

ANÁLISE DE SÉRIES TEMPORAIS COM
COVARIÂNCIAS VARIANDO NO TEMPO
ATRAVÉS DE FATORES COM VOLATILIDADE
ESTOCÁSTICA

Rodrigo Tsai

Prof. Dr. Luiz Koodi Hotta
Orientador

Instituto de Matemática, Estatística e Ciência Computacional
Universidade Estadual de Campinas

Dissertação apresentada junto ao Departamento de Estatística do Instituto de Matemática, Estatística e Ciência Computacional, da Universidade Estadual de Campinas para a obtenção do título de Mestre em Estatística

ANÁLISE DE SÉRIES TEMPORAIS COM COVARIÂNCIAS VARIANDO NO TEMPO ATRAVÉS DE FATORES COM VOLATILIDADE ESTOCÁSTICA

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Rodrigo Tsai e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 03 de dezembro de 2003.

Prof. Dr. Luiz Koodi Hotta
Orientador

Banca Examinadora:

1. Prof. Dr. Luiz Koodi Hotta (Orientador) - IMECC/UNICAMP.
2. Prof. Dr. Aluísio de Souza Pinheiro - IMECC/UNICAMP.
3. Prof. Dr. Antonio Marcos Duarte Júnior - IBMEC-RJ.
4. Prof. Dr. Ronaldo Dias - IMECC/UNICAMP.

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Estatística.

Resumo

O modelo fatorial com os fatores latentes comuns e os fatores específicos seguindo processos de volatilidade estocástica são uma forma frugal de representar a matriz de variâncias e covariâncias de séries financeiras multivariadas variante no tempo. Esse modelo tem sido estimado na literatura por inferência bayesiana através de simulação **MCMC** e o objetivo deste trabalho é comparar dois esquemas de simulação recentemente desenvolvidos. Ambas as formas de simulação **MCMC** são implementadas pelo amostrador de Gibbs; uma delas reúne em blocos de simulação parâmetros e variáveis latentes correlacionados, o que diminui a autocorrelação da cadeia de Markov gerada na simulação e aumenta a eficiência do algoritmo. Nesse trabalho, esses métodos são aplicados a um conjunto de dados simulados para avaliar a qualidade das estimativas e também a um conjunto de dados reais composto de dez taxas de câmbio.

Abstract

The factor model structured with common and idiosyncratic latent factors that follow stochastic volatility processes is a technique to parsimoniously represent the time varying variances and covariances matrix of financial time series. This model has been fitted in the literature via MCMC simulation and the purpose of this work is to compare two recently developed schemes for MCMC simulation. Both schemes are implemented through Gibbs sampler. One of them gathers parameters and latent variables that are correlated in blocks sampling them simultaneously. This procedure reduces the autocorrelation of the generated Markov Chains and increases the simulation efficiency. In this work these methods are applied both to simulated data sets, in order to assess the quality of the estimates, and to a data set composed by ten foreign exchange rates in order to experience different factor model specifications.

Agradecimentos

À minha mãe pelo apoio e pela dedicação incondicionais.

Ao meu pai pelo ensino e pelo exemplo de força e de superação.

Ao meu irmão Cássio pelo exemplo de força e de amizade.

À minha irmã Yuri pela amizade e pelo companheirismo.

Ao meu orientador, prof. Luiz Koodi Hotta, pelo ensino, pela paciência e também pelo incentivo com o exemplo de trabalho.

À banca examinadora pela disposição em contribuir com o meu trabalho.

Ao professor Antônio Marcos Duarte Jr. por conceder as saídas às sextas-feiras do Unibanco para que eu trabalhasse na tese e também pelo incentivo para finalizá-la.

Aos professores Aluísio de Souza Pinheiro e Vera Lúcia da Rocha Lopes pela ajuda com as técnicas de simulação e otimização.

Aos amigos do mestrado que de várias formas contribuíram com o meu trabalho, Alexandre Rubesam, Benilton Carvalho, Cézar A. F. Anselmo, Clécio Ferreira, Helder Palaro, Nelson Lopes, Ricardo Takeyama, Nevena Maric, Roberta Souza, Rossana Lopez, Samara Kihl, Tatiana Benaglia, Victor Lachos. Aos amigos Dionisio Moriconi e Gabriel Silveira. À Luciana Okamori.

Aos professores e funcionários do Imecc e à Capes pelo suporte financeiro.

À Verdade, onipresente.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Modelos multivariados para aplicação em finanças	3
1.2	Os dados	5
1.3	Estrutura da dissertação	5
2	O Modelo de Fatores Latentes com Volatilidade Estocástica	6
2.1	O modelo de volatilidade estocástica univariado	6
2.2	O modelo de fatores	7
2.3	Identificação e restrições	8
2.3.1	Causas da indeterminação do modelo	8
2.3.2	Estrutura hierárquica da matriz de cargas	9
2.4	Componentes de volatilidade estocástica	11
2.5	Prioris	12
3	Estimação: Análise Bayesiana e Simulação MCMC	15
3.1	Modelo e notação	15
3.2	Inferência Bayesiana	17
3.3	Análise MCMC sem blocos	19
3.4	Análise MCMC utilizando blocos	29
4	Análise de Dados Simulados	34
4.1	Geração das séries de retornos	34
4.2	Simulação MCMC sem blocos	36
4.2.1	Estimativas para o modelo de fatores	37
4.2.2	Estimativa dos modelos de VE.	38

4.2.3	As variâncias e covariâncias das séries de retornos . . .	39
4.3	Simulação MCMC utilizando blocos	40
4.3.1	Estimativas para o modelo de fatores	41
4.3.2	Estimativa dos modelos de VE.	41
4.3.3	As variâncias e covariâncias das séries de retornos . . .	42
4.4	Comparação das estimativas	43
5	Análise de Dados Reais	51
5.1	Análise MCMC	52
5.2	O modelo de fatores	53
5.3	Os modelos de VE	55
5.4	A matriz de variâncias e covariâncias	56
5.5	Especificação Euro - Yen nos fatores	57
5.6	Análise de sensibilidade do modelo	59
6	Considerações Finais	67
	Apêndices	68
A	Simulação de Monte Carlo - Cadeia de Markov	68
A.1	O algoritmo de Metropolis	68
A.2	O amostrador de Gibbs	70
B	Simulação e Filtragem em Modelos de Espaços de Estados	71
B.1	O suavizador-simulador de de Jong e Shephard	71
B.2	O algoritmo FFBS de West Harrison	72
B.3	O método de descontos e a análise inicial para o MF-VE . . .	74
C	Cadeias de Markov para os parâmetros do MF-VE	76
C.1	Simulação MCMC sem blocos	76
C.2	Simulação MCMC utilizando blocos	90
D	Análise das taxas de câmbio	104
	Referências	117

Lista de Figuras

2.1	Distribuições a priori para os parâmetros do MF-VE	14
3.1	Amostrador de Gibbs para a análise MCMC sem blocos.	21
3.2	Distribuição $\log\chi^2_{(1)}$ e a aproximação por mistura de normais de Kim, Shephard e Chib (1998).	27
4.1	Medianas para θ das análises MCMC sem e com blocos.	46
4.2	Medianas para X das análises MCMC sem e com blocos.	47
4.3	Medianas para μ^f e μ^ε das análises MCMC sem e com blocos.	48
4.4	Medianas para ϕ^f e ϕ^ε das análises MCMC sem e com blocos.	49
4.5	Medianas para Σ_η^f e σ_η^ε das análises MCMC sem e com blocos.	50
5.1	Medianas para θ das análises MCMC sem e com blocos.	61
5.2	Medianas para X das análises MCMC sem e com blocos.	62
5.3	Medianas para μ^f e μ^ε das análises MCMC sem e com blocos.	64
5.4	Medianas para ϕ^f e ϕ^ε das análises MCMC sem e com blocos.	65
5.5	Medianas para Σ_η^f e σ_η^ε das análises MCMC sem e com blocos.	66
C.1	Análise MCMC sem blocos para θ	77
C.2	Análise MCMC sem blocos para a matrix X - histogramas.	78
C.3	Análise MCMC sem blocos para a matrix X - auto-correlação.	79
C.4	Fatores comuns das séries analisadas e desvios padrões condi- cionais	80
C.5	Efeitos específicos das séries analisadas e desvios padrões con- dicionais	81
C.6	f_{2t} , ε_{3t} e ε_{3t} para $t = 600, \dots, 700$ e desvios padrões condicionais	82

C.7	Análise MCMC sem blocos para μ^f .	82
C.8	Análise MCMC sem blocos para ϕ^f .	83
C.9	Análise MCMC sem blocos para Σ_η^f .	83
C.10	Análise MCMC sem blocos para μ^ε .	84
C.11	Análise MCMC sem blocos para ϕ^ε .	85
C.12	Análise MCMC sem blocos para σ_η^ε .	86
C.13	Variâncias condicionais das séries - análise sem blocos	87
C.14	Correlações entre as séries - análise sem blocos	88
C.15	Percentual de variância específica - análise sem blocos	89
C.16	Análise MCMC com blocos para θ_i .	90
C.17	Análise MCMC com blocos para a matrix X - histogramas.	91
C.18	Análise MCMC com blocos para a matrix X - auto-correlação.	92
C.19	Fatores comuns das séries analisadas e desvios padrões condi- cionais	93
C.20	Efeitos específicos das séries analisadas e desvios padrões con- dicionais	94
C.21	f_{2t} , ε_{3t} e ε_{3t} para $t = 600, \dots, 700$ e desvios padrões condicionais	95
C.22	Análise MCMC utilizando blocos para μ^f .	95
C.23	Análise MCMC utilizando blocos para ϕ^f .	96
C.24	Análise MCMC utilizando blocos para Σ_η^f .	96
C.25	Análise MCMC utilizando blocos para μ^ε .	97
C.26	Análise MCMC utilizando blocos para ϕ^ε .	98
C.27	Análise MCMC utilizando blocos para σ_η^ε .	99
C.28	Variâncias condicionais das séries - análise com blocos	100
C.29	Correlações entre as séries - análise com blocos	101
C.30	Comparação das estimativas de variâncias e correlações das séries	102
C.31	Percentual de variância específica - análise com blocos	103
D.1	Paridade com o dólar das moedas analisadas de 01/jan/1999 a 31/ago/2002.	105
D.2	Séries de retornos analisadas.	106
D.3	Representação das moedas analisadas no espaço dos fatores.	107
D.4	Fatores comuns das taxas de câmbio	108

D.5	Efeitos específicos das taxas de câmbio	109
D.6	Variâncias condicionais das taxas de câmbio	110
D.7	Correlações condicionais entre as taxas de câmbio	111
D.8	Percentual de variância específica das taxas de câmbio	112
D.9	Fatores comuns das taxas de câmbio	113
D.10	Efeitos específicos das taxas de câmbio	114
D.11	Variâncias condicionais das taxas de câmbio	115
D.12	Percentual de variância específica das taxas de câmbio	116

Lista de Tabelas

2.1	Número de fatores para identificação do modelo fatorial	11
2.2	Prioris utilizadas para os parâmetros do MF-VE	13
3.1	Notação: variáveis em $t = 1, \dots, T$ do MF-VE	16
3.2	Notação: parâmetros e variáveis latentes do MF-VE	17
3.3	Componentes da mistura de normais para $\log\chi^2_{(1)}$	26
4.1	Parâmetros X e θ utilizados na geração da série multivariada y_t .	36
4.2	Parâmetros utilizados na geração do processo de volatilidade dos fatores comuns f_t	36
4.3	Parâmetros utilizados na geração dos processos de volatilidade dos erros específicos ε_t	37
4.4	Variância marginal das séries simuladas.	39
4.5	Erro quadrático médio para as variáveis latentes f_t e ε_t estimadas.	44
4.6	Erro quadrático médio para as log-variâncias λ_t^f e λ_t^ε estimadas.	45
4.7	Erro quadrático médio para os parâmetros estimados.	45
4.8	θ estimada pelos métodos de simulação MCMC e real.	46
4.9	Matriz X : estimativas e valores reais.	47
4.10	Médias μ^f e μ^ε : estimativas e valores reais	48
4.11	Coefficientes auto-regressivos ϕ^f e ϕ^ε : estimativas e valores reais.	49
4.12	Σ_η^f e σ_η^ε estimativas e valores reais	50
5.1	Estatísticas sumárias para os retornos das taxas de câmbio . .	52
5.2	Correlações entre os retornos das taxas de câmbio	53
5.3	Estatísticas sumárias para θ	54

5.4	Análise MCMC para a matriz de cargas X	55
5.5	Estimativas para os parâmetros μ^f e ϕ^f - taxas de câmbio. . .	56
5.6	Estimativas para Σ_η^f - taxas de câmbio	56
5.7	Estimativas para os parâmetros μ^ε e ϕ^ε - taxas de câmbio . . .	57
5.8	Estimativas para $\sigma_{\eta,i}^\varepsilon$ - taxas de câmbio	58
5.9	Estatísticas sumárias para θ	59
5.10	Análise MCMC para a matriz de cargas X	60
5.11	Estimativas para os parâmetros μ^f e ϕ^f - taxas de câmbio. . .	60
5.12	Estimativas para Σ_η^f - taxas de câmbio	61
5.13	θ estimada pelos métodos de simulação MCMC e real.	62
5.14	Matriz X : estimativas e valores reais.	63
5.15	Médias μ^f e μ^ε : estimativas e valores reais	64
5.16	Coefficientes auto-regressivos ϕ^f e ϕ^ε : estimativas e valores reais.	65
5.17	Σ_η^f e σ_η^ε estimativas e valores reais	66

Lista de Abreviações

APT	- Teoria de Precificação de Ativos
DLM	- Modelo Linear Dinâmico
EQM	- Erro Quadrático Médio
FFBS	- (Algoritmo de) filtragem passo à frente e simulação passo atrás de West e Harrison (1997)
GARCH/ARCH	- (Modelo) auto-regressivo com heterocedasticidade condicional
MCMC	- Monte Carlo via Cadeia de Markov
MF-VE	- Modelo de Fatores com Componentes de Volatilidade Estocástica
MH	- (Algoritmo de) Metropolis - Hastings
NID	- (Variáveis aleatórias com distribuição) Normal identicamente distribuídas
SSMO	- Algoritmo simulador-suavizador de de Jong e Shephard (1995).
VaR	- Valor em Risco
VE	- Volatilidade Estocástica
VE-AR(1)	- Volatilidade Estocástica modelada por processo auto-regressivo(1)
VE-VAR(1)	- Volatilidade Estocástica modelada por processo auto-regressivo(1) vetorial

Capítulo 1

Introdução

Séries financeiras têm a característica de exibir matrizes de variâncias e covariâncias (condicionais) variantes no tempo. Suas estimativas são utilizadas em alguns modelos em finanças: a teoria de precificação de ativos (**APT**) (Ross, 1976), que relaciona o valor esperado de um ativo individual à covariância de retornos; a análise de carteiras (Alexander, 1986), que busca alocar recursos de forma a minimizar a variância de uma carteira para dado nível de retorno; e o Valor em Risco (**VaR**) de uma carteira (Frak, Hardle e Stahl (2000)), que estuda seu comportamento extremo.

Um método tradicionalmente utilizado para estimar esta matriz é o de médias móveis com amortecimento exponencial, que é, por exemplo, utilizado na metodologia RiskMetriks (RiskMetriks, 1994). Essa abordagem, sob o ponto de vista bayesiano, é chamada de estimador pelo método dos descontos (ver West e Harrison (1997, subseção 16.4.5) para uma introdução ao método) e é utilizada em Quintana e West (1987) na análise de taxas de câmbio de várias moedas internacionais. Entretanto, esse método, ao contrário dos métodos recentemente desenvolvidos baseados em modelos de variância estocástica não tem capacidade preditiva e portanto não é capaz de se antecipar às mudanças. Por apresentarem melhores ajustes e previsões, os modelos de volatilidade estocástica (**VE**) e auto-regressivos com heterocedasticidade condicional (**ARCH**) são duas classes dominantes de modelos para variância de séries temporais em finanças.

Dada a característica das séries financeiras de estarem relacionadas aos

mesmos efeitos do mercado do qual participam, o modelo de análise fatorial é uma forma frugal de descrever sua matriz de variâncias e covariâncias. Esse modelo é utilizado considerando a estrutura de modelos (**ARCH**) em Engle, Ng e Rotschild (1990), Ng, Engle e Rotschild (1990), King, Sentana e Wadhwani (1994), Diebold e Nerlove (1989) e Bollerslev, Engle e Wooldridge (1988), mas as generalizações multivariadas de modelos **ARCH** têm muitos parâmetros e são difíceis de estimar devido a restrições complicadas no espaço paramétrico. Em contrapartida, os modelos mais simples (Bollerslev, Engle e Nelson (1994) podem ser simplistas demais para aproximar a natureza dos dados. Por exemplo Bollerslev (1990) supõe que as correlações condicionais entre as séries são constantes no tempo, o que é estendido em Engle e Shephard (2001) que utiliza um índice de dois parâmetros para representar a matriz de variâncias e covariâncias variante no tempo.

O modelo de fatores considerando os fatores latentes como processos de **VE** é explorado em Harvey, Ruiz e Shephard (1994), Pitt e Shephard (1999), Aguilar e West (2000), Chib, Nardari e Shephard (2002). Os modelos de **VE** introduzem na função de verossimilhança muitos parâmetros suplementares como as log-variâncias e os fatores latentes o que torna difícil a obtenção de máximos desta função, exigida na formulação clássica. O uso de inferência bayesiana contorna esse problema pois não requer a maximização desta função e portanto modelos de forma complicada e com muitos parâmetros não são um obstáculo.

A simulação **MCMC** é uma solução para realizar esse tipo de inferência. É gerada uma cadeia de Markov para os parâmetros e variáveis latentes tomando amostras sequencialmente das distribuições a posteriori das log-variâncias e dos fatores latentes condicionados aos parâmetros e também dos parâmetros condicionados a essas variáveis latentes. Após a convergência, esta cadeia possibilita a realização de inferências nas distribuições marginais a posteriori exatas dos parâmetros e também das log-variâncias e fatores latentes. Denotando por T o tamanho da amostra, k o número de fatores e q o número de séries analisadas, esta abordagem de simulação é um contorno ao obstáculo de realizar integração de ordem $(2 \times k \times q \times T)$ -dimensional na função de verossimilhança do modelo.

Nesse trabalho é estudada a estimação do modelo de fatores para séries financeiras com os fatores latentes comuns e específicos seguindo processos de **VE** correlacionados e independentes respectivamente. A estimação destes modelos é feita por meio de inferência bayesiana através da simulação **MCMC** em como Pitt e Shephard (1999), Aguilar e West (2000) e Chib, Nardari e Shephard (2002)¹. Nessas referências, a simulação **MCMC** é implementada utilizando o amostrador de Gibbs que, em Pitt e Shephard (1999) e Aguilar e West (2000), gera cada parâmetro de sua distribuição a posteriori condicional enquanto que, em Chib, Nardari e Shephard (2002), parâmetros e variáveis latentes correlacionados ou participantes da mesma estrutura no modelo são amostrados simultaneamente a partir de sua distribuição a posteriori conjunta, ou seja, em blocos de simulação. Embora apresente maior custo computacional a amostragem em blocos gera a cadeia Markov com autocorrelação com maior decaimento a zero exigindo um tamanho menor de cadeia.

O objetivo neste trabalho é comparar o desempenho destes dois métodos de simulação com respeito às características de eficiência, qualidade das estimativas e tempo computacional. Para realizar esta comparação foi realizada uma modificação do esquema de simulação de Chib, Nardari e Shephard (2002) para abordar modelos de fatores com log-variâncias dos fatores comuns correlacionadas.

1.1 Modelos multivariados para aplicação em finanças

Os modelos citados anteriormente, **APT**, Análise de Carteiras e **VaR** são a motivação para o estudo de modelos multivariados para aplicações em finanças:

¹outras referências que utilizam esta abordagem são Lopes e West (2000) com enfoque na inferência do número de fatores e Nardari e Scruggs (2003) com enfoque no teste do modelo **APT** e cálculo da verossimilhança.

- *Teoria de Precificação de Ativos (APT)*. Relaciona o retorno esperado de um ativo individual à covariância de retornos. A exposição simples de **APT** desenvolvida por Ross (1976) é dada em Campbell, Lo e McKinley (1997). Aplicações de **APT** utilizam uma versão paramétrica onde é suposto que os retornos aritméticos seguem um modelo de análise fatorial clássico (Bartholomew (1987)) para uma série q dimensional $y_t = \alpha + Bf_t + \varepsilon_t, (\varepsilon'_t, f'_t)' \sim N(0, D)$, D diagonal, B matriz de cargas e f_t k dimensional. **APT** diz que y_t representa melhor o mercado a medida que aumenta de dimensão considerando mais ativos e, nesse caso, $\alpha \simeq ir + B\lambda$ onde r é a taxa livre de risco, i vetor de uns, λ é o fator prêmio de risco associado aos fatores f_t (normalmente são tomados como as variâncias dos fatores). Geweke e Zhou (1996) e McCulloch e Rossi (1991) são trabalhos bayesianos importantes para testar as restrições impostas pela teoria. Infelizmente a menos que sejam usados dados de baixa frequência como retornos mensais, a suposição **NID** é rejeitada pelos dados que apresentam conglomerados de volatilidade estatisticamente significantes e caudas pesadas.
- *Alocação de Portfolio*. Considerando um investidor que busca alocar recursos entre ativos de forma ótima utilizando retornos aritméticos de período mensal por exemplo sendo $y_t \sim NID$. A solução clássica (Ingersoll (1987), cap.4) é delinear um portfolio que minimiza sua variância para um dado nível de retorno. Um trabalho bayesiano importante é encontrado em Quintana (1992). Para dados de alta frequência é preciso estender o argumento escrevendo $E(y_t|F_{t-1}) = a_t$ e $Var(y_t|F_{t-1}) = \Sigma_t$ onde F_t é a informação até o tempo de investimento.
- *Valor em Risco (VaR)*. **VaR** estuda o comportamento extremo de uma carteira de ativos (Frak, Hardle e Stahl (2000)). No caso mais simples o interesse está nas caudas da densidade de $w'y_t|F_{t-1}$ onde w é vetor de proporções de alocação de recursos.

1.2 Os dados

O modelo é estimado para um conjunto de dados de dez séries simuladas compondo um histórico de oitocentos retornos diários segundo as suposições do modelo - estrutura de fatores e componentes de volatilidade estocástica. Em seguida, o método MCMC com blocos é aplicado a um histórico de 934 retornos diários de dez taxas de câmbio, envolvendo moedas da Europa, Ásia e Américas do Sul e Central.

1.3 Estrutura da dissertação

No capítulo 2, são descritos o modelo de **VE** univariado, o modelo de fatores latentes com componentes de volatilidade estocástica (**MF-VE**) que é utilizado neste trabalho, as restrições necessárias para identificação deste modelo, seus componentes de **VE** e também as prioris utilizadas. No capítulo 3, é detalhado o procedimento de estimação do modelo, de acordo com os esquemas de simulação **MCMC** empregados em Aguilar e West (2000) e Chib, Nardari e Shephard (2002). No capítulo 4, utilizando séries simuladas, os ajustes do modelo realizados pelos dois métodos citados são testados e comparados. No capítulo 5, é estudado um conjunto de taxas de câmbio de acordo com o MF-VE e no capítulo 6 são apresentadas as considerações finais.

Capítulo 2

O Modelo de Fatores Latentes com Volatilidade Estocástica

Esse capítulo descreve o modelo de fatores com componentes de volatilidade estocástica (**MF-VE**) estudado no trabalho. Inicialmente é apresentado o modelo de **VE** univariado. Em seguida são discutidos o modelo de fatores, as restrições feitas à matriz de cargas devido ao problema de identificação e os componentes de **VE** utilizados no modelo. O capítulo é finalizado com a descrição das priors utilizadas no modelo.

2.1 O modelo de volatilidade estocástica univariado

Como alternativa aos modelos da família **ARCH** que modelam a variância (condicional) dos retornos como função dos quadrados dos retornos passados e de variâncias passadas, a classe de modelos de **VE** constrói um processo estocástico latente para a variância. Versões empíricas do modelo de **VE** são formuladas em tempo discreto. O modelo proposto por Taylor (1986) para uma variável univariada é

$$\begin{aligned} y_t &= e^{\frac{\lambda_t}{2}} \epsilon_t, \quad t \geq 1 \\ \lambda_t &= \mu + \phi(\lambda_{t-1} - \mu) + \sigma_\eta \eta \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\lambda_1 \sim N(\mu, \frac{\sigma_\eta^2}{1 - \phi^2}),$$

com y_t o retorno do ativo no tempo t corrigido pela média, λ_t a log-volatilidade no tempo t suposta seguir um processo estacionário ($|\phi| < 1$), λ_1 distribuído segundo a distribuição marginal e ϵ_t e η_t choques aleatórios não correlacionados cada um com distribuição normal padrão. A reparametrização $\exp(\mu/2)$ sobre a média μ é a volatilidade instantânea modal, ϕ é a persistência da volatilidade e σ_η a volatilidade da log-volatilidade. Esse modelo é usado como aproximação para o processo de difusão de **VE** em Hull e White (1987) e Chesney e Scott (1989). Suas propriedades econométricas básicas são discutidas por exemplo, em Taylor (1986, 1984), Shephard (1996), Ghysels, Harvey e Renault (1996) e Jacquier, Polson e Rossi (1994). Nesse trabalho, para denotar o modelo de volatilidade que segue um processo autorregressivo de ordem 1, será utilizado o termo **VE-AR(1)**. Temos a sua extensão vetorial (**VE-VAR(1)**) quando, em (2.1), λ e μ forem vetores $r \times 1$ e Σ_η e ϕ matrizes $r \times r$.

2.2 O modelo de fatores

Nesse trabalho a série de retornos y_t q -variada é modelada como

$$y_t = \theta_t + X_t f_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (2.2)$$

com média θ_t vetor $q \times 1$, relacionada linearmente pela matriz de cargas X_t $q \times k$ ($k < q$) a um vetor f_t $k \times 1$ de fatores ditos comuns e ε_t vetor de perturbações específicas $q \times 1$. Os fatores comuns f_t , condicionados à sua matriz de variâncias diagonal H_t são considerados realizações independentes de um processo latente:

$$f_t | H_t \sim N(0, H_t), \quad t = 1, \dots, T. \quad (2.3)$$

Da mesma forma os efeitos específicos ε_t condicionados à sua matriz de variâncias Ψ_t diagonal são considerados condicionalmente independentes e realizações de um processo latente:

$$\varepsilon_t | \Psi_t \sim N(0, \Psi_t), \quad t = 1, \dots, T, \quad (2.4)$$

sendo f_t e ε_s mutuamente independentes para quaisquer t e s . Com essas condições a estrutura de variâncias e covariâncias da série de retornos y_t quando condicionada a θ_t , X_t , H_t e Ψ_t é

$$\Sigma_t = X_t H_t X_t' + \Psi_t, \quad (2.5)$$

e temos

$$y_t | \theta_t, X_t, H_t, \Psi_t \sim N(\theta_t, \Sigma_t). \quad (2.6)$$

Note que as séries de retornos y_t quando também condicionadas fatores comuns f_t são condicionalmente independentes e gaussianas

$$y_t | \theta_t, X_t, f_t, \Psi_t \sim N(\theta_t + X_t f_t, \Psi_t), \quad (2.7)$$

com matriz de variâncias e covariâncias diagonal, logo os fatores comuns f_t explicam toda a estrutura de dependência entre as séries y_t . Nesse trabalho, é considerado o modelo com a matriz de cargas dos fatores X_t e a média θ_t como invariantes no tempo - X e θ , ao contrário de como é feito em Lopes (2000), onde os elementos irrestritos da matriz X_t e os elementos de θ_t variando no tempo são estimados como realizações de passeios aleatórios.

2.3 Identificação e restrições

Na forma em que é apresentado em (2.2) o modelo de fatores tem muitos parâmetros e não é identificável pelos dados (Aguilar 2000). A fim de obter uma decomposição única e determinada em (2.5) são impostas restrições à matriz X tais que esta matriz tenha posto completo, seja invariante com respeito a transformações lineares inversíveis nos fatores e tenha número de colunas k tal que o sistema dado pelas equações de (2.5) não seja indeterminado. Seguem as descrições para as três possíveis causas de indeterminação do modelo, as restrições necessárias e a solução que combina essas restrições.

2.3.1 Causas da indeterminação do modelo

O problema da indeterminação dos parâmetros acontece por exemplo, quando a matriz de cargas X não tem posto completo (Geweke e Singleton 1980). Isto

ocorre quando é ajustado um modelo com o número de fatores k em excesso. Para verificar a necessidade deste posto completo considere a simplificação $\Sigma = XX' + \Psi$ no caso em que $\text{posto}(X) = r$, $r < k$; então existe uma matriz Q de dimensões $k \times (k - r)$ tal que $XQ = 0$ e $Q'Q = I_{k-r}$. Tomando M uma matriz $q \times (k - r)$ tal que MM' seja diagonal, então temos

$$\begin{aligned} XX' + \Psi_t &= XX' + MM' + \Psi - MM' \\ &= (X + MQ')(X + MQ')' + \Psi_t - MM', \end{aligned}$$

e temos $\Sigma = \hat{X}\hat{X}' + \hat{\Psi}$ com $\hat{X} = (X + MQ')$ e $\hat{\Psi} = \Psi - MM'$; logo o modelo não é identificável. Dessa forma, X deve ser tal que satisfaça a equação (2.5) e que $\text{posto}(X) = k$ ou $\text{posto}(X'X) = k$.

Outra causa de indeterminação do modelo decorre da multiplicidade de soluções para a matriz X em (2.5) que é um problema bastante conhecido na análise fatorial clássica. Dada uma solução X para $\Sigma = XX' + \Psi$, tomando $L = XP$, para P matriz ortogonal qualquer, teremos $LL' = XX'$, ou seja, $\Sigma = LL' + \Psi$ e L também é solução para (2.5). Portanto são necessárias restrições ao modelo de tal forma que esta matriz seja única como solução de (2.5).

Após a consideração destas duas causas de indeterminação apresentadas é necessário considerar o número de parâmetros na matriz X de forma que o sistema de equações dados por (2.5) seja determinado. Assim, a matriz X deve ter o número de colunas k tal que o número de equações $q(q + 1)/2$ seja maior do que ou igual ao número de parâmetros em X , H_t e Ψ_t .

2.3.2 Estrutura hierárquica da matriz de cargas

Como solução para a necessidade das restrições de posto completo e invariância com respeito a transformações lineares nos fatores f_t é utilizada a forma hierárquica da matriz de cargas proposta em Geweke e Zhou (1996)

com as restrições $x_{ij} = 0$ para $i > j$ e $x_{ij} = 1$ para $i = j$:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_{2,1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_{3,1} & x_{3,2} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{k,1} & x_{k,2} & x_{k,3} & \cdots & 1 \\ x_{k+1,1} & x_{k+1,2} & x_{k+1,3} & \cdots & x_{k+1,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{q,1} & x_{q,2} & x_{q,3} & \cdots & x_{q,k} \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Com essas restrições a primeira serie y_1 será modelada por uma média θ_1 somada ao primeiro fator f_1 mais sua perturbação específica ε_1 , a segunda serie y_2 por uma média θ_2 somada a $x_{2,1}f_1 + f_2$ mais a sua perturbação específica ε_2 e assim sucessivamente. Segundo Aguilar e West (2000) e Lopes e West (2000) utilizando a forma hierárquica da matriz X, a ordem das q séries univariadas no vetor y_t é importante para interpretação dos valores de X estimados, influencia o ajuste do modelo e também a determinação do número de fatores k mas não interfere nas previsões feitas pelo modelo pois as variâncias e covariâncias entre as séries são independentes da ordem das séries univariadas escolhida para compor o vetor y_t .

Considerando o número de equações e incógnitas no sistema (2.5), k deve ser tal que o número de equações $q(q+1)/2$ seja maior que o número de incógnitas $qk + q - k(k-1)/2$. A tabela 2.1 mostra o número máximo de fatores que pode ser utilizado para o ajuste do modelo dado o número de séries de retornos y_t utilizadas tal que o modelo seja pelo menos determinado. Além da necessidade da identificação do modelo é desejável que o número de fatores k utilizado no modelo seja pequeno para se conseguir um modelo simples - por utilizar menos parâmetros em X, que explique as variâncias e covariâncias intertemporais da série de retornos.

q	k	q	k	q	k
2	0	8	4	13	8
3	1	9	5	14	9
4	1	10	6	15	10
5	2	11	6	20	14
6	3	12	7	50	31
7	3	13	8	100	86

Tabela 2.1: Número máximo de fatores (k) dado o número de séries (q) para identificação do modelo fatorial.

2.4 Componentes de volatilidade estocástica

O modelo de **VE** utilizado para os fatores comuns f_t e efeitos específicos ε_t neste trabalho é o modelo **VE-VAR(1)**. Nesse modelo o logaritmo neperiano das variâncias dos fatores e efeitos específicos - que são os termos da diagonal das matrizes H_t em (2.6) e Ψ_t em (2.7) respectivamente, é modelado por processos (vetoriais) autorregressivos estacionários de 1a ordem. O processo k -variado das log-volatilidades dos fatores comuns f_t é escrito fazendo $\lambda_{it}^f = \log h_{it}$, $i = 1, \dots, k$, com notação vetorial $\lambda_t^f = (\lambda_{1t}^f, \dots, \lambda_{kt}^f)'$. Ele é modelado na forma de processo autorregressivo vetorial como

$$\lambda_t^f = \mu^f + \Phi^f(\lambda_{t-1}^f - \mu^f) + \eta_t^f \quad (2.9)$$

com $\eta_t^f \sim N_k(0, \Sigma_\eta^f)$ $t=1,2,\dots$ independentes. λ_t^f é dito ter média $\mu^f = (\mu_1^f, \dots, \mu_k^f)'$, persistência $\Phi^f = \text{diag}(\phi_1^f, \dots, \phi_k^f)$ e matriz de variância das inovações Σ_η^f de dimensão $k \times k$. A matriz Σ_η^f deve ser cheia para permitir correlação entre as k inovações do processo no tempo t . Note que a distribuição condicional de $\lambda_t^f | \lambda_{t-1}^f, \mu^f, \phi^f, \Sigma_\eta^f$ é normal com média $\mu^f + \Phi^f(\lambda_{t-1}^f - \mu^f)$ e matriz de variâncias e covariâncias Σ_η^f e considerando o modelo autorregressivo vetorial de 1a. ordem a distribuição marginal de λ_t^f é normal com média μ^f e matriz de variâncias e covariâncias W^f tal que $W^f = \Phi^f W^f \Phi^f + \Sigma_\eta^f$.

Para as perturbações específicas fazendo $\lambda_{it}^\varepsilon = \log \psi_{it}$ - denotado na forma vetorial como $\lambda_t^\varepsilon = (\lambda_{1t}^\varepsilon, \dots, \lambda_{qt}^\varepsilon)'$, o processo q -variado de log-volatilidades dos efeitos específicos é escrito utilizando parâmetros média $\mu^\varepsilon = (\mu_1^\varepsilon, \dots, \mu_q^\varepsilon)'$

persistência $\Phi^\varepsilon = \text{diag}(\phi_1^\varepsilon, \dots, \phi_q^\varepsilon)$ e matriz de variâncias das inovações Σ_η^ε que neste processo é diagonal, ou seja $\Sigma_\eta^\varepsilon = \text{diag}(\sigma_{\eta,j}^2)$. Essa forma equivale a considerar q processos univariados mas para efeito de simplificação o processo terá notação vetorial e temos

$$\lambda_t^\varepsilon = \mu^\varepsilon + \phi^\varepsilon(\lambda_{t-1}^\varepsilon - \mu^\varepsilon) + \eta_t^\varepsilon \quad (2.10)$$

com $\eta_t^\varepsilon \sim N_q(0, \Sigma_\eta^\varepsilon)$ independentes. A distribuição condicional de $\lambda_t^\varepsilon | \lambda_{t-1}^\varepsilon, \mu^\varepsilon, \phi^\varepsilon, \Sigma_\eta^\varepsilon$ é $N(\mu^\varepsilon + \phi^\varepsilon(\lambda_{t-1}^\varepsilon - \mu^\varepsilon), \Sigma_\eta^\varepsilon)$ e dado o modelo autorregressivo de 1a. ordem a distribuição marginal para λ_t^ε é $N(\mu^\varepsilon, \text{diag}(\frac{\sigma_{\eta,j}^2}{1-\phi_j^2}))$.

2.5 Prioris

Para a análise bayesiana completamos a especificação do **MF-VE** tomando prioris independentes para o conjunto de parâmetros $\{\theta, X, \Phi^f, \Sigma_\eta^f, \mu^f, \Phi^\varepsilon, \Sigma_\eta^\varepsilon, \mu^\varepsilon\}$ i.e., proporcional ao produto das prioris

$$p(\theta) p(X) p(\Phi^f) p(\Sigma_\eta^f) p(\mu^f) p(\Phi^\varepsilon) p(\Sigma_\eta^\varepsilon) p(\mu^\varepsilon)$$

que são tomadas como difusas - veja tabela (2.2). Uma referência razoável sobre os valores nos quais as distribuições de θ, X, μ^f e μ^ε devem ser centradas é dada por uma aproximação fatorial utilizada em Aguilar e West (2000) aplicada a um trecho inicial dos dados - veja apêndice B. Para o restante dos parâmetros são tomadas prioris conjugadas encontradas na literatura.

Prioris para θ e X

Para os elementos univariados do parâmetro θ são utilizadas prioris normais centradas em zero (retornos de séries financeiras têm esperança próxima de zero) e com variâncias iguais a 10. A matriz X , em cada linha i para $i = 1, \dots, q$, representa a relação linear entre a série $y_{i,t}$ e os fatores $f_{i,t}$, $i = 1, \dots, k$ extraída a fonte de variância específica $\varepsilon_{i,t}$, logo depende da estrutura de covariância entre as séries não podendo ser definida a priori sem uma consulta aos dados. Nesse trabalho utilizamos para as entradas univariadas de X prioris normais independentes com médias os valores de X dados pela

Parâmetro	Priori	Média	Desvio Padrão
θ	$N(\hat{\theta}; 25)$	$\hat{\theta}$	5
X	$N(\hat{x}_{i,j}; 25)$	$\hat{x}_{i,j}$	5
μ^f e μ^ε	$N(\hat{\mu}; 25)$	$\hat{\mu}$	5
ϕ^f e ϕ^ε	$Beta(21; 1, 5)$	0,86	0,11
$\sigma_{\eta,i}^\varepsilon$	$IGamma(2, 4; 0, 35)$	0,25	0,40
Σ_η^f	$IWishart(6; 0, 10 \times I)$	0,20*	0,28*

Tabela 2.2: Prioris utilizadas para os parâmetros do **MF-VE**. $\hat{x}$ denota estimativa dada pela aproximação fatorial. Para Σ_η^f valores * se referem aos elementos da diagonal da matriz considerando que sua dimensão é 2×2 .

aproximação fatorial, e desvios padrões iguais ao máximo entre 5 e o valor absoluto destas estimativas.

Prioris para μ^f e μ^ε

Prioris para os níveis de log-variâncias μ^f e μ^ε dos processos de **VE** são determinadas como distribuições normais centradas nas estimativas dadas pelo ajuste de modelos auto-regressivos às log-variâncias dadas pela aproximação fatorial e desvio padrão igual a 5.

