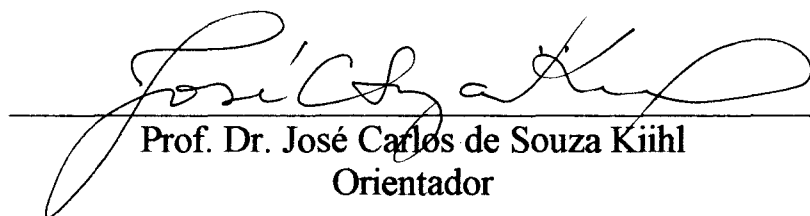


“UMA CLASSIFICAÇÃO PARA OS TORNEIOS HAMILTONIANOS”

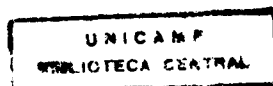
Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Nailson Amorim de Lima e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 30 de Agosto de 1995



Prof. Dr. José Carlos de Souza Kiihl
Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em MATEMÁTICA.



UNIDADE	PC
N.º CHAMADA:	
V.	
PREÇO	R\$ 258,64
PREÇO	R\$ 433,95
C	☐ 0 ☐ 1
PREÇO	R\$ 1,00
DATA	
N.º CPD	

CM-00077391-1

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

L628c Lima, Nailson Amorim de
 Uma classificação para os torneios hamiltonianos/
 Nailson Amorim de Lima. -- Campinas, [SP : s.n.],
 1995.

Orientador : José Carlos de Souza Kiihl
 Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
 Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação.

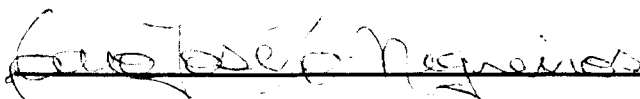
1. Teoria dos grafos. 2. Análise combinatória. 3. Torneios.
 I. Kiihl, José Carlos de Souza. II. Universidade Estadual de
 Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da
 Computação. III. Título.

Tese defendida e aprovada em, 30 de 08 de 1995

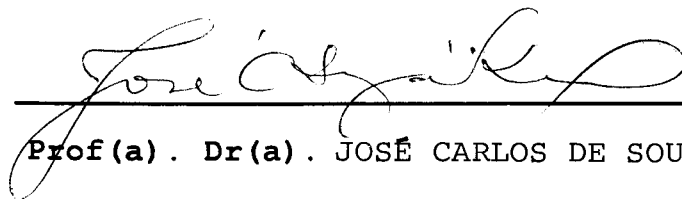
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof(a). Dr(a). CLAUDINA IZEPE RODRIGUES



Prof(a). Dr(a). CAIO JOSÉ COLLETTI NEGREIROS



Prof(a). Dr(a). JOSÉ CARLOS DE SOUZA KIIHL

A meus pais : Nivaldo e Maria

Agradecimentos

Agradecimentos são devidos :

- A todos os meus amigos;
- Ao CNPQ, por ter financiado meu trabalho;
- Aos funcionários e professores do IMECC, que me propiciaram boas condições de estudo.

*“Nem tudo o que se enfrenta
pode ser modificado. Mas
nada pode ser modificado até
que seja enfrentado.”*

James Baldwin (1924-1987)

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	1
Capítulo 1 - PRELIMINARES	3
Capítulo 2 - A DIFERENÇA CÍCLICA DE UM TORNEIO	7
Capítulo 3 - PARTICIONANDO OS TORNEIOS HAMILTONIANOS	15
Capítulo 4 - TORNEIOS H_n COM $cd(H_n) = 2$	29
Apêndice A - EXEMPLOS	33
Bibliografia	41

INTRODUÇÃO

No presente trabalho apresenta-se uma maneira de se fazer uma partição dos torneios hamiltonianos, fazendo-se uso dos conceitos de ciclo característico, característica cíclica e de diferença cíclica.

No capítulo 1 são apresentadas as definições básicas, que serão necessárias no decorrer deste trabalho, além de algumas observações referentes a resultados básicos e simples, os quais são citados, juntamente com sua bibliografia, para sanar qualquer dúvida que não esteja tratada aqui, devido ao fato de não serem imprescindíveis ao desenvolvimento desta dissertação.

No capítulo 2 há uma singela introdução para a Teoria de Homotopia Regular de Digrafos, partindo, logo após, no rumo dos conceitos de ciclo característico, característica cíclica e de diferença cíclica.

No capítulo 3 temos vários resultados que culminarão no teorema principal deste trabalho, o Teorema de Classificação dos Torneios Hamiltonianos.

No capítulo 4 são citados dois resultados referentes a torneios hamiltonianos cuja diferença cíclica é igual a dois.

Finalizando, no apêndice se encontram os exemplos apresentados ao longo da dissertação.

Capítulo 1

PRELIMINARES

Ao longo deste texto precisaremos das seguintes definições, a saber:

DEFINIÇÃO 1.1: Um digrafo será chamado *torneio*, se cada par de seus vértices estiver unido por exatamente um único arco.

DEFINIÇÃO 1.2: $V(T)$ e $A(T)$ denotarão respectivamente, o conjunto dos vértices e o conjunto dos arcos do torneio T . Se n é a cardinalidade de $V(T)$, diremos que o torneio T tem *ordem* n e passaremos a denotá-lo por T_n .

DEFINIÇÃO 1.3: Seja v um vértice de T_n , então ao subtorneio obtido de T_n , deletando-se o vértice v e todos os arcos adjacentes a ele, será denotado por $T_n - v$.

DEFINIÇÃO 1.4: Dado um ciclo C de T_n , $\langle V(C) \rangle$ denotará o subtorneio induzido de T_n através dos vértices de C .

DEFINIÇÃO 1.5: Sejam A e B subtorneios de T_n , então $B \longrightarrow A$ denotará que todos os vértices de B são predecessores de todos os vértices de A .

DEFINIÇÃO 1.6: Um torneio de ordem n , no qual existe um ciclo que passa por todos os vértices do mesmo, será chamado de *torneio Hamiltoniano de ordem n* ou simplesmente *Hamiltoniano*, sendo denotado por H_n .

