Extensões e Interpretações Combinatórias para os Números de Fibonacci, Pell e Jacobsthal

Irene Magalhães Craveiro

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Irene Magalhães Craveiro e aprovada pela Comissão Julgadora.

Banca Examinadora

Prof. Dr. José Plínio de Oliveira Santos
Prof. Dr. Hemar Teixeira Godinho
Prof. Dr. Sueli Irene Rodrigues Costa
Prof. Dr. Rommel Melgaço Barbosa
Prof. Dr. Reginaldo Palazzo Júnior

Campinas, 16 de fevereiro de 2004

Prof. Dr. José Plínio de Oliveira Santos

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutora em Matemática.

Tocando em frente

Ando devagar porque já tive pressa
E levo este sorriso porque já chorei demais
Hoje me sinto mais forte, mais feliz, quem sabe,
Só levo a certeza de que muito pouco eu sei
Ou nada sei.
Conhecer as manhas e as manhãs
O sabor das massas e das maçãs;
É preciso amor pra poder pulsar,
É preciso paz pra poder sorrir,
É preciso chuva para florir.
Penso que cumprir a vida seja simplesmente
Compreender a marcha de ir tocando em frente
Como um velho boiadeiro levando a boiada
Eu vou tocando os dias pela longa estrada, eu vou
Estrada eu sou
Conhecer as manhas e as manhãs
O sabor das massas e das maçãs;
É preciso amor pra poder pulsar,
É preciso paz para poder sorrir,
É preciso chuva para florir.
Todo mundo ama um dia, todo mundo chora,
Um dia a gente chega, no outro vai embora.
Cada um de nós compõe a sua história,
Cada ser em si carrega o dom de ser capaz,
De ser feliz.
Conhecer as manhas e as manhãs
O sabor das massas e das maçãs;
É preciso amor pra poder pulsar,
É preciso paz para poder sorrir,
É preciso chuva para florir.

Almir Sater e Renato Teixeira

Agradecimentos

A Deus fonte de eterna sabedoria;
À Nossa Senhora pela Sua presença em minha vida;
A minha família que sempre foi o meu refúgio;
À Terezinha pelo seu apoio aos meus estudos;
Ao Manoel por ter deixado seu exemplo de vida e o gosto que hoje tenho pela leitura;
À Luziane pela amizade gratuita e a sua grande ajuda com o Latex;
Aos colegas, amigos da pós graduação, enfim a todas as pessoas com quem convivi nestes anos e que deixaram um pouco delas, em especial gostaria de citar: Sandra, Lilian, Eliane, Márcia, Raquel, Gilvanete e Lucelina;
Ao CNPq pelo apoio financeiro;
Aos professores da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul;
Aos Professores da Pós-Graduação em Ciências Matemáticas do IBILCE-UNESP;
Aos professores e funcionários do IMECC-UNICAMP, em especial ao meu orientador José Plinio de Oliveira Santos, pelo apoio e paciência ao longo desses anos.

Resumo

Neste trabalho provamos 6 conjecturas dadas por Santos relacionadas com as identidades do tipo Rogers-Ramanujan de números 16, 12, 71, 68, 22 e 26 na lista de Slater. Usando estes resultados foi possível obter extensões para as seqüências de Fibonacci, Pell e Jacobsthal. Além disso estabelecemos uma fórmula explícita para cada uma dessas seqüências em termos dos coeficientes trinomiais. Diversas novas interpretações combinatórias para este números são dadas: em termos de partições restritas, símbolo de Frobenius e partições coloridas. Também estabelecemos relações entre os números de Fibonacci e seqüências binárias e entre os números de Jacobsthal e seqüências ternárias.

Abstract

In this work we provide the proof for six conjectures given by Santos related to the Rogers-Ramanujan type identities of numbers 16, 12, 71, 68, 22 e 26 in Slater's list. Using these results it was possible to obtain extensions of the Fibonacci, Pell and Jacobsthal sequences. Furthermore we give a proof of an explicit formula for these sequences in terms of the trinomial coefficientes. Various new combinatorial interpretations for these sequences, in terms of restricted partitions, Frobenius symbol and colored partitions, are given. We establish also connections between Fibonacci numbers and binary sequences and between Jacobsthal numbers and ternary sequences.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

No capítulo zero, descreveremos alguns fatos históricos relacionados as identidades de Rogers-Ramanujan e algumas aplicações dessas identidades em Combinatória e Mecância Estatística. Em seguida forneceremos alguns conceitos, notações , definições e resultados que serão de grande utilidade para o desenvolvimento deste trabalho.

No capítulo 1, estaremos explorando interpretações combinatórias para os números de Fibonacci em termos de símbolo de Frobenius, gerando duas famílias infinitas de partições que são casos gerais do resultado obtido por Santos em [12]. Também daremos uma prova alternativa para a identidade de número 16 da lista de Slater, uma fórmula explícita para os números de Fibonacci em termos dos coeficientes trinomiais e uma relação entre os números de Fibonacci e uma classe de seqüências binárias.

No capítulo 2, daremos uma prova alternativa para as identidades de números 12, 71 e 68 da lista de Slater e uma fórmula explícita para os números de Pell em função dos coeficientes trinomiais. Finalmente descreveremos interpretações combinatórias para os números de Pell usando o conceito de partições coloridas e partições com restrições.

No capítulo 3, faremos a prova de conjecturas dadas em [10] e observaremos que segue como resultado provas alternativas para as identidades de números 22 e 26 da lista de Slater e uma fórmula explícita para os números de Jacobsthal em termos dos coeficientes trinomiais. Também estabeleceremos duas interpretações combinatórias para os números de Jacobsthal usando o conceito de partições coloridas e uma relação entre uma classe das seqüências ternárias e os números de Jacobsthal.

0.1 Histórico

Em 1894, L. J. Rogers da Universidade de Leeds descobriu um par de identidades que relaciona uma série e um produto infinitos que se tornaram conhecidas, mais tarde, como as identidades de Rogers-Ramanujan.

Durante a primeira metade do século XX, alguns matemáticos, incluindo Rogers, F. H. Jackson e W. N. Bailey descobriram várias identidades parecidas com as duas primeiras identidades de Rogers-Ramanujan. Em 1950, Lucy J. Slater, orientada por Bailey produziu uma lista de 130 identidades deste tipo em sua tese de doutorado, sendo esta publicada em [14].

Em 1986, George Andrews publicou um algoritmo (veja [4]) que possibilita obter extensões associadas às identidades do tipo Rogers-Ramanujan. Este método ficou conhecido como Método Alternativo para provar identidades do tipo Rogers-Ramanujan. Santos em [10], conjecturou extensões para 74 das 130 identidades do tipo Rogers-Ramanujan listadas por Slater, incluindo uma fórmula explícita para a família de polinômios associada a cada uma dessas identidades; tal fórmula é descrita em termos do polinômio de Gauss ou extensões do coeficiente trinomial (definido em [2]).

Em 1980, o físico Rodney Baxter descobriu que as identidades do tipo Rogers-Ramanujan estavam intrinsecamente ligadas com o modelo hexagonal (estes resultados aparecem em [5], [6],[7]). Em seguida, damos uma idéia de como funciona este modelo em Mecâcnia Estatística.

Descrevemos a seguinte situação: consideremos a possibilidade de que cada ponto inteiro do plano $\mathbb{R}^2$ (cujas coordenadas são números inteiros) pode ser ocupado por uma partícula. Neste caso estamos considerando a malha $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^2$, onde a partícula pode estar assumindo um desses pontos. Caso escolhamos o ponto $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ como sendo uma partícula, então os outros seis pontos inteiros, como descritos na figura abaixo, não poderão ser escolhidos como uma outra partícula neste modelo que estamos construindo.

Observemos que a figura descreve um hexágono, cujo centro é uma partícula. Dessa forma, o modelo consiste em considerarmos vários hexágonos nesta malha, cujas partículas estão nos respectivos centros.

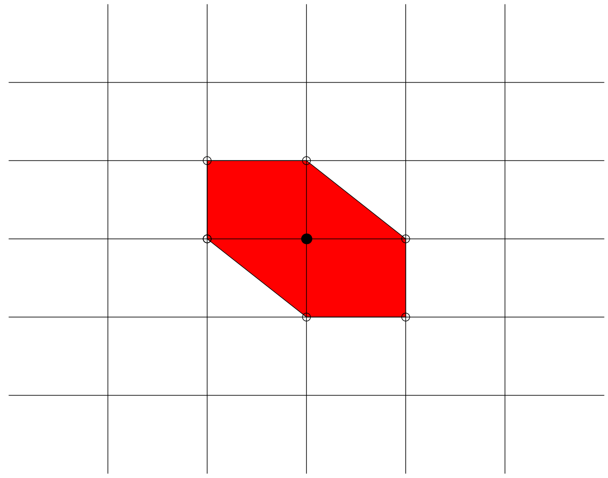


Figura 1: Modelo hexagonal de Baxter.

O Problema é equivalente se considerarmos hexágonos no reticulado $\mathbb{Z}^2$, onde cada um desses hexágonos tem um ponto inteiro centrado e nenhum se sobrepõe no outro, daí o nome modelo hexagonal. A Mecânica Estatística chama o arranjo particular de um estado s (a maneira como estão dispostos os pontos na malha $\mathbb{Z}^2$), com energia $E(s)$ (neste caso, pode ser a força de repulsão ou atração das partículas) e número de partículas $\eta(s)$ (os pontos inteiros dispostos no plano de acordo com a regra estabecida acima).

As identidades do tipo Rogers-Ramanujan são também aplicadas em Combinatória. As primeira e segunda identidades de Rogers-Ramanujan (dada em (1) e (2), respectivamente) aparecem, sem demonstração, no segundo volume do livro de Análise Combinatória de MacMahon. Este mistério foi resolvido somente em 1917 quando, acidentalmente, Ramanujan encontrou o trabalho de Rogers, pesquisando volumes anteriores do "Proceedings of the London Mathematical Society".

Teorema 0.1.1 *Se $|q| < 1$, então*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q;q)_n} = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5n+1})(1-q^{5n+4})} \tag{1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n+1)}}{(q;q)_n} = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5n+2})(1-q^{5n+3})}. \tag{2}$$

A série e o produto infinitos dados no Teorema 0.1.1 são funções geradoras para certas classes de partições de um inteiro positivo (uma partição de um inteiro positivo n é uma seqüência de inteiros positivos, não ordenados, cuja soma é igual a n. Cada parcela nesta soma é chamada parte da partição). MacMahon em [9], descreve as célebres identidades de Rogers-Ramanujan em termos combinatórios.

Teorema 0.1.2 *(Primeira identidade de Rogers-Ramanujan): O número de partições de um inteiro n, em que a diferença entre partes consecutivas é de pelo menos dois, é igual ao número de partições de n em que as partes são congruentes a 1 ou 4 módulo 5.*

Teorema 0.1.3 *(Segunda identidade de Rogers-Ramanujan): O número de partições de um inteiro n, em que cada parte excede 1 e a diferença entre partes consecutivas é de pelo menos* 2, *é igual ao número de partições de n em que as partes são congruentes a* 2 *ou* 3 *módulo* 5.

0.2 Resultados Preliminares

Nesta seção descrevemos algumas notações e enunciamos resultados que serão utéis para o desenvolvimento deste trabalho, com excessão da Proposição 0.2.1, que é um resultado de grande utilidade na demonstração de alguns teoremas e que não foi encontrado na literatura.

Começamos com a seguinte notação :

$$(a)_n = (a;q)_n = (1-a)(1-aq)\dots(1-aq^{n-1}), \tag{3}$$

$$(a)_\infty = (a;q)_\infty = \lim_{n\to\infty}(a)_n, |q| < 1 \tag{4}$$

onde, a e $q \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$.

Podemos definir $(a)_n$ para todo complexo n por:

$$(a)_n = \frac{(a;q)_\infty}{(aq^n;q)_\infty}. \tag{5}$$

O polinômio gaussiano é definido da seguinte forma:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \dfrac{(q)_n}{(q)_m(q)_{n-m}}, & 0 \le m \le n \\ \qquad\qquad 0, & \text{caso contrario} \end{cases}; \tag{6}$$

em particular,

$$\lim_{q\to 1}\left[\begin{array}{c} n \\ m \end{array}\right] = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \left(\begin{array}{c} n \\ m \end{array}\right). \tag{7}$$

Segue deste último resultado que o polinômio gaussiano é um q-análogo do coeficiente binomial.

Também usaremos o seguinte resultado: para A e n inteiros, vale que,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\begin{array}{c} 2n+A \\ n+B \end{array}\right) = \frac{1}{(q;q)_\infty}. \tag{8}$$

Os coeficientes de x^j na expansão de $(1+x+x^2)^n$ são chamados coeficientes trinomiais e são dados por

$$\left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array}\right)_2 = \sum_{h=0}^{m}(-1)^h \left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} 2n-2h \\ n-j-h \end{array}\right).$$

Os coeficientes trinomiais tem as seguintes propriedades:

$$\left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array}\right)_2 = \left(\begin{array}{c} n \\ -j \end{array}\right)_2 \tag{9}$$

$$\left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array}\right)_2 = \left(\begin{array}{c} n-1 \\ j-1 \end{array}\right)_2 + \left(\begin{array}{c} n-1 \\ j \end{array}\right)_2 + \left(\begin{array}{c} n-1 \\ j+1 \end{array}\right)_2. \tag{10}$$

Fazemos uso das seguintes famílias de polinômios que são $q-$análogos dos coeficientes trinomiais (no mesmo sentido em que os polinômios de Gauss $\left[\begin{array}{c} n \\ j \end{array}\right]$ são q-análogos dos coeficientes binomiais),

$$T_0(m,A) = T_0(m,A,q) = \sum_{j=0}^{m}(-1)^j \left[\begin{array}{c} m \\ j \end{array}\right]_{q^2}\left[\begin{array}{c} 2m-2j \\ m-A-j \end{array}\right],$$

$$T_1(m,A) = T_1(m,A,q) = \sum_{j=0}^{m}(-q)^j \left[\begin{array}{c} m \\ j \end{array}\right]_{q^2}\left[\begin{array}{c} 2m-2j \\ m-A-j \end{array}\right].$$

Definindo

$$U(m,A) = U(m,A,q) = T_0(m,A) + T_0(m,A+1), \tag{11}$$

segue de [2] as seguintes relações que serão fundamentais em nossas demonstrações

$$U(m,A) = (1+q^{2m-1})U(m-1,A) - q^{m-A}T_1(m-1,A-1)$$

$$+q^{m+A+1}T_1(m-1,A+2), \tag{12}$$

$$U(m,A) = (1+q+q^{2m-1})U(m-1,A) - qU(m-2,A)+$$

$$q^{2m-2A}T_0(m-2,A-2) + q^{2m+2A+2}T_0(m-2,A+3), \tag{13}$$

$$T_0(m,A) = T_0(m,-A), \tag{14}$$

$$T_1(m,A) = T_1(m,-A), \tag{15}$$

$$T_0(m,A) = T_0(m-1,A-1) + q^{m+A}T_1(m-1,A) + q^{2m+2A}T_0(m-1,A+1), \tag{16}$$

$$T_1(m,A) = T_1(m-1,A) + q^{m+A}T_0(m-1,A+1) + q^{m-A}T_0(m-1,A-1), \tag{17}$$

$$T_1(m,A) - q^{m-A}T_0(m,A) - T_1(m,A+1) + q^{m+A+1}T_0(m,A+1) = 0. \tag{18}$$

Também segue de [2] que:

$$\lim_{n\to\infty} T_1(m,A,q) = \frac{(-q^2;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}, \tag{19}$$

$$\lim_{n\to\infty} U(m,A) = \frac{(-q;q^2)_\infty}{(q^2,q^2)_\infty}. \tag{20}$$

Neste trabalho estaremos usando a seguinte notação:

$$CT(m,A) = T_1(m,A,q^{\frac{1}{2}}).$$

A seguir exibimos um importante teorema que permite estabelecermos uma relação entre somatórios e produtórios.

Teorema 0.2.1 *(Produto Triplo de Jacobi): Para números complexos $z \neq 0$, e $|q| < 1$, vale que:*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{n^2} = \prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{2n+2})(1+zq^{2n+1})(1+z^{-1}q^{2n+1}). \tag{21}$$

Finalmente, segue de [3] que

Teorema 0.2.2 *(Lema de Abel): Se* $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, *então* $\lim_{t\to 1^-}(1-t)\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = L.$

Proposição 0.2.1 *Para A e m inteiros, vale que:*

$$T_0(m,A) - T_0(m-1,A+1) = q^{2m-1}T_0(m-1,A) + q^{m-A}T_1(m-1,A-1). \tag{22}$$

Demonstração: Segue de (12) que:

$$T_0(m,A) - T_0(m-1,A+1) = T_0(m-1,A) - T_0(m,A+1) + q^{2m-1}T_0(m-1,A)$$

$$+q^{2m-1}T_0(m-1,A+1) + q^{m-A}T_1(m-1,A-1) + q^{m+A+1}T_1(m-1,A+2), \tag{23}$$

aplicando (16) na segunda parcela do lado direito de (23), temos que:

$$T_0(m,A) - T_0(m-1,A+1) = T_0(m-1,A) - T_0(m-1,A)$$
$$-q^{m+A+1}T_1(m-1,A+1) - q^{2m+2A+2}T_0(m-1,A+2) + q^{2m-1}T_0(m-1,A)$$
$$q^{2m-1}T_0(m-1,A+1) + q^{m-A}T_1(m-1,A-1) + q^{m+A+1}T_1(m-1,A+2).$$

Fazendo um cancelamento, obtemos:

$$T_0(m,A) - T_0(m-1,A+1) = -q^{m+A+1}T_1(m-1,A+1)$$

$$-q^{2m+2A+2}T_0(m-1,A+2) + q^{2m-1}T_0(m-1,A) + q^{2m-1}T_0(m-1,A+1)$$

$$q^{m-A}T_1(m-1,A-1) + q^{m+A+1}T_1(m-1,A+2). \tag{24}$$

Consideramos as primeira e sexta parcelas no lado direito de (24), segue de (18),

$$-q^{m+A+1}T_1(m-1,A+1) + q^{m+A+1}T_1(m-1,A+2) =$$
$$q^{m+A+1}\{-T_1(m-1,A+1) + T_1(m-1,A+2)\} =$$
$$q^{m+A+1}\left\{-q^{m-1-A-1}T_0(m-1,A+1) + q^{m-1+A+2}T_0(m-1,A+2)\right\} =$$
$$-q^{2m-1}T_0(m-1,A+1) + q^{2m+2A+2}T_0(m-1,A+2).$$

Substituindo em (24) e fazendo alguns cancelamentos obtemos:

$$T_0(m,A) - T_0(m-1,A+1) = q^{2m-1}T_0(m-1,A) + q^{m-A}T_1(m-1,A-1).$$

□

0.3 Método para Provas Alternativas de Identidades do tipo Rogers-Ramanujan

Começamos com a descrição de uma idéia introduzida por Andrews em 1985, que também pode ser usada para provar muitas identidades do tipo Rogers-Ramanujan.

Consideramos uma identidade do tipo Rogers-Ramanujan que se quer provar,

$$\pi(q) = \phi(q),$$

onde $\phi(q)$ é uma série e $\pi(q)$ é um produto infinito. Consideramos a função de duas variáveis $f(q,t)$ com as seguintes propriedades:

1. $f(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(q)t^n$, onde $P_n(q)$ são polinômios;
2. $\lim_{n\to\infty} P_n(q) = \pi(q)$;
3. $f(q,t)$ satisfaz uma equação não-homogênea da forma:

$$f(q,t) = R_1(q,t) + R_2(q,t)f(q,tq^k),$$

onde R_1 e R_2 são funções racionais de q e k é um inteiro não negativo.

Agora vamos descrever, como exemplo, uma prova alternativa para a segunda identidade do tipo Rogers-Ramanujan, que é a de número 14 na lista de Slater (esta demonstração foi dada por Santos em [10])

Consideramos a função de duas variáveis associada à segunda identidade de Rogers-Ramanujan,

$$f(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}q^{n^2+n}}{(t)_{n+1}}.$$

Podemos escrever

$$f(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}q^{n^2+n}}{(t)_{n+1}} = \frac{1}{1-t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n}q^{n^2+n}}{(t)_{n+1}} =$$

$$\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1-t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{2n}q^{n^2+n}}{(tq)_n}=\frac{1}{1-t}+\frac{t^2q^2}{1-t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}q^{n^2+3n}}{(tq)_{n+1}}=$$

$$\frac{1}{1-t}+\frac{t^2q^2}{1-t}f(q,tq).$$

Segue daí a equação funcional

$$(1-t)f(q,t)=1+t^2q^2f(q,tq). \tag{25}$$

Então, vamos escrever:

$$f(q,t)=\sum_{n=0}^{\infty}P_nt^n.$$

Com isso,

$$(1-t)\sum_{n=0}^{\infty}P_nt^n=1+t^2q^2\sum_{n=0}^{\infty}P_nt^nq^n,$$

isto implica,

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_nt^n-\sum_{n=1}^{\infty}P_{n-1}t^n=1+\sum_{n=2}^{\infty}P_{n-2}t^nq^n.$$

Desta ultima equação segue

$$P_0=1;P_1=1;P_n=P_{n-1}+q^nP_{n-2}. \tag{26}$$

Em [10], Santos conjecturou e provou:

$$P_{2n-1}=\sum_{j=-\infty}^{\infty}q^{40j^2+6j}\begin{bmatrix}2n\\ n-1-10j\end{bmatrix}+\sum_{j=-\infty}^{\infty}q^{40j^2-34j+7}\begin{bmatrix}2n\\ n-4+10j\end{bmatrix}$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty}q^{40j^2-14j+1}\begin{bmatrix}2n\\ n-2+10j\end{bmatrix}-\sum_{j=-\infty}^{\infty}q^{40j^2+26j+4}\begin{bmatrix}2n\\ n-3-10j\end{bmatrix}$$

$$P_{2n}=\sum_{j=-\infty}^{\infty}q^{40j^2+6j}\begin{bmatrix}2n+1\\ n-10j\end{bmatrix}+\sum_{j=-\infty}^{\infty}q^{40j^2+6j}\begin{bmatrix}2n+1\\ n-10j\end{bmatrix}$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty}q^{40j^2+6j}\begin{bmatrix}2n+1\\ n-10j\end{bmatrix}-\sum_{j=-\infty}^{\infty}q^{40j^2+6j}\begin{bmatrix}2n+1\\ n-10j\end{bmatrix}.$$

Temos que

$$\lim_{n\to\infty}P_{2n}=\frac{1}{(q)_\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left\{q^{40j^2+6j}+q^{40j^2-34j+7}-q^{40j^2-14j+1}-q^{40j^2+26j+4}\right\}=$$

$$\frac{1}{(q)_\infty}\Big(\sum_{n\equiv 0(mod4)}(-1)^n q^{\frac{5n^2+3n}{2}}+\sum_{n\equiv 2(mod4)}(-1)^n q^{\frac{5n^2+3n}{2}}+$$

$$\sum_{n\equiv 1(mod4)}(-1)^n q^{\frac{5n^2+3n}{2}}+\sum_{n\equiv -1(mod4)}(-1)^n q^{\frac{5n^2+3n}{2}}\Big)=$$

$$\frac{1}{(q)_\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{5n^2+3n}{2}}. \tag{27}$$

Segue de (21),

$$\frac{1}{(q)_\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{5n^2+3n}{2}}=$$

$$\frac{1}{(q)_\infty}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{5n})(1-q^{5n-1})(1-q^{5n-4}).$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty}P_{2n}(q)=\frac{1}{(q)_\infty}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{5n})(1-q^{5n-1})(1-q^{5n-4}).$$

Segue de (1.5)

$$\lim_{t\to 1^-}(1-t)f(t,q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2+n}}{(q)_n}$$

Dessa forma, segue do Lema de Abel,

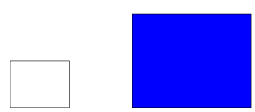
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2+n}}{(q)_n}=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-q^{5n+2})(1-q^{5n+3})}.$$

Capítulo 1

Extensões Polinomiais e Interpretações Combinatórias para os Números de Fibonacci

Em 1202, Fibonacci publicou o livro "Liber abbaci"(livro do ábaco), onde além de outras coisas, introduziu os números hindu-arábicos e descreveu um problema considerando a reprodução de coelhos. Os números de Fibonacci, $1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots,$ definidos por $F_1 = 1$, $F_2 = 2$; $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, aparecem em grande número de situações, uma delas é o seguinte problema de Combinatória que descrevemos abaixo.

Queremos calcular o número de ladrilhamentos possíveis para um retâgunlo $2 \times n$ com dois tipos de ladrilhos, um ladrilho de cor branca (1×1) e um ladrilho de cor azul 2×2. Segue abaixo os dois tipos de ladrilhos,



Denotamos por L_n o número de ladrilhamentos possíveis do retângulo $2 \times n$.

Temos que $L_1 = 1$, pois há apenas um ladrilhamento para o retângulo 2×1 com os dois tipos de ladrilhos definidos anteriormente. Veja figura abaixo,

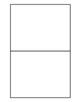


Figura 1.1: Ladrilhamentos para retângulo 2×1.