Prioris para ϕ^f e ϕ^ε

Os elementos univariados de ϕ^f e ϕ^ε têm distribuições a priori transformadas da distribuição Beta fazendo $\phi = 2\phi^* - 1$ para $\phi^* \sim Beta(a, b)$. Dada a propriedade de alta persistência na volatilidade de séries financeiras são tomados parâmetros desta distribuição Beta tais que a média e o desvio padrão sejam 0,86 e 0,11 respectivamente - veja tabela 2.2.

Prioris para Σ_η^f e σ_η^ε

As variâncias das inovações $\sigma_{\eta,i}^\varepsilon$ nos processos de **VE-AR(1)** dos efeitos específicos utilizadas são distribuições inversas de Gamma com parâmetros r_γ e λ_γ tais que a média e o desvio padrão da distribuição sejam 0,25 e 0,4

respectivamente. A matriz de variâncias das inovações do processo de **VE-VAR(1)** dos fatores comuns é considerada a priori uma inversa de Wishart com parâmetro de grau de liberdade $r = 6$ (para ser difusa) e matriz de escala $R = 0,10 \times I$.

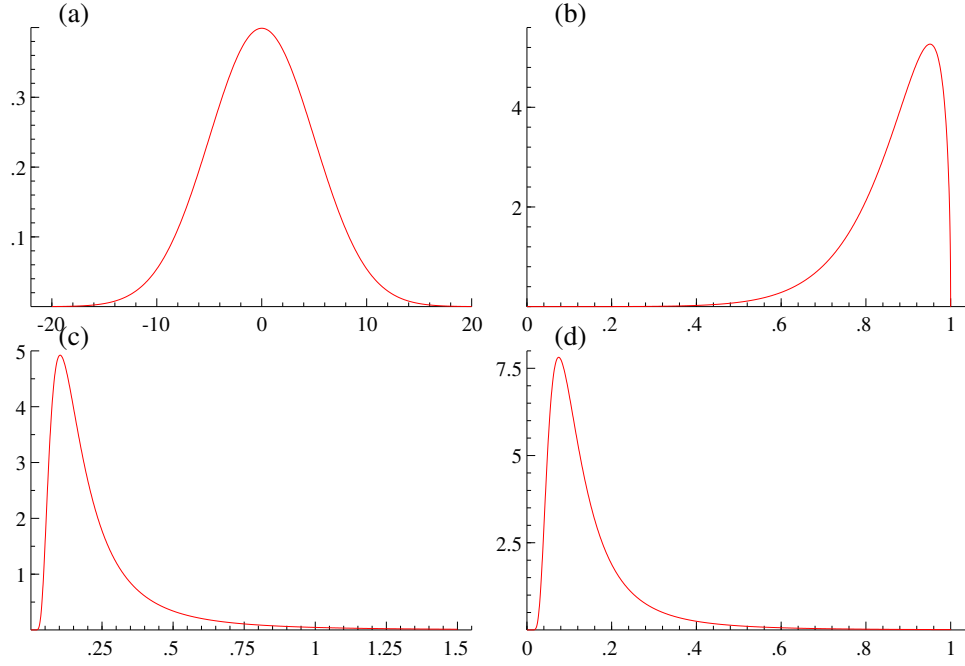


Figura 2.1: Distribuições a priori para os parâmetros do MF-VE: (a) Normais para os elementos univariados de X , θ e μ fazendo ser centradas em zero; (b) transformadas de Beta para os elementos univariados de ϕ^f e ϕ^ϵ ; (c) Inversa de Gamma para as variâncias $\sigma_i^{\epsilon 2}$, $i = 1, \dots, q$ e (d) Inversa de Wishart para as posições dos elementos da diagonal de Σ_η^f .

Capítulo 3

Estimação: Análise Bayesiana e Simulação MCMC

Esse capítulo trata as formas de estimação do **MF-VE** analisadas neste trabalho. Uma introdução discute o uso de inferência bayesiana e simulação **MCMC** para esse modelo e indica referências. Em seguida, duas seções detalham os esquemas de simulação comparados neste trabalho, analisando seus algoritmos.

3.1 Modelo e notação

Do capítulo anterior temos que o modelo a ser utilizado neste trabalho é dado pelas equações

$$y_t = \theta + Xf_t + \varepsilon_t, \quad (3.1)$$

para o modelo de fatores das séries de retornos y_t , $t = 1, \dots, T$,

$$f_t | H_t \sim N(0, H_t) \quad (3.2)$$

$$\lambda_t^f = \mu^f + \Phi^f(\lambda_{t-1}^f - \mu^f) + \eta_t^f \quad (3.3)$$

para os fatores comuns f_t e suas log-variâncias λ_t^f , $t = 1, \dots, T$ e

$$\varepsilon_t | \Psi_t \sim N(0, \Psi_t) \quad (3.4)$$

$$\lambda_t^\varepsilon = \mu^\varepsilon + \phi^\varepsilon(\lambda_{t-1}^\varepsilon - \mu^\varepsilon) + \eta_t^\varepsilon \quad (3.5)$$

para os erros específicos ε_t e suas log-variâncias λ_t^ε , $t = 1, \dots, T$.

Para simplificar a notação utilizamos para as variáveis indexadas em t para $t = 1, \dots, T$ sua forma sem índice, isto é $y = (y_1, \dots, y_T)$, $f = (f_1, \dots, f_T)$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_T)$, $\lambda^f = (\lambda_1^f, \dots, \lambda_T^f)$ e $\lambda_i^\varepsilon = (\lambda_{i,1}^\varepsilon, \dots, \lambda_{i,T}^\varepsilon)$ para $i = 1, \dots, q$ - veja tabela 3.1. Para os processos de **VE** temos cada terna de parâmetros representada por Γ . Isto significa que para o processo de **VE-VAR(1)** dos fatores comuns temos $\Gamma^f = (\phi^f, \Sigma_\eta^f, \mu^f)$, e para os processos de volatilidade dos efeitos específicos temos $\Gamma^\varepsilon = (\phi^\varepsilon, \Sigma_\eta^\varepsilon, \mu^\varepsilon)$ quando considerados um processo **VE-VAR(1)** e $\Gamma_i^\varepsilon = (\phi_i^\varepsilon, \sigma_{\eta i}^\varepsilon, \mu_i^\varepsilon)$ quando tratados como q processos de **VE-AR(1)** isoladamente. Para o conjunto de todos os parâmetros do modelo será utilizado $\Upsilon = (\theta, X, \Gamma^f, \Gamma^\varepsilon)$ que, agregado às variáveis latentes e processos de **VE** resulta na extensão $\Upsilon^A = (\Upsilon, f, \varepsilon, \lambda^f, \lambda^\varepsilon)$. Também será utilizado $A \setminus B$ como referência a todos os elementos de um conjunto A exceto B . As tabelas 3.1 e 3.2 dispõem uma referência de consulta para essas notações.

Notação	Variáveis	Descrição
y	$(y_1, \dots, y_T)$	série multivariada y_t
f	$(f_1, \dots, f_T)$	fatores latentes f_t
ε	$(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_T)$	efeitos específicos ε_t
H	$(H_1, \dots, H_T)$	matrizes (diagonais) de variâncias dos fatores f_t
λ^f	$(\lambda_1^f, \dots, \lambda_T^f)$	log-variâncias dos fatores λ_t^f
Ψ	$(\Psi_1, \dots, \Psi_T)$	matrizes (diagonais) de variâncias dos efeitos específicos ε_t
λ_i^ε	$(\lambda_{i,1}^\varepsilon, \dots, \lambda_{i,T}^\varepsilon)$	log-variâncias dos efeitos específicos λ_t^f

Tabela 3.1: Tabela de referência da notação utilizada para variáveis relacionadas ao **MF-VE** - variáveis em $t = 1, \dots, T$.

Notação	Variáveis	Descrição
Γ^f	$(\phi^f, \Sigma_\eta^f, \mu^f)$	terna de parâmetros do processo de VE-VAR(1) dos fatores latentes
Γ_i^ε	$(\phi_i^\varepsilon, \sigma_{\eta i}^\varepsilon, \mu_i^\varepsilon)$	terna de parâmetros de cada processo de VE-AR(1) dos efeitos específicos $i = 1, \dots, q$
Γ^ε	$(\phi^\varepsilon, \Sigma_\eta^\varepsilon, \mu^\varepsilon)$	terna de parâmetros do processo de VE-VAR(1) dos efeitos específicos quando tratado como processo vetorial
Υ	$(\theta, X, \Gamma^f, \Gamma^\varepsilon)$	parâmetros do MF-VE
Υ^A	$(\Upsilon, f, \lambda^f, \lambda^\varepsilon)$	parâmetros e variáveis latentes do MF-VE

Tabela 3.2: Tabela de referência da notação utilizada para variáveis relacionadas ao **MF-VE** - parâmetros e variáveis latentes.

3.2 Inferência Bayesiana

A função de verossimilhança do **MF-VE** marginalizada sobre os parâmetros Υ do modelo é definida por uma integral $2 \times k \times q \times T$ -dimensional

$$l(\Upsilon) \propto \int \int \int p(Y|\theta, X, f, \lambda^\varepsilon) p(f|\lambda^f) p(\lambda^f|\Gamma^f) p(\lambda^\varepsilon|\Gamma^\varepsilon) df d\lambda^f d\lambda^\varepsilon, \quad (3.6)$$

estrutura que torna difícil qualquer procedimento de maximização com respeito aos parâmetros Υ . Na análise bayesiana os modelos são tratados como estruturas hierárquicas de distribuições condicionais. Essa hierarquia para o **MF-VE** é dada pela distribuição dos dados condicionados aos parâmetros e variáveis latentes - $p(Y|\theta, X, f, \Psi)$; pelas distribuições das variáveis latentes condicionadas aos parâmetros - $p(f|\lambda^f)$, $p(\lambda^f|\Gamma^f)$ e $p(\lambda^\varepsilon|\Gamma^\varepsilon)$; e pelas marginais ou distribuições a priori dos parâmetros em Υ - $p(\theta)$, $p(X)$, $p(\Gamma^f)$ e $p(\Gamma^\varepsilon)$. Essas distribuições condicionais são obtidas a partir do produto em t das distribuições condicionais de (3.1) a (3.5) e as prioris são dadas - ver seção 2.4. A distribuição conjunta das variáveis latentes e parâmetros condicionados aos dados é proporcional ao produto destes 3 grupos de distribuições. Dada pelo teorema de Bayes esta distribuição $p(\Upsilon, f, \lambda^f, \lambda^\varepsilon | y)$ é proporcional a

$$p(Y | \theta, X, f, \Psi) p(\theta) p(X) p(f|H) p(H|\Gamma^f) p(\Gamma^f) p(\Psi|\Gamma^\varepsilon) p(\Gamma^\varepsilon). \quad (3.7)$$

Dessa distribuição conjunta a marginal $p(\Upsilon|y)$ é utilizada para fazer inferência sobre os parâmetros do modelo, as marginais $p(\lambda^f|y)$ e $p(\lambda^\varepsilon|y)$ para conhecer o processo das log-variâncias suavizado e a marginal $p(f|y)$ para conhecer os fatores latentes às séries y_t . Para computar essas distribuições marginais são tomadas amostras da distribuição $p(\Upsilon, f, \lambda^f, \lambda^\varepsilon|y)$ que é a distribuição invariante da cadeia de Markov construída pelo **MCMC**. Essa distribuição quando quebrada em distribuições condicionais facilita a construção desta cadeia e é uma implementação do amostrador de Gibbs - veja apêndice A para uma introdução ao método. A partir da convergência das simulações para a distribuição invariante $p(\Upsilon, f, \lambda^f, \lambda^\varepsilon|y)$ valores da cadeia tomados periodicamente - para extrair a autocorrelação, podem ser tratados como realizações independentes desta distribuição conjunta - o que é uma forma de fazer integração de Monte Carlo. Considerando a simulação e a inferência na amostra extraída da cadeia o método é uma aplicação da simulação **MCMC**.

Consideramos neste trabalho duas variantes do método de simulação **MCMC** para estimação do **MF-VE**. A primeira é o esquema **MCMC** adotado em Aguilar e West (2000) e Pitt e Shephard (1999) nos quais a distribuição (3.7) proporcional à conjunta a posteriori é quebrada em distribuições condicionais de cada parâmetro. Nesse trabalho esse esquema de simulação chamado de simulação sem considerar blocos é detalhado na seção 3.3.

A outra forma de simulação **MCMC** é discutida na 3.4 e é desenvolvida em Chib, Nardari e Shephard (2002) utilizando de métodos previamente desenvolvidos em Chib, Nardari e Shephard (2001) e Chib e Greenberg (1995). Nessa aplicação da simulação **MCMC** as distribuições condicionais que compõem (3.7) são distribuições conjuntas de parâmetros e variáveis latentes correlacionados ou participantes da mesma estrutura internamente ao **MF-VE**. Simulando destas distribuições conjuntas o processo de simulação produz uma cadeia **MCMC** com autocorrelação menor aumentando a eficiência da simulação.

3.3 Análise MCMC sem blocos

Da forma como utilizado em Aguilar e West (2000) e Pitt e Shephard (1999) o amostrador de Gibbs para o **MF-VE** (2.5)-(2.11) gera amostras dos parâmetros Υ e variáveis latentes sequencialmente a partir do conjunto de suas distribuições condicionais da forma como é descrita a seguir. De uma forma geral, essas amostras neste algoritmo são obtidas por passos de simulação da distribuição condicional (amostragem direta), passos de simulação utilizando o algoritmo de Metropolis-Hastings (**MH**) para dadas distribuições proposta e objetiva e também por passos de simulação utilizando o simulador-suavizador de de Jong e Shephard (1995) (**SSMO**) para as sequências de log-variâncias - veja apêndice B para introdução ao método. O algoritmo é resumido como segue.

Algoritmo 1. Esquema MCMC sem considerar blocos¹

1. Inicializa f , ε , λ^f , λ^ε , w e Υ
2. amostra θ (direta da distribuição normal)
3. amostra X (direta da distribuição normal)
4. amostra f_t , $t=1, \dots, T$. (direta da distribuição normal)
5. Para o processo de **VE-VAR(1)** dos fatores comuns
 - (a) amostra ϕ^f (**MH** proposta normal)
 - (b) amostra Σ_η^f (**MH** proposta inversa de Wishart)
 - (c) amostra μ^f (direta da distribuição normal)
 - (d) amostra w_t^f , $t=1, \dots, T$. (direta da distribuição multinomial)
 - (e) amostra λ^f (**SSMO**)
6. Para cada processo de **VE-AR(1)** dos fatores idiossincráticos ($i = 1, \dots, q$)

¹No esquema do algoritmo a quantidade w é uma variável indicadora utilizada no método de aproximação por misturas para simulação das log-variâncias e será definida na seção 3.2.1 passos (5d-e) de simulação das log-variâncias.

- (a) amostra ϕ_i^ε (**MH** proposta normal)
- (b) amostra $\sigma_{\eta_i}^\varepsilon$ (direta da distribuição inversa de Gamma)
- (c) amostra μ_i^ε (direta da distribuição normal)
- (d) amostra w_{ti}^ε , $t=1, \dots, T$. (direta da distribuição multinomial)
- (e) amostra λ_i^ε (**SSMO**)

7. vá para 2.

Passos do algoritmo

Essa subseção detalha os passos do Algoritmo 1 sequencialmente na ordem apresentada no esquema do algoritmo.

Passo (1) valores iniciais para Υ^A .

Os valores iniciais utilizados para os parâmetros e variáveis latentes são dados pela aplicação da aproximação fatorial - veja apêndice, aplicadas a todo o conjunto de dados, exceto os coeficientes auto-regressivos que são inicializados em 0,97 e as variâncias das inovações em 0,04 como sugerido em Kim, Shephard e Chibb (1998).

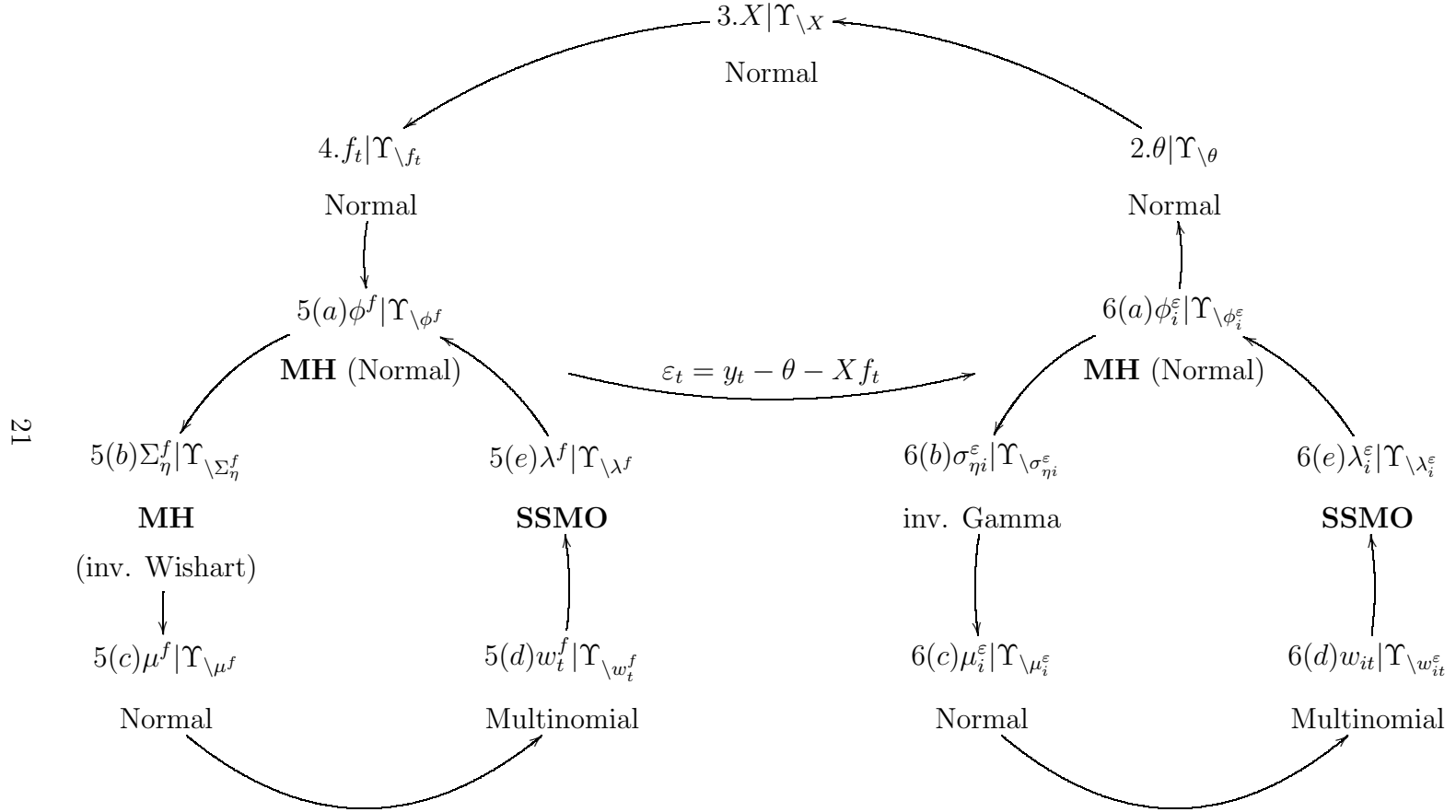


Figura 3.1: Amostrador de Gibbs para a análise MCMC sem blocos.

Passo (2) amostra de $\theta|\Upsilon_{\theta}^A$.

Utilizando na distribuição conjunta 3.7 condicionada a Υ_{θ}^A o modelo para Y como $p(Y|\Upsilon_{\theta})$, i.e. escrevendo as equações de Y como $Y_t - Xf_t = \theta + \varepsilon_t$ com $\varepsilon_t \sim N(0, \Psi_t)$ e considerando a priori conjugada $p(\theta) \sim N(m_0, M_0)$ temos a distribuição condicional a posteriori $p(\theta|\Upsilon_{\theta}^A, Y) \sim N(m, M)$ com

$$M = \left(\sum_{t=1}^T \Psi_t^{-1} + M_0^{-1} \right)^{-1} \quad e \quad m = M \left(\sum_{t=1}^T \Psi_t^{-1} (y_t - Xf_t) + M_0^{-1} m_0 \right),$$

da qual θ é amostrada diretamente.

Passo (3) amostra de $f_t|\Upsilon_{f_t}^A, t = 1, \dots, T$.

A partir das distribuições 3.1 e 3.3 a distribuição conjunta de f_t e $Y_t - \theta$ é

$$\begin{bmatrix} f_t|\theta, X, H_t, \Psi_t \\ Y_t - \theta|\theta, X, H_t, \Psi_t \end{bmatrix} \sim N \left(0, \begin{bmatrix} H_t & H_t X' \\ X H_t & X H_t X' + \Psi_t \end{bmatrix} \right)$$

o que leva á distribuição condicional de $f_t|Y_t - \theta$

$$f_t|Y_t - \theta \sim N \left(H_t X' Q_t^{-1} (Y_t - \theta), H_t - H_t X' Q_t^{-1} X H_t \right)$$

para $Q_t = X H_t X' + \Psi_t$, da qual os fatores f_t são amostrados de forma independente $t=1, \dots, T$.

Passo (4) amostra de $X|\Upsilon_X^A$.

A simulação da matriz de cargas fatoriais segue o problema bayesiano de estimação de coeficientes de regressão. Condicionada em Υ_X^A a distribuição condicional a posteriori de X é produto das distribuições k dimensionais conjuntas dos seus elementos de cada linha, o que significa que os vetores formados por essas linhas, condicionados em Υ_X^A são independentes e podem ser amostrados de forma independente. Utilizamos a distribuição

$$p(Y_t - \theta|X, f_t, \Psi_t) \sim N(Xf_t, \Psi_t)$$

para construir a função de verossimilhança

$$\begin{aligned}
p(y_1 - \theta, \dots, y_T - \theta) &\propto \prod_{t=1}^T N(Y_t - \theta | X f_t, \Psi_t) \\
&\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (Y_t - \theta - X f_t)' \Psi_t^{-1} (Y_t - \theta - X f_t) \right\} \\
&\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (X f_t)' \Psi_t^{-1} (X f_t) - 2 (X f_t)' \Psi_t^{-1} (Y_t - \theta), \right\}
\end{aligned}$$

e como Ψ_t é diagonal e utilizando o índice l para as linhas de X ($l = 2, \dots, q$) temos

$$\propto \prod_{l=2}^q \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (x_l f_t)' \psi_{lt}^{-1} (x_l f_t) - 2 (x_l f_t)' \psi_{lt}^{-1} (Y_{lt} - \theta_l) \right\},$$

para x_l a l -ésima linha da matriz X . Com uma priori $p(x_l) \sim N(m_0, M_0)$ a l -ésima linha de X tem distribuição a posteriori x_l com o $p(x_l' | \Upsilon_{x_l}^A) \sim N(m_l, M_l)$ sendo

$$M_l = \left(\sum_{t=1}^T f_t \psi_{lt}^{-1} f_t' + M_0^{-1} \right)^{-1} \quad e \quad m_l = M_l \left(\sum_{t=1}^T f_t \psi_{lt}^{-1} (Y_t - \theta) + M_0^{-1} m_0 \right)$$

da qual o vetor linha x_l é amostrado diretamente. Para $2 \leq l \leq k$ temos x_l amostrado em suas posições de 1 a $l - 1$ condicionado à restrição feita nas posições restantes, isto é $[x_{l,l}, \dots, x_{l,k}] = [1, 0, \dots, 0]$.

Passo (5a) amostra dos coeficientes auto-regressivos $\phi^f | \Upsilon_{\phi^f}^A$

A partir da distribuição conjunta 3.7 condicionada a $\Upsilon_{\phi^f}^A$ e utilizando $p(H | \Gamma^f) = p(\lambda^f | \Gamma^f)$ como produto da distribuição marginal $\gamma_1 \sim N(0, W)$ e condicionais $\gamma_t | \gamma_{t-1}, \mu^f, \Sigma^f \sim N(\phi^f \gamma_{t-1}, \Sigma_{\eta}^f)$ para $t = 2, \dots, T$, com $\gamma_t = \lambda_t^f - \mu^f$ e $W = \phi^f W \phi^f + \Sigma_{\eta}^f$, e também utilizando a priori $p(\phi^f)$ como um produto de prioris transformadas de beta com parâmetros a_i e b_i para $i = 1, \dots, k$ independentes, a distribuição condicional a posteriori para ϕ^f é da forma

$$p(\phi^f | \Upsilon_{\phi^f}^A) \propto c(\phi^f) N(\phi^f | b, B),$$

com

$$c(\phi^f) = \prod_{i=1}^k [\phi_i^{a_i-1} (1 - \phi_i)^{b_i-1}] |W|^{-\frac{1}{2}} \exp(-tr(\gamma_1 \gamma_1' W^{-1})/2)$$

$$B = \left(\sum_{t=2}^T \text{diag}(\gamma_{t-1}) \Sigma_\eta^{f-1} \text{diag}(\gamma_{t-1}) \right)^{-1} \text{ e } b = B \left(\sum_{t=2}^T \text{diag}(\gamma_{t-1}) \Sigma_\eta^{f-1} \gamma_t \right).$$

Dessa forma ϕ^f é amostrado pelo algoritmo de **MH** utilizando a distribuição $N(b, B)$ acima como distribuição proposta. Dado $\phi^{f^{cadeia}}$ - o valor corrente para ϕ^f , temos o valor candidato ϕ^{f*} amostrado de $N(b, B)$ truncada em $(-1, 1)$ e aceito com probabilidade $\min\{1, \frac{c(\phi^{f*})}{c(\phi^{f^{cadeia}})}\}$.

Passo (5b) amostra da matriz de inovações $\Sigma_\eta^f | \Upsilon_{\setminus \Sigma_\eta^f}$

A partir da distribuição conjunta 3.7 condicionada a $\Upsilon_{\setminus \Sigma_\eta^f}^A$ utilizando $p(H|\Gamma^f)$ como em (5a) e uma inversa de Wishart - $W^{-1}(r_0, R_0)$, como distribuição a priori para Σ_η^f , temos que a distribuição a posteriori condicional para Σ_η^f é da forma

$$p(\Sigma_\eta^f | \Upsilon_{\setminus \Sigma_\eta^f}) \propto a(\Sigma_\eta^f) W_k^{-1}(r, R)$$

com $r = r_0 + T - 1$ e

$$a(\Sigma_\eta^f) = |W|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} tr(\gamma_1 \gamma_1' W^{-1})\right)$$

$$R = \left(r_0 R_0 + \sum_{t=2}^T (\gamma_t - \Phi^f \gamma_{t-1})(\gamma_t - \Phi^f \gamma_{t-1})' \right) / r$$

com $W = \phi^f W \phi^f + \Sigma_\eta^f$. Σ_η^f é amostrado utilizando o algoritmo de **MH** sendo $W^{-1}(r, R)$ a distribuição proposta. Dado $\Sigma_\eta^{f^{cadeia}}$ - o valor corrente da cadeia para Σ_η^f , o valor candidato Σ_η^{f*} é gerado da proposta Wishart Inversa $W^{-1}(r, R)$ e aceito com probabilidade $\min\{1, \frac{a(\Sigma_\eta^{f*})}{a(\Sigma_\eta^{f^{cadeia}})}\}$ com $W^* = \phi W^* \phi + \Sigma_\eta^{f*}$.

Passo (5c) amostra da média da log-volatilidade $\mu^f | \Upsilon_{\mu^f}^A$

O modelo $p(\mu^f | \Upsilon_{\mu^f}^A)$ é dado pela distribuição conjunta 3.7, com $p(H | \Gamma^f)$ como produto das distribuições marginal para λ_1^f e condicionais para $\lambda_t^f | \lambda_{t-1}^f, t = 2, \dots, T$, e uma distribuição a priori conjugada $p(\mu^f) \sim N(m_0, M_0)$. μ^f é amostrado diretamente da sua distribuição a posteriori condicional $p(\mu^f | \Upsilon_{\mu^f}^A) \sim N(m, M)$ com

$$\begin{aligned} M &= \left(W^{-1} + (T-1)(I - \Phi^f) \Sigma_\eta^{-1} (I - \Phi^f) + M_0^{-1} \right)^{-1} e \\ m &= M \left(W^{-1} \lambda_1 + (I - \Phi^f) \Sigma_\eta^{f-1} \sum_{t=2}^T (\lambda_t - \Phi^f \lambda_{t-1}) + M_0^{-1} m_0 \right). \end{aligned}$$

Passo (5d-e) amostra das seqüências de log-variâncias $\lambda^f | \Upsilon_{\lambda^f}^A$ e **da mistura de normais** $w^f | \Upsilon_{w^f}^A$

As observações transformadas $\log(f_t^2)$ de (2.6) são usadas para construir um modelo de espaços de estados linear formando a equação de observação juntamente com o modelo auto-regressivo para as log-variâncias como equação de estados

$$\log(f_t^2) = \lambda_t^f + \log(\epsilon_t^2) \quad (3.8)$$

$$\lambda_{t+1}^f = (I - \Phi^f) \mu^f + \Phi^f \lambda_t^f + \eta_t \quad (3.9)$$

com $\epsilon_t \sim N(0, I)$ e $\eta_t \sim N(0, \Sigma_\eta^f)$. Trabalhando com transformações logarítmicas surge o problema de lidar com observações que são zero - ou muito próximas de zero, o que é bastante problemático para o uso de algoritmos de filtragem e suavização nos quais as estimativas dos estados são médias harmônicas de valores de estados vizinhos. Uma solução para o problema é a transformação sugerida por Fuller (1996)

$$\log(y_t^2) = \log(y_t^2 + cs_y^2) - \frac{cs_y^2}{y_t^2 + cs_y^2} \quad (3.10)$$

com $c = 0.02$ e s_y^2 a variância amostral dos y_t' s, cujo efeito é reduzir a curtose das observações transformadas excluindo a cauda longa de valores negativos

resultado do logaritmo dos inliers. O problema da não normalidade dos erros da equação de observação $\log(\epsilon_t^2)$ é resolvido em Kim, Shephard e Chib (1998) com o uso de uma mistura de distribuições normais. Utilizando a mistura de 7 componentes - veja tabela (3.3) a figura 3.2, o modelo de espaços de estados se torna condicionalmente gaussiano viabilizando o emprego de algoritmos para modelos gaussianos como o Filtro de Kalman, o suavizador-simulador de deJong e Shephard e o **FFBS** de West e Harrisson.

ω	$q_i = P(\omega = i)$	m_i	v_i
1	0,00730	-10,12999	5,79596
2	0,10556	-3,97281	2,61369
3	0,00002	-8,56686	5,17950
4	0,04395	2,77786	0,16735
5	0,34001	0,61942	0,64009
6	0,24566	1,79518	0,34023
7	0,25750	-1,08819	1,26261

Tabela 3.3: Componentes da mistura de normais para $\log\chi_{(1)}^2$

As amostras das variáveis indicadoras da mistura de normais w_t^f conforme mencionado seguem uma distribuição multinomial condicional

$$P(w_t^f = i | f_t, \lambda_t^f) \propto q_i f_N(f_t | \lambda_t^f + m_i - 1, 2704, v_i^2) \quad (3.11)$$

com q_i , m_i , v_i^2 as quantidades dadas pela aproximação por misturas. Em seguida as seqüências de log-variâncias são amostradas segundo o algoritmo **SSMO**.

Passo (6a) amostra de $\phi^\varepsilon | \Upsilon_{\phi^\varepsilon}^A$

Os q elementos de ϕ^ε , $\phi_i^\varepsilon, i = 1, \dots, q$ são amostrados de forma independente. Fazendo $\delta_{t,i} = \lambda_{t,i}^\varepsilon - \mu_i^\varepsilon, t = 1, \dots, T$ a distribuição condicional a posteriori de $\phi_i^\varepsilon | \Upsilon_{\phi_i^\varepsilon}^A$ utiliza de (3.7) com $p(\Psi | \Gamma^\varepsilon)$ como produto da distribuição marginal para $\delta_{i,1} \sim N(0, \frac{\sigma_{\eta,i}^\varepsilon}{(1-\phi_i^\varepsilon)^2})$ e das distribuições condicionais de

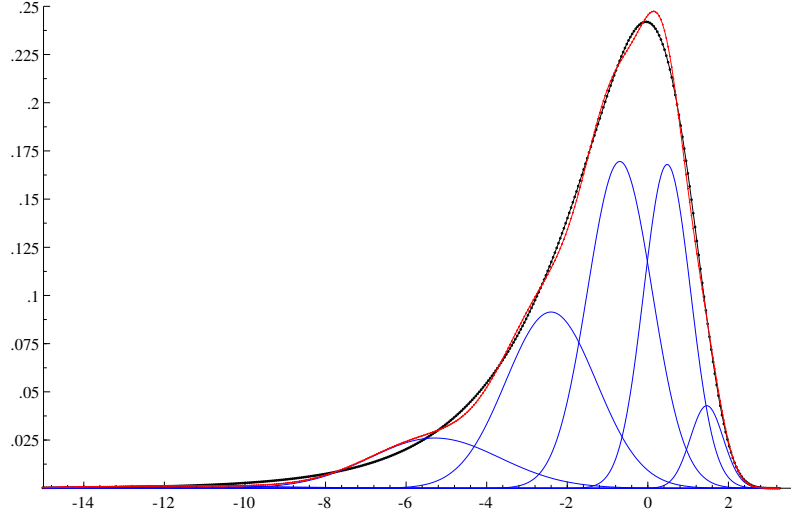


Figura 3.2: Distribuição $\log\chi_{(1)}^2$ e a aproximação por mistura de normais de Kim, Shephard e Chib (1998).

$\delta_{i,t}|\delta_{i,t-1} \sim N(\phi_i^\varepsilon \delta_{i,t-1}, \sigma_{\eta,i}^{\varepsilon^2}), t = 2, \dots, T$ e a priori $p(\phi_i^\varepsilon)$ como uma distribuição transformada de uma $beta(\phi_i^\varepsilon|a_i, b_i)$ - veja seção (2.4). A distribuição condicional a posteriori de ϕ_i^ε é da forma

$$p(\phi_i^\varepsilon | \Upsilon_{\setminus \phi_i^\varepsilon}^A) \propto N(b, B) c(\phi_i^\varepsilon)$$

com

$$c(\phi_i^\varepsilon) = (1 - \phi_i^{\varepsilon^2})^{\frac{1}{2}} \phi_i^{\varepsilon a_i} (1 - \phi_i^\varepsilon)^{1-b_i}$$

$$B = \left(\frac{\sum_{t=3}^T \delta_{i,t-1}^2}{\sigma_{\eta,i}^{\varepsilon^2}} \right)^{-1} \quad e \quad b = B \left(\frac{\sum_{t=2}^T \delta_{i,t} \delta_{i,t-1}}{\sigma_{\eta,i}^{\varepsilon^2}} \right).$$

ϕ^ε é amostrado utilizando o algoritmo de **MH** com distribuição proposta $N(b, B)$ acima, dado $\phi^{\varepsilon^{cadeia}}$ o valor corrente, ϕ^{ε^*} é amostrado da distribuição $N(b, B)$ truncada em $(-1, 1)$ e aceito com probabilidade igual a $\min\{1, \frac{c(\phi^{\varepsilon^*})}{c(\phi^{\varepsilon^{cadeia}})}\}$.

Passo (6b) amostra de $\Sigma_\eta^\varepsilon | \Upsilon_{\setminus \Sigma_\eta^\varepsilon}^A$

A partir da distribuição conjunta 3.7 utilizando $p(\Psi | \Gamma^\varepsilon)$ como em (6a) e da priori conjugada, uma distribuição inversa de Gamma $IG(\sigma_{\eta,i}^\varepsilon | r_{0,i}, \alpha_{0,i})$ - ver seção (2.4), temos que a distribuição a posteriori para $\sigma_{\eta,i}^{\varepsilon^2}$ é também da forma de uma inversa de Gamma - $p(\sigma_{\eta,i}^{\varepsilon^2} | \Upsilon_{\setminus \Sigma_\eta^\varepsilon}^A) \propto IG(\sigma_{\eta,i}^{\varepsilon^2} | r_i, \alpha_i)$, com $r_i = r_{0,i} + \frac{T}{2}$ e

$$\alpha_i = \alpha_{0,i} + \left(\frac{(1 - \phi_i^{\varepsilon^2})\delta_{1,i}^2}{2} + \sum_{t=2}^T \frac{(\delta_{t,i} - \phi_i^\varepsilon \delta_{t-1,i})^2}{2} \right)$$

da qual $\sigma_{\eta,i}^{\varepsilon^2}$ são amostrados direta e independentemente $i=1, \dots, q$.

Passo (6c) amostra de $\mu^\varepsilon | \Upsilon_{\setminus \mu^\varepsilon}^A$

A distribuição $p(\mu_i^\varepsilon | \Upsilon_{\setminus \mu^\varepsilon}^A)$ é dada pela distribuição conjunta (3.7) utilizando $p(\Psi | \Gamma^\varepsilon)$ como produto da distribuição marginal $\lambda_{i,1} \sim N(\mu, \frac{\sigma_{\eta,i}^\varepsilon}{(1-\phi_i^{\varepsilon^2})})$ e das distribuições condicionais de $\lambda_{i,t} | \lambda_{i,t-1} \sim N((I - \phi)\mu + \phi_i^\varepsilon(\lambda_{i,t-1} - \mu), \sigma_{\eta,i}^{\varepsilon^2})$ para $t = 2, \dots, T$ e uma distribuição a priori conjugada $p(\mu_i^\varepsilon) \sim N(m_0, M_0)$. Denotando $p(\mu_i^\varepsilon | \Upsilon_{\setminus \mu^\varepsilon}^A)$ por $N(m, M)$ temos que M e m valem

$$M = \left(\frac{(1 - \phi_i^{\varepsilon^2}) + (T-1)(1 - \phi_i^\varepsilon)^2}{\sigma_{\eta,i}^{\varepsilon^2}} + M_0^{-1} \right)^{-1}$$

$$m = M \left(\frac{\lambda_{1,i}^\varepsilon(1 - \phi_i^{\varepsilon^2})}{\sigma_{\eta,i}^{\varepsilon^2}} + (1 - \phi_i^\varepsilon) \sum_{t=2}^T \frac{(\lambda_{t,i}^\varepsilon - \phi_i^\varepsilon \lambda_{t-1,i}^\varepsilon)}{\sigma_{\eta,i}^{\varepsilon^2}} + M_0^{-1} m_0 \right).$$

Passo (6d-e) amostra das seqüências de log-variâncias $\lambda_t^\varepsilon | \Upsilon_{\setminus \lambda_t^\varepsilon}^A$ e das variáveis indicadoras da mistura $w_t^\varepsilon | \Upsilon_{\setminus w_t^\varepsilon}^A$

Os efeitos específicos para o **MF-VE** ε_t são tomados como a diferença $Y_t - \theta - X f_t$ seguindo para cada $(w_{ti}^\varepsilon, \lambda_{ti}^\varepsilon)$, $i = 1, \dots, q$ e $t = 1, \dots, T$ um procedimento de simulação univariado análogo aos passos (5d-e) do processo dos fatores comuns.

3.4 Análise MCMC utilizando blocos

No modelo de fatores considerado em Chib, Nardari e Shephard (2002) as log-variâncias do processo de **VE** dos fatores são incorrelacionadas e o esquema de simulação **MCMC** utilizado reúne em blocos de simulação variáveis latentes e parâmetros correlacionados.