DEFINIÇÃO 1.7: Um *homomorfismo* de um torneio T_n em um torneio R_m , é uma aplicação $p: V(T_n) \longrightarrow V(R_m)$, na qual temos que, se $(v, w) \in A(T_n)$ então tem-se que ou $(p(v), p(w)) \in A(R_m)$ ou que

$$\mathbf{p}(\mathbf{v}) = \mathbf{p}(\mathbf{w}).$$

Como T_n pode ser considerado também como um grupóide comutativo ([11]), um homomorfismo é também um homomorfismo entre os dois grupóides relacionados. Temos também que, se $\mathbf{p}$ é sobrejetora, então R_m é isomorfo ao grupóide quociente $T_n/\mathbf{p}$. Neste caso, $V(T_n)$ pode ser particionado em subtorneios disjuntos $S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(m)}$, tais que $S^{(i)} \rightarrow S^{(j)} \iff (w_i, w_j) \in A(R_m)$, onde $w_i = \mathbf{p}(V(S^{(i)}))$ e $w_j = \mathbf{p}(V(S^{(j)}))$.

Diremos então que T_n é a *composição* das *componentes* $S^{(i)}$ com o *quociente* R_m ([4]) e usaremos a seguinte notação :

$$T_n = R_m(S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(m)}).$$

DEFINIÇÃO 1.8: Um torneio T_n é dito *simples* se quando a composição $T_n = R_m(S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(m)})$, implicar que $m=1$ ou $m=n$.

OBSERVAÇÃO 1.9: É fácil de se ver que se T_n admite uma composição com quociente R_m , então R_m é isomorfo a um subtorneio de T_n .

OBSERVAÇÃO 1.10: Para todo torneio T_n , existe exatamente um

torneio quociente simples não trivial([11]).

OBSERVAÇÃO 1.11: Temos que um torneio T_n é não Hamiltoniano se e somente se, seu quociente simples é T_2 .

Capítulo 2

A DIFERENÇA CÍCLICA DE UM TORNEIO

Começaremos este capítulo com alguns comentários a respeito da Teoria de Homotopia Regular de Digrafos.

A Teoria de Homotopia Regular de Digrafos é uma tentativa bem sucedida de se tentar definir um conceito de homotopia, semelhante ao já existente para superfícies, para o caso de digrafos.

Como se pode ver na referência [1], isto se faz possível através das definições do que são pré-topologias, pré-espacos e funções o -regulares e o^* -regulares, sobre digrafos.

Analisando-se detidamente a acima citada referência, vê-se que esta maneira pela qual foi definida a homotopia para digrafos é a mais "natural", pois são utilizados apenas os dados combinatórios determinados pelo digrafo "abstrato". Em momento algum a representação ou realização do digrafo em um certo ambiente é levada em consideração. Com essa nova definição de homotopia específica para digrafos, podemos calcular de maneira análoga à já conhecida homotopia, os respectivos grupos de homotopia regular sobre um digrafo G , que serão denotados por $\mathcal{Q}_n(G)$ e $\mathcal{Q}_{*n}(G)$.

Tem-se também que estes grupos de homotopia regular, relacionam-se com os já conhecidos grupos de homotopia clássica, os $\Pi_n(P)$, para um determinado poliedro P , através do seguinte resultado:

Segundo Teorema de Isomorfismo:

Sejam G um digrafo e K o complexo simplicial associado a G . Então, o grupo de homotopia regular $\mathcal{Q}_n(G)$ é isomorfo ao grupo de homotopia $\Pi_n(|K|)$, onde $|K|$ é o poliedro que realiza o complexo simplicial K .

Para termos uma idéia de como é esse poliedro conveniente, vamos fazer as seguintes observações.

Seja $D=(V(D),A(D))$ um digrafo. Dado um subconjunto $\mathcal{X} \subset V(D)$ não vazio, ele é chamado *testado* se existir $x \in \mathcal{X}$ tal que $x \rightarrow \mathcal{X} - x$. X é chamado *totalmente testado*, se para todo subconjunto não vazio $A \subset \mathcal{X}$, tem-se que A é testado.

No poliedro $|K|$ os simplexos são aqueles que são gerados pelos subconjuntos totalmente testados de D . Particularmente, se D é um torneio T_n , os subconjuntos totalmente testados são os subtorneios transitivos.(ver [1])

Definição 2.1: Um vértice v de H_n é chamado de um *vértice neutro* de H_n , se temos que $H_n - v$ for um torneio hamiltoniano. O número de vértices neutros de H_n será denotado por $\nu(H_n)$.

Observação 2.2: Como $\nu(H_n)$ é também o número máximo de subtorneios de ordem $n - 1$ e pela ref.[9] , na qual Moon demonstra que o número mínimo de k -ciclos em H_n é $n-k+1$, com $3 \leq k \leq n$, temos portanto que em H_n ($n \geq 4$) existem no mínimo 2 e no máximo n subtorneios

hamiltonianos de ordem $n - 1$, segue que $2 \leq \nu(H_n) \leq n$.

Definição 2.3: O torneio A_n ($n \geq 4$) com conjunto de vértices

$V(A_n) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ e conjunto de arcos

$A(A_n) = \{(x_i, x_j); j < i - 1 \text{ ou } j = i + 1\}$, tem somente dois vértices neutros, os vértices x_1 e x_n , por isso tal torneio é chamado de torneio *bineutro* de ordem n .

Definição 2.4: Um subtorneio T' de um torneio T é chamado de *projetado* se existe um vértice de $T - T'$ tal que $v \leftarrow T'$ ou $v \rightarrow T'$. Se nenhum vértice de $T - T'$ projeta T' , então T' é chamado de *não projetado*. Se C é um ciclo de T , C é dito ser projetado (respectivamente não projetado), se $\langle V(C) \rangle$ é projetado (respectivamente não projetado).

Teorema 2.5: Um torneio T_n ($n \geq 5$) é hamiltoniano se e somente se, existe um m -ciclo não projetado C , onde $3 \leq m \leq n - 2$.

