências Bibliográficas	89

Introdução

Estamos interessados, neste trabalho, em estudar a equação diferencial parcial elíptica,

$$-\Delta u + V(x)u = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (\text{P1})$$

onde u pertence a um espaço de Sobolev adequado, V é um potencial contínuo e f tem regularidade apropriada.

O problema é motivado pelo estudo de existência de "*standing wave solution*" para a equação de evolução de Schrödinger não-linear. Este tipo de equação tem muitas aplicações, dentre estas, as soluções de (P1) podem ser vistas como soluções estacionárias para muitos problemas de evolução que descrevem processos naturais e físicos, conforme apresentado por [21].

A principal motivação para o estudo da equação (P1) vem da física quântica não-relativística, onde a equação de evolução de Schrödinger: $i v_t + \Delta v - V(x)v - f(v) = \mu v$, é usada para determinar o comportamento da função de onda de um dado sistema físico. As soluções desta equação de evolução, tipo "*standing waves*", $v(x, t) = e^{-i\mu t} u(x)$, onde u é solução de (P1), tem uma importante interpretação física. Elas correspondem a estados estáveis em um nível de energia definido.

Estudaremos equações elípticas semilineares, com comportamento assintoticamente linear. Esse comportamento aparece em diversos problemas físicos, como no estudo de campos eletromagnéticos, vide [31] e [32]. Por exemplo, a não-linearidade assintoticamente linear da forma

$$f(s) = \frac{|s|^2}{1 + \gamma|s|^2} s, \quad \gamma > 0$$

descreve a variação da constante dielétrica de um certo gás, onde um feixe de laser se propaga. Já a não-linearidade da forma

$$f(s) = 1 - \frac{1}{\exp \gamma |s|^2} s, \quad \gamma > 0$$

pode ser encontrada no contexto da propagação de feixes de laser no plasma, vide [33].

Neste contexto, discutiremos alguns resultados de multiplicidade de soluções via métodos variacionais e teoria de Morse. Mais precisamente estamos interessados em multiplicidade de soluções não triviais.

Equações do tipo (P1) em domínio limitado, têm sido extensivamente estudadas. No entanto, os problemas em domínio ilimitado introduzem novas características específicas, revelando-se um especial interesse dos matemáticos em problemas no $\mathbb{R}^N$.

A seguir apresentamos um exemplo dessas peculiaridades dos problemas no $\mathbb{R}^N$. Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e limitado, com bordo suave. Então para qualquer $1 \leq p < 2^*$, onde $2^* = +\infty$, se $N = 1, 2$ e $2^* = \frac{2N}{N-2}$, se $N > 2$, temos que $H_0^1(\Omega)$ está imerso compactamente em $L^p(\Omega)$. Este fato é crucial para a investigação de equações elípticas não-lineares neste domínio. Entretanto, se o domínio não é limitado, a imersão compacta falha, o que provoca dificuldades essenciais. Estas dificuldades são intrínsecas ao domínio, ou seja, estão ligadas as propriedades, completamente diferentes, dos problemas elípticos não-lineares em $\mathbb{R}^N$.

Durante todo o texto consideramos $N \geq 3$, no entanto, todos os resultados podem ser obtidos para $N = 2$, sem hipóteses adicionais, através de algumas variações na abordagem da resolução do problema.

No Capítulo 1, obtemos resultados de multiplicidade de soluções para (P1), onde $f \in C^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, tal que $f(x, 0) = 0$. Esta última condição nos diz que o problema (P1) possui uma solução trivial, a função identicamente nula. Estamos interessados em soluções fracas não triviais. Soluções de (P1) são precisamente os pontos críticos do funcional

$$I(u) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2) dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u) dx, \quad u \in H,$$

onde $F(x, u) = \int_0^u f(x, s) ds$ e $H := \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx < +\infty\}$.

Usualmente para mostrar que o funcional I possui pontos críticos, mostra-se que o mesmo possui certa estrutura geométrica e que o conjunto de seus pontos críticos tem uma certa compacidade, mais precisamente, satisfaz a condição de Palais-Smale, onde a imersão compacta de H em $L^p(\mathbb{R}^N)$, para $2 \leq p < 2^* = \frac{2N}{N-2}$ é um fato essencial, o que não acontece com o espaço de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N)$. Neste caso mostraremos que o funcional I , sob hipóteses adequadas, tem ao mesmo tempo pontos críticos do tipo ponto de sela e passo da montanha

(generalizado) ou pontos críticos do tipo ponto de sela e *linking* (vide Perera [29]). Em ambos os casos utilizamos teoria de grupos críticos para distinguirmos as soluções.

Resultados de existência de solução para esse problema no $\mathbb{R}^N$ com ressonância, foram obtidos por Furtado, Maia e Silva em [15] e por Furtado e Silva em [17]. Paiva em [25] e [26] estudou esse problema em domínio limitado, onde obteve resultados de multiplicidade de soluções. Resultados de existência para problemas semelhantes em domínio limitado foram obtidos por Perera, em [28], Rabinowitz, em [30], Berestycki e Figueiredo, em [3], Zou, em [35] e Costa, em [8], onde o último obteve resultados para sistemas de equações em $\mathbb{R}^N$.

No Capítulo 2, estudamos (P1), onde f não depende de $x \in \mathbb{R}^N$, mais precisamente, estudamos o problema

$$-\Delta u + V(x)u = f(u), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (\text{P2})$$

com $f \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, tal que $f(x, 0) = 0$. Esta última condição nos diz que o problema (P2) possui uma solução trivial, a função identicamente nula. Apresentamos os resultados obtidos por Jeanjean e Tanaka, em [20] e Liu e Wang, em [23]. Uma das principais características apontadas, é que o problema é autônomo no infinito, ou seja, $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} V(x) = V_\infty$.

A principal dificuldade encontrada no estudo do problema, está no fato de não termos a imersão compacta de $H^1(\mathbb{R}^N)$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$. Para contornar esse problema, [20] utiliza a técnica de concentração de compacidade de P. L. Lions, juntamente com o fato do problema ser autônomo no infinito. Soluções de (P2) são precisamente os pontos críticos do funcional

$$I(u) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2) dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u) dx, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

onde $F(u) = \int_0^u f(s) ds$. Assim obtem-se uma seqüência de Cerami para I e a partir da técnica de concentração de compacidade, mostra-se que esta seqüência é limitada. Juntamente com o fato do problema ser autônomo no infinito, utilizando-se de resultados de Berestycki e Lions, em [4], mostra-se que essa seqüência converge, a menos de subseqüência, a uma solução não-trivial de (P2).

Liu e Wang, em [23], estudam o problema a partir da aproximação do domínio por subconjuntos limitados, assim empregando resultados conhecidos para domínios limitados. Mais

precisamente, aproxima o $\mathbb{R}^N$ por bolas centradas na origem de raio $R_n \rightarrow +\infty$. Mostra-se que a partir de um certo raio, o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = f(u), & B(0, R_n) \\ u = 0, & \partial B(0, R_n). \end{cases}$$

sempre tem solução positiva, ainda mais, que essas soluções, a menos de subsequência, convergem para uma solução não-trivial de (P2). É importante destacar que nos casos apresentados por [23], não precisamos que exista $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} V(x)$, basta apenas uma limitação apropriada deste limite.

Capítulo 1

Multiplicidade de Soluções

Neste capítulo, obtemos existência e multiplicidade de soluções para o problema elíptico semilinear

$$-\Delta u + V(x)u = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (1.1)$$

com $N \geq 3$, a função $f \in C^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, tal que $f(x, 0) = 0$. Esta última condição nos diz que (1.1) possui uma solução trivial $u = 0$. Estamos interessados em soluções não triviais.

Considere o potencial $V \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$,

(V_0) existe $V_0 \in \mathbb{R}$, tal que

$$0 < V_0 \leq \inf_{x \in \mathbb{R}^N} V(x).$$

(V_1) para todo $M > 0$, temos

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^N : V(x) \leq M\}) < +\infty,$$

onde μ denota a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^N$.

Observe que, se V é coercivo, isto é,

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} V(x) = +\infty,$$

então V satisfaz (V_1).

Tomando $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $V(x) = |x| + \alpha$, com $\alpha > 0$, temos que V satisfaz V_0 e V_1 .

Assuma que

(f_1) $f \in C^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $|f'(x, s)|$ é limitada em $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, onde $f'(x, s)$ é a derivada parcial com relação a segunda variável.

Vamos buscar soluções de (1.1) em

$$H := \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx < +\infty\}.$$

A partir deste ponto, quando não indicarmos sobre qual conjunto está definida a integral, é porque a integração é sobre o $\mathbb{R}^N$.

O espaço H é um espaço de Hilbert munido do produto interno

$$\langle u, v \rangle := \int (\nabla u \nabla v + V(x)uv) dx$$

com norma correspondente

$$\|u\|^2 := \int (|\nabla u|^2 + V(x)u^2) dx.$$

Do Apêndice A, temos que H está imerso continuamente em $L^p(\mathbb{R}^N)$, para $2 \leq p \leq 2^*$ e está imerso compactamente em $L^p(\mathbb{R}^N)$, para $2 \leq p < 2^*$, onde $2^* = \frac{2N}{N-2}$.

O funcional associado a (1.1) é definido por

$$I(u) := \frac{1}{2} \int (|\nabla u|^2 + V(x)u^2) dx - \int F(x, u) dx, \quad u \in H,$$

onde $F(x, u) = \int_0^u f(x, s) ds$, ou seja, u é ponto crítico de I , se e somente se, é uma solução fraca do problema (1.1). Observe que I está bem definido e é de classe C^2 .

Assumindo (V_0) e (V_1) , temos que o problema linear $-\Delta u + V(x)u = \lambda u$ possui uma seqüência de autovalores $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$, com $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$, que possui como único ponto de acumulação $+\infty$, conforme apresentado no Apêndice B, onde cada autovalor aparece com a mesma freqüência na seqüência quanto à sua multiplicidade, ou seja, se $\lambda_{i-1} < \lambda_i < \lambda_{i+1}$, então λ_i é um autovalor simples.

Definimos

$$L(x) := \liminf_{|s| \rightarrow \infty} \frac{f(x, s)}{s} \leq K(x) := \limsup_{|s| \rightarrow \infty} \frac{f(x, s)}{s},$$

$$\bar{L}(x) := \liminf_{|s| \rightarrow \infty} \frac{2F(x, s)}{s^2} \leq \bar{K}(x) := \limsup_{|s| \rightarrow \infty} \frac{2F(x, s)}{s^2},$$

e

$$m(x) := \inf_{s \neq 0} \frac{f(x, s)}{s} \leq M(x) := \sup_{s \neq 0} \frac{f(x, s)}{s}$$

onde os limites são uniformes para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$.

Considere

(F_1) existe uma constante $A > 0$ e $B \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$|F(x, s)| \leq \frac{1}{2}As^2 + B(x), \quad \forall s \in \mathbb{R}, \text{ qtp } x \in \mathbb{R}^N.$$

(F_2) existe $D \in L^1(\mathbb{R}^N)$, tal que,

$$\bar{K}(x)s^2 - 2F(x, s) \geq D(x), \quad \forall s \in \mathbb{R}, \text{ qtp } x \in \mathbb{R}^N.$$

No caso em que temos ressonância, (F_2) é consequência de uma hipótese de não-quadraticidade local, vide [15].

Tomando $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$f(x, s) = k \frac{Q(x)|s|^2}{P(x) + Q(x)|s|},$$

onde k é uma constante positiva, $Q(x) \geq \bar{Q} > 0$, $Q \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C(\mathbb{R}^N)$ e $P(x) > 0$, $P \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N) \cap C(\mathbb{R}^N)$. Como exemplos de funções com estas características, destacamos Q uma constante positiva e $P(x) = \exp(-|x|^2)$. Dessa forma f satisfaz (f_1) , (F_1) e (F_2) , para k , Q e P adequadas.

Os resultados apresentados a seguir são obtidos a partir de estudos com problemas semelhantes em domínio limitado. O Teorema 1.1 é uma versão de resultados obtidos em domínio limitado, apresentado em [26] e [25]. Enquanto o Teorema 1.2 é uma versão de resultados obtidos com problemas em domínio limitado apresentado por [28] e [29].

Para mostrarmos que o funcional energia associado ao problema (1.1) satisfaz a condição de compacidade de Palais-Smale, utilizamos as técnicas apresentadas por [9] e [3] para o problema em domínio limitado, donde obtemos a Proposição 1.1.

A geometria do Teorema do Ponto de Sela, é apresentada por [15] e [17], que trata do problema no caso ressonante, donde obtemos a Proposição 1.2. Para obtermos a geometria do Teorema do Passo da Montanha Generalizado, apresentamos a Proposição 1.3, uma versão para $\mathbb{R}^N$ de resultados em domínio limitado, apresentado por [35]. Finalmente, para o Teorema 1.2, apresentamos a Proposição 1.4 que representa a geometria que o funcional tem de satisfazer no Teorema 1.10, que é baseada na sua versão em domínio limitado apresentado por [29].

Teorema 1.1 *Assuma $(V_0), (V_1), (f_1), (F_1), (F_2)$ e que*

$$\lambda_{k-1} \not\leq m(x) \leq f'(x, 0) < \lambda_k \leq \lambda_m \leq L(x) \leq K(x) \leq \lambda_{m+1}$$

e

$$\lambda_m \not\leq \bar{L}(x) \leq \bar{K}(x) \not\leq \lambda_{m+1}.$$

Se ocorre,

1. $f'(x, t) \geq \frac{f(x, t)}{t}$, ou
2. $f'(x, t) \not\leq \lambda_{m+1}$,

então o problema (1.1) possui pelo menos duas soluções fracas não triviais.

Teorema 1.2 *Assuma $(V_0), (V_1), (f_1), (F_1), (F_2)$ e que*

$$\lambda_m \leq L(x) \leq K(x) \leq \lambda_{m+1} \leq \lambda_k < f'(x, 0) \leq M(x) \not\leq \lambda_{k+1}.$$

e

$$\lambda_m \not\leq \bar{L}(x) \leq \bar{K}(x) \not\leq \lambda_{m+1}.$$

Se ocorre,

1. $m = 1$,
2. $m \geq 2$ e $f'(x, t) \not\leq \lambda_m$, ou
3. $f'(x, t) \leq \frac{f(x, t)}{t}$,

então o problema (1.1) possui pelo menos duas soluções fracas não triviais.

Exemplos de f que satisfazem as hipóteses destes teoremas podem ser obtidas a partir de $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$f(x, s) = k \frac{Q(x)|s|^2}{P(x) + Q(x)|s|},$$

tomando k , Q e P adequadas, é claro que a escolha da f depende da escolha de V , pois V tem influência direta no espectro do problema de autovalor $-\Delta u + V(x)u = \lambda u$, $u \in H$.

1 Preliminares

Em todo o texto C é constante, que representará diversos valores. A Proposição a seguir é baseada num resultado para um problema semelhante, em domínio limitado, apresentado por Costa e Oliveira em [9].

Proposição 1.1 *Assuma $(V_0), (V_1), (f_1), (F_1), f \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$ e que*

$$\lambda_i \leq L(x) \leq K(x) \leq \lambda_{i+1}$$

$$\lambda_i \not\leq \bar{L}(x) \leq \bar{K}(x) \not\leq \lambda_{i+1}.$$

Então o funcional I satisfaz a condição de Palais-Smale.

Demonstração: Seja $(u_n) \subset H$ uma seqüência de Palais-Smale, ou seja, $|I(u_n)| \rightarrow C$ e $\|I'(u_n)\| \rightarrow 0$.

Vamos mostrar que (u_n) é limitada em H . Suponha, por contradição, que $\|u_n\| \rightarrow +\infty$.

Tomando $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$, temos do Lema 1.7 (Apêndice D) que

$$v_n \rightharpoonup v_0 \text{ em } H$$

$$v_n \rightarrow v_0 \text{ em } L^2(\mathbb{R}^N),$$

$$v_n(x) \rightarrow v_0(x) \text{ qtp em } \mathbb{R}^N,$$

$$f_n \rightharpoonup f_0 \text{ em } L^2(\mathbb{R}^N),$$

onde $f_n(x) = \frac{f(x, u_n(x))}{\|u_n\|}$. Ainda mais

$$\begin{cases} L(x) \leq \frac{f_0(x)}{v_0(x)} \leq K(x), & \text{se } v_0(x) \neq 0 \\ f_0(x) = 0, & \text{se } v_0(x) = 0. \end{cases}$$

Defina

$$p(x) = \begin{cases} \frac{f_0(x)}{v_0(x)}, & v_0(x) \neq 0 \\ \bar{\lambda} = \frac{\lambda_i + \lambda_{i+1}}{2}, & v_0(x) = 0. \end{cases}$$

Observe que $f_0(x) = p(x)v_0(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$. Portanto,

$$L(x) \leq p(x) \leq K(x), \text{ se } v_0(x) \neq 0$$

$$p(x) = \bar{\lambda}, \text{ se } v_0(x) = 0.$$

Donde segue que,

$$\lambda_i \leq p(x) \leq \lambda_{i+1}.$$

Por hipótese, existe $\epsilon_n \rightarrow 0$, tal que $|I'(u_n)w| \leq \epsilon_n \|w\|$, $\forall w \in H$. Portanto,

$$\frac{|I'(u_n)u_n|}{\|u_n\|^2} = \left| 1 - \int \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} v_n dx \right| \leq \frac{\epsilon_n}{\|u_n\|} \rightarrow 0,$$

ou seja,

$$\int \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} v_n dx \rightarrow 1.$$

Como $f_n \rightharpoonup f_0$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$ e $v_n \rightarrow v_0$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$, temos que

$$\int f_0 v_0 dx = 1.$$

Portanto, $v_0 \neq 0$. Por outro lado, dado $w \in H$, temos

$$\frac{|I'(u_n)w|}{\|u_n\|} = \left| \int (\nabla v_n \nabla w + V(x) v_n w) dx - \int \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} w dx \right| \leq \epsilon_n \frac{\|w\|}{\|u_n\|} \rightarrow 0.$$

Como $v_n \rightharpoonup v_0$ em H , temos que

$$\int (\nabla v_n \nabla w + V(x) v_n w) dx = \langle v_n, w \rangle \rightarrow \langle v_0, w \rangle = \int (\nabla v_0 \nabla w + V(x) v_0 w) dx,$$

ainda mais como $f_n \rightharpoonup f_0$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$, temos que

$$\int \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} w dx = \langle f_n, w \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \rightarrow \langle f_0, w \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \int f_0 w dx.$$

Portanto,

$$\int (\nabla v_0 \nabla w + V(x) v_0 w) dx - \int f_0 w dx = 0, \forall w \in H$$

ou seja, v_0 é solução fraca do problema

$$-\Delta w + V(x)w = f_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

logo,

$$-\Delta v_0 + V(x)v_0 = f_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (1.2)$$

ou seja,

$$-\Delta v_0 + V(x)v_0 = p(x)v_0, \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (1.3)$$

Agora temos três casos, quando:

1. $p(x) \equiv \lambda_i$;
2. $p(x) \equiv \lambda_{i+1}$;
3. $\lambda_i \not\equiv p(x) \not\equiv \lambda_{i+1}$.

Caso 1: Neste caso, de (1.3) obtemos $\|v_0\|^2 = \lambda_i \|v_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2$, ainda mais, como $\int f_0 v_0 dx = 1$, segue de (1.2) que

$$\|v_0\|^2 = 1 = \lambda_i \|v_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2.$$

Por outro lado,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \int \frac{F(x, u_n)}{\|u_n\|^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2I(u_n)}{\|u_n\|^2} = 0$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \frac{F(x, u_n)}{\|u_n\|^2} dx = 1$$

Assim, pelo lema de Fatou, temos

$$\lambda_i \|v_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \frac{F(x, u_n)}{\|u_n\|^2} dx \geq \int \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{F(x, u_n)}{\|u_n\|^2} dx$$

Logo, pelo Lema 1.8, temos que $\lambda_i \|v_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \geq \int \bar{L}(x) v_0^2 dx$. Donde segue que $\bar{L}(x) = \lambda_i$, para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$, o que é uma contradição.

Caso 2: Neste caso, obtemos $\|v_0\|^2 = \lambda_{i+1} \|v_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2$, ainda mais

$$\|v_0\|^2 = 1 = \lambda_{i+1} \|v_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2.$$

Por outro lado,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \int \frac{F(x, u_n)}{\|u_n\|^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2I(u_n)}{\|u_n\|^2} = 0$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \frac{F(x, u_n)}{\|u_n\|^2} dx = 1$$

Assim, pelo lema de Fatou, temos

$$\lambda_{i+1} \|v_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \frac{F(x, u_n)}{\|u_n\|^2} dx \leq \int \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{F(x, u_n)}{\|u_n\|^2} dx$$

Logo, pelo Lema 1.8 temos que $\lambda_{i+1}\|v_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \leq \int \bar{K}(x)v_0^2 dx$. Donde segue que $\bar{K}(x) = \lambda_{i+1}$, para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$, o que é uma contradição.

Caso 3: Neste caso, como $v_0 \neq 0$ temos uma contradição com o Lema 1.9.

