

**Universidade Estadual de Campinas**

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado

## **Princípios de máximo e aplicações**

**José Lindomberg Possiano Barreiro**

**Orientador: Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo**

**Co-orientador: Prof. Dr. Francisco Odair Vieira de Paiva**

Fevereiro/2004

# Princípios de máximo e aplicações

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **José Lindomberg Possiano Barreiro** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 27 de fevereiro de 2004.

---

**Prof. Djairo G. de Figueiredo**  
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo.  
Prof. Dr. Alexandre Nolasco de Carvalho.  
Prof. Dr. Aloísio José Freiria Neves.  
Prof. Dr. Marcelo Martins dos Santos.

---

**Prof. Francisco Odair V. de Paiva**  
Co-orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

---

# DEDICATÓRIA

Caminhei ao longo dos anos, semeando sonhos; aniquilando barreiras; contemplando em cada “fracasso” o apoio incondicional desta grandiosa família.

Nas linhas do tempo, escrevi minha história, construí um patrimônio cultural, liderado pelo desejo singular dos meus pais, quando, ainda no ventre, elaboravam os meus passos, almejavam trilhas floridas que me levassem a vencer. Assim, cresci nos caminhos do amor, união, humildade e dignidade, respeitando controvérsias, inibindo obstáculos, absorvendo os sábios conselhos, daqueles, que por amor me deram a vida.

Em meio as armadilhas do destino, conduzo tranqüilo meu planejamento pessoal, abolido o receio que me impede de lutar, os obstáculos que me proíbem de “chegar”; nutrindo sonhos que definem meu futuro, pois nos momentos delicados contemplo o apoio e compreensão dos meus pais. Tudo é possível quando se pode contar com alguém, alguém capaz de acalmar decepções; decompor objeções, empecilhos.

Em vocês, encontrei forças para abraçar o “mundo”; auxílio para enfrentar as dificuldades; razões para acreditar que vale a pena sonhar.

Compreendestes a minha ausência, esta que foi suprida com a expectativa de me ver vencer.

A vocês, especialmente, dedico a minha vitória, por fugirem comigo do “fracasso” por doarem-se em meus instantes de solidão. Muito obrigado.

---

# AGRADECIMENTOS

A Deus, obrigado, Senhor, por conceder-me esta vitória; por não me abandonar nos momentos de prova. Agradeço- te, não apenas pela conquista, mas também pelos ensinamentos e trilhas que me levaram a vencer.

aos Professores Djairo e Odair, pela orientação, paciência e compreensão.

aos meus irmãos, agradeço a vocês pelo troféu conquistado, pois na ausência, subestes honrar o elo que nos une, apoiando-me incondicionalmente, e assim, revelando a cada instante a beleza da verdadeira amizade.

A Patrícia, por liberta-me dos momentos de solidão e angústia; das dificuldades encontradas ao longo dessa batalha. Juntos, contemplamos alegrias e tristezas, transformando os obstáculos num cenário para o verdadeiro amor. A você, agradeço o apoio incondicional, expondo com orgulho a felicidade ao conquistar essa vitória.

a Cidinha, Ednaldo e Tânia, pela ajuda na SPG do IMECC.

aos amigos de República: Adeilton, Christian, Daniel, Júnior, Júlio e Júlio Oliveira.

aos colegas, por caminharmos juntos os passos do querer, conduzindo com integridade e perseverança os obstáculos inseridos nessa transformação intelectual; contemplando com orgulho os caminhos que nos levaram a vencer.

à Capes, pelo apoio financeiro.

---

# SUMÁRIO

|                                                                            |            |
|----------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Resumo</b>                                                              | <b>v</b>   |
| <b>Abstract</b>                                                            | <b>vi</b>  |
| <b>Introdução</b>                                                          | <b>vii</b> |
| <b>1 Soluções Clássicas</b>                                                | <b>1</b>   |
| 1.1 Definições e notações preliminares . . . . .                           | 1          |
| 1.2 Princípios de máximo clássicos . . . . .                               | 4          |
| 1.2.1 Princípio de máximo fraco . . . . .                                  | 4          |
| 1.2.2 O Problema de Dirichlet . . . . .                                    | 6          |
| 1.2.3 Lema de Hopf . . . . .                                               | 7          |
| 1.2.4 Princípio de máximo forte . . . . .                                  | 9          |
| 1.2.5 Unicidade do problema de contorno misto . . . . .                    | 12         |
| 1.3 Estimativas a priori . . . . .                                         | 13         |
| 1.4 Estimativas do Gradiente . . . . .                                     | 16         |
| 1.5 Teorema da Divergência . . . . .                                       | 20         |
| 1.5.1 Identidades de Green . . . . .                                       | 21         |
| 1.6 Capacidade . . . . .                                                   | 21         |
| 1.7 Princípio de máximo de Alexandroff . . . . .                           | 26         |
| 1.7.1 Estimativas a priori para soluções de equações semi-linear . . . . . | 31         |

---

|          |                                                               |           |
|----------|---------------------------------------------------------------|-----------|
| 1.7.2    | Princípio de máximo para domínios de medida pequena . . . . . | 34        |
| <b>2</b> | <b>Soluções Generalizadas</b>                                 | <b>35</b> |
| 2.1      | Operadores elípticos na forma divergente . . . . .            | 35        |
| 2.2      | Princípio de máximo fraco . . . . .                           | 38        |
| 2.3      | Desigualdade de Harnack . . . . .                             | 40        |
| 2.4      | Princípio de máximo forte . . . . .                           | 42        |
| <b>3</b> | <b>Soluções fortes</b>                                        | <b>44</b> |
| 3.1      | Princípio de Máximo de Bony . . . . .                         | 44        |
| 3.2      | Princípio de máximo de Alexandroff . . . . .                  | 48        |
| <b>4</b> | <b>Método do plano móvel e do deslizamento</b>                | <b>51</b> |
| 4.1      | Método do plano móvel . . . . .                               | 51        |
| 4.2      | Método do deslizamento . . . . .                              | 55        |
| <b>A</b> | <b>Espaços de Sobolev</b>                                     | <b>58</b> |
|          | <b>Referências Bibliográficas</b>                             | <b>61</b> |
|          | <b>Índice Remissivo</b>                                       | <b>64</b> |

---

## RESUMO

O objetivo principal deste trabalho é o estudo de várias formas do princípio de máximo para operadores elípticos de segunda ordem aplicadas as soluções clássicas, generalizadas e fortes. A questão de unicidade da solução do problema de contorno misto é discutida com o auxílio do princípio de máximo. No último capítulo fazemos uma aplicação do princípio de máximo e o método do plano móvel de A. D. Alexandroff (no estudo de superfícies de curvatura média constante), a qual consiste em estabelecer propriedades geométricas das soluções. Tal método primeiramente usado no contexto de EDP por James Serrin em 1971 e seguido entre outros por B. Gidas, W. M. Ni e L. Nirenberg em 1979 para estabelecer que qualquer solução positiva de um problema de Dirichlet semi-linear tem simetria radial.

---

# ABSTRACT

The main goal of this work is the study in several forms of the maximum principle for elliptic operators of second order applied the classical, generalized and strong solutions. The question of uniqueness of the solution of the boundary problem mixed it is discussed with the aid of the maximum principle. In the last chapter we make one application of the maximum principle and the method of moving planes of A. D. Alexandroff (in the study of surfaces of constant medium curvature) consists of establishing geometric properties of the solutions. Such method initially used in the context of PDE by James Serrin in 1971 and followed among other for B. Gidas, W. M. Ni and L. Nirenberg in 1979 they established that any positive solution of a semilinear Dirichlet problem has radial symmetry.



---

# Introdução

Neste trabalho, estudamos várias formas do princípio de máximo para operadores elípticos de segunda ordem

$$L = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + cu$$

com  $c \leq 0$ . Tais princípios são generalizações do seguinte resultado: Toda função  $f(x)$  que satisfaz a desigualdade  $f'' > 0$  no intervalo  $[a, b]$  atinge seu valor máximo nos extremos do intervalo  $[a, b]$ . Estes princípios nos permitem obter informações sobre as soluções de equações diferenciais sem qualquer conhecimento explícito da mesma.

Uma consequência da caracterização das funções harmônicas num domínio limitado  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , através da fórmula da média, isto é,

$$u(x) = \frac{1}{r^{n-1} \omega_n} \int_{\partial B_r(x)} u dS, \quad \forall B_r(x) \subset\subset \Omega$$

é que  $u$  não pode assumir um valor máximo num ponto interior a menos que  $u$  seja constante (veja por exemplo em [HL], Capítulo 1). Esse resultado foi provado inicialmente por *C. F. Gauss* em 1839 e *S. Earnshaw* separadamente. Iniciando como os trabalhos de *A. Paraf* em 1892 estas conclusões são estendidas para operadores elípticos de segunda ordem em duas dimensões com coeficientes suaves e com coeficiente de  $u$  menor que zero. Depois, *E. Picard* e *L. Lichtenstein* provaram no caso  $c \leq 0$ . Em 1927, *E. Hopf* estabeleceu esses resultados sem quaisquer hipóteses de continuidade sobre os coeficientes, bastando apenas limitação uniforme dos coeficientes. Depois de algum tempo, em 1952, *E. Hopf* e *O. A. Oleinik* separadamente generalizaram o princípio de máximo incluindo estimativa no ponto

da fronteira (Lema de Hopf). Uma versão do Lema de Hopf é devida *J. Serrin* em [S] e foi estendida por *Gidas, Ni e Nirenberg* em [GNN2].

A generalização do princípio de máximo para soluções fraca é devida a *W. Littman*. O princípio de máximo forte para operadores na forma divergente com hipóteses mínimas foi obtido por *Guido Stampacchia* em [Sta].<sup>1</sup>

Este trabalho está organizado da seguinte forma:

O **Capítulo 1** é dedicado ao estudo dos princípios de máximo clássico. Com o auxílio desses princípios, discutiremos a questão de unicidade da solução do problema misto; obteremos estimativas a priori para as soluções dos problemas de Dirichlet e Neumann, e comparação entre as capacidades de dois condutores. Estudaremos uma forma do princípio de máximo devido a *A. D. Alexandroff*, e como consequência obteremos o princípio de máximo para domínios de medida pequena devido a *S. R. S. Varadhan*.

No **Capítulo 2** estudaremos a desigualdade de *Harnack* e os princípios de máximos fraco e forte para operadores elípticos de segunda ordem na forma divergente:

$$Lu = \left( a_{ij}(x) u_{x_j} + b_i(x) u \right)_{x_i} + c_i(x) u_{x_i} + d(x) u.$$

No **Capítulo 3** trataremos das soluções fortes, onde apresentaremos o princípio de máximo de Alexandroff para funções em  $C(\overline{\Omega}) \cap W_{loc}^{1,n}(\Omega)$ . Estudaremos o princípio de máximo de Bony, devido a Jean Michel Bony que generalizou o princípio de máximo clássico para os espaços de Sobolev  $W^{2,p}(\Omega)$  com  $p > n$  (veja [Bo], [Lio] e [T]).

No **Capítulo 4** fazemos uma aplicação do princípio de máximo em conjunto com o método do plano móvel de A. D. Alexandroff (no estudo de superfícies de curvatura média constante), e o método do deslizamento introduzido em [BN1, BN2] consistem em estabelecer propriedades geométricas das soluções. O método do plano móvel, primeiramente usado no contexto das Equações Diferenciais Parciais por *James Serrin* em [S] e seguido entre outros por B. Gidas, W. M. Ni e L. Nirenberg em [GNN2] que estabeleceram que qualquer solução

---

<sup>1</sup>Maiores detalhes sobre as datas históricas podem ser encontrados em [PW, página 156] e [GT].

positiva de  $\Delta u + f(u) = 0$  em  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < R\}$  e  $u = 0$  sobre  $\partial\Omega$  é radialmente simétrica.

O **Apêndice A** traz algumas propriedades dos Espaços de Sobolev.

# CAPÍTULO 1

---

## Soluções Clássicas

Neste capítulo vamos estudar princípios de máximo para operadores elípticos de segunda ordem linear no sentido clássico. Estes princípios são generalizações do seguinte resultado: Uma função  $f(x)$  que satisfaz a desigualdade  $f'' > 0$  no intervalo  $[a, b]$  atinge seu valor máximo nos extremos do intervalo  $[a, b]$  (veja [PW]). Aqui estudaremos o princípio de máximo fraco, forte, o Lema de Hopf, o princípio de máximo de A. D. Alexandroff e como aplicação desses princípios discutiremos alguns resultados de unicidade de solução para o problema de Dirichlet.

### 1.1 Definições e notações preliminares

Ao longo destas notas  $\Omega$  sempre denotará um domínio em  $\mathbb{R}^n$ , isto é, um subconjunto aberto e conexo de  $\mathbb{R}^n$ . A fronteira de  $\Omega$  será denotada por  $\partial\Omega := (\overline{\Omega} \cap (\mathbb{R}^n \setminus \Omega))$ .

Por  $B$  ou  $B_r(y)$ , com  $r > 0$  e  $y \in \mathbb{R}^n$  vamos denotar a bola aberta:

$$B_r(y) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - y| < r\}.$$

Para função  $u$  usaremos  $u^+$ ,  $u^-$  definidas por:

$$u^+(x) = \max\{u(x), 0\}$$

$$u^-(x) = \min\{u(x), 0\}.$$

Usaremos as seguintes notações:

- $w_n$  indica o volume da bola unitária em  $\mathbb{R}^n$ ;
- $|\Omega|$  representa a medida de Lebesgue do conjunto  $\Omega$ .
- A notação  $U \subset\subset \Omega$ , significa que  $U$  é um subconjunto próprio de  $\Omega$ , com fecho compacto em  $\Omega$ .
- Usaremos as seguintes notações, para indicar as derivadas parciais de uma função  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ :

$$D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i} = u_{x_i}.$$

- $\delta_{ij}$  é o delta de *Kronecker*, isto é,  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$ .
- $\Delta$  é o laplaciano, ou seja,  $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ .

Ao longo deste trabalho estaremos usando a notação de índice repetido. A convenção de que índices repetidos são somados implicitamente, foi introduzida por Einstein em 1916, que depois zombou a um amigo, “eu fiz uma grande descoberta em matemática; suprimi o sinal de somatório toda vez que a somatória deve ser feita sobre um índice que ocorre duas vezes...” (veja [W]). Isto pode simplificar e reduzir equações que envolvem tensores. Por exemplo, usando a notação de Einstein,

$$a_{ij}(x)u_{x_i x_j} = \sum_{i,j} a_{ij}(x)u_{x_i x_j}$$

O operador  $L$  definido por:

$$Lu := Mu + c(x)u = a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + b_i(x)u_{x_i} + c(x)u \quad (1.1)$$

é um operador diferencial parcial linear de segunda ordem. As funções  $A = (a_{ij}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ ,  $b = (b_j) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  são funções mensuráveis. Neste capítulo iremos assumir  $u \in C^2(\Omega)$ . Como  $u_{x_i x_j} = u_{x_j x_i}$  não há perda de generalidade em supor  $a_{ij} = a_{ji}$ . Adotaremos as seguintes definições:

**Definição 1.1.1.** Dizemos que o operador  $L$  é elíptico em  $x \in \Omega$  se existirem números positivos  $\lambda(x)$ ,  $\Lambda(x)$  tais que,

$$0 < \lambda(x) |\xi|^2 \leq a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \Lambda(x) |\xi|^2 \quad (1.2)$$

para todo  $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

O operador  $L$  é elíptico em  $\Omega$  se  $L$  for elíptico em cada ponto  $x \in \Omega$ . Diremos que  $L$  é estritamente elíptico se  $\lambda \geq \lambda_0 > 0$  para alguma constante  $\lambda_0$ . O operador  $L$  é dito uniformemente elíptico em  $\Omega$  se  $\frac{\Lambda}{\lambda}$  for limitado em  $\Omega$ .

Assumiremos que  $\frac{|b_i(x)|}{\lambda(x)} \leq \text{constante} < \infty$  para todo  $x \in \Omega$ . Considerando  $L' = \lambda^{-1}L$  no lugar de  $L$ , podemos reduzir ao caso em que  $\lambda = 1$  e os coeficientes  $b_i$  são limitados. Notemos que se  $L$  é uniformemente elíptico em  $\Omega$ , então os  $a_{ij}$  são limitados.

Nos exemplos a seguir, podemos aplicar sem dificuldade as definições acima.

**Exemplo 1.1.1.** Considerando  $a_{ij} = \delta_{ij}$ ,  $b_i = 0$  e  $c = 0$  em (1.1), obtemos  $L = \Delta$ . Neste caso vemos que  $L$  é uniformemente elíptico com  $\lambda(x) = \Lambda(x) = 1$ .

**Exemplo 1.1.2.** Seja  $x_1, \dots, x_{n-1}$  variáveis espaciais enquanto  $x_n$  denota o tempo. Então, os operadores  $D_1^2 + \dots + D_{n-1}^2 - D_n^2$  da equação da onda, e  $D_1^2 + \dots + D_{n-1}^2 - D_n$  da equação do calor não são elípticos. Para verificar isto, considere na equação (1.2)  $\xi_i = \delta_{ni}$ .

**Exemplo 1.1.3.** Seja  $L = D_{11} + x_1 D_{22}$ . O operador  $L$  é elíptico no semi-plano  $\{x \in \mathbb{R}^2; x_1 > 0\}$  mas não é uniformemente elíptico. Aqui

$$\lambda(x) = \begin{cases} x_1 & \text{se } 0 < x_1 \leq 1 \\ 1 & \text{se } x_1 > 1 \end{cases}$$

e

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x_1 \leq 1 \\ x_1 & \text{se } x_1 > 1. \end{cases}$$

Note que,  $L$  é uniformemente elíptico na faixa  $(\alpha, \beta) \times \mathbb{R}$  onde  $0 < \alpha < \beta < \infty$ .

## 1.2 Princípios de máximo clássicos

Iniciamos com um lema que é uma generalização de um resultado do cálculo das funções de várias variáveis o qual afirma que se uma função  $u$  tem um ponto de máximo local em  $x_0$ , então a forma bilinear  $D^2u(x_0)$  é semi-negativa definida<sup>1</sup> (veja [Li], [La]).

**Lema 1.2.1.** *Assuma que  $L$  é um operador elíptico em cada ponto de um domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Suponhamos que  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  satisfaz  $Lu > 0$  em  $\Omega$  e  $c(x) \leq 0$  em  $\Omega$ . Se  $u$  tem um máximo não-negativo em  $\overline{\Omega}$ , então  $u$  não pode atingir esse máximo em  $\Omega$ .*

**Demonstração:** Suponhamos que  $u$  assume um máximo não-negativo em  $x_0 \in \Omega$ . Então  $u_{x_i}(x_0) = 0$  e a matriz Hessiana  $D^2u(x_0) = (u_{x_i x_j}(x_0))$  é semi-negativa definida. Pela hipótese de elipticidade a matriz  $A = (a_{ij}(x_0))$  é positiva definida<sup>2</sup>. Por um resultado da Álgebra Linear, o qual utiliza o fato que  $A$  é positiva definida (veja [HJ] Teorema 7.6.3, página 465) segue-se que  $\text{tr}(AD^2u(x_0)) = a_{ij}u_{x_i x_j}(x_0) \leq 0$ . Daí, temos que  $Lu(x_0) \leq 0$ , o que contradiz a hipótese:  $Lu(x_0) > 0$ . ■

Segue da demonstração do Lema 1.2.1, que se  $c(x) \equiv 0$  então a não-negatividade do máximo pode ser omitida.