Demonstração :

$(\implies)$ Se T_n é hamiltoniano e $n \geq 5$, temos pela observação 2.2 que $2 \leq \nu(T_n) \leq n$, logo podemos tomar v , um vértice neutro de T_n . temos

então que $T_n - v$ é torneio hamiltoniano de ordem no mínimo 4 e daí, novamente usando a observação 2.2, podemos tomar w_1 e w_2 , dois vértices neutros de $T_n - v$. Suponhamos então que os dois torneios hamiltonianos $T_n - \{v, w_1\}$ e $T_n - \{v, w_2\}$ são ambos projetados, ou seja, estamos supondo que qualquer m -ciclo C é projetado, onde $3 \leq m \leq n - 2$.

Observemos que w_1 não pode projetar $T_n - \{v, w_1\}$, pois se assim ocorresse $T_n - \{v, w_2\}$ não seria hamiltoniano, porque teríamos que $w_1 \rightarrow T_n - \{v, w_2, w_1\}$ ou que $w_1 \leftarrow T_n - \{v, w_2, w_1\}$. Vemos também que w_2 não pode projetar $T_n - \{v, w_1, w_2\}$, pois, caso contrário, teríamos que $w_2 \rightarrow T_n - \{v, w_1, w_2\}$ ou que $w_2 \leftarrow T_n - \{v, w_1, w_2\}$ e portanto chegaríamos a conclusão de que $T_n - \{v, w_1\}$ não seria hamiltoniano. Concluimos então que no mínimo um dos dois torneios, $T_n - \{v, w_1\}$ ou $T_n - \{v, w_2\}$ é não projetado e por conseguinte, temos que em T_n existe no mínimo um $(n-2)$ -ciclo que é não projetado.

($\Leftarrow$) Se T_n é não hamiltoniano temos que $T_n = T_2(S^1, S^2)$, logo cada ciclo de T_n está na componente S^1 ou na S^2 e em qualquer um dos dois casos, tal ciclo é projetado.

Observação 2.6: Notemos que os torneios hamiltonianos H_3 e H_4 também possuem m -ciclos não projetados, só que a condição de que $m \leq n - 2$, não é mais satisfeita.

Proposição 2.7: Seja C um ciclo não projetado de H_n e v um vértice não pertencente a C . Então existe um ciclo que passa por todos os vértices de $H_n - v$, ou seja, temos que $H_n - v$ é hamiltoniano, o que equivale a dizer que v é um vértice neutro de H_n .

Demonstração:

Suponha que dadas as hipóteses acima, tivéssemos que $H_n - v$ não fosse hamiltoniano. Então teríamos que $H_n - v = T_2(S^1, S^2)$. Logo, como C é um ciclo, ou C estaria em S^1 ou então em S^2 , o que implicaria que C seria um ciclo projetado, o que gera uma contradição.

Esta proposição motiva a seguinte definição:

Definição 2.8: Seja C um ciclo não projetado de H_n . Defina o conjunto $P_C = V(H_n) - V(C)$, o qual consiste de vértices neutros de H_n , que neste caso serão chamados de **polos** de C .

Definição 2.9: Um ciclo não projetado C de H_n é dito ser **minimal**, se para cada ciclo C' , tal que $V(C') \subset V(C)$, temos que C' é projetado por pelo menos um vértice de H_n . Um ciclo é chamado **característico** se ele possui o menor comprimento entre todos os ciclos minimais. Ou seja, é um ciclo minimal com o menor comprimento. O comprimento de um ciclo característico é chamado de **característica cíclica** de H_n e é denotado por $cc(H_n)$. Ao número dado pela diferença $n - cc(H_n)$ é dado o nome de **diferença cíclica** de H_n e usaremos a notação $cd(H_n)$.

Observação 2.10: Notemos que se C é um ciclo característico de H_n , temos então que $cd(H_n) = \# P_C$, de fato: seja k , o comprimento do ciclo característico C ; assim C possui k vértices e a $cc(H_n) = k$. Como $P_C = V(H_n) - V(C)$, temos que $\# P_C = \# V(H_n) - \# V(C) = n - k$. Por outro lado, temos que $cd(H_n) = n - cc(H_n) = n - k$.

($\Leftarrow$) Se C é ciclo minimal e v é polo de C , então pela definição 2.8, v é um vértice neutro de H_n .

Observação 3.2: Se v é vértice neutro de H_n , em geral não existe ciclo característico C , tal que $v \in P_C$ (Vide exemplo 2).

Corolário 3.3: O conjunto de vértices neutros de H_n , é a união dos conjuntos dos polos dos ciclos minimais de H_n . Portanto segue que $cd(H_n) \leq \nu(H_n)$.

Demonstração:

Pela proposição 3.1, a primeira afirmação é óbvia. Para verificar a outra afirmação, basta lembrar que $cd(H_n) = n - cc(H_n)$ e notar que se houver mais que um ciclo característico em H_n , haverá pelo menos um vértice neutro que não será contado pela $cd(H_n)$.

Proposição 3.4: $cd(H_n) = \nu(H_n)$ se, e somente se, em H_n existe um único ciclo minimal (o ciclo característico).

Demonstração:

($\implies$) Suponha que em H_n existam exatamente m (com $m > 1$) ciclos minimais. Então no mínimo um é característico. Denote tal ciclo por C . Além disso, se C' é um ciclo minimal diferente de C , existe um vértice neutro $v \in P_{C'}$, que não é um elemento de P_C , isto é, temos que

$\#P_C < \nu(H_n)$, logo $cd(H_n) < \nu(H_n)$ pela proposição 2.10, o que é uma contradição.

($\impliedby$) Denote por C o único ciclo minimal de H_n e suponha que $cd(H_n) < \nu(H_n)$. Então existe um vértice neutro v tal que $v \notin P_C$. Logo um novo ciclo minimal C' pode ser obtido pela proposição 3.1, o que é uma contradição.

Proposição 3.5: Se H_n é a composição $H_n = H'_m(S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(m)})$ com torneio quociente H'_m , então $cc(H_n) = cc(H'_m)$.

Demonstração:

(i) Seja C' um ciclo característico de H'_m , então $\langle C' \rangle$ é isomorfo a um subtorneio de H_n que não é projetado, pois C' não é projetado em H'_m .