Assim nos três casos obtemos uma contradição, portanto (u_n) é limitada em H .

Finalmente, podemos decompor $I'(u) = u - T(u)$, onde $T : H \rightarrow H$ é um operador compacto, como $I'(u_n) \rightarrow 0$ e $T(u_n)$ possui uma subsequência convergente, temos que (u_n) possui uma subsequência convergente. ■

Definimos $H_j = [\phi_1, \dots, \phi_j]$, onde ϕ_i é a λ_i -autofunção do problema $-\Delta u + V(x)u = \lambda u$, $x \in \mathbb{R}^N$, $u \in H$. Podemos escrever $H = H_j \oplus H_j^\perp$, para cada $j \in \mathbb{N}$.

Proposição 1.2 *Assuma (V_0) , (V_1) , (F_1) , (F_2) e $f \in C^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$. Suponha*

$$\lambda_m \not\leq \bar{L}(x) \leq \bar{K}(x) \not\leq \lambda_{m+1},$$

uniformemente para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$. Então,

1. $\lim_{\|u\| \rightarrow +\infty} I(u) = -\infty$, para $u \in H_m$
2. existe $\gamma \in \mathbb{R}$, tal que $I(u) \geq \gamma$, $\forall u \in H_m^\perp$.

Demonstração: Para obtermos (1.), como $\bar{L}(x) \not\leq \lambda_k$, o Lema 1.10 (Apêndice E), nos diz que existe $R_0 > 0$ e $\delta > 0$, tal que,

$$\|u\|^2 - \int_{B_{R_0}} \bar{L}(x)u^2 dx \leq -\delta\|u\|^2, \quad \forall u \in H_m.$$

Como H_m tem dimensão finita, usando o fato que a bola unitária é compacta em H_m , dado $\xi > 0$ existe $r > 0$ tal que

$$\int_{B_r^c} u^2 dx < \xi, \quad \forall u \in H_m, \|u\| = 1.$$

De fato, suponha por contradição que não existe tal r , então existe $r_n \rightarrow +\infty$, $u_n \in B(0, 1) \subset H_m$, tal que

$$\int_{B_{r_n}^c} u_n^2 dx \geq \xi.$$

É claro que, a menos de subsequência, $\|u_n - u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \rightarrow 0$ para algum u_0 . Por outro lado,

$$\|u_n - u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \geq \|u_n - u_0\|_{L^2(B_{r_n}^c)}^2 \geq \|u_n\|_{L^2(B_{r_n}^c)}^2 - \|u_0\|_{L^2(B_{r_n}^c)}^2 \geq \xi.$$

O que é um absurdo. Portanto, existe $r > 0$ tal que

$$\int_{B_r^c} u^2 dx < \xi \|u\|^2, \quad \forall u \in H_m.$$

Temos para $R > R_0$ suficientemente grande que,

$$\int_{B_R^c} Au^2 dx < \frac{\delta}{2} \|u\|^2, \quad \forall u \in H_m.$$

Seja $u \in H_m$, como

$$2I(u) = \|u\|^2 - \int_{B_R} \bar{L}(x)u^2 dx + \int_{B_R} \bar{L}(x)u^2 dx - 2 \int_{B_R} F(x, u) dx - 2 \int_{B_R^c} F(x, u) dx$$

pelo Lema 1.10 (Apêndice E), temos

$$2I(u) \leq -\delta \|u\|^2 + \int_{B_R} (\bar{L}(x)u^2 - 2F(x, u)) dx + 2 \int_{B_R^c} |F(x, u)| dx$$

por (F_1) segue

$$2I(u) \leq -\delta \|u\|^2 + \int_{B_R} (\bar{L}(x)u^2 - 2F(x, u)) dx + \int_{B_R^c} Au^2 dx + C$$

pela desigualdade anterior, temos

$$2I(u) \leq -\frac{\delta}{2} \|u\|^2 + \int_{B_R} (\bar{L}(x)u^2 - 2F(x, u)) dx + C.$$

Como $\bar{L}(x) = \limsup_{|s| \rightarrow +\infty} \frac{2F(x, s)}{s^2}$ e o limite é uniforme, dado $\epsilon > 0$, existe $N(\epsilon) > 0$, tal que

$$\bar{L}(x) - \frac{2F(x, s)}{s^2} < \epsilon, \quad s \geq N(\epsilon)$$

ou seja,

$$\bar{L}(x)s^2 - 2F(x, s) < \epsilon s^2, \quad s \geq N(\epsilon)$$

Portanto, existe $M(\epsilon) > 0$, tal que

$$\bar{L}(x)u^2 - 2F(x, u) \leq \epsilon u^2 + M(\epsilon), \quad \forall u \in H_m, \text{ qtp } x \in B_R.$$

Desta desigualdade, obtemos

$$\int_{B_R} (\bar{L}(x)u^2 - 2F(x, u)) dx \leq \int_{B_R} (\epsilon u^2 + M(\epsilon)) dx$$

portanto,

$$\int_{B_R} (\bar{L}(x)u^2 - 2F(x, u)) dx \leq \epsilon \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + C_1$$

pela imersão contínua de H em $L^2(\mathbb{R}^N)$, segue que

$$\int_{B_R} (\bar{L}(x)u^2 - 2F(x, u)) dx \leq \epsilon C_2 \|u\|^2 + C_1$$

tomando $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, obtemos

$$\int_{B_R} (\bar{L}(x)u^2 - 2F(x, u)) dx \leq \frac{\delta}{4} \|u\|^2 + C.$$

Portanto,

$$2I(u) \leq -\frac{\delta}{4} \|u\|^2 + C, u \in H_m.$$

Logo, $I(u) \rightarrow -\infty$, quando $\|u\| \rightarrow \infty$.

Para obtermos (2.), observe que,

$$\|u\|^2 \geq \lambda_{m+1} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2, \forall u \in H_m^\perp.$$

Por (F_2) , temos

$$I(u) \geq \frac{1}{2} \left(\|u\|^2 - \int \bar{K}(x) u^2 dx + \int D(x) dx \right) \geq C + \frac{1}{2} \left(\int (\lambda_{m+1} - \bar{K}(x)) u^2 dx \right)$$

portanto para algum $\gamma \in \mathbb{R}$ temos que

$$I(u) > \gamma, \forall u \in H_m^\perp.$$

■

Proposição 1.3 *Assuma (V_0) , (V_1) , (F_1) e $f \in C^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$. Suponha que*

$$\lambda_{k-1} \leq m(x) \leq f'(x, 0) < \lambda_k \leq \lambda_m \not\leq \bar{L}(x) \leq \bar{K}(x) \not\leq \lambda_{m+1},$$

uniformemente para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$. Então I satisfaz

1. existe $\alpha, \rho > 0$, tal que $I(u) \geq \alpha$, $\forall u \in H_{k-1}^\perp$, $\|u\| = \rho$.
2. $\lim_{\|u\| \rightarrow +\infty} I(u) = -\infty$, para $u \in H_k$.
3. $I(u) \leq 0$, $\forall u \in H_{k-1}$.

Demonstração: Para obter (1.), como $f'(x, 0) < \lambda_k$, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que,

$$sf(x, s) \leq (\lambda_k - \epsilon_0)s^2, \quad |s| < R, \quad \text{qtp } x \in \mathbb{R}^N,$$

para algum $R > 0$, donde segue que

$$F(x, s) \leq \frac{\lambda_k - \epsilon_0}{2}s^2, \quad |s| < R, \quad \text{qtp } x \in \mathbb{R}^N.$$

Ainda mais, existe $C > 0$ tal que

$$F(x, s) \leq C|s|^p, \quad |s| \geq R, \quad \text{qtp } x \in \mathbb{R}^N,$$

com $2 < p < 2^*$. Portanto,

$$F(x, s) \leq \frac{\lambda_k - \epsilon_0}{2}s^2 + C|s|^p, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad \text{qtp } x \in \mathbb{R}^N.$$

Donde segue,

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int F(x, u)dx \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda_k - \epsilon_0}{2} \int u^2 dx - C \int |u|^p dx.$$

Como, para cada $u \in H_{k-1}^\perp$, temos pela caracterização variacional dos autovalores, que $\|u\|^2 \geq \lambda_k \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2$, portanto

$$I(u) \geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda_k - \epsilon_0}{\lambda_k} \right) \|u\|^2 - C\|u\|^p, \quad u \in H_{k-1}^\perp.$$

Observando que $p > 2$, podemos obter $\rho > 0$ e $\alpha > 0$ tal que $I(u) > \alpha$ para todo $u \in H_{k-1}^\perp$ com $\|u\| = \rho$.

Observe que (2.), segue imediatamente do item (1.), da Proposição 1.2.

Finalmente, para obtermos (3.) como $\lambda_{k-1} \leq m(x)$, temos que

$$\lambda_{k-1}s^2 \leq sf(x, s)$$

donde segue que

$$\frac{\lambda_{k-1}}{2}s^2 \leq F(x, s)$$

Dado $u \in H_{k-1}$, temos que $\|u\|^2 \leq \lambda_{k-1}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2$, portanto

$$I(u) \leq \frac{1}{2} \left(\|u\|^2 - \lambda_{k-1}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \right) \leq 0, \quad u \in H_{k-1}.$$

■

Proposição 1.4 *Assuma $(V_0), (V_1), (F_2), f \in C^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$. Suponha que*

$$\lambda_m \not\leq \bar{L}(x) \leq \bar{K}(x) \not\leq \lambda_{m+1} \leq \lambda_{k-1} < f'(x, 0) \leq M(x) \leq \lambda_k$$

uniformemente para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$. Então I satisfaz

1. *existe $\alpha, \rho > 0$, tal que $I(u) \leq -\alpha$, $\forall u \in H_{k-1}, \|u\| = \rho$.*
2. *Existe um vetor $e \in H_{k-1}$ tal que I é limitado inferiormente no semi-espaço*

$$\{se + u; s \geq 0, u \in H_{k-1}^\perp\}.$$

3. *$I(u) \geq 0$, $\forall u \in H_{k-1}^\perp$.*

Demonstração: Para obter (1.), como $f'(x, 0) > \lambda_{k-1}$, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que,

$$sf(x, s) \geq (\lambda_{k-1} + \epsilon_0)s^2, \quad |s| < R, \quad \text{qtp } x \in \mathbb{R}^N.$$

para algum $R > 0$, donde segue que

$$F(x, s) \geq \frac{\lambda_{k-1} + \epsilon_0}{2}s^2, \quad |s| < R, \quad \text{qtp } x \in \mathbb{R}^N.$$

Ainda mais, existe $C > 0$ tal que

$$F(x, s) \geq \frac{\lambda_{k-1} + \epsilon_0}{2}s^2 - C|s|^p, \quad |s| \geq R, \quad \text{qtp } x \in \mathbb{R}^N,$$

com $2 < p < 2^*$. Portanto,

$$F(x, s) \geq \frac{\lambda_{k-1} + \epsilon_0}{2}s^2 - C|s|^p, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad \text{qtp } x \in \mathbb{R}^N.$$

Donde segue,

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int F(x, u)dx \leq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda_{k-1} + \epsilon_0}{2} \int u^2 dx + C \int |u|^p dx.$$

Como, para cada $u \in H_{k-1}$, temos, pela caracterização variacional dos autovalores, que $\|u\|^2 \leq \lambda_{k-1}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2$, portanto

$$I(u) \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda_{k-1} + \epsilon_0}{\lambda_{k-1}} \right) \|u\|^2 + C\|u\|^p, \quad u \in H_{k-1}.$$

Observando que $p > 2$, podemos obter $\rho > 0$ e $\alpha > 0$ tal que $I(u) < -\alpha$ para todo $u \in H_{k-1}$ com $\|u\| = \rho$.

Para obtermos (2.), basta observar que $H_{k-2}^\perp \subset H_m^\perp$, tomando $e = \phi_{k-1}$ e aplicando a Proposição 1.2, o resultado segue.

Finalmente, para obtermos (3.), como $M(x) \leq \lambda_k$, temos que

$$\lambda_k s^2 \geq sf(x, s), \quad \forall s \in \mathbb{R}, \text{ qtp } x \in \mathbb{R}^N$$

donde segue que

$$\frac{\lambda_k}{2} s^2 \geq F(x, s), \quad \forall s \in \mathbb{R}, \text{ qtp } x \in \mathbb{R}^N.$$

Dado $u \in H_{k-1}^\perp$, temos que $\|u\|^2 \geq \lambda_k \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2$, portanto

$$I(u) \geq \frac{1}{2} \left(\|u\|^2 - \lambda_k \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \right) \geq 0, \quad u \in H_{k-1}^\perp.$$

■

2 Demonstração dos Resultados Principais

Seja $J \in C^2(H)$ e u um ponto crítico de J não-degenerado, ou seja, $d^2J(u)$ tem inversa limitada. Definimos *Índice de Morse* de J em u , denotamos por $m(J, u)$, como a dimensão do espaço negativo, correspondendo a decomposição espectral. Analogamente, definimos a *Nulidade* de J em u , como $n(J, u) := \dim \text{Ker}(d^2J(u))$.

Podemos assumir, sem perda de generalidade, que I tem valores críticos isolados e cada valor crítico corresponde a um número finito de pontos críticos. Assim, tanto para os Teoremas 1.1 e 1.2, pela Proposição 1.2 e pelo Teorema 1.8 (Apêndice C), temos que existe uma

solução $u_1 \in H$, tal que $C_m(I, u_1) \neq 0$, onde $C_m(I, u_1)$ é o m -ésimo grupo crítico do funcional I em u_1 , conforme definido no Apêndice C.

2.1 Demonstração do Teorema 1.1

Pela Proposição 1.3 e pelo Teorema 1.9 (Apêndice C), temos que, existe uma solução $u_2 \in H$, tal que $C_k(I, u_2) \neq 0$.

Vamos mostrar que u_2 e u_1 são não triviais e distintas. Como $f'(x, 0) \not\leq \lambda_k$, temos que

$$I''(0)(\phi_j, \phi_j) = \int |\nabla \phi_j|^2 + V(x) \phi_j^2 dx - \int f'(x, 0) \phi_j^2 dx = \int (\lambda_j - f'(x, 0)) \phi_j^2 dx > 0, \quad j = k, \dots$$

portanto $m(I, 0) + n(I, 0) < k$, pelo Corolário 1.1 (Apêndice C), temos que $C_k(I, 0) = 0$ e $C_m(I, 0) = 0$, logo u_2 e u_1 são não triviais.

Para distinguirmos u_2 de u_1 , considere os seguintes casos:

Caso 1: Suponha $f'(x, t) \geq \frac{f(x, t)}{t}$. Como $C_k(I, u_2) \neq 0$, temos do Corolário 1.1 (Apêndice C), que $m(I, u_2) \leq k$. Observe que,

$$I''(u_2)(\phi_j, \phi_j) = \int |\nabla \phi_j|^2 + V(x) \phi_j^2 - \int f'(x, u_2) \phi_j^2 = \int (\lambda_j - f'(x, u_2)) \phi_j^2 < 0, \quad j = 1, \dots, k-1$$

pois $\lambda_{k-1} \not\leq f'(x, u_2)$. Portanto, $k-1 \leq m(I, u_2) \leq k$. Vamos mostrar que $m(I, u_2) = k$. Para tanto, considere os problemas de autovalores

$$-\Delta w + V(x)w = \mu f'(x, u_2)w \tag{S2}$$

e

$$-\Delta w + V(x)w = \mu \frac{f(x, u_2)}{u_2} w. \tag{S3}$$

Observe que, da Proposição 1.12, temos que

$$\mu_1 \left(\frac{f(x, u_2)}{u_2} \right) \leq \dots \leq \mu_{k-1} \left(\frac{f(x, u_2)}{u_2} \right) < 1,$$

pois $\lambda_{k-1} \not\leq \frac{f(x, s)}{s}$, ainda mais, 1 é autovalor de (S3), pois $-\Delta u_2 + V(x)u_2 = f(x, u_2) = \frac{f(x, u_2)}{u_2} u_2$. Portanto, $\mu_k \left(\frac{f(x, u_2)}{u_2} \right) \leq 1$. Do fato que $f'(x, u_2) \geq \frac{f(x, u_2)}{u_2}$, temos que

$$\mu_k(f'(x, u_2)) < \mu_k \left(\frac{f(x, u_2)}{u_2} \right) \leq 1.$$

Portanto, $m(l, u_2) = k$. Pelo Corolário 1.1 (Apêndice C), temos que $C_p(l, u_2) = \delta_{pk}\mathbb{Z}$. Como $m > k$ e $C_m(l, u_1) \neq 0$, temos que $u_2 \neq u_1$.

Caso 2: Suponha $f'(x, t) \not\leq \lambda_{m+1}$. Como $C_m(l, u_1) \neq 0$, temos que $m(l, u_1) \leq m \leq m(l, u_1) + n(l, u_1)$. Observe que,

$$l''(u_1)(\phi_j, \phi_j) = \int |\nabla \phi_j|^2 + V(x)\phi_j^2 - \int f'(x, u_1)\phi_j^2 = \int (\lambda_j - f'(x, u_1))\phi_j^2 > 0, \quad j \geq m+1,$$

pois $\lambda_{m+1} \not\leq f'(x, u_1)$. Portanto, $m(l, u_1) + n(l, u_1) \leq m$. Logo, $m(l, u_1) + n(l, u_1) = m$. Pelo Corolário 1.1 (Apêndice C), temos que $C_p(l, u_1) = \delta_{pm}\mathbb{Z}$. Como $m > k$ e $C_k(l, u_2) \neq 0$, temos que $u_2 \neq u_1$. ■

2.2 Demonstração do Teorema 1.2

Da Proposição 1.4, utilizando o Teorema 1.10 (Apêndice C), existe uma solução $u_2 \in H$, $u_2 \neq 0$ e $C_{k-1}(l, u_2) \neq 0$.

Vamos mostrar que u_2 e u_1 são não triviais e distintas. Como $\lambda_k \not\leq f'(x, 0)$, temos que

$$l''(0)(\phi_j, \phi_j) = \int |\nabla \phi_j|^2 + V(x)\phi_j^2 - \int f'(x, 0)\phi_j^2 = \int (\lambda_j - f'(x, 0))\phi_j^2 < 0, \quad j = 1, \dots, k.$$

portanto $m(l, 0) > k - 1$, pelo Corolário 1.1 (Apêndice C), temos que $C_{k-1}(l, 0) = 0$ e $C_m(l, 0) = 0$, logo u_2 e u_1 são não triviais.

Para distinguirmos u_2 de u_1 , considere os seguintes casos:

Caso 1: Suponha $m = 1$. Observe que $m(l, u_1) \leq 1$. Vamos mostrar que $C_1(l, u_1) = \delta_{p1}\mathbb{Z}$. Observe que se $m(l, u_1) = 1$ o resultado é imediato.

Caso $m(l, u_1) = 0$, considere o problema de autovalor

$$-\Delta w + V(x)w = \mu f'(x, u_1)w. \quad (S4)$$

Então $\mu_1(f'(x, u_1)) \geq 1$, pois $m(l, u_1) = 0$. Como $C_1(l, u_1) \neq 0$, pelo Corolário 1.1 (Apêndice C), temos que $m(l, u_1) + n(l, u_1) \geq 1$, implica que $\mu_1(f'(x, u_1)) \leq 1$, logo $\mu_1(f'(x, u_1)) = 1$. Aplicando o Teorema 1.3 (Apêndice B), temos que $\mu_1(f'(x, u_1))$ é simples. Logo $n(l, u_1) = 1$.

Pelo Corolário 1.1 (Apêndice C), temos que $C_1(l, u_1) = \delta_{p1}\mathbb{Z}$. Como $1 < k - 1$ e $C_{k-1}(l, u_2) \neq 0$, temos que $u_2 \neq u_1$.

Caso 2: Suponha $m \geq 2$ e $f'(x, t) \not\leq \lambda_m$. Como $C_m(l, u_1) \neq 0$, temos do Corolário 1.1 (Apêndice C), que $m(l, u_1) \leq m$. Observe que,

$$l''(u_1)(\phi_j, \phi_j) = \int |\nabla \phi_j|^2 + V(x) \phi_j^2 - \int f'(x, u_1) \phi_j^2 = \int (\lambda_j - f'(x, u_1)) \phi_j^2 < 0, \quad j : 1, \dots, m,$$

pois $\lambda_m \not\leq f'(x, u_1)$. Portanto, $m(l, u_1) \geq m$. Logo, $m(l, u_1) = m$. Pelo Corolário 1.1 (Apêndice C), temos que $C_p(l, u_1) = \delta_{pm}\mathbb{Z}$. Como $m < k - 1$ e $C_{k-1}(l, u_2) \neq 0$, temos que $u_2 \neq u_1$.

