

INTEGRAIS MONÓTONAS E ESPAÇOS L^p PARA
FUNÇÕES DE CONJUNTO FINITAMENTE ADITIVAS

SÉRGIO ROBERTO FENLEY



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

F359i

5083/BC

CAMPINAS - SÃO PAULO
BRASIL

INTEGRAIS MONÓTONAS E ESPAÇOS L^p PARA
FUNÇÕES DE CONJUNTO FINITAMENTE ADITIVAS

SÉRGIO ROBERTO FENLEY 

Orientador

Prof.Dr. Rodney Carlos Bassanezi

Dissertação apresentada ao Instituto
de Matemática, Estatística e Ciência
da Computação, como requisito parcial
para a obtenção do título de Mestre
em Matemática.

Maio - 1983 -

Trabalho realizado com o auxílio da FAPESP.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

À minha mãe.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Rodney, pela orientação segura e amizade.

Ao Prof. Ubiratan D'Ambrósio, pela ajuda nas dificuldades surgidas.

À minha família, pelo que ela representa para mim.

À Márcia, minha noiva, pelo amor e compreensão.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	i
SIMBOLOGIA	A
CAPÍTULO I - ÁLGEBRAS DE CONJUNTO, FILTROS E ESPAÇOS DE RIESZ	1
1.1. Álgebras de Conjunto	1
1.2. Filtros	3
1.3. Espaços de Riesz	19
CAPÍTULO II - INTEGRAIS MONÓTONAS	37
2.1. Definição e Propriedades Gerais	37
2.2. Extensões de Integrais	62
2.3. Teorema de Representação	71
2.4. Linearidade e Mensurabilidade	74
2.5. Convergência Quase Uniforme	79
CAPÍTULO III - ESPAÇOS L^P DE DUNFORD-SCHWARTZ	83
3.1. Funções de Conjunto Finitamente Aditivas	83
3.2. Integração	85
3.3. Espaços L^P	91

CAPÍTULO IV - ESPAÇOS L^P PARA MEDIDAS f.a.l.	94
4.1. Preliminares	94
4.2. Espaços L^P	123
4.3. Critérios de Completude	139
4.4. Espaços L^∞	156
4.5. Soma de Funções em L^P	159
CONCLUSÃO	165
BIBLIOGRAFIA	166

desenvolvido por Greco [10]. Definimos estes L^P , determinamos algumas propriedades e critérios de completude, e os comparamos com os L^P desenvolvidos por DS. Resulta que os L^P aqui estudados são mais fáceis de serem utilizados e fornecem mais informações, ao passo que os L^P de DS calculam normalmente a integral de uma classe maior de funções.

Nosso trabalho foi desenvolvido utilizando sobretudo os estudos feitos em [5,9,10] em que nos baseamos. A nossa contribuição pessoal constitui-se na demonstração e esclarecimento de muitos resultados mencionados nos artigos acima. Como principais resultados por nós provados citamos entre outros: o relacionamento da integral monótona com as integrais de Riemann e Lebesgue, a prova de muitos resultados relacionados com o espaço de Stone, a relação entre A -mensurabilidade e a μ -mensurabilidade de DS fornecendo a ligação entre os espaços L^P nos dois casos e a demonstração de que para uma σ -álgebra A e uma medida σ -aditiva μ , $L^P(X,A,\mu)$ de integral monótona é completo.

SIMBOLOGIA

see	denota	se e somente se
$\forall$		qualquer
i.e.		isto é
■		final de demonstração
$:=$		definição
$M(X, A)$		conjunto das funções A-mensu <u>r</u> áveis.
$M^+(X, A)$		mensuráveis positivas
$F(A)$		funções de conjunto domínio A e finitamente aditivas.
$M(A)$		$F(A) \cap \{\text{limitadas}\}$
$M_\sigma(A)$		$M(A) \cap \{\sigma\text{-aditivas}\}$

CAPÍTULO I

ÁLGEBRAS DE CONJUNTO, FILTROS E ESPAÇOS DE RIESZ.

Veremos neste capítulo definições e propriedades de conceitos básicos que serão usados posteriormente neste trabalho. Introduzimos também a noção do Espaço de Stone associado a uma álgebra que será fundamental para o desenvolvimento da teoria dos espaços L^p .

1.1. ÁLGEBRAS DE CONJUNTO

Seja X um conjunto e $P(X)$ a classe de todos os subconjuntos de X . $A \subset P(X)$ é uma álgebra se A é fechada por uniões finitas e complementares. Dado $A \subset X$ denotamos o complementar de A por A^c .

É fácil ver que a intersecção de uma família qualquer de álgebras de $P(X)$ é uma álgebra de $P(X)$. Portanto, faz sentido definir a álgebra gerada por $\mathcal{H} \subset P(X)$ como sendo a menor álgebra de $P(X)$ que contém $\mathcal{H}$.

Uma σ -álgebra é uma álgebra que é fechada por uniões enumeráveis. A σ -álgebra gerada por $\mathcal{H} \subset P(X)$ é a menor σ -álgebra que contém $\mathcal{H}$.

Sejam X e X' dois conjuntos e A e A' álgebras de $P(X)$ e $P(X')$ respectivamente. Dizemos que a aplicação $\varphi : A \longrightarrow A'$ é um homomorfismo de álgebras se φ satisfaz, para quaisquer $A, B \in A$

$$1) \quad \varphi(A \cap B) = \varphi(A) \cap \varphi(B)$$

$$2) \quad \varphi(A \cup B) = \varphi(A) \cup \varphi(B)$$

$$3) \quad \varphi(A^C) = (\varphi(A))^C.$$

É claro que $\varphi(A) \subset P(X')$ é uma álgebra de $P(X')$ contida em A' , e é chamada uma imagem *homomórfa* de A . Quando φ é injetiva e sobrejetiva dizemos que φ é um *isomorfismo* de álgebras e que as álgebras A e A' são *isomórfas*.

Um *átomo* de uma álgebra A é um conjunto $H \subset A$ tal que se $B \subset A$ e $B \subset H$ então $B = \emptyset$ ou $B = H$. Intuitivamente vemos que um átomo é um conjunto que não pode ser quebrado em pedaços na álgebra. Uma álgebra A é dita *atômica* se qualquer elemento de A contém um átomo de A . É dita *superatômica* se qualquer subálgebra é atômica. Lembramos que se $A \subset P(X)$ é uma álgebra de conjuntos uma subálgebra de A é uma álgebra de $P(X)$ contida em A .

Vejamos agora alguns exemplos de álgebras de conjuntos.

EXEMPLO 1. Sejam $X = \mathbb{N}$ e $A \subset P(X)$ a classe dos conjuntos finitos ou cofinitos. A é álgebra mas não σ -álgebra. É também superatômica.

EXEMPLO 2. Sejam $X = \mathbb{R}$ e $I_{\mathbb{R}}$ a família dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ que são uniões finitas de intervalos. Denotamos por *intervalo* os intervalos abertos, fechados, semiabertos e ilimitados. Então $I_{\mathbb{R}}$ é álgebra de $P(\mathbb{R})$ mas não é σ -álgebra. É atômica mas não superatômica. Seja $I = [0,1]$ e $I_I = I_{\mathbb{R}} \cap P(I)$. Então I_I é uma álgebra de $P(I)$.

EXEMPLO 3. Veremos agora um exemplo relacionado com topologia.

Se X é um espaço topológico então a classe $\mathcal{A}$ subconjuntos de X que são aberto e fechados é uma álgebra de subconjuntos de X .

Lembrando que um espaço topológico é totalmente desconexo se suas componentes conexas são pontos, temos o resultado bem conhecido da topologia:

Seja X um espaço topológico compacto e de Hausdorff. Nestas condições X é totalmente desconexo se, e somente se (see) $\mathcal{A}$ é uma base para a topologia de X (veja por exemplo Simmons: "Introduction to Topology and Modern Analysis").

EXEMPLO 4. Seja X um espaço topológico de $\mathcal{B}$ a σ -álgebra gerada pelos conjuntos abertos de X . $\mathcal{B}$ é chamada σ -álgebra de Borel de X . Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos $\{f=0\} = \{x \in X, f(x) = 0\}$, $\{f > a\} = \{x \in X, f(x) > a\} \quad \forall a \in \mathbb{R}$. Um conjunto de Baire é um conjunto da σ -álgebra gerada pela classe $\mathcal{H} = \{\{f=0\}, f: X \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ contínua}\}$. Um conjunto de Baire é sempre Borel e se X é metrizável um conjunto de Borel é também de Baire.

1.2. FILTROS

Sejam $X \neq \emptyset$ um conjunto e $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ uma álgebra. Dizemos que $F \subset \mathcal{A}$ é um filtro de $\mathcal{A}$ se

- i) $F \neq \emptyset$
- ii) $\emptyset \notin F$

$$\text{iii)} \quad A, B \in F \implies A \cap B \in F$$

$$\text{iv)} \quad A \in F, B \in A, A \subset B \implies B \in F$$

Se F é um filtro de A então $I = \{A \in A, A^c \in F\}$ é chamado um ideal de A . Os resultados existentes para filtros tem duais para ideais.

Seja $\mathcal{H} \subset A$ uma classe de conjuntos de A . Queremos saber quando existe um filtro F de A tal que $\mathcal{H} \subset F$. Uma condição necessária para que isso aconteça é que se

$$\{A_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{H} \implies \bigcap_{i=1}^n A_i \neq \emptyset. \quad (1)$$

Esta condição é também suficiente se considerarmos F como a classe de conjuntos de A que contêm uma intersecção finita de elementos de $\mathcal{H}$. É fácil ver que F é um filtro e que qualquer outro filtro que contêm $\mathcal{H}$ contém F . Por isso esse filtro é o filtro gerado por $\mathcal{H}$. Observamos que todos estes conceitos dependem a álgebra A de $P(X)$.

Um filtro de A é chamado um *ultrafiltro* se não está contido propriamente em nenhum outro filtro de A . Usando o Lema de Zorn é fácil provar que cada filtro está contido em ao menos um ultrafiltro de A .

Nosso primeiro resultado diz que a coleção de ultrafiltros que contêm um dado filtro caracteriza este filtro.

PROPOSIÇÃO 1.1. Sejam X um conjunto, A álgebra de $P(X)$ e F filtro de A . Então

$$F = \bigcap \{F' \mid F' \text{ ultrafiltro de } A, F \subseteq F'\}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja $F_1 = \bigcap \{F' \mid F' \text{ ultrafiltro de } A, F \subseteq F'\}$. Como a intersecção de uma família qualquer de filtros é um filtro segue que F_1 é um filtro. Obviamente $F \subseteq F_1$. Para ver que $F_1 \subseteq F$ utilizamos o seguinte fato:

Se F é um filtro de A e $A \in A$ então $A \notin F$ se e $A^c \cap H \neq \emptyset \quad \forall H \in F$, pois isto é equivalente a $A \in F$ se e $\exists H \in F$ tal que $H \cap A^c = \emptyset$. Isto é claro pois se $A \in F$, $A^c \cap A = \emptyset$. Por outro lado se $\exists H \in F$, $H \cap A^c = \emptyset \Rightarrow H \subseteq A \Rightarrow A \in F$.

Suponha portanto que $F_1 \not\subseteq F$ isto é $\exists A \in F_1$, $A \notin F$. Logo $A^c \cap H \neq \emptyset$, $\forall H \in F$ e portanto $F \cup \{A^c\}$ satisfaz a condição (1) e existe filtro de A e daí ultrafiltro que contém $F \cup \{A^c\}$. Mas esse ultrafiltro tem A e A^c como elementos, contradição. Logo $F_1 \subseteq F$ e temos o resultado. ■

Existe uma caracterização simples dos ultrafiltros de A que damos a seguir.

PROPOSIÇÃO 1.2. Sejam X conjunto, $A \subset P(X)$ álgebra e F filtro de A . Então são equivalentes

- i) F é ultrafiltro de A

- ii) $H \in A \Rightarrow H \in F$ ou $H^C \in F$
- iii) $\{H_i\}_{i=1}^n \subset A$ e $\bigcup_{i=1}^n H_i \in F \Rightarrow \exists i_0$ tal que $H_{i_0} \in F$.

DEMONSTRAÇÃO. i) $\Rightarrow$ ii). Seja $H \in A$ tal que $H \notin F$. Como $H^C \cap A \neq \emptyset$, $\forall A \in F$ existe um filtro que contém $F \cup \{H^C\}$ e como F é um ultrafiltro segue que $H^C \in F$.

ii) $\Rightarrow$ iii) Suponha que qualquer $1 \leq i \leq n$, $H_i \notin F$. Então $H_i^C \in F$, $\bigcap_{i=1}^n H_i^C \in F \Rightarrow (\bigcup_{i=1}^n H_i)^C \in F \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n H_i \notin F$ absurdo.

iii) $\Rightarrow$ i) Suponha que existe F' filtro de A tal que $F \subsetneq F'$. Seja $A \in F'$, $A \notin F$. Então como $A \cup A^C = X \in F$ e $A \notin F$. Segue que $A^C \in F$. Mas $F \subset F'$ e portanto $A \in F'$ e $A^C \in F'$ absurdo. Logo F é ultrafiltro. ■

É interessante notar que a maximalidade de filtros se traduz pela condição de um conjunto da álgebra ou pertencer ao ultrafiltro ou ter seu complementar lá.

Seja $A \subset P(X)$ uma álgebra. Chamamos de *ultrafiltro determinado por* $x \in X$ ou *ultrafiltro principal* o seguinte conjunto.

$$\tilde{x} = \{A \in A, x \in A\}.$$

Claramente $\tilde{x}$ é um filtro. Além disso se $A \in A$ temos que: $x \in A$ e $A \in \tilde{x}$ ou $x \notin A \Rightarrow A^C \in \tilde{x}$ e portanto $\tilde{x}$ é um ultrafiltro.

Notamos que $x \in \bigcap_{A \in \tilde{x}} A$, mas pode ocorrer que $\{x\} \neq \bigcap_{A \in \tilde{x}} A$.

Neste caso qualquer $y \in \bigcap_{A \in \tilde{x}} A$ satisfaz $\tilde{y} = \tilde{x}$. Em qualquer ca-

so se $\bigcap_{A \in \tilde{x}} A \in A$ então é um átomo de A . Notamos que podemos

ter $\bigcap_{A \in \tilde{x}} A \notin A$ como mostra o exemplo a seguir.

EXEMPLO 5. Sejam $X = \mathbb{R}$, $x \in X$ e $A = \{A \subset \mathbb{R} \text{ tal que } x \in A^0 \text{ ou } x \notin A^-\}$. Então A é álgebra e $\tilde{x} = \{A \subset \mathbb{R} \text{ tal que } x \in A^0\}$. Logo $\bigcap_{A \in \tilde{x}} A = x$ mas $\{x\} \notin A$.

Veremos que podemos associar a um filtro uma noção de convergência que é explicada a seguir.

Denotamos por $\overline{\mathbb{R}}$ o conjunto $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Sejam então X um conjunto, $A \subset P(X)$ álgebra, F filtro de A e $f: X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Definimos o $\limsup_F f$ com relação a F por

$$\limsup_F f := \inf_{H \in F} \sup_{x \in H} f(x).$$

Este é o limite superior da função f com respeito ao filtro F . De maneira análoga definimos $\liminf_F f$ como

$$\liminf_F f := \sup_{H \in F} \inf_{x \in H} f(x)$$

e quando estes valores forem iguais definimos o *limite* de f com relação a F .

$$\lim_F f := \lim \sup_F f.$$

Vejamos agora um exemplo que vai ajudar a esclarecer estes conceitos.

EXEMPLO 6. Sejam $X = \mathbb{R}$ e $A = \mathcal{P}(X)$. Se $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definimos o *limite superior* de f em $x \in \mathbb{R}$ por

$$\lim \sup f(x) := \sup \{b \in \mathbb{R} \text{ tal que } \varepsilon > 0, \forall V_{x,\varepsilon} \text{ vizinhança de } x \text{ tal que } \forall y \in V_{x,\varepsilon} - \{x\}, f(y) < b + \varepsilon\}.$$

De maneira análoga definimos $\lim \inf f(x)$. Dizemos que f é *semicontínua superiormente* se $\lim \sup f(x) \geq f(x)$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$. As funções semicontínuas superiormente são os limites pontuais de sequências crescentes de funções contínuas (veja [12]). Definimos de forma análoga semicontínua inferiormente.

Seja agora $F_x = \{A \subset \mathbb{R} ; x \in A^o\}$.

Notamos que F_x é um filtro de álgebra A mas contrariamente ao exemplo anterior não é um ultrafiltro de A . Isto é verdade pois se $B = \{x + r : r \in \mathbb{Q}\}$ então $B \in A$ e $B \notin F_x$ e $B^c \notin F_x$. Isto ocorreu porque a álgebra A tem mais conjuntos que o caso anterior e a noção de maximalidade mudou. Logo a noção de ultrafiltro não está somente ligada ao conjunto base X mas também fundamentalmente associado à álgebra A .

Vemos que

$$\limsup_{\mathcal{F}_x} f = \inf_{\substack{A \subset \mathbb{R} \\ x \in A^0}} \sup_{y \in A} f(y).$$

É fácil ver que $\limsup_{\mathcal{F}_x} f \geq \limsup f(x)$ e também f é semicontínua superiormente em x se e são iguais. Vale também $\liminf_{\mathcal{F}_x} f \leq \limsup f(x)$ e igualdade se e f for semicontínua inferiormente em x . Como f é contínua em x se e os dois casos ocorrem simultaneamente vemos que f é contínua em x se e existe $\lim_{\mathcal{F}_x} f$. Logo existe um filtro de A que caracteriza a continuidade de uma função real em um dado ponto.

Este exemplo também mostra-nos que $\limsup_{\mathcal{F}_x} f \geq \liminf_{\mathcal{F}_x} f$. Este é um fato geral, isto é, qualquer A álgebra e $\mathcal{F}$ filtro de A temos $\limsup_{\mathcal{F}} f \geq \liminf_{\mathcal{F}} f$ para qualquer $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

Notamos também que as funções $\liminf_{\mathcal{F}_x} f$ e $\limsup_{\mathcal{F}_x} f$ são semicontínuas superiormente e inferiormente respectivamente.

Vamos agora introduzir o conceito do espaço de Stone associado a uma álgebra A de $P(X)$.

Indicamos por $\tilde{X}$ o conjunto dos ultrafiltros de A . Seja $\phi : X \longrightarrow \tilde{X}$ a aplicação que associa a cada $x \in X$ o ultrafiltro determinado por x . Se ϕ é injetiva dizemos que a álgebra A separa pontos; se é sobre A é dita perfeita. Quando A é perfeita todo ultrafiltro de A é principal. Se X é infinito (Cardinal $X = \aleph_0$) então $P(X)$ não é perfeita. Basta considerar

$$F = \{B \subset X \text{ tal que } \#(B^c) < +\infty\}.$$

Então F é um filtro contido num ultrafiltro maximal que não é principal.

O conjunto $\tilde{X}$ é chamado o *espaço de Stone* associado a álgebra A . Daqui a pouco vamos definir uma álgebra importante de $P(\tilde{X})$ e colocar uma topologia neste conjunto.

Sejam agora X um espaço topológico compacto e A a álgebra dos conjuntos aberto-fechados de X . Então A é perfeita pois se F é ultrafiltro de A então $\bigcap_{i=1}^n B_i \neq \emptyset$ onde $B_i \in F$. Como B_i são fechados e $\{B, B \in F\}$ tem a propriedade de inteseccção finita e X é compacto temos $\bigcap_{B \in F} B \neq \emptyset$ e daí qualquer x nesta intersecção satisfaz $\tilde{x} = F$ e portanto A é perfeita.

Para cada $H \in A$ seja $\tilde{H} \subset \tilde{X}$ o seguinte conjunto

$$\tilde{H} := \{F \in \tilde{X} : H \in F\}.$$

Definimos também $\tilde{A} = \{\tilde{H} : H \in A\}$.

Temos então o seguinte resultado:

LEMA 1.3. Se $X, A, \tilde{X}, \tilde{A}$ são como acima, então $\tilde{A}$ é uma álgebra e a aplicação

$$\varphi : A \longrightarrow \tilde{A} \subset \mathcal{P}(\tilde{X})$$

$$\varphi : H \longrightarrow \tilde{H}$$

é um isomorfismo de álgebras.

DEMONSTRAÇÃO. i) Sejam H_1 e $H_2 \in A$.

$$\varphi(H_1 \cup H_2) = \{F \in \tilde{X} : H_1 \cup H_2 \in F\}.$$

Se $H_1 \cup H_2 \in F \Rightarrow H_1 \in F$ ou $H_2 \in F$ pois F é ultrafiltro .
 $\Rightarrow F \in \tilde{H}_1$ ou $F \in \tilde{H}_2$ logo $F \in \varphi(H_1) \cup \varphi(H_2)$ e

$$\varphi(H_1 \cup H_2) \subseteq \varphi(H_1) \cup \varphi(H_2) .$$

Como $\varphi(H_1)$ e $\varphi(H_2) \subseteq \varphi(H_1 \cup H_2)$ segue que $\varphi(H_1) \cup \varphi(H_2) \subseteq \varphi(H_1 \cup H_2)$ donde segue a igualdade de $\varphi(H_1 \cup H_2)$ e $\varphi(H_1) \cup \varphi(H_2)$.

$$\text{ii)} \quad \varphi(H_1 \cap H_2) = \{F \in \tilde{X} : H_1 \cap H_2 \in F\}.$$

Se $H_1 \cap H_2 \in F \Rightarrow H_1 \in F$ e $H_2 \in F \Rightarrow F \in \varphi(H_1)$ e $F \in \varphi(H_2)$
 $\Rightarrow \varphi(H_1 \cap H_2) \subseteq \varphi(H_1) \cap \varphi(H_2)$.

Por outro lado se $F \in \varphi(H_1) \cap \varphi(H_2) \Rightarrow H_1 \in F$ e $H_2 \in F \Rightarrow H_1 \cap H_2 \in F \Rightarrow \varphi(H_1) \cap \varphi(H_2) \subseteq \varphi(H_1 \cap H_2)$ donde sai a igualdade.

iii) $H \in A$. $H \in \varphi(H^C) \iff H^C \in F \iff H \notin F \iff F \notin \varphi(H)$. Logo $\varphi(H^C) = X - \varphi(H)$.

Com i), ii) e iii) provamos que A é uma álgebra. Além disso $\varphi(X) = \tilde{X}$ pois $X \in F$ para qualquer ultrafiltro de A . Como φ é sobre falta provar que φ é biunívoca.

Se $A = \phi$, $\{\phi\}$ ou $\{\phi, X\}$ o resultado é trivial. Seja então $H \in F$, $0 \neq H \neq X$. Seja $F = \{Z \in A : H^C \subset Z\}$. Obviamente F é um filtro contido num ultrafiltro maximal F . Claramente $H \notin F \Rightarrow F \not\subset \tilde{H} \Rightarrow \tilde{H} \neq \tilde{X}$. Logo se $\varphi(H) = \tilde{X}$ segue que $H = \tilde{X}$.

Podemos provar agora que φ é biunívoca. Se $\varphi(H_1) = \varphi(H_2)$ então $\varphi(H_1^C) = \tilde{X} - \varphi(H_2) \Rightarrow \varphi(H_1^C) \cup \varphi(H_2) = \tilde{X} \Rightarrow H_1^C \cup H_2 = X \Rightarrow H_1 \subset H_2$. De modo análogo $H_2 \subset H_1$ e portanto φ é biunívoca. Logo φ é isomorfismo de álgebras. ■

$\tilde{A} \subset \tilde{P}(X)$ sendo álgebra é fechada por intersecções finitas portanto pode ser tomada como base para uma topologia τ em $\tilde{X}$. O espaço de Stone $\tilde{X}$ é usualmente dotado desta topologia. Temos então o teorema clássico devido a Stone válido também para estruturas mais gerais: as álgebras de Boole (veja [16]):

1.4. TEOREMA - Teorema de Representação de Stone. Sejam $\tilde{X}$ um conjunto, $A \subset P(X)$ uma álgebra; $\tilde{X}$ o espaço de Stone associado a A e $\tilde{A} \subset P(\tilde{X})$ a álgebra definida acima. Então $\tilde{X}$ é um espaço compacto de Hausdorff e totalmente desconexo. A álgebra $\tilde{A}$ é álgebra dos aberto-fechados de $\tilde{X}$; é perfeita e separa pontos de $\tilde{X}$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\{\tilde{A}_i\}_{i \in I}$ onde $A_i \in A$ um recobrimento aberto de $\tilde{X}$ por elementos da base. Então $\bigcap_{i \in I} (\tilde{X} - \tilde{A}_i) = \phi$ isto é,

não existe $F \in \tilde{X}$ tal que $F \in \tilde{X} - \tilde{A}_i = \tilde{A}_i^c$, $\forall i \in I$, donde

$$\nexists F \in \tilde{X} \text{ tal que } A_i^c \in F, \forall i \in I$$

Logo existem $i_1, \dots, i_k \in I$ tal que $\bigcap_{j=1}^k (X - A_{i_j}) = \emptyset$ pois

caso contrário $\mathcal{H} = \{X - A_i\}_{i \in I}$ satisfaz a condição (1) do parágrafo anterior e portanto gera um filtro e daí um ultrafiltro F' . Absurdo pois daí $X - A_i \in F'$ para qualquer $i \in I$. Logo

$$\bigcup_{j=1}^k A_{i_j} = X \text{ e } \bigcup_{j=1}^k \tilde{A}_{i_j} = \tilde{X} \text{ donde } \tilde{X} \text{ é compacto.}$$

Sejam F_1 e F_2 dois ultrafiltros distintos de A . Logo existe $A \in A$, $A \in F_1$, $A \notin F_2$. Isto implica que $F_1 \in \tilde{A}$ e $F_2 \in \tilde{A}^c$ abertos de $\tilde{X}$ e $\tilde{A} \cap \tilde{A}^c = \emptyset$. Logo $\tilde{X}$ é Hausdorff.

X é também totalmente desconexo para os conjuntos aberto-fechados ($= \tilde{A}$) geram a topologia de $\tilde{X}$. $\tilde{A}$ é álgebra de $\mathcal{P}(\tilde{X})$ e seus elementos são conjuntos aberto-fechados. Por outro lado, se $B \subset \tilde{X}$ é aberto fechado $B = \bigcup_{i \in I} \tilde{A}_i$, $A_i \in A$ por ser B aberto e daí $B = \bigcup_{i=1}^k \tilde{A}_{j_i}$ pois B fechado é compacto. Logo $B = \bigcup_{i=1}^k \tilde{A}_{j_i}$ pertence a $\tilde{A}$. Como comentamos antes, $\tilde{A}$ é perfeita. Podemos ver isso de outra maneira:

Seja I' um ultrafiltro de $\tilde{A}$ e seja

$$I = \{A \in A : \tilde{A} \in I'\}.$$

Como a aplicação $A \longrightarrow \tilde{A}$ é um isomorfismo de álgebras I é um ultrafiltro de A . Tomando $A \in A$ temos:

$$\tilde{A} \in I' \text{ se e só se } A \in I \text{ se e só se } I \in \tilde{A}$$

e portanto o ultrafiltro I' é determinado pelo elemento $I \in \tilde{X}$ e assim $\tilde{A}$ é perfeita.

Observamos finalmente que uma álgebra separa pontos se e só se dados x e $y \in X$ distintos existe $A \in A$ com $x \in A$ e $y \notin A$ (ou vice-versa). Dados dois ultrafiltros distintos de $\tilde{A}$ vemos que a condição acima é satisfeita pois $\tilde{X}$ é Hausdorff e $\tilde{A}$ é base para sua topologia. Portanto $\tilde{A}$ separa pontos. ■

A importância deste teorema é enorme pois ele transforma noções de álgebras de conjunto para noções topológicas. Este resultado será muito utilizado no estudo dos espaços L^p associados às integrais monótonas.

EXEMPLO 7. Seja $X = \phi$ um conjunto e $A \subset P(X)$ uma álgebra. Se $\alpha : A \longrightarrow [0, +\infty]$ satisfaz $\alpha(\phi) = 0$, $\alpha(X) \neq 0$ e $\alpha(B) < \alpha(C)$ se $B \subset C$ ambos em A , então o conjunto

$$F = \{H \in A : \alpha(A \cap H) = \alpha(A), \forall A \in A\}$$

é um filtro de A chamado suporte de A .

EXEMPLO 8. Sejam $X \neq \emptyset$ conjunto, $A \subset P(X)$ álgebra, F filtro de A . Definimos as funções $\alpha_F, \beta_F : A \longrightarrow \{0,1\}$ por

$$\alpha_F(H) = \begin{cases} 1 & \text{se } H \in F \\ 0 & \text{se } H \notin F \end{cases}$$

$$\beta_F(H) = \begin{cases} 1 & \text{se } H \cap A \neq \emptyset, \forall A \in F \\ 0 & \text{se } \exists A \in F \text{ com } H \cap A = \emptyset. \end{cases}$$

Neste caso o suporte de ambas as funções é F . Notamos pela caracterização anterior de ultrafiltros que se F é ultrafiltro então $\alpha_F = \beta_F$. Além disso, neste caso α_F e β_F são finitamente aditivas pois:

Se $A, B \in A$ e $A \cap B = \emptyset$ então

i) Se $\alpha_F(A \cup B) = 0 \implies \alpha_F(A) = \alpha_F(B) = 0$ porque α é monótona. (isto porque F é filtro).

ii) Se $\alpha_F(A \cup B) = 1 \implies A \cup B \in F$ e como F é ultrafiltro $\implies A \in F$ ou $B \in F$ mas não ambos pois $A \cap B = \emptyset$ e F é filtro. Logo em qualquer caso vale $A, B \in A, A \cap B = \emptyset \implies$

$$\alpha_F(A \cup B) = \alpha_F(A) + \alpha_F(B).$$

e α_F é finitamente aditiva.

Por outro lado é fácil provar que se $\mu : A \longrightarrow \{0,1\}$ é aditiva então $F = \{A \in A : \mu(A) = 1\}$ é um ultrafiltro de A . Isto

estabelece uma correspondência biunívoca entre as medidas finitamente aditivas não constantes a 2 valores em A e os ultrafiltros de A .

Dizemos que um ultrafiltro F de A é *livre* se $\bigcap_{A \in F} A = \emptyset$.

EXEMPLO 9. Seja $A \subset P(\mathbb{N})$ a álgebra gerada pelos conjuntos finitos. O único ultrafiltro livre de A é ultrafiltro F dos conjuntos cofinitos. Vemos claramente que F é um filtro.

Se não fosse ultrafiltro existiria F' ultrafiltro com $F \subsetneq F'$.

Logo existe $C \in F'$, $C \notin F$. Daí C é finito $C = \bigcup_{i=1}^n \{x_i\}$ e como

cada $\{x_i\} \in A$ e F' é ultrafiltro segue que existe $1 \leq i_0 \leq n$ tal que $\{x_{i_0}\} \in F'$ ou seja $F' = \tilde{x}_{i_0}$. Absurdo pois $\mathbb{N} - \{x_{i_0}\} \in F \subset F'$. Logo F é ultrafiltro de A .

Seja F' um ultrafiltro qualquer de A . Se F' contém um conjunto finito de $\mathbb{N}$ pelo raciocínio acima F' é principal, caso contrário $F' \subset F$ e portanto $F' = F$.

EXEMPLO 10. Seja $I_I \subset P(I)$ a álgebra gerada pelos intervalos de I . Dado $x \in (0,1)$ chamamos

$$\beta_x = \{A \in I_I : \exists \varepsilon > 0 \text{ com } (x - \varepsilon, x) \subset A\}$$

$$\delta_x = \{A \in I_I : \exists \varepsilon > 0 \text{ com } (x, x + \varepsilon) \subset A\} \quad (2)$$

$$\gamma_x = \{A \in I_I : x \in A\}$$

γ_x é o ultrafiltro principal determinado por x . Vamos provar que β_x e δ_x são ultrafiltros de I_I

$\vdash \beta_x$ é filtro

$$i) \quad I \in \beta_x \Rightarrow \beta_x \neq \emptyset$$

$$ii) \quad \emptyset \notin \beta_x$$

$$iii) \quad A, B \in \beta_x \Rightarrow \exists \varepsilon_1 > 0 \quad (x - \varepsilon_1, x) \subset A$$

$$\exists \varepsilon_2 > 0 \quad (x - \varepsilon_2, x) \subset B$$

$$\text{Seja } \varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} \Rightarrow (x - \varepsilon, x) \subset A \cap B \in \beta_x$$

$$iv) \quad A \in \beta_x, B \in A, A \subset B \text{ então claramente } B \in \beta_x.$$

$\vdash \beta_x$ é ultrafiltro de I_I .

Seja $\{H_i\}_{i=1}^n \subset A$ com $\bigcup_{i=1}^n H_i = H \in \beta_x$. Logo $\exists \varepsilon > 0$ com

$(x - \varepsilon, x) \subset H$. Como cada H_i é uma união finita de intervalos $\Rightarrow \exists i_0, 1 \leq i_0 \leq n$ e $\varepsilon_{i_0} \leq \varepsilon$ com $(x - \varepsilon_{i_0}, x) \subset H_{i_0} \Rightarrow H_{i_0} \in \beta_x$ e portanto β_x é ultrafiltro.

Da mesma forma δ_x é um ultrafiltro.

Observamos que para $x = 0$ podemos definir δ_x e γ_x e para $x = 1$, β_x e γ_x e ainda são ultrafiltros.

Vamos mostrar agora que estes são os únicos ultrafiltros de $\tilde{I}_I$.

Para tanto tomemos F um ultrafiltro de $\tilde{I}_I$. Suponhamos que F não é da forma (2) para qualquer $x \in I$.

Seja então $x \in I$. Por hipótese $\exists A \in F$ com $x \notin A$. Além disso existe $B \in F$ com $(x - \varepsilon, x) \not\subseteq B$, $\forall \varepsilon > 0$. Como B é união finita de intervalos existe $\varepsilon_x > 0$ tal que $(x - \varepsilon_x, x) \cap B = \emptyset$. Da mesma forma $\exists C \in F$ e $\varepsilon'_x > 0$ com $(x, x + \varepsilon'_x) \cap C = \emptyset$ (quando $x = 0$ ou $x = 1$ um destes passos não existe). Seja $E_x = (x - \varepsilon_x, x + \varepsilon'_x)$ e $D_x = A \cap B \cap C \in F$, $E_x \cap D_x \neq \emptyset$. Fazemos esta construção para cada $x \in I$. Como $\{E_x\}_{x \in I}$ são abertos e cobrem I compacto existe uma família finita $\{E_{x_i}\}_{i=1}^n$ que cobre I .

Dai $\bigcap_{i=1}^n D_{x_i} \in F$ mas $\bigcap_{i=1}^n D_{x_i} = \emptyset$ absurdo e logo F é da forma

β_x , δ_x ou γ_x para algum $x \in I$.

Os ultrafiltros do tipo β_x são chamados *aderentes à esquerda* de x e os do tipo δ_x *aderentes à direita* de x . Os ultrafiltros principais são os pontos isolados de $\tilde{I}_I$. Pois $\{x\} \in A$ e daí $\gamma_x = \{\tilde{x}\}$ é aberto e fechado em $\tilde{I}_I$. Por outro lado β_x não é isolado pois uma vizinhança típica de β_x é do tipo $\overbrace{(x - \varepsilon, x)}$ com $\varepsilon > 0$ e $\gamma_y \in \overbrace{(x - \varepsilon, x)}$ para qualquer $y \in (x - \varepsilon, x)$. O mesmo ocorre com δ_x .

Vemos que duas álgebras de conjuntos são isomorfas se os seus espaços de Stone são homeomorfos. Quando A é a álgebra dos conjuntos aberto fechados de um espaço topológico X compacto Hausdorff e totalmente desconexo então o espaço de Stone de A é homeomorfo a X .