Temos também que para cada ciclo C'' de H'_m tal que

$V(C'') \subset V(C')$, C'' é projetado em H'_m , logo tem-se que $\langle C'' \rangle$ é isomorfo a um subtorneio que é projetado em H_n . Portanto temos

$$cc(H'_m) \geq cc(H_n).$$

(ii) *Seja C um r -ciclo não projetado de H_n , usando-se a projeção canônica p , temos que $p(C)$ é não projetado e não está contido em nenhuma componente $S^{(i)}$.*

Então temos duas alternativas: ou $p(C)$ também é um r -ciclo, ou então $p(C)$ é um s -ciclo, onde $s < r$. De qualquer modo conclui-se que, dado um r -ciclo C não projetado em H_n , obtemos um s -ciclo não projetado em H'_m , onde $s \leq r$. Portanto, isto implica que $cc(H_n) \geq cc(H'_m)$.

Das partes (i) e (ii), concluímos que $cc(H_n) = cc(H'_m)$.

Proposição 3.6: *Seja $H_n = H'_m(S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(m)})$, então v é um vértice neutro de H_n se, e somente se, v está incluído em uma componente não unitária, ou $p(v)$ é um vértice neutro de H'_m , onde $p: V(H_n) \longrightarrow V(H'_m)$ é a projeção canônica.*

Demonstração:

$(\implies)$ Se v é um vértice neutro, então ou v está incluído em uma componente não unitária e uma das conclusões já fica satisfeita, ou então existe i_0 , tal que $S^{(i_0)} = \mathbf{p}(v)$.

Se ocorre o segundo caso, temos que $\mathbf{p}(slv)$ é vértice neutro de H'_m , pois $\mathbf{p}(H_n - v) = H'_m(S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(m)}) - S^{(i_0)}$ e como $\mathbf{p}$ é homomorfismo e $H_n - v$ hamiltoniano, então temos que $H'_m(S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(m)}) - S^{(i_0)}$ é hamiltoniano.

$(\impliedby)$ Seja $S^{(i_0)} = \mathbf{p}(v)$, então temos que o torneio

$H'_m(S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(m)}) - S^{(i_0)}$ é hamiltoniano, mas temos também que tal torneio é isomorfo a um subtorneio não projetado de $H_n - v$. Seja C o ciclo desse subtorneio de $H_n - v$. Como C é não projetado e $v \in V(C)$, temos pela proposição 2.7 que $H_n - v$ é hamiltoniano.

Proposição 3.7: Seja H'_m um subtorneio hamiltoniano de H_n . Então $cd(H'_m) \leq cd(H_n)$.

Demonstração:

20CAPÍTULO 3. PARTICIONANDO OS TORNEIOS HAMILTONIANOS

Demonstraremos, equivalentemente, que $cc(H'_m) \geq cc(H_n) - n + m$.

(i) Verificaremos primeiro para $m = n - 1$.

Seja $cc(H'_{n-1}) = h$ e consideremos um ciclo característico C_h em

$$H'_{n-1} = H_n - v.$$

– Se v não projeta C_h , então C_h é um ciclo não projetado em H_n . Segue que $cc(H'_{n-1}) \geq cc(H_n)$. Assim temos que $cc(H'_{n-1}) > cc(H_n) - 1$.

– Se v projeta C_h , então existe um vértice $w \in V(H'_{n-1}) \setminus V(C_h)$, tal que v não projeta $\langle V(C_h) \cup \{w\} \rangle$, pois caso contrário H_n não seria hamiltoniano.

Desde que w não projeta C_h , pois este é não projetado, podemos construir um ciclo C_{h+1} , cujo conjunto de vértices é $V(C_h) \cup \{w\}$, o qual é não projetado em H_n . portanto $cc(H'_{n-1}) \geq cc(H_n) - 1$.

(ii) Tomemos agora o caso geral, onde temos $3 \leq m \leq n - 1$. Neste caso duas possibilidades diferentes devem ser consideradas:

ii.1) Existe uma cadeia de subtorneios hamiltonianos

$H'_{m+1}, H'_{m+2}, \dots, H'_{n-1}$, tais que

$$V(H'_m) \subset V(H'_{m+1}) \subset \dots \subset V(H'_{n-1}) \subset V(H_n).$$

Nesta situação, usamos passo a passo a parte (i) acima, obtendo

$$cc(H'_m) \geq cc(H_n) - n + m.$$

ii.2) Existe um torneio hamiltoniano H'_s ($m \leq s \leq n$) tal que, entre H'_m e H'_s , existe uma cadeia de torneios hamiltonianos, como a descrita na parte ii.1), enquanto que para cada torneio T'_{s+1} tal que $V(H'_s) \subset V(T'_{s+1})$, T'_{s+1} é não hamiltoniano, ou seja, H'_s é projetado por todos os vértices de $V(H_n) \setminus V(H'_s) = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-s}\}$.

Então temos que $H_n = H'_{n-s}(\{v_1\}, \{v_2\}, \dots, \{v_{n-s}\}, H'_s)$.

Segue então que $cc(H_n) = cc(H'_{n-s+1}) < n - s$, usando-se as proposição 3.5 e o Teorema 2.5.

Temos portanto que:

$cc(H_n) - n + m < -s + m < cc(H'_s) - s + m \leq cc(H'_m)$, onde a última desigualdade segue da parte ii.1).

Observação 3.8: Se tivéssemos definido um ciclo característico como sendo um ciclo minimal com comprimento máximo, teríamos verdadeira uma propriedade similar à proposição 3.5, porém, uma propriedade similar à proposição 3.7 já não seria válida.

22CAPÍTULO 3. PARTICIONANDO OS TORNEIOS HAMILTONIANOS

De fato , observe-se em H_8 do exemplo 2.

Temos que o 5-ciclo $x_2, x_3, \dots, x_6, x_2$ é minimal com comprimento máximo.

ou seja, $8 - 5 = 3$, enquanto que:

– em $H_8 - x_4$ cada 3-ciclo minimal tem comprimento máximo, ou seja,

$$7 - 3 = 4.$$

– em $H_8 - x_1$ o ciclo x_2, x_3, x_4, x_5, x_2 é minimal com comprimento máximo, então $7 - 4 = 3$.

– em $H_8 - x_8$ o 5-ciclo $x_2, x_3, \dots, x_6, x_2$ é minimal com comprimento máximo, logo temos $7 - 5 = 2$.