Caso 3: Suponha $f'(x, t) \leq \frac{f(x, t)}{t}$. Como $C_{k-1}(l, u_2) \neq 0$, temos do Corolário 1.1 (Apêndice C), que $k - 1 \leq m(l, u_2) + n(l, u_2)$. Observe que,

$$l''(u_2)(\phi_j, \phi_j) = \int |\nabla \phi_j|^2 + V(x) \phi_j^2 - \int f'(x, u_2) \phi_j^2 = \int (\lambda_j - f'(x, u_2)) \phi_j^2 > 0, \quad j \geq k + 1,$$

pois $\lambda_{k+1} \not\leq f'(x, u_2)$. Portanto, $k - 1 \leq m(l, u_2) + n(l, u_2) \leq k$. Vamos mostrar que $m(l, u_2) + n(l, u_2) = k - 1$. Suponha, por contradição, que $m(l, u_2) + n(l, u_2) = k$. Considere os problemas de autovalores

$$-\Delta w + V(x)w = \mu f'(x, u_2)w, \quad (S5)$$

$$-\Delta w + V(x)w = \mu \frac{f(x, u_2)}{u_2} w \quad (S6)$$

e

$$-\Delta w + V(x)w = \mu \lambda_{k+1} w. \quad (S7)$$

Observe que $\mu_1(f'(x, u_2)) \leq \dots \leq \mu_k(f'(x, u_2)) \leq 1$, pois a soma do índice de morse com a nulidade da solução é dado pela quantidade de autovalores menor que ou igual a 1 do problema

(S5). Observe que $\frac{\lambda_1}{\lambda_{k+1}} \leq \dots \leq \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_{k+1}} = 1$ são autovalores de (S7). Como $\frac{f(x, u_2)}{u_2} \notin \lambda_{k+1}$, temos, da Proposição 1.12 (Apêndice B), que $\mu_i(\lambda_{k+1}) < \mu_i\left(\frac{f(x, u_2)}{u_2}\right)$. Portanto

$$\mu_{k+1}\left(\frac{f(x, u_2)}{u_2}\right) > \mu_k(\lambda_{k+1}) \geq 1 \geq \mu_k(f'(x, u_2)) > \mu_k\left(\frac{f(x, u_2)}{u_2}\right)$$

o que contradiz com o fato do 1 ser autovalor do problema (S6). Portanto $m(l, u_2) + n(l, u_2) = k - 1$ e pelo Corolário 1.1 (Apêndice C), temos que $C_p(l, u_2) = \delta_{p(k-1)}\mathbb{Z}$. Como $m < k - 1$ e $C_m(l, u_1) \neq 0$, temos que $u_2 \neq u_1$. ■

Apêndice A: Propriedades do Espaço H

Considere $V \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, tal que

(V_0) existe $V_0 \in \mathbb{R}$, tal que $V(x) \geq V_0 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$.

(V_1) para todo $M > 0$, temos $\mu(\{x \in \mathbb{R}^N : V(x) \leq M\}) < +\infty$, onde μ denota a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^N$.

Definimos

$$H := \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx < +\infty\}.$$

A partir deste ponto, quando não indicarmos sobre qual conjunto está definida a integral, é porque a integração é sobre o $\mathbb{R}^N$.

O espaço H é um espaço de Hilbert munido do produto interno:

$$\langle u, v \rangle := \int (\nabla u \nabla v + V(x)uv) dx$$

cuja norma correspondente é:

$$\|u\|^2 := \int (|\nabla u|^2 + V(x)u^2) dx$$

Denotamos $2^* := \frac{2N}{N-2}$ o expoente crítico de Sobolev.

Os resultados apresentados a seguir, podem ser encontrados no texto de Bartsch e Wang, em [2].

Proposição 1.5 *O espaço H está imerso continuamente em $L^p(\mathbb{R}^N)$, para $2 \leq p \leq 2^*$.*

Demonstração: De fato, por (V_1) temos

$$\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2 := \int (|\nabla u|^2 + u^2) dx \leq \int |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{V_0} \int V(x)u^2 dx \leq \max\{1, \frac{1}{V_0}\} \|u\|^2,$$

portanto a imersão é contínua em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Como a imersão de $H^1(\mathbb{R}^N)$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$ é contínua, para $2 \leq p \leq 2^*$, o resultado segue. ■

Proposição 1.6 *O espaço H está imerso compactamente em $L^p(\mathbb{R}^N)$, $2 \leq p < 2^*$.*

Demonstração: Basta verificar que toda seqüência limitada em H possui subsequência convergente em $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Seja $(u_n) \subset H$ uma seqüência, tal que $\|u_n\|$ é limitada. Como H é Hilbert, a menos de subsequência (u_n) converge fracamente para algum $u_0 \in H$, denotamos $u_n \rightharpoonup u_0 \in H$.

Inicialmente, provaremos que H está imerso compactamente em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Como $(u_n) \subset L^2(\mathbb{R}^N)$ e H está imerso continuamente em $L^2(\mathbb{R}^N)$, segue que $\|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ é limitada, portanto a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$, ainda mais, a menos de subsequência $\|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \rightarrow \alpha \in \mathbb{R}$. É claro que $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \alpha$.

Afirmamos que dado $\epsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} u_n^2 dx < \epsilon$$

uniformemente em n , onde $B_R := B(0, R) \subset \mathbb{R}^N$.

De fato, sejam $K > \frac{2}{\epsilon} \sup_n \|u_n\|^2$, $p \in \left(1, \frac{N}{N-2}\right)$ e $D \geq \sup_{u \in H \setminus \{0\}} \frac{\|u_n\|_{L^{2p}(\mathbb{R}^N)}^2}{\|u_n\|^2}$.

Seja p' tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Como para cada $M > 0$, temos que $\mu(\{x \in \mathbb{R}^N : V(x) \leq M\}) < +\infty$, tomando R suficientemente grande, de modo que

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^N \setminus B_R : V(x) \leq K\}) < \left(\frac{\epsilon}{2D \sup_n \|u_n\|^2} \right)^{p'}.$$

Definamos

$$A := \{x \in \mathbb{R}^N \setminus B_R : V(x) \geq K\}$$

e

$$B := \{x \in \mathbb{R}^N \setminus B_R : V(x) < K\}.$$

Pela nossa escolha de K , temos

$$\int_A u_n^2 dx \leq \int_A \frac{V(x)}{K} u_n^2 dx \leq \frac{\|u_n\|^2}{K} \leq \frac{\epsilon}{2}. \quad (1.4)$$

Pela desigualdade de Hölder, obtemos que

$$\begin{aligned}
 \int_B u_n^2 dx &\leq \left(\int_B |u_n|^{2p} dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_B dx \right)^{\frac{1}{p'}} \\
 &\leq \|u_n\|_{L^{2p}(\mathbb{R}^N)}^2 \mu(B)^{\frac{1}{p'}} \\
 &\leq D \|u_n\|^2 \mu(B)^{\frac{1}{p'}} \\
 &\leq \frac{\epsilon}{2}.
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Portanto, de (1.4) e (1.5) temos a afirmação anterior. Assim obtemos que,

$$\begin{aligned}
 \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 &= \|u_0\|_{L^2(B_R)}^2 + \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N \setminus B_R)}^2 \\
 &\geq \|u_0\|_{L^2(B_R)}^2 \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_{L^2(B_R)}^2 \\
 &\geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 - \|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N \setminus B_R)}^2 \right) \\
 &\geq \alpha^2 - \epsilon.
 \end{aligned}$$

Portanto, $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \geq \alpha^2$. Então, $\|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \rightarrow \alpha = \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$. Como $u_n \rightharpoonup u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$, segue que $u_n \rightarrow u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

Finalmente, dado $2 < p < 2^*$, considere $p = 2t + (1-t)2^*$, para algum $0 < t < 1$. Utilizando a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
 \|u_n - u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p &= \int |u_n - u_0|^p dx \\
 &= \int |u_n - u_0|^{2t} |u_n - u_0|^{(1-t)2^*} dx \\
 &= \left(\int |u_n - u_0|^2 dx \right)^t \left(\int |u_n - u_0|^{2^*} dx \right)^{(1-t)} \\
 &\leq \|u_n - u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^{2t} \|u_n - u_0\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}^{2^*(1-t)} \\
 &\leq C \|u_n - u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^{2t}
 \end{aligned}$$

pois $|u_n - u_0|^{2t} \in L^{\frac{1}{t}}(\mathbb{R}^N)$, $|u_n - u_0|^{2^*(1-t)} \in L^{\frac{1}{1-t}}(\mathbb{R}^N)$, H está imerso continuamente em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ e $\|u_n - u_0\|$ é limitada. Logo, $u_n \rightarrow u_0 \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $2 \leq p < 2^*$. ■

Apêndice B: Teoria Espectral

Os resultados obtidos neste apêndice, são baseados em estudos realizados em [13]. Aqui, exceto quando explicitamente definido, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é um espaço de Hilbert real e $T : E \rightarrow E$ um operador linear compacto simétrico. Estamos interessados em obter uma caracterização variacional dos autovalores de T .

B.1 Operadores Compactos Simétricos

Lema 1.1 Se

$$\mu_1 := \sup_{\|u\|=1} \langle T(u), u \rangle > 0.$$

Então existe $\phi_1 \in E$, com $\|\phi_1\| = 1$, $\langle T(\phi_1), \phi_1 \rangle = \mu_1$ e $T(\phi_1) = \mu_1 \phi_1$. Analogamente, se

$$\mu_1 := \inf_{\|u\|=1} \langle T(u), u \rangle < 0.$$

Então existe $\phi_{-1} \in E$, com $\|\phi_{-1}\| = 1$, $\langle T(\phi_{-1}), \phi_{-1} \rangle = \mu_1$ e $T(\phi_{-1}) = \mu_{-1} \phi_{-1}$.

Demonstração: Observe que $\langle T(u), u \rangle \leq \|T\|$, para $\|u\| = 1$. Então $\mu_1 < +\infty$. Considere $\|u_n\| = 1$, $\langle T(u_n), u_n \rangle \rightarrow \mu_1$. A menos de subsequência $u_n \rightharpoonup \phi_1$ e $T(u_n) \rightarrow T(\phi_1)$, pois T é compacto. Portanto $\langle T(u_n), u_n \rangle \rightarrow \langle T(\phi_1), \phi_1 \rangle$, ou seja, $\langle T(\phi_1), \phi_1 \rangle = \mu_1$. Observe que $\|\phi_1\| \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\| = 1$. Suponha que $\|\phi_1\| < 1$, então, tomando $v = \frac{\phi_1}{\|\phi_1\|}$, temos que $\langle T(v), v \rangle = \frac{\langle T(\phi_1), \phi_1 \rangle}{\|\phi_1\|^2} = \frac{\mu_1}{\|\phi_1\|^2} > \mu_1$, o que é uma contradição com a definição de μ_1 . Então $\|\phi_1\| = 1$

Considere $f(u) = \langle T(u), u \rangle$ e $g(u) = \frac{1}{2}(\|u\|^2 - 1)$. Seja $S = \{u \in E; g(u) = 0, g'(u) \neq 0\} = \{u \in E, \|u\| = 1\}$. Observe que $f|_S$ atinge máximo em ϕ_1 . Pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $f'(\phi_1) = \mu g'(\phi_1)$, portanto, $T(\phi_1) = \mu \phi_1$. É claro que $\mu = \mu_1$.

O restante da demonstração é análogo. ■

Observando que, se $F \subset E$ é um espaço vetorial, tal que, $T(F) \subset F$, então $T|_{F^\perp} : F^\perp \rightarrow F^\perp$ é compacto e simétrico, portanto, podemos repetir o procedimento anterior, obtendo outros autovalores para T . Assim podemos enunciar a proposição a seguir.

Proposição 1.7 Se

$$\mu_n := \sup\{\langle T(u), u \rangle; \|u\| = 1, u \perp [\phi_1, \dots, \phi_{n-1}]\} > 0.$$

Então existe, $\phi_n \in E$, com $\|\phi_n\| = 1$, $\langle T(\phi_n), \phi_n \rangle = \mu_n$ e $T(\phi_n) = \mu_n \phi_n$. Analogamente, se

$$\mu_{-n} := \inf \{ \langle T(u), u \rangle ; \|u\| = 1, u \perp [\phi_{-1}, \dots, \phi_{-n+1}] \}.$$

Então existe, $\phi_{-n} \in E$, com $\|\phi_{-n}\| = 1$, $\langle T(\phi_{-n}), \phi_{-n} \rangle = \mu_{-n}$ e $T(\phi_{-n}) = \mu_{-n} \phi_{-n}$.

Os lema apresentado a seguir é um resultado simples e pode ser obtido em [5].

Lema 1.2 Para T definido como anteriormente, temos que

1. Autovetores correspondentes a diferentes autovalores são ortogonais.
2. Se μ é um autovalor de T , então o autoespaço $N(T - \mu I)$ tem dimensão finita.
3. Os autovalores de T não podem acumular em um ponto $\mu \neq 0$.

Lema 1.3 Seja $T : E \rightarrow E$ um operador simétrico. Então

$$\sup_{\|u\|=1} |\langle T(u), u \rangle| = \sup_{\|u\|=1} \|T(u)\|.$$

Demonstração:

Seja $\alpha = \sup_{\|u\|=1} |\langle T(u), u \rangle|$. É suficiente mostrar que $\|T\| \leq \alpha$. De fato, $\forall u, v \in E$, temos

$$\alpha \geq \frac{\langle T(u+v), u+v \rangle}{\|u+v\|^2} \quad \text{e} \quad -\alpha \leq \frac{\langle T(u-v), u-v \rangle}{\|u-v\|^2}$$

ou seja,

$$\alpha \|u+v\|^2 \geq \langle T(u+v), u+v \rangle = \langle T(u), u \rangle + 2 \langle T(u), v \rangle + \langle T(v), v \rangle$$

e

$$\alpha \|u-v\|^2 \leq \langle T(u-v), u-v \rangle = \langle T(u), u \rangle - 2 \langle T(u), v \rangle + \langle T(v), v \rangle$$

Subtraindo a segunda desigualdade da primeira, temos que

$$4 \langle T(u), v \rangle \leq 2\alpha(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

Para $\|u\| = 1$, se $T(u) \neq 0$, tomemos $v = \frac{T(u)}{\|T(u)\|}$ e obtemos da desigualdade anterior que $\|T(u)\| \leq \alpha$. Se $T(u) = 0$ é claro que $\|T(u)\| \leq \alpha$. Portanto, $\|T\| \leq \alpha$. ■

Lema 1.4 Para cada $u \in E$, temos

$$T(u) = \sum_{\substack{i=-\infty \\ i \neq 0}}^{+\infty} \mu_i \langle u, \phi_i \rangle \phi_i.$$

Demonstração:

Seja $u_n = u - \sum_{\substack{i=-n \\ i \neq 0}}^n \langle u, \phi_i \rangle \phi_i$. É suficiente provar que $T(u_n) \rightarrow 0$. Como $u_n \perp \phi_i$, $i = -n, \dots, -1, 1, \dots, n$. Pela Proposição 1.7 e o lema anterior, temos que

$$\|T(u_n)\| \leq \max\{|\mu_{-n}|, |\mu_n|\} \|u_n\|$$

Donde segue o resultado, observando que $\|u_n\|^2 = \|u\|^2 - \sum_{\substack{i=-n \\ i \neq 0}}^n \langle u, \phi_i \rangle^2 \leq \|u\|^2$. ■

Lema 1.5 Todo autovalor não nulo de T , é obtido pelo processo descrito na Proposição 1.7.

Demonstração:

De fato, suponha por contradição, que exista $0 \leq \mu \neq \mu_i, \forall i$. Seja ϕ o autovalor associado a μ , pelo Lema 1.2, $\phi \perp \phi_i, \forall i$. Pelo Lema 1.4, segue que $T(\phi) = 0$, o que é uma contradição, pois $\phi \neq 0$ e $\mu \neq 0$. ■

Considere $F_n \subset E$ um subespaço vetorial de dimensão n de E .

Proposição 1.8 Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\mu_n = \inf_{F_{n-1}} \sup_{\substack{\|u\|=1 \\ u \perp F_{n-1}}} \langle T(u), u \rangle.$$

Analogamente

$$\mu_{-n} = \sup_{F_{n-1}} \inf_{\substack{\|u\|=1 \\ u \perp F_{n-1}}} \langle T(u), u \rangle.$$

Demonstração: Seja $\Lambda_n := \inf_{F_{n-1}} \sup_{\substack{\|u\|=1 \\ u \perp F_{n-1}}} \langle T(u), u \rangle$. Considerando $F_{n-1} = [\phi_1, \dots, \phi_{n-1}]$, temos que pela definição de μ_n que $\Lambda_n \leq \mu_n$.

Por outro lado, seja $\{h_1, \dots, h_n\}$ um conjunto de vetores mutualmente ortogonais em E , defina $F_{n-1} := [h_1, \dots, h_{n-1}]$. Seja $\phi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i$, tal que $\langle \phi, h_i \rangle = 0, i = 1, \dots, n-1$. Normalizando ϕ , temos, $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1$, segue que

$$\langle T(\phi), \phi \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \mu_i \geq \mu_n.$$

Portanto,

$$\sup_{\substack{\|u\|=1 \\ u \perp F_{n-1}}} \langle T(u), u \rangle \geq \mu_n, \quad \forall F_{n-1} \subset E.$$

Logo, $\Lambda_n \geq \mu_n$. De forma análoga, mostra-se a outra caracterização. ■

Proposição 1.9 Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\mu_n = \sup_{F_n} \inf_{\substack{\|u\|=1 \\ u \in F_n}} \langle T(u), u \rangle.$$

Analogamente

$$\mu_{-n} = \inf_{F_n} \sup_{\substack{\|u\|=1 \\ u \in F_{n-1}}} \langle T(u), u \rangle.$$

Demonstração: Seja $\Lambda_n := \sup_{F_n} \inf_{\substack{\|u\|=1 \\ u \perp F_n}} \langle T(u), u \rangle$. Considerando $F_n = [\phi_1, \dots, \phi_n]$, $u \in F_n$,

$\|u\| = 1$, temos que $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i$, com $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1$, portanto

$$\langle T(u), u \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \mu_i \geq \mu_n.$$

Logo, $\Lambda_n \geq \mu_n$.

Por outro lado, dado $F_n \subset E$, subespaço de E de dimensão n , dado $u \in F_n$, tal que $u \perp [\phi_1, \dots, \phi_{n-1}]$. Pela definição de μ_n , temos que $\langle T(u), u \rangle \leq \mu_n$, conseqüentemente

$$\inf_{\substack{\|u\|=1 \\ u \in F_n}} \langle T(u), u \rangle \leq \mu_n.$$

Portanto, $\Lambda_n \leq \mu_n$. De modo análogo, mostra-se a outra caracterização. ■

B.2 Autovalores do Operador $-\Delta + V(x)$

Nesta seção, iremos estudar o problema de autovalores

$$-\Delta u + V(x)u = \lambda u, \quad u \in H \quad (1.6)$$

onde o potencial $V \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, satisfaz (V_0) e (V_1) . O espaço de Hilbert real

$$H := \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx < +\infty\}$$

munido do produto interno

$$\langle u, v \rangle := \int (\nabla u \nabla v + V(x)uv) dx$$

e com norma correspondente

$$\|u\|^2 := \int (|\nabla u|^2 + V(x)u^2) dx.$$

Do Apêndice A, temos que H está imerso continuamente em $L^p(\mathbb{R}^N)$, para $2 \leq p \leq 2^*$ e está imerso compactamente em $L^p(\mathbb{R}^N)$, para $2 \leq p < 2^*$, onde $2^* = \frac{2N}{N-2}$.

Os resultados obtidos a seguir são baseados em estudos realizados em [13], onde o problema é abordado em domínio limitado.

Fixado $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$, considere $S : H \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$S_u(v) = \int uv dx$$

Observe que pela imersão contínua de H em $L^2(\mathbb{R}^N)$, temos

$$|S_u(v)| \leq \int |u||v| dx \leq \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq C \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|v\|$$

portanto, S_u é limitado.

Pelo Teorema de Representação de Riez, existe $T_u \in H$, tal que

$$\langle T_u, v \rangle = S_u(v) = \int uv dx.$$

Definimos $T : H \rightarrow H$ tal que $T(u) = T_u$. T está bem definido, é linear e simétrico. De fato, se $u = v \in H$, então

$$\langle T(u), w \rangle = S_u(w) = \int u w dx = \int v w dx = \langle T(v), w \rangle, \quad \forall w \in H,$$

portanto, $T(u) = T(v)$. Seja $u, v \in H$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\langle T(u + \alpha v), w \rangle = \int (u + \alpha v) w dx = \langle T(u) + \alpha T(v), w \rangle, \quad \forall w \in H,$$

logo, T é linear. Finalmente, observe que,

$$\langle T(u), v \rangle = S_u(v) = \int u v dx = \langle T(v), u \rangle = \langle u, T(v) \rangle, \quad \forall u, v \in H,$$

portanto, T é simétrico. Ainda mais, como H está imerso continuamente em $L^2(\mathbb{R}^N)$

$$\|T(u)\|^2 = \langle T(u), T(u) \rangle = \int u T(u) dx \leq \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|T(u)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq C \|u\| \|T(u)\|.$$

Portanto $\|T(u)\| \leq C \|u\|$, logo T é limitado.