Um conjunto H da álgebra A é um átomo se $\tilde{H}$ é um ponto isolado de $\tilde{X}$ (veja o último exemplo). Uma álgebra de conjuntos é atômica se o conjunto dos pontos isolados de $\tilde{X}$ é denso em $\tilde{X}$. Além disso notamos que o conjunto dos ultrafiltros que contêm um filtro fixo é um subconjunto fechado de $\tilde{X}$.

1.3. ESPAÇOS DE RIESZ

Vamos estudar agora os espaços de Riesz, analisando várias de suas propriedades. Veremos que o conjunto das funções finitamente aditivas é um espaço de Riesz de uma classe especial chamado completo. Este fato será utilizado no Capítulo IV.

Um *espaço vetorial ordenado* $(V, \leq)$ é um espaço vetorial real V munido de uma relação $\leq$ que satisfaz:

- i) $x \leq x$
 - ii) $x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x = y$
 - iii) $x \leq y$ e $y \leq z \Rightarrow x \leq z$
 - iv) $x \leq y$ e $a \in [0, +\infty) \Rightarrow ax \leq ay$
 - v) $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$.
- $\forall x, y, z \in V$

Notamos que as três primeiras condições definem uma ordem parcial em V e as duas últimas relacionam esta ordem com a estrutura de espaço vetorial existente em V .

Chamamos o conjunto $V^+ = \{x \in V ; x \geq 0\}$ de cone de ordem ou cone dos elementos positivos de $(V, \leq)$.

Sejam $(V, \leq)$ um espaço vetorial ordenado e $x, y \in V$. Indicamos por $x \vee y$ (resp. $x \wedge y$) o menor (resp. maior) elemento de V que é maior (resp. menor) do que x e y quando este elemento existir. Isto é

- i) $x \leq x \vee y$ e $y \leq x \vee y$
 - ii) Se $a \in V$ e $x \leq a$, $y \leq a \Rightarrow x \vee y \leq a$
- (3)

Dizemos que um espaço vetorial ordenado $(V, \leq)$ é um *espaço de Riesz* se existem $x \vee y$ e $x \wedge y$ para cada $x, y \in V$. Neste caso chamamos $x \vee y$ de sup (ou supremo) de x e y e $x \wedge y$ de inf (ou infimo) de x e y . Vemos pelas fórmulas (3) que o sup concorda com a idéia intuitiva de supremo.

Definimos agora para todo $x \in V$

$|x| = x \vee (-x)$ - *variação ou valor absoluto de x*

$x^+ = x \vee 0$ - *variação positiva de x*

$x^- = (-x) \vee 0$ - *variação negativa de x*

É fácil então demonstrar que

- i) $-(x \wedge y) = (-x) \vee (-y)$

$$\text{ii)} \quad x \wedge y + z = (x+z) \wedge (y+z)$$

$$\text{iii)} \quad x \wedge y + x \vee y = x + y$$

$$\text{iv)} \quad a(x \wedge y) = (ax) \wedge (ay) \quad , \quad \forall a \in (0, +\infty)$$

$$\text{v)} \quad x = x^+ - x^- \quad , \quad |x| = x^+ + x^- \quad , \quad x^+ \wedge x^- = 0$$

$$|ax| = |a|x \quad , \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\text{vi)} \quad x^+ = \frac{1}{2} (|x| + x) \quad x^- = \frac{1}{2} (|x| - x)$$

$$\text{vii)} \quad x \vee y = \frac{1}{2} (x+y + |x-y|) \quad \text{onde} \quad x, y, z \in V$$

$$x \wedge y = \frac{1}{2} (x+y - |x-y|)$$

$$\text{viii)} \quad |x+y| \leq |x| + |y| \quad .$$

Por exemplo vamos demonstrar que $|x| = x^+ + x^-$. De fato

$$\begin{aligned} x^+ + x^- &= (x \vee 0) + (-x) \vee 0 \quad - \text{pela def. } x^+ \text{ e } x^- \\ &= (x + (-x \vee 0)) \vee (0 + (-x) \vee 0) \quad - \text{dual de ii)} \\ &= ((x + (-x)) \vee (x + 0)) \vee ((-x) \vee 0) \quad \text{dual de ii)} \\ &= (0 \vee x) \vee ((-x) \vee 0) \\ &= 0 \vee x \vee (-x) \vee 0 \quad - \text{associatividade} \\ &= |x| \vee 0 = |x| \quad - \text{pois } |x| \geq 0. \end{aligned}$$

Sejam agora $(V, \underline{\leq})$ e $(W, \underline{\leq})$ dois espaços de Riesz. Uma aplicação linear $\phi: V \longrightarrow W$ é chamada um *homomorfismo de espaços de Riesz* se

$$\phi(x \wedge y) = \phi(x) \wedge \phi(y) \quad , \quad \forall x, y \in V.$$

Se $(V, \underline{\leq})$ é um espaço de Riesz então dizemos que um subespaço vetorial W de V é um *subespaço de Riesz* de $(V, \underline{\leq})$ se $\forall x, y \in W$, $x \wedge y$ e $x \vee y \in W$. Todo subespaço de Riesz é um espaço de Riesz com a ordem induzida. Além disso vemos que $W \subset (V, \underline{\leq})$ subespaço vetorial é subespaço de Riesz se $x \in W \Rightarrow x^+ \in W$ ou $x^- \in W$ ou $|x| \in W$.

Dizemos que $\phi : (V, \underline{\leq}) \longrightarrow (W, \underline{\leq})$ é um *isomorfismo de espaços de Riesz* se ϕ é um isomorfismo de espaços vetoriais e se ϕ é homomorfismo de espaços de Riesz.

Um espaço de Riesz $(V, \underline{\leq})$ é dito *completo* se para todo $A \subset V$ não vazio, limitado superiormente, A tem um extremo superior (um máximo) em V . As condições seguintes são equivalentes:

- 1) $(V, \underline{\leq})$ é completo
- 2) cada conjunto $A \subset V$ inferiormente limitado tem um extremo inferior
- 3) cada rede $\{x_j\}_{j \in \Lambda} \subset V^+$ crescente e superiormente limitada tem supremo em V^+
- 4) Cada rede $\{x_j\}_{j \in \Lambda} \subset V^+$ decrescente tem um infimo em V^+ .

Vejamos agora alguns exemplos de espaços de Riesz.

EXEMPLO 11. No espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ os conjuntos

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\}$$

$$C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x > 0, \quad y \geq 0\}$$

definem relações em $\mathbb{R}^2$ de tal forma que C_1 gera um espaço vetorial ordenado, mas C_2 não.

$$(x, y) \leq_{C_1} (z, w) \iff (x-z, y-w) \in C_1 \iff$$

$$x-z \geq 0 \quad \text{e} \quad y-w \geq 0 \iff x \geq z \quad \text{e} \quad y \geq w.$$

Neste caso $(V, \leq_{C_1})$ é um espaço vetorial ordenado. Fazendo uma construção análoga para C_2 , $\leq_{C_2}$ não chega a ser uma ordem parcial portanto $(V, \leq_{C_2})$ não é ordenado.

Além disso $(V, \leq_{C_1})$ é um espaço de Riesz onde

$$(x, y) \vee (z, w) = (x \vee z, y \vee w)$$

$$(x, y) \wedge (z, w) = (x \wedge z, y \wedge w)$$

lembrando $x \wedge z = \min(x, z)$.

EXEMPLO 12. Seja $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$ com o cone de ordem

$$C = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}\}$$

é um espaço vetorial ordenado com a ordem $f \leq g$ quando $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Claramente é um espaço de Riesz completo. No próximo capítulo trabalharemos com $[0, +\infty]^X$ que é de certa maneira um cone onde estão definidos as operações $\wedge$ e $\vee$.

Dizemos que um subespaço vetorial W de um espaço de Riesz $(V, \leq)$ é uma banda se

- i) $x \in W$, $y \in V$ e $|y| \leq |x| \Rightarrow y \in W$
- ii) $\emptyset \neq A \subset W$ e A superiormente limitado em $V \Rightarrow \sup A \in W$.

Voltamos ao exemplo 12 vemos que o conjunto das funções limitadas de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ não é uma banda pois ii) falha. O conjunto das funções contínuas $C(\mathbb{R})$ também não é uma banda de $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \leq)$ pois existe $A \subset C(\mathbb{R})$ tal que $\sup(A)$ em $C(\mathbb{R})$ é diferente de $\sup A$ em $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Mas $C(\mathbb{R})$ é subespaço de Riesz de $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \leq)$.

Vamos estudar agora o espaço das medidas finitamente aditivas que nos interessam particularmente. Este desenvolvimento será fundamental para o estudo das integrais monótonas e seus espaços L^P .

$X \neq \emptyset$ denotará um conjunto, $A \subset P(X)$ uma álgebra, $F(A)$ o conjunto das medidas finitamente aditivas

$$F(A) = \{\mu : A \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } A, B \in A \text{ e } A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow$$

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)\}$$

$M(A)$ o subconjunto de $F(A)$ das funções limitadas

$$M(A) = \{\mu \in F(A) \text{ tal que } \sup_{A \in \mathcal{A}} |\mu(A)| < +\infty\}$$

e $M_\sigma(A)$ o subconjunto de $M(A)$ constituído pelas medidas σ -aditivas

$$M_\sigma(A) = \{\mu \in M(A) \text{ tal que } \mu \text{ é } \sigma\text{-aditiva}\}.$$

Colocamos em $F(A)$ a estrutura de espaço vetorial dado pela soma de funções e multiplicação por escalar.

Em $M(A)$ consideramos o cone de ordem

$$M^+(A) = \{\mu \in M(A) : \mu(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{A}\}.$$

Para a ordem ($\leq$) gerada por este cone $(M(A), \leq)$ é um espaço de Riesz onde dados μ e $\gamma \in M(A)$

$|\mu|$, $\mu \vee \gamma$ e $\mu \wedge \gamma : A \longrightarrow \mathbb{R}$ são definidos por

$$|\mu|(A) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |\mu(H_i)| \text{ onde } \{H_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{A} \text{ é uma partição finita de } A \right\} \quad (4)$$

$$[\mu \wedge \gamma](A) = \inf_{T \in \mathcal{A}} \{\mu(T \cap A) + \gamma(A \cap T^c)\} \quad (5)$$

$$[\mu \vee \gamma](A) = \sup_{T \in A} \{\mu(T \cap A) + \gamma(A \cap T^C)\} \quad (6)$$

PROPOSIÇÃO 1.5. *Nestas condições $(M(A), \leq)$ é um espaço de Riesz.*

DEMONSTRAÇÃO. Vamos demonstrar (6) primeiro. Seja $\alpha : A \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por (6)

$$\alpha(A) = \sup_{T \in A} \{\mu(T \cap A) + \gamma(A \cap T^C)\}$$

Como μ e γ são limitadas α é limitada. Vamos provar que $\alpha \in M(A)$. Sejam portanto $A, B \in A$, $A \cap B \neq \emptyset$. Então

$$\begin{aligned} \alpha(A \cup B) &= \sup_{T \in A} \{\mu(T \cap (A \cup B)) + \gamma((A \cup B) \cap T^C)\} = \\ &= \sup_{T \in A} \{\mu(T \cap A) + \gamma(A \cap T^C) + \mu(T \cap B) + \gamma(B \cap T^C)\} \leq \\ &\leq \sup_{T \in A} \{\mu(T \cap A) + \gamma(A \cap T^C)\} + \sup_{T \in A} \{\mu(T \cap B) + \\ &+ \gamma(B \cap T^C)\} = \alpha(A) + \alpha(B). \end{aligned}$$

Por outro lado dados S e $T \in A$ seja $C = (A \cap T) \cup (B \cap S)$.

Dai

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap C &= (A \cap C) \cup (B \cap C) \quad \text{e} \quad A \cap C = (A \cap (A \cap T)) \cup (A \cap (B \cap S)) \\ &= A \cap T \quad \text{pois} \quad A \cap B \neq \emptyset \end{aligned}$$

$$\text{e} \quad B \cap C = B \cap S$$

e portanto $(A \cup B) \cap C = (A \cap T) \cup (B \cap S)$. (7). Além disso

$$(A \cup B) \cap C^C = (A \cap C^C) \cup (B \cap C^C)$$

$$C^C = (A^C \cup T^C) \cap (B^C \cup S^C)$$

e

$$A \cap C^C = ((A \cap A^C) \cup (A \cap T^C)) \cap (A \cap B^C) \cup (A \cap S^C) =$$

$$= (\emptyset \cup (A \cap T^C)) \cap (A \cup (A \cap S^C)) = A \cap T^C$$

da mesma forma $B \cap C^C = B \cap S^C$ logo

$$(A \cup B) \cap C^C = (A \cap T^C) \cup (B \cap S^C) \quad (8).$$

Logo

$$\mu(A \cap T) + \gamma(A \cap T^C) + \mu(B \cap S) + \gamma(B \cap S^C) =$$

$$\mu((A \cap T) \cup (B \cap S)) + \gamma((A \cap T^C) \cup (B \cap S^C)) =$$

$$\mu((A \cup B) \cap C) + \gamma((A \cup B) \cap C^C) \quad (9)$$

por (7) e (8). Como

$$\begin{aligned}
\alpha(A) + \alpha(B) &= \sup_{T \in A} \{ \mu(A \cap T) + \gamma(A \cap T^C) \} + \sup_{S \in A} \{ \mu(B \cap S) + \\
&\quad + \gamma(B \cap S^C) \} = \sup_{T \in A} \sup_{S \in A} \{ \mu(A \cap T) + \gamma(A \cap T^C) + \mu(B \cap S) + \\
&\quad + \gamma(B \cap S^C) \} \text{ segue de (9) que}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha(A) + \alpha(B) &\leq \sup_{C \in A} \{ \mu((A \cup B) \cap C) + \gamma((A \cup B) \cap C^C) \} \\
&= \alpha(A \cup B)
\end{aligned}$$

donde $\alpha(A \cup B) = \alpha(A) + \alpha(B)$ e como A e B são arbitrários $\alpha \in M(A)$.

Usando $T = A$ na fórmula (6) obtemos $\alpha(A) \geq \mu(A)$

e $T = A^C \Rightarrow \alpha(A) \geq \gamma(A)$. Logo $\alpha \geq \mu$ e $\alpha \geq \gamma$.

Seja $\delta \in M(A)$ com $\delta \geq \mu$ e $\delta \geq \gamma$. Então seja $A \in A$ fixo. Para $\forall T \in A$, $\delta(A) = \delta(A \cap T) + \delta(A \cap T^C) \geq \gamma(A \cap T) + \gamma(A \cap T^C)$ e tomando o sup sobre $A \in A$ obtemos $\delta(A) \geq \alpha(A)$.

Variando A sobre A obtemos $\delta \geq \alpha$. Logo pela definição $\alpha = \mu \vee \gamma$.

De maneira análoga provamos a fórmula (5) e assim $M(A)$ é um espaço de Riesz.

Vamos agora provar a fórmula (4).

Seja $A \in \mathcal{A}$ fixo. Então

$$|\mu|(A) = [\mu \vee (-\mu)](A) = \sup_{S \in \mathcal{A}} \{ \mu(S \cap A) - \mu(A \cap S^c) \} \leq$$

$$\leq \sup_{S \in \mathcal{A}} \{ |\mu(S \cap A)| + |\mu(S^c \cap A)| \}$$

e como $S \cap A, S^c \cap A$ é partição finita de A isto é $\leq$

$$\sup \left\{ \sum_{i=1}^n |\mu(H_i)|, \text{ com } \{H_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{A} \text{ partição de } A \right\} \quad (10)$$

Seja agora $\{E_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{A}$ partição finita de A . Reordenamos os índices de tal forma a colocar os E_i com $\mu(E_i) \geq 0$ em primeiro lugar. Dai

$$\sum_{i=1}^n |\mu(E_i)| = \sum_{i=1}^r \mu(E_i) + \sum_{i=r+1}^n -\mu(E_i) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^r E_i\right) - \mu\left(\bigcup_{i=r+1}^n E_i\right)$$

pois $\mu \in M(\mathcal{A})$. Tomando $B = \bigcup_{i=1}^r E_i \in \mathcal{A}$ segue que a soma dada em

(10) para $\{E_i\}_{i=1}^n$ vale

$$\mu(A \cap B) - \mu(A \cap B^c) \leq |\mu|(A).$$

Logo como são iguais para qualquer $A \in \mathcal{A}$ resulta a igualdade.

Vamos agora estudar o conjunto $M_\sigma(A)$ das medidas σ -aditivas definidas sobre A . $\mu \in M_\sigma(A)$ significa que dado $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset A$

onde $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in A$ e $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$ então $\mu(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) =$

$$= \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n).$$

Observamos que nem sempre temos $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in A$ pois A é somente uma álgebra. Claramente se $\mu, \gamma \in M_\sigma(A)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ então $\mu + \gamma$ e $\lambda\mu \in M_\sigma(A)$ e portanto $M_\sigma(A)$ é subespaço vetorial de $M(A)$.

Vamos agora provar que é um subespaço de Riesz de $M(A)$. Dados μ e $\gamma \in M_\sigma(A)$ então $\exists \mu \vee \gamma \in M(A)$. Se provarmos que $\mu \vee \gamma \in M_\sigma(A)$ teremos o resultado.

Sejam portanto $\mu, \gamma \in M(A)$ e $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset A$ com A_n disjuntos dois a dois e $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in A$. Então

$$\begin{aligned} [\mu \vee \gamma] \left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n \right) &= \sup_{T \in A} \left\{ \mu \left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n \cap T \right) + \gamma \left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n \cap T^c \right) \right\} = \\ &= \sup_{T \in A} \left\{ \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n \cap T) + \sum_{n=1}^\infty \gamma(A_n \cap T^c) \right\} = \sup_{T \in A} \left\{ \sum_{n=1}^\infty (\mu(A_n \cap T) + \right. \\ &\left. + \gamma(A_n \cap T^c)) \right\} \leq \sum_{n=1}^\infty \sup_{T \in A} \{ \mu(A_n \cap T) + \gamma(A_n \cap T^c) \} = \sum_{n=1}^\infty [\mu \vee \gamma](A_n). \end{aligned}$$

Observamos que todas as séries são absolutamente convergentes pois por exemplo $\sum_{n=1}^k |\mu(A_n)| \leq |\mu|(X) < +\infty, \forall k \in \mathbb{N}$ e $\bigcup_{n=1}^k A_n \in \mathcal{A}$.

Por outro lado seja $T_n \in \mathcal{A}$ e considere

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap T_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(A_n \cap T_n^c) \quad (11)$$

Como as séries são absolutamente convergentes (mesmo para $T_n = X, \forall n \in \mathbb{N}$) então dado $\varepsilon > 0$, seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |\mu(A_n)| + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |\gamma(A_n)| < \varepsilon/4 \quad (12)$$

Tomando $C_i = \bigcup_{j=1}^i (A_j \cap T_j)$ vemos por um raciocínio análogo ao do cálculo para μ e γ (fórmulas (7) e (8)) que

$$\mu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{n_0} A_n\right) \cap C_{n_0}\right) = \sum_{n=1}^{n_0} \mu(A_n \cap T_n)$$

$$\gamma\left(\left(\bigcup_{n=1}^{n_0} A_n\right) \cap C_{n_0}^c\right) = \sum_{n=1}^{n_0} \gamma(A_n \cap T_n^c)$$

por (7) e (8)

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap T_n) - \sum_{n=1}^{n_0} \mu(A_n \cap T_n) \right| < \varepsilon/4$$

ainda de (7)

$$\left| \mu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{n_0} A_n\right) \cap C_{n_0}\right) - \mu(A \cap C_{n_0}) \right| < \varepsilon/4$$

Logo

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap T_n) - \mu(A \cap C_{n_0}) \right| < \varepsilon/2$$

e da mesma forma

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(A_n \cap T_n^c) - \gamma(A \cap C_{n_0}^c) \right| < \varepsilon/2$$

Logo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap T_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(A_n \cap T_n^c) < \mu(A \cap C_{n_0}) + \gamma(A \cap C_{n_0}^c) + \varepsilon$$

e como $C_{n_0} \in \mathcal{A}$ tomando o sup do lado direito e depois do lado esquerdo obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\mu \vee \gamma](A_n) \leq \mu \vee \gamma(A) + \varepsilon$$

e como $\varepsilon > 0$ é arbitrário juntando com a outra desigualdade obtida temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\mu \vee \gamma](A_n) = \mu \vee \gamma \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \text{ e}$$

$\mu \vee \gamma \in M_{\sigma}(A)$ que é portanto subespaço de Riesz de $M(A)$ e daí um espaço de Riesz também.

Vamos agora provar que $M(A)$ é completo.

PROPOSIÇÃO 1.6. $M(A)$ é um espaço de Riesz completo.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $V \subset M(A)$ limitado, isto é $\exists \gamma \in M(A)$ tal que

$$\mu(A) \leq \gamma(A) \quad , \quad \forall A \in \mathcal{a} \quad , \quad \forall \mu \in V.$$

$V = \{\mu_{\alpha} \mid \alpha \in N\}$. Seja $\mu : A \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\mu(A) = \sup_{\{E_n\}_{n=1}^k \subset A} \{\mu_{\alpha_1}(E_1) + \dots + \mu_{\alpha_k}(E_k)\}$$

$\{E_n\}_{n=1}^k$ partição de A

onde $\alpha_n \in N$. O sup é tomado sobre todos os conjuntos finitos de índices $\alpha_i \in N$, funções de V com estes índices e partições de A . Obviamente $\mu \leq \gamma$ e $\mu \geq \mu_{\alpha_i}$, $\alpha_i \in N \implies \mu$ é limitada.

Vamos mostrar que μ é finitamente aditiva.

Sejam E e $F \in \mathcal{a}$, $E \cap F = \emptyset$ e $\varepsilon > 0$. Existe $\{A_i\}_{i=1}^n$ partição de $E \cup F$ e $\{\alpha_i\}_{i=1}^n \subset N$ tal que

$$\mu_{\alpha_1}(A_1) + \dots + \mu_{\alpha_n}(A_n) > \mu(E \cup F) - \epsilon$$

Tomamos $E_i = E \cap A_i$ e $F_i = F \cap A_i$. $\{E_i\}_{i=1}^n$ e $\{F_i\}_{i=1}^n$ são partições de E e F respectivamente.

$$\mu(E) + \mu(F) \geq \sum_{i=1}^n \mu_{\alpha_i}(E_i) + \sum_{i=1}^n \mu_{\alpha_i}(F_i) = \sum_{i=1}^n \mu_{\alpha_i}(E_i \cup F_i)$$

$$= \sum_{i=1}^n \mu_{\alpha_i}(A_i) \leq \mu(E \cup F) + \epsilon. \text{ Logo como } \epsilon > 0 \text{ é arbitrário}$$

$$\mu(E \cup F) \leq \mu(E) + \mu(F).$$

Sejam agora $\{B_i\}_{i=1}^n, \{C_i\}_{i=1}^n \subset A$ partições finitas de E e F respectivamente tal que $\exists \{\alpha_i\}_{i=1}^n, \{\beta_i\}_{i=1}^m \subset N$ com

$$\sum_{i=1}^n \mu_{\alpha_i}(B_i) \geq \mu(E) - \epsilon/2$$

$$\sum_{i=1}^m \mu_{\beta_j}(C_j) \geq \mu(F) - \epsilon/2$$

Como $\{B_i\}_{i=1}^n \cup \{C_j\}_{j=1}^m$ é partição finita de $E \cup F$ então

$$\mu(E \cup F) \geq \mu_{\alpha_1}(B_1) + \dots + \mu_{\alpha_n}(B_n) + \mu_{\beta_1}(C_1) + \dots + \mu_{\beta_m}(C_m) \geq \mu(E) + \mu(F) - \epsilon$$

e como $\epsilon > 0$ é arbitrário segue que $\mu(E \cup F) \geq \mu(E) + \mu(F)$. Logo $\mu \in M(A)$.

Seja agora $\nu \in M(A)$ com $\nu \geq \mu_\alpha$, $\forall \alpha \in N$. Então qualquer partição $\{E_i\}_{i=1}^n$ de $A \in \mathcal{A}$ e $\{\alpha_i\}_{i=1}^n \subset N$ temos

$$\nu(A) = \nu(E_1) + \dots + \nu(E_n) \geq \mu_{\alpha_1}(E_1) + \dots + \mu_{\alpha_n}(E_n).$$

Tomando o sup obtemos $\nu(A) \geq \mu(A)$. Como A é arbitrário $\nu \geq \mu$. Assim μ é o supremo de ν e $M(A)$ é um espaço de Riesz completo. ■

De maneira análoga se mostra que $M_\sigma(A)$ é um espaço de Riesz completo.

Notamos que quando A é uma σ -álgebra a demonstração de que $\mu \vee \gamma$ existe em $M_\sigma(A)$ é simplificada pois $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap T_n)$ utilizado na demonstração pertence a A se $A_n, T_n \in A$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Isto mostra que no trabalho com álgebras os processos enumeráveis devem ser analisados cuidadosamente. Embora a fórmula (6) para $\mu \vee \gamma$ pareça artificial ela se torna mais intuitiva a partir da fórmula (4) para $|\mu|$, a qual realmente se assemelha à variação total de uma medida finitamente aditiva como veremos no próximo capítulo.

Por último vamos definir uma norma em $M(A)$ por

$$|\mu| = \sup_{A \in \mathcal{A}} |\mu(A)|.$$

Claramente $\| \cdot \|$ é uma norma em $M(A)$ e com esta norma o espaço métrico derivado é um espaço completo e portanto de Banach. $M_\sigma(A)$ é um subespaço fechado portanto também um espaço de Banach.

CAPÍTULO II

INTEGRAIS MONÓTONAS

Um conceito generalizado de integração foi estudado por De Giorgi e Letta [2] originando então as integrais chamadas "monótonas", as quais foram posteriormente analisadas por Greco [5, 9]. Elas são definidas a partir de uma função de conjunto monótona qualquer, e nos casos usuais são simplesmente a integral de Riemann ou Lebesgue. Estudaremos aqui as propriedades principais das integrais monótonas.

2.1. DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES GERAIS

Uma função de conjunto $\alpha : P(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ com X um conjunto não vazio é dita *monótona* se $\alpha(\emptyset) = 0$ e se $A, B \subset X$ e $A \subset B$ então $\alpha(A) \leq \alpha(B)$. Neste caso $[0, +\infty]^X$ representa o conjunto de todas as funções $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$. Neste conjunto que algumas vezes denotaremos por X^* definimos as operações $\vee$ e $\wedge$

$$\vee : X^* \times X^* \longrightarrow X^*$$

$$\vee(f, g) = f \vee g \quad \text{onde} \quad (f \vee g)(x) = f(x) \vee g(x)$$

para qualquer $x \in X$. Observamos que $a \vee b = \sup(a, b)$ se a e b são elementos de $\overline{\mathbb{R}}$. Da mesma forma definimos o infimo de f e g em X^* , $f \wedge g$.

Seja $\mathcal{B} \subset [0, +\infty]^X$. Dizemos que $\mathcal{B}$ é um *domínio de integração* se

$$\forall f \in \mathcal{B}, \quad \forall \lambda \in (0, +\infty) \implies \lambda f \wedge \lambda, \quad f \vee \lambda - \lambda \in \mathcal{B}$$

onde λ também denota a função constante de valor λ .

Vamos agora definir o que é uma integral monótona. A definição será axiomática e depois veremos que ela concorda com a idéia usual de integral.

DEFINIÇÃO 2.1. Sejam $\mathcal{B}$ um domínio de integração de $[0, +\infty]^X$ e $T : \mathcal{B} \longrightarrow [0, +\infty]$ um funcional. Dizemos que T é uma *integral monótona* (IM) se dados $f, g \in \mathcal{B}$ e $\lambda \in (0, +\infty)$ temos:

- i) $T(\lambda g) = \lambda T(g)$
- ii) $g \leq f \implies T(g) \leq T(f)$
- iii) $T(g) = T(g \wedge \lambda) + T(g \vee \lambda - \lambda)$ (1)
- iv) $T(g) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(g \wedge n)$
- v) $T(g) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(g \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n})$.

Uma integral monótona é homogênea e a priori é linear somente para uma classe específica de somas, isto é $f = f \wedge \lambda + (f \vee \lambda - \lambda)$. Esta integral é também monótona como seu próprio nome o diz e satisfaz propriedades boas de convergência. Vamos estudar agora algumas propriedades desta integral.

Primeiramente vamos mostrar que iv) + v) são equivalentes à propriedade seguinte

$$\text{vi)} \quad \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0^+ \\ \lambda \rightarrow +\infty}} T(f \wedge \lambda - f \wedge \epsilon) = T(f).$$

Para tanto primeiro mostramos que iv) + v) são equivalentes
a: vi)' $\lim_{n \rightarrow +\infty} T(f \wedge n - f \vee \frac{1}{n}) = T(f).$

OBSERVAÇÃO. Para estas demonstrações estamos supondo i), ii) e iii) válidas.

Suponha portanto iv) e v) válidas. Temos as seguintes igualdades

$$(f \wedge n - f \wedge \frac{1}{n}) \wedge (1 - \frac{1}{n}) = (f \wedge 1) \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n}$$

$$[(f \wedge n - f \wedge \frac{1}{n}) \vee (1 - \frac{1}{n}) - (1 - \frac{1}{n})] = (f \vee 1 - 1) \wedge (n - 1)$$

cuja verificação depende de separar os casos em que $0 \leq f(x) \leq 1/n$, $1/n < f(x) \leq 1$, $1 < f(x) \leq n$ e $f(x) > n$.

Para evitar casos triviais supomos $n \geq 2$. Logo pela iii) da definição 2.1 temos

$$T(f \wedge n - f \wedge \frac{1}{n}) = T((f \wedge 1) \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n}) + T((f \vee 1 - 1) \wedge (n - 1))$$

e tomando limite $n \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} T(f \wedge n - f \wedge \frac{1}{n}) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} T((f \wedge 1) \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n}) + \\ &+ T((f \vee 1 - 1) \wedge (n - 1)) \end{aligned}$$

de v) o segundo limite após a igualdade vale $T(f \vee 1 - 1)$ e de iv) o primeiro limite vale $T(f \wedge 1)$. Por iii) novamente $T(f \vee 1 - 1) + T(f \wedge 1) = T(f)$ e portanto vi)' é verdadeira.

Suponhamos agora vi)' válida. Neste caso

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T(f \wedge n) \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} T(f \wedge n - f \wedge \frac{1}{n}) = T(f)$$

onde usamos a propriedade ii). Como $f \wedge n \leq f$, $\forall n$ e T é monótona, segue que $\lim_{n \rightarrow +\infty} T(f \wedge n) = T(f) = \text{iv})$.

Por outro lado como $f \wedge n - f \wedge \frac{1}{n} \leq f \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \leq f$ tiramos facilmente a propriedade v). Logo $\text{iv}) + \text{v}) \iff \text{vi})'$.

Claramente $\text{vi}) \implies \text{vi})'$. Suponhamos portanto vi)' válida. Como a função $g(\lambda, \varepsilon) = T(f \wedge \lambda - f \wedge \varepsilon)$ é crescente em λ e decrescente em ε existe o limite $\lim_{\substack{\lambda \rightarrow +\infty \\ \varepsilon \rightarrow 0^+}} g(\lambda, \varepsilon)$ e é igual a

$\sup_{\substack{\lambda > 0 \\ \varepsilon > 0}} g(\lambda, \varepsilon)$. Como T é monótona e $f \wedge \lambda - f \wedge \varepsilon \leq f$, $\lambda, \varepsilon \in (0, +\infty)$

então $\lim_{\substack{\lambda \rightarrow +\infty \\ \varepsilon \rightarrow 0^+}} g(\lambda, \varepsilon) \leq T(f)$. Queremos provar a igualdade.

Dado λ e $\varepsilon > 0$ escolha $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \lambda$ e $\frac{1}{n} < \varepsilon$.
Neste caso $f \wedge n - f \wedge \frac{1}{n} \leq f \wedge \lambda - f \wedge \varepsilon$ e daí

$$T(f \wedge n - f \wedge \frac{1}{n}) \leq T(f \wedge \lambda - f \wedge \varepsilon).$$

Utilizando vi)' obtemos então o resultado desejado.

Além disso a propriedade vi) é equivalente à seguinte condição

vii) Se $\forall k \in \mathbb{N}$ a rede $\{g_i \wedge k\}_{i \in \Lambda} \subset \mathbb{B}$ converge uniformemente em X à função $g \wedge k$ então

$$T(g) \leq \liminf_{i \in \Lambda} T(g_i)$$

onde o $\liminf_{i \in \Lambda}$ é agora o limite de uma rede de números reais.

A prova desta equivalência será feita por etapas. Primeiramente recordamos o conceito de rede ou sequência generalizada (veja [14]).

Um conjunto $D \neq \emptyset$ com uma ordem parcial $\leq$ é dito *dirigido* se

$$m, n \in D \Rightarrow \exists p \in D, \quad p \geq m \text{ e } p \geq n.$$

Uma rede é uma tripla $(S, D, \leq)$ tal que $(D, \leq)$ é um conjunto dirigido e S é uma função com domínio D . Denotamos usualmente a rede $(S, D, \leq)$ por $\{S_j\}_{j \in D}$ onde S_j é a imagem de $j \in D$ por S . No caso acima $D = \Lambda$ e a rede é $\{g_i \wedge k\}_{i \in D}$.

Dizemos que $\{S_j\}_{j \in D}$ está *eventualmente* em A se existe $p \in D$ tal que qualquer $j \geq p$ implica $S_j \in A$. Se $S : D \longrightarrow Y$ e (Y, τ) é um espaço topológico dizemos que a rede $\{S_i\}_{i \in D}$ converge para $y \in Y$ com respeito a τ se $\{S_j\}_{j \in D}$ está eventualmente em qualquer vizinhança de y .

Redes são importantes porque caracterizam completamente a topologia de um espaço, ao passo que sequências são insuficientes.

Voltando ao nosso problema, vamos utilizar um resultado auxiliar.

LEMA 2.2. Se $\{g_j\}_{j \in D}$ é uma rede de funções tal que

$$g_j \wedge k \xrightarrow{\text{unif.}} g \wedge k, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{então}$$

$$\lim_{j \in D} \sup_{x \in X} \{g \wedge k - g_j\} \leq 0 \quad \text{para cada } k \in \mathbb{N} \quad (2)$$

Suponhamos válido o lema, vamos demonstrar que $vi) \implies vii)$.
Seja $\{a_k\}_{k \in \Lambda}$ uma rede de números reais tal que $a_k \leq T(g)$, $\forall k \in \Lambda$ e $\lim_{k \in \Lambda} a_k = T(g)$.

Logo por $vi)'$ (equivalente a $vi)$) temos que

$$\forall k \in \Lambda, \quad \exists n_k \text{ tal que } T(g \wedge n_k - g \wedge \frac{1}{n_k}) \geq a_k. \quad (3)$$

Do lema 2.2 segue que $\exists j_k \in \Lambda$ tal que

$$g \wedge n_k - g_i \leq \frac{1}{n_k}, \quad \forall j \geq j_k$$

isto é

$$g \wedge n_k - g \wedge \frac{1}{n_k} \wedge g_j, \quad \forall j \geq j_k \quad (4)$$

logo como T é monótona usando (3) e (4) obtemos

$$a_k \leq T(g \wedge n_k - g \wedge \frac{1}{n_k}) \leq T(g_j), \quad \forall j \geq j_k.$$

Como $\lim_{k \in \Lambda} a_k = T(g)$ segue que

$$T(g) \leq \liminf_{j \in \Lambda} T(g_j) = \text{vii}).$$

Suponhamos agora vii) válida. $\{g \wedge n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sendo uma sequência é em particular uma rede. Obviamente

$$(g \wedge n) \wedge k \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{uniformemente}} g \wedge k, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

pois para qualquer $k \in \mathbb{N}$ se $n \geq k$ $(g \wedge n) \wedge k = g \wedge k$. Pela vii)

$$T(g) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} T(f \wedge n).$$

Como $g \wedge n$ cresce, o limite inferior é um limite pois T é monótono. Como $g \wedge n \leq g$. Segue

$$T(g) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(g \wedge n) = iv).$$

Utilizando $g_n = g \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n}$ sai v).