Corolário 3.9: Se C é um ciclo característico de H_n e v é um polo de C , temos que $cd(H_n) \geq cd(H_n - v) \geq cd(H_n) - 1$.

Demonstração:

Como v é um polo de C , C é também um ciclo não projetado de $H_n - v$.

Então temos que $cc(H_n - v) \leq cc(H_n)$.

Portanto:

$$n - 1 - cc(H_n - v) \geq n - 1 - cc(H_n) , e$$

$$cd(H_n - v) \geq cd(H_n) - 1.$$

Agora usando-se a proposição 3.7, terminamos por obter:

$$cd(H_n) \geq cd(H_n - v) \geq cd(H_n) - 1.$$

Proposição 3.10: Seja H'_m um subtorneio hamiltoniano de H_n , então temos que $\nu(H'_m) \leq \nu(H_n)$.

Demonstração:

(i) *Vamos provar primeiro para $m = n - 1$.*

Suponha que u é um vértice neutro de $H_{n-1} = H_n - v$, e u não é um vértice neutro de H_n , ou seja, que $H_n - u$ não é hamiltoniano.

Temos então que o quociente simples de $H_n - u$ é T_2 e uma das componentes é necessariamente $\{v\}$, pois caso contrário, teríamos que $H_n - \{v, u\}$ seria não hamiltoniano.

Segue daí que, ou $u \rightarrow v \rightarrow H_n - \{u, v\}$ ou $u \leftarrow v \leftarrow H_n - \{u, v\}$.

Agora, se tomarmos u' , um vértice neutro de $H_n - v$ diferente de u , como v não pode projetar $H_n - \{u', v\}$, temos que u' é também vértice neutro de H_n . Então existe no máximo um vértice neutro de H_{n-1} , o qual não é um vértice neutro de H_n .

Como v é vértice neutro de H_n e não de $H_n - v$, segue que

$$\nu(H_{n-1}) \leq \nu(H_n).$$

(ii) *Provemos agora o caso geral:*

Se existe uma cadeia de subtorneios hamiltonianos $H'_{m+1}, \dots, H'_{n-1}$, tal

que $V(H'_m) \subset V(H'_{m+1}) \subset \dots \subset V(H'_{n-1}) \subset V(H_n)$ então

$$\nu(H'_m) \leq \nu(H'_{m+1}) \leq \dots \leq \nu(H_n).$$

Caso contrário, existe um H'_s como em ii.2) da demonstração 3.7 e

então $\nu(H'_m) \leq \nu(H'_s)$ e também $\nu(H'_s) \leq \nu(H_n)$ pela proposição 3.6 e

pelo fato de que H'_s é uma componente de H_n .

Proposição 3.11: Para cada $n \geq 5$, o torneio bineuro A_n possui $cd(A_n) = 2$ e contém como único ciclo minimal, o ciclo $x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_2$.

Demonstração:

Demonstraremos por indução em n .

Para $n=5$, x_2, x_3, x_4, x_2 é o único ciclo minimal e $cd(A_5) = 2$.

Assuma que $cd(A_{n-1}) = 2$ e A_{n-1} possui somente o ciclo minimal

$x_2, x_3, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}$.

Considere A_n obtido de A_{n-1} , através da adição do vértice x_n , sucessor

de x_{n-1} e predecessor de todos os outros vértices de A_{n-1} .

Em A_n todos os $(n-3)$ -ciclos são projetados; de fato, temos que x_n projeta o ciclo $x_2, x_3, \dots, x_{n-2}, x_2$, o qual é não projetado em A_{n-1} e temos também que o único $(n-3)$ -ciclo incluindo x_n é o ciclo $x_4, x_5, \dots, x_n, x_4$, que é projetado por x_1 .

Além disso, o $(n-2)$ -ciclo $x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_2$ é o único ciclo de ordem $(n-2)$ que é não projetado em A_n . Portanto $cd(A_n) = 2$.

TEOREMA 3.12:(Teorema de Classificação dos Torneios Hamiltonianos)

Seja $H_n (n \geq 5)$ um torneio hamiltoniano de ordem n , então

$$2 \leq cd(H_n) \leq n - 3, \text{ ou seja, } 3 \leq cc(H_n) \leq n - 2.$$

Reciprocamente, para cada $n \geq 5$ e para cada h , tal que $2 \leq h \leq n - 3$, existem torneios hamiltonianos H_n com $cd(H_n) = h$.

Demonstração:

(i) A partir do teorema 2.5, temos:

$$3 \leq cc(H_n) \leq n - 2$$

$$-n + 3 \leq -n + cc(H_n) \leq -2$$

$$2 \leq n - cc(H_n) \leq n - 3$$

$$2 \leq cd(H_n) \leq n - 3$$

(ii) Para $n \geq 5$ e $h = 2$ temos que o torneio A_n satisfaz a condição

$$cd(A_n) = 2$$

Agora para $n \geq 5$ e $2 \leq h \leq n - 3$. Tomemos o torneio bineutro A_{n-h+2}

de ordem $n-h+2$, com conjunto de vértices $V\{x_1, x_2, \dots, x_{n-h+2}\}$.

Definamos $H_n := A_{n-h+2}(T_{h-1}, \{x_2\}, \dots, \{x_{n-h+2}\})$, como a composição

obtida a partir de A_{n-h+2} , trocando-se a componente $\{x_1\}$ por qualquer

torneio T_{h-1} , de ordem $h-1$.

Pela proposição 3.5 temos:

$$cc(A_{n-h+2}) = n - h = cc(H_n)$$

Então:

$$cd(H_n) = n - cc(H_n) = n - n + h = h$$

Portanto: $cd(H_n) = h$.

Observação 3.13: Para $n=4$, tem-se que no torneio H_4 ,

$$cd(H_4) = 1 \text{ e } cc(H_4) = 3$$

Para $n=3$, tem-se que no torneio H_3 , $cd(H_3) = 0$ e $cc(H_3) = 3$.