Vamos mostrar que T é compacto. De fato, seja $(u_n) \subset H$, $\|u_n\|$ limitada, então, a menos de subsequência $u_n \rightharpoonup u_0 \in H$, ainda mais $u_n \rightarrow u_0$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$, $2 \leq p < 2^*$.

Assim,

$$\|T(u_n - u_0)\|^2 = \langle T(u_n - u_0), T(u_n - u_0) \rangle = \int (u_n - u_0) T(u_n - u_0) dx$$

pode ser majorado de modo

$$\|T(u_n - u_0)\|^2 \leq \|u_n - u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|T(u_n) - T(u_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq C \|u_n - u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|T(u_n) - T(u_0)\|$$

portanto,

$$\|T(u_n - u_0)\|^2 \leq C \|u_n - u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)},$$

logo, a menos de subsequência, $T(u_n) \rightarrow T(u_0)$. Portanto T é um operador compacto.

Assim dos resultados apresentados na seção anterior e como $\langle T(u), u \rangle = \int u^2 dx \geq 0$ temos que se μ é autovalor de T , então $\mu \geq 0$. Por outro lado se $T(u) = 0$, então $u = 0$, portanto $\mu > 0$.

Considere ϕ a μ -autofunção de T , então

$$\int \nabla(\mu\phi) \nabla v + V(x)(\mu\phi) v dx = \langle \mu\phi, v \rangle = \langle T(\phi, v) \rangle = \int \phi v dx, \quad \forall v \in H$$

portanto,

$$\int \nabla\phi \nabla v + V(x)\phi v dx = \frac{1}{\mu} \int \phi v dx, \quad \forall v \in H$$

logo,

$$-\Delta\phi + V(x)\phi = \frac{1}{\mu}\phi.$$

Dos resultados apresentados na seção anterior, definimos $\lambda_i := \frac{1}{\mu_i}$, temos todos os autovalores de $-\Delta + V(x)$ em H e podemos enunciar a seguinte proposição

Proposição 1.10 *O problema de autovalor (1.6), tem uma seqüência de autovalores*

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$$

com a seguinte caracterização variacional

$$\frac{1}{\lambda_n} = \mu_n = \sup_{F_n} \inf_{\substack{\|u\|=1 \\ u \in F_n}} \int u^2 dx.$$

e podemos tomar as autofunções $(\phi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de modo a formar uma base ortonormal para H .

Proposição 1.11 *A seqüência de autovalores do problema (1.6), se acumula no infinito, ou seja, $\lambda_n \rightarrow +\infty$.*

Demonstração: Considere $B_1, \dots, B_n \subset \mathbb{R}^N$, bolas duas a duas disjuntas. Considere $u_1, \dots, u_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, tal que $\text{supp } u_i \subset B_i$ e $\int u_i^2 dx = 1$.

Observe que $\{u_1, \dots, u_n\}$ é um conjunto mutuamente ortogonal. Seja $F_n = [u_1, \dots, u_n]$.

Para $u \in F_n$, temos $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$.

Portanto,

$$\int u^2 dx = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \int u_i^2 dx = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2$$

e

$$\|u\|^2 = \langle u, u \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \langle u_i, u_i \rangle \leq c \sum_{i=1}^n \alpha_i^2$$

onde $c = \max_{i=1}^n \{\langle u_i, u_i \rangle\}$. Então

$$\int u^2 dx \geq \frac{1}{c} \|u\|^2, \quad \forall u \in F_n.$$

Dessa desigualdade e da caracterização dos autovalores, segue que $\lambda_n \rightarrow +\infty$. ■

Observando que se o problema (1.6) fosse do tipo

$$-\Delta u + V(x)u = \lambda P(x)u$$

onde p é uma L^r -função, com $r > \frac{N}{2}$. Temos a seguinte seqüência de autovalores

$$\cdots \leq \lambda_{-n}(P(x)) \leq \cdots \leq \lambda_{-1}(P(x)) < 0 < \lambda_1(P(x)) \leq \cdots \leq \lambda_n(P(x)) \leq \cdots$$

com a seguinte caracterização de autovalores

$$\frac{1}{\lambda_n(P(x))} = \sup_{F_n} \inf_{\substack{\|u\|=1 \\ u \in F_n}} \int P(x)u^2 dx$$

e

$$\frac{1}{\lambda_{-n}(P(x))} = \inf_{F_n} \sup_{\substack{\|u\|=1 \\ u \in F_n}} \int P(x)u^2 dx.$$

Essas observações são obtidas a partir de um procedimento análogo ao problema (1.6). Assim podemos enunciar a seguinte proposição.

Proposição 1.12 *Sejam $P, \tilde{P} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, L^r -funções, com $r > \frac{N}{2}$, tal que $P(x) \leq \tilde{P}(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$. Suponha que exista $\lambda_n(P(x))$ e $\lambda_n(\tilde{P}(x))$. Então $\lambda_n(P(x)) \geq \lambda_n(\tilde{P}(x))$. Ainda mais, se $P(x) \not\leq \tilde{P}(x)$ então $\lambda_n(P(x)) > \lambda_n(\tilde{P}(x))$.*

O Teorema a seguir é um resultado parcial do Teorema do Tipo Krein-Rutman, baseado em sua versão em domínio limitado, apresentado em [13].

Teorema 1.3 *Seja $P \in L^r(\mathbb{R}^N)$, com $r > \frac{N}{2}$. Suponha que $\mu(\{x \in \mathbb{R}^N; P(x) > 0\}) > 0$, então o problema*

$$-\Delta u + V(x)u = \lambda P(x)u, \quad \text{em } \mathbb{R}^N$$

admite um autovalor principal $\lambda_1(P(x)) > 0$ simples. Um resultado análogo pode ser obtido quando $\mu(\{x \in \mathbb{R}^N; P(x) < 0\}) > 0$.

Demonstração: É claro que $\lambda_1(P(x)) > 0$. Vamos mostrar que a multiplicidade algébrica de $\lambda_1(P(x))$ é 1. Para isso, basta mostrar que $N(I - \lambda_1(P(x))T)^2 = N(I - \lambda_1(P(x))T)$, onde T está definido por $\langle T(u), u \rangle = \int P(x)u^2 dx$. Seja $u \in N(I - \lambda_1(P(x))T)^2$. Então $u - \lambda_1(P(x))T(u) = t\phi_1(P(x))$, para algum $t \in \mathbb{R}$. Portanto

$$\begin{aligned} \langle u - \lambda_1(P(x))T(u), \phi_1(P(x)) \rangle &= \langle u, \phi_1(P(x)) - \lambda_1(P(x))T(\phi_1(P(x))) \rangle \\ &= 0 \\ &= t \langle \phi_1(P(x)), \phi_1(P(x)) \rangle \end{aligned}$$

portanto $t = 0$. Logo, $u \in N(I - \lambda_1(P(x))T)$. Donde segue o resultado. ■

Apendice C: Teoria de Pontos Críticos

Neste apêndice, abordaremos algumas definições e resultados da Teoria de Pontos Críticos e da Teoria de Morse. As demonstrações destes resultados são dadas no Livro do Chang, vide [6].

Seja E um espaço de Hilbert e $J : E \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 . Denote o conjunto de pontos críticos de J por K . Dado $c \in \mathbb{R}$, seja $J_c = \{u \in E; J(u) \leq c\}$ e $K_c = J^{-1}(c) \cap K$.

Definição 1.1 Chamamos a seqüência $(u_n) \subset E$ de Seqüência de Palais-Smale, se $J(u_n) \leq c$ e $J'(u_n) \rightarrow 0$. Dizemos que J satisfaz a condição de Palais-Smale (PS), se toda Seqüência de Palais-Smale $(u_n) \subset E$, possui uma subsequência convergente.

Definição 1.2 Seja $J \in C^1(E)$, dizemos que J possui uma deformação própria se, $\forall a < b$, tal que $K \cap J^{-1}[a, b] = \emptyset$, então J_a é um retrato de deformação forte de $J_b \setminus K_b$.

Lema 1.6 (Deformação) Se $J \in C^1(E)$ satisfaz (PS) $_c$, $\forall c \in [a, b]$ e se $K \cap J^{-1}(a, b) = \emptyset$, então J_a é um retrato de deformação forte de J_b .

Denotamos por $H_*(X, Y)$ o grupo de homologia singular relativo com coeficientes em $\mathbb{Z}$, em que $Y \subset X$ são espaços topológicos.

Definição 1.3 Seja u_0 um ponto crítico isolado de J , e seja $c = J(u_0)$. Chamamos

$$C_p(J, u_0) = H_p(J_c \cap U_{u_0}, (J_c \setminus \{u_0\}) \cap U_{u_0})$$

o p -ésimo grupo crítico de J em u_0 , $p \in \mathbb{N}$, em que U_{u_0} é uma vizinhança de u_0 , tal que $K \cap (J_c \cap U_{u_0}) = \{u_0\}$.

Exemplos:

- Se u é ponto de mínimo local de J , tomando U_u uma vizinhança de modo que u seja o único ponto crítico nessa vizinhança, temos que $J^c \cap U_u = \{u\}$ e portanto $C_p(J, u) = H_p(J_c \cap U_u, (J_c \setminus \{u\}) \cap U_u) = H_p(\{u\}) = \delta_{p0}\mathbb{Z}$.
- Se u é um ponto crítico não-degenerado de J , ou seja, com $n(J, u) = 0$, tal que $m(J, u) = m$, tomando U_u uma vizinhança de modo que u seja o único ponto crítico nessa vizinhança, temos que $J_c \cap U_u \approx B^m$, onde B^m é uma bola no $\mathbb{R}^m$ e $(J_c \setminus \{u\}) \cap U_u \approx S^{m-1}$, onde $S^{m-1} = \partial B^m$, portanto $C_p(J, u) = H_p(J_c \cap U_u, (J_c \setminus \{u\}) \cap U_u) = H_p(B^m, S^{m-1}) = \delta_{pm}\mathbb{Z}$.

Definição 1.4 Seja D uma j -bola topológica em E , e S um subconjunto de E . Dizemos que ∂D e S são homologicamente enlaçados, se $\partial D \cap S = \emptyset$ e $|\tau| \cap S \neq \emptyset$, para cada j chain τ com $\partial \tau = \partial D$ onde $|\tau|$ é o suporte de τ .

Proposição 1.13 Seja E_1 e E_2 dois subespaços fechados de um espaço de Hilbert E . Suponha que $E = E_1 \oplus E_2$ e $\dim H_1 < +\infty$. Seja $e \in E_2$, $\|e\| = 1$, e $R, r, \rho > 0$, com $\rho < R$. Seja $D_1 = \{u + se; u \in H_1 \cap B_r, s \in [0, R]\}$ e $S_1 = E_2 \cap \partial B_\rho$. Então ∂D_1 e S_1 são homologicamente enlaçados.

Proposição 1.14 Seja E_1 e E_2 dois subespaços fechados de um espaço de Hilbert E . Suponha que $E = E_1 \oplus E_2$ e $\dim H_1 < +\infty$. Então, se $D_2 = B_R \cap E_1$ e $S_2 = E_2$, ∂D_2 e S_2 são homologicamente enlaçados.

Teorema 1.4 Assuma que ∂D e S são homologicamente enlaçados, onde D é uma j -bola topológica. Se $J \in C(E, \mathbb{R})$ satisfaz

$$J(u) > a, \forall u \in S \text{ e } J(u) \leq a, \forall u \in \partial D,$$

então $H_j(J_a, J_b) \neq 0$, para $b > \max_{u \in D} J(u)$.

Teorema 1.5 Assuma que $\alpha \in H_j(J_b, J_a)$ é não-trivial, e

$$c = \inf_{\tau \in \alpha} \sup_{u \in |\tau|} J(u).$$

Suponha que J satisfaz (PS). Então existe $u_0 \in K_c$ tal que $C_j(J, u_0) \neq 0$.

Nós pretendemos calcular grupos críticos de ponto críticos isolados. Para tanto, apresentamos o Teorema do *Shifting*. Mas primeiro, considere o Teorema do *Splitting*.

Teorema 1.6 (Splitting) Suponha que U é uma vizinhança de u_0 em um espaço de Hilbert E e que $J \in C^2(U)$. Assume que u_0 é o único ponto crítico de J e que $A = d^2 J(u_0)$ com núcleo N . Se 0 é um ponto isolado do espectro $\sigma(A)$ ou $0 \notin \sigma(A)$, então existe uma bola B_δ , $\delta > 0$, centrada em 0 , um homomorfismo local ϕ definido em B_δ que preserva ordem, e uma função de classe C^1 , $h : B_\delta \cap N \rightarrow N^\perp$ tal que

$$J \circ \phi(v + w) = \frac{1}{2} \langle Av, v \rangle + J(h(w) + w), \forall u \in B_\delta$$

onde $v = P_N u$, $w = P_{N^\perp} u$, e P_N (respectivamente $P_{N^\perp}$) é a projeção ortogonal sobre o espaço N (respectivamente $N^\perp$).

Seja $\tilde{N} = \phi(U \cap N)$, definimos $\tilde{J} = J|_{\tilde{N}}$. O seguinte teorema relaciona os pontos críticos de J com os de $\tilde{J}$.

Teorema 1.7 (Shifting) *Suponha as hipóteses do Teorema 1.6. Assuma que o índice de Morse de J em u_0 é μ , então*

$$C_p(J, u_0) = C_{p-\mu}(\tilde{J}, u_0), \quad p = 0, 1, \dots$$

Corolário 1.1 *Assuma as hipóteses do Teorema do 1.7, que o índice de Morse de J em u_0 é μ , e que $\nu = \dim N < +\infty$. Então*

1. $C_p(J, u_0) = \delta_{p\mu}\mathbb{Z}$, ou
2. $C_p(J, u_0) = \delta_{p(\mu+\nu)}\mathbb{Z}$, ou
3. $C_p(J, u_0) = 0$, para $p \leq \mu$ e $p \geq \mu + \nu$.

Os dois teoremas a seguir são consequências imediatas dos resultados anteriores.

Teorema 1.8 *Seja $E = V \oplus W$ um espaço de Hilbert real com V de dimensão finita, $0 < k := \dim V$. Suponha $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfaz (PS). Suponha que existe $\gamma \in \mathbb{R}$ e*

$$(J_1) \text{ existe } \rho > 0 \text{ tal que } \sup_{\{v \in V; \|v\|=\rho\}} J(v) < \gamma,$$

$$(J_2) J(w) \geq \gamma, \quad \forall w \in W.$$

Ainda mais, assuma que J tem somente valores críticos isolados e cada valor crítico corresponde a um número finito de pontos críticos. Então J tem um ponto crítico u_0 , com $C_k(J, u_0) \neq 0$.

Teorema 1.9 *Seja $E = V \oplus W$ um espaço de Hilbert real com V de dimensão finita, $0 < k := \dim V$. Suponha $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfaz (PS). Suponha que existe $e \in W$, não nulo, $\gamma \in \mathbb{R}$ e*

$$(J_1) \text{ existe } \rho > 0 \text{ tal que } \sup_{\{w \in W; \|w\|=\rho\}} J(w) > \gamma,$$

$$(J_2) J(u) \leq \gamma, \quad \forall u \in \partial D, \text{ onde } D = \{v + re; \|v + re\| < \rho, 0 \leq r \leq \rho\}.$$

Ainda mais, assuma que J tem somente valores críticos isolados e cada valor crítico corresponde a um número finito de pontos críticos. Então J tem um ponto crítico u_0 , com $C_{k+1}(J, u_0) \neq 0$.

O teorema a seguir é um resultado abstrato apresentado em [29].

Teorema 1.10 *Seja $E = V \oplus W$ um espaço de Hilbert real com V de dimensão finita, $0 < k := \dim V$. Suponha $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfaz (PS). Suponha que*

$$(J_1) \text{ existem } \rho > 0 \text{ tal que } \sup_{\{v \in V: \|v\|=\rho\}} J(v) < 0,$$

$$(J_2) J(w) \geq 0, \forall w \in W,$$

$$(J_3) \text{ existe } v_0 \in V \text{ tal que } J \text{ é limitado inferiormente no semiespaço } \{s v_0 + w : s \geq 0, w \in W\}.$$

Ainda mais, assuma que J tem somente valores críticos isolados e cada valor crítico corresponde a um número finito de pontos críticos. Então J tem um ponto crítico u_0 , com $C_{k-1}(J, u_0) \neq 0$.

Apêndice D: Preliminares para a Compacidade

O resultados desta seção são apresentados em [3] em suas versões para domínio limitado.

Lema 1.7 *Assuma (f_1) . Seja $(u_n) \subset H$ uma seqüência tal que $\|u_n\| \rightarrow +\infty$. Definimos $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}, f_n(x) := \frac{f(x, u_n(x))}{\|u_n\|}$, então a menos de subsequência*

$$v_n \rightharpoonup v_0 \text{ em } H$$

$$v_n \rightarrow v_0 \text{ em } L^2(\mathbb{R}^N)$$

$$v_n(x) \rightarrow v_0(x) \text{ qtp em } \mathbb{R}^N,$$

$$f_n \rightharpoonup f_0 \text{ em } L^2(\mathbb{R}^N).$$

Ainda mais

$$L(x) \leq \frac{f_0(x)}{v_0(x)} \leq K(x), \text{ se } v_0(x) \neq 0$$

$$f_0(x) = 0, \text{ se } v_0(x) = 0.$$

Demonstração: Como v_n é limitada em H é claro que

$$v_n \rightharpoonup v_0 \text{ em } H$$

$$v_n \rightarrow v_0 \text{ em } L^2(\mathbb{R}^N), \text{ pois } H \subset\subset L^2(\mathbb{R}^N)$$

$$v_n(x) \rightarrow v_0(x) \text{ qtp em } \mathbb{R}^N.$$

De (f_1) , temos que $|f(x, s)| \leq a|s|, \forall (x, s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, implica que (f_n) é limitada em $L^2(\mathbb{R}^N)$. De fato, como H está imerso continuamente em $L^2(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \frac{\|f(\cdot, u_n)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}}{\|u_n\|} \leq a \frac{\|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}}{\|u_n\|} \leq C.$$

Portanto,

$$f_n \rightharpoonup f_0 \text{ em } L^2(\mathbb{R}^N).$$

Definimos

$$E_+ := \{x \in \mathbb{R}^N; v_0(x) > 0\}, \quad E_- := \{x \in \mathbb{R}^N; v_0(x) < 0\}, \quad E_0 := \{x \in \mathbb{R}^N; v_0(x) = 0\},$$

$$L_{\pm}(x) = \liminf_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x, s)}{s} \text{ e } K_{\pm}(x) = \limsup_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x, s)}{s}.$$

Se $u_n(x) \neq 0$, podemos escrever

$$f_n(x) = \frac{f(x, u_n(x))}{u_n(x)} v_n(x).$$

Seja $x \in E_+$, como $v_n(x) \rightarrow v_0(x) > 0$ e $\|u_n\| \rightarrow +\infty$, então $u_n(x) \rightarrow +\infty$. Portanto,

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x, u_n(x))}{u_n(x)} v_n(x) \geq L_+(x) v_0(x),$$

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x, u_n(x))}{u_n(x)} v_n(x) \leq K_+(x) v_0(x).$$

Logo,

$$L_+(x) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{v_0(x)} \leq \frac{f_0(x)}{v_0(x)} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{v_0(x)} \leq K_+(x).$$

Seja $x \in E_-$, como $v_n(x) \rightarrow v_0(x) < 0$ e $\|u_n\| \rightarrow +\infty$, então $u_n(x) \rightarrow -\infty$. Portanto,

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x, u_n(x))}{u_n(x)} v_n(x) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x, u_n(x))}{u_n(x)} \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(x) \geq K_-(x) v_0(x),$$

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x, u_n(x))}{u_n(x)} v_n(x) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x, u_n(x))}{u_n(x)} \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(x) \leq L_-(x) v_0(x).$$

Logo,

$$L_-(x) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{v_0(x)} \leq \frac{f_0(x)}{v_0(x)} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{v_0(x)} \leq K_-(x).$$

Seja $x \in E_0$, como $v_n(x) \rightarrow v_0(x) = 0$ e $\frac{|f(x, u_n(x))|}{|u_n(x)|} < a$, temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x, u_n(x))}{u_n(x)} v_n(x) = 0.$$

Logo, $f_0(x) = 0$. Portanto obtemos o que queríamos. ■

Lema 1.8 *Assuma (F_1) . Seja $(u_n) \subset H$ uma seqüência tal que $\|u_n\| \rightarrow +\infty$. Então*

$$\bar{L}(x) v_0^2(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{2F(x, u_n(x))}{\|u_n\|^2} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{2F(x, u_n(x))}{\|u_n\|^2} \leq \bar{K}(x) v_0^2(x)$$

onde v_0 é dada no lema anterior.