Agora listamos os ladrilhamentos possíveis para o retângulo 2×2.

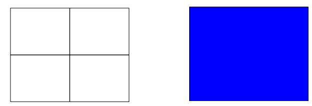


Figura 1.2: Ladrilhamentos para retângulo 2×2.

Logo $L_2 = 2$.

O número de ladrilhamentos para o retângulo 2×3 é $L_3 = 3$. Segue (veja figura) abaixo cada um desses ladrilhamentos,

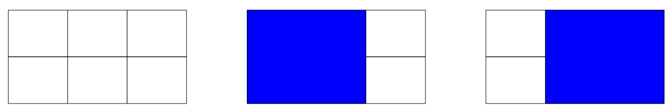


Figura 1.3: Ladrilhamentos para retângulo 2×3.

Observamos que $L_4 = 5$, pois há 5 maneiras de ladrilhar o retângulo 2×4 com os dois tipos de ladrilhos já definidos. Listamos abaixo esses ladrilhamentos,

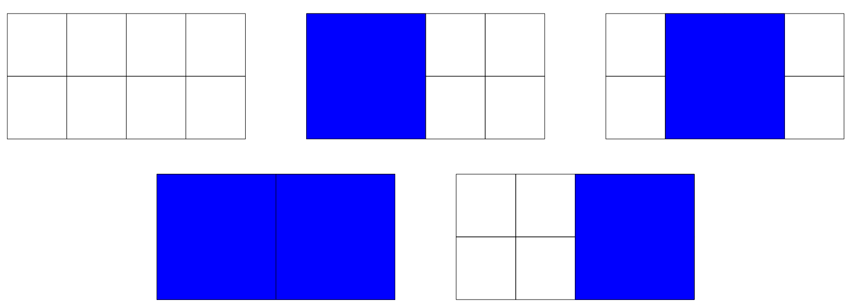
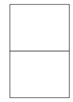


Figura 1.4: Ladrilhamentos para retângulo 2×4.

Particionamos o conjunto dos ladrilhamentos $2 \times n$ com ladrilhos de dois tipos em dois conjuntos:

- o conjunto dos ladrilhamentos $2 \times n$ que contém na última coluna 2×1 ladrilhos de cor branca.



- o conjunto dos ladrilhamentos $2 \times n$ que contém nas duas últimas colunas um ladrilho de cor azul.

Observamos que a cardinalidade do primeiro conjunto que definimos é L_{n-1}. O segundo conjunto tem cardinalidade L_{n-2}. Portanto estabelecemos a seguinte relação de recorrência para este problema:

$$\left\{ \begin{array}{lll} L_1 = & 1 & \\ L_2 = & 2 & \\ L_n = & L_{n-1} & +L_{n-2} \end{array} \right. .$$

Observamos que esta relação de recorrência nos fornece os números de Fibonacci.

1.1 Números de Fibonacci e seqüências binárias

Apresentamos, a seguir, uma bijeção entre os ladrilhamentos apresentados no início deste capítulo e seqüências binárias. Dado um ladrilhamento como o da figura abaixo

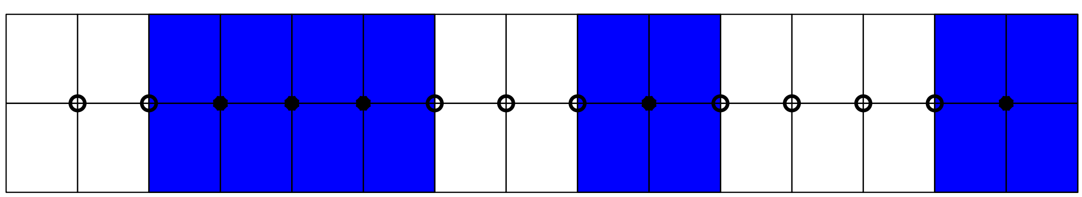


Figura 1.5: Ladrilhamento do retângulo 2×15.

associamos a cada ponto interno de coordenadas inteiras o valor "0"ou "1"através da seguinte regra: se todos os 4 quadrados 1×1 vizinhos do ponto são azuis associamos o valor 1 e zero caso contrário.

Para o exemplo acima a seqüência correspondente é dada por (01111000100001).

É fácil verificar que não teremos nunca, através desta bijeção, a seqüência 101 e também um número par de $1's$ consecutivos.

Logo, pelas observações acima provamos a seguinte proposição:

Proposição 1.1.1 *O total de $n-$seqüências binárias, onde o padrão* 101 *e um número par de $1's$ consecutivos não ocorrem é igual a F_{n+1}*

Em [14], é apresentada uma lista de 130 identidades, na qual, a identidade de número 16, dada abaixo, está incluída.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+2n}}{(q^4;q^4)_n} = \frac{(-q;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty} \prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{5n+5})(1-q^{5n+2})(1-q^{5n+1}). \tag{1.1}$$

Neste capítulo descreveremos uma extensão para os números de Fibonacci asssociada a essa identidade.

No capítulo zero, vimos um procedimento, descrito por Andrews, para obter uma extensão para uma série dada (relacionada a uma identidade do tipo Rogers-Ramanujan), de modo a estabelecer uma prova alternativa para identidades do tipo Rogers-Ramanujan.

Santos em [10], obteve extensões, $f(q,t)$ para 74 das séries que aparecem nas 130 identidades do tipo Rogers-Ramanujan, listadas por Slater. Dentre essas, escrevemos abaixo a extensão para a série dada na identidade de número 16 de Slater,

$$f_{16}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n} q^{n^2+2n}}{(t;q^2)_{n+1}(-tq^2;q^2)_n}. \tag{1.2}$$

Também em [10], é dada uma família de polinômios $P_n(q)$, associada a essa identidade, ou seja,

$$f_{16}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(q) t^n,$$

onde

$$\left\{ \begin{array}{lccc} P_0(q) = & 1 & & \\ P_1(q) = & 1+q^3 & & \\ P_n(q) = & (1-q^2+q^{2n-1})P_{n-1}(q) & + & q^2 P_{n-2}(q) \end{array} \right. . \tag{1.3}$$

Neste capítulo estaremos explorando interpretações combinatórias para a família de polinômios $P_n(q)$. Notamos que, fazendo $q = 1$ em (1.3), obtemos uma seqüência de inteiros positivos que nos fornece os números de Fibonacci. Com isso é possível estabelecer uma relação entre os números de Fibonacci e as partições restritas fazendo uso do símbolo de Frobenius. Também damos uma prova alternativa para a identidade 16 de Slater, sendo que esta é uma das conseqüências do Teorema (1.2.1). Uma outra conseqüência é uma fórmula explícita para os números de Fibonacci em função dos coeficientes trinomiais.

Vamos inserir um parâmetro k em $f_{16}(q,t)$ e gerar a família de polinômios $P_n^k(q)$, sendo que estas são extensões para os números de Fibonacci. Daremos uma interpretação combinatória para $P_n^k(q)$ que é um caso geral do resultado obtido por Santos [12], quando fazemos $k = 0$.

1.2 Extensões polinomiais para os Números de Fibonacci

Definiremos a seguir uma família de funções de duas variáveis $f_{20-4k}(q,t)$.

Seja $k \geq 0$.

Inserimos um parâmetro k em $f_{16}(q,t)$, e com isso obtemos a seguinte função de duas variáveis que inclui as funções $f_{20}(q,t)$ e $f_{16}(q,t)$, quando fazemos $k = 0$ e $k = 1$ respectivamente,

$$f_{20-4k}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n q^{n^2+2kn}}{(1-t)(t^2q^4;q^4)_n} \tag{1.4}$$

Observemos que:

$$f_{20-4k}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n q^{n^2+2kn}}{(1-t)(t^2q^4;q^4)_n} =$$

$$\frac{1}{1-t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n q^{n^2+2nk}}{(t;q^2)_{n+1}(-tq^2;q^2)_n} =$$

$$\frac{1}{1-t} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1} q^{(n+1)^2+2(n+1)k}}{(t;q^2)_{n+2}(-tq^2;q^2)_{n+1}} =$$

$$\frac{1}{1-t}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n tq^{n^2+2n+1+2nk+2k}}{(1-t)(1-tq^2)\dots(1-tq^{2n+2})(1+tq^2)\dots(1+tq^{2n+2})}=$$

$$\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1-t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tq^2)^n tq^{2k+1}q^{n^2+2nk}}{(1-t)(1-tq^2)\dots(1-tq^{2n+2})(1+tq^2)\dots(1+tq^{2n+2})}=$$

$$\frac{1}{1-t}+\frac{tq^{2k+1}}{(1-t)((1+tq^2)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tq^2)^n q^{n^2+2nk}}{(tq^2;q^2)_{n+1}(-tq^2q^2;q^2)_n}=$$

$$\frac{1}{1-t}+\frac{tq^{2k+1}}{(1-t)(1+tq^2)}f_{20-4k}(tq^2;q)$$

$$(1-t)(1+tq^2)f_{20-4k}(q,t)=1+tq^2+tq^{2k+1}f_{20-4k}(tq^2,q) \tag{1.5}$$

Substituindo

$$f_{20-4k}(q,t)=\sum_{k=0}^{\infty}P_n^k t^n$$

em (1.5) temos

$$(1+tq^2-t-t^2q^2)\sum_{n=0}^{\infty}P_n^k(q)t^n=1+tq^2+tq^{2k+1}\sum_{n=0}^{\infty}P_n^k(tq^2)^n;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_n^k(q)t^n+tq^2\sum_{n=0}^{\infty}P_n^k(q)t^n-t\sum_{n=0}^{\infty}P_n^k(q)t^n-t^2q^2\sum_{n=0}^{\infty}P_n^k(q)t^n=$$

$$1+tq^2+tq^{2k+1}\sum_{n=0}^{\infty}P_n^k(tq^2)^n;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_n^k(q)t^n+\sum_{n=0}^{\infty}q^2P_n^k(q)t^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}P_n^k(q)t^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}q^2P_n^k(q)t^{n+2}=$$

$$1+tq^2+\sum_{n=0}^{\infty}P_n^k(q)t^{n+1}q^{2n+2k+1};$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_n^k(q)t^n+\sum_{n=1}^{\infty}q^2P_{n-1}^k(q)t^n-\sum_{n=1}^{\infty}P_{n-1}^k(q)t^n-\sum_{n=2}^{\infty}q^2P_{n-2}^k(q)t^n=$$

$$1+tq^2+\sum_{n=1}^{\infty}P_{n-1}^k(q)t^nq^{2n+2k-1}.$$

Comparando os coeficientes temos:

$$\begin{cases} P_0^k(q) = & 1 \\ P_1^k(q) = & 1 + q^{2k+1} \\ P_n^k(q) = & (1 - q^2 + q^{2n-1+2k})P_{n-1}^k(q) + q^2 P_{n-2}^k(q) \end{cases}, \tag{1.6}$$

Substituindo $q = 1$ em (1.6)

$$\begin{cases} P_0^k(1) = & 1 \\ P_1^k(1) = & 2 \\ P_n^k(1) = & P_{n-1}^k(1) + P_{n-2}^k(1) \end{cases}, \tag{1.7}$$

Uma observação imediata é que a sequência $P_n^k(q)$, dada em (1.6) é uma generalização da sequência de Fibonacci, pois fazendo $q = 1$ em (1.6), obtemos uma relação de recorrência que fornece os números de Fibonacci. Santos conjecturou a seguinte fórmula explícita para a família dada em (1.6) quando $k = 0$,

$$P_n^0(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{10j^2+j} U(n, 5j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{10j^2+11j+3} U(n, 5j+2) \tag{1.8}$$

Santos provou em [12] que vale tal relação e observou que fazendo $q \to 1$ em $P_n^0(q)$ obtém-se uma fórmula explícita para os números de Fibonacci em função dos coeficientes trinomiais.

Em [10], é dada uma conjectura de uma fórmula explícita para $P_n^k(q)$ para o caso $k = 1$,

$$c(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{10j^2+3j} U(n, 5j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{10j^2+13j+4} U(n, 5j+3), \tag{1.9}$$

onde $c(n) = P_{n-1}^1(q)$ e

$$\begin{cases} P_0^1(q) = & 1 \\ P_1^1(q) = & 1 + q^3 \\ P_n^1(q) = & (1 - q^2 + q^{2n+1})P_{n-1}^1(q) + q^2 P_{n-2}^1(q) \end{cases}, \tag{1.10}$$

Teorema 1.2.1 *A fórmula $c(n)$ dada em (1.9) satisfaz a relação de recorrência e as mesmas condições iniciais dadas em (1.6) quando fazemos $k = 1$*

Demonstração: Vamos provar que a família de polinômios dada em (1.9) satisfaz as mesmas condições iniciais e a mesma relação de recorrência dada em (1.10).

Temos que: $c(1) = P_0^1(q)$ e $c(2) = P_1^1(q)$.

Agora vamos provar que, $c(n+1) = P_n^1(q)$; $n \geq 1$, ou seja

$$c(n+1) = (1 - q^2 + q^{2n+1})c(n) + q^2 c(n-1),$$

isto é

$$c(n+1) - (1 - q^2 + q^{2n+1})c(n) - q^2 c(n-1) = 0,$$

Para isso, faremos a seguinte observação: sejam A, n inteiros positivos, consideramos,

$$U(n+1, A) - (1 - q^2 + q^{2n+1})U(n, A) - q^2 U(n-1, A).$$

Escrevendo de maneira conveniente,

$$U(n+1, A) - (1 + q^{2n+1})U(n, A) + q^2 U(n, A) - q^2 U(n-1, A) \tag{1.11}$$

Fazendo $n \to n+1$ em (12),

$$U(n+1, A) - (1 + q^{2n+1})U(n, A) =$$

$$q^{n+1-A} T_1(n, A-1) + q^{n+A+2} T_1(n, A+2) \tag{1.12}$$

Substituindo (1.12) em (1.11)e aplicando (11) em 1.11 obtemos:

$$q^{n+1-A} T_1(n, A-1) + q^{n+A+2} T_1(n, A+2) + q^2 U(n, A) - q^2 U(n-1, A) =$$

$$q^{n+1-A} T_1(n, A-1) + q^{n+A+2} T_1(n, A+2) + q^2 (T_0(n, A) + T_0(n, A+1))$$

$$-q^2 T_0(n-1, A) - q^2 T_0(n-1, A+1) \tag{1.13}$$

Segue de (16) e (17) que

$$T_1(n, A-1) = T_1(n-1, A-1) + q^{n+A-1} T_0(n-1, A) +$$

$$q^{n-A+1} T_0(n-1, A-2) \tag{1.14}$$

$$T_1(n,A+2)=T_1(n-1,A+2)+q^{n+A+2}T_0(n-1,A+3)+$$

$$q^{n-A-2}T_0(n-1,A+1) \tag{1.15}$$

$$T_0(n,A)=T_0(n-1,A+1)+q^{n-A}T_1(n-1,A)+$$

$$q^{2n-2A}T_0(n-1,A-1) \tag{1.16}$$

$$T_0(n,A+1)=T_0(n-1,A)+q^{n+A+1}T_1(n-1,A+1)+$$

$$q^{2n+2A+2}T_0(n-1,A+2) \tag{1.17}$$

Substituindo (1.14), (1.15), (1.16) e (1.17) em (1.13) temos

$$\begin{gathered} q^{n+1-A}\left\{T_1(n-1,A)+q^{n+A-1}T_0(n-1,A)+q^{n-A+1}T_0(n-1,A-2)\right\} \\ +q^{n+A+2}\left\{T_1(n-1,A+2)+q^{n+A+2}T_0(n-1,A+3)+q^{n-A-2}T_0(n-1,A+1)\right\} \\ +q^2\left\{T_0(n-1,A+1)+q^{n-A}T_0(n-1,A)+q^{2n-2A}T_0(n-1,A-1)\right\} \\ +q^2\left\{T_0(n-1,A)+q^{n+A+1}T_1(n-1,A+1)+q^{2n+2A+2}T_0(n-1,A+2)\right\} \\ -q^2T_0(n-1,A)-q^2T_0(n-1,A+1), \end{gathered}$$

após dois cancelamentos imediatos,

$$\begin{gathered} q^{n+1-A}T_1(n-1,A)+q^{2n}T_0(n-1,A)+q^{2n-2A+2}T_0(n-1,A-2) \\ +q^{n+A+2}T_1(n-1,A+2)+q^{2n+2A+4}T_0(n-1,A+3)+q^{2n}T_0(n-1,A+1) \\ +q^{n-A+2}T_1(n-1,A)+q^{2n-2A+2}T_0(n-1,A-1)+q^{n+A+3}T_1(n-1,A+1) \end{gathered}$$

$$+q^{2n+2A+4}T_0(n-1,A+2) \tag{1.18}$$

Para completar a prova do teorema temos que mostrar que a expressão dada em (1.18), quando substituida em (1.9) é igual a zero. Depois da substituição, fazendo alguns cancelamentos imediatos,

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{2n+10j^2-2j+1}T_0(n-1,5j-1)+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{2n+10j^2+3j}T_0(n-1,5j)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{2n+10j^2-7j+2}T_0(n-1,5j-2)+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{n+10j^2-2j+2}T_1(n-1,5j)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{2n+10j^2-7j+2}T_0(n-1,5j-1)+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{n+10j^2+8j+3}T_1(n-1,5j+1)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{n+10j^2+13j+4}T_0(n-1,5j+2)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{n+10j^2+18j+9}T_1(n-1,5j+5)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{2n+10j^2+23j+14}T_0(n-1,5j+6)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{2n+10j^2+13j+4}T_0(n-1,5j+4)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{n+10j^2+8j+3}T_1(n-1,5j+3)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{2n+10j^2+3j}T_0(n-1,5j+2)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{n+10j^2+18j+10}T_1(n-1,5j+4)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{2n+10j^2+23j+14}T_0(n-1,5j+5). \quad (1.19)$$

Consideramos a quarta e décima terceira parcelas. Fazendo a substituição $j \to j+1$ na quarta parcela, segue (18),

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{n+10j^2-2j+2}T_1(n-1,5j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{n+10j^2+18j+10}T_1(n-1,5j+4)=$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{2n+10j^2+13j+5}T_0(n-1,5j+4)+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{2n+10j^2+23j+14}T_0(n-1,5j+5) \quad (1.20)$$

Substituindo (1.19) em (1.20), temos que a segunda soma dada em (1.20) cancela-se com a décima quarta dada em (1.19). E a primeira soma dada em (1.20) cancela-se com a décima quinta dada em (1.19) quando fazemos a substituição $j \to j+1$. Reescrevendo,

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{n+10j^2-2j+1}T_1(n-1,5j-1)+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{2n+10j^2+3j}T_0(n-1,5j)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{2n+10j^2-7j+2}T_0(n-1,5j-2)+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{n+10j^2+8j+3}T_1(n-1,5j+1)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{2n+10j^2+13j+4}T_0(n-1,5j+2)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{n+10j^2+18j+9}T_1(n-1,5j+5)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{2n+10j^2+23j+14}T_0(n-1,5j+6)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{2n+10j^2+13j+4}T_0(n-1,5j+4)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{n+10j^2+8j+3}T_1(n-1,5j+3)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{2n+10j^2+3j}T_0(n-1,5j+2) \qquad (1.21)$$

Consideremos a primeira e sexta parcelas e fazendo a substituição $j \to j+1$ na primeira parcela, segue de (18)

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{n+10j^2-2j+1}T_1(n-1,5j-1)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{n+10j^2+18j+9}T_1(n-1,5j+5)=$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{n+10j^2+18j+10}(T_1(n-1,5j+4)-T_1(n-1,5j+5))$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{2n+10j^2+13j+4}T_0(n-1,5j+4)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{2n+10j^2+23j+13}T_0(n-1,5j+5) \qquad (1.22)$$

Substituindo (1.22) em (1.21) temos que a segunda parcela em (1.21) (fazendo $j \to j+1$) e a segunda parcela em (1.22) cancela-se, o outro cancelamento é imediato. Dessa forma,

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{2n+10j^2-7j+2}T_0(n-1,5j-2)+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{n+10j^2+8j+3}T_1(n-1,5j+1)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{2n+10j^2+13j+4}T_0(n-1,5j+2)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{2n+10j^2+23j+14}T_0(n-1,5j+6)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{n+10j^2+8j+3}T_1(n-1,5j+3)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{2n+10j^2+3j}T_0(n-1,5j+2). \qquad (1.23)$$

Fazendo a substituição $j \to j-1$ na quarta parcela e $j \to j+1$ na primeira parcela temos

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{2n+10j^2+13j+5}T_0(n-1,5j+3)+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{n+10j^2+8j+3}T_1(n-1,5j+1)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{2n+10j^2+13j+4}T_0(n-1,5j+2)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{2n+10j^2+3j+1}T_0(n-1,5j+1)$$

$$- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{n+10j^2+8j+3} T_1(n-1, 5j+3) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{2n+10j^2+3j} T_0(n-1, 5j+2). \qquad (1.24)$$

Consideramos a quinta parcela, segue de (18),

$$- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{n+10j^2+8j+3} T_1(n-1, 5j+3) = - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{n+10j^2+8j+3} T_1(n-1, 5j+2)$$

$$+ \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{2n+10j^2+3j} T_0(n-1, 5j+2) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{2n+10j^2+13j+5} T_0(n-1, 5j+3) \qquad (1.25)$$

Substituindo (1.25) em (1.24) temos:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{n+10j^2+8j+3} T_1(n-1, 5j+1) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{2n+10j^2+13j+4} T_0(n-1, 5j+2)$$

$$- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{2n+10j^2+3j+1} T_0(n-1, 5j+1) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{n+10j^2+8j+3} T_1(n-1, 5j+2)$$

Considerando a primeira e a quarta parcelas, segue de (18)

$$- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{n+10j^2+8j+3} T_1(n-1, 5j+1) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{n+10j^2+8j+3} T_1(n-1, 5j+2) =$$

$$- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{n+10j^2+8j+3} (T_1(n-1, 5j+1) - T_1(n-1, 5j+2)) =$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{2n+10j^2+3j+1} T_0(n-1, 5j+1) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{2n+10j^2+13j+4} T_0(n-1, 5j+2)$$

Portanto

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{n+10j^2+8j+3} T_1(n-1, 5j+1) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{2n+10j^2+13j+4} T_0(n-1, 5j+2)$$

$$- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{2n+10j^2+3j+1} T_0(n-1, 5j+1) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{n+10j^2+8j+3} T_1(n-1, 5j+2) = 0$$

$\square$

Uma conseqüência do Teorema 1.2.1 é a identidade de número 16 na lista de Slater.

Corolário 1.2.1

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+2n}}{(q^4;q^4)_n} = \frac{(-q;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty} \prod_{n=0}^{\infty} (1-q^{5n+5})(1-q^{5n+2})(1-q^{5n+1}).$$

Segue do Teorema (1.2.1) que $c(n+1) = P_n^1(q)$. Dessa forma,

$$\lim_{n\to\infty} P_n^1(q) = \lim_{n\to\infty} c(n+1).$$

De (20), temos que:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{10j^2+3j} U(n+1,5j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{10j^2+13j+4} U(n+1,5j+3) \right) =$$

$$\frac{(-q;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{\frac{5j^2+3j}{2}}$$

De (21) temos:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{\frac{5j^2+3j}{2}} = \prod_{n=0}^{\infty} (1-q^{5n+5})(1-q^{5n+2})(1-q^{5n+1}).$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} P_n^1(q) = \frac{(-q;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty} \prod_{n=0}^{\infty} (1-q^{5n+5})(1-q^{5n+2})(1-q^{5n+1}).$$

Segue de (1.5),

$$\lim_{t\to 1^-} (1-t) f_{20-4k}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+2n}}{(q^4;q^4)_n},$$

para caso $k=1$.

Portanto, segue do Lema de Abel,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+2n}}{(q^4;q^4)_n} = \frac{(-q^2;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty} \prod_{n=0}^{\infty} (1-q^{5n+5})(1-q^{5n+2})(1-q^{5n+1}).$$

$\square$

e do Teorema 1.2.1 uma fórmula explícita para os números de Fibonacci em função dos coeficientes trinomiais, pois

$$\lim_{q\to 1} P^1_{n-1}(q) = F_n,$$

onde F_n é o n-ésimo número de Fibonacci. Por outro lado,

$$\lim_{q\to 1}\left\{\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{10j^2+3j}U(n,5j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{10j^2+13j+4}U(n,5j+3)\right\} =$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left\{\left(\begin{array}{c} n+1 \\ 5j+1 \end{array}\right)_2 - \left(\begin{array}{c} n+1 \\ 5j+3 \end{array}\right)_2\right\}.$$

Portanto,

$$F_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\left\{\left(\begin{array}{c} n+1 \\ 5j+1 \end{array}\right)_2 - \left(\begin{array}{c} n+1 \\ 5j+3 \end{array}\right)_2\right\}.$$

1.3 Interpretação Combinatória para os Números de Fibonacci

Agora vamos obter uma relação entre os números de Fibonacci e partições com restrições. Para isso, vamos descrever o conceito de símbolo de Frobenius para uma partição dada. Como um exemplo consideramos o gráfico de Ferrers da partição $4+3+1+1$

$$\begin{array}{llll} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & & & \\ \bullet & & & \end{array} \quad \leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 3 & 0 \end{array}\right), \tag{1.26}$$

o símbolo de Frobenius para essa partição é dado pela matriz em (1.26). De modo geral, dada uma partição π, o símbolo de Frobenius de π é dado da seguinte forma:

$$\left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{array}\right), \tag{1.27}$$

onde, n é a dimensão do quadrado de Durfee, a_{1j} é o número de pontos que estão à direita da diagonal deste quadrado e na $j-$ésima linha deste gráfico e a_{2j} é o número de pontos que estão abaixo da diagonal deste quadrado e na $j-$ésima coluna deste gráfico (lendo da esquerda para direita). O elemento a_{1n} dado em (1.27) é chamado **elemento do topo**.