Observação 3.14: Um torneio simples H_n com $cd(H_n) = h$ pode ser obtido de um torneio bineutro A_n , através da reversão do arco (x_i, x_{i+h-1}) , para cada $i \geq 3$ e $h \geq 3$ tal que $i + h \leq n - 1$

Assim para cada h admissível, existe também torneios simples H_n com $cd(H_n) = h \geq 4$.

Observação 3.15: Os torneios simplesmente desconexos, têm característica cíclica igual a 3.

Corolário 3.16: A coleção $\mathcal{H}_{n,h} = \{H_n: \text{torneios hamiltonianos de ordem } n \text{ com } cd(H_n) = h\}$, para cada $n \geq 5$ e para cada h tal que $2 \leq h \leq n - 3$, é uma partição do conjunto dos torneios hamiltonianos de ordem maior ou igual a 5.

Observação 3.17: Se à coleção descrita acima, adicionarmos as seguintes classes:

$\mathcal{H}_{3,0} = \{H_3: \text{3-ciclo}\}$, e

$\mathcal{H}_{4,1} = \{H_4: \text{torneio hamiltoniano de ordem 4}\}$,

obteremos uma partição de todos os torneios hamiltonianos.

Capítulo 4

TORNEIOS H_n COM

$$\text{cd}(H_n)=2$$

Proposição 4.1:Qualquer H_n ($n \geq 6$) com $\text{cd}(H_n) = 2$ é simples.

Demonstração:

Suponha que H_n não seja simples e considere a sua respectiva composição $H_n = H_m(S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(m)})$, onde H_m é quociente simples relacionado a H_n .

Agora considere C , um $(n-2)$ -ciclo não projetado de H_m . Desde que H_m pode ser identificado com um subtorneio de H_n , C pode ser consid-

erado também como um ciclo não projetado de H_n , o que origina uma contradição, pois isso significaria que:

$$cc(H_n) \leq m - 2$$

$$-n + cc(H_n) \leq -n + m - 2$$

$$n - cd(H_n) \geq n - m + 2 > 2$$

$$cd(H_n) > 2$$

Atingimos um ponto onde somos capazes de obter uma caracterização estrutural dos torneios H_n com $cd(H_n) = 2$.

Para H_5 , segue do teorema 2.5, que $cd(H_5) = 2$.

Para $n=6$, pode-se verificar que existem somente dois torneios H_6 com $cd(H_6) = 2$, o torneio bineutro A_6 e o torneio H'_6 obtido de A_6 a partir da reversão do arco (x_2, x_5) (Vide exemplo 3).

Em geral vale a seguinte proposição:

Proposição 4.2: Para $n \geq 7$, os torneios bineutros A_n são os únicos torneios com diferença cíclica igual a 2.

Demonstração:

Provaremos por indução em n .

Para $n=7$, podemos obter H_7 com $cd(H_7) = 2$, somente pela adição de um vértice v a A_6 ou a H'_6 .

Se considerarmos A_6 , como v deve projetar o ciclo característico de A_6 , obtemos oito diferentes possibilidades, consideradas as adjacências de v , mas somente o caso em que $H_7 = A_7$ temos a condição $cd(H_7) = 2$ satisfeita, pois nos outros casos ou H_7 contém um subtorneio cuja diferença cíclica é 3 ou não é hamiltoniano.

Se considerarmos H'_6 , como v deve projetar os quatro 4-ciclos de H'_6 , v deve necessariamente projetar H'_6 . Então, começando a partir de H'_6 , um torneio H_7 com $cd(H_7) = 2$ não pode ser construído.

Agora assumamos que para cada $n > 7$, A_n é o único torneio com $cd(A_n) = 2$. Consideremos um torneio H_{n+1} . Desde que $cd(H_{n+1})$ deve ser igual a dois e H_{n+1} não pode incluir um subtorneio H_n , com $cd(H_n) > 2$, H_{n+1} somente pode ser obtido pela adição de um vértice v

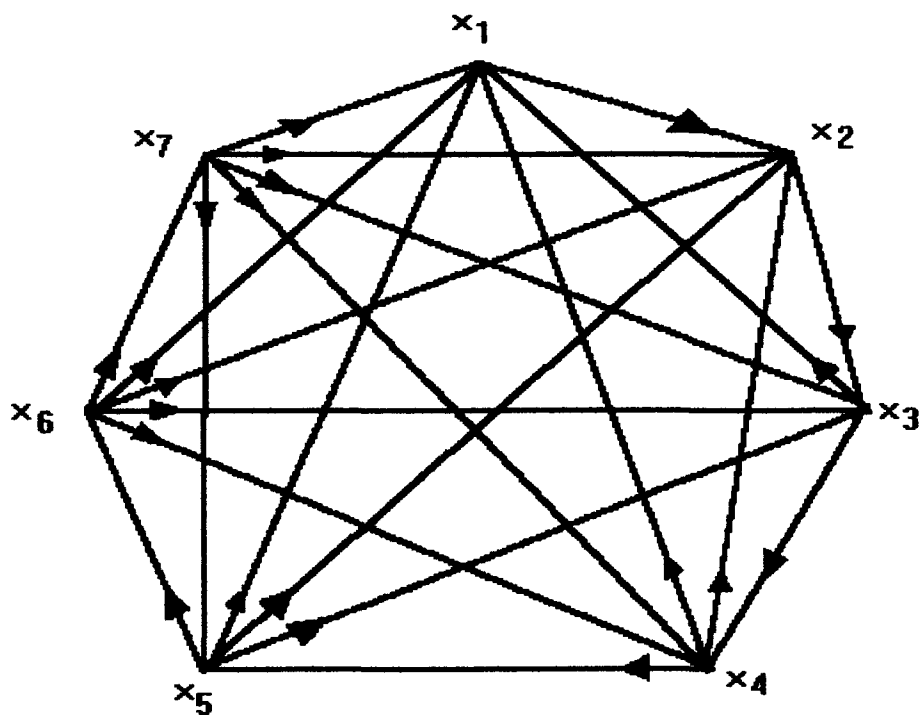
a A_n .

Similarmente como antes , obtemos oito diferentes casos , mas a condição

$cd(H_{n+1}) = 2$ é satisfeita somente quando $H_{n+1} = A_{n+1}$.