Demonstração: Defina

$$F_n(x) := \frac{2F(x, u_n(x))}{\|u_n\|^2}.$$

Vamos estudar o limite pontual de F_n nos seguintes conjuntos

$$E_* = \{x \in \mathbb{R}^N; v_0(x) \neq 0\}$$

e

$$E_0 = \{x \in \mathbb{R}^N; v_0(x) = 0\}$$

Caso 1: Neste caso, $x \in E_*$, temos que $|u_n(x)| = |v_n(x)|\|u_n\| \rightarrow +\infty$ para quase todo $x \in E_*$. Assim podemos escrever

$$F_n(x) := \frac{2F(x, u_n(x))}{u_n^2(x)} v_n^2(x),$$

para todo n suficientemente grande e $x \in E_*$. Portanto, obtemos

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \geq \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{2F(x, u_n(x))}{u_n^2(x)} \right) v_0^2(x) \geq \bar{L}(x) v_0^2(x)$$

e

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \leq \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{2F(x, u_n(x))}{u_n^2(x)} \right) v_0^2(x) \leq \bar{K}(x) v_0^2(x)$$

Caso 2: Neste caso, $x \in E_0$. Suponha que $|u_n(x)| \leq 1$ então, de (F_1) temos que

$$|F(x, u_n(x))| \leq \frac{A}{2} |u_n(x)|^2 + B(x),$$

como $\|u_n\| \rightarrow \infty$, segue que

$$0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{2F(x, u_n(x))}{\|u_n\|^2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A}{2\|u_n\|^2} + \frac{B(x)}{\|u_n\|^2} = 0,$$

portanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = 0 = \bar{L}(x) v_0^2(x) = \bar{K}(x) v_0^2(x)$. Supondo que $|u_n(x)| \geq 1$, então

$$\frac{|F(x, u_n(x))|}{u_n^2(x)} \leq \frac{A}{2} + \frac{B(x)}{u_n^2(x)} \leq \frac{A}{2} + B(x).$$

Assim, como $v_n(x) \rightarrow v_0(x) = 0$ para quase todo $x \in E_0$, temos

$$0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{2F(x, u_n(x))}{u_n^2(x)} v_n(x) \leq (A + 2B(x)) \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x) = 0,$$

portanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = 0 = \bar{L}(x)v_0^2(x) = \bar{K}(x)v_0^2(x)$.

Logo $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = 0 = \bar{L}(x)v_0^2(x) = \bar{K}(x)v_0^2(x)$ para quase todo $x \in E_0$. Assim desses dois casos obtemos o lema. ■

Considere λ_i os autovalores do problema $-\Delta v + V(x)v = \lambda v$ em H , dados no Apêndice B.

Lema 1.9 *Seja $p : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável, satisfazendo $\lambda_i \not\leq p(x) \not\leq \lambda_{i+1}$. Se $w \in H$ é solução fraca de*

$$-\Delta w + V(x)w = p(x)w \text{ em } \mathbb{R}^N$$

então $w = 0$.

Apêndice E: Preliminares para a Geometria

O lema a seguir, é necessário para obtermos o comportamento geométrico do funcional. Este resultado é apresentado em [15].

Lema 1.10 *Suponha que $f \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$, satisfaz (f_1) e $\bar{L}(x) \not\leq \lambda_m$. Então existe $\delta > 0$ e $R_0 > 0$ tal que*

$$\|u\|^2 - \int_{B_{R_0}} \bar{L}(x) u^2 dx \leq -\delta \|u\|^2, \quad \forall u \in H_m.$$

Demonstração: Como H_m possui dimensão finita, pela caracterização dos autovalores, temos que

$$\lambda_m = \sup_{u \in H_m} \frac{\|u\|^2}{\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2} \implies \|u\|^2 \leq \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \lambda_m.$$

Logo,

$$\|u\|^2 - \int \bar{L}(x) u^2 dx \leq \int (\lambda_m - \bar{L}(x)) u^2 dx < 0.$$

Como a bola unitária é compacta em H_m , existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\|u\|^2 - \int \bar{L}(x) u^2 dx < -\delta_1, \quad \forall u \in H_m, \|u\| = 1.$$

Dado $u \in H_m$, como $\frac{u}{\|u\|}$ é um vetor unitário, segue que

$$\left\| \frac{u}{\|u\|} \right\|^2 - \int \bar{L}(x) \left(\frac{u}{\|u\|} \right)^2 dx < -\delta_1.$$

Portanto,

$$\|u\|^2 - \int \bar{L}(x) u^2 dx < -\delta_1 \|u\|^2, \quad \forall u \in H_m. \quad (1.7)$$

Dado $\epsilon > 0$, obtemos $R_0 > 0$ tal que

$$\int_{B_{R_0}^c} u^2 dx < \epsilon, \quad \forall u \in H_m, \|u\| = 1.$$

De fato, suponha que não, então existe $R_n \rightarrow +\infty$, $u_n \in B(0, 1) \subset H_m$, tal que

$$\int_{B_{R_n}^c} u_n^2 dx \geq \epsilon.$$

É claro que, a menos de subsequência, $\|u_n - u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \rightarrow 0$ para algum u_0 . Por outro lado,

$$\|u_n - u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \geq \|u_n - u_0\|_{L^2(B_{R_n}^c)}^2 \geq \|u_n\|_{L^2(B_{R_n}^c)}^2 - \|u_0\|_{L^2(B_{R_n}^c)}^2 \geq \epsilon.$$

O que é um absurdo. Portanto,

$$\int_{B_{R_0}^c} u^2 dx < \epsilon \|u\|^2, \quad \forall u \in H_m.$$

De (1.7) temos,

$$\|u\|^2 - \int_{B_{R_0}} \bar{L}(x) u^2 dx < -\delta_1 \|u\|^2 + \int_{B_{R_0}^c} \bar{L}(x) u^2 dx$$

portanto,

$$\|u\|^2 - \int_{B_{R_0}} \bar{L}(x) u^2 dx < -\delta_1 \|u\|^2 + \lambda_{m+1} \int_{B_{R_0}^c} u^2 dx \leq -\delta_1 \|u\|^2 + \lambda_{m+1} \epsilon \|u\|^2.$$

Tomando $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, de modo que $\delta = \delta_1 - \lambda_{m+1} \epsilon > 0$, temos o resultado. ■

Capítulo 2

Existência de Solução

Neste capítulo, apresentaremos alguns resultados de existência de solução fraca não trivial, que podem ser encontrados em [20] e [23], para o problema elíptico semilinear

$$-\Delta u + V(x)u = f(u), \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (2.1)$$

com $N \geq 3$, a função $f \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, tal que $f(0) = 0$. Esta última condição nos diz que (2.1) possui uma solução trivial $u = 0$. Estamos interessados em solução não trivial positiva.

Considere o potencial $V \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$,

(V_1) existe $V_0 \in \mathbb{R}$, tal que

$$0 < V_0 \leq \inf_{x \in \mathbb{R}^N} V(x).$$

(V_2) existe $V_\infty \in (0, \infty)$, tal que

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} V(x) = V_\infty.$$

Uma classe de exemplos de V com tais propriedades, pode ser dada por $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$V(x) = k \frac{|x|}{1 + |x|} + \alpha$$

com k, α constantes positivas.

Assuma $f \in C(\mathbb{R})$ tal que $f(s) = 0, s < 0$,

(f_1) o limite

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{f(s)}{s} = 0$$

(f_2) existe $a \in (0, \infty)$, tal que

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{f(s)}{s} = a > \lambda_0 = \inf(\sigma(-\Delta + V(x))),$$

onde $\sigma(-\Delta + V(x))$ é o espectro do operador auto-adjunto $-\Delta + V(x) : L^2(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$.

Exemplos de funções que satisfazem (f_1) e (f_2) , podemos destacar $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$f(s) = k \frac{s^2}{1+s},$$

onde k é uma constante positiva.

Observe que as principais características do problema (2.1) são que a não-linearidade é assintoticamente linear e que o problema associado no "infinito" é autônomo.

Vamos buscar soluções de (2.1) em $H := H^1(\mathbb{R}^N)$, com a norma

$$\|u\|^2 := \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2) dx$$

que é equivalente a norma padrão de $H^1(\mathbb{R}^N)$. De fato,

$$\int (|\nabla u|^2 + V(x)u^2) dx \geq \int |\nabla u|^2 dx + V_0 \int u^2 dx \geq \min\{V_0, 1\} \int (|\nabla u|^2 + u^2) dx.$$

A partir deste ponto, quando não indicarmos sobre qual conjunto está definida a integral, é porque a integração é sobre o $\mathbb{R}^N$.

Por outro lado, de (V_2) e como V é contínuo, temos que existe $0 < M = \max_{x \in \mathbb{R}^N} V(x)$, portanto

$$\int (|\nabla u|^2 + V(x)u^2) dx \leq \int |\nabla u|^2 dx + M \int u^2 dx \leq \max\{M, 1\} \int (|\nabla u|^2 + u^2) dx.$$

O funcional associado a (2.1) é definido por

$$I(u) := \frac{1}{2} \int (|\nabla u|^2 + V(x)u^2) dx - \int F(u) dx, \quad u \in H,$$

onde $F(u) = \int_0^u f(s) ds$, ou seja, todo ponto crítico de I é uma solução do problema (2.1).
Seja

$$\bar{I}(u) := \frac{1}{2} \int (|\nabla u|^2 + V_\infty u^2) dx - \int F(u) dx, \quad u \in H.$$

o funcional associado ao problema no infinito.

Apresentamos os seguintes resultados

Teorema 2.1 *Assuma $(V_1), (V_2), (f_1), (f_2)$ e*

(f_3) existe $\delta > 0$, tal que

$$\frac{2F(s)}{s^2} \leq V_\infty - \delta, \quad \forall s \in \mathbb{R}^+.$$

Então (2.1) tem uma solução positiva.

Teorema 2.2 *Assuma $(V_1), (V_2), (f_1), (f_2)$ e*

(V_3) $V(x) \leq V_\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N,$

(f_4) Definimos $G : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ por $2G(s) = f(s)s - 2F(s)$

1. $G(s) \geq 0, \quad \forall s \geq 0,$

2. existe $\delta > 0$, tal que se $\frac{2F(s)}{s^2} \geq V_\infty - \delta$, então $G(s) \geq \delta$.

Então (2.1) tem uma solução positiva.

Teorema 2.3 *Assuma $(V_1), (V_2), (f_1), (f_2)$ e*

(V_4) existe $R_0 > 0$, tal que,

$$V(x) \geq V_\infty, \quad \forall |x| > R_0.$$

(f_5) para todo $s > 0$ temos

$$\frac{f(s)}{s} < V_\infty.$$

Então (2.1) tem uma solução positiva.

Os Teoremas 2.1 e 2.2 são apresentados por [20], já o Teorema 2.3 é um caso particular de um resultado apresentado por [23], onde o autor obtém também um resultado mais geral para o Teorema 2.1.

Para estabelecermos os Teoremas 2.1 e 2.2, mostramos que o funcional I associado ao problema possui a geometria do Teorema do Passo da Montanha, assim obtemos uma sequência de Cerami, tal que o funcional aplicado a esta sequência converge para o nível C , dado pelo Teorema do Passo da Montanha. Mostramos também que essa sequência é limitada, através do método de concentração de compacidade de P. L. Lions, mostramos que, a

menos de subsequência, converge fracamente a um ponto crítico não trivial do funcional I . Já para obtermos o Teorema 2.3, utiliza-se a técnica da aproximação do domínio por conjuntos limitados, mais precisamente, aproximamos o $\mathbb{R}^N$ por bolas centradas na origem. Estudamos o problema nessas bolas e verificamos que a partir de um certo raio sempre obtemos uma solução positiva. Essa sequência de soluções dos problemas em domínio limitado é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e converge fracamente a uma solução positiva do problema inicial.

Definição 2.1 Dizemos que $(u_n) \subset H$ é uma Sequência de Cerami, no nível c , se

$$I(u_n) \rightarrow c \quad e \quad \|I'(u_n)\|_{H^{-1}} (1 + \|u_n\|) \rightarrow 0.$$

Em particular,

$$I(u_n) \rightarrow c \quad e \quad \|I'(u_n)\|_{H^{-1}} \rightarrow 0.$$

neste caso, dizemos que $(u_n) \subset H$ é uma Sequência de Palais-Smale no nível c .

1 Geometria do Passo da Montanha

Primeiro, $I(0) = 0$ é uma consequência imediata do Lema a seguir.

Lema 2.1 Assuma $(V_1), (f_1), (f_2)$. Então

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - o(\|u\|^2),$$

$$I'(u)u = \|u\|^2 - o(\|u\|^2),$$

a medida que $u \rightarrow 0$ em H .

Demonstração: Fixemos $2 < p < 2^*$, onde $2^* = \frac{2N}{N-2}$ é o exponte crítico de Sobolev. Dado $\epsilon > 0$, existe $C_\epsilon > 0$ tal que

$$|f(s)| \leq \epsilon|s| + C_\epsilon|s|^{p-1}, \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

$$|F(s)| \leq \frac{\epsilon}{2}s^2 + \frac{C_\epsilon}{p}|s|^p, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

De fato, como $\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{f(s)}{s} = 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$$|f(s)| \leq \epsilon|s|, \quad \forall 0 \leq s < \delta.$$

De modo análogo, como $\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{f(s)}{s} = a$, existe $R > \max\{1, \delta\}$, tal que

$$|f(s)| < (|a| + \epsilon)s, \quad \forall s > R.$$

Como f é contínua, existe $K_\epsilon > 0$ tal que

$$|f(s)| < K_\epsilon s^{p-1}, \quad \forall \delta \leq s \leq R.$$

Como $f(s) = 0$, $\forall s < 0$, tome $C_\epsilon = \max\{K_\epsilon, |a| + \epsilon\}$, então

$$|f(s)| \leq \epsilon|s| + C_\epsilon|s|^{p-1}, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

Consequentemente,

$$|F(s)| = \left| \int_0^s f(t) dt \right| \leq \left| \int_0^s |f(t)| dt \right| \leq \left| \int_0^s \epsilon|t| + C_\epsilon|t|^{p-1} dt \right| \leq \frac{\epsilon}{2}s^2 + \frac{C_\epsilon}{p}|s|^p, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Como H está imerso continuamente em $L^p(\mathbb{R}^N)$, para $2 \leq p \leq 2^*$, e

$$\left| \int F(u) dx \right| \leq \frac{\epsilon}{2} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \frac{C_\epsilon}{p} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p,$$

segue que $\int F(u) dx = o(\|u\|^2)$ quando $u \rightarrow 0$ em H . De modo análogo, como

$$\left| \int f(u) u dx \right| \leq \epsilon \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + C_\epsilon \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p, \quad (2.3)$$

temos que $\int f(u) u dx = o(\|u\|^2)$ quando $u \rightarrow 0$ em H .

Assim, do fato que $I(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 - \int F(u) dx$ e $I'(u)u = \|u\|^2 - \int f(u) u dx$, temos o resultado. ■

Corolário 2.1 *Assuma $(V_1), (f_1), (f_2)$, então existe $\rho_0 > 0$ tal que*

1. *Para todo ponto crítico $u \neq 0$ de I , temos que $\|u\| > \rho_0$.*
2. *Para toda seqüência de Palais-Smale $(u_n) \subset H$, no nível b , $b \neq 0$, temos que*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| \geq \rho_0.$$

Demonstração:

Item 1: Suponha, por contradição, que existe $u_n \in H$, pontos críticos não nulos de I , com $u_n \rightarrow 0$. Pelo Lema 2.1, existe n_0 , tal que $\forall n \geq n_0$, temos

$$0 = \frac{I'(u_n)u_n}{\|u_n\|^2} = 1 + \frac{o(\|u_n\|^2)}{\|u_n\|^2}$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{o(\|u_n\|^2)}{\|u_n\|^2} = 0$, temos uma contradição.

Item 2: Suponha, por contradição, que existe $(u_n) \subset H$ uma seqüência de Palais-Smale no nível $b \neq 0$, tal que $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| = 0$. Considere (v_n) uma subseqüência de (u_n) tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\| = 0$. Portanto,

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} I(v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \|v_n\|^2 + o(\|v_n\|^2) \right) = 0$$

o que é uma contradição, portanto temos o resultado. ■

Lema 2.2 *Assuma $(V_1), (f_1), (f_2)$. Então existe $e \in H$, não nulo, tal que $I(e) < 0$.*

Demonstração: Como $-\Delta + V(x)$ é auto-adjunto, então o ínfimo do espectro $\sigma(-\Delta + V(x))$ pode ser caracterizado como,

$$\inf \sigma(-\Delta + V(x)) = \inf_{\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}} \langle -\Delta u + V(x)u, u \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \inf_{\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}} \|u\|^2, \quad u \in H.$$

Por (f_2) , temos que $\inf \sigma(-\Delta + V(x)) < a$. Então podemos encontrar $\bar{u} \in H$, tal que $\|\bar{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 1$ e $\|\bar{u}\|^2 < a$. Substituindo $\bar{u}$ por $|\bar{u}|$ podemos supor $\bar{u} \geq 0$, qtp em $\mathbb{R}^N$.

Inicialmente mostraremos que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int \frac{F(t\bar{u})}{t^2} dx = \frac{1}{2}a.$$

De fato, seja $x \in \mathbb{R}^N$ tal que $\bar{u}(x) > 0$. Por (f_2) temos

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{F(t\bar{u}(x))}{t^2} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^{t\bar{u}(x)} f(s) ds}{t^2} \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^{\bar{u}(x)} \frac{f(t\theta)}{t^2} t d\theta \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^{\bar{u}(x)} \frac{f(t\theta)}{t\theta} \theta d\theta \\
 &= \int_0^{\bar{u}(x)} a \theta d\theta \\
 &= \frac{a}{2} (\bar{u}(x))^2
 \end{aligned}$$

e para $x \in \mathbb{R}^N$, tal que $\bar{u}(x) = 0$, temos

$$\frac{F(t\bar{u}(x))}{t^2} = 0 = \frac{a}{2} (\bar{u}(x))^2.$$

Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{F(t\bar{u}(x))}{t^2} = \frac{a}{2} (\bar{u}(x))^2, \text{ qtp em } \mathbb{R}^N.$$

Por outro lado, de (f_1) e (f_2) temos que existe $C > 0$ tal que

$$0 \leq \frac{f(s)}{s} \leq C, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad (2.4)$$

portanto,

$$F(s) = \int_0^s f(t) dt \leq C \int_0^s t dt = C \frac{s^2}{2}, \quad s > 0,$$

como para $s < 0$, temos que $f(s) = 0$, então,

$$0 \leq \frac{F(s)}{s^2} \leq \frac{C}{2}, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

Consequentemente,

$$0 \leq \frac{F(t\bar{u}(x))}{t^2} \leq \frac{C}{2} (\bar{u}(x))^2, \text{ qtp em } \mathbb{R}^N.$$

Aplicando o Teorema da Convergência Dominada, obtemos que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int \frac{F(t\bar{u})}{t^2} dx = \int \frac{1}{2} a (\bar{u}(x))^2 dx = \frac{1}{2} a.$$

Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{I(t\bar{u})}{t^2} = \frac{1}{2} \|\bar{u}\|^2 - \lim_{t \rightarrow +\infty} \int \frac{F(t\bar{u}(x))}{t^2} dx = \frac{1}{2} (\|\bar{u}\|^2 - a) < 0.$$

Logo existe $t_0 > 0$, tal que,

$$\frac{I(t_0\bar{u})}{t_0^2} < 0.$$

Tomando $e = t_0\bar{u}$, temos que $I(e) < 0$. ■

2 Existência de uma Seqüência (z_n) Limitada em H

Para obtermos o Teorema 2.3, abordaremos o problema através de aproximação do domínio por bolas centradas na origem. Para tanto, considere $0 < R_n \rightarrow +\infty$ e

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = f(u), & x \in B_{R_n} \\ u = 0, & x \in \partial B_{R_n} \end{cases} \quad (P_n)$$

Proposição 2.1 *Assuma $(V_1), (V_4), (f_1), (f_2), (f_5)$. Então existe um número natural N_0 , tal que (P_n) tem uma solução positiva z_n , $\forall n \geq N_0$.*

Demonstração: Considere λ_n o primeiro autovalor de $-\Delta + V(x)$ em $H_0^1(B_{R_n})$, então pela caracterização variacional temos

$$\lambda_n = \inf_{u \in H_0^1(B_{R_n}) \setminus \{0\}} \frac{\int_{B_{R_n}} |\nabla u|^2 + V(x)u^2 dx}{\int_{B_{R_n}} u^2 dx}$$

Podemos olhar $H_0^1(B_{R_n}) \subset H_0^1(B_{R_{n+1}}) \subset \dots \subset H^1(\mathbb{R}^N)$, assim obtemos que

$$\lambda_0 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_1.$$

Como $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em $H^1(\mathbb{R}^N)$, dado $\epsilon > 0$ existe $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, tal que

$$\frac{\int |\nabla \phi|^2 + V(x)\phi^2 dx}{\int \phi^2 dx} \leq \lambda_0 + \epsilon.$$

Considere n suficientemente grande, de modo que $\text{supp } \phi \subset B_{R_n}$, então $\lambda_n \leq \lambda_0 + \epsilon$. Assim podemos concluir que existe N_0 tal que $\lambda_n < a$, $\forall n \geq N_0$. Assim temos a seguinte hipótese verificada

$$f'(0) < \lambda_n < a = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{f(s)}{s}, n \geq N_0.$$

É fato conhecido que (P_n) sob essas hipóteses tem solução, vide [24]. Portanto existe uma solução positiva para (P_n) , para todo $n \geq N_0$. ■

A partir desse ponto, consideraremos (z_n) como a sequência dessas soluções positivas.