Definição 1.3.1 *Dizemos que uma partição é de Frobenius com alternância par (ímpar) se os elementos da primeira linha da matriz dada em* (1.27) *alternam a paridade lendo da direita para esquerda, sendo que o elemento do topo é par (ímpar).*

Abaixo descrevemos como exemplo uma partição de 29, que é de Frobenius com alternância par.

$$\begin{array}{lllllll}
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \\
\bullet & \bullet & \bullet & & & & \\
\bullet & \bullet & \bullet & & & & \\
\bullet & \bullet & & & & & \\
\bullet & \bullet & & & & &
\end{array}
\quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix};$$

Segue abaixo como exemplo, uma partição de 43, que é de Frobenius com alternância ímpar.

$$\begin{array}{llllllllllll}
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & & & \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & & & & & \\
\bullet & \bullet & \bullet & & & & & & & & & \\
\bullet & \bullet & \bullet & & & & & & & & & \\
\bullet & \bullet & \bullet & & & & & & & & & \\
\bullet & \bullet & & & & & & & & & & \\
\bullet & \bullet & & & & & & & & & & \\
\bullet & & & & & & & & & & & \\
\bullet & & & & & & & & & & & \\
\bullet & & & & & & & & & & & \\
\bullet & & & & & & & & & & &
\end{array}
\quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 11 & 6 & 3 \\ 11 & 6 & 3 \end{pmatrix};$$

Agora iremos estabelecer uma relação entre os números de Fibonacci e as partições de Frobenius com alternância par tais que $a_{1j} - a_{2j} = 2k$. Iremos provar que o coeficiente de t^N na expansão de $f_{20-4k}(q,t)$ é a função geradora para partições de Frobenius com alternância par em no máximo N partes, onde $a_{1j} - a_{2j} = 2k$.

Para isso, consideremos a igualdade a seguir

Observação 1.3.1 *Podemos escrever:*

$$f_{20-4k}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n q^{n^2+2kn}}{(t;q^2)_{n+1}(-tq^2;q^2)_n} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n q^{n^2+2kn}}{(1-t)(1-tq^2)\dots(1-tq^{2n})(1+tq^2)(1+tq^4)\dots(1+tq^{2n})} =$$

$$\frac{1}{1-t}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n q^{n^2+2kn}}{(1-t^2q^4)(1-t^2q^8)\dots(1-t^2q^{4n})}. \tag{1.28}$$

Observamos que o produto no denominador em (1.28) pode ser escrito da seguinte forma:

$$\frac{1}{(t^2q^4;q^4)_n} = \frac{1}{(1-t^2q^4)(1-t^2q^8)\dots(1-t^2q^{4j})\dots(1-t^2q^{4n})} =$$

$$(1+t^2q^4+t^4q^8+\dots)(1+t^2q^8+t^4q^{16}\dots)\dots(1+t^2q^{4n}+t^4q^{8n}+\dots) \tag{1.29}$$

dessa forma, enumeraramos (1.29) contando da esquerda para direita (primeiro fator, ..., n-ésimo fator).

É fácil ver que o expoente de q dado (1.29) é um mútiplo de 4 e também de j, onde j é a posição do fator no produto (1.29). Dessa forma, se dividirmos o expoente de q por 2 o resultado é sempre um número par e múltiplo de j. ■

Segue da observação (1.3.1) que na expansão de $\frac{1}{1-t^2q^{4j}}$ que é

$$1+(t^2q^{4j})^1+(t^2q^{4j})^2+\dots+(t^2q^{4j})^i+\dots$$

o expoente de q quando dividido por $2j$ é sempre igual ao expoente de t que é também par. Assim, podemos explicar como construir uma partição π do coeficiente de t^N em $f_{20-4k}(q,t)$ de Frobenius com alternância par , onde $a_{1j}-a_{2j}=2k$.

O seguinte exemplo nos dará o procedimento que descreve a prova da afirmação feita anteriormente.

Seja

$$\frac{t^n q^{n^2+2kn}}{(t^2q^4;q^4)_n}$$

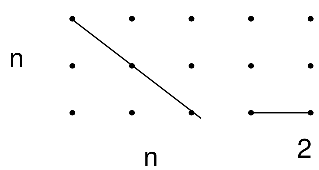
para $n = 3$ e $k = 1$

$$\frac{t^3 q^{3^2+2.3}}{(t^2q^4;q^4)_3} = \frac{t^3 q^{3^2+2.3}}{(1-t^2q^4)(1-t^2q^8)(1-t^2q^{12})} =$$

$$t^3 q^{3^2+2.3}(1+t^2q^4+t^4q^8+t^6q^{12}+\ldots)$$
$$(1+t^2q^8+t^4q^{16}+t^6q^{24}+\ldots)$$
$$(1+t^2q^{12}+t^4q^{24}+t^6q^{36}\ldots) \tag{1.30}$$

Começamos com um quadrado 3×3 e ao lado do quadrado um retângulo de base $2k$ e altura n, que surge de $q^{3^2+2.3}$.

O expoente de t^3 que é 3 é a contribuição do quadrado mais o retângulo para a partição que estamos construindo.

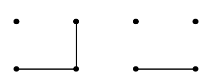


$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

Obtemos uma partição (5+5+5) de Frobenius com alterância par em no máximo 3 partes com $a_{1j} - a_{2j} = 2$.

Observe os casos $n = 1$ e $n = 2$

$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix};$$

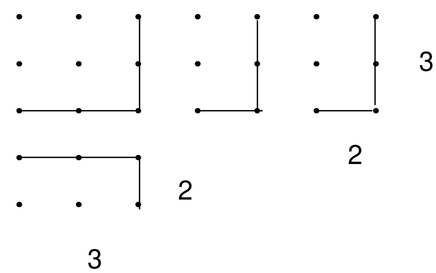


$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

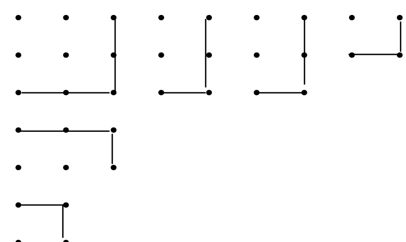
e temos $a_{1j} - a_{2j} = 2$.

Consideremos o termo t^2q^{12} do terceiro fator dado em (1.30). Dividimos o expoente de q, que é 12 por 2 e obtemos 6 e depois dividimos 6 por 3 (3 é a posição do fator no produto $(t^2q^4;q^4)_3$) obtendo 2 que é o expoente de t.

Agora colocamos os 6 pontos à direita do retângulo como uma pilha de altura 3 (a posição do fator) e largura 2 (que é o expoente de t). Os outros 6 pontos são colocados abaixo do quadrado de Durfee, onde a altura do retângulo passa a ser a largura (ou seja, colocamos um retângulo 3×2, de largura 3 e altura 2) abaixo do quadrado de Durfee.



Agora, consideremos o termo t^2q^8 do segundo fator. Dividimos o expoente de q, que é 8 por 2 e obtemos 4 e então dividimos 4 por 2 (2 é a posição do fator). Colocamos estes quatro pontos como uma pilha de largura 2 (expoente de t) e altura 2 (a posição do fator).



No termo t^4q^8 do primeiro fator, dividimos o expoente de q, que é 8 por 2 obtendo 4 e depois dividimos 4 por 1 (1 é a posição do fator). Colocamos estes quatro pontos em uma pilha de largura 4 (expoente de t) e altura 1 (posição do fator) obtendo a seguinte representação:

$$
\begin{array}{l}
\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\
\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\
\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\
\bullet\ \bullet\ \bullet \\
\bullet\ \bullet\ \bullet \\
\bullet\ \bullet \\
\bullet\ \bullet \\
\bullet \\
\bullet \\
\bullet \\
\bullet
\end{array}
\qquad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 12 & 7 & 4 \\ 10 & 5 & 2 \end{pmatrix};
$$

Observe que estes 43 pontos são gerados por:

$$t^3q^{15}(t^2q^{12})(t^2q^8)(t^4q^8) = t^{11}q^{43}$$

Com este procedimento conseguimos representar uma partição de 43 em exatamente 11 partes com símbolo de de Frobenius com alternância par. Observe que $a_{1j} - a_{2j} = 2$, $j = 1, 2, 3$. Então, em geral, o coeficiente de t^N na expansão de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n q^{n^2+2kn}}{(t^2q^4; q^4)_n}$$

é a função geradora para partições de Frobenius com alternância par com exatamente N partes, onde $a_{1j} - a_{2j} = 2k$.

Considerando o fator $\frac{1}{1-t}$ podemos concluir que $P_n^k(q)$, o coeficiente de t^N na expansão de $f_{20-4k}(q,t)$ é a função geradora para partições de Frobenius com alternância par em no máximo N partes, onde $a_{1j} - a_{2j} = 2k$.

Dada uma partição de Frobenius com alternância par, onde $a_{1j} - a_{2j} = 2k$, é necessário explicar, como obter os termos que a geraram.

O quadrado de Durfee diz o valor de n, com isso podemos identificar o quadrado $n \times n$ e o retângulo $2k \times n$. Para identificar o fator procedemos da seguinte forma:

- Consideramos a altura da primeira pilha à direita do retângulo $2k \times n$ e a largura desta pilha;
- A largura é o expoente de t, a altura é a posição do fator;
- o expoente de q é: $2 \times altura \times largura$.

Repitimos este procedimento para cada pilha.

Como, por (1.7), $P_n^k(1) = F_n$ onde, F_n é número de Fibonacci de posição n, provamos o seguinte:

Teorema 1.3.1 *O total de partições de Frobenius com alternância par em no máximo N partes, onde $a_{1j} - a_{2j} = 2k$, é igual ao N-ésimo número de Fibonacci.*

Agora vamos descrever uma outra interpretação para $f_{20-4k}(q,t)$, também usando o conceito de símbolo de Frobenius para uma partição dada. Para isso, partimos de que

$$f_{20-4k}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n q^{n^2+2kn}}{(t;q^2)_{n+1}(-tq^2;q^2)_n}$$

com

$$f_{20-4k}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^k(q) t^n,$$

e

$$\begin{cases} P_0^k(q) = & 1 \\ P_1^k(q) = & 1 + q^{2k+1} \\ P_n^k(q) = & (1 - q^2 + q^{2n-1+2k})P_{n-1}^k(q) + q^2 P_{n-2}^k(q) \end{cases},$$

e vamos provar que o coeficiente de t^N, $P_N^k(q)$ na expansão de $f_{20-4k}(q,t)$ é a função geradora para partições π, autoconjugadas, (partições autoconjugadas estão definidas em [11]) de Frobenius com alternância ímpar (respectivamente par) se k é ímpar (par), com maior parte menor do que ou igual a $N+k$ e o elemento do topo $\geq k$.

Da observação, (1.3.1) segue que na expansão de $\frac{1}{1-t^2q^{4j}}$ que é

$$1 + (t^2q^{4j})^1 + (t^2q^{4j})^2 + \ldots + (t^2q^{4j})^i + \ldots, \tag{1.31}$$

o expoente de q quando dividido por $2j$ é sempre igual ao expoente de t que é também par.

O próximo passo é explicar como construir uma partição autoconjugada, de Frobenius com alternância ímpar (par), no caso em que k é ímpar(par), com maior parte menor do que ou igual a $N+k$ e elemento do topo $\geq k$.

O seguinte exemplo ilustra o procedimento que descreve a prova dessa afirmação.

Seja

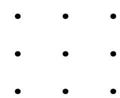
$$\frac{t^n q^{n^2+2kn}}{(t^2q^4;q^4)_n}.$$

Para $n = 3$ e $k = 1$,

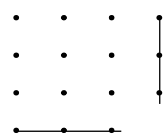
$$\frac{t^3 q^{3^2+2.3}}{(t^2q^4;q^4)_3} = \frac{t^3 q^{3^2+2.3}}{(1-t^2q^4)(1-t^2q^8)(1-t^2q^{12})} =$$

$$\begin{gathered} t^3 q^{3^2+2.3}(1 + t^2q^4 + t^4q^8 + t^6q^{12} + \ldots) \\ (1 + t^2q^8 + t^4q^{16} + t^6q^{24} + \ldots) \\ (1 + t^2q^{12} + t^4q^{24} + t^6q^{36} + \ldots). \end{gathered} \tag{1.32}$$

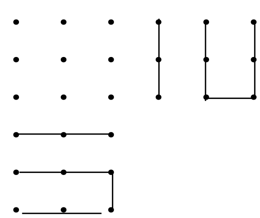
Começamos com um quadrado de Durfee 3×3

 ;

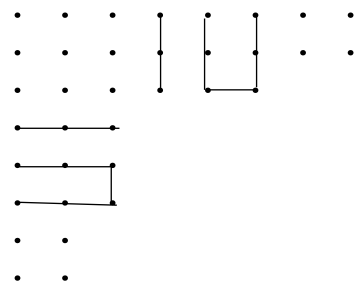
Acrescentamos ao lado e abaixo do quadrado de Durfee os retângulos 3×1 e 1×3, respectivamente, no procedimento descrito abaixo:

 $\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

Consideremos o termo t^2q^{12} do terceiro fator. Dividimos o expoente de q por 2, que é 12 (obtemos 6), depois, dividimos 6 por 3 (3 é a posição do fator no produto (obtemos 2). Agora dividimos os 12 pontos como duas pilhas de altura 3 e base 2, ou seja colocamos ao lado e abaixo dos retângulos 3×1 e 1×3 os retângulos 3×2 e 2×3, respectivamente, segue abaixo este procedimento.

 $\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$;

Agora, consideremos o termo t^2q^8 do segundo fator. Dividimos o expoente de q, que é 8 por 2 e obtemos 4 e então dividimos 4 por 2 (2 é a posição do fator). Colocamos estes quatro pontos como uma pilha de largura 2 (expoente de t) e altura 2 (a posição do fator).



$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 7 & 6 & 3 \end{pmatrix};$$

Com o termo t^4q^8 do primeiro fator, dividimos o expoente de q, que é 8 por 2 o resultado é 4 e depois dividimos 4 por 1 (1 é a posição do fator). Colocamos estes quatro pontos em uma pilha de largura 4 (expoente de t) e altura 1 (posição do fator) obtendo a seguinte representação:

$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 11 & 6 & 3 \\ 11 & 6 & 3 \end{pmatrix};$$

Temos que a partição de 43 dada acima (em termos do grafíco de Ferrers) é gerada pelos seguinte termos que aparecem na expansão de (1.30),

$$t^3q^{15}(t^2q^{12})(t^2q^8)(t^4q^8) = t^{11}q^{43}.$$

Com este procedimento conseguimos representar uma partição de 43 com as seguintes restrições

- autoconjugada, de Frobenius com alternância ímpar (par), caso k seja ímpar (par);
- com maior igual a 12.

Considerando o fator $\frac{1}{1-t}$ podemos concluir que $P_N^k(q)$, o coeficiente de t^N em $f_{20-4k}(q,t)$ é a função geradora para partições com as seguintes restrições:

- autoconjugadas, de Frobenius com alternância ímpar (par, caso k seja par);
- com maior parte menor do que ou igual a $N+k$;
- o elemento do topo $\geq k$.

Dada uma partição autoconjugada, de Frobenius com alternância ímpar (caso k seja ímpar), é necessário explicar como obter os termos que a geraram. Para isso, devemos seguir os seguintes passos:

- identificar o quadrado de Durfee na partição;
- identificar o retângulo de altura n e base k ao lado direito deste quadrado;
- considerar a altura da primeira pilha (disposta ao lado direito do retângulo de altura n e base k) e a largura desta pilha,
  - ∗ a largura é o expoente de t;
  - ∗ a altura é a posição do fator
  - ∗ o expoente de q é:
  $$2 \times \text{altura} \times \text{largura}.$$
  Repitir este procedimento para cada pilha.

Fazendo $q = 1$ em (1.6) temos que $P_n^k(1) = F_n$, onde F_n denota o número de Fibonacci de posição n. Segue deste fato e das observações anteriores o seguinte teorema,

Teorema 1.3.2 *O total de partições autoconjugadas, de Frobenius com alternância ímpar (par, caso k seja par), elemento do topo $\geq k$ e nas quais a maior parte é menor do que ou igual a $N+k$ é igual a F_N.*

A função de duas variáveis $f_{20-4k}(q,t)$ é uma generalização de

$$f_{20}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n q^{n^2}}{(1-t)(t^2q^4;q^4)_n} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(q)t^n,$$

onde,

$$\begin{cases} P_0(q) = & 1 \\ P_1(q) = & 1 + q \\ P_n(q) = & (1 - q^2 + q^{2n-1})P_{n-1}(q) + q^2 P_{n-2}(q) \end{cases}, \tag{1.33}$$

quando fazemos $k = 0$. Neste caso, $P_n(q) = P_n^0(q)$. Em [12], obtem-se uma relação entre as partições autoconjugadas, de Frobenius com alternância par e os números de Fibonacci. A construção aqui apresentada constitui, portanto, uma generalização deste resultado.

Em, [10], quando fazemos $k = 1$ em $f_{20-4k}(q,t)$ obtemos

$$f_{16}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n q^{n^2+2n}}{(t;q^2)_{n+1}(-tq^2;q^2)_n} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(q)t^n,$$

onde

$$\begin{cases} Q_0(q) = & 1 \\ Q_1(q) = & 1 + q^3 \\ Q_n(q) = & (1 - q^2 + q^{2n+1})Q_{n-1}(q) + q^2 Q_{n-2}(q) \end{cases}, \tag{1.34}$$

neste caso, $Q_n(q) = P_n^1(q)$

Observemos que as partições autoconjugadas, de Frobenius com alternância ímpar com maior parte menor do que ou igual a $N+1$ são geradas por $f_{16}(q,t)$ e é um caso particular das partições autoconjugadas, de Frobenius com alternância ímpar (par), caso k seja ímpar (par), com maior parte menor do que ou igual a $N+k$ e o elemento do topo $\geq k$, quando fazemos $k = 1$. Com isso, temos duas consequências do Teorema (1.3.2), ou seja,

Corolário 1.3.1 *O total de partições autoconjugadas, de Frobenius com Alternância ímpar com maior parte menor do que ou igual $N+1$ é o $N-$ésimo número de Fibonacci.*

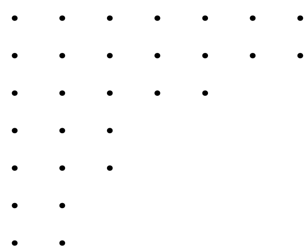
Corolário 1.3.2 *O total de partições autoconjugadas, de Frobenius com Alternância par com maior parte menor do que ou igual N é o $N-$ésimo número de Fibonacci.*

O Corolário (1.3.2) nos fornece um resultado já obtido por Santos em [12].

Podemos estabelecer uma bijeção entre as partições autoconjugadas, de Frobenius com alternância ímpar com maior parte menor do que ou igual a $N+1$ e as partições autoconjugadas, de Frobenius com alternância par com maior parte menor do que ou igual a N.

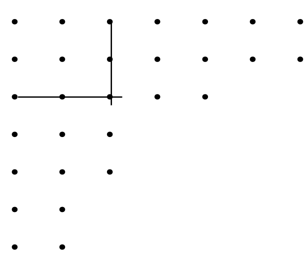
A lei de formação para tal bijeção é dada da seguinte forma:

1. Considere uma partição de Frobenius com alternância par com maior parte menor do que ou igual a $N = 7$, por exemplo $7+7+5+3+3+2+2$



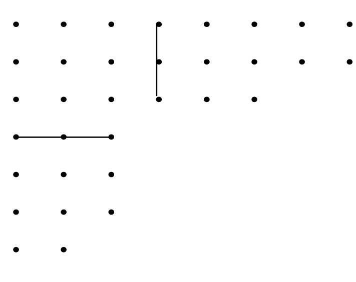
$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix};$$

2. Identifique o quadrado de Durfee dessa partição



$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix};$$

3. Coloque ao lado do quadrado de Durfee um retângulo de altura igual a 3 (dimensão do quadrado de Durfee) e base igual 1 e abaixo desse um retângulo de altura 1 e base 3



$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 7 & 6 & 3 \end{pmatrix};$$

Com isso obtemos uma partição autoconjugada, de Frobenius com alternância ímpar com maior parte igual a $N+1$.

A inversa consiste em retirar os retângulos de altura n e base 1 que estão ao lado do quadrado de Durfee e abaixo desse retângulo.

Também podemos estabelecer uma bijeção entre as partições autoconjugadas, de Frobenius com alternância ímpar e as partições de Frobenius com alternância par em no máximo N partes, onde $a_{1j} - a_{2j} = 2$. A lei de formação para tal de bijeção é dada no seguinte exemplo:

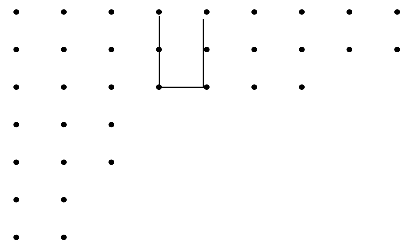
1. Considere uma partição de Frobenius com alternância par em no máximo N partes, onde $a_{1j} - a_{2j} = 2$, $9+9+7+3+3+2+2$

$$\begin{array}{ccccccccc}
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \\
\bullet & \bullet & \bullet & & & & & & \\
\bullet & \bullet & \bullet & & & & & & \\
\bullet & \bullet & & & & & & & \\
\bullet & \bullet & & & & & & &
\end{array} \qquad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 8 & 7 & 4 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix};$$

2. Identificar o quadrado de Durfee dessa partição

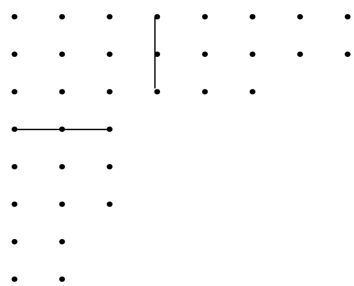
$$\begin{array}{ccccccccc}
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \\
\bullet & \bullet & \bullet & & & & & & \\
\bullet & \bullet & \bullet & & & & & & \\
\bullet & \bullet & & & & & & & \\
\bullet & \bullet & & & & & & &
\end{array} \qquad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 8 & 7 & 4 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix};$$

3. Identificar o retângulo de altura igual a n (dimensão do quadrado de Durfee) e base igual a 2 que está ao lado esquerdo do quadrado de Durfee. Isto é possível, pois $a_{1j} - a_{2j} = 2$



$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 8 & 7 & 4 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix};$$

4. O retângulo descrito no passo 3 contém dois retângulos de altura 3 e base 1. Dispor esses retângulos da seguinte forma: abaixo do quadrado de Durfee como um retângulo de altura igual a 1 e base 3 e ao lado do quadrado de Durfee, um retângulo de altura 3 e base 1.



$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 7 & 6 & 3 \end{pmatrix};$$

Com isso obtemos uma partição autoconjugada, de Frobenius com alternância ímpar com maior parte menor do que ou igual a $N+1$.

A inversa consiste em identificar o quadrado de Durfee e os retângulos de altura n e base 1 que estão ao lado esquerdo e abaixo deste quadrado e depois juntá-los em um só de altura n e base 2 e depois dispô-lo ao lado (esquerdo) deste quadrado.

Descrevemos outras interpretações combinatórias para as famílias de polinômios $P_n^1(q)$ e $P_n^0(q)$ que são coefcientes de $f_{16}(q,t)$ e $f_{20}(q,t)$, respectivamente, quando consideramos a expansão em série de potências.

Observemos que:

$$f_{16}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n q^{n^2+2n}}{(t;q^2)_{n+1}(-tq^2;q^2)_n} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n q^{3+5+\ldots+2n+1}}{(1-t)(t^2q^4;q^4)_n}. \tag{1.35}$$

Temos que:

$$f_{16}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(q) t^n,$$

com

$$\begin{cases} Q_0(q) = & 1 \\ Q_1(q) = & 1 \quad + \quad q^3 \\ Q_n(q) = & (1 \quad - \quad q^2 \quad + \quad q^{2n+1}) Q_{n-1}(q) \quad + \quad q^2 Q_{n-2}(q) \end{cases}.$$

Observamos que o coeficiente de t^N na expansão de $f_{16}(q,t)$ é a função geradora para partições, nas quais as partes ímpares são ≥ 3, toda parte ímpar menor do que ou igual a maior parte ímpar aparece exatamente uma vez, as partes pares são múltiplas de 4 e menores do que ou iguais a duas vezes a maior parte ímpar menos dois e o número de partes ímpares mais duas vezes o número de partes pares é no máximo N.

