UNICAMP

Régis Leandro Braguim Stabile

Estimativas para n-Larguras e Números de Entropia de Conjuntos de Funções Suaves sobre o Toro $\mathbb{T}^d$

Campinas

2014

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

RÉGIS LEANDRO BRAGUIM STABILE

ESTIMATIVAS PARA n-LARGURAS E NÚMEROS DE ENTROPIA DE CONJUNTOS DE FUNÇÕES SUAVES SOBRE O TORO T^d

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Sergio Antonio Tozoni

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA PELO ALUNO RÉGIS LEANDRO BRAGUIM STABILE, E ORIENTADA PELO PROF.DR SERGIO ANTONIO TOZONI

Assinatura do Orientador

Sergio Tozoni

CAMPINAS
2014

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

St11e

Stabile, Régis Leandro Braguim, 1985-
Estimativas para n-Larguras e números de entropia de conjuntos de funções suaves sobre o toro T^d / Régis Leandro Braguim Stabile. – Campinas, SP : [s.n.], 2014.

Orientador: Sergio Antonio Tozoni.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. n-Larguras. 2. Entropia. 3. Toro (Geometria). 4. Multiplicadores (Análise matemática). 5. Teoria da aproximação. I. Tozoni, Sergio Antonio,1953-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Estimates for n-Widths and entropy numbers of sets of smooth functions on the torus T^d
Palavras-chave em inglês:
n-Widths
Entropy
Torus (Geometry)
Multipliers (Mathematical analysis)
Approximation theory
Área de concentração: Matemática
Titulação: Doutor em Matemática
Banca examinadora:
Sergio Antonio Tozoni [Orientador]
Dicesar Lass Fernandez
Ary Orozimbo Chiacchio
Valdir Antonio Menegatto
Eduardo Brandani da Silva
Data de defesa: 16-09-2014
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Tese de Doutorado defendida em 16 de setembro de 2014 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). SERGIO ANTONIO TOZONI

Prof(a). Dr(a). DICESAR LASS FERNANDEZ

Prof(a). Dr(a). ARY OROZIMBO CHIACCHIO

Prof(a). Dr(a). VALDIR ANTONIO MENEGATTO

Prof(a). Dr(a). EDUARDO BRANDANI DA SILVA

Abstract

The theories of n-widths and entropy were introduced by Kolmogorov in the 1930s. Since then, many works aims to find estimates for n-widths and entropy numbers of different classes of sets. In this work, we investigate n-widths and entropy numbers of multiplier operators defined on the d-dimensional torus. In the first part, upper and lower bounds are established for n-widths and entropy numbers of general multiplier operators. In the second part, we apply these results to specific multiplier operators, associated with sets of finitely and infinitely differentiable functions on the torus. In particular, we prove that, the estimates obtained are order sharp in various situations.

Keywords: n-widths, entropy, torus, multipliers, approximation theory.

Resumo

As teorias de n-larguras e de entropia foram introduzidas por Kolmogorov na década de 1930. Desde então, muitos trabalhos têm visado obter estimativas assintóticas para n-larguras e números de entropia de diferentes classes de conjuntos. Neste trabalho, investigamos n-larguras e números de entropia de operadores multiplicadores definidos sobre o toro d-dimensional. Na primeira parte, estabelecemos estimativas inferiores e superiores para n-larguras e números de entropia de operadores multiplicadores gerais. Na segunda parte, aplicamos estes resultados para operadores multiplicadores específicos, associados a conjuntos de funções finitamente e infinitamente diferenciáveis sobre o toro. Em particular, demonstramos que as estimativas obtidas são exatas em termos de ordem em diversas situações.

Palavras-chave: n-larguras, entropia, toro, multiplicadores, teoria da aproximação.

Sumário

A Deus e aos meus pais.

Agradecimentos

Agradeço inicialmente a Deus, por ter sido meu refúgio seguro nos momentos de angústia e incertezas e por ter me capacitado a transpor cada obstáculo que se colocou diante de mim ao longo dessa extensa caminhada. Muitos concebem a fé e a ciência como algo desconexo, eu não consigo disassociar uma da outra, sem a fé inabalável no meu Criador, sequer o primeiro passo teria sido dado. A ti meu Deus, sejam todas as glórias desta conquista, pois sem ti tudo o que foi feito ainda estaria por fazer.

Aos meus pais Antonio e Neuza, pela formação moral e ética que me proporcionaram, por terem me encorajado desde o primeiro momento na busca deste sonho, pelas tantas vezes que abdicaram dos seus sonhos em função dos meus e pelas incontáveis vezes em que seus joelhos se mantiveram dobrados em oração para que eu me mantivesse em pé. Mesmo já tendo tido aulas com grandes e renomados pesquisadores, os maiores mestres que tive na vida foram vocês, com quem pude aprender as mais valiosas lições. Foi graças a vocês, que o filho do carpinteiro virou doutor.

À minha irmã Aline, meu cunhado Cleber e às crianças donas dos sorrisos mais lindos e olhares mais doces desse mundo, os grandes amores da minha vida, Ana Laura e Ana Lívia. Tomá-las em meus braços em fortes e longos abraços era sempre a melhor forma de recuperar as energias para as lutas do dia dia.

Ao meu orientador Sérgio Antonio Tozoni por confiar no meu trabalho, pela competente e irrepreensível orientação, pela disponilidade em me atender em todas as ocasiões em que precisei e por ter se tornado mais que um referencial profissional, um grande amigo.

A todos os professores que tive ao longo da minha trajetória acadêmica, em especial à professora Roseli e ao professor Luis Antonio por terem me ajudado de todas as formas que um professor pode ajudar a um aluno, serei eternamente grato. Vocês sem dúvidas têm uma parcela expressiva de contribuição nesta conquista, muito do profissional que sou é resultado da admiração que sempre nutri por vocês.

De um modo muito especial agradeço à minha amiga e irmã Graziela Fincatti e sua mãe dona Maria, por terem oferecido muito mais que um teto àquele garoto assustado do interior, recém chegado a Campinas. Vocês me fizeram sentir parte integrante desta família que hoje considero minha também, a simplicidade e pureza de sentimentos que me envolveram naqueles primeiros meses vivendo com vocês é a lembrança mais doce de Campinas que carrego comigo.

Agradeço a todos os amigos do IMECC/UNICAMP, dos quais destaco com muito carinho a Alda pelo ser humano fantástico que é, a Manuela pela energia contagiante e de uma forma muito especial à minha amiga e irmã Elisa Regina, sua humildade, capacidade, disciplina e generosidade ímpar ao longo de todo o mestrado e doutorado foram fundamentais para que eu conseguisse prosseguir até o fim.

A meus amigos de república Bruno e João Paulo, por terem tornado a caminhada mais leve com a sempre descontraída e prazerosa companhia, nos lanches ao final dos domingos, nas longas e divertidas conversas nas madrugadas, nos almoços de domingo e nas esperas em pontos de ônibus. Por muito tempo vocês foram minha família, a melhor que eu poderia ter.

Aos meus grandes amigos de Ilha Solteira, em especial à minha amiga Gisele por ter a capacidade de se fazer sempre presente, mesmo na distância e depois de tantos anos.

À Franciele que durante muito tempo me icentivou na busca desse sonho, me fazendo acreditar que daria certo e acreditando em mim muitas vezes mais que eu mesmo.

A gratidão para mim é sem dúvidas uma das maiores virtudes que um homem pode ter e eu não poderia deixar de registrar aqui meus sinceros agradecimentos.

Agradeço à toda família IFSP-Campus Birigui por todo apoio que recebi ao longo destes quase 3 anos, em especial aos amigos Ana Paula, Andréia, Deidimar e sua esposa Lu, José Renato, Lidiane, Manuella e Zionice que acompanharam mais de perto minha busca por esse sonho, aplaudindo meus avanços e me apoiando incondicionalmente nos momentos de dificuldades.

A todos meus alunos do IFSP, que transcenderam a relação aluno-professor e se tornaram grandes amigos. Receber as palavras de apoio de vocês a cada viagem que fazia a Campinas e a cada avanço que obtinha no desenvolvimento da tese foi sempre um combustível poderoso que me impulsionava para frente. A posibilidade que tenho enquanto professor de influenciar na formação e na vida de vocês foi e seguirá sendo a razão da minha busca incansável em me aperfeiçoar cada vez mais profissional e academicamente.

À minha namorada Cláudia por todo apoio, pelos muitos conselhos e por me proporcionar momentos de paz em meio ao turbilhão de ansiedade que insistia em tomar conta de mim nas últimas semanas.

A todos os funcionários da Secretaria de Pós-Graduação do IMECC/UNICAMP.

Por fim e de maneira alguma menos importante, agradeço à Capes e ao CNPq pelo apoio financeiro, fundamental para o desenvolvimento deste trabalho.

Lista de Símbolos

$\mathbb{N}, \mathbb{N}^*$**:** Conjunto dos números inteiros não negativos e conjunto dos números inteiros positivos, respectivamente;

X_n**:** Subespaço n-dimensional de um espaço normado X;

$E(x, X_n)$**:** Ver Notação 1.1.1, pg. 8;

$E(A, X_n)$**:** Ver Definição 1.1.2, pg. 8;

$d_n(A, X)$**:** n-largura de Kolmogorov de A em X, ver Definição 1.1.3, pg. 8;

$d^n(A, X)$**:** n-largura de Gel'fand de A em X, ver Definição 1.1.4, pg. 9;

$b_n(A, X)$**:** n-largura de Bernstein de A em X, ver Definição 1.1.9, pg. 9;

$\mathcal{L}(X, Y)$**:** Classe dos operadores lineares contínuos de X em Y, ver Notação 1.1.14, pg. 11;

$K(X, Y)$**:** Classe dos operadores lineares compactos de X em Y, ver Notação 1.1.19, pg. 11;

$d_n(T)$**:** n-largura de Kolmogorov do operador T, ver Definição 1.1.16, pg. 11;

T' **:** Adjunto do operador T, ver Definição 1.1.20, pg. 11;

$N(K_1, K_2)$: Ver Definição 1.2.1, pg. 12;

$e_k(A)$: k-ésimo número de entropia do conjunto A, ver Definição 1.2.2, pg. 12;

$e_k(T)$: k-ésimo número de entropia do operador T, ver Definição 1.2.3, pg. 12;

$\ll$, $\gg$, $\asymp$: Ver introdução do Capítulo 2, pg. 15;

$\mathbb{T}^d$: Toro d-dimensional;

$\mathbb{Z}^d$: Conjunto $\underbrace{\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{d\ vezes}$;

$\mathbb{R}^d$: Conjunto $\underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{d\ vezes}$;

$\mathbf{x}, \mathbf{y}$: Elementos de $\mathbb{R}^d$;

$\mathbf{k}, \mathbf{m}$: Elementos de $\mathbb{Z}^d$;

S^1: Círculo unitário;

S^d: Esfera unitária d-dimensional;

$d\nu$: Medida de Lebesgue normalizada em $\mathbb{T}^d$;

$d\mu$: Medida de Lebesgue normalizada em $\mathbb{S}^d$;

$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$: Produto interno usual dos elementos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$;

$|\mathbf{k}|$, $|\mathbf{k}|_*$: Norma euclidiana e norma do máximo do elemento $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$, respectivamente, ver Notação 2.1.2, pg. 16;

$L^p(\mathbb{T}^d)$: Ver Definição 2.1.3, pg. 17;

$L^\infty(\mathbb{T}^d)$: Ver Definição 2.1.4, pg. 17;

$\widehat{f}(\mathbf{m})$: $\mathbf{m}$-ésimo coeficiente de Fourier da função $f \in L^1(\mathbb{T}^d)$, ver Definição 2.1.5, pg. 17;

$f * g$: Produto de convolução de duas funções $f, g \in L^1(\mathbb{T}^d)$, ver Definição 2.1.7, pg. 17;

$\langle f, g \rangle$: Produto interno usual de duas funções $f, g \in L^2(\mathbb{T}^d)$, ver Definição 2.1.13, pg. 19;

$D(d,R)(\mathbf{x}) = D_R(\mathbf{x})$, $D^*(d,R)(\mathbf{x}) = D^*_R(\mathbf{x})$: Núcleo esférico de Dirichet e Núcleo quadrado de Dirichlet no toro $\mathbb{T}^d$, respectivamente. Ver Definição 2.1.14, pg. 19;

$S_R(f)$, $S_R^*(f)$**:** Soma parcial esférica de Fourier e Soma parcial quadrada de Fourier de uma função f, respectivamente. Ver Definição 2.1.15, pgs. 19 e 20;

A_l, A_l^*, $\mathcal{H}_l$, $\mathcal{H}_l^*$, $\mathcal{T}_N$, $\mathcal{T}_N^*$**:** Ver Definição 2.2.1, pg. 20;

d_l**:** Dimensão do espaço $\mathcal{H}_l$, ver Definição 2.2.1, pg. 20;

d_l^***:** Dimensão do espaço $\mathcal{H}_l^*$, ver Definição 2.2.1, pg. 20;

$\lambda_{\mathbf{k}}$, $\lambda_{\mathbf{k}}^*$**:** Ver Definição 2.2.6, pg. 23;

Λ, Λ^***:** Operadores Multiplicadores arbitrários definidos sobre o toro $\mathbb{T}^d$, ver Definição 2.2.7, pg. 24;

U_p**:** Bola unitária fechada do espaço $L^p(\mathbb{T}^d)$;

$|||\cdot|||$**:** Norma euclidiana em $\mathbb{R}^n$;

$M(\|\cdot\|)$**:** Média de Levy de uma norma $\|\cdot\|$ definida em $\mathbb{R}^n$, ver Definição 3.1.2, pg. 26;

D_{M_1,M_2}, D_{M_1,M_2}^*, $\mathcal{T}_{M_1,M_2}$, $\mathcal{T}_{M_1,M_2}^*$**:** Ver Notação 3.1.3, pg. 26;

$\|\cdot\|_{\Lambda_n,p}$, $\|\cdot\|_{(\Lambda_n,p)}$, $\|\cdot\|_{(p)}$, $B_{\Lambda_n,p}^n$, $B_{(\Lambda_n,p)}^n$, B_p^n, $B_{(p)}^n$**:** Ver Obs. 3.1.4, pgs. 26, 27 e 28;

$\|\cdot\|_{\Lambda_n^*,p}$, $\|\cdot\|_{(\Lambda_n^*,p)}$, $\|\cdot\|_p^*$, $\|\cdot\|_{(p)}^*$, $B_{\Lambda_n^*,p}^n$, $B_{(\Lambda_n^*,p)}^n$, $B_{n,p}^*$, $B_{(n,p)}^*$**:** Ver Obs. 3.1.5, pgs. 29 e 30;

$SO(n)$**:** Grupo das rotações próprias em $\mathbb{R}^n$, pg. 31;

$d\gamma$**:** Medida Gaussiana em $\mathbb{R}^n$, pg. 31;

$r_k(\theta)$**:** Funções de Rademacher, ver Lema 3.1.13, pg. 33;

$\delta_i^m(\theta)$**:** Ver Lema 3.1.13, pg. 33;

$\|\cdot\|^0$**:** Norma dual de uma norma $\|\cdot\|$ em $\mathbb{R}^n$, ver Definição 3.2.1, pg 42;

$\theta_{N_k,N_{k+1}}$**:** Dimensão do espaço $\mathcal{T}_{N_k,N_{k+1}}$;

$\theta_{N_k,N_{k+1}}^*$**:** Dimensão do espaço $\mathcal{T}_{N_k,N_{k+1}}^*$;

N_{k+1}**:** $\min\{M \in \mathbb{N} : e|\lambda(M)| \leq |\lambda(N_k)|\}$, onde $\lambda : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, ver Observação 3.3.2, pgs. 55 e 56;

M: $\left[\frac{\ln \theta_{N_1,N_2}}{\epsilon}\right]$, $\epsilon > 0$, ver Observação 3.3.2, pg. 52;

m_k: $\left[e^{-\epsilon k}\theta_{N_1,N_2}\right] + 1,\ \epsilon > 0,\ k = 1, \ldots, M$, ver Observação 3.3.2, pg. 52;

M^*: $\left[\frac{\ln \theta^*_{N_1,N_2}}{\epsilon}\right]$, $\epsilon > 0$, ver Observação 3.3.3, pg. 53;

m^*_k: $\left[e^{-\epsilon k}\theta^*_{N_1,N_2}\right] + 1,\ \epsilon > 0,\ k = 1, \ldots, M^*$, ver Observação 3.3.3, pg. 53;

$K_{\epsilon,p},\ K^*_{\epsilon,p}$: Ver Definição 3.3.4, pg. 54;

$K^\circ,\ \|\cdot\|_{K^\circ}$: Ver Definição 3.4.1, pg. 55;

$Vol_n(A)$: Volume de um subconjunto mensurável A do $\mathbb{R}^n$, pg. 55;

$\chi_k,\ \chi^*_k$: Ver Observação 3.5.1, pg. 59;

$\Lambda^{(1)},\ \Lambda^{(2)},\ \Lambda^{(1)}_*,\ \Lambda^{(2)}_*$: Operadores Multiplicadores específicos definidos sobre o toro $\mathbb{T}^d$. Ver introdução do Capítulo 4, pg. 65 e 66;

$(a)_+$: $\begin{cases} a, & a > 0, \\ 0, & a \leq 0. \end{cases}$

ϕ_k: Dimensão do espaço $\mathcal{T}_k$, ver Teorema 4.2.3, pg. 80;

ψ_k: $\phi_k - \phi_k^{1-\frac{r}{d}} - 1,\ r \in (0,\infty),\ d \in \mathbb{N}^*$, ver Teorema 4.2.3, pg. 80;

ϕ^*_k: Dimensão do espaço $\mathcal{T}^*_k$, ver Observação 4.2.5, pgs. 93 e 94;

ψ^*_k: $\phi^*_k - (\phi^*_k)^{1-\frac{r}{d}} - 1,\ r \in (0,\infty),\ d \in \mathbb{N}^*$, ver Observação 4.2.5, pgs. 93 e 95;

$A_{N,k}$: Ver Observação 4.2.6, pg. 94;

$\mathcal{R}$: $\gamma\left(\dfrac{d\Gamma(d/2)}{2\pi^{d/2}}\right)^{r/d}$, ver Teorema 4.2.3, pg. 80;

$\mathcal{R}_*$: $\gamma 2^{-r}$, ver Observação 4.2.5, pg. 93 e 94;

$\mathcal{C}$: $\gamma^{d/(d+r)}\left(\dfrac{(d+r)d\Gamma(d/2)(\ln 2)}{2r\pi^{d/2}}\right)^{r/(d+r)}$, ver Teorema 4.2.7, pg. 95;

$\mathcal{C}_*$: $\gamma^{d/(d+r)}\left(\dfrac{(d+r)(\ln 2)}{2^d r}\right)^{r/(d+r)}$, ver Observação 4.2.9, pg. 104.

Introdução

A teoria de n-larguras foi introduzida na década de 1930 pelo matemático russo Andrei Nikolaevich Kolmogorov. Até 1960, apenas dois artigos haviam sido publicados na direção da pesquisa abordada neste trabalho, de autoria de Rudin e Stechkin. Após 1960 houve um aumento significativo de interesse na área. Destacamos a seguir alguns matemáticos importantes que trabalharam ou trabalham com n-larguras: Chui, Micchelli, Pinkus, Dyn, Tichomirov, DeVore, Triebel, Woźniakowski, Traub, Kashin, dentre outros.

O primeiro resultado sobre estimativas para as n-larguras das classes de Sobolev $W_p^\gamma(\mathbb{S}^1)$ sobre o círculo está contido no artigo de Kolmogorov [17], onde ele demonstra que $d_n(W_2^\gamma(\mathbb{S}^1), L^2) \asymp \gamma^{-r}$. Mais tarde, em 1952, Rudin demonstra em [29] o que parece ter sido o primeiro resultado assintótico para $d_n(W_p^\gamma(\mathbb{S}^1), L^q)$, com $p < q$, tendo sido este generalizado dois anos mais tarde por Stechkin em [32]. Após isto, estimativas para classes de Sobolev foram demonstradas para vários outros casos por diversos matemáticos, dos quais destacamos Gluskin, Ismagilov, Maiorov, Makovoz e Scholz, em [11], [14], [21], [22] e [30]. Em 1977, Kashin completa o quadro de estimativas para $d_n(W_p^\gamma(\mathbb{S}^1), L^q)$ com os artigos [15] e [16]. Diversas técnicas foram empregadas nestes diferentes casos, das quais podemos destacar uma técnica de discretização, devida a Maiorov e o Teorema de Borsuk.

Para estimativas de n-larguras de conjuntos de funções analíticas ou inteiras, outras técnicas precisaram ser desenvolvidas. Dentre os matemáticos que trabalharam com n-larguras de funções analíticas, destacamos Babenko, Fisher, Micchelli, Taikov e Tichomirov, que obtiveram estimativas para conjuntos de funções analíticas em espaços de Hardy em [1], [7], [34] e [35]. Dentre as diferentes ferramentas utilizadas podemos destacar as propriedades das classes de produtos de Blaschke de grau menor ou igual a m. Em 1982, Melkman em [23], demonstrou estimativas para um conjunto de funções inteiras em $C[-T, T]$, utilizando outras técnicas.

O conceito de entropia foi também introduzido por Kolmogorov por volta de 1930. Posteriormente, em 1948, esta definição mostrou-se muito útil na Teoria da Informação, desenvolvida por Shannon, onde a entropia era utilizada para medir ruídos num canal de comunicação. Ao fim da década de 1950, Kolmogorov adaptou suas ideias sobre entropia de conjuntos compactos para transformações, relacionando entropia e sistemas dinâmicos, o que culminou no que é hoje chamada de Teoria do Caos Determinístico, possibilitando dente outras coisas, os desenvolvimentos iniciais da Teoria de KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser). Os números de entropia, medem uma espécie de “grau de compacidade"de um operador e têm muitas aplicações na teoria de espaços de funções e teoria espectral ([6]), sinais e processamento de imagem ([4] e [5]), teoria de probabilidade ([4]), dentre outras.

Em grande parte, muito do desenvolvimento posterior da teoria de entropia foi proporcionado pela mudança de contexto, de espaços métricos para espaços vetoriais normados, espaços quase-Banach e de Banach, o que deu um novo impulso à teoria, tanto abstratamente, quanto no nível de aplicações. Em particular, os trabalhos de Pietsch promoveram o desenvolvimento dos números de entropia, ao passo que Triebel e outros estudaram exaustivamente os números de entropia de mergulhos entre espaços de Sobolev.

A maioria dos trabalhos recentes que envolvem números de entropia e n-larguras visam obter estimativas superiores e inferiores para tais números e uma grande quantidade de resultados com estimativas assintóticas têm sido alcançados.

Observando a evolução histórica do estudo das n-larguras e dos números de entropia, é possível notar que tem sido uma prática comum o uso, por diversos autores, de técnicas distintas nas demonstrações das limitações inferiores e superiores para n-larguras e números de entropia de diferentes classes de funções. Um dos objetivos deste trabalho, neste sentido, é dar um tratamento unificado para o estudo de n-larguras e de números de entropia de conjuntos de funções determinados por operadores multiplicadores sobre o toro, através dos Teoremas 3.2.3, 3.3.1, 3.4.5 e 3.5.3. Dentre as ferramentas utilizadas nas demonstrações destes teoremas, a principal delas é o Teorema 3.1.17, que fornece estimativas para Médias de Levy de normas definidas sobre o $\mathbb{R}^n$. Na demonstração de tal teorema, utilizamos dentre outras ferramentas, a Desigualdade de Khintchine e um resultado probabilístico de Kwapień (Lema 3.1.13). Utilizamos também outras ferramentas além das Médias de Levy, dentre as quais podemos destacar um resultado de Pajor e Tomczak-Jaegermann (Teorema 3.2.2).

É importante observar que quando trabalhamos com análise harmônica no toro é, em geral, indiferente trabalharmos com somas parcias quadradas ou somas parciais esféricas, entretando, nós mostramos neste trabalho que a técnica aqui utilizada é sensível ao tipo de soma que adotamos quando trabalhamos com n-larguras e números de entropia de conjuntos de funções infinitamente diferenciáveis, analíticas ou inteiras sobre o toro.

Iniciamos o Capítulo 1 apresentando os conceitos básicos referentes às n-larguras de Kolmogorov, Gel'fand e de Bernstein. Em seguida, fazemos um estudo sobre as principais propriedades de tais n-larguras e finalmente abordamos algumas relações existentes entre elas. Por fim, abordamos os conceitos básicos e principais propriedades referentes aos números de entropia. As demonstrações dos resultados apresentados neste capítulo são omitidas em sua totalidade por se encontrarem em [6] e [27] .

No Capítulo 2, realizamos um rápido estudo sobre Análise de Fourier no toro e introduzimos alguns conceitos que serão utilizados nos capítulos seguintes. As principais referências para este capítulo são [12], [9], [10], [13], [24] e [33].

Iniciamos o Capítulo 3 introduzindo o conceito de Médias de Levy de uma norma definida sobre $\mathbb{R}^n$. Feito isso especificamos a norma com a qual iremos trabalhar e num segundo momento demonstramos o Teorema 3.1.17, que nos fornece estimativas inferiores e superiores para Médias de Levy da referida norma. Em seguida, usamos este teorema como principal ferramenta na demonstração dos Teoremas 3.2.3, 3.3.1, 3.4.5 e 3.5.3, que nos fornecem estimativas inferiores e superiores para n-larguras e números de entropia dos operadores multiplicadores gerais do tipo Λ (Ver Definições 2.2.6, 2.2.7 e Notação 2.1.2). Ao longo do capítulo especificamos como os resultados podem ser obtidos para os operadores multiplicadores do tipo Λ_*. As referências utilizadas no capítulo são [8], [20], [26], [25], [31] e [18].

No Capítulo 4, de posse das estimativas gerais obtidas no capítulo anterior, estudamos estimativas para n-larguras de Kolmogorov e para números de entropias de conjuntos de funções suaves sobre o toro $\mathbb{T}^d$, associados à operadores multiplicadores específicos.

Se a função $\lambda : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ é definida por $\lambda(t) = t^{-\gamma}(\ln t)^{-\xi},\ t > 1$ e $\lambda(t) = 0$ para $0 \leq t \leq 1,\ \gamma, \xi \in \mathbb{R},\ \gamma > d/2,\ \xi \geq 0$, temos que $\Lambda^{(1)}U_p$ and $\Lambda_*^{(1)}U_p$ são conjuntos de funções finitamente diferenciáveis sobre $\mathbb{T}^d$, em particular, se $\xi = 0$ então $\Lambda^{(1)}U_p$ e $\Lambda_*^{(1)}U_p$ são classes de Sobolev em $\mathbb{T}^d$.

Se a função $\lambda : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ é definida por $\lambda(t) = e^{-\gamma t^r},\ \ \gamma, r > 0$, temos que $\Lambda^{(2)}U_p$ e $\Lambda_*^{(2)}U_p$ são conjuntos de funções infinitamente diferenciáveis ($0 < r < 1$), analíticas ($r = 1$) ou inteiras ($r > 1$) sobre o toro $\mathbb{T}^d$. É importante ressaltar que em diversas situações as estimativas obtidas são exatas em termos de ordem.

Observamos que no círculo $\mathbb{T}^1 = \mathbb{S}^1$, ao contrário do que ocorre com as n-larguras de Kolmogorov, os números de entropia de classes de Sobolev (ou do tipo Sobolev) W_p^γ têm essencialmente o mesmo comportamento assintótico para todos $1 \leq p, q \leq \infty$. Tal fato foi descoberto em [2], onde é demonstrado que

$$e_n(W_p^\gamma(\mathbb{S}^1), L^q(\mathbb{S}^1)) \ll d_n(W_p^\gamma(\mathbb{S}^1), L^q(\mathbb{S}^1)).$$

Neste trabalho, demonstramos que as n-larguras e números de entropia são essencialmente diferentes quando trabalhamos com os operadores do tipo $\Lambda^{(2)}$ e $\Lambda_*^{(2)}$. Demonstramos, em particular, que para os operadores $\Lambda^{(1)},\ \Lambda_*^{(1)},\ \Lambda^{(2)},\ \Lambda_*^{(2)}$, com $2 \leq p, q < \infty,\ \gamma > d/2$ e $0 < r \leq 1$,

$$d_n(\Lambda^{(1)}U_p, L^q) \asymp d_n(\Lambda_*^{(1)}U_p, L^q) \asymp e_n(\Lambda^{(1)}U_p, L^q) \asymp e_n(\Lambda_*^{(1)}U_p, L^q) \asymp n^{-\gamma/d}(\ln n)^{-\xi},$$

$$d_n(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \ll e_n(\Lambda^{(2)}U_p, L^q),$$

$$d_n(\Lambda_*^{(2)}U_p, L^q) \ll e_n(\Lambda_*^{(2)}U_p, L^q),$$

$$d_n(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \asymp e^{-\mathcal{R}k^{r/d}},$$

$$d_n(\Lambda_*^{(2)}U_p, L^q) \asymp e^{-\mathcal{R}_*k^{r/d}},$$

$$e_n(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \asymp e^{-\mathcal{C}k^{r/(d+r)}}$$

e

$$e_n(\Lambda_*^{(2)}U_p, L^q) \asymp e^{-\mathcal{C}_*k^{r/(d+r)}},$$

onde

$$\mathcal{R} = \gamma\left(\frac{d\Gamma(d/2)}{2\pi^{d/2}}\right)^{r/d}, \ \mathcal{R}_* = \gamma 2^{-r},$$

$$\mathcal{C} = \gamma^{d/(d+r)}\left(\frac{(d+r)d\Gamma(d/2)(\ln 2)}{2r\pi^{d/2}}\right)^{r/(d+r)} \ \text{e} \ \mathcal{C}_* = \gamma^{d/(d+r)}\left(\frac{(d+r)(\ln 2)}{2^d r}\right)^{r/(d+r)}.$$

Ver as definições de $d_n(A, X)$ e $e_n(A, X)$ no Capítulo 1 e o significado das notações $\ll$ e $\asymp$ na introdução do Capítulo 2.

Ao longo deste trabalho, todas as demonstrações serão feitas para os operadores multiplicadores do tipo Λ, os resultados para os operadores do tipo Λ_* serão apenas enunciados, já que podem ser obtidos de maneira análoga, com pequenas e simples alterações.

Os resultados obtidos neste trabalho para n-larguras se encontram publicados em [19].

CAPÍTULO 1

Preliminares

Nesse capítulo trataremos de resultados básicos sobre n-larguras e números de entropia. Inicialmente faremos uma exposição resumida dos principais conceitos de n-larguras, abordando os diferentes tipos existentes, suas propriedades principais, bem como as relações existentes entre elas. Num segundo momento, exporemos o conceito de números de entropia, apresentando suas principais propriedades. As demonstrações dos resultados abordados neste capítulo serão na sua totalidade omitidas por se encontrarem em [6], [27] e [28].

Denotaremos o conjunto dos inteiros não negativos $\{0, 1, 2, \ldots\}$ por $\mathbb{N}$ e o conjunto dos inteiros positivos $\{1, 2, \ldots\}$ por $\mathbb{N}^*$.

1.1 n-Larguras

Nesta seção, apresentamos os conceitos referentes às n-larguras de Kolmogorov, Gel'fand e Bernstein, exibindo algumas de suas propriedades, bem como as relações existentes entre elas.

Notação 1.1.1. Seja X um espaço linear normado com norma $\|\cdot\|_X$ e X_n um subespaço

n-dimensional de $X,\ n \in \mathbb{N}$. Para cada $x \in X$, $E(x, X_n)$ denotará a distância do subespaço n-dimensional X_n ao ponto x, isto é

$$E(x, X_n) \ = \ \inf\{\|x-y\|_X : y \in X_n\}.$$

Se existir $y^* \in X$ tal que $E(x; X_n) = \|x - y^*\|_X$, diremos que y^* é a melhor aproximação de x em X_n.

Vamos supor agora que em vez de um único elemento x, nos é dado um subconjunto A de X. Nessas condições a seguinte pergunta se faz necessária:

Quão bem um subespaço n-dimensional X_n de X pode aproximar o subconjunto A?

A resposta para essa pergunta encontra-se na definição abaixo.

Definição 1.1.2. Seja X um espaço linear normado, X_n um subespaço n-dimensional de $X,\ n \in \mathbb{N}$ e A um subconjunto qualquer de X, chamamos de Desvio de A em X_n o número

$$E(A, X_n) \ = \ \sup\{E(x, X_n) : x \in A\} \ = \ \sup_{x \in A} \ \inf_{y \in X_n} \|x - y\|_X.$$

O número $E(A, X_n)$ mede quanto o "pior elemento" de A pode ser aproximado por X_n. Para o subconjunto $A \subset X$ dado, nós indagamos o quão bem podemos aproximá-lo por um subespaço n-dimensional de X e para tal objetivo consideramos a possibilidade de permitir que os subespaços n-dimensionais X_n variem dentro de X. Vale observar que essa idéia foi apresentada por Kolmogorov em 1936.

Definição 1.1.3. Seja X um espaço linear normado, $A \subset X$ e $n \in \mathbb{N}$. A n-largura de Kolmogorov de A em X é definida por

$$\begin{aligned} d_n(A) \ = \ d_n(A, X) \ &= \ \inf\{E(A, X_n) : \ X_n \text{ é um subespaço } n\text{-dimensional de } X\} \\ &= \ \inf_{X_n} \sup_{x \in A} \inf_{y \in X_n} \|x - y\|_X. \end{aligned}$$

Alguns autores preferem a expressão "n-diâmetro" no lugar de "n-largura", nós no entanto usaremos o último termo ao longo desse trabalho.

Uma vez definida $d_n(A, X)$, dizemos que um subespaço n-dimensional $X_n \subset X$ é um subespaço ótimo para $d_n(A, X)$ se tivermos $d_n(A, X) = E(A, X_n)$. Geralmente é muito difícil, na verdade quase impossível, obtermos um subespaço ótimo para $d_n(A, X)$, para todos os subconjuntos $A \subset X$, uma vez que muito esforço é necessário na obtenção para escolhas específicas de A e X. Para isso é de extrema importância determinarmos o comportamento assintótico de $d_n(A, X)$ quando fazemos $n \uparrow \infty$, já que um subespaço ótimo X_n em geral pode não ser obtido explicitamente.

Definição 1.1.4. Seja X um espaço linear normado, $A \subset X$ e $n \in \mathbb{N}$. A n-largura de Gel'fand de A em X é definida por

$$d^n(A) \;=\; d^n(A, X) \;=\; \inf_{L^n} \sup_{x \in A \cap L^n} \|x\|,$$

onde o ínfimo é tomado sobre todos os subespaços L^n de codimensão no máximo n de X.

Um subespaço L^n de X é de codimensão n se existirem n funcionais lineares linearmente independentes $f_1, f_2, ..., f_n \in X'$ (X' denota o dual algébrico de X), tais que

$$L^n \;=\; \{x \in X : f_i(x) = 0,\ i = 1, 2, ..., n\}.$$

Se L^n é um subespaço de codimensão n de X para o qual $d^n(A; X) = \sup\{\|x\| : x \in A \cap L^n\}$, então L^n é chamado um subespaço ótimo para $d^n(A; X)$.

Definição 1.1.5. Seja A um subconjunto de um espaço vetorial X. Dizemos que A é convexo se para quaisquer $x, y \in A$, tivermos

$$\alpha x + (1 - \alpha)y \in A,$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Definição 1.1.6. Seja A um subconjunto de um espaço vetorial X. Dizemos que A é centralmente simétrico se A é simétrico com relação à origem 0, em outras palavras, se para todo $x \in A$ tivermos $-x \in A$.

Definição 1.1.7. Seja A um subconjunto de um espaço vetorial X. Dizemos que A é absorvente se para cada $x \in X$, existir $\lambda > 0$ tal que $x \in \lambda A$.

Exemplo 1.1.8. Se X é um espaço linear normado e $B = B(0, \epsilon)$ é a bola fechada de centro na origem e raio ϵ, então B é um conjunto convexo e centralmente simétrico de X.

Definição 1.1.9. Seja X um espaço linear normado, A um subconjunto fechado, convexo e centralmente simétrico de X e $n \in \mathbb{N}$. A n-largura de Bernstein de A em X é definida por

$$b_n(A) \;=\; b_n(A, X) \;=\; \sup_{X_{n+1}} \sup\{\lambda : \lambda B \cap X_{n+1} \subseteq A\},$$

onde o supremo é tomado sobre todos os subespaços $(n+1)$-dimensionais X_{n+1} de X e B denota a bola unitária fechada centrada na origem em X_{n+1}.

Observamos que ao longo das próximas seções os subconjuntos A de X de nosso interesse, para os quais estaremos calculando as respectivas n-larguras, serão considerados fechados, convexos e centralmente simétricos.

Teorema 1.1.10. *Sejam X, Y e Z espaços lineares normados, A e B subconjuntos não vazios de X, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então:*

(a) $d_n(\alpha A) = |\alpha| \, d_n(A)$;

(b) $d_n(A) = d_n(\overline{b}(A))$, *onde* $\overline{b}(A) = \{\alpha x : x \in A, |\alpha| \leq 1\}$ *é o envólucro balanceado de A;*

(c) Se $B \subset A$, então $d_n(B) \leq d_n(A)$;

(d) $d_n(A) \geq d_{n+1}(A)$;

(e) Se $X \subset Y$, X tem a norma induzida de Y e $A \subset X$, então

$$d_n(A; X) \geq d_n(A; Y);$$

(f) Se U e V são subespaços de Z, $C \subset U$, $D \subset V$ e $U \cap V = \{0\}$, então

$$d_{m+n}(C + D, U + V) \ \leq \ d_m(C, U) + d_n(D, V).$$

Teorema 1.1.11. *Seja X um espaço linear normado, A e B subconjuntos não vazios de X, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então:*

(a) $d^n(\alpha A) \ = \ |\alpha| d^n(A)$;

(b) $d^n(A) \ = \ d^n(\overline{b}(A))$, *onde* $\overline{b}(A) = \{\alpha x : x \in A, \ |\alpha| \leq 1\}$ *é o envólucro balanceado de A;*

(c) se $B \subseteq A$, então $d^n(B) \ \leq \ d^n(A)$;

(d) $d^n(A) \ \geq \ d^{n+1}(A)$.

Proposição 1.1.12. *Se Y é um espaço linear normado e X é um subespaço de Y com a norma induzida de Y e $A \subset X$, então $d^n(A, X) \ = \ d^n(A, Y)$, $n \in \mathbb{N}$.*

Proposição 1.1.13. *Seja X um espaço linear normado, A um subconjunto fechado, convexo e centralmente simétrico de X e $n \in \mathbb{N}$. Então* *(a)* $d_n(A) \geq b_n(A)$;

(b) $d^n(A) \geq b_n(A)$.

Notação 1.1.14. Denotaremos por $\mathcal{L}(X,Y)$ a classe dos operadores lineares contínuos de X em Y, onde X e Y são espaços lineares normados.

Notação 1.1.15. Ao que segue, dado um espaço linear normado X, B_X denotará a bola unitária fechada em tal espaço, em outras palavras $B_X = \{x \in X : \|x\|_X \leq 1\}$.

Definição 1.1.16. Se $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ e $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$d_n(T) = d_n(T(B_X), Y) = \inf_{Y_n} \sup_{x \in B_X} \inf_{y \in Y_n} \|T(x) - y\|_Y,$$

onde o ínfimo é tomado sobre todos os subespaços n-dimensionais Y_n de Y.

Definição 1.1.17. Se $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ e $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$d^n(T) = d^n(T(B_X), Y) = \inf_{L^n} \sup_{x \in L^n \cap B_X} \|T(x)\|_Y,$$

onde o ínfimo é tomado sobre todos os subespaços L^n de X de codimensão no máximo n.

Observação 1.1.18. Dado $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, $d_n(T)$ e $d^n(T)$ satisfazem todos os resultados precedentes.

Notação 1.1.19. $K(X,Y)$ denotará a classe dos operadores lineares compactos de X em Y, isto é, a classe dos operadores $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que o fecho do conjunto $T(B_X) = \{Tx : \|x\|_X \leq 1\}$ é compacto em Y.

Definição 1.1.20. Dado $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ existe $T' \in \mathcal{L}(Y', X')$, chamado adjunto de T e definido por

$$\langle Tx, y' \rangle = \langle x, T'y' \rangle, \quad x \in X, y' \in Y',$$

onde

$$\langle x, x' \rangle = x'(x), \quad x \in X, x' \in X'.$$

Teorema 1.1.21. *Se $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, então $d^n(T) = d_n(T')$, $n \in \mathbb{N}$.*

Teorema 1.1.22. *Se $T \in K(X,Y)$, então $d_n(T) = d^n(T')$, $n \in \mathbb{N}$.*

1.2 Números de Entropia

Nesta seção, exibiremos o conceito de números de entropia, abordando algumas de suas propriedades.