A simulação em blocos é estruturada de forma que a matriz de cargas dos fatores X e os fatores latentes f formem um único bloco de simulação $[X, f]$ e também a terna de parâmetros de cada processo de **VE-AR(1)** juntamente com sua sequência de log-variâncias formem um único bloco cada, ou seja a partir dos $3(k + q)$ parâmetros e $k + q$ sequências de log-variâncias $[\phi_i^f, \sigma_{\eta i}^f, \mu_i^f, \lambda_i^f]$ para $i = 1, \dots, k$ e $[\phi_i^\varepsilon, \sigma_{\eta i}^\varepsilon, \mu_i^\varepsilon, \lambda_i^\varepsilon]$ para $i = 1, \dots, q$ são formados $k + q$ blocos de simulação.

Nessa seção são utilizados os métodos de Chib, Nardari e Shephard (2002) para realizar a simulação em blocos dos parâmetros do **MF-VE**. Algumas modificações são necessárias para considerar as log-variâncias dos fatores como correlacionadas para que os esquemas de simulação desta seção e da seção 3.3 abordem o mesmo modelo. Em relação ao algoritmo de Chib, Nardari e Shephard (2002) a simulação dos k blocos de parâmetros dos k processos de **VE-AR(1)** das log-variâncias dos fatores é substituída pela simulação de um único bloco de parâmetros do processo de **VE-VAR(1)** das log-variâncias dos fatores, ou seja, pela simulação das k sequências de log-variâncias dos fatores $\lambda_i^f, i = 1, \dots, k$ e dos parâmetros $[\phi^f, \Sigma_\eta^f, \mu^f]$ simultaneamente.

O algoritmo é resumido como apresentado a seguir, colocando-se entre parênteses os passos equivalentes no algoritmo 1. Para o algoritmo 2 os passos (1) e (2) de inicialização e amostragem de θ e também os passos (4) e (6) de amostragem das variáveis indicadoras w da mistura de normais são idênticos aos passos que são equivalentes no algoritmo 1. Os passos de simulação dos blocos da matriz de cargas X e fatores latentes f (3), das quantidades do processo de **VE-VAR(1)** dos fatores (5) e das quantidades de cada processo de **VE-AR(1)** dos efeitos específicos (7) seguem essencialmente o método desenvolvido em Chib e Greenberg (1994) de simulação via algoritmo de **MH** utilizando como distribuição proposta multivariada t obtida por otimização.

Algoritmo 2. MCMC considerando blocos

1. (1) Inicializa $f, \varepsilon, \lambda^f, \lambda^\varepsilon, w$ e Υ
2. (2) amostra θ
3. (3, 4) amostra $[X, f]$ por **MH**
 - (a) amostra X
 - (b) amostra $f_t, t=1, \dots, T$.
4. (5d) amostra w_t^f de multinomial condicional
5. (5a, 5b, 5c, 5e) amostra $[\phi^f, \Sigma_\eta^f, \mu^f, \lambda^f]$
 - (a) amostra $[\phi^f, \Sigma_\eta^f, \mu^f]$ por **MH**
 - (b) amostra $[\lambda^f \mid \phi^f, \Sigma_\eta^f, \mu^f]$ por **SSMO**
6. (6d) amostra w_t^ε de multinomial condicional
7. (6a, 6b, 6c, 6d) amostra $[\phi_i^\varepsilon, \sigma_{\eta,i}^\varepsilon, \mu_i^\varepsilon, \lambda_i^\varepsilon] \ i = 1, \dots, q$
 - (a) amostra $[\phi_i^\varepsilon, \sigma_{\eta,i}^\varepsilon, \mu_i^\varepsilon]$ por **MH**
 - (b) amostra $[\lambda_i^\varepsilon \mid \phi_i^\varepsilon, \sigma_{\eta,i}^\varepsilon, \mu_i^\varepsilon]$ por **SSMO**
8. vá para 2.

Passos do algoritmo

Passo (3) amostra de $(X, f) \mid \Upsilon_{\setminus(X,f)}^A$

Esse passo é equivalente aos passos (3) e (4) no algoritmo 1. A matriz de cargas X é amostrada de sua distribuição a posteriori marginalizada sobre f e em seguida f é amostrada como condicionada em X , ambas condicionadas nas demais variáveis, ou seja $\Upsilon_{\setminus(X,f)}^A = (\theta, \lambda_t^f, \lambda_t^\varepsilon, \Gamma^f, \Gamma^\varepsilon)$. O fato de X e f_t aparecerem no modelo na forma de produto sugere como razoável a abordagem de simular X condicionada a f e em seguida f condicionada em X mas esse procedimento é menos eficiente como será visto no capítulo 4.

Passo (3a) X é amostrada da densidade

$$\begin{aligned}
p(X|\Upsilon_{\setminus(X,f_t)}^A) &\propto \prod_{t=1}^T \int p(X, f_t|y_t, \Upsilon_{\setminus(X,f_t)}) df_t \\
&\propto p(X) \prod_{t=1}^T \int p(y_t|\Upsilon) p(f_t|\lambda_t^f) df_t \\
&\propto p(X) \prod_{t=1}^T p(y_t|\theta, X, \lambda^f, \lambda^\epsilon) \\
&\propto p(X) \prod_{t=1}^T N(y_t|\theta, XH_tX' + \Psi_t),
\end{aligned}$$

com $p(X)$ priori normal como definida em 2.7. A simulação é implementada utilizando o algoritmo de **MH** utilizando uma distribuição proposta como uma multivariada t , $f_T(X|m, M, \nu)$ com m aproximando a moda de

$$l = \log\left(\prod_{t=1}^T N(y_t|\theta, XH_tX' + \Psi_t)\right), \quad (3.12)$$

M o negativo da segunda derivada de l , e ν tomado arbitrariamente igual a 15. Para encontrar (m, M) temos

$$\begin{aligned}
l &= \sum_{t=1}^T \log N(y_t|\theta, \Sigma_t) \\
&= cte - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \log|\Sigma_t| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (y_t - \theta)' \Sigma_t^{-1} (y_t - \theta)
\end{aligned}$$

e fazendo x_{ij} o ij -ésimo elemento irrestrito de X temos

$$\frac{\partial l}{\partial x_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left\{ (y_t - \theta)' \Sigma_t^{-1} \frac{\partial \Sigma_t}{\partial x_{ij}} \Sigma_t^{-1} (y_t - \theta) - \text{tr}(\Sigma_t^{-1} \frac{\partial \Sigma_t'}{\partial x_{ij}}) \right\} \quad (3.13)$$

$$= \sum_{t=1}^T \left\{ s_t' \frac{\partial X}{\partial x_{ij}} H_t X' s_t - \text{tr}(E_t \frac{\partial X'}{\partial x_{ij}}) \right\} \quad (3.14)$$

com $s_t = \Sigma_t^{-1}(y_t - \theta)$ e $E_t = \Sigma_t^{-1} X H_t$ e utilizando a forma de inversa para Σ_t como $\Sigma_t^{-1} = \Psi_t^{-1} - \Psi_t^{-1} X (H_t^{-1} + X' \Psi_t^{-1} X)^{-1} X' \Psi_t^{-1}$. A partir das derivadas (3.11) os parâmetros (m, M) podem ser encontrados utilizando o algoritmo

de maximização de Newton-Raphson. O algoritmo de **MH** é implementado amostrando X^* de $f_T(\cdot|m, M, \nu)$ que, condicionado ao valor corrente da cadeia X^c é aceito com probabilidade de movimento $\alpha(X^*, X^c|Y, \theta, \lambda)$

$$\min\left\{1, \frac{p(X^*) \prod_{t=1}^T N(y_t|\theta, X^* H_t X^{*'} + \Psi_t) f_T(X^c|m, M, \nu)}{p(X^c) \prod_{t=1}^T N(y_t|\theta, X^c H_t X^{c'} + \Psi_t) f_T(X^*|m, M, \nu)}\right\}. \quad (3.15)$$

Passo (3b) Em seguida a amostragem de f é direta e independente para $t = 1, \dots, T$ considerando como distribuição

$$\begin{aligned} p(f_t|\Upsilon_{\setminus f_t}^A) &\propto N(f_t|0, H_t) N(y_t|\theta + X f_t, \Psi_t) \\ &\propto f_t | \Upsilon_{\setminus f_t}^A \sim N(m^*, M^*) \end{aligned}$$

para

$$M^* = (H_t^{-1} + X' \Psi_t^{-1} X)^{-1} \text{ e } m^* = M^* X \Psi_t^{-1} (y_t - \theta).$$

Para os passos seguintes condicionado em (Y, θ, X, f) o modelo pode ser escrito como o produto de $(1 + q)$ modelos de espaços de estados

$$f_t^* = \lambda_t^f + \nu_t \quad (3.16)$$

$$\lambda_t = \mu^f (I - \phi^f) + \phi^f \lambda_t^f + \eta_t \quad (3.17)$$

com $\eta_t \sim N(0, \Sigma_\eta^f)$ para o processo de fatores comuns e

$$\varepsilon_{t,i}^* = \lambda_{t,i}^\varepsilon + \nu_{i,t} \quad (3.18)$$

$$\lambda_{t,i} = \mu_i^\varepsilon (1 - \phi_i^\varepsilon) + \phi_i^\varepsilon \lambda_{t,i}^\varepsilon + \eta_{t,i} \quad (3.19)$$

com $\eta_{i,t} \sim N(0, \sigma_{\eta,i}^\varepsilon)$ para $i = 1, \dots, q$ ou seja para cada processo de **VE** dos efeitos específicos.

Passo (5) amostra de $(\Gamma^f, \lambda^f) | \Upsilon_{\setminus (\phi^f, \Sigma_\eta^f, \mu^f, \lambda^f)}^A$

Equivalente aos passos (5a), (5b), (5c) e (5e) do algoritmo 1 a simulação dos parâmetros e seqüências de log-variâncias dos fatores comuns é realizada

simultaneamente a partir do modelo 3.14 amostrando $\Gamma^f = (\phi^f, \Sigma_\eta^f, \mu^f)$ pelo algoritmo **MH** da densidade

$$p(\Gamma^f | f^*, w^f) \propto p(\Gamma^f) p(f^* | w^f, \Gamma^f) \quad (3.20)$$

com

$$p(f^* | w^f, \Gamma^f) \propto p(f_1^* | w^f, \Gamma^f) \prod_{t=2}^T p(f_t^* | \mathcal{F}_{t-1}^*, w^f, \Gamma^f) \quad (3.21)$$

para $p(f_t^* | \mathcal{F}_{t-1}^*, w^f, \Gamma^f)$ uma densidade normal k -variada com parâmetros de média e variância dados pelas inovações e matrizes de variâncias e covariâncias das inovações entregues pelas recursões do Filtro de Kalman (Kim, Shephard e Chibb 1998, de Jong 1991). Em seguida as log-variâncias λ^f são amostradas pelo algoritmo **SSMO**.

Passo (7) amostra de $(\phi_i^\varepsilon, \sigma_{\eta,i}^\varepsilon, \mu_i^\varepsilon, \lambda_i^\varepsilon) \mid \Upsilon_{\setminus(\phi_i^\varepsilon, \sigma_{\eta,i}^\varepsilon, \mu_i^\varepsilon, \lambda_i^\varepsilon)}^A \quad i = 1, \dots, q.$

Equivalente aos passos (6a), (6b), (6c) e (6e) do algoritmo 1 para cada processo de **VE** dos efeitos específicos são realizadas amostras de $[\phi_i^\varepsilon, \sigma_{\eta,i}^\varepsilon, \mu_i^\varepsilon, \lambda_i^\varepsilon]$ simultaneamente e de forma análoga à realizada para o processo dos fatores, isto é, pelo algoritmo de **MH** é amostrada a terna de parâmetros $\Gamma^\varepsilon = (\phi_i^\varepsilon, \sigma_{\eta,i}^\varepsilon, \mu_i^\varepsilon)$ da distribuição

$$p(\Gamma_i^\varepsilon | \varepsilon_i^*, w_i^\varepsilon) \propto p(\Gamma_i^\varepsilon) p(\varepsilon_i^* | w_i^\varepsilon, \Gamma_i^\varepsilon) \quad (3.22)$$

com

$$p(\varepsilon_i^* | s_i, \Gamma_i^\varepsilon) \propto p(\varepsilon_{i,1}^* | s_i, \Gamma_i^\varepsilon) \prod_{t=2}^T p(\varepsilon_{i,t}^* | \mathcal{F}_{i,t-1}^*, s_i, \Gamma_i^\varepsilon) \quad (3.23)$$

e $p(\varepsilon_{i,t}^* | \mathcal{F}_{i,t-1}^*, s_i, \Gamma_i^\varepsilon)$ é uma distribuição normal univariada com parâmetros de média e variância dados pelas recursões do Filtro de Kalman. Em seguida a sequência de log-volatilidades λ_i^ε é amostrada utilizando algoritmo **SSMO**.

Capítulo 4

Análise de Dados Simulados

Para avaliar a habilidade dos métodos discutidos no capítulo anterior em estimar corretamente os parâmetros e variáveis latentes do MF-VE, neste capítulo esses métodos são aplicados a dois conjuntos de séries simuladas.

Para um destes conjuntos de dados a análise MCMC é detalhada exibindo as cadeias geradas, as distribuições marginais a posteriori dos parâmetros, a dependência serial das cadeias e as estimativas das variáveis latentes. Para ambos conjuntos de séries simuladas os valores reais dos parâmetros e variáveis latentes utilizados para gerar as séries são comparados com as estimativas destas quantidades dadas pelas análises MCMC. Para esta comparação é utilizada a medida do erro quadrático das estimativas para o valor real.

A seção 4.1 mostra como os dados foram simulados. As seções 4.2 e 4.3 contém as análises MCMC para os algoritmos sem blocos e com blocos respectivamente aplicadas ao primeiro conjunto de séries simuladas. A seção 4.4 compara estimativas pontuais dadas por esses métodos aplicados a ambos conjuntos de séries simuladas.

4.1 Geração das séries de retornos

Foram geradas $q = 10$ séries de retornos de tamanho $T = 800$ observações cada e relacionadas a $k = 2$ fatores. A simulação das séries de retornos e de

variáveis latentes utiliza parâmetros Υ que também foram simulados.

Visando reproduzir as características do MF-VE ajustado a dados reais na literatura - Nardari e Scruggs (2003), Aguilar e West (2000) e Pitt e Shephard (1999), os parâmetros do modelo foram simulados buscando: médias dos retornos θ_i não maiores que 10^{-3} , isto é $\theta_i \sim U(-10^{-3}, 10^{-3})$; variâncias marginais das variáveis latentes f_t e ε_t em torno de $10^{-4} \approx \exp(-9)$ fazendo μ_j^f e $\mu_i^\varepsilon \sim N(-9, 1)$; alta persistência na log-volatilidade com coeficientes autoregressivos maiores que 0,88 fazendo ϕ_j^f e $\phi_i^\varepsilon \sim U(0,88, 0,995)$ e variâncias dos processos de VE em torno de 0,05 fazendo $\sigma_\eta^\varepsilon \sim U(0,005, 0,10)$ e $\Sigma_\eta^f \sim W^{-1}(10, 0,05I)$ para $i = 1, \dots, q$ e $j = 1, \dots, k$. Para a simulação dos elementos de X consideramos que, para o ajuste do modelo, a escolha da ordem das variáveis é tal que as primeiras k não sejam entre as variáveis as que forem pouco correlacionadas com os fatores comuns. Dessa forma dados os valores das restrições $X_{ii} = 1$ para $i = 1, \dots, k$ isto significa que os elementos X_{ij} da matriz não assumem valores muito distantes de 1 pois as demais variáveis têm correlação com os fatores não muito maiores que as primeiras k variáveis. Assim foram simulados $x_{ij} \sim N(0,9; 1)$ levando à matrizes X geralmente com valores próximos aos das referências.

A partir dos parâmetros simulados são gerados na ordem os processos de log-variâncias, os fatores latentes e a série. Os processos de log-variância λ_t^f e λ_t^ε seguem os modelos (2.9) e (2.10) e são gerados para $t = -99, \dots, 800$, utilizando valores iniciais $\lambda_{-99}^f = \mu^f$ e $\lambda_{-99}^\varepsilon = \mu^\varepsilon$ e descartando as primeiras 99 observações. Em seguida os fatores comuns e efeitos específicos f_t e ε_t são gerados utilizando $H_t = \exp(\lambda_t^f)$ e $\Psi_t = \exp(\lambda_t^\varepsilon)$ a partir dos modelos (2.3) e (2.4) para $t = 1, \dots, 800$. Finalmente, com θ , X , f_t e ε_t gerados as séries de retornos y_t são construídas para $t = 1, \dots, 800$ a partir do modelo (3.1).

As tabelas 4.1, 4.2 e 4.3 mostram os valores simulados para os parâmetros em Υ . A partir dos parâmetros são construídas na ordem as sequências de log-variâncias dos fatores comuns e específicos e finalmente as séries simuladas de retornos - veja figura ??.

série simulada	matriz de Cargas X		θ ($\times 10^{-4}$)
y_1	1	0	3,08
y_2	1,222	1	6,93
y_3	0,032	1,447	0,02
y_4	1,444	0,958	-1,73
y_5	-0,418	1,121	-2,51
y_6	2,686	0,597	5,24
y_7	2,618	1,357	-9,24
y_8	-0,610	0,395	8,32
y_9	1,093	0,947	-0,81
y_{10}	0,706	0,056	-6,05

Tabela 4.1: Parâmetros X e θ utilizados na geração da série multivariada y_t .

fator comum	μ^f	ϕ^f	Σ_η^f	
f_1	-9,56	0,898	0,077	
f_2	-8,67	0,920	-0,008	0,033

Tabela 4.2: Parâmetros utilizados na geração do processo de volatilidade dos fatores comuns f_t .

4.2 Simulação MCMC sem blocos

Essa seção descreve o estudo de simulação aplicado às séries pela análise MCMC sem blocos. Nessa aplicação foi gerada uma cadeia de 50000 simulações da distribuição a posteriori conjunta descartando as primeiras 10000 consideradas como fase de convergência da cadeia.

Tomando para o ajuste do modelo o número de fatores $k = 2$, isto é, o número real de fatores e considerando as dimensões das séries geradas isto significa para o MF-VE 64 parâmetros em Υ e 24 sequências de tamanho 800 entre fatores comuns, efeitos específicos e log-variâncias.

Executando o amostrador de Gibbs como apresentado no algoritmo 1 seção 3.2 foram guardados os valores de toda a cadeia para os parâmetros e as médias da cadeia para as variáveis latentes. Consideramos que a con-

especificidade	μ^ε	ϕ^ε	$\sigma_{\eta,i}^\varepsilon$
ε_1	-7,92	0,977	0,084
ε_2	-9,67	0,915	0,033
ε_3	-9,07	0,981	0,088
ε_4	-10,01	0,888	0,014
ε_5	-7,70	0,940	0,081
ε_6	-9,21	0,889	0,049
ε_7	-8,31	0,964	0,064
ε_8	-9,02	0,895	0,089
ε_9	-9,61	0,900	0,082
ε_{10}	-9,03	0,891	0,080

Tabela 4.3: Parâmetros utilizados na geração dos processos de volatilidade dos erros específicos ε_t .

vergência da cadeia para a distribuição conjunta a posteriori foi atingida antes de 3000 simulações dada a estabilidade, a partir destes valores, da locação das distribuições marginais a posteriori dos parâmetros μ e X principalmente. Contudo utilizamos o período de convergência de 10000 simulações como na literatura. Para os passos de simulação que utilizam o algoritmo **MH** as taxas médias de aceitação foram 80% para o algoritmo de **MH** em (5a) dos coeficientes auto-regressivos ϕ^f ; 85% em (5b) da matriz de variâncias das inovações Σ_η^f ; e de 80% a 92% em (6a) para os coeficientes auto-regressivos ϕ_i^ε para $i = 1, \dots, q$.

Nas sub-seções que seguem são analisadas as estimativas da análise MCMC sem blocos para as quantidades do modelo de fatores - equações 2.2, 2.3 e 2.4, para os modelos de VE - equações 2.9 e 2.10 e para a matriz de variâncias e covariâncias Σ_t . No final do capítulo são apresentadas as estimativas pontuais para esta análise em comparação com as estimativas da análise com blocos.

4.2.1 Estimativas para o modelo de fatores

A figura C.1 mostra as cadeias, os histogramas e as funções de auto-correlação para cada elemento univariado de θ . Note que, em todos os casos, o valor

real do parâmetro θ_i está contido no intervalo de credibilidade de 95% dado pela marginal a posteriori para o parâmetro, exceto no caso de θ_8 .

A figura C.2 mostra as densidades da cadeia MCMC gerada para os elementos da matriz X. Note que os valores reais dos parâmetros se encontram nos intervalos de credibilidade de 95%. As funções de auto-correlação amostral dadas na figura C.3 mostram uma dependência maior entre as amostras da cadeia para os elementos das posições da primeira coluna nas linhas 2, 4, 6, 7 e 9 da matriz X. Esses elementos são os que estão mais relacionados ao primeiro fator - veja tabela 4.1. A função de auto-correlação para essas quantidades tomam valores próximos às funções dos parâmetros de VE relacionados ao primeiro fator - veja figuras C.7, C.8 e C.9.

As médias para os fatores latentes f amostrados no passo (4) e seus desvios padrões condicionais $H_t^{1/2} = \exp(\lambda_t^f/2)$ no passo (5e) do algoritmo 1 são comparados com os valores reais na figura C.4. As séries de retornos estão relacionadas a esses fatores através da matriz X cuja estimativa é apresentada adiante.

A média da cadeia para a diferença entre as séries de retornos e sua parte relacionada aos fatores comuns e θ , isto é, $\varepsilon_t = y_t - Xf_t - \theta$ é a estimativa tomada para os efeitos específicos. Esses valores são comparados com os valores reais juntamente com sua sequência de desvios padrões condicionais $\Psi_t^{1/2} = \exp(\lambda_t^\varepsilon/2)$ na figura C.5.

As estimativas obtidas para os fatores latentes e efeitos específicos são bastante próximas dos valores reais indicando bom desempenho do método em estimar essas quantidades. A figura C.6 mostra f_{2t} , ε_{3t} e ε_{4t} para $t = 600, \dots, 700$.

4.2.2 Estimativa dos modelos de VE.

Para as médias μ^f e μ^ε dos processos de VE em geral as marginais a posteriori simuladas dão intervalos de credibilidade de 95% contendo o valor real do parâmetro exceto nos casos de μ_2^f , μ_4^ε e μ_7^ε que se mantêm próximos dos limites destes intervalos - veja figuras C.7 e C.10.

Para os coeficientes auto-regressivos ϕ^f e ϕ^ε esses intervalos de credibilidade contém o valor real do parâmetro exceto no caso de ϕ_1^f em que há

super-estimação - veja figura C.8 e C.11.

As variâncias das inovações em σ_η^ε e em Σ_η^f apresentam auto-correlações maiores entre os parâmetros e sendo que $\Sigma_{\eta 11}^f$, $\sigma_{\eta 2}^\varepsilon$, $\sigma_{\eta 4}^\varepsilon$, $\sigma_{\eta 6}^\varepsilon$, e $\sigma_{\eta 9}^\varepsilon$ apresentam valores reais fora dos limites do intervalo de 95% de credibilidade ou próximos a esses limites. Essas quantidades participam dos processos de VE que tem níveis de log-volatilidade μ e persistência na volatilidade ϕ menores - veja tabela 4.3, não sendo tão bem amostrados quanto o parâmetros dos processos de maiores médias de log-volatilidade e persistência λ_1^ε , λ_5^ε e λ_7^ε por exemplo devida a partição realizada para $\varepsilon_t = y_t - \theta - Xf_t$ e também a média da distribuição de $p(f_t | \Upsilon_{f_t}^A)$ no passo (3). As log-variâncias de menor média têm menor participação na composição de $\Sigma_t = XH_tX' + \Psi_t$.

4.2.3 As variâncias e covariâncias das séries de retornos

A partir das estimativas para as sequências $H_t = \exp(\lambda_t^f)$ e $\Psi_t = \exp(\lambda_t^\varepsilon)$ de variâncias condicionais de f_t e ε_t respectivamente e da matriz de cargas dos fatores X são obtidas estimativas para a matriz de variâncias e covariâncias dos retornos variante no tempo Σ_t por 2.5.

A figura C.13 mostra a parte diagonal da matriz Σ_t , isto é as sequências de variâncias condicionais dos retornos das séries geradas y_t . Calculando a variância marginal destas séries de retornos temos os valores da tabela 4.4.

Série	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}
Variância ($\times 10^{-4}$)	5,8	4,2	8,1	4,1	8,7	7,7	15,0	2,2	3,6	1,8

Tabela 4.4: Variância marginal das séries simuladas.

Note que as séries de maior variância marginal 1, 3, 5, 6 e 7 têm picos de volatilidade melhor estimados pela análise MCMC que as séries que têm menor variância marginal 2, 4, 8, 9 e 10. Também, em geral, os picos de volatilidade que ocorrem em períodos mais instantâneos são menos percebidos dada a suavidade aplicada pelo amostrador das log-variâncias SSMO.

Para analisar a estimação das covariâncias variantes no tempo destas séries é mostrado na figura C.14 as correlações entre os retornos das séries y_1

a y_9 e os retornos da série y_{10} . Note que, dado que as correlações dependem das variâncias condicionais e que y_{10} tem muitos picos de volatilidade que não são estimados, está sendo exibido o conjunto de correlações que menos se aproxima das correlações reais.

Um estudo de interesse a partir da análise fatorial é a análise da proporção de variância de uma variável individual devida à causas específicas em relação à sua variância total que é a variância específica somada à variância comum. Na abordagem deste trabalho esses valores variam no tempo e são dados pelas quantidades Ψ_{iit}/Σ_{iit} , isto é $\Psi_{iit}/(XH_tX' + \Psi_t)_{iit}$ para $i = 1, \dots, q$. A figura C.15 mostra essas quantidades em contraste com os valores reais. Note que as estimativas são mais suaves que os valores reais sendo mais apropriadas para conhecer níveis médios destas proporções e analisar tendências do que para investigar com maior precisão um determinado comportamento localizado em vizinhanças pequenas.

4.3 Simulação MCMC utilizando blocos

A simulação por blocos descrita na seção 3.4 é aplicada ao conjunto de dados simulado na seção 4.1 utilizando um tamanho de cadeia de $N=11000$ simulações descartando as primeiras 1000 como período para convergência da cadeia. A partir desta amostra é extraída uma sub-amostra de $n=1000$ observações tomados da cadeia a cada 10 na ordem da simulação. A convergência da cadeia para a distribuição conjunta a posteriori foi atingida antes de 700 simulações dada a indicação de estabilidade, a partir destes valores, da locação das distribuições marginais a posteriori dos parâmetros θ , X e μ para os quais esta mudança é visível. As taxas de aceitação nos passos em que é utilizado o algoritmo de **MH** foram de 75% para o passo (3) do bloco de $[X, f]$; 20% para o passo (5) do bloco dos parâmetros do processo de **VE** dos fatores; e de 25% a 50% para os blocos dos parâmetros dos processos de **VE** dos efeitos específicos.

Nas sub-seções que seguem são analisadas as estimativas para os parâmetros e variáveis latentes como na simulação sem blocos. Como vantagem da simulação com blocos observamos para todos os parâmetros cadeias com auto-

correlação amostral bastante reduzidas quando comparadas à simulação sem blocos. Essa característica da simulação com blocos requer menor tamanho de cadeia MCMC utilizada para construir a amostra de $n = 1000$ observações sobre a qual é realizada a inferência para os parâmetros. Em geral a análise com blocos produziu estimativas pontuais bastante próximas das estimativas da análise sem blocos como é descrito com mais detalhes na seção 4.4.

4.3.1 Estimativas para o modelo de fatores

A figura C.16 mostra a análise MCMC para o parâmetro θ . Note que, como na análise sem blocos a marginal a posteriori de θ_8 é distinta de zero. Também temos a auto-correlação maior para os mesmos elementos que no caso sem blocos - ver figura C.1.

A figura C.17 mostra os histogramas da cadeia MCMC com blocos para os elementos de X . Note que as distribuições marginais a posteriori para os elementos de X são bastante próximas das obtidas na simulação sem blocos - ver figura C.2.

As médias para os fatores latentes f e seus desvios padrões condicionais $H_t^{1/2} = \exp(\lambda_t^f/2)$ são comparados com os valores reais na figura C.19. Os efeitos específicos são comparados com os valores reais juntamente com sua sequência de desvios padrões condicionais $\Psi_t^{1/2} = \exp(\lambda_t^\varepsilon/2)$ na figura C.20. Para essas variáveis latentes foram encontradas estimativas próximas às dadas pela análise sem blocos. O gráfico C.21 mostra as quantidades f_{2t} , ε_{3t} e ε_{4t} no período de $t = 600, \dots, 700$.

4.3.2 Estimativa dos modelos de VE.

As figuras C.22 e C.25 mostram a análise MCMC com blocos para as médias μ_i^f e μ_i^ε e temos em geral para esse parâmetro resultados semelhantes aos da análise sem blocos, isto é, intervalos de credibilidade geralmente contendo o valor real do parâmetro exceto nos casos de μ_2^f , μ_4^ε e μ_7^ε . Para os coeficientes auto-regressivos - veja figuras C.23 e C.26, e para as variâncias das inovações σ_η^ε e Σ_η^f - veja figuras C.24 e C.27, os intervalos de credibilidade contém os valores reais dos parâmetros e exibem auto-correlação bastante baixa em

comparação à análise sem blocos porém esses intervalos são maiores que os dados pela análise sem blocos.

4.3.3 As variâncias e covariâncias das séries de retornos

Como na análise sem blocos analisamos as variâncias condicionais, as correlações condicionais e a proporção de variância específica das séries de retornos simuladas.

Em geral foram obtidos melhores ajustes para as variâncias condicionais das séries de maior variância marginal em comparação com as séries de menor variância marginal como na análise sem blocos - veja figura C.28. Em comparação com a análise sem blocos são obtidas variâncias e correlações condicionais bastante próximas - veja figura C.30 para comparação das estimativas envolvendo as séries 7, 4 e 10.

4.4 Comparação das estimativas

Nessa seção são comparadas as estimativas dadas pelas análises com e sem blocos apresentadas nas seções anteriores deste capítulo. Essa mesma análise é aplicada a um novo conjunto de dados simulados. Esse novo conjunto de dados foi simulado da mesma forma que o primeiro conjunto, isto é, a partir de novos parâmetros em Υ gerados segundo as distribuições descritas na seção 4.1. Dessa forma temos as aplicações dos métodos descritos no capítulo 3 para dois conjuntos de dados tratados como simulação A e simulação B.

É utilizado nesta seção o erro quadrático médio (EQM) para avaliar a distância entre os valores reais e as estimativas obtidas dos parâmetros do MF-VE e também das variáveis latentes. Para as variáveis latentes, isto é, os fatores comuns, efeitos específicos e log-variâncias foram utilizadas como estimativas as médias das cadeias MCMC a partir da convergência. As médias para essas variáveis latentes são registradas a cada grupo de iterações não sendo necessário armazenar toda a cadeia para essas séries. Para essas estimativas foram obtidos EQM bastante próximos para os dois métodos não havendo para todos os casos uma performance melhor de algum dos métodos - veja tabelas 4.5 e 4.6.

Como estimativa pontual para cada parâmetro univariado do MF-VE é utilizada neste trabalho a mediana da amostra extraída da cadeia MCMC descrita no início das seções 4.2 e 4.3. As estimativas pontuais pela mediana da cadeia mostraram maior proximidade dos valores reais quando comparadas às estimativas pela média da cadeia para as aplicações realizadas neste trabalho.

A tabela 4.7 mostra o EQM para os parâmetros estimados pelos métodos em relação aos valores reais sem apresentar algum dos métodos como melhor para estimar todos os parâmetros. Temos que θ foi melhor estimado por duas vezes pela simulação com blocos e ϕ^f , Σ_η^f , ϕ^ε e σ_η^ε foram melhor estimados pelo método sem blocos.

Os valores das estimativas para os parâmetros, isto é as medianas da amostras MCMC com e sem blocos são exibidos nas tabelas 4.8 a 4.12 juntamente com o valores reais dos parâmetros. As figuras 4.1 a 4.5 mostram os valores destas tabelas juntamente com uma reta $f(x) = x$. Em geral, para

Variável Latente	Simulação A		Simulação B	
	EQM	EQM	EQM	EQM
	sem Blocos	com Blocos	sem Blocos	com Blocos
f_1	0,92	0,92	0,69	0,70
f_2	2,65	2,69	2,38	2,23
ε_1	0,92	0,92	0,70	0,70
ε_2	1,35	1,35	1,81	1,71
ε_3	5,19	5,21	0,70	0,71
ε_4	1,32	1,32	1,71	1,72
ε_5	4,40	4,41	0,99	1,01
ε_6	4,12	4,13	0,28	0,28
ε_7	3,49	3,50	7,26	7,14
ε_8	1,39	1,40	0,67	0,68
ε_9	1,20	1,19	1,34	1,35
ε_{10}	0,40	0,40	0,34	0,34

Tabela 4.5: Erro quadrático médio para as variáveis latentes f_t e ε_t estimadas pelos métodos pelas simulações A e B colocando-se em negrito os menores EQM - valores $\times 10^{-5}$.

os parâmetros X e μ as estimativas pontuais obtidas pelas análises MCMC com e sem blocos são bastante próximas entre si o que não é observado para θ , ϕ , σ_η^ε e Σ_η^f para os quais são obtidas maiores diferenças.

Variável Latente	Simulação A		Simulação B	
	EQM	EQM	EQM	EQM
	sem Blocos	com Blocos	sem Blocos	com Blocos
λ_1^f	0,27	0,25	0,22	0,24
λ_2^f	0,17	0,17	0,44	0,39
λ_1^ε	0,26	0,26	0,20	0,20
λ_2^ε	0,13	0,12	0,17	0,17
λ_3^ε	0,34	0,33	0,51	0,56
λ_4^ε	0,06	0,06	0,22	0,24
λ_5^ε	0,25	0,25	0,43	0,54
λ_6^ε	0,20	0,20	0,19	0,19
λ_7^ε	0,19	0,19	0,33	0,32
λ_8^ε	0,21	0,21	0,25	0,24
λ_9^ε	0,28	0,29	0,19	0,19
λ_{10}^ε	0,21	0,21	0,26	0,27

Tabela 4.6: Erro quadrático médio para as log-variâncias λ_t^f e λ_t^ε estimadas pelos métodos pelas simulações A e B colocando-se em negrito os menores EQM.

Parâmetro	Simulação A		Simulação B	
	EQM	EQM	EQM	EQM
	sem Blocos	com Blocos	sem Blocos	com Blocos
$\theta (\times 10^{-7})$	3.05	2.03	2.32	2,13
$X (\times 10^{-3})$	7.89	9.74	37.2	22.4
μ^f e $\mu^\varepsilon (\times 10^{-2})$	2.91	2.78	13.9	14.9
ϕ^f e $\phi^\varepsilon (\times 10^{-3})$	0.97	1.40	0.50	1.69
Σ_η^f e $\sigma_\eta^\varepsilon (\times 10^{-3})$	1,13	1.21	0.57	0.86

Tabela 4.7: Erro quadrático médio para os parâmetros estimados pelos métodos pelas simulações A e B colocando-se em negrito os menores EQM.

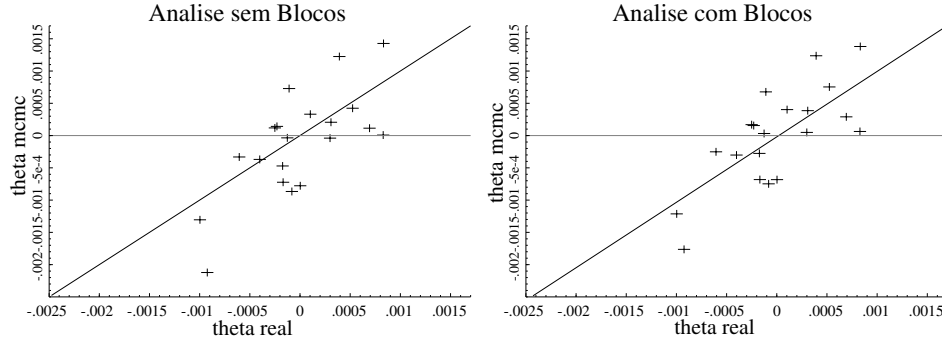


Figura 4.1: Medianas para os elementos de θ das análises MCMC sem blocos (esquerda) e utilizando blocos (direita) contra valor real e com a referência da função $f(x) = x$.

	Simulação A					Simulação B				
	s/ Blocos		c/ Blocos		Real	s/ Blocos		c/ Blocos		Real
	Med	DP	Med	DP		Med	DP	Med	DP	
θ_1	2,06	6,82	3,86	6,51	3,08	1,42	3,68	1,55	3,58	-2,30
θ_2	1,14	6,99	2,90	6,24	6,93	-7,23	5,07	-6,82	5,08	-1,68
θ_3	-7,78	8,75	-6,83	7,78	0,02	-13,1	5,57	-12,1	5,75	-9,97
θ_4	-4,71	6,66	-2,76	6,14	-1,73	12,25	8,08	12,37	8,07	3,92
θ_5	1,19	9,50	1,69	9,28	-2,51	-0,40	6,87	0,49	6,99	2,99
θ_6	4,24	9,03	7,54	8,67	5,24	0,08	6,51	0,64	6,40	8,29
θ_7	-21,2	12,12	-17,6	11,29	-9,24	7,29	6,50	6,77	6,87	-1,09
θ_8	14,27	4,90	13,80	4,83	8,32	-3,69	5,90	-3,02	6,06	-4,01
θ_9	-8,66	6,41	-7,48	5,79	-0,81	3,31	7,53	4,03	7,74	1,03
θ_{10}	-3,32	4,49	-2,52	4,72	-6,05	-0,35	4,90	0,32	5,26	-1,27

Tabela 4.8: A média θ estimada pelos métodos de simulação MCMC e real - valores $\times 10^{-4}$.

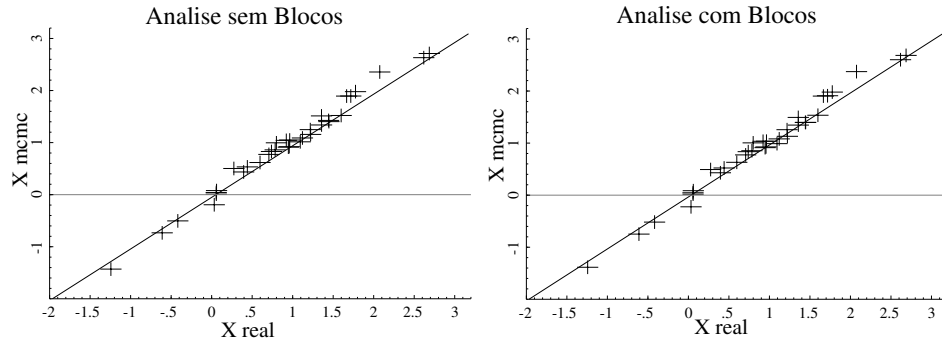


Figura 4.2: Medianas para os elementos irrestritos de X das análises MCMC sem blocos (esquerda) e utilizando blocos (direita) contra valor real e com a referência da função $f(x) = x$.