### 1.2.1 Princípio de máximo fraco

**Teorema 1.2.2 (Princípio de máximo fraco).** *Suponhamos que o operador  $L$  é elíptico num domínio limitado  $\Omega$  e que  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ . Se  $Lu \geq 0$  em  $\Omega$ ,  $c(x) \leq 0$  em  $\Omega$  e  $\frac{c}{\lambda}$  é limitado, então*

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+.$$

**Demonstração:** A prova é feita utilizando uma função auxiliar e o Lema 1.2.1. Para todo  $\varepsilon > 0$ , considere a função

$$w(x) = u(x) + \varepsilon e^{\alpha x_1}$$

<sup>1</sup>Uma matriz real simétrica  $A$  é semi-negativa definida se, e somente se,  $x^T A x \leq 0$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

<sup>2</sup>Uma matriz real simétrica  $A$  é positiva definida se, e somente se,  $x^T A x > 0$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

com  $\alpha$  a ser determinado. Temos,

$$Lw = Lu + \varepsilon L(e^{\alpha x_1}) \geq \varepsilon e^{\alpha x_1} [a_{11}\alpha^2 + b_1\alpha + c].$$

Pela elipticidade, temos  $a_{11}(x) \geq \lambda(x) > 0$  para todo  $x \in \Omega$ . Assim,

$$\begin{aligned} Lw &\geq \varepsilon e^{\alpha x_1} (\lambda\alpha^2 + b_1\alpha + c) \\ &= \lambda \left( \alpha^2 + \frac{b_1}{\lambda}\alpha + \frac{c}{\lambda} \right) \varepsilon e^{\alpha x_1} \\ &\geq \lambda (\alpha^2 - b_0\alpha - c_0) \varepsilon e^{\alpha x_1}. \end{aligned}$$

Na última desigualdade usamos o fato que  $|\frac{b_1}{\lambda}| \leq b_0$  e  $\frac{c}{\lambda} \leq c_0$ , onde  $b_0$  e  $c_0$  são constantes positivas. Logo, podemos escolher  $\alpha$  suficientemente grande de modo que:

$$Lw > 0, \quad \text{para todo } x \in \Omega.$$

Aplicando o Lema 1.2.1, obtemos:

$$\sup_{\Omega} w \leq \sup_{\partial\Omega} w^+.$$

Assim,

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\Omega} w \leq \sup_{\partial\Omega} w^+ \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + \varepsilon \sup_{x \in \Omega} e^{\alpha x_1}.$$

O resultado segue-se fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ . ■

**Observação 1.2.3.** *Seja  $L$  como no Teorema 1.2.2. Se  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  satisfaz  $Lu \leq 0$  em  $\Omega$ ,  $c \leq 0$  em  $\Omega$  e  $\frac{c}{\lambda}$  é limitado, então*

$$\sup_{\Omega} (-u) \leq \sup_{\partial\Omega} (-u)^+,$$

onde  $(-u)^+ = \max\{-u, 0\} = -\min\{u, 0\} = -u^-$ . Logo,

$$\sup_{\Omega} (-u) \leq \sup_{\partial\Omega} (-u^-)$$

ou ainda,

$$\inf_{\Omega} u \geq \inf_{\partial\Omega} u^-.$$



### 1.2.2 O Problema de Dirichlet

O problema de *Dirichlet* para  $L$  consiste em encontrar uma função  $u$  tal que,

$$\begin{cases} Lu = f & \text{em } \Omega \\ u = \varphi & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.3)$$

onde as funções  $f \in C(\Omega)$  e  $\varphi \in C(\partial\Omega)$  são dadas.

Se  $L$  elíptico em cada ponto de um domínio limitado  $\Omega$  e  $c(x) \leq 0$  em  $\Omega$ , usando o Teorema 1.2.2, obtemos unicidade de solução clássica<sup>3</sup> para o problema de Dirichlet (1.3).

Com efeito, sejam  $u$  e  $v$  duas soluções do problema (1.3). A função  $w = u - v$  satisfaz:

$$\begin{cases} Lw = 0 & \text{em } \Omega \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}.$$

O princípio de máximo fraco implica que  $w \leq 0$  em  $\Omega$ . De maneira análoga concluímos que  $w \geq 0$  considerando a função  $-w$ . Logo,  $u = v$  em  $\Omega$ . ■

Sabemos que funções contínuas definidas em subconjuntos compactos de  $\mathbb{R}^n$  atingem seus extremos no domínio. A hipótese de  $\Omega$  ser limitado não pode ser removida, como mostra o exemplo abaixo para garantir a unicidade do problema de Dirichlet (1.3).

**Exemplo 1.2.1.** Consideremos  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$  e  $u(x) = x_n$  em  $\bar{\Omega}$ . Claramente a função  $u$  é uma solução não trivial<sup>4</sup> do problema:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

#### Observação 1.2.4.

- A condição  $c \leq 0$  no princípio de máximo fraco não pode ser removida. Com efeito, seja  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x, y < \pi\}$ . Cálculos simples mostram que  $u(x, y) = \sin(x) \sin(y)$  satisfaz:

$$\begin{cases} \Delta u + 2u = 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

<sup>3</sup>Uma função  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  satisfazendo (1.3) é chamada de solução clássica.

<sup>4</sup>Dizemos que  $u$  é uma solução não trivial se ela não é identicamente nula.

e atinge em  $\Omega$  seu valor máximo.

- A hipótese não-negativo no princípio de máximo fraco não pode ser substituída. De fato, considere  $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ ,  $L = \Delta - 1$  e seja  $u(x) = -3n - |x|^2$  em  $\bar{\Omega}$ . Então,  $\Delta u = -2n$  e portanto  $Lu = \Delta u - u = n + |x|^2 > 0$  em  $\Omega$  e

$$\sup_{\Omega} u = -3n > -3n - 1 = \sup_{\partial\Omega} u.$$

### 1.2.3 Lema de Hopf

Nesta seção, estudaremos o Lema de Hopf clássico (veja [GT], [Fr], [HL],[PW]). Extensões desse resultado foram obtidas por *J. Serrin* em [S] para domínios com “bicos”, e por *Gidas, Ni e Nirenberg* em [GNN2]. Em [Fr, Apêndice E] extensões do Lema de Hopf em ([GNN2]) são apresentadas com algumas modificações.

**Teorema 1.2.5 (Lema de Hopf).** *Suponhamos que  $L$  é uniformemente elíptico em  $\Omega$ ,  $c = 0$  e  $Lu \geq 0$  em  $\Omega$ . Seja  $x_0 \in \partial\Omega$  tal que,*

- i)  $u$  é contínua em  $x_0$ ;
- ii)  $u(x_0) > u(x)$  para todo  $x \in \Omega$ ;
- iii)  $\partial\Omega$  satisfaz a condição da bola interior<sup>5</sup> em  $x_0$ .

Então, a derivada normal exterior de  $u$  em  $x_0$  caso exista, satisfaz

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0.$$

Se  $c \leq 0$  e  $\frac{c}{\lambda}$  é limitada, então o resultado continua valendo desde que  $u(x_0) \geq 0$ . Se  $u(x_0) = 0$  a mesma conclusão vale independentemente do sinal da função  $c$  (veja [GT]).

**Demonstração:** A hipótese sobre  $\partial\Omega$  implica a existência de uma bola  $B = B_R(y) \subset \Omega$  com  $x_0 \in \partial B$ . Para  $0 < \varrho < R$ , consideremos a função

$$h(x) = e^{-\alpha r^2} - e^{-\alpha R^2}$$

---

<sup>5</sup>Dizemos que  $\partial\Omega$  satisfaz a condição da bola interior em  $x_0 \in \partial\Omega$  se existir uma bola aberta  $B$  contida em  $\Omega$  com  $x_0 \in \partial B$ .

onde  $r = |x - y| > \varrho$  e  $\alpha$  é uma constante positiva a ser determinada. Claramente,

$$\begin{aligned} h_{x_i} &= -2\alpha (x_i - y_i) e^{-\alpha r^2} \\ h_{x_i x_j} &= [-2\alpha \delta_{ij} + 4\alpha^2 (x_i - y_i)(x_j - y_j)] e^{-\alpha r^2}. \end{aligned}$$

Fazendo alguns cálculos simples, obtemos:

$$\begin{aligned} Lh &= e^{-\alpha r^2} \{4\alpha^2 a_{ij} (x_i - y_i)(x_j - y_j) - 2\alpha [a_{ij} \delta_{ij} + b_i (x_i - y_i)]\} + ch \\ &\geq e^{-\alpha r^2} \{4\alpha^2 \lambda(x) r^2 - 2\alpha (a_{ii} + |b| r) + c\} \end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue da hipótese de elipticidade de  $L$ , da desigualdade de Cauchy-Schwarz e do fato que  $c \leq 0$ .

Como  $\frac{a_{ij}}{\lambda}$ ,  $\frac{|b|}{\lambda}$  e  $\frac{c}{\lambda}$  são limitados segue que para  $\alpha$  suficientemente grande  $Lh \geq 0$  na região anular  $B_R(y) \setminus B_\varrho(y)$ . Sendo  $h \geq 0$  e  $u - u(x_0) < 0$  sobre  $\partial B_\varrho(y)$ , existe uma constante positiva  $\varepsilon > 0$  tal que  $u - u(x_0) + \varepsilon h \leq 0$  sobre  $\partial B_\varrho(y)$  e sobre  $\partial B_R$  onde  $h = 0$ . Em  $B_R(y) \setminus B_\varrho(y)$ , temos  $L(u - u(x_0) + \varepsilon h) = Lu + \varepsilon Lh - cu(x_0) \geq -cu(x_0) \geq 0$ . O princípio de máximo fraco implica que  $u - u(x_0) + \varepsilon h \leq 0$  em  $B_R(y) \setminus B_\varrho(y)$ . Daí,

$$\frac{u(x_0) - u(x_0 - t\nu)}{t} \geq \varepsilon \frac{h(x_0 - t\nu)}{t}, \quad t > 0 \text{ pequeno.}$$

Fazendo  $t \rightarrow 0^+$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{u(x_0) - u(x_0 - t\nu)}{t} &\geq \varepsilon \liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{h(x_0 - t\nu) - h(x_0)}{t} \\ &= -\varepsilon \frac{\partial h}{\partial \nu}(x_0) = -\varepsilon \left. \frac{dh}{dr} \right|_{r=\varrho} > 0. \end{aligned}$$

A condição  $c \leq 0$  pode ser omitida desde que  $u(x_0) = 0$ . De fato, quando  $u(x_0) = \sup_{\Omega} u = 0$ , podemos usar o operador  $L^- := Lu - c^+(x)u$  em vez de  $L$ , pois  $Lu \geq 0$  e  $u \leq 0$  implicam  $L^-u \geq -c^+(x)u \geq 0$ . ■

Mais geralmente, vale o seguinte:

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x_0) - u(x)}{|x - x_0|} > 0$$

quando o ângulo entre os vetores  $x_0 - x$  e a norma em  $x_0$  é menor que  $\frac{\pi}{2} - \delta$  para algum  $\delta > 0$  fixado.

### 1.2.4 Princípio de máximo forte

O princípio de máximo forte exclui a possibilidade do máximo ocorrer em um ponto interior.

**Teorema 1.2.6 (Princípio de máximo forte).** *Suponhamos que  $L$  é uniformemente elíptico em  $\Omega$  e que  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  satisfaz  $Lu \geq 0$ . Se  $c(x) \leq 0$  em  $\Omega$  e  $\frac{c}{\lambda}$  é limitado. Então, a menos que  $u$  seja constante o máximo não-negativo de  $u$  em  $\overline{\Omega}$  não pode ser atingido em  $\Omega$ .*

**Demonstração:** Seja  $M$  o máximo não-negativo de  $u$  em  $\overline{\Omega}$ . Seja  $\Sigma = \{x \in \Omega; u(x) = M\}$ .  $\Sigma$  é relativamente fechado, pois  $\Sigma = u^{-1}(\{M\})$ . Precisamos provar que  $\Sigma = \Omega$ . A prova é feita por contradição.

Se  $\Sigma$  é um subconjunto próprio de  $\Omega$ , então podemos encontrar uma bola aberta  $B \subset \Omega \setminus \Sigma$  com um ponto da fronteira em  $\Sigma$ . Com efeito, podemos escolher um ponto  $P \in \Omega \setminus \Sigma$  tal que  $\text{dist}(P, \Sigma) < \text{dist}(P, \partial\Omega)$  e depois dilatamos a bola centrada em  $P$  até tocar  $\Sigma$ .

Suponhamos que  $x_0 \in \partial B \cap \Sigma$ . Claramente,  $Lu \geq 0$  em  $B$ ,  $u(x) < u(x_0)$  para todo  $x \in B$  e  $u(x_0) = M \geq 0$ . Como  $x_0$  é um ponto de máximo interior de  $\Omega$ ,  $\nabla u(x_0) = 0$ . Contradição, pois aplicando o Lema de Hopf, temos  $\frac{\partial u}{\partial \nu} > 0$  onde  $\nu$  é a direção normal exterior à bola  $B$  em  $x_0$ . ■

**Corolário 1.2.7 (Princípio de comparação).** *Suponhamos que  $L$  é uniformemente elíptico em  $\Omega$ ,  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  satisfaz  $Lu \geq 0$ ,  $c(x) \leq 0$  em  $\Omega$  e  $\frac{c}{\lambda}$  é limitado. Se  $u \leq 0$  sobre  $\partial\Omega$ , então  $u < 0$  para todo  $x \in \Omega$  ou  $u \equiv 0$ .*

**Demonstração:** Consequência imediata do princípio de máximo forte. ■

Para problemas lineares o princípio de comparação é o princípio de máximo usado para diferença de duas funções.

O resultado contido no corolário seguinte é uma consequência dos Teoremas 1.2.5 e 1.2.6.

**Corolário 1.2.8.** *Assuma que  $L$  é uniformemente elíptico em  $\Omega$ . Suponhamos que  $\partial\Omega$  satisfaz a condição do bola interior e que  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  satisfaz  $Lu \geq 0$  em  $\Omega$  com*

$c(x) \leq 0$  e  $\frac{c}{\lambda}$  é limitado. Suponhamos ainda que o máximo não-negativo de  $u$  é atingido em  $x_0 \in \overline{\Omega}$ . Então,  $x_0 \in \partial\Omega$  e para qualquer direção exterior  $\nu$  em  $x_0$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$$

a menos que  $u$  seja constante em  $\overline{\Omega}$ .

O próximo resultado devido a *Serrin* é o princípio da comparação, mas sem nenhuma hipótese sobre  $c(x)$  (veja [HL]).

**Teorema 1.2.9.** *Suponhamos que  $L$  é uniformemente elíptico em  $\Omega$  e que  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  satisfaz  $Lu \geq 0$ . Se  $u \leq 0$  em  $\Omega$ , então  $u < 0$  em  $\Omega$  ou  $u \equiv 0$  em  $\Omega$ .*

**Demonstração:** Basta aplicar o princípio de máximo forte (Teorema 1.2.6) para o operador  $L^-u := Lu - c^+(x)u$ . ■

O resultado seguinte é o princípio de máximo para o operador  $L$  quando existe uma supersolução<sup>6</sup> positiva (veja [HL]).

**Teorema 1.2.10.** *Suponhamos que existe uma função  $w \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ ,  $w > 0$  em  $\overline{\Omega}$  e  $Lw \leq 0$  em  $\Omega$ . Se  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  satisfaz  $Lu \geq 0$  em  $\Omega$ , então  $\frac{u}{w}$  não pode assumir um máximo não-negativo em  $\Omega$ , a menos que  $\frac{u}{w}$  seja constante. Se  $\frac{u}{w}$  assume um máximo não-negativo em  $x_0 \in \partial\Omega$  e  $\frac{u}{w} \not\equiv \text{cte}$ , então para toda direção exterior  $\nu$  a  $\partial\Omega$ , tem-se:*

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \left( \frac{u}{w} \right) (x_0) > 0$$

se  $\partial\Omega$  satisfaz a condição da bola interior.

**Demonstração:** Seja  $v = \frac{u}{w}$ . Então  $u = vw$ . Depois de alguns cálculos simples, obtemos:

$$Lu = a_{ij}v_{x_i x_j}w + a_{ij}v_{x_i}w_{x_j} + a_{ij}v_{x_j}w_{x_i} + a_{ij}vw_{x_i x_j} + b_i v_{x_i}w + b_i vw_{x_i} + cvw.$$

Como  $a_{ij} = a_{ji}$ , resulta

$$\tilde{L}v := \frac{Lu}{w} = a_{ij}v_{x_i x_j} + \sum_i \left\{ \frac{2}{w} \sum_j a_{ij}w_{x_j} + b_i \right\} v_{x_i} + \left( \frac{Lw}{w} \right) v \geq 0. \quad (1.4)$$

---

<sup>6</sup>Dizemos que  $v \in C^2(\Omega)$  é uma supersolução para  $Lu = 0$  em  $\Omega$  se  $Lv \leq 0$  em  $\Omega$ . De maneira análoga define-se subsolução considerando  $-u$  no lugar de  $u$ .

Para concluirmos o resultado, basta aplicarmos o princípio de máximo forte juntamente com o corolário 1.2.8 à função  $v$ . ■

**Corolário 1.2.11.** *Seja  $w$  como no Teorema 1.2.10. Então, para toda função  $u$  tal que  $Lu \geq 0$  em  $\Omega$  e  $u \leq 0$  sobre  $\partial\Omega$ , tem-se  $u \leq 0$  em  $\Omega$ .*

**Demonstração:** Segue do Teorema 1.2.10. ■

O resultado seguinte é chamado princípio de máximo para domínios estreitos.

**Proposição 1.2.12.** *Seja  $L$  uniformemente elíptico em  $\Omega$ . Suponhamos que existem constantes positivas,  $\lambda_0$ ,  $b_0$  e  $c_0$  tais que*

$$a_{11} \geq \lambda_0, \quad b_1 \geq -b_0 \quad e \quad c \leq c_0.$$

*Se  $\bar{\Omega} \subset \{x \in \mathbb{R}^n; a - \varepsilon < x_1 < a\}$  e  $u$  satisfaz  $Lu \geq 0$  com  $u \leq 0$  sobre  $\partial\Omega$ , então  $u < 0$  em  $\Omega$  ou  $u \equiv 0$ , desde que*

$$c_0 e^{\frac{2b_0\varepsilon}{\lambda_0}} \leq c_0 + \frac{2b_0^2}{\lambda_0} \quad (\varepsilon > 0).$$

**Demonstração:** Para  $\alpha = \frac{2b_0}{\lambda_0}$  a função

$$w = e^{\alpha a} - e^{\alpha x_1}$$

é positiva em  $\bar{\Omega}$  e satisfaz

$$\begin{aligned} -Lw &= (a_{11}\alpha^2 + b_1\alpha) e^{\alpha x_1} - c(e^{\alpha a} - e^{\alpha x_1}) \\ &\geq (\lambda_0\alpha^2 - b_0\alpha) e^{\alpha x_1} - c_0(e^{\alpha a} - e^{\alpha x_1}). \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} -e^{-\alpha x_1} Lw &\geq \lambda_0\alpha^2 - b_0\alpha + c_0 - c_0 e^{\alpha\varepsilon} \\ &= \frac{2b_0^2}{\lambda_0} + c_0 - c_0 e^{\alpha\varepsilon} \quad (\text{pois } \alpha = \frac{2b_0}{\lambda_0}) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

por hipótese.

A função  $v = \frac{u}{w}$  satisfaz  $\tilde{L}v \geq 0$  onde  $\tilde{L}$  é dado por (1.4). Como  $\frac{Lw}{w} \leq 0$  e  $v \leq 0$  sobre  $\partial\Omega$ , segue pelo de máximo forte (ou Corolário 1.2.7) que  $u < 0$  em  $\Omega$  ou  $u \equiv 0$ . ■

### 1.2.5 Unicidade do problema de contorno misto

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  limitado com fronteira formada pela união disjunta dos conjuntos  $\Gamma^1$  e  $\Gamma^2$ . Não estamos excluindo a possibilidade de  $\Gamma^1$  ou  $\Gamma^2$  serem vazios. Consideremos o seguinte problema:

$$\left\{ \begin{array}{ll} Lu = f & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha(x)u(x) = \varphi & \text{sobre } \Gamma^1 \\ u = \psi & \text{sobre } \Gamma^2 \end{array} \right. \quad (1.5)$$

para alguma  $f \in C(\overline{\Omega})$ ,  $\varphi \in C(\Gamma^1)$ ,  $\psi \in C(\Gamma^2)$  e  $\alpha(x) \geq 0$ .