Lema 2.3 *Assuma $(V_1), (V_4), (f_1), (f_2), (f_5)$. Considere $y_n \in \mathbb{R}^N$ tal que $z_n(y_n) = \|z_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$, então $|y_n| < R_0$, onde R_0 é dado pela condição (V_4) .*

Demonstração:

Observe que z_n é uma solução clássica de (P_n) , assim é de classe C^2 . Como z_n atinge o máximo em y_n , temos que $\frac{\partial^2 z_n(y_n)}{\partial x_i^2} \leq 0$, portanto $-\Delta z_n(y_n) \geq 0$. Suponha, por contradição, que $|y_n| > R_0$ para algum n , então

$$V(y_n)z_n(y_n) \leq -\Delta z_n(y_n) + V(y_n)z_n(y_n) = f(z_n(y_n)) < V(y_n)z_n(y_n)$$

onde a última desigualdade é dada por (V_4) e (f_5) . Assim obtemos a contradição, donde segue o lema. ■

Lema 2.4 *Assuma $(V_1), (V_4), (f_1), (f_2), (f_5)$. Então $\|z_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$ é limitada.*

Demonstração: Suponha por contradição, que a menos de subsequência $\|z_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \rightarrow +\infty$. Defina

$$\bar{z}_n(x) = \frac{z_n(x + y_n)}{\|z_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}}.$$

Observe que $\bar{z}_n(0) = 1$. Ainda mais, como z_n é solução de (P_n) , temos

$$-\Delta \bar{z}_n(x) + V(x + y_n)\bar{z}_n(x) = \frac{f(z_n(x + y_n))}{z_n(x + y_n)} \bar{z}_n(x), \text{ em } B_{R_n}(-y_n). \quad (2.6)$$

A estimativa do tipo Schauder, para maiores detalhes ver [19], mostra que $(\bar{z}_n)$ é limitada no espaço de Hölder $C_{loc}^{1,\beta}(\mathbb{R}^N)$, para algum $0 < \beta < 1$. Então existe $\bar{z} \in H$, tal que para $0 < \beta' < \beta$ e a menos de subsequência

$$\bar{z}_n \rightarrow \bar{z}, \text{ em } C_{loc}^{1,\beta'}(\mathbb{R}^N).$$

Como $\bar{z}_n$ é positiva e $\bar{z}_n(0) = 1$, temos que $\bar{z} \geq 0$ e $\bar{z}(0) = 1$, ainda mais $\bar{z} \neq 0$. Em particular

$$\bar{z}_n(x) \rightarrow \bar{z}(x), \text{ qtp em } \mathbb{R}^N.$$

Do Apêndice G, sabemos que $\lambda_0 > 0$ é o primeiro autovalor de $-\Delta + V(x)$ em H , considere ϕ_0 a autofunção associada. Multiplicando (2.6) por $\phi_0(x + y_n)$ e integrando obtemos

$$\lambda_0 \int \bar{z}_n(x) \phi_0(x + y_n) dx = \int \frac{f(z_n(x + y_n))}{z_n(x + y_n)} \bar{z}_n(x) \phi_0(x + y_n) dx.$$

Como $|y_n|$ é limitada, a menos de subsequência, $y_n \rightarrow y \in \mathbb{R}^N$, com $|y| \leq R_0$. Portanto, da equação anterior, do Teorema da Convergência Dominada e do Lema de Fatou, temos

$$\begin{aligned} \lambda_0 \int \bar{z}(x) \phi_0(x + y) dx &= \lambda_0 \liminf_{n \rightarrow \infty} \int \bar{z}_n(x) \phi_0(x + y_n) dx \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \int (\nabla \bar{z}_n(x) \nabla \phi_0(x + y_n) + V(x + y_n) \bar{z}_n(x) \phi_0(x + y_n)) dx \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \int \frac{f(z_n(x + y_n))}{z_n(x + y_n)} \bar{z}_n(x) \phi_0(x + y_n) dx \\ &\geq \int \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z_n(x + y_n))}{z_n(x + y_n)} \bar{z}_n(x) \phi_0(x + y_n) dx \\ &= a \int \bar{z}(x) \phi_0(x + y) dx. \end{aligned}$$

Como $\bar{z} \not\equiv 0$ e ϕ_0 é a primeira autofunção, temos uma contradição com o fato que $\lambda_0 < a$. Portanto $\|z_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$ é limitada. ■

Lema 2.5 *Assuma $(V_1), (V_4), (f_1), (f_2), (f_5)$. Então $\|z_n\|$ é limitada.*

Demonstração: Suponha por contradição, que a menos de subsequência $\|z_n\| \rightarrow +\infty$. Defina

$$\tilde{z}_n(x) = \frac{z_n(x)}{\|z_n\|}.$$

Como $\tilde{z}_n$ é limitada em H , a menos de subsequência

$$\tilde{z}_n \rightharpoonup \tilde{z} \in H$$

$$\tilde{z}_n \rightarrow \tilde{z}, \text{ em } L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$$

$$\tilde{z}_n(x) \rightarrow \tilde{z}(x), \text{ qtp em } \mathbb{R}^N.$$

Observe que

$$-\Delta \tilde{z}_n(x) + V(x)\tilde{z}_n = \frac{f(z_n(x))}{z_n(x)} \tilde{z}_n(x), \text{ em } B_{R_n}. \quad (2.7)$$

Multiplicando a equação anterior por $\tilde{z}_n(x)$ e integrando, obtemos

$$1 = \int |\nabla \tilde{z}_n(x)|^2 + V(x)\tilde{z}_n^2(x) dx = \int \frac{f(z_n(x))}{z_n(x)} \tilde{z}_n^2(x) dx, \text{ em } B_{R_n}. \quad (2.8)$$

Portanto, de (V_4) temos

$$\begin{aligned} V_\infty \int_{B_{R_0}^c} \tilde{z}_n^2(x) dx &\leq \int_{B_{R_0}^c} V(x)\tilde{z}_n^2(x) dx \\ &\leq \int_{B_{R_0}^c} |\nabla \tilde{z}_n(x)|^2 + V(x)\tilde{z}_n^2(x) dx \\ &\leq \int |\nabla \tilde{z}_n(x)|^2 + V(x)\tilde{z}_n^2(x) dx \\ &= 1. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Como $\|z_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$ é limitada, por (f_1) e (f_5) , temos que existe $V_\infty > \delta > 0$ tal que

$$\frac{f(z_n(x))}{z_n(x)} \leq V_\infty - \delta, \quad \forall n, x \in \mathbb{R}^N,$$

portanto

$$\int \frac{f(z_n(x))}{z_n(x)} \tilde{z}_n^2(x) dx \leq (V_\infty - \delta) \int \tilde{z}_n^2(x) dx. \quad (2.10)$$

Assim de (2.8), (2.9) e (2.10) temos que

$$\int_{B_{R_0}} \tilde{z}_n^2(x) dx = \int \tilde{z}_n^2(x) dx - \int_{B_{R_0}^c} \tilde{z}_n^2(x) dx \geq \frac{1}{V_\infty - \delta} - \frac{1}{V_\infty} = \frac{\delta}{V_\infty(V_\infty - \delta)} > 0.$$

Como $\tilde{z}_n \rightarrow \tilde{z}$, em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$, temos que $\tilde{z} \neq 0$. Multiplicando (2.7) por $\phi_0(x)$ e integrando, obtemos do Teorema da Convergência Dominada e do Lema de Fatou que

$$\begin{aligned}
 \lambda_0 \int \tilde{z}(x) \phi_0(x) dx &= \lambda_0 \liminf_{n \rightarrow \infty} \int \tilde{z}_n(x) \phi_0(x) dx \\
 &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \int (\nabla \tilde{z}_n(x) \nabla \phi_0(x) + V(x) \tilde{z}_n(x) \phi_0(x)) dx \\
 &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \int \frac{f(z_n(x))}{z_n(x)} \tilde{z}_n(x) \phi_0(x) dx \\
 &\geq \int \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z_n(x))}{z_n(x)} \tilde{z}_n(x) \phi_0(x) dx \\
 &= a \int \tilde{z}(x) \phi_0(x) dx.
 \end{aligned}$$

Como $\tilde{z} \not\equiv 0$ e $\phi_0 \not\equiv 0$, temos uma contradição com o fato que $\lambda_0 < a$. Portanto $\|z_n\|$ é limitada. ■

3 Existência de uma Seqüência de Cerami (u_n) Limitada em H

Para obtermos os Teoremas 2.1 e 2.2, abordaremos o problema através do método da concentração de compacidade. Como assumindo (V_1) , (f_1) , (f_2) , temos dos Lemas 2.1 e 2.2 que o funcional I possui a geometria do Teorema do Passo da Montanha, vamos mostrar que existe uma seqüência $(u_n) \subset H$ de Cerami no nível c , onde

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{s \in [0,1]} J(\gamma(s)) > 0,$$

e $\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], E); \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = w_0\}$.

De fato suponha, por contradição, que não existe nenhuma seqüência de Cerami no nível c , para o funcional I , então o funcional I , satisfaz $(C)_c$, portanto pelo Teorema do Passo da Montanha, existe $\bar{u} \in H$, tal que, $I(\bar{u}) = c$ e $I'(\bar{u}) = 0$. Mas, tomando $u_n = \bar{u}$, temos que

$$I(u_n) \rightarrow c \quad \text{e} \quad \|I'(u_n)\|_{H^{-1}} (1 + \|u_n\|) \rightarrow 0,$$

ou seja, (u_n) é uma Sequência de Cerami, para o funcional I no nível c , o que é uma contradição. Logo, existe uma seqüência $(u_n) \subset H$ de Cerami no nível c , para o funcional I .

Proposição 2.2 *Assuma $(V_1), (f_1), (f_2)$. Seja $(u_n) \subset H$ a seqüência de Cerami no nível c do Teorema do Passo da Montanha, dada anteriormente. Suponha que (f_3) ou (f_4) ocorra, então (u_n) é limitada em H .*

Demonstração:

Suponha por contradição, que (u_n) não é limitada, então a menos de subsequência $\|u_n\| \rightarrow +\infty$. Seja $w_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$, então a menos de subsequência

$$w_n \rightharpoonup w \text{ em } H,$$

$$w_n \rightarrow w \text{ em } L^p_{loc}(\mathbb{R}^N),$$

$$w_n(x) \rightarrow w(x), \text{ qtp em } \mathbb{R}^N.$$

Ainda mais, ocorre uma das seguintes alternativas:

1. **(Non-Vanishing)** $\exists \alpha > 0, 0 < R < \infty$ e $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{y_n + B_R} w_n^2 dx \geq \alpha > 0.$$

2. **(Vanishing)** $\forall R > 0$ temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{y + B_R} w_n^2 dx = 0.$$

Vamos mostrar, a partir dos lemas a seguir, que nenhum dos casos anteriores pode ocorrer, chegando a uma contradição.

Lema 2.6 *Assuma $(V_1), (V_2), (f_1), (f_2)$. Suponha que (f_3) ou (f_4) ocorra. Então (w_n) não satisfaz **(Vanishing)**.*

Demonstração: Suponha, por contradição, que (w_n) satisfaz **(Vanishing)**, então $\forall R > 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{y + B_R} w_n^2 dx = 0.$$

Usando (V_2) , dado $\epsilon > 0$, existe $R > 0$, tal que $|V(x) - V_\infty| < \epsilon$, $\forall x \in B_R^c$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int |V(x) - V_\infty| w_n^2 dx &= \int_{B_R} |V(x) - V_\infty| w_n^2 dx + \int_{B_R^c} |V(x) - V_\infty| w_n^2 dx \\ &\leq C \int_{B_R} w_n^2 dx + \epsilon \int_{B_R^c} w_n^2 dx \\ &\leq K\epsilon, \quad n \geq n_0, \end{aligned}$$

pois H está imerso continuamente em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Logo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int (V(x) - V_\infty) w_n^2 dx = 0.$$

Assim temos,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int |\nabla w_n|^2 + V_\infty w_n^2 dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int |\nabla w_n|^2 + V(x) w_n^2 dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|w_n\|^2 = 1,$$

em particular,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int w_n^2 dx = \frac{1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \int |\nabla w_n|^2 dx}{V_\infty} \leq \frac{1}{V_\infty}. \quad (2.11)$$

Como $\lim_{n \rightarrow +\infty} I(u_n) = c$, temos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int \frac{F(u_n) w_n^2}{u_n^2} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int \frac{F(u_n)}{\|u_n\|^2} dx = \frac{1}{2} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \int \frac{I(u_n)}{\|u_n\|^2} dx = \frac{1}{2}. \quad (2.12)$$

Observe que de (2.11) e (2.12), temos uma contradição com (f_3) . De fato, considere $\delta > 0$ dado por (f_3) , então $\frac{2F(s)}{s^2} \leq V_\infty - \delta$, $\forall s \in \mathbb{R}$, então

$$\frac{1}{2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int \frac{F(u_n) w_n^2}{u_n^2} dx \leq \frac{V_\infty - \delta}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int w_n^2 dx \leq \frac{V_\infty - \delta}{2} \frac{1}{V_\infty},$$

o que é uma contradição. Agora mostraremos que (2.11) e (2.12) nos dão uma contradição com (f_4) . De fato, seja $\delta > 0$ dado por (f_4) , definimos

$$\Omega_n = \{x \in \mathbb{R}^N; \frac{F(u_n(x))}{(u_n(x))^2} \leq \frac{1}{2}(V_\infty - \delta)\}.$$

Então para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int \frac{F(u_n)w_n^2}{u_n^2} dx \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_{\Omega_n} \frac{F(u_n)w_n^2}{u_n^2} dx + \int_{\Omega_n^c} \frac{F(u_n)w_n^2}{u_n^2} dx \right) \\
&\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}(V_\infty - \delta) \int_{\Omega_n} w_n^2 dx + \int_{\Omega_n^c} \frac{F(u_n)w_n^2}{u_n^2} dx \right) \\
&\leq \frac{1}{2} \frac{V_\infty - \delta}{V_\infty} + \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_n^c} \frac{F(u_n)w_n^2}{u_n^2} dx,
\end{aligned}$$

portanto,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_n^c} \frac{F(u_n)w_n^2}{u_n^2} dx \geq \frac{\delta}{2V_\infty} > 0. \quad (2.13)$$

Ainda mais, $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \mu(\mathbb{R}^N - \Omega_n) = +\infty$, onde μ é a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^N$. De fato, suponha por contradição que não. Usando (2.5), temos

$$\int_{\Omega_n^c} \frac{F(u_n)w_n^2}{u_n^2} dx \leq \frac{C}{2} \int_{\Omega_n^c} w_n^2 dx. \quad (2.14)$$

Pelo Lema de Lions [p. 100, [21]], temos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|w_n\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} = 0,$$

para algum $2 < q < 2^*$. Utilizando a desigualdade de Hölder, e como $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \mu(\mathbb{R}^N - \Omega_n) < +\infty$, temos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_n^c} w_n^2 dx \leq C \lim_{n \rightarrow +\infty} \|w_n\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}^2 = 0,$$

que é uma contradição com (2.13) e (2.14). Portanto, $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \mu(\mathbb{R}^N - \Omega_n) = +\infty$.

Por (f_4) temos que, $G(s) \geq 0$ e $G(u_n(x)) \geq \delta$, $x \in \Omega_n^c$, portanto

$$\int G(u_n) dx \geq \int_{\Omega_n^c} G(u_n) dx \geq \delta \mu(\mathbb{R}^N - \Omega_n),$$

assim,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int G(u_n) dx = +\infty.$$

Como,

$$\int G(u_n) dx = \frac{1}{2} \int f(u_n) u_n dx - \int F(u_n) dx = I(u_n) - \frac{1}{2} I'(u_n) u_n$$

temos uma contradição, pois $\lim_{n \rightarrow +\infty} I(u_n) - \frac{1}{2} I'(u_n) u_n = c$, que prova o lema. ■

Lema 2.7 *Assuma $(V_1), (V_2), (f_1), (f_2)$. Então (w_n) não satisfaz **(Non-Vanishing)**, com $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ limitada.*

Demonstração:

Sabemos que, a menos de subsequência, $w_n \rightharpoonup w \in H$.

Afirmção 1: O limite fraco w é não-negativo.

De fato, como $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ é limitada, existe $R_0 > 0$ tal que $y_n + B_R \subset B_{R_0}$, assim temos

$$\begin{aligned} 0 < \alpha &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{y_n + B_R} w_n^2 dx \\ &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{B_{R_0}} w_n^2 dx \\ &\leq \int_{B_{R_0}} w^2 dx, \end{aligned}$$

portanto, $w \neq 0$. Ainda mais, como $\|I'(u_n)\|_{H^{-1}} (1 + \|u_n\|) \rightarrow 0$, em particular $\|I'(u_n)\|_{H^{-1}} \rightarrow 0$, temos que

$$\int (\nabla u_n \nabla v + V(x) u_n v) dx - \int f(u_n) v dx \rightarrow 0, \quad \forall v \in H,$$

donde segue que existe $\epsilon_n \rightarrow 0$ em $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$, tal que

$$-\Delta u_n + V(x) u_n = f(u_n) + \epsilon_n, \quad \text{em } H^{-1}(\mathbb{R}^N),$$

assim obtemos

$$-\Delta w_n + V(x) w_n = \frac{f(u_n)}{u_n} w_n + \frac{\epsilon_n}{\|u_n\|}. \quad (2.15)$$

Considere $w_n^- = \max\{-w_n, 0\}$, então de (2.15), temos

$$\int (\nabla w_n \nabla w_n^- + V(x) w_n w_n^-) dx = \int \left(\frac{f(u_n)}{u_n} w_n w_n^- + \frac{\epsilon_n}{\|u_n\|} w_n^- \right) dx.$$

Como $\frac{f(u_n)}{u_n} w_n w_n^- = 0$, obtemos

$$\|w_n^-\|^2 = \int \frac{\epsilon_n}{\|u_n\|} w_n^- dx.$$

Analizando que w_n^- é limitada, $\epsilon_n \rightarrow 0$ em $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$ e $\|u_n\| \rightarrow +\infty$, temos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|w_n^-\|^2 = 0.$$

Como $w_n \rightarrow w$ qtp em $\mathbb{R}^N$, temos que $w^- = 0$, logo $w \geq 0$.

Afirmção 2: w é um autovetor do operador $-\Delta + V(x)$, associado ao autovalor a .

Para provar que $-\Delta w + V(x)w = aw$, é suficiente verificar que $\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\int (\nabla w \nabla \phi + V(x)w\phi) dx = a \int w\phi dx. \quad (2.16)$$

Seja $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ arbitrária mas fixada. Multiplicando (2.15) por ϕ e integrando obtemos,

$$\int (\nabla w_n \nabla \phi + V(x)w_n\phi) dx = \int \frac{f(u_n)}{u_n} w_n \phi dx + \int \frac{\epsilon_n}{\|u_n\|} \phi dx.$$

Como ϕ é fixa, $\epsilon_n \rightarrow 0$ em $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$ e $\|u_n\| \rightarrow +\infty$, temos que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int \frac{\epsilon_n}{\|u_n\|} \phi dx = 0$. Ainda mais, como $w_n \rightharpoonup w$ em H , temos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int (\nabla w_n \nabla \phi + V(x)w_n\phi) dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle w_n, \phi \rangle_H \\ &= \langle w, \phi \rangle_H \\ &= \int (\nabla w \nabla \phi + V(x)w\phi) dx. \end{aligned}$$

Finalmente, precisamos mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int \frac{f(u_n)}{u_n} w_n \phi dx = a \int w\phi dx. \quad (2.17)$$

Primeiro, estabelecemos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(u_n)}{u_n} w_n = aw, \text{ qtp em } \mathbb{R}^N. \quad (2.18)$$

Para tanto, distinguimos os caso $w(x) = 0$ e $w(x) > 0$.

Seja $x \in \mathbb{R}^N$ tal que $w(x) = 0$, então por (2.4), temos

$$0 \leq \left| \frac{f(u_n(x))}{u_n(x)} w_n(x) \right| \leq C |w_n(x)|,$$

como $w_n(x) \rightarrow w(x) = 0$ qtp em $\mathbb{R}^N$, temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(u_n(x))}{u_n(x)} w_n(x) = a w(x).$$

Agora, considere $x \in \mathbb{R}^N$, tal que $w(x) > 0$. Então, necessariamente $u_n(x) \rightarrow +\infty$. Portanto, de (f_2) e do fato que $w_n(x) \rightarrow w(x)$ qtp em $\mathbb{R}^N$, temos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(u_n(x))}{u_n(x)} w_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(u_n(x))}{u_n(x)} \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n(x) = a w(x), \text{ qtp em } \mathbb{R}^N$$

assim obtemos (2.18). Denote por $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um compacto tal que $\text{supp } \phi \subset \Omega$. Como $H^1(\Omega)$ está imerso compactamente em $L^1(\Omega)$, temos que $w_n \rightarrow w$ fortemente em $L^1(\Omega)$. Em particular, tomando uma subsequência se necessário, existe $h \in L^1(\Omega)$ tal que

$$|w_n(x)| \leq h(x), \text{ qtp em } \Omega.$$

Portanto, de (2.4), temos

$$\left| \frac{f(u_n)}{u_n} w_n \right| \leq C |w_n| \leq C h, \text{ qtp em } \Omega. \quad (2.19)$$

Como ϕ é limitada, de (2.18) e (2.19), podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e obter

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int \frac{f(u_n)}{u_n} w_n \phi dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \frac{f(u_n)}{u_n} w_n \phi dx = a \int_{\Omega} w \phi dx,$$

ou seja (2.17). Donde segue a Afirmação 2.