Apêndice A

EXEMPLOS

EXEMPLO 1:**Fig. 1**

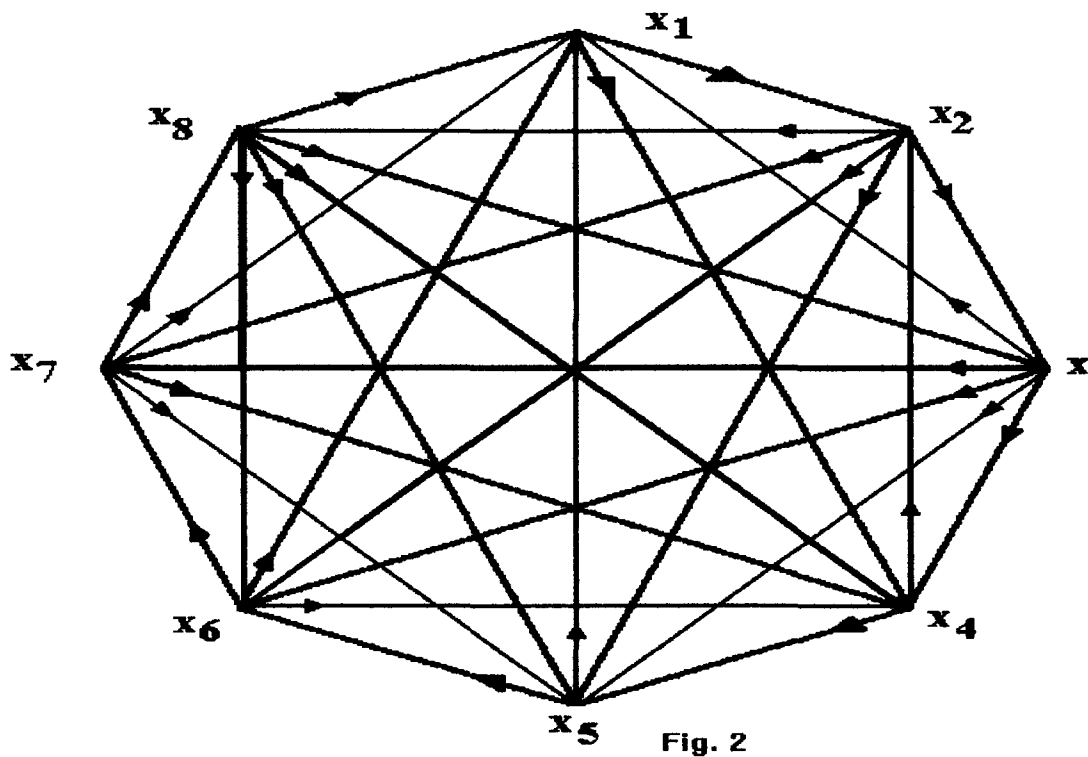
Na figura número 1 acima, temos um exemplo de um torneio bineutro.

Nesta figura temos o torneio bineutro de ordem 7, o A_7 .

Podemos verificar prontamente que os vértices x_1 e x_7 são seus vértices neutros.

Observe-se que o ciclo $x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_2$ é um ciclo característico.

Com as observações acima, temos então que, para este torneio, sua característica cíclica e sua diferença cíclica são respectivamente: $cc(A_7)=5$ e $cd(A_7)=2$.

EXEMPLO 2:

O torneio hamiltoniano descrito na figura 2, o qual indicaremos por H_8 , é um torneio que contém o torneio bineutro A_7 , bastando para verificar esta afirmação retirar o vértice x_2 .

O ciclo x_1, x_2, x_3, x_1 é característico.

Enquanto que o ciclo $x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_4$ é minimal.

Temos então que $cc(H_8)=3$ e $cd(H_8)=5$.

EXEMPLO 3:

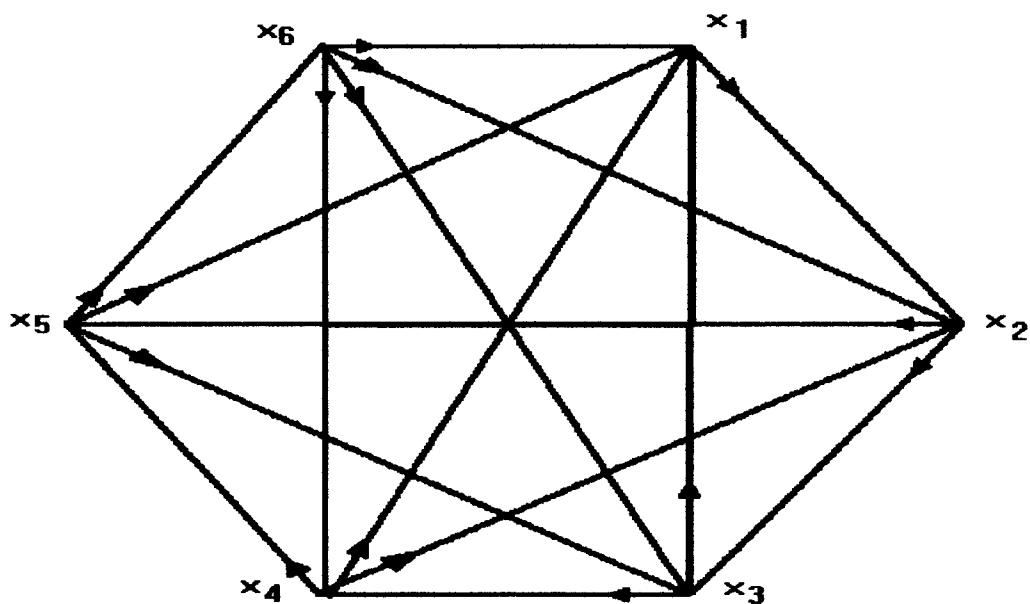


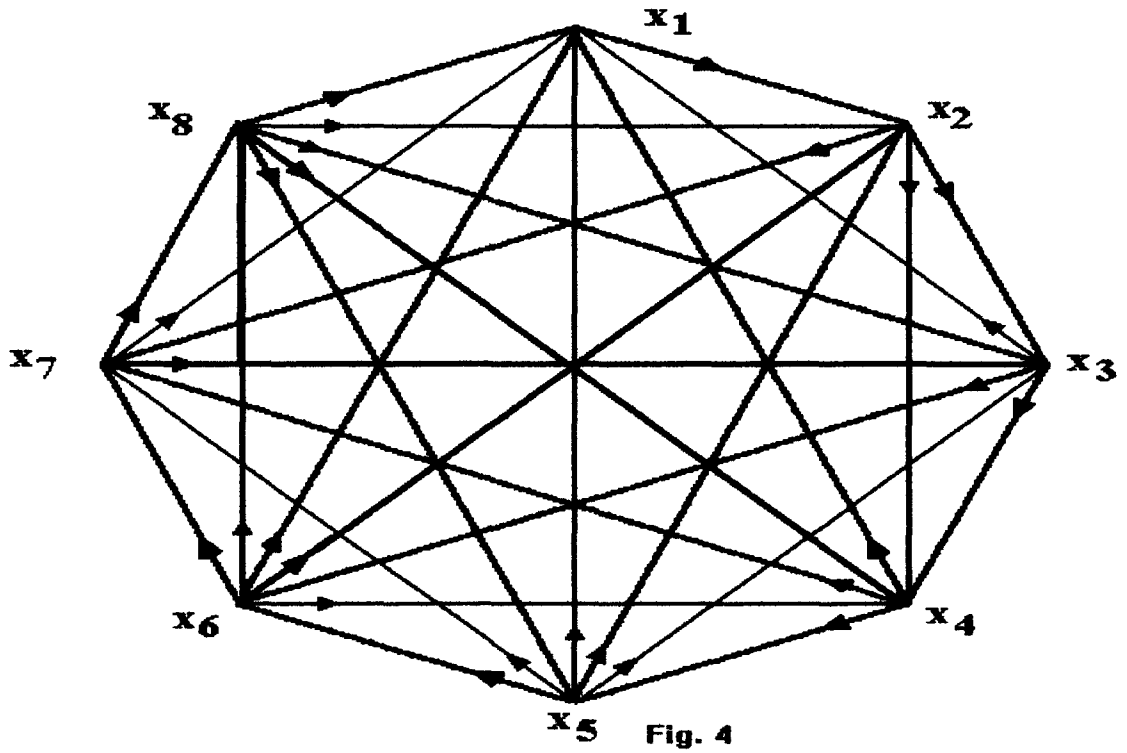
Fig. 3

Neste exemplo referente à figura 3, temos um torneio de ordem 6 com quatro ciclos característicos. Vamos denotá-lo por H'_6 .

Temos como ciclos característicos de H'_6 , os ciclos:

- x_1, x_2, x_5, x_3, x_1 ;
- x_1, x_2, x_5, x_6, x_1 ;
- x_2, x_5, x_3, x_4, x_2 ;
- x_2, x_5, x_6, x_4, x_2 .

Como se pode ver, todos os ciclos citados acima, são 4-ciclos, portanto para o torneio H'_6 temos que $\text{cd}(H'_6)=2$.

EXEMPLO 4:

Neste exemplo denotaremos o torneio hamiltoniano da figura 4 por

H_8 .

Para H_8 , temos que $cd(H_8)=3$, pois temos os seguintes 5-ciclos que são característicos:

$x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_2$;

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_7, x_1$;

$x_6, x_8, x_1, x_2, x_3, x_6$;

$x_8, x_2, x_3, x_4, x_7, x_8;$

$x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_1$.

Temos cada subtorneio hamiltoniano de ordem 7 de H_8 , também com diferença cíclica igual a 3. A seguir relacionamos tais subtorneios e seus respectivos ciclos característicos:

$x_8, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$ e ciclo característico $x_8, x_2, x_3, x_6, x_8;$

$x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_1$ e ciclo característico $x_5, x_6, x_7, x_8, x_5;$

$x_1, x_2, x_7, x_3, x_6, x_8, x_5, x_1$ e ciclo característico $x_2, x_3, x_6, x_8, x_2;$

$x_6, x_4, x_1, x_2, x_7, x_8, x_3, x_6$ e ciclo característico $x_1, x_2, x_3, x_6, x_1;$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_7, x_8, x_1$ e ciclo característico $x_1, x_2, x_7, x_8, x_1;$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_8, x_1$ e ciclo característico $x_2, x_3, x_6, x_8, x_2;$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_1$ e ciclo característico $x_1, x_2, x_3, x_4, x_1.$

Bibliografia

- [1] Barros T. E., *Homotopia Regular de Grafos*, Tese de Mestrado - IMECC - UNICAMP (1991).
- [2] Beineke L. W. and Reid K. B. *Tournaments, Selected topics in Graph Theory* Edited by Beineke L. W. and Wilson R. J., Academic Press, New York(1979).
- [3] Beineke L. W. and Harary F. *The Maximum Number of Strongly Connected Subtournaments* Canad. Math. Bull. 8(1965),491-498.
- [4] Burzio M. and Demaria D. C. *On Siplly Disconnected Tournaments* to appear in Ars Combin. (Waterloo, Ont.)
- [5] Burzio M. and Demaria D. C. *Characterization of Tournaments by Coned 3-cicles*, Acta Univ. Carolin. - Math. Phys., Prague, vol.

28, No 2 (1987),25-30.

- [6] Douglas R. J., *Tournaments that Admit Exactly One Hamiltonian Circuit*, Proc. London Math. Soc. 21(1970), 716-730.
- [7] Harary F., Norman R. Z. and Cartwright D., *Structural Models, An Introduction to the Theory of Directed Graphs*. Wiley, New York(1965).
- [8] Las Vergnas M.,*Sur le Nombre de Circuit dans un Tournoi Fortement Connexe*, Cahiers du CERO, Bruxelles 17 (1975), 261-265.
- [9] Moon J. W., *On Subtournaments of a Tournament*, Canad. Math. Bull., vol.9, No. 3(1966),297-301.
- [10] Moon J. W., *Tournaments whose Subtournaments are Irreducible or Transitive*, Canad. Math. Bull., 21(1)(1979),75-79.
- [11] Müller V., Nešetřil J. and Pelant J.,*Either Tournaments or Algebras?*, Discrete Math. 11 (1975), 37-66.