Provemos agora o lema:

DEMONSTRAÇÃO (Lema 2.2). Seja $g_j \wedge k \xrightarrow{\text{unif}} g \wedge k$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Vamos provar primeiro que a hipótese implica a seguinte condição

$$\inf_X g \leq \liminf_{j \in D} [\inf_X g_j] \quad (5)$$

Sejam $\ell < \inf_X g$ e $\varepsilon < |\inf_X g - \ell|$.

Caso $\inf_X g = +\infty$ como tenha convergência uniforme e segue

que $\liminf_{j \in D} [\inf_X g_j] = +\infty$. Suponhamos então que é finito.

Seja $k \in \mathbb{N}$, $k > 2 \inf_X g$. Se $\forall j \in D$, $\inf_X g_j \geq k$ o resultado é trivial. Caso contrário utilizamos a hipótese e achamos $j_0 \in \Lambda$ tal que

$$\sup_X |g_{j_0} \wedge k - g \wedge k| < \varepsilon, \quad \forall j \geq j_0$$

dai

$$g_{j_0}(x) \wedge k > g(x) \wedge k - \varepsilon, \quad \forall j \geq j_0, \quad \forall x \in X$$

donde segue que $\inf_X g_j \geq \inf_X g - \varepsilon = \ell$, $\forall j \geq j_0$

logo $\inf_X g \leq \liminf_{j \in D} [\inf_X g_j]$.

Provemos então que $(5) \Rightarrow (2)$.

Observamos primeiramente que na prova de (5) a partir da convergência uniforme poderíamos ter utilizado qualquer subconjunto A de X ao invés de X na propriedade (5) e o resultado continuaria válido.

Seja então $\varepsilon > 0$ e $k \in \mathbb{N}$. Existe uma partição finita de X , $\{C_j\}_{j=1}^r$ por conjuntos não vazios e disjuntos e $a_j \in [0, +\infty)$ tal que

$$0 \leq g \wedge k - \sum_{j=1}^r a_j \varphi_{C_j} \leq \varepsilon \quad (6)$$

Para ver isso tome $s > 0$ tal que $1/s < \varepsilon$ e para cada $j = 1, \dots, k \cdot s$ tome $C_j = \{x \in X : \frac{j-1}{s} \leq g(x) < \frac{j}{s}\}$, $r = k \cdot s + 1$

e $C_{ks+1} = \{x \in X : g(x) \geq k\}$. Tomamos então $a_j = \frac{j-1}{s}$ e daí

$k \cdot s + 1$

$\sum_{j=1}^r a_j \varphi_{C_j}$ satisfaz as condições.

Como por construção $\sum_{j=1}^r a_j \varphi_{C_j} \leq g \wedge k$ segue que $a_j \varphi_{C_j} \leq g$

$\Rightarrow a_j \leq g(x)$, $\forall x \in C_j$. Logo

$$a_j \leq \inf_{C_j} (g) \leq \liminf_{i \in \Lambda} [\inf_{C_j} (g_i)] \quad \text{por (5)} \quad \forall 1 \leq j \leq r.$$

Logo $\exists i_0 \in \Lambda$ tal que $\forall i \geq i_0$

$$a_j - \varepsilon \leq \inf_{C_j} (g_i) \quad , \quad \forall i \geq i_0 \quad , \quad \forall j \quad (7)$$

De (6) e (7) segue que $\forall i \geq i_0$

$$g \wedge k - g_i \leq \sum_{j=1}^r a_j \varphi_{C_j} + \varepsilon - \sum_{j=1}^r g_i \varphi_{C_j} \leq \sum_{j=1}^r (a_j - \inf_{C_j} (g_i)) \varphi_{C_j} +$$

$$+ \varepsilon \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \quad \text{e portanto}$$

$$\limsup_{i \in \Lambda} [\sup_X (g \wedge k - g_i)] \leq 0. \quad \blacksquare$$

Observamos que vii) nada mais é que um Lema de Fatou para as integrais monótonas. Neste caso necessita-se de uma hipótese mais forte que a convergência pontual, isto é, convergência uniforme em cada conjunto onde a função limite é limitada.

Vamos considerar agora um tipo de convergência que é equivalente a esta convergência "uniforme".

Sejam $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ e $f, g \in \overline{\mathbb{R}}^X = \{h : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}\}$. Observamos que $\overline{\mathbb{R}}^X$ não é um espaço vetorial sobre $\overline{\mathbb{R}}$. Vamos definir uma distância Δ sobre $\overline{\mathbb{R}}^X$ e provar que $(\overline{\mathbb{R}}^X, \Delta)$ é completo. A distância é dada por:

$$\Delta(f, g) = \sup_X |\arctg(f(x)) - \arctg(g(x))| \quad (8)$$

Fazemos uso do arco tangente para trazer pontos que estão no infinito para distância finita. É fácil ver que Δ é uma métrica. Além disso como é uma métrica de supremo o espaço é completo. Note que as funções são quaisquer.

Além disso nas partes compactas ou seja conjuntos limitados $f_n \xrightarrow{\Delta} f$ se, e somente se (see) $(-a \vee f_n) \wedge a \xrightarrow{\text{unif.}} (a \vee f) \wedge a$. (veja [6]). Observamos que se $f_n, f \geq 0$, isto equivale às hipótese de vii). Chamamos a convergência na métrica Δ de *convergência uniforme em $\mathbb{R}^X$* e temos então o resultado.

LEMA 2.3 (Lema de Fatou). Se T é a integral monótona sobre IB , $f_n, f \in IB$ e $f_n \xrightarrow{\Delta} f$ então

$$T(f) \leq \liminf_n T(f_n)$$

Todos estes resultados continuam válidos para redes ao invés de sequências.

Citaremos agora outros resultados importantes sobre convergência das integrais monótonas (veja [9]).

Sejam $T : [0, +\infty]^X$ e $\{f_j\}_{j \in \Lambda}$, f e $g \in [0, +\infty]^X$. Se ocorre $T(g) < +\infty$, $f_j \leq g$, $\forall j \in \Lambda$ e $\limsup_{i \in \Lambda} [\sup_A f_i] \leq \sup_A f$

$\forall A \subset X$, então $T(f) \geq \limsup_{i \in \Lambda} T(f_i)$.

A partir destes fatos podemos facilmente demonstrar o seguinte teorema:

TEOREMA 2.4 (Convergência Dominada). Sejam $T : \mathbb{B} \longrightarrow [0, +\infty]$ IM, $\{f_j\}_{j \in \Lambda} \subset \mathbb{B}$, $f, g \in \mathbb{B}$ tal que $f_j \xrightarrow{\Delta} f$, $f_j \leq g$, $\forall j \in \Lambda$ e $T(g) < +\infty$. Então

$$T(f) = \lim_{j \in \Lambda} T(f_j) \quad (9)$$

Este é o teorema da convergência dominada para integrais monótonas. Como no Lema de Fatou a condição exigida foi a convergência uniforme. O teorema de convergência monótona também é válido no caso de convergência uniforme.

A definição de uma integral monótona é simples e clara e fornece alguns resultados importantes sem a necessidade de muitos pré-requisitos. Mas esta definição é difícil de ser utilizada em muitas aplicações. Vamos agora mostrar que existe uma outra forma mais natural e mais manuseável.

As condições da definição de IM são independentes, isto é, podemos achar (facilmente) exemplos de funcionais que satisfazem 4 e apenas 4 das condições da definição (ver [5]). Por exemplo, seja $f \in [0, +\infty]^X$ tal que $\{f = T\} \neq \emptyset, \forall T \in (0, +\infty)$. Seja $\mathbb{B}_f = \{\mu(f \wedge a - f \wedge b) : \mu, a, b \in [0, +\infty], \mu < +\infty, a > b\}$. $\mathbb{B}_f$ é um domínio de integração e $T : \mathbb{B}_f \longrightarrow [0, +\infty)$

$$T(\mu(f \wedge a - f \wedge b)) = \begin{cases} 0 & \text{se } a < +\infty \\ \mu & \text{se } a = +\infty \end{cases}$$

T é uma função que verifica i), ii) iii) e v) mas não verifica iv).

Observamos que B_f é o menor domínio de integração que contém f e por isso é denominado *domínio de integração gerado por f* .

Vamos demonstrar agora que as condições i) $\longrightarrow$ v) da definição 2.1 são consistentes constituindo exemplos de IM não triviais ($T \equiv 0$). Os resultados principais da teoria das Integrais Monótonas foram desenvolvidas por Greco ([5,9]) e muitos deles necessitam de argumentos longos para serem demonstrados. Por causa disso alguns dos resultados aqui apresentados não serão provados.

O teorema seguinte é básico para toda a teoria. Ele estuda uma classe muito importante e abrangente de integrais monótonas.

TEOREMA 2.5. Se $\alpha: P(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ é monótona, então existe uma única integral monótona $T: [0, +\infty]^X \longrightarrow [0, +\infty]$ que satisfaz $T(\varphi_B) = \alpha(B)$ onde $B \subset X$. Além disso T é dada por

$$T(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha\left\{f > \frac{i}{2^n}\right\} \quad (10)$$

DEMONSTRAÇÃO. Vamos primeiro provar que o funcional $S: [0, +\infty]^X \longrightarrow [0, +\infty]$ dado por

$$S(f) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha(H_i) : \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_{H_i} \leq f, H_i \supset H_{i+1}, \right. \\ \left. \lambda_i \neq 0, \forall i \text{ e } H_1 \subset X \right\} \quad (11)$$

é uma integral monótona que satisfaz $S(\varphi_B) = \alpha(B)$, $\forall B \subset X$.

OBSERVAÇÃO. φ_B denota a função característica do conjunto B .

$$\text{Se } \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_{H_i} \leq \varphi_H \text{ com } H_i \supset H_{i+1}$$

então

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \leq 1 \text{ e } H_i \subset H, \forall i, 1 \leq i \leq n. \text{ Logo}$$

$$\sum \lambda_i \alpha(H_i) \leq \sum \lambda_i \alpha(H) \leq \alpha(H) \text{ pois } \alpha \text{ é monótona.}$$

Logo $S(f) \leq \alpha(H)$. Mas obviamente $\varphi_H \leq \varphi_H$ e $S(f) \geq \alpha(H)$ donde vale a igualdade. Vamos agora provar i) a v).

$$i) S(\lambda g) = \sup \{ \sum \lambda_i \alpha(H_i), H_{i+1} \subset H_i, \sum \lambda_i \varphi_{H_i} \leq \lambda g \dots \} =$$

$$\sup \{ \lambda \sum \frac{\lambda_i}{\lambda} \alpha(H_i), H_{i+1} \subset H_i, \\$$

$$\sum \frac{\lambda_i}{\lambda} \varphi_{H_i} \leq g \dots \} = \lambda S(g), \text{ se } \lambda \neq 0.$$

Se $\lambda = 0$, o resultado é óbvio.

ii) $g \leq f \implies$ se $\sum \lambda_i \varphi_{H_i} \leq g$ então $\sum \lambda_i \varphi_{H_i} \leq f$, logo
 $S(g) \leq S(f)$.

iii) Seja $h = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_{H_i} \leq g$ e $\lambda \in (0, +\infty)$.

Se $\sum \lambda_i \varphi_{H_i} \leq g \wedge \lambda$ defino $h_1 = \sum \lambda_i \varphi_{H_i}$ e $h_2 = 0$

Se $\sum \lambda_i \varphi_{H_i} \leq g \vee \lambda - \lambda$ defino $h_1 = 0$ e $h_2 = \sum \lambda_i \varphi_{H_i}$

Caso contrário existe $0 \leq i_0 \leq n$ tal que $\sum_{i=1}^{i_0} \lambda_i \leq \lambda$ e

$\sum_{i=1}^{i_0+1} \lambda_i > \lambda$. Caso $i_0 = 0$ a primeira soma é definida como 0. As

sim $h_1 = \sum_{i=0}^{i_0} \lambda_i \varphi_{H_i} + (\lambda - \sum_{i=1}^{i_0} \lambda_i) \varphi_{H_{i_0+1}} \leq g \wedge \lambda$ e

$h_2 = (\sum_{i=1}^{i_0+1} \lambda_i - \lambda) \varphi_{H_{i_0+1}} + \sum_{i=i_0+1}^n \lambda_i \varphi_{H_i} \leq g \vee \lambda - \lambda$.

De qualquer forma obtemos $h_1 \leq g \wedge \lambda$, $h_2 \leq g \vee \lambda - \lambda$ ambos do tipo $\sum \lambda_{i,j} \varphi_{B_{i,j}} \leq h_j$, $j=1,2$ tal que $B_{i+1,j} \supset B_{i,j}$ e $h_1 + h_2 = h$. Isto implica em $S(g) \leq S(g \wedge \lambda) + S(g \vee \lambda - \lambda)$.

Por outro lado se $\sum \lambda_i \varphi_{H_i} \leq g \wedge \lambda$ e

$\sum \beta_j \varphi_{K_j} \leq g \vee \lambda - \lambda$ então

como $\beta_1 > 0 \implies g > \lambda$ em $K_1 \implies \sum \lambda_i \varphi_{H_i \cup K_1} \leq g \wedge \lambda$ e daí

$\sum \lambda_i \varphi_{H_i} \cup K_1 + \sum \beta_j K_j \leq g$ e está na forma da definição de g e portanto $S(g \wedge \lambda) + S(g \vee \lambda - \lambda) \leq S(g)$ e portanto vale a igualdade.

iv) Se $\sum \lambda_i \varphi_{H_i} \leq g$ tome $n \in \mathbb{N}$, $n > \sum \lambda_i$ daí

$$\sum \lambda_i \varphi_{H_i} \leq g \wedge n. \text{ Logo } S(g) \leq \sup_n S(g \wedge n) \text{ e como } S$$

é monótona $S(g) = \lim_n S(g \wedge n)$.

v) Seja $\sum \lambda_i \varphi_{H_i} \leq g$.

Se $\alpha(H_1) = +\infty$ escolha $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \lambda_1$. Dai

$$\begin{aligned} \forall n \geq n_0, \quad g \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n} &= (\lambda_1 - \frac{1}{n}) \varphi_{H_1} + \sum_{i \neq 1} \lambda_i \varphi_{H_i} \leq (\lambda_1 - \frac{1}{n}) \alpha(H_1) + \\ &+ \sum_{i \neq 1} \lambda_i \alpha(H_i) = +\infty \end{aligned}$$

$$\text{e } \lim_{n \rightarrow \infty} S(g \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n}) = S(g).$$

Caso contrário tome o mesmo n_0 . Dai

$$\forall n > n_0 \quad (\sum \lambda_i \varphi_{H_i}) \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = (\lambda_1 - \frac{1}{n}) \varphi_{H_1} + \sum_{i \neq 1} \lambda_i \varphi_{H_i} \leq g \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow (\lambda_1 - \frac{1}{n}) \alpha(H_1) + \sum_{i \neq 1} \lambda_i \alpha(H_i) \leq S(g \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n}).$$

Fazendo $n \rightarrow +\infty \Rightarrow \sum \lambda_i \alpha(H_i) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} S(g \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n})$ donde $S(g) \leq \lim_n S(g \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n})$.

Como S é monótona sai a igualdade.

Logo S é uma IM que satisfaz as hipóteses do teorema. Vamos agora demonstrar a unicidade e a fórmula (10).

Se $f = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_{H_i}$, $H_i \supset H_{i+1}$, $\lambda_i > 0$ então

$$T(f) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha(H_i) \quad (12)$$

Para ver isto tome $\lambda = \lambda_1$ e use iii) da def. 2.1.

$$T(f) = T(f \wedge \lambda) + T(f \wedge \lambda - \lambda) = \lambda_1 \alpha(H_1) + T(\sum_{i \neq 1} \lambda_i \varphi_{H_i})$$

$$f \wedge \lambda = f \wedge \lambda_1 = \lambda_1 \varphi_{H_1}$$

e use indução.

Se ainda $f = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \varphi_{H_i}$, $H_i \supset H_{i+1}$, $\lambda_i > 0$, então

$$T(f) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \alpha(H_i). \quad (13)$$

Isto porque $f_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_{H_i}$ satisfaz $f_n \xrightarrow{\wedge} f$ e de vii) da definição 2.1.

$$T(f) \leq \lim_n \inf T(f_n) = \lim_n \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha(H_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \alpha(H_i)$$

e por monotonicidade segue a igualdade.

Seja agora $f \in [0, +\infty]^X$ e $f_n = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \varphi\{f > i/2^n\}$. En-

tão por (13) $T(f_n) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \alpha\{f > i/2^n\}$.

Além disso $\forall k \in \mathbb{N}$, $f_n \wedge k \xrightarrow{\inf} f \wedge k$ pois se $n > k$,
 $\sup_X |f - f_n| \leq \frac{1}{2^n}$, logo pelo lema de Fatou

$$T(f) \leq \liminf_n T(f_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha\{f > i/2^n\}.$$

O limite existe porque f_n é uma sequência monótona. Além

disso $f_n \leq f$ donde $T(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha\{f > i/2^n\}$, com

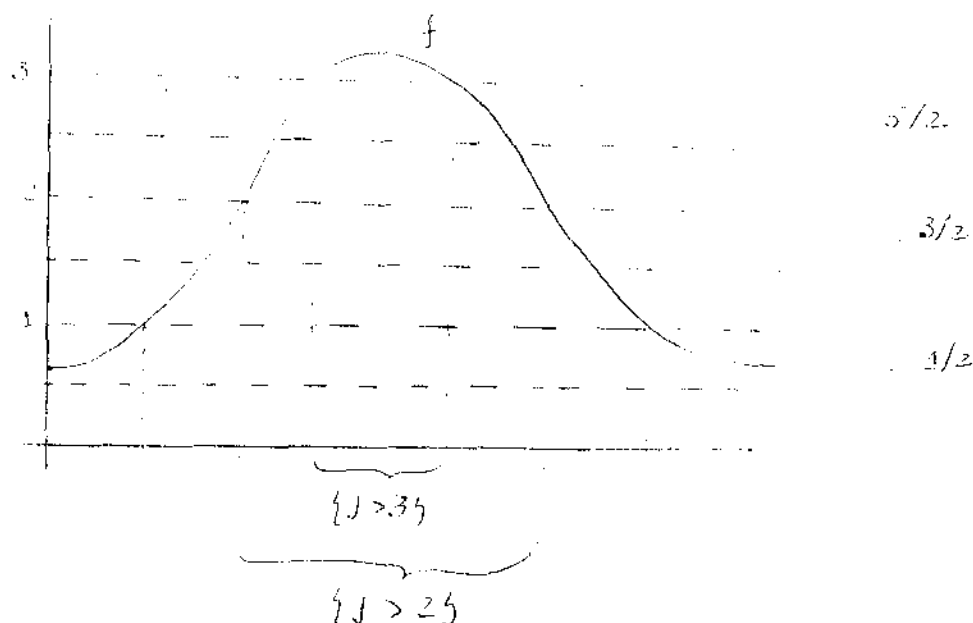
isso provamos que T satisfaz a fórmula (10) e portanto como o limite em (10) está bem definida a integral é única. ■

Notamos que este resultado mostra a grande semelhança existente entre a integral monótona e a integral de Lebesgue. Partimos de uma definição axiomática e chegamos a um objeto que é efetivamente uma integral.

A fórmula (10) é interessante porque ela mostra que a IM depende somente do valor de α na imagem inversa por f de intervalos do tipo $(i/2^n, +\infty]$ onde $i, n \in \mathbb{N}$. No caso da integral de Lebesgue o procedimento é separar o domínio em partes disjuntas. Vejamos a figura seguinte:

$$X = \mathbb{R}^+ , \quad \alpha(A) = \inf_{B \supset A} |b - a|$$

B intervalo , $B = [a, b)$ (b pode ser $+\infty$)



No primeiro estágio somamos as medidas dos conjuntos $\{f > 1\}$, $\{f > 2\}$, etc. e dividimos por 2; no segundo estágio haverá uma partição maior nos valores de f e assim por diante.

Vejamos agora um exemplo elementar que nos mostrará também a generalidade da IM: o conjunto X é qualquer e a função α é qualquer desde que seja monótona.

EXEMPLO 1. Seja $X = \{1, 2\}$ e $\alpha : P(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ dada por

$$\alpha(\emptyset) = 0 \qquad \alpha(\{2\}) = 1$$

$$\alpha(\{1\}) = 0 \qquad \alpha(\{1, 2\}) = 2.$$

Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 2.$$

Usando a fórmula (10) chegamos a $T(f) = 4$. Mais geralmente, se f é finita, $f = \lambda_1 \varphi\{1\} + \lambda_2 \varphi\{2\}$ e do teorema $T(f) = \lambda_1 \alpha(\{1\}) + \lambda_2 \alpha(\{2\}) = 2\lambda_2$.

Indicamos a T do teorema 2.5 por $\int_{X^*} d\alpha$ isto é:

$$\int f d\alpha := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha\left\{f > \frac{i}{2^n}\right\}, \forall f \in [0, +\infty]^X \quad (14)$$

Note que calculamos a integral de qualquer função positiva. Isto foi possível porque α está definida em qualquer subconjunto de X . Há maior facilidade, portanto pois por exemplo se $f_n \xrightarrow{\text{pontual}} f$ então existe $\int_X f d\alpha$ e o importante é o tipo de função limite e o tipo de convergência.

Vamos mencionar agora algumas propriedades importantes e simples da IM dada por (14)

$$1) \int_X f d\alpha \geq \varepsilon \alpha\{f > \varepsilon\} \quad \text{para} \quad \forall f \in X^*, \quad \forall \varepsilon \geq 0$$

OBSERVAÇÃO. Convencionamos $0 \cdot \infty = 0$.

$$2) \text{ Se } \{g_j\}_{j \in \Lambda} \subset X^* \text{ e } g \in X^* \text{ e } g_j \xrightarrow{\text{unif.}} g$$

e existe $f \in [0, +\infty]^X$ e $\lambda \in (0, +\infty)$ tal que $g_j \leq f$, $\forall j \in \Lambda$
e $\int_X f \wedge \lambda \, d\alpha < +\infty$, então

$$\int_X g \, d\alpha = \lim_{j \in \Lambda} \int_X g_j \, d\alpha.$$

Vamos provar este resultado que é o Teorema da Convergência dominada para integrais monótonas.

DEMONSTRAÇÃO de 2) Já sabemos que $\int_X g \, d\alpha \leq \liminf_{j \in \Lambda} \int_X g_j \, d\alpha$ pelo Lema de Fatou. Sejam então $\delta < \limsup_{j \in \Lambda} \int_X g_j \, d\alpha$ e $\varepsilon > 0$. Como $g_j \xrightarrow{\Delta} g$, $\exists j(\varepsilon) \in \Lambda$, tal que

$$g_{j(\varepsilon)} \leq g + \varepsilon \quad \text{e} \quad \delta \leq \int_X g_{j(\varepsilon)} \, d\alpha. \quad \text{Então}$$

$$\delta \leq \int_X g_{j(\varepsilon)} \, d\alpha = \int_X (g_{j(\varepsilon)} \wedge \varepsilon) \, d\alpha + \int_X (g_{j(\varepsilon)} \vee \varepsilon - \varepsilon) \, d\alpha \leq$$

$$\leq \int_X f \wedge \varepsilon \, d\alpha + \int_X g \, d\alpha \quad \text{pois} \quad 0 \leq g_{j(\varepsilon)} \wedge \varepsilon - \varepsilon \leq g. \quad \text{Como}$$

$$\int_X f \wedge \lambda \, d\alpha < +\infty \quad \text{então} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_X f \wedge \varepsilon \, d\alpha = 0 \quad \text{pois}$$

$$T(f \wedge \lambda) = T(f \wedge \lambda \wedge \frac{1}{n}) + T(f \wedge \lambda \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n}) \quad \text{e como}$$

$$\lim_{\rightarrow \infty} T(f \wedge \lambda \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n}) = T(f \wedge \lambda) < +\infty \quad \text{segue que}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(f \wedge \lambda \wedge \frac{1}{n}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} T(f \wedge \varepsilon) = 0.$$

Logo $\delta \leq \int_X g d\alpha$ pois ε é arbitrário e daí $\limsup_A \int_X g_j d\alpha \leq \int_X g d\alpha$. Logo vale a igualdade. ■

3) Seja $g \in [0, +\infty]^X$ e $\int_X g d\alpha < +\infty$. Dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $\alpha(B) < \delta \implies \int_B g d\alpha = \int_X g \chi_B d\alpha < \varepsilon$. Este resultado será utilizado na idéia de convergência quase uniforme. Para demonstrá-lo note que pela hipótese e por iv) da Definição 2.1

$$\lim_n T(g \vee n - n) = 0. \text{ Logo } \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que}$$

$T(g \vee n_0 - n_0) < \varepsilon/2$. Tome $\delta = \varepsilon/2n_0$, daí se $\alpha(B) < \delta$ temos

$$\int_B g d\alpha = \int_B (g \wedge n_0) d\alpha + \int_B (g \vee n_0 - n_0) d\alpha < n_0 \alpha(B) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

4) Dois fatos interessantes são que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \alpha\{f > T + \varepsilon\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \alpha\{f \geq T + \varepsilon\}$, $\forall T \in (0, +\infty)$ e como $\alpha\{f > T\}$ e $\alpha\{f \geq T\}$ são monótonas decrescentes como funções de T então tem no máximo um número enumerável de descontinuidades e segue que $\{T : \alpha\{f > T\} \neq \alpha\{f \geq T\}\}$ é no máximo enumerável.

Vejamos agora mais alguns exemplos de $\mathcal{IM}$ do tipo (14):

EXEMPLO 2: Sejam $X \neq \emptyset$ um conjunto e F um filtro de $\mathcal{P}(X)$. Definimos $\alpha_F, \beta_F : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \{0,1\}$ por

$$\alpha_F(H) = \begin{cases} 1 & \text{se } H \in F \\ 0 & \text{se } H \notin F \end{cases} \quad (15)$$

$$\beta_F(H) = \begin{cases} 1 & \text{se } H \cap B \neq \emptyset, \quad \forall B \in F \\ 0 & \text{se } \exists B \in F, \quad H \cap B = \emptyset \end{cases}$$

Neste caso, se $f \in [0, +\infty]^X$ então

$$\int_X f d\alpha_F = \liminf_F f, \quad \int_X f d\beta_F = \limsup_F f. \quad (16)$$

Vamos provar primeiro que se $\gamma : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \{0,1\}$ é monótona, então

$$\int_X f d\gamma = \sup_{h \in (0, +\infty)} \{h : \gamma\{f > h\} = 1\} \quad (17)$$

Chamaremos o sup acima de s . Se $s = +\infty$ a igualdade é óbvia, caso contrário temos

$$2^n - 1 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \gamma\left\{f > \frac{i \cdot s}{2^n}\right\} \leq 2^n.$$

Dividindo por 2^n e passando ao limite temos,

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s}{2^n} \sum_{i=1}^{\infty} \gamma\left\{f > \frac{i \cdot s}{2^n}\right\} = \int_X f d\gamma$$

pois $\int_X f d\gamma$ é igual também a $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha\left\{f > \frac{i}{\lambda}\right\}$

A partir disto, tome $B \subset X$, $B \neq \emptyset$ e defina

$\alpha_B : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \{0,1\}$ por

$$\alpha_B(H) = \begin{cases} 1 & \text{se } B \subset H \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Logo $\int_X f d\alpha_B = \sup_{h \in (0, +\infty)} \{\alpha_B\{f > h\} = 1\} = \inf_{x \in B} f(x)$. Como

$$\alpha_B \leq \alpha_F, \quad \forall B \in \mathcal{F} \quad \text{segue} \quad \int_X f d\alpha_B \leq \int_X f d\alpha_F \implies \inf_{x \in B} f(x) \leq$$

$$\leq \int_X f d\alpha_F, \quad \forall B \in \mathcal{F} \implies \liminf_F f \leq \int_X f d\alpha_F.$$

Por outro lado, quando $\{f > h\} \in \mathcal{F} \implies \liminf_F f \geq \inf_{x \in \{f > h\}} f(x) \geq h \implies \liminf_F f \geq \int_X f d\alpha_F$ por (17) e definição de α_F donde sai o resultado.

A prova para a função β_F é análoga.

Quando $\mathcal{F}$ é ultrafiltro $\alpha_F = \beta_F$ e portanto existe $\lim_F f$ para qualquer ultrafiltro de $\mathcal{P}(X)$.

O seguinte resultado é importante para a teoria das integrais monótonas (veja [5,9]).

PROPOSIÇÃO 2.6. Seja $N = \{\alpha \in [0, +\infty]^{P(X)} : X \neq \emptyset : \alpha \text{ é monótona}\}$. N é um domínio de integração. Seja $T_f : N \longrightarrow [0, +\infty]$, $f \in X^*$ dada por

$$T_f(\alpha) = \int_X f d\alpha$$

Então T_f é integral monótona, linear e semicontinua inferiormente, isto é, se $\alpha \leq \liminf_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n$ ($\equiv \alpha(B) \leq \liminf_n \alpha_n(B), \forall B \subset X$) então

$$\int_X f d\alpha \leq \liminf_n \int_X f d\alpha_n.$$

Além disso, existe um outro resultado importante:

PROPOSIÇÃO 2.6.a. Sejam $\beta, \alpha : P(X) \longrightarrow [0, \infty]$ monótonas $X \neq \emptyset$. Então valem os seguintes resultados:

1) se $\exists D \subset (0, +\infty)$ denso em $(0, +\infty)$ tal que $\alpha\{f > T\} = \beta\{f > T\}$ para $\forall T \in D$ então $\int_X f d\alpha = \int_X f d\beta$.

2) se $\alpha \leq \beta$ e $\int_X f d\alpha < +\infty$ então $\int_X f d\alpha = \int_X f d\beta \iff$

$\exists D$ denso em $(0, +\infty)$ tal que $\alpha\{f > T\} = \beta\{f > T\}$, $\forall T \in D$.

DEMONSTRAÇÃO. Provaremos somente (1) que é básico para o parágrafo seguinte. Pela hipótese, se $i, n \in \mathbb{N}$, $\exists t_{i,n} \in D$ tal que

$$i/2^n \leq t_{i,n} < \frac{i+1}{2^n} \quad e$$

$$\alpha\{f > t_{i,n}\} = \beta\{f > t_{i,n}\} . \quad \text{Logo}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha\{f > t_{i,n}\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{\infty} \beta\{f > t_{i,n}\} . \quad (18)$$

Por outro lado

$$f \vee \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{\infty} \varphi\{f > t_{i,n}\} \leq f .$$

Portanto, utilizando v) da definição 2.1 se obtêm

$$\begin{aligned} \int_X f d\alpha &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha\{f > t_{i,n}\} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{\infty} \beta\{f > t_{i,n}\} = \int_X f d\beta . \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2.2. EXTENSÕES DE INTEGRAIS.

Vamos agora definir a integral $\int_X \cdot d\alpha$ onde α está definida numa subclasse de conjuntos de $P(X)$. Para tanto, vamos estender α a $P(X)$ e provar que a integral está bem definida.

Seja $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$ com $\phi \in \mathcal{H}$ e

$$\mathcal{IB}_{\mathcal{H}} = \{f \in [0, +\infty]^X : \exists D \text{ denso em } (0, +\infty) \text{ com} \\ \{f > T\} \in \mathcal{H}, \quad \forall T \in D\}.$$

A notação $\mathcal{H} \subset \mathcal{IB} \subset [0, +\infty]^X$ indica que $\mathcal{IB} \subset [0, +\infty]^X$ e que as funções características dos conjuntos de $\mathcal{H}$ estão em $\mathcal{IB}$. Temos válida a seguinte proposição.

PROPOSIÇÃO 2.7. *Sejam $\mathcal{H}$ e $\mathcal{IB}_{\mathcal{H}}$ como acima e $\mathcal{IB}$ tal que $\mathcal{H} \subset \mathcal{IB} \subset \mathcal{IB}_{\mathcal{H}}$. Se T_1 e T_2 são integrais monótonas sobre $\mathcal{IB}$ tais que $T_1(\varphi_B) = T_2(\varphi_B)$ qualquer $B \in \mathcal{H}$ então $T_1 = T_2$.*

DEMONSTRAÇÃO. Clara a partir da proposição anterior. ■

Vamos agora desenvolver uma relação entre a integral monótona e a integral de Riemann (ou Lebesgue).

Seja I a família dos intervalos de $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$. Seja $\ell : I \longrightarrow [0, +\infty)$ definida por:

$$\ell(I) = \begin{cases} 0 & \text{se } I = \phi \\ +\infty & \text{se } I \text{ é ilimitado} \\ |b-a| & \text{se } a \text{ e } b \text{ são os extremos de } I. \end{cases}$$

então tem sentido escrever $\int_{(0, +\infty)} \varphi d\ell$ para qualquer $\varphi \in \mathcal{IB}_I$.

Tome ℓ' extensão monótona de ℓ a $P(X)$ e faça

$$\int_{(0,+\infty)} \varphi d\ell := \int_{(0,+\infty)} \varphi d\ell' \quad (19)$$

Pela proposição 2.7 o segundo membro independe de ℓ' e portanto $\int_{(0,+\infty)} \varphi d\ell$ é bem definida.

Temos o resultado abaixo:

TEOREMA 2.8. Se $f \in \mathbb{B}_I$ então $\int_X f d\ell$ é a integral de Riemann ou Lebesgue de f .

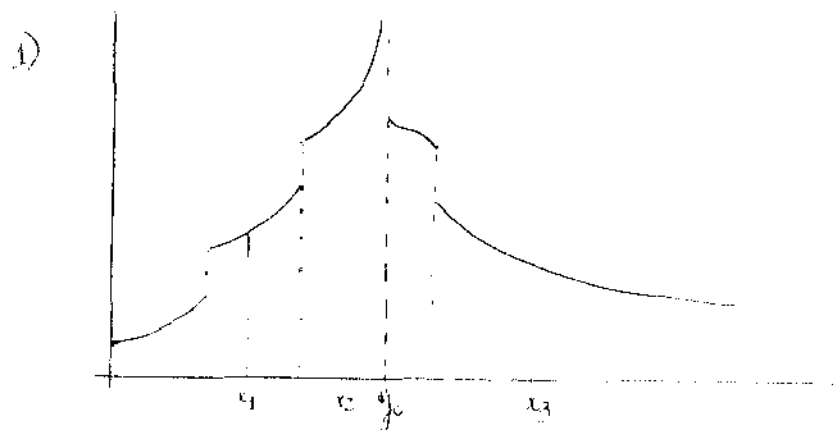
DEMONSTRAÇÃO. Seja $f \in \mathbb{B}_I$ e suponha que existe $x \in (0,+\infty)$ tal que $\liminf_{y \rightarrow x^+} f(y) \neq \limsup_{y \rightarrow x^+} f(y)$. Logo $\liminf_{y \rightarrow x^+} f(y) < \delta < +\infty$.