**Proposição 1.2.13.** *No problema (1.5) suponhamos que  $L$  é uniformemente elíptico em  $\Omega$ ,  $c(x) \leq 0$  em  $\Omega$ ,  $\frac{c}{\lambda}$  é limitado e  $\alpha(x) \geq 0$  sobre  $\Gamma^1$ . Então (1.5) tem no máximo uma solução  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  se  $c \not\equiv 0$  ou  $\alpha \not\equiv 0$ . Se  $c \equiv 0$  e  $\alpha \equiv 0$ , então duas soluções de (1.5), se existirem, diferem por uma constante (veja [PW]).*

**Demonstração:** Suponhamos que  $u$  e  $v$  são soluções de (1.5). Então  $w = u - v$  satisfaz

$$\left\{ \begin{array}{ll} Lw = 0 & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} + \alpha(x)w(x) = 0 & \text{sobre } \Gamma^1 \\ w = 0 & \text{sobre } \Gamma^2. \end{array} \right. \quad (1.6)$$

Se  $w > 0$  então  $w$  tem um máximo positivo. Pelo princípio de máximo forte (Teorema 1.2.6) este máximo deve ocorrer em um ponto  $x_0 \in \Gamma^1$ . Se  $w$  não for constante,  $\frac{\partial w}{\partial \nu} > 0$  pelo Corolário 1.2.8. Por hipótese  $\alpha(x) \geq 0$  e  $w > 0$  logo  $\alpha(x_0)w(x_0) \geq 0$ . Por (1.6)  $\alpha(x_0)w(x_0) = -\frac{\partial w}{\partial \nu}(x_0) < 0$ , absurdo. Portanto,  $w$  é constante ou  $w \leq 0$  em  $\Omega$ . Aplicando o mesmo argumento para função  $-w$ , concluímos que  $w$  deve ser constante. Mas, nenhuma constante a não ser o zero satisfaz (1.6) a menos que  $c \equiv \alpha \equiv 0$  e  $\Gamma_2$  seja vazio, neste caso qualquer constante satisfaz o problema 1.6. ■

### 1.3 Estimativas a priori

Nesta seção, obteremos estimativas a priori para as soluções dos problemas de Dirichlet e Neumann (veja [HL]), baseadas nos princípios de máximo.

Suponhamos que  $\Omega$  é um domínio limitado de  $\mathbb{R}^n$ . Consideremos o operador  $L$  em  $\Omega$  para  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ . Suponhamos ainda, que  $a_{ij}$ ,  $b_i$  e  $c$  são contínuas e portanto limitadas em  $\overline{\Omega}$ .

Denotemos por  $\Upsilon$  à norma do sup de  $a_{ij}$  e  $b_i$ , isto é,

$$\max_{\Omega} |a_{ij}| + \max_{\Omega} |b_i| \leq \Upsilon.$$

**Proposição 1.3.1.** *Suponhamos que  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  satisfaz*

$$\begin{cases} Lu = f & \text{em } \Omega \\ u = \varphi & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

para alguma  $f \in C(\overline{\Omega})$  e  $\varphi \in C(\partial\Omega)$ . Se  $c(x) \leq 0$ , então

$$|u(x)| \leq \max_{\partial\Omega} |\varphi| + C \max_{\Omega} |f|, \quad \forall x \in \Omega$$

onde  $C = C(\lambda, \Upsilon, \text{diam } \Omega)$  é uma constante positiva ([HL]).

**Demonstração:** Iremos construir uma função  $w$  em  $\Omega$  tal que:

- i)  $L(w \pm u) = Lw \pm Lu = Lw \pm f \leq 0$  em  $\Omega$ ;
- ii)  $w \pm u = w \pm \varphi \geq 0$  sobre  $\partial\Omega$ .

Sejam  $F = \max_{\Omega} |f|$  e  $\Phi = \max_{\partial\Omega} |\varphi|$ . Para estabelecer (i) e (ii) é suficiente demonstrar que:

$$\begin{cases} Lw \leq -F & \text{em } \Omega \\ w \geq \Phi & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Suponhamos que  $\Omega \subset \{0 < x_1 < d\}$  para algum  $d > 0$ . Seja  $w = \Phi + (e^{\alpha d} - e^{\alpha x_1}) F$ , onde  $\alpha$  é uma constante a ser determinada. Notemos que,

$$\begin{aligned} -Lw &= (a_{11}\alpha^2 + b_1\alpha) F e^{\alpha x_1} - c\Phi - c(e^{\alpha d} - e^{\alpha x_1}) F \\ &\geq (a_{11}\alpha^2 + b_1\alpha) F. \end{aligned}$$



Usando a elipticidade e escolhendo  $\alpha$  suficientemente grande, resulta

$$-Lw \geq F \text{ em } \Omega.$$

Portanto,

$$\begin{cases} Lw \leq \mp f & \text{em } \Omega \\ w \geq \mp \varphi & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo Corolário 1.2.7, tem-se  $|u| \leq w$ . Daí,

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \sup_{\Omega} w \leq \Phi + \sup_{\Omega} (e^{\alpha d} - e^{\alpha x_1}) F \leq \Phi + (e^{\alpha d} - 1) F,$$

onde  $\alpha$  depende de  $\lambda$  e  $\Upsilon$ . ■

**Proposição 1.3.2.** *Suponhamos que  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  satisfaz*

$$\begin{cases} Lu = f & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha(x)u(x) = \varphi & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.7)$$

Se  $c(x) \leq 0$  em  $\Omega$  e  $\alpha(x) \geq \alpha_0 > 0$  sobre  $\partial\Omega$ , então

$$|u(x)| \leq C \left\{ \max_{\partial\Omega} |\varphi| + \max_{\Omega} |f| \right\}, \forall x \in \Omega$$

onde  $C = C(\lambda, \Upsilon, \alpha_0, \text{diam } \Omega)$  é uma constante positiva ([HL]).

**Demonstração:** A prova deste resultado é dividida em duas partes:

**Caso especial:**  $c(x) \leq -c_0 < 0$ .

Sejam  $\Phi$  e  $F$  como antes. Definamos  $v = \frac{1}{c_0}F + \frac{1}{\alpha_0}\Phi \pm u$ . Como  $c(x) \leq 0$  e  $\alpha \geq \alpha_0 > 0$ , temos:

$$c(x) \left( \frac{1}{c_0}F + \frac{1}{\alpha_0}\Phi \right) \leq c(x) \frac{F}{c_0} \leq -F.$$

Daí,

$$Lv = c(x) \left( \frac{1}{c_0}F + \frac{1}{\alpha_0}\Phi \right) \pm f \leq -F \pm f \text{ em } \Omega.$$

Facilmente verificamos que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial \nu} + \alpha v &= \alpha \left( \frac{1}{c_0} F + \frac{1}{\alpha_0} \Phi \right) \pm \varphi \\ &\geq \Phi \pm \varphi \geq 0.\end{aligned}\tag{1.8}$$

Se  $v$  tem um mínimo negativo em  $\overline{\Omega}$ , então este mínimo é atingido sobre  $\partial\Omega$ , digamos que seja em  $x_0 \in \partial\Omega$ . Isto implica  $\frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) \leq 0$ , logo  $(\frac{\partial v}{\partial \nu} + \alpha v)(x_0) \leq \alpha v(x_0) < 0$ , o que contradiz a desigualdade acima. Portanto,  $v \geq 0$  em  $\overline{\Omega}$ , logo

$$|u(x)| \leq \frac{1}{c_0} F + \frac{1}{\alpha_0} \Phi$$

para todo  $x \in \Omega$ .

**Caso Geral:**  $c(x) \leq 0$  em  $\Omega$ .

Consideremos  $u(x) = z(x)w(x)$  onde  $z$  é uma função positiva em  $\overline{\Omega}$  a ser determinada. Calculando  $\frac{\partial u}{\partial \nu}$  e usando a condição de fronteira, obtemos:

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} + \left( \alpha(x) + \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial \nu} \right) w = \frac{\varphi}{z} \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Como na demonstração do Teorema 1.2.10,

$$a_{ij}w_{x_i x_j} + \sum_i \left( b_i + \frac{2}{z} \sum_j a_{ij}z_{x_j} \right) w_{x_i} + w \frac{Lz}{z} = \frac{f}{z}.$$

Precisamos escolher uma função  $z > 0$  em  $\overline{\Omega}$  tal que,

$$\begin{aligned}\frac{Lz}{z} &\leq -c_0(\lambda, \Lambda, d, \alpha_0) < 0 \text{ em } \Omega; \\ \alpha + \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial \nu} &\geq \frac{1}{2} \alpha_0 \text{ sobre } \partial\Omega.\end{aligned}$$

Para isto é suficiente escolher  $z$  tal que

$$\begin{aligned}\frac{a_{ij}z_{x_i x_j} + b_i z_{x_i}}{z} &\leq -c_0 < 0 \text{ em } \Omega, \\ \left| \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial \nu} \right| &\leq \frac{1}{2} \alpha_0 \text{ sobre } \partial\Omega.\end{aligned}$$

Com efeito,  $c \leq 0$  implica  $c + \frac{a_{ij}z_{x_i x_j} + b_i z_{x_i}}{z} = \frac{Lz}{z} \leq -c_0$   
 $\left| \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial \nu} \right| \leq \frac{1}{2} \alpha_0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \alpha_0 \leq \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial \nu} \leq \frac{1}{2} \alpha_0 \Leftrightarrow 0 < \alpha - \frac{1}{2} \alpha_0 \leq \alpha + \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial \nu} \leq \alpha + \frac{1}{2} \alpha_0$ . Como  
 $\alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow \alpha - \frac{1}{2} \alpha_0 \geq \alpha_0 - \frac{\alpha_0}{2} = \frac{\alpha_0}{2}$ .

Suponhamos que  $\Omega \subset \{0 < x_1 < d\}$ . Seja  $z(x) = A + e^{\beta d} - e^{\beta x_1}$  para  $x \in \Omega$ ,  $A$  e  $B$  constantes positivas a serem determinadas. Temos:

$$a_{ij}z_{x_i x_j} + b_i z_{x_i} = -a_{11}\beta^2 e^{\beta x_1} - b_1 \beta e^{\beta x_1}.$$

Logo,

$$\frac{-1}{z} (a_{ij}z_{x_i x_j} + b_i z_{x_i}) = \frac{(a_{11}\beta^2 + b_1\beta) e^{\beta x_1}}{A + e^{\beta d} - e^{\beta x_1}} \geq \frac{a_{11}\beta^2 + b_1\beta}{A + e^{\beta d}} \geq \frac{1}{A + e^{\beta d}} > 0$$

se  $\beta$  é tal que  $\beta^2 a_{11} + \beta b_1 \geq 1$ .

Como  $\nabla z(x) = (-\beta e^{\beta x_1}, 0, \dots, 0)$ , obtemos:

$$\left| \frac{1}{z} \nabla z \cdot \nu \right| = \left| \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial \nu} \right| \leq \left| \frac{1}{z} (-\beta e^{\beta x_1}) \right| = \frac{\beta}{z} e^{\beta x_1}.$$

Para  $z = A + e^{\beta d} - e^{\beta x_1} \geq A$ , tem-se  $\left| \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial \nu} \right| \leq \frac{\beta e^{\beta x_1}}{z} \leq \frac{\beta e^{\beta x_1}}{A} \leq \frac{1}{2} \alpha_0$ . Para  $A$  suficientemente grande  $\left( A \geq \frac{2\beta e^{\beta d}}{\alpha_0} \right)$ . O resultado segue aplicando o caso especial para  $w$ . ■

## 1.4 Estimativas do Gradiente

As idéias básicas no tratamento das estimativas do gradiente, devido a *Bernstein*, envolvem diferenciação da equação com respeito a  $x_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , seguido pela multiplicação por  $u_{x_j}$  e somando em  $j$ . Aplicamos o princípio do máximo a equação resultante na função  $v = |\nabla u|^2$ . Há duas classes de estimativas do gradiente, estimativas do gradiente global e interior. Usaremos a equação semi-linear para ilustrar esta idéia.

Seja  $\Omega$  um domínio limitado de  $\mathbb{R}^n$ . Consideremos

$$Mu := a_{ij}u_{x_i x_j} + b_i u_{x_i} = f(x, u) \quad \text{em } \Omega. \quad (1.9)$$

Para  $u \in C^2(\Omega)$  e  $f \in C(\Omega \times \mathbb{R})$ ,  $a_{ij}, b_i \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  e  $a_{ij}\xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2$ ,  $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$  e para alguma constante positiva  $\lambda$ . Um ponto de  $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$  será denotado por  $(x, z)$  e escrevemos  $a_{ij, x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} a_{ij}$  para indicar a derivada de  $a_{ij}$  com relação a  $x_k$  (veja [HL]).

**Proposição 1.4.1.** *Suponhamos que  $u \in C^3(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  satisfaz (1.9), para  $a_{ij}, b_i \in C^1(\bar{\Omega})$  e  $f \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$ . Então,*

$$\sup_{\Omega} |\nabla u| \leq \sup_{\partial\Omega} |\nabla u| + C$$

onde  $C = C\left(\lambda, \text{diam}(\Omega), |a_{ij}, b_i|_{C^1(\bar{\Omega})}, \Theta = \|u\|_{L^\infty(\Omega)}, |f|_{C^1(\bar{\Omega} \times [-\Theta, \Theta])}\right)$  é uma constante positiva.

**Demonstração:** Temos,

$$D_i(|\nabla u|^2) = \sum_k 2u_{x_k} u_{x_k x_i} \quad (1.10)$$

$$D_{ij}(|\nabla u|^2) = \sum_k 2(u_{x_k x_j} u_{x_k x_i} + u_{x_k} u_{x_k x_i x_j})$$

Derivando (1.9) com respeito a  $x_k$ , depois multiplicando por  $u_{x_k}$  e somando a equação resultante em  $k$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,k} (a_{ij,x_k} u_{x_i x_j} u_{x_k} + a_{ij} u_{x_i x_j x_k} u_{x_k}) + \sum_{i,k} (b_{i,x_k} u_{x_i} u_{x_k} + b_i u_{x_i x_k} u_{x_k}) = \\ = \sum_k f_{x_k} u_{x_k} + f_z \sum_k (u_{x_k})^2 \end{aligned} \quad (1.11)$$

Usando (1.10) e (1.11), concluímos que:

$$\begin{aligned} M(|\nabla u|^2) &= \sum_{i,j} a_{ij} D_{ij}(|\nabla u|^2) + \sum_i b_i D_i(|\nabla u|^2) \\ &= \sum_{i,j,k} 2(a_{ij} u_{x_k x_j} u_{x_k x_i} + a_{ij} u_{x_k} u_{x_k x_i x_j}) + \sum_{i,k} 2b_i u_{x_k} u_{x_k x_i} \\ &= 2 \sum_{i,j,k} (a_{ij} u_{x_k x_j} u_{x_k x_i} - a_{ij,x_k} u_{x_i x_j} u_{x_k}) - 2 \sum_{i,k} b_{i,x_k} u_{x_i} u_{x_k} + 2f_z |\nabla u|^2 + 2 \sum_k f_{x_k} u_{x_k}. \end{aligned}$$

Utilizando a hipótese de elipticidade com  $\xi = \nabla(u_{x_k})$ , obtemos:

$$\sum_{i,j,k} a_{ij} u_{x_k x_i} u_{x_k x_j} \geq \lambda \sum_{k,l} |u_{x_k x_l}|^2 = \lambda |D^2 u|^2.$$

Daí,

$$\begin{aligned} M(|\nabla u|^2) &\geq 2\lambda |D^2 u|^2 - 2 \sum_{i,j,k} a_{ij,x_k} u_{x_k} u_{x_i x_j} - 2 \sum_{k,i} b_{i,x_k} u_{x_k} u_{x_i} \\ &\quad + 2f_z |\nabla u|^2 + 2 \sum_k f_{x_k} u_{x_k}. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Cauchy, obtemos:

$$M(|\nabla u|^2) \geq \lambda |D^2 u|^2 - C |\nabla u|^2 - C$$

onde  $C = C\left(\lambda, |a_{ij}, b_i|_{C^1(\bar{\Omega})}, |f|_{C^1(\bar{\Omega} \times [-\Theta, \Theta])}\right)$ .

Calculando  $M(u^2)$  e usando a hipótese de elipticidade, segue-se que

$$\begin{aligned} M(u^2) &\geq 2\lambda |\nabla u|^2 + 2u \{a_{ij} u_{x_i x_j} + b_i u_{x_i}\} = 2\lambda |\nabla u|^2 + 2uf \\ &\geq 2\lambda |\nabla u|^2 - |f|^2 - |u|^2 \\ &\geq 2\lambda |\nabla u|^2 - \|f\|_{C^1(\bar{\Omega} \times [-\Theta, \Theta])}^2 - \|u\|_{L^\infty(\bar{\Omega})}^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$M(|\nabla u|^2 + \alpha u^2) \geq \lambda |D^2 u|^2 + (2\alpha\lambda - C) |\nabla u|^2 - C.$$

Para  $\alpha$  suficientemente grande,

$$M(|\nabla u|^2 + \alpha u^2) \geq \lambda |D^2 u|^2 + |\nabla u|^2 - C.$$

Afim de controlar o termo independente, consideramos uma nova função  $e^{\beta x_1}$  com  $\beta > 0$ .

Note que,

$$M(|\nabla u|^2 + \alpha u^2 + e^{\beta x_1}) \geq \lambda |D^2 u|^2 + |\nabla u|^2 + \{-C + \beta^2 a_{11} e^{\beta x_1} + b_1 \beta e^{\beta x_1}\}.$$

Se colocarmos o domínio  $\Omega \subset \{x_1 > 0\}$ , então  $e^{\beta x_1} \geq 1$  para todo  $x \in \Omega$ . Assim, para  $\beta$  grande, fazemos com que o último termo seja positivo.

Seja  $w = |\nabla u|^2 + \alpha u^2 + e^{\beta x_1}$ , para  $\alpha, \beta$  grandes dependendo de  $\lambda, \text{diam}(\Omega), |a_{ij}, b_i|_{C^1(\bar{\Omega})}, \Theta = \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$  e  $|f|_{C^1(\bar{\Omega} \times [-\Theta, \Theta])}$ , obtemos:

$$M(w) \geq 0 \text{ em } \Omega.$$

Pelo princípio de máximo, tem-se:

$$\sup_{\Omega} w \leq \sup_{\partial\Omega} w.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega} |\nabla u|^2 &\leq \sup_{\Omega} w \leq \sup_{\partial\Omega} w \\ &\leq \sup_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 + \alpha \sup_{\partial\Omega} |u|^2 + \sup_{\partial\Omega} e^{\beta x_1} \\ &\leq \sup_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 + C. \end{aligned}$$

Logo,

$$\sup_{\Omega} |\nabla u| \leq \sup_{\partial\Omega} |\nabla u| + C.$$

■

**Proposição 1.4.2.** *Suponhamos que  $u \in C^3(\Omega)$  satisfaz (1.9) para  $a_{ij}$ ,  $b_i$  e  $f$  como na proposição anterior. Então, para todo compacto  $\Omega' \subset\subset \Omega$*

$$\sup_{\Omega'} |\nabla u| \leq C$$

onde  $C = C\left(\lambda, \text{diam}(\Omega), |a_{ij}, b_i|_{C^1(\bar{\Omega})}, \Theta = \|u\|_{L^\infty(\Omega)}, |f|_{C^1(\bar{\Omega} \times [-\Theta, \Theta])}\right)$  é uma constante positiva.

**Demonstração:** Considere  $\gamma \in C_0^\infty(\Omega)$  com  $\gamma \geq 0$  e  $w = \gamma |\nabla u|^2 + \alpha |u|^2 + e^{\beta x_1}$ . Seja  $v = \gamma |\nabla u|^2$ . Cálculos simples segue-se que,

$$\begin{aligned} Mv &= (M\gamma) |\nabla u|^2 + 2a_{ij}\gamma_{x_i} D_j (|\nabla u|^2) + \gamma M (|\nabla u|^2) \\ &= (M\gamma) |\nabla u|^2 + \gamma M (|\nabla u|^2) + \sum_{i,j,k} 4a_{ij}\gamma_{x_i} u_{x_k} u_{x_j x_k}. \end{aligned}$$

Como na prova anterior, temos:

$$M (|\nabla u|^2) \geq \lambda |D^2 u|^2 - C |\nabla u|^2 - C.$$

Portanto,

$$Mv \geq \lambda \gamma |D^2 u|^2 - C \gamma |\nabla u|^2 - C \gamma + \sum_{i,j,k} 4a_{ij}\gamma_{x_i} u_{x_k} u_{x_j x_k} + (M\gamma) |\nabla u|^2$$

Aplicando a desigualdade de *Cauchy* com  $\varepsilon > 0^7$ , resulta:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i,j,k} 2a_{ij}u_{x_k}\gamma_{x_i}u_{x_jx_k} \right| &\leq \sum_{i,j,k} \left( \frac{1}{2\varepsilon} |a_{ij}|^2 |u_{x_k}|^2 + \varepsilon |\gamma_{x_i}|^2 |u_{x_kx_j}|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 |\nabla u|^2 + \varepsilon |\nabla \gamma|^2 |D^2 u|^2 \\ &= \varepsilon |\nabla \gamma|^2 |D^2 u|^2 + C(\varepsilon) |\nabla u|^2. \end{aligned}$$

Vamos exigir que:

$$|\nabla \gamma|^2 \leq C\gamma \text{ em } \Omega. \quad (1.12)$$

Para  $\varepsilon > 0$  pequeno

$$\begin{aligned} Mv &\geq \lambda\gamma |D^2 u|^2 - 2\varepsilon |\nabla \gamma|^2 |D^2 u|^2 - 2C(\varepsilon) |\nabla u|^2 - C |\nabla u|^2 + (M\gamma) |\nabla u|^2 - C \\ &= \lambda\gamma |D^2 u|^2 \left( 1 - \frac{2\varepsilon}{\lambda\gamma} |\nabla \gamma|^2 \right) - (2C(\varepsilon) + C + (M\gamma)) |\nabla u|^2 - C. \end{aligned}$$

Tomando  $\frac{\varepsilon}{2\lambda}$  no lugar de  $\varepsilon$ , obtemos:

$$Mv \geq \lambda\gamma |D^2 u|^2 \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\gamma} |\nabla \gamma|^2 \right) - C |\nabla u|^2 - C.$$

Segue de (1.12) que para  $\varepsilon$  pequeno

$$Mv \geq \frac{1}{2}\lambda\gamma |D^2 u|^2 - C |\nabla u|^2 - C.$$

Agora podemos argumentar como na proposição anterior para obtermos o resultado. ■

## 1.5 Teorema da Divergência

O teorema seguinte é o Teorema de *Green-Gauss*

**Teorema 1.5.1.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio limitado, com fronteira de classe  $C^1$ . Para  $u \in C^1(\overline{\Omega})$  vale*

$$\int_{\Omega} u_{x_i} dx = \int_{\partial\Omega} u\nu_i dS \quad (1.13)$$

onde  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$  representa a normal unitária exterior a  $\partial\Omega$ .