Notação 1.2.1. Sejam K_1 e K_2 subconjuntos de um espaço de Banach X. Denotaremos por $N(K_1, K_2)$ o menor inteiro positivo N, caso exista, tal que existem pontos $x_1, x_2, \ldots, x_N \in X$ satisfazendo

$$K_1 \subset \bigcup_{i=1}^{N}(x_i + K_2).$$

Definição 1.2.2. Sejam X um espaço de Banach e $A \subset X$. O k-ésimo número de entropia do conjunto A é definido por

$$e_k(A) \ = \ e_k(A, X) \ = \ \inf\{\epsilon > 0 : N(A, \epsilon B_X) \leq 2^{k-1}\},$$

onde B_X denota a bola unitária fechada do espaço X, convencionando que $\inf \emptyset = +\infty$.

Definição 1.2.3. Sejam X e Y espaços de Banach, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ e $k \in \mathbb{N}$. O k-ésimo número de entropia do operador T é definido por

$$e_k(T) \ = \ e_k(T(B_X), Y) \ = \ \inf\{\epsilon > 0 : N(T(B_X), \epsilon B_Y) \leq 2^{k-1}\}.$$

Proposição 1.2.4. *Sejam X e Y espaços de Banach, A e B subconjuntos não vazios de X, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então:*

(a) $e_n(A, X) \ \leq \ e_{n+1}(A, X)$;

(b) $e_n(\alpha A, X) \ = \ |\alpha| e_n(A, X)$;

(c) Se $B \subset A$, então $e_n(B, X) \ \leq \ e_n(A, X)$;

(d) Se $X \subset Y$ e $\|\cdot\|_X \geq \|\cdot\|_Y$, então $e_n(A, X) \ \geq \ e_n(A, Y)$.

Proposição 1.2.5. *Sejam X, Y e Z espaços de Banach, $T, S \in \mathcal{L}(X, Y)$ e $U \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Então:*

(a) $\|T\| \ = \ e_1(T) \ \geq \ e_2(T) \ \geq \ \cdots \geq 0$;

(b) $e_{k+l-1}(U \circ T) \;\leq\; e_k(U)e_l(T), \quad k, l \in \mathbb{N};$

(c) $e_{k+l-1}(T + S) \;\leq\; e_k(T) + e_l(S), \quad k, l \in \mathbb{N}.$

Proposição 1.2.6. *Sejam X, X_1, Y, Y_1 espaços de Banach tais que X é isométrico a um quociente de X_1 e Y é isométrico a um subespaço de Y_1. Denotamos por $q : X_1 \to X$ a aplicação quociente e por $j : Y \to Y_1$ a inclusão isométrica. Então para todo operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, temos*

$$e_k(T) \;=\; e_k(T \circ q) \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}e_k(T) \;\leq\; e_k(j \circ T) \;\leq\; e_k(T).$$

CAPÍTULO 2

Análise de Fourier no Toro

Reservamos este capítulo para a apresentação de algumas definições e resultados sobre análise de Fourier no toro. Os resultados deste capítulo serão aplicados nos capítulos seguintes. As demonstrações serão omitidas em sua maioria, por se encontrarem em [12]. Outras referências usadas no capítulo são [9], [10], [13], [24] e [33].

Ao longo deste trabalho usaremos várias constantes absolutas (ou universais) nas estimativas. Estas constantes positivas serão frequentemente denotadas por $C, C_1, C_2, \ldots$. Nós não nos preocuparemos em exibir cuidadosamente estas diferentes constantes e tão pouco tentaremos obter boas estimativas para elas. A mesma letra poderá ser usada para denotar constantes universais distintas em diferentes partes deste trabalho. Por facilidade de notação, se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ são sequências, escreveremos $a_n \gg b_n$ para indicar que $a_n \geq Cb_n$, $a_n \ll b_n$ se $a_n \leq Cb_n$ e $a_n \asymp b_n$ se $C_1 b_n \leq a_n \leq C_2 b_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Usaremos letras em negrito para denotar multi-índices em $\mathbb{Z}^d$ ou elementos em $\mathbb{T}^d$. Em outras palavras escreveremos $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{T}^d$ e $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$.

Continuaremos a denotar $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ e $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \ldots\}$.

2.1 Resultados sobre Análise de Fourier no Toro

Nesta seção, apresentamos algumas definições e resultados básicos sobre Análise de Fourier no toro.

Notação 2.1.1. O toro d-dimensional $\mathbb{T}^d$, $d \in \mathbb{N}^*$, é definido como sendo o produto cartesiano d vezes do grupo quociente $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, isto é,

$$\mathbb{T}^d \;=\; \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$$

Podemos identificar $\mathbb{T}^d$ com o cubo d-dimensional

$$[-\pi,\pi]^d \;=\; \{(x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : -\pi \le x_i \le \pi, \;\; i = 1, 2, \ldots, d\}.$$

Para que $[-\pi,\pi]^d$, de fato, represente o toro $\mathbb{T}^d$, devemos identificar as suas faces opostas, assim o ponto $(x_1, \ldots, x_{i-1}, -\pi, x_{i+1}, \ldots, x_d)$ é identificado com o ponto $(x_1, \ldots,\ x_{i-1},\ \pi,\ x_{i+1}, \ldots, x_d)$ para cada $i = 1, 2, \ldots d$, fixo, uma vez que ambos representam o mesmo elemento no grupo quociente.

A correspondência $(x_1, x_2, \ldots, x_d) \in [-\pi,\pi]^d \mapsto (e^{ix_1}, e^{ix_2} \ldots, e^{ix_d})$ estabelece um isomorfismo de grupos entre $[-\pi,\pi]^d$ e o produto cartesiano $S^1 \times \cdots \times S^1$, de d vezes o círculo unitário $S^1 = \{e^{it} : t \in [-\pi,\pi]\}$. Assim, podemos identificar também $\mathbb{T}^d$ com $S^1 \times \cdots \times S^1$.

Funções definidas no toro $\mathbb{T}^d$ são funções f definidas em $\mathbb{R}^d$ que satisfazem $f(\mathbf{x} + 2\pi\mathbf{m}) = f(\mathbf{x})$, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ e $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d$. Tais funções são ditas periódicas de período 2π em cada coordenada.

Consideremos o círculo unitário S^1 munido da medida de Lebesgue normalizada $\frac{1}{2\pi}dt$. Vamos sempre considerar $\mathbb{T}^d$ com a medida produto, d vezes, dessa medida sobre S^1, a qual denotaremos por $d\nu(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^d}\, dx_1 dx_2 \ldots dx_d$. A medida $d\nu(\mathbf{x})$ é a única medida de Haar normalizada sobre $\mathbb{T}^d$.

Notação 2.1.2. Dado $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$, denotaremos por

$$|\mathbf{k}| = (k_1^2 + k_2^2 + \cdots + k_d^2)^{1/2} \quad \text{e} \quad |\mathbf{k}|_* = \max_{1 \le j \le d} |k_j|$$

as normas euclidiana e do máximo do elemento $\mathbf{k}$, respectivamente.

Para cada par de pontos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$, denotaremos por

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_d y_d$$

o produto escalar usual de $\mathbf{x}$ por $\mathbf{y}$.

Definição 2.1.3. Dizemos que uma função Lebesgue mensurável $f : \mathbb{T}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ pertence ao espaço $L^p(\mathbb{T}^d)$, $0 < p < \infty$, se

$$\int_{\mathbb{T}^d} |f(\mathbf{x})|^p \, d\nu(\mathbf{x}) \ < \ \infty.$$

Se $f, g \in L^p(\mathbb{T}^d)$ e $f = g$ q.t.p, consideramos f e g como sendo o mesmo elemento em $L^p(\mathbb{T}^d)$. Além disso, se $f \in L^p(\mathbb{T}^d)$,

$$\|f\|_p \ = \ \|f\|_{L^p(\mathbb{T}^d)} \ = \ \left(\int_{\mathbb{T}^d} |f(\mathbf{x})|^p \, d\nu(\mathbf{x}) \right)^{1/p}$$

define uma norma em $L^p(\mathbb{T}^d)$ quando $1 \leq p < \infty$.

Definição 2.1.4. Dizemos que uma função Lebesgue mensurável $f : \mathbb{T}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ pertence ao espaço $L^\infty(\mathbb{T}^d)$, se existir $0 < B < \infty$ tal que a medida de Lebesgue do conjunto $\{\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d : |f(\mathbf{x})| > B\}$ é nula. Se $f, g \in L^\infty(\mathbb{T}^d)$ e $f = g$ q.t.p, consideramos f e g como sendo o mesmo elemento em $L^\infty(\mathbb{T}^d)$. Além disso, se $f \in L^\infty(\mathbb{T}^d)$,

$$\|f\|_\infty \ = \ \|f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)} \ = \ \inf\{B \geq 0 : \nu\left(\{\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d : |f(\mathbf{x})| > B\}\right) = 0\}$$

define uma norma em $L^\infty(\mathbb{T}^d)$.

Definição 2.1.5. Seja $f \in L^1(\mathbb{T}^d)$ uma função a valores complexos e $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d$. Definimos o $\mathbf{m}$-ésimo coeficiente de Fourier da função f por

$$\widehat{f}(\mathbf{m}) \ = \ \int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{m}\cdot\mathbf{x}} \, d\nu(\mathbf{x}).$$

Note que a expressão acima está bem definida pois a função $\mathbf{x} \ \mapsto \ e^{-i\mathbf{m}\cdot\mathbf{x}}$ é 2π-periódica em cada coordenada e limitada.

Definição 2.1.6. Dada $f \in L^1(\mathbb{T}^d)$, definimos a série de Fourier da função f por

$$\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^d} \widehat{f}(\mathbf{m}) e^{i\mathbf{m}\cdot\mathbf{x}}. \tag{2.1}$$

Para aplicações posteriores usaremos apenas a convergência da série (2.1) em $L^2(\mathbb{T}^d)$, que será abordada nessa seção. Antes de entrarmos na questão da convergência, abordaremos algumas propriedades elementares dos coeficientes de Fourier.

Definição 2.1.7. Sejam $f : \mathbb{T}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{T}^d$. Denotaremos por $\overline{f}$, $\widetilde{f}$ e $\tau^{\mathbf{y}} f$ as funções de $\mathbb{T}^d$ em $\mathbb{C}$ definidas por $\overline{f}(\mathbf{x}) = \overline{f(\mathbf{x})}$, $\widetilde{f}(\mathbf{x}) = f(-\mathbf{x})$ e por $\tau^{\mathbf{y}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} - \mathbf{y})$. O produto de convolução de duas funções f e g de $L^1(\mathbb{T}^d)$, denotado por $f * g$, é definido por

$$f * g(\mathbf{x}) \ = \ \int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) \, d\nu(\mathbf{y}).$$

Teorema 2.1.8. *(Desigualdade de Young, [33], p. 31) Se* $1 \leq p, q \leq \infty$, $f \in L^q(\mathbb{T}^d)$ *e* $g \in L^p(\mathbb{T}^d)$, *então* $f * g \in L^s(\mathbb{T}^d)$, *onde* $1/s = 1/p + 1/q - 1$. *Além disso, temos que*

$$\|f * g\|_{L^s(\mathbb{T}^d)} \ \leq \ \|f\|_{L^q(\mathbb{T}^d)} \, \|g\|_{L^p(\mathbb{T}^d)}.$$

Listamos abaixo as propriedades fundamentais dos coeficientes de Fourier.

Proposição 2.1.9. *Se* $f, g \in L^1(\mathbb{T}^d)$, *então*

(a) $\widehat{f+g}(\mathbf{m}) \ = \ \widehat{f}(\mathbf{m}) + \widehat{g}(\mathbf{m})$, $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d$;

(b) $\widehat{\lambda f}(\mathbf{m}) \ = \ \lambda \widehat{f}(\mathbf{m})$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d$;

(c) $\widehat{\overline{f}}(\mathbf{m}) \ = \ \overline{\widehat{f}(-\mathbf{m})}$, $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d$;

(d) $\widehat{\widetilde{f}}(\mathbf{m}) \ = \ \widehat{f}(-\mathbf{m})$, $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d$;

(e) $\widehat{\tau^{\mathbf{y}}(f)}(\mathbf{m}) \ = \ \widetilde{f}(\mathbf{m}) e^{-i\mathbf{m}\cdot\mathbf{y}}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{T}^d$, $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d$;

(f) $(\widehat{e^{i\mathbf{k}(\cdot)} f})(\mathbf{m}) \ = \ \widehat{f}(\mathbf{m} - \mathbf{k})$, $\mathbf{k}$, $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d$;

(g) $\widehat{f}(\mathbf{0}) \ = \ \int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x}) d\nu(\mathbf{x})$;

(h) $\sup_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d} |\widehat{f}(\mathbf{m})| \ \leq \ \|f\|_{L^1(\mathbb{T}^d)}$;

(i) $\widehat{f * g}(\mathbf{m}) \ = \ \widehat{f}(\mathbf{m}) \widehat{g}(\mathbf{m})$, $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d$.

Proposição 2.1.10. *Se* $f, g \in L^1(\mathbb{T}^d)$ *satisfazem*

$$\widehat{f}(\mathbf{m}) = \widehat{g}(\mathbf{m}), \quad \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d,$$

então $f = g$ *em quase todo ponto.*

Definição 2.1.11. Um polinômio trigonométrico em $\mathbb{T}^d$ é uma função da forma

$$P(\mathbf{x}) \ = \ \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{m}} e^{i\mathbf{m}\cdot\mathbf{x}}, \tag{2.2}$$

onde $a_{\mathbf{m}}$, $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d$, é uma sequência finitamente suportada em $\mathbb{Z}^d$, isto é, $a_{\mathbf{m}} \neq 0$ apenas para um número finito de elementos $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d$. O grau de P é o maior valor de $|q_1| + \cdots + |q_d|$ tal que $a_{\mathbf{q}} \neq 0$, onde $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_d) \in \mathbb{Z}^d$. Denotamos por $\mathcal{P}$ o espaço formado por todos os polinômios trigonométricos.

Proposição 2.1.12. *O conjunto dos polinômios trigonométricos é denso em $L^p(\mathbb{T}^d)$, para $1 \leq p < \infty$.*

Observação 2.1.13. Consideremos o espaço de Hilbert complexo $L^2(\mathbb{T}^d)$, munido do produto interno usual

$$\langle f, g \rangle \;=\; \int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x})\overline{g(\mathbf{x})}\, d\nu(\mathbf{x}), \qquad f, g \in L^2(\mathbb{T}^d),$$

e para cada $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$, seja $\varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$.

A família $\{\varphi_{\mathbf{k}} : \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d\}$, é um sistema ortonormal completo de $L^2(\mathbb{T}^d)$, isto é:

(i) $\langle \varphi_{\mathbf{k}}, \varphi_{\mathbf{m}} \rangle = 0,$ se $\mathbf{k} \neq \mathbf{m}$;

(ii) $\|\varphi_{\mathbf{k}}\|_{L^2(\mathbb{T}^d)} = 1,\ \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$;

(iii) Se $f \in L^2(\mathbb{T}^d)$ e $\langle f, \varphi_{\mathbf{k}} \rangle = \widehat{f}(\mathbf{k}) = 0,\ \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$, então $f = 0$.

Se $f \in L^2(\mathbb{T}^d)$ então

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)} \;=\; \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{f}(\mathbf{k})|^2 \quad \text{(Identidade de Plancherel)},$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f - \sum_{|\mathbf{k}|\leq n} \widehat{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right\|_{L^2(\mathbb{T}^d)} \;=\; 0,$$

enquanto que se $f, g \in L^2(\mathbb{T}^d)$, então

$$\int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x})\overline{g(\mathbf{x})} d\nu(\mathbf{x}) \;=\; \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} \widehat{f}(\mathbf{k})\overline{\widehat{g}(\mathbf{k})} \quad \text{(Identidade de Parseval)}.$$

Definição 2.1.14. Seja R um número real não negativo. Os núcleos esférico $D(d, R)$ e quadrado $D^*(d, R)$ de Dirichlet no toro $\mathbb{T}^d$ são definidos respectivamente por

$$D_R(\mathbf{x}) \;=\; D(d,R)(\mathbf{x}) \;=\; \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d \\ |\mathbf{k}| \leq R}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad \text{e} \quad D^*_R(\mathbf{x}) \;=\; D^*(d,R)(\mathbf{x}) \;=\; \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d \\ |\mathbf{k}|_* \leq R}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}.$$

Os núcleos esférico e quadrado de Dirichlet são polinômios trigonométrico em $\mathbb{T}^d$.

Definição 2.1.15. Para $R \in \mathbb{R},\ R \geq 0$, as expressões

$$S_R(f)(\mathbf{x}) \ = \ (f * D(d,R))(\mathbf{x}) \ = \ \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d \\ |\mathbf{k}| \leq R}} \widehat{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

e

$$S_R^*(f)(\mathbf{x}) \ = \ (f * D^*(d,R))(\mathbf{x}) \ = \ \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d \\ |\mathbf{k}|_* \leq R}} \widehat{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

são chamadas uma soma parcial esférica e uma soma parcial quadrada de Fourier da função f, respectivamente.

2.2 Operadores Multiplicadores sobre o Toro

Nesta seção, definimos o conceito de operadores multiplicadores definidos sobre o toro e demonstramos alguns resultados que serão utilizados nos capítulos seguintes.

Definição 2.2.1. Para $l, N \in \mathbb{N}$, definimos

$$A_l \ = \ \{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d : |\mathbf{k}| \leq l\}, \quad A_l^* \ = \ \{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d : |\mathbf{k}|_* \leq l\},$$

$$\mathcal{H}_l \ = \ \left[e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} : \mathbf{k} \in A_l \backslash A_{l-1}\right], \quad \mathcal{H}_l^* \ = \ \left[e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} : \mathbf{k} \in A_l^* \backslash A_{l-1}^*\right],$$

$$d_l \ = \ \dim \mathcal{H}_l, \quad d_l^* \ = \ \dim \mathcal{H}_l^*,$$

$$\mathcal{T}_N \ = \ \bigoplus_{l=0}^{N} \mathcal{H}_l, \ \text{ e } \ \mathcal{T}_N^* \ = \ \bigoplus_{l=0}^{N} \mathcal{H}_l^*,$$

onde $A_{-1} = \emptyset$ e $[f_j :\ j \in \Gamma]$ denota o espaço vetorial gerado pelas funções $f_j : \mathbb{T}^d \longrightarrow \mathbb{C}$, com j pertencente ao conjunto de índices Γ.

Observação 2.2.2. Uma consequência da Proposição 2.1.12 é que o espaço vetorial $\mathcal{H} = \left[e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} : \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d\right]$, gerado pela família de funções $\{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} : \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d\}$ é denso no espaço $L^p(\mathbb{T}^d),\ 1 \leq p < \infty$.

Observação 2.2.3. (O Problema do Círculo de Gauss) O problema do círculo de Gauss é uma simples questão de contagem com respostas surpreendentemente complexas. Em poucas palavras, o problema consiste em contar os pontos de coordenadas inteiras contidos em um círculo de raio R centrado na origem em $\mathbb{R}^2$. Podemos escrever esse número como

$$N(R) = \pi R^2 + E(R),$$

onde $E(R)$ denota um termo de erro.

Gauss encontrou uma forma elementar de demonstrar que para valores grandes de R, existe uma constante $C > 0$ e um expoente $0 < \theta < 1$ tal que $E(R) < CR^\theta$. A demonstração desse fato pode ser conferida em [13].

Este problema tem mais de um século e uma grande quantidade de conteúdo matemático tem sido construído em torno dele. Em [10], J. Galante salienta que os trabalhos mais recentes nesta linha concentram-se especialmente na redução desse limite superior do erro, e a complexidade é tamanha que em mais de 80 anos, apenas uma melhoria de cerca de 0,037 foi feita no valor do expoente θ do termo de erro $E(R)$. A melhor aproximação até agora foi obtida por Huxley em 1990, que obteve para o expoente θ o valor aproximado de $0,63014$.

No caso mais geral, em $\mathbb{R}^d$, a quantidade de pontos de coordenadas inteiras contidos na bola fechada $\mathcal{B}_R$ de raio R centrada na origem é dado por

$$N_d(R) = Vol(\mathcal{B}_R) + E_d(R),$$

onde $E_d(R)$ denota o termo de erro (ver [9] e [24]), e como $Vol(\mathcal{B}_R) = \dfrac{2\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)} R^d$, segue que

$$N_d(R) = \left(\frac{2\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)}\right) R^d + E_d(R).$$

Denotando

$$\theta_d \;=\; \inf\{\alpha : E_d(R) = \mathcal{O}(R^\alpha)\},$$

é sabido que para $d \geq 3,\ \theta_d = d - 2$ (Ver [3]).

Proposição 2.2.4. *Se $d_l = \dim \mathcal{H}_l$ e $n = \dim \mathcal{T}_N$ então existem constantes positivas $C_1,\ C_2$ e C_3 satisfazendo*

$$\begin{aligned} \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} l^{d-1} - C_2 l^{d-2} \;\leq\; & \; d_l \;\leq\; \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} l^{d-1} + C_1 l^{d-2}, \\ \frac{2\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)} N^d \;\leq\; & \; n \;\leq\; \frac{2\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)} N^d + C_3 N^{d-1} \end{aligned}$$

e

$$\frac{1}{n} \;\geq\; \frac{1}{FN^d} - \frac{C_3}{F^2 N^{d+1}},$$

onde $F = \dfrac{2\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)}$. Em particular, $d_l \asymp l^{d-1}$ e $n \asymp N^d$.

Demonstração. Segue da definição de $\mathcal{H}_l$ que

$$\begin{aligned} d_l &= \#A_l - \#A_{l-1} \;=\; N_d(l) - N_d(l-1) \\ &= \left(\frac{2\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)} l^d + E_d(l)\right) - \left(\frac{2\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)}(l-1)^d + E_d(l-1)\right) \\ &= \frac{2\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)}\left(l^d - (l-1)^d\right) + \left(E_d(l) - E_d(l-1)\right). \end{aligned}$$

Temos

$$l^d - (l-1)^d \;=\; dl^{d-1} - \frac{d(d-1)}{2} l^{d-2} + \frac{d(d-1)(d-2)}{3} l^{d-3} - \cdots \pm 1,$$

donde

$$dl^{d-1} - \frac{d(d-1)}{2} l^{d-2} \;\leq\; l^d - (l-1)^d \;\leq\; dl^{d-1}$$

e portanto

$$\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} l^{d-1} - \frac{2\pi^{d/2}(d-1)}{2\Gamma(d/2)} l^{d-2} + E_d(l) - E_d(l-1) \;\leq\; d_l \;\leq\; \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} l^{d-1} + E_d(l) - E_d(l-1).$$

Da Observação anterior temos $\mathcal{O}(E_d(l)) = l^{d-2}$, assim

$$|E_d(l) - E_d(l-1)| \;\leq\; |E_d(l)| + |E_d(l-1)| \;\leq\; M_1 l^{d-2} + M_2 (l-1)^{d-2} \;\leq\; C_1 l^{d-2}$$

e logo

$$\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} l^{d-1} - C_2 l^{d-2} \;\leq\; d_l \;\leq\; \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} l^{d-1} + C_1 l^{d-2}, \tag{2.3}$$

onde $C_2 = \left(C_1 + \dfrac{2\pi^{d/2}(d-1)}{2\Gamma(d/2)}\right)$. Por outro lado

$$n \;=\; \#A_N \;=\; N_d(N) \;=\; \left(\frac{2\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)}\right) N^d + E_d(N),$$

e como $E_d(N) \;\leq\; C_3 N^{d-2} \;\leq\; C_3 N^{d-1}$, já que $\mathcal{O}(E_d(N)) = N^{d-2}$, obtemos

$$\left(\frac{2\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)}\right) N^d \;\leq\; n \;\leq\; \left(\frac{2\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)}\right) N^d + C_3 N^{d-1}. \tag{2.4}$$

Agora, como $n \leq FN^d + C_3 N^{d-1}$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} &\geq \frac{1}{FN^d + C_3 N^{d-1}} \;=\; \frac{1}{FN^d}\left(\frac{1}{1 - (-C_3/FN)}\right) \;=\; \frac{1}{FN^d}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{-C_3}{FN}\right)^j \\ &= \frac{1}{FN^d}\left(1 - \frac{C_3}{FN} + \frac{C^2}{F^2N^2} - \cdots\right) \;\geq\; \frac{1}{FN^d}\left(1 - \frac{C_3}{FN}\right) \\ &= \frac{1}{FN^d} - \frac{C_3}{F^2 N^{d+1}}. \end{aligned}$$

De (2.3) temos que

$$d_l \;\leq\; \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} l^{d-1} + C_1 l^{d-2} \;\leq\; \left(\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} + C_1\right) l^{d-1} \;=\; C_4 l^{d-1}. \tag{2.5}$$

Seja agora C_5 uma constante absoluta satisfazendo $C_5 < \dfrac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$. Para l suficientemente grande temos $C_2 l^{d-2} \leq C_5 l^{d-1}$, assim $-C_2 l^{d-2} \geq -C_5 l^{d-1}$ e segue mais uma vez de (2.3) que

$$d_l \;\geq\; \left(\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} - C_5\right) l^{d-1} \;=\; C_6 l^{d-1}, \tag{2.6}$$

onde $C_6 = \dfrac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} - C_5 \geq 0$. De (2.5) e (2.6), obtemos $d_l \asymp l^{d-1}$. Finalmente, de (2.4) temos

$$\frac{2\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)} N^d \;\leq\; n \;\leq\; \frac{2\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)} N^d + C_3 N^{d-1} \;\leq\; \left(\frac{2\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)} + C_3\right) N^d \;=\; C_7 N^d,$$

donde $n \asymp N^d$. □

Observação 2.2.5. É fácil ver que

$$d_l^* = (2l+1)^d - (2(l-1)+1)^d \;\asymp\; l^{d-1}$$

e

$$2^d N^d \;\leq\; \dim \mathcal{T}_N^* \;\leq\; 2^d N^d + C N^{d-1}. \tag{2.7}$$

Definição 2.2.6. Seja $\lambda : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e para cada $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$ sejam

$$\lambda_{\mathbf{k}} \;=\; \lambda(|\,\mathbf{k}\,|), \quad \lambda_{\mathbf{k}}^* \;=\; \lambda(|\,\mathbf{k}\,|_*).$$

Denotaremos por Λ e Λ_* os operadores lineares definidos para $\varphi \in \mathcal{H}$ (Ver Observação 2.2.2) por

$$\Lambda\varphi \;=\; \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} \lambda_{\mathbf{k}} \widehat{\varphi}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

e

$$\Lambda_*\varphi \;=\; \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} \lambda_{\mathbf{k}}^* \widehat{\varphi}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}.$$

Denominaremos Λ (respectivamente Λ_*) como sendo a sequência de multiplicadores $\Lambda = \{\lambda_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ (respectivamente $\Lambda_* = \{\lambda_{\mathbf{k}}^*\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$).

Observamos que se $1 \leq p < \infty$, temos $\mathcal{H}$ denso em $L^p(\mathbb{T}^d)$. Sendo assim, se $\sup\{\|\Lambda\varphi\|_p : \varphi \in \mathcal{H}, \|\varphi\|_p \leq 1\} < \infty$, então o operador Λ pode ser extendido a toda função $\varphi \in L^p(\mathbb{T}^d)$ e é limitado sobre $L^p(\mathbb{T}^d)$. O mesmo vale por Λ_*.

Definição 2.2.7. Sejam $\Lambda = \{\lambda_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ e $\Lambda_* = \{\lambda^*_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ como na definição 2.2.6 e sejam $1 \leq p, q \leq \infty$. Se para toda $\varphi \in L^p(\mathbb{T}^d)$ existirem funções $f = \Lambda\varphi \in L^q(\mathbb{T}^d)$ e $f^* = \Lambda_*\varphi \in L^q(\mathbb{T}^d)$ com expansões formais em série de Fourier dadas por

$$f \ \sim \sum_{\mathbf{k}\,\in\,\mathbb{Z}^d} \lambda_{\mathbf{k}}\, \widehat{\varphi}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \tag{2.8}$$

e

$$f^* \ \sim \sum_{\mathbf{k}\,\in\,\mathbb{Z}^d} \lambda^*_{\mathbf{k}}\, \widehat{\varphi}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}},$$

respectivamente, tal que $\|\Lambda\|_{p,q} := \sup\{\|\Lambda\varphi\|_q : \varphi \in U_p\} < \infty$ e $\|\Lambda_*\|_{p,q} := \sup\{\|\Lambda_*\varphi\|_q : \varphi \in U_p\} < \infty$, dizemos que Λ e Λ_* são operadores multiplicadores limitados de L^p em L^q, com normas $\|\Lambda\|_{p,q}$ e $\|\Lambda_*\|_{p,q}$, respectivamente, onde U_p denota a bola unitária fechada do espaço $L^p(\mathbb{T}^d)$.

Neste trabalho, estudaremos os multiplicadores do tipo Λ e Λ_*. Para $\lambda(t) = t^{-\gamma}$, $\gamma > 0$, temos que ΛU_p e $\Lambda_* U_p$ são classes do tipo Sobolev em $\mathbb{T}^d$. Para $\lambda(t) = e^{-\gamma t^r}$, $\gamma, r > 0$, temos que ΛU_p e $\Lambda_* U_p$ são classes de funções infinitamente diferenciáveis ($0 < r < 1$), analíticas ($r = 1$) ou inteiras ($r > 1$) em $\mathbb{T}^d$.

CAPÍTULO 3

Estimativas para n-Larguras e Números de Entropia de Operadores Multiplicadores Gerais sobre o Toro

Neste capítulo, demonstramos estimativas inferiores e superiores para n-larguras e números de entropia de operadores multiplicadores gerais de $L^p(\mathbb{T}^d)$ em $L^q(\mathbb{T}^d)$, $1 \leq p, q \leq \infty$. No caso das n-larguras, a estimativa inferior é demonstrada para as n-larguras de Kolmogorov e Gel'fand e a superior somente para a de Kolmogorov.

Começamos o capítulo introduzindo o conceito de Média de Levy de uma norma arbitrária definida sobre $\mathbb{R}^n$ e em seguida especificamos as normas com as quais iremos trabalhar. Feito isso, demonstramos um teorema bastante importante que nos fornece estimativas para as Médias de Levy de tais normas. Tal teorema será usado como ferramenta principal na obtenção de estimativas gerais para n-larguras e números de entropia, o que será feito nas quatro últimas seções do capítulo.

A principal referência para este capítulo é [18], outras referências utilizadas são [8], [20], [26], [25] e [31]. Os resultados para n-larguras obtidos neste capítulo estão publicados em [19].

3.1 Estimativas para Médias de Levy

Nesta seção, definimos o conceito de Média de Levy de uma norma arbitrária definida sobre $\mathbb{R}^n$, em seguida especificamos as normas com as quais trabalharemos e por fim demonstramos um teorema que nos fornece estimativas inferiores e superiores para a Média de Levy de tais normas.

Notação 3.1.1. Denotaremos por $|||x|||$ a norma euclidiana $\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2}$ do elemento $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e por S^{n-1} a esfera unitária euclidiana $\{x \in \mathbb{R}^n : |||x||| = 1\}$ em $\mathbb{R}^n$.

Definição 3.1.2. A média de Levy de uma norma $\|\cdot\|$ definida em $\mathbb{R}^n$ é definida por

$$M(\|\cdot\|) = M(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) = \left(\int_{S^{n-1}} \|x\|^2 \, d\mu(x)\right)^{1/2},$$

onde μ denota a medida de Lebesgue normalizada em S^{n-1}.

Notação 3.1.3. Sejam A_l, $\mathcal{H}_l$, d_l, A_l^*, $\mathcal{H}_l^*$ e d_l^*, $l \in \mathbb{N}$, como na Definição 2.2.1. Dados $N, M_1, M_2 \in \mathbb{N}$, com $M_1 < M_2$, usaremos as seguintes notações

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{M_1,M_2} &= \bigoplus_{l=M_1+1}^{M_2} \mathcal{H}_l, \quad \mathcal{T}^*_{M_1,M_2} = \bigoplus_{l=M_1+1}^{M_2} \mathcal{H}_l^*, \\
D_N(\mathbf{x}) &= D(d,N)(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in A_N} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \\
D_N^*(\mathbf{x}) &= D^*(d,N)(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in A_N^*} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \\
D_{M_1,M_2}(\mathbf{x}) &= D_{M_2}(\mathbf{x}) - D_{M_1}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in A_{M_2} \setminus A_{M_1}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}
\end{aligned}$$

e

$$D^*_{M_1,M_2}(\mathbf{x}) = D^*_{M_2}(\mathbf{x}) - D^*_{M_1}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in A^*_{M_2} \setminus A^*_{M_1}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}.$$

Observação 3.1.4. Seja $n = \dim \mathcal{T}_{M_1,M_2}$ e $\{\xi_k\}_{k=1}^n$ uma base de $\mathcal{T}_{M_1,M_2}$, ortonormal em $L^2(\mathbb{T}^d)$ e seja também $J : \mathbb{R}^n \to \mathcal{T}_{M_1,M_2}$ o isomorfismo coordenado que a cada $\alpha =$

$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ associa a função

$$J(\alpha) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \xi_k \;\in\; \mathcal{T}_{M_1,M_2}.$$

As funções $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$, $\mathbf{k} \in A_{M_2} \setminus A_{M_1}$, formam uma base ortonormal de $\mathcal{T}_{M_1,M_2}$ quando munido do produto interno de $L^2(\mathbb{T}^d)$. Para expressar uma função real de $\mathcal{T}_{M_1,M_2}$ através desta base, necessitamos utilizar coeficientes complexos.

Desejamos identificar normas definidas sobre o espaço vetorial das funções reais de $\mathcal{T}_{M_1,M_2}$ com normas definidas em $\mathbb{R}^n$, utilizando o isomorfismo coordenado J. Para isto é necessário que as funções ξ_k da base de $\mathcal{T}_{M_1,M_2}$ sejam funções reais. Vejamos a seguir como definir tal base.

Seja B_l um subconjunto de $A_l \setminus A_{l-1}$ com exatamente $\left(\#(A_l \setminus A_{l-1})\right)/2 = d_l/2$ elementos e tal que se $\mathbf{k} \in B_l$, então $-\mathbf{k} \notin B_l$. Seja $B_l = \{\mathbf{m}_j^l : 1 \le j \le d_l/2\}$ onde os elementos são escolhidos de forma que $|\mathbf{m}_j^l| \le |\mathbf{m}_{j+1}^l|$ para $1 \le j \le d_l/2$.

Para cada $1 \le j \le d_l/2$ definimos

$$\begin{aligned} \xi_{2j-1}^l(\mathbf{x}) &= \sqrt{2}\cos(\mathbf{m}_j^l \cdot \mathbf{x}), \\ \xi_{2j}^l(\mathbf{x}) &= \sqrt{2}\, sen(\mathbf{m}_j^l \cdot \mathbf{x}). \end{aligned}$$

Temos assim que $\{\xi_j^l\}$ é uma base ordenada ortonormal de $\mathcal{H}_l$, formada somente por funções reais. Consideramos a base ortonormal

$$\Theta_{M_1}^{M_2} \;=\; \{\xi_k\}_{k=1}^{n} \;=\; \{\xi_j^l : M_1 + 1 \le l \le M_2,\ 1 \le j \le d_l\}$$

de $\mathcal{T}_{M_1,M_2}$ munida da ordem $\xi_1^{M_1+1}, \ldots, \xi_{d_{M_1+1}}^{M_1+1}, \xi_1^{M_1+2}, \ldots, \xi_{d_{M_1+2}}^{M_1+2}, \ldots, \xi_1^{M_2}, \ldots, \xi_{d_{M_2}}^{M_2}$.

Consideremos uma função $\lambda : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ satisfazendo $\lambda(t) \ne 0$, para $t \ge 0$, e seja $\Lambda = \{\lambda_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ a sequência de multiplicadores definida por $\lambda_{\mathbf{k}} = \lambda(|\mathbf{k}|)$. Para $M_1 + 1 \le l \le M_2$ e $1 \le j \le d_l/2$, definimos $\lambda_{2j-1}^l = \lambda_{2j}^l = \lambda_{\mathbf{m}_j^l} = \lambda(|\mathbf{m}_j^l|)$ e consideramos a sequência numérica

$$\Lambda_n = \{\widetilde{\lambda}_k\}_{k=1}^{n} \;=\; \{\lambda_j^l : M_1 + 1 \le l \le M_2,\ 1 \le j \le d_l\}$$

munida da ordem $\lambda_1^{M_1+1}, \ldots, \lambda_{d_{M_1+1}}^{M_1+1}, \lambda_1^{M_1+2}, \ldots, \lambda_{d_{M_1+2}}^{M_1+2}, \ldots, \lambda_1^{M_2}, \ldots, \lambda_{d_{M_2}}^{M_2}$.

Consideremos agora o operador multiplicador Λ_n definido sobre $\mathcal{T}_{M_1,M_2}$ por

$$\Lambda_n\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \xi_k\right) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \widetilde{\lambda}_k \alpha_k \xi_k.$$

Denotaremos também por Λ_n o operador multiplicador sobre $\mathbb{R}^n$, definido por

$$\Lambda_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \;=\; (\widetilde{\lambda}_1\alpha_1, \widetilde{\lambda}_2\alpha_2, \ldots, \widetilde{\lambda}_n\alpha_n).$$

Dada $\xi \in \mathcal{T}_{M_1,M_2}$ e $1 \le p \le \infty$, definimos

$$\|\xi\|_{\Lambda_n,p} \;=\; \|\Lambda_n\xi\|_p.$$

A aplicação $\mathcal{T}_{M_1,M_2} \ni \xi \longmapsto \|\xi\|_{\Lambda_n,p}$ é uma norma sobre $\mathcal{T}_{M_1,M_2}$. Para $\alpha \in \mathbb{R}^n$, definimos

$$\|\alpha\|_{(\Lambda_n,p)} \;=\; \|J(\alpha)\|_{\Lambda_n,p} \;=\; \|\Lambda_n J(\alpha)\|_p$$

e temos que a aplicação $\mathbb{R}^n \ni \alpha \longmapsto \|\alpha\|_{(\Lambda_n,p)}$ é uma norma sobre $\mathbb{R}^n$. Denotamos

$$\begin{aligned} B^n_{\Lambda_n,p} &= B^n_{\Lambda,p} \;=\; \{\xi \in \mathcal{T}_{M_1,M_2} : \|\xi\|_{\Lambda_n,p} \le 1\}, \\ B^n_{(\Lambda_n,p)} &= B^n_{(\Lambda,p)} \;=\; \{\alpha \in \mathbb{R}^n : \|\alpha\|_{(\Lambda_n,p)} \le 1\}. \end{aligned}$$

Se Λ_n é o operador identidade I, escrevemos $\|\cdot\|_{I,p} \;=\; \|\cdot\|_p$, $\|\cdot\|_{(I,p)} \;=\; \|\cdot\|_{(p)}$, $B^n_{I,p} \;=\; B^n_p$ e $B^n_{(I,p)} \;=\; B^n_{(p)}$.