	Simulação A					Simulação B				
	s/ Blocos		c/ Blocos		Real	s/ Blocos		c/ Blocos		Real
	Med	DP	Med	DP		Med	DP	Med	DP	
X_{21}	1,16	0,13	1,13	0,12	1,22	0,50	0,11	0,49	0,09	0,27
X_{31}	-0,19	0,15	-0,22	0,14	0,03	1,89	0,11	1,90	0,11	1,67
X_{41}	1,43	0,14	1,40	0,12	1,44	1,52	0,12	1,53	0,13	1,60
X_{51}	-0,50	0,14	-0,52	0,14	-0,42	2,36	0,12	2,37	0,13	2,07
X_{61}	2,71	0,20	2,68	0,19	2,69	1,00	0,10	1,00	0,11	0,80
X_{71}	2,63	0,24	2,60	0,22	2,62	1,25	0,15	1,26	0,12	1,22
X_{81}	-0,73	0,08	-0,75	0,08	-0,61	1,89	0,10	1,91	0,11	1,72
X_{91}	1,02	0,12	0,99	0,11	1,09	1,98	0,14	1,98	0,14	1,78
X_{101}	0,77	0,07	0,77	0,07	0,71	0,83	0,08	0,84	0,08	0,74
X_{32}	1,40	0,06	1,40	0,06	1,45	1,05	0,23	1,04	0,05	0,96
X_{42}	0,92	0,03	0,93	0,03	0,96	0,08	0,20	0,09	0,05	0,06
X_{52}	1,09	0,07	1,08	0,07	1,12	1,04	0,20	1,03	0,05	0,92
X_{62}	0,62	0,06	0,63	0,05	0,60	0,53	0,13	0,52	0,05	0,44
X_{72}	1,34	0,06	1,35	0,06	1,36	-1,43	0,79	-1,38	0,08	-1,24
X_{82}	0,44	0,04	0,43	0,04	0,39	0,86	0,17	0,85	0,05	0,78
X_{92}	0,91	0,03	0,91	0,03	0,95	1,51	0,41	1,49	0,07	1,36
X_{102}	0,04	0,03	0,05	0,03	0,06	0,01	0,13	0,02	0,05	0,06

Tabela 4.9: Elementos irrestritos da matriz X estimados pelos métodos de simulação MCMC e real.

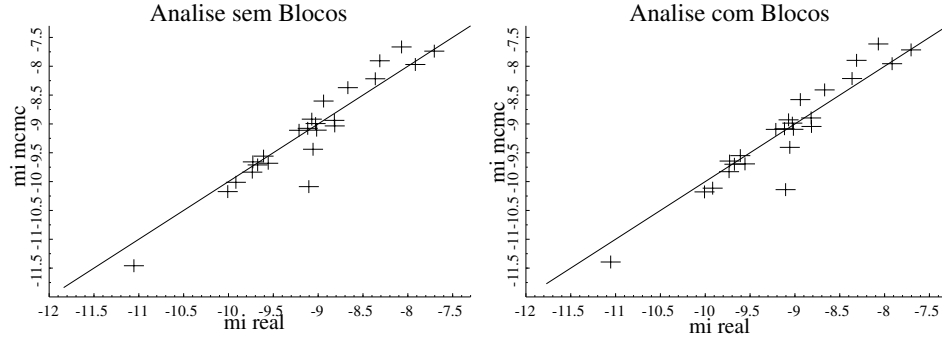


Figura 4.3: Medianas para as médias μ^f e μ^ε dos processos de VE pelas análises MCMC sem blocos (esquerda) e utilizando blocos (direita) contra seus valores reais e com a referência da função $f(x) = x$.

	Simulação A					Simulação B				
	s/ Blocos		c/ Blocos		Real	s/ Blocos		c/ Blocos		Real
	Med	DP	Med	DP		Med	DP	Med	DP	
μ_1^f	-9,68	0,22	-9,69	0,17	-9,56	-10,01	0,14	-10,11	0,11	-9,92
μ_2^f	-8,37	0,15	-8,41	0,11	-8,67	-9,44	0,71	-9,41	0,23	-9,06
μ_1^ε	-7,97	0,25	-7,96	0,25	-7,92	-9,84	0,13	-9,83	0,14	-9,73
μ_2^ε	-9,71	0,11	-9,70	0,12	-9,67	-9,08	0,12	-9,08	0,12	-9,12
μ_3^ε	-8,92	0,46	-8,93	0,42	-9,07	-11,46	0,50	-11,39	0,31	-11,05
μ_4^ε	-10,17	0,09	-10,18	0,09	-10,01	-7,67	0,44	-7,61	0,33	-8,07
μ_5^ε	-7,74	0,19	-7,72	0,21	-7,70	-10,09	0,68	-10,14	0,73	-9,10
μ_6^ε	-9,11	0,10	-9,09	0,10	-9,21	-8,22	0,17	-8,21	0,17	-8,36
μ_7^ε	-7,91	0,23	-7,90	0,22	-8,31	-8,94	0,28	-8,90	0,27	-8,82
μ_8^ε	-9,11	0,13	-9,09	0,13	-9,02	-9,66	0,16	-9,64	0,17	-9,73
μ_9^ε	-9,56	0,14	-9,55	0,14	-9,61	-9,03	0,11	-9,04	0,11	-8,82
μ_{10}^ε	-8,99	0,11	-8,99	0,10	-9,03	-8,60	0,14	-8,58	0,16	-8,94

Tabela 4.10: Médias dos processos de VE μ^f e μ^ε estimadas pelos métodos de simulação MCMC e seus valores reais.

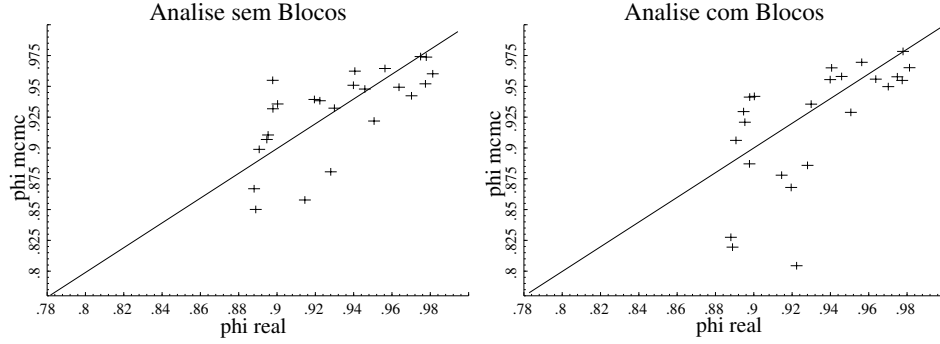


Figura 4.4: Medianas para os coeficientes auto-regressivos ϕ^f e ϕ^ϵ dos processos de VE pelas análises MCMC sem blocos (esquerda) e utilizando blocos (direita) contra seus valores reais e com a referência da função $f(x) = x$.

	Simulação A					Simulação B				
	s/ Blocos		c/ Blocos		Real	s/ Blocos		c/ Blocos		Real
	Med	DP	Med	DP		Med	DP	Med	DP	
ϕ_1^f	0,95	0,02	0,89	0,05	0,90	0,94	0,03	0,80	0,09	0,92
ϕ_2^f	0,94	0,03	0,87	0,05	0,92	0,97	0,01	0,96	0,01	0,97
ϕ_1^ϵ	0,95	0,02	0,95	0,02	0,98	0,93	0,06	0,94	0,05	0,90
ϕ_2^ϵ	0,86	0,08	0,88	0,07	0,91	0,91	0,06	0,92	0,04	0,90
ϕ_3^ϵ	0,96	0,02	0,97	0,02	0,98	0,94	0,04	0,95	0,02	0,97
ϕ_4^ϵ	0,87	0,11	0,83	0,29	0,89	0,96	0,02	0,97	0,01	0,96
ϕ_5^ϵ	0,95	0,02	0,96	0,02	0,94	0,97	0,01	0,98	0,01	0,98
ϕ_6^ϵ	0,85	0,11	0,82	0,20	0,89	0,96	0,03	0,97	0,02	0,94
ϕ_7^ϵ	0,95	0,02	0,96	0,02	0,96	0,95	0,03	0,96	0,03	0,95
ϕ_8^ϵ	0,91	0,05	0,93	0,04	0,89	0,93	0,03	0,94	0,03	0,93
ϕ_9^ϵ	0,94	0,03	0,94	0,03	0,90	0,88	0,04	0,89	0,04	0,93
ϕ_{10}^ϵ	0,90	0,05	0,91	0,05	0,89	0,92	0,03	0,93	0,03	0,95

Tabela 4.11: Coeficientes auto-regressivos dos processos de VE estimados pelos métodos de simulação MCMC e os valores reais.

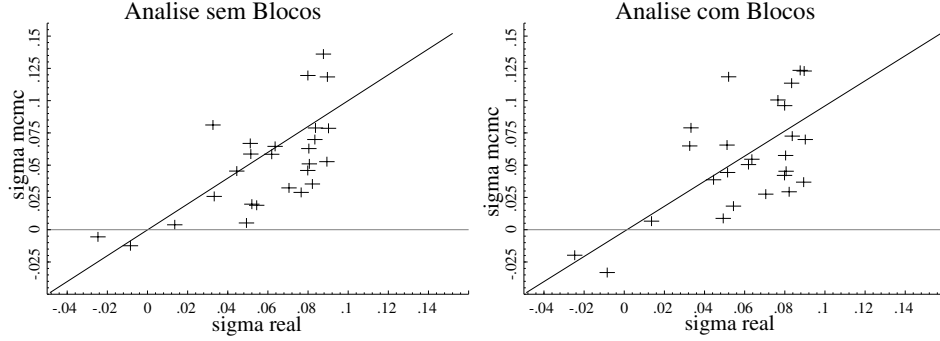


Figura 4.5: Medianas para as variâncias e covariâncias em Σ_{η}^f e $\sigma_{\eta}^{\varepsilon}$ dos processos de VE pelas análises MCMC sem blocos (esquerda) e utilizando blocos (direita) contra seus valores reais e com a referência da função $f(x) = x$.

	Simulação A					Simulação B				
	s/ Blocos		c/ Blocos		Real	s/ Blocos		c/ Blocos		Real
	Med	DP	Med	DP		Med	DP	Med	DP	
$\Sigma_{\eta 11}^f$	0,029	0,016	0,101	0,058	0,077	0,020	0,013	0,118	0,065	0,052
$\Sigma_{\eta 12}^f$	-0,012	0,009	-0,033	0,021	-0,008	-0,006	0,013	-0,020	0,025	-0,025
$\Sigma_{\eta 22}^f$	0,026	0,016	0,079	0,040	0,033	0,070	0,023	0,114	0,035	0,083
$\sigma_{\eta 1}^{\varepsilon}$	0,079	0,030	0,073	0,029	0,084	0,032	0,046	0,028	0,032	0,071
$\sigma_{\eta 2}^{\varepsilon}$	0,081	0,060	0,065	0,048	0,033	0,045	0,041	0,039	0,032	0,044
$\sigma_{\eta 3}^{\varepsilon}$	0,136	0,066	0,123	0,047	0,088	0,119	0,073	0,096	0,059	0,080
$\sigma_{\eta 4}^{\varepsilon}$	0,004	0,005	0,007	0,013	0,014	0,058	0,024	0,050	0,020	0,062
$\sigma_{\eta 5}^{\varepsilon}$	0,051	0,029	0,045	0,023	0,081	0,118	0,047	0,123	0,058	0,090
$\sigma_{\eta 6}^{\varepsilon}$	0,005	0,009	0,009	0,015	0,049	0,019	0,015	0,018	0,016	0,054
$\sigma_{\eta 7}^{\varepsilon}$	0,065	0,033	0,055	0,027	0,064	0,059	0,057	0,044	0,036	0,051
$\sigma_{\eta 8}^{\varepsilon}$	0,053	0,038	0,037	0,031	0,089	0,063	0,035	0,058	0,029	0,080
$\sigma_{\eta 9}^{\varepsilon}$	0,035	0,023	0,029	0,021	0,082	0,067	0,035	0,066	0,033	0,051
$\sigma_{\eta 10}^{\varepsilon}$	0,046	0,030	0,042	0,029	0,080	0,079	0,033	0,070	0,031	0,090

Tabela 4.12: Variâncias (e covariância) das inovações dos processos de VE estimadas pelos métodos de simulação MCMC e seus valores reais.

Capítulo 5

Análise de Dados Reais

Nesse capítulo é ajustado o MF-VE para um conjunto de 10 taxas de câmbio utilizando o algoritmo de simulação por blocos. As taxas de câmbio analisadas são a paridade com o dólar de moedas da Ásia, Europa e América do Sul e Central obtidas da agência de informações Bloomberg: Yen / Japão (JPY), Libra / Reino Unido (GBP), Dólar de Cingapura (SGD), Bath / Tailândia (THB), Won / Coréia (KRW), Coroa Sueca (SEK), Franco Suíço (CHF), Euro (EUR), Real / Brasil (BRL) e Peso / México (MXN), no período de 01/jan/1999 a 31/ago/2002 - veja figura 5.1.

A partir destas taxas são construídas as séries de retornos diários utilizando como retornos $y_t = (p_t/p_{t-1} - 1)$ e formando um histórico de 934 retornos diários. Esses retornos são mostrados na figura D.2 utilizando escalas diferentes devido à maior amplitude da série BRL. Nas seções seguintes são discutidas a estrutura escolhida para o ajuste do modelo e as estimativas obtidas para os parâmetros do modelo de fatores e é realizada a interpretação dos seus valores identificando grupos de taxas de câmbio correlacionadas e fatores comuns a essas séries. Em seguida são discutidos os modelos de VE ajustados, os fatores comuns e efeitos específicos extraídos das séries dada a estrutura determinada para o ajuste e por fim são analisadas as variâncias e covariâncias das moedas com o Real/Brasil variantes no tempo.

5.1 Análise MCMC

A tabela 5.1 mostra as estatísticas sumárias para os retornos das taxas no período. A série BRL se destaca pelo retorno médio alto e positivo em relação às demais séries seguido pelas moedas EUR, SEK e THB com retornos médios menores e positivos. Quanto à dispersão dos retornos em torno de sua média temos BRL com maior desvio padrão e também maior amplitude no intervalo de 95% dos dados. O grupo de taxas JPY, SEK, CHF e EUR que exibem desvios padrões em torno de 0,70% e intervalos dos percentis em torno de -1,35% a 1,35%. Com menores variâncias estão as moedas MXN, THB, KRW e GBP com desvios padrões em torno de 0,47% e intervalos entre -0,90% a 0,90%. Se destaca com menor variância marginal a série SGD com desvio padrão 0,27% e intervalo contendo 95% dos dados de -0,50% a 0,51%.

Moeda	Media $\times 10^{-4}$	DP $\times 10^{-2}$	%2,5 $\times 10^{-2}$	%97,5 $\times 10^{-2}$
JPY	0,82	0,70	-1,36	1,35
GBP	0,78	0,49	-1,00	1,02
SGD	0,75	0,27	-0,50	0,51
THB	1,56	0,43	-0,83	0,99
KRW	-0,03	0,47	-0,92	1,09
SEK	1,91	0,69	-1,39	1,41
CHF	1,06	0,69	-1,41	1,41
EUR	2,13	0,68	-1,38	1,35
BRL	12,00	1,21	-1,92	2,42
MXN	0,10	0,50	-0,92	1,02

Tabela 5.1: Estatísticas sumárias para os retornos das taxas de câmbio: média, desvio padrão e percentis de 2,5% e 97,5% - período de 01/jan/1999 a 31/ago/2002.

A tabela 5.2 apresenta a matriz de correlações entre os retornos das 10 taxas analisadas. Note que o Real/Brasil apresenta estimativas baixas para correlação com as demais moedas, exceto com MXN. Também temos que JPY apresenta correlação média, em torno de 0,20 com as moedas da Ásia e Europa exceto com SGD estimada em 0,43. As moedas européias apre-

sentam entre si alta correlação positiva indicando a existência de um fator comum entre essas taxas de câmbio. Dessa forma, ajustando um modelo de 2 fatores utilizamos nas posições em que há restrição impondo correlação com os fatores as moedas JPY por apresentar correlação com as moedas da Europa e Ásia e GBP por pertencer ao grupo de moedas européias de altas correlações duas a duas.

JPY										
0,43	SGD									
0,26	0,49	THB								
0,20	0,23	0,26	KRW							
0,20	0,11	0,04	0,02	GBP						
0,19	0,17	0,09	0,04	0,49	SEK					
0,23	0,19	0,11	-0,02	0,58	0,72	CHF				
0,21	0,19	0,11	-0,01	0,58	0,79	0,91	EUR			
0,07	0,06	0,03	0,00	0,04	0,04	-0,05	-0,02	BRL		
-0,04	0,01	0,07	0,02	-0,15	-0,10	-0,23	-0,19	0,22	MXN	

Tabela 5.2: Correlações entre os retornos das taxas de câmbio analisadas colocando-se em negrito os grupos de moedas da Ásia, Europa e também as correlações mais altas envolvendo JPY - período de 01/jan/1999 a 31/ago/2002.

Na análise MCMC obtivemos em geral as distribuições marginais a posteriori exibindo grau de simetria/assimetria e também valores de auto-correlação próximos aos obtidos nas análises dos dados simulados. Foi utilizada a amostra de $n=1000$ a partir de $N=15000$ simulações descartando as primeiras 5000 como período de convergência e tomando a cada 10 observações na ordem da cadeia.

5.2 O modelo de fatores

A tabela 5.3 mostra as estatísticas sumárias das cadeias geradas para a média θ estimada como a mediana das cadeias geradas. Note que a parte da estrutura fatorial a série BRL é a única que exhibe retorno médio significativamente

diferentes de zero para o período.

θ	Med	DP	2, 5%	97, 5%
JPY	2,39	2,03	-1,53	6,44
GBP	0,46	1,49	-2,53	3,32
SGD	1,05	0,72	-0,36	2,42
THB	0,63	0,99	-1,32	2,54
KRW	-0,89	1,01	-2,87	1,08
SEK	2,60	2,10	-1,64	6,53
CHF	2,35	2,19	-2,40	6,35
EUR	2,98	2,18	-1,76	6,83
BRL	4,16	1,98	0,42	7,95
MXN	-1,14	1,36	-3,96	1,38

Tabela 5.3: Estatísticas sumárias para θ - mediana, desvio padrão e percentis de 2, 5% e 97, 5% da cadeia MCMC - valores $\times 10^{-4}$.

As estatísticas para as colunas da matriz de cargas X são mostradas na tabela 5.4 e mostram a estrutura fatorial estimada. Cada elemento x_{ij} de X multiplicado pela variância do j -ésimo fator representa a covariância entre a taxa i e o fator j . Também cada coluna $X_{.j}$ de X é a combinação linear das taxas que compõem o j -ésimo fator.

Os baixos valores para as cargas dos fatores de BRL e MXN mostram que essas taxas de câmbio têm pouca participação na composição dos fatores f_1 e f_2 . O primeiro fator é uma ponderação entre todas as moedas exceto BRL e MXN com pesos maiores para as moedas européias. O segundo fator é um contraste entre as moedas asiáticas (exceto o Yen que foi excluído) e as européias, com pesos maiores para as moedas asiáticas. participação EUR, CHF, SEK e GBP sendo um efeito comum à moedas européias. Em resumo temos que para a estrutura do modelo utilizada são extraídos dos dados 2 fatores comuns sendo o primeiro relacionado ao mercado comum Europa - Ásia e o segundo exclusivo das taxas européias.

Observando a matriz de cargas X no espaço dos fatores - veja figura D.3, é possível notar a formação de 2 grupos de moedas. O primeiro grupo é composto justamente pelas moedas européias EUR, CHF, SEK e GBP

série	X_1				X_2			
	Med	DP	2, 5%	97, 5%	Med	DP	2, 5%	97, 5%
JPY	1				0			
GBP	0,429	0,07	0,294	0,576	1			
SGD	0,544	0,04	0,469	0,631	-0,170	0,06	-0,286	-0,064
THB	0,616	0,10	0,502	0,884	-0,262	0,07	-0,430	-0,148
KRW	0,313	0,05	0,216	0,431	-0,167	0,05	-0,269	0,076
SEK	0,794	0,01	0,589	1,104	1,830	0,10	1,65	2,043
CHF	0,906	0,01	0,668	1,197	2,193	0,11	2,00	2,421
EUR	0,896	0,01	0,654	1,196	2,231	0,11	2,03	2,470
BRL	0,003	0,07	-0,136	0,154	-0,125	0,07	-0,261	0,023
MXN	-0,023	0,05	-0,117	0,076	0,317	0,06	-0,438	-0,200

Tabela 5.4: Análise MCMC para a matriz de cargas X - mediana, desvio padrão e percentis de 2, 5% e 97, 5% da cadeia MCMC.

que pontuam com valores altos e positivos no segundo fator e relativamente altos e positivos no primeiro fator. As moedas asiáticas THB, SGD e KRW formam o segundo grupo apresentando níveis próximos de correlação com o primeiro fator e também com o segundo fator. As moedas JPY, BRL, MXN não participam destes grupos de forma a manter sua distinção. Note também na figura a análise fatorial proposta pelo MF-VE é um modelo de rotação oblíqua pois os fatores não são ortogonais, isto é apresentam correlação.

5.3 Os modelos de VE

A figura D.4 mostra os fatores f_1 e f_2 extraídos das séries e seus respectivos desvios padrões condicionais. Temos para o primeiro fator f_{1t} uma variância maior - veja tabela 5.5, e uma persistência menor na volatilidade quando comparado ao segundo fator f_{2t} . Considerando o modelo de log-variâncias que permite correlação entre as inovações no mesmo tempo t temos da matriz Σ_η^f - ver tabela 5.6, que a correlação entre as inovações das log-variâncias é relativamente alta igual a 0,34, o que não seria estimado pelo modelo de

Chib, Nardari e Shephard (2002) - ver seção 3.3.

fator comum	μ^f				ϕ^f			
	Med	DP	2,5%	97,5%	Med	DP	2,5%	97,5%
f_1	-11,68	0,17	-12,08	-11,40	0,47	0,16	0,15	0,76
f_2	-12,02	0,12	-12,27	-11,80	0,56	0,21	0,08	0,87

Tabela 5.5: Estimativas para os parâmetros μ^f e ϕ^f do processo de volatilidade dos fatores comuns - mediana, desvio padrão e percentis de 2,5% e 97,5% da cadeia MCMC.

fator comum	σ^f			
	Med	DP	2,5%	97,5%
$\sigma_{\eta 11}^f$	0,568	0,18	0,25	0,94
$\sigma_{\eta 22}^f$	0,199	0,11	0,05	0,48
$\sigma_{\eta 12}^f$	0,110	0,09	-0,03	0,33

Tabela 5.6: Estimativas para Σ_{η}^f - mediana, desvio padrão e percentis de 2,5% e 97,5% da cadeia MCMC.

A figura D.5 mostra os efeitos específicos das séries e seus respectivos desvios padrões condicionais. Como citado os efeitos específicos ε_t e os níveis de log-variância dependem da ordem das séries escolhidas para os ajuste do modelo e também do número de fatores. As tabelas 5.7 e 5.8 contém as estatísticas sumárias para os parâmetros dos componentes de VE.

5.4 A matriz de variâncias e covariâncias

A matriz de variâncias e covariâncias Σ_t estimada para os retornos das taxas para o período pode ser visualizada nas figuras D.6 para os elementos da sua diagonal e na figura D.7 para as correlações entre BRL e as demais moedas. A escala é exibida como particular para cada gráfico para possibilitar a visualização das menores taxas. A figura D.6 mostra as variâncias das séries de retornos diagonal de Σ_t .

efeito específico	μ^ε				ϕ^ε			
	Med	DP	2,5%	97,5%	Med	DP	2,5%	97,5%
JPY	-10,47	0,12	-10,73	-10,24	0,92	0,07	0,72	0,98
GBP	-11,22	0,18	-11,55	-10,85	0,97	0,02	0,93	0,99
SGD	-13,21	0,34	-13,90	-12,67	0,93	0,03	0,85	0,97
THB	-12,24	0,38	-13,14	-11,61	0,95	0,02	0,90	0,97
KRW	-11,34	0,19	-11,71	-10,94	0,92	0,03	0,86	0,96
SEK	-11,24	0,12	-11,48	-11,00	0,90	0,04	0,80	0,96
CHF	-12,61	0,24	-13,11	-12,15	0,93	0,02	0,87	0,97
EUR	-13,48	0,56	-14,81	-12,64	0,98	0,08	0,76	0,997
BRL	-9,80	0,35	-10,51	-9,09	0,97	0,01	0,93	0,99
MXN	-11,01	0,10	-11,22	-10,82	0,80	0,06	0,66	0,89

Tabela 5.7: Estimativas para os parâmetros μ^ε e ϕ^ε - mediana, desvio padrão e percentis de 2,5% e 97,5% da cadeia MCMC.

A análise da proporção de variância específica isto é dos efeitos específicos em relação à variância total exhibe uma posição a parte das séries de retornos de BRL, MXN e KRW com quase toda variância devida a esses efeitos. A moeda KRW apresenta efeitos de fatores comuns às demais 7 séries de retornos em $T = 400$. Uma vez que essas séries não estão relacionadas com a parte que é comum às demais séries sua variância é modelada em grande parte pelos modelos de VE dos efeitos específicos e pouco pela variância da parte fatorial isto é a matriz X e o modelo de VE-VAR(1) dos fatores. Em contrapartida se destacam como bastante relacionadas aos efeitos comuns a essas séries as moedas CHF e EUR com efeitos específicos com médias relativamente pequenas.

5.5 Especificação Euro - Yen nos fatores

Dado que a escolha das primeiras k séries para o ajuste do modelo influencia as estimativas e a interpretação do modelo, nesta seção apresentamos o ajuste do **MF-VE** ajustado às mesmas taxas de câmbio porém fazendo EUR e JPY como as primeira e segunda séries do modelo. Essa escolha considerou a maior

efeito específico	$\sigma_{\eta,i}^{\varepsilon}$			
	Med	DP	2,5%	97,5%
JPY	0,057	0,06	0,009	0,24
GBP	0,015	0,10	0,006	0,040
SGD	0,192	0,10	0,068	0,473
THB	0,187	0,10	0,080	0,492
KRW	0,166	0,06	0,089	0,310
SEK	0,089	0,05	0,003	0,220
CHF	0,154	0,06	0,075	0,308
EUR	0,023	0,04	0,004	0,145
BRL	0,115	0,04	0,062	0,203
MXN	0,226	0,09	0,118	0,464

Tabela 5.8: Estimativas para $\sigma_{\eta,i}^{\varepsilon}$ - mediana, desvio padrão e percentis de 2,5% e 97,5% da cadeia MCMC

correlação dos retornos destas séries com os primeiros fatores estimados pela análise fatorial clássica ortogonal aplicada a essas séries de retornos. A tabela 5.9 mostra as estimativas para o parâmetro θ . Notamos a diferença para a outra aplicação que além de BRL também EUR tem pelo menos 95% da distribuição marginal a posteriori distinta de zero.

A estimativa para a matriz de cargas dos fatores é mostrada na tabela 5.10. Novamente temos as moedas BRL e MXN pouco relacionadas aos fatores. Note que, para a estrutura escolhida nesta seção, as moedas estão relacionadas à parte fatorial de forma mais identificada a um dos fatores quando comparadas à aplicação anterior - exceto JPY. O primeiro fator é uma combinação linear com coeficientes altos e positivos das taxas de câmbio européias EUR, CHF e SEK e também de GBP e JPY. As demais moedas asiáticas têm coeficientes baixos para esse fator. O segundo fator é combinação linear com coeficientes altos e positivos para as moedas asiáticas, principalmente JPY e THB e baixos para as moedas européias.

A figura D.9 mostra os fatores extraídos das séries e seus respectivos desvios padrões. Note que o primeiro fator tem maior variância nesta estrutura

θ	Med	DP	2, 5%	97, 5%
JPY	1,66	2,05	-1,11	4,17
GBP	0,45	1,45	-1,44	2,19
SGD	0,54	0,72	-0,38	1,44
THB	-0,20	0,98	-1,43	1,06
KRW	-1,16	1,06	-2,51	0,23
SEK	2,62	2,07	-0,16	5,25
CHF	2,21	2,11	-0,61	4,69
EUR	2,82	2,10	0,10	5,42
BRL	4,12	1,90	1,68	6,57
MXN	-1,28	1,32	-3,09	0,35

Tabela 5.9: Estatísticas sumárias para θ - mediana, desvio padrão e percentis de 2, 5% e 97, 5% da cadeia MCMC colocando-se em negrito os intervalos de credibilidade que não contém o zero - valores $\times 10^{-4}$.

fatorial que na especificação JPY - GBP. As tabelas 5.11 e 5.12 mostram as estimativas para os parâmetros do modelo de VE dos fatores. Note que há maior persistência na volatilidade para o processo de VE do segundo fator que na seção anterior. O intervalo de credibilidade para a covariância entre as log-variâncias $\Sigma_{\eta 12}^f$ não contém o zero.

Os efeitos específicos são exibidos na figura D.10. Note que os processos foram estimados como bastante próximos quando comparados à seção anterior na figura D.5.

As figuras D.11 e D.12 mostram bastante proximidade entre as estimativas das variâncias condicionais e os percentuais de variância específica da aplicação anterior.

5.6 Análise de sensibilidade do modelo

A série BRL exhibe períodos de alta volatilidade no início de janeiro do ano de 1999 e também no final de julho de 2002 - veja figura D.11. Para estudar quanto o método de ajuste é robusto com respeito à presença ou não da série BRL, que tem maior volatilidade, nessa seção é realizada a comparação das

série	X_1				X_2			
	Med	DP	2,5%	97,5%	Med	DP	2,5%	97,5%
JPY	0,24	0,03	0,17	0,31	1,00			
GBP	0,47	0,02	0,42	0,50	0,00	0,06	-0,12	0,10
SGD	0,07	0,01	0,04	0,09	0,65	0,08	0,52	0,82
THB	0,05	0,02	0,02	0,09	1,12	0,26	0,65	1,59
KRW	0,01	0,02	-0,02	0,04	0,43	0,08	0,30	0,59
SEK	0,84	0,02	0,80	0,88	0,06	0,06	-0,06	0,18
CHF	0,99	0,02	0,97	1,03	0,03	0,03	-0,05	0,09
EUR	1,00				0,00			
BRL	-0,04	0,03	-0,10	0,01	0,09	0,09	-0,08	0,28
MXN	-0,12	0,02	-0,16	-0,07	0,15	0,07	0,04	0,33

Tabela 5.10: Análise MCMC para a matriz de cargas X - mediana, desvio padrão e percentis de 2,5% e 97,5% da cadeia MCMC.

fator comum	μ^f				ϕ^f			
	Med	DP	2,5%	97,5%	Med	DP	2,5%	97,5%
f_1	-10,22	0,06	-10,35	-10,10	0,21	0,15	-0,07	0,50
f_2	-12,34	0,33	-12,90	-11,67	0,81	0,08	0,59	0,91

Tabela 5.11: Estimativas para os parâmetros μ^f e ϕ^f do processo de volatilidade dos fatores comuns - mediana, desvio padrão e percentis de 2,5% e 97,5% da cadeia MCMC.

estimativas pontuais dadas pelo ajuste do MF-VE para o mesmo conjunto de taxas de câmbio porém retirando-se a série BRL. Para as médias θ foram obtidas estimativas bastante próximas em geral - veja figura 5.1 e tabela 5.13. A matriz X foi estimada com pesos bastante próximos dos valores no ajuste para o modelo com a série BRL exceto na posição (5,2) em que há subestimação - veja tabela 5.14 e figura 5.2. Essa posição relaciona a moeda THB, que obteve menor nível de log-variância estimado, ao segundo fator tendo pouca importância em relação às demais estimativas. As médias dos processos de log-variância mostram maior concordância entre os ajustes para as maiores estimativas em relação às menores estimativas - veja tabela 5.15

fator comum	σ^f			
	Med	DP	2,5%	97,5%
$\sigma_{\eta 11}^f$	0,40	0,12	0,19	0,64
$\sigma_{\eta 22}^f$	0,29	0,13	0,12	0,62
$\sigma_{\eta 12}^f$	0,22	0,07	0,09	0,38

Tabela 5.12: Estimativas para Σ_{η}^f - mediana, desvio padrão e percentis de 2,5% e 97,5% da cadeia MCMC.

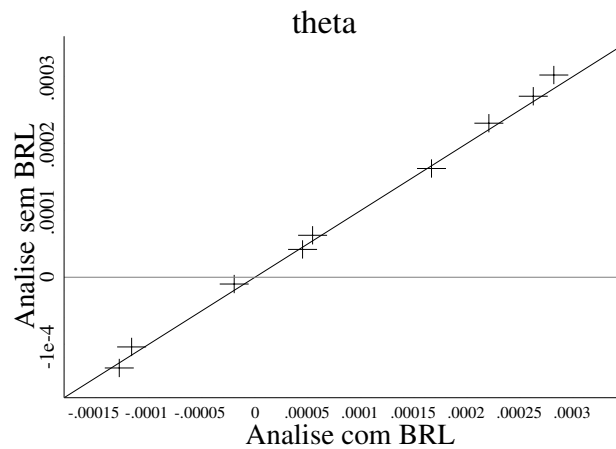


Figura 5.1: Medianas para os elementos de θ das análises MCMC para o MF-VE ajustado para as taxas de câmbio com a moeda Real/Brasil, juntamente com e sem a referência da função $f(x) = x$.

e figura 5.3. As estimativas dos parâmetros auto-regressivos e variâncias das inovações exibem concordância e são mostradas nas figuras 5.4 e 5.5 e nas tabelas 5.16 e 5.17.

θ	Análise c/ BRL		Análise s/ BRL	
	Med	DP	Med	DP
EUR	2,818	2,098	3,020	1,988
JPY	1,665	2,050	1,628	2,052
MXN	-1,279	1,318	-1,354	1,335
SGD	0,544	0,723	0,627	0,761
THB	-0,196	0,975	-0,101	0,946
KRW	-1,163	1,060	-1,041	1,071
SEK	2,625	2,073	2,703	2,001
CHF	2,206	2,108	2,292	2,048
GBP	0,449	1,447	0,413	1,483
BRL	4,122	1,899	-	-

Tabela 5.13: A média θ estimada pelos métodos de simulação MCMC e real - valores $\times 10^{-4}$.

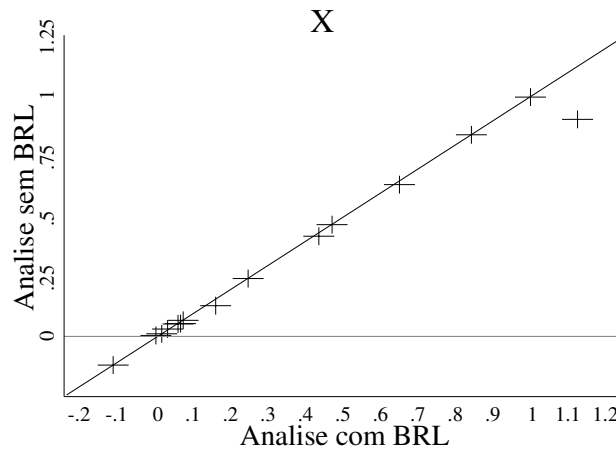


Figura 5.2: Medianas para os elementos irrestritos de X do MF-VE ajustado para as taxas de câmbio com e sem a moeda Real/Brasil.

$X_{.1}$ e $X_{.2}$	Análise c/ BRL		Análise s/ BRL	
	Med	DP	Med	DP
JPY	0,241	0,033	0,240	0,036
MXN	-0,119	0,022	-0,119	0,022
SGD	0,068	0,012	0,067	0,012
THB	0,054	0,017	0,052	0,017
KRW	0,011	0,017	0,011	0,017
SEK	0,837	0,021	0,837	0,023
CHF	0,995	0,016	0,993	0,018
GBP	0,465	0,020	0,464	0,021
BRL	-0,043	0,029	0,000	0,000
MXN	0,155	0,073	0,127	0,064
SGD	0,645	0,078	0,630	0,068
THB	1,120	0,262	0,901	0,213
KRW	0,430	0,078	0,416	0,073
SEK	0,061	0,058	0,053	0,054
CHF	0,026	0,034	0,031	0,033
GBP	-0,005	0,058	0,004	0,052
BRL	0,087	0,093	0,000	0,000

Tabela 5.14: Elementos irrestritos da matriz X estimados pelos métodos de simulação MCMC e real.

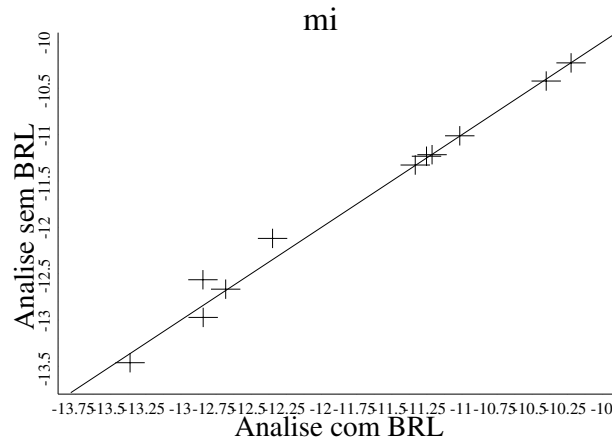


Figura 5.3: Medianas para as médias μ^f e μ^ε dos processos de VE dadas pelas análises MCMC para o MF-VE com os dados das taxas de câmbio com e sem a moeda Real/Brasil.

μ	Análise c/ BRL		Análise s/ BRL	
	Med	DP	Med	DP
fator1	-10,224	0,061	-10,226	0,068
fator2	-12,348	0,332	-12,120	0,293
EUR	-13,363	0,424	-13,460	0,727
JPY	-10,401	0,124	-10,422	0,122
MXN	-11,016	0,098	-11,013	0,097
SGD	-12,842	0,259	-12,972	0,317
THB	-12,844	0,604	-12,565	0,510
KRW	-11,333	0,192	-11,328	0,187
SEK	-11,253	0,118	-11,233	0,121
CHF	-12,682	0,252	-12,667	0,265
GBP	-11,213	0,173	-11,216	0,177
BRL	-9,808	0,336	0,000	0,000

Tabela 5.15: Médias dos processos de VE μ^f e μ^ε estimadas pelos métodos de simulação MCMC e seus valores reais.

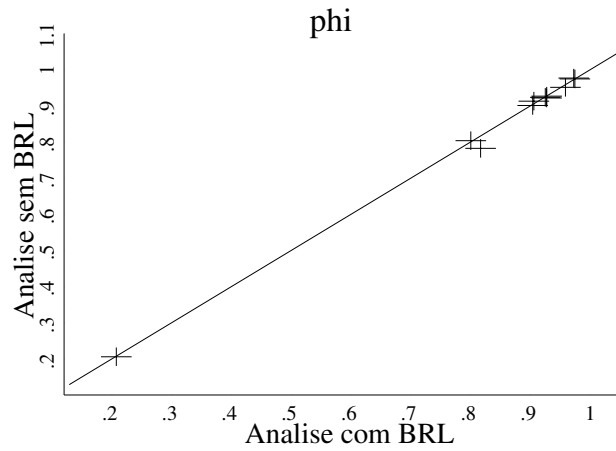


Figura 5.4: Medianas para os coeficientes auto-regressivos ϕ^f e ϕ^ε dos processos de VE dadas pelas análises MCMC para o MF-VE com os dados das taxas de câmbio com e sem a moeda Real/Brasil.