Seja $\varepsilon > 0$ tal que $\delta + \varepsilon < \limsup_{y \rightarrow x^+} f(x)$. Pelas definições de

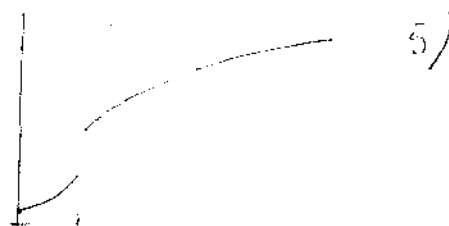
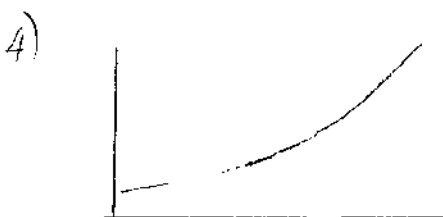
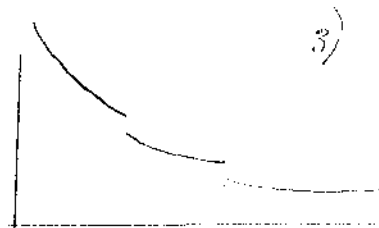
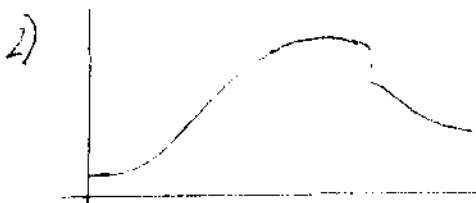
$\liminf$ e $\limsup$ isto implica que existe $y_n \rightarrow x^+$ tal que $f(y_n) < \delta$ e $y'_n \rightarrow x^+$ tal que $f(y'_n) > \delta + \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Como por hipótese existe $T \in (\delta, \delta + \varepsilon)$ tal que $A = \{f > T\} \in I$, isto é um intervalo, obtemos uma contradição. Logo para $x \in (0,+\infty)$ existe $\lim_{y \rightarrow x^+} f(y)$. O mesmo vale pelo limite à esquerda e assim f

possui limites laterais em todos os pontos de $(0,+\infty)$. Isto implica que f tem um número no máximo enumerável de descontinuidades. (veja [4]).

Suponha que existem $x_1 < x_2 < x_3$ com $f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$. Pela hipótese sobre f , f é limitada com $(0, x_1)$ e $(x_3, +\infty)$ e é monótona crescente e decrescente respectivamente nestes intervalos. Se f não é limitada, existe um $y_0 \in (x_1, x_3)$ com limite lateral infinito. Não pode existir $y_1 \neq y_0$ com f tendo limite lateral infinito em y_1 senão $f \notin \mathbb{B}_T$. Neste caso f é monótona com $(0, y_0)$ e $(y_0, +\infty)$ e a figura abaixo ilustra um gráfico possível para f .



Fazendo análise como a anterior sobre o comportamento de f podemos provar que f é de um dos tipos abaixo, além do descrito acima:



De qualquer maneira como f tem um número enumerável de descontinuidades e no máximo um ponto com limite lateral infinito (este ponto pode ser 0 ou $+\infty$), então podemos pelo menos definir a integral imprópria de Riemann de f . Nos intervalos onde f é limitada, ela é exatamente a integral de Riemann (veja [4]). Além disso a integral de Lebesgue de f está bem definida e é igual a integral de Riemann imprópria de f . Denotamos $\int_R f d\ell$ a integral de Riemann imprópria ou Lebesgue de f e por $\int_S f d\ell$ a integral monótona de f . Notamos que $d\ell = dx$ usual.

Seja ℓ^* uma extensão de ℓ a $P(S)$, $S = [a, b]$. Então

$$\int_S f d\ell = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \ell^*(H_i) \mid H_i \supset H_{i+1}, \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_{H_i} \leq f \right\}.$$

$$\int_R f d\ell = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n r_i \cdot |a_i - a_{i-1}| \mid \text{onde } a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b \right.$$

$$\left. \text{e } r_i = \inf_{x \in [a_{i-1}, a_i]} f(x) \right\} \quad (\text{sentido de Riemann})$$

rearranjando $\sum_{i=1}^n r_i \varphi_{[a_{i-1}, a_i]}$, colocamos na forma pa-

drão dada em (11) e como ℓ^* é aditiva na álgebra dos interva-

los, o valor de $\sum_{i=1}^n r_i |a_i - a_{i-1}|$ é inalterado quando utilizamos

a fórmula (11). Logo $\int_R f d\ell \leq \int_S f d\ell$.

No caso em f é limitada (podemos tomar $f \wedge n$ e depois utilizamos a definição de integral de Riemann imprópria e o teorema da convergência monótona para o caso de f não limitada) temos

$$\int_R f d\lambda = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n r_i |a_i - a_{i-1}|, \quad a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b \right\} \quad e$$

$$r_i = \sup_{x \in [a_{i-1}, a_i]} f(x) \quad (\text{sentido de Riemann})$$

$$e \text{ se } \sum_{i=1}^t \lambda_i \varphi_{H_i} \leq f \implies \sum_{i=1}^t \lambda_i \varphi_{H_i} \leq \sum_{i=1}^n r_i \varphi_{[a_{i-1}, a_i]}$$

$$\text{donde } \sum_{i=1}^t \lambda_i \ell^*(H_i) \leq \sum_{i=1}^n r_i |a_{i-1} - a_i|$$

após um rearranjo no segundo membro para poder aplicar (12) ao cálculo das integrais monótonas. Dai aplicamos o supremo do lado esquerdo e infimo do lado direito $\int_S f d\lambda \leq \int_R f d\lambda$ donde resulta a igualdade.

Para estender o resultado para $(0, +\infty)$ utilizamos a definição de integral de Riemann e o teorema da convergência dominada para IM obtendo novamente a igualdade. ■

Este resultado é fundamental porque ele mostra que uma certa integral monótona é exatamente a integral de Riemann da função, um conceito clássico e totalmente conhecido ao passo que as IM são ainda abstratas para nós. Vamos mostrar ainda mais que toda integral monótona recai em $\int_{(0, +\infty)} \phi d\lambda$ que é a integral de Riemann de ϕ .

TEOREMA 2.9. Seja $\ell : I \longrightarrow [0, +\infty]$ como acima e $\alpha : P(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ monótona. Identificamos uma extensão ℓ' de ℓ a $P(X)$ com ℓ (isto é escrevemos ℓ também para esta função. Então

$$\int_X f d\alpha = \int_{(0, +\infty)} \alpha\{f > T\} d\ell(T) \quad , \quad \forall f \in [0, +\infty]^X \quad (20)$$

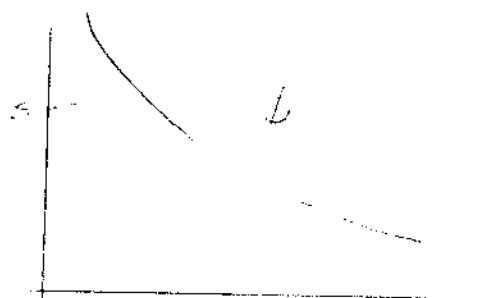
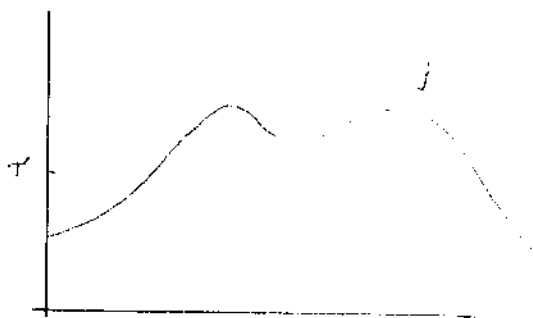
DEMONSTRAÇÃO. Como $\phi(T) = \alpha\{f > T\}$ é monótona decrescente, $\phi \in \mathbb{B}_I$ e a segunda integral sempre existe. Seja então $\alpha_s : P(X) \longrightarrow \{0, 1\}$

$$\alpha_s(H) = \begin{cases} 1 & \text{se } (H) > s \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{onde } s \in (0, +\infty)$$

Como vimos antes

$$\int_X f d\alpha_s = \sup_{T \in (0, +\infty)} \{T : \alpha_s\{f > T\} = 1\} = \sup_{T \in (0, +\infty)} \{T : \alpha\{f > T\} > s\}$$

$$= \sup_{T \in (0, +\infty)} \{T : \phi(T) > s\} = \ell\{\phi > s\} \quad \text{pois } \ell \text{ é decrescente.}$$



$$\begin{aligned} \text{Como } \int_{(0, +\infty)} \phi d\ell &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{\infty} \ell \left\{ \phi > \frac{i}{2^n} \right\} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_X f d\alpha_{i/2^n} \right) \text{ pelo anterior.} \end{aligned}$$

Definimos $\beta_k = \sum_{i=1}^k \alpha_{i/2^n}$, $\beta = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{i/2^n}$. Utilizando a linearidade da proposição 2.6 obtemos

$$\int_X f d\left(\sum_{i=1}^k \alpha_{i/2^n}\right) = \sum_{i=1}^k \int_X f d\alpha_{i/2^n}. \text{ Como } \beta(B) = \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k(B)$$

$\forall B \subset X$ o mesmo lema dá, lembrando que $\beta_k \leq \beta$, $\forall k \in \mathbb{N}$ e que β_k cresce, o seguinte resultado

$$\int_X f d\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{i/2^n}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_X f d\alpha_{i/2^n}$$

Logo

$$\int_{(0, +\infty)} \phi d\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \int_X f d\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{i/2^n}\right)$$

e utilizando o mesmo procedimento descrito acima

$$\int_{(0, +\infty)} \phi d\ell = \int_X f d\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{i/2^n}\right)$$

Como $\forall B \subset X$, $\alpha_{i/2^n}(B) = \alpha\{\varphi_B > i/2^n\}$ segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{i/2^n}(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha\{\varphi_B > \frac{i}{2^n}\} = \int_X \varphi_B d\alpha = \alpha(B)$$

de onde sai o resultado.

Com o auxílio deste teorema muitos dos cálculos para integrais monótonas são simplificados. Com o auxílio deste último teorema podemos provar facilmente as duas proposições seguintes:

PROPOSIÇÃO 2.10. Sejam I, ℓ como acima e $\phi_n, \phi, \psi : (0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty]$ decrescentes. Então valem os seguintes fatos:

$$1) \int_{(0, +\infty)} (\phi + \psi) d\ell = \int_{(0, +\infty)} \phi d\ell + \int_{(0, +\infty)} \psi d\ell$$

2) Se $\exists D$ denso em $(0, +\infty)$ tal que $\phi|_D = \psi|_D$ então as integrais com respeito a ℓ são iguais.

3) Se $\exists D$ denso em $(0, +\infty)$ tal que $\phi(T) \geq \limsup_n \phi_n(T)$,

$\forall T \in D$ e $\phi_n(T) \leq \psi(T)$, $\forall T \in D$ com $\int_{(0, +\infty)} \psi d\ell < +\infty$ então

$$\int_{(0, +\infty)} \phi d\ell \geq \limsup_n \int_{(0, +\infty)} \phi_n d\ell \quad . \quad \blacksquare$$

Usando estes fatos pode-se provar a seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO 2.11. Sejam α monótona tal que $\alpha(B_n) \uparrow \alpha(B)$ se $B_n \subset B_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = B$, $\forall B_n, B \subset P(X)$. Se $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, +\infty]^X$ e $f \in [0, +\infty]^X$ com $f_n \uparrow f$ então

$$\int_X f d\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\alpha \quad . \quad \blacksquare$$

Este é o teorema mais geral de convergência monótona para integrais monótonas. Notamos que a exigência de convergência uniforme foi substituída por convergência pontual com o preço de uma condição sobre a medida α . Um teorema similar é válido para sequências decrescentes de funções onde a primeira função tem integral finita.

2.3. TEOREMA DE REPRESENTAÇÃO

Vimos que $\int_X d\alpha$ é sempre uma integral monótona. Vamos agora demonstrar a implicação contrária deste fato, isto é, se $T : \mathcal{B} \longrightarrow [0, +\infty]$ é IM, então existe uma função de conjunto $\alpha : P(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ monótona tal que $T(f) = \int_X f d\alpha$, $\forall f \in \mathcal{B}$.

Dai dizemos que α representa T .

Vamos primeiro definir duas funções de conjuntos auxiliares. Seja

$$T : \mathcal{B} \longrightarrow [0, +\infty] \quad \text{IM} \quad , \quad \text{onde} \quad \mathcal{B} \subset [0, +\infty]^X$$

definimos $\alpha_T, \beta_T : P(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ por

$$\alpha_T(B) = \sup \{ T(f) : f \leq \varphi_B, \quad f \in \mathcal{B} \}$$

$$\forall B \subset X.$$

$$\beta_T(B) = \inf \{ T(f) : f \geq \varphi_B, \quad f \in \mathcal{B} \} \quad (21)$$

se não existe $f \in \mathcal{IB}$, $f \geq \varphi_B$ definimos $\beta_T(B) = +\infty$.

Temos então o seguinte resultado.

TEOREMA 2.12 (Teorema de Representação). Seja $T : \mathcal{IB} \longrightarrow [0, +\infty]$ IM. Então $\gamma : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ representa T se e só se $\alpha_T \leq \gamma \leq \beta_T$.

DEMONSTRAÇÃO ($\Rightarrow$). Seja $B \subset X$. Se $\nexists f \in \mathcal{IB}$, $f \geq \varphi_B$, então $\beta_T(B) = +\infty$ e $\gamma(B) \leq \beta_T(B)$ é trivial. Suponha que isto não é o caso e sejam

$$f_1 \leq \varphi_B \leq f_2 \quad \text{com} \quad f_1, f_2 \in \mathcal{IB}. \quad \text{Logo}$$

$$T(f_1) \leq T(\varphi_B) = \gamma(B) \leq T(f_2) \Rightarrow \alpha_T(B) \leq \gamma(B) \leq \beta_T(B).$$

($\Leftarrow$) Seja $B \subset X$. Se $f_1 \leq \varphi_B \leq f_2$, $f_1, f_2 \in \mathcal{IB}$, então

$$T(f_1) \leq \alpha_T(B) \leq \beta_T(B) \leq T(f_2) \quad \text{pela definição de } \alpha_T \text{ e } \beta_T.$$

Ainda mais, se

$$f_1 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_{H_i} \leq f_2, \quad f_1, f_2 \in \mathcal{IB}, \quad \lambda_i \geq 0, \quad H_i \supset H_{i+1}$$

então

$$T(f_1) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_T(B_i) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \beta_T(B_i) \leq T(f_2)$$

por (12) e definição α_T e β_T .

$$\text{Como } f \wedge n = f \wedge \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{n \cdot 2^n} \varphi\{f > i/2^n\} \leq f, \quad \forall f \in \mathcal{B}$$

então tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$ obtemos

$$T(f) = \int_X f d\alpha_T = \int_X f d\beta_T$$

Decorre que se γ é monótona e $\alpha_T \leq \gamma \leq \beta_T$, então

$$\forall f \in \mathcal{B} \implies \int_X f d\gamma = T(f) \quad \blacksquare$$

Este teorema reduz todas as integrais monótonas a integrais do tipo $\int_X d\alpha$ que são mais fáceis de serem estudadas.

Chamamos $B \subset X$ de *T-regular* se $\alpha_T(B) = \beta_T(B)$.

EXEMPLO 3. Sejam $X \neq \emptyset$ um conjunto e $\mathcal{F}$ filtro de $\mathcal{P}(X)$. Considere $\mathcal{B} = \{f : X \longrightarrow [0, +\infty] \text{ tal que } \exists \lim_{\mathcal{F}} f\}$. Então $\mathcal{B}$ é um domínio de integração e

$$T : \mathcal{B} \longrightarrow [0, +\infty]$$

$$T(f) = \lim_{\mathcal{F}} f$$

é uma integral monótona. Neste caso

$$\int_X f d\alpha_T = \liminf_F f \quad , \quad \forall f \in [0, +\infty]^X$$

$$\int_X f d\beta_T = \limsup_F f$$

e se $\mathcal{H}$ é a classe dos conjuntos T-regulares então

$$\mathcal{H} = \mathcal{F} \cup \{B \subset X \text{ tal que } B \cap H = \emptyset, \forall H \in \mathcal{F}\}.$$

Se chamamos $\delta_T = \alpha_{T/\mathcal{H}}$ então

$$\delta_T(B) = \begin{cases} 1 & \text{se } B \in \mathcal{F} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

2.4. LINEARIDADE E MENSURABILIDADE

Veremos agora um conceito de mensurabilidade e que a classe de funções mensuráveis têm boas propriedades. O resultado fundamental é que para funções mensuráveis a integral é linear.

DEFINIÇÃO 2.13. Seja $\alpha : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, \infty]$ monótona. Dizemos que $B \subset X$ é α -mensurável se

$$\alpha(H) = \alpha(B \cap H) + \alpha(B^c \cap H) \quad , \quad \forall H \subset X.$$

Esta é a definição clássica de Carathéodory. Neste caso, se $G \subset X$ e $\alpha(G) < +\infty$, G é α -mensurável se e

$$\alpha(G) + \alpha(B) = \alpha(G \cap B) + \alpha(G \cup B) \quad , \quad \forall B \subset X$$

ou equivalentemente se $\exists \varepsilon > 0$, $\exists M, N$ α -mensuráveis tal que $M \subseteq G \subseteq N$ e $\alpha(N - M) < \varepsilon$.

A classe dos subconjuntos α -mensuráveis de X forma uma álgebra de $P(X)$. Vamos definir agora uma função α -mensurável. A definição será ligeiramente diferente da usual.

DEFINIÇÃO 2.14. Sejam $\alpha : P(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ monótona e $f \in [0, +\infty]^X$. Então dizemos que f é α -mensurável se o seguinte conjunto:

$$\{T \in (0, +\infty) : \{f > T\} \text{ não é } \alpha\text{-mensurável}\}$$

é no máximo enumerável.

Vejamos agora o teorema de linearidade para funções α -mensuráveis. Este teorema será importante para a teoria dos espaços L^p para integrais monótonas.

TEOREMA 2.15. Sejam $\alpha : P(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ monótona e f, g duas funções α -mensuráveis. Então

$$\int_X (f + g) d\alpha = \int_X f d\alpha + \int_X g d\alpha .$$

DEMONSTRAÇÃO. A idéia é demonstrar o resultado primeiramente para funções simples, depois para funções limitadas e finalmente o caso geral.

Seja $\mathcal{B}_\alpha = \{B \subset X : B \text{ é } \alpha\text{-mensurável}\}$.

Tomemos primeiramente $h = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_{A_i}$ onde $\lambda_i \in (0, +\infty)$ e

$A_i \in \mathcal{B}_\alpha$. Neste caso, vale

$$\int_X h d\alpha = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha(A_i) \quad (22)$$

Se $n = 1$ (22) é trivial. Suponha válida para $n = k$. Tome-
mos $h = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i \varphi_{A_i}$. Rearranjamos a somatória de tal forma que

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{k+1}.$$

Como A_1 é α -mensurável, vale:

$$\begin{aligned} \int_X h d\alpha &= \int_{X-A_1} h d\alpha + \int_{A_1} h d\alpha = \int_X \sum_{i=2}^{n+1} \lambda_i \varphi_{A_i \cap A_1} d\alpha + \\ &\int_X \left(\sum_{i=2}^{n+1} \lambda_i \varphi_{A_i \cap A_1} + \lambda_1 \varphi_{A_1} \right) d\alpha \end{aligned}$$

usando indução para o primeiro termo e iii) da definição 2.1 com $\lambda = \lambda_1$ para o segundo termo e depois indução novamente, obtemos

$$\int_X h d\alpha = \sum_{i=2}^{n+1} \lambda_i \alpha(A_i \cap A_1^C) + \sum_{i=2}^{n+1} \lambda_i \alpha(A_i \cap A_1) + \lambda_1 \alpha(A_1).$$

Como A_1 é α -mensurável, obtemos (22).

Sejam agora f e g limitadas e α -mensuráveis, usando uma construção similar à usual obtemos $\{f_n\}, \{g_n\}$ α -mensuráveis simples tal que $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$, $g_n \xrightarrow{\text{unif}} g$ e $f_n \leq f$ e $g_n \leq g$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dai

$$\int_X (f_n + g_n) d\alpha = \int_X f_n d\alpha + \int_X g_n d\alpha \quad \text{e como} \quad f_n + g_n \xrightarrow{\text{unif}} f + g \quad \text{e}$$

$f_n + g_n \leq f + g$ passando ao limite e usando o lema de Fatou, obtemos

$$\int_X (f + g) d\alpha = \int_X f d\alpha + \int_X g d\alpha .$$

Sejam agora f e g α -mensuráveis. Então sabemos que $f \wedge n$ e $g \wedge n$ são α -mensuráveis, $\forall n \in \mathbb{N}$. Pelo demonstrado

$$\int_X (f \wedge n + g \wedge n) d\alpha = \int_X f \wedge n d\alpha + \int_X g \wedge n d\alpha \quad (23)$$

Como $(f + g) \wedge n \leq f \wedge n + g \wedge n \leq f + g$ segue que

$$\lim_n \int_X (f \wedge n + g \wedge n) d\alpha = \int_X (f + g) d\alpha .$$

Como o limite do outro lado da igualdade (23) é $\int_X f d\alpha + \int_X g d\alpha$ obtemos o resultado necessário.

Vamos agora provar o seguinte fato utilizado na prova:

Se $B \subset X$ é α -mensurável, então $\forall f \in [0, +\infty]^X$

$$\int_X f d\alpha = \int_B f d\alpha + \int_{X-B} f d\alpha \quad (24)$$

Para ver isto tome $T > 0$ e seja $F = \{f > T\}$ então

$$\alpha(F_T \cap B) + \alpha(F_T \cap B^C) = \alpha(F_T) \quad , \quad \text{logo}$$

$$\alpha(\{f|_B > T\}) + \alpha(\{f|_{X-B} > T\}) = \alpha(\{f > T\}) \quad (25)$$

Como $\psi(T) = \alpha(\{f|_B > T\})$ e $\phi(T) = \alpha(\{f|_{X-B} > T\})$ são decrescentes, então

$$\int_{(0, +\infty)} (\psi + \phi) d\lambda = \int_{(0, +\infty)} \psi d\lambda + \int_{(0, +\infty)} \phi d\lambda$$

e usando o teorema 2.9 e (25) obtemos (24). ■

As funções α -mensuráveis tem muitas propriedades boas. Vamos citar algumas agora.

PROPOSIÇÃO 2.16. *Sejam f e g α -mensuráveis. Então*

- 1) $f \vee g$ e $f \wedge g$ são α -mensuráveis
- 2) $f + g$ é α -mensurável
- 3) Se f e g limitadas $\implies f \vee g - g$ é α -mensurável
- 4) Se $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ são mensuráveis e $f_n \xrightarrow{\Delta} f$ e $\exists g$ tal que

$$\int_X g d\alpha < +\infty \text{ e } f_n \leq g, \forall n \in \mathbb{N} \implies f \text{ é } \alpha\text{-mensurável.} \blacksquare$$

É muito importante caracterizar as funções α -mensuráveis, pois para elas, a integral monótona é linear.

2.5. CONVERGÊNCIA QUASE UNIFORME

Muitas vezes não podemos garantir a convergência uniforme em todo o conjunto X mas somente fora de um conjunto pequeno. Neste caso, ainda temos um teorema de convergência. Vamos definir portanto a convergência quase uniforme.

DEFINIÇÃO 2.17. Sejam $\{f_j\}_{j \in \Lambda} \subset [0, +\infty]^X$ uma rede e $f \in [0, +\infty]^X$. Dizemos que $\{f_j\}_{j \in \Lambda}$ converge quase uniformemente a f com respeito a α (qu.). Se $\forall \epsilon > 0$, $\exists B$ α -mensurável, com $\alpha(B) < \epsilon$ tal que $f_j|_{X-B} \xrightarrow{\wedge} f|_{X-B}$. Denotamos esta convergência por $f_j \xrightarrow{qu} f$.

Temos válido o seguinte teorema:

TEOREMA 2.18. Seja $f_j \xrightarrow{qu} f$, $\{f_j\}_{j \in \Lambda} \subset [0, +\infty]^X$ e $f \in [0, +\infty]^X$ tal que $\exists g \in [0, +\infty]^X$ com $f_j \leq g$, $\forall j \in \Lambda$ e $\int_X g d\alpha < +\infty$. Nestas condições $\int_X f d\alpha = \lim_j \int_X f_j d\alpha$.

DEMONSTRAÇÃO. Como $\int_X g d\alpha < +\infty$ dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $\alpha(B) < \delta \implies \int_B g d\alpha < \varepsilon$. Seja então $\varepsilon > 0$, escolha B_ε mensurável com $\alpha(B_\varepsilon) < \delta$, δ dado acima tal que

$$f_j|_{X-B_\varepsilon} \xrightarrow{\Delta} f|_{X-B_\varepsilon} \text{ e } \int_{B_\varepsilon} g d\alpha < \varepsilon.$$

Então

$$\begin{aligned} \int_X f_j d\alpha &= \int_{X-B_\varepsilon} f_j d\alpha + \int_{B_\varepsilon} f_j d\alpha \leq \\ &\leq \int_{X-B_\varepsilon} f_j d\alpha + \int_{B_\varepsilon} g d\alpha \leq \int_{X-B_\varepsilon} f_j d\alpha + \varepsilon \end{aligned}$$

pelo teorema de convergência dominada $\lim_j \int_{X-B_\varepsilon} f_j d\alpha = \int_{X-B_\varepsilon} f d\alpha$

Logo $\lim_j \sup \int_X f_j d\alpha \leq \int_{X-B_\varepsilon} f d\alpha + \varepsilon \leq \int_X f d\alpha + \varepsilon$ e como ε é arbitrário

$$\lim_j \sup \int_X f_j d\alpha \leq \int_X f d\alpha.$$

Por outro lado se B é tal que

$$f_j|_{X-B} \xrightarrow{\Delta} f|_{X-B} \tag{26}$$

então pelo TCD

$$\int_{X-B} f d\alpha = \lim_j \int_{X-B} f_j d\alpha \leq \lim_j \inf \int_X f_j d\alpha \leq$$

$$\lim_j \sup \int_X f_j d\alpha \leq \int_X f d\alpha \quad (27)$$

Seja $A = \{x \in X : \{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ não converge a } f(x)\}$, $\forall \delta > 0$
 $\exists B$ satisfazendo (26) com $\alpha(B) < \delta$. Obviamente $A \subset B$. Logo A
 é α -mesurável e $\alpha(A) = 0$. Assim

$$\int_X f d\alpha = \int_{X-A} f d\alpha + \int_A f d\alpha \leq \int_{X-A} g d\alpha < +\infty$$

$$\int_A f d\alpha = 0 \quad \text{e em } X-A, f \leq g.$$

Logo $\exists \delta > 0$ tal que se $\alpha(B) < \delta$, $\int_B f d\alpha < \epsilon$ e daí ti-
 ramos a igualdade em (27), isto é

$$\lim_j \int_X f_j d\alpha = \int_X f d\alpha \quad . \quad \blacksquare$$

Notamos que este é um teorema de convergência dominada, váli-
 do para a hipótese de convergência quase uniforme. Esta convergên-
 cia é muito importante porque muitas vezes garantimos somente o
 bom comportamento de convergência fora de um conjunto pequeno. Is-
 to está relacionado com a μ -mensurabilidade de Dunford - Schwartz

que será definida no próximo capítulo.

Existem muitas outras propriedades importantes das integrais monótonas. Para um leitor mais curioso, recomendamos [2,5,7,9].

CAPÍTULO III

ESPAÇOS L^p DE DUNFORD-SCHWARTZ

A teoria dos espaços L^p derivados de medidas σ -aditivas é clássica e padronizada. Tal não ocorre quando consideramos funções de conjunto finitamente aditivas (f.a.). Em [3] Dunford - Schwartz desenvolvem uma teoria de integração para funções f.a. que no caso de funções σ -aditivas recai no caso clássico. No próximo capítulo vamos desenvolver os espaços L^p a partir das integrais monótonas e comparar os resultados com os citados neste capítulo. Neste capítulo mostramos em linhas gerais a teoria de Dunford-Schwartz sem a preocupação de demonstrar os resultados.

3.1. FUNÇÕES DE CONJUNTO FINITAMENTE ADITIVAS

Neste capítulo X denota um conjunto $\neq \emptyset$ e $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ uma álgebra de subconjuntos de X . $F(\mathcal{A})$ denota o conjunto das funções de conjunto finitamente aditivas com domínio $\mathcal{A}$ e imagem $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ com um dos valores $+\infty$ ou $-\infty$. Nos dois primeiros casos a imagem de $F(\mathcal{A})$ está contida num espaço de Banach o que não ocorre no último.

Podemos definir a variação total de $\mu \in F(\mathcal{A})$ como no Capítulo I e provar que $|\mu|$ é a f.a. Se μ é limitada e real dizemos que $\mu \in M(\mathcal{A})$ e daí existem as noções μ^+ e $\mu^- \in M(\mathcal{A})$. $M(\mathcal{A})$ é um subconjunto de $F(\mathcal{A})$.

Para cada μ real ou real estendida definimos

$$\mu^* : P(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

$$\mu^*(E) = \inf_{E \subset F, F \in A} \mu(F)$$

Neste caso valem as propriedades seguintes:

- i) $E \in A \implies \mu^*(E) = \mu(E)$
- ii) $\mu^*(A \cup B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B) \quad , \quad \forall A, B \subset X$
- iii) $\mu^*(A) \leq \mu^*(B) \quad \text{se} \quad A \subset B \subset X.$

A propriedade ii) diz μ^* é subaditiva e iii) diz que μ^* é monótona e além disso é extensão de μ a $P(X)$. Como $\mu(\emptyset) = 0$ (se $\mu \neq +\infty$) então μ^* é monótona (conforme cap. II) e podemos definir a integral monótona $\int_X d\mu^*$ para $\mu \geq 0$ pois daí $\mu^* \geq 0$.

DEFINIÇÃO 3.1. Seja $\mu \in F(A)$. $N \subset X$ é chamado *conjunto μ -nulo*, se $|\mu|^*(N) = 0$. Das propriedades i) $\implies$ iii) segue que subconjuntos e uniões finitas de conjuntos μ -nulos são conjuntos μ -nulos.

Em termos de filtros isto quer dizer que a classe dos conjuntos μ -nulos forma um ideal de $P(X)$, ou seja, os complementares dos conjuntos μ -nulos formam um filtro de $P(X)$ se $|\mu|(X) \neq 0$.

Uma propriedade é verdade quase sempre se ela é verdadeira fora de um conjunto μ -nulo.

Chamamos a função $|\mu|^*$ da definição 3.1 de *medida exterior* de μ e denotamos por μ_e .

3.2. INTEGRAÇÃO

Definiremos nesta seção a integral $\int_X f(s) \mu(ds)$ para funções a valores num espaço de Banach E e $\mu \in F(A)$ complexa, real ou real estendida.

Vamos primeiramente definir uma norma no conjunto C , espaço de funções:

$$C = \{f : X \longrightarrow E\}$$

DEFINIÇÃO 3.2. Seja $f \in C$ e $\mu \in F(A)$. Definimos a norma de f

$$\|f\| = \inf_{\alpha > 0} \arctg \{ \alpha + \mu_e(\{|f| > \alpha\}) \} \quad (1)$$

onde $|f| : X \longrightarrow E$

$$x \longmapsto \|f(x)\|$$

A função $\arctg$ é colocada para limitar o valor de $\|f\|$ por $\pi/2$. Qualquer outra função contínua, monótona, convexa e limitada de $[0, +\infty)$ em $[0, +\infty)$ serviria. Quando $\mu_e(X) < +\infty$ podemos usar ao invés de (1)

$$\|f\| = \inf_{\alpha > 0} \{ \alpha + \mu_e(\{|f| > \alpha\}) \}$$

É simples provar que $\|\cdot\|$ é uma seminorma em C . Uma função $f \in C$ chama-se μ -nula se $\{|f| > \alpha\}$ é um conjunto μ -nulo para cada $\alpha > 0$. Observe que uma função μ -nula não precisa ser nula quase-sempre como mostra o seguinte exemplo.

EXEMPLO 1. Sejam $X = [0,1]$, $A =$ álgebra gerada por intervalos, $\mu =$ medida de Lebesgue e $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é irracional} \\ 1/q & \text{se } x = p/q \text{ } (p,q) = 1 \end{cases}$$

Então $\{|f| > \alpha\}$ é finito $\forall \alpha > 0$ e portanto $\mu_e(\{|f| > \alpha\}) = 0$, $\forall \alpha > 0$ mas $\{|f| > 0\} = \mathbb{Q} \cap [0,1] = \mathbb{Q}'$ e $\mu_e(\mathbb{Q}') = 1$.

Mas há uma boa caracterização de funções μ -nulas.

LEMA 3.3. Uma função $f : X \longrightarrow B$ é μ -nula se e só se $f = 0$. ■

COROLÁRIO 3.4. As funções μ -nulas formam um subespaço vetorial de C . Se f é μ -nula e $|g(x)| \leq |f(x)|$ μ -quase sempre, então g é μ -nula.

Definimos a relação de equivalência em C

$f \sim g$ se $\|f - g\| = 0$ e temos

$$\overline{C}(X, A, \mu, B) = C/\sim \quad (\text{abreviadamente } \overline{C}(X))$$

então $\overline{C}(X)$ é um espaço vetorial normado com as operações:

$$[f] + [g] = [f + g]$$

$$\alpha [f] = [\alpha f] \quad \| [f] \| = \| f \|.$$

Vamos falar de funções como as classes de equivalência. Naturalmente isto impõe a condição de que um conceito só está bem definido se for igual para qualquer representante da classe.

DEFINIÇÃO 3.5. Convergência em $\overline{C}(X)$ é chamada convergência μ -medida e denotada por $f_n \xrightarrow{\mu} f$ se

$$\lim_n \|f_n - f\| = 0$$

Há uma caracterização boa para esta convergência.

LEMA 3.6. $f_n \xrightarrow{\mu} f$ se e só se $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_e(\{|f - f_n| > \varepsilon\}) = 0$, $\forall \varepsilon > 0$.

Este lema é importante porque ele relaciona as funções e a medida exterior dos conjuntos onde a aproximação é ruim. A convergência em μ -medida fica então caracterizada como: para cada $\varepsilon > 0$ existe n tal que se f e f_n diferem por mais de ε , isto gera um conjunto de medida pequena.

OBSERVAÇÃO. Se $f_n \xrightarrow{L} f \implies |f_n(\cdot)| \xrightarrow{\mu} |f(\cdot)|$.

Além disso $f+g$ é função contínua de f e g e λf é função contínua de f para λ fixo.

DEFINIÇÃO 3.7. Uma função μ -simples é uma função que assume um número finito de valores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tal que

$$f^{-1}(\lambda_i) \in A, \quad \forall i.$$

Vamos definir a integral para as funções μ -simples e depois estendê-las para funções mensuráveis. Seja S o conjunto das funções μ -simples.

DEFINIÇÃO 3.8. Dizemos que $f : X \longrightarrow B$ totalmente μ -mensurável ($t_{\mu.m}$) se f pertence ao fecho de S em $\bar{C}$, isto é existem $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, f_n simples tal que $\lim_n \|f_n - f\| = 0$. Dizemos que f é μ -mensurável ($\mu.m$) se qualquer $E \in A$ com $|\mu|(E) < +\infty$, $\varphi_E f$ é totalmente μ -mensurável. $A \subset X$ é dito mensurável se φ_A é mensurável.

Vamos agora definir a integral de funções μ -simples.

DEFINIÇÃO 3.9. Uma função f μ -simples é μ -integrável ($\mu.i.s$) se existe g μ -simples

$$g = \sum_{i=1}^n x_i \varphi_{E_i} \quad (2)$$

onde $E_i \in A$, E_i disjuntos $\bigcup_{i=1}^n E_i = X$ e tal que $x_i = 0$ se $|\mu|(E_i) = +\infty$ e de forma que f e g são μ -iguais, i.e. $\|f - g\| = 0$. Neste caso se h é μ -i.s e g é da forma (2) então definimos a *integral* de h por

$$\int_E h d\mu = \int_E h(s) \mu(ds) = \int_E g(s) \mu(ds) = \sum_{i=1}^n x_i \mu(E, E_i) \quad (3)$$

Estabelecemos a convenção $0 \cdot \infty = 0$. Assim esta integral é bem definida e se $\|h - k\| = 0$, então

$$\int_E h d\mu = \int_E k d\mu, \quad \forall E \in A.$$

Assim definimos a integral no conjunto das funções simples as quais formam um subespaço vetorial de $\bar{C}(X)$. Neste subespaço a integral é linear e se $f \geq 0$ e $\mu \geq 0$ então $\int_E f d\mu \geq 0$.