Agora, seja $\varphi \in \mathcal{T}_{M_1,M_2}$, φ real. Temos que

$$\begin{aligned} \varphi &= \sum_{l=M_1+1}^{M_2} \sum_{\mathbf{k}\in A_l\setminus A_{l-1}} \widehat{\varphi}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\ &= \sum_{l=M_1+1}^{M_2} \sum_{j=1}^{d_l/2} \left(\alpha^l_{2j-1}\xi^l_{2j-1}(\mathbf{x}) + \alpha^l_{2j}\xi^l_{2j}(\mathbf{x})\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\xi_k(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha^l_{2j-1} &= \sqrt{2}\left(\widehat{\varphi}(\mathbf{m}^l_j) + \widehat{\varphi}(-\mathbf{m}^l_j)\right)/2, \\ \alpha^l_{2j} &= \sqrt{2}\left(-\widehat{\varphi}(\mathbf{m}^l_j) + \widehat{\varphi}(-\mathbf{m}^l_j)\right)/2i. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \Lambda\varphi(\mathbf{x}) &= \sum_{l=M_1+1}^{M_2} \sum_{\mathbf{k}\in A_l\setminus A_{l-1}} \lambda_{\mathbf{k}}\widehat{\varphi}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\ &= \sum_{l=M_1+1}^{M_2} \sum_{j=1}^{d_l/2} \lambda(|\mathbf{m}^l_j|)\left(\alpha^l_{2j-1}\xi^l_{2j-1}(\mathbf{x}) + \alpha^l_{2j}\xi^l_{2j}(\mathbf{x})\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \widetilde{\lambda}_k\alpha_k\xi_k(\mathbf{x}) \\ &= \Lambda_n\varphi(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Assim, como $B_p^n = U_p \cap \mathcal{T}_{M_1,M_2}$, então

$$\Lambda_n B_p^n \;=\; \Lambda B_p^n \;\subseteq\; \Lambda U_p. \tag{3.1}$$

Observação 3.1.5. De modo análogo ao que foi feito na Observação 3.1.4, tomamos $n = \dim \mathcal{T}^*_{M_1,M_2}$ e

$$B_l^* \;=\; \{(\mathbf{m}^*)_j^l : 1 \leq j \leq d_l^*/2\} \subseteq A_l^* \setminus A_{l-1}^*, \quad M_1+1 \leq l \leq M_2,$$

tal que se $\mathbf{k} \in B_l^*$ então $-\mathbf{k} \notin B_l^*$, onde os elementos são escolhidos de modo que $|(\mathbf{m}^*)_j^l|_* \leq |(\mathbf{m}^*)_{j+1}^l|_*$ para $1 \leq j \leq d_l^*/2$. Para cada $1 \leq j \leq d_l^*/2$, definimos

$$\begin{aligned} (\xi_{2j-1}^l)^*(\mathbf{x}) &= \sqrt{2}\cos\left((\mathbf{m}^*)_j^l \cdot \mathbf{x}\right), \\ (\xi_{2j}^l)^*(\mathbf{x}) &= \sqrt{2}\; sen\left((\mathbf{m}^*)_j^l \cdot \mathbf{x}\right). \end{aligned}$$

Então

$$\Theta^*_{M_1,M_2} \;=\; \{\xi_k^*\}_{k=1}^n \;=\; \{(\xi_j^l)^* : M_1+1 \leq l \leq M_2,\ 1 \leq j \leq d_l^*\}$$

é uma base ortonormal de $\mathcal{T}^*_{M_1,M_2} = \bigoplus_{l=M_1+1}^{M_2} \mathcal{H}_l^*$ munida da ordem $(\xi_1^{M_1+1})^*, \ldots, (\xi_{d_{M_1+1}}^{M_1+1})^*$, $(\xi_1^{M_1+2})^*, \ldots, (\xi_{d_{M_1+2}}^{M_1+2})^*, \ldots, (\xi_1^{M_2})^*, \ldots, (\xi_{d_{M_2}}^{M_2})^*$.

Consideremos uma função $\lambda : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ satisfazendo $\lambda(t) \neq 0$ para $t \geq 0$, e seja $\Lambda^* = \{\lambda_{\mathbf{k}}^*\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ a sequência de multiplicadores definida por $\lambda_{\mathbf{k}}^* = \lambda(|\mathbf{k}|_*)$. Para $M_1+1 \leq l \leq M_2$ e $1 \leq j \leq d_l^*/2$, definimos $\lambda^*_{2j-1,l} = \lambda^*_{2j,l} = \lambda^*_{(\mathbf{m}^*)_j^l} = \lambda(|(\mathbf{m}^*)_j^l|_*)$ e consideramos a sequência numérica

$$\Lambda_n^* = \{\widetilde{\lambda}_k^*\}_{k=1}^n \;=\; \{\lambda^*_{j,l} : M_1+1 \leq l \leq M_2,\ 1 \leq j \leq d_l^*\}$$

munida da ordem $\lambda^*_{1,M_1+1}, \ldots, \lambda^*_{d_{M_1+1},M_1+1}, \lambda^*_{1,M_1+2}, \ldots, \lambda^*_{d_{M_1+2},M_1+2}, \ldots, \lambda^*_{1,M_2}, \ldots, \lambda^*_{d_{M_2},M_2}$.

Consideremos agora o operador multiplicador Λ_n^* definido sobre $\mathcal{T}^*_{M_1,M_2}$ por

$$\Lambda_n^*\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \xi_k^*\right) \;=\; \sum_{k=1}^n \widetilde{\lambda}_k^* \alpha_k \xi_k^*.$$

Dada $\xi^* \in \mathcal{T}^*_{M_1,M_2}$ e $1 \leq p \leq \infty$, definimos

$$\|\xi^*\|_{\Lambda_n^*,p} \;=\; \|\Lambda_n^* \xi^*\|_p.$$

A aplicação $\mathcal{T}^*_{M_1,M_2} \ni \xi^* \longmapsto \|\xi^*\|_{\Lambda_n^*,p}$ é uma norma sobre $\mathcal{T}^*_{M_1,M_2}$.

Agora, se $J^* : \mathbb{R}^n \to \mathcal{T}^*_{M_1,M_2}$ é o isomorfismo coordenado que a cada $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ associa a função

$$J^*(\alpha) \ = \ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \xi_k^* \ \in \ \mathcal{T}^*_{M_1,M_2},$$

então para cada $\alpha \in \mathbb{R}^n$, definimos

$$\|\alpha\|_{(\Lambda_n^*,p)} \ = \ \|J^*(\alpha)\|_{\Lambda_n^*,p} \ = \ \|\Lambda_n^* J^*(\alpha)\|_p$$

e temos que a aplicação $\mathbb{R}^n \ni \alpha \longmapsto \|\alpha\|_{(\Lambda_n^*,p)}$ é uma norma sobre $\mathbb{R}^n$. Denotamos

$$\begin{aligned} B^n_{\Lambda_n^*,p} \ &= \ B^n_{\Lambda_*,p} \ = \ \{\xi \in \mathcal{T}_{M_1,M_2} : \|\xi\|_{\Lambda_n^*,p} \leq 1\}, \\ B^n_{(\Lambda_n^*,p)} \ &= \ B^n_{(\Lambda_*,p)} \ = \ \{\alpha \in \mathbb{R}^n : \|\alpha\|_{(\Lambda_n^*,p)} \leq 1\}. \end{aligned}$$

Se Λ_n^* é o operador identidade I^* sobre $\mathcal{T}^*_{M_1,M_2}$, escreveremos $\|\cdot\|_{I^*,p} = \|\cdot\|_p^*$, $\|\cdot\|_{(I^*,p)} = \|\cdot\|^*_{(p)}$, $B^n_{I^*,p} = B^*_{n,p}$ e $B^n_{(I^*,p)} = B^*_{(n,p)}$.

Definição 3.1.6. Seja ν uma medida sobre a σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(X)$ de X, onde X é um espaço topológico localmente compacto de Hausdorff
(a) ν é chamada regular exteriormente sobre $E \in \mathcal{B}(X)$ se

$$\nu(E) \ = \ \inf\{\nu(U) : E \subset U, \ U \ aberto\}.$$

(b) ν é chamada regular interiormente sobre $E \in \mathcal{B}(X)$ se

$$\nu(E) \ = \ \sup\{\nu(K) : K \subset E, \ K \ compacto\}.$$

(c) Se ν for finita sobre os compactos, regular exteriormente sobre todos os Borelianos e regular interiormente sobre todo aberto, dizemos que ν é uma medida de Radon.

Teorema 3.1.7. *(Teorema de Representação de Riesz, [8], p. 205). Seja X um espaço topológico compacto de Hausdorff e seja I um funcional linear positivo sobre $C(X)$, isto é, $I(f) \geq 0$ se f é uma função real contínua sobre X e $f \geq 0$. Então existe uma única medida de Radon ν sobre $\mathcal{B}(X)$ tal que*

$$I(f) = \int_X f(x) d\nu(x),$$

para toda $f \in C(X)$.

Definição 3.1.8. Um grupo topológico é um grupo G, que também é um espaço topológico e cujas operações de grupo

$$\begin{aligned} G \times G \ni (u,v) &\longmapsto uv \in G, \\ G \ni u &\longmapsto u^{-1} \in G \end{aligned}$$

são contínuas.

Definição 3.1.9. Uma medida de Haar à esquerda sobre o grupo topológico localmente compacto G, é uma medida de Radon ν sobre G tal que $\nu(uE) = \nu(E)$ para todo $u \in G$ e $E \in \mathcal{B}(G)$, onde $uE = \{ua : a \in E\}$.

Teorema 3.1.10. *([8], p. 315.) Sobre todo grupo compacto, existe uma única medida normalizada de Haar à esquerda, isto é, tal que a medida de todo o grupo é igual a 1.*

Observação 3.1.11. O conjunto $SO(n)$ das rotações próprias em $\mathbb{R}^n$, munido da operação de produto de matrizes e da topologia induzida de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, é um grupo topológico compacto. Denotemos por σ a medida de Haar normalizada sobre $SO(n)$.

Seja $f \in L^1(S^{n-1})$ e seja $\widetilde{f}$ a função definida sobre $SO(n)$ por $\widetilde{f}(u) = f(ue)$, onde $u \in SO(n)$ e $e = (0, 0, \ldots, 0, 1) \in S^{n-1}$. Então $\widetilde{f} \in L^1(SO(n))$ e

$$\int_{S^{n-1}} f(y) d\mu(y) = \int_{SO(n)} \widetilde{f}(u) d\sigma(u).$$

Em virtude desta relação entre as medidas μ e σ, podemos concluir pelo Teorema 3.1.6 que, se ν é uma medida de Radon sobre os borelianos de S^{n-1} e também é invariante por rotações de $SO(n)$, então existe $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0$ tal que $\nu(E) = \lambda\mu(E)$, para qualquer $E \in \mathcal{B}(S^{n-1})$.

Lema 3.1.12. *Seja $f \in C(S^{n-1})$ e $\widetilde{f}$ a extensão de f para $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ dada por*

$$\widetilde{f}(x) = |||\, x \,|||^2 \, f\left(\frac{x}{|||\, x \,|||}\right).$$

Então

$$\int_{S^{n-1}} f(x) \, d\mu(x) = \frac{2\pi}{n} \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f}(x) \, d\gamma(x),$$

onde $d\gamma(x) = e^{-\pi|||x|||^2}dx$ denota a medida Gaussiana em $\mathbb{R}^n$.

Demonstração. Definimos a aplicação $I : C(S^{n-1}) \to \mathbb{R}$ por

$$I(f) \; = \; \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f}(x)\, d\gamma(x) \; = \; \int_{\mathbb{R}^n} |||\, x \,|||^2 \, f\left(\frac{x}{|||\, x \,|||}\right) e^{-\pi |||x|||^2} dx.$$

Esta aplicação é claramente um funcional linear positivo sobre $C(S^{n-1})$ e segue portanto do Teorema 3.1.7 que existe uma única medida de Radon ν sobre os borelianos de S^{n-1} satisfazendo

$$\int_{\mathbb{R}^n} |||\, x \,|||^2 \, f\left(\frac{x}{|||\, x \,|||}\right) e^{-\pi |||x|||^2} dx \; = \; \int_{S^{n-1}} f \, d\nu. \tag{3.2}$$

Observemos que se $u \in SO(n)$ então

$$\begin{aligned} I(f \circ u) \; &= \; \int_{\mathbb{R}^n} |||\, x \,|||^2 \, f\left(\frac{ux}{|||\, ux \,|||}\right) e^{-\pi |||x|||^2} dx \\ &= \; \int_{\mathbb{R}^n} |||\, ux \,|||^2 \, f\left(\frac{ux}{|||\, ux \,|||}\right) e^{-\pi |||ux|||^2} dx \\ &= \; \int_{\mathbb{R}^n} |||\, x \,|||^2 \, f\left(\frac{x}{|||\, x \,|||}\right) e^{-\pi |||x|||^2} dx \; = \; I(f). \end{aligned}$$

Assim I é invariante por rotações, de onde a medida de Radon ν é invariante por rotações e é portanto uma medida de “Haar"sobre S^{n-1}. Logo, da Observação 3.1.11, existe uma constante λ_n tal que $\nu = \lambda_n \mu$, onde μ é a medida de Lebesgue normalizada em S^{n-1}. Segue assim de (3.2) que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |||\, x \,|||^2 \, f\left(\frac{x}{|||\, x \,|||}\right) e^{-\pi |||x|||^2} dx \; = \; \lambda_n \int_{S^{n-1}} f(x) \, d\mu(x). \tag{3.3}$$

Tomando $f \equiv 1 \in C(S^{n-1})$, da equação acima vem que

$$\begin{aligned} \lambda_n \; &= \; \lambda_n \int_{S^{n-1}} 1 \, d\mu \; = \; \int_{\mathbb{R}^n} |||\, x \,|||^2 \, e^{-\pi |||x|||^2} \, dx \\ &= \; \int_{\mathbb{R}^n} (x_1^2 + \cdots + x_n^2) e^{-\pi (x_1^2 + \cdots + x_n^2)} dx_1 \cdots dx_n \\ &= \; n \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 e^{-\pi (x_1^2 + \cdots + x_n^2)} dx_1 \cdots dx_n \\ &= \; n \left(\int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 e^{-\pi x_1^2} d_{x_1} \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x_2^2} dx_2 \right) \cdots \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x_n^2} dx_n \right). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Observando agora que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \; = \sqrt{\pi}$, fazemos uma mudança de variáveis na integral e obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-qy^2} dy \; = \; \sqrt{\frac{\pi}{q}}. \tag{3.5}$$

Tomando $q = \pi$, segue que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x_i^2} dx_i \ = \ 1, \quad i = 2, 3, ..., n. \tag{3.6}$$

Derivando agora a expressão (3.5) com relação à variável q obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} -y^2 e^{-qy^2} \ dy \ = \ -1/2\sqrt{\frac{\pi}{q^3}}.$$

Tomando $y = x_1$ e $q = \pi$, obtemos da expressão acima

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 e^{-\pi x_1^2} dx_1 \ = \ \frac{1}{2\pi}. \tag{3.7}$$

Segue assim de (3.4), (3.6) e (3.7) que $\lambda_n = n/2\pi$ e substituindo tal valor em (3.3), temos

$$\int_{S^{n-1}} f(x) \ d\mu(x) \ = \ \frac{2\pi}{n} \int_{\mathbb{R}^n} ||| \ x \ |||^2 \ f\left(\frac{x}{||| \ x \ |||}\right) e^{-\pi|||x|||^2} dx \ = \ \frac{2\pi}{n} \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f}(x) d\gamma(x),$$

o que conclui a demonstração. $\square$

Lema 3.1.13. *(Kwapień [20], p. 585) Sejam $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ as funções de Rademacher definidas por*

$$r_k(\theta) = sen(2^k \pi \theta), \ \ \theta \in [0, 1],$$

e para $m = 1, 2, ...; \ i = 1, 2, ..., n,$ seja

$$\delta_i^m(\theta) \ = \ m^{-1/2}(r_{(i-1)m+1}(\theta) + \cdots + r_{im}(\theta)).$$

Seja também $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua satisfazendo

$$h(x_1, ..., x_n) e^{-\sum_{k=1}^n |x_k|} \to 0,$$

uniformemente quando $\sum_{k=1}^n |x_k| \to 0$. *Nestas condições temos*

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x) \ d\gamma(x) \ = \ \lim_{m\to\infty} \int_0^1 h\left((2\pi)^{-1/2}(\delta_1^m(\theta), ..., \delta_n^m(\theta))\right) \ d\theta.$$

Lema 3.1.14. *(Desigualdade de Khintchine, [26], p. 41) Sejam $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ as funções de Rademacher e seja $1 \leq p < \infty$. Então existem constantes positivas $\beta(p)$ e $\gamma(p)$ tais que para todo $n \in \mathbb{N}^*$ e para toda escolha de escalares $\{c_s\}_{s=1}^n$, temos*

$$\beta(p)\left(\sum_{s=1}^n |c_s|^2\right)^{1/2} \ \leq \ \left(\int_0^1 |\sum_{s=1}^n r_s(\theta) c_s|^p \ d\theta\right)^{1/p} \ \leq \ \gamma(p)\left(\sum_{s=1}^n |c_s|^2\right)^{1/2},$$

onde $\beta(1) \geq 1/2$ e $\gamma(p) \ = \ 2^{1/2}\Gamma((1+p)/2)/\Gamma(1/2) \ \asymp p^{1/2}$.

Lema 3.1.15. *(Teorema de Interpolação de Riesz-Thorin, [8], p. 193) Sejam* $(X, \mathcal{M}, \sigma)$ *e* $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ *dois espaços com medidas* σ*-finitas,* $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ *e para cada* $0 \leq t \leq 1$ *sejam* p_t *e* q_t *tais que*

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}, \qquad \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}.$$

Seja T *um operador linear limitado de* $L^{p_t}(X, \mathcal{M}, \sigma)$ *em* $L^{q_t}(Y, \mathcal{N}, \nu)$ *para* $t \in \{0, 1\}$ *e tal que*

$$\|Tf\|_{q_t} \leq K_t \|f\|_{p_t}, \qquad f \in L^{p_t}(X, \mathcal{M}, \sigma), \quad t \in \{0, 1\}.$$

Então

$$\|Tf\|_{q_t} \leq K_0^{1-t} K_1^t \|f\|_{p_t}, \qquad f \in L^{p_t}(X, \mathcal{M}, \sigma), \quad t \in [0, 1].$$

Lema 3.1.16. *Se* $t_n \in \mathcal{T}_{M_1,M_2} = \bigoplus_{k=M_1+1}^{M_2} \mathcal{H}_k$ *e* $n = \dim \mathcal{T}_{M_1,M_2}$*, então*

$$\|t_n\|_\infty \leq n^{1/p} \, \|t_n\|_p, \quad 1 \leq p \leq \infty, \tag{3.8}$$

$$\|t_n\|_2 \leq n^{1/p-1/2} \, \|t_n\|_p, \quad 1 \leq p \leq 2, \tag{3.9}$$

$$\|t_n\|_q \leq n^{1/2-1/q} \, \|t_n\|_2, \quad 2 \leq q \leq \infty. \tag{3.10}$$

Demonstração. Seja D_{M_1,M_2} como na Notação 3.1.3. Então para cada $t_n \in \mathcal{T}_{M_1,M_2}$, temos

$$t_n = D_{M_1,M_2} * t_n,$$

e segue assim da Desigualdade de Young (Teorema 2.1.8) que

$$\|t_n\|_\infty = \|D_{M_1,M_2} * t_n\|_\infty \leq \|D_{M_1,M_2}\|_\infty \, \|t_n\|_1. \tag{3.11}$$

Mas, $D_{M_1,M_2} = D_{M_1,M_2} * D_{M_1,M_2}$, e assim usando mais uma vez a Desigualdade de Young, obtemos

$$\begin{aligned}
\|D_{M_1,M_2}\|_\infty &= \|D_{M_1,M_2} * D_{M_1,M_2}\|_\infty \\
&\leq \|D_{M_1,M_2}\|_2 \|D_{M_1,M_2}\|_2 \\
&= \int_{\mathbb{T}^d} D_{M_1,M_2}\, \overline{D_{M_1,M_2}}\, d\nu(\mathbf{x}) \\
&= \sum_{\mathbf{k}\in A_{M_2}\setminus A_{M_1}} \sum_{\mathbf{j}\in A_{M_2}\setminus A_{M_1}} \int_{\mathbb{T}^d} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\, e^{-i\mathbf{j}\cdot\mathbf{x}}\, d\nu(\mathbf{x}) \\
&= \sum_{\mathbf{k}\in A_{M_2}\setminus A_{M_1}} \int_{\mathbb{T}^d} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\nu(\mathbf{x}) \\
&= \#(A_{M_2}\setminus A_{M_1}) \\
&= \sum_{s=M_1+1}^{M_2} \dim \mathcal{H}_s \; = \; n.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Segue assim de (3.11) e (3.12) que

$$\|t_n\|_\infty \;\leq\; n\|t_n\|_1.$$

Desta forma, se I denota o operador Identidade, temos que

$$\|I(t_n)\|_\infty \;\leq\; n\|t_n\|_1 \qquad \text{e} \qquad \|I(t_n)\|_\infty \;\leq\; \|t_n\|_\infty.$$

Podemos então aplicar o Teorema de Interpolação de Riesz-Thorin (Lema 3.1.15) ao operador I, com

$$\begin{cases} K_0 \;=\; n, \\ K_1 \;=\; 1, \\ q_0 \;=\; q_1 \;=\; \infty, \\ p_0 \;=\; 1,\; p_1 \;=\; \infty, \end{cases}$$

ou seja, $q_t = \infty$ e $1/p_t = 1 - t$. Logo $K_0^{1-t} K_1^t = n^{1-t} 1^t = n^{1/p_t}$ e fazendo $p = p_t$, obtemos

$$\|t_n\|_\infty \;=\; \|I(t_n)\|_\infty \;\leq\; n^{1/p}\|t_n\|_p, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

o que demonstra (3.8).

Usando agora o fato que $t_n = D_{M_1,M_2} * t_n$ e que $\|D_{M_1,M_2}\|_2 \leq n^{1/2}$ (ver (3.12)), segue pela Desigualdade de Young que

$$\|t_n\|_2 \;=\; \|D_{M_1,M_2} * t_n\|_2 \;\leq\; \|D_{M_1,M_2}\|_2 \|t_n\|_1 \;\leq\; n^{1/2}\|t_n\|_1$$

e desta forma

$$\|I(t_n)\|_2 \leq n^{1/2}\|t_n\|_1 \qquad \text{e} \qquad \|I(t_n\|_2 \leq 1\|t_n\|_2.$$

Aplicamos novamente o Teorema de Interpolação de Riez-Thorin ao par de desigualdades acima com

$$\begin{cases} K_0 \; = \; n^{1/2}, \\ K_1 \; = \; 1, \\ q_0 \; = \; q_1 \; = \; 2, p_0 \; = \; 1, \; p_1 \; = \; 2, \end{cases}$$

ou seja $q_t = 2$ e $1/p_t = 1 - t/2$. Assim, teremos $K_0^{1-t}K_1^t = n^{(1-t)/2} = n^{1/p_t - 1/2}$, e fazendo $p_t = p$, obtemos

$$\|t_n\|_2 \;\leq\; n^{1/p-1/2}\, \|t_n\|_p, \quad 1 \leq p \leq 2,$$

o que demonstra (3.9).

Usando (3.8), obtemos

$$\|I(t_n)\|_\infty \leq n^{1/2}\|t_n\|_2 \qquad \text{e} \qquad \|I(t_n)\|_2 \leq 1\|t_n\|_2.$$

Assim, de forma análoga aos casos anteriores, obtemos (3.10).

□

Teorema 3.1.17. *Seja $\lambda : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $t \mapsto |\lambda(t)|$ é uma função monótona, seja $n = \dim \mathcal{T}_{M_1,M_2}$ e considere o sistema ortonormal $\{\xi_k\}_{k=1}^n$ de $\mathcal{T}_{M_1,M_2}$ e o operador multiplicador Λ_n sobre $\mathcal{T}_{M_1,M_2}$ definidos na Observação 3.1.4. Se $t \mapsto |\lambda(t)|$ é decrescente, então existe uma constante absoluta $C > 0$ tal que:*

(i) se $2 \leq p < \infty$, temos

$$n^{-1/2}\left(\sum_{l=M_1+1}^{M_2} |\lambda(l)|^2 d_l\right)^{1/2} \leq M(\|\cdot\|_{(\Lambda_n,p)}) \leq Cp^{1/2}n^{-1/2}\left(\sum_{l=M_1+1}^{M_2} |\lambda(l-1)|^2 d_l\right)^{1/2};$$

(ii) se $p = \infty$, temos

$$n^{-1/2}\left(\sum_{l=M_1+1}^{M_2} |\lambda(l)|^2 d_l\right)^{1/2} \leq M(\|\cdot\|_{(\Lambda_n,\infty)}) \leq C(\ln n)^{1/2}n^{-1/2}\left(\sum_{l=M_1+1}^{M_2} |\lambda(l-1)|^2 d_l\right)^{1/2};$$

(iii) se $1 \leq p \leq 2$, temos

$$\frac{1}{2}n^{-1/2}\left(\sum_{l=M_1+1}^{M_2} |\lambda(l)|^2 d_l\right)^{1/2} \leq M(\|\cdot\|_{(\Lambda_n,p)}) \leq n^{-1/2}\left(\sum_{l=M_1+1}^{M_2} |\lambda(l-1)|^2 d_l\right)^{1/2};$$

(iv) se $p=2$, temos

$$n^{-1/2}\left(\sum_{l=M_1+1}^{M_2}|\lambda(l)|^2 d_l\right)^{1/2} \leq M(\|\cdot\|_{(\Lambda_n,2)}) \leq n^{-1/2}\left(\sum_{l=M_1+1}^{M_2}|\lambda(l-1)|^2 d_l\right)^{1/2}.$$

Se $t\mapsto|\lambda(t)|$ é crescente, então obtemos as estimativas em (i), (ii), (iii) e (iv), permutando $\lambda(l)$ por $\lambda(l-1)$.

Demonstração. Consideremos $t\mapsto|\lambda(t)|$ decrescente. Vamos inicialmente obter as desigualdades em (iv). Para $x=(x_1,\ldots,x_n)=(x_1^{M_1+1},\ldots,x_{d_{M_1+1}}^{M_1+1},\ldots,x_1^{M_2},\ldots,x_{d_{M_2}}^{M_2})\in\mathbb{R}^n$, temos da Observação 3.1.4 que

$$\begin{aligned}
\|x\|^2_{(\Lambda_n,2)} &= \left\|\sum_{l=M_1+1}^{M_2}\sum_{j=1}^{d_l}\lambda_j^l x_j^l \xi_j^l\right\|_2^2\\
&= \sum_{l=M_1+1}^{M_2}\sum_{j=1}^{d_l}|\lambda_l^l|^2(x_j^l)^2\ \|\xi_j^l\ \|_2^2\\
&\leq \sum_{l=M_1+1}^{M_2}\left(\sup_{1\leq j\leq d_l/2}\lambda(|m_j^l|)\right)^2\sum_{j=1}^{d_l}(x_j^l)^2\\
&\leq \sum_{l=M_1+1}^{M_2}|\lambda(l-1)|^2\sum_{j=1}^{d_l}(x_j^l)^2
\end{aligned}$$

e assim

$$\int_{S^{n-1}}\|x\|^2_{(\Lambda_n,2)}\,d\mu(x) \ \leq\ \sum_{l=M_1+1}^{M_2}|\lambda(l-1)|^2\ \sum_{j=1}^{d_l}\int_{S^{n-1}}(x_j^l)^2\,d\mu(x). \tag{3.13}$$

Mas

$$1 \ =\ \int_{S^{n-1}}|||x|||^2\,d\mu(x)\ =\ \sum_{i=1}^{n}\int_{S^{n-1}}x_i^2\,d\mu(x)\ =\ n\int_{S^{n-1}}x_i^2\,d\mu(x),\ \ i=1,\ldots,n$$

e logo

$$\int_{S^{n-1}}x_i^2 d\mu(x)\ =\ \frac{1}{n},\ \ i=1,...,n. \tag{3.14}$$

De (3.13) e (3.14), obtemos

$$\int_{S^{n-1}}\|x\|^2_{(\Lambda_n,2)}\,d\mu(x)\ \leq\ \frac{1}{n}\sum_{l=M_1+1}^{M_2}|\lambda(l-1)|^2\sum_{j=1}^{d_l}1\ =\ \frac{1}{n}\sum_{l=M_1+1}^{M_2}|\lambda(l-1)|^2 d_l.$$

Consequentemente

$$M(\|\cdot\|_{(\Lambda_n,2)}) \;=\; \left(\int_{S^{n-1}} \|x\|^2_{(\Lambda_n,2)}\, d\mu(x)\right)^{1/2} \;\leq\; n^{-1/2}\left(\sum_{l=M_1+1}^{M_2} |\lambda(l-1)|^2 d_l\right)^{1/2}.$$

De modo análogo, obtemos que

$$M(\|\cdot\|_{(\Lambda_n,2)}) \;\geq\; n^{-1/2}\left(\sum_{l=M_1+1}^{M_2} |\lambda(l)|^2 d_l\right)^{1/2}$$

e portanto obtemos (iv).

Como a propriedade (iv) é válida e $M(\|\cdot\|_{(\Lambda_n,p)})$ é uma função monótona crescente de p, para $1 \leq p \leq \infty$, seguem as estimativas inferiores em (i) e (ii) e a estimativa superior em (iii).

Passamos agora à demonstração da estimativa superior em (i) e da estimativa inferior em (iii). Para uma função arbitrária $f \in C(S^{n-1})$, a extensão $\widetilde{f}$ de f para $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ é dada por $\widetilde{f}(x) = |||x|||^2 f(x/|||x|||)$. Tomando $f(x) = \|x\|^2_{(\Lambda_n,p)}$, $x = (x_1, ..., x_n) \in S^{n-1}$, segue do Lema 3.1.12 que

$$\int_{S^{n-1}} \|x\|^2_{(\Lambda_n,p)}\, d\mu(x) \;=\; \frac{2\pi}{n}\int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f}(x)\, d\gamma(x) \;=\; \frac{2\pi}{n}\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|^2_{(\Lambda_n,p)}\, d\gamma(x). \tag{3.15}$$

Como $\|x\|_{(\Lambda_n,p)} \leq C_{M_1,M_2,p}\sum_{k=1}^n |x_k|$, temos

$$\widetilde{f}(x)e^{-\sum_{k=1}^n |x_k|} \;=\; \|x\|^2_{(\Lambda_n,p)} e^{-\sum_{k=1}^n |x_k|} \;\to 0$$

uniformemente quando $\sum_{k=1}^n |x_k| \to 0$. Portanto segue pelo Lema 3.1.13 que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f}(x)\, d\gamma(x) \;=\; \lim_{m\to\infty}\int_0^1 \|(2\pi)^{-1/2}(\delta_1^m(\theta), ..., \delta_n^m(\theta))\|^2_{(\Lambda_n,p)}\, d\theta. \tag{3.16}$$

De (3.15) e (3.16) vem que

$$\begin{aligned}\int_{S^{n-1}} \|x\|^2_{(\Lambda_n,p)}\, d\mu(x) \;&=\; \frac{2\pi}{n}\lim_{m\to\infty}\int_0^1 \|(2\pi)^{-1/2}(\delta_1^m(\theta), ..., \delta_n^m(\theta))\|^2_{(\Lambda_n,p)}\, d\theta \\ &=\; n^{-1}\lim_{m\to\infty}\int_0^1 \|(\delta_1^m(\theta), ..., \delta_n^m(\theta))\|^2_{(\Lambda_n,p)}\, d\theta. \end{aligned}\tag{3.17}$$

Observemos agora que

$$\begin{aligned}\|(\delta_1^m(\theta), ..., \delta_n^m(\theta))\|_{(\Lambda_n,p)}^2 &= \left\|\sum_{i=1}^n \delta_i^m(\theta)\xi_i\right\|_{\Lambda_n,p}^2 = \left\|\Lambda_n\left(\sum_{i=1}^n \delta_i^m(\theta)\xi_i\right)\right\|_p^2 \\ &= \left\|\sum_{i=1}^n \widetilde{\lambda}_i\delta_i^m(\theta)\xi_i\right\|_p^2 \\ &= \left(\int_{\mathbb{T}^d} |\sum_{i=1}^n \widetilde{\lambda}_i\delta_i^m(\theta)\xi_i(\mathbf{x})|^p \, d\nu(\mathbf{x})\right)^{2/p} \qquad (3.18)\end{aligned}$$

Além disso

$$\sum_{i=1}^n \widetilde{\lambda}_i\delta_i^m(\theta)\xi_i(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n m^{-1/2}\xi_i(\mathbf{x})\widetilde{\lambda}_i(r_{(i-1)m+1}(\theta) + \cdots + r_{im}(\theta)).$$

Denotando assim $\widetilde{\xi}_{(i-1)m+k}(\mathbf{x}) = m^{-1/2}\xi_i(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d$ e $\widetilde{\widetilde{\lambda}}_{(i-1)m+k} = \widetilde{\lambda}_i$, para $i = 1, ..., n$; $k = 1, ..., m$ e $m = 1, 2, ...$, obtemos

$$\sum_{i=1}^n \widetilde{\lambda}_i\delta_i^m(\theta)\xi_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{mn} r_j(\theta)\widetilde{\widetilde{\lambda}}_j\widetilde{\xi}_j(\mathbf{x}). \qquad (3.19)$$

Segue então de (3.17), (3.18) e (3.19) que

$$\begin{aligned}M(\|\cdot\|_{(\Lambda_n,p)}) &= \left(\int_{S^{n-1}} \|x\|_{(\Lambda_n,p)}^2 \, d\mu(x)\right)^{1/2} \\ &= n^{-\frac{1}{2}} \lim_{m\to\infty}\left(\int_0^1 \left(\int_{\mathbb{T}^d} |\sum_{j=1}^{mn} r_j(\theta)\widetilde{\widetilde{\lambda}}_j\widetilde{\xi}_j(\mathbf{x})|^p d\nu(\mathbf{x})\right)^{2/p} d\theta\right)^{1/2}. \qquad (3.20)\end{aligned}$$

Desta forma, pela Desigualdade de Jensen ([8], p. 104) e pela Desigualdade de Khintchine (Lema 3.1.14), para $2 \leq p \leq \infty$, vem que

$$\begin{aligned}M(\|\cdot\|_{(\Lambda_n,p)}) &\leq n^{-1/2} \lim_{m\to\infty}\left(\left(\int_{\mathbb{T}^d}\int_0^1 |\sum_{j=1}^{mn} r_j(\theta)\widetilde{\widetilde{\lambda}}_j\widetilde{\xi}_j(\mathbf{x})|^p \, d\theta \, d\nu(\mathbf{x})\right)^{2/p}\right)^{1/2} \\ &\leq \gamma(p)n^{-1/2} \lim_{m\to\infty}\left(\int_{\mathbb{T}^d}\left(\sum_{j=1}^{mn} |\widetilde{\widetilde{\lambda}}_j\widetilde{\xi}_j(\mathbf{x})|^2\right)^{2/p} d\nu(\mathbf{x})\right)^{1/p}. \qquad (3.21)\end{aligned}$$

Por definição temos que $\xi_{2j-1}^l(\mathbf{x}) = \sqrt{2}\cos(m_j^l\cdot\mathbf{x})$, $\xi_{2j}^l(\mathbf{x}) = \sqrt{2}\ sen(m_j^l\cdot\mathbf{x})$ e assim obtemos

$$\sum_{j=1}^{d_l} |\xi_j^l(\mathbf{x})|^2 = \sum_{j=1}^{d_l/2} \left(|\xi_{2j-1}^l(\mathbf{x})|^2 + |\xi_{2j}^l(\mathbf{x})|^2\right) = d_l.$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{mn} |\widetilde{\widetilde{\lambda}}_j \widetilde{\xi}_j(\mathbf{x})|^2 &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} |\widetilde{\widetilde{\lambda}}_{(i-1)m+k} \widetilde{\xi}_{(i-1)m+k}(\mathbf{x})|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} |\widetilde{\lambda}_i|^2 |m^{-1/2}\xi_i(\mathbf{x})|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} m|\widetilde{\lambda}_i|^2 m^{-1} |\xi_i(\mathbf{x})|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} |\widetilde{\lambda}_i|^2 |\xi_i(\mathbf{x})|^2 \\
&\leq \sum_{l=M_1+1}^{M_2} |\lambda(l-1)|^2 \sum_{j=1}^{d_l} |\xi_j^l(\mathbf{x})|^2 \\
&= \sum_{l=M_1+1}^{M_2} |\lambda(l-1)|^2 d_l.
\end{aligned}$$

De forma análoga obtemos que

$$\sum_{j=1}^{mn} |\widetilde{\widetilde{\lambda}}_j \widetilde{\xi}_j(\mathbf{x})|^2 \geq \sum_{l=M_1+1}^{M_2} |\lambda(l)|^2 d_l.$$

Logo, segue que

$$\sum_{l=M_1+1}^{M_2} |\lambda(l)|^2 d_l \leq \sum_{j=1}^{mn} |\widetilde{\widetilde{\lambda}}_j \widetilde{\xi}_j(\mathbf{x})|^2 \leq \sum_{l=M_1+1}^{M_2} |\lambda(l-1)|^2 d_l. \tag{3.22}$$

Assim, segue por (3.21) e (3.22) que

$$\begin{aligned}
M(\|\cdot\|_{(\Lambda_n,p)}) &\leq \gamma(p) n^{-1/2} \lim_{m\to\infty} \left(\int_{\mathbb{T}^d} \left(\sum_{l=M_1+1}^{M_2} |\lambda(l-1)|^2 d_l \right)^{p/2} d\nu(\mathbf{x}) \right)^{1/p} \\
&= \gamma(p) n^{-1/2} \left(\int_{\mathbb{T}^d} \left(\sum_{l=M_1+1}^{M_2} |\lambda(l-1)|^2 d_l \right)^{p/2} d\nu(\mathbf{x}) \right)^{1/p} \\
&\leq C_1 p^{1/2} n^{-1/2} \left(\sum_{l=M_1+1}^{M_2} |\lambda(l-1)|^2 d_l \right)^{1/2}, \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

onde a constante universal C_1 da última desigualdade é obtida do fato de $\gamma(p) \asymp p^{1/2}$. Assim, obtemos a estimativa superior em (i).

Por outro lado, para $p = 1$, segue de (3.20), das Desigualdades de Jensen e de Khintchine, e de (3.22) que

$$\begin{aligned}
M(\|\cdot\|_{(\Lambda_n,1)}) &= n^{-1/2}\lim_{m\to\infty}\left(\int_0^1\left(\int_{\mathbb{T}^d}|\sum_{j=1}^{mn} r_j(\theta)\widetilde{\widetilde{\lambda}}_j\widetilde{\xi}_j(\mathbf{x})|\,d\nu(\mathbf{x})\right)^2 d\theta\right)^{1/2}\\
&\geq n^{-1/2}\lim_{m\to\infty}\int_{\mathbb{T}^d}\int_0^1|\sum_{j=1}^{mn} r_j(\theta)\widetilde{\widetilde{\lambda}}_j\widetilde{\xi}_j(\mathbf{x})|\,d\theta\,d\nu(\mathbf{x})\\
&\geq \beta(1)n^{-1/2}\lim_{m\to\infty}\int_{\mathbb{T}^d}\left(\sum_{j=1}^{mn}|\widetilde{\widetilde{\lambda}}_j\widetilde{\xi}_j(\mathbf{x})|^2\right)^{1/2} d\nu(\mathbf{x})\\
&\geq \beta(1)n^{-1/2}\int_{\mathbb{T}^d}\left(\sum_{l=M_1+1}^{M_2}|\lambda(l)|^2 d_l\right)^{1/2} d\nu(\mathbf{x})\\
&= \beta(1)n^{-1/2}\left(\sum_{l=M_1+1}^{M_2}|\lambda(l)|^2 d_l\right)^{1/2}\int_{\mathbb{T}^d} d\nu(\mathbf{x})\\
&\geq \frac{1}{2}n^{-1/2}\left(\sum_{l=M_1+1}^{M_2}|\lambda(l)|^2 d_l\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Uma vez que a Média de Levy é uma função monótona crescente de p, segue que

$$M(\|\cdot\|_{(\Lambda_n,p)}) \geq M(\|\cdot\|_{(\Lambda_n,1)}) \geq \frac{1}{2}n^{-1/2}\left(\sum_{l=M_1+1}^{M_2}|\lambda(l)|^2 d_l\right)^{1/2}, \quad 1\leq p\leq 2.$$

Obtemos assim a estimativa inferior em (iii).

Finalmente, aplicando (3.8) com $p = \ln n$ (assumiremos então $p > 2$) e (3.23) obtemos

$$\begin{aligned}
M(\|\cdot\|_{(\Lambda_n,\infty)}) &= \left(\int_{S^{n-1}}\|x\|^2_{(\Lambda_n,\infty)}\,d\mu(x)\right)^{1/2}\\
&= \left(\int_{S^{n-1}}\|\Lambda_n J(x)\|^2_\infty\,d\mu(x)\right)^{1/2}\\
&\leq \left(n^{2/p}\int_{S^{n-1}}\|\Lambda_n J(x)\|^2_p\,d\mu(x)\right)^{1/2}\\
&= n^{1/p}\left(\int_{S^{n-1}}\|x\|^2_{(\Lambda_n,p)}\,d\mu(x)\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \quad n^{1/p} C_1 p^{1/2} n^{-1/2} \left(\sum_{l=M_1+1}^{M_2} |\lambda(l-1)|^2 d_l \right)^{1/2} \\
&= \quad (e^p)^{1/p} C_1 (\ln n)^{1/2} n^{-1/2} \left(\sum_{l=M_1+1}^{M_2} |\lambda(l-1)|^2 d_l \right)^{1/2} \\
&= \quad e C_1 (\ln n)^{1/2} n^{-1/2} \left(\sum_{l=M_1+1}^{M_2} |\lambda(l-1)|^2 d_l \right)^{1/2} .
\end{aligned}
$$

Tomando então $C = eC_1$, obtemos a estimativa superior em (ii). □

Observação 3.1.18. O Teorema 3.1.17 permanece válido se considerarmos $n = \dim \mathcal{T}^*_{M_1,M_2}$ o operador Λ^*_n definido na Observação 3.1.5 no lugar do operador Λ_n e trocarmos d_l por d^*_l.