Como $Q_n(1) = F_n$, onde F_n é o número de Fibonacci de posição n, então, segue da observação anterior uma relação entre os números de Fibonacci e partições com restrições:

Teorema 1.3.3 *O total de partições, nas quais as partes ímpares são ≥ 3, toda parte ímpar menor do que ou igual a maior parte ímpar aparece exatamente uma vez, as partes pares são múltiplas de 4 e menores do que ou iguais a duas vezes a maior parte ímpar menos dois e o número de partes ímpares mais duas vezes o número de partes pares é no máximo N é igual a F_N.*

Descrevemos alguns exemplos da classe de partições dadas no Teorema (1.3.3) na seguinte tabela:

A seguir uma outra interpretação combinatória para $f_{20}(q,t)$. Podemos escrever:

$$f_{20}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n q^{n^2}}{(t;q^2)_{n+1}(-tq^2;q^2)_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n q^{1+3+5+\ldots+2n-1}}{(1-t)(t^2q^4;q^4)_n}, \tag{1.36}$$

onde

$$f_{20}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(q) t^n$$

com

$$\begin{cases} P_0(q) = & 1 \\ P_1(q) = & 1 \quad + \quad q^3 \\ P_n(q) = & (1 \quad - \quad q^2 \quad + \quad q^{2n-1}) P_{n-1}(q) \quad + \quad q^2 P_{n-2}(q) \end{cases},$$

O coeficiente de t^N na expansão de $f_{20}(q,t)$ é a função geradora para partições, nas quais toda parte ímpar menor do que ou igual a maior parte ímpar aparece somente uma vez,

n	Partições descritas no Teorema (1.3.3)	F_n
$n=0$	$\emptyset$	1
$n=1$	$\emptyset$, $\bullet\ \bullet\ \bullet$	2
$n=2$	$\emptyset$, $\bullet\ \bullet\ \bullet$, $\begin{array}{lllll}\bullet&\bullet&\bullet&\bullet&\bullet\\\bullet&\bullet&\bullet&&\end{array}$	3
$n=3$	$\emptyset$, $\bullet\ \bullet\ \bullet$, $\begin{array}{lllll}\bullet&\bullet&\bullet&\bullet&\bullet\\\bullet&\bullet&\bullet&&\end{array}$, $\begin{array}{lllllll}\bullet&\bullet&\bullet&\bullet&\bullet&\bullet&\bullet\\\bullet&\bullet&\bullet&\bullet&\bullet&&\\\bullet&\bullet&\bullet&&&&\end{array}$, $\begin{array}{llll}\bullet&\bullet&\bullet&\bullet\\\bullet&\bullet&\bullet&\end{array}$	5
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabela 1.1: *Partições descritas no Teorema* (1.3.3).

as partes pares são múltipas de 4 e menores do que ou iguais a duas vezes a maior parte ímpar mais dois e a soma do número de partes ímpares e o dobro do número de partes pares é no máximo N.

Então segue da observação e do fato que $P_n(1) = F_n$, o seguinte teorema,

Teorema 1.3.4 *O total de partições, nas quais toda parte ímpar menor do que ou igual a maior parte ímpar aparece somente uma vez, as partes pares são múltipas de* 4 *e menores do que ou iguais a duas vezes a maior parte ímpar mais dois e a soma do número de partes ímpares e o dobro do número de partes pares é no máximo N é igual a F_N.*

Descrevemos alguns exemplos da classe de partições dadas no Teorema (1.3.4) na tabela abaixo:

n	Partições descritas no Teorema (1.3.4)	F_n
$n = 0$	$\emptyset$	1
$n = 1$	$\emptyset$, $\bullet$	2
$n = 2$	$\emptyset$, $\bullet$, $\begin{array}{lll}\bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & & \end{array}$	3
$n = 3$	$\emptyset$, $\bullet$, $\begin{array}{lll}\bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & & \end{array}$, $\begin{array}{lllll}\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \\ \bullet & & & & \end{array}$, $\begin{array}{llll}\bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & & & \end{array}$	5
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabela 1.2: *Partições descritas no Teorema* (1.3.4)

Capítulo 2

Extensões Polinomiais e Interpretações Combinatória para os Números de Pell

Os números de Pell, 1, 2, 5, 12, ... definidos por $p_0 = 1$; $p_1 = 2$; $p_n = 2p_{n-1} + p_{n-2}$ são denominadores da seqüência de números racionais

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \ldots$$

que são os convergentes da fração contínua que representa $\sqrt{2}$.

Santos em [8], estabeleceu uma relação entre os números de Pell e partições com restrições . Também obteve uma fórmula explícita para os números de Pell em função dos coeficientes trinomiais.

Em [10], são dadas extensões polinomiais $P_n(q)$ para os números de Pell, sendo que estas famílias de polinômios estão relacionadas com as identidades de números 12, 68 e 71 da lista de Slater que listamos ordenadamente,

$$\frac{(-q^2;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty} \prod_{n=0}^{\infty} (1-q^{4n+4})(1-q^{4n+2})(1-q^{4n+2}) =$$

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-q;q)_{n-1} q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(q;q)_n} \tag{2.1}$$

$$\frac{(-q;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{16n+16})(1-q^{16n+14})(1-q^{16n+2}) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-q;q^2)_{n+1}(-q^4;q^4)_n q^{n^2+2n}}{(-q^2;q^2)_{n+1}(q^2;q^2)_n(q^2;q^4)_{n+1}} \tag{2.2}$$

$$\frac{(-q^2;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{16n+16})(1-q^{16n+10})(1-q^{16n+6}) =$$

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-q^4;q^4)_{n-1}(-q;q^2)_n q^{n^2}}{(q^2;q^4)_n(q^2;q^2)_n(-q^2;q^2)_{n-1}} \tag{2.3}$$

Neste capítulo, damos uma prova alternativa para estas identidades. Além disso, estabeleceremos uma fórmula explícita para os números de Pell em função dos coeficientes trinomiais. Finalmente, descrevemos uma relação entre números de Pell e partições coloridas e também damos uma relação entre números de Pell e uma classe de partições com restrições.

2.1 A Identidade 12 de Slater

Em [10], é dada uma lista de funções $f(q,t)$ associada com 74 das 130 identidades listadas por Slater e uma conjectura de uma fórmula explícita para $P_n(q)$ em termos de $q-$análogos dos coeficientes binomiais ou trinomiais. A função de duas variáveis associada à identidade 12 é:

$$f_{12}(q,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-t;q)_n t^n q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(t;q)_{n+1}}. \tag{2.4}$$

Através de simples manipulações em (2.4), obtemos a seguinte equação funcional

$$(1-t)f_{12}(q,t)=1+(1+t)tqf_{12}(q,tq) \tag{2.5}$$

e substituindo $f(q,t)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(q)t^n$ em (2.5) temos que

$$\left\{\begin{array}{rlllll} P_0(q)= & 1 & & & & \\ P_1(q)= & 1 & + & q & & \\ P_n(q)= & (1 & + & q^n) & P_{n-1} & + \; q^{n-1}P_{n-2}(q) \end{array}\right. . \tag{2.6}$$

Santos em [10], conjecturou uma fórmula explícita para a família de polinômios $P_n(q)$,

$$c(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{8j^2} CT(n, 1+8j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{8j^2-8j+2} CT(n, 3-8j) \tag{2.7}$$

onde $c(n) = P_{n-1}(q)$.

No teorema seguinte provamos esta conjectura.

Teorema 2.1.1 *A fórmula* $c(n)$ *dada em* (2.7) *satisfaz a relação de recorrência e as mesmas condições iniciais dadas em* (2.6).

Demonstração: É claro que as condições iniciais são válidas. Agora vamos provar que

$$c(n+1) = (1+q^n)c(n) + q^{n-1}c(n-1),$$

ou seja,

$$c(n+1) - (1+q^n)c(n) - q^{n-1}c(n-1) = 0.$$

Dessa forma, temos que provar que:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{8j^2} CT(n+1, 1+8j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{8j^2-8j+2} CT(n+1, 3-8j)$$

$$- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{8j^2} CT(n, 1+8j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{8j^2-8j+2} CT(n, 3-8j)$$

$$-q^n \left\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{8j^2} CT(n, 1+8j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{8j^2-8j+2} CT(n, 3-8j) \right\}$$

$$-q^{n-1} \left\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{8j^2} CT(n-1, 1+8j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{8j^2-8j+2} CT(n-1, 3-8j) \right\} = 0 \tag{2.8}$$

Fazendo a substituição $q \to q^{\frac{1}{2}}$ em (2.8) obtemos:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2} T_1(n+1, 1+8j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-16j+4} T_1(n+1, 3-8j)$$

$$- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2} T_1(n, 1+8j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-16j+4} T_1(n, 3-8j)$$

$$-q^{2n}\left\{\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2}T_1(n,1+8j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-16j+4}T_1(n,3-8j)\right\}$$

$$-q^{2n-2}\left\{\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2}T_1(n-1,1+8j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-16j+4}T_1(n-1,3-8j)\right\}=0 \quad (2.9)$$

Verificando que a expressão (2.9) é zero, obtemos a prova do Teorema. Para isso, aplicando a propriedade (17) nas primeira e segunda parcelas,

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2}\left\{T_1(n,1+8j)+q^{n+1+1+8j}T_0(n,2+8j)+q^{n+1-1-8j}T_0(n,8j)\right\}$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-16j+4}\left\{T_1(n,3-8j)+q^{n+1+3-8j}T_0(n,4-8j)+q^{n+1-3+8j}T_0(n,2-8j)\right\}$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2}T_1(n,1+8j)+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-16j+4}T_1(n,3-8j)$$

$$-q^{2n}\left\{\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2}T_1(n,1+8j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-16j+4}T_1(n,3-8j)\right\}$$

$$-q^{2n-2}\left\{\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2}T_1(n-1,1+8j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-16j+4}T_1(n-1,3-8j)\right\}$$

Fazendo alguns cancelamentos e reescrevendo (a segunda parcela cancela-se com sexta quando fazemos $j\to -j$),

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-8j+n}T_0(n,8j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-24j+8+n}T_0(n,4-8j)$$

$$-q^{2n}\left\{\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2}T_1(n,1+8j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-16j+4}T_1(n,3-8j)\right\}$$

$$-q^{2n-2}\left\{\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2}T_1(n,1+8j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-16j+4}T_1(n,3-8j)\right\}.$$

Fazendo $j\to j+1$ na segunda parcela e aplicando (14), (nesta parcela), e $j\to -j$ na sexta parcela ,

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-8j+n}T_0(n,8j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+8j+n}T_0(n,4+8j)$$

$$- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+2n} T_1(n,8j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-16j+2n+4} T_1(n,3-8j)$$

$$- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+2n-2} T_1(n-1,1+8j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+16j+2n+2} T_1(n-1,3+8j)$$

Aplicando (16) nas primeira e segunda somas e (17) nas terceira e quarta parcelas, temos:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-8j+n} \left\{ T_0(n-1,8j-1) + q^{n+8j} T_1(n-1,8j) + q^{2n+16j} T_0(n-1,8j+1) \right\}$$

$$- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+8j+n} \left\{ T_0(n-1,3+8j) + q^{n+4+8j} T_1(n-1,4+8j) + q^{2n+16j} T_0(n-1,5+8j) \right\}$$

$$- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+2n} \left\{ T_1(n-1,1+8j) + q^{n+1+8j} T_0(n-1,2+8j) + q^{n-1-8j} T_0(n-1,8j) \right\}$$

$$+ \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-16j+2n+4} \left\{ T_1(n-1,3-8j) + q^{n+3-8j} T_0(n-1,4-8j) + q^{n-3+8j} T_0(n-1,2-8j) \right\}$$

$$- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+2n-2} T_1(n-1,1+8j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-16j+2n+2} T_1(n-1,3+8j).$$

Reescrevendo , obtemos:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-8j+n} T_0(n-1,8j-1) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+2n} T_1(n-1,8j)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+8j+3n} T_0(n-1,8j+1) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+8j+n} T_0(n-1,3+8j)$$

$$- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+16j+2n+4} T_1(n-1,4+8j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+24j+3n+8} T_0(n-1,5+8j)$$

$$- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+2n} T_1(n-1,1+8j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+8j+3n+1} T_0(n-1,2+8j)$$

$$- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-8j+3n-1} T_0(n-1,8j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-16j+2n+4} T_1(n-1,3-8j)$$

$$+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-24j+3n+7}T_0(n-1,4-8j)+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-8j+3n+1}T_0(n-1,2-8j)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+2n-2}T_1(n-1,1+8j)+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-16j+2n+2}T_1(n-1,3-8j). \quad (2.10)$$

Consideramos as segunda e sétima parcelas em (2.10), segue de (18),

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+2n}T_1(n-1,8j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+2n}T_1(n-1,1+8j)=$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+2n}\left\{T_1(n-1,8j)-T_1(n-1,1+8j)\right\}=$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+2n}\left\{q^{n-1-8j}T_0(n-1,8j)-q^{n-1+8j+1}T_0(n-1,1+8j)\right\}=$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-8j+3n-1}T_0(n-1,8j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+8j+3n}T_0(n-1,1+8j) \quad (2.11)$$

Consideramos as quinta e décima parcelas (faça $j \to -j$ nesta última), segue de (18),

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+16j+2n+4}T_1(n-1,4+8j)+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+16j+2n+4}T_1(n-1,3+8j)=$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+16j+2n+4}\left\{T_1(n-1,4+8j)+T_1(n-1,3+8j)\right\}=$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+16j+2n+4}\left\{q^{n-1-3-8j}T_0(n-1,3+8j)-q^{n-1+4+8j}T_0(n-1,4+8j)\right\}=$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+8j+3n}T_0(n-1,3+8j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+24j+3n+7}T_0(n-1,4+8j) \quad (2.12)$$

Substituindo (2.11) e (2.12) em (2.10) temos que: a oitava parcela em (2.10) cancela-se com a décima segunda em 2.10. A primeira parcela em (2.12) cancela-se coma a sexta parcela em (2.10) quando fazemos $j \to j-1$ e depois $j \to -j$. A segunda parcela em

(2.12) se cancela com a décima primeira em (2.10), quando fazemos $j \to -j$. Os outros cancelamentos são imediatos. Reescrevendo,

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-8j+n} T_0(n-1, 8j+1) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+8j+n} T_0(n-1, 3+8j)$$

$$- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+2n-2} T_1(n-1, 1+8j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-16j+2n+2} T_1(n-1, 3-8j) \qquad (2.13)$$

Aplicando (16) nas primeiras e segunda parcelas e (17) nas terceira e quarta parcelas em (2.13),

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-8j+n} \left\{ T_0(n-2, 8j-2) + q^{n-1+8j-1} T_1(n-2, 8j-1) + q^{2n-2+16j-2} T_0(n-2, 8j) \right\}$$

$$- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+8j+n} \left\{ T_0(n-2, 2+8j) + q^{n-1+3+8j} T_1(n-2, 3+8j) + q^{2n-2+6+16j} T_0(n-2, 4+8j) \right\}$$

$$- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+2n-2} \left\{ T_1(n-2, 1+8j) + q^{n-1+1+8j} T_0(n-2, 2+8j) + q^{n-1-1-8j} T_0(n-2, 8j) \right\}$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-16j+2n+2} \left\{ T_1(n-2, 3-8j) + q^{n-1+3-8j} T_0(n-2, 4-8j) + q^{n-1-3+8j} T_0(n-2, 2-8j) \right\}.$$

Reescrevendo,

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-8j+n} T_0(n-2, 8j-2) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+2n-2} T_1(n-2, 8j-1)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+8j+3n-4} T_0(n-2, 8j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+8j+n} T_0(n-2, 2+8j)$$

$$- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+16j+2n+2} T_1(n-2, 3+8j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+24j+3n+4} T_0(n-2, 4+8j)$$

$$- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+2n-2} T_1(n-2, 1+8j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+8j+3n-2} T_0(n-2, 2+8j)$$

$$- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-8j+3n-4} T_0(n-2, 8j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-16j+2n+2} T_1(n-2, 3-8j)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-24j+3n+4}T_0(n-2,4-8j)+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-8j+3n-2}T_0(n-2,2-8j). \qquad (2.14)$$

Fazendo $j \to -j$ na primeira parcela e usando (14), temos que esta se cancela com a quarta. Fazendo $j \to -j$ na segunda parcela e usando (15), esta se cancela com a sétima. Da mesma forma a terceira parcela se cancela com nona, a quinta e a décima cancelam-se, a oitava parcela com a décima segunda se cancela e a sexta cancela-se com a décima primeira. Com isso, obtemos que (2.14) é igual a zero e dessa forma concluímos a prova do teorema.

□

Uma nova fórmula para os números de Pell em função dos coeficientes trinomiais é obtida, uma vez que para $q = 1$, (2.6) nos fornece a relação de recorrência que define os números de Pell

$$p_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \{ \tbinom{n+1}{1+8j}_2 - \tbinom{n+1}{3-8j}_2 \},$$

onde $P_{n-1}(1) = p_{n-1}$, e p_n denota o número de Pell de posição n. Um outra conseqüência do Teorema (2.1.1) e a identidade 12 de Slater que segue como corolário,

Corolário 2.1.1

$$1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-q;q)_{n-1}q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(q;q)_n} = \frac{(-q^2;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{4n+4})(1-q^{4n+2})(1-q^{4n+2}).$$

Demonstração: Segue do Teorema 2.1.1 que $c(n+1) = P_n(q)$. Logo

$$P_n(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{8j^2}CT(n+1,1+8j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{8j^2-8j+2}CT(n+1,3-8j).$$

Dessa forma segue de (19) ,

$$\lim_{n\to\infty} P_n(q) = \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{8j^2}CT(n+1,1+8j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{8j^2-8j+2}CT(n+1,3-8j)\right\} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{8j^2}T_1(n+1,1+8j,q^{\frac{1}{2}}) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{8j^2-8j+2}T_1(n+1,3-8j,q^{\frac{1}{2}})\right\} =$$

$$\frac{(-q^2;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}\left\{\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{8j^2} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{8j^2-8j+2}\right\} = \frac{(-q^2;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j q^{2j^2}.$$

Fazendo $z = -1$ e $q \to q^2$ em (21), obtemos:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{2j^2} = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^{4n+4})(1 - q^{4n+2})(1 - q^{4n+2}).$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} P_n(q) = \frac{(-q^2; q^2)_\infty}{(q^2; q^2)_\infty} \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^{4n+4})(1 - q^{4n+2})(1 - q^{4n+2}).$$

Segue de (2.5) que:

$$\lim_{t\to 1^-} (1-t) f_{12}(q,t) = 1 + \lim_{t\to 1^-} (1+t) tq f_{12}(q,t)$$

assim,

$$\lim_{t\to 1^-} (1-t) f_{12}(q,t) = 1 + 2q f_{12}(q,q)$$

Portanto,

$$\lim_{t\to 1^-} (1-t) f_{12}(q,t) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-q;q)_{n-1} q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(q;q)_n}.$$

Portanto segue do Lema de Abel que:

$$\frac{(-q^2; q^2)_\infty}{(q^2; q^2)_\infty} \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^{4n+4})(1 - q^{4n+2}))(1 - q^{4n+2}) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-q;q)_{n-1} q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(q;q)_n}.$$

□

2.2 A Identidade 71 de Slater

Em [10] é dada uma função de duas variáveis associada a identidade 71 de Slater, que segue abaixo,

$$f_{71}(q,t) = \frac{1}{1-t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-t^2q^4; q^4)_{n-1} (-tq; q^2)_n t^n q^{n^2}}{(t^2q^2; q^4)_n (t; q^2)_{n+1} (-tq^2; q^2)_{n-1}} \tag{2.15}$$

Através de manipulações em (2.15), obtemos a seguinte equação funcional,

$$(1-t)(1-tq)(1-t^2q^4) f_{71}(q,t) = (1-tq)(1-t^2q^4) - tq(1+t^2q^4)$$

$$tq(1+tq^2)+(1-tq^2)(1+t^2q^4)tqf_{71}(q,tq^2) \tag{2.16}$$

e substituindo em $f(q,t)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(q)t^n$ em (2.16) temos que

$$\begin{cases} P_0(q) = & 1 \\ P_1(q) = & 1+q \\ P_2(q) = & 1+q+q^2+q^3+q^4 \\ P_3(q) = & 1+q+q^2+2q^3+2q^4+2q^5+q^7+q^8+q^9 \\ P_n(q) = & (1+q+q^{2n-1})P_{n-1}(q)-(q-q^4+q^{2n-1})P_{n-2}(q) \\ & -(q^4+q^5-q^{2n-1})P_{n-3}(q)+(q^5-q^{2n-1})P_{n-4}(q) \end{cases} .(2.17)$$

Santos em [10], conjecturou uma fórmula explícita para a família de polinômios $P_n(q)$,

$$c(n)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}q^{32j^2+4j}U(n,8j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty}q^{32j^2-28j+6}U(n,3-8j) \tag{2.18}$$

onde $c(n)=P_n(q)$, $n\geq 0$.

Teorema 2.2.1 *A fórmula $c(n)$ dada em* (2.18) *satisfaz a relação de recorrência e as mesmas condições iniciais dadas em* (2.17)

Demonstração: É claro que as condições iniciais são válidas. Agora vamos provar que:

$$c(n)=(1+q+q^{2n-1})c(n-1)-(q-q^4+q^{2n-1})c(n-2)-$$

$$(q^4+q^5-q^{2n-1})c(n-3)+(q^5-q^{2n-1})c(n-4)$$

ou seja,

$$c(n)-(1+q+q^{2n-1})c(n-1)+(q-q^4+q^{2n-1})c(n-2)$$

$$+(q^4+q^5-q^{2n-1})c(n-4)-(q^5-q^{2n-1})c(n-4)=0,$$

isto é

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}q^{32j^2+4j}U(n,8j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty}q^{32j^2-28j+6}U(n,3-8j)$$

$$(1+q+q^{2n-1})\left\{\sum_{j=-\infty}^{\infty}q^{32j^2+4j}U(n-1,8j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty}q^{32j^2-28j+6}U(n-1,3-8j)\right\}$$

$$(q-q^4+q^{2n-1})\left\{\sum_{j=-\infty}^{\infty}q^{32j^2+4j}U(n-2,8j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty}q^{32j^2-28j+6}U(n-2,3-8j)\right\}$$

$$(q^4+q^5-q^{2n-1})\left\{\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+4j}U(n-3,8j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-28j+6}U(n-3,3-8j)\right\}$$

$$(q^5-q^{2n-1})\left\{\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+4j}U(n-4,8j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-28j+6}U(n-4,3-8j)\right\}=0(2.19)$$

Para provarmos (2.19), faremos a seguinte observação:

Observação 2.2.1

Sejam A e n inteiros. Consideramos:

$$U(n,A)-(1+q+q^{2n-1})U(n-1,A)+(q-q^4+q^{2n-1})U(n-2,A)+$$

$$(q^4+q^5-q^{2n-1})U(n-3,A)-(q^5-q^{2n-1})U(n-4,A)=$$

$$U(n,A)-(1+q+q^{2n-1})U(n-1,A)+qU(n-2,A)+(-q^4+q^{2n-1})U(n-2,A)$$

$$+(q^4+q^5-q^{2n-1})U(n-3,A)-(q^5-q^{2n-1})U(n-4,A), \tag{2.20}$$

aplicando (13) em (2.20) podemos escrevê-la da seguinte forma:

$$q^{2n-2A}T_0(n-2,A-2)+q^{2n+2A+2}T_0(n-2,A+3)+(-q^4+q^{2n-1})U(n-2,A)$$

$$(q^4+q^5-q^{2n-1})U(n-3,A)-(q^5-q^{2n-1})U(n-4,A). \tag{2.21}$$

Segue de (14) que $T_0(m-2,A)=T_0(m-2,-A)$ e de (16),

$$T_0(n-2,-A)=T_0(n-3,-A-1)+q^{n-2-A}T_1(n-3,-A)+q^{2n-4-2A}T_0(n-3,-A+1)$$

$$T_0(n-2,A+1)=T_0(n-3,A)+q^{n-2+A+1}T_1(n-3,A+1)+q^{2n-4+2A+2}T_0(n-3,A+2).$$

Então

$$q^{2n-1}U(n-2,A)=q^{2n-1}T_0(n-3,A+1)+q^{3n-3-A}T_1(n-3,-A)+q^{4n-5-2A}T_0(n-3,-A+1)$$

$$q^{2n-1}T_0(n-3,A)+q^{3n-2+A}T_1(n-3,A+1)+q^{4n-3+2A}T_0(n-3,A+2). \tag{2.22}$$

Substituindo (2.22) em (2.21) e fazendo alguns cancelamentos obtemos:

$$q^{2n-2A}T_0(n-2,A-2)+q^{2n+2A+2}T_0(n-2,A+3)-q^4U(n-2,A)$$

$$q^{2n-1}U(n-3,A)+q^{3n-3-A}T_1(n-3,-A)+q^{4n-5-2A}T_0(n-3,-A+1)$$
$$q^{3n-2+A}T_1(n-3,A+1)+q^{4n-3+2A}T_0(n-3,A+2)+(q^4+q^5-q^{2n-1})U(n-3,A)$$
$$-(q^5-q^{2n-1})U(n-4,A)=$$

$$q^{2n-2A}T_0(n-2,A-2)+q^{2n+2A+2}T_0(n-2,A+3)$$
$$-q^4\left\{U(n-2,A)-(1+q+q^{2n-5})U(n-3,A)+qU(n-4,A)\right\}$$
$$q^{3n-3-A}T_1(n-3,-A)+q^{4n-5-2A}T_0(n-3,-A+1)+q^{3n-2+A}T_1(n-3,A+1)$$
$$q^{4n-3+2A}T_0(n-3,A+2)-q^{2n-1}U(n-3,A)+q^{2n-1}U(n-4,A). \tag{2.23}$$