Denotamos a integral também por $D \int_X h d\mu$. Quando formos estender a definição continuaremos a utilizar esta notação.

Vamos estudar agora o conceito de integral para uma classe maior de funções.

LEMA 3.10. Sejam $\{f_n^1\}$ e $\{f_n^2\}$ duas sequências de funções μ -i.s com $f_n^1 \xrightarrow{\mu} f$ e $f_n^2 \xrightarrow{\mu} f$ e ainda

$$\lim_{n,m} \int_X |f_n^i(x) - f_m^i(x)| d|\mu| = 0, \quad i=1,2.$$

Então $\exists \lim_n \int_E f_n^i d\mu$, $i = 1,2$ uniforme com respeito a E e são iguais, isto é $\lim_n \int_E f_n^1 d\mu = \lim_n \int_E f_n^2 d\mu$. ■

Portanto, definimos as funções integráveis:

DEFINIÇÃO 3.11. Uma função $f \in \bar{C}(X)$ chama-se μ -integrável (μi) se $\exists \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, f_n , μ -i.s. tal que $f_n \xrightarrow{\mu} f$ e

$$\lim_{n,m} \int_X |f_n(X) - f_m(X)| d|\mu| = 0.$$

Tal sequência determina f e definimos

$$\int_E f d\mu = \lim_n \int_E f_n d\mu.$$

Este limite existe e independe da sequência que determina f por causa do lema anterior.

Seja $L(X)$ o conjunto das funções integráveis. Vejamos o teorema abaixo:

TEOREMA 3.12. Seja $g \in \bar{C}(X)$. Definimos $G : A \longrightarrow \mathbb{R}$

$$G(E) = \int_E g d\mu$$

então

$$i) \quad g \text{ é f.a. e } |G|(E) = \int_E |g(\cdot)| d|\mu|$$

$$ii) \quad \lim_{|\mu|(E) \rightarrow 0} |G|(E) = 0$$

$$iii) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathcal{A} \text{ tal que } |\mu|(A) < +\infty \text{ e } |G|(A^c) < \varepsilon$$

$$iv) \quad \int_X |g(x)| d|\mu| = 0 \text{ se e só se } g \text{ é } \mu\text{-nula. } \blacksquare$$

3.3. ESPAÇOS L^p

DEFINIÇÃO 3.12. Seja $1 \leq p < +\infty$. $L_p^0(X)$ denota o conjunto das funções μ -mensuráveis $\in \bar{C}(X)$ tal que $|f(\cdot)|^p$ é μ -integrável. Definimos a seminorma

$$\|f\| = \|f\|_p = \left[\int_X |f(x)|^p d|\mu| \right]^{1/p} \quad (4)$$

Alguns resultados clássicos da teoria dos L^p valem aqui. Vejamos alguns deles.

PROPOSIÇÃO 3.14 (equivalente ao Lema de Hölder). Seja f escalar e g vetorial, $f \in L_p^0(X)$, $g \in L_q^0(X)$, $p > 1$, $q > 1$ e $1/p + 1/q = 1$. Então fg é μ -integrável e

$$\left| \int_X f(x) \cdot g(x) d\mu \right| \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \quad \blacksquare$$

LEMA 3.15. Suponhamos $1 \leq p < +\infty$, $f_1, f_2 \in L_p^0(X)$, α escalar. Então

$$i) \alpha f_1 \in L_p^0(X) \quad , \quad \|\alpha f_1\|_p = \|\alpha\| \cdot \|f_1\|_p$$

$$ii) f_1 + f_2 \in L_p^0(X) \quad e \quad \|f_1 + f_2\|_p \leq \|f_1\|_p + \|f_2\|_p .$$

$$iii) \|f_1\|_p = 0 \quad \text{se e só} \quad f \text{ é } \mu\text{-nula.} \quad \blacksquare$$

Seja $L_p(X) = L_p^0(X)/\sim$ onde $\sim$ foi definida antes. Então $(L_p(X), \|\cdot\|_p)$ é um espaço vetorial normado. Vejamos agora alguns teoremas similares aos clássicos para estes espaços L_p .

TEOREMA 3.16. Seja $1 \leq p < +\infty$. Seja $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L_p(X)$ e $f \in \bar{C}(X)$. Então $f \in L_p(X)$ e $\|f_n - f\|_p \xrightarrow{0} 0$ se e

$$i) f_n \xrightarrow{\mu} f$$

$$ii) \lim_{|\mu|(E) \rightarrow 0} \int_E |f_n(\cdot)|^p d|\mu| = 0 \quad \text{uniforme em } n .$$

$$iii) \forall \varepsilon > 0, \exists E_\varepsilon \in \mathcal{A} \quad \text{tal que} \quad |\mu|(E_\varepsilon) < +\infty \quad e$$

$$\int_{X-E_\varepsilon} |f_n(\cdot)|^p d|\mu| < \varepsilon, \quad \forall n. \quad \blacksquare$$

Vejamos agora o teorema da convergência dominada de Lebesgue, que ainda é válido para estes espaços L_p .

TEOREMA 3.17. Sejam $1 \leq p < +\infty$, $g \in L_p(X)$, $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset L_p(X)$ tal que

$$\|f_\alpha(X)\| \leq \|g(X)\| \quad \mu\text{-quase sempre para qualquer } \alpha > 0.$$

Nestas condições $f_j \xrightarrow{\mu} f$ se e só se $(f \in L_P(X) \text{ e } \|f_j - f\|_P \rightarrow 0)$.

Este teorema é idêntico ao caso clássico. Isto nos mostra que para o TCD não é essencial a hipótese de que a medida seja σ -aditiva. Como corolário vemos que o conjunto das funções μ -simples integráveis é denso em $L^P(X)$.

Esta é a teoria apresentada em [3]. Ela ensina como calcular integrais de funções mensuráveis e integráveis. Nem sempre o espaço $L_P(X)$ será completo (contrário ao caso clássico) e além disso o trabalho [3] não dá nenhuma indicação de como determinar quando $L_P(X)$ é completo. Na teoria desenvolvida no próximo capítulo veremos mais algumas propriedades dos L_P de Dunford-Schwartz (DS) e determinamos quando um espaço L_P DS é completo.

Por outro lado vemos que a integral DS é feita para funções de conjunto a valores num espaço de Banach V ou no sistema real estendido.

CAPÍTULO IV

ESPAÇOS L^P PARA MEDIDAS FINITAMENTE ADITIVAS

Definiremos aqui os espaços L^P associados a integrais monótonas para funções de conjunto finitamente aditivas, usando o conceito de A -mensurabilidade. Analisamos várias propriedades e estabelecemos critérios de completude para tais espaços. Comparamos os resultados com o trabalho já existente na literatura, de Dunford-Schwartz [3] e desenvolvemos relações entre os dois espaços e as noções de mensurabilidade diversas. Uma vez que os espaços L^P para medidas f.a. não são necessariamente completos, seja na teoria de Dunford-Schwartz, seja no trabalho de Greco [10] o qual é a base deste capítulo; é portanto importante determinar critérios de completude. Veremos que a completude em ambos os casos está somente relacionada às propriedades de convergência das funções de conjunto. Veremos também que as caracterizações aqui dadas dão, de certa forma, mais informação que em [3] e são mais simples.

4.1. PRELIMINARES

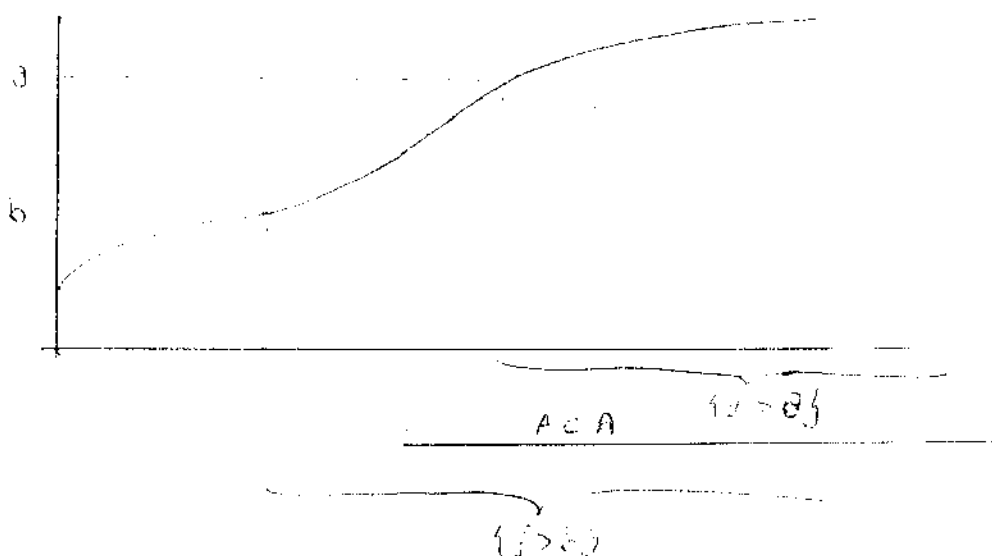
Neste capítulo X denota um conjunto $\neq \emptyset$ e $A \subset P(X)$ uma álgebra de conjuntos de $P(X)$. Definimos primeiramente uma função A -mensurável.

DEFINIÇÃO 4.1. Uma função $f: A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é A -mensurável se dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a > b$ então existe $A \in \mathcal{A}$ com

$$\{f > a\} \subset A \subset \{f > b\}$$

onde $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

Para $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ o seguinte gráfico ilustra o conceito acima:



Observamos que sendo $\mathcal{A}$ somente uma álgebra não é verdade, a priori, que dado $a \in \mathbb{R}$ $\{f > a\} \in \mathcal{A}$. Entretanto, isto ocorre efetivamente quando $\mathcal{A}$ é σ -álgebra e daí voltamos à definição de mensurabilidade.

EXEMPLO 1. Sejam $X = [0, 1]$ e $\mathcal{A}$ a álgebra gerada pelos intervalos contidos em X . Seja $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \cap X \\ 1/q & \text{se } x = p/q \quad p/q \in \mathbb{N}, \quad (p, q) = 1 \end{cases}$$

onde Q são os racionais. Neste caso f é A -mensurável, mas $\{f > 0\} = Q \cap X \notin A$.

Como no capítulo I denotamos por

$$M(A) = \{\mu : A \longrightarrow \mathbb{R} \text{ finitamente aditiva limitada}\}$$

$$M_\sigma(A) = \{\mu : A \longrightarrow \mathbb{R} \text{ } \sigma\text{-aditiva limitada}\}.$$

Lembramos que $M(A)$ e $M_\sigma(A)$ são espaços de Riesz completos.

As funções que são combinações lineares finitas de funções características de conjuntos de A são chamadas funções A -simples. Obviamente elas são A -mensuráveis.

Se em $\overline{\mathbb{R}}^X$ definimos a função $\Delta : \overline{\mathbb{R}}^X \times \overline{\mathbb{R}}^X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida por

$$\Delta(f, g) = \sup_{x \in X} \{|\arctg(f(x)) - \arctg(g(x))|\}$$

então Δ é uma métrica em $\overline{\mathbb{R}}^X$ e $(\overline{\mathbb{R}}^X, \Delta)$ é completo.

O espaço de Stone $\tilde{X}$ associado à álgebra A (veja capítulo I) constituído dos ultrafiltros de A , terá um papel fundamental no desenvolvimento dos espaços L^p .

Todos estes conceitos estão relacionados entre si como mostra a proposição seguinte:

PROPOSIÇÃO 4.2. *Sejam $X, A, \tilde{X}$ como acima $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ e $\tilde{x}$ o ultrafiltro principal determinado por $x \in X$. Então são equivalentes:*

- i) f é A -mensurável
- ii) $\exists \lim_F f$ para cada ultrafiltro F de A
- iii) $\exists \tilde{f}: \tilde{X} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ contínua tal que $\tilde{f}(\tilde{x}) = f(x) \quad \forall x \in X$
- iv) f pertence ao fecho das funções A -simples em $(\overline{\mathbb{R}}^X, \Delta)$.

DEMONSTRAÇÃO: i) $\Rightarrow$ ii). Suponha que $\limsup_F f \neq \liminf_F f$ para algum ultrafiltro F de A . Então

$$a = \sup_{H \in F} \inf_{x \in H} f(x) < \inf_{H \in F} \sup_{x \in H} f(x) = b.$$

Se $a = -\infty$ tomamos $a' \in \mathbb{R}$ tal que $a' < b$. Se $b = +\infty$ tomamos $b' \in \mathbb{R}$ com $b' > a$. Logo vamos supor $|a|, |b| < \infty$.

Sejam agora $a', b' \in \mathbb{R}$ com $a < a' < b' < b$. Por hipótese existe $A \in \mathcal{A}$ com

$$\{f > a'\} \supset A \supset \{f > b'\}.$$

Como $\inf_{x \in A} f(x) \geq a'$ então $A \notin F$ pois $\forall B \in F, \inf_{x \in B} f(x) \leq a < a'$. Da mesma forma $A^c \subset \{f \leq b'\}$ logo $\sup_{x \in A^c} f(x) \leq b'$ e portanto $A^c \notin F$. Isto contradiz o fato de que F é ultrafiltro. Logo ii) é verdade.

ii) $\Rightarrow$ iii) Seja $\tilde{f}: \tilde{X} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definida por $\tilde{f}(F) = \lim_F f$. Vamos provar que $\tilde{f}$ é contínua.

Seja $F \in \tilde{X}$ tal que $\tilde{f}(F) = \lim_F f \neq +/\infty$. $\tilde{f}(F) = b \in \mathbb{R}$.

Como $\sup_{H \in \mathcal{F}} \inf_{y \in H} f(y) = b$ então dado $\varepsilon > 0$ existe $H_1 \in \mathcal{F}$ tal que $\inf_{y \in H_1} f(y) > b - \varepsilon$. Do mesmo modo existe $H_2 \in \mathcal{F}$ tal que $\sup_{y \in H_2} f(y) < b + \varepsilon$. Tomamos $C = H_1 \cap H_2$. C é aberto e fechado em $\tilde{X}$ e como $F \in H_1 \cap H_2$ (Obs.: $\tilde{A} = \{\text{ultrafiltros de } \beta \text{ de } A \text{ com } A \in \beta\}$). C é não vazio. Seja então $\beta \in C$, logo

$$H_1 \cap H_2 \in \beta \Rightarrow H_1 \in \beta \Rightarrow \sup_{H \in \beta} \inf_{x \in H} f(x) > b - \varepsilon$$

$$H_1 \cap H_2 \in \beta \Rightarrow H_2 \in \beta \Rightarrow \inf_{H \in \beta} \sup_{x \in H} f(x) < b + \varepsilon$$

logo $|\tilde{f}(\beta) - \tilde{f}(F)| < \varepsilon$ e daí $\tilde{f}$ é contínua em F . Da mesma forma se prova que $\tilde{f}$ é contínua em β se $\tilde{f}(\beta) = +/\infty$. Logo $\tilde{f}$ é contínua.

Seja $\tilde{x}$ o ultrafiltro determinado por x . Então

$$\left. \begin{aligned} \tilde{f}(\tilde{x}) &= \sup_{H \in \tilde{x}} \inf_{y \in H} f(y) \leq f(x) \\ \tilde{f}(\tilde{x}) &= \inf_{H \in \tilde{x}} \sup_{y \in H} f(y) \geq f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tilde{f}(\tilde{x}) = f(x).$$

iii) $\Rightarrow$ i) Seja $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ contínua e $\tilde{f}(\tilde{x}) = f(x) \forall x \in X$. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $a > b$, $c \in \mathbb{R}$ tal que $b < c < a$ e $\delta = \frac{c-b}{2}$. Tomamos $B = \{\tilde{f} \geq c\}$.

$\forall \beta \in B$ seja $\tilde{A}_\beta$ vizinhança de β em $\tilde{X}$ (com $A_\beta \in A$) tal que

a) Se $|\tilde{f}(\beta)| < +\infty \Rightarrow \tilde{f}(\tilde{A}_\beta) \subset (\tilde{f}(\beta) - \delta, \tilde{f}(\beta) + \delta)$, isto é pos

sível porque $\{\tilde{A} : A \in \Lambda\}$ é base para a topologia de $\tilde{X}$.

b) Se $\tilde{f}(B) = +\infty \Rightarrow \tilde{f}(A_\beta) \subset (a, +\infty]$

Por construção $\tilde{f}(A_\beta) \subset (-\delta, +\infty] \subset (b, +\infty] \quad \forall \beta \in B$.

Logo $\bigcup_{\beta \in B} \tilde{f}(\tilde{A}_\beta) \subset (b, +\infty]$. Mas $\bigcup_{\beta \in B} \tilde{A}_\beta$ é cobertura aberta de B e como $\tilde{f}$ é contínua, B é fechado e sendo $\tilde{X}$ compacto B é compacto. Logo $\exists$ finitos $\beta_i \in B$ tal que $\bigcup_{i=1}^n \tilde{A}_{\beta_i}$ cobre B .

Seja $D = \bigcup_{i=1}^n A_{\beta_i} \subset A$. Sabemos que $\tilde{D} = \widetilde{\bigcup_{i=1}^n A_{\beta_i}} = \bigcup_{i=1}^n \tilde{A}_{\beta_i} \supset B$, logo achamos $D \in A$ com

$$B \subset \tilde{D} \subset \{\tilde{f} > b\}$$

pois $\tilde{f}(\tilde{D}) \subset \bigcup_{\beta \in B} \tilde{f}(\tilde{A}_\beta) \subset (b, +\infty]$.

Como

$$B \supset \{\tilde{f} \geq c\} \supset \{\tilde{f} > a\} \Rightarrow$$

$$\{\tilde{f} > a\} \subset \tilde{D} \subset \{\tilde{f} > b\}$$

e como $\tilde{f}(\tilde{x}) = f(x) \quad \forall x \in X$ então

$$\{f > a\} \subset D \subset \{f > b\}$$

pois por exemplo se $f(x) > a \Rightarrow \tilde{f}(\tilde{x}) > a \Rightarrow \tilde{x} \in \tilde{D} \Rightarrow D \in \tilde{x} \Rightarrow \tilde{x} \in D$.
Portanto f é mensurável.

Estabelecemos as equivalências i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii).

Vamos agora mostrar ii) $\Rightarrow$ iv) $\Rightarrow$ i).

ii) $\Rightarrow$ iv). Sejam $\varepsilon > 0$ e $F \in \tilde{X}$. Caso $\lim_F f = +\infty$ escolhemos $H_F \in F$ tal que $\inf_{x \in H_F} f(x) > 1/\varepsilon$, daí definimos $a_{H_F} = 1/\varepsilon$.

Caso $\lim_F f = -\infty$ escolhemos $H_F \in F$ com $\sup_{x \in H_F} f(x) < -1/\varepsilon$, e tomamos $a_{H_F} = -1/\varepsilon$.

Quando $\lim_F f = b \in \mathbb{R}$ escolhemos $H_1 \in F$ com $\sup_{x \in H_1} f(x) < b + \varepsilon/2$ e $H_2 \in F$ com $\inf_{x \in H_2} f(x) > b - \varepsilon/2$. Tomamos $H_F = H_1 \cap H_2 \in F$ e

daí se $x, y \in H_F$ então $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Escolhemos $y \in H_F$ e tomamos $a_{H_F} = f(y)$.

Como $\{X - H_F, F \in \tilde{X}\}$ não está contida em nenhum ultrafiltro existem finitos $\{F_i\}_{i=1}^n \in \tilde{X}$ com $\bigcap_{i=1}^n (X - H_{F_i}) = \emptyset$.

Logo $\bigcup_{i=1}^n H_{F_i} = X$. Definimos $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$h(x) = \sum_{i=1}^n a_{H_{F_i}} \varphi_{H_{F_i}}(x).$$

Então h é função Λ -simples.

Dados então $\delta > 0$ escolhemos $\varepsilon > 0$ tal que $|\arctg 1/\varepsilon - \pi/2| < \delta$ e $|x - y| < \varepsilon \Rightarrow |\arctg x - \arctg y| < \delta$. Daí construímos h como acima. Neste caso $\Delta(h, f) < \delta$ e f está no fecho das funções Λ -simples.

Observamos que para construir h diminuimos H_{F_i} de tal forma que eles fiquem disjuntos dois a dois. Isto é, tomamos $H'_{F_1} = H_{F_1}$ e $H'_{F_i} = H_{F_i} \cap \left(\bigcup_{j=1}^{L=1} H_{F_j} \right)^c$ para $L \geq 2$. Daí tomamos

Bc/5083

$H_{F_i} = H'_{F_i}$ e definimos h como acima. Isto deve ser feito para garantir que só um all_{F_i} é utilizado na soma que define h .

Observamos ainda que se $f \geq 0$ podemos tomar h com $\Delta(h, f) < \delta$ e $h \leq f$. Para tanto basta definir $a_{H_F} = \inf_{y \in H_F} f(y)$.

iv) $\Rightarrow$ i) Pela definição de A -mensurabilidade f é A -mensurável se f^+ e f^- o são. Além disso se $f \geq 0$ então f é A -mensurável se $f \wedge n$ é A -mensurável $\forall n \in \mathbb{N}$. Logo podemos nos restringir a $f \geq 0$ e f limitado.

Como existe $g_n \xrightarrow{\Delta} f$ g_n A -simples $\forall n \in \mathbb{N}$ então por argumento análogo à última observação existe $g_n \xrightarrow{\Delta} f$ g_n A -simples $\forall n \in \mathbb{N}$ e $g_n \leq f \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Agora sejam $\alpha, \beta : P(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ monótonas tal que $\alpha/A = \beta/A$. Como g_n são A -simples $\int_X g_n d\alpha = \int_X g_n d\beta$ logo pelo Lema de Fatou e $g_n \leq f$ segue que $\int_X f d\alpha = \int_X f d\beta$. Assim a proposição seguinte implica que f é A -mensurável. ■

Vamos agora fazer algumas observações com relação a estes conceitos aqui introduzidos.

1) $D = \{\tilde{x} : x \in X\} \subset \tilde{X}$ é um conjunto denso em $\tilde{X}$. Para ver isto tomemos $B \subset \tilde{X}$ aberto. Então existe $A \in \mathcal{A}$, $A \neq \emptyset$ com $\tilde{A} \subset B$. Seja $x \in A$. Daí $\tilde{x} \in \tilde{A} \subset B$. Isto implica que a função $\tilde{f}$ definida no item iii) da proposição 4.2 se existe é única e daí é dado por $\tilde{f}(F) = \lim_F f \quad \forall F \in \tilde{X}$.

2) Uma função $g : \tilde{X} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é A -mensurável se e só se

contínua. Se g é contínua vemos na prova de $\text{iii}) \Rightarrow \text{i})$ da proposição anterior que g é $\tilde{A}$ -mensurável.

Suponhamos que g seja $\tilde{A}$ -mensurável. Dai $\forall a, b \in \mathbb{R}$ com $a > b$, $\exists A \in \Lambda$ tal que

$$\{g > a\} \subset \tilde{A} \subset \{g > b\}.$$

Seja agora $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definida por $f(x) = g(\tilde{x})$. Logo se $f(x) > a \Rightarrow g(\tilde{x}) > a \Rightarrow \tilde{x} \in \tilde{A} \Rightarrow x \in A$. Donde concluímos:

$$\{f > a\} \subset A \subset \{f > b\}.$$

Logo f é Λ -mensurável e existe $\tilde{f} : \tilde{X} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ contínua tal que $\tilde{f}(\tilde{x}) = f(x) = g(\tilde{x})$, $\forall x \in X$.

Tomemos $\beta \in \tilde{X}$. Se $\tilde{f}(\beta) > a$ então $\exists \{x_i\}_{i \in \Lambda} \subset X$ rede com $\tilde{x}_i \longrightarrow \beta$. Logo $\exists i_0 \in \Lambda$ tal que $\forall i \geq i_0$, $\tilde{f}(\tilde{x}_i) > a$. Logo $x_i \in A$, $\forall i \geq i_0 \Rightarrow \tilde{x}_i \in \tilde{A}$, $\forall i \geq i_0$ e como $\tilde{A}$ é fechado $\beta \in \tilde{A}$. Assim $\{\tilde{f} > a\} \subset \tilde{A}$.

Como $\tilde{D} = \tilde{X}$ e $\tilde{A}$ é aberto segue que $\overline{\tilde{D} \cup \tilde{A}} \supset \tilde{A}$. Mas, como $\tilde{A}$ é fechado $\overline{\tilde{D} \cap \tilde{A}} = \tilde{A} = \overline{\{\tilde{x} : x \in A\}} \subset \overline{\{\tilde{f} > b\}} \subset \{\tilde{f} \geq b\}$. Logo $\{g > a\} \subset \tilde{A} \subset \{g > b\} \Rightarrow \{\tilde{f} > a\} \subset \tilde{A} \subset \{\tilde{f} \geq b\}$.

Suponhamos agora $\beta \in \tilde{X}$ com $g(\beta) = d \in \mathbb{R}$. Sejam $a_n = d - 1/n$, $b_n = d - 2/n$; $n \in \mathbb{N}$. Temos $A_n \in \Lambda$, $n \in \mathbb{N}$ com

$$\{g > a_n\} \subset \tilde{A}_n \subset \{g > b_n\}.$$

Como $\beta \in \tilde{A}_n$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \tilde{f}(\beta) \geq b_n$, $\forall n$ e portanto $\tilde{f}(\beta) \geq d$. De maneira similar $\tilde{f}(\beta) \leq d \Rightarrow \tilde{f}(\beta) = g(\beta)$. Nos casos onde $g(\beta) \notin \mathbb{R}$ um argumento semelhante prova que $\tilde{f}(\beta) = g(\beta)$. Logo $g = \tilde{f}$ e g é contínua.

Este resultado é fundamental pois caracterizamos as funções $\tilde{A}$ -mensuráveis como as funções contínuas do espaço de Stone $\tilde{X}$ em $\overline{\mathbb{R}}$. Assim transformamos um problema algébrico em um problema de topologia: estudo de funções contínuas. Como veremos adiante isto vai ser de grande utilidade no manuseio dos espaços L^p .

3) O conjunto $M_b(X, A)$ das funções A -mensuráveis limitadas é uma álgebra de funções. Isto poderia ser um resultado trabalhoso, mas utilizando 2) fica imediato.

Se f e $g \in M_b(X, A)$ então $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ são contínuas e limitadas e portanto $\tilde{f} + \tilde{g}$ é contínua. Como $(\tilde{f} + \tilde{g})(\tilde{x}) = \tilde{f}(\tilde{x}) + \tilde{g}(\tilde{x}) = (f + g)(x)$ segue da proposição 4.2 que $f + g$ é A -mensurável (obviamente limitada) e portanto $f + g \in M_b(X, A)$. Claramente $\tilde{f} + \tilde{g} = \widetilde{f + g}$. O mesmo tipo de raciocínio nos mostra que λf , $f \in \mathbb{R}$ e $f \cdot g$ são limitadas e A -mensuráveis e portanto $M_b(X, A)$ é uma álgebra de funções $\widetilde{\lambda f} = \lambda \tilde{f}$ e $\widetilde{f \cdot g} = \tilde{f} \cdot \tilde{g}$.

A álgebra de funções $M_b(X, A)$ é portanto claramente isomorfa à álgebra das funções contínuas e limitadas de $\tilde{X}$ em $\overline{\mathbb{R}}$. Além disso lembramos que $f_j \xrightarrow{\Delta} f$, $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ rede see $(-n) \vee (f_j \wedge n) \xrightarrow{\text{unif}} (-n) \vee (f \wedge n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e vemos que as funções mensuráveis limitadas são exatamente os limites uniformes (no sentido usual) das funções A simples.

Seja $A \in \mathcal{A}$ e φ_A a função característica de A . Neste caso $\tilde{\varphi}_A$ é a função característica de $\tilde{A}$, pois como $\tilde{A}$ é aberto e fechado $\tilde{\varphi}_A$ é contínua e $\forall x \in X, \tilde{\varphi}_A(\tilde{x}) = \varphi_A(x)$.

Lembramos que Dunford-Schwartz [3] definem a mensurabilidade em termos da álgebra $\mathcal{A}$ e da medida μ finitamente aditiva como o limite em norma (diferente da apresentada aqui) de uma sequência de funções μ -simples. Constatando com isto aqui só necessitamos da álgebra $\mathcal{A}$ para definir a mensurabilidade de modo natural, o que de certa forma generaliza o conceito de mensurabilidade clássico com respeito a uma σ -álgebra.

Denotaremos por simplicidade qualquer referência a Dunford-Schwartz por DS. Uma função mensurável será denotada por DS- μ -mensurável. DS- μ -integrável tem sentido análogo. A integral com respeito a DS será denotada por $D \int_X f d\mu$. Além disso uma função finitamente aditiva será abreviada por f.a. e quando for limitada por f.a.l.

No capítulo II vimos que as integrais monótonas associadas a uma função de conjunto monótona $\alpha : P(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ pressupõem que a função α está definida em todo $P(X)$. Queremos agora definir a integral monótona associada a uma função de conjunto definida somente em uma álgebra de $P(X)$. Está claro que nem todas as funções poderão ser integradas; mas o importante é que as $\mathcal{A}$ -mensuráveis serão integráveis. Temos o seguinte resultado:

PROPOSIÇÃO 4.3. Seja $\mathcal{A} \subset P(X)$ uma álgebra e $f \in [0, +\infty]^X$. Então são equivalentes:

i) f é A -mensurável

ii) para cada par de funções $\alpha, \beta : P(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ monótonas tais que $\alpha/A = \beta/B$ se tem $\int_X f d\alpha = \int_X f d\beta$. ■

Este resultado depende de uma sequência de lemas que não reproduziremos aqui. A demonstração completa pode ser vista em [6]. Faremos aqui um esboço da prova. Que i) implica ii) pode ser visto a partir da Proposição 4.2 pois i) $\implies$ iv) da Proposição 4.2 que implica ii). A volta é feita utilizando as funções α_F e β_F , definidas no Capítulo I, associados ao filtro F' de $P(X)$ gerado pelo ultrafiltro F de A e daí provar que existe $\lim_F f \quad \forall f \in \tilde{X}$ o que implica a mensurabilidade.

Em [7] Greco define a A -mensurabilidade em termos da condição ii) da proposição acima onde A pode ser qualquer família de subconjuntos de X . Quando A não for uma álgebra o resultado da proposição 4.2 que continua válido é i) $\iff$ iv) já que ii) e iii) não fazem sentido.

Esta última proposição é a chave para a definição da integral de uma função A -mensurável como veremos a seguir. Se f é A -mensurável e $f \in [0, +\infty]^X$ e μ é f.a., $\mu \geq 0$, queremos definir " $\int_X f d\mu$ " de maneira natural e bem definida. A tentativa é estender μ a uma função $\mu' : P(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ monótona (por exemplo $\mu' = \mu^* = \inf_{B \in A, A \subset B} \mu(B)$) e definir " $\int_X f d\mu$ " como $\int_X f d\mu'$. Se

$\mu'' : P(X) \longrightarrow [0, \infty)$ monótona é outra função que estende μ então

$\mu''/A = \mu'/A$ e pela proposição $\int_X f d\mu' = \int_X f d\mu''$. Logo temos a definição seguinte.

DEFINIÇÃO 44. Sejam $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$, A -mensurável e $\mu \in M^+(A)$. Seja μ' extensão de μ a $P(X)$. Definimos $\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu' - \int_X f^- d\mu'$ se ao menos um dos valores é finito. Se agora $\mu \in M(A)$ definimos $\int_X f d\mu = \int_X f d\mu^+ - \int_X f d\mu^-$ se as duas últimas integrais existem e ambas não assumem os valores $+\infty$ ou $-\infty$ ao mesmo tempo. (definimos $+\infty - (-\infty) = +\infty$, $-\infty - (+\infty) = -\infty$). Quando $\int_X f d\mu$ existe e é finita dizemos que f é μ -integrável.

Observamos que f é μ -integrável se e

$$\left\{ \begin{array}{l} f^+ \text{ é } \mu^+-\text{integrável} \\ f^+ \text{ é } \mu^--\text{integrável} \\ f^- \text{ é } \mu^+-\text{integrável} \\ f^- \text{ é } \mu^--\text{integrável} \end{array} \right.$$

Além disso se $f \geq 0$ e $\mu \geq 0$, A -mensurável já vimos que $\exists \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ A -simples com $g_n \xrightarrow{\Delta} f$ e $g_n \leq f$. Quando f é qualquer $\exists g_n \xrightarrow{\Delta} f^+$, $g_n \leq f$ e $h_n \xrightarrow{\Delta} f^-$, $h_n \leq \Delta$. Logo se f é μ -integrável

$$\begin{aligned}\int_X f d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_X g_n d\mu^+ - \int_X g_n d\mu^- - \int_X h_n d\mu^+ + \int_X h_n d\mu^- \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_X g_n d\mu - \int_X h_n d\mu \right)\end{aligned}$$

e como g_n e h_n A -simples é igual a $\lim_n \left(\int_X f_n d\mu \right)$ onde $f_n = g_n - h_n$. Logo $\int_X f d\mu = \lim_n \int_X f_n d\mu$ onde f_n é A -simples $|f_n| \leq |f|$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $f_n \xrightarrow{\Delta} f$.

Veremos agora algumas propriedades da integral associada a uma álgebra e a uma função de conjunto f.a. definida nesta álgebra. Vamos relacionar esta integral sobre o espaço X com uma integral sobre o espaço de Stone $\tilde{X}$. Para tanto vamos primeiramente desenvolver uma relação entre $M(A)$ e $M_0(\tilde{A}_\sigma)$ (veja Cap. I para notação) onde $\tilde{A}_\sigma$ denota a σ -álgebra de $\tilde{X}$ gerada por $\tilde{A}$.

Se $\mu \in M(A)$ definimos $v : \tilde{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ por $v(\tilde{H}) = \mu(H)$. Então claramente v é f.a.l. Além disso como $\forall \tilde{H} \in \tilde{A}$ é aberto e fechado v é regular. Como $\tilde{X}$ é compacto o teorema de Alexandroff (veja [3] teo. III, 5.13) nos garante que v é σ -aditiva. Como $v(\tilde{X}) < +\infty$ um teorema similar ao teorema de extensão de Caratheodory (veja [3], teo. III, 5.14) nos mostra que v tem uma única extensão σ -aditiva a $\tilde{A}_\sigma$. Chamamos esta extensão de $\tilde{\mu}$. Seja $\phi : M(A) \longrightarrow M_0(\tilde{A}_\sigma)$ dada por

$$\phi(\mu) = \tilde{\mu}.$$

Então claramente ϕ é injetiva. Além disso se $\nu \in M_\sigma(\tilde{A}_\sigma)$ então $\mu : A \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\mu(A) = \nu(\tilde{A})$, $\forall A \in A$ satisfaz $\mu \in M(A)$ e portanto $\nu = \tilde{\mu} = \phi(\mu)$. Logo ϕ é bijeção. Além disso claramente $\widetilde{\mu + \gamma} = \tilde{\mu} + \tilde{\gamma}$ e $\widetilde{c\mu} = c\tilde{\mu}$ para $\mu, \gamma \in M(A)$ e $c \in \mathbb{R}$. Assim ϕ é isomorfismo de espaços vetoriais. Como $M(A)$ e $M_\sigma(\tilde{A}_\sigma)$ são ambos espaços de Riesz completos e em A , $\widetilde{\mu \vee \gamma}$ e $\tilde{\mu} \vee \tilde{\gamma}$ coincidem segue que $\widetilde{\mu \vee \gamma} = \tilde{\mu} \vee \tilde{\gamma}$ e daí ϕ é um isomorfismo de espaços de Riesz. Temos além disso as seguintes propriedades:

PROPOSIÇÃO 4.5. Sejam $\mu \in M(A)$ e $f \in M(X, A)$ e $1 \leq p \leq +\infty$. Então vale

- 1) $|\tilde{\mu}| = \widetilde{|\mu|}$
- 2) $\int_X f d\mu = \int_{\tilde{X}} \tilde{f} d\tilde{\mu}$ se ao menos um dos fatores existe.
- 3) $\int_X |f|^p d\mu = \int_{\tilde{X}} |\tilde{f}|^p d\tilde{\mu}$ se ao menos um dos fatores existe.