3.2 Estimativas Inferiores Gerais para n-Larguras

Nesta seção, demonstramos a limitação inferior para n-larguras de Kolmogorov e de Gel'fand de operadores multiplicadores arbitrários definidos sobre o toro.

Definição 3.2.1. Seja $\|\cdot\|$ uma norma em $\mathbb{R}^n$ e denotemos por E o espaço de Banach $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ com bola unitária B_E. Se $\langle x, y\rangle$ denota o produto interno usual dos elementos $x, y \in \mathbb{R}^n$, então a norma dual de $\|\cdot\|$ é definida por

$$\|x\|^0 \ = \ \sup\{|\langle x, y\rangle| : y \in B_E\}.$$

O espaço dual $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|^0)$ de E será denotado por E^0.

Teorema 3.2.2. *([25]) Seja $E^0 = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|^0)$. Para cada $0 < \rho < 1$, existe um subespaço F_k de $\mathbb{R}^n$, com $\dim F_k = k > \rho n$, tal que para todo $\alpha \in F_k$*

$$|||\ \alpha\ ||| \leq C M_0 (1-\rho)^{-1/2} \|\alpha\|,$$

onde $C > 0$ é uma constante absoluta e

$$M_0 \ = \ \left(\int_{S^{n-1}} (\|\alpha\|^0)^2 \, d\mu(\alpha) \right)^{1/2} .$$

Teorema 3.2.3. *Sejam $1 \leq q \leq p \leq 2$, $0 < \rho < 1$, $n = \dim \mathcal{T}_N$, $\mathcal{T}_N = \bigoplus_{l=0}^N \mathcal{H}_l$, $d_k = \dim \mathcal{H}_k$, $\lambda : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $t \mapsto |\lambda(t)|$ é uma função decrescente, e seja $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$*

a sequência de multiplicadores $\lambda_k = \lambda(|\, k\, |)$ satisfazendo $\lambda_k \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}^d$. Então existe uma constante absoluta $C > 0$ tal que

$$\min \{d_{[\rho n-1]}(\Lambda U_p; L^q), d^{[\rho n-1]}(\Lambda U_p; L^q)\} \ \geq \ C(1-\rho)^{1/2}\ \kappa_{q,n},$$

onde

$$\kappa_{q,n} \ = \begin{cases} (1-1/q)^{1/2} n^{1/2} \left(\sum_{l=1}^{N} |\lambda(l)|^{-2} d_l\right)^{-1/2}, & q > 1, \\ (n/\ln n)^{1/2} \left(\sum_{l=1}^{N} |\lambda(l)|^{-2} d_l\right)^{-1/2}, & q = 1, \end{cases}$$

e $[\rho n - 1]$ denota a parte inteira do número $\rho n - 1$.

Demonstração. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n = J^{-1}\mathcal{T}_N$. Usando o fato que J é um isomorfismo coordenado e portanto preserva produto interno, obtemos

$$\begin{aligned} \|x\|^0_{(\Lambda_n,q)} &= \sup\{|\langle x,y\rangle| : y \in B^n_{(\Lambda_n,q)}\} \\ &= \sup\left\{\left|\int_{\mathbb{T}^d} Jx \cdot Jy\, d\nu\right| : Jy \in \Lambda_n^{-1}(B^n_q)\right\}. \end{aligned}$$

Como $\Lambda_n Jy \in B^n_q$, segue que $\Lambda_n Jy = J\overline{y}$, com $\overline{y} \in B^n_{(q)}$, de onde $Jy = \Lambda_n^{-1} J\overline{y}$. Obtemos assim da expressão acima e da Desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned} \|x\|^0_{(\Lambda_n,q)} &= \sup\left\{\left|\int_{\mathbb{T}^d} Jx \cdot \Lambda_n^{-1} J\overline{y}\, d\nu\right| : \overline{y} \in B^n_{(q)}\right\} \\ &= \sup\left\{\left|\int_{\mathbb{T}^d} \Lambda_n^{-1} Jx \cdot J\overline{y}\, d\nu\right| : \overline{y} \in B^n_{(q)}\right\} \\ &\leq \sup_{\overline{y}\in B^n_{(q)}} \|\Lambda_n^{-1} Jx\|_{q'} \|J\overline{y}\|_q \\ &\leq \|\Lambda_n^{-1} Jx\|_{q'} \\ &= \|x\|_{(\Lambda_n^{-1},q')} \end{aligned} \tag{3.24}$$

onde $1/q + 1/q^{'} = 1$ e $\Lambda^{-1} = \{\lambda_k^{-1}\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$. Tomando agora $0 < \rho < 1$, podemos garantir pelo teorema anterior a existência de um subespaço F_k de $\mathbb{R}^n$, com $\dim F_k = k > \rho n$, satisfazendo

$$\|x\|_{(2)} \ = |||\ x\ ||| \leq \ C'M\left(\|\cdot\|^0_{(\Lambda_n,q)}\right)(1-\rho)^{-1/2}\|x\|_{(\Lambda_n,q)},$$

para todo $x \in F_k$. De (3.24), vem que

$$\|x\|_{(2)} \ \leq \ C'M\left(\|\cdot\|_{(\Lambda_n^{-1},q')}\right)(1-\rho)^{-1/2}\|x\|_{(\Lambda_n,q)}, \quad x \in F_k.$$

Assim para $\epsilon = (C')^{-1}(1-\rho)^{1/2}\left(M\left(\|\cdot\|_{(\Lambda_n^{-1},q')}\right)\right)^{-1}$, temos que se $x \in \epsilon B^n_{(\Lambda_n,q)} \cap F_k$, então $x = \epsilon x^*$, com $x^* \in B^n_{(\Lambda_n,q)}$. Assim $\|x\|_{(2)} = \epsilon\|x^*\|_{(2)} \leq \epsilon\epsilon^{-1}\|x^*\|_{(\Lambda_n,q)} \leq 1$ e portanto

$$\epsilon B^n_{(\Lambda_n,q)} \cap F_k \ \subseteq B^n_{(2)}. \tag{3.25}$$

Além disso, estimando a Média de Levy $M\left(\|\cdot\|_{(\Lambda_n^{-1},q')}\right)$ pelo Teorema 3.1.17 (note que isto é possível pois $t \mapsto |\lambda(t)|^{-1}$ é uma função monótona crescente), obtemos

$$\epsilon \ \geq \ C(1-\rho)^{1/2}\begin{cases} (q')^{-1/2}n^{1/2}\left(\sum_{l=1}^N |\lambda(l)|^{-2}d_l\right)^{-1/2}, & q' < \infty\ , \\ (n/\ln n)^{1/2}\left(\sum_{l=1}^N |\lambda(l)|^{-2}d_l\right)^{-1/2}, & q' = \infty. \end{cases}$$

Como $1/q + 1/q^{'} = 1$ e $1 \leq q \leq 2$, vem que

$$\epsilon \ \geq \ C(1-\rho)^{1/2}\begin{cases} (1-1/q)^{-1/2}n^{1/2}\left(\sum_{l=1}^N |\lambda(l)|^{-2}d_l\right)^{-1/2}, & q > 1\ , \\ (n/\ln n)^{1/2}\left(\sum_{l=1}^N |\lambda(l)|^{-2}d_l\right)^{-1/2}, & q = 1. \end{cases} \tag{3.26}$$

Como $\Lambda_n B^n_2 \subseteq \Lambda_n B^n_p$, já que $1 \leq q \leq p \leq 2$, segue pelos Teoremas 1.1.10(c) e 1.1.11(c), e pela Proposição 1.1.13 que

$$\begin{aligned} & \min\{d_{[\rho n-1]}(\Lambda_n B^n_p; L^q), d^{[\rho n-1]}(\Lambda_n B^n_p; L^q)\} \\ \geq\ & \min\{d_{[\rho n-1]}(\Lambda_n B^n_2; L^q), d^{[\rho n-1]}(\Lambda_n B^n_2; L^q)\} \\ \geq\ & b_{[\rho n-1]}(\Lambda_n B^n_2; L^q). \end{aligned}$$

Como $B^n_{\Lambda_n,q} = \Lambda^{-1}(B^n_q)$, usando (3.25) obtemos que para $X_k = J(F_k)$, $\epsilon B^n_q \cap X_k \subseteq \Lambda_n B^n_2$. Então observando que $\dim F_k = k > \rho n$, obtemos da Definição 1.1.9 que

$$b_{[\rho n-1]}(\Lambda_n B^n_2; L^q) \geq \epsilon$$

e consequentemente

$$\min\{d_{[\rho n-1]}(\Lambda_n B^n_p; L^q), d^{[\rho n-1]}(\Lambda_n B^n_p; L^q)\} \geq \ \epsilon.$$

Segue então de (3.26) que

$$\begin{aligned} & \min\{d_{[\rho n-1]}(\Lambda_n B^n_p; L^q), d^{[\rho n-1]}(\Lambda_n B^n_p; L^q)\} \\ \geq\ & C(1-\rho)^{1/2}\begin{cases} (1-1/q)^{-1/2}n^{1/2}\left(\sum_{l=1}^N |\lambda(l)|^{-2}d_l\right)^{-1/2}, & q > 1\ , \\ (n/\ln n)^{1/2}\left(\sum_{l=1}^N |\lambda(l)|^{-2}d_l\right)^{-1/2}, & q = 1. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.27}$$

Como de (3.1) temos que $\Lambda_n B^n_p = \Lambda B^n_p \subseteq \Lambda U_p$, segue dos Teoremas 1.1.10(c) e 1.1.11(c), e de (3.27) o resultado desejado. □

Corolário 3.2.4. *Nas condições do teorema anterior, temos que*

$$d_{[\rho n-1]}(\Lambda U_p, L^q) \geq C^{'}(1-\rho)^{1/2} n^{1/2} \left(\sum_{l=1}^{N} |\lambda(l)|^{-2} d_l \right)^{-1/2} \kappa_n,$$

onde

$$\kappa_n = \begin{cases} 1, & 1 \leq p \leq 2,\ 1 < q \leq 2, \\ 1, & 2 \leq p < \infty, 2 \leq q \leq \infty, \\ 1, & 1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty, \\ (\ln n)^{-1/2}, & 1 \leq p \leq 2,\ q = 1, \\ (\ln n)^{-1/2}, & p = \infty,\ 2 \leq q \leq \infty. \end{cases}$$

Demonstração. No teorema anterior temos o resultado para $1 \leq q \leq p \leq 2$. Consideremos agora $1 \leq p \leq q \leq 2$. Como $\|\cdot\|_p \leq \|\cdot\|_q \leq \|\cdot\|_2$, então $B_2^n \subseteq B_q^n \subseteq B_p^n$, e segue portanto do Teorema 1.1.11(c) e de (3.27) que

$$\begin{aligned} & \min\{d_{[\rho n-1]}(\Lambda_n B_p^n; L^q), d^{[\rho n-1]}(\Lambda_n B_p^n; L^q)\} \\ \geq\ & \min\{d_{[\rho n-1]}(\Lambda_n B_2^n; L^q), d^{[\rho n-1]}(\Lambda_n B_2^n; L^q)\} \\ \geq\ & C^{'}(1-\rho)^{1/2} \left(\sum_{l=1}^{N} |\lambda(l)|^{-2} d_l \right)^{-1/2} \begin{cases} 1, & 1 < q \leq 2\ , \\ (n/\ln n)^{1/2}, & q = 1, \end{cases} \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} & \min\{d_{[\rho n-1]}(\Lambda_n B_p^n; L^q), d^{[\rho n-1]}(\Lambda_n B_p^n; L^q)\} \\ \geq\ & C^{'}(1-\rho)^{1/2} \left(\sum_{l=1}^{N} |\lambda(l)|^{-2} d_l \right)^{-1/2} \begin{cases} 1, & 1 \leq p \leq 2,\ 1 < q \leq 2\ , \\ (n/\ln n)^{1/2}, & 1 \leq p \leq 2,\ q = 1. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.28}$$

Sejam $2 \leq p, q \leq \infty$. Como $\Lambda_n \in \mathcal{L}(L^p \cap \mathcal{T}_N, L^q \cap \mathcal{T}_N)$, então

$$\Lambda_n^{'} \in \mathcal{L}\left((L^q \cap \mathcal{T}_N)^{'}, (L^p \cap \mathcal{T}_N)^{'} \right) = \mathcal{L}(L^{q'} \cap \mathcal{T}_N, L^{p'} \cap \mathcal{T}_N),$$

onde $1/p + 1/p' = 1$ e $1/q + 1/q' = 1$, isto é, $\Lambda_n^{'} \in \mathcal{L}(L^{q'} \cap \mathcal{T}_N, L^{p'} \cap \mathcal{T}_N)$ para $1 \leq p', q' \leq 2$. Segue então de (3.28) que

$$d^{[\rho n-1]}(\Lambda_n^{'}) \geq C^{'}(1-\rho)^{1/2} \left(\sum_{l=1}^{N} |\lambda(l)|^{-2} d_l \right)^{-1/2} \begin{cases} 1, & 1 \leq q' \leq 2,\ 1 < p' \leq 2\ , \\ (n/\ln n)^{1/2}, & 1 \leq q' \leq 2,\ p' = 1. \end{cases}$$

Como Λ_n é um operador de posto finito e portanto compacto, segue do Teorema 1.1.22 e da desigualdade acima que

$$\begin{aligned} & d_{[\rho n-1]}(\Lambda_n) = d^{[\rho n-1]}(\Lambda_n^{'}) \\ \geq \ & C^{'}(1-\rho)^{1/2}\left(\sum_{l=1}^{N}|\lambda(l)|^{-2}d_l\right)^{-1/2}\begin{cases} 1, & 1\leq q'\leq 2,\ 1<p'\leq 2, \\ (n/\ln n)^{1/2}, & 1\leq q'\leq 2,\ p'=1, \end{cases} \\ = \ & C^{'}(1-\rho)^{1/2}\left(\sum_{l=1}^{N}|\lambda(l)|^{-2}d_l\right)^{-1/2}\begin{cases} 1, & 2\leq q\leq \infty,\ 2\leq p<\infty, \\ (n/\ln n)^{1/2}, & 2\leq q\leq\infty,\ p=\infty. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.29}$$

Agora, se $1\leq p\leq 2\leq q\leq\infty$, então $B_q^n\subseteq B_2^n\subseteq B_p^n$ e segue então do Teorema 1.1.10 (c) e de (3.29) que

$$\begin{aligned} d_{[\rho n-1]}(\Lambda_n B_p^n, L^q) \ & \geq \ d_{[\rho n-1]}(\Lambda_n B_2^n, L^q) \\ & \geq \ C^{'}(1-\rho)^{1/2}\left(\sum_{l=1}^{N}|\lambda(l)|^{-2}d_l\right)^{-1/2}. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Obtemos assim de (3.28), (3.29) e de (3.30) que

$$d_{[\rho n-1]}(\Lambda_n B_p^n, L^q) \ \geq \ C^{'}(1-\rho)^{1/2}n^{1/2}\left(\sum_{l=1}^{N}|\lambda(l)|^{-2}d_l\right)^{-1/2}\kappa_n.$$

Como de (3.1) temos que $\Lambda_n B_p^n = \Lambda B_p^n \subseteq \Lambda U_p$, segue do Teorema 1.1.10(c) o resultado desejado. □

Observação 3.2.5. O Teorema 3.2.3 e o Corolário 3.2.4 continuam válidos se trocarmos $\mathcal{T}_N$ por $\mathcal{T}_N^* = \bigoplus_{l=0}^{N}\mathcal{H}_l^*$, d_k por d_k^* e Λ por Λ_*.

3.3 Estimativas Superiores Gerais para n-Larguras

Nesta seção, demonstramos a limitação superior para n-larguras de Kolmogorov de operadores multiplicadores arbitrários definidos sobre o toro.

Teorema 3.3.1. *Seja $\lambda : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $t\mapsto|\lambda(t)|$ é uma função decrescente e seja $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$, $\lambda_k = \lambda(|k|)$. Suponhamos que $1\leq p\leq 2\leq q\leq\infty$ e que o operador multiplicador Λ é limitado de L^1 em L^2. Sejam $\{N_k\}_{k=0}^{\infty}$ e $\{m_k\}_{k=0}^{M}$ sequências de números naturais tais que $N_k<N_{k+1}$, $N_0=0$ e $\sum_{k=0}^{M}m_k\leq\beta$. Então existe uma constante absoluta $C>0$ tal que*

$$d_\beta(\Lambda U_p; L^q) \;\leq\; C\left(\sum_{k=1}^{M} |\lambda(N_k)|\varrho_{m_k} + \sum_{k=M+1}^{\infty} |\lambda(N_k)|\theta_{N_k,N_{k+1}}^{1/p-1/q}\right),$$

onde

$$\varrho_{m_k} = \frac{\theta_{N_k,N_{k+1}}^{1/p}}{(m_k)^{1/2}} \cdot \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\ln \theta_{N_k,N_{k+1}})^{1/2}, & q = \infty, \end{cases} \qquad e \quad \theta_{N_k,N_{k+1}} \;=\; \sum_{s=N_k+1}^{N_{k+1}} \dim \mathcal{H}_s, \quad k \geq 1.$$

Demonstração. Sejam $M_1, M_2 \in \mathbb{N}$ com $M_1 < M_2$. Denotamos $\mathcal{T}_{0,M_2} = \mathcal{T}_{M_2} = \bigoplus_{l=0}^{M_2} \mathcal{H}_l$ e para $M_1 \geq 1$, $\mathcal{T}_{M_1,M_2} = \bigoplus_{l=M_1+1}^{M_2} \mathcal{H}_l$. Escrevemos $n = \dim\mathcal{T}_{M_1,M_2} = \sum_{k=M_1+1}^{M_2} d_k$, $B_p^n = U_p \cap \mathcal{T}_{M_1,M_2}$, $B_{(p)}^n = J^{-1}B_p^n$, $\lambda(0) = 0$ e fixamos $0 < \rho < 1$. Pelo Teorema 3.2.2, existe um subespaço F_k de $\mathbb{R}^n$, com $\dim F_k = k > \rho n$, tal que para todo $x \in F_k$ temos

$$\|x\|_{(2)} \;\leq\; CM(\|\cdot\|_{(q)})(1-\rho)^{-1/2}\|x\|_{(q)}^0.$$

Se $m = n - k$, usando o fato que $k > \rho n$ e $0 < \rho < 1$, obtemos $(1-\rho)^{-1/2} < (n/m)^{1/2}$ e assim

$$\|x\|_{(2)} \;\leq\; C\|x\|_{(q)}^0 \left(\frac{n}{m}\right)^{1/2} M(\|\cdot\|_{(q)}).$$

Pelo Teorema 3.1.17 para $\Lambda_n = \mathrm{Id}$, temos

$$M(\|\cdot\|_{(q)}) \;\leq\; \begin{cases} Cq^{1/2}n^{-1/2}\left(\sum_{k=M_1+1}^{M_2} d_k\right)^{1/2} \;=\; Cq^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ C(\ln n)^{1/2}n^{-1/2}\left(\sum_{k=M_1+1}^{M_2} d_k\right)^{1/2} = C(\ln n)^{1/2}\,, & q = \infty. \end{cases}$$

Consequentemente

$$\|x\|_{(2)} \;\leq\; C\|x\|_{(q)}^0 \left(\frac{n}{m}\right)^{1/2} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\ln n)^{1/2}, & q = \infty. \end{cases} \tag{3.31}$$

Segue então do Teorema 1.1.22, da Definição 1.1.4 e de (3.31) que

$$
\begin{aligned}
d_m(B_2^n; L^q \cap \mathcal{T}_{M_1,M_2}) &= d^m((B_q^n)^0; L_2 \cap \mathcal{T}_{M_1,M_2}) \\
&= \inf_{L^m} \sup_{x \in (B_{(q)}^n)^0 \cap L^m} \|x\|_{(2)} \\
&\leq \sup_{x \in (B_{(q)}^n)^0 \cap F_k} \|x\|_{(2)} \\
&\leq \sup_{x \in (B_{(q)}^n)^0 \cap F_k} C\|x\|_{(q)}^0 \left(\frac{n}{m}\right)^{1/2} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\ln n)^{1/2}, & q = \infty, \end{cases} \\
&\leq C\left(\frac{n}{m}\right)^{1/2} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\ln n)^{1/2}, & q = \infty. \end{cases} \qquad (3.32)
\end{aligned}
$$

Seja agora $B_p^{N_k,N_{k+1}} = U_p \cap \mathcal{T}_{N_k,N_{k+1}}$ e para $f \in \Lambda U_p \subseteq L^2(\mathbb{T}^d)$ (pois Λ é limitado de L^1 em L^2), seja $S_N(f)$ a N-ésima soma parcial esférica de Fourier de f, $\phi_{N_k,N_{k+1}}(f) = S_{N_{k+1}}(f) - S_{N_k}(f),\ k \geq 1$ e $\phi_{N_0,N_1}(f) = S_{N_1}(f)$. Observando que

$$S_{N_k}(f)(\mathbf{x}) \ = \sum_{\mathbf{j} \in A_{N_k}} \widehat{f}(\mathbf{j}) e^{i\mathbf{j}\cdot\mathbf{x}},$$

segue que

$$\phi_{N_k,N_{k+1}}(f)(\mathbf{x}) \ = \sum_{\mathbf{j} \in A_{N_{k+1}} \setminus A_{N_k}} \widehat{f}(\mathbf{j}) e^{i\mathbf{j}\cdot\mathbf{x}}.$$

Como $S_{N_s}(f) \to f$ em $L^2(\mathbb{T}^d)$ quando $s \to \infty$ (ver Observação 2.1.13), temos que

$$\sum_{k=s}^{\infty} \phi_{N_k,N_{k+1}}(f) \ = \ f - S_{N_s}(f)$$

e

$$\lim_{s \to \infty} \left\| \sum_{k=s}^{\infty} \phi_{N_k,N_{k+1}}(f) \right\|_2 \ = \ 0.$$

Logo, dada $f \in \Lambda U_p \subseteq L^2(\mathbb{T}^d)$, temos

$$f \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{N_k,N_{k+1}}(f),$$

onde a convergência da série ocorre em $L^2(\mathbb{T}^d)$. Mas $f = \Lambda\varphi,\ \varphi \in U_p$ e podemos então reescrever a equação acima na forma

$$f \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{N_k,N_{k+1}} \circ \Lambda(\varphi).$$

Consequentemente

$$\Lambda U_p \subseteq \bigoplus_{k=0}^{\infty} (\phi_{N_k,N_{k+1}} \circ \Lambda) U_p. \tag{3.33}$$

Mas, para cada $\varphi \in U_p$, temos que $\Lambda\varphi \sim \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\mathbf{j}\in A_l\setminus A_{l-1}} \lambda_{\mathbf{j}} \widehat{\varphi}(\mathbf{j}) e^{i\mathbf{j}\cdot\mathbf{x}}$ e assim

$$\begin{aligned}
\phi_{N_k,N_{k+1}}(\Lambda\varphi) &= D_{N_k,N_{k+1}} * \left(\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\mathbf{j}\in A_l\setminus A_{l-1}} \lambda_{\mathbf{j}} \widehat{\varphi}(\mathbf{j}) e^{i\mathbf{j}\cdot\mathbf{x}} \right) \\
&= \sum_{l=N_k}^{N_{k+1}} \left(\sum_{\mathbf{j}\in A_l\setminus A_{l-1}} \lambda_{\mathbf{j}} \widehat{\varphi}(\mathbf{j}) e^{i\mathbf{j}\cdot\mathbf{x}} \right) \\
&= \Lambda \left(\sum_{\mathbf{j}\in A_{N_{k+1}}\setminus A_{N_k}} \widehat{\varphi}(\mathbf{j}) e^{i\mathbf{j}\cdot\mathbf{x}} \right) \\
&= \Lambda(\phi_{N_{k+1},N_k}\,(\varphi)).
\end{aligned}$$

Assim $\phi_{N_k,N_{k+1}} \circ \Lambda(U_p) = \Lambda \circ \phi_{N_k,N_{k+1}}(U_p)$ e obtemos então de (3.33)

$$\Lambda U_p \subseteq \bigoplus_{k=0}^{\infty} (\Lambda \circ \phi_{N_k,N_{k+1}}) U_p. \tag{3.34}$$

Agora, dada $\varphi \in U_p$, observando que $\lambda_k = \lambda(|k|)$ e que $\lambda(t)$ é uma função decrescente, temos que

$$\begin{aligned}
\left\| (\Lambda \circ \phi_{N_k,N_{k+1}})\varphi \right\|_2 &= \left\| \sum_{l=N_k+1}^{N_{k+1}} \left(\sum_{\mathbf{j}\in A_l\setminus A_{l-1}} \lambda(\mathbf{j}) \widehat{\varphi}(\mathbf{j}) e^{i\mathbf{j}\cdot\mathbf{x}} \right) \right\|_2 \\
&= \left(\sum_{l=N_k+1}^{N_{k+1}} \sum_{\mathbf{j}\in A_l\setminus A_{l-1}} |\lambda(\mathbf{j})|^2 |\widehat{\varphi}(\mathbf{j})|^2 \right)^{1/2} \\
&\le \left(\sum_{l=N_k+1}^{N_{k+1}} |\lambda(l-1)|^2 \sum_{\mathbf{j}\in A_l\setminus A_{l-1}} |\widehat{\varphi}(\mathbf{j})|^2 \right)^{1/2} \\
&\le |\lambda(N_k)| \left(\sum_{l=N_k+1}^{N_{k+1}} \sum_{\mathbf{j}\in A_l\setminus A_{l-1}} |\widehat{\varphi}(\mathbf{j})|^2 \right)^{1/2} \\
&= |\lambda(N_k)| \left\| \sum_{\mathbf{j}\in A_{N_{k+1}}\setminus A_{N_k}} \widehat{\varphi}(\mathbf{j}) e^{i\mathbf{j}\cdot\mathbf{x}} \right\|_2 \\
&= |\lambda(N_k)| \|\phi_{N_k,N_{k+1}}\varphi\|_2.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Segue do Teorema 2.1.8 (Desigualdade de Young) que

$$\begin{aligned}
\|\phi_{N_k,N_{k+1}}\varphi\|_2 &= \left\| \sum_{\mathbf{j}\in A_{N_{k+1}}\setminus A_{N_k}} \widehat{\varphi}(\mathbf{j})e^{i\mathbf{j}\cdot\mathbf{x}} \right\|_2 \\
&= \|D_{N_k,N_{k+1}} * \varphi\|_2 \\
&\leq \|\varphi\|_p \|D_{N_k,N_{k+1}}\|_{1/(3/2-1/p)}. \qquad (3.36)
\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
\|D_{N_k,N_{k+1}}\|_2^2 &= \int_{\mathbb{T}^d} D_{N_k,N_{k+1}}\, \overline{D_{N_k,N_{k+1}}}\, d\nu(\mathbf{x}) \\
&= \sum_{\mathbf{k}\in A_{N_{k+1}}\setminus A_{N_k}} \sum_{\mathbf{j}\in A_{N_{k+1}}\setminus A_{N_k}} \int_{\mathbb{T}^d} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\, e^{-i\mathbf{j}\cdot\mathbf{x}}\, d\nu(\mathbf{x}) \\
&= \sum_{\mathbf{k}\in A_{N_{k+1}}\setminus A_{N_k}} \int_{\mathbb{T}^d} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\nu(\mathbf{x}) \\
&= \#(A_{N_{k+1}}\setminus A_{N_k}) \\
&= \sum_{s=N_k+1}^{N_k} \dim \mathcal{H}_s \\
&= \theta_{N_k,N_{k+1}}
\end{aligned}$$

e obtemos de (3.36) que, para $p = 1$,

$$\|\phi_{N_k,N_{k+1}}\varphi\|_2 \;\leq\; \theta_{N_k,N_{k+1}}^{1/2} \|\varphi\|_1.$$

Por outro lado, para $p = 2$ temos $\varphi \in U_2 \subset L^2(\mathbb{T}^d)$ e assim

$$\begin{aligned}
\|\phi_{N_k,N_{k+1}}\varphi\|_2 &= \left(\sum_{\mathbf{j}\in A_{N_{k+1}}\setminus A_{N_k}} |\widehat{\varphi}(\mathbf{j})|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{\varphi}(\mathbf{j})|^2 \right)^{1/2} \\
&= \|\varphi\|_2.
\end{aligned}$$

Consequentemente, obtemos o seguinte sistema de desigualdades

$$\begin{cases} \|\phi_{N_k,N_{k+1}}\varphi\|_2 \;\leq\; \theta_{N_k,N_{k+1}}^{1/2} \|\varphi\|_1, \\ \|\phi_{N_k,N_{k+1}}\varphi\|_2 \leq \|\varphi\|_2. \end{cases}$$

Aplicando o Teorema de Interpolação de Riesz-Thorin (Lema 3.1.15) a este sistema de desigualdades, vem que

$$\|\phi_{N_k,N_{k+1}}\varphi\|_2 \;\leq\; \theta_{N_k,N_{k+1}}^{1/p-1/2}\|\varphi\|_p \;\leq\; \theta_{N_k,N_{k+1}}^{1/p-1/2}, \qquad 1 \leq p \leq 2.$$

Assim de (3.35) segue que

$$\left\| \frac{(\Lambda \circ \phi_{N_k,N_{k+1}})\varphi}{|\lambda(N_k)|\theta_{N_k,N_{k+1}}^{1/p-1/2}} \right\|_2 \;\leq\; 1,$$

de onde $(\Lambda \circ \phi_{N_k,N_{k+1}})\varphi \in |\lambda(N_k)|\theta_{N_k,N_{k+1}}^{1/p-1/2} B_2^{N_k,N_{k+1}}$, ou seja

$$(\Lambda \circ \phi_{N_k,N_{k+1}})U_p \subseteq |\lambda(N_k)|\theta_{N_k,N_{k+1}}^{1/p-1/2} B_2^{N_k,N_{k+1}}$$

e obtemos assim de (3.34)

$$\Lambda U_p \;\subseteq\; \bigoplus_{k=0}^{\infty} |\lambda(N_k)|\theta_{N_k,N_{k+1}}^{1/p-1/2} B_2^{N_k,N_{k+1}}. \tag{3.37}$$

Agora, por (3.10), observando que $2 \leq q \leq \infty$ e $\theta_{N_k,N_{k+1}} = \sum_{s=N_k+1}^{N_{k+1}} \dim \mathcal{H}_s$, temos para $\varphi \in B_2^{N_k,N_{k+1}}$

$$\|\varphi\|_q \;=\; \|\phi_{N_k,N_{k+1}}\varphi\|_q \;\leq\; \theta_{N_k,N_{k+1}}^{1/2-1/q}\|\phi_{N_k,N_{k+1}}\varphi\|_2 \;=\; \theta_{N_k,N_{k+1}}^{1/2-1/q}\|\varphi\|_2 \;\leq\; \theta_{N_k,N_{k+1}}^{1/2-1/q},$$

de onde $\varphi \in \theta_{N_k,N_{k+1}}^{1/2-1/q} B_q^{N_k,N_{k+1}}$ e portanto $B_2^{N_k,N_{k+1}} \subseteq \theta_{N_k,N_{k+1}}^{1/2-1/q} B_q^{N_k,N_{k+1}}$. Logo, de (3.37) segue que

$$\begin{aligned}
\Lambda U_p \;&\subseteq\; \bigoplus_{k=0}^{\infty} \theta_{N_k,N_{k+1}}^{1/p-1/2}|\lambda(N_k)|B_2^{N_k,N_{k+1}} \\
&=\; \bigoplus_{k=0}^{M} \theta_{N_k,N_{k+1}}^{1/p-1/2}|\lambda(N_k)|B_2^{N_k,N_{k+1}} + \bigoplus_{k=M+1}^{\infty} \theta_{N_k,N_{k+1}}^{1/p-1/2}|\lambda(N_k)|B_2^{N_k,N_{k+1}} \\
&\subseteq\; \bigoplus_{k=0}^{M} \theta_{N_k,N_{k+1}}^{1/p-1/2}|\lambda(N_k)|B_2^{N_k,N_{k+1}} + \bigoplus_{k=M+1}^{\infty} |\lambda(N_k)|\theta_{N_k,N_{k+1}}^{1/p-1/2}\left(\theta_{N_k,N_{k+1}}^{1/2-1/q} B_q^{N_k,N_{k+1}}\right) \\
&=\; \bigoplus_{k=0}^{M} \theta_{N_k,N_{k+1}}^{1/p-1/2}|\lambda(N_k)|B_2^{N_k,N_{k+1}} + \bigoplus_{k=M+1}^{\infty} |\lambda(N_k)|\theta_{N_k,N_{k+1}}^{1/p-1/q} B_q^{N_k,N_{k+1}}.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Finalmente, do Teorema 1.1.10, (3.38) e (3.32) obtemos

$$\begin{aligned}
d_\beta(\Lambda U_p; L^q) &\leq \sum_{k=0}^{M} |\lambda(N_k)| \theta_{N_k,N_{k+1}}^{1/p-1/2} d_{m_k}(B_2^{N_k,N_{k+1}}, L^q \cap \mathcal{T}_{N_k,N_{k+1}}) \\
&+ \sum_{k=M+1}^{\infty} |\lambda(N_k)| \theta_{N_k,N_{k+1}}^{1/p-1/q} d_0(B_q^{N_k,N_{k+1}}, L^q \cap \mathcal{T}_{N_k,N_{k+1}}) \\
&\leq C \sum_{k=0}^{M} |\lambda(N_k)| \theta_{N_k,N_{k+1}}^{1/p-1/2} \left(\frac{\theta_{N_k,N_{k+1}}}{m_k}\right)^{1/2} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q \leq \infty, \\ (\ln\ \theta_{N_k,N_{k+1}})^{1/2}, & q = \infty, \end{cases} \\
&+ C \sum_{k=M+1}^{\infty} |\lambda(N_k)| \theta_{N_k,N_{k+1}}^{1/p-1/q} \\
&= C \left(\sum_{k=0}^{M} |\lambda(N_k)| \varrho_{m_k} + \sum_{k=M+1}^{\infty} |\lambda(N_k)| \theta_{N_k,N_{k+1}}^{1/p-1/q} \right).
\end{aligned}$$

□

Observação 3.3.2. Vamos agora melhorar a estimativa obtida no teorema anterior, especificando as sequências N_k e m_k. Definimos $N_1 = N$ e

$$N_{k+1} = \min\{M \in \mathbb{N} : \nu|\lambda(M)| \leq |\lambda(N_k)|\},$$

onde $\nu > 1$ é um número fixo. Usaremos $\nu = e$ pois tal escolha será suficiente para nossas aplicações. Para $\epsilon > 0$, colocamos

$$M = \left[\frac{\ln \theta_{N_1,N_2}}{\epsilon}\right],$$

$$m_k = [e^{-\epsilon k}\theta_{N_1,N_2}] + 1, \quad k = 1, \ldots, M$$

e $m_0 = \theta_{N_0,N_1} = \theta_{0,N}$. Observemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{M} m_k &= \sum_{k=1}^{M} \left([e^{-\epsilon k}\theta_{N_1,N_2}] + 1\right) = M + \theta_{N_1,N_2} \sum_{k=1}^{M} [e^{-\epsilon k}] \\
&\leq M + \theta_{N_1,N_2} \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-\epsilon})^k \leq \frac{1}{\epsilon} \ln \theta_{N_1,N_2} + \theta_{N_1,N_2} \frac{1}{1 - e^{-\epsilon}} \\
&\leq \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{1 - e^{-\epsilon}}\right) \theta_{N_1,N_2} = C_\epsilon \theta_{N_1,N_2} \qquad (3.39)
\end{aligned}$$

onde $C_\epsilon > 0$ depende somente de ϵ. Aplicando o teorema anterior para

$$\beta = m_0 + \sum_{k=1}^{M} m_k = \sum_{s=0}^{N} \dim \mathcal{H}_s + \sum_{k=1}^{M} m_k,$$

e denotando $d_\beta = d_\beta(\Lambda : L^p \to L^q)$, temos

$$
\begin{aligned}
d_\beta &\leq C\sum_{k=1}^{M} |\lambda(N_k)| \frac{\theta_{N_k,N_{k+1}}^{1/p}}{(m_k)^{1/2}} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\ln \theta_{N_k,N_{k+1}})^{1/2}, & q = \infty, \end{cases} \\
&+ C\sum_{k=M+1}^{\infty} |\lambda(N_k)| \theta_{N_k,N_{k+1}}^{1/p-1/q}.
\end{aligned}
$$

Como $N_{k+1} = \min\{M \in \mathbb{N} : e|\lambda(M)| \leq |\lambda(N_k)|\}$, segue que $e|\lambda(N_{k+1})| \leq |\lambda(N_k)|$ e portanto $|\lambda(N_{k+1})| \leq e^{-k}|\lambda(N)|$. Assim

$$
\begin{aligned}
d_\beta &\leq eC|\lambda(N)| \sum_{k=1}^{M} e^{-k} \frac{\theta_{N_k,N_{k+1}}^{1/p}}{m_k^{1/2}} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q \leq \infty, \\ (\ln \theta_{N_k,N_{k+1}})^{1/2}, & q = \infty, \end{cases} \\
&+ eC|\lambda(N)| \sum_{k=M+1}^{\infty} e^{-k} \theta_{N_k,N_{k+1}}^{1/p-1/q} \\
&\leq eC|\lambda(N)| \sum_{k=1}^{M} e^{-k(1-\epsilon/2)} \frac{\theta_{N_k,N_{k+1}}^{1/p}}{\theta_{N_1,N_2}^{1/2}} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q \leq \infty, \\ (\ln \theta_{N_k,N_{k+1}})^{1/2}, & q = \infty, \end{cases} \\
&+ eC|\lambda(N)| \sum_{k=M+1}^{\infty} e^{-k} \theta_{N_k,N_{k+1}}^{1/p-1/q}.
\end{aligned}
$$

Observação 3.3.3. Observamos que o Teorema 3.3.1 permanece válido se trocarmos $\lambda_{\mathbf{k}}$ por $\lambda_{\mathbf{k}}^* = \lambda(|\mathbf{k}|_*)$, Λ por Λ_* e $\theta_{N_k,N_{k+1}}$ por $\theta_{N_k,N_{k+1}}^*$. Observamos também que, se trocarmos na Observação 3.3.2

- M por $M^* = \left[\dfrac{\ln \theta_{N_1,N_2}^*}{\epsilon}\right]$, onde $\theta_{N_k,N_{k+1}}^* = \displaystyle\sum_{l=N_k+1}^{N_{k+1}} \dim \mathcal{H}_l^*$;

- m_k por $m_k^* = [e^{-\epsilon k}\theta_{N_1,N_2}^*] + 1,\ k = 1, \ldots, M$;

- m_0 por $m_0^* = \displaystyle\sum_{l=0}^{N} \dim \mathcal{H}_l^*$;

- β por $\beta^* = m_0^* + \displaystyle\sum_{k=1}^{M} m_k^*$;

- d_β por $d_{\beta^*} = d_{\beta^*}(\Lambda_* : L^p \to L^q)$, obtemos de modo análogo

$$\begin{aligned} d_{\beta^*} &\leq eC|\lambda(N)|\sum_{k=1}^{M} e^{-k(1-\epsilon/2)}\frac{\left(\theta^*_{N_k,N_{k+1}}\right)^{1/p}}{\left(\theta^*_{N_1,N_2}\right)^{1/2}}\begin{cases} q^{1/2}, & 2\leq q\leq\infty, \\ (\ln\theta^*_{N_k,N_{k+1}})^{1/2}, & q=\infty, \end{cases} \\ &+ eC|\lambda(N)|\sum_{k=M+1}^{\infty} e^{-k}\left(\theta^*_{N_k,N_{k+1}}\right)^{1/p-1/q}. \end{aligned}$$

Definição 3.3.4. Sejam N_k, M e $\theta_{N_k,N_{k+1}}$ como na Observação 3.3.2 e M^* e $\theta^*_{N_k,N_{k+1}}$ como na observação anterior. Dizemos que $\Lambda = \{\lambda_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} \in K_{\epsilon,p},\ \epsilon > 0,\ 1 \leq p \leq 2$, se $|\lambda(k+1)| < |\lambda(k)|$, $N_{k+1} > N_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$ e se para todo $N \in \mathbb{N}$ tivermos

$$\sum_{k=1}^{M} e^{-k(1-\epsilon/2)}\frac{\theta^{1/p}_{N_k,N_{k+1}}}{\theta^{1/2}_{N_1,N_2}} \leq C_{\epsilon,p}\theta^{1/p-1/2}_{N_1,N_2}.$$

De modo análogo, dizemos que $\Lambda_* = \{\lambda^*_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} \in K^*_{\epsilon,p},\ \epsilon > 0,\ 1 \leq p \leq 2$, se $|\lambda(k+1)| < |\lambda(k)|$, $N_{k+1} > N_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$ e se para todo $N \in \mathbb{N}$ tivermos

$$\sum_{k=1}^{M^*} e^{-k(1-\epsilon/2)}\frac{\left(\theta^*_{N_k,N_{k+1}}\right)^{1/p}}{\left(\theta^*_{N_1,N_2}\right)^{1/2}} \leq C'_{\epsilon,p}\left(\theta^*_{N_1,N_2}\right)^{1/p-1/2},$$

onde $C_{\epsilon,p}$ e $C'_{\epsilon,p}$ são constantes que dependem somente de ϵ e p.