Fazendo $n\to n-2$ em (13) segue que:

$$-q^4\left\{U(n-2,A)-(1+q+q^{2n-5})U(n-3,A)+qU(n-4,A)\right\}=$$
$$-q^{2n-2A}T_0(n-4,A-2)-q^{2n+2A+2}T_0(n-4,A+3),$$

substituindo em (2.23) obtemos:

$$q^{2n-2A}T_0(n-2,A-2)+q^{2n+2A+2}T_0(n-2,A+3)+q^{3n-3-A}T_1(n-3,-A)$$
$$q^{4n-5-2A}T_0(n-3,-A+1)+q^{3n-2+A}T_1(n-3,A+1)+q^{4n-3+2A}T_0(n-3,A+2)$$
$$-q^{2n-1}U(n-3,A)+q^{2n-1}U(n-4,A)-q^{2n-2A}T_0(n-4,A-2)$$
$$-q^{2n+2A+2}T_0(n-4,A+3). \tag{2.24}$$

Aplicando as propriedades (14), e (16) podemos escrever:

$$-q^{2n-1}U(n-3,A)+q^{2n-1}U(n-4,A)=-q^{2n-1}(T_0(n-3,-A)+T_0(n-3,A+1))$$
$$q^{2n-1}(T_0(n-4,A)+T_0(n-4,A+1))=$$
$$-q^{2n-1}\left\{T_0(n-4,-A-1)+q^{n-3-A}T_1(n-4,-A)+q^{2n-6-2A}T_0(n-4,-A+1)\right\}$$
$$-q^{2n-1}\left\{T_0(n-4,A)+q^{n-3+A+1}T_1(n-4,A+1)+q^{2n-6+2A+2}T_0(n-4,A+2)\right\}$$
$$q^{2n-1}T_0(n-4,A)+q^{2n-1}T_0(n-4,A+1)=-q^{3n-4-A}T_1(n-4,-A)-q^{4n-7-2A}T_0(n-4,-A+1)$$
$$-q^{3n-3+A}T_1(n-4,A+1)-q^{4n-5+2A}T_0(n-4,A+2),$$

substituindo em (2.24) obtemos:

$$q^{2n-2A}T_0(n-2,A-2)+q^{2n+2A+2}T_0(n-2A+3)+q^{3n-3-A}T_1(n-3,-A)$$

$$q^{4n-5-2A}T_0(n-3,-A+1)+q^{3n-2+A}T_1(n-3,A+1)+q^{4n-3+2A}T_0(n-3,A+2)$$
$$-q^{3n-4-A}T_1(n-4,-A)-q^{4n-7-2A}T_0(n-4,-A+1)-q^{3n-3+A}T_1(n-4,A+1)$$

$$-q^{4n-5+2A}T_0(n-4,A+2)-q^{2n-2A}T_0(n-4,A-2)-q^{2n+2A+2}T_0(n-4,A+3). \quad (2.25)$$

Aplicando (16) nas primeira e segunda parcelas,

$$q^{2n-2A}\left\{T_0(n-3,-A+1)+q^{n-2-A+2}T_1(n-3,-A+2)+q^{2n-4-2A+4}T_0(n-3,-A+3)\right\}$$
$$q^{2n+2A+2}\left\{T_0(n-3,A+2)+q^{n-2+A+3}T_1(n-3,A+3)+q^{2n-4+2A+6}T_0(n-3,A+4)\right\}$$
$$q^{3n-3-A}T_1(n-3,-A)+q^{4n-5-2A}T_0(n-3,-A+1)+q^{3n-2+A}T_1(n-3,A+1)$$
$$q^{4n-3+2A}T_0(n-3,A+2)-q^{3n-4-A}T_1(n-4,-A)-q^{4n-7-2A}T_0(n-4,-A+1)$$
$$-q^{3n-3+A}T_1(n-4,A+1)-q^{4n-5+2A}T_0(n-4,A+2)-q^{2n-2A}T_0(n-4,A-2)$$
$$-q^{2n+2A+2}T_0(n-4,A+3)=$$

$$q^{2n-2A}T_0(n-3,-A+1)+q^{3n-3A}T_1(n-3,-A+2)$$
$$q^{4n-4A}T_0(n-3,-A+3)+q^{2n+2A+2}T_0(n-3,A+2)+q^{3n+3A+3}T_1(n-3,A+3)$$
$$q^{4n+4A+4}T_0(n-3,A+4)+q^{3n-3-A}T_1(n-3,-A)+q^{4n-3+2A}T_0(n-3,A+2)$$
$$q^{4n-5-2A}T_0(n-3,-A+1)+q^{3n-2+A}T_1(n-3,A+1)-q^{3n-4-A}T_1(n-4,-A)$$
$$-q^{4n-7-2A}T_0(n-4,-A+1)-q^{3n-3+A}T_1(n-4,A+1)-q^{4n-5+2A}T_0(n-4,A+2)$$

$$-q^{2n-2A}T_0(n-4,A-2)-q^{2n+2A+2}T_0(n-4,A+3). \quad (2.26)$$

Consideramos as quarta e décima quinta parcelas em (2.26). Aplicando (14) na segunda soma e fazendo $A\to -A+1$ e $m\to n-3$ em (22) obtemos:

$$q^{2n-2A}T_0(n-3,-A+1)-q^{2n-2A}T_0(n-4,A-2)=$$

$$q^{4n-2A-7}T_0(n-4,-A+1)+q^{3n-A-4}T_1(n-4,-A). \quad (2.27)$$

Consideramos as segunda e décima sexta parcelas em (2.26). Fazendo $A\to A+2$ e $m\to n-3$ em (22) obtemos:

$$q^{2n+2A+2}T_0(n-3,A+2)-q^{2n+2A+2}T_0(n-4,A+3)=$$

$$q^{4n+2A-5}T_0(n-4,A+2)+q^{3n+A-3}T_1(n-4,A+1). \quad (2.28)$$

Substituindo (2.27) e (2.28) em (2.26) e fazendo alguns cancelamentos obtemos:

$$q^{3n-3A}T_1(n-3,-A+2)+q^{4n-4A}T_0(n-3,-A+3)+q^{3n+3A+3}T_1(n-3,A+3)$$
$$q^{4n+4A+4}T_0(n-3,A+4)+q^{3n-3-A}T_1(n-3,-A)+q^{4n-3+2A}T_0(n-3,A+2)$$
$$q^{4n-5-2A}T_0(n-3,-A+1)+q^{3n-2+A}T_1(n-3,A+1).$$

Portanto,

$$U(n,A)-(1+q+q^{2n-1})U(n-1,A)+(q-q^4+q^{2n-1})U(n-2,A)$$
$$(q^4+q^5-q^{2n-1})U(n-3,A)-(q^5-q^{2n-1})U(n-4,A)=$$

$$q^{3n-3A}T_1(n-3,-A+2)+q^{4n-4A}T_0(n-3,-A+3)+q^{3n+3A+3}T_1(n-3,A+3)$$
$$q^{4n+4A+4}T_0(n-3,A+4)+q^{3n-3-A}T_1(n-3,-A)+q^{4n-3+2A}T_0(n-3,A+2)$$
$$q^{4n-5-2A}T_0(n-3,-A+1)+q^{3n-2+A}T_1(n-3,A+1). \tag{2.29}$$

■

O próximo passo para completarmos a prova do teorema é mostrar que a expressão dada em (2.29), quando substituída em (2.18) é identicamente nula. Fazendo essa substituição temos:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-20j+3n}T_1(n-3,-8j+2)+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-28j+4n}T_0(n-3,-8j+3)$$
$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+28j+3n+3}T_1(n-3,8j+3)+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+36j+4n+4}T_0(n-3,8j+4)$$
$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-4j+3n-3}T_1(n-3,-8j)+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+20j+4n-3}T_0(n-3,8j+2)$$
$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-12j+4n-5}T_0(n-3,-8j+1)+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+12j+3n-2}T_1(n-3,8j+1)$$
$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-4j+3n-3}T_1(n-3,8j-1)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+4j+4n-6}T_0(n-3,8j)$$
$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-52j+3n+18}T_1(n-3,6-8j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-60j+4n+22}T_0(n-3,7-8j)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-20j+3n} T_1(n-3,-3+8j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-44j+9+4n} T_0(n-3,5-8j)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-12j+4n-5} T_0(n-3,-2+8j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-36j+3n+7} T_1(n-3,4-8j) \quad (2.30)$$

Fazendo a substituição $j \to j+1$ nas décima primeira, décima segunda, décima quarta parcelas (e depois faça $j \to -j$). Em seguida aplique (14). Com isso, obtemos:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-20j+3n} T_1(n-3,-8j+2) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-28j+4n} T_0(n-3,-8j+3)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+28j+3n+3} T_1(n-3,8j+3) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+36j+4n+4} T_0(n-3,8j+4)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-4j+3n-3} T_1(n-3,-8j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+20j+4n-3} T_0(n-3,8j+2)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-12j+4n-5} T_0(n-3,-8j+1) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+12j+3n-2} T_1(n-3,8j+1)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-4j+3n-3} T_1(n-3,8j-1) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+4j+4n-6} T_0(n-3,8j)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+12j+3n-2} T_1(n-3,-2-8j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+4j+4n-6} T_0(n-3,-1-8j)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-20j+3n} T_1(n-3,-3+8j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+20j+4n-3} T_0(n-3,-3-8j)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-12j+4n-5} T_0(n-3,-2+8j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-36j+3n+7} T_1(n-3,4-8j). \quad (2.31)$$

Consideramos as primeira e décima terceira parcelas. Fazendo $j \to -j$ e aplicando (15), segue de (18) que :

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-20j+3n} T_1(n-3,-8j+2) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-20j+3n} T_1(n-3,-3+8j) =$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-12j+4n-5}T_0(n-3,-8j+2) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-28j+4n}T_0(n-3,-8j+3).$$

Substituindo em (2.31) e fazendo alguns cancelamentos:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+28j+3n+3}T_1(n-3,8j+3) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+36j+4n+4}T_0(n-3,8j+4)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-4j+3n-3}T_1(n-3,-8j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+20j+4n-3}T_0(n-3,8j+2)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{{}^32j^2-12j+4n-5}T_0(n-3,-8j+1) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+12j+3n-2}T_1(n-3,8j+1)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-4j+3n-3}T_1(n-3,8j-1) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+4j+4n-6}T_0(n-3,8j)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+12j+3n-2}T_1(n-3,-2-8j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+4j+4n-6}T_0(n-3,-1-8j)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+20j+4n-3}T_0(n-3,-3-8j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-36j+3n+7}T_1(n-3,4-8j) \quad (2.32)$$

Consideramos as terceira e sétima parcelas em (2.32). Fazendo a substituição $j \to -j$ e aplicando (14), segue de (18) que:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-4j+3n-3}T_1(n-3,-8j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-4j+3n-3}T_1(n-3,8j-1) =$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-4j+4n-6}T_0(n-3,8j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-12j+4n-5}T_0(n-3,-8j+1).$$

Substituindo em (2.32) e fazendo alguns cancelamentos obtemos:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+28j+3n+3}T_1(n-3,8j+3) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+36j+4n+4}T_0(n-3,8j+4)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+20j+4n-3}T_0(n-3,8j+2) \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+12j+3n-2}T_1(n-3,8j+1)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+12j+3n-2}T_1(n-3,-2-8j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+4j+4n-6}T_0(n-3,-1-8j)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+20j+4n-3}T_0(n-3,-3-8j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-36j+3n+7}T_1(n-3,4-8j) \quad (2.33)$$

Consideramos as primeira e oitava parcelas em (2.33). Fazendo $j \to j+1$ na oitava parcela e aplicando (15), segue de (18) que:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+28j+3n+3}T_1(n-3,8j+3)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-36j+3n+7}T_1(n-3,4-8j)=$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+20j+4n-3}T_0(n-3,-3-8j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+36j+4n+4}T_0(n-3,4+8j).$$

Substituindo em (2.33) e fazendo alguns cancelamentos,

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+20j+4n-3}T_0(n-3,8j+2)+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+12j+3n-2}T_1(n-3,8j+1)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+12j+3n-2}T_1(n-3,-2-8j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+4j+4n-6}T_0(n-3,-1-8j). \quad (2.34)$$

Segue de (18) que:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+12j+3n-2}T_1(n-3,8j+1)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+12j+3n-2}T_1(n-3,-2-8j)=$$

$$+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+4j+4n-6}T_0(n-3,8j+1)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+20j+4n-3}T_0(n-3,8j+2). \quad (2.35)$$

Substituindo (2.35) em (2.34) temos que (2.34) é zero e com isso concluímos a prova do teorema. $\square$

Fazendo $q=1$ em (2.17) obtemos a seguinte seqüência:

$$\begin{cases} P_0(1) = & 1 \\ P_1(1) = & 2 \\ P_2(1) = & 5 \\ P_n(1) = & 3P_{n-1}(1) \quad -P_{n-2}(1) \quad -P_{n-3}(1) \end{cases} . \quad (2.36)$$

Observamos que a seqüência gerada por (2.36) é a seqüência de Pell e com isso segue do Teorema (2.2.1) uma fórmula explícita para os números de Pell em função dos coeficientes trinomiais. Basta considerarmos o limite de $q \to 1$ em (2.18),

$$p_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\{ \binom{n}{8j}_2 + \binom{n}{8j+1}_2 - \binom{n}{8j+3}_2 - \binom{n}{8j+4}_2 \right\} =$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\{ \binom{n+1}{8j+1}_2 - \binom{n+1}{8j+3}_2 \right\}.$$

A fórmula para os números de Pell em função dos coeficientes trinomiais, dada desta maneira já foi obtida. Em [8] obteve-se esta fórmula gerada pela família de polinômios (dada em [10]) associada à identidade 36 de Slater. Observamos ainda que a família de polinômios (também dada em [10]) associada à identidade 12 de Slater também gera a mesma fórmula para os números de Pell.

Uma outra conseqüência do Teorema (2.2.1) é a identidade 71 de Slater, que segue como corolário,

Corolário 2.2.1

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-q^4;q^4)_{n-1}(-q;q^2)_n q^{n^2}}{(q^2;q^4)_n(q^2;q^2)_n(-q^2;q^2)_{n-1}} =$$

$$\frac{(-q^2;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty} \prod_{n=0}^{\infty} (1-q^{16n+16})(1-q^{16n+10})(1-q^{16n+6})$$

Demonstração: Segue do Teorema (2.2.1) que $c(n) = P_n(q)$. Logo

$$P_n(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+4j} U(n,8j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-28j+6} U(n,3-8j).$$

Dessa forma segue de (20) que:

$$\lim_{n\to\infty} P_n(q) = \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+4j} U(n,8j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-28j+6} U(n,3-8j) \right\} =$$

$$\frac{(-q;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty} \left\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+4j} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-28j+6} \right\} =$$

$$\frac{(-q;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j q^{8j^2+2j}$$

Fazendo $z=-q^2$ e $q\to q^8$ em (21) temos que:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j q^{8j^2+2j}=\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{16n+16})(1-q^{16n+10})(1-q^{16n+6}).$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty}P_n(q)=\frac{(-q;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{16n+16})(1-q^{16n+10})(1-q^{16+6}).$$

Segue de (2.16) que:

$$\lim_{t\to 1^-}(1-t)f_{71}(q,t)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-q^4;q^4)_{n-1}(-q;q^2)_n q^{n^2}}{(q^2;q^4)_n(q^2;q^2)_n(-q^2;q^2)_{n-1}}.$$

Portanto segue do Lema de Abel

$$\frac{(-q;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{16n+16})(1-q^{16n+10})(1-q^{16n+6})=$$

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-q^4;q^4)_{n-1}(-q;q^2)_n q^{n^2}}{(q^2;q^4)_n(q^2;q^2)_n(-q^2;q^2)_{n-1}}.$$

□

2.3 A Identidade 68 de Slater

Consideramos a função de duas variáveis dada em [10], associada à identidade do tipo Rogers-Ramanujan de número 68 na lista de Slater,

$$f_{68}(q,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-tq;q^2)_{n+1}(-t^2q^4;q^4)_n t^n q^{n^2+2n}}{(-tq^2;q^2)_{n+1}(t;q^2)_{n+1}(t^2q^2;q^4)_{n+1}}. \tag{2.37}$$

Através de simples manipulações (2.37), obtemos a seguinte equação funcional:

$$(1-t)(1-tq)(1+tq^2)f_{68}(q,t)=1+(1+t^2q^4)tq^3 f_{68}(q,tq^2), \tag{2.38}$$

e substituindo $f_{68}(q,t)=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(q)t^n$ em (2.38) temos que

$$\begin{cases} P_0(q) = & 1 \\ P_1(q) = & 1+q-q^2+q^3 \\ P_2(q) = & 1+q+2q^4+q^6-q^7+q^8 \\ P_n(q) = & (1+q-q^2+q^{2n+1})P_{n-1}(q)-(q-q^2-q^3)P_{n-2}(q) \quad -(q^3-q^{2n+1})P_{n-3}(q) \end{cases} \tag{2.39}$$

Em [10] é dado uma fórmula explícita como conjectura para a família de polinômios $P_n(q)$, que segue abaixo,

$$c(n)=\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+12j}U(n,1+8j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-20j+2}U(n,2-8j), \tag{2.40}$$

onde $c(n)=P_{n-1}(q)$; $n\geq 1$.

Teorema 2.3.1 *A fórmula* $c(n)$ *dada em* (2.40) *satisfaz a relação de recorrência e as mesmas condições iniciais dadas em* (2.39).

Demonstração: É claro que as condições iniciais são válidas. Agora temos que provar:

$$c(n+1)=(1+q-q^2+q^{2n+1})c(n)-(q-q^2-q^3)c(n-1)-(q^3-q^{2n+1})c(n-2)$$

isto é,

$$c(n+1)-(1+q-q^2+q^{2n+1})c(n)+(q-q^2-q^3)c(n-1)+(q^3-q^{2n+1})c(n-2)=0,$$

ou seja,

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+12j}U(n+1,1+8j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-20j+2}U(n+1,2-8j)$$

$$-(1+q-q^2+q^{2n+1})\left\{\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+12j}U(n,1+8j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-20j+2}U(n,2-8j)\right\}$$

$$(q-q^2-q^3)\left\{\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32^j2+12j}U(n-1,1+8j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-20j+2}U(n-1,2-8j)\right\}$$

$$(q^3-q^{2n+1})\left\{\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+12j}U(n-2,1+8j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-20j+2}U(n-2,2-8j)\right\}=0$$

Para isso, faremos a seguinte observação:

Observação 2.3.1

Sejam A e n inteiros, consideramos a seguinte expressão,

$$U(n+1,A)-(1+q-q^2+q^{2n+1})U(n,A)+(q-q^2-q^3)U(n-1,A)$$

$$+(q^3-q^{2n+1})U(n-2,A), \tag{2.41}$$

e escrevendo (2.41) de maneira conveniente,

$$U(n+1,A)-(1+q+q^{2n+1})U(n,A)+qU(n-1,A)+q^2U(n,A)+(-q^2-q^3)U(n-1,A)$$

$$+(q^3-q^{2n+1})U(n-2,A). \tag{2.42}$$

Fazendo $n\to n+1$ em (13) temos que:

$$U(n+1,A)-(1+q+q^{2n+1})U(n,A)+qU(n-1,A)=$$
$$q^{2n-2A+2}T_0(n-1,A-2)+q^{2n+2A+4}T_0(n-1,A+3).$$

Substituindo em (2.42), obtemos:

$$q^{2n-2A+2}T_0(n-1,A-2)+q^{2n+2A+4}T_0(n-1,A+3)+q^2U(n,A)$$
$$-q^2U(n-1,A)-q^3U(n-1,A)+q^3U(n-2,A)-q^{2n-1}U(n-2,A);$$

aplicando a definição de $U(n,A)$ para as terceira e quarta parcelas,

$$q^{2n-2A+2}T_0(n-1,A-2)+q^{2n+2A+4}T_0(n-1,A+3)+q^2T_0(n,A)$$
$$q^2T_0(n,A+1)-q^2T_0(n-1,A)-q^2T_0(n-1,A+1)$$
$$q^3U(n-2,A)+q^3U(n-2,A)-q^{2n-1}U(n-2,A),$$

e agora aplicando a propriedade (16) nas terceira e quarta parcelas e fazendo alguns cancelamentos, temos

$$q^{2n-2A+2}T_0(n-1,A-2)+q^{2n+2A+4}T_0(n-1,A+3)+q^{n-A+2}T_1(n-1,-A)$$
$$q^{2n-2A+2}T_0(n-1,-A+1)+q^{n+A+3}T_1(n-1,A+1)+q^{2n+2A+4}T_0(n-1,A+2)$$
$$-q^3U(n-1,A)+q^3U(n-2,A)-q^{2n-1}U(n-2,A).$$

Aplicando a definição de $U(n,A)$ para as sétima, oitava e nona parcelas,

$$q^{2n-2A+2}T_0(n-1,A-2)+q^{2n+2A+4}T_0(n-1,A+3)+q^{n-A+2}T_1(n-1,-A)$$
$$q^{2n-2A+2}T_0(n-1,-A+1)+q^{n+A+3}T_1(n-1,A+1)+q^{2n+2A+4}T_0(n-1,A+2)$$
$$-q^3T_0(n-1,A)-q^3T_0(n-1,A+1)+q^3T_0(n-2,A)$$
$$q^3T_0(n-2,A+1)-q^{2n-1}T_0(n-2,A)-q^{2n-1}T_0(n-2,A+1). \tag{2.43}$$

Aplicando (14) na sétima parcela e depois aplicando a propriedade (16) nas sétima e oitava parcelas e fazendo alguns cancelamentos, chegamos a

$$q^{2n-2A+2}T_0(n-1,A-2)+q^{2n+2A+4}T_0(n-1,A+3)+q^{n-A+2}T_1(n-1,A)$$
$$q^{2n-2A+2}T_0(n-1,-A+1)+q^{n+A+3}T_1(n-1,A+1)+q^{2n+2A+4}T_0(n-1,A+2)$$
$$-q^{n-A+2}T_1(n-2,-A)-q^{2n-2A+1}T_0(n-2,-A+1)-q^{n+A+3}T_1(n-2,A+1)$$
$$-q^{2n+2A+3}T_0(n-2,A+2)-q^{2n-1}T_0(n-2,A)-q^{2n-1}T_0(n-2,A+1). \tag{2.44}$$

Aplicando (17) nas terceira e quarta parcelas e observando que $T_0(n-2,-A)=T_1(n-2,A)$, chegamos depois de alguns cancelamentos a

$$q^{2n-2A+2}T_0(n-1,A-2)+q^{2n+2A+4}T_0(n-1,A+3)+q^{2n+2A+4}T_0(n-1,A+2)$$
$$q^{2n-2A+2}T_0(n-1,-A+1)+q^{2n-2A+1}T_0(n-2,A-1)$$
$$-q^{2n-2A+1}T_0(n-2,-A+1). \tag{2.45}$$

■

Para finalizarmos a demonstração do Teorema temos que substituir (2.45) em (2.40) e verificar que esta nova expressão é igual a zero. Fazendo a substituição , obtemos:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-4j+2n}T_0(n-1,-1+8j)+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+28j+2n+6}T_0(n-1,4+8j)$$
$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-4j+2n}T_0(n-1,-8j)+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+28j+2n+6}T_0(n-1,3+8j)$$
$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-4j+2n-1}T_0(n-2,8j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-4j+2n-1}T_0(n-2,-8j)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-4j+2n}T_0(n-1,-8j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-36j+2n+10}T_0(n-1,5-8j)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-4j+2n}T_0(n-1,-1+8j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-36j+2n+10}T_0(n-1,4-8j)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-4j+2n-1}T_0(n-2,1-8j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-4j+2n-1}T_0(n-2,-1+8j).$$

Segue da propriedade de (14) que as quinta e sexta parcelas cancelam-se e as décima primeira e décima segunda também. Os outros cancelamentos são imediatos. Reescrevendo,

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+28j+2n+6}T_0(n-1,8j+4) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+28j+2n+6}T_0(n-1,3+8j)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+28j+2n+6}T_0(n-1,-3-8j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+28j+2n+6}T_0(n-1,-4-8j). \quad (2.46)$$

Novamente, segue de (14) que a primeira e terceira parcelas cancelam-se e as segunda e quarta também. Portanto (2.46) é igual a zero. Com isso temos a prova do Teorema.

□

Segue do Teorema 2.3.1 uma fórmula para os números de Pell em função dos coeficientes trinomiais, uma vez que $q = 1$ em (2.39) nos fornece uma relação de recorrência que descreve os números de Pell,

$$p_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\{ \binom{n+1}{8j+1}_2 - \binom{n+1}{8j+3}_2 \right\},$$

onde p_n denota o número de Pell de posição n.