---

<sup>7</sup>Se  $a, b$  e  $\varepsilon$  são números positivos então  $ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon} b^2$ .

**Demonstração:** A prova deste resultado e outras formulações podem ser encontrado, por exemplo em [Fr, Apêndice D]. ■

O teorema acima também é chamado de teorema da Divergência porque para  $\Omega$  como no Teorema 1.5.1 ele é equivalente a:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot V \, dx = \int_{\partial\Omega} V \cdot \nu \, dS. \quad (1.14)$$

onde  $V \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ . O campo vetorial é dado por:

$$\operatorname{div} V = \nabla \cdot V = \sum_{i=1}^n V_{x_i}.$$

Com efeito, para obter (1.14) de (1.13), considere  $V_j = u$  e some em  $j$ ; para obter (1.13) de (1.14) faça  $V_j = u\delta_{ij}$  para  $i$  fixado e  $j = 1, \dots, n$

### 1.5.1 Identidades de Green

Seja  $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$ . Em (1.14) considerando  $V = v\nabla u$ , obtemos:

$$\int_{\Omega} [v \operatorname{div}(\nabla u) + \nabla v \cdot \nabla u] \, dx = \int_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot \nu \, dS. \quad (1.15)$$

Usando a identidade  $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)$  podemos reescrever (1.15) da seguinte forma,

$$\int_{\Omega} v \Delta u \, dx + \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \, dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS \quad (1.16)$$

conhecida como primeira identidade de Green. Permutando  $u$  e  $v$  em (1.16) e subtraindo a equação resultante de (1.16), obtemos a segunda identidade de Green:

$$\int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) \, dx = \int_{\partial\Omega} \left( v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) \, dS. \quad (1.17)$$

## 1.6 Capacidade

Os resultados aqui expostos são baseados nos livros clássicos de Protter & Weinberger [PW] e Gilbarg & Trudinger [GT].



Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  um domínio cuja fronteira consiste de duas superfícies  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  fechadas, simples e suaves. Pode-se mostrar a existência de uma função  $u$  em  $\Omega$  com as seguintes propriedades:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega \\ u = 1 & \text{sobre } \Gamma_1 \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma_2 \end{cases} \quad (1.18)$$

A unicidade da solução do problema (1.18) segue da Proposição 1.2.13. Usando unidades apropriadas, a quantidade  $u$  pode ser interpretada fisicamente como o potencial eletrostático em cada ponto de  $\Omega$  quando a diferença de potencial de uma unidade é mantida entre os condutores perfeitos  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ . A carga total  $C = C(\Gamma_1, \Gamma_2)$  induzida pela diferença de potencial é dada pela expressão:

$$C(\Gamma_1, \Gamma_2) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS. \quad (1.19)$$

A quantidade  $C$  é chamada de capacidade eletrostática ou simplesmente capacidade de  $\Gamma_1$  com relação a  $\Gamma_2$ . Segue da primeira identidade de Green que,

$$-\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS.$$

A função  $w = 1 - u$  é harmônica em  $\Omega$ , igual a 1 sobre  $\Gamma_2$  e igual a 0 sobre  $\Gamma_1$ , a relação

$$-\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{\partial w}{\partial \nu} dS = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_2} \frac{\partial w}{\partial \nu} dS$$

implica que  $C(\Gamma_1, \Gamma_2) = C(\Gamma_2, \Gamma_1)$ .

Usaremos o princípio de máximo para obter comparação entre as capacidades dos condutores de vários tamanhos. Substituindo o condutor  $\Gamma_1$  pelo condutor  $\Gamma'_1$  o qual é maior no sentido que está em  $\Omega$  e separa  $\Gamma_1$  de  $\Gamma_2$  como mostra a Figura 1.1.

Seja  $\Omega'$  o domínio limitado por  $\Gamma'_1$  e  $\Gamma_2$ . A função  $\bar{u}$  é o potencial eletrostático obtido quando uma unidade da diferença de potencial é mantida entre  $\Gamma'_1$  e  $\Gamma_2$ , i.e.,  $\bar{u}$  é solução do problema,

$$\begin{cases} \Delta \bar{u} = 0 & \text{em } \Omega' \\ \bar{u} = 1 & \text{sobre } \Gamma'_1 \\ \bar{u} = 0 & \text{sobre } \Gamma_2. \end{cases} \quad (1.20)$$

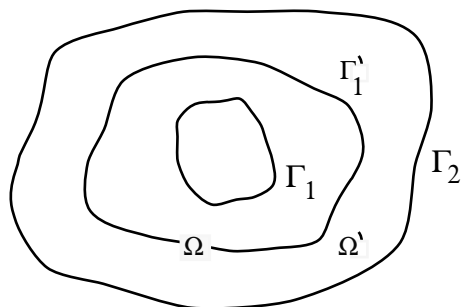


Figura 1.1:

Denotemos por  $\overline{C} = C(\Gamma'_1, \Gamma_2)$  a capacidade de  $\Gamma'_1$  com respeito a  $\Gamma_2$ . Segue pelo princípio do máximo forte que  $0 \leq u \leq 1$  em  $\Omega$ . Definindo  $v = u - \bar{u}$  em  $\Omega'$ , obtemos:

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{em } \Omega' \\ v \leq 0 & \text{sobre } \Gamma'_1 \\ v = 0 & \text{sobre } \Gamma_2. \end{cases} \quad (1.21)$$

Pelo Corolário 1.2.8,  $\frac{\partial v}{\partial \nu} > 0$  sobre  $\Gamma_2$ . Logo,

$$C - \overline{C} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_2} \left( \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} \right) dS = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_2} \frac{\partial v}{\partial \nu} dS < 0,$$

ou seja, para  $\Gamma_2$  fixado, a capacidade eletrostática aumenta quando  $\Gamma_1$  se move para o exterior. De maneira análoga podemos mostrar que para  $\Gamma_1$  fixado a capacidade cresce com  $\Gamma_2$  movendo para o interior.

Usaremos a propriedade acima para obter uma limitação para a capacidade de um par de condutores. Para isso, considere duas esferas concêntricas  $S_1 = \partial B_{R_1}(x_0)$  e  $S_2 = \partial B_{R_2}(x_0)$  com  $R_2 > R_1$ . Neste caso, a capacidade pode ser calculada explicitamente. De fato, suponhamos que  $x_0$  é a origem do sistema de coordenadas cartesianas e consideremos  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Cálculos diretos mostram que,

$$u(x, y, z) = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right)$$

é uma função harmônica na região compreendida entre  $S_1$  e  $S_2$ . E mais,  $u = 0$  quando  $r = R_2$  e  $u = 1$  quando  $r = R_1$  logo  $u$  é a função potencial eletrostática requerida. Como

$\frac{\partial}{\partial \nu} = \frac{\partial}{\partial r}$  sobre  $S_2$  encontramos que

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{r=R_2} = -\frac{R_1}{R_2(R_2 - R_1)},$$

logo a capacidade de duas esferas concêntricas é dada por:

$$C(S_1, S_2) = \frac{R_1}{4\pi R_2(R_2 - R_1)} \int_{S_2} dS = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

Se existirem esfera  $S_1$  e  $S_2$  tal que  $S_1$  esteja no interior de  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  no interior  $S_2$ , como mostra a Figura 1.2, então a capacidade  $C(\Gamma_1, \Gamma_2)$  satisfaz

$$C(\Gamma_1, \Gamma_2) > C(S_1, S_2) = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

De modo análogo este método nos dá uma cota superior para  $C(\Gamma_1, \Gamma_2)$ , deste que seja

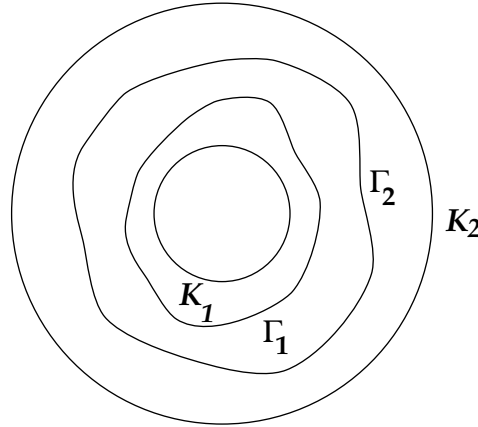


Figura 1.2:

possível encontrar esferas concêntricas contidas no domínio limitado por  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  que separem  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ . Para  $\Gamma_2$  selecionamos uma esfera  $S_R$  raio  $R$ . Como a capacidade de  $\Gamma_1$  com relação a  $S_R$  decresce quando  $R$  aumenta e é sempre positiva, vemos que ela deve tender para um limite quando  $R \rightarrow \infty$ . Motivados com o que foi exposto acima temos a seguinte definição:

**Definição 1.6.1.** *A capacidade de um condutor  $\Gamma_1$  é o limite quando  $R \rightarrow \infty$  da capacidade de  $\Gamma_1$  com relação a  $S_R$ . Denotaremos esta quantidade por  $C(\Gamma_1)$ .*

Seja  $u$  uma função tal que  $\Delta u = 0$  no exterior de  $\Gamma_1$ ,  $u = 1$  sobre  $\Gamma_1$  e  $\lim_{r \rightarrow \infty} u(x, y, z) = 0$ . Segue da última condição que para todo  $\varepsilon > 0$  existe um  $R$  tal que  $0 < u < \varepsilon$  sobre  $S_R$ . Pelo argumento usado na obtenção da monotonicidade da capacidade, obtemos:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS \leq C(\Gamma_1, S_R).$$

Aplicando o mesmo argumento para função  $\frac{u-\varepsilon}{1-\varepsilon}$  a qual é não-positiva sobre  $S_R$  e 1 sobre  $\Gamma_1$ , temos:

$$\frac{1}{4\pi(1-\varepsilon)} \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS \geq C(\Gamma_1, S_R).$$

Fazendo  $R \rightarrow \infty$  e  $\varepsilon \rightarrow 0$ , resulta

$$C(\Gamma_1) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS.$$

Usando a primeira identidade de Green, obtemos:

$$C(\Gamma_1) = \frac{-1}{4\pi} \int_{S_R} \frac{\partial u}{\partial r} dS,$$

onde  $S_R$  é qualquer esfera contendo  $\Gamma_1$ . Quando  $\Gamma_1$  é a esfera  $S_1$ ,

$$C(S_1) = \lim_{R \rightarrow \infty} C(S_1, S_R) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{RR_1}{R - R_1} = R_1,$$

ou seja, a capacidade da esfera é dado por seu raio.

Usando o princípio de máximo obteremos comparação entre a capacidade de dois condutores. Seja  $\Gamma'_1$  e  $\Gamma''_1$  duas superfícies fechadas simples contidas no interior da superfície  $\Gamma_2$  (veja Figura 1.3). Não excluimos a possibilidade de  $\Gamma'_1$  e  $\Gamma''_1$  se interceptarem. Seja  $\Gamma_1 = \Gamma'_1 \cup \Gamma''_1$  e consideremos as funções  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u$  satisfazendo as seguintes propriedades:

- (i) A função  $u_1$  é harmônica no domínio entre  $\Gamma'_1$  e  $\Gamma_2$ ,  $u_1 = 1$  sobre  $\Gamma'_1$  e  $u_1 = 0$  sobre  $\Gamma_2$ ;
- (i) A função  $u_2$  é harmônica no domínio entre  $\Gamma''_1$  e  $\Gamma_2$ ,  $u_2 = 1$  sobre  $\Gamma''_1$  e  $u_2 = 0$  sobre  $\Gamma_2$ ;
- (i) A função  $u$  é harmônica no domínio entre  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ ,  $u = 1$  sobre  $\Gamma_1$  e  $u = 0$  sobre  $\Gamma_2$ .

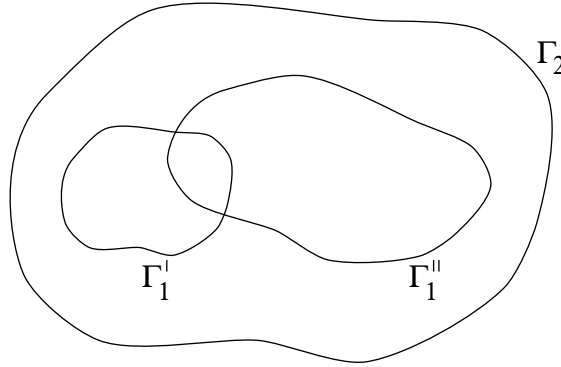


Figura 1.3:

Definindo a função  $v = u_1 + u_2 - u$  no domínio entre  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  e argumentando como na obtenção da monotonicidade da capacidade concluímos que:

$$C < C' + C''.$$

A desigualdade acima nos diz que a capacidade com relação a uma dada superfície  $\Gamma_2$  é um funcional subaditivo de  $\Gamma_1$ . Se  $\Gamma_2$  é uma esfera de raio  $R$ ,  $C(\Gamma_1')$ ,  $C(\Gamma_1'')$ ,  $C(\Gamma_1)$  são as capacidades dos condutores simples, então

$$C(\Gamma_1) \leq C(\Gamma_1') + C(\Gamma_1').$$

## 1.7 Princípio de máximo de Alexandroff

O princípio de máximo de Alexandroff (estimativas de Alexandroff-Bakelman-Pucci) nos dá limitação para o supremo de  $u$  em  $\Omega$  em termos do supremo de  $u$  sobre  $\partial\Omega$  e da norma  $L^n$  de  $f$ , calculada sobre um conjunto de  $\Omega$ , chamado conjunto de contato máximo de  $u$ .

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio limitado. Consideremos o operador elíptico  $L$  definido na Seção 1.1, onde os coeficientes  $a_{ij}$ ,  $b_i$  e  $c$  são pelo menos contínuos em  $\Omega$ . Seja  $\mathcal{D} = \det(A)$  e  $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}^{\frac{1}{n}}$ . Assim,  $\mathcal{D}^*$  é a média geométrica dos autovalores da matriz  $A = (a_{ij})$ . Assumiremos que  $0 < \lambda \leq \mathcal{D}^* \leq \Lambda$  onde  $\lambda$  e  $\Lambda$  são constantes positivas que denotam respectivamente os autovalores minimal e maximal da matriz  $A$ . Apreciaremos equações da

seguinte forma:

$$Lu = f$$

para alguma  $f \in C(\Omega)$ .

**Definição 1.7.1.** *Seja  $u \in C(\Omega)$ . Definimos o conjunto de contato máximo de  $u$  como sendo*

$$\Gamma^+ = \{y \in \Omega; \exists p_y \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } u(x) \leq u(y) + p_y(x - y), \forall x \in \Omega\}.$$

O conjunto  $\Gamma^+$  pode ser visto como o conjunto dos pontos em  $\Omega$ , cujo plano tangente fica acima de  $u$ . Na observação a seguir listamos algumas propriedades de  $\Gamma^+$ .

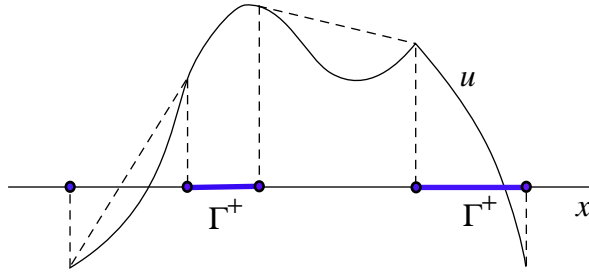


Figura 1.4: Conjunto de contato máximo de  $u$

**Observação 1.7.2.**

- $u$  é côncava se, e somente se,  $\Gamma^+ = \Omega$ ;
- Se  $u \in C^1(\Omega)$  então  $p_y = \nabla u(y)$ ;
- Se  $\Omega$  é limitado,  $\Gamma^+$  é relativamente compacto.
- Se  $u \in C^2(\Omega)$  então  $D^2u$  é não-positiva definida em  $\Gamma^+$ .

As três primeiras afirmações são imediatas. Provemos então a última afirmação. Da fórmula de *Taylor* e da definição de  $\Gamma^+$  segue-se que  $\frac{1}{2}D^2u(y)(x - y)^2 + o(|x - y|^2) \leq 0$ . Considerando  $x - y = tv$ , onde  $v$  é um vetor unitário, obtemos:

$$\frac{1}{2}D^2u(y)v^2 \leq -\frac{o(|tv|^2)}{t^2}.$$

O resultado segue-se fazendo  $t \rightarrow 0$ .

O lema a seguir é o primeiro resultado envolvendo o conjunto de contato máximo de  $u$ , o qual será usado para demonstrar o princípio de máximo de *A. D. Alexandroff*.

**Lema 1.7.3.** *Suponhamos que  $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  é não-negativa. Então, para toda  $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$*

$$\int_{B_M(0)} g \leq \int_{\Gamma^+} g(\nabla u) |\det(D^2 u)|$$

onde  $\Gamma^+$  é o conjunto de contato máximo de  $u$  e  $M = \frac{1}{\text{diam}(\Omega)} \left( \sup_{\Omega} u - \sup_{\partial\Omega} u^+ \right)$ .

**Demonstração:** Sem perda de generalidade podemos supor que  $u \leq 0$  sobre  $\partial\Omega$ , pois podemos substituir  $u$  por  $u - \sup_{\partial\Omega} u$ .

Seja  $\Omega^+ := \{x \in \Omega; u(x) > 0\}$ . Considere  $\chi_\varepsilon = \nabla u - \varepsilon Id : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Então  $\nabla \chi_\varepsilon = D^2 u - \varepsilon I$ . Como  $D^2 u$  é não-positiva definida sobre  $\Gamma^+$  e  $\varepsilon I$  é positiva definida, concluímos que  $\nabla \chi_\varepsilon$  é negativa definida sobre  $\Gamma^+$ . Pela fórmula de mudança de variável (veja [Fo1]), obtemos:

$$\int_{\chi_\varepsilon(\Gamma^+ \cap \Omega^+)} g = \int_{\Gamma^+ \cap \Omega^+} g(\chi_\varepsilon) |\det D^2 u - \varepsilon I|.$$

Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , obtemos:

$$\int_{\nabla u(\Gamma^+ \cap \Omega^+)} g = \int_{\Gamma^+ \cap \Omega^+} g(\nabla u) |\det D^2 u|.$$

Portanto, é suficiente provar que  $B_M(0) \subset \nabla u(\Gamma^+ \cap \Omega^+)$ , isto é, para todo  $a \in \mathbb{R}^n$  com  $|a| < M$ , existe  $x \in \Gamma^+ \cap \Omega^+$  tal que  $\nabla u(x) = a$ .

Podemos supor que  $u$  assume seu máximo  $m > 0$  em  $0 \in \Omega$ . Considere

$$\mathcal{L}(x) = m + ax, \quad |a| < \frac{m}{\text{diam}(\Omega)} = M.$$

Observe que  $\mathcal{L}(x) > 0$  para todo  $x \in \Omega$ . De fato,  $|ax| \leq |a| |x| < \frac{m}{\text{diam}(\Omega)} \text{diam}(\Omega) = m$ .