DEMONSTRAÇÃO. 1) $|\tilde{\mu}| = \tilde{\mu} \vee (-\tilde{\mu}) = \tilde{\mu} \vee (-\tilde{\mu}) = \widetilde{\mu \vee (-\mu)} = \widetilde{|\mu|}$

2) Suponhamos $f \geq 0$ e $\mu \geq 0$. Os outros casos são deduzidos diretamente deste.

Seja primeiramente f A -simples $f = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_{A_i}$ onde $A_i \in A$. Logo $\tilde{f} = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_{\tilde{A}_i}$ é $\tilde{A}$ -simples. Neste caso

$$\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^n a_i \tilde{\mu}(\tilde{A}_i) = \int_{\tilde{X}} \tilde{f} d\tilde{\mu}.$$

No caso geral tomemos $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ $\mathcal{A}$ -simples tal que $f_n \xrightarrow{\Delta} f$ e $f_n \leq f$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Seja $\tilde{f}_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Então, como $\tilde{f}_n, \tilde{f}$ são contínuas e $\tilde{f}_n \leq \tilde{f}$ em um conjunto denso de $\tilde{X}$ ($\{\tilde{x} : x \in X\}$) segue que $\tilde{f}_n \leq \tilde{f}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Se além disso, $\Delta(f_n, f) < \varepsilon$ para um n grande, então pelos mesmos argumentos $\Delta(\tilde{f}_n, \tilde{f}) < \varepsilon$. Logo $\tilde{f}_n \xrightarrow{\Delta} \tilde{f}$ e $\tilde{f}_n \leq \tilde{f}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Então

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \tilde{f}_n d\tilde{\mu} = \int_X \tilde{f} d\tilde{\mu}.$$

3) Como $f \in M(X, \mathcal{A})$ então $|f| \in M(X, \mathcal{A})$ e como $|f| \geq 0$ então $|f|^p \in M(X, \mathcal{A})$, $\forall p$, $1 \leq p < +\infty$. Além disso $|\tilde{f}|^p = \overline{|f|^p}$ e portanto 3) é consequência imediata de 2). ■

Vamos agora comparar o que já foi feito aqui com a teoria de Dunford-Schwartz. Veremos que embora as definições de mensurabilidade e integrabilidade sejam diferentes, elas estão muito relacionadas. Veremos também alguns exemplos.

Vamos primeiro traduzir DS- μ -mensurável por uma condição mais clara. Observamos que como $|\mu|(x) < +\infty$ então totalmente mensurável e DS- μ -mensurável são conceitos equivalentes.

LEMA 4.6. $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é DS- μ -mensurável se e só se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ e

$A_1, \dots, A_n \subset A$ disjuntos com $\bigcup_{i=1}^n A_i = A_\varepsilon^c$, $|\mu|(A_\varepsilon) < \varepsilon$ e

$\sup_{s, t \in A_j} |f(s) - f(t)| < \varepsilon$, $j = 1, \dots, n$.

DEMONSTRAÇÃO. Lembramos primeiramente que f é DS- μ -mensurável, se ela está no fecho das funções μ -simples, isto é, funções do tipo $\sum_{i=1}^r a_i \chi_{E_i}$ onde $E_i \in A$ e $a_i = 0$ se $|\mu|(E_i) = +\infty$. Além disso, a norma considerada é

$$\|f\| = \inf_{\alpha > 0} \{ \alpha + |\mu|^*(\{|f| > \alpha\}) \}.$$

($\Rightarrow$). Seja $\varepsilon > 0$. Então, $\exists f_\varepsilon$ μ -simples com $\|f - f_\varepsilon\| < \varepsilon/2$ isto é,

$$\inf_{\alpha > 0} \{ \alpha + |\mu|^*(\{|f - f_\varepsilon| > \alpha\}) \} < \varepsilon/2$$

isto implica que $|\mu|^*(\{|f_\varepsilon - f| \geq \varepsilon/2\}) < \varepsilon/2$. Logo $\exists A_\varepsilon$ com $|\mu|(A_\varepsilon) < \varepsilon$ e $\{|f_\varepsilon - f| > \varepsilon/2\} \subset A_\varepsilon$.

Se $f_\varepsilon = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}$, tomamos uma decomposição onde E_i são disjuntos dois a dois e daí definimos $A_i = A_\varepsilon^C \cap E_i$ (obs. exigimos $\bigcup_{i=1}^n E_i = X$, se não for a priori completamos com $E_{n+1} = (\bigcup_{i=1}^n E_i)^C$ e pomos $a_{n+1} = 0$).

Como $|f_\varepsilon(x) - f(x)| < \varepsilon/2$, $\forall x \in A_\varepsilon^C$ então em A_i se $s, t \in A_i$ temos

$$|f(s) - f(t)| \leq |f(s) - f_\varepsilon(s)| + |f_\varepsilon(s) - f_\varepsilon(t)| + |f_\varepsilon(t) -$$

$f(t)| < \varepsilon$ pois $f_\varepsilon(s) = f_\varepsilon(t) = a_i$. Como $\bigcup_{i=1}^n A_i = A_\varepsilon^c$ obtemos o resultado.

($\Rightarrow$). Nas condições da hipótese, escolhemos $x_j \in A_j$ e definimos $f_\varepsilon = \sum_{i=1}^n x_i \chi_{A_i}$. Então f_ε é μ -simples pois $|\mu|(X) < +\infty$.

Além disso, $\{|f_\varepsilon - f| > \varepsilon\} \subset A_\varepsilon$ e portanto

$$|\mu|^*(\{|f_\varepsilon - f| > \varepsilon/2\}) < \varepsilon \Leftrightarrow \|f_\varepsilon - f\| < 2\varepsilon \Rightarrow \text{como}$$

$\varepsilon > 0$ é arbitrário f é DS- μ -mensurável. ■

Vamos estabelecer agora uma correspondência entre DS- μ -mensurabilidade e o conceito de mensurabilidade aqui definido.

Primeiramente, dada uma álgebra A e $\mu \in M(A)$, vamos construir uma nova álgebra e uma nova função f.a.l. que é de certa forma regular. Seja então

$$\bar{A} = \{B \in X \text{ tal que } \forall \varepsilon > 0, \exists A, D \in A$$

$$A \subset B \subset C \text{ e } |\mu|(D - B) < \varepsilon\}$$

Temos o seguinte resultado:

PROPOSIÇÃO 4.7. $\bar{A}$ é uma álgebra e neste caso existe uma única $\bar{\mu} \in M(\bar{A})$ que estende μ e tal que $|\bar{\mu}|_A = |\mu|_A$. Além disso $\bar{A}$ é regular, i.e., $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$.

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $B \in A$ e $\varepsilon > 0$. Tomamos $A, D \in A$ com $A \subset B \subset D$ e $|\mu|(D - A) < \varepsilon$.

$$D - A = D \cap A^C = A^C \cap (D^C)^C = A^C - D^C \Rightarrow |\mu|(A^C - D^C) < \varepsilon \text{ e } D^C \subset B^C \subset A^C \Rightarrow B^C \in \bar{A}.$$

Sejam agora $B_1, B_2 \in \bar{A}$ e $\varepsilon > 0$. $\exists D_1, D_2, A_1, A_2 \in A$ com $A_1 \subset B_1 \subset D_1$, $A_2 \subset B_2 \subset D_2$, $|\mu|(D_1 - A_1) < \varepsilon/2$ e $|\mu|(D_2 - A_2) < \varepsilon/2$. Como

$$(D_1 \cup D_2 - A_1 \cup A_2) \subset (D_1 - A_1) \cup (D_2 - A_2)$$

$$\Rightarrow |\mu|(D_1 \cup D_2 - A_1 \cup A_2) \leq |\mu|(D_1 - A_1) + |\mu|(D_2 - A_2) < \varepsilon \text{ e}$$

$$A_1 \cup A_2 \subset B_1 \cup B_2 \subset D_1 \cup D_2 \Rightarrow B_1 \cup B_2 \in \bar{A}. \text{ Assim } \bar{A} \text{ é álgebra.}$$

Suponhamos que existe a extensão e vamos provar que $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$. Seja $F \in \bar{\bar{A}}$ e $\varepsilon > 0$. Então $\exists B, D \in \bar{A}$ com $B \subset F \subset D$ e $|\bar{\mu}|(D - B) < \varepsilon/3$.

Além disso $\exists A, A_1, E, E_1 \in A$ tal que $A \subset B \subset A_1$, $E_1 \subset D \subset E$

$$e \quad |\mu| (E - E_1) = |\bar{\mu}| (E - E_1) < \varepsilon/3 \quad e$$

$$|\mu| (A_1 - A) = |\bar{\mu}| (A_1 - A) < \varepsilon/3.$$

$$\text{Como } E - A \subset (E - E_1) \cup (D - B) \cup (A_1 - A) \Rightarrow$$

$$|\mu|(E - A) < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon \quad e \quad A \subset F \subset E \Rightarrow F \in \bar{A}.$$

Vamos mostrar primeiro a unicidade de $\bar{\mu}$. Suponhamos que existam λ, γ satisfazendo as condições da proposição. Suponhamos primeiro que $\mu \geq 0$. Claramente as condições implicam $\lambda \geq 0$ e $\gamma \geq 0$. Seja então, $B \in \bar{A}$. Existem $A_n, D_n \in A$ com $A_n \subset B \subset D_n$ e $|\mu|(D_n - A_n) < \frac{1}{n}$.

Podemos tomar A_n crescente (seja $A'_i = \bigcup_{n=1}^i A_n$) e D_n decrescente. Isto implica

$$\lambda(B - A_n) \leq \lambda(D_n - A_n) = \mu(D_n - A_n) < 1/n$$

$$\Rightarrow \lambda(B) < \lambda(A_n) + 1/n = \mu(A_n) + 1/n \text{ pois } \lambda \text{ é f.a.}$$

$$\Rightarrow \lambda(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n). \text{ Como } \mu(A_n) = \lambda(A_n) \leq \lambda(B), \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lambda(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n). \text{ Como o mesmo vale para } \gamma \text{ segue } \lambda = \gamma.$$

Para o caso geral notamos que $\lambda^+ = \frac{1}{2}(\lambda + |\lambda|)$ e portanto $\lambda^+|_A = \gamma^+|_A$ donde sai $\lambda^+ = \gamma^+$. Como o mesmo resultado é válido para λ^- e γ^- segue a igualdade.

Vamos ver agora a existência da função $\bar{\mu}$. Pela prova da unicidade vemos que a tentativa natural é a seguinte. Dada $B \in \bar{A}$ escolhamos A_n e D_n como acima e definimos

$$\mu(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

Suponhamos primeiro $\mu \geq 0$. Neste caso dada outra sequência A'_n, D'_n nas condições acima como $D'_n \supset A_n \Rightarrow \mu(D'_n) \geq \mu(A_n) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(D'_n) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$ (os limites existem pois A_n é crescente D'_n é decrescente e μ é monótona). Da mesma forma

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(D_n) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A'_n)$$

e como obviamente $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(D_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(D'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A'_n)$

segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A'_n)$ e $\bar{\mu}(B)$ está bem definida.

Claramente $\bar{\mu}$ é limitada. Vamos provar que $\bar{\mu}$ é f.a. Sejam $B_1, B_2 \in \bar{A}$, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Sejam $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sequências satisfazendo as hipóteses da definição de $\bar{\mu}$ para B_1 e B_2 respectivamente. Então $\{A_n \cup E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência que satisfaz as condições da definição para $B_1 \cup B_2$. Logo

$$\bar{\mu}(B_1 \cup B_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n \cup E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) + \mu(E_n) =$$

$$(A_n \subset B_1, E_n \subset B_2 \Rightarrow A_n \cap E_n = \emptyset) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = \bar{\mu}(B_1) + \bar{\mu}(B_2).$$

No caso geral existem μ_1 extensão de μ^+ e μ_2 extensão de μ^- . Tomamos $\bar{\mu} = \mu_1 - \mu_2$. ■

O resultado seguinte vai relacionar DS- μ -mensurável com a álgebra $\bar{A}$.

PROPOSIÇÃO 4.8. Sejam $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $A, \mu, \bar{A}$ e $\bar{\mu}$ como acima. Então f é DS- μ -mensurável se e só se f é $\bar{A}$ -mensurável e $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_e\{|f| > n\} = 0$.

DEMONSTRAÇÃO. ($\Rightarrow$). Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $a > b$. Tomamos $A = \{f > a\}$ $B = \{f > b\}$. Sejam $\varepsilon < (\frac{a-b}{2}) \wedge 1$ e E_ε , $\{E_\varepsilon^i\}_{i=1}^n$ a partição dada pelo Lema 4.6.

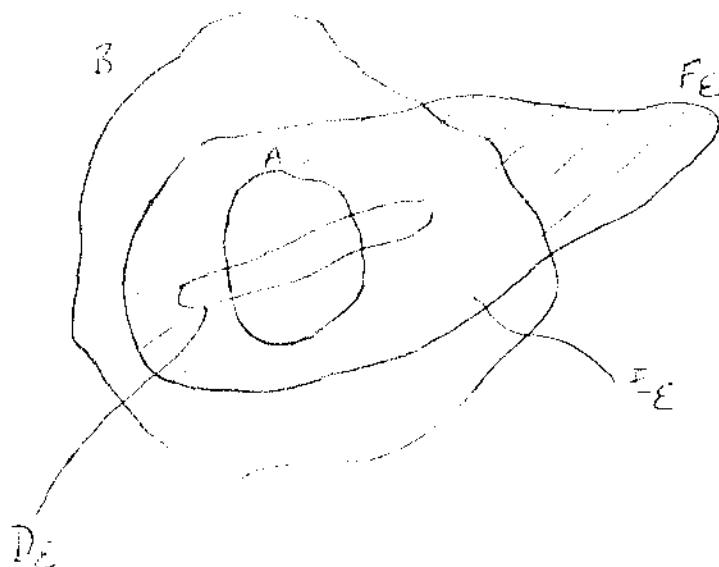
Seja $D_\varepsilon = \bigcup_{E_\varepsilon^i \cap A \neq \emptyset} E_\varepsilon^i$ (pode ser $\emptyset$).

Se $x \in E_\varepsilon^i \cap A$, então $\forall y \in E_\varepsilon^i$

$f(y) \geq f(x) - \varepsilon > a - (\frac{a-b}{2}) > b$. Logo $E_\varepsilon^i \subset B$ e $D_\varepsilon \subset B$.

Como $(\bigcup_{i=1}^n E_\varepsilon^i) \cup E_\varepsilon^c$ cobre X então $D_\varepsilon \cup E_\varepsilon^c = F_\varepsilon \supset A$ e

$|\mu|(F_\varepsilon - D_\varepsilon) < \varepsilon$. Temos a seguinte figura



Como $E_\epsilon \in A$, $f_2 = f|_{E_\epsilon}$ é DS- μ -mensurável. Aplico o mesmo raciocínio para $\epsilon_2 = \epsilon^2$, $A_2 = A - D_\epsilon$, $B_2 = B \cap F_\epsilon - D_\epsilon$. Então $A_2 = \{f_2 > a\}$, $B_2 = \{f_2 > b\}$. Acho E_{ϵ_2} , F_{ϵ_2} , $D_{\epsilon_2} \in A$ tal que $A_2 \subset F_{\epsilon_2}$, $B_2 \supset D_{\epsilon_2}$, $F_{\epsilon_2} = D_{\epsilon_2} \cup E_{\epsilon_2}$ e $|\mu|(E_{\epsilon_2}) < \epsilon^2$ e prossigo assim para ϵ^3 , ϵ^4 etc. Seja então $D = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_{\epsilon_i} \cup A$.

Por construção $A \subset D \subset B$. Além disso $\bigcup_{i=1}^k D_{\epsilon_i} \subset D$, $\bigcup_{i=1}^k D_{\epsilon_i} \in A$, $\bigcup_{i=1}^k D_{\epsilon_i} \cup E_{\epsilon_k} \supset D$ e pertence a A , $\forall k \in \mathbb{N}$. Além disso, a medida da diferença E_{ϵ_k} é a menor que $\epsilon^k \longrightarrow 0$. Logo $D \in \bar{A}$ e f é $\bar{A}$ -mensurável.

Seja agora $\epsilon > 0$. Por hipótese $\exists f_j$ - μ -simples com $\|f_j - f\| \leq \epsilon/2 \Rightarrow \mu_\epsilon \{ |f_j - f| > \epsilon \} < \epsilon/2 \Rightarrow \exists A_\epsilon \in A$ com $\{ |f_j - f| > \epsilon \} \subset A_\epsilon$ e $|\mu|(A_\epsilon) < \epsilon$. Se $f_j = \sum_{i=1}^r a_i \chi_{E_i}$ tomamos $n_0 > \sum_{i=1}^r |a_i| + \epsilon$.

Logo $|f(x)| > n_0 \Rightarrow x \in A_\varepsilon$ logo $\mu_e\{|f| > n_0\} < \varepsilon \Rightarrow$
 $\mu_e\{|f| > n\} < \varepsilon, \quad \forall n \in n_0$ donde segue a segunda condição.

($\Leftarrow$). Suponhamos agora f $\bar{A}$ -mensurável e $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_e\{|f| > n\} = 0$.

Dado $\varepsilon > 0$, seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu_e\{|f| > n_0\} < \varepsilon/4 \Rightarrow$
 $\exists A_\varepsilon \in A$ com $\{|f| > n_0\} \subset A_\varepsilon$ e $|\mu|(A_\varepsilon) < \varepsilon/2$.

Com $\arctg : \mathbb{R} \longrightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ é contínua ela é uniforme-
mente contínua em compactos. Sejam $\delta_1 = |\arctg n_0 - \arctg(n_0+1)|$ e
 δ_2 tal que se $x, y \in [-n_0-1, n_0+1]$ e $|\arctg x - \arctg y| < \delta_2$
 $\Rightarrow |x-y| < \varepsilon$ (*) (isto é possível pois $\arctg$ é contínua, unif.con-
tínua em compacto).

Seja $\delta = \delta_1 \wedge \delta_2$. Tomamos g $\bar{A}$ -simples com $\Delta(g, f) < \delta$.
 $g = \sum_{i=1}^s r_i \varphi_{A_i}$ com $|r_i| < +\infty$. Seja $E_i \in A$ com $E_i \subset A_i$ e
 $|\bar{\mu}|(A_i - E_i) < \frac{\delta}{2s}$ (isto implica $\mu_e(A_i - E_i) < \frac{\delta}{2s}$). Tomamos
 $f_\varepsilon = \sum_{i=1}^s r_i \varphi_{E_i}$. Então f_ε é μ -simples.

Seja $A = A_\varepsilon \cup \bigcup_{i=1}^s (A_i - E_i) \in A$ então

$\mu_e(A) \leq \mu_e(A_\varepsilon) + \sum_{i=1}^s \mu_e(A_i - E_i) < \varepsilon$. (pois μ_e é subaditiva).

Agora se $|f(x) - f_\varepsilon(x)| > \varepsilon$ então, ou

$$i) |f(x)| > n_0 \Rightarrow x \in A$$

$$ii) |f(x)| \leq n_0 \Rightarrow |g(x)| \leq n_0 + 1 \Rightarrow |f(x) - g(x)| < \epsilon \quad (\text{por } (*))$$

logo $x \in A_i - E_i$ para algum i (senão $g(x) = f_\epsilon(x)$) donde

$\{|f - f_\epsilon| > \epsilon\} \subset A_\epsilon$ e assim pelo lema 4.6 f é DS- μ -mensurável. ■

Traduzimos portanto DS- μ -mensurabilidade por $\bar{A}$ -mensurabilidade para uma álgebra maior (em geral) que A . Notamos que se $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_\epsilon\{|f| > n\} = 0$, então f A -mensurável $\Rightarrow f$ DS- μ -mensurável. Assim as DS- μ -mensurabilidade inclui de certo modo mais funções.

Observamos que se $A = \{\text{borelianos de } [0,1]\}$ e μ é a medida derivada do comprimento dos intervalos, então $\bar{A} = \{\text{Lebesgue de } [0,1]\}$ e $\bar{\mu}$ é a medida de Lebesgue em $[0,1]$.

Vamos agora relacionar a integrabilidade. Veremos que a conexão se dá novamente através da álgebra $\bar{A}$ e também pela medida f.a. $\bar{\mu}$.

PROPOSIÇÃO 4.9. Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é DS- μ -integrável se e só se f é $\bar{\mu}$ -integrável. Neste caso $D \int_X f d\mu = \int_X f d\bar{\mu}$.

DEMONSTRAÇÃO ($\Leftarrow$). Seja f $\bar{\mu}$ -integrável. Então f é $\bar{A}$ -mensurável.

Além disso, $|f|$ é $\bar{\mu}$ -integrável donde $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\mu}_e\{|f| > n\} = 0$ o que implica $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_e\{|f| > n\} = 0$ e portanto f é DS- μ -mensurável.

Escolhemos $f_n \longrightarrow f$ com f_n , $\bar{A}$ -simples $|f_n| \leq |f|$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Segue que

$$\int_X f d\mu = \lim_n \int_X f_n d\bar{\mu}.$$

Como f_n é $\bar{A}$ -simples, escolhemos g_n A -simples tal que $|f_n(x) - g_n(x)| < \frac{1}{2^n}$ em A_r^C com $|\mu|(A_n) < \frac{1}{2^n}$ e $A_n \in A$ e

$$\int_X |g_n - f_n| d|\bar{\mu}| < \frac{1}{2^n}.$$

É fácil ver que $g_n \xrightarrow{\mu\text{-medida}} f$ e além disso

$$D \int_X |g_m - g_n| d|\mu| = \int_X |g_m - g_n| d|\mu| = \int_X |g_m - g_n| d|\bar{\mu}|$$

pois g_n é A -simples e μ é f.a.

e esta última integral é $\leq$ que a seguinte integral

$$\begin{aligned} &\leq \int_X (|g_m - f_m| + |f_m - f_n| + |f_n - g_n|) d|\bar{\mu}| = \\ &= \int_X |g_m - f_m| d|\bar{\mu}| + \int_X |f_m - f_n| d|\bar{\mu}| + \int_X |f_n - g_n| d|\bar{\mu}| \end{aligned}$$

(todas $\bar{A}$ -mensuráveis simples e limitadas).

A 1^a e 3^a integral $\longrightarrow 0$ quando $n, m \longrightarrow +\infty$. Como $|f_m - f_n| \leq 2|f|$ e $\int_X |f| d|\bar{\mu}| < +\infty$ e $|f_m - f_n| \xrightarrow{\Delta} 0$ segue que a 2^a integral converge a 0. Logo pela definição f é DS μ -integrável e

$$\begin{aligned} D \int_X f d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} D \int_X g_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n d\bar{\mu} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\bar{\mu} = \int_X f d\bar{\mu}. \end{aligned}$$

($\Rightarrow$) Suponha f DS- μ -integrável e $f \geq 0$ e $\mu \geq 0$. Os outros casos se deduzem facilmente deste.

Como f é DS- μ -mensurável, então f é $\bar{A}$ -mensurável. Se f é limitada, então f é $\bar{\mu}$ -integrável, pois $|\mu|(X) < +\infty$. Neste caso

$$\int_X f d\bar{\mu} = D \int_X f d\mu \text{ pela primeira parte da demonstração.}$$

Para o caso geral, tomamos $f_n = f \wedge n$. Então f_n é $\bar{\mu}$ -integrável e

$$\int_X f_n d\bar{\mu} = D \int_X f_n d\mu \leq D \int_X f d\mu = M < +\infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Assim,

$$\int_X f d\bar{\mu} = \lim_n \int_X f \wedge n \, d\bar{\mu} \leq M < +\infty$$

logo f é $\bar{\mu}$ -integrável e claramente $\int_X f d\bar{\mu} = D \int_X f d\mu$. ■

Notamos que a hipótese $|\mu|(X) < +\infty$ foi essencial em muitos argumentos dessas proposições. Vejamos agora alguns exemplos mostrando as idéias desenvolvidas até agora.

EXEMPLO 1. Seja $X = \mathbb{N}$, A a álgebra gerada pelos conjuntos finitos e $\mu : A \longrightarrow \{0,1\}$ com $\mu(A) = \sum_{n \in A} \frac{1}{2^n}$. Então

1) f é A -mensurável se e $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) \in \overline{\mathbb{R}}$.

Já vimos que os ultrafiltros de A são os principais e o ultrafiltro dos cofinitos. Se $\bar{n}$ é ultrafiltro principal determinado por $n \in \mathbb{N}$, então $\exists \lim_{\bar{n}} f = f(n)$.

Seja agora β o ultrafiltro dos conjuntos cofinitos. Então

$$\begin{aligned} \liminf_{\beta} f &= \sup_{H \in \beta} \inf_{x \in H} f(x) = \sup_{H^c \text{ finito}} \inf_{x \in H} f(x) \geq \\ &\sup_n \inf_{x \geq n} f(x) . \end{aligned}$$

Mas se H^c é finito, seja n tal que $x \geq n \implies x \in H$ daí

$$\inf_{x \in H} f(x) \leq \inf_{x \geq n} f(x) \text{ e portanto } \liminf_{\beta} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{x \geq n} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) .$$

Sendo o segundo limite o limite inferior de uma sequência de números reais. Da mesma forma, $\limsup_{\beta} f = \limsup_{n \rightarrow +\infty} f(n)$. Assim,

$$\begin{aligned} \exists \lim_n f(n) \in \overline{\mathbb{R}} &\iff \liminf_{n \rightarrow \infty} f(n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f(n) \iff \liminf_{\beta} f = \\ &= \limsup_{\beta} f \iff \exists \lim_{\beta} f \iff \exists \lim_F f, \quad \forall F \in \mathcal{X} \iff f \text{ é } A\text{-men-} \\ &\text{surável.} \end{aligned}$$

2) $\bar{A} = P(\mathbb{N})$ pois dados $A \subset \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$, seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$ e $B = \{n_0 + 1, \dots\}$. Então $A \cup B \in A$, $A \cap B^C \in A$ e $A \cap B^C \subset A \subset A \cup B$ e

$$\mu(A \cup B - A \cap B^C) \leq \mu(B) = \frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon \quad \text{logo} \quad A \in \bar{A}.$$

iii) $\forall f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ é DS- μ -mensurável, pois f é $\bar{A}$ -mensurável e $\bar{\mu}(A) = \sum_{n \in A} \frac{1}{2^n}$ e como f assume somente valores reais

segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_e\{|f| > n\} = 0$.

EXEMPLO 2. Seja $A \subset P([0,1])$ a álgebra gerada pelos intervalos de $I = [0,1]$. Utilizando os resultados dos exemplos 6 e 10 do capítulo 1, vemos que existem $\lim_F f$ para qualquer ultrafiltro de A se existem os limites laterais de f em cada ponto de I . Por exemplo, se $x \neq 1$, então $\exists \lim_{\delta_x} f$ se e $\exists \lim_{y \rightarrow x^+} f(y)$. Logo f é

A -mensurável see tem limites laterais em todos os pontos. Seja $\mu : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dada pela medida usual dos intervalos estendida à álgebra A . Vamos provar que se f é limitada, então f é DS- μ -integrável see é integrável no sentido de Riemann.

Sabemos que $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitada é integrável see $\forall \delta > 0$

$$E_\delta = \{x \in [0,1] \text{ tal que } w(f;x) \geq \delta\}$$

tem conteúdo nulo, onde $w(f;x)$ é a oscilação de f em x (veja [4]).

Pelo lema 4.6 vemos que esta condição se traduz exatamente por ser f DS μ -mensurável. Neste caso é difícil caracterizar a álgebra $\bar{A}$ mas vemos facilmente que $Q \cap I \notin \bar{A}$. Além disso, nem todo aberto de $I \in \bar{A}$ e portanto nem todo mensurável segundo Lebesgue. Notamos portanto, que as funções DS- μ -mensuráveis incluem as funções contínuas, mas formam uma classe maior.

4.2. ESPAÇOS L^p

A partir da dedinição de A -mensurabilidade seria natural definirmos L^p , com o conjunto das funções f onde $|f|^p$ é μ -integrável, com a pseudométrica $(\int_X |f-g|^p d\mu)^{1/p}$.

Na realidade a expressão $|f-g|$ pode não fazer sentido, como por exemplo f e g valem simultaneamente $+\infty$, e além disso

mesmo quando $(f-g)$ está bem definida pode ser que não seja A -mensurável. Mais geralmente f e g A -mensuráveis e $f+g$ bem definida não implica $f+g$ A -mensurável. Isto é uma patologia introduzida pelo conceito de A -mensurabilidade e portanto, devemos ter muito cuidado nas operações algébricas com funções A -mensuráveis.

Por outro lado, lembramos que se f e g são A -mensuráveis e limitadas, então $f+g$ é mensurável. A idéia então, é tornar as funções limitadas. Obtemos isto da seguinte maneira:

Seja $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ e $n \in \mathbb{N}$. Definimos

$$R_n(f) = (-n) \vee (f \wedge n).$$

em termos gráficos:

Além disso, se f é A -mensurável, então $R_n(f)$ é A -mensurável, $\forall n \in \mathbb{N}$. p denotará nesta secção um número real ≥ 1 . Se $f \geq 0$ é A -mensurável, então f^p é A -mensurável. Neste caso,

se $f, g \in M(X, A)$, podemos calcular

$$a_n = \left(\int_X |R_n(f) - R_n(g)|^P d|\mu| \right)^{1/P}$$

Como $|R_n(f) - R_n(g)|$ é uma função crescente de n existe o limite

$$d_p(f, g) := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_X |R_n(f) - R_n(g)|^P d|\mu| \right)^{1/P}$$

Vamos agora mostrar que d_p é uma pseudométrica. Primeiramente vamos estudar quando $d_p(f, g) = 0$. Para isto, vamos usar propriedades do espaço de Stone $\tilde{X}$.

Sejam $\mu : A \longrightarrow \mathbb{R}$ f.a.l. e $\tilde{X}, \tilde{A}, \tilde{A}_\sigma$ e $\tilde{\mu}$ como definidas anteriormente. Chamamos de *suporte* de μ o conjunto

$$S(\mu) = \{A \in A : |\mu|(A) = |\mu|(X)\}$$

se $|\mu|(X) = 0$, $S(\mu) = A$. Caso contrário, como $|\mu|$ é f.a.l., $S(\mu)$ é um filtro de A . Denotamos por $\tilde{S}_\mu$ o subconjunto dos ultrafiltros de A que contêm o suporte de μ ou seja

$$\tilde{S}_\mu = \{\beta \in \tilde{X} : S(\mu) \subset \beta\}$$

Chamamos $\tilde{S}_\mu$ de *s-suporte* de μ . Vale o seguinte resultado:

PROPOSIÇÃO 4.10. $\tilde{S}_\mu$ é o único fechado de $\tilde{X}$ que satisfaz $\forall A \in \tilde{A}_0$ aberto de $\tilde{X}$, $|\tilde{\mu}|(A)=0$ se e só se $A \cap \tilde{S}_\mu = \emptyset$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $D \in S(\mu)$. Se $\beta \in \tilde{S}_\mu \Rightarrow S(\mu) \subset \beta \Rightarrow D \in \beta \Rightarrow \beta \in \tilde{D}$. Logo $\tilde{S}_\mu \subset \bigcap_{D \in S(\mu)} \tilde{D}$.

Suponhamos que $\beta \in \bigcap_{D \in S(\mu)} \tilde{D}$. Então, $\forall D \in S(\mu)$, $\beta \in \tilde{D} \Rightarrow$

$D \in \beta \Rightarrow S(\mu) \subset \beta \Rightarrow \beta \in \tilde{S}_\mu$. Logo $\tilde{S}_\mu = \bigcap_{D \in S(\mu)} \tilde{D}$. Como $\tilde{D}$ é

fechado, $\forall D \in A$ segue que $\tilde{S}_\mu$ é fechado.

Como $\{\tilde{B}, B \in A\}$ forma uma base para $\tilde{X}$ e $A \in \tilde{A}_0$ é aberto $\Rightarrow$
 $A = \bigcup_{j \in J} \tilde{B}_j$ com $B_j \in A$.

Se $|\tilde{\mu}|(A) = 0$, então $|\tilde{\mu}|(\tilde{B}_j) = 0 \Rightarrow |\mu|(B_j) = 0 \Rightarrow$
 $|\mu|(X - B_j) \Rightarrow (X - B_j) = \emptyset \Rightarrow B_j^c \in S(\mu) \Rightarrow \tilde{S}_\mu \subset \tilde{B}_j^c \Rightarrow \tilde{S}_\mu \cap \tilde{B}_j = \emptyset$, $\forall j \in J$
 donde $\tilde{S}_\mu \cap A = \emptyset$.

Vamos agora provar a volta. Seja A aberto, $A \in \tilde{A}_0$ e $A \cap \tilde{S}_\mu = \emptyset$, então $A \subset \bigcup_{D \in S(\mu)} D^c$. Queremos provar que $|\tilde{\mu}|(A) = 0$.

Pelo teorema de extensão de Caratheodory (veja [3], Teorema III, 5.14) $|\tilde{\mu}|$ é regular e portanto, $|\tilde{\mu}|(A) = \sup \{ |\tilde{\mu}|(K), \text{ onde } K \subset A, K \text{ compacto}, K \in \tilde{A}_0 \}$. Agora se, $K \subset A$, então $K \subset \bigcup_{D \in S(\mu)} D^c$

e como D^c é aberto, $K \subset \bigcup_{i=1}^n D_i^c$ onde $D_i^c \in S(\mu)$. Assim,

$$|\tilde{\mu}|(k) \leq \sum_{i=1}^n |\tilde{\mu}|(D_i^C) = \sum_{i=1}^n |\mu|(D_i^C). \text{ Como } D_i \in S(\mu), |\mu|(D_i) =$$

$$|\mu|(X) \Rightarrow |\mu|(D_i^C) = 0 \Rightarrow |\tilde{\mu}|(k) = 0. \text{ Logo } |\tilde{\mu}|(A) = 0.$$

Seja agora B com as propriedades acima. Consideremos B^C que é aberto, $B^C = \bigcup_{j \in J} \tilde{A}_j$ onde $A_j \in A$, $\forall j \in J$. Como $\tilde{A}_j \in \tilde{A}_\sigma$ e $\tilde{A}_j \cap B = \emptyset \Rightarrow |\tilde{\mu}|(\tilde{A}_j) = 0 \Rightarrow \tilde{A}_j \subset S_\mu^C \Rightarrow B^C \subset S_\mu^C$. Da mesma forma, provamos $S_\mu^C \subset B^C$, donde sai a igualdade. ■

Utilizando estes fatos, podemos provar o seguinte resultado:

TEOREMA 4.11. *Sejam f e g A -mensuráveis e $\mu : A \longrightarrow \mathbb{R}$ f.a.l. Então, são equivalentes:*

- i) $|\tilde{\mu}|(\{\tilde{f} \neq \tilde{g}\}) = 0$
- ii) $\tilde{f} = \tilde{g}$ em $\tilde{S}_\mu$
- iii) $\int_X |R_n(f) - R_n(g)| d|\mu| = 0, \forall n \in \mathbb{N}$

DEMONSTRAÇÃO. Observamos que como $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ são $\tilde{A}$ -mensuráveis e em particular $\tilde{A}_\sigma$ -mensuráveis, e como $\tilde{A}_\sigma$ é uma σ -álgebra, então $\{\tilde{f} \neq \tilde{g}\} \in \tilde{A}_\sigma$, portanto i) faz sentido.

i) $\Longleftrightarrow$ ii). Como $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ são contínuas $\{\tilde{f} \neq \tilde{g}\}$ é aberto. Assim

ii) $\Longleftrightarrow \{\tilde{f} \neq \tilde{g}\} \cap S_\mu = \emptyset \Rightarrow |\tilde{\mu}|(\{\tilde{f} \neq \tilde{g}\}) = 0$ pela proposição anterior.