Uma consequência imediata de tal definição e da Observação 3.3.2 é o seguinte Corolário do Teorema 3.3.1.

Corolário 3.3.5. *Sejam $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ e $\theta_{N_k,N_{k+1}}$ como no Teorema 3.3.1, sejam também $\epsilon > 0,\ N_k,\ M,\ \{m_k\}_{k=0}^M$ e β como na Observação 3.3.2 e $1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$. Suponhamos que $\Lambda \in K_{\epsilon,p}$, para $\epsilon > 0$ fixo. Então existe uma constante $C_{\epsilon,p}$, dependendo somente de ϵ e p, tal que*

$$\begin{aligned} d_\beta(\Lambda U_p, L^q) &\leq C_{\epsilon,p}|\lambda(N)|\theta^{1/p-1/2}_{N_1,N_2}\begin{cases} q^{1/2}, & 2\leq q<\infty, \\ \sup_{1\leq k\leq M}(\ln\theta_{N_k,N_{k+1}})^{1/2}, & q=\infty, \end{cases} \\ &+ C_{\epsilon,p}|\lambda(N)|\sum_{k=M+1}^{\infty} e^{-k}\theta^{1/p-1/q}_{N_k,N_{k+1}}. \end{aligned}$$

Observação 3.3.6. O Corolário 3.3.5 permanece válido, se trocarmos Λ por Λ_*, $\lambda_{\mathbf{k}}$ por $\lambda^*_{\mathbf{k}}$, $\theta_{N_k,N_{k+1}}$ por $\theta^*_{N_k,N_{k+1}}$ e $K_{\epsilon,p}$ por $K^*_{\epsilon,p}$.

3.4 Estimativas Inferiores Gerais para Números de Entropia

Nesta seção, demonstramos a limitação inferior para números de entropia de operadores multiplicadores arbitrários definidos sobre o toro.

Definição 3.4.1. O conjunto polar de um subconjunto compacto K de $\mathbb{R}^n$ é definido por

$$K^\circ = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sup_{y \in K} |\langle x, y\rangle| \leq 1 \right\}$$

e a norma $\|\cdot\|_{K^\circ}$ é definida por

$$\|x\|_{K^\circ} = \sup \{ |\langle x, y\rangle| : y \in K \}, \; x \in \mathbb{R}^n.$$

Teorema 3.4.2. *(Desigualdade de Urysohn, [28], p. 6). Seja K um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. Temos que*

$$\left(\frac{Vol_n(K)}{Vol_n(B^n_{(2)})} \right)^{1/n} \leq \int_{S^{n-1}} \|x\|_{K^\circ} \, d\mu(x),$$

onde $Vol_n(A)$ denota o volume de um subconjunto mensurável A de $\mathbb{R}^n$.

Proposição 3.4.3. *([28], p. 6) Seja V um subconjunto convexo, centralmente simétrico, limitado e absorvente. Então existe uma constante $C > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$\left(\frac{Vol_n(V) Vol_n(V^\circ)}{\left(Vol_n\left(B^n_{(2)}\right)\right)^2} \right)^{1/n} \geq C.$$

Observação 3.4.4. Seja $n = \dim \mathcal{T}^*_{M_1,M_2}$. Como $B^*_{(n,2)}$ é a bola euclidiana de $\mathbb{R}^n$, então os resultados do Teorema 3.4.2 e da Proposição 3.4.3 permanecem válidos se trocarmos $B^n_{(2)}$ por $B^*_{(n,2)}$.

Teorema 3.4.5. *Seja $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ um operador multiplicador, onde $\lambda_k = \lambda(|\ k\ |)$, para alguma função $\lambda : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, tal que $t \mapsto |\lambda(t)|$ é decrescente. Então existe uma constante $C > 0$, dependendo somente de p e q, tal que, para todos $N, k \in \mathbb{N}$ e $n = \sum_{l=0}^{N} \dim \mathcal{H}_l$,*

$$e_k(\Lambda U_p, L^q) \geq C 2^{-k/n} \left(\prod_{l=1}^{N} |\lambda(l)|^{d_l} \right) \vartheta_n,$$

onde $d_l = \dim \mathcal{H}_l$ *e*

$$\vartheta_n = \begin{cases} 1, & p < \infty,\ q > 1, \\ (\ln n)^{-1/2}, & p < \infty, q = 1, \\ (\ln n)^{-1/2}, & p = \infty,\ q > 1, \\ (\ln n)^{-1}, & p = \infty,\ q = 1. \end{cases}$$

Em particular, se $k = n$, *então*

$$e_n(\Lambda U_p, L^q) \ \geq\ C|\lambda(N)|\vartheta_n. \tag{3.40}$$

Demonstração. Se para algum $1 \leq l \leq N$, $\lambda(l) = 0$, então a demonstração é trivial. Vamos assumir então que $\lambda(l) \neq 0$ para todo $1 \leq l \leq N$.

Se Λ_n é o operador identidade, segue pela desigualdade (3.24) que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|^0_{(q)} \ \leq\ \|x\|_{q'},$$

onde $1/q + 1/q' = 1$. Assim se $1 \leq q \leq 2$, segue pelo Teorema 3.4.2 e pelo Teorema 3.1.17 que

$$\begin{aligned} \left(\frac{Vol_n\left(B^n_{(q)}\right)}{Vol_n\left(B^n_{(2)}\right)}\right)^{1/n} &\leq \int_{S^{n-1}} \|x\|^\circ_{(q)}\, d\mu(x) \ \leq\ \int_{S^{n-1}} \|x\|_{(q')}\, d\mu(x) \\ &\leq \left(\int_{S^{n-1}} \|x\|^2_{(q')}\, d\mu(x)\right)^{1/2} \ =\ M(\|\cdot\|_{(q')}) \\ &\leq C_1 \begin{cases} (q')^{1/2}, & 2 \leq q' < \infty, \\ (\ln n)^{1/2}, & q' = \infty, \end{cases} \end{aligned} \tag{3.41}$$

onde $1/q + 1/q' = 1$, ou seja, $2 \leq q' \leq \infty$. De modo análogo, para todo $2 \leq p \leq \infty$ obtemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{Vol_n\left((B^n_{(p)})^\circ\right)}{Vol_n\left(B^n_{(2)}\right)}\right)^{1/n} &\leq \int_{S^{n-1}} \|x\|_{(p)}\, d\mu(x) \ \leq\ \left(\int_{S^{n-1}} \|x\|^2_{(p)}\, d\mu(x)\right)^{1/2} \\ &= M(\|\cdot\|_{(p)}) \ \leq\ C_1 \begin{cases} p^{1/2}, & 2 \leq p < \infty, \\ (\ln n)^{1/2}, & p = \infty. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.42}$$

Segue da Proposição 3.4.3 que existe uma constante absoluta $C_2 > 0$ tal que

$$\left(\frac{Vol_n(B^n_{(p)})Vol_n((B^n_{(p)})^\circ)}{\left(Vol_n\left(B^n_{(2)}\right)\right)^2}\right)^{1/n} \ \geq\ C_2.$$

e obtemos assim de (3.42)

$$\begin{aligned}\left(\frac{Vol_n(B^n_{(p)})}{Vol_n(B^n_{(2)})}\right)^{1/n} &\geq C_2\left(\frac{Vol_n\left((B^n_{(p)})^\circ\right)}{Vol_n(B^n_{(2)})}\right)^{-1/n}\\ &\geq C_2\begin{cases} p^{-1/2}, & 2\leq p<\infty,\\ (\ln n)^{-1/2}, & p=\infty.\end{cases}\end{aligned} \tag{3.43}$$

Seja $x_1,\ldots,x_{N(\epsilon)}$ uma ϵ-rede minimal para $\Lambda_n B^n_{(p)}$ em $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_{(q)})$ com cardinalidade $N(\epsilon)$. Então

$$\Lambda_n B^n_{(p)} \subseteq \bigcup_{k=1}^{N(\epsilon)}(x_k+\epsilon B^n_{(q)}).$$

Comparando os volumes, obtemos

$$Vol_n(\Lambda_n B^n_{(p)}) \leq \epsilon^n N(\epsilon) Vol_n(B^n_{(q)})$$

e consequentemente

$$\left(\frac{Vol_n(\Lambda_n B^n_{(p)})}{Vol_n(B^n_{(2)})}\right)^{1/n} \leq \epsilon(N(\epsilon))^{1/n}\left(\frac{Vol_n(B^n_{(q)})}{Vol_n(B^n_{(2)})}\right)^{1/n}. \tag{3.44}$$

Para $T\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ e $X\subseteq\mathbb{R}^n$, temos $Vol_n(T(X))=(\det T)Vol_n(X)$, onde $\det T$ denota o determinante da matriz do operador T. Logo

$$\frac{\left(Vol_n(\Lambda_n B^n_{(p)})\right)^{1/n}}{\left(Vol_n(B^n_{(2)})\right)^{1/n}} = (det\Lambda_n)^{1/n}\frac{\left(Vol_n(B^n_{(p)})\right)^{1/n}}{\left(Vol_n(B^n_{(2)})\right)^{1/n}}. \tag{3.45}$$

Assim, de (3.43), (3.45), (3.44) e (3.41), segue que

$$\begin{aligned} C_2(det\Lambda_n)^{1/n}\begin{cases} p^{-1/2}, & 2\leq p<\infty,\\ (\ln n)^{-1/2}, & p=\infty,\end{cases} &\leq (det\Lambda_n)^{1/n}\left(\frac{Vol_n(B^n_{(p)})}{Vol_n(B^n_{(2)})}\right)^{1/n}\\ = \left(\frac{Vol_n(\Lambda_n B^n_{(p)})}{Vol_n(B^n_{(2)})}\right)^{1/n} &\leq \epsilon(N(\epsilon))^{1/n}\left(\frac{Vol_n(B^n_{(q)})}{Vol_n(B^n_{(2)})}\right)^{1/n}\\ \leq C_1\epsilon(N(\epsilon))^{1/n}&\begin{cases} (q')^{1/2}, & 2\leq q'<\infty,\\ (\ln n)^{1/2}, & q'=\infty.\end{cases}\end{aligned} \tag{3.46}$$

Tomando $N(\epsilon)=2^{k-1}$, obtemos da definição de números de entropia

$$\epsilon = e_k\left(\Lambda_n B^n_{(p)},(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_{(q)})\right) = e_k(\Lambda U_p\cap\mathcal{T}_N, L^q\cap\mathcal{T}_N).$$

Das Proposições 1.2.4 e 1.2.6, segue que

$$e_k(\Lambda U_p, L^q) \ \geq \ e_k(\Lambda U_p \cap \mathcal{T}_N, L^q) \ \geq \ 2^{-1} e_k(\Lambda U_p \cap \mathcal{T}_N, L^q \cap \mathcal{T}_N)$$

e obtemos assim para $2 \leq p < \infty$ e $1 < q \leq 2$,

$$\begin{aligned} e_k(\Lambda U_p, L^q) \ &\geq \ 2^{-1} C_2 C_1^{-1} (N(\epsilon))^{-1/n} (q')^{-1/2} (det\Lambda_n)^{1/n} p^{-1/2} \\ &\geq \ C_3 2^{-k/n} (det\Lambda_n)^{1/n} \ \geq \ C_4 2^{-k/n} \left(\prod_{l=1}^{N} \lambda(l)^{d_l} \right)^{1/n}, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade vem do fato de que para $\mathbf{k} \in A_l \setminus A_{l-1}$, temos $l-1 \leq |\mathbf{k}| \leq l$ e portanto $\lambda(l) \leq \lambda(|\mathbf{k}|) \leq \lambda(l-1)$. Consideremos agora $1 \leq p < 2$ e $1 < q \leq 2$. Observando que $U_2 \subseteq U_p$, obtemos da Proposição 1.2.4 e da desigualdade precedente que

$$e_k(\Lambda U_p, L^q) \ \geq \ e_k(\Lambda U_2, L^q) \ \geq \ C 2^{-k/n} \left(\prod_{l=1}^{N} \lambda(l)^{d_l} \right)^{1/n}.$$

Para $1 \leq p < \infty$ e $2 < q \leq \infty$, temos $U_q \subseteq U_2$ e obtemos assim da Proposição 1.2.4 e das duas desigualdades anteriores que

$$e_k(\Lambda U_p, L^q) \ \geq \ e_k(\Lambda U_p, L^2) \ \geq \ C 2^{-k/n} \left(\prod_{l=1}^{N} \lambda(l)^{d_l} \right)^{1/n}.$$

Concluímos portanto que para $p < \infty$ e $q > 1$,

$$e_k(\Lambda U_p, L^q) \ \geq \ C 2^{-k/n} \left(\prod_{l=1}^{N} \lambda(l)^{d_l} \right)^{1/n}.$$

Os demais casos seguem com análise inteiramente análoga.

Para demonstrar (3.40), assumimos $k = n$. Como $t \mapsto |\lambda(t)|$ é decrescente, então $|\lambda(1)| \ \geq \ |\lambda(2)| \ \geq \ \cdots \ \geq \ |\lambda(N)|$ e desta forma

$$\prod_{k=1}^{N} |\lambda(k)|^{d_k} \ \geq \ \prod_{k=1}^{N} |\lambda(N)|^{d_k} \ = \ |\lambda(N)|^{\sum_{k=1}^{N} d_k} \ = \ |\lambda(N)|^n,$$

de onde $e_n(\Lambda U_p, L^q) \ \geq \ C|\lambda(N)|\vartheta_n$. Concluindo assim a demonstração. □

Observação 3.4.6. O Teorema 3.4.5 permanece válido se trocarmos Λ por Λ_*, $\lambda_{\mathbf{k}}$ por $\lambda^*_{\mathbf{k}}$, $\mathcal{H}_l$ por $\mathcal{H}^*_l$ e d_l por d^*_l.

3.5 Estimativas Superiores Gerais para Números de Entropia

Nesta seção, demonstramos a limitação superior para números de entropia de operadores multiplicadores arbitrários definidos sobre o toro.

Observação 3.5.1. Consideremos uma sequência de multiplicadores $\Lambda = \{\lambda(|\mathbf{k}|)\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$. Para $k \in \mathbb{N}$ e $1 \leq q \leq \infty$ fixados, definimos

$$\chi_k = 3 \sup_{N\geq 1} \left(\frac{2^{-k+1} Vol_n(B^n_{(2)})}{Vol_n(B^n_{(q)})} \prod_{j=1}^{N} |\lambda(j)|^{d_j} \right)^{1/n},$$

onde $n = \dim \mathcal{T}_N$. Observamos que χ_k depende de k, q e da função λ. Temos

$$\left(\prod_{j=1}^{n} |\lambda(j)|^{d_j} \right)^{1/n} \leq \left(\prod_{j=1}^{N} \left(\sup_{1\leq j\leq N} |\lambda(j)| \right)^{d_j} \right)^{1/n} = \sup_{1\leq j\leq N} |\lambda(j)| \qquad (3.47)$$

e assim

$$\chi_k^{(q)} = \chi_k \leq 3 \sup_{N\geq 1} (2^{-k+1})^{1/n} \left(\frac{Vol_n(B^n_{(2)})}{Vol_n(B^n_{(q)})} \right)^{1/n} \sup_{1\leq j\leq N} |\lambda(j)|$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Por (3.43) e como $B^n_{(q)} \subseteq B^n_{(2)}$ para $2 \leq q \leq \infty$, segue que

$$1 \leq \left(\frac{Vol_n(B^n_{(2)})}{Vol_n(B^n_{(q)})} \right)^{1/n} \leq C \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\ln n)^{1/2}, & q = \infty. \end{cases} \qquad (3.48)$$

De modo análogo, definindo

$$\chi^*_{k,q} = \chi^*_k = 3 \sup_{N\geq 1} \left(\frac{2^{-k+1} Vol_n \left(B^*_{(n,2)} \right)}{Vol_n \left(B^*_{(n,q)} \right)} \prod_{j=1}^{N} |\lambda(j)|^{d^*_j} \right)^{1/n},$$

onde $n = \dim \mathcal{T}^*_N$, é possível mostrar de modo análogo que

$$1 \leq \left(\frac{Vol_n \left(B^*_{(n,2)} \right)}{Vol_n \left(B^*_{(n,q)} \right)} \right)^{1/n} \leq C \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\ln n)^{1/2}, & q = \infty. \end{cases}$$

Lema 3.5.2. *([25]) Seja $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach n-dimensional e seja*

$$M^* = M^*(E) = \int_{S^{n-1}} \|x\|\, d\mu(x).$$

Então existe uma constante positiva C, tal que, para todo $m \in \mathbb{N}$ temos

$$e_m\left(B^n_{(2)}, E\right) \leq \begin{cases} (n/m)^{1/2} M^*, & m \leq n, \\ e^{-m/n} M^*, & m > n. \end{cases}$$

Teorema 3.5.3. *Seja $\lambda : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que $t \mapsto |\lambda(t)|$ é uma função decrescente e seja $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$, $\lambda_k = \lambda(|k|)$. Suponhamos que $\Lambda \in K_{\epsilon,2}$ para algum $\epsilon > 0$. Seja χ_k como na Observação 3.5.1, sejam M, N_l, $\theta_{N_l,N_{l+1}}$ e m_l como na Observação 3.3.2, e seja $\eta = k + \sum_{l=1}^{M} m_l$, $k \in \mathbb{N}$. Então existe uma constante absoluta $C > 0$ tal que, para $2 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq 2$, temos*

$$e_\eta(\Lambda U_p, L^q) \leq C\chi_k,$$

e para $2 \leq p, q \leq \infty$ temos

$$\begin{aligned} & e_\eta(\Lambda U_p, L^q) \\ \leq \; & C\chi_k \left(\left\{ \begin{array}{ll} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ \sup_{1\leq j\leq M} (\ln \theta_{N_j,N_{j+1}})^{1/2}, & q = \infty, \end{array} \right\} + \sum_{j=M+1}^{\infty} e^{-j} \theta_{N_j,N_{j+1}}^{1/2-1/q} \right) \end{aligned} \tag{3.49}$$

Demonstração. Como $\|\cdot\|_q \leq \|\cdot\|_2$ se $1 \leq q \leq 2$ e $U_p \subseteq U_2$ para $2 \leq p \leq \infty$, pela Proposição 1.2.4 basta demonstrarmos o resultado para $p = 2$ e $q \geq 2$. Segue de (3.38), para $p = 2$ que

$$\Lambda U_2 \subseteq \Lambda U_2 \cap \mathcal{T}_N + \bigoplus_{j=1}^{M} |\lambda(N_j)| B_2^{N_j,N_{j+1}} + \bigoplus_{j=M+1}^{\infty} |\lambda(N_j)| \theta_{N_j,N_{j+1}}^{1/2-1/q} B_q^{N_j,N_{j+1}},$$

onde $\mathcal{T}_N = \bigoplus_{j=0}^{N} \mathcal{H}_j$. Usando as Proposições 1.2.4 e 1.2.5, obtemos

$$\begin{aligned} e_\eta &= e_{k+\sum_{l=1}^M m_l}(\Lambda U_2, L^q) \leq e_{k+(\sum_{l=1}^M m_l)+1-1} \Bigg(\Lambda U_2 \cap \mathcal{T}_N + \bigoplus_{l=1}^{M} |\lambda(N_l)| B_2^{N_l,N_{l+1}} \\ &+ \bigoplus_{l=M+1}^{\infty} |\lambda(N_l)| \theta_{N_l,N_{l+1}}^{1/2-1/q} B_q^{N_l,N_{l+1}}, L^q \Bigg) \\ &\leq e_k(\Lambda U_2 \cap \mathcal{T}_N, L^q \cap \mathcal{T}_N) + \sum_{l=1}^{M} |\lambda(N_l)| e_{m_l}\left(B_2^{N_l,N_{l+1}}, L^q \cap \mathcal{T}_{N_l,N_{l+1}}\right) \\ &+ e_1 \left(\bigoplus_{l=M+1}^{\infty} |\lambda(N_l)| \theta_{N_l,N_{l+1}}^{1/2-1/q} B_q^{N_l,N_{l+1}}, L^q \cap \overline{\mathcal{T}}_{N_{M+1}} \right), \end{aligned} \tag{3.50}$$

onde $\overline{\mathcal{T}}_s = \{\varphi \in L^1(\mathbb{T}^d) : \widehat{\varphi}(\mathbf{k}) = 0, \ | \mathbf{k} | \leq s\}$. Usando mais uma vez as Proposições 1.2.4 e 1.2.5, vem que

$$\begin{aligned}
& e_{1+1-1}\left(\bigoplus_{l=M+1}^{\infty} |\lambda(N_l)|\theta_{N_l,N_{l+1}}^{1/2-1/q} B_q^{N_l,N_{l+1}}, L^q \cap \overline{\mathcal{T}}_{N_{M+1}}\right) \\
\leq\ & e_1\left(|\lambda(N_{M+1})|\theta_{N_{M+1},N_{M+2}}^{1/2-1/q} B_q^{N_{M+1},N_{M+2}}, L^q \cap \mathcal{T}_{N_{M+1},N_{M+2}}\right) \\
+\ & e_{1+1-1}\left(\bigoplus_{l=M+2}^{\infty} |\lambda(N_l)|\theta_{N_l,N_{l+1}}^{1/2-1/q} B_q^{N_l,N_{l+1}}, L^q \cap \overline{\mathcal{T}}_{N_{M+2}}\right) \\
\leq\ & e_1\left(|\lambda(N_{M+1})|\theta_{N_{M+1},N_{M+2}}^{1/2-1/q} B_q^{N_{M+1},N_{M+2}}, L^q \cap \mathcal{T}_{N_{M+1},N_{M+2}}\right) \\
+\ & e_1\left(|\lambda(N_{M+2})|\theta_{N_{M+2},N_{M+3}}^{1/2-1/q} B_q^{N_{M+2},N_{M+3}}, L^q \cap \mathcal{T}_{N_{M+2},N_{M+3}}\right) \\
+\ & e_{1+1-1}\left(\bigoplus_{l=M+3}^{\infty} |\lambda(N_l)|\theta_{N_l,N_{l+1}}^{1/2-1/q} B_q^{N_l,N_{l+1}}, L^q \cap \overline{\mathcal{T}}_{N_{M+3}}\right) \\
\leq\ & \cdots \\
\leq\ & \sum_{l=M+1}^{\infty} e_1\left(|\lambda(N_l)|\theta_{N_l,N_{l+1}}^{1/2-1/q} B_q^{N_l,N_{l+1}}, L^q \cap \mathcal{T}_{N_l,N_{l+1}}\right) \\
=\ & \sum_{l=M+1}^{\infty} |\lambda(N_l)|\theta_{N_l,N_{l+1}}^{1/2-1/q} e_1\left(B_q^{N_l,N_{l+1}}, L^q \cap \mathcal{T}_{N_l,N_{l+1}}\right) \\
=\ & \sum_{l=M+1}^{\infty} |\lambda(N_l)|\theta_{N_l,N_{l+1}}^{1/2-1/q}. \qquad (3.51)
\end{aligned}$$

Obtemos assim, de (3.50) e (3.51)

$$\begin{aligned}
e_\eta(\Lambda U_2, L^q) \ \leq\ & e_k(\Lambda U_2 \cap \mathcal{T}_N, L^q \cap \mathcal{T}_N) + \sum_{l=1}^{M} |\lambda(N_l)| e_{m_l}(B_2^{N_l,N_{l+1}}, L^q \cap \mathcal{T}_{N_l,N_{l+1}}) \\
+\ & \sum_{l=M+1}^{\infty} |\lambda(N_l)|\theta_{N_l,N_{l+1}}^{1/2-1/q}. \qquad (3.52)
\end{aligned}$$

Vamos demonstrar primeiramente que

$$e_k(\Lambda U_2 \cap \mathcal{T}_N, L^q \cap \mathcal{T}_N) \ \leq\ \chi_k. \qquad (3.53)$$

Seja $n = \dim \mathcal{T}_N$ e tomemos $\varphi \in B_2^n = U_2 \cap \mathcal{T}_N$. Então

$$\varphi(\mathbf{x}) \ =\ \sum_{|\mathbf{k}| \leq N} \widehat{\varphi}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \ =\ |\lambda(N)|^{-1} \sum_{|\mathbf{k}| \leq N} \lambda(|\mathbf{k}|) \frac{\widehat{\varphi}(\mathbf{k})}{\lambda(|\mathbf{k}|)} |\lambda(N)| e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \ =\ |\lambda(N)|^{-1} \Lambda_n \psi,$$

onde

$$\psi \ =\ \sum_{|\mathbf{k}| \leq N} \frac{\widehat{\varphi}(\mathbf{k})}{\lambda(|\mathbf{k}|)} |\lambda(N)| e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}.$$

Mas
$$\|\psi\|_2^2 \;=\; \sum_{|\mathbf{k}|\le N} \frac{|\widehat{\varphi}(\mathbf{k})|^2}{|\lambda(|\mathbf{k}|)|^2}|\lambda(N)|^2 \;\le\; \sum_{|\mathbf{k}|\le N} |\widehat{\varphi}(\mathbf{k})|^2 \;=\; \|\varphi\|_2^2 \;\le\; 1,$$
onde a primeira desigualdade segue do fato de λ ser uma função decrescente. Logo

$$\varphi \;=\; \lambda(N)^{-1}\Lambda_n\psi, \quad \psi \in B_2^n,$$

de onde $B_2^n \subseteq |\lambda(N)|^{-1}\Lambda_n B_2^n$, portanto $|\lambda(N)|B_2^n \subseteq \Lambda_n B_2^n$ e consequentemente $|\lambda(N)|B_{(2)}^n$
$\subseteq \Lambda_n B_{(2)}^n$. Desta forma, como $U_q \subseteq U_2$ para $q \ge 2$, obtemos

$$|\lambda(N)|B_{(q)}^n \;\subseteq\; |\lambda(N)|B_{(2)}^n \;\subseteq\; \Lambda_n B_{(2)}^n. \tag{3.54}$$

Seja $\Theta = \{z_j\}_{1\le j\le m}$ um subconjunto χ_k-separado maximal de $\Lambda_n B_{(2)}^n$ em $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{(q)})$, ou seja, $\|z_i - z_j\|_{(q)} \ge \chi_k$, para todo $i \ne j$. Segue da maximalidade que Θ é uma χ_k-rede de $\Lambda_n B_{(2)}^n$ em $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{(q)})$ e que as bolas

$$z_j + \frac{\chi_k}{2}B_{(q)}^n, \quad 1 \le j \le m$$

são mutuamente disjuntas. Aplicando (3.54), segue que

$$\begin{aligned}\Lambda_n B_{(2)}^n + \frac{\chi_k}{2}B_{(q)}^n \;&\subseteq\; \Lambda_n B_{(2)}^n + \frac{|\lambda(N)|}{2}B_{(q)}^n \\ \subseteq\; \Lambda_n B_{(2)}^n + \frac{1}{2}\Lambda_n B_{(2)}^n \;&\subset\; \frac{3}{2}\Lambda_n B_{(2)}^n.\end{aligned}$$

Então
$$\bigcup_{j=1}^{m}\left(z_j + \frac{\chi_k}{2}B_{(q)}^n\right) \;\subseteq\; \frac{3}{2}\Lambda_n B_{(2)}^n,$$
onde a união é disjunta. Logo, obtemos em termos de volume

$$\left(\frac{\chi_k}{2}\right)^n m\cdot Vol_n(B_{(q)}^n) \;\le\; \frac{3^n}{2^n}\left(\prod_{j=1}^{N}|\lambda(j)|^{d_j}\right)Vol_n(B_{(2)}^n),$$

e assim
$$m \;\le\; \left(\frac{3}{\chi_k}\right)^n \frac{Vol_n(B_{(2)}^n)}{Vol_n(B_{(q)}^n)}\left(\prod_{j=1}^{N}|\lambda(j)|^{d_j}\right). \tag{3.55}$$

Da definição de χ_k temos

$$\chi_k \;\ge\; 3\left(\frac{2^{-k+1}Vol_n(B_{(2)}^n)}{Vol_n(B_{(q)}^n)}\prod_{j=1}^{N}|\lambda(j)|^{d_j}\right)^{1/n}$$

e obtemos assim

$$\left(\frac{3}{\chi_k}\right)^n \;\leq\; 2^{k-1}\left(\frac{Vol_n(B^n_{(2)})}{Vol_n(B^n_{(q)})}\prod_{j=1}^{N}|\lambda(j)|^{d_j}\right)^{-1}. \tag{3.56}$$

De (3.55) e (3.56), concluímos que a cardinalidade m de uma rede Θ χ_k-separada de $\Lambda_n B^n_{(2)}$ pode ser estimada por $m \leq 2^{k-1}$ e assim (3.53) segue da definição de número de entropia.

Aplicando agora o Lema 3.5.2 ao espaço de Banach $E_j = (\mathbb{R}^{\theta_{N_j,N_{j+1}}}, \|\cdot\|_{(q)})$ e m_j obtemos

$$e_{m_j}(B_2^{N_j,N_{j+1}}, L^q \cap \mathcal{T}_{N_j,N_{j+1}}) \;=\; e_{m_j}(B_{(2)}^{N_j,N_{j+1}}, E_j) \;\ll\; \frac{\theta^{1/2}_{N_j,N_{j+1}}}{m_j^{1/2}} M^*(E_j).$$

Como $m_j = [e^{-\epsilon j}\theta_{N_1,N_2}] + 1 \;\geq\; e^{-\epsilon j}\theta_{N_1,N_2}$ e $M^*(E_j) \leq M(E_j)$, segue que

$$e_{m_j}(B_2^{N_j,N_{j+1}}, L^q \cap \mathcal{T}_{N_j,N_{j+1}}) \;\ll\; \frac{\theta^{1/2}_{N_j,N_{j+1}}}{\theta^{1/2}_{N_1,N_2}} e^{\epsilon j/2} M(E_j).$$

Assim, aplicando o Teorema 3.1.17, obtemos

$$e_{m_j}(B_2^{N_j,N_{j+1}}, L^q \cap \mathcal{T}_{N_j,N_{j+1}}) \;\ll\; \frac{\theta^{1/2}_{N_j,N_{j+1}}}{\theta^{1/2}_{N_1,N_2}} e^{\epsilon j/2} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\ln \theta_{N_j,N_{j+1}})^{1/2}, & q = \infty, \end{cases}$$

e desta forma, como $|\lambda(N_j)| \leq |\lambda(N)|e^{-j+1}$ por definição, e $\Lambda \in K_{\epsilon,2}$, temos

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{M} |\lambda(N_j)| e_{m_j}(B_2^{N_j,N_{j+1}}, L^q \cap \mathcal{T}_{N_j,N_{j+1}}) \\ \ll\; & |\lambda(N)| \sum_{j=1}^{M} e^{-j(1-\epsilon/2)} \frac{\theta^{1/2}_{N_j,N_{j+1}}}{\theta^{1/2}_{N_1,N_2}} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\ln \theta_{N_j,N_{j+1}})^{1/2}, & q = \infty, \end{cases} \\ \ll\; & \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ \sup_{1\leq j\leq M} (\ln \theta_{N_j,N_{j+1}})^{1/2}, & q = \infty, \end{cases} \end{aligned} \tag{3.57}$$

e

$$\sum_{j=M+1}^{\infty} |\lambda(N_j)| \theta^{1/2-1/q}_{N_j,N_{j+1}} \;\leq\; |\lambda(N)| \sum_{j=M+1}^{\infty} e^{-j+1}\theta^{1/2-1/q}_{N_j,N_{j+1}} \;\ll\; \sum_{j=M+1}^{\infty} e^{-j}\theta^{1/2-1/q}_{N_j,N_{j+1}}. \tag{3.58}$$

Finalmente, de (3.52), (3.53), (3.57) e (3.58), obtemos (3.49). □

Observação 3.5.4. O Teorema 3.5.3 permanece válido quando trocamos Λ por Λ_*, λ_k por $\lambda_k^* = \lambda(|k|_*)$, χ_k por χ_k^*, M por M^*, $\theta_{N_l,N_{l+1}}$ por $\theta^*_{N_l,N_{l+1}}$, $K_{\epsilon,2}$ por $K^*_{\epsilon,2}$ e η por $\eta^* = k + \sum_{l=1}^{M} m_l^*, \;\; k \in \mathbb{N}$.

CAPÍTULO 4

Aplicações

Neste capítulo, aplicamos os resultados dos capítulos precedentes na obtenção de estimativas para n-larguras de Kolmogorov e números de entropias de conjuntos de funções suaves sobre o toro $\mathbb{T}^d$, associados à operadores multiplicadores específicos.

Se $\Lambda^{(1)} = \{\lambda_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$, $\lambda_{\mathbf{k}} = \lambda(|\mathbf{k}|)$ e $\Lambda_*^{(1)} = \{\lambda_{\mathbf{k}}^*\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$, $\lambda_{\mathbf{k}}^* = \lambda(|\mathbf{k}|_*)$, onde a função $\lambda : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ é definida por $\lambda(t) = t^{-\gamma}(\ln t)^{-\xi},\ t > 1$ e $\lambda(t) = 0$ para $0 \leq t \leq 1,\ \gamma, \xi \in \mathbb{R},\ \gamma > d/2,\ \xi \geq 0$, temos que $\Lambda^{(1)}U_p$ e $\Lambda_*^{(1)}U_p$ são conjuntos de funções finitamente diferenciáveis sobre $\mathbb{T}^d$. Em particular, se $\xi = 0$, então $\Lambda^{(1)}U_p$ e $\Lambda_*^{(1)}U_p$ são classes do tipo Sobolev em $\mathbb{T}^d$.

Se $\Lambda^{(2)} = \{\lambda_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$, $\lambda_{\mathbf{k}} = \lambda(|\mathbf{k}|)$ e $\Lambda_*^{(2)} = \{\lambda_{\mathbf{k}}^*\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$, $\lambda_{\mathbf{k}}^* = \lambda(|\mathbf{k}|_*)$, onde a função $\lambda : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ é definida por $\lambda(t) = e^{-\gamma t^r},\ \gamma, r > 0$, temos que $\Lambda^{(2)}U_p$ e $\Lambda_*^{(2)}U_p$ são conjuntos de funções infinitamente diferenciáveis $(0 < r < 1)$, analíticas $(r = 1)$ ou inteiras $(r > 1)$ sobre o toro $\mathbb{T}^d$.

Na primeira seção, demonstramos a limitação do operador $\Lambda^{(1)}$ e obtemos estimativas inferiores e superiores para n-larguras de Kolmogorov e para números de entropia de tal operador.

Na segunda seção, demonstramos a limitação do operador $\Lambda^{(2)}$ e obtemos estimativas inferiores e superiores para n-larguras de Kolmogorov, bem como para números de entropia do operador $\Lambda^{(2)}$.

Na terceira e última seção, apresentamos os casos onde as estimativas obtidas são assintoticamente exatas em termos de ordem.

Todas as contas são efetuadas para os operadores do tipo Λ, os resultados para os operadores do tipo Λ_* são obtidos de modo inteiramente análogo e são exibidos por meio de observações ao longo do capítulo.

Usaremos a notação

$$(a)_+ = \begin{cases} a, & a > 0, \\ 0, & a \leq 0. \end{cases}$$

A referência principal para este capítulo é [18] e os resultados obtidos para n-larguras se encontram publicados em [19].

4.1 n-Larguras e Números de Entropia de Conjuntos de Funções Finitamente Diferenciáveis sobre o Toro

Nesta seção, estamos interessados em obter estimativas inferiores e superiores para n-larguras de Kolmogorov e para números de entropia do operador multiplicador $\Lambda^{(1)}$.

Proposição 4.1.1. *Seja $\Lambda^{(1)} = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$, com $\lambda_k = \lambda(|k|)$, onde $\lambda : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ é definida por $\lambda(t) = t^{-\gamma}(\ln t)^{-\xi}$ para $t > 1$ e $\lambda(t) = 0$ para $0 \leq t \leq 1$, com $\gamma, \xi \in \mathbb{R}$, $\gamma > d/2$, $\xi > 0$. Então $\Lambda^{(1)}$ é um operador multiplicador limitado de L^1 em L^2.*

Demonstração. Dada $\varphi \in U_1$, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, seja

$$\varphi_n \; = \; \widehat{\varphi}(\mathbf{0}) + \sum_{l=1}^{n} \sum_{\mathbf{k}\in A_l\setminus A_{l-1}} \widehat{\varphi}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}.$$

Temos que

$$\Lambda^{(1)}\varphi_n(x) \; = \; \sum_{l=2}^{n} \sum_{\mathbf{k}\in A_l\setminus A_{l-1}} \lambda_{\mathbf{k}} \widehat{\varphi}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

e assim como $|\widehat{\varphi}(\mathbf{k})| \ \leq \ \|\varphi\|_1 \leq 1$ e $d_l \asymp l^{d-1}$,

$$
\begin{aligned}
\|\Lambda^{(1)}\varphi_n\|_2^2 &= \int_{\mathbb{T}^d} \Lambda^1\varphi_n(\mathbf{x}) \ \overline{\Lambda^{(1)}\varphi_n}(x) \ d\nu(x) \\
&= \int_{\mathbb{T}^d} \left(\sum_{l=2}^{n} \sum_{\mathbf{k}\in A_l\setminus A_{l-1}} \lambda_{\mathbf{k}}\widehat{\varphi}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\right) \left(\sum_{s=2}^{n} \sum_{\mathbf{j}\in A_s\setminus A_{s-1}} \lambda_{\mathbf{j}}\widehat{\varphi}(\mathbf{j})e^{-i\mathbf{j}\cdot\mathbf{x}}\right) \ d\nu(x) \\
&= \sum_{l=2}^{n} \sum_{\mathbf{k}\in A_l\setminus A_{l-1}} \ \sum_{\mathbf{j}\in A_l\setminus A_{l-1}} \int_{\mathbb{T}^d} \lambda_{\mathbf{k}}\lambda_{\mathbf{j}}\widehat{\varphi}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\widehat{\varphi}(\mathbf{j})e^{-i\mathbf{j}\cdot\mathbf{x}} \ d\nu(\mathbf{x}) \\
&= \sum_{l=2}^{n} \sum_{\mathbf{k}\in A_l\setminus A_{l-1}} \lambda_{\mathbf{k}}^2 \mid \widehat{\varphi}(\mathbf{k}) \mid^2 \\
&\leq \sum_{l=3}^{n} |\lambda(l-1)|^2 \sum_{\mathbf{k}\in A_l\setminus A_{l-1}} \mid \widehat{\varphi}(\mathbf{k}) \mid^2 + \sum_{\mathbf{k}\in A_2\setminus A_1} \lambda_{\mathbf{k}}^2|\widehat{\varphi}(\mathbf{k})|^2 \\
&\leq \sum_{\mathbf{k}\in A_2\setminus A_1} \lambda_{\mathbf{k}}^2 + \sum_{l=3}^{n} |\lambda(l-1)|^2 d_l \\
&\leq C_1 + \sum_{l=3}^{n} |\lambda(l-1)|^2 d_l \ \leq \ C_1 + C_2 \sum_{l=3}^{n} (l-1)^{-2\gamma}(\ln(l-1))^{-2\xi} \ l^{d-1} \\
&\leq C_1 + C_3 \sum_{l=3}^{n} l^{-2\gamma+d-1}(\ln(l-1))^{-2\xi} \ \leq \ C_1 + C_3 \sum_{l=1}^{n} l^{-2\gamma+d-1}. \qquad (4.1)
\end{aligned}
$$

Agora, se $f(x) = x^{-a}$, onde $a > 1$, então

$$
\int_1^{\infty} f(x) \ dx \ = \ \lim_{n\to\infty} \int_1^{n} x^{-a} \ dx \ = \ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a-1}\left(1 - \frac{1}{n^{a-1}}\right) \ = \ \frac{1}{a-1} < \infty.
$$

Desta forma, como $\int_1^{\infty} f(x) \ dx$ converge, então pelo Teste da Integral, a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} n^{-a}$ também converge. Assim, tomando $\gamma > d/2$, teremos $a = -(-2\gamma + d - 1) > 1$ e portanto a série $\sum_{l=1}^{\infty} l^{-2\gamma+d-1}$ converge. Segue então de (4.1) que existe uma constante positiva C_4 tal que

$$
\|\Lambda^{(1)}\varphi_n\|_2^2 \leq C_4, \quad n \in \mathbb{N}^*,
$$

e logo

$$
\|\Lambda^{(1)}\varphi\|_2^2 \ = \ \sup_n \|\Lambda^{(1)}\varphi_n\|_2^2 \ \leq \ C_4,
$$

o que garante a limitação do operador $\Lambda^{(1)}$ de L^1 em L^2, se $\gamma > d/2$. $\square$

Observação 4.1.2. De modo análogo é possível demonstrar que o operador $\Lambda_*^{(1)}$ é limitado de L^1 em L^2.