Afirmação 3: O operador $-\Delta + V(x)$ não possui um autovetor não-negativo, associado ao autovalor a .

Suponha que $u \in H$ é não-negativo e satisfaz,

$$-\Delta u + V(x)u = au, \text{ em } \mathbb{R}^N.$$

Primeiro considere uma constante A , tal que

$$\inf \sigma(-\Delta + V(x)) < A < a.$$

Do fato que

$$\inf \sigma(-\Delta + V(x)) = \inf_{\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2=1} \langle -\Delta u + V(x)u, u \rangle_H,$$

existe $v \in H$ tal que

$$\frac{\|v\|^2}{\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2} < A.$$

Como $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em H , podemos assumir que $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Considere $R > 0$ tal que $\text{supp } v \subset B_R$ e considere o problema de Dirichlet para $-\Delta + V(x)$ na bola B_R . Seja $\lambda = \inf \sigma \left((-\Delta + V(x))|_{L^2(B_R)} \right)$. Por construção,

$$\lambda \leq \frac{\|v\|^2}{\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2} < A < a. \quad (2.20)$$

Por outro lado, λ é autovalor de $(-\Delta + V(x))|_{L^2(B_R)}$ associado a um autovetor $v_R > 0$ em B_R . Observe que a derivada normal de v_R , $\frac{\partial v_R}{\partial n} \leq 0$, pois

$$\int_{B_R} v_R \frac{\partial \phi}{\partial n} dx = - \int_{B_R} \frac{\partial v_R}{\partial n} \phi dx, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(B_R).$$

Usando a Fórmula de Green na bola B_R ,

$$\int_{B_R} (-\Delta \phi) \psi dx = \int_{B_R} \nabla \phi \nabla \psi dx - \int_{\partial B_R} \frac{\partial \phi}{\partial n} \psi dS(x),$$

obtemos

$$\begin{aligned} \lambda \int_{B_R} u v_R dx &= \int_{B_R} -\Delta v_R u dx + \int_{B_R} V(x) v_R u dx \\ &= \int_{B_R} \nabla v_R \nabla u dx - \int_{\partial B_R} \frac{\partial v_R}{\partial n} u dS(x) + \int_{B_R} V(x) v_R u dx \\ &\geq \int_{B_R} \nabla v_R \nabla u dx + \int_{B_R} V(x) v_R u dx \\ &= \int_{B_R} v_R (-\Delta u) dx + \int_{\partial B_R} v_R \frac{\partial u}{\partial n} dS(x) + \int_{B_R} V(x) v_R u dx \\ &= \int_{B_R} v_R (-\Delta u) dx + \int_{B_R} V(x) v_R u dx \\ &= a \int_{B_R} u v_R dx. \end{aligned}$$

Como u é não-negativa, não-trivial e $v_R > 0$, temos que $\int_{B_R} u v_R dx > 0$, portanto $\lambda \geq a$, o que é uma contradição com (2.20). Assim obtemos a Afirmação 3.

Finalmente, a Afirmação 1, juntamente com a Afirmação 2, nos diz que w é um autovetor, não-negativo, associado ao autovalor a , o que é uma contradição com a Afirmação 3. Donde segue o lema. ■

Lema 2.8 *Assuma $(V_1), (V_2), (f_1), (f_2)$. Então (w_n) não satisfaz **(Non-Vanishing)**, com $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$, $|y_n| \rightarrow +\infty$.*

Demonstração: Defina $\bar{u}_n(x) = u_n(x + y_n)$ e $\bar{w}_n(x) = w_n(x + y_n)$, então temos de (2.15) que

$$-\Delta \bar{w}_n + V(x + y_n) \bar{w}_n = \frac{f(\bar{u}_n)}{\bar{u}_n} \bar{w}_n + \frac{\bar{\epsilon}_n}{\|\bar{u}_n\|}, \quad (2.21)$$

com $\bar{\epsilon}_n \rightarrow 0$ em $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$. Como $(\bar{w}_n)$ é limitada, existe $\bar{w} \in H$, tal que $\bar{w}_n \rightharpoonup \bar{w}$ e $\bar{w}_n(x) \rightarrow \bar{w}(x)$ qtp em $\mathbb{R}^N$. Como

$$0 < \alpha \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{y_n + B_R} w_n^2 dx \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{B_R} \bar{w}_n^2 dx \leq \int_{B_R} \bar{w}^2 dx$$

temos que $\bar{w} \neq 0$. Vamos mostrar que

$$-\Delta \bar{w} + V_\infty \bar{w} = a \bar{w}.$$

Para tanto, é suficiente verificar que $\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\int (\nabla \bar{w} \nabla \phi + V_\infty \bar{w} \phi) dx = a \int \bar{w} \phi dx. \quad (2.22)$$

Seja $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ arbitrária mas fixada. Multiplicando (2.21) por ϕ e integrando obtemos,

$$\int (\nabla \bar{w}_n \nabla \phi + V(x + y_n) \bar{w}_n \phi) dx = \int \frac{f(\bar{u}_n)}{\bar{u}_n} \bar{w}_n \phi dx + \int \frac{\bar{\epsilon}_n}{\|\bar{u}_n\|} \phi dx.$$

Como ϕ é fixa, $\bar{\epsilon}_n \rightarrow 0$ em $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$ e $\|\bar{u}_n\| \rightarrow +\infty$, temos que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int \frac{\bar{\epsilon}_n}{\|\bar{u}_n\|} \phi dx = 0$. Ainda mais, como $\bar{w}_n \rightharpoonup \bar{w}$ em H , temos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int \nabla \bar{w}_n \nabla \phi dx = \int \nabla \bar{w} \nabla \phi dx.$$

Vamos mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int \frac{f(\bar{u}_n)}{\bar{u}_n} \bar{w}_n \phi dx = a \int \bar{w} \phi dx. \quad (2.23)$$

Primeiro, estabelecemos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(\bar{u}_n)}{\bar{u}_n} w_n = a \bar{w}, \text{ qtp em } \mathbb{R}^N. \quad (2.24)$$

Para tanto, distinguimos os caso $\bar{w}(x) = 0$ e $\bar{w}(x) > 0$.

Seja $x \in \mathbb{R}^N$ tal que $\bar{w}(x) = 0$, então por (2.4), temos

$$0 \leq \left| \frac{f(\bar{u}_n(x))}{\bar{u}_n(x)} \bar{w}_n(x) \right| \leq C |\bar{w}_n(x)|,$$

como $\bar{w}_n(x) \rightarrow \bar{w}(x)$ qtp em $\mathbb{R}^N$, temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(\bar{u}_n(x))}{\bar{u}_n(x)} \bar{w}_n(x) = a \bar{w}(x).$$

Agora, considere $x \in \mathbb{R}^N$, tal que $\bar{w}(x) > 0$. Então, necessariamente $\bar{u}_n(x) \rightarrow +\infty$. Portanto, de (f_2) e do fato que $\bar{w}_n(x) \rightarrow \bar{w}(x)$ qtp em $\mathbb{R}^N$, temos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(\bar{u}_n(x))}{\bar{u}_n(x)} \bar{w}_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(\bar{u}_n(x))}{\bar{u}_n(x)} \lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{w}_n(x) = a \bar{w}(x), \text{ qtp em } \mathbb{R}^N$$

assim obtemos (2.24). Denote por $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um compacto tal que $\text{supp } \phi \subset \Omega$. Como $H^1(\Omega)$ está imerso compactamente em $L^1(\Omega)$, temos que $\bar{w}_n \rightarrow \bar{w}$ fortemente em $L^1(\Omega)$. Em particular, tomando uma subsequência se necessário, existe $\bar{h} \in L^1(\Omega)$ tal que

$$|\bar{w}_n(x)| \leq \bar{h}(x), \text{ qtp em } \Omega.$$

Portanto, de (2.4), temos

$$\left| \frac{f(\bar{u}_n)}{\bar{u}_n} \bar{w}_n \right| \leq C |\bar{w}_n| \leq C \bar{h}, \text{ qtp em } \Omega. \quad (2.25)$$

Como ϕ é limitada, de (2.24) e (2.25), podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e obter

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int \frac{f(\bar{u}_n)}{\bar{u}_n} \bar{w}_n \phi dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \frac{f(\bar{u}_n)}{\bar{u}_n} \bar{w}_n \phi dx = a \int \bar{w} \phi dx,$$

ou seja (2.23).

Finalmente, vamos mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int V(x + y_n) \bar{w}_n \phi dx = \int V_\infty \bar{w} \phi dx$$

Por (V_2) , dado $\epsilon > 0$, existe $n_0(\epsilon, x)$ tal que $|V(x + y_n) - V_\infty| < \epsilon$, $\forall n \geq n_0$. Ainda mais, existe U_x vizinhança aberta de x tal que $|V(y + y_n) - V_\infty| < \epsilon$, $\forall y \in U_x$, $n \geq n_0(\epsilon, x)$. Como Ω é compacto e

$$\Omega \subset \bigcup_{x \in \Omega} U_x,$$

existe uma subcobertura finita, tal que

$$\Omega \subset \bigcup_{i=1}^k U_{x_i}.$$

Tomando $n_0(\epsilon) = \max_{i=1}^n \{n_0(\epsilon, x_i)\}$, segue que

$$|V(x + y_n) - V_\infty| < \epsilon, \quad \forall x \in \Omega, n \geq n_0(\epsilon)$$

ou seja, $V(x + y_n) \rightarrow V_\infty$ uniformemente em Ω . Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} (V(x + y_n) - V_\infty) \bar{w}_n \phi dx = 0.$$

Logo,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int V(x + y_n) \bar{w}_n \phi dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int V_\infty \bar{w}_n \phi dx = V_\infty \int \bar{w} \phi dx.$$

Assim concluímos a demonstração do Lema. ■

Dos Lemas 2.6, 2.7 e 2.8, chegamos a uma contradição, logo (u_n) é limitada em H , e concluímos a Proposição 2.2. ■

4 Um Ponto Crítico Não-trivial para o Funcional /

Nesta seção mostraremos que a sequência limitada (z_n) e a sequência de Cerami limitada (u_n) obtidas anteriormente, converge fracamente para um ponto crítico não-trivial do funcional I .

Proposição 2.3 *Assuma $(V_1), (V_2), (V_4), (f_1), (f_2), (f_5)$. Então a seqüência limitada (z_n) obtida anteriormente, converge fracamente a um ponto crítico z não-trivial do funcional I .*

Demonstração: Como z_n é limitada em H , temos que

$$z_n \rightharpoonup z \in H$$

$$z_n \rightarrow z, \text{ em } L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$$

$$z_n(x) \rightarrow z(x), \text{ qtp em } \mathbb{R}^N.$$

Seja $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, então pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que

$$\begin{aligned} \int \nabla z \nabla \phi + V(x) z \phi dx &= \langle z, \phi \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle z_n, \phi \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \nabla z_n \nabla \phi + V(x) z_n \phi dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int f(z_n) \phi dx \\ &= \int \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) \phi dx \\ &= \int f(z) \phi dx. \end{aligned}$$

Portanto, $I'(z)(\phi) = 0, \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, ou seja, z é um ponto crítico do funcional I . Vamos mostrar que z é não-trivial. Como $z_n > 0$ e $z_n(x) \rightarrow z(x)$, qtp em $\mathbb{R}^N$, temos que $z \geq 0$ qtp em $\mathbb{R}^N$. Então basta mostrar que $z \neq 0$. Observe que

$$\int |\nabla z_n|^2 + V(x) z_n^2 dx = \int f(z_n) z_n dx \quad (2.26)$$

Vamos mostrar que $\|z_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ é limitada inferiormente por uma constante positiva. Suponha, por contradição, que, a menos de subsequência, $\|z_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \rightarrow 0$. Então, por estimativa elíptica, vide [19], temos que $\|z_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \rightarrow 0$. Por (f_1) , para n suficientemente grande e algum $0 < \xi < \lambda_0$, temos que

$$f(z_n(x)) \phi_0(x) \leq (\lambda_0 - \xi) z_n(x) \phi_0(x), \text{ qtp em } \mathbb{R}^N,$$

onde λ_0 é o primeiro autovalor do problema $-\Delta u + V(x)u = \lambda u$ e ϕ_0 é a autofunção associada, dados no Apêndice G.

Multiplicando a desigualdade anterior por $\phi_0(x)$ e integrando em $\mathbb{R}^N$, temos que

$$\lambda_0 \int z_n \phi_0 dx = \int \nabla z_n \nabla \phi_0 + V(x) z_n \phi_0 dx = \int f(z_n) \phi_0 dx \leq (\lambda_0 - \xi) \int z_n \phi_0 dx,$$

que é uma contradição. Portanto, $\|z_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ é limitada inferiormente por uma constante positiva. Por (f_1) , (V_4) e (f_5) temos

$$V_\infty \int_{B_{R_0}^c} z_n^2 dx \leq \int |\nabla z_n|^2 + V(x) z_n^2 dx = \int f(z_n) z_n dx \leq (V_\infty - \delta) \int z_n^2 dx$$

onde R_0 é dado em (V_4) . Portanto, como $\|z_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ é limitada inferiormente por uma constante positiva, segue que

$$\int_{B_{R_0}} z_n^2 dx = \int z_n^2 dx - \int_{B_{R_0}^c} z_n^2 dx \geq \int z_n^2 dx - \frac{V_\infty - \delta}{V_\infty} \int u_n^2 dx = \frac{\delta}{V_\infty} \|z_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \geq \sigma > 0,$$

para algum σ . Como $z_n \rightarrow z$, em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$, temos que $z \neq 0$. O que conclui a demonstração da Proposição. ■

Agora, considere o problema no infinito, isto é,

$$-\Delta u + V_\infty u = f(u), \text{ em } \mathbb{R}^N. \quad (2.27)$$

Observe que se u é solução de (2.27) (Apêndice F), então seja $u^- = \max\{-u, 0\}$, portanto

$$-\Delta u u^- + V_\infty u u^- = f(u) u^-.$$

Logo

$$\|u^-\|^2 = \int (|\nabla u^-|^2 + V_\infty (u^-)^2) dx = 0$$

Assim u é não-negativa. Ainda mais, u é solução do problema (2.28), onde tomamos

$$h(s) = \begin{cases} -V_\infty s + f(s), & s \geq 0 \\ -h(-s), & s < 0 \end{cases}$$

pois, h satisfaz (h_0) , (h_1) , (h_2) . De fato, (h_0) é trivialmente verificada, para (h_1) basta observar que

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{h(s)}{s} = -V_\infty,$$

finalmente para (h_2) , observe que

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} |h(s)|s^{-\frac{n+2}{n-2}} = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{|h(s)|}{s} \cdot s^{-\frac{4}{n-2}} = 0.$$

Podemos observar que w é a solução com menor energia de (2.28), se e só se, é a solução de menor energia de (2.27), ainda mais essa solução é positiva.

Proposição 2.4 *Assuma (V_1) , (V_2) , (f_1) , (f_2) e (f_3) , então $\bar{I}$ não tem ponto crítico não-trivial.*

Demonstração: Suponha que $\bar{I}$ tem um ponto crítico não-trivial. Como vimos anteriormente, tomando

$$h(s) = \begin{cases} -V_\infty s + f(s), & s \geq 0 \\ -h(-s), & s < 0 \end{cases}$$

podemos utilizar a Proposição 2.5, e obter que existe $s_0 > 0$ tal que

$$H(s_0) > 0,$$

portanto,

$$-V_\infty \frac{s_0^2}{2} + F(s_0) > 0.$$

Logo

$$V_\infty < \frac{2F(s_0)}{s_0^2}$$

o que é uma contradição com (f_3) . ■

Lema 2.9 *Assuma (V_1) , (V_2) , (f_1) , (f_2) . Seja $(u_n) \subset H$ uma seqüência limitada de Palais-Smale no nível c , para o funcional I , onde c é o nível do Teorema do Passo da Montanha. Então, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u \neq 0$, com $I'(u) = 0$, se alguma dessas condições*

1. (f_3) .

2. (f_4) e $V(x) \leq V_\infty$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$ e $V(x) \neq V_\infty$, para algum $x \in \mathbb{R}^N$.

valer.

Demonstração: Como $(u_n) \subset H$ é limitada, existe uma subsequência, $u_n \rightharpoonup u$. Vamos mostrar que $I'(u) = 0$. Como $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em H , basta verificar que $I'(u)\phi = 0$, $\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Observe que

$$\begin{aligned} I'(u_n)\phi - I'(u)\phi &= \langle u_n, \phi \rangle_H - \int f(u_n)\phi dx - \langle u, \phi \rangle_H - \int f(u)\phi dx \\ &= \langle u_n - u, \phi \rangle_H - \int (f(u) - f(u_n))\phi dx. \end{aligned}$$

Como $u_n \rightharpoonup u$ em H , $u_n \rightarrow u$ em $L_{loc}^q(\mathbb{R}^N)$, $2 \leq q < 2^*$, onde $2^* = \frac{2N}{n-2}$ e $I'(u_n)\phi \rightarrow 0$, temos que $I'(u)\phi = 0$, $\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Portanto, $I'(u) = 0$.

Suponha que $u = 0$. Assim, (u_n) é uma sequência de Palais-Smale no nível c para o funcional $\bar{I}$, de fato, dado $\epsilon > 0$, existe $R > 0$, tal que $|V_\infty - V(x)| < \epsilon$, $\forall x \in B_R^c$, assim

$$\begin{aligned} |\bar{I}(u_n) - I(u_n)| &= \left| \frac{1}{2} \int (V_\infty - V(x)) u_n^2 dx \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \int |V_\infty - V(x)| u_n^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{B_R} |V_\infty - V(x)| u_n^2 dx + \frac{1}{2} \int_{B_R^c} |V_\infty - V(x)| u_n^2 dx \\ &\leq \frac{C}{2} \int_{B_R} u_n^2 dx + \frac{\epsilon}{2} \int_{B_R^c} u_n^2 dx \\ &\leq \frac{C}{2} \int_{B_R} u_n^2 dx + \frac{\epsilon}{2} C \|u_n\|^2 \end{aligned}$$

Como $u_n \rightarrow u = 0$ em $L_{loc}^2(\mathbb{R}^N)$ e (u_n) é limitada em H , temos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{I}(u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} I(u_n) = c.$$

De modo análogo, como (u_n) é limitada em H temos

$$\begin{aligned}
 |\bar{I}'(u_n)v - I'(u_n)v| &= \left| \int (V_\infty - V(x)) u_n v dx \right| \\
 &\leq \int |V_\infty - V(x)| |u_n| |v| dx \\
 &= \int_{B_R} |V_\infty - V(x)| |u_n| |v| dx + \int_{B_R^c} |V_\infty - V(x)| |u_n| |v| dx \\
 &\leq C \int_{B_R} |u_n| |v| dx + \epsilon \int_{B_R^c} |u_n| |v| dx \\
 &\leq C \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|u_n\|_{L^2(B_R)} + \epsilon C \|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
 &\leq (\|u_n\|_{L^2(B_R)} + \epsilon) C \|v\|.
 \end{aligned}$$

Ainda mais,

$$\sup_{\|v\| \leq 1} |\bar{I}'(u_n)v - I'(u_n)v| \leq \sup_{\|v\| \leq 1} (\|u_n\|_{L^2(B_R)} + \epsilon) C \|v\| \leq \|u_n\|_{L^2(B_R)} + \epsilon,$$

como $u_n \rightarrow u = 0$ em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$, temos que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\|v\| \leq 1} |\bar{I}'(u_n)v - I'(u_n)v| = 0$, portanto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{I}'(u_n) = 0.$$

Agora vamos mostrar que (u_n) satisfaz **(Non-Vanishing)**. De fato, Suponha que (u_n) satisfaz **(Vanishing)**, então $\forall R > 0$ temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{y+B_R} u_n^2 dx = 0.$$

Por (2.2) temos

$$|f(s)| \leq \epsilon |s| + C_\epsilon |s|^{p-1}, \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

portanto, $\forall u \in H$, temos que

$$\left| \int f(u) u dx \right| \leq \epsilon \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + C_\epsilon \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p.$$

Pelo Lema de Lions [p. 100, [21]], temos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = 0.$$

Assim podemos concluir que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int f(u_n) u_n dx = 0.$$

Por outro lado, como (u_n) é uma seqüência de palais-Smale limitada, temos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I'(u_n) u_n = 0$$

Assim,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(I'(u_n) u_n + \int f(u_n) u_n dx \right) = 0$$

o que é uma contradição, com o Corolário 2.1. Portanto (u_n) satisfaz **(Non-Vanishing)**.