ϕ	Análise c/ BRL		Análise s/ BRL	
	Med	DP	Med	DP
fator1	0,207	0,151	0,205	0,155
fator2	0,817	0,084	0,782	0,098
EUR	0,972	0,044	0,977	0,074
JPY	0,906	0,099	0,913	0,094
MXN	0,800	0,059	0,804	0,057
SGD	0,927	0,031	0,922	0,030
THB	0,959	0,024	0,951	0,024
KRW	0,925	0,024	0,924	0,025
SEK	0,904	0,044	0,901	0,041
CHF	0,927	0,026	0,927	0,026
GBP	0,974	0,015	0,975	0,016
BRL	0,966	0,014	-	-

Tabela 5.16: Coeficientes auto-regressivos dos processos de VE estimados pelos métodos de simulação MCMC e os valores reais.

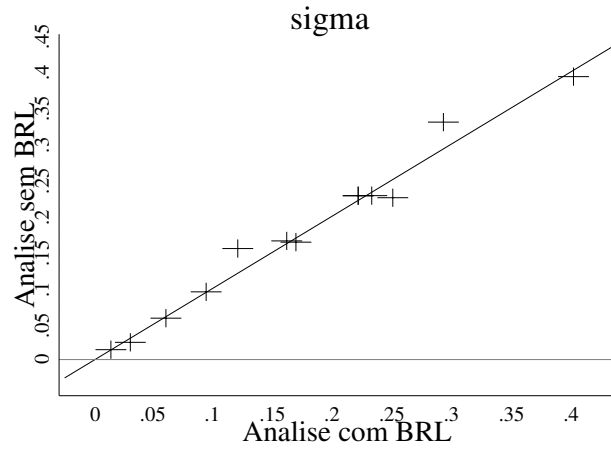


Figura 5.5: Medianas para as variâncias e covariâncias em Σ_{η}^f e $\sigma_{\eta}^{\varepsilon}$ dos processos de VE dadas pelas análises MCMC para o MF-VE com os dados das taxas de câmbio com e sem a moeda Real/Brasil.

σ_{η}	Análise c/ BRL		Análise s/ BRL	
	Med	DP	Med	DP
fator1	0,400	0,117	0,391	0,112
fatores 1 e 2	0,220	0,075	0,227	0,082
fator2	0,220	0,075	0,227	0,082
EUR	0,291	0,130	0,328	0,134
JPY	0,030	0,044	0,024	0,038
MXN	0,059	0,085	0,057	0,079
SGD	0,231	0,084	0,227	0,084
THB	0,119	0,072	0,154	0,091
KRW	0,249	0,139	0,224	0,129
SEK	0,160	0,053	0,164	0,058
CHF	0,093	0,051	0,094	0,049
GBP	0,168	0,069	0,162	0,064
BRL	0,013	0,008	0,014	0,008

Tabela 5.17: Variâncias (e covariância) das inovações dos processos de VE estimadas pelos métodos de simulação MCMC e seus valores reais.

Capítulo 6

Considerações Finais

Foram aplicados os métodos de simulação MCMC para conjuntos de dados simulados para os quais as cadeias geradas exibem menor auto-correlação para a análise MCMC com blocos aumentando a eficiência do algoritmo. De uma forma geral os métodos de simulação estudados produzem boas estimativas para os parâmetros e variáveis latentes do MF-VE apresentando maiores diferenças nas estimativas dos parâmetros dos modelos de VE coeficiente auto-regressivo e variância/covariância das inovações e na média do modelo de fatores. Pelas aplicações realizadas as diferenças não determinam um método como melhor para estimar os parâmetros do modelo em geral.

Foi verificada a suposição de matriz de variâncias e covariâncias variante no tempo e retornos relacionados a fatores comuns para um conjunto de 10 taxas de câmbio. A partir de uma estrutura fatorial proposta com base em fatores relacionados às moedas Yen e Libra Esterlina, são interpretados esses fatores, a correlação variável-fator, os grupos de moedas correlacionadas identificados e o percentual de variância específica destas moedas para o período. A análise do modelo de fatores para as taxas de câmbio estaria completa com o estudo de estimativas de previsão pelo MF-VE, o que tem sido realizado na literatura para modelos de VE através do método de Monte Carlo sequencial.

Apêndice A

Simulação de Monte Carlo - Cadeia de Markov

O método de simulação **MCMC** realiza integração de Monte Carlo utilizando Cadeias de Markov. É utilizado na estatística bayesiana para integrar sobre a distribuição a posteriori dos parâmetros do modelo condicionado aos dados e na estatística freqüentista para integrar nas distribuições das variáveis observáveis condicionado aos valores dos parâmetros. A integração de Monte Carlo gera amostras da distribuição relacionada e toma médias amostrais para aproximar esperanças. **MCMC** gera essas amostras formando uma Cadeia de Markov longa no tempo. Existem muitas formas de construir essas cadeias mas todas, incluindo o amostrador de Gibbs - Geman e Geman (1984), são casos particulares da forma geral de Metropolis *et al* (1953) e Hastings (1970).

A.1 O algoritmo de Metropolis

Dada uma distribuição $p(\theta|y)$ que pode ser computada a menos de uma constante normalizadora o algoritmo de Metropolis cria uma seqüência de pontos aleatórios $(\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots)$ cuja distribuição converge para a distribuição de interesse $p(\theta|y)$. O algoritmo procede da seguinte forma

- observa um ponto inicial θ^0 (com $p(\theta^0|y) > 0$) de uma distribuição inicial $p_0(\theta^0)$ - pode ser resultado de amostragem por importância.
- para $t = 1, 2, \dots$
 - (a) amostra um ponto candidato θ^* na iteração t de uma distribuição $J_t(\theta^*|\theta^{t-1})$ (regra de transição) que deve ser simétrica no sentido que $J_t(\theta_b|\theta_a) = J_t(\theta_a|\theta_b)$ para quaisquer t, a, b .
 - (b) calcula a razão das densidades

$$r = \frac{p(\theta^*|y)}{p(\theta^{t-1}|y)}$$

- (c) a cadeia se move em t para θ^* ($\theta^t = \theta^*$) com probabilidade $\min\{1, r\}$ e caso contrário não se move permanecendo em θ^{t-1} ($\theta^t = \theta^{t-1}$)

A prova de que a sequência $(\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots)$ converge para a distribuição de interesse envolve dois passos. Primeiro a sequência gerada é uma Cadeia de Markov com distribuição estacionária única - processo é irreduzível, aperiódico e não transiente. Em seguida a distribuição estacionária única é a distribuição de interesse - ver Gelman, Carlin, Stern e Rubin (1996) cap.11 p.325. O algoritmo de Metropolis-Hastings generaliza o algoritmo de Metropolis em dois sentidos. Primeiro a regra de transição J_t não precisa ser simétrica ou seja não é necessário que $J_t(\theta_b|\theta_a) = J_t(\theta_a|\theta_b)$. Em segundo lugar para corrigir o erro de assimetria na regra de transição a razão r é substituída por uma razão de razões de importância

$$r = \frac{p(\theta^*|y)/J_t(\theta^*|\theta^{t-1})}{p(\theta^{t-1}|y)/J_t(\theta^{t-1}|\theta^*)}$$

que é sempre definida pois o movimento só ocorre se forem $J_t(\theta^*|\theta^{t-1})$ e $p(\theta^{t-1}|y)$ não zeros. Permitir regras *jumping* assimétricas pode ajudar a aumentar a velocidade de convergência do passeio aleatório.

A.2 O amostrador de Gibbs

O amostrador de Gibbs é um algoritmo particular de geração de cadeia de Markov muito útil em problemas multidimensionais. É definido em termos de subvetores do parâmetro de interesse: suponha o vetor θ dividido em d componentes ou subvetores $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d)$ e em cada iteração o algoritmo percorre os d subvetores de θ amostrando cada subvetor condicionado aos valores amostrados mais recentes dos demais. Assim em cada iteração t do algoritmo existem d passos e para uma ordem escolhida $\theta_j^{(t)}$ é amostrado

$$\theta_j^{(t)} \sim p(\theta_j | \theta_{\setminus j}, y)$$

com $\theta_{\setminus j} = (\theta_1^{(t)}, \dots, \theta_{j-1}^{(t)}, \theta_{j+1}^{(t-1)}, \dots, \theta_d^{(t-1)})$ ou seja, todos os componentes de θ nos seus valores correntes exceto θ_j .

O amostrador de Gibbs pode ser visto como um caso particular do algoritmo de Metropolis-Hastings. Na sua iteração (t, j) - iteração t e bloco j , temos a densidade condicional a posteriori de θ_j dado $\theta_{\setminus j}$

$$J_{t,j}^{Gibbs}(\theta^* | \theta^{t-1}) = \begin{cases} p(\theta_j^* | \theta_{\setminus j}^{t-1}, y) & \text{se } \theta_j^* = \theta_{\setminus j}^{t-1} \\ 0 & \text{cc,} \end{cases}$$

e a razão das razões de importância no j -ésimo passo da iteração t é:

$$\begin{aligned} r &= \frac{p(\theta^* | y) / J_{j,t}^{Gibbs}(\theta^* | \theta^{t-1})}{p(\theta^{t-1} | y) / J_{j,t}^{Gibbs}(\theta^{t-1} | \theta^*)} \\ &= \frac{p(\theta^* | y) / p(\theta_j^* | \theta_{\setminus j}^{t-1}, y)}{p(\theta^{t-1} | y) / p(\theta_j^{t-1} | \theta_{\setminus j}^{t-1}, y)} \\ &= \frac{p(\theta_{\setminus j}^{t-1} | y)}{p(\theta_{\setminus j}^{t-1} | y)} = 1 \end{aligned}$$

logo todo movimento é aceito.

Apêndice B

Simulação e Filtragem em Modelos de Espaços de Estados

Nesse apêndice são brevemente descritos os métodos de simulação e filtragem para modelos de espaços de estados utilizados neste trabalho. O suavizador-simulador de de Jong e Shephard (**SSMO**) é utilizado para gerar amostras de estados condicionados às observações e parâmetros. O algoritmo **FFBS** de West e Harrison tem o mesmo propósito que o **SSMO** e é o simulador de estados utilizado em Aguilar e West (2000) e neste trabalho foi utilizado como referência ao desempenho de convergência do **SSMO**. O método de Descontos descrito na última subseção é utilizado para obter estimativas filtradas e suavizadas da matriz de variâncias e covariâncias (matriz-estado) de uma série de tempo multivariada e é utilizada na análise inicial para estimar o processo da matriz de variâncias e covariâncias variante no tempo.

B.1 O suavizador-simulador de de Jong e Shephard

Suponha que condicionada a $\omega = (\omega_0; \dots; \omega_n)$ a série y_t é gerada pelo modelo de espaços de estados

$$y_t = X_t\beta + Z_t\alpha_t + G_tu_t, (t = 1, \dots, n)$$

$$\alpha_{t+1} = W_t\beta + T_t\alpha_t + H_tu_t, (t = 0, 1, \dots, n)$$

com $\alpha_0 = 0$, as matrizes de sistema podendo depender de ω_t e os u_t distribuídos $N(0, \sigma^2 I)$ independentes. O algoritmo amostra $\eta \sim p(\eta|y, \omega)$ com $\eta = (\eta_0; \eta_1; \dots \eta_n)$, $\eta_t = F_t u_t$ para F_t matriz arbitrária. Inicialmente, é executado para $t = 1, \dots, n$ o filtro de Kalman

$$\begin{aligned} e_t &= y_t - X_t\beta + Z_t a_t \\ D_t &= Z_t P_t Z_t' + G_t G_t' \\ K_t &= (T_t P_t Z_t' + H_t G_t') D_t^{-1} \\ a_{t+1} &= W_t\beta + T_t a_t + K_t e_t \\ P_{t+1} &= T_t P_t L_t' + H_t J_t' \end{aligned}$$

com $a_1 = W_0\beta$, $P_1 = H_0 H_0'$, $L_t = T_t - K_t Z_t$ e $J_t = H_t - K_t G_t$. Nesse passo do filtro de Kalman e_t , D_t e K_t são armazenados. Fazendo $r_n = 0$ e $U_n = 0$ é executado para $t = n, \dots, 1$

$$\begin{aligned} C_t &= F_t(I - G_t' D_t^{-1} G_t - J_t' U_t J_t) F_t' \\ \varepsilon_t &\sim N(0, \sigma^2 C_t) \\ V_t &= F_t(G_t' D_t^{-1} Z_t + J_t' U_t L_t) \\ r_{t-1} &= Z_t' D_t^{-1} e_t + L_t' r_t - V_t' C_t^{-1} \varepsilon_t \\ U_{t-1} &= Z_t' D_t^{-1} Z_t + L_t' U_t L_t + V_t' C_t^{-1} V_t \end{aligned}$$

do qual é armazenado $\eta_t = F_t(G_t' D_t^{-1} e_t + J_t' r_t) + \varepsilon_t$ para o qual $G_0 = 0$. O vetor $\eta = (\eta_0; \eta_1; \dots \eta_n)$ é uma amostra de $p(\eta|y, \omega)$. Fazendo $F_t = G_t$ ou $F_t = H_t$ a amostra de η_t corresponde ao ruído de estado $H_t u_t$ e de medida $G_t u_t$ respectivamente.

B.2 O algoritmo FFBS de West Harrison

O modelo linear dinâmico (**DLM**) multivariado definido em West Harrison (1997) é

$$Y_t = F_t' \theta_t + \nu_t, \nu_t \sim N(0, V_t) \quad (\text{B.1})$$

$$\theta_t = G_t' \theta_{t-1} + w_t, w_t \sim N(0, W_t) \quad (\text{B.2})$$

com seqüências de erro ν_t e w_t independentes e o estado θ_t n-dimensional. O modelo é denotado pela quádrupla $\{F_t, G_t, V_t, W_t\}$ para cada tempo t com matrizes de sistema conhecidas F_t $n \times r$, G_t $n \times n$, V_t $r \times r$ matriz de variâncias e covariâncias dos erros observacionais e W_t $n \times n$ matriz de variâncias e covariâncias dos erros de evolução. Denotando a informação disponível para previsão no tempo t como $D_t = \{Y_t, D_{t-1}\}$ atualizada sequencialmente com a observação dos valores de Y_t a partir de um conjunto de informações inicial D_0 , para o modelo (B.1)-(B.2) temos as distribuições de previsão 1 passo a frente e a posteriori para cada t como segue

(a) Posteriori em $t - 1$:

com uma media m_{t-1} e matriz de variâncias e covariâncias C_{t-1} ,

$$(\theta_{t-1}|D_{t-1}) \sim N(m_{t-1}, C_{t-1})$$

(b) Priori em t :

$$(\theta_t|D_{t-1}) \sim N(a_t, R_t)$$

com $a_t = G_t m_{t-1}$ e $R_t = G_t C_{t-1} G_t' + W_t$

(c) Previsão de um passo a frente:

$$(Y_t|D_{t-1}) \sim N(f_t, Q_t)$$

com $f_t = F_t' a_t$ e $Q_t = F_t' R_t F_t + V_t$.

(d) Posteriori em t :

$$(\theta_t|D_t) \sim N(m_t, C_t)$$

com $m_t = a_t + A_t e_t$, $C_t = R_t - A_t Q_t A_t'$, $A_t = R_t F_t Q_t^{-1}$ e $e = Y_t - f_t$.

Para simulação dos estados $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n$ são amostrados individualmente como

(1) amostra θ_n de $(\theta_n|D_n) \sim N(m_n, C_n)$

(2) para $t = n - 1, n - 2, \dots, 0$ amostra θ_t de $p(\theta_t|\theta_{t+1}, D_t)$ com θ_{t+1} o valor mais recente amostrado

O passo (2) é realizado sequenciando

$$(\theta_t|\theta_{t+1}, D_t) \sim N(h_t, H_t) \quad (\text{B.3})$$

$$h_t = m_t + B_t(\theta_{t+1} - a_{t+1}) \quad (\text{B.4})$$

$$H_t = C_t - B_t R_{t+1} B_t' \quad (\text{B.5})$$

$$B_t = C_t G_{t+1}' R_{t+1}' \quad (\text{B.6})$$

para cada t . Portanto no processo de amostragem de θ em um primeiro estágio para $t = 0$ até $t = n$ são calculados e armazenados m_t , C_t , a_t , R_t e B_t e em seguida, em $t = n$ um vetor θ_n é amostrado e seguindo até $t = 0$ sequencialmente o cálculo de h_t e H_t para geração θ_t . Essa estrutura para a amostragem justifica a terminologia *Forward-Filtering-Backward-Sampling* (**FFBS**).

B.3 O método de descontos e a análise inicial para o MF-VE

Nessa seção é apresentado de forma bastante resumida a estimação do processo evolução de matrizes de variâncias e covariâncias de séries multivariadas utilizando modelos de descontos para uma descrição detalhada e referências ver West e Harrison (1997 capítulo 16). A partir de generalizações multivariadas aplicadas ao modelo (ler cap10)... No tempo t a distribuição a posteriori para Σ_t é uma Wishart inversa $p(\Sigma_t|D_t) \sim W_{n_t}^{-1}(\Sigma_t|S_t)$ com n_t graus de liberdade e S_t matriz de escala. A sequência S_t é atualizada sequencialmente no tempo

$$S_t = (\delta n_{t-1} S_{t-1} + e_t e_t' / Q_t) / n_t \quad (\text{B.7})$$

para $n_t = \delta n_{t-1} + 1$ e fator de descontos δ tal que $0 < \delta < 1$. Para t grande n_t vale $(1 - \beta)^{-1}$ e S_t é dada por

$$S_t \approx (1 - \beta) \sum_{r=0}^{t-1} \beta^r e_{t-r} e_{t-r}' / Q_{t-r} \quad (\text{B.8})$$

logo as variâncias e covariâncias estimadas entre as séries são médias móveis de variâncias e covariâncias passadas ponderadas exponencialmente. As estimativas δ_t são então revisadas pelas equações de suavização para $t = n - 1$ até $t = 1$

$$S_{t,n}^{-1} = (1 - \delta)S_t^{-1} + \delta S_{t+1,n}^{-1} \quad (\text{B.9})$$

iniciando com $S_{n,n} = S_n$.

Em Aguilar e West (2000) a análise inicial proposta é uma aproximação para o modelo **MF-VE** (2.5)-(2.11). Aplicada às estimativas suavizadas da matriz de variâncias e covariâncias Σ_t das séries y_t esta análise fornece um conhecimento a priori da forma do restante dos dados e é utilizada para determinar hiperparâmetros das prioris dos parâmetros do **MF-VE** utilizadas na análise bayesiana. Em uma primeira etapa são tomadas estimativas suavizadas $S_{t,0}$ da matriz de variâncias e covariâncias Σ_t , $t = -v, \dots, 0$, de um trecho inicial de $v + 1$ observações das séries y_t pelo método de Descontos e em seguida a cada matriz $S_{t,0}$, $t = -v, \dots, 0$, é aplicada a fatoração de Choleski $L_t L_t' = S_{t,0}$. Da sequência dos elementos da diagonal de L_t são selecionadas as k sequências de médias maiores como estimativas dos desvios padrões dos k processos dos fatores $h_{it}^{1/2}$, $i = 1, \dots, k$. A partir do logaritmo destas sequências ao quadrado são estimados parâmetros de um processo auto regressivo levando às estimativas de $[\phi^f, \Sigma_\eta^f, \mu^f]$. A matriz X é estimada tomando a média das matrizes de k colunas extraídas de L_t com cada elemento da diagonal valendo 1. Em seguida os parâmetros de $q - k$ processos de **VE-AR(1)** dos processos dos erros específicos são estimados a partir da estimação do modelo AR(1) aplicada às $q - k$ séries não nulas da diferença $\Psi_t = S_{t,0} + X H_t X'$.

Apêndice C

Cadeias de Markov para os parâmetros do MF-VE

Esse apêndice contém os gráficos das amostras extraídas das cadeias MCMC, os histogramas e as funções de auto-correlação para os parâmetros do MF-VE da análise de dados simulados sem blocos e com blocos do capítulo 4.

C.1 Simulação MCMC sem blocos

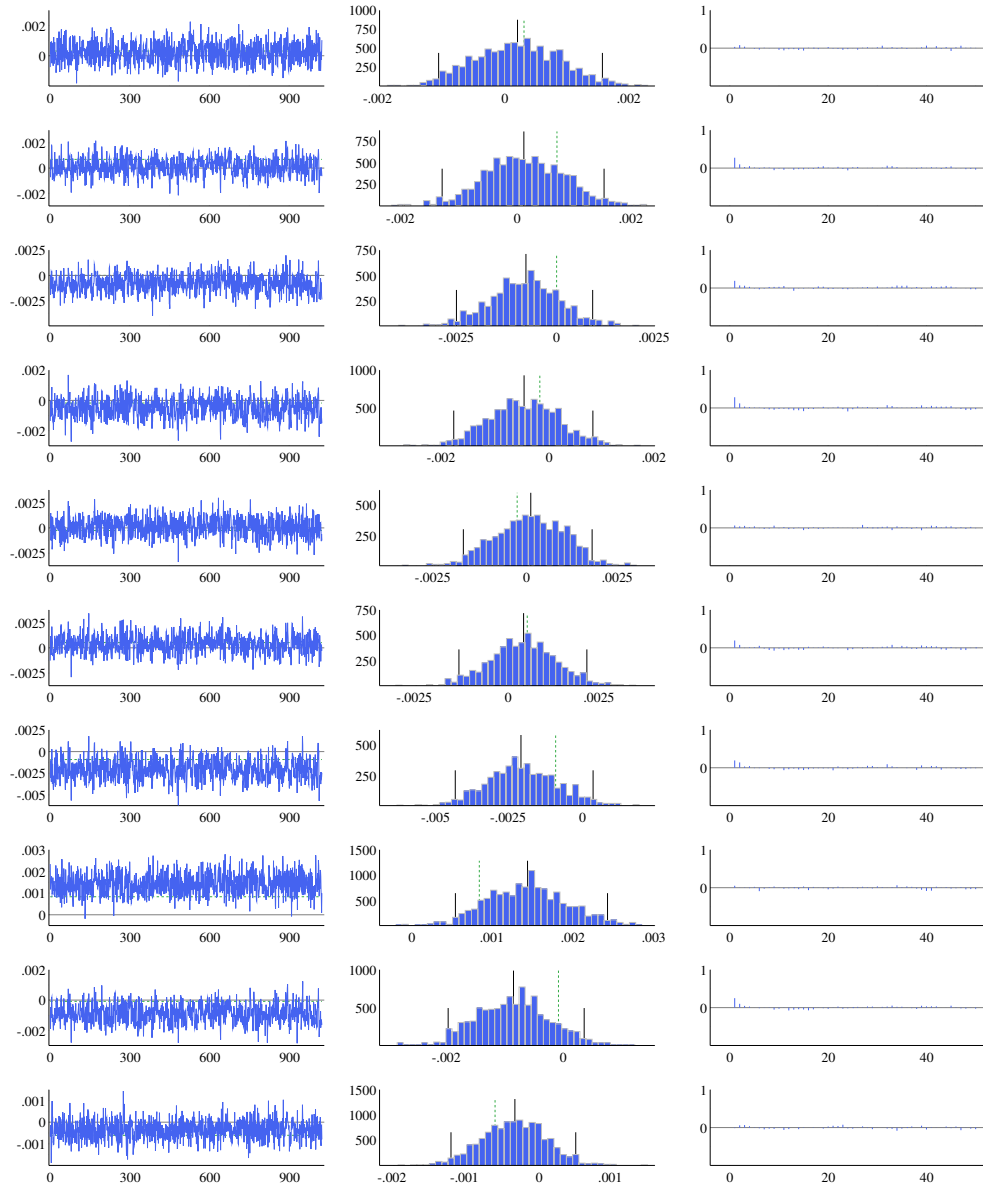


Figura C.1: Análise MCMC sem blocos para as médias θ_i . As linhas pontilhadas nos gráficos da cadeia MCMC e nos gráficos das densidades indicam o valor real do parâmetro. As linhas nos gráficos das densidades são os valores para a mediana e os percentis de 2,5% e 97,5% da cadeia.

1

0

1

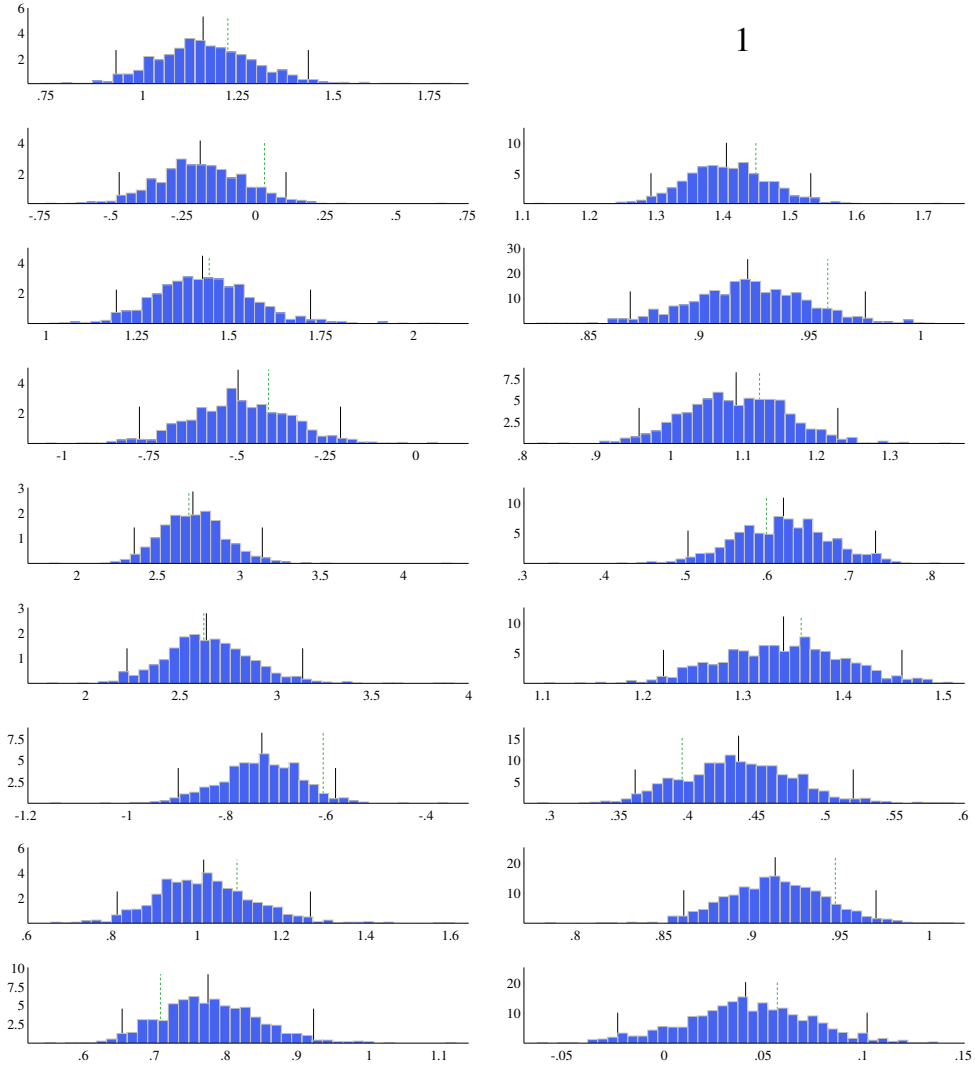


Figura C.2: Histogramas para a cadeia MCMC gerada para os elementos irrestritos da matriz de cargas X . As linhas verticais representam os percentis de 2,5%, 5%, 97,5% e o valor real do parâmetro utilizado na simulação.

1

0

1

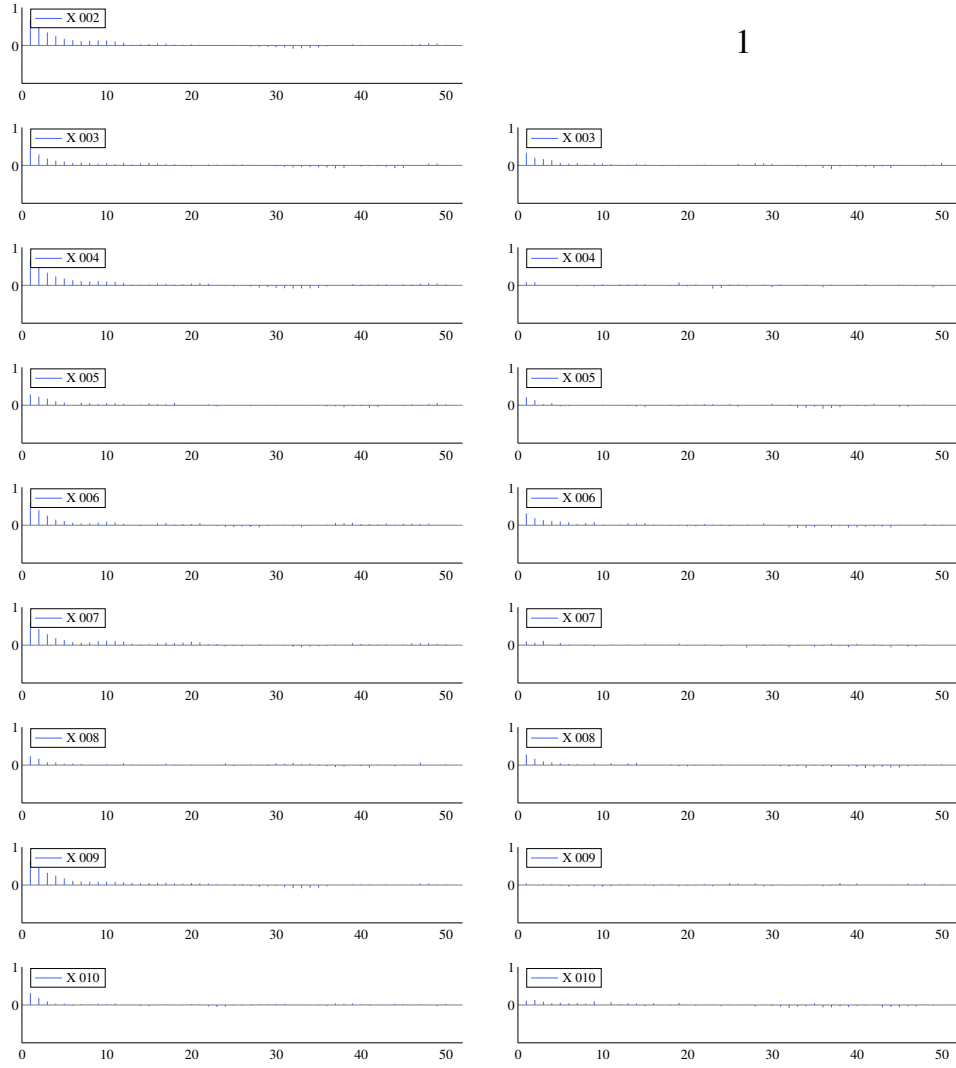


Figura C.3: Função de auto-correlação para os valores da cadeia MCMC gerada para os elementos irrestritos da matriz de Cargas X.

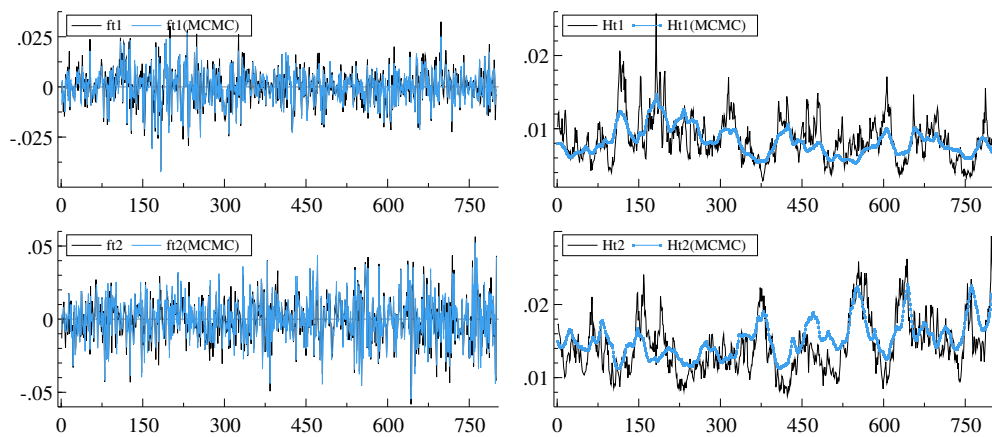


Figura C.4: Fatores extraídos do conjunto de séries analisadas e seus desvios padrões condicionais.

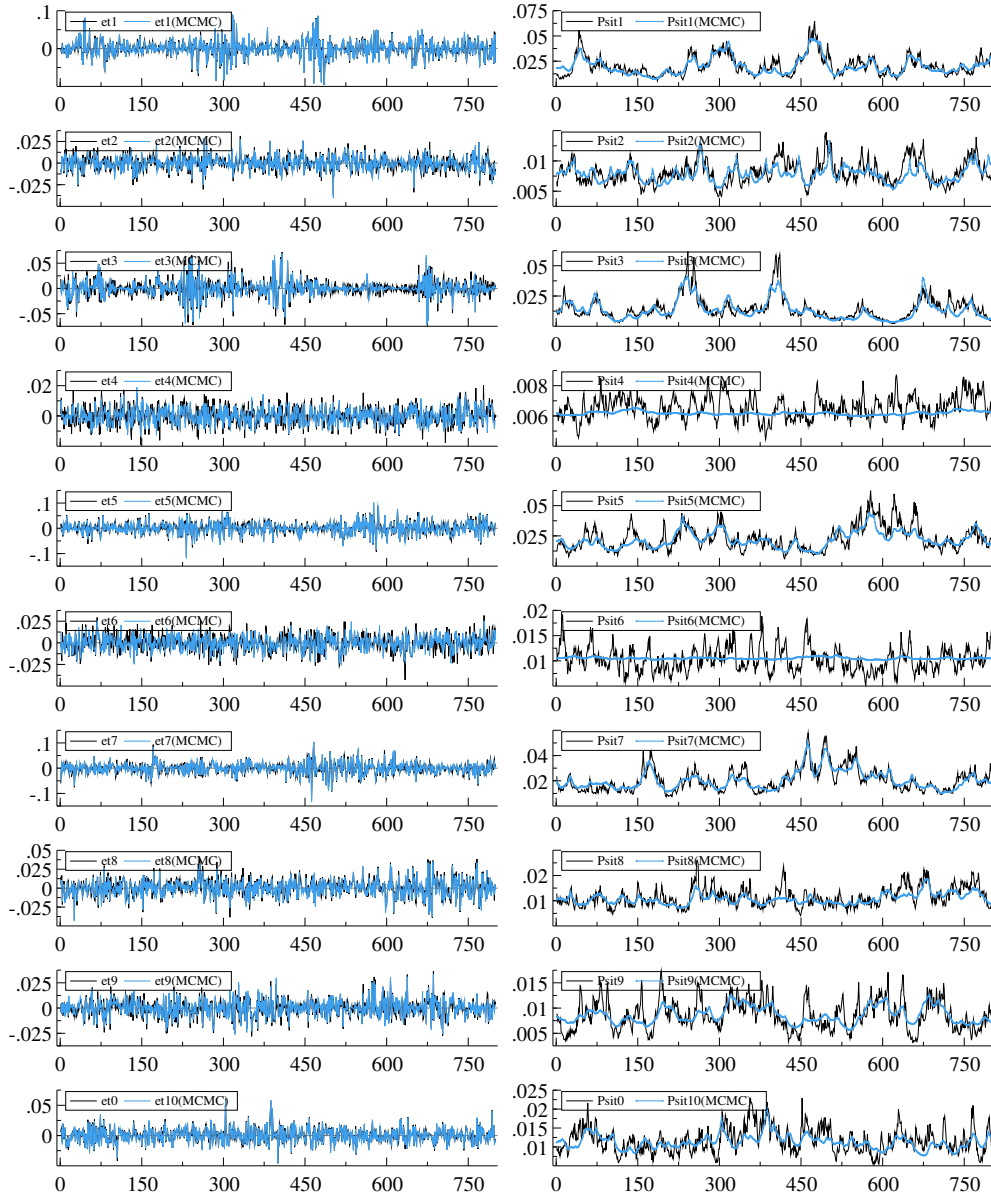


Figura C.5: Efeitos específicos extraídos do conjunto de séries analisadas e seus desvios padrões condicionais.

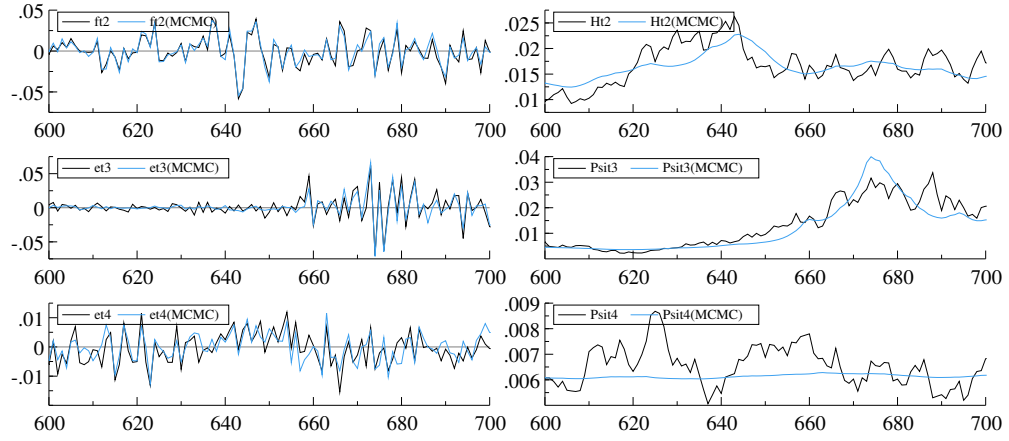


Figura C.6: f_{2t} , ε_{3t} e ε_{3t} para $t = 600, \dots, 700$ e desvios padrões condicionais.

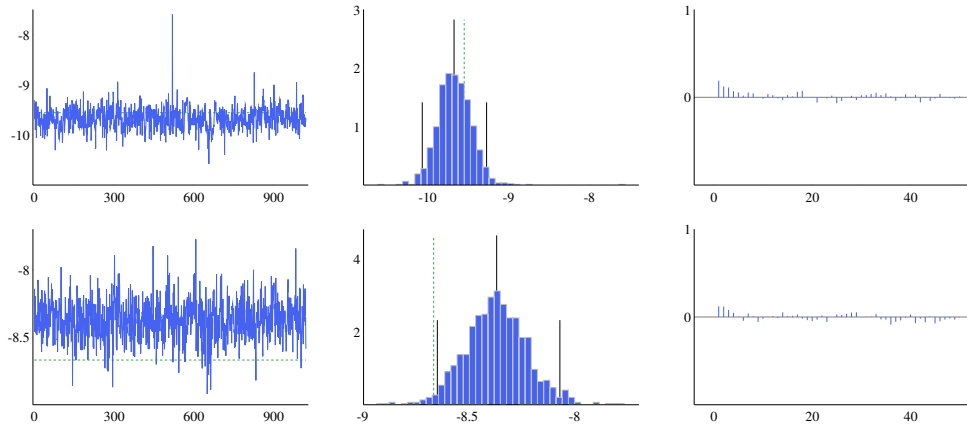


Figura C.7: Cadeia MCMC, histograma e função de auto-correlação para as médias do processo de VE dos fatores comuns μ^f .