Teorema 4.1.3. *Seja $\Lambda^{(1)}$ o operador multiplicador definido na Proposição 4.1.1. Então para $\gamma > d/2$, $1 \leq p \leq \infty$, $2 \leq q \leq \infty$ e para todo $m \in \mathbb{N}$, temos*

$$d_m(\Lambda^{(1)}U_p; L^q) \ll m^{-\gamma/d+(1/p-1/2)_+}(\ln m)^{-\xi} \begin{cases} q^{1/2}, & q < \infty, \\ (\ln m)^{1/2}, & q = \infty. \end{cases} \tag{4.2}$$

Demonstração. Como $\gamma > d/2$, segue da Proposição 4.1.1 que o operador multiplicador $\Lambda^{(1)}$ é limitado de L^1 em L^2, condição necessária para aplicar o Corolário 3.3.5.

Fixemos $\delta > 0$ e sejam $\lambda_1, \lambda_2 : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ definidas por $\lambda_1(t) = t^{-\gamma}$ e $\lambda_2(t) = t^{-\gamma-\delta}$. Seja $a > 1$ e sejam $b, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ tais que $e\lambda(b) = \lambda(a)$, $e\lambda_1(b_1) = \lambda_1(a)$ e $e\lambda_2(b_2) = \lambda_2(a)$. Como λ, λ_1 e λ_2 são decrescentes temos $b, b_1, b_2 > a$. Segue que

$$e\lambda_1(b_1) \;=\; \lambda_1(a) \Leftrightarrow b_1 = e^{1/\gamma}a$$

e da mesma forma temos $b_2 = e^{1/(\gamma+\delta)}a$. Além disso,

$$\begin{aligned} b_1^{-\gamma} &= \lambda_1(b_1) \;=\; e^{-1}\lambda_1(a) \;=\; e^{-1}a^{-\gamma} \\ &= e^{-1}a^{-\gamma}(\ln a)^{-\xi}(\ln a)^{\xi} \\ &= e^{-1}\lambda(a)(\ln a)^{\xi} \;=\; \lambda(b)(\ln a)^{\xi} \\ &= b^{-\gamma}(\ln b)^{-\xi}(\ln a)^{\xi} \\ &= b^{-\gamma}\left(\frac{\ln a}{\ln b}\right)^{\xi} \end{aligned}$$

e assim

$$b_1 \;=\; b\left(\frac{\ln b}{\ln a}\right)^{\xi/\gamma}.$$

Como $b > a$, temos $(\ln b)/(\ln a) > 1$ e portanto $b_1 > b$. Da mesma forma mostramos que $b > b_2$. Consequentemente, temos

$$e^{1/(\gamma+\delta)}a \;<\; b \;<\; e^{1/\gamma}a, \tag{4.3}$$

e assim, tomando $a = N_k$, segue de (4.3) que

$$e^{1/(\gamma+\delta)}N_k \;<\; b \;<\; e^{1/\gamma}N_k.$$

Mas, da definição de N_{k+1}, temos $N_k < b \leq N_{k+1} < b + 1$ e portanto

$$e^{1/(\gamma+\delta)}N_k \;\leq\; N_{k+1} \;\leq\; e^{1/\gamma}N_k + 1,\; k \geq 1. \tag{4.4}$$

Como a função $f(x) = x^{d-1}$ é crescente, temos

$$\int_{j-1}^{j} x^{d-1}\,dx \;\le\; j^{d-1} \;\le\; \int_{j}^{j+1} x^{d-1}\,dx. \tag{4.5}$$

Agora, lembrando que $d_l \;= \dim \mathcal{H}_l \;\asymp l^{d-1}$ e usando (4.5), obtemos

$$\begin{aligned}
\theta_{N_k,N_{k+1}} \;&=\; \sum_{s=N_k+1}^{N_{k+1}} \dim \mathcal{H}_s \;\asymp\; \sum_{s=N_k+1}^{N_{k+1}} s^{d-1} \;\le\; \sum_{s=0}^{N_{k+1}-1} s^{d-1} + N_{k+1}^{d-1} \\
&\ll\; \int_0^{N_{k+1}} x^{d-1}dx + N_{k+1}^{d-1} \;=\; N_{k+1}^{d} + N_{k+1}^{d-1} \;\asymp\; N_{k+1}^{d}.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Novamente, usando (4.5)

$$\begin{aligned}
\theta_{N_k,N_{k+1}} \;&=\; \sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}} \dim \mathcal{H}_j \;\asymp\; \sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}} j^{d-1} \;\ge\; \sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}} \int_{j-1}^{j} x^{d-1}\,dx \\
&=\; \int_{N_k}^{N_{k+1}} x^{d-1}\,dx \;\ge\; \int_{(N_{k+1}+N_k)/2}^{N_{k+1}} x^{d-1}\,dx \\
&\asymp\; N_{k+1}^{d} - \left(\frac{N_{k+1}+N_k}{2}\right)^{d} \;=\; N_{k+1}^{d} - \frac{N_{k+1}^{d}}{2^d}\left(1+\frac{N_k}{N_{k+1}}\right)^{d} \\
&=\; N_{k+1}^{d} - \frac{N_{k+1}^{d}}{2^d}\left[1 + d\left(\frac{N_k}{N_{k+1}}\right) + \frac{d(d-1)}{2!}\left(\frac{N_k}{N_{k+1}}\right)^{2} + \cdots + \left(\frac{N_k}{N_{k+1}}\right)^{d}\right] \\
&\ge\; N_{k+1}^{d}\left[1 - 2^{-d}\left(1 + de^{-1/(\gamma+\delta)} + \frac{d(d-1)}{2!}e^{-2/(\gamma+\delta)} + \cdots + e^{-d/(\gamma+\delta)}\right)\right] \\
&=\; N_{k+1}^{d}\,(1 - C_{\gamma,\delta,d})
\end{aligned} \tag{4.7}$$

onde a última desigualdade segue por (4.4). Observemos agora que

$$\begin{aligned}
2^d \;&=\; 1 + d + \frac{d(d-1)}{2!} + \cdots + d + 1 \\
&>\; 1 + de^{-1/(\gamma+\delta)} + \frac{d(d-1)}{2!}e^{-2/(\gamma+\delta)} + \cdots + e^{-d/(\gamma+\delta)}
\end{aligned}$$

donde

$$1 > 2^{-d}\left(1 + de^{-1/(\gamma+\delta)} + \frac{d(d-1)}{2!}e^{-2/(\gamma+\delta)} + \cdots + e^{-d/(\gamma+\delta)}\right) \;=\; C_{\gamma,\delta,d}$$

e obtemos assim de (4.7) que

$$\theta_{N_k,N_{k+1}} \;\gg\; N_{k+1}^{d}. \tag{4.8}$$

Segue então de (4.6) e (4.8) que

$$\theta_{N_k,N_{k+1}} \;\asymp\; N_{k+1}^{d}, \quad k \ge 1. \tag{4.9}$$

Usando a segunda desigualdade em (4.4) obtemos

$$N_{k+1} \;\leq\; e^{k/\gamma}N + (1 + e^{1/\gamma} + \cdots + e^{(k-1)/\gamma}) \;\leq\; C_\gamma e^{k/\gamma}N$$

e usando a primeira obtemos $N_{k+1} \geq e^{k/(\gamma+\delta)}N$, donde

$$e^{k/(\gamma+\delta)}N \;\leq\; N_{k+1} \;\leq\; C_\gamma e^{k/\gamma}N, \quad k \geq 1. \tag{4.10}$$

Seja $M = [\epsilon^{-1}\ln\theta_{N_1,N_2}]$ como na Observação 3.3.2. Então usando (4.4) e (4.9) verificamos que $\ln\theta_{N_1,N_2} \asymp N$ e como $N^d \asymp n$, segue que $\ln\theta_{N_1,N_2} \asymp n$. Assim

$$M \asymp \epsilon^{-1}\ln N \asymp \epsilon^{-1}\ln n.$$

Logo, por (4.9) e (4.10)

$$\begin{aligned}
\sigma &= \sum_{k=M+1}^{\infty} e^{-k}\theta_{N_k,N_{k+1}}^{1/p-1/q} \ll \sum_{k=M+1}^{\infty} e^{-k}\left(e^{\frac{k}{\gamma}}N\right)^{d(1/p-1/q)} \\
&= N^{d(1/p-1/q)} \sum_{k=M+1}^{\infty} e^{-k}e^{kd(1/p-1/q)/\gamma} \\
&= N^{d(1/p-1/q)} \sum_{k=M+1}^{\infty} e^{-k(1-d(1/p-1/q)/\gamma)}
\end{aligned}$$

e como $M \asymp \epsilon^{-1}\ln N$, segue que existe uma constante positiva C tal que

$$\sigma \;\ll\; N^{d(1/p-1/q)} \sum_{k=[C\epsilon^{-1}\ln N]}^{\infty} e^{-k(1-d(1/p-1/q)/\gamma)}. \tag{4.11}$$

Se $|b| < 1$ temos

$$\sum_{k=M}^{\infty} b^k \;=\; b^M\sum_{k=0}^{\infty} b^k \;=\; b^M\frac{1}{1-b}.$$

Como $1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$ e $\gamma > d/2$, temos que $0 \leq 1/p-1/q \leq 1$ e $1-(1/p-1/q)d/\gamma > 0$. Assim

$$\begin{aligned}
\sum_{k=[C\epsilon^{-1}\ln N]}^{\infty} e^{-k(1-d(1/p-1/q)/\gamma)} &\asymp \frac{e^{-(1-d(1/p-1/q)/\gamma)C\epsilon^{-1}\ln N}}{1-e^{-(1-d(1/p-1/q)/\gamma)}} \\
&= \left(e^{\ln N}\right)^{-C(1-d(1/p-1/q)/\gamma)/\epsilon}\frac{1}{1-e^{-(1-d(1/p-1/q)/\gamma)}} \\
&\ll N^{-C(1-d(1/p-1/q)/\gamma)/\epsilon}
\end{aligned}$$

e consequentemente para $\gamma/d > 1/p - 1/q$, obtemos de (4.11)

$$\sigma \;\ll\; N^{d(1/p-1/q)-C(1-d(1/p-1/q)/\gamma)/\epsilon}.$$

Portanto, tomando

$$0 < \epsilon < \frac{C\left(1 - d(1/p - 1/q)/\gamma\right)}{d(1/p - 1/q)},$$

temos

$$\sigma \ll 1. \tag{4.12}$$

Demonstremos agora que $\Lambda^{(1)} \in K_{\epsilon,p}$ para algum $\epsilon > 0$. Segue do fato de $M \asymp \epsilon^{-1} \ln N$, de (4.9) e de (4.10) que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{M} e^{-k(1-\epsilon)} \frac{\theta_{N_k,N_{k+1}}^{1/p}}{\theta_{N_1,N_2}^{1/2}} &\leq \sum_{k=1}^{C\epsilon^{-1}\ln N} e^{-k(1-\epsilon)} \frac{\theta_{N_k,N_{k+1}}^{1/p}}{\theta_{N_1,N_2}^{1/2}} \\
&\ll \sum_{k=1}^{C\epsilon^{-1}\ln N} e^{-k(1-\epsilon)} \frac{\left(e^{k/\gamma}N\right)^{d/p}}{\left(e^{1/(\gamma+\delta)}N\right)^{d/2}} \\
&\ll N^{d(1/p-1/2)} \sum_{k=1}^{C\epsilon^{-1}\ln N} e^{-k(1-\epsilon-d/\gamma p)}.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Como $\gamma/d > 1/2 > 1/p$, temos $t = -\left(1 - \epsilon - d/\gamma p\right) < 0$ se $0 < \epsilon < 1 - d/\gamma p$ e consequentemente

$$\sum_{k=1}^{C\epsilon^{-1}\ln N} e^{-k(1-\epsilon-d/\gamma p)} = \sum_{k=1}^{C\epsilon^{-1}\ln N} \left(e^{t}\right)^{k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{t}\right)^{k} = \frac{1}{1-e^{t}} = \frac{1}{1-e^{-(1-\epsilon-d/\gamma p)}}.$$

Segue então de (4.13) que

$$\sum_{k=1}^{M} e^{-k(1-\epsilon)} \frac{\theta_{N_k,N_{k+1}}^{1/p}}{\theta_{N_1,N_2}^{1/2}} \leq C_{\epsilon,p} N^{d(1/p-1/2)}. \tag{4.14}$$

De (4.10) temos que existe uma constante universal C_1 satisfazendo $C_1 e^{d/(\gamma+\delta)} N^d \leq \theta_{N_1,N_2}$ e como $1/p > 1/2$ já que $1 \leq p \leq 2$, segue que

$$N^{d(1/p-1/2)} \leq C_1^{-(1/p-1/2)} e^{-d(1/p-1/2)/(\gamma+\delta)} \theta_{N_1,N_2}^{1/p-1/2}.$$

Portanto por (4.14)

$$\sum_{k=1}^{M} e^{-k(1-\epsilon)} \frac{\theta_{N_k,N_{k+1}}^{1/p}}{\theta_{N_1,N_2}^{1/2}} \leq C'_{\epsilon,p} \theta_{N_1,N_2}^{1/p-1/2}, \tag{4.15}$$

isto é $\Lambda^{(1)} \in K_{2\epsilon,p}$. Segue assim do Corolário 3.3.5 que, para $1 \leq p \leq 2$,

$$\begin{aligned}
d_\beta(\Lambda^{(1)}U_p, L^q) &\ll |\lambda(N)| \theta_{N_1,N_2}^{1/p-1/2} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ \sup_{1\leq k\leq M} (\ln \theta_{N_k,N_{k+1}})^{1/2}, & q = \infty, \end{cases} \\
&+ |\lambda(N)| \sum_{k=M+1}^{\infty} e^{-k} \theta_{N_k,N_{k+1}}^{1/p-1/q}.
\end{aligned}$$

De (4.12) obtemos

$$d_\beta(\Lambda^{(1)}U_p, L^q) \quad \ll \quad |\lambda(N)|\theta_{N_1,N_2}^{1/p-1/2} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \le q < \infty, \\ \sup_{1\le k\le M}(\ln \theta_{N_k,N_{k+1}})^{1/2}, & q=\infty, \end{cases} + |\lambda_N|.$$

Para $1 \le k \le M$ temos de (4.9), (4.10), da definição de M, e do fato que $n \asymp N^d$,

$$\begin{aligned} \theta_{N_k,N_{k+1}} &\ll (e^{k/\gamma}N)^d \le (e^{M/\gamma}N)^d \le e^{(dC\ln N)/\gamma\epsilon}N^d \\ &= N^{d+dC/\gamma\epsilon} = (N^d)^{1+C/\gamma\epsilon} \ll n^{1+C/\gamma\epsilon}. \end{aligned}$$

Logo

$$\ln(\theta_{N_k,N_{k+1}}) \ll \ln(n^{1+C/\gamma\epsilon}) = (1+C/\gamma\epsilon)\ln n \ll \ln n$$

e assim segue que $\sup_{1\le k\le M}(\ln \theta_{N_k,N_{k+1}})^{1/2} \ll (\ln n)^{1/2}$, donde

$$d_\beta(\Lambda^{(1)}U_p, L^q) \quad \ll \quad |\lambda(N)|\theta_{N_1,N_2}^{1/p-1/2} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \le q < \infty, \\ (\ln n)^{1/2}, & q=\infty. \end{cases}$$

Além disso, de (4.9) e (4.10), temos que $\theta_{N_1,N_2}^{1/p-1/2} \ll N^{d(1/p-1/2)}$ e portanto

$$\begin{aligned} d_\beta(\Lambda^{(1)}U_p, L^q) &\ll |\lambda(N)|N^{d(1/p-1/2)} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \le q < \infty, \\ (\ln n)^{1/2}, & q=\infty, \end{cases} \\ &= N^{-\gamma}N^{d(1/p-1/2)}(\ln N)^{-\xi} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \le q < \infty, \\ (\ln n)^{1/2}, & q=\infty. \end{cases} \end{aligned}$$

Agora, como $n \asymp N^d$, segue que $N^{-\gamma} \asymp n^{-\gamma/d}$, $N^{d(1/p-1/2)} \asymp n^{(1/p-1/2)}$ e $(\ln N)^{-\xi} \asymp (\ln N^d)^{-\xi} \asymp (\ln n)^{-\xi}$. Consequentemente

$$d_\beta(\Lambda^{(1)}U_p, L^q) \ll n^{-\gamma/d+(1/p-1/2)}(\ln n)^{-\xi} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \le q < \infty, \\ (\ln n)^{1/2}, & q=\infty. \end{cases} \tag{4.16}$$

Da Observação 3.3.2 vem que

$$\beta = \sum_{s=0}^{N} \dim \mathcal{H}_s + \sum_{j=1}^{M} m_j \asymp n + \sum_{j=1}^{M} e^{-\epsilon j}\theta_{N_1,N_2}.$$

Como $n \asymp N^d$ e $M \asymp \epsilon^{-1}\ln N$, segue da definição de β e de (4.9) e (4.10) que

$$\beta \ll N^d + e^{d/\gamma}N^d \sum_{j=1}^{[C\epsilon^{-1}\ln N]} (e^{-\epsilon})^j \ll N^d,$$

isto é, existe uma constante C_2 tal que $\beta \leq C_2 N^d$. Dado $m \in \mathbb{N}$, seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $C_2 N^d \leq m \leq C_2(N+1)^d$. Segue do Teorema 1.1.10 (d) e de (4.16) que

$$\begin{aligned} d_m(\Lambda^{(1)}U_p, L^q) &\leq d_{C_2N^d}(\Lambda^{(1)}U_p, L^q) \leq d_\beta(\Lambda^{(1)}U_p, L^q) \\ &\ll n^{-\gamma/d+(1/p-1/2)}(\ln n)^{-\xi} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\ln n)^{1/2}, & q = \infty. \end{cases} \end{aligned}$$

Mas, $N^d \asymp n$ e assim $C_3 n \leq m \leq C_2(N+1)^d \leq C_4 N^d \leq C_5 n$, donde $m \asymp n$ e portanto

$$d_m(\Lambda^{(1)}U_p, L^q) \ll m^{-\gamma/d+(1/p-1/2)}(\ln m)^{-\xi} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\ln m)^{1/2}, & q = \infty, \end{cases}$$

para $1 \leq p \leq 2$. O caso $2 \leq p \leq \infty$, segue do fato de $\Lambda(U_p) \subset \Lambda(U_2)$. $\square$

Teorema 4.1.4. *Seja $\Lambda^{(1)}$ o operador multiplicador definido na Proposição 4.1.1 . Então para todo $n \in \mathbb{N}$, temos*

$$d_n(\Lambda^{(1)}U_p, L^q) \gg n^{-\gamma/d}(\ln n)^{-\xi}\vartheta_n,$$

onde

$$\vartheta_n = \begin{cases} 1, & 1 \leq p \leq 2,\ 1 < q \leq 2, \\ 1, & 2 \leq p < \infty, 2 \leq q \leq \infty, \\ 1, & 1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty, \\ (\ln n)^{-1/2}, & 1 \leq p \leq 2,\ q = 1, \\ (\ln n)^{-1/2}, & p = \infty,\ 2 \leq q \leq \infty. \end{cases}$$

Demonstração. Sabemos que $d_k \asymp k^{d-1}$ e $n \asymp N^d$. Assim

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{N} |\lambda_k|^{-2}\, d_k\right)^{-1/2} &\asymp \left(\sum_{k=1}^{N} \left(k^{-\gamma}(\ln k)^{-\xi}\right)^{-2} k^{d-1}\right)^{-1/2} = \left(\sum_{k=1}^{N} k^{2\gamma+d-1}(\ln k)^{2\xi}\right)^{-1/2} \\ &\gg \left(\sum_{k=1}^{N} N^{2\gamma+d-1}(\ln N)^{2\xi}\right)^{-1/2} = \left(N^{-\gamma-d/2}\right)(\ln N)^{-\xi} \\ &\asymp n^{-\gamma/d-1/2}(\ln n)^{-\xi}. \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema 3.2.3 para $\lambda = 1/2$, obtemos

$$\begin{aligned} d_{[(n-2)/2]}(\Lambda^{(1)}U_p, L^q) &\geq C(1-1/2)^{1/2} \begin{cases} (1-1/q)^{1/2} n^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{N} |\lambda_k|^{-2} d_k\right)^{-1/2}, & \text{q} > 1, \\ (n/\ln\ n)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{N} |\lambda_k|^{-2} d_k\right)^{-1/2}, & \text{q} = 1, \end{cases} \\ &\gg n^{1/2} n^{-\gamma/d-1/2} (\ln n)^{-\xi}\, \vartheta_n \\ &= n^{-\gamma/d} (\ln n)^{-\xi}\, \vartheta_n. \end{aligned}$$

Finalmente, tomando $m = [n/3] \leq [(n-2)/2] \leq n$ temos que

$$d_m(\Lambda^{(1)}U_p, L^q) \ \geq\ d_{[(n-2)/2]}(\Lambda^{(1)}U_p, L^q) \ \geq\ n^{-\gamma/d}\, (\ln n)^{-\xi}\ \vartheta_n \ \gg\ m^{-\gamma/d}\, (\ln m)^{-\xi}\ \vartheta_m.$$

. $\square$

Observação 4.1.5. Efetuando simples adaptações nas demonstrações é possível mostrar que os Teoremas 4.1.3 e 4.1.4 permanecem válidos quando trocamos o operador $\Lambda^{(1)}$ pelo operador $\Lambda_*^{(1)}$.

Lema 4.1.6. *Para $\gamma, \xi > 0$ e $k \in \mathbb{N}$, seja $g : [2, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por*

$$g(x) \ = \ -\frac{k(\ln 2)}{x} - \frac{\gamma}{d} \ln x - \xi \ln(\ln x).$$

Então existem constantes $C_1, C_2, \overline{C} > 0$ dependendo somente de γ, ξ, d, tais que o máximo da função g é assumido em um ponto x_k satisfazendo

$$C_1 k \leq x_k \leq C_2 k, \quad k \geq 1$$

e

$$g(x_k) \ \leq \ \overline{C} - \frac{\gamma}{d} \ln k - \xi \ln(\ln k).$$

Demonstração. Temos

$$g'(x) \ = \ \frac{1}{x}\left(\frac{k(\ln 2)}{x} - \frac{\gamma}{d} - \frac{\xi}{\ln x}\right)$$

e assim

$$g'(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ x \ = \ k(\ln 2) d\, \frac{\ln x}{\gamma \ln x + d\xi}. \tag{4.17}$$

Seja

$$f(x) \ = \ x - k(\ln 2) d \frac{\ln x}{\gamma \ln x + d\xi}, \quad x \geq 2.$$

Então $g^{'}(x) = 0$ se e somente se $f(x) = 0$. Verificamos que para k suficientemente grande: f assume valores positivos e negativos, $f^{'}$ é crescente, existe $x_0 > 2$ tal que $f^{'}(x) < 0$ se $x < x_0$ e $f^{'}(x) > 0$ para $x > x_0$, $f(2) < 0$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Assim f possui um único ponto crítico que é ponto de mínimo local e também global. Podemos concluir por essas considerações que f se anula em um único ponto x_k e consequentemente $g^{'}$ se anula somente em x_k. Verificamos também que para k suficientemente grande $g^{'}(x) > 0$ para x pequeno e que $g^{'}(x) < 0$ para x grande. Assim x_k é o único ponto crítico de g que é um ponto de máximo global e portanto $g(x_k)$ é o valor máximo absoluto de g.

Seja agora $h(x) = (\ln x)/(\gamma \ln x + d\xi)$. Então

$$h^{'}(x) = \frac{d\xi}{(\gamma \ln x + d\xi)^2} \ > \ 0, \qquad x \geq 2,$$

logo h é crescente em $[2, \infty)$. Como $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 1/\gamma$, concluímos que $h(2) \leq h(x) \leq 1/\gamma$, ou seja

$$\frac{\ln 2}{\gamma \ln 2 + d\xi} \ \leq \ \frac{\ln x}{\gamma \ln x + d\xi} \ \leq \ \frac{1}{\gamma}$$

e portanto

$$\frac{(\ln 2)^2 d}{\gamma \ln 2 + d\xi} k \ \leq \ k(\ln 2)d \, \frac{\ln x}{\gamma \ln x + d\xi} \ \leq \ \frac{(\ln 2)d}{\gamma} k.$$

Assim, por (4.17), existem constantes C_1, C_2 que dependem somente de d, γ, ξ satisfazendo

$$C_1 k \ \leq \ x_k \ \leq \ C_2 k, \qquad k \geq 1.$$

Seja então, $C_1 \leq C \leq C_2$ tal que $x_k = Ck$. Assim

$$\begin{aligned} g(x_k) \ &= \ g(Ck) \ = \ -\frac{k \ln 2}{Ck} - \frac{\gamma}{d} \ln(Ck) - \xi \ln(\ln(Ck)) \\ &\leq \ \overline{C} - \frac{\gamma}{d} \ln k - \xi \ln(\ln k), \end{aligned}$$

onde $\overline{C}$ é tomada satisfazendo $\overline{C} \geq -\ln 2/C$. □

Teorema 4.1.7. *Seja $\Lambda^{(1)}$ o operador multiplicador definido na Proposição 4.1.1. Então*

$$e_k(\Lambda^{(1)} U_p, L^q) \ \ll \ k^{-\gamma/d} (\ln k)^{-\xi} \begin{cases} 1, & 2 \leq p \leq \infty, \, q < \infty, \\ (\ln k)^{1/2}, & 2 \leq p \leq \infty, q = \infty, \end{cases} \tag{4.18}$$

e

$$e_k(\Lambda^{(1)} U_p, L^q) \ \gg \ k^{-\gamma/d} (\ln k)^{-\xi} \begin{cases} 1, & p < \infty, \, q > 1, \\ (\ln k)^{-1/2}, & p < \infty, \, q = 1, \\ (\ln k)^{-1/2}, & p = \infty, \, q > 1, \\ (\ln k)^{-1}, & p = \infty, \, q = 1. \end{cases} \tag{4.19}$$

Demonstração. Observando que $|\lambda(2)| \geq \cdots \geq |\lambda(N)|$, obtemos de (3.40)

$$e_n(\Lambda^{(1)}U_p, L^q) \gg |\lambda(N)| \begin{cases} 1, & p < \infty,\ q > 1, \\ (\ln n)^{-1/2}, & p < \infty,\ q = 1, \\ (\ln n)^{-1/2}, & p = \infty,\ q > 1, \\ (\ln n)^{-1}, & p = \infty,\ q = 1, \end{cases}$$

onde $n = \dim \mathcal{T}_N$. Como $n \asymp N^d$, temos que $\lambda(N) = N^{-\gamma}(\ln N)^{-\xi} \asymp n^{-\gamma/d}(\ln n)^{-\xi}$, e obtemos assim

$$e_n(\Lambda^{(1)}U_p, L^q) \gg n^{-\gamma/d}(\ln n)^{-\xi} \begin{cases} 1, & p < \infty,\ q > 1, \\ (\ln n)^{-1/2}, & p < \infty,\ q = 1, \\ (\ln n)^{-1/2}, & p = \infty,\ q > 1, \\ (\ln n)^{-1}, & p = \infty,\ q = 1. \end{cases}$$

Agora, se $k \in \mathbb{N}$, $\dim \mathcal{T}_{N-1} \leq k \leq \dim \mathcal{T}_N$, obtemos do Teorema 1.1.10 (d) e da desigualdade acima

$$d_k(\Lambda^{(1)}U_p, L^q) \geq d_{\dim \mathcal{T}_N}(\Lambda^{(1)}U_p, L^q) \gg n^{-\gamma/d}(\ln n)^{-\xi} \begin{cases} 1, & p < \infty,\ q > 1, \\ (\ln n)^{-1/2}, & p < \infty,\ q = 1, \\ (\ln n)^{-1/2}, & p = \infty,\ q > 1, \\ (\ln n)^{-1}, & p = \infty,\ q = 1. \end{cases}$$

Mas, $n \asymp N^d \asymp (N-1)^d \asymp \dim \mathcal{T}_{N-1} \leq k \leq \dim \mathcal{T}_N = n$, donde $k \asymp n$. Obtemos assim (4.19) da desigualdade acima. Observemos agora que

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \left(\prod_{j=2}^{N} |\lambda(j)|^{d_j} \right)^{1/n} \geq \left(\prod_{j=2}^{N} |\lambda(N)|^{d_j} \right)^{1/n} = \left(|\lambda(N)|^{\sum_{j=2}^{N} d_j} \right)^{1/n} \\ &\geq |\lambda(N)| = N^{-\gamma}(\ln N)^{-\xi} \asymp n^{-\gamma/d}(\ln n)^{-\xi}, \end{aligned} \tag{4.20}$$

já que $|\lambda(N)| < 1$ e $n \asymp N^d$. Além disso

$$\begin{aligned} \ln \sigma_n &= \ln \left(\prod_{j=2}^{N} |\lambda(j)|^{d_j} \right)^{1/n} = \frac{1}{n} \sum_{j=2}^{N} d_j \ln |\lambda(j)| \\ &\leq -\frac{\gamma}{n} \sum_{j=3}^{N} d_j \ln j - \frac{\xi}{n} \sum_{j=3}^{N} d_j \ln(\ln j) + C_1. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Da Proposição 2.2.4, temos $d_j \geq E j^{d-1} - C_2 j^{d-2}$, onde $E = \dfrac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$ e C_2 é uma constante positiva. Assim, definindo

$$f(x) = E x^{d-1} \ln x - C_2 x^{d-2} \ln x \quad \text{e} \quad g(x) = E x^{d-1} \ln(\ln x) - C_2 x^{d-2} \ln(\ln x),$$

temos

$$\frac{1}{n}\sum_{j=3}^{N} d_j \ln j \;\geq\; \frac{1}{n}\sum_{j=3}^{N} f(j) \;\geq\; \frac{1}{n}\int_2^N f(x)\,dx$$

e

$$\frac{1}{n}\sum_{j=3}^{N} d_j \ln(\ln j) \;\geq\; \frac{1}{n}\sum_{j=3}^{N} g(j) \;\geq\; \frac{1}{n}\int_2^N g(x)\,dx.$$

Resolvendo as integrais, obtemos

$$\int_2^N f(x)\,dx \;\geq\; \frac{E}{d}N^d \ln N - \frac{C_2}{d-1}N^{d-1}\ln N + C_3$$

e

$$\int_2^N g(x)\,dx \;\geq\; \frac{E}{d}N^d \ln(\ln N) - \frac{C_2}{d-1}N^{d-1}\ln(\ln N) + C_4.$$

Assim

$$\frac{1}{n}\sum_{j=3}^{N} d_j \ln j \;\geq\; \frac{E}{nd}\,N^d \ln N - \frac{C_2}{n(d-1)}N^{d-1}\ln N + C_3,$$

e

$$\frac{1}{n}\sum_{j=3}^{N} d_j \ln(\ln j) \;\geq\; \frac{E}{nd}\,N^d \ln(\ln N) - \frac{C_2}{n(d-1)}N^{d-1}\ln(\ln N) + C_4.$$

Da Proposição 2.2.4, temos $\frac{1}{n} \;\geq\; \frac{1}{FN^d} - \frac{C}{F^2N^{d+1}}$, onde $F = E/d$ e portanto

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{j=3}^{N} d_j \ln j \;&\geq\; \left(\frac{1}{FN^d} - \frac{C}{F^2N^{d+1}}\right)\left(\frac{E}{d}\,N^d \ln N - \frac{C_2}{d-1}N^{d-1}\ln N + C_3\right)\\ &\geq\; \ln N + C_5. \end{aligned} \tag{4.22}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{j=3}^{N} d_j \ln(\ln j) \;&\geq\; \left(\frac{1}{FN^d} - \frac{C}{F^2N^{d+1}}\right)\left(\frac{E}{d}\,N^d \ln(\ln N) - \frac{C_2}{d-1}N^{d-1}\ln(\ln N) + C_4\right)\\ &\geq\; \ln(\ln N) + C_6. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Desta forma, obtemos de (4.21), (4.22), (4.23)

$$\begin{aligned}\ln \sigma_n \;&\leq\; -\gamma \ln N - \gamma C_5 - \xi \ln(\ln N) - \xi C_6 + C_1\\ &=\; -\gamma \ln N - \xi \ln(\ln N) + C_7\end{aligned}$$

e portanto, como $N \asymp n^d$

$$\begin{aligned}\sigma_n \;&\leq\; e^{C_7}\, e^{-\gamma \ln N} e^{-\xi \ln(\ln N)} \;\ll\; e^{(\ln N)^{-\gamma}} e^{(\ln(\ln N))^{-\xi}}\\ &=\; N^{-\gamma}(\ln N)^{-\xi} \;\asymp\; n^{-\gamma/d}(\ln n)^{-\xi}.\end{aligned} \tag{4.24}$$

De (4.20) e (4.24), vem que

$$\sigma_n \asymp n^{-\gamma/d}(\ln n)^{-\xi}. \tag{4.25}$$

Seja $2 \leq q < \infty$. De (3.48) e (4.25), obtemos

$$\begin{aligned}\chi_k &= 3\sup_{N\geq 1}\left(\frac{2^{-k+1}Vol_n(B^n_{(2)})}{Vol_n(B^n_{(q)})}\prod_{j=1}^{N}|\lambda(j)|^{d_j}\right)^{1/n}\\ &\asymp \sup_{N\geq 1} 2^{-k/n}\sigma_n \asymp \sup_{N\geq 1} 2^{-k/n}n^{-\gamma/d}(\ln n)^{-\xi}. \end{aligned}\tag{4.26}$$

Definimos

$$g(x) = -\frac{k}{x}\ln 2 - \frac{\gamma}{d}\ln x - \xi\ln(\ln x).$$

Segue então de (4.26) e do Lema 4.1.6, que para $2 \leq q < \infty$,

$$\begin{aligned}\chi_k &\asymp \sup_{N\geq 1} e^{g(n)} = e^{\sup_N g(n)} \asymp e^{g(x_k)}\\ &\leq e^{\overline{C}-(\gamma/d)\ln k - \xi\ln(\ln k)} \asymp k^{-\gamma/d}(\ln k)^{-\xi}.\end{aligned}$$

Segue de (4.15) para $p = 2$ que $\Lambda^{(1)} \in K_{2\epsilon,2}$. Desta forma, aplicando o Teorema 3.5.3 e observando que $\displaystyle\sum_{j=M+1}^{\infty} e^{-j}\theta^{1/2-1/q}_{N_j,N_{j+1}} \ll 1$ (ver (4.12)), vem que

$$e_\eta(\Lambda^{(1)}U_p, L^q) \ll \chi_k \ll k^{-\gamma/d}(\ln k)^{-\xi}, \quad 2 \leq p \leq \infty,\ 2 \leq q < \infty. \tag{4.27}$$

Seja $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $x_k \in [n_k, n_{k+1})$. Então $e^{g(n_k)} \asymp e^{g(x_k)} \asymp \chi_k$ e $n_k \asymp x_k \asymp k$. Aplicamos o Teorema 3.5.3 para k e $N = [(n_k)^{1/d}] \asymp k^{1/d}$ e assim $n = \dim \mathcal{T}_N \asymp n_k \asymp k$. Da Observação 3.3.2, de (4.9), (4.10) e do fato de que $n \asymp N^d$, temos

$$\eta = k + \sum_{j=1}^{M} m_j \asymp k + \sum_{j=1}^{M} e^{-\epsilon j}\theta_{N_1,N_2} \asymp k + N^d \asymp k + n \asymp k$$

e segue então de (4.27)

$$e_k(\Lambda^{(1)}U_p, L^q) \ll k^{-\gamma/d}(\ln k)^{-\xi}, \quad 2 \leq p \leq \infty,\ 2 \leq q < \infty. \tag{4.28}$$

Para $2 \leq p \leq \infty$ e $q = \infty$, usando (3.48), obtemos com raciocínio inteiramente análogo

$$e_k(\Lambda^{(1)}U_p, L^q) \ll k^{-\gamma/d}(\ln k)^{-\xi}(\ln k)^{1/2}. \tag{4.29}$$

De (4.28) e (4.29), finalmente obtemos (4.18), concluindo a demonstração.

□

Observação 4.1.8. O Teorema 4.1.7 permanece válido se trocarmos o operador $\Lambda^{(1)}$ pelo operador $\Lambda^{(1)}_*$, bastando para isso promover simples adaptações na demonstração.

4.2 n-Larguras e Números de Entropia de Conjuntos de Funções Infinitamente Diferenciáveis sobre o Toro

Nesta seção, concentraremos nossos esforços na obtenção de estimativas inferiores e superiores para n-larguras de Kolmogorov e para números de entropia para o operador $\Lambda^{(2)}$.