Como  $u$  assume em  $x = 0$  seu máximo,  $\nabla u(0) = 0$ . Assim, existe  $x_1$  próximo de 0 tal que  $u(x_1) > \mathcal{L}(x_1) > 0$ , pois  $\mathcal{L}(x)$  tem inclinação  $a \neq 0$ . Por hipótese,  $u \leq 0 < \mathcal{L}$  sobre  $\partial\Omega$ . Portanto, existe  $\tilde{x} \in \Omega$  tal que  $\nabla u(\tilde{x}) = D\mathcal{L}(\tilde{x}) = a$ , pois  $\nabla u(\tilde{x})$  é a inclinação do hiperplano

$\mathcal{L}$ . Agora podemos transladar verticalmente o plano  $y = \mathcal{L}(x)$  à posição maximal, isto é, tal que à superfície  $y = u(x)$  fique abaixo do plano. Claramente em tal ponto  $u$  é positiva e  $\tilde{x} \in \Gamma^+$ . ■

**Corolário 1.7.4.** *Nas hipóteses do Lema 1.7.3 para  $g \equiv 1$ , tem-se*

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + \frac{\text{diam}(\Omega)}{\sqrt[n]{w_n}} \left\{ \int_{\Gamma^+} \left( \frac{-a_{ij}u_{x_i x_j}}{n\mathcal{D}^*} \right)^n \right\}^{\frac{1}{n}}$$

**Demonstração:** Sabemos que  $a_{ij}u_{x_i x_j} = \text{tr}(AD^2u)$  e que  $AD^2u$  é não-positiva definida sobre  $\Gamma^+$ . Usando o fato que a média geométrica é menor ou igual a média aritmética e chamando de  $\lambda_i$  os autovalores de  $-AD^2u$ , concluímos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^* \left\{ \det(-D^2u) \right\}^{\frac{1}{n}} &= \left\{ \det(-AD^2u) \right\}^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\lambda_1 \cdots \lambda_n} \\ &\leq \frac{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}{n} = \frac{\text{tr}(-AD^2u)}{n} = \frac{-a_{ij}u_{x_i x_j}}{n} \end{aligned}$$

Logo,

$$\det(-D^2u) \leq \left( \frac{-a_{ij}u_{x_i x_j}}{n\mathcal{D}^*} \right)^n. \quad (1.22)$$

Aplicando o Lema 1.7.3 com  $g \equiv 1$ , teremos:

$$\int_{B_M(0)} dy \leq \int_{\Gamma^+} |\det(D^2u)|.$$

Usando as identidades:

$$\int_{B_M(0)} dy = M^n w_n \quad \text{e} \quad \det(-D^2u) = |\det(D^2u)|,$$

segue-se que:

$$M^n w_n \leq \int_{\Gamma^+} \left( \frac{-a_{ij}u_{x_i x_j}}{n\mathcal{D}^*} \right)^n$$

e daí

$$\left[ \frac{1}{\text{diam } \Omega} \left( \sup_{\Omega} u - \sup_{\partial\Omega} u^+ \right) \right]^n \leq \frac{1}{w_n} \int_{\Gamma^+} \left( \frac{-a_{ij}u_{x_i x_j}}{n\mathcal{D}^*} \right)^n$$

ou ainda

$$\sup_{\Omega} u - \sup_{\partial\Omega} u^+ \leq \text{diam } \Omega \left\{ \frac{1}{w_n} \int_{\Gamma^+} \left( \frac{-a_{ij}u_{x_i x_j}}{n\mathcal{D}^*} \right)^n \right\}^{\frac{1}{n}}.$$

■



**Teorema 1.7.5 (Princípio de máximo de Alexandroff).** *Suponhamos que  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  satisfaz  $Lu \geq f$  em  $\Omega$ ,  $\frac{|b|}{\mathcal{D}^\star}, \frac{|f|}{\mathcal{D}^\star} \in L^n(\Omega)$  e  $c \leq 0$  em  $\Omega$ . Então,*

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + C \left\| \frac{f^-}{\mathcal{D}^\star} \right\|_{L^n(\Gamma^+)}$$

$$\text{com } C = C \left( n, \text{diam } \Omega, \left\| \frac{b}{\mathcal{D}^\star} \right\|_{L^n(\Gamma^+)} \right).$$

**Demonstração:** Se  $b_i = c = 0$ , a prova está completa, pois  $f \leq Lu \leq 0$  sobre  $\Gamma^+$ .

Para  $b_i$  ou  $c \neq 0$  e  $x \in \Omega^+$ ,  $cu \leq 0$ . Seja  $\mu \in \mathbb{R}^n$ . Então,

$$\begin{aligned} -a_{ij}u_{x_i x_j} &\leq b_i u_{x_i} + cu - f \leq b_i u_{x_i} - f \\ &\leq |b| |\nabla u| - f^+ + f^- \\ &\leq |b| |\nabla u| + f^- \\ &= (|b|, \mu^{-1} f^-) (|\nabla u|, \mu) \\ &\leq (|b|^n + (\mu^{-1} f^-)^n)^{\frac{1}{n}} \left( |\nabla u|^{\frac{n}{n-1}} \cdot 1 + \mu^{\frac{n}{n-1}} \cdot 1 \right)^{\frac{n-1}{n}} \\ &\leq (|b|^n + (\mu^{-1} f^-)^n)^{\frac{1}{n}} \left\{ \left[ \left( |\nabla u|^{\frac{n}{n-1}} \right)^{n-1} + \left( \mu^{\frac{n}{n-1}} \right)^{n-1} \right]^{\frac{1}{n-1}} [1 + 1]^{\frac{n-2}{n-1}} \right\}^{\frac{n-1}{n}} \\ &= (|b|^n + (\mu^{-1} f^-)^n)^{\frac{1}{n}} (|\nabla u|^n + \mu^n)^{\frac{1}{n}} (1 + 1)^{\frac{n-2}{n}}. \end{aligned}$$

As duas últimas desigualdades foram obtidas, aplicando a desigualdade de Hölder. Considerando  $g(p) = \frac{1}{|p|^n + \mu^n}$ , temos:

$$\int_{B_M(0)} g(p) dp = w_n \int_0^M \frac{r^{n-1}}{r^n + \mu^n} dr = \frac{w_n}{n} \log \left( \frac{M^n}{\mu^n} + 1 \right)$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^+ \cap \Omega^+} g(\nabla u) |\det D^2 u| &\leq \int_{\Gamma^+ \cap \Omega^+} \frac{1}{|\nabla u|^n + \mu^n} \left( \frac{-a_{ij}u_{x_i x_j}}{n \mathcal{D}^\star} \right)^n \\ &\leq \int_{\Gamma^+ \cap \Omega^+} \frac{1}{|\nabla u|^n + \mu^n} \frac{(|b|^2 + (\mu^{-1} f^-)^n) (|\nabla u|^n + \mu^n) 2^{n-2}}{n^n (\mathcal{D}^\star)^n} \\ &= \int_{\Gamma^+ \cap \Omega^+} \left( \frac{|b|^n + (\mu^{-1} f^-)^n}{\mathcal{D}} \right) \frac{2^{n-2}}{n^n} \end{aligned}$$

Usando o Lema 1.7.3, substituindo  $\Omega$  por  $\Omega^+$ , obtemos:

$$\frac{w_n}{n} \log \left( \frac{M^n}{\mu^n} + 1 \right) \leq \frac{2^{n-2}}{n^n} \int_{\Gamma^+ \cap \Omega^+} \frac{|b|^n + (\mu^{-1} f^-)^n}{\mathcal{D}}$$

Logo,

$$\frac{M^n}{\mu^n} + 1 \leq \exp \left\{ \frac{n}{w_n} \frac{2^{n-2}}{n^n} \left[ \left\| \frac{b}{\mathcal{D}^*} \right\|_{L^n(\Gamma^+ \cap \Omega^+)}^n + \mu^{-1} \left\| \frac{f^-}{\mathcal{D}^*} \right\|_{L^n(\Gamma^+ \cap \Omega^+)}^n \right] \right\},$$

ou

$$M^n \leq \mu^n \left\{ \exp \left[ \frac{2^{n-2}}{n^{n-1} w_n} \left( \left\| \frac{b}{\mathcal{D}^*} \right\|_{L^n(\Gamma^+ \cap \Omega^+)}^n + \mu^{-1} \left\| \frac{f^-}{\mathcal{D}^*} \right\|_{L^n(\Gamma^+ \cap \Omega^+)}^n \right) \right] - 1 \right\}$$

ou ainda

$$\sup_{\Omega} u - \sup_{\partial\Omega} u^+ \leq \mu \operatorname{diam} \Omega \left\{ \exp \left[ \frac{2^{n-2}}{n^{n-1} w_n} \left( \left\| \frac{b}{\mathcal{D}^*} \right\|_{L^n(\Gamma^+ \cap \Omega^+)}^n + \mu^{-1} \left\| \frac{f^-}{\mathcal{D}^*} \right\|_{L^n(\Gamma^+ \cap \Omega^+)}^n \right) \right] - 1 \right\}^{\frac{1}{n}}$$

Se  $f \not\equiv 0$ , escolha  $\mu = \left\| \frac{f^-}{\mathcal{D}^*} \right\|_{L^n(\Gamma^+ \cap \Omega^+)}.$

Se  $f \equiv 0$ , considere  $\mu > 0$  e faça  $\mu \rightarrow 0$ . ■

### 1.7.1 Estimativas a priori para soluções de equações semi-linear

Nesta seção, usaremos os Teorema 1.7.5 e o Lema 1.7.3, para obtermos algumas estimativas *a priori* para soluções de equações semi-linear.

**Proposição 1.7.6.** *Suponhamos que  $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$  satisfaz*

$$Qu \equiv a_{ij}(x, u, \nabla u) u_{x_i x_j} + b(x, u, \nabla u) = 0 \text{ em } \Omega \quad (1.23)$$

onde  $a_{ij} \in C(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$  satisfaz  $a_{ij}(x, z, p) \xi_i \xi_j > 0$  para todo  $(x, z, p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  e  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . Suponhamos ainda, que existem funções não-negativas  $g \in L_{loc}^n(\mathbb{R})$  e  $h \in L^n(\Omega)$  tais que,

$$\frac{|b(x, z, p)|}{n \mathcal{D}^*} \leq \frac{h(x)}{g(x)}, \quad \forall (x, z, p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \quad (1.24)$$

$e$

$$\int_{\Omega} h^n(x) dx < \int_{\mathbb{R}^n} g^n(p) dp \equiv g_{\infty}. \quad (1.25)$$

Então,

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \sup_{\partial\Omega} |u| + C \operatorname{diam}(\Omega),$$

onde  $C = C(g, h)$  é uma constante positiva.

**Demonstração:** Vamos provar para subsoluções. Suponhamos que  $Qu \geq 0$  em  $\Omega$ . Como  $D^2u$  é não-positiva em  $\Gamma^+$ , obtemos  $-a_{ij}u_{x_i x_j} \geq 0$ . Daí,

$$b(x, u, \nabla u) \geq 0 \quad \text{em } \Gamma^+.$$

Em  $\Gamma^+ \cap \Omega^+$ , verificamos que:

$$\frac{b(x, u, \nabla u)}{n\mathcal{D}^*} \leq \frac{h(x)}{g(\nabla u)} \quad (1.26)$$

Aplicando o Lema 1.7.3 para  $g^n$ , temos:

$$\begin{aligned} \int_{B_M(0)} g^n &\leq \int_{\Gamma^+ \cap \Omega^+} g^n(\nabla u) |\det D^2u| \\ &\leq \int_{\Gamma^+ \cap \Omega^+} g^n(\nabla u) \left( \frac{-a_{ij}u_{x_i x_j}}{n\mathcal{D}^*} \right)^n \\ &\leq \int_{\Gamma^+ \cap \Omega^+} g^n(\nabla u) \left( \frac{b}{n\mathcal{D}^*} \right)^n \end{aligned}$$

pois  $u$  é uma subsolução. De (1.26) e (1.25), obtemos:

$$\int_{B_M(0)} g^n \leq \int_{\Gamma^+ \cap \Omega^+} h^n(x) dx \leq \int_{\Omega} h^n < \int_{\mathbb{R}^n} g^n$$

Daí, existe  $C = C(g, h) > 0$  tal que  $M \leq C$ . Portanto,

$$\sup_{\Omega} u - \sup_{\partial\Omega} u^+ \leq C \operatorname{diam}(\Omega).$$

■

A seguir discutiremos as equações de *Monge-Ampère* (veja [HL], [CY]).

**Proposição 1.7.7.** *Suponhamos que  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  satisfaz*

$$\det D^2u = f(x, u, \nabla u) \text{ em } \Omega$$

*para  $f \in C(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ . Suponhamos ainda que existem funções não-negativas  $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  e  $h \in L^1(\Omega)$  tais que,*

$$|f(x, z, p)| \leq \frac{h(x)}{g(x)}$$

*para todo  $(x, z, p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  e*

$$\int_{\Omega} h(x) dx < \int_{\mathbb{R}^n} g(p) dp \equiv g_{\infty}.$$

*Então,*

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \sup_{\partial\Omega} |u| + C \operatorname{diam}(\Omega)$$

*onde  $C = C(g, h)$  é uma constante positiva.*

**Demonstração:** Análoga à Proposição 1.7.6. Aplique o Lema 1.7.3 à  $g$ . ■

Os corolários seguintes são casos particulares do resultado anterior. O primeiro caso, é quando  $f = f(x)$ , podemos considerar  $g \equiv 1$ .

**Corolário 1.7.8.** *Suponhamos que  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  satisfaz*

$$\det (D^2u) = f(x) \quad \text{em } \Omega$$

*para alguma  $f \in C(\overline{\Omega})$ . Então,*

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \sup_{\partial\Omega} |u| + \frac{\operatorname{diam} \Omega}{w_n^{\frac{1}{n}}} \left( \int_{\Omega} |f|^n \right)^{\frac{1}{n}}.$$

O segundo caso é sobre equação de curvatura Gaussiana.

**Corolário 1.7.9.** *Suponhamos que  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  satisfaz*

$$\det (D^2u) = K(x) (1 + |\nabla u|^2)^{\frac{n-2}{n}} \quad \text{em } \Omega$$

para algum  $K \in C(\overline{\Omega})$ . Então, se

$$K_0 \equiv \int_{\Omega} |K(x)| < w_n$$

o seguinte vale:

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \sup_{\partial\Omega} |u| + C \operatorname{diam} \Omega$$

onde  $C = C(n, K_0)$  é uma constante positiva.

### 1.7.2 Princípio de máximo para domínios de medida pequena

Sem qualquer condição sobre  $c$ , o princípio de máximo vale para domínios estreitos. O princípio de máximo de Alexandroff implica em um resultado similar para domínios de medida pequena devido a S. R. S. Varadhan (veja [BN3], página 4).

**Teorema 1.7.10.** *Seja  $\Omega$  um domínio limitado. Então existe um  $\delta$  positivo, com  $\delta = \delta(n, \operatorname{diam} \Omega, \lambda, \|c^+\|_{L^\infty})$  tal que o seguinte vale:*

*Se  $|\Omega| < \delta$  e  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  satisfaz  $Lu \geq 0$  em  $\Omega$  com  $u \leq 0$  sobre  $\partial\Omega$ , então  $u < 0$  em  $\Omega$  ou  $u \equiv 0$ .*

**Demonstração:** Notemos que o operador  $L^- = L - c^+$  satisfaz as hipóteses do Teorema 1.7.5 (princípio de máximo de Alexandroff) e além disso,

$$L^- u \geq -c^+ u.$$

Como  $\sup_{\partial\Omega} u^+ = 0$ , segue pelo Teorema 1.7.5 que

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega} u &\leq \frac{C}{\lambda} \|c^+ u^+\|_{L^n(\Omega)} \\ &\leq \frac{C}{\lambda} \|c^+\|_{L^\infty(\Omega)} |\Omega|^{\frac{1}{n}} \sup_{\Omega} u^+. \end{aligned}$$

Se  $\delta = \left( \frac{C}{\lambda} \|c^+\|_{L^\infty(\Omega)} \right)^{-n}$ , então  $\sup_{\Omega} u < \sup_{\Omega} u^+$ . Se  $u > 0$  em algum ponto, então  $\sup_{\Omega} u = \sup_{\Omega} u^+$ , absurdo. Logo,  $u \leq 0$ . Usando o Teorema 1.2.9 concluímos o resultado. ■

# CAPÍTULO 2

---

## Soluções Generalizadas

Neste capítulo, trataremos de operadores elípticos de segunda ordem, cuja parte principal esteja na forma divergente (veja [GT], [Sta]).

### 2.1 Operadores elípticos na forma divergente

Vamos considerar o operador  $L$  da seguinte forma:

$$Lu = (a_{ij}(x) u_{x_j} + b_i(x) u)_{x_i} + c_i(x) u_{x_i} + d(x) u \quad (2.1)$$

onde os coeficientes  $a_{ij}$ ,  $b_i$ ,  $d$  são funções mensuráveis no domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ .

A forma divergente tem a vantagem que o operador  $L$  pode ser definido para uma classe mais ampla de funções do que a classe  $C^2(\Omega)$ .

#### Motivação para a definição de solução fraca ou generalizada

Assuma por um momento que  $u$  é realmente uma solução clássica, multipliquemos a *EDP*  $Lu = f$  por uma função teste  $v \in C_0^\infty(\Omega)$ , e integremos sobre  $\Omega$ , para encontrar

$$\int_{\Omega} \{ (a_{ij} u_{x_j} + b_i u) v_{x_i} - (c_i u_{x_i} + du) v \} dx = - \int_{\Omega} f v dx,$$

onde integramos por partes o primeiro termo do lado esquerdo. Não há termo sobre a fronteira, pois  $v = 0$  sobre  $\partial\Omega$ . Por aproximação podemos obter a mesma identidade para funções  $v \in H_0^1(\Omega)$ .

Se  $u$  é apenas fracamente diferenciável e as funções  $a_{ij}u_{x_j} + b_i$  e  $c_iu_{x_i} + du$  são localmente integráveis, diremos que no sentido fraco ou generalizado que  $u$  satisfaz  $Lu = 0$  ( $\geq 0, \leq 0$ ) respectivamente em  $\Omega$  se

$$\mathcal{L}(u, v) = \int_{\Omega} \{ (a_{ij}u_{x_j} + b_iu) v_{x_i} - (c_iu_{x_i} + du) v \} dx = 0 \quad (\leq 0, \geq 0) \quad (2.2)$$

para toda  $v \in C_0^1(\Omega)$  com  $v \geq 0$ . Quando os coeficientes de  $L$  são localmente integráveis, segue do teorema da divergência que as funções  $u \in C^2(\Omega)$  satisfaz  $Lu = 0$  ( $\geq 0, \leq 0$ ) no sentido clássico também satisfazem no sentido fraco. Se os coeficientes  $a_{ij}$ ,  $b_i$  têm derivadas localmente integráveis, então uma solução generalizada  $u \in C^2(\Omega)$  também é uma solução clássica.

Seja  $f_i, g, i = 1, \dots, n$  funções localmente integrável em  $\Omega$ . Então, uma função fracamente diferenciável  $u$  será chamada solução fraca ou generalizada da equação não-homogênea

$$Lu = g + D_i f_i \quad (2.3)$$

em  $\Omega$  se  $\mathcal{L}(u, v) = F(v) = \int_{\Omega} (f_i v_{x_i} - gv) dx$  para toda  $v \in C_0^1(\Omega)$ . Como antes soluções clássicas de (2.3) são também soluções fracas e uma solução generalizada  $C^2(\Omega)$  também é uma solução clássica quando os coeficientes de  $L$  forem suficientemente suaves. Vamos supor que o operador  $L$  é estritamente elíptico em  $\Omega$ , isto é,

$$a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2, \quad \forall x \in \Omega, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

para alguma constante positiva  $\lambda$ . Suponhamos ainda os coeficientes de  $L$  são limitados, isto é, existem constantes não-negativas  $\Lambda$  e  $\gamma$  tal que,

$$\sum_{i,j} |a_{ij}(x)| \leq \Lambda^2, \quad \lambda^{-2} \sum_i (|b_i(x)|^2 + |c_i(x)|^2) + \lambda^{-1} |d(x)|^2 \leq \gamma^2 \quad \forall x \in \Omega. \quad (2.4)$$

**Definição 2.1.1.** *Seja  $u \in W^{1,2}(\Omega)$ . Dizemos que  $u$  é uma solução do problema de Dirichlet*

generalizado:

$$\begin{cases} Lu = g + D_i f_i & \text{em } \Omega \\ u = \varphi & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.5)$$

se  $u$  for uma solução fraca de (2.3),  $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$  e  $u - \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ .

Usando (2.4) e a desigualdade de Poincaré, obtemos:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} a_{ij} u_{x_j} v_{x_i} dx \right| &\leq \int_{\Omega} \sum_{i,j} |a_{ij} u_{x_j} v_{x_i}| dx \leq \int_{\Omega} \sum_{i,j} |a_{ij}| |\nabla u| |\nabla v| dx \\ &\leq \Lambda^2 \int_{\Omega} |\nabla u| |\nabla v| dx \leq \Lambda^2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}; \\ \left| \int_{\Omega} b_i u v_{x_i} \right| &\leq \int_{\Omega} |b_i u v_{x_i}| \leq \int_{\Omega} \left( \sum_i |b_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_i |v_{x_i}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} u \\ &\leq \lambda \gamma \int_{\Omega} |\nabla v| u \leq C \|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}; \\ \left| \int_{\Omega} c_i u_{x_i} v \right| &\leq C \|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}; \\ \left| \int_{\Omega} duv \right| &\leq \left( \int_{\Omega} |du|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} |v|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq (\gamma^2 \lambda)^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Logo, existe uma constante  $C$  tal que

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(u, v)| &\leq \int_{\Omega} \{ |a_{ij} u_{x_j} v_{x_i}| + |b_i u v_{x_i}| + |c_i u_{x_i} v| + |duv| \} dx \\ &\leq C \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Assim, para  $u \in W^{1,2}(\Omega)$  fixado, a aplicação  $v \mapsto \mathcal{L}(u, v)$  é um funcional linear limitado sobre  $W_0^{1,2}(\Omega)$ . Logo, a validade de (2.2) para  $v \in C_0^1(\Omega)$  implica que (2.2) também vale para  $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ .



## 2.2 Princípio de máximo fraco

Nesta seção estudaremos uma generalização do princípio de máximo fraco clássico para operadores elípticos na forma divergente. Para isto necessitamos da noção de desigualdade na fronteira para funções em  $W^{1,2}(\Omega)$  (veja [GT], [T]).

**Definição 2.2.1.** *Seja  $u \in W^{1,2}(\Omega)$ . Dizemos que  $u \leq 0$  sobre  $\partial\Omega$  se  $u^+ \in W_0^{1,2}(\Omega)$ . Se  $u$  é contínua numa vizinhança de  $\partial\Omega$ , então  $u$  satisfaz  $u \leq 0$  sobre  $\partial\Omega$ ; se a desigualdade vale pontualmente no sentido clássico. Outras definições de desigualdades em  $\partial\Omega$  segue-se naturalmente. Por exemplo:  $u \geq 0$  sobre  $\partial\Omega$  se  $-u \leq 0$  sobre  $\partial\Omega$ ;  $u \leq v \in W^{1,2}(\Omega)$  sobre  $\partial\Omega$  se  $u - v \leq 0$  sobre  $\partial\Omega$ ;*

$$\sup_{\partial\Omega} u = \inf \{ \kappa; u \leq \kappa \text{ sobre } \partial\Omega, \kappa \in \mathbb{R} \}.$$

No caso das soluções clássicas pedimos que o coeficiente de  $u$  fosse não-positivo, aqui também impomos uma condição sobre este coeficiente. Como  $(b_i)_{x_j}$  não necessariamente existe como função, a não-positividade de  $D_j b_i + d$  deve ser interpretada no sentido generalizado, isto é,

$$\int_{\Omega} (dv - b_i v_{x_i}) dx \leq 0, \quad \forall v \in C_0^1(\Omega), v \geq 0. \quad (2.6)$$

Como  $b_i$  e  $d$  são limitados, a desigualdade acima permanece válida para toda  $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$  com  $v \geq 0$ .

Agora estamos em condições de formular o princípio de máximo fraco. (veja [GT], página 179).

**Teorema 2.2.2.** *Suponhamos que  $u \in W^{1,2}(\Omega)$  satisfaz  $Lu \geq 0$  ( $\leq 0$ ) em  $\Omega$ . Então,*

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ \quad \left( \inf_{\Omega} u \geq \inf_{\partial\Omega} u^- \right).$$

**Demonstração:** Sejam  $u \in W^{1,2}(\Omega)$  e  $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ . Então  $uv \in W_0^{1,1}(\Omega)$  e  $D(uv) = vDu + uDv$ . Substituindo  $uv_{x_i} = (uv)_{x_i} - vu_{x_i}$  na desigualdade  $\mathcal{L}(u, v) \leq 0$  e usando (2.6), teremos

$$\int_{\Omega} \{ a_{ij} u_{x_j} v_{x_i} - (b_i + c_i) v u_{x_i} \} dx \leq \int_{\Omega} \{ duv - b_i (uv)_{x_i} dx \} \leq 0 \quad (2.7)$$

para todo  $v \geq 0$  tal que  $uv \geq 0$ .

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\sum_i (b_i + c_i) u_{x_i} \leq \left[ \sum_i (b_i + c_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \sum_i (u_{x_i})^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[ \sum_i (b_i + c_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} |\nabla u|.$$

Usando a desigualdade  $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ , obtemos:

$$\sum_i (b_i + c_i) u_{x_i} \leq \sqrt{2} \left[ \sum_i (b_i^2 + c_i^2) \right]^{\frac{1}{2}} |\nabla u|.$$

Por (2.4) e pelo que foi exposto acima, teremos:

$$\sum_i (b_i + c_i) u_{x_i} \leq 2\lambda\gamma |\nabla u|.$$

De (2.7), temos que:

$$\int_{\Omega} a_{ij} u_{x_j} v_{x_i} dx \leq 2\lambda\gamma \int_{\Omega} v |\nabla u| dx \quad (2.8)$$

vale para toda  $v \geq 0$  tal que  $uv \geq 0$ .

Seja  $\ell = \sup_{\partial\Omega} u^+$  tomemos um número  $\kappa$  de modo que,  $\ell \leq \kappa < \sup_{\Omega} u$  e defina  $v = (u - \kappa)^+$ . Note que se tal número não existir, então não há nada a ser provado. Pela regra da cadeia (veja Teorema 7.8 em [GT]), temos  $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$  e

$$Dv = \begin{cases} Du & \text{se } u > \kappa \\ 0 & \text{se } u \leq \kappa. \end{cases}$$

De (2.8) segue que  $\int_{\Omega} a_{ij} v_{x_j} v_{x_i} dx \leq 2\lambda\gamma \int_{\Gamma} v |\nabla v| dx$ , onde  $\Gamma = \text{supp } \nabla v \subset \text{supp } v$ . Pela hipótese de elipticidade, obtemos:

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \leq 2\gamma \int_{\Gamma} v |\nabla v| dx \leq 2\gamma \|v\|_{L^2(\Gamma)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$$

logo,

$$\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \leq 2\gamma \|v\|_{L^2(\Gamma)}.$$

Aplicando as imersões de Sobolev para  $n \geq 3$  ( $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$ ), teremos:

$$\|v\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)} \leq C \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)} = C \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|v\|_{L^2(\Gamma)}.$$

Da desigualdade de Hölder, temos:

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^2(\Gamma)} &= \left( \int_{\Gamma} 1 \cdot v^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left[ \left( \int_{\Gamma} 1 \right)^{\frac{2}{n}} \|v^2\|_{L^{\frac{n}{n-2}}(\Gamma)} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= |\text{supp } \nabla v|^{\frac{1}{n}} \|v\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Gamma)} \\ &\leq |\text{supp } \nabla v|^{\frac{1}{n}} \|v\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\|v\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)} \leq C \|v\|_{L^2(\Gamma)} \leq C |\text{supp } \nabla v|^{\frac{1}{n}} \|v\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)}$$

onde  $C = C(n, \gamma)$ . Logo,

$$|\text{supp } \nabla v| \geq C^{-n}.$$

Quando  $n = 2$  aplicamos o teorema de imersão de Sobolev, substituindo  $\frac{2n}{n-2}$  por qualquer número maior do que 2. Essas desigualdades independem de  $\kappa$ , e portanto são válidas quando  $\kappa \rightarrow \sup_{\Omega} u$ .

A função  $u$  atinge seu supremo em  $\Omega$  sobre um conjunto de medida positiva e além disso,  $\nabla u = 0$ . Mas, isto contradiz a desigualdade acima. Portanto,

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+.$$

■

Como consequência do teorema acima, obtemos unicidade de solução para o problema de Dirichlet generalizado para equação (2.3).

**Corolário 2.2.3.** *Suponhamos que  $u \in W^{1,2}(\Omega)$  satisfaz  $Lu = 0$  em  $\Omega$ . Então,  $u = 0$  em  $\Omega$ .*

## 2.3 Desigualdade de Harnack

Nesta seção, usaremos sem demonstrar os dois primeiros resultados. O segundo é a desigualdade de Harnack fraca para supersolução de (2.3) (veja [GT] e [Sta]). Na próxima seção, utilizando a desigualdade de Harnack fraca, obteremos o princípio de máximo forte.

**Teorema 2.3.1.** *Suponhamos que o operador  $L$  satisfaz (2.4) e que  $f_i \in L^q(\Omega)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $g \in L^{\frac{q}{2}}$  para algum  $q > n$ . Suponhamos ainda que  $u$  é uma subsolução  $W^{1,2}(\Omega)$  da equação (2.3) em  $\Omega$ . Então, para toda bola  $B_{2R}(y) \subset \Omega$  e  $p > 1$  vale*

$$\sup_{B_R(y)} u \leq C \left( R^{\frac{-n}{p}} \|u^+\|_{L^p(B_{2R}(y))} + k(R) \right) \quad (2.9)$$

onde  $C = C(n, \frac{\Lambda}{\lambda}, \gamma R, q, p)$ ,  $k(R) = \lambda^{-1} \left( R^\delta \|\mathbf{f}\|_{L^q(\Omega)} + R^{2\delta} \|g\|_{L^{\frac{q}{2}}(\Omega)} \right)$  e  $\delta = 1 - \frac{n}{q}$ . Aqui  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ .

No teorema anterior se  $u$  é uma supersolução de (2.3) o resultado vale substituindo  $u$  por  $-u$  e  $u^+$  por  $u^-$ .

**Teorema 2.3.2 (desigualdade de Harnack fraca).** *Suponhamos que o operador  $L$  satisfaz (2.4) e que  $f_i \in L^q(\Omega)$ ,  $g \in L^{\frac{q}{2}}$  para algum  $q > n$ . Suponhamos ainda que  $u$  é uma supersolução  $W^{1,2}(\Omega)$  da equação (2.3) em  $\Omega$ , não-negativa na bola  $B_{4R}(y) \subset \Omega$  e  $1 \leq p < \frac{n}{n-2}$ . Então,*

$$R^{\frac{-n}{p}} \|u\|_{L^p(B_{2R}(y))} \leq C \left( \inf_{B_R(y)} u + k(R) \right) \quad (2.10)$$

onde  $C = C(n, \frac{\Lambda}{\lambda}, \gamma R, q, p)$ .

**Demonstração:** Veja [GT], Teorema 8.18 na página 194. ■

**Teorema 2.3.3 (Desigualdade de Harnack completa).** *Suponhamos que o operador  $L$  satisfaz (2.4),  $u \in W^{1,2}(\Omega)$ ,  $u \geq 0$  em  $\Omega$  e  $Lu = 0$  em  $\Omega$ . Então, para toda bola  $B_{4R}(y) \subset \Omega$  vale*

$$\sup_{B_R(y)} u \leq C \inf_{B_R(y)} u \quad (2.11)$$

onde  $C = C(n, \frac{\Lambda}{\lambda}, \gamma R)$ .

**Demonstração:** Conseqüência imediata dos teoremas 2.3.1 e 2.3.2. ■

O corolário a seguir é uma forma da desigualdade de Harnack (veja [GT], página 199).

**Corolário 2.3.4.** *Sejam  $L$  e  $u$  como no Teorema 2.3.3. Então, para todo  $\Omega' \subset\subset \Omega$  vale:*

$$\sup_{\Omega'} u \leq C \inf_{\Omega'} u$$

onde  $C = C(n, \frac{\Lambda}{\lambda}, \gamma R, \Omega', \Omega)$  (veja [GT], [PW]).

**Demonstração:** Seja  $x_1, x_2 \in \overline{\Omega'}$  tal que  $u(x_1) = \sup_{\Omega'} u$  e  $u(x_2) = \inf_{\Omega'} u$ . Seja  $\Gamma \subset \overline{\Omega'}$  uma curva ligando  $x_1$  a  $x_2$ , e consideremos  $R$  de modo que  $4R < \text{dist}(\Gamma, \partial\Omega)$ . Pelo teorema de Heine-Borel (veja [Li]),  $\Gamma$  pode ser coberta por um número finito (que só depende de  $\Omega'$  e  $\Omega$ ) de bolas abertas de raio  $R$  (veja Figura 2.1). Aplicando o Teorema 2.3.3 a cada bola e combinando as desigualdades resultantes, obtemos a conclusão do teorema. ■

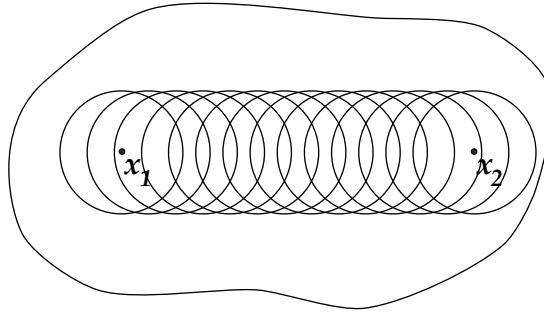


Figura 2.1:

## 2.4 Princípio de máximo forte

**Teorema 2.4.1.** *Suponhamos que  $L$  satisfaz as condições (2.4) e (2.6). Seja  $u \in W^{1,2}(\Omega)$  uma subsolução para  $Lu = 0$  em  $\Omega$ . Se para alguma bola  $B \subset\subset \Omega$*

$$\sup_B u = \sup_{\Omega} u \geq 0,$$

*então a função  $u$  deve ser constante em  $\Omega$ .*

**Demonstração:** Sem perda de generalidade podemos supor que  $B_{4R}(y) \subset \Omega$ . Seja  $M = \sup_{\Omega} u$ . Seja  $v := M - u$ . Alguns cálculos diretos mostram que a igualdade:  $\mathcal{L}(v, w) =$

$-\mathcal{L}(u, w) + M \int_{\Omega} (b_i w_{x_i} - du) \, dx$  vale para todo  $w \in C_0^1(\Omega)$  com  $w \geq 0$ . Usando (2.6) e a elipticidade de  $L$  segue que:  $\mathcal{L}(v, w) \geq 0$ , ou seja,  $v$  é uma supersolução para equação (2.3) com  $f_i = g = 0$ . Aplicando a desigualdade de Harnack fraca com  $p = 1$  a função  $v$ , obtemos:

$$R^{-n} \int_{B_{2R}(y)} (M - u) \, dx \leq C \inf_{B_R(y)} (M - u) = 0.$$

Logo,  $u = M$  em  $B_{2R}(y)$ .

Seja  $\Omega_M = \{x \in \Omega; u(x) = M\}$ . Temos que  $\Omega_M \neq \emptyset$  por hipótese.  $\Omega_M$  é relativamente fechado e aberto em  $\Omega$ . Como  $\Omega$  é conexo segue que  $\Omega = \Omega_M$ . ■

# CAPÍTULO 3

---

## Soluções fortes

Neste capítulo, trataremos das soluções fortes para operadores elípticos de segunda ordem. Seja  $L$  o operador elíptico definido na Seção 1.1 e  $f$  uma função definida em  $\Omega$ .

**Definição 3.0.2.** *Uma solução forte para equação,*

$$Lu = f \tag{3.1}$$

*é uma função em  $\Omega$  duas vezes fracamente diferenciável satisfazendo à equação (3.1) quase sempre em  $\Omega$ .*

### 3.1 Princípio de Máximo de Bony

Quando  $u$  pertence apenas a algum espaço  $W^{2,p}(\Omega)$ , a matriz *Hessiana* de  $u$  em  $x_0$  não está definida. Desta forma, necessitamos de uma ferramenta mais sofisticada. Jean Michel Bony em [Bo] generalizou o princípio de máximo clássico para os espaços de Sobolev  $W^{2,p}(\Omega)$  com  $p > n$  e P. L. Lions, em [Lio] mostrou que  $p = n$  é o caso limite. Seja

**Teorema 3.1.1 (Princípio de máximo de Bony).** *Suponhamos que  $u \in W^{2,p}(\Omega)$ ,  $p > n$  atinge em  $x_0 \in \Omega$  um máximo local. Então,*

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} \text{ess } a_{ij}(x) u_{x_i x_j}(x) \leq 0.$$

**Demonstração:** Podemos supor sem perda de generalidade que  $x_0$  é um ponto de máximo local estrito. De fato, considerando  $v(x) = u(x) - |x - x_0|^4$  em vez de  $u$ , vemos que  $x_0$  é um ponto de máximo local estrito para  $v$ ; além disso,

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} \operatorname{ess} a_{ij}(x) u_{x_i x_j}(x) = \liminf_{x \rightarrow x_0} \operatorname{ess} a_{ij}(x) v_{x_i x_j}(x).$$

Seja  $U \subset\subset \Omega$  uma vizinhança aberta arbitrária de  $x_0$  tal que  $u < u(x_0)$  em  $\overline{U} \setminus \{x_0\}$ , e seja  $W$  definido por:

$$W = \{y \in U; u(x) \leq u(y) + \nabla u(y) \cdot (x - y) \quad \text{para } x \in \overline{U}\}.$$

Como  $u(x_0)$  é um valor de máximo estrito, podemos fixar  $r > 0$  suficientemente pequeno de modo que,

$$u(x) < u(x_0) + \eta \cdot (x - x_0) \quad \text{para todo } x \in \partial U$$

quando  $\eta \in \mathbb{R}^n$  satisfaz  $|\eta| < r$ . Assim, para todo  $\eta$  como acima, o máximo sobre  $\overline{U}$  da função  $x \mapsto u(x) - \eta \cdot x$  pode ser atingido apenas no interior de  $U$ ; em outras palavras, existe  $y \in U$  tal que

$$u(x) \leq u(y) + \eta \cdot (x - y) \quad \text{para todo } x \in \overline{U}.$$

Mas, isto implica que  $\eta = \nabla u(y)$  e portanto  $y \in W$ .

Consideremos a aplicação  $\mathcal{F} : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por  $\mathcal{F}(y) = \nabla u(y)$ , pelo que foi exposto acima, concluímos que  $\mathcal{F}(W) \supseteq B_r$ . Provemos que  $|W|$  não pode ser zero. De fato, como  $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,1-\frac{n}{p}}(\overline{\Omega})$  (veja [Ev], Capítulo 5), existe uma constante  $C$  tal que, se  $\mathcal{Q} \subset \Omega$  é um cubo aberto, então cada derivada  $u_{x_i} \in C^{0,1-\frac{n}{p}}(\overline{\mathcal{Q}})$  satisfaz

$$|u_{x_i}(x') - u_{x_i}(x'')| \leq C(\operatorname{diam} \mathcal{Q})^{1-\frac{n}{p}} \|u_{x_i}\|_{W^{1,p}(\mathcal{Q})}$$

para  $x', x'' \in \overline{\mathcal{Q}}$ . Assim,

$$|\mathcal{F}(\overline{\mathcal{Q}})| \leq C(\operatorname{diam} \mathcal{Q})^{n(1-\frac{n}{p})} \|u\|_{W^{2,p}(\mathcal{Q})}.$$

Suponhamos que  $|W| = 0$ . Então, para todo  $\varepsilon > 0$  existe uma seqüência  $\{\mathcal{Q}_j\}$  de cubos disjuntos  $\mathcal{Q}_j \subset\subset \Omega$  tal que  $W \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{\mathcal{Q}_j}$  e  $\sum_{j=1}^{\infty} (\operatorname{diam} \mathcal{Q}_j)^n < \varepsilon$ .