Observamos, novamente que a família de polinômios (dada em [10]) asssociada a identidade 68 de Slater gera uma fórmula para os números de Pell semelhante as fórmulas para os números de Pell geradas pelas famílias de polinômios associadas as identidades 34, 12, 71 de Slater. Outra conseqüência do Teorema (2.3.1) é a identidade 68 de Slater. Esta segue como corolário,

Corolário 2.3.1

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q;q^2)_{n+1}(-q^4;q^4)_n q^{n^2+2n}}{(-q^2;q^2)_{n+1}(q^2;q^2)_n(q^2;q^4)_{n+1}} =$$

$$\frac{(-q;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{16n+16})(1-q^{16n+14})(1-q^{16n+2}).$$

Demonstração: Segue do Teorema de 2.3.1 que $c(n+1) = P_n(q)$; $n \geq 0$.

Logo,

$$P_n(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+12j}U(n+1, 1+8j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-20j+2}U(n+1, 2-8j).$$

Dessa forma, segue de (20) que:

$$\lim_{n\to\infty} P_n(q) = \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+12j}U(n+1, 1+8j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-20j+2}U(n+1, 2-8j)\right\} =$$

$$\frac{(-q;q^2)_\infty^\infty}{(q^2;q^2)_\infty}\left\{\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2+12j} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{32j^2-20j+2}\right\} =$$

$$\frac{(-q;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j q^{8j^2+6j}.$$

Fazendo $z = -q^6$ e $q \to q^8$ em (21) obtemos:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j q^{8j^2+6j} = \prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{16n+16})(1-q^{16n+14})(1-q^{16n+2}).$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} P_n(q) = \frac{(-q;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{16n+16})(1-q^{16n+14})(1-q^{16n+2}).$$

Segue de (2.38)

$$\lim_{t\to 1^-}(1-t)f_{68}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-q;q^2)_{n+1}(-q^4;q^4)_n q^{n^2+2n}}{(-q^2;q^2)_{n+1}(q^2;q^2)_n(q^2;q^4)_{n+1}}.$$

Portanto, segue do Lema de Abel,

$$\frac{(-q;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{16n+16})(1-q^{16n+14})(1-q^{16n+2}) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-q;q^2)_{n+1}(q^4;q^4)_n q^{n^2+2n}}{(-q^2;q^2)_{n+1}(q^2;q^2)_n(q^2;q^4)_{n+1}}$$

□

2.4 Interpretações Combinatórias para os Números de Pell

Estabelecemos uma relação entre os números de Pell e partições em três cores. Escrevemos $f_{68}(q,t)$ da seguinte forma:

$$f_{68}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(q)t^n =$$

$$\frac{1}{1-t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+t^2q^4)(1+t^2q^8)\dots(1+t^2q^{4n})t^nq^{3+\dots+2n+1}}{(1+tq^2)\dots(1+tq^{2n+2})(1-tq)\dots(1-tq^{2n+1})(1-tq^2)\dots(1-tq^{2n})}. \quad (2.47)$$

Definimos A_1 como o conjunto das partições, onde as partes são distintas e múltiplas de 4.

Seja

$$C_1 = \{\lambda_1,\dots,\lambda_n; (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in A_1\},$$

os λ_i são chamados partes **pretas**.

Definimos A_2 como o conjunto das partições, nas quais, toda parte ímpar maior do que 1 e menor do que ou igual a maior parte aparece pelo menos uma vez.

Seja

$$C_2 = \{\lambda_1,\dots,\lambda_n; (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in A_2\},$$

os $\lambda_i \in C_2$ são chamados partes **amarelas**.

Definimos B_1 como o conjunto das partições, onde as partes são pares com um número par de partes e B_2 como o conjunto das partições, onde as partes são pares com número ímpar de partes.

Seja

$$C_3 = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n; (\lambda_1, \ldots \lambda_n) \in B_1 \bigcup B_2\},$$

os λ_i são chamados partes **verdes**.

Temos que

$$f_{68}(q,t) = \sum_{N=0}^{\infty} P_N(q) t^N.$$

Podemos concluir das definições anteriores que $P_N(q)$ é a função geradora para partições em partes: amarelas, verdes e pretas, onde toda parte amarela maior do que 1 e menor do que ou igual a maior parte aparece pelo menos uma vez, as partes verdes são pares e menores do que ou iguais a maior parte amarela ímpar mais um, as partes pretas são múltiplas de 4, distintas e menores do que duas vezes a maior parte amarela ímpar menos dois e o total de partes verdes e amarelas mais o dobro do número de partes pretas é no máximo N.

Fazendo $q = 1$ em (2.39) obtemos uma relação de recorrência que descreve os números de Pell, dessa forma $p_n = P_n(1)$. Segue deste fato e observações anteriores o seguinte Teorema,

Teorema 2.4.1 *O total de partições em partes: amarelas, verdes e pretas, onde toda parte amarela maior do que* 1 *e menor do que ou igual a maior parte aparece pelo menos uma vez, as partes verdes são pares e menores do que ou iguais a maior parte amarela ímpar mais um, as partes pretas são múltiplas de* 4, *distintas e menores do que duas vezes a maior parte amarela ímpar menos dois e o total de partes verdes e amarelas mais o dobro do número de partes pretas é no máximo* N, *com um número par de partes verdes menos o total de partições deste tipo com um número ímpar de partes verdes é igual a* p_N.

n	Partições descritas no Teorema (2.4.1)		p_n
	Número par de partes verdes	Número ímpar de partes verdes	
$n=0$	$\emptyset$		1
$n=1$	$\emptyset$, 3, 1	2	2
$n=2$	$\emptyset$, 3, 1, $1+1$, $2+2$, $3+1$, $3+3$, $3+2$, $3+5$,	2 $3+2$, $3+4$ $1+2$,	5
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabela 2.1: *Partições descritas no Teorema* (2.4.1)

Agora vamos descrever uma interpretação combinatória para $f_{71}(q,t)$ usando o conceito de partições com restrições e depois relacioná-las com os números de Pell.

Podemos escrever:

$$f_{71}(q,t) = \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1-t}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n q^{1+3+\ldots+2n-1}}{(1-tq)(1-tq^3)\ldots(1-tq^{2n-1})(1-tq^{2n})} \tag{2.48}$$

Temos que

$$f_{71}(q,t) = \sum_{N=0}^{\infty} P_N(q)t^N,$$

assim, $P_N(q)$ é a função geradora para partições em no máximo N partes com as seguintes restrições: todo inteiro ímpar menor do que ou igual a maior parte aparece pelo menos uma vez e as partes pares (pode aparecer) são iguais a maior parte ímpar mais um.

Fazendo $q = 1$ em (2.17) obtemos uma relação de recorrência que nos fornece os números de Pell, dessa forma $P_n(1) = p_n$. Juntando este fato com as observações anteriores temos o seguinte Teorema,

Teorema 2.4.2 *O total de partições em no máximo N partes, nas quais toda parte ímpar menor do que ou igual a maior parte aparece pelo menos uma vez e as partes pares (caso apareçam) são iguais a maior parte ímpar mais um é igual a p_N.*

Apresentamos alguns exemplos de partições descritas no Teorema (2.4.2)

n	Partições descritas no Teorema (2.4.2)	p_n
$n = 0$	Ø	1
$n = 1$	Ø, •	2
$n = 2$	Ø, • , • • , • • • • • • •	5
$n = 3$	Ø, • , • • , • • • • • • • • • • , • • • • , • • • • • • • • • • • • • • • • • • • • •	12
⋮	⋮	⋮

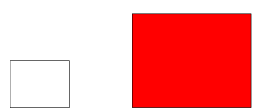
Tabela 2.2: *Partições descritas no Teorema* (2.4.2)

Capítulo 3

Extensões Polinomiais e Interpretação Combinatória para os Números de Jacobsthal

O números de Jacobsthal $1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, \ldots$ são definidos por $j_0 = 1$, $j_1 = 1$; $j_n = j_{n-1} + 2j_{n-2}$. Os números de Jacobsthal aparecem em vários problemas de Combinatória. Descrevemos abaixo uma situação em que a seqüência de Jacobsthal aparece.

Queremos calcular o número de ladrilhamentos possíveis para um retângulo $3 \times n$ com dois tipos de ladrilhos, um ladrilho de cor branca (1×1) e um ladrilho de cor vermelha (2×2). Segue abaixo os tipos de ladrilhos,



Denotamos por T_n o número de ladrilhamentos para um retângulo $3 \times n$ com os dois tipos de ladrilhos descritos acima.

Definimos $T_0 = 1$.

Temos que $T_1 = 1$, pois há apenas um ladrilhamento para o retângulo 3×1 com os dois tipos de ladrilhos definidos anteriormente. Veja figura abaixo,

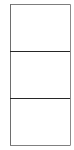


Figura 3.1: Ladrilhamentos para retângulo 3×1.

Agora listamos os ladrilhamentos possíveis para o retângulo 3×2.

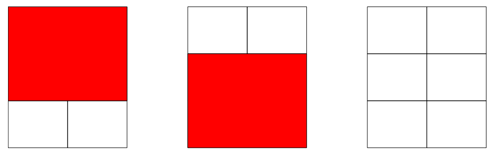


Figura 3.2: Ladrilhamentos para retângulo 3×2.

Logo $T_2 = 3$.

O número de ladrilhamentos para o retângulo 3×3 com os dois tipos de ladrilhos: com um ladrilho 1×1 de cor branca e um ladrilho de cor vermelha 2×2 é $T_3 = 5$. Segue (veja figura) abaixo cada um desses ladrilhamentos,

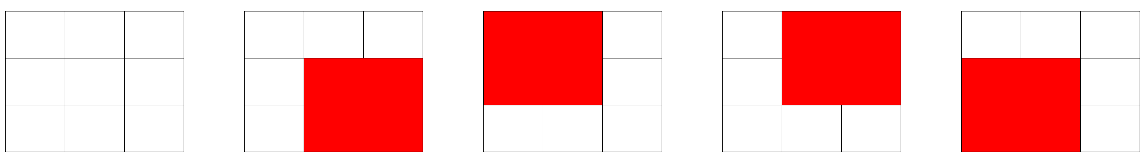


Figura 3.3: Ladrilhamentos para retângulo 3×3.

Observamos que $T_4 = 11$, pois há 11 maneiras de ladrilhar o retângulo 3×4 com os dois tipos de ladrilhos já definidos. Listamos abaixo esses ladrilhamentos,

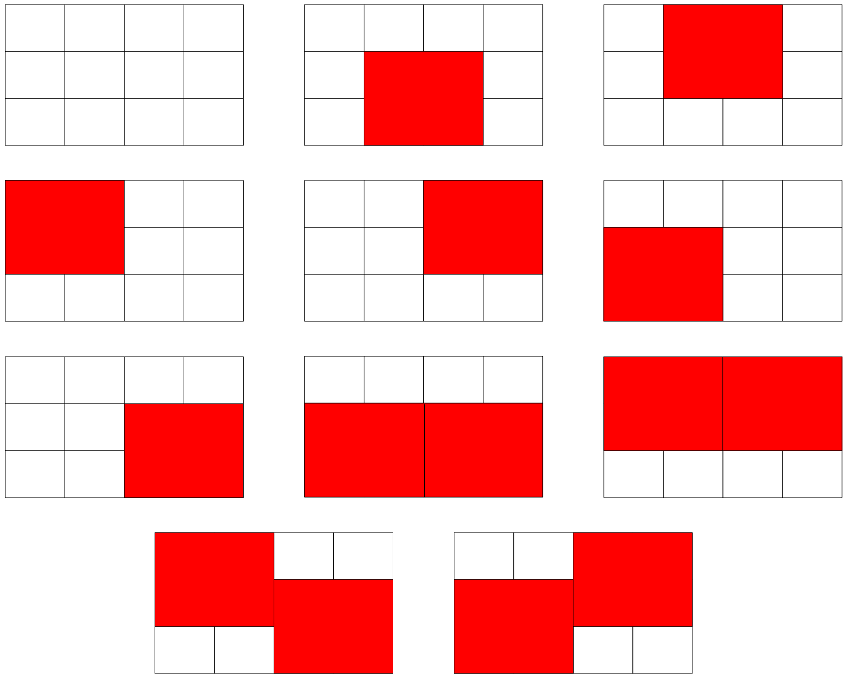
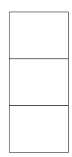


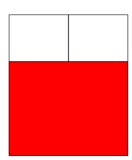
Figura 3.4: Ladrilhamentos para retângulo 3×4.

Particionamos o conjunto dos ladrilhamentos $3 \times n$ com ladrilhos de dois tipos em três conjuntos:

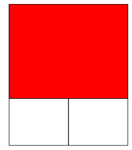
- o conjunto dos ladrilhamentos $3 \times n$ (com os ladrilhos de dois tipos) que contém pelo menos um ladrilhamento (à direita) 3×1 com ladrilhos de cor branca medindo 1×1;



- o conjunto dos ladrilhamentos $3 \times n$ (com os ladrilhos de dois tipos) que contém pelo menos um ladrilhamento (à direita) 3×2 com dois ladrilhos de cor branca (1×1) e um ladrilho de cor vermelha 2×2, de acordo com a figura



- o conjunto dos ladrilhamentos $3 \times n$ (com os ladrilhos de dois tipos) que contém pelo menos um ladrilhamento (à direita) 3×2 com um ladrilho de cor vermelha e dois ladrilhos de cor branca (1×1) de acordo com a figura



Observamos que a cardinalidade do primeiro conjunto que definimos é T_{n-1}. O segundo conjunto tem cardinalidade T_{n-2} e o terceiro tem T_{n-2} elementos. Portanto estabelecemos a seguinte relação de recorrência para este problema:

$$\begin{cases} T_0 = & 1 \\ T_1 = & 1 \\ T_n = & T_{n-1} \quad +2T_{n-2} \end{cases}.$$

Observamos que esta relação de recorrência nos fornece os números de Jacobsthal.

3.1 Números de Jacobsthal e seqüências ternárias

Apresentamos, a seguir, uma bijeção entre os ladrilhamentos descritos no início deste capítulo e seqüências ternárias. Dado um ladrilhamento como o da figura abaixo

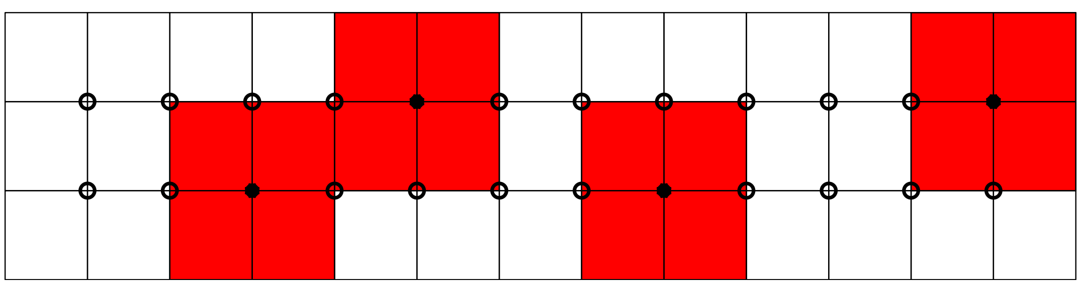


Figura 3.5: Ladrilhamento do retângulo 3×13.

associamos a cada ponto interno de coordenadas inteiras o valor "0"ou "1"através da seguinte regra: se todos os quatro quadrados 1×1 vizinhos do ponto são vermelhos associamos o valor 1 e zero caso contrário.

Observamos que de acordo com esta regra estamos associando a cada ladrilhamento uma matriz $2 \times (n-1)$ de $0'$s e $1'$s. Para o exemplo acima temos a seguinte matriz associada:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

pode-se observar, facilmente, que não podemos ter um número par de colunas $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ consecutivas e um número par de colunas $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ consecutivas. Também não podemos ter estas colunas vizinhas e o vetor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ não ocorre. Se associamos agora, ao vetor coluna $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ o número "0"e às colunas $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ os valores "1"e "2", respectivamente, teremos associado a cada ladrilhamento $3 \times n$ uma $(n-1)$-upla ternária com as restrições mencionadas acima. Desta forma provamos a seguinte proposição:

Proposição 3.1.1 *O total de $n-$seqüências ternárias, onde não ocorrem os padrões* 21, 12 *e um número par de* $1'$*s ou* $2'$*s consecutivos é igual a* j_{n+1}.

Neste capítulo, descreveremos duas extensões polinomiais para os números de Jacobsthal, sendo que estas, estão relacionadas com as identidades de número 22 e 26 da lista de Slater, que estão abaixo nesta ordem.

$$\frac{(-q;q)_\infty}{(q;q)_\infty} \prod_{n=0}^{\infty} (1-q^{6n+2})(1-q^{6n+4})(1-q^{6n+6}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q;q)_n q^{n(n+1)}}{(q;q^2)_{n+1}(q;q)_n}, \tag{3.1}$$

$$\frac{(-q;q)_\infty}{(q;q)_\infty} \prod_{n=0}^{\infty} (1-q^{6n+3})^2(1-q^{6n+6}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q;q)_n q^{n^2}}{(q;q^2)_{n+1}(q;q)_n}. \tag{3.2}$$

Santos em [10], establece conjecturas de fórmulas explícitas para as famílias de polinômios associadas as identidades de número 22 e 26. Neste capítulo faremos a prova dessas conjecturas e observaremos que segue como resultado provas alternativas identidades de números 22 e 26 da lista de Slater e uma fórmula explícita para os números de Jacobsthal em termos dos coeficientes trinomiais. Também estabeleceremos uma relação entre os números de Jacobsthal e duas classes de partições coloridas.

3.2 A Identidade 22 de Slater

Santos em [10], seguindo um método introduzido por Andrews, define funções de duas variáveis $f(q,t)$ associadas à identidades do tipo Rogers-Ramanujan. Consideramos inicialmente, a função de duas variáveis associada a identidade de número 22 na lista de Slater,

$$f_{22}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-tq;q)_n t^{2n} q^{n^2+n}}{(t^2q;q^2)_{n+1}(t;q)_{n+1}} \tag{3.3}$$

Através de manipulações em (3.3), obtemos a seguinte equação funcional,

$$(1-t)(1-t^2q)f_{22}(q,t) = 1 + (1+tq)t^2q^2 f_{22}(q,tq) \tag{3.4}$$

e substituindo $f(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(q)t^n$ em (3.4) temos que:

$$\begin{cases} P_0(q) = & 1 \\ P_1(q) = & 1 \\ P_2(q) = & 1+q+q^2 \\ P_n(q) = & P_{n-1}(q) + (q+q^n)P_{n-2}(q) - (q-q^n)P_{n-3}(q) \end{cases}, \tag{3.5}$$

Santos em [10], conjecturou uma fórmula explícita para a família de polinômios $P_n(q)$,

$$c(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{12j^2+4j} CT(n, 1+6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{12j^2-8j+1} CT(n, 2-6j), \tag{3.6}$$

onde $c(n) = P_{n-1}(q)$; $n \geq 1$.

Teorema 3.2.1 *A fórmula dada em* (3.6) *satisfaz a relação de recorrência e as mesmas condições iniciais dadas em* (3.5).

Demonstração: É claro que as condições iniciais são válidas. Agora vamos provar que:

$$c(n+1) = c(n) + (q+q^n)c(n-1) - (q-q^n)c(n-2),$$

ou seja

$$c(n+1) - c(n) - (q+q^n)c(n-1) + (q-q^n)c(n-2) = 0,$$

isto é,

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{12j^2+4j} CT(n+1, 1+6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{12j^2-8j+1} CT(n+1, 2-6j)$$

$$- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{12j^2+4j} CT(n, 1+6j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{12j^2-8j+1} CT(n, 2-6j)$$

$$-(q+q^n)\left\{ q^{12j^2+4j} CT(n-1, 1+6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{12j^2-8j+1} CT(n-1, 2-6j) \right\}$$

$$(q-q^n)\left\{ q^{12j^2+4j} CT(n-2, 1+6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{12j^2-8j+1} CT(n-2, 2-6j) \right\} = 0 \quad (3.7)$$

Fazendo a substituição $q \to q^2$ em (3.7) temos:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+8j} T_1(n+1, 1+6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-16j+2} T_1(n+1, 2-6j)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+8j} T_1(n, 1+6j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-16j+2} T_1(n, 2-6j)$$

$$-(q^2+q^{2n})\left\{ q^{24j^2+8j} T_1(n-1, 1+6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-16j+2} T_1(n-1, 2-6j) \right\}$$

$$(q^2-q^{2n})\left\{ q^{24j^2+8j} T_1(n-2, 1+6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-16j+2} T_1(n-2, 2-6j) \right\} = 0 \quad (3.8)$$

Temos que (3.7) é equivalente a (3.8). Aplicando (17) nas primeira e segunda parcelas em (3.8),

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+8j} \left\{ T_1(n, 1+6j) + q^{n+1+1+6j} T_0(n, 2+6j) + q^{n+1-1-6j} T_0(n, 6j) \right\}$$

$$- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-16j+2} \left\{ T_1(n, 2-6j) + q^{n+1+2-6j} T_0(n, 3-6j) + q^{n+1-2+6j} T_0(n, 1-6j) \right\}$$

$$- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+8j} T_1(n, 1+6j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-16j+2} T_1(n, 2-6j)$$

$$-(q^2+q^{2n})\left\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+8j} T_1(n-1, 1+6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-16j+2} T_1(n-1, 2-6j) \right\}$$

$$(q^2-q^{2n})\left\{\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+8j}T_1(n-2,1+6j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-16j+2}T_1(n-2,2-6j)\right\} \quad (3.9)$$

Fazendo alguns cancelamentos e reescrevendo,

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+14j+n+2}T_0(n,2+6j)+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+2j+n}T_0(n,6j)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-22j+5+n}T_0(n,3-6j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-10j+n+1}T_0(n,1-6j)$$

$$-(q^2+q^{2n})\left\{\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+8j}T_1(n-1,1+6j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-16j+2}T_1(n-1,2-6j)\right\}$$

$$(q^2-q^{2n})\left\{\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+8j}T_1(n-2,1+6j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-16j+2}T_1(n-2,2-6j)\right\}$$

Aplicando (16) nas quatro primeiras somas,

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+14j+n+2}\left\{T_0(n-1,1+6j)+q^{n+2+6j}T_1(n-1,2+6j)+q^{2n+4+12j}T_0(n-1,3+6j)\right\}$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+2j+n}\left\{T_0(n-1,6j-1)+q^{n+6j}T_1(n-1,6j)+q^{2n+12j}T_0(n-1,1+6j)\right\}$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-22j+n+5}\left\{T_0(n-1,2-6j)+q^{n+3-6j}T_1(n-1,3-6j)+q^{2n+6-12j}T_0(n-1,4-6j)\right\}$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-10j+n+1}\left\{T_0(n-1,-6j)+q^{n+1-6j}T_1(n-1,1-6j)+q^{2n+2-12j}T_0(n-1,2-6j)\right\}$$

$$-(q^2+q^{2n})\left\{\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+8j}T_1(n-1,1+6j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-16j+2}T_1(n-1,2-6j)\right\}$$

$$(q^2-q^{2n})\left\{\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+8j}T_1(n-2,1+6j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-16j+2}T_1(n-2,2-6j)\right\}$$

Reescrevendo,

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+14j+n+2}T_0(n-1,1+6j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+20j+2n+4}T_1(n-1,2+6j)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+26j+3n+6}T_0(n-1,3+6j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+2j+n}T_0(n-1,6j-1)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+8j+2n}T_1(n-1,6j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+14j+3n}T_0(n-1,1+6j)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-22j+5+n}T_0(n-1,2-6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-28j+2n+8}T_1(n-1,3-6j)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-34j+3n+11}T_0(n-1,4-6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-10j+n+1}T_0(n-1,-6j)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-16j+2n+2}T_1(n-1,1-6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-22j+3n+3}T_0(n-1,2-6j)$$

$$-(q^2+q^{2n})\left\{\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+8j}T_1(n-1,1+6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-16j+2}T_1(n-1,2-6j)\right\}$$

$$(q^2-q^{2n})\left\{\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+8j}T_1(n-2,1+6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-16j+2}T_1(n-2,2-6j)\right\}, \quad (3.10)$$

consideramos as segunda e oitava (faça a substituição $j \to j+1$), segue de (18),

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+20j+2n+4}T_1(n-1,2+6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-28j+2n+8}T_1(n-1,3-6j) =$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+14j+3n+1}T_0(n-1,2+6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+26j+3n+6}T_0(n-1,3+6j) \quad (3.11)$$

Substituindo em (3.10) temos que a primeira parcela em (3.11) cancela-se com nona a (faça $j \to j+1$ nesta parcela). A segunda parcela em (3.11) cancela-se com a terceira em (3.10). Reescrevendo,