Proposição 4.2.1. *Seja $\Lambda^{(2)} = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$, com $\lambda_k = \lambda(|k|)$, onde $\lambda : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por $\lambda(t) = e^{-\gamma t^r}$, $\gamma, r > 0$. Então $\Lambda^{(2)}$ é um operador multiplicador limitado de L^p em L^q, para $1 \leq p, q \leq \infty$.*

Demonstração. Demonstraremos a limitação do operador $\Lambda^{(2)}$ para $p = 1$ e $q = \infty$ e os demais casos seguirão de imediato das desigualdades entre as normas de L^p e L^q. Seja $\varphi \in U_1$. Temos que

$$\Lambda^{(2)}\varphi(\mathbf{x}) \sim \widehat{\varphi}(\mathbf{0}) + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\mathbf{k}\in A_l\setminus A_{l-1}} \lambda_{\mathbf{k}}\widehat{\varphi}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}.$$

Como $|\widehat{\varphi}(\mathbf{0})| \leq \|\varphi\|_1 \leq 1$, segue que

$$\|\Lambda^{(2)}\varphi\|_\infty \leq 1 + \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{T}^d} \sum_{l=1}^{\infty} \left| \sum_{\mathbf{k}\in A_l\setminus A_{l-1}} \lambda_{\mathbf{k}}\widehat{\varphi}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right| \leq 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \|a_l\|_\infty,$$

onde $a_l(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in A_l\setminus A_{l-1}} \lambda_{\mathbf{k}}\widehat{\varphi}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$. Sejam

$$\begin{aligned} D_l(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{k}\in A_l\setminus A_{l-1}} \lambda_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \\ \overline{D}_l(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{k}\in A_l\setminus A_{l-1}} \lambda_{\mathbf{k}}^{1/2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

Temos que $D_l = \overline{D}_l * \overline{D}_l$ e $a_l = D_l * \varphi$. Segue pela Desigualdade de Young, pela Observação 2.1.13 e pela Proposição 2.2.4 que

$$\begin{aligned} \|D_l\|_\infty &= \|\overline{D}_l * \overline{D}_l\|_\infty \leq \|\overline{D}_l\|_2 \|\overline{D}_l\|_2 = \sum_{\mathbf{k}\in A_l\setminus A_{l-1}} \lambda_{\mathbf{k}} \\ &\leq \lambda(l-1)\#(A_l \setminus A_{l-1}) = \lambda(l-1)d_l \leq C_1\lambda(l-1)l^{d-1} \end{aligned}$$

e assim

$$\|a_l\|_\infty = \|D_l * \varphi\|_\infty \leq \|D_l\|_\infty \|\varphi\|_1 \leq C_1\lambda(l-1)l^{d-1}. \tag{4.30}$$

Agora, definimos $f(x) = e^{-\gamma x^r} x^{d+1}$ para $x \geq 0$. Nestas condições,

$$f'(x) = e^{-\gamma x^r}\left(-\gamma r x^{d+r} + (d+1)x^d\right)$$

e desta forma $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \left(\frac{d+1}{\gamma r}\right)^{1/r}$. É fácil ver que $f'(x) < 0$ para todo $x > \left(\frac{d+1}{\gamma r}\right)^{1/r}$ e que $f'(x) > 0$ para todo $x < \left(\frac{d+1}{\gamma r}\right)^{1/r}$. Assim $x_0 = \left(\frac{d+1}{\gamma r}\right)^{1/r}$ é um máximo absoluto para f em $[0,\infty)$, donde $f(x) \leq f(x_0) = C_2,\ x \geq 0$. Consequentemente

$$e^{-\gamma l^r} l^{d+1} \ = \ f(l) \ \leq \ C_2, \ \ \forall\, l \in \mathbb{N} \implies e^{-\gamma l^r} l^{d-1} \ \leq \ C_2 l^{-2}, \ \ \forall\, l \in \mathbb{N}.$$

Voltando em (4.30), obtemos $\|a_l\|_\infty \leq C_3(l-1)^{-2}$, para $l \geq 2$ e assim

$$\begin{aligned} \|\Lambda^{(2)}\varphi\|_\infty \ &\leq \ 1 + \|a_1\|_\infty + \sum_{l=2}^{\infty} \|a_l\|_\infty \ \leq \ C_4 + C_3 \sum_{l=2}^{\infty} (l-1)^{-2} \\ &= \ C_4 + C_3 \sum_{j=1}^{\infty} j^{-2} \ = \ C_5, \end{aligned}$$

já que a série $\sum_{j=1}^{\infty} j^{-2}$ é convergente. Portanto $\Lambda^{(2)}$ é limitado de $L^1(\mathbb{T}^d)$ em $L^\infty(\mathbb{T}^d)$ e consequentemente de $L^p(\mathbb{T}^d)$ em $L^q(\mathbb{T}^d)$, para $1 \leq p, q \leq \infty$. □

Observação 4.2.2. De modo análogo é possível demonstrar que o operador $\Lambda_*^{(2)}$ é limitado de L^p em L^q, para $1 \leq p, q \leq \infty$.

Teorema 4.2.3. *Seja $\Lambda^{(2)}$ o operador multiplicador definido na Proposição 4.2.1. Consideremos as sequências $\phi_k = \dim \mathcal{T}_k$, $\psi_k = \phi_k - \phi_k^{1-r/d} - 1$ e seja*

$$\vartheta_k = \begin{cases} 1, & 1 \leq p \leq 2,\ 1 < q \leq 2, \\ 1, & 2 \leq p < \infty, 2 \leq q \leq \infty, \\ 1, & 1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty, \\ (\ln k)^{-1/2}, & 1 \leq p \leq 2,\ q = 1, \\ (\ln k)^{-1/2}, & p = \infty,\ 2 \leq q \leq \infty. \end{cases}$$

Então

$$d_{[\psi_k]}(\Lambda^{(2)} U_p, L^q) \ \gg \ e^{-\mathcal{R}\phi_k^{r/d}}\ \vartheta_k, \quad r > 0, k \in \mathbb{N}, \tag{4.31}$$

$$d_{[\psi_k]}(\Lambda^{(2)} U_p, L^q) \ \gg \ e^{-\mathcal{R}\psi_k^{r/d}}\ \vartheta_k, \quad 0 < r \leq d, k \in \mathbb{N}, \tag{4.32}$$

$$d_{\phi_k - 1}(\Lambda^{(2)} U_p, L^q) \ \gg \ e^{-\mathcal{R}\phi_k^{r/d}}\ \vartheta_k, \quad r \geq d, k \in \mathbb{N}, \tag{4.33}$$

$$d_k(\Lambda^{(2)} U_p, L^q) \ \gg \ e^{-\mathcal{R}k^{r/d}}\ \vartheta_k, \quad 0 < r \leq 1, k \in \mathbb{N}, \tag{4.34}$$

onde

$$\mathcal{R} \ = \ \gamma \left(\frac{d\Gamma(d/2)}{2\pi^{d/2}}\right)^{r/d}.$$

Demonstração. Para $\theta, \eta, r > 0$ e $\eta \geq r-1$, temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} e^{\theta k^r} k^{\eta} &= \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\theta r} k^{1-r} k^{\eta} e^{\theta k^r} \theta r k^{r-1} = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{\theta r} k^{1-r+\eta}\right) e^{\theta k^r} \theta r k^{r-1} \\
&\leq \frac{1}{\theta r} N^{1-r+\eta} \sum_{k=1}^{N} e^{\theta k^r} \theta r k^{r-1} \ll N^{1-r+\eta} \int_1^{N+1} e^{\theta x^r} \theta r x^{r-1} dx \\
&\leq N^{1-r+\eta} e^{\theta (N+1)^r}. \qquad (4.35)
\end{aligned}$$

Agora

$$\begin{aligned}
(N+1)^r &= N^r (1+N^{-1})^r = N^r \left(1 + r\frac{1}{N} + \frac{r(r-1)}{2!}\frac{1}{N^2} + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}\frac{1}{N^3} + \cdots\right) \\
&= N^r + \frac{r}{N}\left(1 + \frac{(r-1)}{2}\frac{1}{N} + \frac{(r-1)(r-2)}{3!}\frac{1}{N^2} + \cdots\right) \\
&= N^r + \frac{r}{N} S_N \leq N^r + C_r N^{-1},
\end{aligned}$$

já que $0 \leq S_N \leq C_r$, uma vez que S_N é a soma de uma série que passa a ser alternada a partir de um determinado termo. Assim

$$e^{\theta (N+1)^r} \leq e^{\theta (N^r + C_r N^{-1})} = e^{\theta C_r N^{-1}} e^{\theta N^r} \leq e^{\theta C_r} e^{\theta N^r} = \overline{C}\, e^{\theta N^r}$$

e segue então de (4.35) que se $\eta \geq r-1$,

$$\sum_{k=1}^{N} e^{\theta k^r} k^{\eta} \ll N^{1-r+\eta} e^{\theta N^r}. \qquad (4.36)$$

Fixado $N \in \mathbb{N}$, seja $n = \dim \mathcal{T}_N$. De (2.4) temos que

$$\left(\frac{2\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)}\right) N^d \leq n \leq \left(\frac{2\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)}\right) N^d + C_1 N^{d-1}.$$

Assim

$$N^d \leq \left(\frac{d\Gamma(d/2)}{2\pi^{d/2}}\right) n \Longrightarrow N^r \leq \left(\frac{d\Gamma(d/2)}{2\pi^{d/2}}\right)^{r/d} n^{r/d} \qquad (4.37)$$

e

$$\begin{aligned}
n^{r/d} &\leq \left(\left(\frac{2\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)}\right) N^d + C_1 N^{d-1}\right)^{r/d} \\
&= \left(\left(\frac{2\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)}\right) N^d \left(1 + \frac{C_1}{\left(\frac{2\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)}\right) N}\right)\right)^{r/d} \\
&= \left(\frac{2\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)}\right)^{r/d} N^r \left(1 + \frac{C_1}{\left(\frac{2\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)}\right) N}\right)^{r/d}.
\end{aligned}$$

Denotando $C_d = \frac{2\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)}$, temos que

$$
\begin{aligned}
& \left(1+\frac{C_1}{\left(\frac{2\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)}\right)N}\right)^{r/d} \\
= & \left(1+\frac{C_1}{C_dN}\right)^{r/d} \\
= & \ 1+\frac{r}{d}\frac{C_1}{C_dN}+\frac{(r/d)(r/d-1)}{2!}\left(\frac{C_1}{C_dN}\right)^2 \\
+ & \ \frac{(r/d)(r/d-1)(r/d-2)}{3!}\left(\frac{C_1}{C_dN}\right)^3+\cdots \\
= & \ 1+\frac{r}{d}\frac{C_1}{C_dN}\left(1+\frac{r/d-1}{2!}\frac{C_1}{C_dN}+\frac{(r/d-1)(r/d-2)}{3!}\left(\frac{C_1}{C_dN}\right)^2+\cdots\right) \\
= & \ 1+\frac{r}{d}\frac{C_1}{C_dN}S_N,
\end{aligned}
$$

onde $0 \leq S_N \leq C_r$, já que S_N é a soma de uma série que passa a ser alternada a partir de um determinado termo. Portanto para $r > 0$,

$$
n^{r/d} \ \leq \ \left(\frac{2\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)}\right)^{r/d} N^r\left(1+\frac{r}{d}\frac{C_1}{C_dN}S_N\right) \ \leq \ \left(\frac{2\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)}\right)^{r/d} N^r + C_2N^{r-1}. \tag{4.38}
$$

Assim, usando (4.37), (4.38) e o fato de que $n \asymp N^d$, obtemos

$$
-\left(\frac{d\Gamma(d/2)}{2\pi^{d/2}}\right)^{r/d}\gamma\, n^{r/d} \ \leq \ -\gamma N^r \ \leq \ -\left(\frac{d\Gamma(d/2)}{2\pi^{d/2}}\right)^{r/d}\gamma\, n^{r/d}+C_2'\gamma N^{r-1}
$$

e portanto

$$
-\left(\frac{d\Gamma(d/2)}{2\pi^{d/2}}\right)^{r/d}\gamma\, n^{r/d} \ \leq \ -\gamma N^r \ \leq \ -\left(\frac{d\Gamma(d/2)}{2\pi^{d/2}}\right)^{r/d}\gamma\, n^{r/d}+C_3n^{(r-1)/d}.
$$

Denotando $\mathcal{R} = \gamma\left(\frac{d\Gamma(d/2)}{2\pi^{d/2}}\right)^{r/d}$ vem que

$$
-\mathcal{R}n^{r/d} \ \leq \ -\gamma N^r \ \leq \ -\mathcal{R}n^{r/d}+C_3n^{(r-1)/d}, \tag{4.39}
$$

para todo $r > 0$, onde a constante C_3 depende somente de r, d e γ. As estimativas acima são mantidas se colocarmos $N+1$ no lugar de N. Seja agora $\rho = 1 - n^{-r/d}$. Segue de

(4.36) e do fato de que $d_l \asymp l^{d-1}$, que

$$\begin{aligned}
(1-\rho)^{1/2} n^{1/2} \left(\sum_{l=1}^{N} |\lambda(l)|^{-2} d_l \right)^{-1/2} &= \left(n^{-r/d}\right)^{1/2} n^{1/2} \left(\sum_{l=1}^{N} e^{2\gamma l^r} l^{d-1} \right)^{-1/2} \\
&\gg n^{-r/2d+1/2} \left(N^{d-r} e^{2\gamma N^r} \right)^{-1/2} \\
&= n^{-r/2d+1/2} N^{(r-d)/2} e^{-\gamma N^r} \\
&= n^{-r/2d+1/2} \left(N^d\right)^{(r-d)/2d} e^{-\gamma N^r} \\
&\gg n^{-r/2d+1/2} n^{r/2d-1/2} e^{-\gamma N^r} \\
&= e^{-\gamma N^r}
\end{aligned}$$

e segue assim do Corolário 3.2.4 e de (4.39) que

$$\begin{aligned}
d_{[n-n^{1-r/d}-1]}(\Lambda^{(2)} U_p, L^q) &= d_{[\rho n-1]}(\Lambda^{(2)} U_p, L^q) \\
&\gg C(1-\rho)^{1/2} n^{1/2} \left(\sum_{l=1}^{N} |\lambda(l)|^{-2} d_l \right)^{-1/2} \vartheta_n \\
&\gg e^{-\gamma N^r} \vartheta_n \\
&\gg e^{-\mathcal{R} n^{r/d}} \vartheta_n. \qquad (4.40)
\end{aligned}$$

Como $\psi_N = \phi_N - \phi_N^{1-r/d} - 1$, onde $\phi_N = \dim \mathcal{T}_N = n$, obtemos

$$d_{[\psi_N]}(\Lambda^{(2)} U_p, L^q) \gg e^{-\mathcal{R} \phi_N^{r/d}} \vartheta_{\phi_N}$$

e como $\phi_N = \dim \mathcal{T}_N \asymp N^d$, segue que $(\ln \phi_N)^{-1/2} \asymp (\ln N^d)^{-1/2} = (d \ln N)^{-1/2} \asymp (\ln N)^{-1/2}$, donde $\vartheta_{\phi_N} \asymp \vartheta_N$ e assim

$$d_{[\psi_N]}(\Lambda^{(2)} U_p, L^q) \gg e^{-\mathcal{R} \phi_N^{r/d}} \vartheta_N,$$

de onde obtemos (4.31). Além disso, se $r \geq d$, então $[\psi_N] = [\phi_N - \phi_N^{1-r/d} - 1] = \phi_N - 1$ e assim de (4.31) obtemos (4.33).

Agora, seja $0 < r \leq d$. Então

$$\begin{aligned}
(1-n^{-r/d})^{r/d} &= 1 - \frac{r}{d} n^{-r/d} + \frac{r(r-d)}{2! d^2} n^{-2r/d} - \frac{r(r-d)(r-2d)}{3! d^3} n^{-3r/d} + \cdots \\
&= 1 - n^{-r/d} \frac{r}{d} \left(1 + \frac{d-r}{2! d} n^{-r/d} + \frac{(d-r)(2d-r)}{3! d^2} (n^{-r/d})^2 + \cdots \right) \\
&= 1 - n^{-r/d} S_n. \qquad (4.41)
\end{aligned}$$

Observamos agora que

- $\frac{d-r}{2!d} \ \leq \ \frac{1}{2}$,
- $\frac{(d-r)(2d-r)}{3!d^2} \ = \ \frac{d-r}{2d}\frac{2d-r}{3d} \ \leq \ \frac{1}{2}\frac{2}{3} \ = \ \frac{1}{3}$,
- $\frac{(d-r)(2d-r)(3d-r)}{4!d^3} \ = \ \frac{d-r}{2d}\frac{2d-r}{3d}\frac{3d-r}{4d} \ \leq \ \frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{3}{4} \ = \ \frac{1}{4}$,
- $\frac{(d-r)(2d-r)\cdots(kd-r)}{(k+1)!d^k} \ = \ \frac{d-r}{2d}\frac{2d-r}{3d}\cdots\frac{(k-1)d-r}{kd}\frac{kd-r}{(k+1)d} \ \leq \ \frac{1}{2}\frac{2}{3}\cdots\frac{k-1}{k}\frac{k}{k+1} \ = \ \frac{1}{k+1}$.

Assim, para $n \geq 2$

$$\begin{aligned} S_n &\leq \frac{r}{d}\left(1 + \frac{1}{2}n^{-r/d} + \frac{1}{3}(n^{-r/d})^2 + \frac{1}{4}(n^{-r/d})^3 + \cdots\right) \\ &< \frac{r}{d}\sum_{k=0}^{\infty}(n^{-r/d})^k \\ &= \frac{r}{d}\frac{1}{1-n^{-r/d}}, \end{aligned}$$

e como para $n \geq 2$, temos $\frac{1}{1-n^{-r/d}} \leq \frac{1}{1-2^{-r/d}}$, segue que $S_n \leq \frac{r}{d}\frac{1}{1-2^{-r/d}} = C_r$. Obtemos portanto de (4.41), para $0 < r \leq d$ e $n \geq 2$, que

$$(1-n^{-r/d})^{r/d} \ \geq \ 1 - C_r n^{-r/d}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} (\psi_N+1)^{r/d} &= (n-n^{1-r/d})^{r/d} \ = \ n^{r/d}(1-n^{-r/d})^{r/d} \\ &\geq n^{r/d}(1-n^{-r/d}C_r) \ = \ \phi_N^{r/d} - C_r, \end{aligned}$$

e assim

$$e^{-\mathcal{R}(\psi_N+1)^{r/d}} \ \leq \ e^{-\mathcal{R}(\phi_N^{r/d}-C_r)} \ \ll \ e^{-\mathcal{R}\phi_N^{r/d}}. \tag{4.42}$$

Segue então de (4.31) que

$$d_{[\psi_N]}(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \ \gg \ e^{-\mathcal{R}(\psi_N+1)^{r/d}}\vartheta_N. \tag{4.43}$$

Agora, consideremos $0 < r \leq 1$ e seja $f(x) = (N+x)^r$. f é claramente contínua em $[0,1]$, derivável em $(0,1)$ e assim pelo Teorema do Valor Médio existe $c \in (0,1)$ tal que $f(1) - f(0) \ = \ f'(c)$. Logo

$$(N+1)^r - N^r = r(N+c)^{r-1} \ \leq \ rN^{r-1} \ \leq \ r.$$

Portanto

$$1 < \frac{e^{\gamma(N+1)^r}}{e^{\gamma N^r}} \leq e^{\gamma r} \implies 1 < \frac{e^{-\gamma N^r}}{e^{-\gamma(N+1)^r}} \leq e^{\gamma r}. \tag{4.44}$$

De (4.31), (4.39) e (4.44), segue que

$$d_{[\psi_{N+1}]}(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \gg e^{-\gamma(N+1)^r}\vartheta_{N+1} \gg e^{-\gamma N^r}\vartheta_N \gg e^{-\mathcal{R}n^{r/d}}\vartheta_N = e^{-\mathcal{R}\phi_N^{r/d}}\vartheta_N$$

e logo usando (4.42) obtemos

$$d_{[\psi_{N+1}]}(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \gg e^{-\mathcal{R}\phi_N^{r/d}}\vartheta_N \gg e^{-\mathcal{R}(\psi_N+1)^{r/d}}\vartheta_N. \tag{4.45}$$

Agora, se $k \in \mathbb{N}$ e $[\psi_N] < k \leq [\psi_{N+1}]$, então vem do Teorema 1.1.10 (d), de (4.44) e de (4.45) que

$$\begin{aligned} d_k(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) &\gg d_{[\psi_{N+1}]}(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \gg e^{-\mathcal{R}(\psi_N+1)^{r/d}}\vartheta_N \\ &\gg e^{-\mathcal{R}\psi_N^{r/d}}\vartheta_N \geq e^{-\mathcal{R}k^{r/d}}\vartheta_N \\ &\gg e^{-\mathcal{R}k^{r/d}}\vartheta_k \end{aligned}$$

e assim fica demonstrado (4.34).

Finalmente, se $0 < r \leq d$, de (4.44) obtemos $e^{-\mathcal{R}l^{r/d}} \asymp e^{-\mathcal{R}(l+1)^{r/d}}$, $l \in \mathbb{N}$ e assim segue de (4.43) que

$$d_{[\psi_N]}(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \gg e^{-\mathcal{R}(\psi_N+1)^{r/d}}\vartheta_N \gg e^{-\mathcal{R}\psi_N^{r/d}}\vartheta_N,$$

o que demonstra (4.32), concluindo a demonstração. $\square$

Teorema 4.2.4. *Sejam $\Lambda^{(2)}$ e ϕ_k como no teorema anterior. Então para $0 < r \leq 1$, $1 \leq p \leq \infty$, $2 \leq q \leq \infty$ e para todo $k \in \mathbb{N}$, temos*

$$d_k(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \ll e^{-\mathcal{R}k^{r/d}}k^{(1-r/d)(1/p-1/2)_+}\begin{cases} 1, & 2 \leq q < \infty, \\ (\ln k)^{1/2}, & q = \infty, \end{cases} \tag{4.46}$$

e para todo $r > 1$ e todo $k \in \mathbb{N}$,

$$d_{\phi_k}(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \ll e^{-\gamma k^r}\begin{cases} k^{(d-1)(1/p-1/q)}, & 1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty, \\ k^{(d-1)(1/2-1/q)}, & 2 \leq p, q \leq \infty, \end{cases} \tag{4.47}$$

onde $\mathcal{R}$ é a constante dada no enunciado do teorema anterior.

Demonstração. Seja $\lambda(x) = e^{-\gamma x^r}$. Fixado $k \in \mathbb{N}$, seja $x_k \in \mathbb{R}$ tal que $e\lambda(x_k) = \lambda(N_k)$. Então, temos

$$\begin{aligned} ee^{-\gamma x_k^r} = e^{-\gamma N_k^r} &\iff e^{-\gamma x_k^r+1} = e^{-\gamma N_k^r} \\ &\iff -\gamma x_k^r + 1 = -\gamma N_k^r \\ &\iff x_k^r = N_k^r + 1/\gamma \\ &\iff x_k = (N_k^r + 1/\gamma)^{1/r}. \end{aligned}$$

Da definição de N_{k+1} temos que $N_k < x_k \leq N_{k+1} < x_k + 1$. Portanto

$$(N_k^r + 1/\gamma)^{1/r} \leq N_{k+1} \ \leq \ (N_k^r + 1/\gamma)^{1/r} + 1. \tag{4.48}$$

Temos

$$\begin{aligned}
N_{k+1}^r &\leq \left[\left(N_k^r + \frac{1}{\gamma}\right)^{1/r} + 1\right]^r \\
&= \left(N_k^r + \frac{1}{\gamma}\right)\left[1 + \left(N_k^r + \frac{1}{\gamma}\right)^{-1/r}\right]^r \\
&= \left(N_k^r + \frac{1}{\gamma}\right)\left[1 + r\left(N_k^r + \frac{1}{\gamma}\right)^{-1/r} + \frac{r(r-1)}{2!}\left(N_k^r + \frac{1}{\gamma}\right)^{-2/r} + \cdots\right] \\
&\leq \left(N_k^r + \frac{1}{\gamma}\right)\left[1 + C_1\left(N_k^r + \frac{1}{\gamma}\right)^{-1/r}\right] \\
&= \left(N_k^r + \frac{1}{\gamma}\right) + C_1\left(N_k^r + \frac{1}{\gamma}\right)^{1-1/r}.
\end{aligned}$$

Como $0 < r \leq 1$, temos $1 - 1/r \leq 0$, donde $\left(N_k^r + \frac{1}{\gamma}\right)^{1-1/r} \leq 1$ e portanto

$$N_{k+1}^r \leq N_k^r + C_1.$$

Assim

$$N_k^r + \frac{1}{\gamma} \ \leq \ N_{k+1}^r \ \leq \ N_k^r + C_1 \tag{4.49}$$

e usando (4.49) de forma recorrente e o fato de que $N_1 = N$, obtemos

$$N^r + \frac{k}{\gamma} \ \leq \ N_{k+1}^r \ \leq \ N^r + C_1 k. \tag{4.50}$$

De (4.48), obtemos

$$N_{k+1} \ \asymp \ (N_k^r + 1/\gamma)^{1/r} \ = \ N_k\left(1 + \frac{N_k^{-r}}{\gamma}\right)^{1/r}.$$

Como para N_k suficientemente grande temos $|N_k^{-r}/\gamma| < 1$, segue que

$$N_{k+1} \ \asymp \ N_k\left(1 + \frac{1}{r\gamma}N_k^{-r} + \frac{(1-r)}{2r^2\gamma^2}N_k^{-2r} + \frac{(1-r)(1-2r)}{6r^3\gamma^3}N_k^{-3r} + \cdots\right),$$

e assim

$$N_{k+1} - N_k \ \asymp \ N_k\left(\frac{1}{r\gamma}N_k^{-r} + \frac{(1-r)}{2r^2\gamma^2}N_k^{-2r} + \frac{(1-r)(1-2r)}{6r^3\gamma^3}N_k^{-3r} + \cdots\right),$$

onde a série binomial acima passa a ser alternada a partir de um determinado termo. Logo

$$N_{k+1} - N_k \;\asymp\; N_k^{1-r}$$

e de modo análogo é possível mostrarmos que

$$N_{k+1}^d - N_k^d \asymp N_k^{d-r} \quad \text{e} \quad N_{k+1}^{d-1} - N_k^{d-1} \asymp N_k^{d-r-1}.$$

Assim, lembrando que $d_l \asymp l^{d-1}$ e usando (4.5), obtemos

$$\begin{aligned}
\theta_{N_k,N_{k+1}} \;&=\; \sum_{l=N_k+1}^{N_{k+1}} d_l \;\asymp\; \sum_{l=N_k+1}^{N_{k+1}} l^{d-1} \;=\; \sum_{l=N_k}^{N_{k+1}-1} l^{d-1} + (N_{k+1}^{d-1} - N_k^{d-1}) \\
&\leq\; \sum_{l=N_k}^{N_{k+1}-1} \int_l^{l+1} x^{d-1}\,dx + (N_{k+1}^{d-1} - N_k^{d-1}) \\
&=\; \int_{N_k}^{N_{k+1}} x^{d-1}\,dx + (N_{k+1}^{d-1} - N_k^{d-1}) \\
&\asymp\; (N_{k+1}^d - N_k^d) + (N_{k+1}^{d-1} - N_k^{d-1}) \\
&\asymp\; N_k^{d-r} - N_k^{d-r-1} \;=\; N_k^{d-r}\left(1 + N_k^{-1}\right) \;\asymp\; N_k^{d-r}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\theta_{N_k,N_{k+1}} \;&=\; \sum_{l=N_k+1}^{N_{k+1}} d_l \;\asymp\; \sum_{l=N_k+1}^{N_{k+1}} l^{d-1} \;\geq\; \sum_{l=N_k+1}^{N_{k+1}} \int_{l-1}^{l} x^{d-1}\,dx \\
&=\; \int_{N_k}^{N_{k+1}} x^{d-1}\,dx \;\asymp\; N_{k+1}^d - N_k^d \;\asymp\; N_k^{d-r},
\end{aligned}$$

donde

$$\theta_{N_k,N_{k+1}} \;\asymp\; N_k^{d-r}. \tag{4.51}$$

Consequentemente, obtemos de (4.50) e (4.51) que para todo $\epsilon > 0$ e k suficientemente grande,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\theta_{N_k,N_{k+1}}}{\theta_{N_1,N_2}}\right)^{\frac{r}{d-r}} \;&\asymp\; \left(\frac{N_k^{d-r}}{N^{d-r}}\right)^{\frac{r}{d-r}} \;=\; N^{-r}N_k^r \\
&\leq\; N^{-r}\left(N^r + C_1(k-1)\right) \\
&\leq\; N^{-r}\left(N^r + C_1 k\right) \\
&=\; 1 + C_1 k N^{-r}.
\end{aligned}$$

Agora, observemos que para qualquer $\delta > 0$, existe $k_\delta \in \mathbb{N}$ tal que $e^{\delta k} \geq 1 + C_1 k N^r$, se $k \geq k_\delta$. Assim para $k \geq k_\delta$

$$\left(\frac{\theta_{N_k, N_{k+1}}}{\theta_{N_1, N_2}} \right)^{r/(d-r)} \leq e^{\delta k}$$

e logo tomando $\delta^{'} = \delta(d-r)/r$, obtemos que

$$\left(\frac{\theta_{N_k, N_{k+1}}}{\theta_{N_1, N_2}} \right) \leq e^{\delta' k}, \quad k \geq k_\delta. \tag{4.52}$$

Portanto, para $1 \leq p \leq 2$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{M} e^{-k(1-\epsilon)} \left(\frac{\theta_{N_k, N_{k+1}}}{\theta_{N_1, N_2}} \right)^{1/p} &\leq \sum_{k=1}^{M} e^{-k(1-\epsilon)} e^{\delta' k/p} = \sum_{k=1}^{M} e^{-k(1-\epsilon-\delta'/p)} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k(1-\epsilon-\delta'/p)} \leq C_3, \end{aligned}$$

onde a constante C_3 depende somente de ϵ, p, δ, e ϵ, δ são escolhidos de forma que $\epsilon + \delta'/p < 1$. Logo

$$\sum_{k=1}^{M} e^{-k(1-\epsilon)} \frac{\theta_{N_k, N_{k+1}}^{1/p}}{\theta_{N_1, N_2}^{1/2}} = \sum_{k=1}^{M} e^{-k(1-\epsilon)} \left(\frac{\theta_{N_k, N_{k+1}}}{\theta_{N_1, N_2}} \right)^{1/p} \theta_{N_1, N_2}^{1/p-1/2} \leq C_3 \theta_{N_1, N_2}^{1/p-1/2}, \tag{4.53}$$

donde $\Lambda^{(2)} \in K_{2\epsilon, p}$. Portanto segue do Corolário 3.3.5 que

$$\begin{aligned} d_\beta(\Lambda^{(2)} U_p, L^q) &\leq C_{\epsilon,p} |\lambda(N)| \theta_{N_1, N_2}^{1/p-1/2} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ \sup_{1 \leq k \leq M} (\ln \theta_{N_k, N_{k+1}})^{1/2}, & q = \infty, \end{cases} \\ &+ C_{\epsilon,p} |\lambda(N)| \sum_{k=M+1}^{\infty} e^{-k} \theta_{N_k, N_{k+1}}^{1/p-1/q}. \end{aligned} \tag{4.54}$$

Além disso, segue de (4.51) e (4.52) que

$$\begin{aligned}
|\lambda(N)|\sum_{k=M+1}^{\infty} e^{-k}\theta_{N_k,N_{k+1}}^{1/p-1/q} &= |\lambda(N)|\theta_{N_1,N_2}^{1/p-1/q}\sum_{k=M+1}^{\infty} e^{-k}\left(\frac{\theta_{N_k,N_{k+1}}}{\theta_{N_1,N_2}}\right)^{1/p-1/q} \\
&\leq C_3|\lambda(N)|N^{(d-r)(1/p-1/q)}\sum_{k=M+1}^{\infty} e^{-k}e^{k\delta'(1/p-1/q)} \\
&\leq C_3|\lambda(N)|N^{(d-r)(1/p-1/q)}\sum_{k=M+1}^{\infty} e^{-k}e^{\delta'' k} \\
&= C_3|\lambda(N)|N^{(d-r)(1/p-1/q)}\sum_{k=M+1}^{\infty} (e^{-(1-\delta'')})^{k} \\
&= C_3|\lambda(N)|N^{(d-r)(1/p-1/q)}(e^{-(1-\delta'')})^{M+1}\sum_{j=0}^{\infty} (e^{-(1-\delta'')})^{j} \\
&= C_3|\lambda(N)|N^{(d-r)(1/p-1/q)}(e^{-(1-\delta'')})^{M+1}\frac{1}{1-(e^{-(1-\delta'')})} \\
&\leq C_4|\lambda(N)|N^{(d-r)(1/p-1/q)}\,(e^{-(1-\delta'')})^{M},
\end{aligned}$$

onde $\delta''=\delta'(1/p-1/q), \delta''<1$. Como da Observação 3.3.2 temos $M=[\epsilon^{-1}\ln\theta_{N_1,N_2}]\asymp \epsilon^{-1}\ln\theta_{N_1,N_2}$ e $\theta_{N_1,N_2}\asymp N^{d-r}$, segue que

$$\begin{aligned}
|\lambda(N)|\sum_{k=M+1}^{\infty} e^{-k}\theta_{N_k,N_{k+1}}^{1/p-1/q} &\leq C_4|\lambda(N)|N^{(d-r)(1/p-1/q)}(e^{-(1-\delta'')})^{C_5(\ln\theta_{N_1,N_2})/\epsilon} \\
&= C_4|\lambda(N)|N^{(d-r)(1/p-1/q)}(e^{\ln\theta_{N_1,N_2}})^{-C_5(1-\delta'')/\epsilon} \\
&= C_4|\lambda(N)|N^{(d-r)(1/p-1/q)}(\theta_{N_1,N_2})^{-C_5(1-\delta'')/\epsilon} \\
&\leq C_6|\lambda(N)|N^{(d-r)(1/p-1/q)}N^{-C_5(d-r)(1-\delta'')/\epsilon} \\
&= C_6|\lambda(N)|N^{(d-r)((1/p-1/q)-C_5(1-\delta'')/\epsilon)} \\
&\leq C_6|\lambda(N)|,
\end{aligned}$$

se tivermos $(1/p-1/q)-C_5(1-\delta'')/\epsilon<0$, ou seja $0<\epsilon<C_5(1-\delta'')/(1/p-1/q)$. Segue então de (4.51) e (4.54) que

$$\begin{aligned}
&d_\beta(\Lambda^{(2)}U_p;L^q) \\
\leq\;& C'_{\epsilon,p}|\lambda(N)|\theta_{N_1,N_2}^{1/p-1/2}\begin{cases} q^{1/2}, & 2\leq q<\infty, \\ \sup_{1\leq k\leq M}(\ln\theta_{N_k,N_{k+1}})^{1/2}, & q=\infty, \end{cases} + C'_{\epsilon,p}|\lambda(N)|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \quad C'_{\epsilon,p}\, C_7 |\lambda(N)| N^{(d-r)(1/p-1/2)} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ \sup_{1\leq k\leq M} (\ln \theta_{N_k,N_{k+1}})^{1/2}, & q = \infty, \end{cases} \\
&= \quad C'_{\epsilon,p}\, C_7 e^{-\gamma N^r} N^{(d-r)(1/p-1/2)} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ \sup_{1\leq k\leq M} (\ln \theta_{N_k,N_{k+1}})^{1/2}, & q = \infty, \end{cases}
\end{aligned}
$$

donde

$$
d_\beta(\Lambda^{(2)} U_p; L^q) \ll e^{-\gamma N^r} N^{(d-r)(1/p-1/2)} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ \sup_{1\leq k\leq M} (\ln \theta_{N_k,N_{k+1}})^{1/2}, & q = \infty. \end{cases} \tag{4.55}
$$

De (4.50) e (4.51), segue que

$$
\theta_{N_k,N_{k+1}} \asymp N_k^{d-r} = (N_k^r)^{(d-r)/r} \leq (N^r + C_1(k-1))^{(d-r)/r},
$$

e agora usando o fato de que $M \leq \epsilon^{-1} \ln \theta_{N_1,N_2}$, $\theta_{N_1,N_2} \asymp N^{d-r}$ e que $N^d \asymp n$ vem que

$$
\begin{aligned}
\ln \theta_{N_k,N_{k+1}} &\asymp \frac{(d-r)}{\gamma} \ln (N^r + C_1(k-1)) \ll \ln (N^r + C_1 M) \\
&\ll \ln \left(N^r + \frac{C_1 \ln \theta_{N_1,N_2}}{\epsilon} \right) \ll \ln \left(N^r + \frac{C_1 \ln N^{d-r}}{\epsilon} \right) \\
&= \ln \left(N^r + \frac{C_1(d-r)}{\epsilon} \ln N \right) = \ln (N^r + C_8 \ln N) \\
&\ll \ln(N^{r+1}) = \ln(N^d)^{\frac{(r+1)}{d}} \\
&\asymp \ln N^d \asymp \ln n.
\end{aligned}
$$

Obtemos assim de (4.55)

$$
d_\beta(\Lambda^{(2)} U_p; L^q) \ll e^{-\gamma N^r} N^{(d-r)(1/p-1/2)} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\ln n)^{1/2}, & q = \infty. \end{cases} \tag{4.56}
$$

Da Observação 3.3.2, de (3.39) e de (4.51), obtemos

$$
\begin{aligned}
\beta &= m_0 + \sum_{k=1}^{M} m_k = \sum_{s=0}^{N} \dim \mathcal{H}_s + \sum_{k=1}^{M} m_k \\
&\leq n + C_\epsilon \theta_{N_1,N_2} \leq n + C_9 N^{d-r},
\end{aligned}
$$

e como $N^d \asymp n$, vem que $N^{d-r} \asymp n^{1-r/d}$, donde $\beta \leq n + C_9 n^{1-r/d}$. Portanto pelo Teorema 1.1.10 (d) e por (4.56),

$$
d_{[n+C_9 n^{1-r/d}]}(\Lambda^{(2)} U_p; L^q) \ll e^{-\gamma N^r} N^{(d-r)(1/p-1/2)} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\ln n)^{1/2}, & q = \infty. \end{cases} \tag{4.57}
$$

Agora, sejam $\phi_N = n = \dim \mathcal{T}_N$, $\tau_N = n + C_9 n^{1-r/d}$. Temos de (4.39) que

$$-\gamma N^r \ \leq \ -\mathcal{R} n^{r/d} + \overline{C_3} n^{(r-1)/d}.$$

Tomando $0 < r \leq 1$, temos $(r-1) < 0$ e portanto $\overline{C_3} n^{(r-1)/d} < C_3'$, donde

$$-\gamma N^r \ \leq \ -\mathcal{R} n^{r/d} + C_3'.$$

Assim

$$\begin{aligned}
-\gamma N^r + \mathcal{R}\tau_N^{r/d} \quad &\leq \quad -\mathcal{R} n^{r/d} + \mathcal{R}\tau_N^{r/d} + C_3' \\
&= \quad -\mathcal{R}\phi_N^{r/d} + \mathcal{R}\tau_N^{r/d} + C_3' \\
&= \quad -\mathcal{R}\phi_N^{r/d} + \mathcal{R}\left(\phi_N + C_9\phi_N^{1-r/d}\right)^{r/d} + C_3' \\
&= \quad -\mathcal{R}\phi_N^{r/d} + \mathcal{R}\phi_N^{r/d}\left(1 + C_9\phi_N^{-r/d}\right)^{r/d} + C_3' \\
&= \quad \mathcal{R}\phi_N^{r/d}\left(-1 + \left(1 + C_9\phi_N^{-r/d}\right)^{r/d}\right) + C_3'.
\end{aligned}$$

Como $|C_9\phi_N^{-r/d}| < 1$, já que N é tomado suficientemente grande, segue que

$$\begin{aligned}
(1 + C_9\phi_N^{-r/d})^{r/d} \quad &= \quad 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(r/d)(r/d-1)\cdots(r/d-k+1)}{k!}(C_9\phi_N^{-r/d})^k \\
&= \quad 1 + \frac{C_9 r}{d}\phi_N^{-r/d} S_N,
\end{aligned}$$

onde $0 \leq S_N \leq C_r$ pois a série binomial é alternada. Portanto

$$-\gamma N^r + \mathcal{R}\tau_N^{r/d} \ \leq \ \mathcal{R}\phi_N^{r/d}\left(\frac{C_9 r}{d}\phi_N^{-r/d} S_N\right) \ \leq \ \frac{\mathcal{R} C_9 r}{d} S_N \ \leq \ C_{10}. \tag{4.58}$$

Seja agora $l \in \mathbb{N}$, $[\tau_N] \leq l \leq [\tau_{N+1}]$. Para $0 < r \leq 1$, segue de (4.44) que

$$1 < \frac{e^{-\gamma N^r}}{e^{-\gamma (N+1)^r}} \leq e^{\gamma r}.$$

Assim, usando o Teorema 1.1.10 (d), (4.57) e (4.58), obtemos

$$\begin{aligned}
d_l(\Lambda^{(2)} U_p; L^q) \quad &\leq \quad d_{[\tau_N]}(\Lambda^{(2)} U_p; L^q) \\
&\ll \quad e^{-\gamma N^r} N^{(d-r)(1/p-1/2)} \begin{cases} 1, & 2 \leq q < \infty, \\ (\ln \phi_N)^{1/2}, & q = \infty, \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\ll\ e^{-\gamma(N+1)^r} N^{(d-r)(1/p-1/2)} \begin{cases} 1, & 2 \le q < \infty, \\ (\ln \phi_N)^{1/2}, & q = \infty, \end{cases} \\
&=\ e^{-\gamma(N+1)^r} (N^d)^{(d-r)(1/p-1/2)/d} \begin{cases} 1, & 2 \le q < \infty, \\ (\ln \phi_N)^{1/2}, & q = \infty, \end{cases} \\
&\ll\ e^{-\gamma(N+1)^r} \phi_N^{(1-r/d)(1/p-1/2)} \begin{cases} 1, & 2 \le q < \infty, \\ (\ln \phi_N)^{1/2}, & q = \infty, \end{cases} \\
&\ll\ e^{-\mathcal{R}(\tau_{N+1})^{r/d}} \tau_N^{(1-r/d)(1/p-1/2)} \begin{cases} 1, & 2 \le q < \infty, \\ (\ln \tau_N)^{1/2}, & q = \infty, \end{cases} \\
&\le\ e^{-\mathcal{R} l^{r/d}} l^{(1-r/d)(1/p-1/2)} \begin{cases} 1, & 2 \le q < \infty, \\ (\ln l)^{1/2}, & q = \infty, \end{cases}
\end{aligned}$$

o que demonstra o resultado para $0 < r \le 1$ e $1 \le p \le 2 \le q \le \infty$. O caso $2 \le p \le \infty$ segue do fato de $\Lambda U_p \subset \Lambda U_2$.