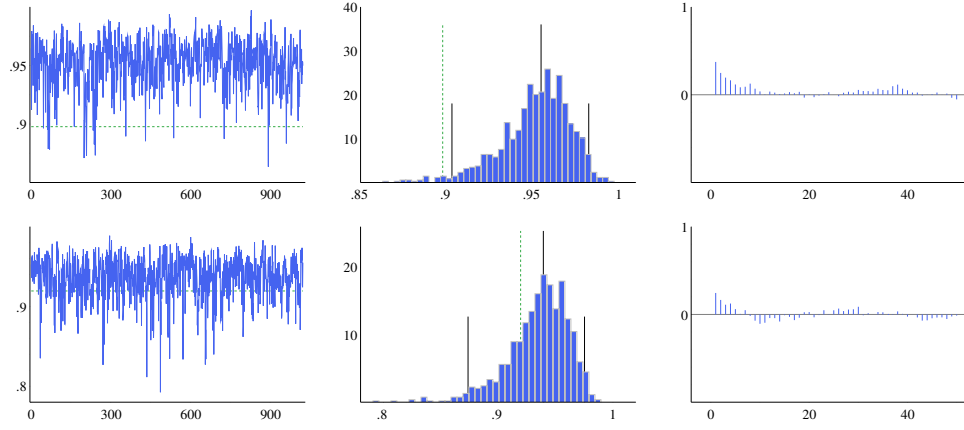


Figura C.8: Cadeia MCMC, histograma e função de auto-correlação para os coeficientes auto-regressivos ϕ^f do processo de VE dos fatores comuns.

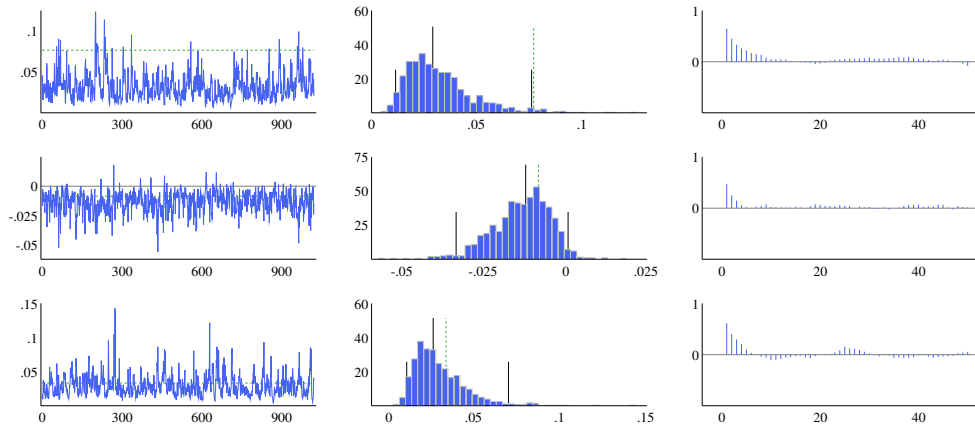


Figura C.9: Cadeia MCMC, histograma e função de auto-correlação para os elementos da matriz de variâncias das inovações do processo de VE dos fatores comuns Σ_η^f .

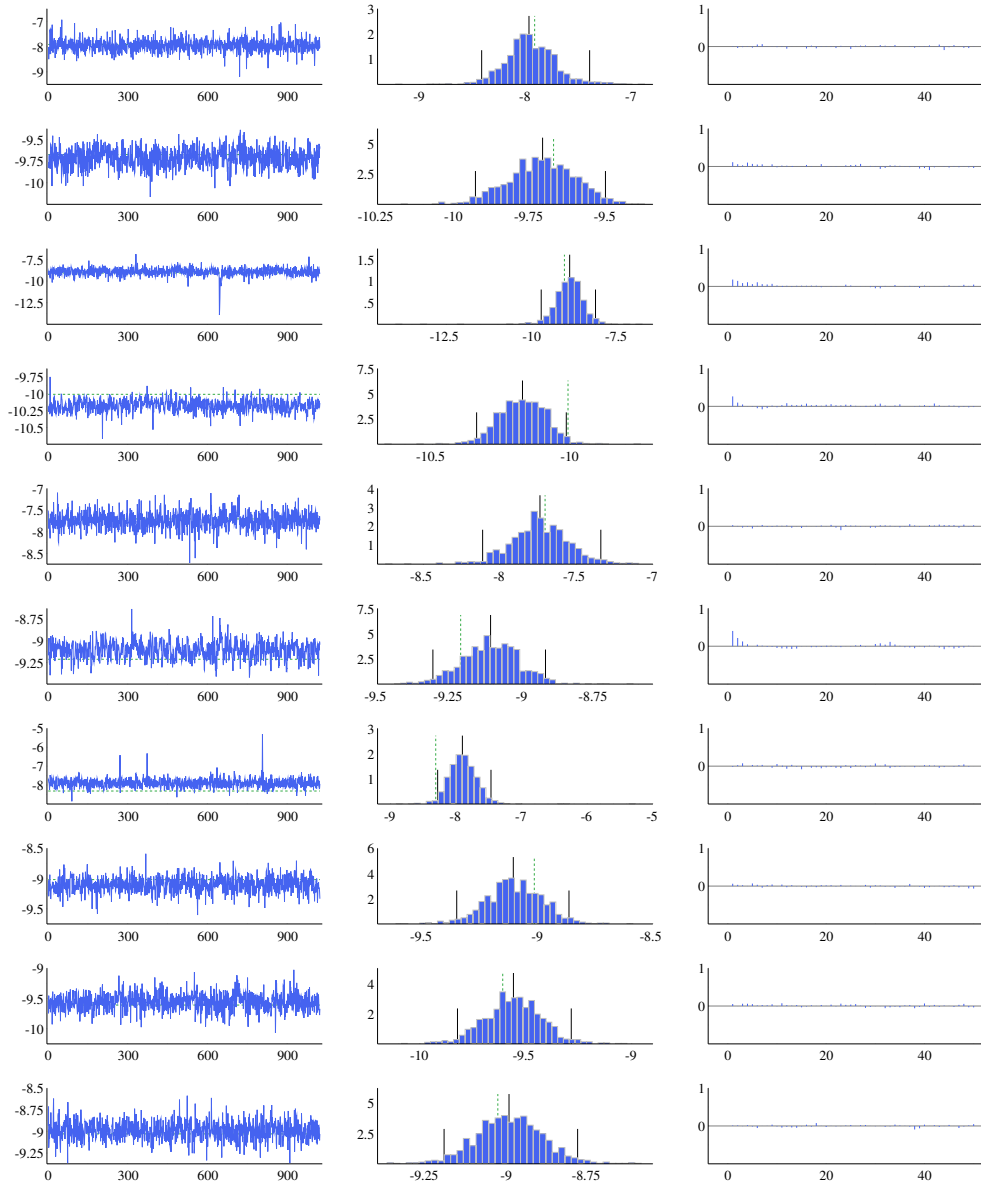


Figura C.10: Cadeia MCMC, histograma e função de auto-correlação para as médias μ^ε dos processos de VE dos efeitos específicos.

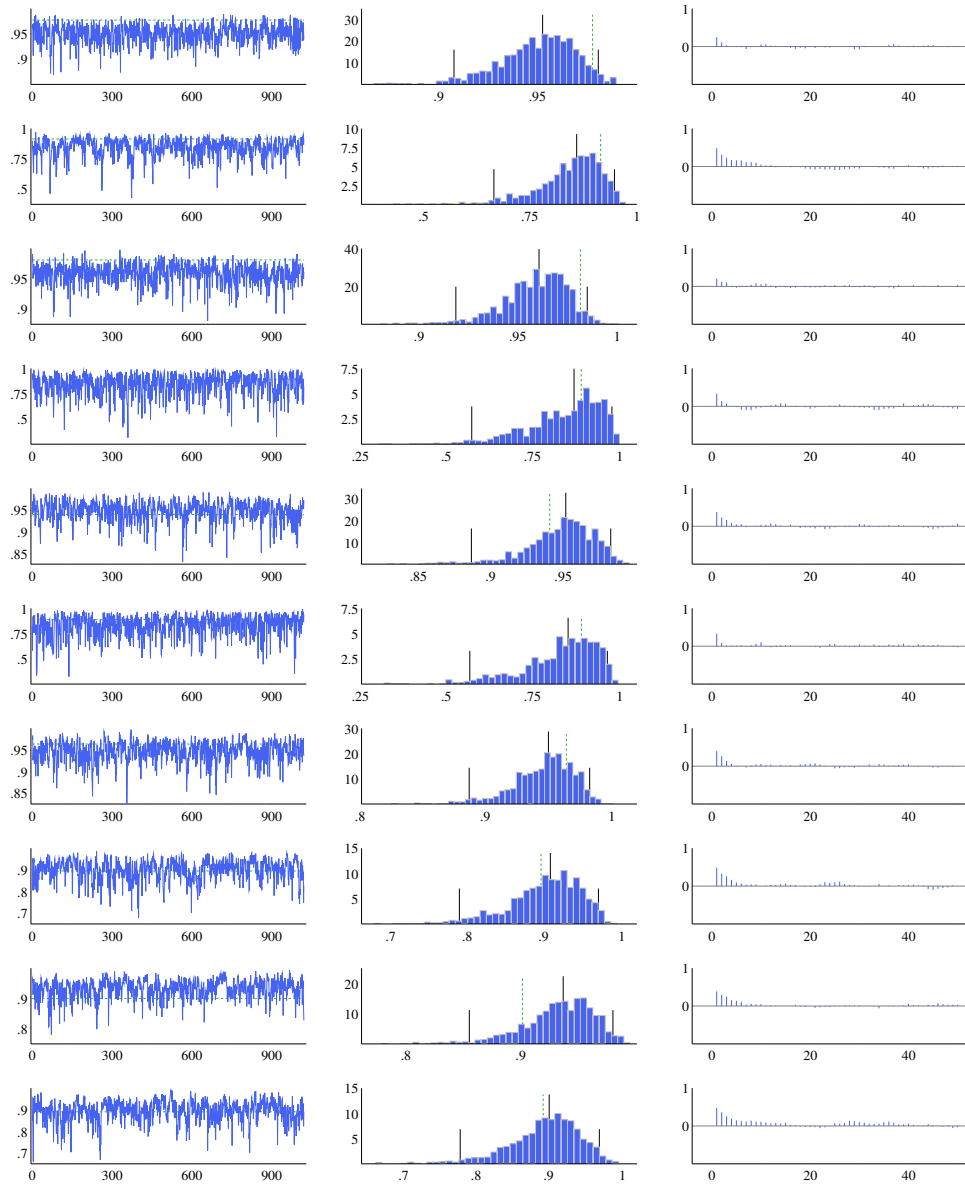


Figura C.11: Cadeia MCMC, histograma e função de auto-correlação para os coeficientes auto-regressivos ϕ^ε do processo de VE dos efeitos específicos.

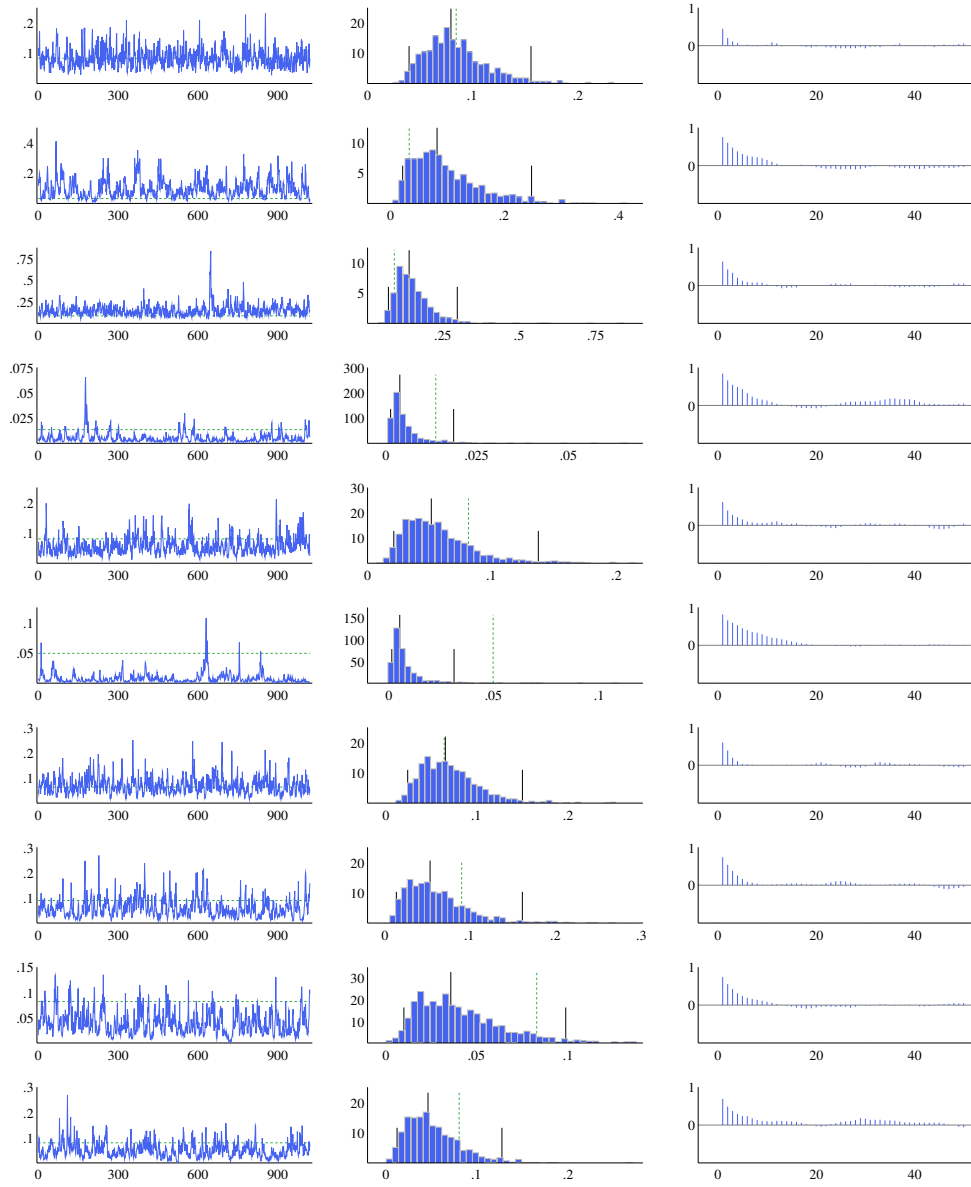


Figura C.12: Cadeia MCMC, histograma e função de auto-correlação para as variâncias das invoações $\sigma_{\eta}^{\varepsilon}$ do processo de VE dos efeitos específicos.

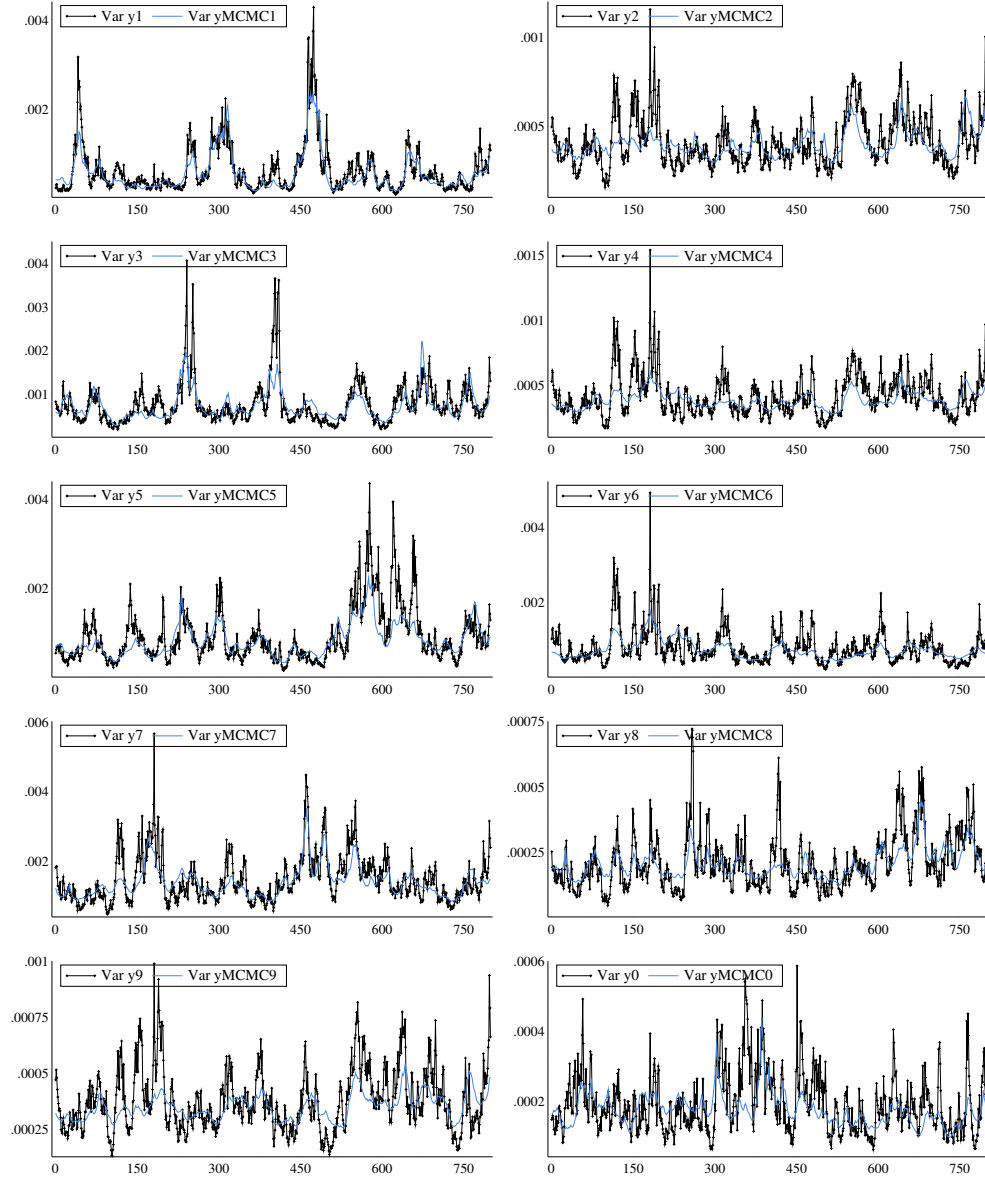


Figura C.13: Estimativas para as variâncias condicionais dadas pelo MF-VE para cada série dadas pela análise MCMC sem blocos.

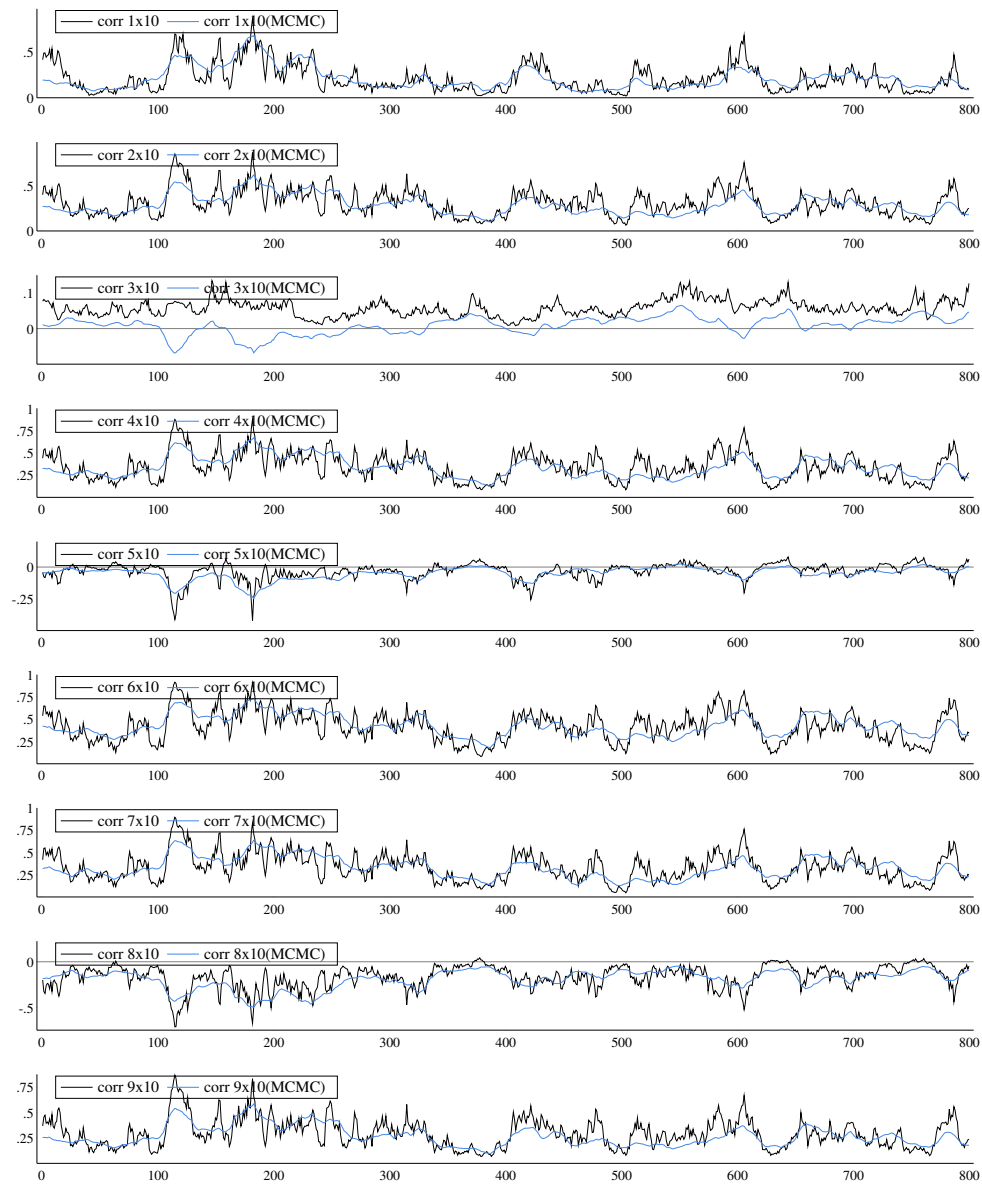


Figura C.14: Estimativas para as correlações entre as séries analisadas através do MF-VE - análise MCMC utilizando blocos.

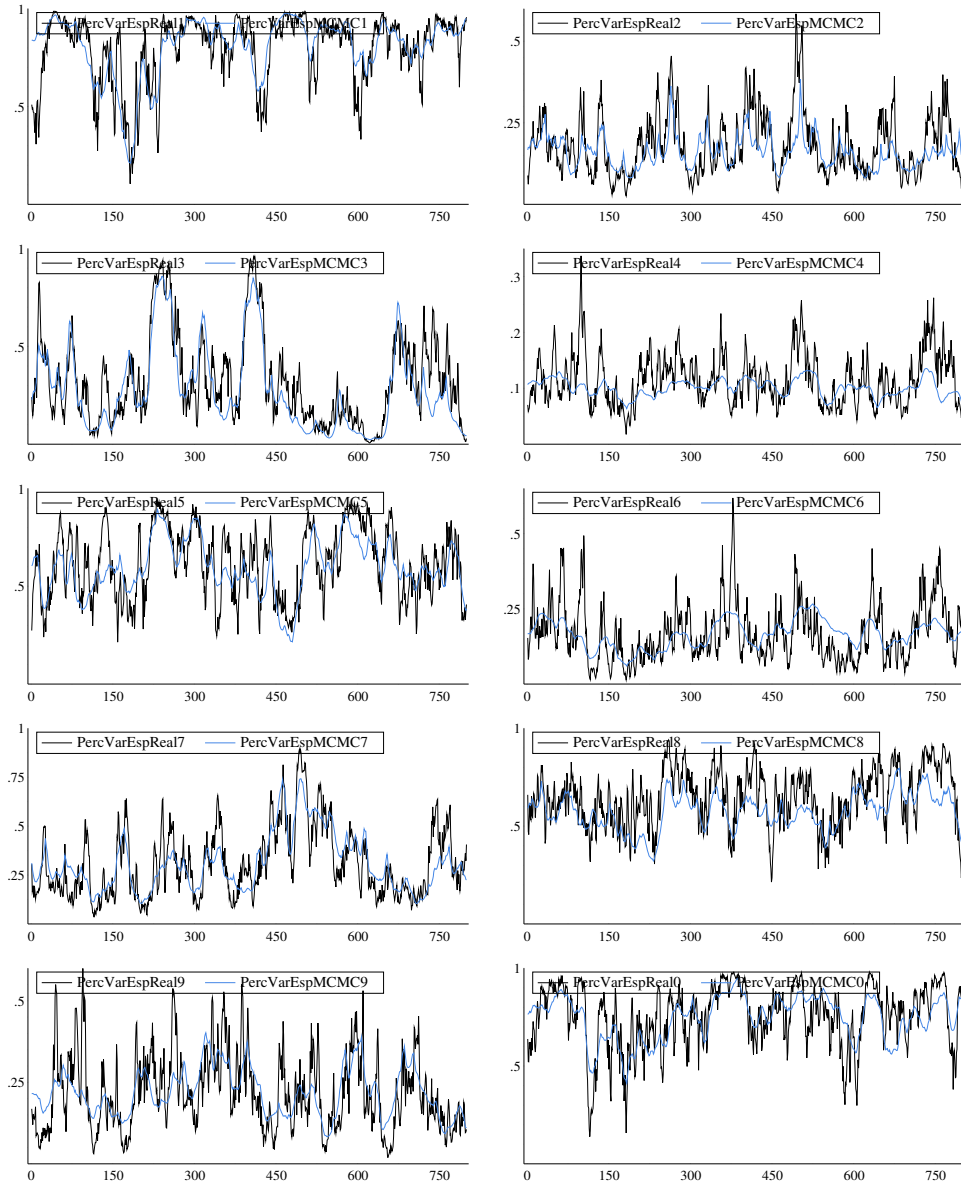


Figura C.15: Percentual da variância de cada série em relação à variância total - diagonal de Σ_t .

C.2 Simulação MCMC utilizando blocos

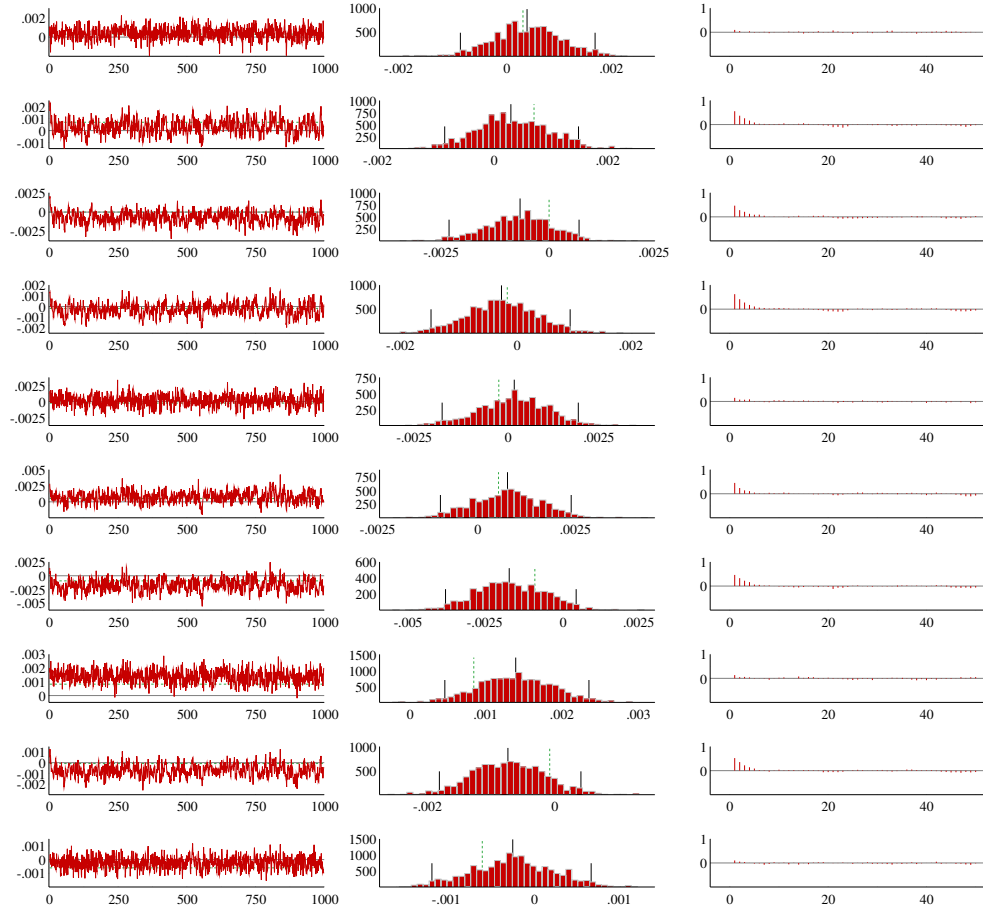


Figura C.16: Cadeia MCMC, histograma e função de auto-correlação para as médias θ_i do modelo de fatores.

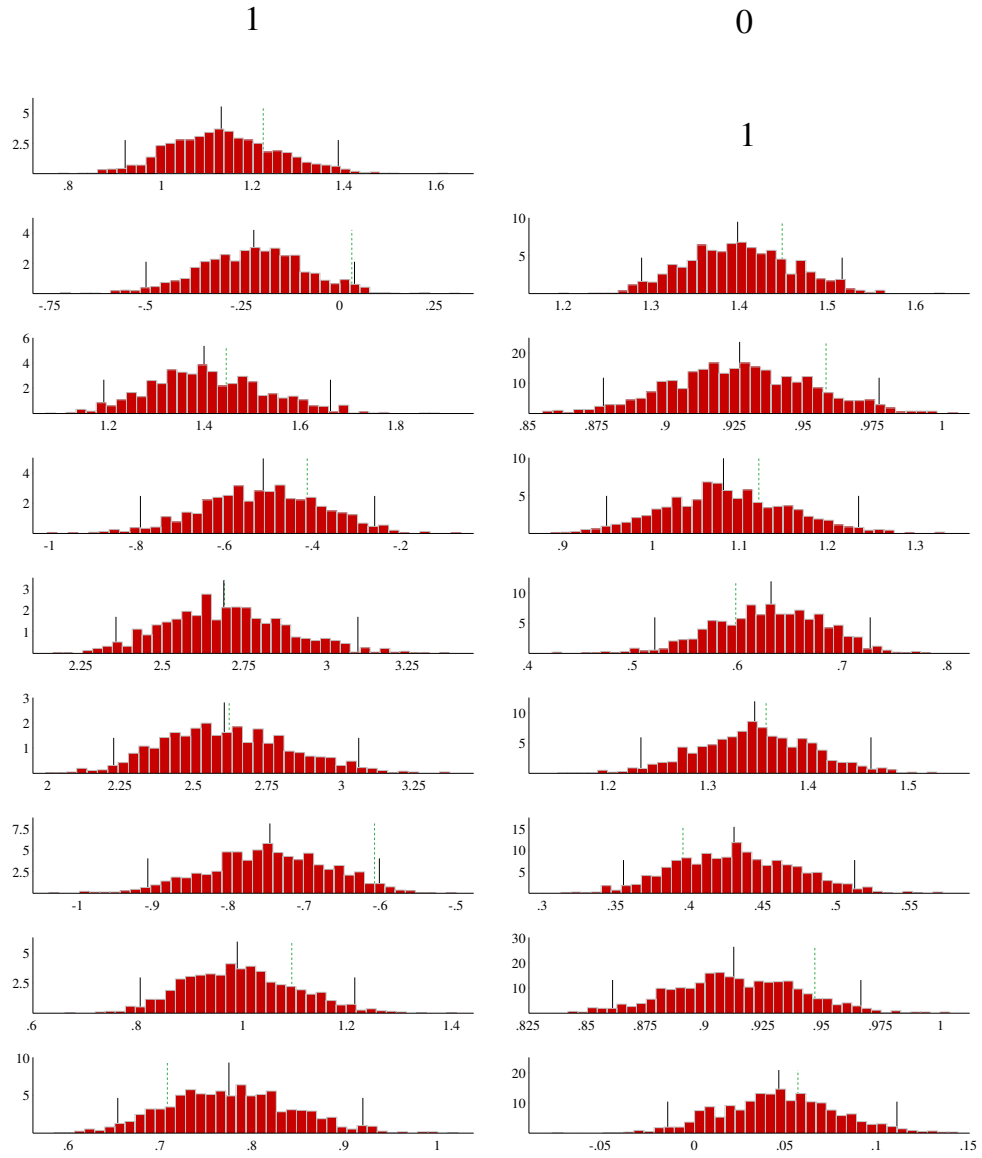


Figura C.17: Histogramas para a cadeia MCMC gerada para os elementos irrestritos da matriz de cargas X . As linhas verticais representam os percentis de 2,5%, 5%, 97,5% e o valor real do parâmetro utilizado na simulação.

1

0

1

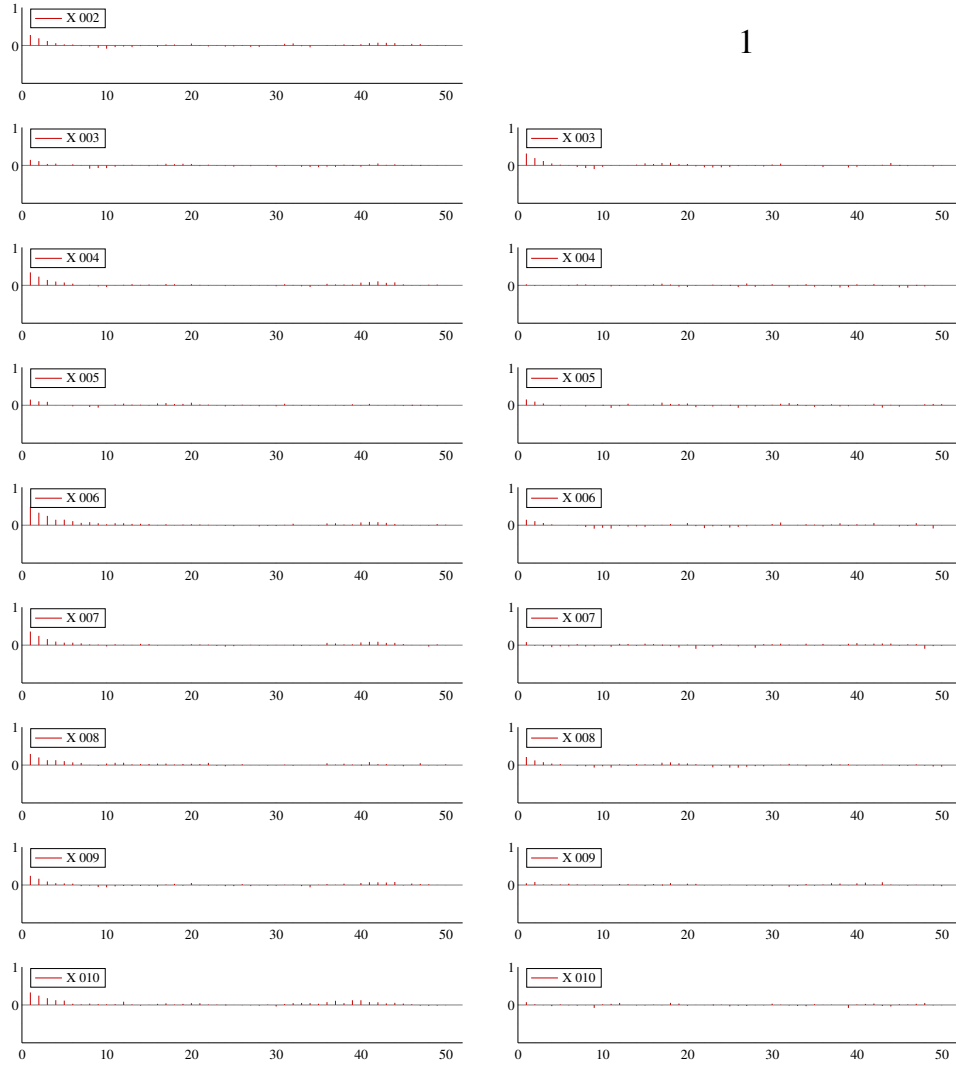


Figura C.18: Função de auto-correlação para os valores da cadeia MCMC gerada para os elementos irrestritos da matriz de Cargas X.

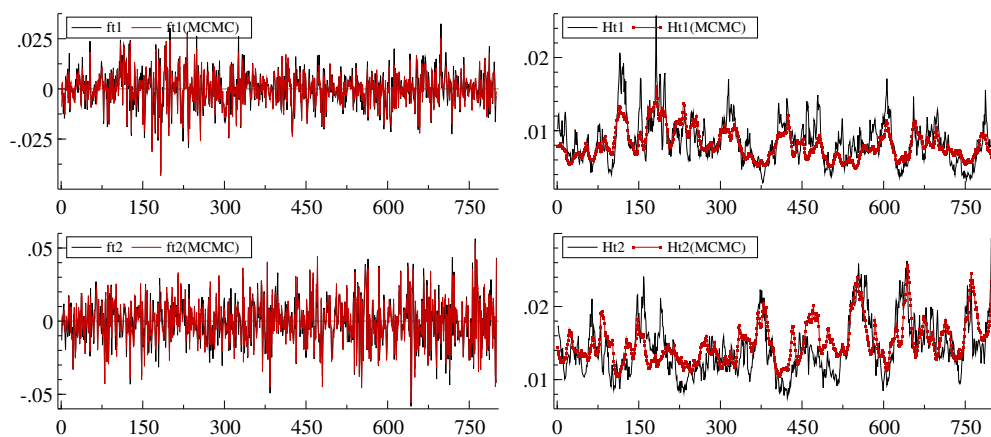


Figura C.19: Fatores extraídos do conjunto de séries analisadas e seus desvios padrões condicionais.