Considerando  $a_j := (\text{diam } \mathcal{Q}_j)^n$ ,  $b_j := \|u\|_{W^{2,p}(\mathcal{Q}_j)}^p$  e usando a desigualdade de Hölder, obtemos:

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{F}(W)| &\leq \sum_{j=1}^{\infty} |\mathcal{F}(\mathcal{Q}_j)| \\
 &\leq C \sum_{j=1}^{\infty} a_j^{1-\frac{n}{p}} b_j^{\frac{n}{p}} \\
 &\leq C \left( \sum_{j=1}^{\infty} a_j \right)^{1-\frac{n}{p}} \left( \sum_{j=1}^{\infty} b_j \right)^{\frac{n}{p}} \\
 &= C \left[ \sum_{j=1}^{\infty} (\text{diam } \mathcal{Q}_j)^n \right]^{1-\frac{n}{p}} \left( \sum_{j=1}^{\infty} \|u\|_{W^{2,p}(\mathcal{Q}_j)}^p \right)^{\frac{n}{p}}.
 \end{aligned}$$

Assim,

$$|\mathcal{F}(W)| \leq C \varepsilon^{1-\frac{n}{p}} \|u\|_{W^{2,p}(\Omega)}^n$$

e portanto  $|\mathcal{F}(W)| = 0$ , absurdo, pois  $\mathcal{F}(W) \supset B_r$ .

Pelo Teorema 5, página 280 de [Ev],  $u_{x_i x_j}$  é a derivada clássica q.t.p. em  $\Omega$ , em particular em  $W$ . Seja  $\xi \in S^{n-1}$  fixado. Pela fórmula de mudança de coordenadas, em quase todo ponto  $y \in W$  cada derivada primeira  $u_{x_i}$  admite derivada direcional com respeito a  $\xi$ , e podemos aplicar a fórmula de MacLaurin para função  $\phi(t) = u(y + t\xi)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  com  $|t| < \text{dist}(y, \partial U)$ . Assim,

$$\begin{aligned}
 u(x) &= \phi(t) = \phi(0) + t\phi'(0) + \frac{t^2}{2} [\phi''(0) + \sigma(t)] \\
 &= u(y) + \nabla u(y) \cdot (x - y) + \frac{t^2}{2} [u_{x_i x_j}(y) \xi_i \xi_j + \sigma(t)],
 \end{aligned}$$

com  $\sigma(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow 0$ , para  $x = y + t\xi$ . Como  $u(x) \leq u(y) + \nabla u(y) \cdot (x - y)$  para todo  $x$  como acima, concluímos que  $u_{x_i x_j}(y) \xi_i \xi_j \leq 0$ . Seja  $\{\xi^{(m)}\}$  um subconjunto denso enumerável de  $S^{n-1}$ . Pelas considerações acima segue-se que em quase todo ponto  $y \in W$ ,  $u_{x_i x_j}(y) \xi_i^{(m)} \xi_j^{(m)} \leq 0$  para  $m \in \mathbb{N}$ , e portanto  $u_{x_i x_j}(y) \xi_i \xi_j \leq 0$  quando  $\xi \in S^{n-1}$ .

Provamos que em toda vizinhança aberta  $U$  de  $x_0$  tem um subconjunto de medida positiva, onde a matriz Hessiana de  $u$  é não-positiva e portanto  $a_{ij} u_{x_i x_j} \leq 0$ . ■

Como no caso clássico, temos um resultado análogo ao Lema 1.2.1 para funções em  $W^{2,p}(\Omega)$  com  $p > n$ :

**Lema 3.1.2.** *Suponhamos que  $u \in W^{2,p}(\Omega)$  satisfaz  $Lu > 0$  em  $\Omega$ ,  $p > n$  e  $c(x) \leq 0$  em  $\Omega$ . Se  $u$  tem um máximo não-negativo em  $\bar{\Omega}$ , então  $u$  não pode atingir esse máximo em  $\Omega$ .*

**Demonstração:** Suponhamos que  $Lu \geq \eta > 0$  em  $\Omega$  quase sempre. Se  $u$  atinge um máximo local não-negativo em  $x_0 \in \Omega$ , então segue-se pelo princípio de máximo de Bony juntamente com fato que as derivadas  $u_{x_i}$  são no sentido clássico, que  $\liminf_{x \rightarrow x_0} Lu \leq 0$ , o que é uma contradição. Assim,  $u$  não pode atingir um máximo local em um ponto interior. ■

Usando o princípio de máximo de Bony, deduzimos de maneira análoga aos princípios de máximo clássicos, princípios de máximo para funções nos espaços de Sobolev,  $W^{2,p}(\Omega)$  com  $p > n$  (veja [T]).

**Teorema 3.1.3 (Princípio de máximo fraco).** *Suponhamos que  $u \in W^{2,p}(\Omega)$  com  $p > n$  satisfaz  $Lu \geq 0$  em  $\Omega$ . Se  $c \leq 0$  em  $\Omega$ , então*

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+.$$

**Teorema 3.1.4 (Lema de Hopf).** *Suponhamos  $\Omega$  satisfaz à condição da bola interior e que  $u \in W^{2,p}(\Omega)$ ,  $p > n$  satisfaz  $Lu \geq 0$  em  $\Omega$ . Se  $u$  atinge um máximo local estrito em  $x_0 \in \partial\Omega$  e se  $\beta_0 \in \mathbb{R}^n$  é tal que  $\beta_0 \nu(x_0) > 0$ , então  $\beta_0 \nabla u(x_0) > 0$  se  $c = 0$  ou  $c \leq 0$  em  $\Omega$  e  $u(x_0) \geq 0$ .*

Consideremos o problema contorno misto:

$$\begin{cases} Lu = f & \text{em } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega \setminus \Gamma} = 0, \\ \mathbf{B}u := (\beta \nabla u + \gamma u)|_{\Gamma} = \xi \end{cases} \quad (3.2)$$

onde  $\Gamma \subset \partial\Omega$  é fechada. Suponhamos ainda que  $\beta \nu \geq \kappa$  sobre  $\Gamma$ , onde  $\kappa$  é uma constante positiva.

A condição sobre  $\partial\Omega \setminus \Gamma$  é a condição de Dirichlet; a condição sobre  $\Gamma$  é chamada derivada oblíqua regular.

**Teorema 3.1.5 (Princípio de máximo forte).** *Suponhamos  $u \in W^{2,p}(\Omega)$  satisfaz  $Lu \geq 0$  em  $\Omega$ ,  $p > n$  e  $Bu \geq 0$  sobre  $\Gamma$ . A menos que  $u$  seja constante, e especificamente não-positiva se  $\sup_{\Omega} \lambda + \max_{\Gamma} \gamma > 0$ , o máximo  $M$  de  $u$  em  $\overline{\Omega}$  não pode ser atingido sobre  $\Omega \cup \Gamma$  se  $c = 0$  e  $\gamma = 0$ , ou  $c \leq 0$  em  $\Omega$ ,  $\gamma \leq 0$  sobre  $\Gamma$  e  $M \geq 0$ .*

**Demonstração:** Precisamos apenas excluir a possibilidade que  $u = M$  em algum ponto  $x_0 \in \Omega \cup \Gamma$  sem coincidir com  $M$  em todo  $\overline{\Omega}$ . Para isto, vamos assumir a existência de uma bola  $B_R(y) \subset \Omega$  e um ponto  $x_0 \in \partial B_R(y) \cap (\Omega \cup \Gamma)$  tal que  $u(x) < M$  para  $x \in B_R(y)$  e  $u(x_0) = M$ . O Lema de Hopf pode ser aplicado com  $\Omega$  substituído por  $B_R(y)$  e portanto  $\beta_0 \nabla u(x_0) > 0$  quando  $\beta_0 \frac{(x_0 - y)}{|x_0 - y|} > 0$ . Mas, isto é absurdo pois as derivadas de  $u$  se anulam em um ponto de máximo se este for interior ao domínio, enquanto  $\beta_0 \nabla u(x_0) \leq -\gamma M \leq 0$  com  $\beta_0 \equiv \beta(x_0)$  se  $x_0 \in \Gamma$ . ■

## 3.2 Princípio de máximo de Alexandroff

Com a notação da Seção 1.7, generalizaremos o princípio de máximo de Alexandroff para funções em  $C(\overline{\Omega}) \cap W_{loc}^{2,n}(\Omega)$ .

**Teorema 3.2.1.** *Suponhamos que  $u \in C(\overline{\Omega}) \cap W_{loc}^{2,n}(\Omega)$  satisfaz  $Lu \geq f$  em  $\Omega$ ,  $\frac{|b|}{\mathcal{D}^*}, \frac{|f|}{\mathcal{D}^*} \in L^n(\Omega)$  e  $c \leq 0$  em  $\Omega$ . Então,*

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + C \left\| \frac{f}{\mathcal{D}^*} \right\|_{L^n(\Gamma^+)}. \quad (3.3)$$

**Demonstração:** Na Seção 1.7, estabelecemos esse resultado para as funções em  $C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ . Usando o argumento de aproximação, estenderemos este resultado para funções em  $C(\overline{\Omega}) \cap W_{loc}^{2,n}(\Omega)$ . Suponhamos inicialmente que  $L$  é uniformemente elíptico em  $\Omega$  com razão  $\frac{|b|}{\lambda}$  limitada. Seja  $\{u_m\}$  uma seqüência de funções em  $C^2(\Omega)$  convergindo no sentido de  $W_{loc}^{2,n}(\Omega)$  para  $u$ . Para  $\varepsilon > 0$  arbitrário, podemos supor que  $u_m$  converge para  $u$  em  $W_{loc}^{2,n}(\Omega)$  e  $u_m \leq \varepsilon + \sup_{\partial\Omega} u$  sobre  $\partial\Omega_\varepsilon$  para algum domínio  $\Omega_\varepsilon \subset \subset \Omega$ . Notemos que,

$$Mu_n = M(u_n - u) - cu + Lu \geq M(u_n - u) - cu + f \geq M(u_n - u) + f$$

onde a última desigualdade segue de  $x \in \Omega_+$  e  $Mu = Lu - cu$ . Assim, aplicando (3.3) para as funções  $u_m$  e  $M$ , com  $\Omega$  substituído por  $\Omega^+$ , obtemos:

$$\sup_{\Omega_\varepsilon} u_m \leq \varepsilon \sup_{\partial\Omega} u^+ + \frac{C}{\lambda} \|a_{ij} D_{ij}(u_m - u) + b_i(u_m - u)\| + C \left\| \frac{f}{\mathcal{D}^\star} \right\|_{L^n(\Omega_\varepsilon)}. \quad (3.4)$$

Fazendo  $m \rightarrow \infty$  e usando o fato que  $u_m \rightarrow u$  uniformemente sobre  $\Omega_\varepsilon$ , temos:

$$\sup_{\Omega_\varepsilon} u_m \leq \varepsilon + \sup_{\partial\Omega} u^+ + C \left\| \frac{f}{\mathcal{D}^\star} \right\|_{L^n(\Omega_\varepsilon)}. \quad (3.5)$$

Como  $\varepsilon > 0$  é arbitrário, concluímos que (3.3) vale. Para remover as restrições sobre  $L$ , consideremos para  $\eta > 0$ , o operador:

$$L_\eta = \eta(\Lambda + |b|) \Delta + L.$$

De (3.5), obtemos:

$$\sup_{\Omega_\varepsilon} u_m \leq \varepsilon + \sup_{\partial\Omega} u^+ + C \left\{ \left\| \frac{\eta(\Lambda + |b|) \Delta u}{\mathcal{D}_\eta^\star} \right\|_{L^n(\Omega_\varepsilon)} + \left\| \frac{f}{\mathcal{D}^\star} \right\|_{L^n(\Omega_\varepsilon)} \right\}. \quad (3.6)$$

Fazendo  $\eta \rightarrow 0$  e usando o teorema da convergência dominada de Lebesgue, obtemos a desigualdade (3.5). Como  $\varepsilon$  é arbitrário segue-se que (3.3) vale. ■

Usando o teorema anterior, temos unicidade de solução para o problema de Dirichlet.

**Teorema 3.2.2 (Unicidade).** *Seja  $L$  elíptico em um domínio limitado  $\Omega$ . Suponhamos que as funções  $u, v \in C(\overline{\Omega}) \cap W_{loc}^{2,n}(\Omega)$  satisfazem  $Lu = Lv$  em  $\Omega$  e  $u = v$  sobre  $\partial\Omega$ . Se  $c \leq 0$  em  $\Omega$ , então  $u = v$  em  $\Omega$ .*

**Demonstração:** Segue do teorema anterior. ■

O exemplo abaixo mostra que o resultado de unicidade não vale para funções  $u, v \in C(\overline{\Omega}) \cap W_{loc}^{2,p}(\Omega)$  com  $p < n$ .

**Exemplo 3.2.1.** *Considere  $\Delta u + b \frac{x_i x_j}{|x|^2} u_{x_i x_j} = 0$  e  $p = -1 + \frac{n-1}{1-\lambda}$  com  $0 < \lambda < 1$ . Este problema têm duas soluções:  $u(x) = 1$  e  $w(x) = |x|^\lambda$  pertencentes a  $W^{1,2}(B)$  e  $u = w$  sobre  $\partial B$ , onde  $B = B_1(0)$ .*

Enceraremos este capítulo com a seguinte observação, cuja verificação é análoga ao Teorema 1.7.10.

**Observação 3.2.3.** *O princípio de máximo para domínios de medida pequena se verifica para soluções fortes (veja [BN3]).*

# CAPÍTULO 4

---

## Método do plano móvel e do deslizamento

Neste capítulo estudaremos o método do plano móvel e do deslizamento, os quais têm sido bastante utilizados para obter propriedades qualitativas das soluções de equações diferenciais parciais não-linear, tais como, simetria e monotonicidade (veja por exemplo [L1], [L2] [GNN1], [BN3]). Os resultados aqui exposto são baseados nos trabalhos de H. Berestycki e Louis Nirenberg em [BN3].

### 4.1 Método do plano móvel

Este método basicamente compara os valores da solução da equação em dois pontos diferentes, onde um ponto é a reflexão do outro com relação a um hiperplano. O plano é movido até uma posição crítica, e então, mostra-se que a solução é simétrica com relação a esse plano limite. O método do plano móvel é devido a A. D. Alexandroff (no estudo de superfícies de curvatura média constante) e foi usado inicialmente no contexto das equações diferenciais parciais por James Serrin em 1971 (veja [S]). Em 1979 Gidas-Ni-Nirenberg usaram o método do plano móvel para estabelecer resultados de simetria e monotonicidade de soluções positivas para um problema de Dirichlet (veja [GNN2]).

O teorema seguinte foi provado inicialmente em [GNN2] com hipóteses mais fortes. Em [GNN2],  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um domínio de classe  $C^2$ ,  $f \in C^1$  e  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  uma solução positiva de

(4.1).

**Teorema 4.1.1.** *Seja  $\Omega$  um domínio limitado em  $\mathbb{R}^n$ , convexo na direção  $x_1$  e simétrico com respeito ao plano  $x_1 = 0$ . Seja  $u \in W_{loc}^{2,n} \cap C(\overline{\Omega})$  uma solução positiva de*

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.1)$$

*Suponhamos que  $f$  é Lipschitz contínua. Então,  $u$  é simétrica com respeito a  $x_1$  e  $u_{x_1} < 0$  para  $x_1 > 0$  em  $\Omega$ .*

**Demonstração:** Com  $x = (x_1, y) \in \Omega$  e  $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ , provemos que:

$$\begin{aligned} \bullet \quad & u_{x_1} > 0 \quad \text{se } x_1 < 0 \\ \bullet \quad & u(x_1, y) < u(x'_1, y) \quad \text{se } x_1 < x'_1, \ x_1 + x'_1 < 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

De fato, usando (4.2) e fazendo  $x'_1 \rightarrow -x_1^-$ , concluímos por continuidade que

$$u(x_1, y) \leq u(-x_1, y) \quad \text{se } x_1 < 0. \quad (4.3)$$

Substituindo  $x_1$  por  $-x_1$  e usando  $v(x_1, y) = u(-x_1, y)$ , segue-se que  $v$  satisfaz (4.3). Assim, obtemos simetria de  $u$  em  $x_1$ . Agora, fixemos algumas notações:

Seja  $-a = \inf_{x \in \Omega} x_1$ . Para  $-a < \lambda < 0$ , defina

- $T_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n; x_1 = \lambda\}$
- $\Sigma(\lambda) = \{x \in \Omega; x_1 < \lambda\}$
- $x_\lambda = (2\lambda - x_1, y)$  para  $x = (x_1, y) \in \Omega$ .

Em  $\Sigma(\lambda)$  considere

$$w(x, \lambda) = u(x_\lambda) - u(x).$$

Note que  $w$  está bem definida, pois  $\Omega$  é conexo e simétrico com relação ao hiperplano  $x_1 = 0$ .

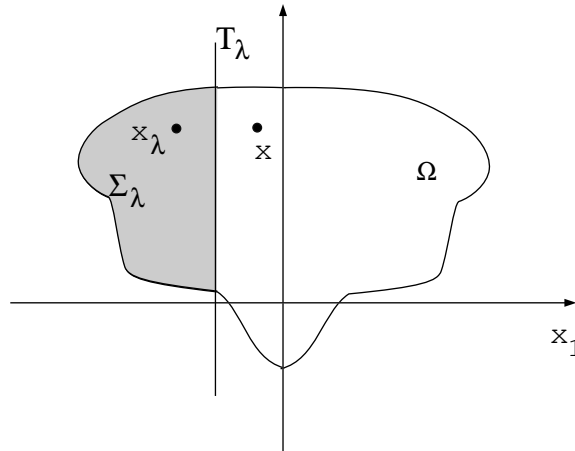


Figura 4.1: Plano móvel

Como  $f$  é Lipschitz,  $w$  satisfaz

$$\begin{cases} \Delta w + c(x, \lambda)w = 0 & \text{em } \Sigma(\lambda) \\ w \geq 0 & \text{sobre } \partial\Sigma(\lambda) \end{cases} \quad (4.4)$$

onde

$$c(x, y) = \begin{cases} \frac{f(u(x_\lambda)) - f(u(x))}{u(x_\lambda) - u(x)} & \text{se } u(x_\lambda) \neq u(x) \\ 0 & \text{se } u(x_\lambda) = u(x) \end{cases}$$

Com efeito,  $\Delta w(x, \lambda) = \Delta u(x_\lambda) - \Delta u(x) = -f(u(x_\lambda)) + f(u(x)) = -c(x, \lambda)w(x, \lambda)$ . Temos,  $u(x_\lambda) \geq 0 = u(x)$  sobre  $\partial\Omega \cap \partial\Sigma(\lambda)$  e portanto,  $w(x, \lambda) \geq 0$  sobre  $\partial\Sigma(\lambda)$ . Como  $u > 0$  em  $\Omega$  segue-se que  $w \not\equiv 0$  sobre  $\partial\Sigma(\lambda)$ .

Para provarmos (4.2), precisamos mostrar que:

$$w(x, \lambda) > 0 \quad \text{sobre } \Sigma(\lambda). \quad (4.5)$$

Com efeito, seja  $x \in \Omega$  com  $x_1 < 0$  e  $x'_1$  tal que  $x_1 < x'_1$  e  $x_1 + x'_1 < 0$ . Considere  $2\lambda = x_1 + x'_1$ , note que  $x \in \Sigma(\lambda)$ . Logo,  $u(x'_1, y) - u(x_1, y) = w(x, \lambda) > 0$ . Como  $x'_1$  é arbitrário, segue-se o resultado.



Para  $0 < \lambda + a$  pequeno, segue-se do princípio de máximo para domínios de medida pequena, que existe um  $\delta > 0$ , tal que

$$|\Sigma(\lambda)| < \delta \Rightarrow w > 0 \text{ em } \Sigma(\lambda).$$

Seja  $(-a, \mu)$  o maior intervalo aberto de valores de  $\lambda$  tal que (4.5) se verifica. Vamos mostrar que  $\mu = 0$ . Suponhamos por contradição que  $\mu < 0$ . Por continuidade,  $w(x, \mu) \geq 0$  em  $\Sigma(\mu)$ . Como  $w \not\equiv 0$  sobre  $\partial\Sigma(\mu)$  segue-se pelo princípio de máximo que  $w > 0$  em  $\Sigma(\mu)$ . Mostraremos que para todo  $\varepsilon > 0$  pequeno,  $w(x, \mu + \varepsilon) > 0$  em  $\Sigma(\mu + \varepsilon)$ .