Para continuar a demonstração vamos utilizar o seguinte resultado auxiliar.

Se $h \in M^+(X, A)$ então $\int_X h d|\mu| = 0$ se e somente se $\limsup_{S(\mu)} h = 0$.

Vamos denotar $S(\mu)$ por F para não confundir com $\tilde{S}_\mu$.

Suponhamos então, $\limsup_{S(\mu)} h = 0$. Seja $\mu_e = |\mu|^*$. Tomamos $\tau > 0$. Então, como $\limsup_F h = \inf_{H \in F} \sup_{x \in H} h(x) = 0$, $\exists H_\tau$ com

$\sup_{x \in H_\tau} h(x) < \tau$. Assim

$$\int_X h d|\mu| = \int_X h d\mu_e = \int_{(0, +\infty)} \mu_e\{h > \tau\} d\tau$$

e como $\{h > \tau\} \subset H_\tau^C$ e $H_\tau \in S(\mu) \Rightarrow |\mu|(H_\tau^C) = 0$ segue que

$$\mu_e\{h > \tau\} = 0, \quad \forall \tau > 0 \Rightarrow \int_X h d|\mu| = 0.$$

Se por outro lado, $\int_X h d|\mu| = 0 \Rightarrow \int_{(0, +\infty)} \mu_e\{h > \tau\} d\tau = 0$

$\Rightarrow \mu_e\{h > \tau\} = 0, \quad \forall \tau > 0$. Dado $\varepsilon > 0$ seja $A \in A$ tal que

$$\{h > \varepsilon\} \subset A \subset \{h > \varepsilon/2\}$$

Como $\mu_e\{h > \varepsilon/2\} = 0 \Rightarrow |\mu|(A) = 0 \Rightarrow |\mu|(A^C) = |\mu|(X)$,

$A^C \in S(\mu)$ e $A^C \subset \{h \leq \varepsilon\} \Rightarrow \inf_{H \in F} \sup_{x \in H} h(x) \leq \varepsilon$. Logo, como ε é

arbitrário, $\limsup_{S(\mu)} h = 0$.

Vamos agora provar que se $f \in M^+(X, A)$ e $F = S(\mu)$, então $\limsup_F f = \sup_{\tilde{S}_\mu} f$.

Se $\beta \in \tilde{S}_\mu \Rightarrow \tilde{f}(\beta) = \lim_\beta f = \limsup_\beta f = \inf_{H \in \beta} \sup_{x \in H} f(x)$ e

como $F \subset \beta$ isto é $\leq \inf_{H \in F} \sup_{x \in H} f(x) = \limsup_F f$. Assim,

$\sup_{\tilde{S}_\mu} \tilde{f} \leq \limsup_F f$.

Por outro lado, suponhamos que $\limsup_F f = d \in \mathbb{R}$. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $b < a < d$ e $B \in A$ tal que $\{f > a\} \subset B \subset \{f > b\}$. Logo, $\forall H \in F$, $\exists x \in H$ com $f(x) > a \Rightarrow H \cap B \neq \emptyset \Rightarrow \exists$ ultra-filtro β de A contendo $F \cup \{B\}$.

Assim $\tilde{f}(\beta) = \liminf_\beta f \geq \inf_{x \in B} f(x) \geq b$. Logo $\sup_{\tilde{S}_\mu} \tilde{f} \geq b$

pois $\beta \in \tilde{S}_\mu$. Como $b < d$ é arbitrário, $\sup_{\tilde{S}_\mu} \tilde{f} \geq \limsup_F f$, e temos a igualdade.

De maneira análoga é a prova para $\limsup_F f = +\infty$. Assim $\int_X h d|\mu| = 0$ se e só se $\sup_{\tilde{S}_\mu} \tilde{h} = 0 \Leftrightarrow \tilde{h} = 0$ em $\tilde{S}_\mu$.

Seja agora $h = |R_n(f) - R_n(g)|$. Então, $h \in M^+(X, A)$, $\tilde{h} = |R_n(f) - R_n(g)|$ e como $|R_n(f) - R_n(\tilde{g})|$ e ambas as funções iguais, $\forall x : x \in X$ segue que $\tilde{h} = |R_n(\tilde{f}) - R_n(\tilde{g})|$. Assim, iii) $\Leftrightarrow |R_n(\tilde{f}) - R_n(\tilde{g})| = 0$ em $\tilde{S}_\mu$, $\forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \tilde{f} = \tilde{g}$ em $\tilde{S}_\mu =$ ii). ■

Dizemos que duas funções são μ -iguais se satisfazem qualquer uma (e portanto, todas) das condições do teorema. Como

$$\limsup_F h = 0 \iff \limsup_F h^p \quad \forall h \in M^+(X, A) \quad , \quad \forall p \quad , \quad 1 < p < +\infty$$

segue que f e g são μ -iguais se $d_p(f, g) = 0$.

Quando A é uma σ -álgebra, $\tilde{A}$ é σ -álgebra e qualquer aberto do espaço de Stone $\in \tilde{A}$. Neste caso $\{\tilde{f} \neq \tilde{g}\} \in \tilde{A}$ e daí $\{f \neq g\} \in A$. Logo f e g são μ -iguais $\implies |\mu|\{f \neq g\} = 0$. Claro que se $|\mu|\{f \neq g\} = 0$, então f e g são μ -iguais.

Vamos agora ver que d_p é uma pseudométrica. Primeiramente vamos demonstrar um resultado similar ao Lema de Holder.

Suponhamos $f, g, h \in M^+(X, A)$ com $|f|^p$, $|g|^p$, $|h|^p$ μ -integráveis. Queremos mostrar $d_p(f, g) \leq d_p(f, h) + d_p(h, g)$.

PROPOSIÇÃO 4.11 (Lema de Holder para integrais monótonas). *Sejam $f, g \in M^+(X, A)$ com $|f|^p$ e $|g|^q$ μ -integráveis, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se*

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d|\mu| \right)^{1/p} < +\infty \quad \text{e} \quad \|g\|_q = \left(\int_X |g|^q d|\mu| \right)^{1/q} < +\infty$$

e f e g limitadas, então fg é μ -integrável e

$$\|fg\|_1 = \int_X |fg| d|\mu| < \|f\|_p \|g\|_q .$$

DEMONSTRAÇÃO. Caso $\|f\|_p = 0$ segue $\limsup_F |f| = 0$ ($F = S(\mu)$) e como g é limitada, $\limsup_F |fg| = 0 \Rightarrow \|fg\|_1 = 0$. O mesmo ocorre se $\|g\|_q = 0$, donde sai trivialmente o resultado.

Suponhamos $\|f\|_p \neq 0$, $\|g\|_q \neq 0$. Da mesma forma da demonstração clássica, obtemos

$$|f(x) \cdot g(x)| \leq \frac{1}{p} |f(x)|^p + \|f\|_p^{1-p} \|g\|_q + \\ + \frac{1}{q} |g(x)|^q + \|g\|_q^{1-q} \|f\|_p.$$

Como f e g são limitados $|fg| \in M^+(X, A)$. Como $|\mu|$ é subaditiva, em particular, então vale a subaditividade da integral para funções mensuráveis (veja [10]). Logo

$$\|fg\|_1 = \int_X |f(x)g(x)| d|\mu| \leq \frac{1}{p} \|f\|_1^{1-p} \|g\|_q \int_X |f(x)|^p d|\mu| + \\ + \frac{1}{q} \|g\|_q^{1-q} \|f\|_p \int_X |g(x)|^q d|\mu| = \|f\|_p \|g\|_q.$$

logo fg é μ -integrável e segue o resultado. ■

Da mesma forma que em [3], usando o resultado de subaditividade de [10] prova-se que

$$\left(\int_X |R_n(f) - R_n(h)|^p d|\mu| \right)^{1/p} \leq \left(\int_X |R_n(f) - R_n(g)|^p d|\mu| \right)^{1/p} \\ + \left(\int_X |R_n(g) - R_n(h)|^p d|\mu| \right)^{1/p}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tomamos o sup do lado direito e depois do lado esquerdo, e obtemos

$$d_p(f,h) \leq d_p(f,g) + d_p(g,h)$$

que é a desigualdade de Minkowski. Utilizando estes fatos, temos a proposição seguinte.

PROPOSIÇÃO 4.12. d_p definido como acima é pseudométrica.

DEMONSTRAÇÃO. Claramente, pela definição $d_p(f,g) \geq 0$ e $d_p(f,g) = d_p(g,f)$, $\forall f,g \in M^+(X,A)$. Como provamos que d_p satisfaz a desigualdade triangular, então d_p é pseudométrica.

Vamos definir agora os espaços L^P .

DEFINIÇÃO 4.13. Seja $L^P(X,A,\mu)$ o conjunto das funções f A -mensuráveis tal que $|f|^P$ é μ -integrável. (L_p, d_p) é um espaço pseudométrico. A relação $f \sim g$ se $d_p(f,g) = 0$ é uma relação de equivalência em $L_p(X,A,\mu)$. Definimos $L^P(X,A,\mu) = L(X,A,\mu)/\sim$ e assim $L^P(X,A,\mu)$ é um espaço métrico.

Observamos que f é μ -integrável se f é $|\mu|$ -integrável, se $|f|$ é $|\mu|$ -integrável. Denotamos a métrica em $L^P(X,A,\mu)$ também por d_p e algumas vezes abreviamos $L^P(X,A,\mu)$ por L^P . Elementos de $L^P(X,A,\mu)$ são classes de funções A -mensuráveis μ -iguais. Da mesma forma que acima, posso definir $L^P(\tilde{X}, \tilde{A}_\sigma, \tilde{\mu})$ e

$L^P(\tilde{X}, \tilde{A}_0, \tilde{\mu})$. As seguintes relações entre estes dois espaços são válidas.

PROPOSIÇÃO 4.14. Sejam $f, g \in M(X, A)$ e $\mu \in M(A)$. Definimos $|f - g| = 0$ quando ambas f e g valem $+\infty$ ou $-\infty$. O mesmo vale para $|\tilde{f} - \tilde{g}|$. (Notamos que $+\infty - (-\infty) = +\infty$ está bem definida). Neste caso

$$1) f \in L^P(X, A, \mu) \iff \tilde{f} \in L^P(\tilde{X}, \tilde{A}_0, \tilde{\mu})$$

$$2) L^P(X, A, \mu) = L^P(X, A, |\mu|)$$

$$3) d_p(f, g) = \left(\int_{\tilde{X}} |\tilde{f} - \tilde{g}|^P d|\tilde{\mu}| \right)^{1/P}$$

$$4) d_p(f, g) = \left(\int_X |f - g|^P d\mu' \right)^{1/P} \text{ onde } \mu' : P(X) \longrightarrow [0, +\infty)$$

$$\text{monótona com } \mu'|_A = |\mu|.$$

DEMONSTRAÇÃO 1). $f \in L^P(X, A, \mu) \iff f$ é A -mensurável e $|f|^P$ é μ -integrável. Pela proposição 4.5

$$\int_{\tilde{X}} |\tilde{f}|^P d|\tilde{\mu}| = \int_X |f|^P d|\mu| = \int_X |f|^P d|\mu| < +\infty$$

assim $\tilde{f} \in L^P(\tilde{X}, \tilde{A}_0, \tilde{\mu})$ e vice-versa.

$$\begin{aligned} 2) |f|^P \text{ é } \mu\text{-integrável} &\iff \left| \int_X |f|^P d\mu^+ - \int_X |f|^P d\mu^- \right| < +\infty \\ &\iff \left| \int_X |f|^P d\mu^+ + \int_X |f|^P d\mu^- \right| < +\infty \iff |f|^P \text{ é } |\mu|\text{-integrável.} \end{aligned}$$

3) Seja $\psi_n := |R_n(\tilde{f}) - R_n(\tilde{g})|^P$. Então ψ_n é contínua, $\forall n \in \mathbb{N}$ e portanto $\tilde{A}$ -mensurável. Em particular $\tilde{A}_\sigma$ -mensurável. ψ_n é uma sequência crescente e portanto converge a uma função ψ que é $\tilde{A}_\sigma$ -mensurável, pois $\tilde{A}_\sigma$ é σ -álgebra. Pela construção e pela convenção na hipótese segue que $\psi = |\tilde{f} - \tilde{g}|^P$. Como $\tilde{f} \in L^P(X, \tilde{A}_\sigma, \tilde{\mu})$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mu}(\{|\tilde{f}| > n\}) = 0$.

Logo dado $\epsilon > 0$, escolhemos n_1 com $\tilde{\mu}(\{|\tilde{f}| > n_1\}) < \epsilon/4$. Assim, $\exists A \in \tilde{A}$ com $\{|\tilde{f}_n| > n_1\} \subset \tilde{A}$ e $|\mu|(A) < \epsilon/2$. Analogamente para g , $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ e $B \in \tilde{A}$ com $\{|\tilde{g}| > n_2\} \subset \tilde{B}$ e $|\mu|(B) < \epsilon/2$.

Assim, em $\tilde{C} = \widetilde{(A \cup B)^c}$ temos $|\tilde{f}| < n$ e $|\tilde{g}| < n$ onde $n = n_1 \vee n_2$ e $|\tilde{\mu}|(\tilde{C}^c) < \epsilon$. Em $\tilde{C}$ a convergência $\psi_n \rightarrow \psi$ é uniforme, logo pelo teorema 2.18, $\int_{\tilde{X}} d|\tilde{\mu}| = \lim_n \int_{\tilde{X}} \psi_n d|\tilde{\mu}|$ o que implica 3).

4) Aplicando o mesmo raciocínio de 3) vemos que 4) vale. Logo podemos calcular $d_p(f, g)$ em função da medida externa μ_e de $|\mu|$ ou em função da medida interna μ_i ou qualquer outra. Notamos que com a convenção adotada sobre $|f - g|$ segue que esta função é Λ -mensurável se f e g o forem e estiverem em L^P . Mas pode ocorrer que mesmo nestas condições $f - g \notin M(X, \Lambda)$ embora o seu módulo esteja. ■

Vejamos agora que os espaços $L^P(\tilde{X}, \tilde{A}_\sigma, \tilde{\mu})$ são parecidos com os usuais e neste caso são completos.

PROPOSIÇÃO 4.15. O espaço métrico $L^P(\tilde{X}, \tilde{A}_\sigma, \tilde{\mu})$ é um completamento de $L^P(X, A, \mu)$.

DEMONSTRAÇÃO. $\tilde{A}_\sigma$ é uma σ -álgebra e $\tilde{\mu}$ é σ -aditiva e portanto $\tilde{A}_\sigma$ -mensurável tem o sentido usual da teoria da medida. O espaço $L^P(\tilde{X}, \tilde{A}_\sigma, \tilde{\mu})$ é parecido com L^P usual. Para provar que é completo demonstra-se o Lema de Fatou (agora para convergência simples), o teorema da convergência dominada a partir daí, da mesma forma que o caso clássico deduz-se que $L^P(\tilde{X}, \tilde{A}_\sigma, \tilde{\mu})$ é completo.

Vamos somente demonstrar a linearidade da integral. Se $f \in L^P(\tilde{X}, \tilde{A}_\sigma, \tilde{\mu})$ então $A = \{|\tilde{f}| = +\infty\} \in \tilde{A}_\sigma$ e $|\tilde{\mu}|(\{|\tilde{f}| = +\infty\}) = 0$. Logo tomamos $g : \tilde{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g = f \text{ em } A^C, \quad g = 0 \text{ em } A.$$

Vemos facilmente que f e g são $\tilde{\mu}$ -iguais $\implies d_p(f, g) = 0$. Logo, vamos trabalhar somente com funções a valores reais. Isto foi possível porque $\tilde{A}_\sigma$ é σ -álgebra e $\tilde{\mu}$ σ -aditiva. Assim, se f e g são $\tilde{A}_\sigma$ -mensuráveis, $f+g$ é $\tilde{A}_\sigma$ -mensurável. Além disso, como d_p é pseudométrica e invariante por translações, segue que $f + g \in L^P(\tilde{X}, \tilde{A}_\sigma, \tilde{\mu})$. Assim, $L^P(\tilde{X}, \tilde{A}_\sigma, \tilde{\mu})$ é um espaço vetorial. Definimos $\tilde{\mu}_e = (\tilde{X}) \longrightarrow [0, +\infty)$ da forma usual

$$\tilde{\mu}_e(A) = \inf_{B \in \tilde{A}_\sigma, A \subset B} \{|\tilde{\mu}|(B)\}, \quad \forall A \subset X.$$

A classe β dos conjuntos $\tilde{\mu}_e$ -mensuráveis segundo Caratheodory (veja def. 2.14), isto é das $B \subset \tilde{X}$ tal que

$$\tilde{\mu}_e(A) = \tilde{\mu}_e(A \cap B) + \tilde{\mu}_e(A \cap B^c), \quad \forall A \subset \tilde{X}$$

é uma σ -álgebra de $P(\tilde{X})$ que contém $\tilde{A}_\sigma$. Se g é $\tilde{A}_\sigma$ -mensurável, então g é $\tilde{\mu}_e$ -mensurável. Neste caso, pelo Teorema 2.15

$$f, g \in M^+(\tilde{X}, \tilde{A}_\sigma) \implies \int_X (f+g) d\tilde{\mu}_e = \int_X f d\tilde{\mu}_e + \int_X g d\tilde{\mu}_e.$$

Portanto, a integral é linear para funções $\tilde{A}_\sigma$ -mensuráveis positivas e portanto para funções $\tilde{A}_\sigma$ -mensuráveis integráveis. A partir disto, procede-se exatamente como no caso clássico (veja por exemplo [1]).

Logo $L^P(\tilde{X}, \tilde{A}_\sigma, \tilde{\mu})$ é completo. Vamos agora provar que é complemento de $L^P(X, A, \mu)$. Seja

$$\psi : L^P(X, A, \mu) \longrightarrow L^P(\tilde{X}, \tilde{A}_\sigma, \tilde{\mu})$$

$$\psi : f \longrightarrow \tilde{f}$$

Pela proposição 4.5 ψ é uma isometria e falta provar que a imagem de ψ é densa em $L^P(\tilde{X}, \tilde{A}_\sigma, \tilde{\mu})$. A imagem de ψ é exatamente o conjunto das funções $f : \tilde{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínuas, $f \in L^P(\tilde{X}, \tilde{A}_\sigma, \tilde{\mu})$. Rudin ([14] teo. 3.14, pg. 68) prova que o conjunto das funções contínuas com suporte compacto é denso em L^P , usando o teorema de Lusin

como passo intermediário. Tal prova pode ser utilizada para os espaços L^P aqui definidos fornecendo o resultado que desejamos. ■

Não é verdade que os espaços $L^P(X, A, \mu)$ são sempre completos, como mostram os exemplos.

EXEMPLO 3. Seja $X = \mathbb{N}$ e $A =$ álgebra gerada pelos conjuntos finitos e $\mu(A) = \sum_{i \in A} \frac{1}{2^i}$ como no exemplo 1 deste capítulo. Seja

$f_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_n = (1, 0, 1, \dots, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, \dots)$$

↓
posição $2n-1$

Logo f_n é A -mensurável e $|f_n|^p$ é μ -integrável, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall p$, $1 \leq p < +\infty$ e portanto, $f_n \in L^p(X, A, \mu)$. Além disso, $f_n - f_m$, $n > m$, só diferem entre as posições $2m+1$ e $2n-1$.

Logo

$$\int_X |f_n - f_m|^p d\mu = \int_{(0, +\infty)} \mu\{|f_n - f_m|^p > \tau\} d\tau \longrightarrow 0$$

quando $n, m \longrightarrow \infty$ pois $\{|f_n - f_m|^p > \tau\} \subset \{2m+1, 2m+2, \dots\} = A$ e $\mu(A) = \frac{1}{2^{2m}} \longrightarrow 0$. Assim f_n é uma sequência de Cauchy em

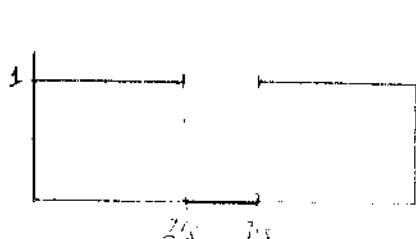
$L^p(X, A, \mu)$.

Mas se $\exists f \in L^p(X, A, \mu)$ com $f = \lim_n f_n$ em L^p , então deve haver convergência coordenada a coordenada e daí $f = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$.

Mas não existe $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$ e logo f não é A -mensurável, portanto $f \notin L^p(X, A, \mu)$. Assim f_n não tem limite e $L^p(X, A, \mu)$ não é completo.

EXEMPLO 4. Sejam $X = [0, 1]$, $A =$ álgebra gerada pelos intervalos, μ medida de Lebesgue como no exemplo 2.

Consideremos uma sequência construída a partir de um conjunto de tipo de Cantor:



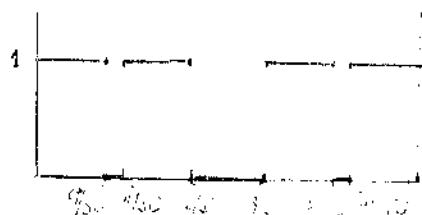
ψ_{A_1}

$$A_0 = [0, 1]$$

$$A_1 = A_0 - (2/5, 3/5)$$

$$A_2 = A_1 - \{(9/50, 11/50) \cup (39/50, 41/50)\}$$

ψ_{A_2}



E assim por diante. Em cada passo, tiramos $(5 \cdot 2^{n-1})$ de cada intervalo fechado restante.

Seja $f_n = \psi_{A_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Logo f_n é A -mensurável, $|f_n|^p$ é μ -integrável, $\forall p$, $1 \leq p < +\infty$ e é fácil ver que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(X, A, \mu)$. Seja $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Então, A^c é denso em $[0, 1]$.

Se f_n converge a alguma função em $L^p(X, A, \mu)$ deve ser para a função nula. Mas

$$d_p(f_n, 0) = 1 - \frac{1}{5} - \frac{2}{25} - \dots - \frac{2^{n-1}}{5^n} = 1 - \frac{1}{5} \left(1 + \frac{2}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right)$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{5} \frac{1}{1-2/5} = 2/3 .$$

Logo $d_p(f_n, 0) \not\rightarrow 0$. Assim, f_n não converge e L^p não é completo.

Observamos que a introdução do espaço de Stone ajuda muito, pois os espaços L^p a estes associados são completos e parecidos com os L^p clássicos. Vimos também como no caso de DS ([3]) que nem todos os L^p são completos, mas determinamos um completamento que foi justamente o espaço L^p do espaço de Stone. Notamos que a hipótese $|\mu|(X) < +\infty$ foi essencial em todo desenvolvimento.

4.3. CRITÉRIOS DE COMPLETUDE

Vamos agora analisar quando um espaço L^p é completo. Para tanto, iremos determinar uma condição sobre a álgebra A e a medida μ que é necessária e suficiente, a qual será uma condição do tipo de convergência de conjuntos. Vamos determinar também quando (D) $L^p(X, A, \mu)$ (espaço L^p segundo Dunford-Schwartz [3]) é completo. Também veremos uma condição necessária para a completude e um teorema de "acoplamento" de espaços L^p .

Veremos primeiramente um resultado auxiliar.

LEMA 4.16. Sejam $B \subset P(X)$ uma álgebra de conjuntos e $\nu : B \longrightarrow [0, +\infty)$ uma medida σ -aditiva. Indicamos por B_σ a σ -álgebra gerada por B e por $\bar{\nu}$ a única medida σ -aditiva que estende ν a B_σ . Então são equivalentes:

i) Para cada $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B$, A_n crescente, $\exists A \in B$ com $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(A \Delta A_n) = 0$ onde $A \Delta B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$;

ii) Para cada $A \in B_\sigma$, $\exists A' \in B$ com $\bar{\nu}(A \Delta A') = 0$

iii) Cada função f B_σ -mensurável é $\bar{\nu}$ -igual a uma função B -mensurável.

DEMONSTRAÇÃO. A existência e unicidade de $\bar{\nu}$ são garantidas pelos teoremas de Caratheodory e Hahn respectivamente, as quais fornecem a forma de $\bar{\nu}$

$$\bar{\nu}(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \nu(B_i) : \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \supset A, B_i \in B \right\}; \quad \forall A \in B_\sigma.$$

Nesta definição podemos supor os B_i disjuntos dois a dois.

i) $\implies$ ii). Seja $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ satisfazendo as condições acima. Podemos tomar B_i disjuntos 2 a 2. Por i) $\exists B \in A$ com

$$\lim_i \nu(B \Delta \bigcup_{j=1}^i B_j) = 0 \quad \text{logo} \quad \lim_i \nu(B \cap (\bigcup_{j=1}^i B_j)^c) = 0$$

e como $\bar{\nu}(B \cap B_1^c) < +\infty$, $B \cap (\bigcup_{j=1}^i B_j)^c$ é decrescente e $\bar{\nu}$ é

σ -aditiva, então $\bar{v}(B \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j)^C) = 0$. Da mesma forma

$\bar{v}((\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) \cap B^C) = 0$. Logo se $D = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$, então $\bar{v}(D \Delta B) = 0$ e

$D \in \mathcal{B}_{\sigma}$. Logo $\bar{v}(B) = \bar{v}(D) = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{v}(B_j) \geq \bar{v}(A)$. Como $D \supset A$,

$\bar{v}(A \cap D^C) = 0 \implies \bar{v}(A \cap B^C) = 0$. (pois $\bar{v}(D \cap B^C) = 0$).

Logo

$$\bar{v}(A) \geq \inf \{ v(B) \mid B \in \mathcal{B} \text{ e } \bar{v}(A - B) = 0 \}.$$

Além disso, se $\bar{v}(A - B) = 0$ e $B \in \mathcal{B}$ temos

$$\bar{v}(A) = \bar{v}(A \cap B^C) + \bar{v}(A \cap B) = 0 + \bar{v}(A \cap B) \leq \bar{v}(B) = v(B)$$

$$\implies \bar{v}(A) = \inf \{ v(B) : B \in \mathcal{B} \text{ e } \bar{v}(A - B) = 0 \}.$$

Assim $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists A_n \in \mathcal{B}$ com

$$v(A - A_n) = 0 \quad \text{e} \quad v(A_n) < \bar{v}(A) + 1/n.$$

Tomamos $E_i = \bigcap_{j=1}^i A_j$. Como $E \subset A_i$ e $A - E_i = \bigcup_{j=1}^i A \cap A_j^C$,

então

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}(A - E_i) &\leq \sum_{j=1}^i \bar{v}(A - A_j) = 0 \\ \bar{v}(E_j - A) &\leq v(A_i - A) = v(A_i) - \bar{v}(A) < 1/i \end{aligned} \right\} \implies \bar{v}(A \Delta E_i) < 1/i.$$

Logo $\lim_i \bar{\nu}(E_i \Delta A) = 0$. Como E_i é decrescente, $\exists E \in \mathcal{A}$ com $\lim_i \bar{\nu}(E \Delta E_i) = 0$ (por i) usando complementares) $\bar{\nu}(E \Delta A) \leq \bar{\nu}(E \Delta E_i) + \bar{\nu}(E_i \Delta A)$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Fazendo $i \rightarrow \infty$ obtemos $\bar{\nu}(E \Delta A) = 0$.

ii) $\Rightarrow$ iii) Seja $f : Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{B}_0$ -mensurável. Vamos supor f positiva. Tomamos para cada $t > 0$

$$A_t = \{f > t\} \in \mathcal{B}_0.$$

Logo $\exists A'_t \in \mathcal{B}$ com $\bar{\nu}(A_t \Delta A'_t) = 0$. Seja L o conjunto

$$L = \{k/2^n, k, n \in \mathbb{N}\}. \text{ Tomamos}$$

$$B_0 = X, \quad B_k = \bigcap_{i=1}^k A'_i, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad e$$

$$B_{(2k+1)/2^{n+1}} = B_{(k+1)/2^n} \cup (A'_{(2k+1)/2^{n+1}} \cap B_{k/2^n}).$$

$$\text{Chamamos} \quad D_2 = B_{(k+1)/2^n}$$

$$D_3 = A'_{(2k+1)/2^{n+1}}$$

$$D_4 = B_{k/2^n}.$$

Então

1) Por construção $B_t \in \mathcal{B}$, $\forall t \in L$

2) $t' < t \Rightarrow B_{t'} \subset B_t$.

Para ver isto, notamos que 2) é válido se t e t' são inteiros. Além disso, suponhamos 2) válido para n . Então $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$B_{(k+1)/2^{n+1}} \supset B_{(k+1)/2^n}$$

e como $B_{(k+1)/2^n} \subset B_{k/2^n}$ por hipótese segue que

$$B_{(2k+1)/2^{n+1}} \subset B_{k/2^n}$$

Assim, a ordem é preservada para $n+1$ e por indução para todo L .

$$3) \quad \bar{v}(A_t \Delta B_t) = 0 \quad , \quad \forall t \in L$$

Vamos provar por indução sobre n . Se $n = 0$

$$\bar{v}(B_k - A_{k'}) = 0 \quad (\text{pois } B_k \subset A_{k'}) \implies \bar{v}(B_k - A_k) = 0$$

e

$$A_k - B_k = \bigcup_{i=1}^k (A_k - A'_i) \subset \bigcup_{i=1}^k (A_i - A'_i)$$

Como $\bar{v}(A_i - A'_i) = 0 \quad , \quad \forall i \in \mathbb{N} \implies \bar{v}(A_k - B_k) = 0$ e portanto $\bar{v}(A_k \Delta B_k) = 0$.

Suponhamos 3) válidos para todos os inteiros menores do que n fixo. Então, se $D_1 = A_{(2k+1)/2^{n+1}}$ temos

$$A_{(2k+1)/2^{n+1}} - B_{(2k+1)/2^{n+1}} = D_1 - [D_2 \cup (D_3 \cap D_4)]$$

$$= (D_1 \cap D_2^c \cap D_3^c) \cup (D_1 \cap D_2^c \cap D_4^c).$$

Vamos agora calcular medidas de vários conjuntos.

$$D_1 \cap D_2^C \cap D_3^C \subset D_1 - D_3 = \frac{A_{2k+1}}{2^{n+1}} - \frac{A'_{2k+1}}{2^{n+1}} \Rightarrow \bar{\nu}(D_1 \cap D_2^C \cap D_3^C) = 0$$

$$D_1 \cap D_2^C \cap D_4^C = D_1 \cap (D_2 \cup D_4)^C = A_{(2k+1)/2^n} - B_{k/2^n} \subset A_{k/2^n} - B_{k/2^n}$$

$$D_2 \cup D_4 = B_{k/2^n} \cup B_{(k+1)/2^n} = B_{k/2^n}$$

$$\text{e por indução } \bar{\nu}(A_{k/2^n} - B_{k/2^n}) = 0 \Rightarrow \bar{\nu}(D_1 \cap D_2^C \cap D_3^C) = 0$$

Logo

$$\bar{\nu}(A_{(2k+1)/2^{n+1}} - B_{(2k+1)/2^{n+1}}) = 0.$$

$$B_{(2k+1)/2^{n+1}} - A_{(2k+1)/2^{n+1}} = [D_2 \cup (D_3 \cap D_4)] - D_1$$

$$= (D_2 - D_1) \cup [(D_3 - D_1) \cap (D_4 - D_1)]$$

$$D_2 - D_1 = B_{(k+1)/2^n} - A_{(2k+1)/2^n} \subset B_{(k+1)/2^n} - A_{(k+1)/2^n} \Rightarrow$$

$$\bar{\nu}(D_2 - D_1) = 0 \quad \text{por indução.}$$

$$D_3 - D_1 = A'_{(2k+1)/2^{n+1}} - A_{(2k+1)/2^{n+1}} \Rightarrow \bar{\nu}(D_3 - D_1) = 0$$

$$\text{logo } \bar{\nu}(B_{(2k+1)/2^{n+1}} - A_{(2k+1)/2^{n+1}}) = 0.$$

Assim, por indução $\bar{\nu}(B_t \Delta A_t) = 0$, $\forall t \in L$.

Definimos agora $f' : Y \longrightarrow [0, +\infty)$ por

$$f'(y) = \sup\{t \in L : y \in B_t\}.$$

Vamos provar que f' é $\mathcal{B}$ -mensurável. Para tanto, sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $a > b \geq 0$. Seja $t \in L$ com $a > t > b$ (notamos que L é denso). Se $y \in B_t \Rightarrow f'(y) \geq t > b \Rightarrow y \in \{f' > b\}$. Se $y \in \{f' > a\} \Rightarrow f'(y) > a \Rightarrow y \in B_a \Rightarrow y \in B_t$. Logo $B_t \in \mathcal{B}$ e

$$\{f' > a\} \subset B_t \subset \{f' > b\}$$

e portanto f' é $\mathcal{B}$ -mensurável.

Suponhamos $f'(y) \neq f(y)$. Seja por exemplo $f'(y) > f(y)$. Escolhemos $t \in L$ com $f(y) < t < f'(y)$. Assim, $y \in B_t$, $y \notin A_t \Rightarrow y \in B_t - A_t$. Caso $f'(y) < f(y)$, escolhemos $f'(y) < t < f(y)$ e daí $y \in A_t - B_t$. Logo $\{f' \neq f\} \subset \bigcup_{t \in L} (A_t \Delta B_t) \Rightarrow \bar{\nu}\{f' \neq f\} \leq$

$\sum_{t \in L} \bar{\nu}(A_t \Delta B_t) = 0$, pois L é enumerável e $\bar{\nu} \in M_0(\mathcal{B})$. Como

$\bar{\nu}$ é σ -aditiva e $\mathcal{B}_0$ é σ -álgebra, f e f' são $\bar{\nu}$ -iguais.

iii) $\Rightarrow$ i). Seja $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$ uma sucessão crescente. Como $\bar{\nu}$ é σ -aditiva e $\mathcal{B}_0$ σ -álgebra, então se $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ segue que

$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\nu}(B \Delta A_n) = 0$. φ_B é $\mathcal{B}_0$ -mensurável, portanto $\bar{\nu}$ igual a $\mathcal{B}$ -mensurável. Seja $A \in \mathcal{B}$ tal que

$$\{g > 1/3\} \supset A \supset \{g > 1/2\}.$$

Se $x \in A - B$, $g(x) > 1/3$ e $\varphi_B(x) = 0$. Se $x \in B - A$, $g(x) \leq 1/2$ e $\varphi_B(x) = 1 \implies A \Delta B \subset \{g \neq \varphi_B\}$ e como g e φ_B são $\bar{\nu}$ -iguais, então $\bar{\nu}(A \Delta B) = 0$. Logo $\lim_n (A \Delta A_n) = 0$. ■

Agora podemos caracterizar totalmente a completude dos espaços L^P .

TEOREMA 4.17. Completude dos Espaços L^P . Seja $\mu \in M(A)$, A álgebra de $P(X)$ e $1 \leq p < +\infty$. Então são equivalentes

- i) $L^p(X, A, \mu)$ é um espaço métrico completo.
- ii) $\forall \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ crescente, $\exists A \in A$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} |\mu|(A \Delta A_n) = 0$.
- iii) $\forall g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $\tilde{A}_g$ -mensurável e $\tilde{\mu}$ -igual a uma função $g' : \tilde{X} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ contínua.