Seja $\alpha, R > 0$ e $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{y_n + B_R} u_n^2 dx \geq \alpha > 0.$$

Defina $\bar{u}_n(x) = u_n(x + y_n)$. Como (u_n) é uma seqüência de Palais-Smale no nível c para $\bar{I}$, temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{I}(\bar{u}_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{I}(u_n) = c$$

e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{I}'(\bar{u}_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{I}'(u_n) = 0$$

portanto $(\bar{u}_n)$ é uma seqüência de Palais-Smale no nível c para $\bar{I}$. É claro que $(\bar{u}_n)$ é limitada, portanto $\bar{u}_n \rightharpoonup \bar{u}$ em H . Vamos mostrar que $\bar{I}'(\bar{u}) = 0$. Como $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em H , basta verificar que $\bar{I}'(\bar{u})\phi = 0$, $\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Observe que

$$|\bar{I}'(\bar{u}_n)\phi - \bar{I}'(\bar{u})\phi| \leq C |\langle \bar{u}_n - \bar{u}, \phi \rangle_H| + \int |f(\bar{u}) - f(\bar{u}_n)| |\phi| dx.$$

Como $\bar{u}_n \rightharpoonup \bar{u}$ em H , $\bar{u}_n \rightarrow \bar{u}$ em $L_{loc}^q(\mathbb{R}^N)$, $2 \leq q < 2^*$ e $\bar{I}'(u_n)\phi \rightarrow 0$, temos que $\bar{I}'(\bar{u})\phi = 0$, $\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Portanto, $\bar{I}'(\bar{u}) = 0$.

Observe que $\bar{u} \neq 0$, pois $\bar{u}_n \rightarrow \bar{u}$ em $L_{loc}^2(\mathbb{R}^N)$, portanto

$$\|\bar{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \geq \|\bar{u}\|_{L^2(B_R)}^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{B_R} \bar{u}_n^2 dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{y_n + B_R} u_n^2 dx \geq \alpha > 0.$$

Portanto $\bar{u}$ é um ponto crítico não-trivial de $\bar{I}$.

Se (1.) acontece, temos, pela Proposição 2.4, que $\bar{I}$ não tem ponto crítico não-trivial, o que é uma contradição.

Se (2.) acontece, temos que $G(s) \geq 0$, $\forall s \in \mathbb{R}$, usando o fato que $(\bar{u}_n)$ é limitada e que $\bar{u}_n \rightarrow \bar{u}$ qtp em $\mathbb{R}^N$, pelo Lema de Fatou, temos

$$\begin{aligned} 2c &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (2\bar{I}(\bar{u}_n) - \bar{I}'(\bar{u}_n)\bar{u}_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int (f(\bar{u}_n)\bar{u}_n - 2F(\bar{u}_n)) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int G(\bar{u}_n) dx \\ &\geq \int G(\bar{u}) dx \\ &= 2\bar{I}(\bar{u}) \end{aligned}$$

Então $\bar{u}$ é um ponto crítico não-trivial de $\bar{I}$, satisfazendo $\bar{I}(\bar{u}) \leq c$. Como $\bar{u}$ é solução do Problema 2.27, temos que $\bar{u} \geq 0$. Pelo princípio do máximo forte, temos que $\bar{u} > 0$ em $\mathbb{R}^N$.

Pela Proposição 2.6, podemos encontrar $\gamma \in C([0, 1], H)$ tal que

$$\gamma(t)(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^N, t \in (0, 1],$$

$$\gamma(0) = 0, \bar{I}(\gamma(1)) < 0, \bar{u} \in \gamma([0, 1]),$$

e

$$\max_{t \in [0, 1]} \bar{I}(\gamma(t)) = \bar{I}(\bar{u}).$$

Como assumimos (2.), temos que $\forall v \in H$, com $v(x) > 0$, qtp em $\mathbb{R}^N$

$$\bar{I}(v) - I(v) = \int (V_\infty - V(x)) v^2 dx > 0,$$

pois $V(x) \not\leq V_\infty$. Portanto

$$I(\gamma t) < \bar{I}(\gamma t), \forall t \in (0, 1].$$

Logo,

$$c \leq \max_{t \in [0, 1]} I(\gamma(t)) < \max_{t \in [0, 1]} \bar{I}(\gamma(t)) \leq c.$$

o que é uma contradição. Assim concluímos que $u \neq 0$. ■

5 Demonstração dos Resultados Principais

O Teorema 2.3 é consequência imediata da Proposição 2.3. Exceto para o caso especial $V(x) \equiv V_\infty$ no Teorema 2.2, os Teoremas 2.1 e 2.2 seguem do Lema 2.9.

Considere o caso $V(x) \equiv V_\infty$. Nesta situação, observando que o espectro $\sigma(-\Delta + V_\infty)$ é apenas a translação do espectro $\sigma(-\Delta) = [0, +\infty)$ em V_∞ , temos que $\sigma(-\Delta + V_\infty) = [V_\infty, \infty)$, portanto de (f_2) , temos que $a > V_\infty$. Então $H(s) = F(s) - \frac{1}{2}V_\infty s^2$, satisfaz $H(s_0) > 0$, para algum $s_0 > 0$, suficientemente grande, portanto da Proposição 2.5, obtemos um ponto crítico não-trivial para o funcional I , em particular uma solução positiva para o Problema 2.1. ■

Apêndice F: Problemas Autônomos

Neste apêndice vamos estudar alguns resultados clássicos para problemas autônomos. Considere a equação

$$-\Delta u = h(u), \text{ em } \mathbb{R}^N \quad (2.28)$$

onde,

(h_0) $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e ímpar.

(h_1) Existe $\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{h(s)}{s} \in (-\infty, 0)$.

(h_2) $\lim_{s \rightarrow +\infty} |h(s)|s^{-\frac{n+2}{n-2}} = 0$.

Associado a (2.28) temos o funcional $J : H \rightarrow \mathbb{R}$,

$$J(u) = \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 dx - \int H(u) dx,$$

onde $H(u) = \int_0^u h(s) ds$.

Dizemos que w é a solução de menor energia de (2.28), se

$$J(w) = m = \inf \{ J(u); u \neq 0 \text{ e } J'(u) = 0 \}.$$

A demonstração da seguinte Proposição é dada por [p. 317, [4]].

Proposição 2.5 *Assuma $(h_0), (h_1), (h_2)$. Então J está bem definido e temos*

1. *O problema (2.28) tem uma solução não-trivial, se e só se, $H(s_0) > 0$ para algum $s_0 > 0$*
2. *Se $H(s_0) > 0$ para algum $s_0 > 0$, então $m > 0$ e existe uma solução de menor energia w de (2.28), que satisfaz $w > 0$ em $\mathbb{R}^N$, e ainda mais é ponto crítico de J e vale a identidade de Pohozaev,*

$$(N-2) \int |\nabla w|^2 dx = 2N \int H(w) dx.$$

Lema 2.10 *Seja $v_t(x) = v(\frac{x}{t})$, $t > 0$, onde v é um ponto crítico não-trivial de J em H . Então*

$$1. \|\nabla v_t\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 = t^{N-2} \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2.$$

2. Para toda função contínua F satisfazendo $\limsup_{s \rightarrow +\infty} \frac{F(s)}{s^2} < +\infty$, temos que

$$\int F(v_t) dx = t^N \int F(v) dx.$$

3. $\|v_t\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}^q = t^N \|v\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}^q$, $\forall q \geq 2$.

Demonstração: Façamos a seguinte mudança de variável, $y = \frac{x}{t}$, então $t^N dy = dx$.

Item 1: Como $\nabla v_t(x) = \frac{1}{t} \nabla v(y)$, temos que

$$\|\nabla v_t\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 = \int |\nabla v_t|^2 dx = \frac{1}{t} \int |\nabla v|^2 t^N dy = t^{N-2} \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2.$$

Item 2: Basta observar que

$$\int F(v_t(x)) dx = \int F(v(\frac{x}{t})) dx = t^N \int F(v) dy.$$

Item 3: Considere, no item anterior, $F = |\cdot|^q$, e o resultado é imediato. ■

Proposição 2.6 Assuma $(h_0), (h_1), (h_2)$ e $H(s_0) > 0$ para algum $s_0 > 0$. Seja v uma solução de (2.28), com $v(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$. Então existe um caminho $\gamma \in C([0, 1], H)$, tal que

$$\gamma(t)(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^N, t \in (0, 1],$$

$$\gamma(0) = 0, J(\gamma(1)) < 0, v \in \gamma([0, 1])$$

e

$$\max_{t \in [0, 1]} J(\gamma(t)) = J(v).$$

Em particular, para w obtido na Proposição 2.5, temos que

$$\inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0, 1]} J(\gamma(t)) \leq J(w).$$

Demonstração:

Pela identidade de Pohozaev, temos que

$$\int H(v) dx = \frac{N-2}{2N} \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2.$$

Portanto,

$$J(v_t) = \frac{t^{N-2}}{2} \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 - t^N \int H(v) dx = \left(\frac{t^{N-2}}{2} - \frac{N-2}{2N} t^N \right) \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2.$$

Vamos mostrar que

1. $\max_{t>0} J(v_t) = J(v)$
2. $\lim_{t \rightarrow +\infty} J(v_t) = -\infty$
3. $\|v_t\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2 = \|\nabla v_t\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \|v_t\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 = t^{N-2} \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + t^N \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2$, portanto

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|v_t\|^2 = 0.$$

Item 1: Observe que se

$$\frac{d}{dt} J(v_t) = \left(\frac{(N-2)}{2} t^{N-3} - \frac{N-2}{2} t^{N-1} \right) \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 = 0, \quad t > 0.$$

Então $t = 1$, como

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2}{dt^2} J(v_t) \right|_{t=1} &= \frac{(N-2)}{2} ((N-3)t^{N-4} - (N-1)t^{N-2}) \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \Big|_{t=1} \\ &= -(N-2) \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \\ &< 0, \end{aligned}$$

temos que $\max_{t>0} J(v_t) = J(v)$.

Item 2: Observe que

$$J(v_t) = \left(\frac{t^{N-2}}{2} - \frac{N-2}{2N} t^N \right) \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2$$

portanto $\lim_{t \rightarrow +\infty} J(v_t) = -\infty$.

Item 3: Observe que

$$\begin{aligned} \|v_t\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2 &= \int (|\nabla v_t|^2 + |v_t|^2) dx \\ &= \|\nabla v_t\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \|v_t\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \\ &= t^{N-2} \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + t^N \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \end{aligned}$$

esta última igualdade segue do Lema 2.10.

Seja $t_0 > 1$ tal que $J(v_{t_0}) < 0$. Definimos $\gamma(t) = v_{t_0 t}$ para $t \in (0, 1]$, $\gamma(0) = 0$. De fato γ é o caminho que resolve a Proposição, pois do Item 2 temos

$$\max_{t \in [0, 1]} J(\gamma(t)) = \max_{t \in (0, 1]} J(v_{t_0 t}) = J(v)$$

pois $1/t_0 \in (0, 1]$. Temos também que $J(\gamma(1)) = J(v_{t_0}) < 0$, $\gamma(\frac{1}{t_0}) = v$, observando que $1/t_0 \in (0, 1]$. Finalmente, pela hipótese da Proposição, temos

$$\gamma(t)(x) = v_{t_0 t}(x) = v\left(\frac{x}{t_0 t}\right) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

■

Apêndice G: Existência da Primeira Autofunção

Neste apêndice, estamos interessados, em caracterizar o primeiro autovalor do problema

$$-\Delta u + V(x)u = \lambda u, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N) \quad (2.29)$$

e a sua autofunção associada.

Lema 2.11 *Assuma $(V_1), (V_2)$. Se $\lambda_0 < V_\infty$, onde λ_0 é dado em (f_2) , então λ_0 é autovalor do problema (2.29) e existe uma autofunção correspondente ϕ_0 , positiva em $\mathbb{R}^N$.*

Demonstração: Existe $R, \delta > 0$, tal que $V(x) > \lambda_0 + \delta$, para $|x| > R$. Como

$$\lambda_0 = \inf \sigma(-\Delta + V(x)) = \inf_{u \in H \setminus \{0\}} \frac{\int |\nabla u|^2 + V(x)u^2 dx}{\int u^2 dx}$$

O princípio variacional de Ekeland, implica na existência de uma seqüência $(u_n) \subset H$, tal que

$$\|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 1, \quad \|u_n\|^2 \rightarrow \lambda_0$$

e

$$\int (\nabla u_n \nabla v + V(x)u_n v) dx - \mu_n \int u_n v dx = o(\|u_n\|)\|v\|, \quad \forall v \in H \quad (2.30)$$

onde μ_n é o multiplicador de Lagrange. Sem perda de generalidade, assumamos $u_n \geq 0$. É claro que existe ϕ_0 tal que

$$u_n \rightharpoonup \phi_0 \text{ em } H,$$

$$u_n \rightarrow \phi_0 \text{ em } L^2_{loc}(\mathbb{R}^N),$$

$$u_n(x) \rightarrow \phi_0(x) \text{ qtp em } \mathbb{R}^N.$$

Tomando $v = u_n$ em (2.30), usando o fato que $\|u_n\|^2 \rightarrow \lambda_0$ juntamente com as afirmações anteriores, temos que

$$\int (\nabla \phi_0 \nabla v + V(x)\phi_0 v) dx = \lambda_0 \int \phi_0 v dx, \quad \forall v \in H$$

Se $\phi_0 \neq 0$, então ϕ_0 é autofunção do problema (2.29) e do princípio do máximo, juntamente com o fato que $u_n(x) \rightarrow \phi_0(x)$, qtp em $\mathbb{R}^N$, temos que $\phi_0 > 0$.

Basta mostrar que $\phi_0 \neq 0$. De fato, suponha por contradição que $\phi_0 = 0$. Então

$$\int_{B_R} u_n^2 dx \rightarrow \int_{B_R} \phi_0 dx = 0,$$

Assim de (2.30), temos que $\int_{B_R^c} u_n^2 dx \rightarrow 1$

$$\begin{aligned} \mu_n &= \int (|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2) dx + o(\|u_n\|)\|u_n\| \\ &\geq \int_{B_R^c} V(x)u_n^2 dx + o(\|u_n\|)\|u_n\| \\ &\geq (\lambda_0 + \delta) \int_{B_R^c} u_n^2 dx + o(\|u_n\|)\|u_n\| \\ &\rightarrow \lambda_0 + \delta \end{aligned}$$

o que é uma contradição, pois $\mu_n \rightarrow \lambda_0$. ■

Referências Bibliográficas

- [1] Ambrosetti, A. e Chang, K.-C. e Ekeland, I. *Nonlinear Functional Analysis and Applications to Differential Equations*. Trieste - Italy: World Scientific (1997).
- [2] Bartsch, T. e Wang, Z.-Q. *Existence and Multiplicity Results for Some Superlinear Elliptic Problems on $\mathbb{R}^N$* . Comm. Partial Diff. Equations, 20 (1995), p. 1725-1741.
- [3] Berestycki, H. e Figueiredo, D. G. de. *Double Resonance in Semilinear Elliptic Problems*. Comm. Partial Diff. Equations, 6 (1981), p. 91-120.
- [4] Berestycki, H. e Lions, P. L. *Nonlinear Scalar Field Equations, I Existence of a Ground State*. Arch. Rat. Mech. Anal., 82 (1983), p. 313-346.
- [5] Brézis, H. *Analyse Fonctionnelle: Théorie et applications*. 5a. Ed. Paris: Masson (1983).
- [6] Chang, K.-C. *Infinite Dimensional Morse Theory and Multiple Solution Problems*. Boston: Birkhäuser (1993).
- [7] Costa, D. G. *On a Class of Elliptic Systems in $\mathbb{R}^N$* . Electr. J. Diff. Equations, 07 (1994), p. 1-14.
- [8] Costa, D. G. *On a Nonlinear Elliptic Problem in $\mathbb{R}^N$* . Center for Mathematical Sciences, Tech. Summ. Rep. (1993), p. 93-13.
- [9] Costa, D. G. e Oliveira, A. S. *Existence of Solution for a Class of Semilinear Elliptic Problems at Double Resonance*. Bol. SBM, 19 (1988), p. 21-37.
- [10] Dacorogna, Bernard. *Introduction au Calcul des Variations*. Lausanne: Presses Polytechniques et Universitaires Romandes (1992).
- [11] Ekeland, Ivar. *Convexity Methods in Hamiltonian Mechanis*. New York: Springer-Verlag (1990).

- [12] Evans, Lawrence C. *Partial Differential Equations*. Rhode Island: American Math. Society (1999).
- [13] Figueiredo, Djairo G. de. *Positive Solutions of Semilinear Elliptic Problems*. Escola Latino-Americana de Equações Diferenciais. São Paulo: EdUSP (1981).
- [14] Figueiredo, Djairo G. de. *Lectures on the Ekeland Variational Principle with applications and Detours*. Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics, vol. 81, Springer-Verlag, Bombay (1989).
- [15] Furtado, Marcelo F., Maia, Liliane A. e Silva, Elves A. B. *On a Double Resonant Problem in $\mathbb{R}^N$* . Diff. Int. Equations, 15 (2002), p. 1335-1344.
- [16] Furtado, Marcelo F., Maia, Liliane A. e Silva, Elves A. B. *Solutions for a Resonant Elliptic System with Coupling in $\mathbb{R}^N$* . Comm. Partial Diff. Equations, 27 (2002), p. 1515-1536.
- [17] Furtado, Marcelo F. e Silva, Elves A. B. *Double Resonant Problems which are locally nonquadratic at infinity*. Electron. J. Diff. Equations, 06 (2001), p. 155-171.
- [18] Ghoussoub, Nassif. *Duality and Perturbation Methods in Critical Point Theory*. New York: Springer-Verlag (1998).
- [19] Gilbarg, D. e Trudinger, N. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. New York: Cambridge University Press (1993).
- [20] Jeanjean, L. e Tanaka, K. *A positive solution for an asymptotically linear elliptic problem on $\mathbb{R}^N$ autonomous at infinity*. ESAIM Control Optim. Calc. Var. 17 (2002), p. 597-614.
- [21] Kuzin, I. e Pohozaev, S. *Entire Solutions of Semilinear Elliptic Equations*. Berlin: Birkhäuser, 1997.
- [22] Li, S. e Willem, M. *Multiple Solutions for Asymptotically Linear Boundary Value Problems in Which the Nonlinearity Crosses at Least one Eigenvalue*. Nonlinear Diff. Equations Appl. 5 (1998), p. 479-490.
- [23] Liu, Z. L. e Wang, Z.-Q. *Existence of a positive Solution of an Elliptic Equation on $\mathbb{R}^n$* . The Royal Society of Edinburgh, 134A (2004), p. 191-200.
- [24] Liu, Z. L., Li, S. J. e Wang, Z.-Q. *Positive Solutions of Elliptic Boundary Value Problems Without the (PS) Type Assumption*. Indiana Univ. Math. 50 (2001), p. 1347-1369.

- [25] Paiva, F. O. V. *Multiple Solutions for Asymptotically Linear Resonant Elliptic Problems*. Top. Methods in Nonlinear Anal. 21 (2003), p. 227-247.
- [26] Paiva, F. O. V. *Asymptotically Linear Resonant Elliptic Problems in Which the Nonlinearity Crosses at Least Two Eigenvalues*. preprint.
- [27] Paiva, F. O. V. e Furtado, M. *Multiplicity of solutions for resonant elliptic systems*. J. Math. Anal. Appl. 319 (2006), p. 435-449.
- [28] Perera, K. *Critical Groups of Pairs of Critical Points Produced by Linking Subsets*. J. Diff. Equations, 140 (1997), p. 142-160.
- [29] Perera, K. *Multiplicity Results for Some Elliptic Problems with Concave Nonlinearities*. J. Diff. Equations, 140 (1997), p. 133-141.
- [30] Rabinowitz. *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*. American Math. Society (1988).
- [31] Stuart, C. A. *Self-trapping of an Electromagnetic Field and Bifurcation from the Essential Spectrum*. Arch. Rational Mech. Anal. 113 (1991), p. 65-96.
- [32] Stuart, C. A. e Zhou, H. S. *A Variational Problem Related to Self-trapping of an Electromagnetic Field*. Math. Methods Appl. Sc. 19 (1996), p. 1397-1407.
- [33] Sulem, C. e Sulem, P. L. *The Nonlinear Schrödinger Equation*. Appl. Math. Sci. 139 Springer Verlag, New York (1999).
- [34] Tehrani, H. T. *A Note on Asymptotically Linear Elliptic Problems in $\mathbb{R}^N$* . J. Math. Anal. Appl. 271 (2002), p. 546-554.
- [35] Zou, Wenming. *Multiple Solutions for Elliptic Equations with Resonance*. J. Nonlinear Anal. 48 (2002), p. 363-376.