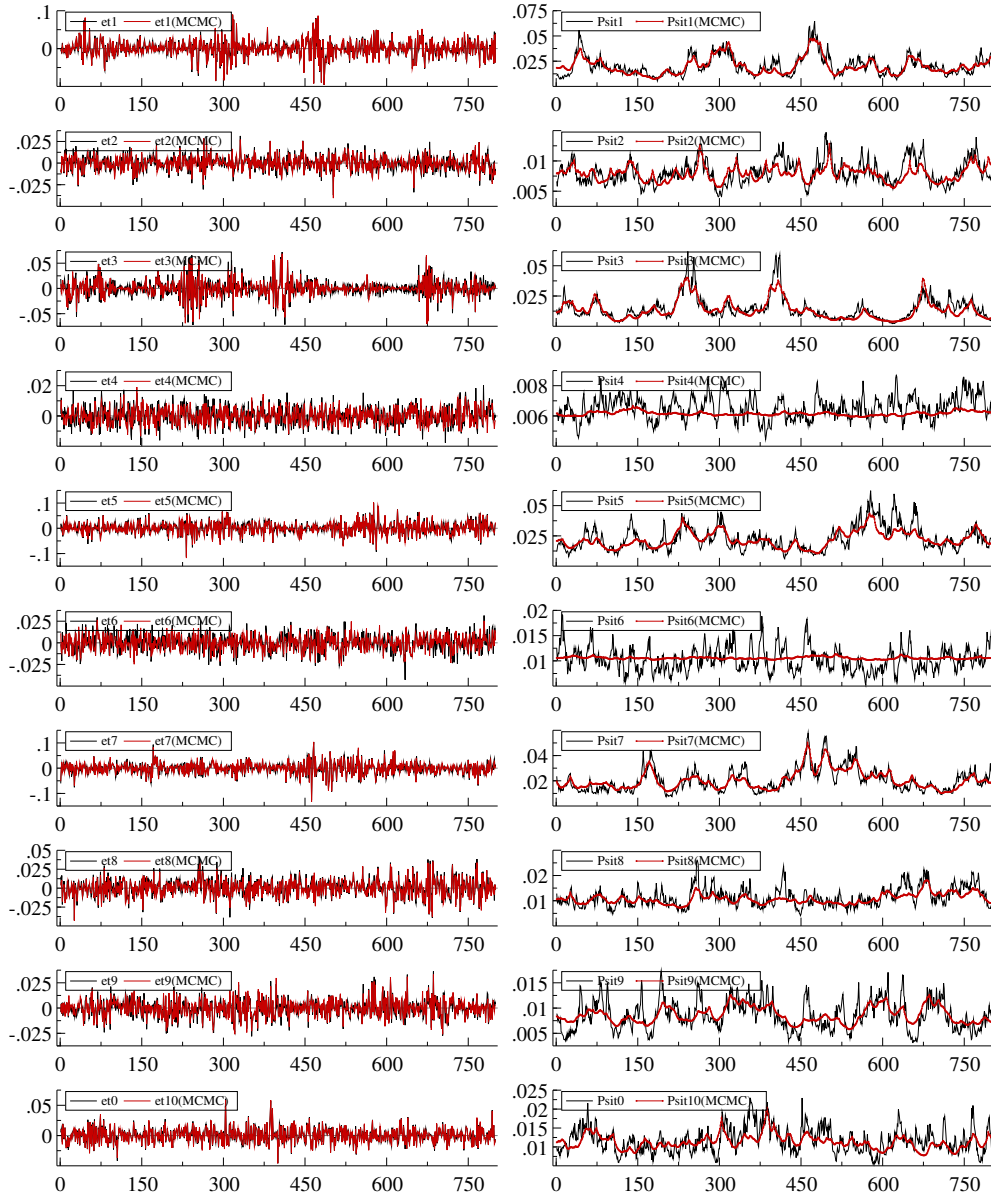


Figura C.20: Efeitos específicos extraídos do conjunto de séries analisadas e seus desvios padrões condicionais.

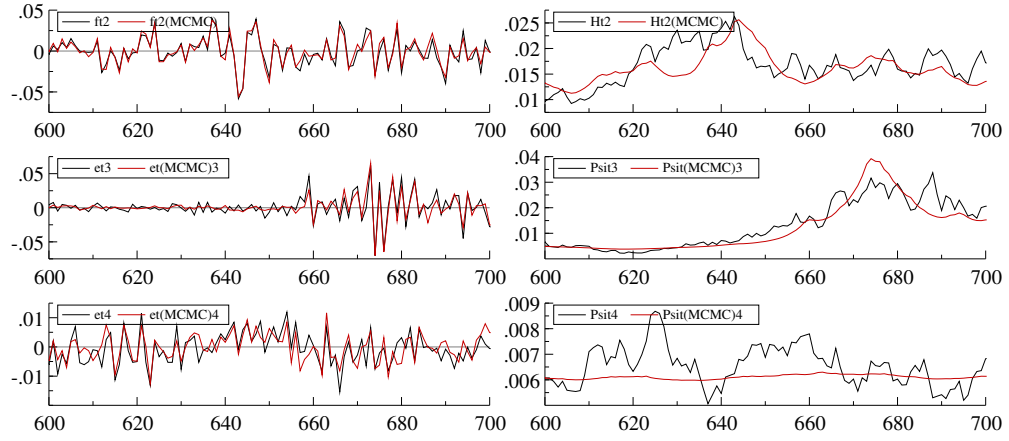


Figura C.21: f_{2t} , ε_{3t} e ε_{3t} para $t = 600, \dots, 700$ e desvios padrões condicionais.

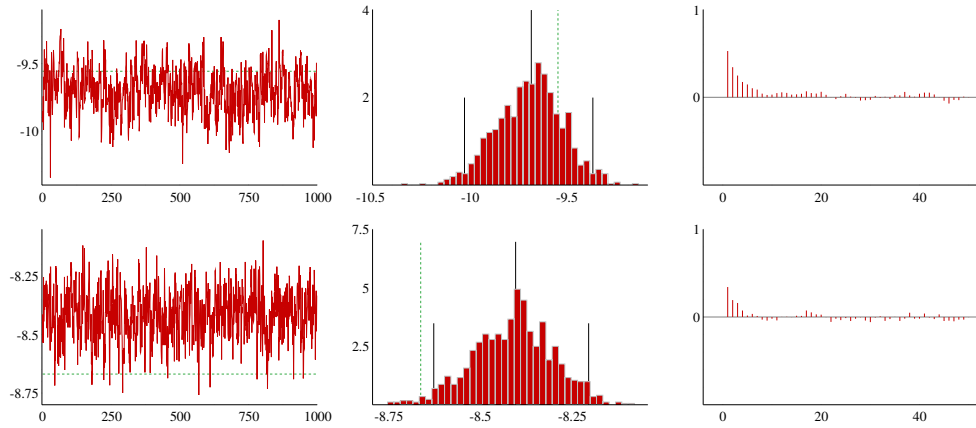


Figura C.22: Cadeia MCMC, histograma e função de auto-correlação para as médias do processo de VE dos fatores comuns μ^f .

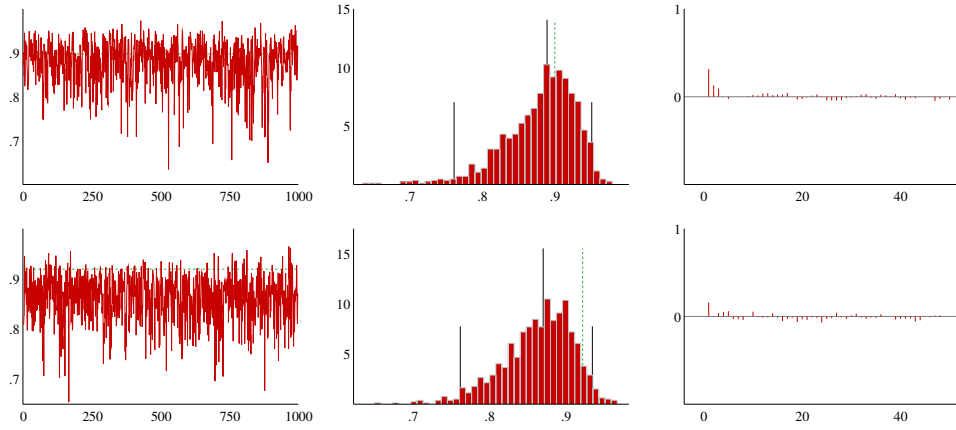


Figura C.23: Cadeia MCMC, histograma e função de auto-correlação para os coeficientes auto-regressivos ϕ^f do processo de VE dos fatores comuns.

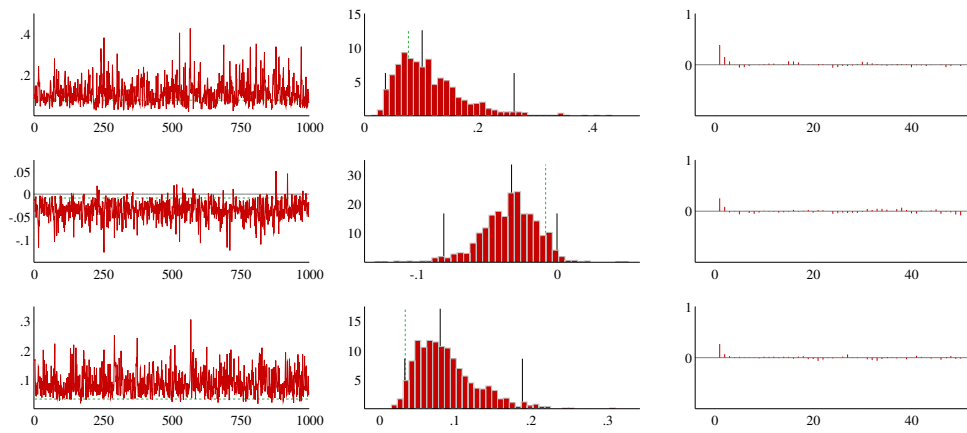


Figura C.24: Cadeia MCMC, histograma e função de auto-correlação para os elementos da matriz de variâncias das inovações do processo de VE dos fatores comuns Σ_η^f .

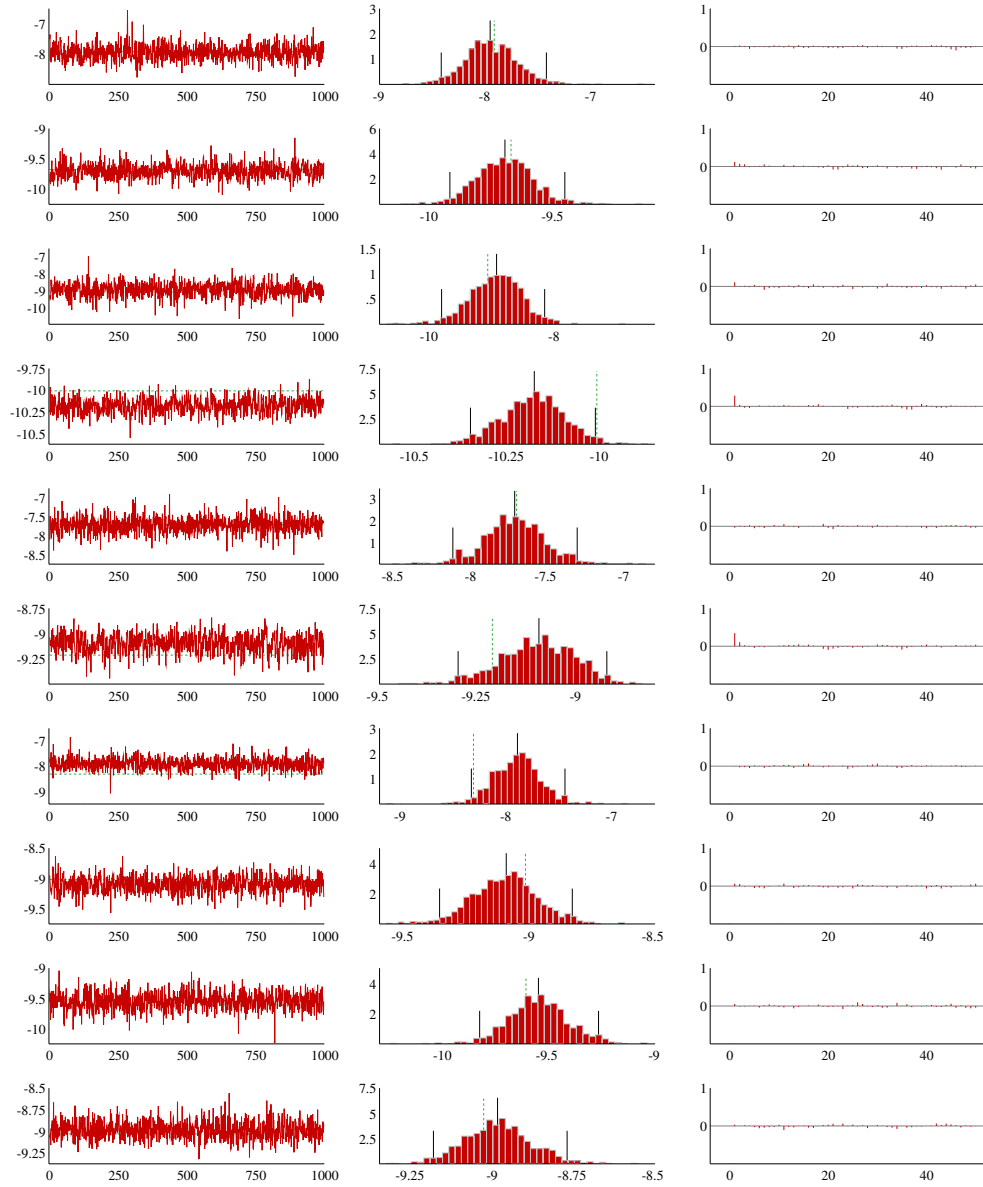


Figura C.25: Cadeia MCMC, histograma e função de auto-correlação para as médias μ^ε dos processos de VE dos efeitos específicos.

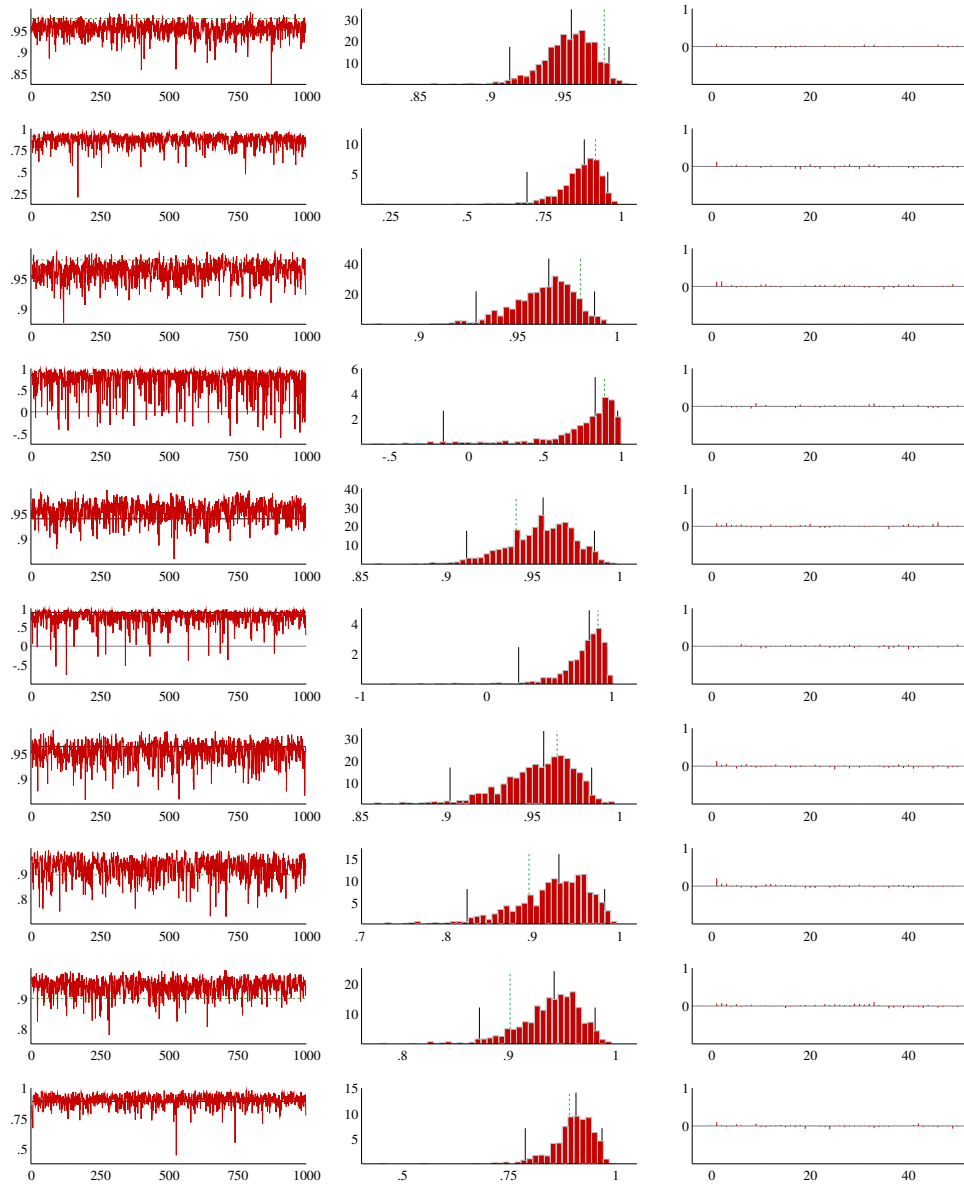


Figura C.26: Cadeia MCMC, histograma e função de auto-correlação para os coeficientes auto-regressivos ϕ^ε do processo de VE dos efeitos específicos.

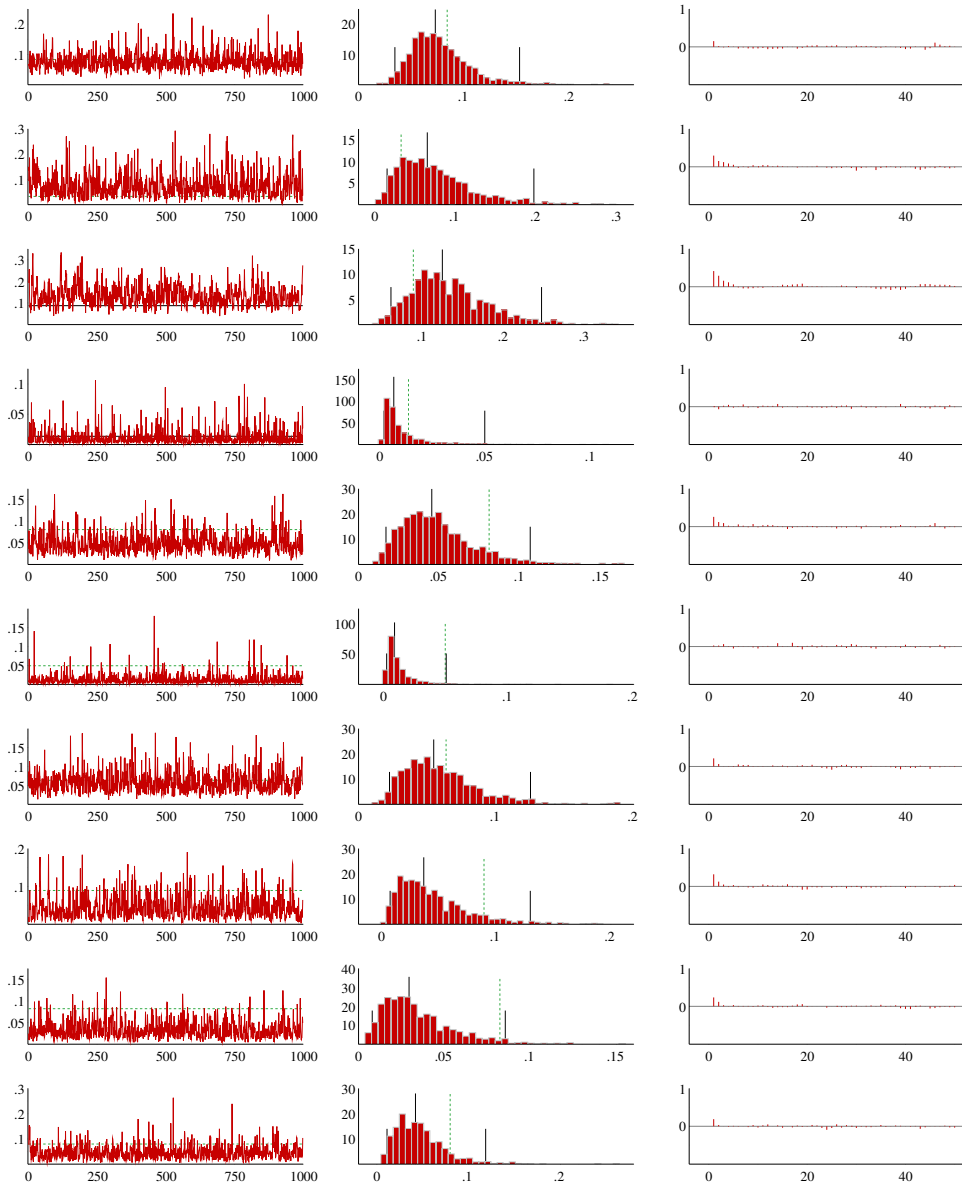


Figura C.27: Cadeia MCMC, histograma e função de auto-correlação para os elementos da matriz de variâncias e covariâncias $\sigma_{\eta}^{\varepsilon}$ das invoações do processo de VE dos efeitos específicos.

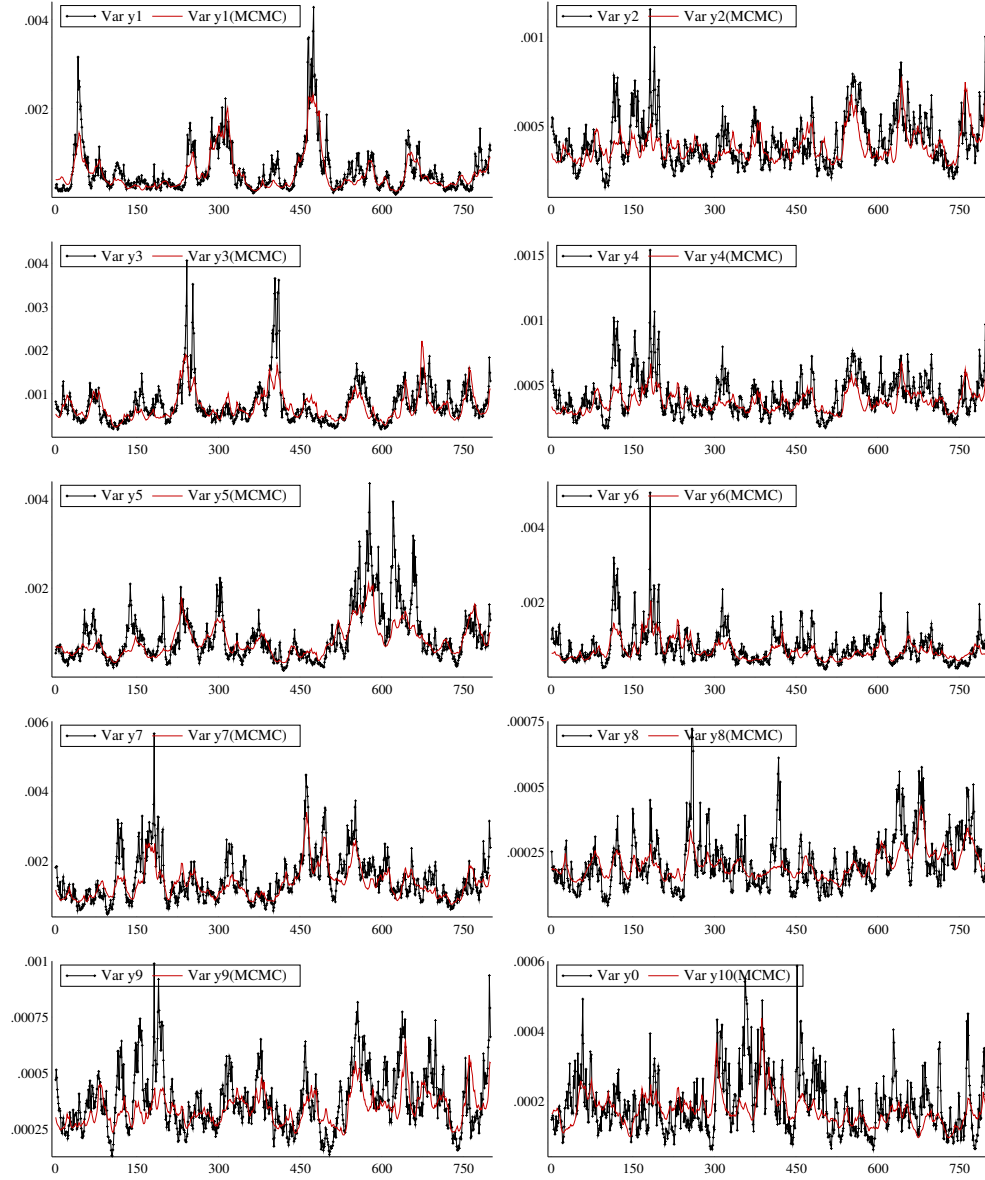


Figura C.28: Estimativas para as variâncias condicionais dadas pelo MF-VE para cada série dadas pela análise MCMC utilizando blocos.

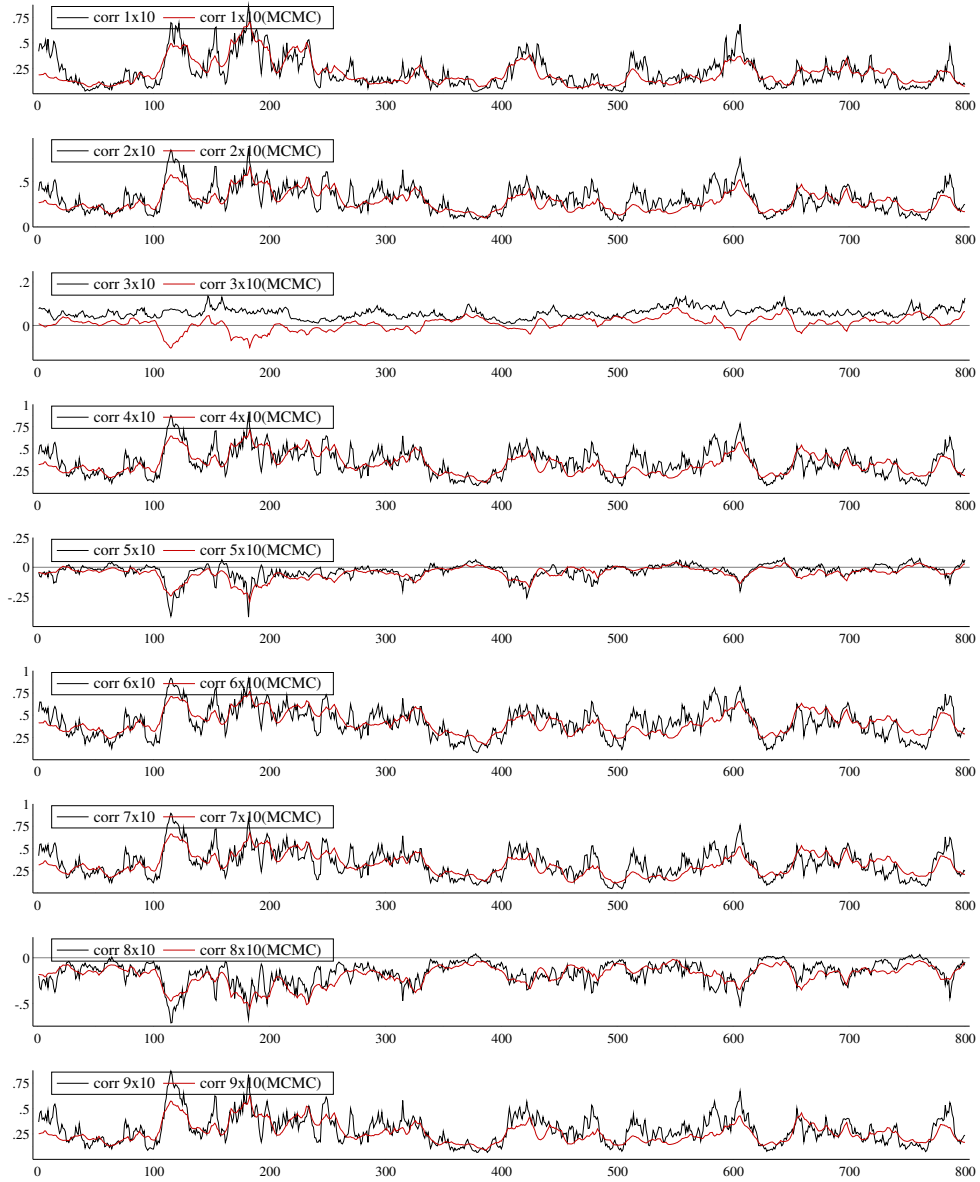


Figura C.29: Correlações entre as séries analisadas através do MF-VE - análise MCMC utilizando blocos.

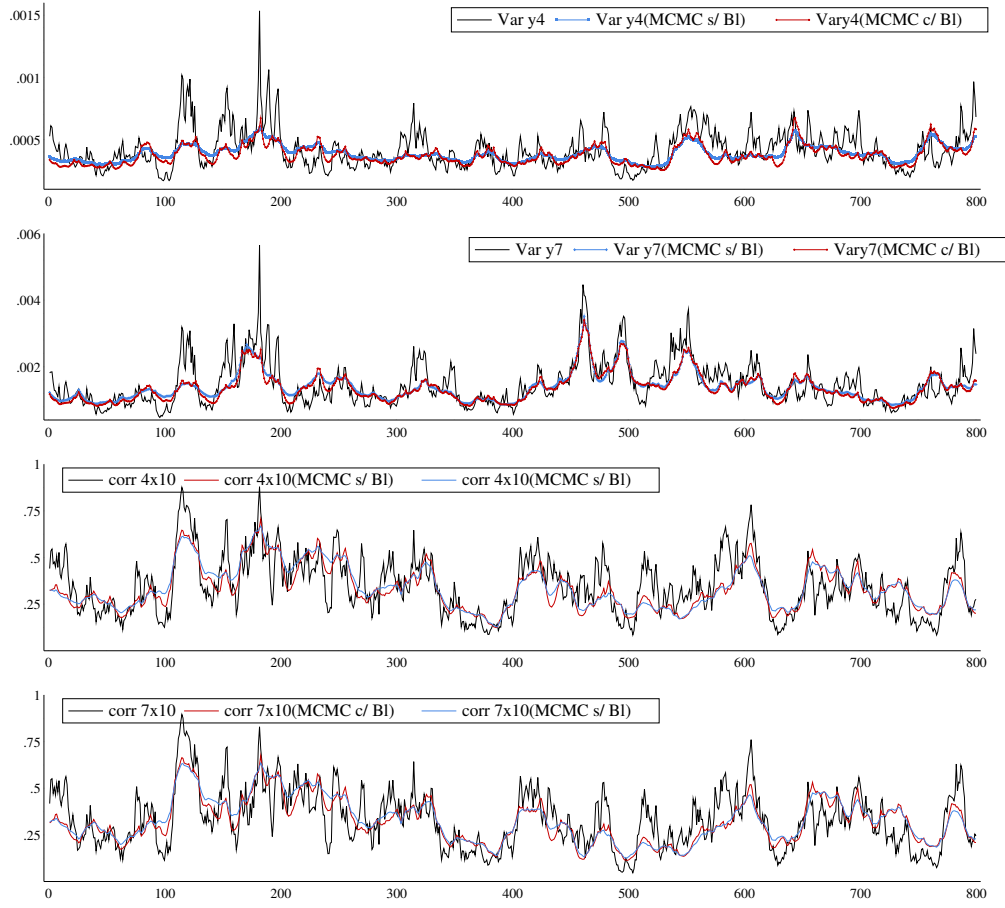


Figura C.30: Comparação das variâncias e correlações condicionais das análises MCMC.

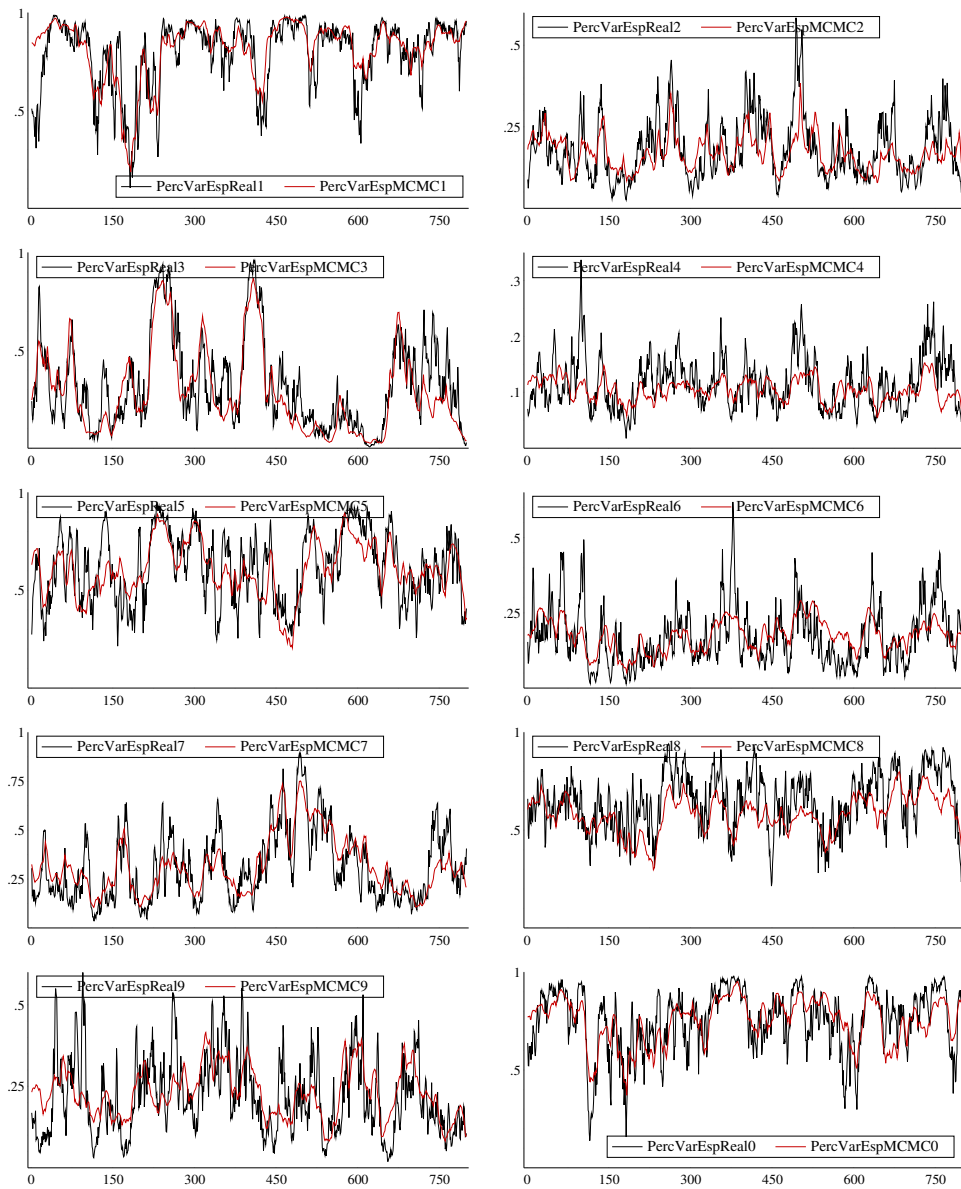


Figura C.31: Percentual da variância de cada série em relação à variância total - diagonal de Σ_t .

Apêndice D

Análise das taxas de câmbio

Este capítulo contém as figuras da análise MCMC aplicada ao conjunto de taxas de câmbio no capítulo 5. A primeira seção contém as figuras referentes à análise das taxas de câmbio com a especificação JPY-GBP, em seguida a segunda seção contém as figuras da análise com a especificação EUR-JPY e na última seção a análise sem a moeda BRL/Brasil.

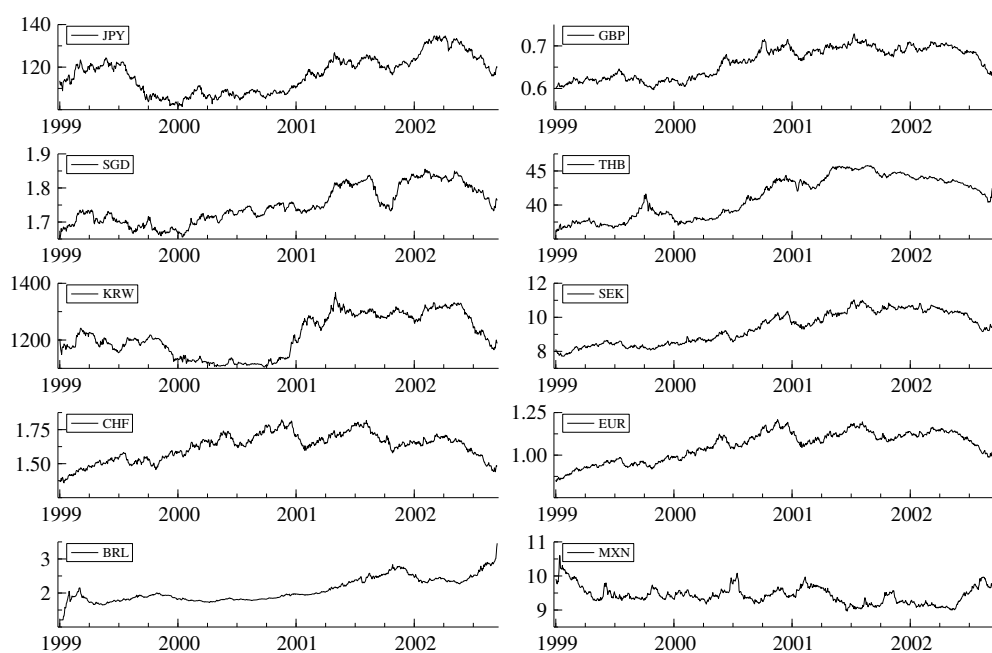


Figura D.1: Paridade com o dólar das moedas analisadas de 01/jan/1999 a 31/ago/2002.

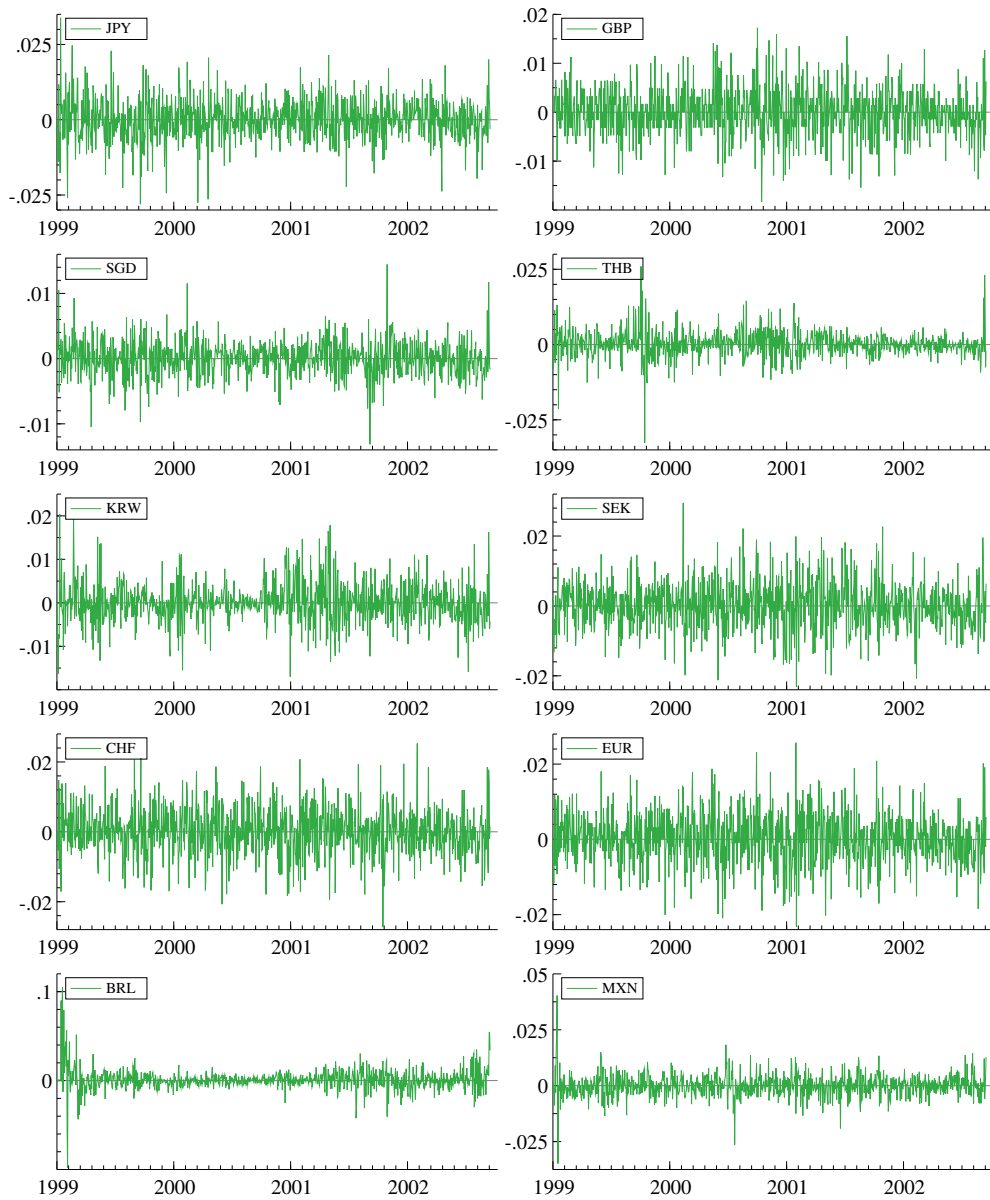


Figura D.2: Séries de retornos analisadas.