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $\tilde{B} = \tilde{A}$ e $\nu : \tilde{A} \longrightarrow [0, +\infty)$ dada por $\nu(\tilde{A}) = |\mu|(A)$, $\forall A \in A$. Dai $\bar{\nu} = |\tilde{\mu}| = \widetilde{|\mu|}$. Seja $Y = \tilde{X}$. Então, $f : \tilde{X} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é contínua se e só se $\tilde{f}$ é $\tilde{B}$ -mensurável, portanto, iii) é equivalente à iii) do lema anterior. Além disso, ii) é equivalente a $\forall \{\tilde{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \tilde{A}$ crescente $\exists \tilde{A} \in \tilde{A}$ tal que $\lim_n |\tilde{\mu}|(\tilde{A} \Delta \tilde{A}_n) = 0$ e isto é equivalente a i) do lema. Logo, pelo mesmo lema, ii) e iii) são equivalentes.

iii) $\Rightarrow$ i). Seja $g \in L^P(\tilde{X}, \tilde{A}_\sigma, \tilde{\mu})$. Por iii) $g' \in L^P(\tilde{X}, \tilde{A}_\sigma, \tilde{\mu})$ g' contínua e $d_p(g, g') = 0$. Assim, g' é $\tilde{A}$ -mensurável e portanto, $g' = \tilde{f}$ para algum $f \in L^P(X, A, \mu)$. Logo, a imagem de $L^P(X, A, \mu)$ por $\phi: f \longrightarrow \tilde{f} \in L^P(\tilde{X}, \tilde{A}_\sigma, \tilde{\mu})$ e como este é completo $L^P(X, A, \mu)$ é completo.

i) $\Rightarrow$ iii). Se g é $\tilde{A}_\sigma$ -mensurável e limitada segue que $g \in L^P(\tilde{X}, \tilde{A}_\sigma, \tilde{\mu})$ e como $L^P(X, A, \mu)$ é completo e sua imagem é densa em $L^P(\tilde{X}, \tilde{A}_\sigma, \tilde{\mu})$, $\exists f \in L^P(X, A, \mu)$ com $d_p(\tilde{f}, g) = 0$. Logo g é μ -igual a $\tilde{f}$ contínua.

Suponhamos agora g $\tilde{n}$ -limitada mas positiva. Então, $g \wedge n$ é $\tilde{A}_\sigma$ -mensurável e limitada, logo $|\tilde{\mu}|$ -igual a f_n contínua. Seja $h_n = \sup_{1 \leq i \leq n} (f_i \wedge i)$. Temos que $f_i \wedge i$ é $|\tilde{\mu}|$ -igual a $g \wedge i$, $\forall i \in \mathbb{N}$ e, portanto, por indução h_n é $|\tilde{\mu}|$ -igual a $g \wedge n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e h_n é contínua. Seja $h = \sup_{n \in \mathbb{N}} h_n$, então h é contínua e $d_p(g, h) = 0$. Logo vale iii). O caso geral deduz-se facilmente deste. ■

Notamos que a função $\bar{\nu}$ aqui definida não está diretamente relacionada com $\bar{\mu}$ definida na proposição 4.7.

Notamos ainda que o teorema foi obtido por meio do espaço de Stone, isto é, partimos do espaço usual (condição i), analisamos o espaço de Stone (condição iii) para obter uma condição no espaço base (condição ii). Assim, o espaço de Stone pode ser eliminado da caracterização final se nos restringirmos a i) e ii).

A verificação da condição ii) do teorema pode ser trabalhosa pois há muitas sequências de conjuntos em A . Mas não é necessário verificar a condição ii) para todas, como vamos provar agora.

Diremos que $\mu \in M(A)$ é internamente (resp. externamente) regular com respeito a $\mathcal{H} \subset A$ se $\forall A \in A$, $|\mu|(A) = \sup \{ |\mu|(H) \mid H \in \mathcal{H}, H \subset A \}$ (resp. $\inf \{ |\mu|(H) \mid H \in \mathcal{H}, A \subset H \}$). Neste caso, é válido o corolário seguinte.

COROLÁRIO 4.17. Seja $\mu \in M(A)$ μ internamente (resp. externamente) regular com respeito a $\mathcal{H} \subset A$ onde $\mathcal{H}$ é fechada por uniões (resp. intersecções) finitas. Então $L^p(X, A, \mu)$ é completo, see $\forall \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ crescente (decrescente) $\exists A \in A$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} |\mu|(A \Delta A_n) = 0$.

DEMONSTRAÇÃO ($\Leftarrow$). Seja $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ crescente. Tomamos

$\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ e $|\mu|(A_n - B_n) < 1/n$. Seja $B \in A$ com

$\lim_n |\mu|(B \Delta B_n) = 0$. Como $|\mu|(A_n \Delta B_n) < 1/n$ segue $\lim_n |\mu|(B \Delta A_n) =$

$= 0$ e pelo teorema 4.17, $L^p(X, A, \mu)$ é completo. Isto para o caso de μ internamente regular com respeito a $\mathcal{H}$.

Quando μ for externamente regular com respeito a $\mathcal{H}$, tomamos $\mathcal{H}^c = \{H^c \mid H \in \mathcal{H}\}$ e daí μ é internamente regular com respeito a $\mathcal{H}^c$ see é externamente regular com respeito a $\mathcal{H}$. Daí a prova sai da 1ª parte.

($\Rightarrow$) Trivial a partir do Teo. 4.17 e da construção acima. ■

Voltamos ao espaço L^P de Dunford-Schwartz $(D) L^P(X, A, \mu)$. Pela proposição 4.9, $(D) L^P(X, A, \mu) = L^P(X, \bar{A}, \bar{\mu})$. Como $A \subset \bar{A}$ e $\bar{\mu}$ é a extensão de μ , $L^P(X, A, \mu) \subset L^P(X, \bar{A}, \bar{\mu}) = (D) L^P(X, A, \mu)$. Além disso,

$$I : L^P(X, A, \mu) \longrightarrow (D) L^P(X, A, \mu)$$

$$f \longrightarrow f$$

é uma isometria.

A imagem de I nem sempre é sobre. Isto acontece, se existe uma boa relação entre A e $\bar{A}$.

PROPOSIÇÃO 4.19. $L^P(X, A, \mu) = (D) L^P(X, A, \mu)$ se e só se $\forall A \in \bar{A}$, $\exists B \in A$ com $\mu_e(A \Delta B) = 0$. Em qualquer caso $L^P(X, A, \mu)$ é denso em $(D) L^P(X, A, \mu)$.

DEMONSTRAÇÃO. $\mu_e(A \Delta B) = 0 \iff |\mu|(A \Delta B) = 0$. I será sobre, se toda f $\bar{A}$ -mensurável, $\bar{\mu}$ -integrável é A -mensurável.

($\implies$). Seja $A \in \bar{A}$. Então $\varphi_A \in L^P(X, \bar{A}, \bar{\mu})$ e assim $\exists g \in L^P(X, A, \mu)$ tal que g é A -mensurável e g é $\bar{\mu}$ -igual a φ_A . Seja $B \in A$ tal que $\{g > 1/2\} \subset B \subset \{g > 1/3\}$. Pelo mesmo raciocínio do Lema 4.16 segue $|\bar{\mu}|(A \Delta B) = 0 \implies \mu_e(A \Delta B) = 0$.

($\impliedby$). Seja f $\bar{A}$ -mensurável. Podemos supor sem perda de generalidade que $f \geq 0$. Dados $i, n \in \mathbb{N}$, escolhemos $A_{i/2^n} \in \bar{A}$ com

$$\{f > \frac{i+1}{2^n}\} \subset A_{i/2^n} \subset \{f > \frac{i}{2^n}\}.$$

Seja $B_{i/2^n} \in A$ com $|\bar{\mu}|(A_{i/2^n} \Delta B_{i/2^n}) = 0$, $A_0 = B_0 = X$.

Utilizamos a mesma construção de Lema 4.16

$$D_k = \bigcap_{i=0}^k B_i, \quad \forall k \in \mathbb{N} \text{ e depois indutivamente sobre } n$$

$$D_{(2k+1)/2^{n+1}} = D_{(k+1)/2^n} \cup (B_{(2k+1)/2^{n+1}} \cap D_{k/2^n}).$$

Definimos $L = \{k/2^n, k, n \in \mathbb{N}\}$. Então, como na prova do Lema 4.16, $D_t \in A$, $\forall t \in L$, $D_t \subset D_{t'}$, se $t > t'$, $|\bar{\mu}|(A_t \Delta D_t) = 0$, $\forall t \in L$. Definindo f' por $f'(y) = \sup\{t \in L, y \in D_t\}$, $\forall y \in X$ obtemos como no lema que f' é A -mensurável e que f e f' são $\bar{\mu}$ -iguais. Assim são μ -iguais no sentido de Dunford-Schwartz, pois tomamos primeiramente o resultado para funções limitadas e depois o estendemos para funções quaisquer lembrando que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_e\{|f| > n\} = 0$.

Para ver a densidade de $L^P(X, A, \mu)$ em $(D) L^P(X, A, \mu)$, lembramos que as funções f DS μ -mensuráveis simples com $|f|^P$ DS μ -integrável formam um conjunto denso em $(D) L^P(X, A, \mu)$ (veja Dunford-Schwartz [3]) e que uma função DS μ -mensurável simples com $|f|^P$ DS μ -integrável é A -mensurável e está em $L^P(X, A, \mu)$ donde segue o resultado. ■

No exemplo 3 vimos que se $d_p(f_m, f_n) \rightarrow 0$ naquele $L^P(X, A, \mu)$ ($f_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$) então cada coordenada produz uma sequência de

Cauchy. Logo $\exists f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ com $f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a)$, $\forall a \in \mathbb{N}$.

Claramente f é $\bar{A}$ -mensurável e além disso, $\lim_n d_p(f_n, f) = 0$ pois agora estamos trabalhando com uma σ -álgebra e uma medida σ -aditiva e valem os teoremas clássicos de convergência. Neste caso, vemos que (D) $L^P(X, A, \mu)$ é completo, embora $L^P(X, A, \mu)$ não o seja. Como $L^P(X, A, \mu)$ é denso em (D) $L^P(X, A, \mu)$, então a completude do 1º implica a completude do 2º espaço. Notamos que há geralmente mais funções DS μ -mensuráveis que funções A -mensuráveis. Isto pode ser visto pelo raciocínio acima ou observando que A -mensurabilidade não considera a particular medida μ e portanto deve servir para qualquer $\mu \in M(A)$ o que não ocorre com a DS μ -mensurável.

Vejamos o critério de completude para (D) $L^P(X, A, \mu)$.

COROLÁRIO 4.20. *Seja $\mu \in M(A)$, $\bar{A}, \bar{\mu}$ como definidos em §4.2. Neste caso (D) $L^P(X, A, \mu)$ é completo se e só se $\forall \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ crescente $\exists A \in \bar{A}$ com $\lim_n |\bar{\mu}|(A \setminus A_n) = 0$.*

DEMONSTRAÇÃO. Sabemos que (D) $L^P(X, A, \mu) = L^P(X, \bar{A}, \bar{\mu})$ e vemos que $\bar{\mu}$ é internamente regular com respeito a A pois $\forall A \in \bar{A}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists B, D \in A$, $B \subset A \subset D$ e $|\mu|(D \setminus B) < \varepsilon \implies |\mu|(A \setminus B) < \varepsilon \implies |\bar{\mu}|(A) = \sup\{|\bar{\mu}|(B), B \in A, B \subset A\}$, logo o corolário 4.18 estabelece o resultado. ■

Veremos agora um critério necessário para a completude dos espaços L^P . Lembramos primeiramente um resultado que será utilizado aqui.

Em [12], Halmos prova que se μ é σ -aditiva positiva e finita definida em uma σ -álgebra $\mathcal{B}$ então a imagem de μ é um conjunto fechado de $\mathbb{R}$. O método é dividir o espaço X (onde $\mu: A \subset P(X) \rightarrow \mathbb{R}$) em 2 conjuntos: o primeiro que contém todos os átomos de μ (no sentido de medida) e o outro que não tem nenhum átomo. Halmos prova que existe no máximo um número enumerável de átomos, daí que o resultado é válido para cada um dos dois conjuntos acima e depois une os conjuntos e tira o resultado. Para uma medida σ -aditiva que não seja positiva, pode-se utilizar o mesmo método, lembrando que um átomo de μ é um átomo de μ^+ e de μ^- e logo, de $|\mu|$. Separamos então X em três partes: átomos positivos, átomos negativos e o complementar da união destes, obtendo o resultado. Logo, se $\mu \in M_0(A)$, A σ -álgebra, então

$$\{\mu(H) : H \in A, H \subset A\}$$

é um conjunto fechado de $\mathbb{R}$ para cada $A \in A$.

PROPOSIÇÃO 4.21. Seja $\mu \in M(A)$. Então, se $L^P(X, A, \mu)$ é completo $\{\mu(H) : H \in A \text{ e } H \subset A\}$ é um conjunto fechado de $\mathbb{R}$, $\forall A \in A$

DEMONSTRAÇÃO. Seja $A \in A$, então $\tilde{A} \in \tilde{A}$, $\tilde{A} = \{F \in \tilde{X} : A \in F\}$. Temos então,

$$\{\mu(H) : H \in A, H \subset A\} = \{\tilde{\mu}(H) : H \in \tilde{A}, H \subset \tilde{A} = I_2\}.$$

Além disso, I_2 é igual a

$$I_3 = \{\tilde{\mu}(B) : B \in \tilde{A}_\sigma, B \subset \tilde{A}\}.$$

Claramente $I_2 \subset I_3$ pois $\tilde{A} \subset \tilde{A}_\sigma$. Por outro lado, como $L^P(X, A, \mu)$ é completo, então dado $B \in \tilde{A}_\sigma$ existe (pela condição iii) do teo. 4.17 e condição ii) do lema 4.16), $D \in \tilde{A}$ com $|\tilde{\mu}|(D \Delta B) = 0$ donde segue $\tilde{\mu}(D) = \tilde{\mu}(B)$. Logo $I_3 \subset I_2$ e são iguais. Pelo comentário anterior segue o resultado. ■

O próximo resultado nos dá uma maneira de "acoplar" um número enumerável de espaços L^P completos produzindo um espaço L^P completo.

PROPOSIÇÃO 4.22. Sejam $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M(A)$ onde A é uma σ -álgebra de $P(X)$ e suponhamos $L^P(X, A, \mu_n)$ completo, $\forall n \in \mathbb{N}$. Seja $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ uma partição de X com $\sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n|(A_n) < +\infty$. Seja $\mu \in M(A)$ definida por $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A \cap A_n)$, $\forall A \in A$. Nestas condições $L^P(X, A, \mu)$ é completo.

DEMONSTRAÇÃO. Como $\sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n|(A_n) < +\infty$ e A_n disjuntos dois a dois, $\mu \in M(A)$. A condição $\sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n|(A_n)$ implica convergência absoluta e assim todas as séries podem ser rearranjadas.

Seja $A \in A$.

$$\begin{aligned}
|\mu|(A) &= \sup_{T \in A} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A \cap A_n \cap T) - \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A \cap A_n \cap T^C) \right) = \\
&= \sup_{T \in A} \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n(A \cap A_n \cap T) - \mu_n(A \cap A_n \cap T^C)) = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{T_n \in A} (\mu_n(A \cap A_n \cap T) - \mu_n(A \cap A_n \cap T^C))
\end{aligned}$$

a última igualdade segue do fato que os A_n são disjuntos dois a dois. O último termo vale

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n|(A \cap A_n).$$

Logo $|\mu| = \sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n| \Big|_{A_n}$ se definimos $|\mu_n| \Big|_{A_n}(B) = |\mu_n|(B \cap A_n)$.

Seja agora $\{B_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset A$ uma sequência crescente de conjuntos. Como cada $L^p(X, A, \mu_n)$ é completo, $\exists D_n \in A$ com

$$\lim_k |\mu_n|(D_n \Delta B_k) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (*).$$

Tomamos $B = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cap D_n)$. Como A é σ -álgebra, $B \in A$. Vamos provar agora que $\lim_n |\mu|(B \Delta B_n) = 0$.

$$|\mu|(B \Delta B_n) = \sum_{k=1}^{\infty} |\mu_k|(B \Delta B_n \cap A_k).$$

Dado $\varepsilon > 0$, escolhemos k_0 tal que $\sum_{k=k_0+1}^{\infty} |\mu_k|(A_k) < \varepsilon/2$.

Tomamos $\delta = \varepsilon/2k_0$. Assim

$$(B \Delta B_n) \cap A_k = [(B - B_n) \cap A_k] \cup [(B_n - B) \cap A_k]$$

$$(B - B_n) \cap A_k = \left[\bigcup_{r=1}^{\infty} (A_r \cap D_r) - B_n \right] \cap A_k =$$

$$= A_k \cap D_k - B_n \subset D_k - B_n \subset D_k \Delta B_n,$$

escolhemos n_k tal que $\forall n \geq n_k, |\mu_k|(D_k \Delta B_n) < \delta$.

$$(B_n - B) \cap A_k = [B_n - \bigcup_{r=1}^{\infty} (A_r \cap C_r)] \cap A_k =$$

$$= [B_n \cap \bigcap_{r=1}^{\infty} (A_r^c \cap D_r^c)] \cap A_k \quad \text{e portanto,}$$

$(B_n - B) \cap A_k \subset B_n \cap D_k^c \subset B_n \Delta D_k$. Logo $(B \Delta B_n) \cap A_k \subset B_n \Delta D_k$ e

$$|\mu|((B \Delta B_n) \cap A_k) < \delta \quad \text{se} \quad n > n_k.$$

Logo, se $n > n_0 = \sup_{1 \leq k \leq k_0} n_k$ temos

$$|\mu|(B \Delta B_n) = \sum_{k=1}^{k_0} |\mu_k|[(B \Delta B_n) \cap A_k] + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |\mu_k|[(B \Delta B_n) \cap A_k] <$$

$$\sum_{k=1}^{k_0} \delta + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |\mu_k|(A_k) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

assim $\lim_n |\mu|(B \Delta B_n) = 0$ e pelo teorema 4.17, $L^p(X, A, \mu)$ é completo. ■

4.4. ESPAÇOS L^∞

Como no caso clássico, os espaços L^∞ são totalmente diferentes dos L^p para $1 \leq p \leq +\infty$. Definiremos nesta seção os L^∞ para medidas finitamente aditivas, veremos que são sempre completos e além disso que são espaços de Banach.

Quando $p = +\infty$ a fórmula dada para d_p não é boa e por isso vamos definir d_∞ do seguinte modo

$$d_\infty : M(X, A) \times M(X, A) \longrightarrow [0, +\infty)$$

$$d_\infty(f, g) = \sup_n [\limsup_F |R_n(f) - R_n(g)|]$$

onde F é o filtro suporte de μ .

Pelo desenvolvimento do teorema 4.11 vemos que f e g são μ -iguais se e $d_\infty(f, g) = 0$. Além disso, $d_\infty \geq 0$ e $d_\infty(f, g) = d_\infty(g, f)$, $\forall f, g \in M(X, A)$. Se $f, g \in M^+(X, A)$, então

$$I_1 = \limsup_F (f + g) \leq \limsup_{=I_2} f + \limsup_{=I_3} g \quad (*)$$

Pois se I_2 ou $I_3 = +\infty$ o resultado é trivial. Suponhamos I_2 e I_3 finitos e $d > I_2$, $e > I_3$. Logo $\forall H_1 \in F$ com

$\sup_{x \in H_1} f(x) < d$ e $\exists H_2 \in \mathcal{F}$ com $\sup_{x \in H_2} g(x) < e$. Então $H = H_1 \cap H_2 \in \mathcal{F}$

e $\sup_{x \in H} (f+g)(x) < d + e$, logo (*) é verdade. Deste fato, fica

claro que $d_\infty(f,g) \leq d_\infty(f,h) + d_\infty(h,g)$, $\forall f,g,h \in M^+(X,A)$ e d_∞ é então uma pseudométrica.

Além disso, $d_\infty(f,0) = \lim \sup_{\mathcal{F}} |f|$. Obviamente, $d_\infty(f,0) \leq \lim \sup_{\mathcal{F}} |f|$ pois $|R_n(f)| \leq |f|$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, se $\lim \sup_{\mathcal{F}} |f| = +\infty$ então, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall H \in \mathcal{F} \sup_{x \in H} |f(x)| = +\infty \Rightarrow \sup_{x \in H} |R_n(f)| = n \Rightarrow d_\infty(f,0) = +\infty$.

Suponhamos então, $\lim \sup_{\mathcal{F}} |f| = d < +\infty$. Assim $\forall H \in \mathcal{F}$ com $\sup_{x \in H} |f(x)| \geq d$. Tomamos $n_0 > d$, $\forall n_0 \in \mathbb{N}$. Dai $\forall n \geq n_0$, temos

$$\lim \sup_{\mathcal{F}} |R_n(f)| = \inf_{H \in \mathcal{F}} \sup_{x \in H} |R_n f(x)| \geq d.$$

e como $n > d$

$$\sup_{x \in H} |R_n f(x)| \geq d, \forall H \in \mathcal{F}$$

Logo $d_\infty(f,0) = \lim \sup_{\mathcal{F}} |f|$.

Definimos $L^\infty(X,A,\mu)$ como o conjunto das funções A -mensuráveis com $\lim \sup_{\mathcal{F}} |f| < +\infty$ e $L^\infty(X,A,\mu)$ o espaço métrico derivado de $L^\infty(X,A,\mu)$ identificando as funções μ -iguais.

Seja $f \in L^\infty(X, A, \mu)$ e $\limsup_F |f| = d < +\infty$. Então $\exists H \in \mathcal{F}$ com $\sup_H |f| < 2d$. Seja $g = R_{2d}(f)$. Então como $H \in A$, g é A -mensurável e limitada. Além disso, $\{f + g\} \subset H^C$ e como $H \in \mathcal{F}$ $|\mu|(H^C) = 0$. Logo f e g são μ -iguais e portanto toda função de $L^\infty(X, A, \mu)$ é μ -igual a uma função limitada. Dadas f e g de $L^\infty(X, A, \mu)$ vamos definir a sua soma em L^∞ . Sejam f' e g' A -mensuráveis, limitadas μ -iguais a f e g respectivamente. Definimos a soma como $f' + g'$. Como f' e g' são limitadas, $f' + g'$ é A -mensurável limitada. Além disso, se f'' e g'' são outro par nas mesmas condições, f'' é μ -igual a f' e g'' é μ -igual a g' e daí $f'' + g''$ é μ -igual a $f' + g'$ pois todas são limitadas. Portanto a soma está bem definida. Claramente, se $f \in L^\infty(X, A, \mu)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ então $\lambda f \in L^\infty(X, A, \mu)$ é como $\|f\|_\infty = \limsup_F |f| = d_\infty(f, 0)$ é uma norma em $L^\infty(X, A, \mu)$ segue que $L^\infty(X, A, \mu)$ é um espaço vetorial normado. A sua estrutura vem da $M_b(X, A)$ conjunto das funções mensuráveis limitadas.

Como vimos antes, $\limsup_F |f| = \sup_{\tilde{S}_\mu} |\hat{f}|$, $\forall f \in M(X, A)$. Então a aplicação

$$() : L^\infty(X, A, \mu) \longrightarrow C(\tilde{S}_\mu, \mathbb{R})$$

$$f \longrightarrow f|_{\tilde{S}_\mu}$$

(onde $C(\tilde{S}_\mu, \mathbb{R})$ é o espaço das funções contínuas de $\tilde{S}_\mu$ em $\mathbb{R}$ dotado da norma de convergência uniforme) é uma isometria, portanto, contínua e injetiva.

Seja por outro lado $g \in C(\tilde{S}_\mu, \mathbb{R})$. Como $\tilde{X}$ é compacto e Hausdorff, ele é normal e como $\tilde{S}_\mu$ é fechado, então pelo Lema de Extensão de Tietze (veja [14]), g pode ser estendida a $g': \tilde{X} \rightarrow \mathbb{R}$. Além disso como $\tilde{S}_\mu$ é compacto $\Rightarrow g$ é limitada e podemos tomar g' com a mesma norma (do sup) que g . Como $g' : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = g'(\tilde{x})$ é A -mensurável e $\|f\|_\infty = \sup_{\tilde{S}_\mu} |f| = \sup_{\tilde{S}_\mu} |g| < +\infty$ e $f \in L^\infty(X, A, \mu)$. Como $|f|_{\tilde{S}_\mu} = g$ segue que $\theta(L^\infty(X, A, \mu)) = C(\tilde{S}_\mu, \mathbb{R})$.

Como $C(\tilde{S}_\mu, \mathbb{R})$ é completo e θ é uma isometria concluímos que $L^\infty(X, A, \mu)$ é completo e portanto espaço de Banach.

4.5. SOMA DE FUNÇÕES EM L^p .

Vamos agora analisar quando está definida uma soma de funções no espaço L^p , $1 \leq p < +\infty$. Veremos que nem sempre isto é verdade, mas que a completude garante a existência da soma de funções e transforma $L^p(X, A, \mu)$ num espaço de Banach.

No espaço $L^\infty(X, A, \mu)$ é sempre possível somar duas funções uma vez que cada função é μ -igual a uma função limitada e a soma de funções A -mensuráveis limitadas é uma função A -mensurável. Tal não ocorre em geral quando $p < +\infty$ e não é possível colocar uma estrutura de espaço vetorial em $L^p(X, A, \mu)$ compatível com $M(X, A)$ ou com a métrica d_p . Isto porque as funções nem sempre podem ser supostas somente a valores reais (podem valer $+\infty$ ou $-\infty$) e mais nem sempre a soma de duas funções reais A -mensuráveis é uma função

A -mensurável, como mostra o exemplo.

EXEMPLO 5. Sejam como no exemplo 1, $X = \mathbb{N}$, $A =$ álgebra gerada pelos conjuntos finitos e $f_1, f_2 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por:

$$\begin{aligned} \mu : P(X) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mu(A) &= \sum_{n \in A} \frac{1}{2^n} \end{aligned} \quad f_1(n) = \begin{cases} n & \text{se } n \text{ é par} \\ n^2 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

$$f_2(n) = \begin{cases} -n & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ -n^2 & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

Como $\exists \lim_n f_1(n)$ e $\lim_n f_2(n)$, então f_1 e f_2 são A -mensuráveis. Além disso, como $f_1 \leq f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(n) = n^2$ e

$$\begin{aligned} \int_X f d\mu &= \int_{(0, +\infty)} \mu\{f > \tau\} d\tau = \int_{(0, +\infty)} \mu\{n^2 > \tau\} d\tau = \\ &= \int_{(0, +\infty)} \mu\{n > \lfloor \sqrt{\tau} \rfloor\} d\tau = \int_{(0, +\infty)} \frac{1}{2^{\lfloor \sqrt{t} \rfloor}} dt < \infty \end{aligned}$$

então f_1 é μ -integrável, o mesmo ocorrendo com f_2 e $f_1, f_2 \in L^p(X, A, \mu)$. Mas $f_1 + f_2$ não é ao menos A -mensurável, pois $\nexists \lim_n (f_1 + f_2)(n) \in \overline{\mathbb{R}}$.

Notamos porém que $\exists \lim_n |f_1 + f_2|(n) = +\infty$.

Vamos então definir uma soma em L^P . Se f e $g \in L^P(X, A, \mu)$, dizemos que h A -mensurável é uma "soma de f e g " em L^P se $\lim_{n \rightarrow \infty} d_p(R_n(f) + R_n(g), h) = 0$. Como d_p é pseudométrica, segue trivialmente que duas funções "soma de f e g " são μ -iguais. Se existe a "soma de f e g " igual a h segue que dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0$ tal que $d_p(R_n(f) + R_n(g), h) < \varepsilon$ e como $R_n(f) + R_n(g) \in L^P(X, A, \mu) \Rightarrow h \in L^P(X, A, \mu)$ e portanto a "soma de f e g ", se existe é uma função bem determinada de $L^P(X, A, \mu)$.

No caso em que $f + g$ existe e é A -mensurável, temos que $f + g$ é a "soma de f e g ". Pois neste caso, dado $n \in \mathbb{N}$, se $m \in \mathbb{N}$, $m > 2n$, então

$$\begin{aligned} |R_m(R_n(g) + R_n(f)) - R_m(f+g)| &\leq |R_n(g) + R_n(f) - R_m(f+g)| \leq |R_n(f) - f| \\ &+ |R_n(g) - g|. \end{aligned}$$

isto é somente uma verificação dos casos $|f+g| \geq m$, $|f+g| < m \dots$

Logo

$$\begin{aligned} \lim_n d_p(R_n(f) + R_n(g), f+g) &\leq \lim_n \sup \left(\int_X |R_n(f) - f|^p d\mu \right)^{1/p} \\ &+ \lim_n \sup \left(\int_X |R_n(g) - g|^p d\mu \right)^{1/p} \end{aligned}$$

pois a pseudométrica é invariante por translação. E como

$|R_n(f) - f|$ converge quase uniformemente para 0 em $\overline{\mathbb{R}}^X$ e
 $|R_n(f) - f| \leq 2|f| \in L^P(X, A, \mu)$ segue que

$$\lim_n \left(\int_X |R_n(f) - f|^P d\mu \right)^{1/P} = 0$$

e análoga para g e portanto $\lim_n d_p(R_n(f) + R_n(g), f + g) = 0 \implies$
 $f + g$ é a "soma de f e g " em $L^P(X, A, \mu)$.

Por outro lado, pode ser que a soma de funções em L^P não exista. No exemplo 5, tomamos $f, g \in L^1(X, A, \mu)$ onde $f + g$ não é A -mensurável. Se existe $h \in L^1(X, A, \mu)$ com h "soma de f e g " em L^1 , então $\lim_n d_1(R_n(f) + R_n(g), h) = 0$ e como $d_1(R_n(f) + R_n(g), h) = \int_{\mathbb{N}} |R_n(f) + R_n(g) - h| d\mu$ devemos ter $h = f + g$.

Para ver isto, notamos primeiro que $|h(m)| < +\infty, \forall m \in \mathbb{N}$, pois caso contrário $\mu(\{m\}) = \frac{1}{2^m} > 0$ e $\{m\} \in A \implies \int_X |h| d\mu = +\infty$.

Se então $h \neq f + g$, $\exists m \in \mathbb{N}$ com $h(m) \neq f(m) + g(m)$. Seja $\tau = |h(m) - f(m) - g(m)|$. Então $\forall n \in \mathbb{N}, n > f(m) \vee g(m)$

$$\int_X |R_n(f) + R_n(g) - h| d\mu > \int_{\{m\}} \tau d\mu = \tau \frac{1}{2^m}$$

e portanto não é verdade que $\lim_n d_1(R_n(f) + R_n(g), h) = 0$ e h não é a soma de f e g .

Mas se $h = f + g$, então $h \notin M(X, A)$ e portanto não há soma de f e g em $L^1(\mathbb{N}, A, \mu)$.

No caso $p = +\infty$ a soma de $f, g \in L^\infty(X, A, \mu)$ sempre existe e coincide com a soma definida anteriormente.

O importante é que quando $L^p(X, A, \mu)$ é completo, podemos sempre definir a soma de quaisquer duas funções $f, g \in L^p(X, A, \mu)$. Neste caso $\tilde{f} \in L^p(\tilde{X}, \tilde{A}_\sigma, \tilde{\mu})$ e como $\tilde{A}_\sigma$ é σ -álgebra, $A = \{|\tilde{f}| = +\infty\} \in \tilde{A}_\sigma$. Seja $q = \tilde{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $q = \tilde{f}$ em A^c e $q = 0$ em A . Como $\tilde{f} \in L^p(X, \tilde{A}_\sigma, \mu)$, $|\tilde{\mu}|(A) = 0$ e como $A \in \tilde{A}_\sigma$, q é μ -igual a $\tilde{f}$. Tomamos então, q, t μ -iguais a $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ respectivamente, com q e t finitos pontualmente. Seja $r = q + t$, $r : \tilde{X} \longrightarrow \mathbb{R}$. Como q e t são $\tilde{A}_\sigma$ -mensuráveis e $\tilde{A}_\sigma$ é σ -álgebra, então r é $\tilde{A}_\sigma$ -mensurável e além disso $r \in L^p(\tilde{X}, \tilde{A}_\sigma, \tilde{\mu})$ pois d_p é pseudométrica invariante por translação.

Como $L^p(X, A, \mu)$ é completo existe $h \in L^p(X, A, \mu)$ com $\tilde{h}$ $\tilde{\mu}$ -igual a r . Como $R_n(\tilde{f})$ e $R_n(\tilde{g})$ são limitadas segue que $R_n(\tilde{f}) + R_n(\tilde{g}) - \tilde{h}$ é contínua e portanto $R_n(f) + R_n(g) - h \in M(X, A)$ e

$R_n(f) + R_n(g) - h = R_n(\tilde{f}) + R_n(\tilde{g}) - r$. Assim, $R_n(f) + R_n(g) - h \in L^p(X, A, \mu)$ e

$$\int_X |R_n(f) + R_n(g) - h|^p d|\mu| = \int_{\tilde{X}} |R_n(\tilde{g}) + R_n(\tilde{f}) - r|^p d|\tilde{\mu}|.$$

Como r é soma de $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ (pois r é a soma de q e t e q e t são μ -iguais a $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ respectivamente) a segunda integral converge a 0 e portanto h é a "soma de f e g " em $L^p(X, A, \mu)$.

Assim vemos que se $L^p(X, A, \mu)$ é completo, podemos construir uma estrutura de espaço vetorial sobre ele compatível com a métrica d_p . Colocando $\|f\|_p = (\int_X |f|^p d|\mu|)^{1/p}$ vemos que $\|\cdot\|_p$ é uma norma em $L^p(X, A, \mu)$ e com esta estrutura $L^p(X, A, \mu)$ é um espaço de Banach.

CONCLUSÃO

A teoria desenvolvida aqui a partir das integrais monótonas , apresenta um desenvolvimento axiomático e estético muito interessante. A introdução do espaço de Stone, a princípio difícil de ser assimilada e utilizada se transforma em uma ferramenta poderosa para fornecer informações sobre Λ -mensurabilidade e espaços L^P com medidas finitamente aditivas. Uma comparação com os espaços L^P de Dunford-Schwartz leva a conclusão que os espaços aqui introduzidos são mais fáceis de trabalhar e dão mais informações , até mesmo sobre os de DS. A completude para estes espaços é totalmente caracterizada em condições simples. Uma patologia destes espaços decorre do fato de eles não admitirem estrutura vetorial em geral, mas que é assegurada quando o espaço é completo.

É importante ressaltar que esta teoria está feita para funções reais pois está implícito na definição da integral monótona. Acreditamos que seja possível estender este conceito de integral monótona para espaços vetoriais com ordens totais ou ainda para espaços de Riesz.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BARTLE, R.G., *Elements of Integration*, Wiley, 1966.
- [2] DE GIORGI, E. e LETTA, G., *Une notion general de convergence faible pour des fonctions croissantes d'ensembles*, Ann. Sc Nor Pisa, 4, (IV), (1977), 61-99.
- [3] DUNFORD, N. & SCHWARTZ, J.T., *Linear Operators*, Vol. I, Interscience, 1963.
- [4] LIMA, E.L., *Curso de Análise*, Vol. I, Projeto Euclides, LTC, 1976.
- [5] GRECO, G.H., "Integrale Monótono", Rend. Sem. Mat. Padova , 57, (1977), 149-166.
- [6] GRECO, G.H., "Fundamenti della teoria della misura", Notas de Aula, Campinas, 1979.
- [7] GRECO, G.H., "Sur la mesurabilité d'une fonction numérique par rapport à une famille d'ensembles", Rend. Sem. Mat. Padova, 65, (1981).
- [8] GRECO, G.H. & MOSCHEN, M.P., "Algebre d'insiemi e misure finitamente additive", Boll, UMI, Vol. I, B, (1981), 103-117.

- [9] GRECO, G.H., "Sulla rappresentazione di funzionali mediante integrali", Rend. Sem. Mat. Padova, 66 (1982), 21-44.
- [10] GRECO, G.H., "Completazza degli spazi L^P per misure finitamente additive" (a aparecer).
- [11] GRECO, G.H. & BASSANEZI, R.C., "Sull 'additività' di alcuni funzionali definiti su coni di funzioni (a aparecer).
- [12] HALMOS, P.R., "On the set of values of a finite measure" , BAMS, 53, (1947), 138-141.
- [13] HAUSDORFF, F., *Set Theory*, 3rd Edition, Chelsea, 1957.
- [14] KELLEY, J., *General Topology*, Springer, 1955.
- [15] RUDIN, W., *Real and Complex Analysis*, McGraw Hill, 1966.
- [16] SIKORSKI, R., *Boolean Algebras*, Springer, 1969.