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+14j+n+2}T_0(n-1,1+6j) + \sum_{j=-\infty}^{24j^2+2j+n} T_0(n-1,6j-1)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+8j+2n}T_1(n-1,6j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+14j+3n}T_0(n-1,1+6j)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-22j+5+n}T_0(n-1,2-6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-10j+n+1}T_0(n-1,-6j)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-16j+2n+2}T_1(n-1,1-6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-22j+3n+3}T_0(n-1,2-6j)$$

$$-q^2\left\{\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+8j}T_1(n-1,1+6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-16j+2}T_1(n-1,2-6j)\right\}$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+8j+2n}T_1(n-1,1+6j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-16j+2n+2}T_1(n-1,2-6j)$$

$$-q^2\left\{\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+8j}T_1(n-2,1+6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-16j+2}T_1(n-2,2-6j)\right\}$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+8j+2n}T_1(n-2,1+6j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-16j+2n+2}T_1(n-2,2-6j). \quad (3.12)$$

Consideramos as terceira e décima primeira parcelas. Segue de (18) que

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+8j+2n}T_1(n-2,6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+8j+2n}T_1(n-1,1+6j) =$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+2j+3n-1}T_0(n-1,6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+14j+3n}T_0(n-1,1+6j). \quad (3.13)$$

Consideramos as sétima e décima segunda parcelas, segue de (18),

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+16j+2n+2}T_1(n-1,1+6j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+16j+2n+2}T_1(n-1,2+6j) =$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+10j+3n}T_0(n-1,1+6j)+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+22j+3n+3}T_0(n-1,2+6j) \quad (3.14)$$

Fazendo $j \to -j$ na segunda parcela dada em (3.14), e depois substituindo (3.13) e (3.14) em (3.12), fazendo alguns cancelamentos imediatos obtemos:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+2j+3n-1}T_0(n-1,6j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+10j+3n}T_0(n-1,1+6j)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+14j+n+2}T_0(n-1,1+6j)+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24^2+2j+n}T_0(n-1,6j-1)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-22j+5+n}T_0(n-1,2-6j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-10j+n+1}T_0(n-1,-6j)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+8j+2}T_1(n-1,1+6j)+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-16j+4}T_1(n-1,2-6j)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+8j+2}T_1(n-2,1+6j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-16j+4}T_1(n-2,2-6j)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+8j+2n}T_1(n-2,1+6j)+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-16j+2n+2}T_1(n-2,2-6j) \quad (3.15)$$

Aplicando (17) nas sétima e oitava parcelas,

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+2j+3n-1}T_0(n-1,6j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+10j+3n}T_0(n-1,1+6j)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+14j+n+2}T_0(n-1,1+6j)+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+2j+n}T_0(n-1,6j-1)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-22j+5+n}T_0(n-1,2-6j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-10j+n+1}T_0(n-1,-6j)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+8j+2}\left\{T_1(n-2,1+6j)+q^{n-1+1+6j}T_0(n-2,2+6j)+q^{n-1-1-6j}T_0(n-2,6j)\right\}$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-16j+4}\left\{T_1(n-2,2-6j)+q^{n-1+2-6j}T_0(n-2,3-6j)+q^{n-1-2+6j}T_0(n-2,1-6j)\right\}$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+8j+2}T_1(n-2,1+6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-16j+4}T_1(n-2,2-6j)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+8j+2n}T_1(n-2,1+6j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-16j+2n+2}T_1(n-2,2-6j)$$

Fazendo alguns cancelamentos e reescrevendo temos:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+2j+3n-1}T_0(n-1,6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+10j+3n}T_0(n-1,1+6j)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+14j+n+2}T_0(n-1,1+6j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+2j+n}T_0(n-1,6j-1)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-22j+5+n}T_0(n-1,2-6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-10j+n+1}T_0(n-1,-6j)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+14j+n+2}T_0(n-2,2+6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+2j+n}T_0(n-2,6j)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-22j+n+5}T_0(n-2,3-6j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-10j+n+1}T_0(n-2,1-6j)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+8j+2n}T_1(n-2,1+6j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-16j+2n+2}T_1(n-2,2-6j) \tag{3.16}$$

Considermos as terceira e sétima parcelas em (3.16), segue de (22) (Fazendo $A = 1+6j$ e $m = n-1$),

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+14j+n+2}T_0(n-1,1+6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+14j+n+2}T_0(n-2,2+6j) =$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+14j+3n-1}T_0(n-2,1+6j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+8j+2n}T_1(n-2,6j) \tag{3.17}$$

Agora consideramos as quarta e oitava parcelas em (3.16), segue de (22) (fazendo $m = n-1$ e $A = 6j-1$)

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+2j+n}T_0(n-1,6j-1) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+2j+n}T_0(n-2,6j) =$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+2j+3n-3} T_0(n-2,6j-1) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-4j+2n} T_1(n-2,6j-2). \qquad (3.18)$$

Da mesma forma, consideramos as quinta e nona parcelas em (3.16), segue de (22) (fazendo $m = n-1$ e $A = 2-6j$),

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-22j+n+5} T_0(n-1,2-6j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-22j+n+5} T_0(n-2,3-6j) =$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-22j+3n+2} T_0(n-2,2-6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-16j+2n+2} T_1(n-2,1-6j) \quad (3.19)$$

Consideramos as sexta e primeira parcelas em (3.16), segue de (22) (fazendo $m = n-1$ e $A = -6j$)

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-10j+n+1} T_0(n-1,6j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-10j+n+1} T_0(n-2,1-6j) =$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-4j+2n} T_1(n-2,-6j-1) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-10j+3n-2} T_0(n-2,-6j) \qquad (3.20)$$

Substituindo (3.17), (3.18), (3.19) e (3.20) em (3.16), temos:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+2j+3n-1} T_0(n-1,6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+10j+3n} T_0(n-1,1+6j)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+14j+3n-1} T_0(n-2,1+6j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+8j+2n} T_1(n-2,6j)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+8j+2n} T_1(n-2,1+6j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-16j+2n+2} T_1(n-2,2-6j)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+2j+3n-3} T_0(n-2,6j-1) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-4j+2n} T_1(n-2,6j-2)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-22j+3n+2} T_0(n-2,2-6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-16j+2n+2} T_1(n-2,1-6j)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-4j+2n}T_1(n-2,-6j-1)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-10j+3n-2}T_0(n-2,-6j) \tag{3.21}$$

Considerando as quarta e quinta parcelas em (3.21), segue de (18),

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+8j+2n}T_1(n-2,6j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+8j+2n}T_1(n-2,1+6j)=$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+2j+3n-2}T_0(n-2,6j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+14j+3n-1}T_0(n-2,1+6j) \tag{3.22}$$

Agora consideramos as sexta e décima parcelas em (3.21) segue de (18),

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-16j+2n+2}T_1(n-2,2-6j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-16j+2n+2}T_1(n-2,1-6j)=$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-10j+3n-1}T_0(n-2,1-6j)+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-22j+3n+2}T_0(n-2,2-6j) \tag{3.23}$$

Substituindo (3.22) e (3.23) em (3.21) e fazendo alguns cancelamentos imediatos, temos:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+2j+3n-1}T_0(n-1,6j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+10j+3n}T_0(n-1,1+6j)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+2j+3n-3}T_0(n-2,6j-1)+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-4j+2n}T_1(n-2,6j-2)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-4j+2n}T_1(n-2,-6j-1)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-10j+3n-2}T_0(n-2,-6j)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+2j+3n-2}T_0(n-2,6j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-10j+3n-1}T_0(n-1,1-6j) \tag{3.24}$$

Consideramos a quarta parcela em (3.30) (fazendo $j \to -j$) e aplicando (14),

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-4j+2n}T_1(n-2,6j-2)=\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+4j+2n}T_1(n-2,6j+2)=$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+4j+2n}T_1(n-2,6j+1) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-2j+3n-3}T_0(n-2,6j+1)+$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+10j+3n}T_0(n-2,2+6j) \tag{3.25}$$

Consideramos a primeira parcela em (3.25). Segue de (18) :

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+4j+2n}T_1(n-2,1+6j) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+4j+2n}T_1(n-2,6j)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-2j+3n-2}T_0(n-2,6j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+10j+3n-1}T_0(n-2,1+6j) \tag{3.26}$$

Substituindo (3.26) em (3.25)

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-4j+2n}T_1(n-2,6j-2) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+4j+2n}T_1(n-2,6j)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-2j+3n-2}T_0(n-2,6j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+10j+3n-1}T_0(n-2,1+6j)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-2j+3n-3}T_0(n-2,6j+1) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+10j+3n}T_0(n-2,2+6j) \tag{3.27}$$

Consideramos a primeira parcela no lado direito de (3.27), segue de (18),

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+4j+2n}T_1(n-2,6j) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+4j+2n}T_1(n-2,6j-1)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-2j+3n-1}T_0(n-2,6j-1) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+10j+3n-2}T_0(n-2,6j) \tag{3.28}$$

Fazendo $j \to -j$ na primeira parcela do lado direito de (3.28) e substituindo (3.28) em (3.27) temos:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-4j+2n}T_1(n-2,6j-2) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-4j+2n}T_1(n-2,-6j-1)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-2j+3n-1}T_0(n-2,6j-1)+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+10j+3n-2}T_0(n-2,6j)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-2j+3n-2}T_0(n-2,6j)+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+10j+3n-1}T_0(n-2,1+6j)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-2j+3n-3}T_0(n-2,6j+1)+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+10j+3n}T_0(n-2,2+6j) \quad (3.29)$$

Substituindo (3.29) em (3.24). Temos que a terceira parcela em (3.21) se cancela com a sexta parcela (fazendo $j \to -j$ e aplicando (14))do lado direito de (3.29). A primeira parcela cancela-se (do lado esquerda de (3.29)) com a quinta em (3.24). A sexta parcela em (3.21) cancela-se com a terceira em (3.29) (fazendo $j \to -j$). A quarta parcela em (3.29) cancela-se com a sétima (fazendo $j \to -j$ e aplicando (14)). A oitava parcela em (3.24) cancela-se com a quinta em (3.29), quando fazemos a substituição $j \to -j$. Reescrevendo,

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+2j+3n-1}T_0(n-1,6j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+10j+3n}T_0(n-1,1+6j)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-2j+3n-1}T_0(n-2,6j-1)+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+10j+3n}T_0(n-2,2+6j) \quad (3.30)$$

Consideramos as segunda e quarta parcelas em (3.30), segue de (22) (fazendo $A = 1+6j$ e $m = n-1$),

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+10j+3n}T_0(n-2,2+6j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+10j+3n}T_0(n-1,1+6j)=$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+10j+5n-3}T_0(n-2,1+6j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+4j+4n-2}T_1(n-2,6j) \quad (3.31)$$

Agora considerando as primeira e terceira parcelas em (3.30) (faça $j \to -j$ e aplicando (14)), segue de (22) (fazendo $A = 6j$ e $m = n-1$),

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+2j+3n-1}T_0(n-1,6j+1)+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+2j+3n-1}T_0(n-1,6j)=$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+2j+5n-4}T_0(n-2,6j)+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-4j+4n-2}T_1(n-2,6j-1) \tag{3.32}$$

Substituindo (3.31) e (3.32) em (3.24),

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+10j+5n-3}T_0(n-2,1+6j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+4j+4n-2}T_1(n-2,6j)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+2j+5n-4}T_0(n-2,6j)+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-4j+4n-2}T_1(n-2,6j-1) \tag{3.33}$$

Considerando as segunda e quarta (faça $j \to -j$ e aplicando (14)), segue de (18),

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+4j+4n-2}T_1(n-2,6j)+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-4j+4n-2}T_1(n-2,6j-1)=$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-2j+5n-4}T_0(n-2,6j)+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+10j+5n-3}T_0(n-1,6j+1) \tag{3.34}$$

Temos que a primeira parcela no lado direito de (3.34) (fazendo $j \to -j$ e aplicando (14)) cancela-se com terceira em (3.33). O outro cancelamento é imediato. Portanto (3.33) é igual a zero e o Teorema está demonstrado. □

Segue do Teorema 3.2.1 que

$$P_n(q)=c(n+1)=\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{12j^2+4j}CT(n+1,1+6j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{12j^2-8j+1}CT(n+1,2-6j).$$

Dessa forma,

$$\lim_{q\to 1} P_n(q)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left\{\binom{n+1}{1+6j}_2-\binom{n+1}{2-6j}_2\right\}.$$

Por outro lado, fazendo $q=1$ em (3.5) obtemos uma relação de recorrência que define os números de Jacobsthal, ou seja, $P_n(1)=j_n$,

$$\left\{\begin{array}{lll} P_0(1)= & 1 & \\ P_1(1)= & 1 & \\ P_n(1)= & P_{n-1}(1) & +2P_{n-2}(1) \end{array}\right. . \tag{3.35}$$

Portanto, obtemos uma fórmula explícita para os números de Jacobsthal em termos dos coeficientes trinomiais,

$$j_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\{ \binom{n+1}{1+6j}_2 - \binom{n+1}{2-6j}_2 \right\}.$$

Também segue do Teorema 3.2.1 uma prova alternativa para a identidade de número 22 na lista de Slater.

Corolário 3.2.1

$$\frac{(-q;q)_\infty}{(q;q)_\infty} \prod_{n=0}^{\infty} (1-q^{6n+2})(1-q^{6n+4})(1-q^{6n+6}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q;q)_n q^{n(n+1)}}{(q;q^2)_{n+1}(q;q)_n}$$

Demonstração: Segue do Teorema 3.2.1,

$$P_n(q) = c(n+1) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{12j^2+4j} CT(n+1, 1+6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{12j^2-8j+1} CT(n+1, 2-6j).$$

Segue de (19) que

$$\lim_{n\to\infty} P_n(q) = \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{12j^2+4j} CT(n+1, 1+6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{12j^2-8j+1} CT(n+1, 2-6j) \right\} =$$

$$\frac{(-q;q)_\infty}{(q;q)_\infty} \left\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{12j^2+4j} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{12j^2-8j+1} \right\} =$$

$$\frac{(-q;q)_\infty}{(q;q)_\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{3j^2+2j}.$$

Fazendo $z = -q^2$ e $q \to q^3$ em (21), temos

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{3j^2+2j} = \prod_{n=0}^{\infty} (1-q^{6n+6})(1-q^{6n+5})(1-q^{6n+1}).$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} P_n(q) = \frac{(-q;q)_\infty}{(q;q)_\infty} \prod_{n=0}^{\infty} (1-q^{6n+6})(1-q^{6n+5})(1-q^{6n+1}).$$

Segue de (3.4) que

$$\lim_{t\to 1^-}(1-t)f_{22}(q,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-q;q)_n q^{n(n+1)}}{(q;q^2)_{n+1}(q;q)_n}.$$

Portanto, segue do Lema de Abel

$$\frac{(-q;q)_\infty}{(q;q)_\infty}\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{6n+6})(1-q^{6n+5})(1-q^{6n+1})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-q;q)_n q^{n(n+1)}}{(q;q^2)_{n+1}(q;q)_n}.$$

□

3.3 A Identidade 26 de Slater

A função de duas variáveis, dada em [10], associada a identidade de número 26 na lista de Slater é:

$$f_{26}(q,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-tq;q)_n t^{2n} q^{n^2}}{(t^2q;q^2)_{n+1}(t;q)_{n+1}}. \tag{3.36}$$

Através de manipulações em (3.36), obtemos a seguinte equação funcional,

$$(1-t)(1-t^2q)f_{26}(q,t)=1+(1+tq)t^2qf_{26}(q,tq) \tag{3.37}$$

e substituindo $f_{26}(q,t)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(q)t^n$ em (3.37) temos que:

$$\begin{cases} P_0(q)= & 1 \\ P_1(q)= & 1 \\ P_2(q)= & 1+2q \\ P_n(q)= & P_{n-1}(q)\ +\ (q+q^{n-1})P_{n-2}(q)-\ (q-q^{n-1})P_{n-3}(q) \end{cases}, \tag{3.38}$$

Santos em [10], conjecturou uma fórmula explícita para a família de polinômios $P_n(q)$,

$$c(n)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}q^{12j^2}CT(n,6j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty}q^{12j^2-12j+3}CT(n,3-6j) \tag{3.39}$$

onde $c(n)=P_n(q)$; $n\geq 0$.

Teorema 3.3.1 *A fórmula $c(n)$ dada em (3.39) satisfaz a relação de recorrência e as mesmas condições iniciais dadas em (3.38).*

Demonstração: É claro que as condições iniciais são válidas. Agora temos que provar, para $n \geq 3$,

$$c(n) = c(n+1) + (q + q^{n-1})c(n-2) - (q - q^{n-1})c(n-3),$$

ou seja,

$$c(n) - c(n-1) - (q + q^{n-1})c(n-2) + (q - q^{n-1})c(n-3) = 0,$$

isto é,

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{12j^2} CT(n, 6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{12j^2-12j+3} CT(n, 3-6j)$$

$$- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{12j^2} CT(n-1, 6j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{12j^2-12j+3} CT(n-1, 3-6j)$$

$$-(q + q^{n-1}) \left\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{12j^2} CT(n-2, 6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{12j^2-12j+3} CT(n-2, 3-6j) \right\}$$

$$(q - q^{n-1}) \left\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{12j^2} CT(n-3, 6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{12j^2-12j+3} CT(n-3, 3-6j) \right\} = 0 \quad (3.40)$$

Fazendo a substituição $q \to q^2$ em (3.40),

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2} T_1(n, 6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-24j+6} T_1(n, 3-6j)$$

$$- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2} T_1(n-1, 6j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-24j+6} T_1(n-1, 3-6j)$$

$$-(q^2 + q^{2n-2}) \left\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2} T_1(n-2, 6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-24j+6} T_1(n-2, 3-6j) \right\}$$

$$(q^2 - q^{2n-2}) \left\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2} T_1(n-3, 6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-24j+6} T_1(n-3, 3-6j) \right\} = 0 \quad (3.41)$$

Aplicando (17) nas primeira e segunda somas obtemos:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2} \left\{T_1(n-1,6j) + q^{n+6j}T_0(n-1,6j+1) + q^{n-6j}T_0(n-1,6j-1)\right\}$$

$$- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-24j+6} \left\{T_1(n-1,3-6j) + q^{n+3-6j}T_0(n-1,4-6j) + q^{n-3+6j}T_0(n-1,2-6j)\right\}$$

$$- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2}T_1(n-1,6j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-24j+6}T_1(n-1,3-6j)$$

$$-(q^2+q^{2n-2})\left\{\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2}T_1(n-1,6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-24j+6}T_1(n-2,3-6j)\right\}$$

$$(q^2-q^{2n-2})\left\{\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2}T_1(n-3,6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-24j+6}T_1(n-2,3-6j)\right\}$$

Fazendo alguns cancelamentos imediatos e reescrevendo,

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+6j+n}T_0(n-1,6j+1) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-6j+n}T_0(n-1,6j-1)$$

$$- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-30j+n+9}T_0(n-1,4-6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-18j+n+3}T_0(n-1,2-6j)$$

$$-(q^2+q^{2n-2})\left\{\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2}T_1(n-2,6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-24j+6}T_1(n-2,3-6j)\right\}$$

$$(q^2-q^{2n-2})\left\{\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2}T_1(n-3,6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-24j+6}T_1(n-2,3-6j)\right\}$$

Fazendo $j \to -j$ na segunda parcela e $j \to j+1$ na terceira parcela e depois aplicando (14) em cada obtemos:

$$2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+6j+n}T_0(n-1,6j+1) - 2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+18j+n+3}T_0(n-1,2+6j)$$

$$- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+2}T_1(n-2,6j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-24j+8}T_1(n-2,3-6j)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+2n-2}T_1(n-2,6j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-24j+2n+4}T_1(n-2,3-6j)$$

$$\sum_{j=\infty}^{\infty} q^{24j^2+2}T_1(n-3,6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-24j+8}T_1(n-3,3-6j)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+2n-2}T_1(n-3,6j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-24j+2n+4}T_1(n-3,3-6j)$$

Aplicando (17) nas segunda e terceira parcela,

$$2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+6j+n}T_0(n-1,6j+1) - 2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+18j+n+3}T_0(n-1,2+6j)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+2n-2}T_1(n-2,6j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-24j+2n+4}T_1(n-2,3-6j)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+2}\left\{T_1(n-3,6j) + q^{n-2+6j}T_0(n-3,6j+1) + q^{n-2-6j}T_0(n-3,6j-1)\right\}$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-24j+8}\left\{T_1(n-3,3-6j) + q^{n-2+3-6j}T_0(n-3,4-6j) + q^{n-2-3+6j}T_0(n-3,2-6j)\right\}$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+2}T_1(n-3,6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-24j+8}T_1(n-2,3-6j)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+2n-2}T_1(n-3,6j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-24j+2n+4}T_1(n-3,3-6j)$$

Fazendo alguns cancelamentos imediatos e reescrevendo,

$$2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+6j+n}T_0(n-1,6j+1) - 2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+18j+n+3}T_0(n-1,2+6j)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+2n-2}T_1(n-2,6j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-24j+2n+4}T_1(n-2,3-6j)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+6j+n}T_0(n-3,6j+1) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-6j+n}T_0(n-3,6j-1)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-30j+9+n}T_0(n-3,4-6j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-18j+n+3}T_0(n-3,2-6j)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+2n-2}T_1(n-3,6j)+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-24j+2n+4}T_1(n-3,3-6j)$$

Fazendo a substituição $j \to j+1$ na sétima parcela e $j \to -j$ nas quarta, sexta, oitava e décima parcelas, depois aplique (14), reescrevendo

$$2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+6j+n}T_0(n-1,6j+1)-2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24^2+18j+n+3}T_0(n-1,2+6j)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+2n-2}T_1(n-2,6j)+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+24j+2n+4}T_1(n-2,3+6j)$$

$$-2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+6j+n}T_0(n-3,6j+1)+2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+18j+n+3}T_0(n-3,2+6j)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+2n-2}T_1(n-3,6j)+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+24j+2n+4}T_1(n-3,3+6j).$$

Aplicando (16) nas primeira e segunda parcelas,

$$2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+6j+n}\left\{T_0(n-2,6j)+q^{n-1+6j+1}T_1(n-2,6j+1)+q^{2n-2+12j+2}T_0(n-2,2+6j)\right\}$$

$$-2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+18j+n+3}\left\{T_0(n-2,1+6j)+q^{n-1+2+6j}T_1(n-2,2+6j)+q^{2n-2+4+12j}T_0(n-2,3+6j)\right\}$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+2n-2}T_1(n-2,6j)+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+24j+2n+4}T_1(n-2,3+6j)$$

$$-2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+6j+n}T_0(n-3,6j+1)+2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+18j+n+3}T_0(n-3,2+6j)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+2n-2}T_1(n-3,6j)+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-24j+2n+4}T_1(n-3,3-6j).$$

Reescrevendo,

$$2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+6j+n}T_0(n-2,6j)+2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+12j+2n}T_1(n-2,6j+1)$$

$$2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+18j+3n}T_0(n-2,2+6j) - 2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+18j+n+3}T_0(n-2,1+6j)$$

$$-2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+24j+2n+4}T_1(n-2,2+6j) - 2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+30j+3n+5}T_0(n-2,3+6j)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+2n-2}T_1(n-2,6j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+24j+2n+4}T_1(n-2,3+6j)$$

$$2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+6j+n}T_0(n-3,6j+1) + 2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+18j+n+3}T_0(n-3,2+6j)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+2n-2}T_1(n-3,6j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+24j+2n+4}T_1(n-3,3+6j) \qquad (3.42)$$

Considerando as quinta e décima doze parcelas, segue de (18) :

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+24j+2n+4}T_1(n-2,2+6j) + \sum_{j-\infty}^{\infty} q^{24j^2+24j+2n+4}T_1(n-2,3+6j) =$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+18j+3n}T_0(n-2,2+6j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+30j+3n+5}T_0(n-2,3+6j).$$

Substituindo em (3.42) e aplicando (17) na sétima parcela, obtemos:

$$2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+6j+n}T_0(n-2,6j) + 2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+12j+2n}T_1(n-2,6j+1)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+18j+3n}T_0(n-2,2+6j) - 2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+18j+n+3}T_0(n-2,1+6j)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+24j+2n+4}T_1(n-2,2+6j) - \sum_{j-\infty}^{\infty} q^{24j^2+30j+3n+5}T_0(n-2,3+6j)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+2n-2}\left\{T_1(n-3,6j) + q^{n-2+6j}T_0(n-3,6j+1) + q^{n-2-6j}T_0(n-3,6j-1)\right\}$$

$$-2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+6j+n}T_0(n-3,6j+1) + 2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+18j+n+3}T_0(n-3,2+6j)$$

$$- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+2n-2} T_1(n-3,6j) + \sum_{j-\infty}^{\infty} q^{24j^2+24j+2n+4} T_1(n-3,3+6j).$$

Reescrevendo,

$$2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+6j+n} T_0(n-2,6j) + 2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+12j+2n} T_1(n-2,6j+1)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+18j+3n} T_0(n-2,2+6j) - 2 \sum_{j-\infty}^{\infty} q^{24j^2+18j+n+3} T_0(n-2,1+6j)$$

$$- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+24j+2n+4} T_1(n-2,2+6j) - \sum_{j-\infty}^{\infty} q^{24j^2+30j+3n+5} T_0(n-2,3+6j)$$

$$- \sum_{j-\infty}^{\infty} q^{24j^2+2n-2} T_1(n-3,6j) - \sum_{j-\infty}^{\infty} q^{24j^2+6j+3n-4} T_0(n-3,6j+1)$$

$$- \sum_{j-\infty}^{\infty} q^{24j^2-6j+3n-4} T_0(n-3,6j-1) - 2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+6j+n} T_0(n-3,6j+1)$$

$$2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+18j+n+3} T_0(n-3,2+6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+2n-2} T_1(n-3,6j)$$

$$+ \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-24j+2n+4} T_1(n-3,3-6j). \qquad (3.43)$$