Fixemos um  $\delta > 0$  satisfazendo a conclusão do princípio de máximo para domínios de medida pequena. Seja  $K$  um subconjunto fechado de  $\Sigma(\mu)$  tal que  $|\Sigma(\mu) \setminus K| \leq \frac{\delta}{2}$ . Pela continuidade de  $w(x, \lambda)$  e pela compacidade de  $K$ ,  $w(x, \mu) > \text{constante} > 0$  para  $x \in K$ . Por continuidade, temos que para todo  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  pequeno  $|\Sigma(\mu + \varepsilon) \setminus K| \leq \delta$  e  $w(x, \mu + \varepsilon) > 0$  sobre  $K$ . Em  $\tilde{\Sigma} = \Sigma(\mu + \varepsilon) \setminus K$  a função  $w = w(x, \mu + \varepsilon)$  satisfaz

$$\begin{cases} \Delta w + c(x, \lambda)w = 0 & \text{em } \tilde{\Sigma} \\ w \geq 0 & \text{sobre } \partial\tilde{\Sigma} \end{cases} \quad (4.6)$$

onde  $c = c(x, \mu + \varepsilon)$ . Com efeito, a desigualdade na fronteira (4.6) segue-se de  $w \geq 0$  sobre  $\partial\Sigma(\mu + \varepsilon)$  por construção, pois  $u = 0$  sobre  $\partial\Omega$  e  $w = 0$  sobre  $T_{\mu+\varepsilon}$  e do fato que  $w > 0$  sobre  $\partial K$ .

Aplicando o princípio de máximo para domínios de medida pequena em  $\tilde{\Sigma}$ , concluímos que  $w > 0$  em  $\tilde{\Sigma}$ . Portanto,  $w(x, \mu + \varepsilon) > 0$  em  $\Sigma(\mu + \varepsilon)$ . Mas, isto contradiz a escolha de  $\mu$ .

Agora, provaremos que  $u_{x_1} > 0$  se  $x_1 < 0$ . Como  $w(x, \lambda) > 0$  em  $\Sigma(\lambda)$  e  $w(\lambda, y) = 0$ , podemos aplicar o Lema de Hopf na fronteira plana:  $x_1 = \lambda$  de  $\Sigma(\lambda)$  e concluir que,  $w_{x_1}(\lambda, y) = -2u_{x_1}(\lambda, y) < 0$  para todo  $\lambda < 0$ .

Agora, provaremos que  $u_{x_1} > 0$  se  $x_1 < 0$ .

Dado  $z \in \Omega$  com  $z_1 < 0$ , consideremos  $\lambda = z_1$ . Note que existe uma bola  $B = B_\rho(z + \rho e_1)$  em  $\Sigma(\lambda)$ .

Como  $w(x, \lambda) > 0$  em  $\Sigma(\lambda)$  enquanto  $w(z, \lambda) = 0$ , podemos aplicar o Lema de Hopf na fronteira plana:  $x_1 = \lambda$  de  $\Sigma(\lambda)$  e concluir que,  $\partial_1 w(z, \lambda) < 0$ .

Isto prova que  $u_{x_1}(z) > 0$ , pois a identidade

$$\partial_1 w(x, \lambda) = \frac{\partial}{\partial x_1} [u(2\lambda - x_1, y) - u(x)] = -u_{x_1}(2\lambda - x_1, y) - u_{x_1}(x)$$

mostra que  $\partial_1 w(z, \lambda) = -2u_{x_1}(z)$  quando  $z_1 = \lambda$ . ■

O conteúdo do corolário seguinte é o famoso resultado de Gidas-Ni-Nirenberg (veja [GNN2]) sobre simetria radial para solução de um problema de Dirichlet semi-linear na bola.

**Corolário 4.1.2.** *Seja  $B = B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ . Se  $f$  é Lipschitz e  $u \in C^2(B) \cap C(\overline{B})$  satisfaz*

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \\ u > 0 & \text{em } B, \end{cases} \quad (4.7)$$

então  $u$  é radialmente simétrica. Além disso,  $\frac{\partial u}{\partial r} < 0$  para todo  $0 < r = |x| < R$ .

**Demonstração:** Do teorema anterior podemos afirmar que  $x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} < 0$  para todo  $x \in B$  com  $x_1 \neq 0$  (pois  $u_{x_1} < 0$  para  $x_1 > 0$  e  $u_{x_1} > 0$  para  $x_1 < 0$  em  $B$ ). Daí,  $\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0$  quando  $x_1 = 0$ . Como  $\Delta$  é radialmente invariante, isto é válido para toda direção e portanto  $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$  para toda direção tangencial, isto é,  $u$  é radialmente simétrica. Para a segunda parte do resultado notemos que,  $\frac{\partial u}{\partial |x|}(x) = \frac{\partial u}{\partial r}(r, 0, \dots, 0)$  e então usamos o fato que  $\frac{\partial u}{\partial x_1} < 0$  para  $x_1 > 0$ . ■

## 4.2 Método do deslizamento

O método do deslizamento também utilizado para estabelecer propriedades geométricas de soluções de equações diferenciais parciais não-lineares introduzido em [BN2], compara o valor da função em dois pontos, sendo que o segundo ponto é obtido pelo deslizamento do domínio, na direção  $x_1$ .

**Teorema 4.2.1.** *Seja  $\Omega$  um domínio limitado de  $\mathbb{R}^n$ , convexo na direção  $x_1$ . Seja  $u \in W_{loc}^{2,n}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  uma solução de:*

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0 & \text{em } \Omega \\ u = \varphi & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.8)$$

*Suponhamos que  $f$  é Lipschitz contínua, suponha ainda que dados três pontos:  $x' = (x'_1, y)$ ,  $x = (x_1, y)$  e  $x'' = (x''_1, y)$  sobre o segmento de reta paralelo ao eixo  $x_1$ ,  $x'_1 < x_1 < x''_1$ , com  $x', x'' \in \partial\Omega$ , então*

$$\varphi(x') < u(x) < \varphi(x'') \quad \text{se } x \in \Omega \quad (4.9)$$

$$\varphi(x') \leq \varphi(x) \leq \varphi(x'') \quad \text{se } x \in \partial\Omega. \quad (4.10)$$

*Então,  $u$  é crescente com respeito a  $x_1$  em  $\Omega$ , isto é,*

$$u(x_1 + \tau, y) > u(x_1, y) \quad \text{para } (x_1, y), (x_1 + \tau, y) \in \Omega \text{ e } \tau > 0.$$

*Além disso,  $u$  é a única solução de (4.8) em  $W_{loc}^{2,n}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  satisfazendo (4.9) e se  $f$  é diferenciável então  $u_{x_1} > 0$  em  $\Omega$ .*

**Demonstração:** Para  $\tau > 0$ , seja  $u^\tau(x_1, y) = u(x_1 + \tau, y)$  definida em  $\Omega^\tau = \Omega - \tau e_1$  e  $w^\tau(x) = u^\tau(x) - u(x)$  definida em  $D^\tau = \Omega \cap \Omega^\tau$ . Procedendo como na demonstração do Teorema 4.2.1, temos que:

$$\begin{cases} \Delta w^\tau + c^\tau(x)w^\tau = 0 & \text{em } D^\tau \\ w^\tau \geq 0 & \text{sobre } \partial D^\tau \end{cases} \quad (4.11)$$

onde  $c^\tau \in L^\infty$  satisfaz  $|c^\tau(x)| \leq b$ , para todo  $x \in D^\tau$  e para todo  $\tau$ . Usando as condições (4.9) e (4.10) conclui-se que  $w^\tau \geq 0$  sobre  $\partial D^\tau$ .

Seja  $\tau_0 = \sup \{\tau > 0; D^\tau \neq \emptyset\}$ . Para  $0 < \tau_0 - \tau$  pequeno,  $D^\tau$  é um domínio estreito. Assim, segue-se de (4.11) e do princípio de máximo que  $w^\tau > 0$  em  $D^\tau$ . Vamos iniciar o deslizamento de  $\Omega^\tau$  para direita, isto é, vamos decrescer  $\tau$  de  $\tau_0$  à uma posição crítica  $\tau \in [0, \tau^\circ)$ .

Seja  $(\tau, \tau_0)$  o intervalo maximal, com  $\tau \geq 0$ , tal que para todo  $\tau'$  em  $\tau < \tau' < \tau_0$ ,  $w^{\tau'} > 0$  em  $D^{\tau'}$ . Queremos mostrar que  $\tau = 0$ . Argumentado por contradição, suponhamos que  $\tau > 0$ .

Fixado  $x$ ,  $w^{\tau}(x)$  é contínua em  $\tau$ , fazendo  $\tau' \rightarrow \tau^-$ , resulta:  $w^{\tau} \geq 0$  em  $D^{\tau}$ . De (4.9) concluimos que  $w^{\tau}(x) > 0$ , para todo  $x \in \Omega \cap \partial D^{\tau}$ . Logo,  $w^{\tau} \not\equiv 0$  em qualquer componente do aberto  $D^{\tau}$ . Aplicando o Princípio do máximo forte a  $w^{\tau}$ , vemos que  $w^{\tau} > 0$  em  $D^{\tau}$ .

Seja  $\delta > 0$  como no princípio de máximo para domínios de medida pequena e  $K$  um subconjunto fechado de  $D^{\tau}$  tal que  $|D^{\tau} \setminus K| < \frac{\delta}{2}$ . Logo, para  $\varepsilon > 0$  pequeno,  $w^{\tau-\varepsilon} > 0$  sobre  $K$  e  $|D^{\tau-\varepsilon} \setminus K| < \delta$ . Como  $\partial(D^{\tau-\varepsilon} \setminus K) \subset \partial D^{\tau-\varepsilon} \cup K$ , vemos que  $w^{\tau-\varepsilon} \geq 0$  sobre  $\partial(D^{\tau-\varepsilon} \setminus K) \subset \partial D^{\tau-\varepsilon} \cup K$ .

O Princípio de máximo para domínios de medida pequena, nos permite concluir que  $w^{\tau-\varepsilon} > 0$  em  $D^{\tau-\varepsilon} \setminus K$  e portanto em todo  $D^{\tau-\varepsilon}$ . Mas, isto contradiz a hipótese de  $(\tau, \tau_0)$  ser maximal. Portanto,  $w^{\tau} > 0$  em  $D^{\tau}$  para todo  $\tau > 0$ .

Se  $f$  é diferenciável, então podemos derivar a primeira equação em (4.8), para obtermos  $\Delta u_{x_1} + f'(u)u_{x_1} = 0$  em  $\Omega$ . Como  $u$  é crescente em  $x_1$ ,  $u_{x_1} \geq 0$  e  $u_{x_1} \not\equiv 0$ , segue-se do Teorema 1.2.9 que  $u_{x_1} > 0$  em  $\Omega$ .

Para concluir a prova do teorema, resta mostrar a unicidade da solução. Suponha que  $v$  é outra solução de (4.8) satisfazendo (4.9). De modo análogo ao que foi feito antes para  $w^{\tau}$ , considerando  $w^{\tau} = v^{\tau} - u$ , concluimos que  $v^{\tau} \geq u$  para todo  $\tau \geq 0$ , e portanto  $v \geq u$ . Por simetria segue-se que  $v = u$ . ■

# APÊNDICE A

---

## Espaços de Sobolev

Nesta seção, vamos estabelecer algumas propriedades dos espaços de Sobolev. Passemos assim a algumas definições.

Consideremos o espaço

$$C_0^\infty(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega); \text{supp } \varphi \text{ é compacto, } \text{supp } \varphi \subset \Omega\}.$$

Vamos introduzir em  $C_0^\infty(\Omega)$  o seguinte conceito de convergência:

**Definição A.0.2.** Dizemos que uma seqüência  $\{\varphi_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$  converge para uma função  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  se:

- i)  $\text{supp } \varphi_n \subset K$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e para algum  $K \subset\subset \Omega$  fixo;
- ii)  $D^\alpha \varphi_n$  converge uniformemente para  $D^\alpha \varphi$  em  $K$  para todo multi-índice  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{N}$ .

$C_0^\infty(\Omega)$  com esta noção de convergência é denotado por  $\mathcal{D}(\Omega)$ .

**Definição A.0.3.** O espaço das distribuições sobre  $\Omega$  é o espaço vetorial topológico  $\mathcal{D}'(\Omega)$  dual topológico de  $\mathcal{D}(\Omega)$ .

**Exemplo A.0.1.** *Seja  $L^1_{loc}(\Omega)$  o espaço das funções localmente integráveis, isto é, o conjunto das funções integráveis sobre subconjuntos compactos de  $\Omega$ . Tomemos  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ . Podemos associar a  $u$  uma distribuição,  $T_u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , definida por:*

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) \, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

**Definição A.0.4.** *Seja  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ . Definimos a derivada  $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$  de  $T$  como uma distribuição, denotada por  $D_i T$  como sendo:*

$$\langle D_i T, \varphi \rangle = -\langle T, D_i \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Em geral, se  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  e  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{N}$ ,

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle.$$

**Definição A.0.5.** *Seja  $1 \leq p < \infty$  e  $m = 1, 2, \dots$ . Definimos*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; D^\alpha u \in L^p(\Omega), \text{ para todo } |\alpha| \leq m\}$$

onde  $D^\alpha$  indica derivadas no sentido das distribuições.

O espaço  $W^{m,p}$  é um espaço de Banach munida da norma:

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (\text{A.1})$$

O fecho de  $\mathcal{D}(\Omega)$  com a norma (A.1) é denotado por  $W_0^{m,p}(\Omega)$ . Os espaços  $W^{m,2}(\Omega)$  são espaços de Hilbert. Usamos a notação  $H^m(\Omega)$  para denotar  $W^{m,2}(\Omega)$ , e  $H_0^m(\Omega)$  para denotar  $W_0^{m,2}(\Omega)$ ,  $m = 1, 2, \dots$

Usando a noção de “traço” de uma distribuição, conceito que não definiremos aqui, é possível dizer que se  $u \in H_0^m(\Omega)$  então  $D^\alpha u = 0$  sobre  $\partial\Omega$  para  $|\alpha| < m$ .

**Teorema A.0.6 (Desigualdade de Poincaré).** *Suponhamos que  $\Omega$  é aberto limitado. Então, existe uma constante  $C$  (dependente de  $\Omega$ ) tal que:*

$$\|u\|_{L^2} \leq C \|\nabla u\|_{L^2}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \quad (\text{A.2})$$

Segue de (A.2) que em  $H_0^1(\Omega)$ ,

$$\sqrt{\int_{\Omega} |\nabla u|^2} \tag{A.3}$$

e

$$\sqrt{\int_{\Omega} u^2 + \int_{\Omega} |\nabla u|^2} \tag{A.4}$$

são normas equivalentes.

### **Teoremas de imersão de Sobolev**

- (i) se  $mp < n$ , então  $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$  para todo  $q \leq \frac{np}{n-mp}$ ;
- (ii) se  $mp > n$ , então  $W^{m,p}(\Omega) \subset C^\gamma$ , onde  $\gamma = m - \frac{n}{p}$ .

---

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [BN1] **BERESTYCKI, H. & NIRENBERG, L.** *Monotonicity, symmetry and antisymmetry of solutions of semilinear elliptic equations*. J. Geom. Phys. **5** (1988), no. 2, 237–275.
- [BN2] ———, *Some qualitative properties of solutions of semilinear elliptic equations in cylindrical domains*. Analysis et cetera. P. Rabinowitz et al., Academic Pe (1990), 115–164.
- [BN3] ———, *On the method of moving planes and the sliding method*. Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) **22** (1991), no. 1, 1–37.
- [Bo] **BONY, J. M.** *Principe du maximum dans les espaces de Sobolev*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **265** 1967 A333–A336.
- [CY] **CHENG, S. Y. & YAU, S. T.** *On the regularity of the Monge-Ampère equation  $\det(\partial^2 u / \partial x_i \partial x_j) = F(x, u)$* . Comm. Pure Appl. Math. **30** (1977), no. 1, 41–68.
- [Br] **BRÉZIS, H.** *Análisis Funcional Teoria Y Aplicaciones*. Alianza Editorial, S.A., Madrid, 1984.
- [D] **DIEUDONNÉ, J. A.** *History of Functional Analysis*. Amsterdam: North - Holland, 1981 (North - Holland Mathematics Studies, 49)
- [Ev] **EVANS, L. C.** *Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematics Society, Providence, Rhode Island, U.S.A., 1998.



- [Fo1] **FOLLAND**, G. B. *Real Analysis: Modern Techniques and their Applications*. Jonh Wiley & Sons, 1984.
- [Fo2] ———, *Introduction to Partial Differential Equations*. 2<sup>a</sup> ed. Princeton University Press.
- [Fi] **FIGUEIREDO**, D. G. de. *Positive solutions of semilinear elliptic problemas* (São Paulo, 1981), pp. 34–87, Lecture Notes in Math., 957, Springer, Berlin-New York, 1982.
- [Fr] **FRAENKEL**, L. E. *Introduction to maximum principles and symmetry in elliptic systems*. Cambridge University Press, 2000.
- [GNN1] **GIDAS**, B., **NI**, W. M. & **NIRENBERG**, L. *Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in  $R^n$* . Mathematical analysis and applications, Part **A**, pp. 369–402, Adv. in Math. Suppl. Stud., 7a, Academic Press, New York-London, 1981.
- [GNN2] ———, *Symmetry and related properties via the maximum principle*. Comm. Math. Phys. **68** (1979), no. 3, 209–243.
- [GT] **GILBARG**, D. & **TRUDINGER**, N. S. *Elliptic partial differential equations of second order* 2<sup>a</sup> ed. Berlin: Spring-Verlag, 1998.
- [HL] **HAN**, Q. & **LIN**, F. *Elliptic partial differential equations*. Courant Lecture Notes in Mathematics, 1. New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.
- [HLP] **HARDY**, G. H., **LITTLEWOOD**, J. E. & **POLYA**, G. *Inequalities*. London: Cambridge University Press, 1967.
- [Ho] **HOPF**, E. *A remark on linear elliptic differential of second order*. Proc. Amer. Math. Soc. 1952, no **3**, 791 – 793.

- [H] **HOPF**, H. *Differential geometry in the large*. Lecture Notes in Mathematics, 1000. Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [HJ] **HORN**, R. A. & **JOHNSON** C. R. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1985.
- [La] **LANG**, S. *Analysis I*. Addison-Wesley, 1968.
- [L1] **LI**, C. M. *Monotonicity and symmetry of solutions of fully nonlinear elliptic equations on unbounded domains*. Comm. Partial Differential Equations **16** (1991), no. 4-5, 585–615.
- [L2] ———, *Monotonicity and symmetry of solutions of fully nonlinear elliptic equations on bounded domains*. Comm. Partial Differential Equations **16** (1991), no. 2-3, 491–526.
- [Li] **LIMA**, E. L. *Curso de Análise*, vol. 2. 5 ed. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1999 (Projeto Euclides).
- [Lio] **LIONS**, P. L. *A remark on Bony maximum principle*. Proc. Amer. Math. Soc. **88** (1983), no. 3, 503–508.
- [MMi] **MARCUS**, M & **MINC**, Henryk. *INTRODUCTION TO LINEAR ALGEBRA*. Dover Publications, IN., New York, 1988.
- [MM] **MEDEIROS**, L. A. da J. & **MIRANDA**, M. M. *ESPAÇOS DE SOBOLEV (Iniciação aos Problemas Elíticos não Homogêneos)*, Rio de Janeiro: UFRJ – IM, 2000.
- [PW] **PROTTER**, M. H. & **WEINBERGER**, H. F. *Maximum Principles in Differential Equations*. Prentice - Hall Englewood Cliffs, NJ, 1967.
- [S] **SERRIN**, J. *A symmetry problem in potential theory*. Arch. Rational Mech. Anal. **43** (1971), 304–318.

- [Sta] **STAMPACCHIA**, G. *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*. Annales de l'institut Fourier, Crenoble, **15** (1965), 189–258.
- [T] **TROIANIELLO**, G. M. *Elliptic Differential Equations and Obstacle Problems*. Plenum Press, New York, 1987. (The University series in mathematics).
- [W] **WEISSTEIN**, E. W. *EinsteinSummation*. From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/EinsteinSummation.html>

---

# ÍNDICE REMISSIVO

- Capacidade
  - de um condutor, 24
  - eletrostática, 22
- Condição da bola interior, 7
- Conjunto,
  - de contato máximo, 27
- Delta de Kronecker, 2
- Desigualdade
  - Poincaré, 59
- Desigualdade de Harnack,
  - completa, 41
  - fraca, 41
- Green,
  - primeira identidade, 21
  - segunda identidade, 21
- Laplaciano, 2
- Lema de Hopf, 7, 47
- Operador elíptico, 3
- Potencial eletrostático, 22
- Princípio de máximo,
  - forte, 9, 48
  - fraco, 4, 47
- Problema de Dirichlet, 6
  - generalizado, 37
- Solução,
  - forte, 44
  - clássica, 6
  - fraca, 36
- Subsolução, 10
- Supersolução, 10