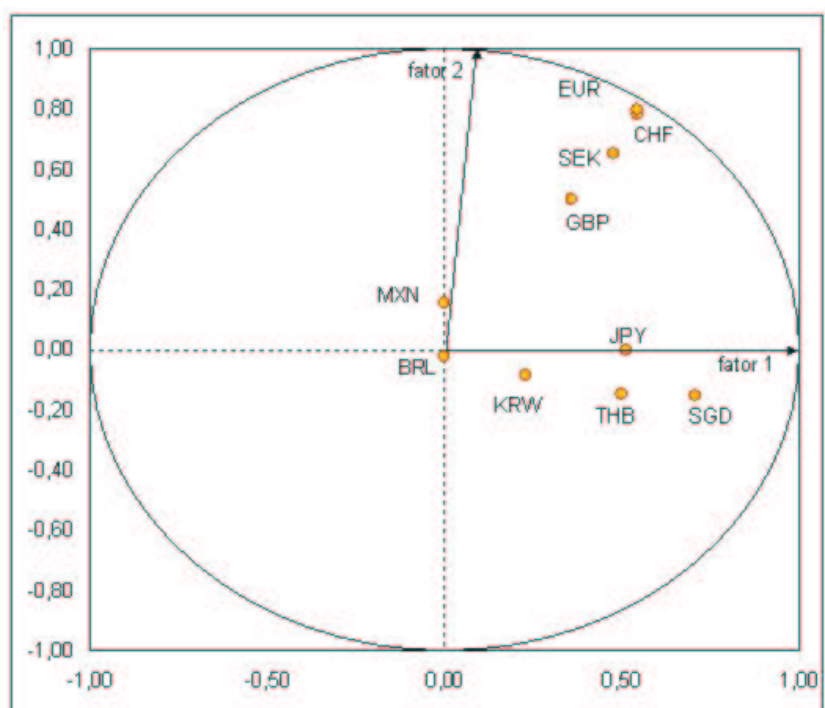


Figura D.3: Representação das moedas analisadas no espaço dos fatores.

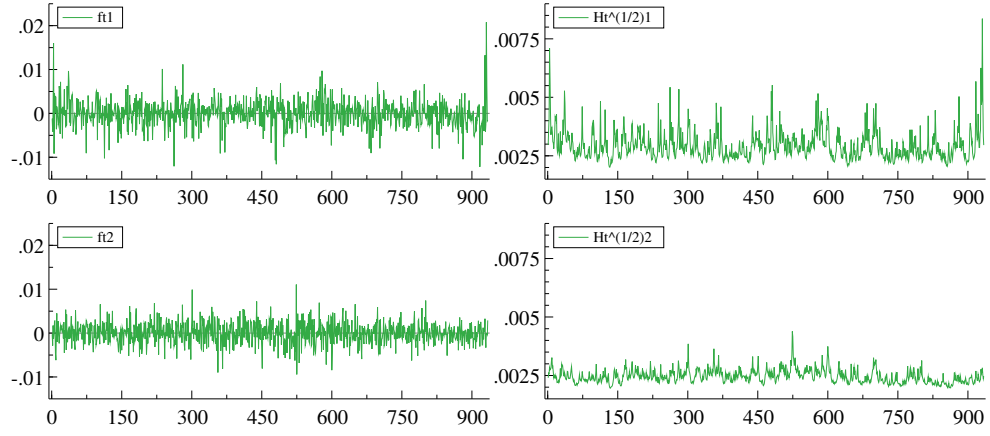


Figura D.4: Médias da simulação MCMC para os fatores comuns f_t e seus respectivos desvios padroes condicionais $\exp(\lambda_t^f/2)$ dados pela simulação MCMC.

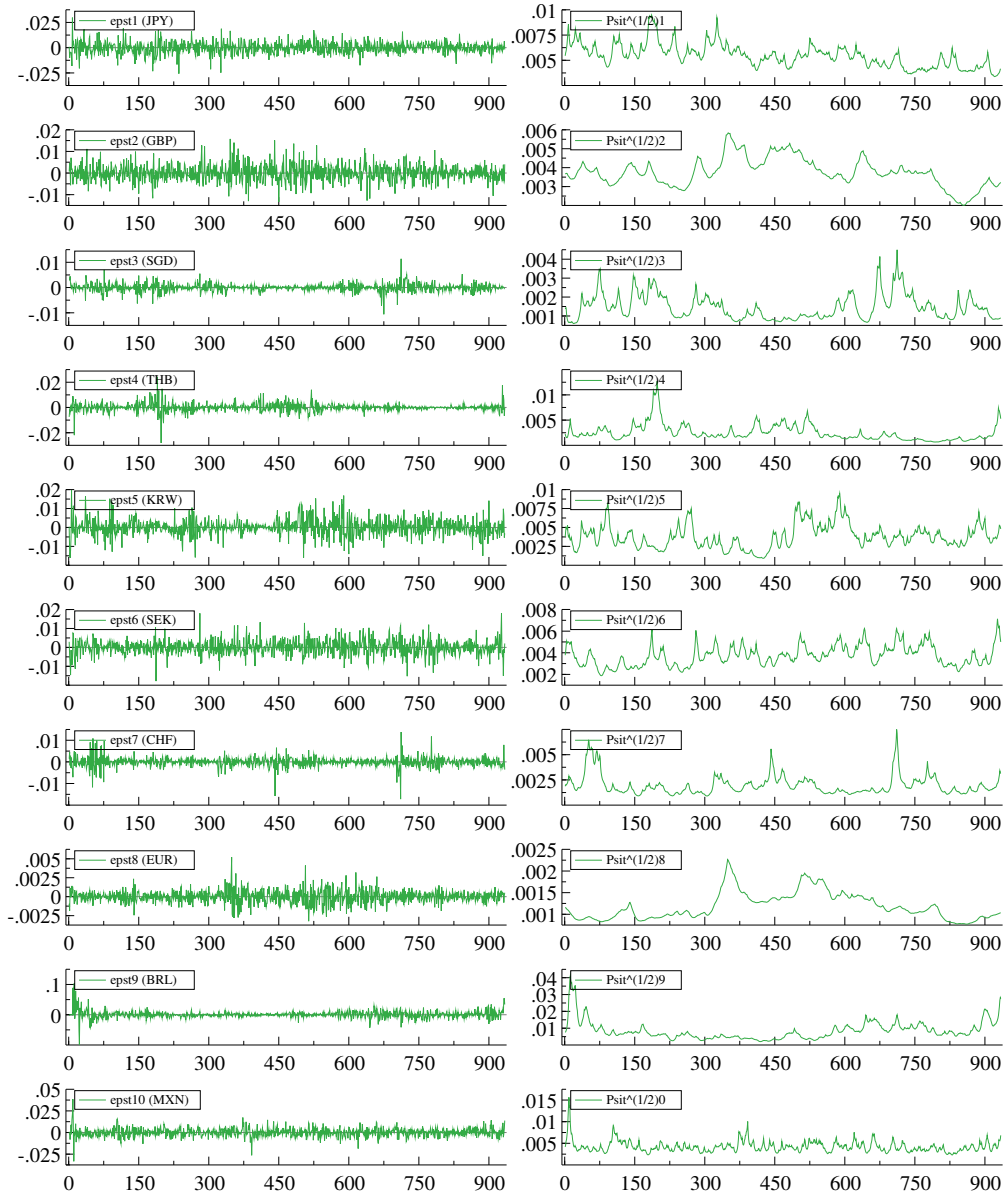


Figura D.5: Médias da simulação MCMC para os efeitos específicos ε_t e seus respectivos desvios padroes $\exp(\lambda_t^\varepsilon/2)$ dados pela simulação MCMC.

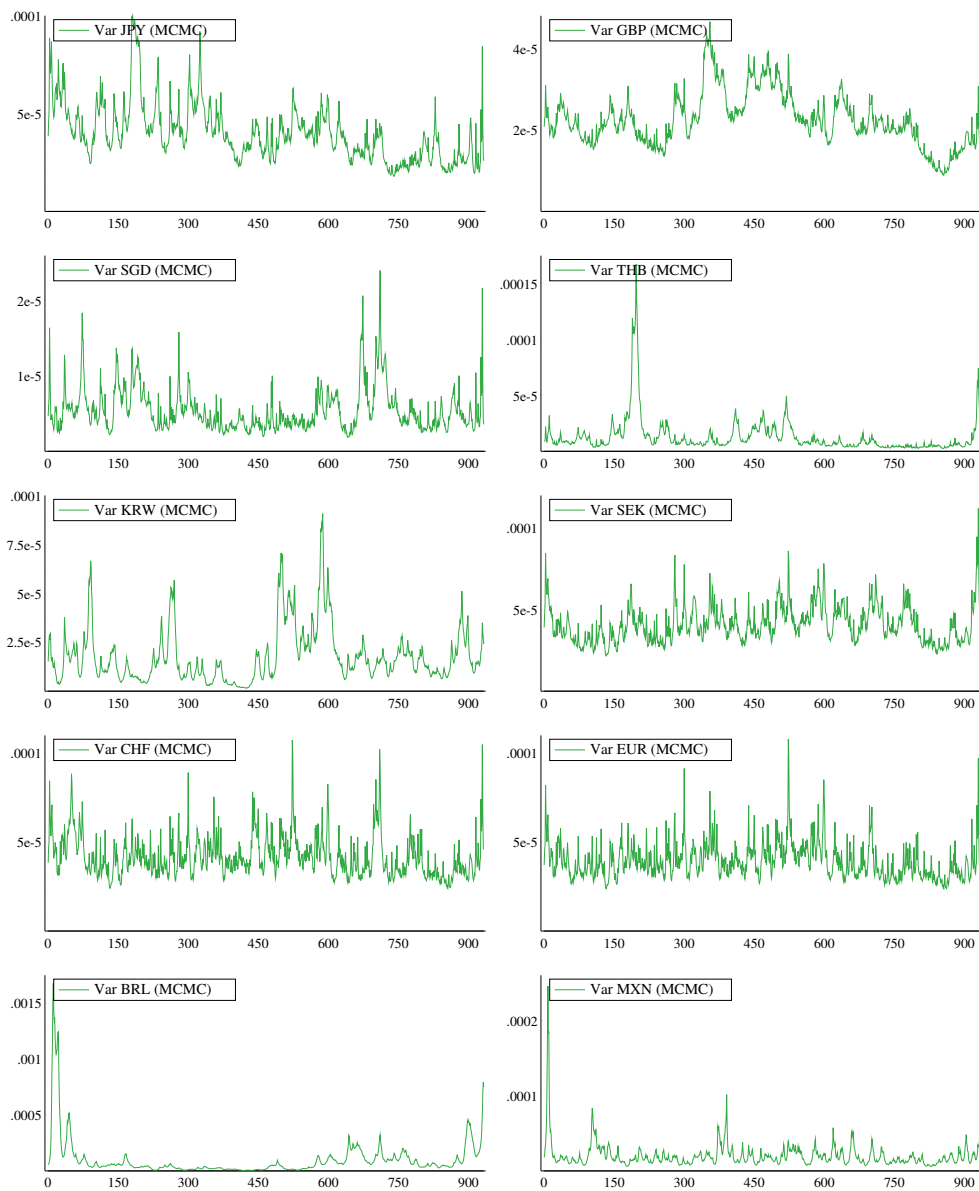
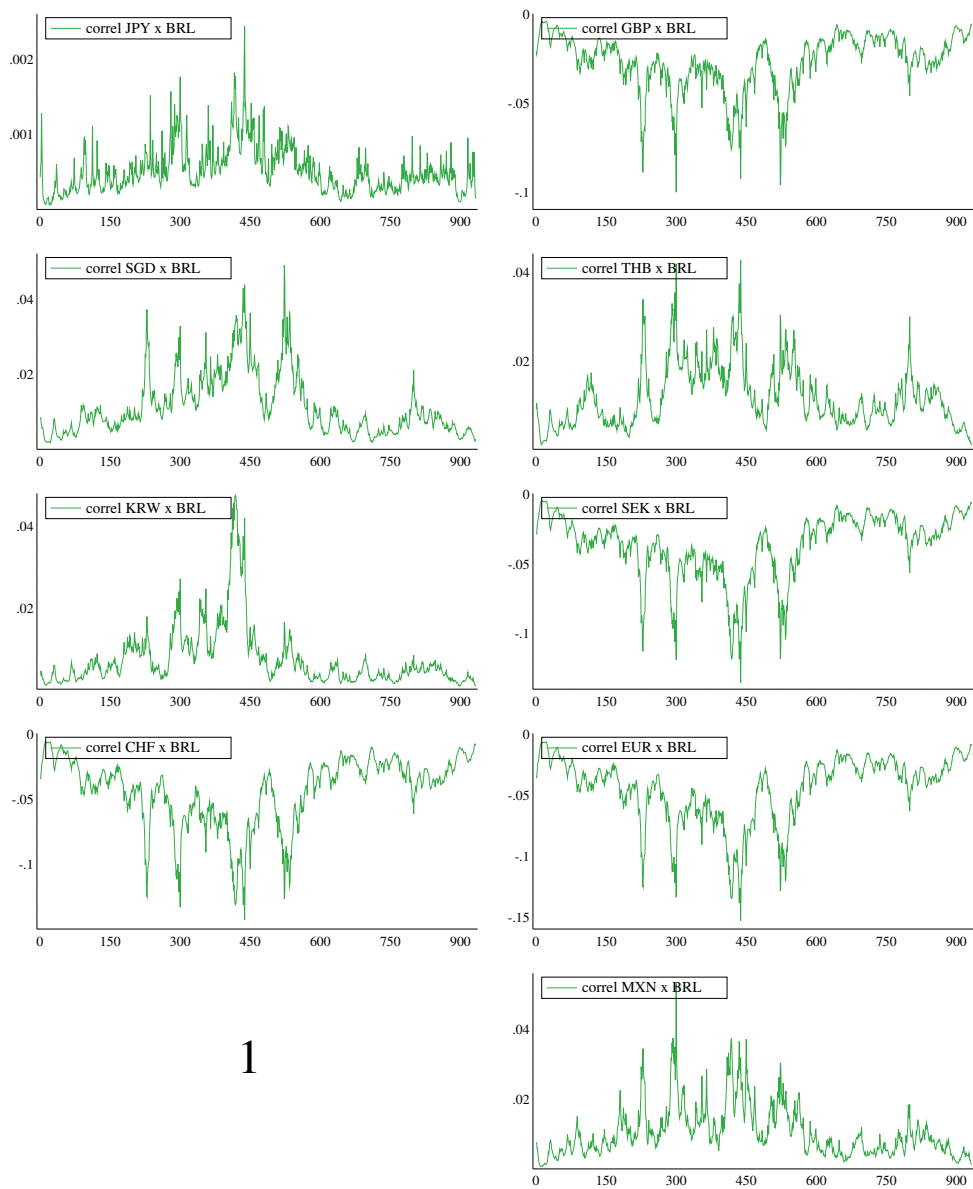


Figura D.6: Variâncias condicionais dadas pelo MF-VE para as taxas analisadas.



1

Figura D.7: Correlações entre as taxas de câmbio analisadas através do MF-VE.

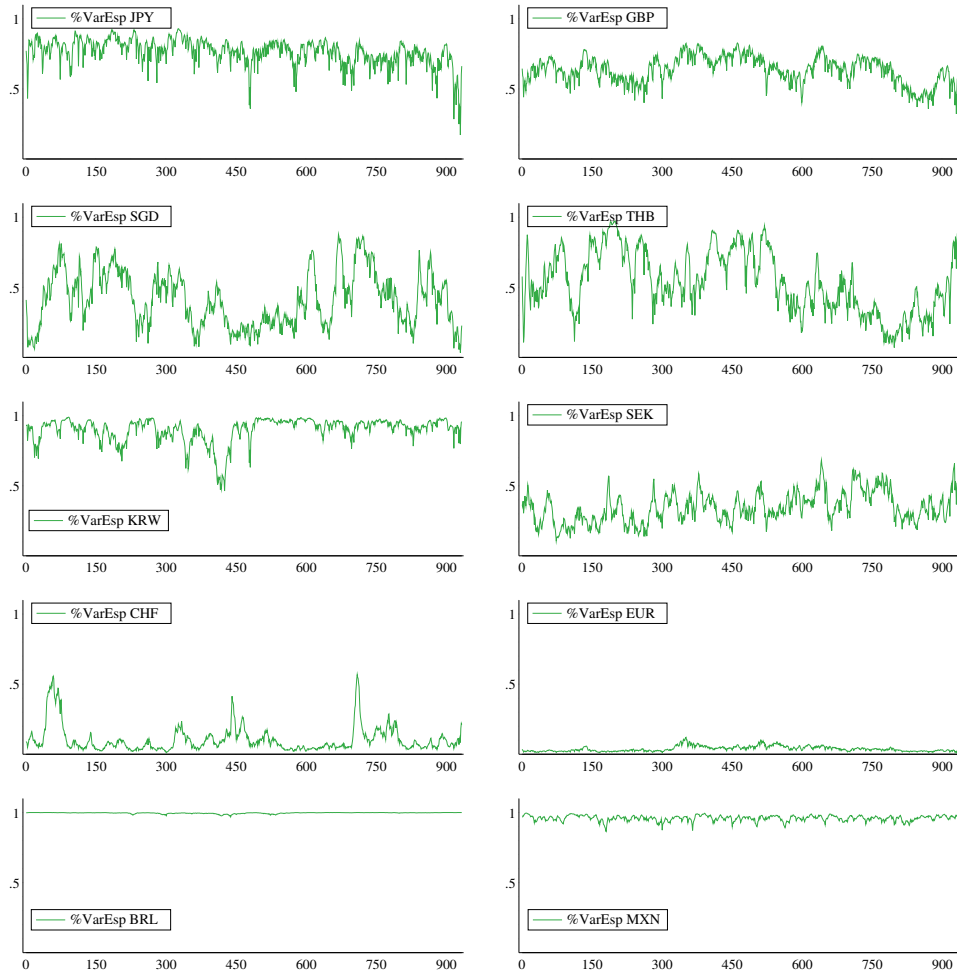


Figura D.8: Percentual da variância de cada série em relação à variância total - diagonal de Σ_t .

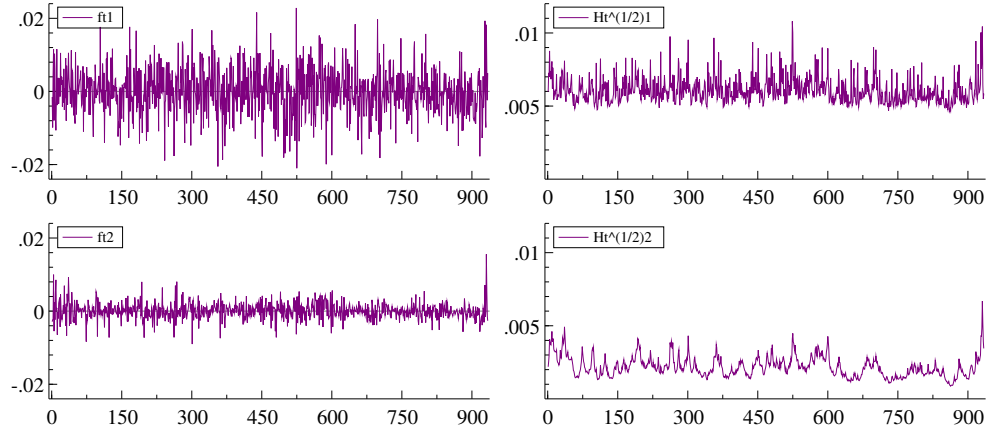


Figura D.9: Médias da simulação MCMC para os fatores comuns f_t e seus respectivos desvios padroes condicionais $\exp(\lambda_t^f/2)$ dados pela simulação MCMC.

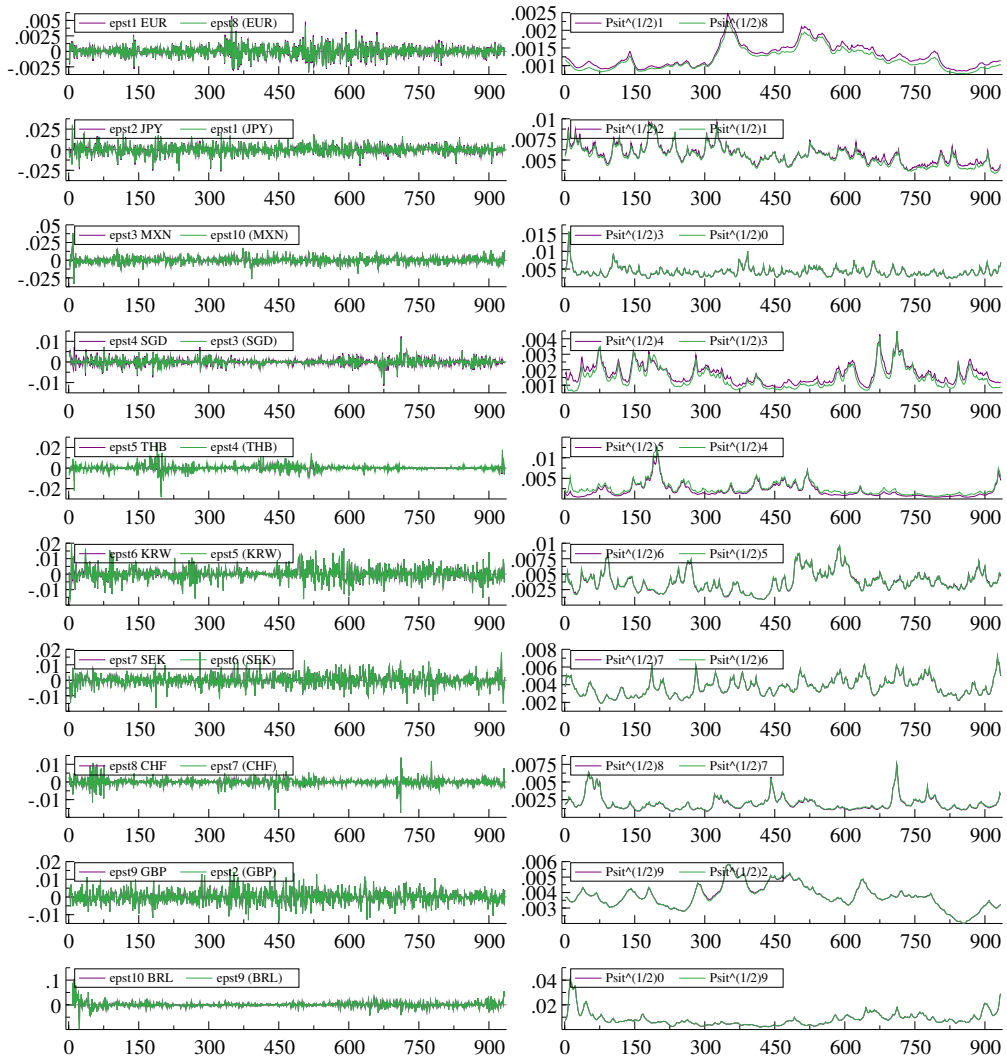


Figura D.10: Médias da simulação MCMC para os efeitos específicos ε_t e seus respectivos desvios padrões $\exp(\lambda_t^\varepsilon/2)$ dados pela simulação MCMC em comparação com a análise da seção anterior.

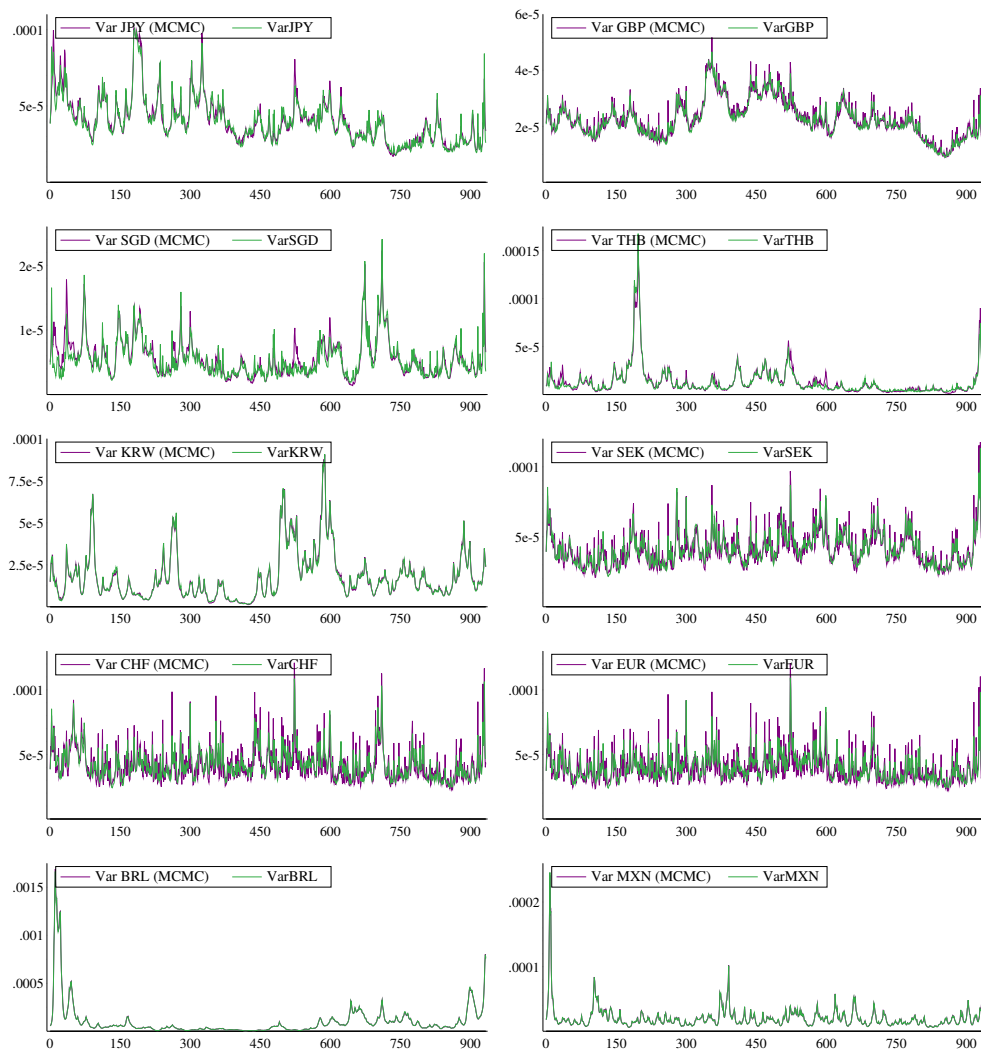


Figura D.11: Variâncias condicionais dadas pelo MF-VE para as taxas analisadas em comparação com a análise da seção anterior.

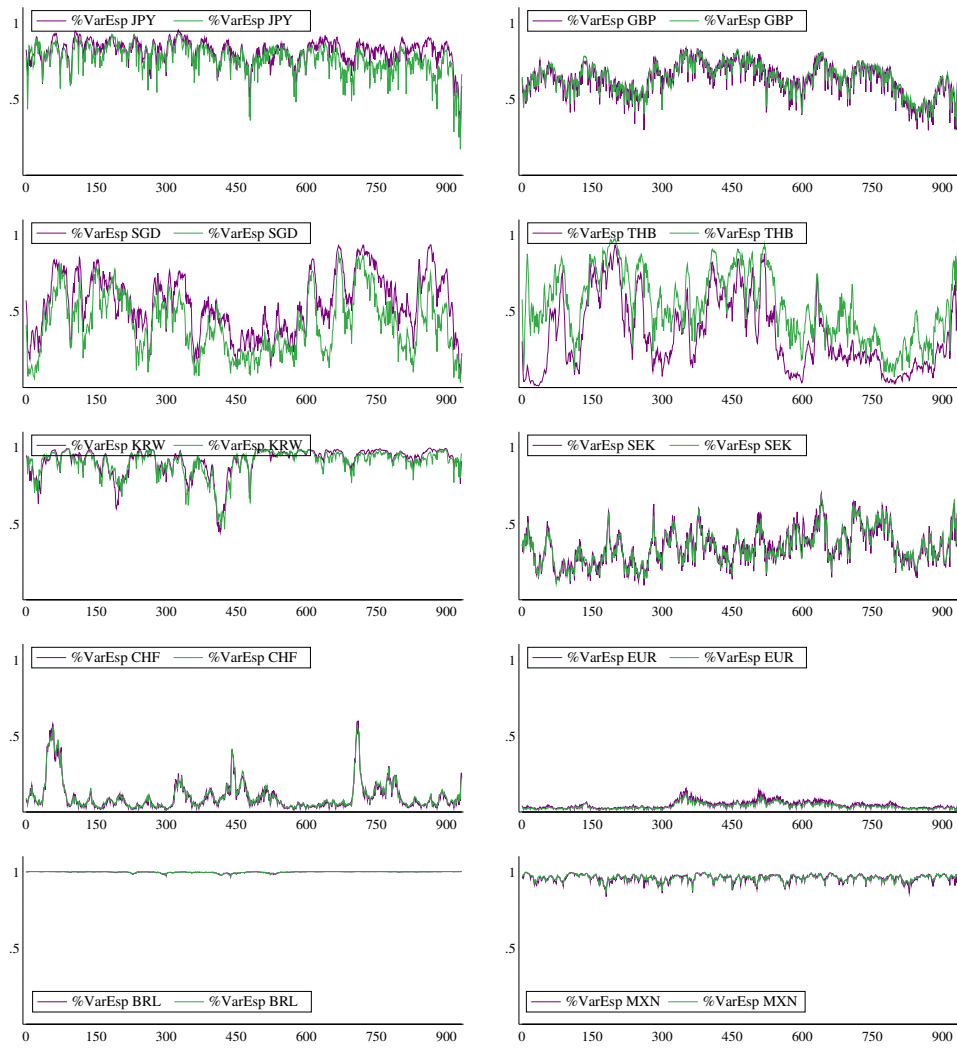


Figura D.12: Percentual da variância de cada série em relação à variância total em comparação com a análise da seção anterior - diagonal de Σ_t .

Referências Bibliográficas

Aguilar, O. (2000). *Latent Structure in Bayesian Multivariate Time Series Models*. PhD thesis, Universidade Duke.

Aguilar, O. e West, M. (2000). Bayesian dynamic factor models and portfolio allocation. *Journal of Business and Economic Statistics*, vol. 18:338–357.

Alexander, G. e Francis, J. (1986). *Portfolio Analysis*. Prentice Hall, Nova Yorque.

Anderson, B. D. O. e Moore, J. B. (1979). *Optimal Filtering*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, Nova Jersey.

Balakrishnan, A. V. (1984). *Kalman Filtering Theory*. Optimization Software, Nova Yorque, NY.

Bartholomew, D. J. (1987). *Latent Variable Models and Factor Analysis*. Oxford University Press, Nova Yorque, NY.

Bollerslev, T. (1990). Modelling the coherence in short-run nominal exchange rates: A multivariate generalized Arch approach. *Review of Economics and Statistics*, vol. 72:498–505.

Bollerslev, T., Engle, R. F., e Nelson, D. B. (1994). Arch models. Em Engle, R. F. e McFadden, D., editores, *The Handbook of Econometrics*, vol. 4, pags: 2959–3038.

Bollerslev, T., Engle, R. F., e Wooldridge, J. M. (1988). A capital asset pricing model with time varying covariances. *Journal of Political Economy*, vol. 96:116–131.

- Campbell, J. Y., Lo, A. W., e McKinley, A. C. (1997). *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton University Press.
- Casella, G. e George, E. I. (1992). Explaining the Gibbs sampler. *American Statistician*, vol. 46:167–174.
- Chesney, M. e Scott, L. O. (1989). Pricing european options: a comparison of the modified Black-Scholes model and a random variance model. *Journal of Finance and Qualitative Analysis*, vol. 24:267–284.
- Chib, S. (1995). Marginal likelihood from the Gibbs output. *Journal of the American Statistical Association*, vol. 90:1313–1321.
- Chib, S. e Greenberg, E. (1994). Bayes inference for regression models with Arma(p,q) errors. *Journal of Econometrics*, vol. 64:183–206.
- Chib, S. e Greenberg, E. (1995). Understanding the Metropolis Hastings algorithm. *The American Statistician*, vol. 49:327–335.
- Chib, S. e Jeliazkov, I. (2001). Marginal likelihood from the Metropolis Hastings output. *Journal of the American Statistical Association*, vol. 96:270–281.
- Chib, S., Nardari, F., e Shephard, N. (2001). Markov chain Monte Carlo methods for stochastic volatility models. *Journal of Econometrics*, vol. 108:281–316.
- Chib, S., Nardari, F., e Shephard, N. (2002). Analysis of high dimensional stochastic volatility models. *Relatorio de Trabalho*.
- de Jong, P. (1991). The diffuse Kalman filter. *The Annals of Statistics*, vol. 19:1073–1083.
- de Jong, P. e Shephard, N. (1995). The simulation smoother for time series models. *Biometrika*, vol. 82:339–350.
- Diebold, F. X. e Nerlove, M. (1989). The dynamics of exchange rate volatility: a multivariate latent factor Arch model. *Journal of Applied Econometrics*, vol. 4:1–21.

- Doornik, J. A. (2002). *Object-Oriented Matrix Programming using Ox*. Timberlake Consultants Press and Oxford: www.nuff.ox.ac.uk/Users/Doornik, Londres, RU.
- Engle, R. F., Ng, V. K., e Rotschild, M. (1990). Asset pricing with a factor-Arch covariance structure: Empirical estimates for treasury bills. *Journal of Econometrics*, vol. 45:213–238.
- Engle, R. F. e Sheppard, K. (2001). Theoretical and empirical properties of dynamics conditional correlation multivariate Garch. *Relatorio de Trabalho*.
- Franke, J., Hardle, W., e Stahl, G. (2000). *Measuring Risk in Complex Stochastic Systems*. Springer-Verlag, Nova Yorque, NY.
- Fuller, W. A. (1996). *Introduction to Time Series Models*. John Wiley, Nova Yorque.
- Gelman, A., Carlin, J. B., Stern, H. S., e Rubin, D. B. (1995). *Bayesian Data Analysis*. Chapman and Hall, Massachussets.
- Geman, S. e Geman, D. (1984). Stochastic relaxation, Gibbs distributions, and the Bayesian restoration of images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 6:721–741.
- Geweke, J. e Zhou, G. (1996). Measuring the pricing error of the arbitrage pricing theory. *Review of Financial Studies*, vol. 9:557–587.
- Geweke, J. F. e Singleton, K. J. (1980). Interpreting the likelihood ratio statistic in factor models when sample size is small. *Journal of the American Statistical Association*, vol. 75:133–137.
- Ghysels, E., Harvey, A. C., e Renault, E. (1996). Stochastic volatility. Em Rao, C. R. e Maddala, G. S., editores, *Handbook of Statistics*, vol. 14, pages: 119–191.
- Gilks, W. R., Richardson, S., e Spiegelhalter, D. J. (1996). *Markov Chain Monte Carlo in Practice*. Chapman and Hall, Suffolk, RU.

- Harvey, A. C. (1989). *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter*. Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- Harvey, A. C., Ruiz, E., e Shephard, N. (1994). Multivariate stochastic variance models. *Review of Economic Studies*, vol. 61:247–264.
- Hastings, W. K. (1970). Monte Carlo sampling methods using markov chains and their applications. *Biometrika*, vol. 57:97–109.
- Hull, J. e White, A. (1987). The pricing of options on assets with stochastic volatilities. *Journal of Finance*, vol. 42:281–300.
- Ingersol, J. E. (1987). *Theory of Financial Decision Making*. Rowman Littlefield.
- Jacquier, E., Polson, N. G., e Rossi, P. E. (1994). Bayesian analysis of stochastic volatility models (with discussion). *Journal of Business and Economic Statistics*, vol. 12:371–417.
- Kim, S., Shephard, N., e Chib, S. (1998). Stochastic volatility: Likelihood inference and comparison with Arch models. *Review of Economics Studies*, vol. 65:361–393.
- King, M., Sentana, E., e Wadhwani, S. (1994). Volatility and links between national stock markets. *Econometrica*, vol. 62:901–933.
- Lopes, H. F. (2000). *Bayesian Analysis in Latent Factor and Longitudinal Models*. PhD thesis, Universidade Duke.
- Lopes, H. F. e West, M. (2000). Model uncertainty in factor analysis. *Relatorio de Trabalho*.
- McCulloch, R. e Rossi, P. E. (1991). A Bayesian approach to testing the arbitrage pricing theory. *Journal of Econometrics*, vol. 49:141–168.
- Metropolis, N. et al. (1953). Equations of state calculations by fast computing machines. *Journal of Chemical Physics*, vol. 21:1087–1092.

- Nardari, F. e Scruggs, J. T. (2003). Analysis of linear factor models with multivariate stochastic volatility for stock and bond returns. *Working Paper*.
- Ng, V. K., Engle, R. F., e Rotschild, M. (1992). A multi-dynamic-factor model for stock returns. *Journal of Econometrics*, vol. 52:245–266.
- Pitt, M. K. e Shephard, N. (1999). Filtering via simulation: Auxiliary particle filters. *Journal of the American Statistical Association*, vol. 94:590–599.
- Quintana, J. e West, M. (1987a). An analysis of international exchange rates using multivariate Dlm's. *The Statistician*, vol. 36:275–281.
- Quintana, J. e West, M. (1987b). Time series analysis of compositional data. Oxford University Press.
- Quintana, J. M. (1992). Optimal portfolio of forward currency contracts. Em Bernardo, J. M., Berger, J. O., David, A. P., e Smith, A. F. M., editores, *Bayesian Statistics*, vol. 4. Oxford University Press.
- RiskMetrics (1994). J.P. Morgan.
- Ross, S. (1976). The arbitrage theory of capital asset pricing. *Journal of Economic Theory*, vol. 13:341–360.
- Shephard, N. (1996). Statistical aspects of Arch and stochastic volatility. Em Cox, D., Barndorff Nielsen, O., e Hinkley, D., editores, *Time Series Models in Econometrics, Finance and Other Fields*, pags: 1–67. Chapman e Hall.
- Taylor, S. J. (1982). *Modelling Financial Time Series*. John Wiley.
- Taylor, S. J. (1984). Modelling stochastic volatility: A review and comparative study. *Mathematical Finance*, vol. 4:183–204.
- West, M. e Harrison, J. (1997). *Bayesian Forecasting and Dynamic Models*. Springer-Verlag, Nova Yorque, NY.