Usando que $T_0(n-2,6j) = T_0(n-2,-6j)$ na primeira parcela em (3.43) e depois aplicando (17) e (16) nas primeira e quinta parcelas, respectivamente:

$$2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+12j+2n} T_1(n-2,6j+1) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+18j+3n} T_0(n-2,2+6j)$$

$$-2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+18j+n+3} T_0(n-2,1+6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+30j+3n+5} T_0(n-2,3+6j)$$

$$2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+6j+n} \left\{ T_0(n-3,-6j-1) + q^{n-2-6j} T_1(n-3,-6j) + q^{2n-4-12j} T_0(n-3,-6j+1) \right\}$$

$$- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+24j+2n+4} \left\{ T_1(n-3,2+6j) + q^{n-2+2+6j} T_0(n-3,3+6j) + q^{n-2-2-6j} T_0(n-3,1+6j) \right\}$$

$$-2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+2n-2}T_1(n-3,6j) - 2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+6j+3n-4}T_0(n-3,6j+1)$$

$$-2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+6j+n}T_0(n-3,6j+1) + 2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+18j+n+3}T_0(n-3,2+6j),$$

reescrevendo,

$$2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+12j+2n}T_1(n-2,6j+1) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+18j+3n}T_0(n-2,2+6j)$$

$$-2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+18j+n+3}T_0(n-2,1+6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+30j+3n+5}T_0(n-2,3+6j)$$

$$2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+6j+n}T_0(n-3,-6j-1) + 2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+2n-2}T_1(n-3,-6j)$$

$$2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-6j+3n-4}T_0(n-3,-6j+1) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+24j+2n+4}T_1(n-3,2+6j)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+30j+3n+4}T_0(n-3,3+6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+18j+3n}T_0(n-3,1+6j)$$

$$-2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+2n-2}T_0(n-3,6j) - 2\sum_{j-\infty}^{\infty} q^{24j^2+6j+3n-4}T_0(n-3,6j+1)$$

$$-2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+6j+n}T_0(n-3,6j+1) + 2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+18j+n+3}T_0(n-3,2+6j)$$

$$+\sum_{j-\infty}^{\infty} q^{24j^2+24j+2n+4}T_1(n-3,3+6j). \tag{3.44}$$

Temos que a quinta parcela ($T_0(n-3,-6j-1) = T_0(n-3,6j+1)$) cancela-se com a décima terceira. A segunda parcela ($T_1(n-3,-6j) = T_1(n-3,6j)$) cancela-se com a sétima parcela. A terceira parcela (fazendo a substituição $j \to -j$) cancela-se com a oitava parcela. Reescrevendo,

$$2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+12j+2n}T_1(n-2,6j+1) + \sum_{j-\infty}^{\infty} q^{24j^2+18j+3n}T_0(n-2,2+6j)$$

$$-2\sum_{j-\infty}^{\infty} q^{24j^2+18j+n+3}T_0(n-2,1+6j) - \sum_{j-\infty}^{\infty} q^{24j^2+30j+3n+5}T_0(n-2,3+5j)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+24j+2n+4}T_1(n-3,2+6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+30j+3n+4}T_0(n-3,3+6j)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+18j+3n}T_0(n-3,1+6j) + 2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+18j+n+3}T_0(n-3,2+6j)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+24j+2n+4}T_1(n-3,3+6j). \tag{3.45}$$

Consideramos as quinta e nona parcelas em (3.45), segue de (18) que

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+24j+2n+4}T_1(n-3,2+6j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+24j+2n+4}T_1(n-3,3+6j) =$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+18j+3n-1}T_0(n-3,2+6j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+30j+3n+4}T_0(n-3,3+6j) \tag{3.46}$$

Substituindo (3.46) em (3.45) e fazendo alguns cancelamentos imediatos,

$$2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+12j+2n}T_1(n-2,6j+1) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+18j+3n}T_0(n-2,2+6j)$$

$$-2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+18j+n+3}T_0(n-2,1+6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+30j+3n+5}T_0(n-2,3+6j)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+18j+3n}T_0(n-3,1+6j) + 2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+18j+n+3}T_0(n-3,2+6j)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+18j+3n-1}T_0(n-3,2+6j). \tag{3.47}$$

Consideramos as terceira e sexta parcelas, segue de (22) (fazendo $m \to n-2$ e $A = 1+6j$)

$$-2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+18j+n+3}T_0(n-2,1+6j) + 2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+18j+n+3}T_0(n-3,2+6j) =$$

$$-2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+18j+3n-2}T_0(n-3,1+6j) - 2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+12j+2n}T_1(n-3,6j). \quad (3.48)$$

Substituindo (3.48) em (3.47) e fazendo $j \to j-1$ na quarta parcela (depois faça $j \to -j$) obtemos:

$$+2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+12j+2n}T_1(n-2,1+6j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+18j+3n}T_0(n-2,2+6j)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+18j+3n-1}T_0(n-2,3+6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+18j+3n}T_0(n-3,1+6j)$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+18j+3n-1}T_0(n-3,2+6j) - 2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+18j+3n-2}T_0(n-3,1+6j)$$

$$-2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+12j+2n}T_1(n-3,6j) \quad (3.49)$$

Aplicando (16) e (17) nas primeira, segunda e terceira parcelas,

$$2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+12j+2n}\left\{T_1(n-3,6j+1) + q^{n-2+6j+1}T_0(n-3,2+6j) + q^{n-2-6j-1}T_0(n-3,6j)\right\}$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+18j+3n}\left\{T_0(n-3,1+6j) + q^{n-2+2+6j}T_1(n-3,2+6j) + q^{2(n-2)+4+12j}T_0(n-3,3+6j)\right\}$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+18j+3n-1}\left\{T_0(n-3,2+6j) + q^{n-2+3+6j}T_1(n-3,3+6j) + q^{2n-4+6+12j}T_0(n-3,4+6j)\right\}$$

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+18j+3n}T_0(n-3,1+6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+18j+3n-1}T_0(n-3,2+6j)$$

$$-2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+18j+3n-2}T_0(n-3,1+6j) - 2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{12j^2+12j+2n}T_1(n-3,6j).$$

Fazendo alguns cancelamentos imediatos, obtemos:

$$2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{12j^2+12j+2n}T_1(n-3,6j+1) + 2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+6j+3n-3}T_0(n-3,6j)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+24j+4n} T_1(n-3, 2+6j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+30j+5n} T_0(n-3, 3+6j)$$
$$- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+24j+4n} T_1(n-3, 3+6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+30j+5n+1} T_0(n-3, 4+6j)$$

$$2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+18j+3n-2} T_0(n-3, 1+6j) - 2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+12j+2n} T_1(n-3, 6j). \qquad (3.50)$$

Consideramos as primeira e oitava parcelas, segue de (18),

$$2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+12j+2n} T_1(n-3, 6j+1) - 2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+12j+2n} T_1(n-3, 6j) =$$

$$-2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+6j+3n-3} T_0(n-3, 6j) + 2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+18j+3n-2} T_0(n-3, 6j+1). \qquad (3.51)$$

Substituindo (3.51) em (3.50) e fazendo alguns cancelamentos imediatos, obtemos:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+24j+4n} T_1(n-3, 2+6j) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+30j+5n} T_0(n-3, 3+6j)$$

$$- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+24j+4n} T_1(n-3, 3+6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+30j+5n+1} T_0(n-3, 4+6j). \qquad (3.52)$$

Consideramos as primeira e terceira parcelas em (3.52), segue de (18),

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+24j+4n} T_1(n-3, 2+6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+24j+4n} T_1(n-3, 3+6j)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+18j+5n-5} T_0(n-3, 2+6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+30j+5n} T_0(n-3, 3+6j). \qquad (3.53)$$

Substituindo (3.53) em (3.52) e fazendo $j \to j-1$ na quarta parcela em (3.52) obtemos que (3.52) é igual a zero. Com isso temos a prova do Teorema.

$\square$

Segue do Teorema 3.3.1 uma prova alternativa para a identidade do tipo Rogers-Ramanujan de número 26 na lista de Slater,

Corolário 3.3.1

$$\frac{(-q;q)_\infty}{(q;q)_\infty}\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{6n+3})^2(1-q^{6n+6})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-q;q)_n q^{n^2}}{(q;q^2)_{n+1}(q;q)_n}.$$

Demonstração: Segue do Teorema 3.3.1 que

$$P_n(q)=c(n)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}q^{12j^2}CT(n,6j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty}q^{12j^2-12j+3}CT(n,3-6j).$$

Segue de (19) que

$$\lim_{n\to\infty}P_n(q)=\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{j=-\infty}^{\infty}q^{12j^2}CT(n,6j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty}q^{12j^2-12j+3}CT(n,3-6j)\right\}=$$

$$\frac{(-q;q)_\infty}{(q;q)_\infty}\left\{\sum_{j=-\infty}^{\infty}q^{12j^2}-\sum_{j=-\infty}^{\infty}q^{12j^2-12j+3}\right\}=$$

$$\frac{(-q;q)_\infty}{(q;q)_\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j q^{3j^2}.$$

Fazendo $z=-1$ e $q\to q^3$ em (21), obtemos

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j q^{3j^2}=\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{6n+6})(1-q^{6n+3})^2.$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty}P_n(q)=\frac{(-q;q)_\infty}{(q;q)_\infty}\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{6n+6})(1-q^{6n+3})^2.$$

Segue de (3.4) que

$$\lim_{t\to 1^-}(1-t)f_{26}(q,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-q;q)_n q^{n^2}}{(q;q^2)_{n+1}(q;q)_n}.$$

Portanto, segue do Lema de Abel

$$\frac{(-q;q)_\infty}{(q;q)_\infty}\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{6n+6})(1-q^{6n+3})^2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-q;q)_n q^{n^2}}{(q;q^2)_{n+1}(q;q)_n}.$$

$\square$

Uma outra conseqüência do Teorema 3.3.1 é uma fórmula explícita em termos dos coeficientes trinomiais para os números de Jacobsthal, pois

$$\lim_{q\to 1} P_n(q) = \lim_{q\to 1}\left\{\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{12j^2} CT(n,6j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{12j^2-12j+3} CT(n,3-6j)\right\} =$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left\{\left(\begin{array}{c} n \\ 6j \end{array}\right)_2 - \left(\begin{array}{c} n \\ 3-6j \end{array}\right)_2\right\}.$$

Por outro lado, a família de polinômios $(P_n(q))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma extensão para os números de Jacobsthal, pois fazendo $q=1$ em (3.38) obtemos uma relação de recorrência que descreve os números de Jacobsthal,

$$\left\{\begin{array}{lll} P_0(1) = & 1 & \\ P_1(1) = & 1 & \\ P_n(1) = & P_{n-1}(1) & +2P_{n-2}(1) \end{array}\right. . \tag{3.54}$$

Ou seja, $P_n(1) = j_n$. Portanto,

$$j_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\left\{\left(\begin{array}{c} n \\ 6j \end{array}\right)_2 - \left(\begin{array}{c} n \\ 3-6j \end{array}\right)_2\right\} \tag{3.55}$$

Observamos que a extensão polinomial para os números de Jacobsthal, gerada pela família de polinômios associada à identidade de número 22 na lista de Slater, nos fornece uma fórmula explícita para os números deste tipo,

$$j_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\left\{\left(\begin{array}{c} n+1 \\ 1+6j \end{array}\right)_2 - \left(\begin{array}{c} n+1 \\ 2-6j \end{array}\right)_2\right\}. \tag{3.56}$$

Comparando (3.55) com (3.56) observamos a extensão polinomial para os números de Jacobsthal associada à identidade de número 22 gera a mesma fórmula explícita (em função do coeficiente trinomiais) que a extensão polinomial (para estes números) associada à identidade de número 26. Vejamos a seguinte observação,

segue de (10)

$$\left(\begin{array}{c} n+1 \\ 1-6j \end{array}\right)_2 - \left(\begin{array}{c} n+1 \\ 2-6j \end{array}\right)_2 =$$

$$\left(\begin{array}{c} n \\ 6j \end{array}\right)_2 + \left(\begin{array}{c} n \\ 1-6j \end{array}\right)_2 + \left(\begin{array}{c} n \\ 2-6j \end{array}\right)_2$$

$$-\left(\begin{array}{c} n \\ 1-6j \end{array}\right)_2 - \left(\begin{array}{c} n \\ 2-6j \end{array}\right)_2 - \left(\begin{array}{c} n \\ 3-6j \end{array}\right)_2 =$$

$$\left(\begin{array}{c} n \\ 6j \end{array}\right)_2 - \left(\begin{array}{c} n \\ 3-6j \end{array}\right)_2 \tag{3.57}$$

Substituindo (3.57) em (3.56) e fazendo $j \to -j$ na primeira parcela,

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\{ \left(\begin{array}{c} n+1 \\ 1-6j \end{array}\right)_2 - \left(\begin{array}{c} n+1 \\ 2-6j \end{array}\right)_2 \right\} =$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\{ \left(\begin{array}{c} n+1 \\ 1+6j \end{array}\right)_2 - \left(\begin{array}{c} n+1 \\ 2-6j \end{array}\right)_2 \right\} =$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\{ \left(\begin{array}{c} n \\ 6j \end{array}\right)_2 - \left(\begin{array}{c} n \\ 3-6j \end{array}\right)_2 \right\}.$$

3.4 Interpretações Combinatórias para os Números de Jacobsthal

Estabelecemos uma relação entre os números de Jacobsthal e partições com três cores. Primeiramente, escrevemos $f_{26}(q,t)$ de maneira conveniente,

$$f_{26}(q,t) = \sum_{N=0}^{\infty} P_N(q) t^N =$$

$$\frac{1}{1-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+tq)(1+tq^2)\dots(1+tq^n)t^{2n}q^{1+3+\dots+2n-1}}{(1-t^2q)\dots(1-t^2q^{2n+1})(1-tq)\dots(1-tq^n)}.$$

Com isso, podemos definir os seguintes conjuntos:

S_1 como o conjunto das partições, onde as partes são distintas. Seja

$$L_1 = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n; (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in S_1\},$$

os $\lambda_i \in L_1$ são chamados partes **pretas**.

S_2 como o conjunto das partições sem restrições. Seja

$$L_2 = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n; (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in S_2\},$$

os $\lambda \in L_2$ são chamados partes **verdes**.

S_3 como o conjunto das partições, onde as partes são ímpares, nas quais todo inteiro menor do que ou igual a maior parte aparece pelo menos uma vez. Seja

$$L_3 = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n; (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in S_3\},$$

os $\lambda_i \in L_3$ são chamados partes **amarelas**.

Temos que,

$$(1+tq)(1+tq^2)\ldots(1+tq^n) \tag{3.58}$$

é a função geradora para partições em partes distintas, cada parte menor do que ou igual a n. O parâmetro t conta o número de partes. Para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que (3.58) gera as partições descritas em S_1.

Consideremos

$$\frac{1}{(1-tq)(1-tq^2)\ldots(1-tq^n)} \tag{3.59}$$

e observemos que (3.59) é a função geradora para partições, cujas partes são menores do que ou iguais a n. O parâmetro t conta o número de partes. Para cada $n \in \mathbb{N}$ geramos partições, cujas partes estão em S_2.

Consideramos agora a parcela:

$$\frac{t^{2n} q^{1+3+\ldots+2n-1}}{(1-t^2q)(1-t^2q^3)\ldots(1-t^2q^{2n+1})} \tag{3.60}$$

Temos que (3.60) é a função geradora para partições com as seguintes restrições: as partes são ímpares; todo inteiro menor do que ou igual a maior parte aparece pelo menos uma vez; as partes são menores do que ou iguais a $2n+1, n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que as partes geradas dessa maneira estão em S_3. O parâmetro t, conta o número de partes, mas neste caso, esta sendo contado duas vezes (para saber o número de partes, basta olharmos para o expoente de t e depois dividirmos por 2).

Quando expandimos $f_{26}(q,t)$, os fatores dados em (3.58), (3.59) e (3.60) aparecem em cada parcela dessa soma. Então consideremos partições em partes verde, amarela e preta, nas quais as partes amarelas são ímpares, toda parte amarela menor do que ou igual a maior parte aparece pelo menos uma vez; as partes pretas são distintas, as partes verdes podem ser distintas e menores do que ou iguais a metade da maior parte amarela mais ou a metade da maior parte amarela menos um; o número de partes verdes e partes pretas mais o dobro do número de partes amarelas é no máximo N.

Fazendo $q = 1$ em (3.38) obtemos uma relação de recorrência que define os números de Jacobsthal. Usando o fato que $P_n(1) = j_n$, as observações anteriores e

$$f_{26}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(q) t^n,$$

obtemos o seguinte teorema:

Teorema 3.4.1 *O total de partições em partes verde, amarela e preta, nas quais as partes amarelas são ímpares, toda parte amarela menor do que ou igual a maior parte aparece pelo menos uma vez; as partes pretas são distintas, as partes verdes podem ser distintas e menores do que ou iguais a metade da maior parte amarela mais um ou a metade da maior parte amarela menos um; o número de partes verdes e pretas mais o dobro do número de partes amarelas é no máximo N é igual a j_N.*

Apresentamos alguns exemplos da classe de partições descritas no Teorema 3.4.1

n	Partições descritas no Teorema (3.4.1)	j_n
$n=0$	$\emptyset$	1
$n=1$	$\emptyset$	1
$n=2$	$\emptyset$, $\quad 1 \quad 1+1$,	3
$n=3$	$\emptyset$, $\quad 1 \quad 1+1$, $\quad 1+1$, $\quad 1+1$	5
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabela 3.1: *Partições descritas no Teorema* (3.4.1)

Descrevemos uma outra relação entre os números de Jacobsthal e partições em três cores. Para isso, observamos que

$$f_{22}(q,t) = \sum_{N=0}^{\infty} P_N(q)t^N =$$

$$\frac{1}{1-t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+tq)(1+tq^2)\dots(1+tq^n)t^{2n}q^{(1+\dots+n)+(1+\dots+n)}}{(1-t^2q)\dots(1-t^2q^{2n+1})(1-tq)\dots(1-tq^n)}. \tag{3.61}$$

Para estabelecermos uma relação entre os números de Jacobsthal e partições coloridas definiremos os seguintes conjuntos:

T_1 como o conjunto das partições, onde as partes são distintas. Seja

$$K_1 = \{\lambda_1,\dots,\lambda_t; (\lambda_1\dots\lambda_t)\in T_1\},$$

os $\lambda_i \in C_1$ são chamados partes **pretas**.

T_2 como o conjunto das partições, onde todo inteiro menor do que ou igual a maior parte aparece pelo menos duas vezes. Seja

$$K_2 = \{\lambda_1,\dots,\lambda_n; (\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in T_2\},$$

os $\lambda_i \in C_2$ são chamados partes **verdes**.

T_3 como o conjunto das partições, onde as partes são ímpares. Seja

$$K_3 = \{\lambda_1, \lambda_2; (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in T_3\},$$

os $\lambda_i \in C_3$ são chamados partes **amarelas**.

Temos que,

$$(1 + tq)(1 + tq^2) \ldots (1 + tq^n). \tag{3.62}$$

Observemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, a função geradora dada em (3.62) gera partições descritas em A_1, cujas as partes estão em K_1.

Consideramos

$$\frac{t^{2n} q^{(1+\ldots+n)+(1+\ldots+n)}}{(1 - tq) \ldots (1 - tq^n)} \tag{3.63}$$

temos que (3.63) é a função geradora para partições, nas quais todo inteiro menor do que ou igual a maior parte aparece pelo menos duas vezes, cujas a partes são menores do que ou iguais a n. Para cada $n \in \mathbb{N}$, a função geradora dada em (3.63) gera as partições descritas em T_2, cujas as partes estão em K_2.

Agora, observamos que

$$\frac{1}{(1 - t^2 q)(1 - t^2 q^3) \ldots (1 - t^2 q^{2n+1})}, \tag{3.64}$$

é a função geradora para partições, cujas as partes são ímpares e menores do que ou iguais a $2n + 1, \in \mathbb{N}$. O parâmetro t dado em (3.64) conta o número de partes (neste caso, o expoente de t é par e significa que estamos contando duas vezes cada parte).

Quando expandimos $f_{22}(q, t)$, os fatores dados em (3.62), (3.63) e (3.64) aparecem nas parcelas dessa soma. Então consideremos partições em partes: preta, verde e amarela, nas quais toda parte verde menor do que ou igual a maior parte aparece pelo menos duas vezes, as partes pretas são distintas e menores do que ou iguais a maior parte verde, as partes amarelas são ímpares e menores do que ou iguais a duas vezes a maior parte verde mais um e o número de partes verdes e pretas mais o dobro do número de partes amarelas é no máximo N.

Fazendo $q = 1$ em (3.5) obtemos $j_n = P_n(1)$, onde j_n é o número de Jacobsthal de posição n. Segue deste fato, das observações anteriores e

$$f_{22}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(q)t^n,$$

o seguinte teorema:

Teorema 3.4.2 *O total de partições em partes: preta, verde e amarela, nas quais toda parte verde menor do que ou igual a maior parte aparece pelo menos duas vezes, as partes pretas são distintas e menores do que ou iguais a maior parte verde, as partes amarelas são ímpares e menores do que ou iguais a duas vezes a maior parte verde mais um e o número de partes verdes e pretas mais o dobro do número de partes amarelas é no máximo* N *é igual a* j_N.

Apresentamos alguns casos da classe de partições descritas no Teorema 3.4.2

n	Partições descritas no Teorema (3.4.2)	j_n
$n = 0$	$\emptyset$	1
$n = 1$	$\emptyset$	1
$n = 2$	$\emptyset$, $\quad 1 \quad 1 + 1$	3
$n = 3$	$\emptyset$, $\quad 1 \quad 1 + 1, \quad 1 + 1 + 1, \quad 1 + 1 + 1$	5
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabela 3.2: *Partições descritas no teorema* (3.4.2)

Conclusões

Neste trabalho obtemos:

- Duas famílas infinitas de partições em termos do símbolo de Frobenius relacionadas aos números de Fibonacci;

- As identidades do tipo Rogers-Ramanunjan de números 16, 12, 71, 68, 22 e 26;

- Fórmulas explícitas para os números de Fibonacci, Pell e Jacobsthal em termos dos coeficientes trinomais;

- Interpretações combinatórias para os números de Pell e Jacobsthal em termos de partições coloridas;

- Interpretações combinatórias para os números de Pell em termos de partições com restrições;

- Relações entre os números binários e os números de Fibonacci e entre os números ternários e os números de Jacobsthal.

Referências Bibliográficas

[1] Andrews G.E., q-Series: Their development and application in analysis, number theory, combinatorics, physis an computer algebra, ´´CBMS Regional Conference Series in Math.´´ A.Math.Soc., Prov.R.I., Number 66, pp 87-93, 1986.

[2] Andrews G.E.; Baxter R.J., Lattice gas generalization of the hard hexagon model. III q-trinomio coeficientes, *J.Stat.Phys.,* 47 (1987) 297-330.

[3] Andrews G.E., "The Theory of Partitions", Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol.2, Addison-Wesley Reading, Mass. 1976.

[4] Andrews G.E. Combinatorics and Ramanujan's "lost" notebook, *London Math. Soc.* Lecture Note Series, N.o 103, Cambridge Univ. Press, London, 1985, pp 1-23.

[5] Baxter R.J.; Hard hexagons: exact solution *Journal of Physics* A, 13:L61-L70, 1980.

[6] Baxter R.J. Rogers-Ramanujan identities in the hard hexagon model. *Journal of Statistical Physics*, 26: 427-452, 1981.

[7] Baxter R.J. "Exactly solved models in Statistical Mechanics", Academic Press, London and New York, 1982.

[8] Ivković M.; Santos J.P.O. Polynomial generalizations of the Pell sequence and the Fibonacci sequence. *To appear: The Ramanujan Journal*

[9] MacMahon A.P. "Combinatory Analysis", volume 2. Cambridge University Press, London, 1918.

[10] Santos J.P.O., "Computer algebra and identities of the Rogers-Ramanujan type", Ph.D. Thesis, Pennsylvania State University, 1991.

[11] Santos J.P.O. "Introdução à Teoria dos Números", Coleção Matemática Universitária, Impa 2003.

[12] Santos J.P.O. On the combinatorics of polynomial generalizations of Rogers-Ramanujan type identities, *Discrete Mathematics*, 254 (2002) 497-511.

[13] Sills A.V., "Computer assisted explorations of Rogers-Ramanujam type identities", Ph.D. Thesis, University Park, Pennsylvania, 2002.

[14] Slater L.J., Further identities of the Rogers-Ramanujan type, *Proc. London Math. Soc.* (2) 54 (1952) 147-167.

[15] Sloane's Online Enc.of I. Sequences, http//www.research.att.com/ njas/sequences.

[16] http//www.mathworld.wolfram.com/JacobsthalNumber.html.