Para o caso $r > 1$ aplicaremos o Teorema 3.3.1 no lugar do Corolário 3.3.5. Observamos que a função $f(x) = (k+x)^r$ é contínua em $[0,1]$ e derivável em $(0,1)$, assim pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in (0,1)$ tal que $f(1) - f(0) = f'(c)$, ou seja $(k+1)^r - k^r = r(k+c)^{r-1}$, e como $r > 1$ obtemos $(k+1)^r - k^r \ge rk^{r-1}$, donde

$$\begin{aligned}
& -\gamma(k+1)^r + \gamma k^r \ \le\ -\gamma r k^{r-1} \\
\Rightarrow\ & e^{-\gamma(k+1)^r} e^{\gamma k^r} \ \le\ e^{-\gamma r k^{r-1}} \\
\Rightarrow\ & e^{-\gamma(k+1)^r} \ \le\ e^{-\gamma k^r} e^{-\gamma r k^{r-1}} \\
\Rightarrow\ & \lambda(k+1) \ \le\ e^{-\gamma r k^{r-1}} \lambda(k) \\
\Rightarrow\ & e\lambda(k+1) \ \le\ e^{-\gamma r k^{r-1}+1} \lambda(k).
\end{aligned}$$

Como $e^{-\gamma r k^{r-1}+1}$ é uma função decrescente na variável k, existe $a \in \mathbb{N}$ tal que $e^{-\gamma r k^{r-1}} \le 1$, para todo $k \ge a$. Tomamos $N \ge a$, $N_0 = 0$, $N_1 = N$, $N_{k+1} = N + k$, $M = 0$, $\beta = m_0 = n = \phi_N$. Então aplicando o Teorema 3.3.1 para $1 \le p \le 2 \le q \le \infty$, obtemos

$$d_{\phi_N}(\Lambda^{(2)} U_p; L^q) \ \ll\ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(N_k) \theta_{N_k, N_{k+1}}^{1/p-1/q} \ =\ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(N+k-1) \theta_{N_k, N_{k+1}}^{1/p-1/q}.$$

Agora

$$\begin{aligned}
e\lambda(N+1) \ \le\ \lambda(N) \quad &\Rightarrow \quad \lambda(N+1) \ \le\ e^{-1}\lambda(N), \\
e\lambda(N+2) \ \le\ \lambda(N+1) \ \le\ e^{-1}\lambda(N) \quad &\Rightarrow \quad \lambda(N+2) \ \le\ e^{-2}\lambda(N),
\end{aligned}$$

e assim, usando indução sobre k, obtemos

$$\lambda(N+k) \ \le\ e^{-k}\lambda(N).$$

Consequentemente

$$d_{\phi_N}(\Lambda^{(2)}U_p;L^q) \ \ll\ \lambda(N)\sum_{k=1}^{\infty} e^{-(k-1)}\theta_{N_k,N_{k+1}}^{1/p-1/q} \ \ll\ \lambda(N)\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k}\theta_{N_k,N_{k+1}}^{1/p-1/q}.$$

Mas

$$\theta_{N_k,N_{k+1}} \ = \ \sum_{s=N_k+1}^{N_{k+1}} \dim\mathcal{H}_s = \sum_{s=N+k}^{N+k} \dim\mathcal{H}_s \ = \ \dim\mathcal{H}_{N+k}.$$

Assim

$$\begin{aligned} d_{\phi_N}(\Lambda^{(2)}U_p;L^q) \quad &\ll \quad \lambda(N)\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k}(\dim\mathcal{H}_{N+k})^{1/p-1/q} \\ &\ll \quad \lambda(N)\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k}((N+k)^{d-1})^{1/p-1/q} \\ &\ll \quad \lambda(N)\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k}(Nk)^{(d-1)(1/p-1/q)} \\ &= \quad \lambda(N)N^{(d-1)(1/p-1/q)}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k}k^{(d-1)(1/p-1/q)}. \end{aligned}$$

Denotando $a_k = e^{-k}k^{(d-1)(1/p-1/q)}$, vem que $a_{k+1}/a_k = e^{-1}\left(1+1/k\right)^{(d-1)(1/p-1/q)}$. Logo

$$\lim_{k\to\infty}(a_{k+1}/a_k) = 1/e.$$

Portanto $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k}k^{(d-1)(1/p-1/q)} < \infty$ e desta forma, para $1 \le p \le 2 \le q \le \infty$

$$d_{\phi_N}(\Lambda^{(2)}U_p;L^q) \ \ll\ \lambda(N)N^{(d-1)(1/p-1/q)} \ = \ e^{-\gamma N^r}N^{(d-1)(1/p-1/q)}.$$

Assim, para $2 \le p,q \le \infty$, obtemos

$$d_{\phi_N}(\Lambda^{(2)}U_p;L^q) \ \le\ d_{\phi_N}(\Lambda^{(2)}U_2;L^q) \ \ll\ e^{-\gamma N^r}N^{(d-1)(1/2-1/q)},$$

o que demonstra (4.47), completando a demonstração. □

Observação 4.2.5. Promovendo simples adapatações nas demonstrações podemos constatar que o Teorema 4.2.3 e o Teorema 4.2.4 permanecem válidos se trocarmos o operador

$\Lambda^{(2)}$ pelo operador $\Lambda_*^{(2)}$, ϕ_k por $\phi_k^* = \dim \mathcal{T}_k^*$, ψ_k por $\psi_k^* = \phi_k^* - (\phi_k^*)^{1-r/d} - 1$ e $\mathcal{R}$ por $\mathcal{R}_* = \gamma 2^{-r}$.

Analisando a demonstração do Teorema 4.2.3, observamos que a constante $\mathcal{R}$ é obtida em (4.39), a partir de (4.37) e (4.38), usando (2.4). A constante $\mathcal{R}^*$ é obtida de modo análogo, usando (2.7) no lugar de (2.4).

Observação 4.2.6. Sejam $\gamma, r \in \mathbb{R},\ \gamma, r > 0$. Para $N, k \in \mathbb{N}$ e $n = \dim \mathcal{T}_N$, seja

$$A_{N,k} \; = \; -\frac{1}{n}\left(k \ln 2 + \gamma \sum_{l=1}^{N} l^r \; d_l\right).$$

Sabemos da Proposição 2.2.4 que $d_l \asymp l^{d-1}$ e $n \asymp N^d$, donde

$$\sum_{l=1}^{N} l^r \; d_l \;\asymp\; \sum_{l=1}^{N} l^{d+r-1} \;\asymp\; \int_0^N x^{d+r-1}\, dx \;\asymp\; N^{d+r},$$

e assim

$$A_{N,k} \;\asymp\; -\frac{k}{N^d} - N^r \;=\; g(N), \tag{4.59}$$

onde $g(x) = -kx^{-d} - x^r$.

Temos que $g^{'}(x) = dkx^{-(d+1)} - rx^{r-1}$ e assim $x_k = (d/r)^{1/(d+r)} k^{1/(d+r)}$ é o único ponto crítico da função g. É fácil ver que $g^{'}(x) > 0$ para todo $x < x_k$ e que $g^{'}(x) < 0$ para todo $x > x_k$, donde g assume máximo absoluto em x_k. Observemos agora que para todo $r > 0$ e $x > 1$, temos

$$-dkx^{-d-1} \;\leq\; k[(x+1)^{-d} - x^{-d}] \;\leq\; 0$$

e

$$0 \;\leq\; (x+1)^r - x^r \;\leq\; rx^{r-1},$$

donde

$$g(x+1) \;=\; -k(x+1)^{-d} - (x+1)^r \;\geq\; -kx^{-d} - x^{-r} - rx^{r-1} \;=\; g(x) - rx^{r-1}.$$

Desta forma, como g é decrescente para $x > x_k$, segue que

$$g(x) - rx^{r-1} \;\leq\; g(x+1) \;\leq\; g(x+t) \;\leq\; g(x), \qquad x \geq x_k,\ 0 \leq t \leq 1.$$

Mas, existe $\overline{N} \in \mathbb{N}$ tal que $x_k \;\leq\; \overline{N} \;\leq\; x_k + 1$, e portanto

$$g(x_k) - rx_k^{r-1} \;\leq\; g(\overline{N}) \;\leq\; \sup_N g(N) \;\leq\; g(x_k),$$

ou seja

$$-C_1 k^{r/(d+r)} - C_2 k^{(r-1)/(d+r)} \;\le\; \sup_N g(N) \;\le\; -C_1 k^{r/(d+r)},$$

com $C_1 = (d+r)d^{-d/(d+r)} r^{-r/(d+r)}$ e $C_2 = r^{(d+1)/(d+r)} d^{(r-1)/(d+r)}$. Obtemos assim de (4.59),

$$\sup_N A_{N,k} \;\asymp\; \sup_N g(N) \;\asymp\; k^{r/(d+r)}.$$

Teorema 4.2.7. *Seja* $\Lambda^{(2)}$ *o operador multiplicador definido na Proposição 4.2.1, com* $0 < r \le 1$. *Então*

$$e_k(\Lambda^{(2)} U_p, L^q) \;\gg\; e^{-\mathcal{C} k^{r/(d+r)}} \begin{cases} 1, & p < \infty,\ q > 1, \\ (\ln k)^{-1/2}, & p < \infty,\ q = 1, \\ (\ln k)^{-1/2}, & p = \infty,\ q > 1, \\ (\ln k)^{-1}, & p = \infty,\ q = 1, \end{cases} \tag{4.60}$$

onde

$$\mathcal{C} \;=\; \gamma^{d/(d+r)} \left(\frac{(d+r) d \Gamma(d/2)(\ln 2)}{2 r \pi^{d/2}} \right)^{r/(d+r)}.$$

Demonstração. Observemos inicialmente que

$$\begin{aligned} 2^{-k/n} \left(\prod_{l=1}^{N} |\lambda(l)|^{d_l} \right)^{1/n} \;&=\; e^{\ln 2^{-k/n}} \left(\prod_{l=1}^{N} |\lambda(l)|^{d_l} \right)^{1/n} \\ =\; e^{\ln 2^{-k/n}} \left(e^{-\gamma/n} \sum_{l=1}^{N} l^r d_l \right) \;&=\; e^{-\left(k \ln 2 + \gamma \sum_{l=1}^{N} l^r d_l\right)/n}. \end{aligned}$$

Temos que $A_{N,k} = -(1/n)\left(k \ln 2 + \gamma \sum_{l=1}^{N} l^r d_l\right)$ e obtemos assim do Teorema 3.4.5

$$e_k(\Lambda^{(2)} U_p, L^q) \;\gg\; e^{A_{N,k}} \begin{cases} 1, & p < \infty,\ q > 1, \\ (\ln n)^{-1/2}, & p < \infty,\ q = 1, \\ (\ln n)^{-1/2}, & p = \infty,\ q > 1, \\ (\ln n)^{-1}, & p = \infty,\ q = 1. \end{cases} \tag{4.61}$$

De (2.3), temos que

$$d_l \;\le\; \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} l^{d-1} + C_1 l^{d-2},$$

donde
$$\sum_{l=1}^{N} l^r d_l \;\leq\; \sum_{l=1}^{N} \left(\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} l^{d+r-1} + C_1 l^{d+r-2} \right).$$
Assim, definindo
$$f(x) = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} x^{d+r-1} + C_1 x^{d+r-2},$$
obtemos
$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{N} l^r d_l \;&\leq\; \sum_{l=1}^{N} f(l) \;\leq\; \int_1^{N+1} f(x)\, dx \\
&= \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)(d+r)}(N+1)^{d+r} + \frac{C_1}{(d+r-1)}(N+1)^{d+r-1} + C_2 \\
&\leq \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)(d+r)}(N+1)^{d+r} + C_3(N+1)^{d+r-1}.
\end{aligned}$$
De (2.4) temos $n \geq \dfrac{2\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)} N^d$ e assim
$$\begin{aligned}
\frac{\gamma}{n}\sum_{l=1}^{N} l^r d_l \;&\leq\; \frac{d\Gamma(d/2)\gamma}{2\pi^{d/2} N^d} \sum_{l=1}^{N} l^r d_l \\
&\leq \frac{d\Gamma(d/2)\gamma}{2\pi^{d/2} N^d} \left(\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)(d+r)}(N+1)^{d+r} + C_3(N+1)^{d+r-1} \right) \\
&= \frac{d\gamma}{(d+r)N^d}(N+1)^d (N+1)^r + \frac{d\Gamma(d/2)\gamma C_3}{2\pi^{d/2} N^d}(N+1)^d (N+1)^{r-1} \\
&= \frac{d\gamma}{(d+r)} \left(1 + \frac{1}{N}\right)^d (N+1)^r + C_4 \left(1 + \frac{1}{N}\right)^d (N+1)^{r-1}.
\end{aligned}$$
Como $(1 + 1/N)^d = 1 + b_1/N + b_2/N^2 + \cdots + 1/N^d \leq (1 + C_5/N)$, vem que
$$\begin{aligned}
\frac{\gamma}{n}\sum_{l=1}^{N} l^r d_l \;&\leq\; \frac{d\gamma}{(d+r)} \left(1 + \frac{C_5}{N}\right) (N+1)^r + C_4 \left(1 + \frac{C_5}{N}\right) (N+1)^{r-1} \\
&= \frac{d\gamma}{(d+r)}(N+1)^r + \frac{d\gamma C_5}{(d+r)} \frac{[N(1+1/N)]^r}{N} + C_4(N+1)^{r-1} + C_4 C_5 \frac{[N(1+1/N)]^{r-1}}{N} \\
&= \frac{d\gamma}{(d+r)}(N+1)^r + C_6 \left(1 + \frac{1}{N}\right)^r N^{r-1} + C_4(N+1)^{r-1} + C_7 \left(1 + \frac{1}{N}\right)^{r-1} N^{r-2}
\end{aligned}$$
e como $0 < r \leq 1$ e $\left|\dfrac{1}{N}\right| < 1$, obtemos
$$\frac{\gamma}{n}\sum_{l=1}^{N} l^r d_l \;\leq\; \frac{d\gamma}{(d+r)}(N+1)^r + C_8.$$

Agora

$$\begin{aligned}(N+1)^r &= N^r\left(1+\frac{1}{N}\right)^r = N^r\left(1+r\frac{1}{N}+\frac{r(r-1)}{2}\frac{1}{N^2}+\frac{r(r-1)(r-2)}{3}\frac{1}{N^3}+\cdots\right)\\ &= N^r\left[1+\frac{r}{N}\left(1+\frac{(r-1)}{2}\frac{1}{N}+\frac{(r-1)(r-2)}{3}\frac{1}{N^2}+\cdots\right)\right]\\ &= N^r+rN^{r-1}S_N \ \le\ N^r+C_rN^{r-1}\ \le\ N^r+C_9,\end{aligned}$$

já que $0<r\le 1$. Assim

$$\frac{\gamma}{n}\sum_{l=1}^{N} l^r d_l \ \le\ \frac{d\gamma}{(d+r)}(N^r+C_9)+C_8 \ =\ \frac{d\gamma}{(d+r)}N^r+C_{10}. \tag{4.62}$$

Segue também de (2.4) que

$$\frac{k}{n}\ \le\ \frac{d\Gamma(d/2)k}{2\pi^{d/2}N^d}. \tag{4.63}$$

Obtemos então de (4.62) e (4.63),

$$A_{N,k}\ \ge\ \frac{-d\Gamma(d/2)(\ln 2)k}{2\pi^{d/2}}N^{-d}\ -\ \frac{d\gamma}{d+r}N^r\ -\ C_{10}. \tag{4.64}$$

Definimos

$$g(x)=\frac{-d\Gamma(d/2)(\ln 2)k}{2\pi^{d/2}}\,x^{-d}\ -\ \frac{d\gamma}{d+r}\,x^r\ -\ C_{10}.$$

É fácil ver que o máximo absoluto da função g é atingido em

$$x_k=\left(\frac{(d+r)d\Gamma(d/2)(\ln 2)}{2r\gamma\pi^{d/2}}\right)^{1/(d+r)}k^{1/(d+r)}.$$

Podemos mostrar, como na Observação 4.2.6, que existe uma constante C_{11} tal que

$$g(x)-C_{11}\ \le\ g(x+t)\ \le\ g(x),\ \ x\ge x_k,\ 0\le t\le 1,$$

e assim obtemos

$$g(x_k)-C_{11}\ \le\ \sup_N g(N+1)\ \le\ g(x_k).$$

Portanto, segue de (4.64),

$$\sup_N A_{N,k}\ \ge\ \sup_N g(N+1)\ \ge\ g(x_k)-C_{11}.$$

Mas

$$
\begin{aligned}
g(x_k) &= k^{r/(d+r)}\left[\frac{-d\Gamma(d/2)(\ln 2)}{2\pi^{d/2}}\left(\frac{(d+r)d\Gamma(d/2)(\ln 2)}{2r\gamma\pi^{d/2}}\right)^{-d/(d+r)}\right.\\
&- \left.\frac{d\gamma}{(d+r)}\left(\frac{(d+r)d\Gamma(d/2)(\ln 2)}{2r\gamma\pi^{d/2}}\right)^{r/(d+r)}\right] - C_{10}\\
&= \left(\frac{(d+r)d\Gamma(d/2)(\ln 2)}{2r\gamma\pi^{d/2}}\right)^{r/(d+r)} k^{r/(d+r)}\left[-\frac{r\gamma}{d+r} - \frac{d\gamma}{d+r}\right] - C_{10}\\
&= -\gamma^{d/(d+r)}\left(\frac{(d+r)d\Gamma(d/2)(\ln 2)}{2r\pi^{d/2}}\right)^{r/(d+r)} k^{r/(d+r)} - C_{10}\\
&= -\mathcal{C}k^{r/(d+r)} - C_{10}
\end{aligned}
$$

e assim

$$
\sup_N A_{N,k} \;\geq\; -\mathcal{C}k^{r/(d+r)} - D_2.
$$

Segue então de (4.61)

$$
e_k(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \;\gg\; e^{-\mathcal{C}k^{r/(d+r)}}\begin{cases} 1, & p<\infty,\ q>1,\\ (\ln n)^{-1/2}, & p<\infty,\ q=1,\\ (\ln n)^{-1/2}, & p=\infty,\ q>1,\\ (\ln n)^{-1}, & p=\infty,\ q=1.\end{cases}
$$

Da Observação 4.2.6, temos $N \asymp k^{1/(d+r)}$ e assim $n \asymp N^d \asymp k^{d/(d+r)}$, donde $\ln n \asymp \ln k^{d/(d+r)} = d/(d+r)\ln k \asymp \ln k$ e portanto

$$
e_k(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \;\gg\; e^{-\mathcal{C}k^{r/(d+r)}}\begin{cases} 1, & p<\infty,\ q>1,\\ (\ln k)^{-1/2}, & p<\infty,\ q=1,\\ (\ln k)^{-1/2}, & p=\infty,\ q>1,\\ (\ln k)^{-1}, & p=\infty,\ q=1.\end{cases}
$$

$\square$

Teorema 4.2.8. *Seja $\Lambda^{(2)}$ o operador multiplicador definido na Proposição 4.2.1, com $0 < r \leq 1$. Então*

$$
e_k(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \;\ll\; e^{-\mathcal{C}k^{r/(d+r)}}\begin{cases} 1, & 2\leq p\leq\infty,\ 1\leq q<\infty,\\ \ln k, & 2\leq p\leq\infty,\ q=\infty,\end{cases}
$$

onde $\mathcal{C}$ é a constante dada no enunciado do Teorema 4.2.7.

Demonstração. De (4.51) e (4.52), sabemos que $\theta_{N_k,N_{k+1}} \;\leq\; C_1 e^{\delta' k} N^{d-r}$ e assim para $1 \leq k \leq M$, obtemos da Observação 3.3.2 e do fato de que $n \asymp N^d$,

$$\begin{aligned}
\ln \theta_{N_k,N_{k+1}} &\leq \ln C_1 + \delta' k + (d-r)\ln N \\
&\leq \ln C_1 + \delta' M + (d-r)\ln N \\
&\leq \ln C_1 + C_2\delta' \ln \theta_{N_1,N_2} + (d-r)\ln N \\
&\leq \ln C_1 + C_3(d-r)\ln N + (d-r)\ln N \\
&\leq C_4 \ln N \;\leq\; C_5 \ln n.
\end{aligned}$$

Logo

$$\sup_{1\leq k\leq M} \left(\ln \theta_{N_k,N_{k+1}}\right)^{1/2} \;\leq\; C_6 \left(\ln n\right)^{1/2}. \tag{4.65}$$

Para $2 \leq q \leq \infty$, obtemos de (3.48),

$$\begin{aligned}
\chi_k &= 3\sup_{n\geq 1} \left(\frac{2^{-k+1} Vol_n(B^n_{(2)})}{Vol_n(B^n_{(q)})} \prod_{j=1}^{N} |\lambda(j)|^{d_j} \right)^{1/n} \\
&\leq 3C \sup_{n\geq 1} \left(2^{-k+1}\right)^{1/n} \left(\prod_{j=1}^{N} |\lambda(j)|^{d_j} \right)^{1/n} \begin{cases} q^{1/2}, & 2\leq q<\infty, \\ (\ln n)^{1/2}, & q=\infty, \end{cases} \\
&\leq \sup_{n\geq 1} C_7 2^{-k/n} \left(\prod_{j=1}^{N} |\lambda(j)|^{d_j} \right)^{1/n} \begin{cases} 1, & 2\leq q<\infty, \\ (\ln n)^{1/2}, & q=\infty, \end{cases} \\
&= C_7 \sup_{n\geq 1} \left(e^{\ln 2}\right)^{-k/n} e^{-\gamma/n \sum_{j=1}^{N} j^r d_j} \begin{cases} 1, & 2\leq q<\infty, \\ (\ln n)^{1/2}, & q=\infty, \end{cases} \\
&= C_7 \sup_{N} e^{-\left(k\ln 2 + \gamma \sum_{j=1}^{N} j^r d_j\right)/n} \begin{cases} 1, & 2\leq q<\infty, \\ (\ln n)^{1/2}, & q=\infty, \end{cases} \\
&= C_7 \sup_{N} e^{A_{N,k}} \begin{cases} 1, & 2\leq q<\infty, \\ (\ln n)^{1/2}, & q=\infty. \end{cases}
\end{aligned}$$

De (3.48) temos também

$$\chi_k \;\geq\; C_8 \sup_{N} e^{A_{N,k}}$$

e assim

$$e^{\sup_N \; A_{N,k}} \;\ll\; \chi_k \;\ll\; e^{\sup_N \; A_{N,k}} \begin{cases} 1, & 2\leq q<\infty, \\ (\ln n)^{1/2}, & q=\infty. \end{cases} \tag{4.66}$$

De (2.3), temos $d_l \;\geq\; \dfrac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} l^{d-1} - C l^{d-2}$. Assim, definindo

$$f(x) \;=\; \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} x^{d+r-1} - C x^{d+r-2},$$

obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{l-1}^{N} l^r d_l &\geq \sum_{l=1}^{N} \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} l^{d+r-1} - C l^{d+r-2} = \sum_{l=1}^{N} f(l) \\ &\geq \int_0^N f(x)\, dx = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)(d+r)} N^{d+r} - \frac{C}{d+r-1} N^{d+r-1}. \qquad (4.67)\end{aligned}$$

Da Proposição 2.2.4, temos $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{FN^d} - \frac{\overline{C}}{F^2 N^{d+1}}$, onde $F = \frac{2\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)}$ e assim

$$\frac{k}{n} \geq \frac{k}{FN^d} - \frac{\overline{C}k}{F^2 N^{d+1}}.$$

Mas, da Observação 4.2.6, temos que $N \asymp k^{1/(d+r)}$ e desta forma podemos garantir a existência de uma constante absoluta C_9 satisfazendo

$$\frac{k}{n} \geq \frac{k}{FN^d} - C_9 k^{(r-1)/(d+r)}$$

e como $0 < r \leq 1$, vem que

$$\frac{k}{n} \geq \frac{k}{FN^d} - C_9 = \frac{d\Gamma(d/2)k}{2\pi^{d/2}} N^{-d} - C_9. \qquad (4.68)$$

Usando mais uma vez que $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{FN^d} - \frac{\overline{C}}{F^2 N^{d+1}}$, vem de (4.67) para $0 < r \leq 1$,

$$\begin{aligned}\frac{\gamma}{n}\sum_{l=1}^{N} l^r d_l &\geq \left(\frac{\gamma}{FN^d} - \frac{\overline{C}\gamma}{F^2 N^{d+1}}\right)\left(\frac{2\pi^{d/2}}{(d+r)\Gamma(d/2)} N^{d+r} - \frac{C}{d+r-1} N^{d+r-1}\right) \\ &= \frac{2\pi^{d/2}\gamma}{F(d+r)\Gamma(d/2)} N^r - \frac{2\pi^{d/2}\gamma\overline{C}}{F^2(d+r)\Gamma(d/2)} N^{r-1} \\ &- \frac{\gamma C}{F(d+r-1)} N^{r-1} + \frac{\gamma C\overline{C}}{F^2(d+r-1)} N^{r-2} \\ &\geq \frac{2\pi^{d/2}\gamma}{F(d+r)\Gamma(d/2)} N^r - C_{10} \\ &= \frac{d\gamma}{d+r} N^r - C_{10}. \qquad (4.69)\end{aligned}$$

Obtemos assim, de (4.68) e (4.69),

$$A_{N,k} = -\frac{k}{n}\ln 2 - \frac{\gamma}{n}\sum_{l=1}^{N} l^r d_l \leq -\frac{d\Gamma(d/2)(\ln 2)\, k}{2\pi^{d/2}} N^{-d} - \frac{d\gamma}{(d+r)} N^r + C_{11}. \quad (4.70)$$

Definimos

$$g_1(x) = -\frac{d\Gamma(d/2)(\ln 2)\, k}{2\pi^{d/2}} x^{-d} - \frac{d\gamma}{d+r} x^r + C_{11}.$$

É fácil ver que o valor máximo absoluto de g_1 é atingido no ponto

$$x_k = \left(\frac{(d+r)d\Gamma(d/2)(\ln 2)}{2r\gamma\pi^{d/2}}\right)^{1/(d+r)} k^{1/(d+r)}$$

e assim

$$\begin{aligned}
& \sup_N A_{N,k} \leq \sup_N g(N) \leq g_1(x_k) \\
= & \left(\frac{(d+r)d\Gamma(d/2)(\ln 2)}{2r\gamma\pi^{d/2}}\right)^{r/(d+r)} k^{r/(d+r)} \left[-\frac{\gamma r}{d+r} - \frac{d\gamma}{d+r}\right] + C_{11} \\
= & -\gamma \left(\frac{(d+r)d\Gamma(d/2)(\ln 2)}{2r\gamma\pi^{d/2}}\right)^{r/(d+r)} k^{r/(d+r)} + C_{11} \\
= & -\gamma^{d/(d+r)} \left(\frac{(d+r)d\Gamma(d/2)(\ln 2)}{2r\pi^{d/2}}\right)^{r/(d+r)} k^{r/(d+r)} + C_{11} \\
= & -\mathcal{C}k^{r/(d+r)} + C_{11}.
\end{aligned}$$

Segue então de (4.66) que

$$\chi_k \ll \begin{cases} e^{-\mathcal{C}k^{r/(d+r)}}, & 2 \leq q < \infty, \\ e^{\sup_N A_{N,k}}(\ln n)^{1/2}, & q = \infty. \end{cases} \tag{4.71}$$

Em particular, para $q = \infty$, usando (4.70) e lembrando que $n \asymp N^d$, obtemos

$$\begin{aligned}
\chi_k & \ll e^{\sup_N A_{N,k}}(\ln n)^{1/2} = \sup_N e^{A_{N,k}}(\ln n)^{1/2} \\
& \ll \sup_N e^{A_{N,k}}(\ln N)^{1/2} = \sup_N e^{A_{N,k}+\frac{1}{2}\ln(\ln N)} \\
& \leq \sup_N e^{-\frac{d\Gamma(d/2)(\ln 2)\, k}{2\pi^{d/2}}N^{-d} - \frac{d\gamma}{d+r}N^r + \frac{1}{2}\ln(\ln N) + C_{11}}.
\end{aligned}$$

Definindo

$$g_2(x) = -\frac{d\Gamma(d/2)(\ln 2)\, k}{2\pi^{d/2}}x^{-d} - \frac{d\gamma}{d+r}x^r + \frac{1}{2}\ln(\ln x) + C_{11},$$

de modo análogo ao que foi feito no Lema 4.1.6, observamos que o valor máximo da função g_2 é obtido em um ponto $\overline{x}_k$ satisfazendo $\overline{C}_1 x_k \leq \overline{x}_k \leq \overline{C}_2 x_k$, donde $\sup_N g_2(N)$ é obtido quando $N \asymp \overline{x}_k \asymp x_k \asymp k^{1/(d+r)}$. Portanto para $q = \infty$, temos

$$\begin{aligned}
\chi_k & \ll \sup_N e^{A_{N,k}}(\ln N)^{1/2} \ll \sup_N e^{A_{N,k}}(\ln k^{1/(d+r)})^{1/2} \\
& \ll \sup_N e^{A_{N,k}}(\ln k)^{1/2} = e^{\sup_N A_{N,k}}(\ln N)^{1/2} \\
& \leq e^{-\mathcal{C}k^{r/(d+r)}+C_{11}}(\ln k)^{1/2} \ll e^{-\mathcal{C}k^{r/(d+r)}}(\ln k)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Voltando em (4.71) vem que

$$\chi_k \ll e^{-\mathcal{C}k^{r/(d+r)}} \begin{cases} 1, & 2 \le q < \infty, \\ (\ln k)^{1/2}, & q = \infty. \end{cases} \tag{4.72}$$

Assim, como $\Lambda^{(2)} \in K_{\epsilon,2}$, para algum $\epsilon > 0$ (Ver (4.53)), aplicando o Teorema 3.5.3, obtemos

$$\begin{aligned} & e_\eta(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \\ \ll\ & \chi_k \left(\left\{ \begin{array}{cc} 1, & 2 \le p \le \infty,\, 2 \le q < \infty, \\ \sup\limits_{1 \le j \le M} \left(\ln \theta_{N_j,N_{j+1}}\right)^{1/2}, & 2 \le p \le \infty,\, q = \infty, \end{array} \right\} + \sum_{j=M+1}^{\infty} e^{-j} \theta_{N_j,N_{j+1}}^{1/2-1/q} \right). \end{aligned}$$

Mas $\sum_{j=M+1}^{\infty} e^{-j}\theta_{N_j,N_{j+1}}^{1/2-1/q} \ll 1$ (Ver (4.12)), $\ln \theta_{N_j,N_{j+1}} \ll \ln n$ (Ver demonstração do Teorema 4.1.3) e $\ln n \asymp \ln N^d \asymp \ln k^{d/(d+r)} \asymp \ln k$, donde

$$e_\eta(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \ll \chi_k \begin{cases} 1, & 2 \le p \le \infty,\, 2 \le q < \infty, \\ (\ln k)^{1/2}, & 2 \le p \le \infty,\, q = \infty. \end{cases}$$

Segue então de (4.72)

$$e_\eta(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \ll \begin{cases} \chi_k, & 2 \le p \le \infty,\, 1 \le q < 2, \\ e^{-\mathcal{C}k^{r/(d+r)}}, & 2 \le p \le \infty,\, 2 \le q < \infty, \\ e^{-\mathcal{C}k^{r/(d+r)}} \ln k, & 2 \le p \le \infty,\, q = \infty. \end{cases}$$

Para $1 \le q < 2$, temos pela definição de $\chi_k^{(q)}$ e por (4.72) que $\chi_k^{(q)} \le \chi_k^{(2)} \ll e^{-\mathcal{C}k^{r/(d+r)}}$ e assim

$$e_\eta(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \ll e^{-\mathcal{C}k^{r/(d+r)}} \begin{cases} 1, & 2 \le p \le \infty,\, 1 \le q < \infty, \\ \ln k, & 2 \le p \le \infty,\, q = \infty. \end{cases} \tag{4.73}$$

Da Observação 3.3.2, de (3.39), (4.51) e lembrando que $N \asymp k^{1/(d+r)}$, segue que

$$\begin{aligned} \eta &= k + \sum_{j=1}^{M} m_j \ \le\ k + \sum_{j=1}^{M} e^{-\epsilon j}\theta_{N_1,N_2} \\ &\le k + C_{12}\theta_{N_1,N_2} \ \le\ k + C_{13}N^{d-r} \\ &\le k + C_{14}k^{(d-r)/(d+r)} \end{aligned}$$

e assim, da Proposição 1.2.4 (a) e de (4.73), obtemos

$$e_{[k+C_{14}k^{(d-r)/(d+r)}]}(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \ll e^{-\mathcal{C}k^{r/(d+r)}} \begin{cases} 1, & 2 \le p \le \infty,\, 1 \le q < \infty, \\ \ln k, & 2 \le p \le \infty,\, q = \infty. \end{cases} \tag{4.74}$$

Seja $\varphi_k = k + C_{14}k^{(d-r)/(d+r)}$. Então

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}\left(-k^{r/(d+r)} + \varphi_k^{r/(d+r)}\right) &= \mathcal{C}\left(-k^{r/(d+r)} + k^{r/(d+r)}\left(1 + C_{14}k^{-2r/(d+r)}\right)^{r/(d+r)}\right) \\
&= \mathcal{C}k^{r/(d+r)}\left(-1 + \left(1 + C_{14}k^{-2r/(d+r)}\right)^{r/(d+r)}\right) \\
&= \mathcal{C}k^{r/(d+r)}\left(\frac{rC_{14}}{d+r}k^{-2r/(d+r)} - \frac{rdC_{14}^2}{2(d+r)^2}k^{-4r/(d+r)} + \cdots\right) \\
&= \mathcal{C}\left(\frac{rC_{14}}{d+r}k^{-r/(d+r)} - \frac{rdC_{14}^2}{2(d+r)^2}k^{-3r/(d+r)} + \cdots\right) \\
&\leq C_{15}
\end{aligned}$$

donde

$$-\mathcal{C}k^{r/(d+r)} \;\leq\; C_{15} - \mathcal{C}\varphi_k^{r/(d+r)},$$

e logo

$$e^{-\mathcal{C}k^{r/(d+r)}} \;\leq\; e^{C_{15}}e^{-\mathcal{C}\varphi_k^{r/(d+r)}} \;\ll\; e^{-\mathcal{C}\varphi_k^{r/(d+r)}}.$$

Segue então de (4.74)

$$e_{[\varphi_k]}(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \;\ll\; e^{-\mathcal{C}\varphi_k^{r/(d+r)}}\begin{cases} 1, & 2 \leq p \leq \infty,\ 1 \leq q < \infty, \\ \ln k, & 2 \leq p \leq \infty,\ q = \infty. \end{cases} \tag{4.75}$$

Observemos agora que

$$\begin{aligned}
\varphi_k^{r/(d+r)} &= k^{r/(d+r)}\left(1 + C_{14}k^{-2r/(d+r)}\right)^{r/(d+r)} \\
&= k^{r/(d+r)}\left(1 + \frac{rC_{14}}{d+r}k^{-2r/(d+r)} - \frac{rdC_{14}^2}{2(d+r)^2}k^{-4r/(d+r)} + \cdots\right),
\end{aligned}$$

donde

$$\varphi_k^{r/(d+r)} \;\geq\; k^{r/(d+r)}\left(1 + \frac{rC_{14}}{d+r}k^{-2r/(d+r)} - \frac{rdC_{14}^2}{2(d+r)^2}k^{-4r/(d+r)}\right)$$

e

$$\varphi_{k+1}^{r/(d+r)} \;\leq\; (k+1)^{r/(d+r)}\left(1 + \frac{rC_{14}}{d+r}(k+1)^{-2r/(d+r)}\right).$$

Como $0 < (k+1)^{r/(d+r)} - k^{r/(d+r)} \;\leq\; r/(d+r)$, vem que

$$0 \leq \varphi_{k+1}^{r/(d+r)} - \varphi_k^{r/(d+r)} \;\leq\; (k+1)^{r/(d+r)} - k^{r/(d+r)} + C_{16} \;\leq\; r/(d+r) + C_{16} \;=\; C_{17}$$

donde

$$1 \;\leq\; \frac{e^{-\mathcal{C}\varphi_k^{r/(d+r)}}}{e^{-\mathcal{C}\varphi_{k+1}^{r/(d+r)}}} \;\leq\; C_{18}. \tag{4.76}$$

Finalmente, se $0 < r \leq 1$, para $[\varphi_k] \leq l \leq [\varphi_{k+1}]$, obtemos da Proposição 1.2.4 (a), de (4.75) e (4.76)

$$\begin{aligned} e_l(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) &\leq e_{[\varphi_k]}(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \\ &\ll e^{-\mathcal{C}\varphi_k^{r/(d+r)}} \begin{cases} 1, & 2 \leq p \leq \infty,\ 1 \leq q < \infty, \\ \ln k, & 2 \leq p \leq \infty,\ q = \infty, \end{cases} \\ &\ll e^{-\mathcal{C}\varphi_{k+1}^{r/(d+r)}} \begin{cases} 1, & 2 \leq p \leq \infty,\ 1 \leq q < \infty, \\ \ln \varphi_k, & 2 \leq p \leq \infty,\ q = \infty, \end{cases} \\ &\leq e^{-\mathcal{C}l^{r/(d+r)}} \begin{cases} 1, & 2 \leq p \leq \infty,\ 1 \leq q < \infty, \\ \ln(l+1), & 2 \leq p \leq \infty,\ q = \infty, \end{cases} \\ &\ll e^{-\mathcal{C}l^{r/(d+r)}} \begin{cases} 1, & 2 \leq p \leq \infty,\ 1 \leq q < \infty, \\ \ln l, & 2 \leq p \leq \infty,\ q = \infty, \end{cases} \end{aligned}$$

concluindo a demonstração. □

Observação 4.2.9. Fazendo simples adaptações nas demonstrações dos Teoremas 4.2.7 e 4.2.8, podemos observar que os resultados permanecem válidos quando trocamos o operador $\Lambda^{(2)}$ pelo operador $\Lambda_*^{(2)}$ e a constante $\mathcal{C}$ pela constante

$$\mathcal{C}_* = \gamma^{d/(d+r)} \left(\frac{(d+r)(\ln 2)}{2^d r} \right)^{r/(d+r)}.$$

Na demonstração do Teorema 4.2.7, observamos que a constante $\mathcal{C}$ é obtida a partir de (4.62) e (4.63), usando (2.4). A constante $\mathcal{C}^*$ é obtida de modo análogo, usando (2.7) no lugar de (2.4).

4.3 Conclusões

Nesta última seção, vamos expor os casos onde as estimativas obtidas são assintoticamente exatas em termos de ordem. Tais resultados serão dados em forma de Corolários já que são consequências imediatas dos teoremas demonstrados nas duas seções precedentes.

Corolário 4.3.1. *Sejam $\Lambda^{(1)}$, $\Lambda_*^{(1)}$, $\Lambda^{(2)}$ e $\Lambda_*^{(2)}$ os operadores multiplicadores definidos na introdução do capítulo com $0 < r \leq 1$. Então para $2 \leq p, q < \infty$,*

$$d_k(\Lambda^{(1)}U_p, L^q) \asymp d_k(\Lambda_*^{(1)}U_p, L^q) \asymp k^{-\gamma/d}(\ln k)^{-\xi}, \ \ \gamma > d/2,$$

$$d_k(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \asymp e^{-\mathcal{R}k^{r/d}}$$

e

$$d_k(\Lambda_*^{(2)}U_p, L^q) \asymp e^{-\mathcal{R}_* k^{r/d}},$$

onde

$$\mathcal{R} = \gamma \left(\frac{d\Gamma(d/2)}{2\pi^{d/2}} \right)^{r/d} \quad e \quad \mathcal{R}_* = \gamma 2^{-r}.$$

Corolário 4.3.2. *Sejam $\Lambda^{(1)}$, $\Lambda_*^{(1)}$, $\Lambda^{(2)}$ e $\Lambda_*^{(2)}$ os operadores multiplicadores definidos na introdução do capítulo com $0 < r \leq 1$. Então para $2 \leq p, q < \infty$,*

$$e_k(\Lambda^{(1)}U_p, L^q) \asymp e_k(\Lambda_*^{(1)}U_p, L^q) \asymp k^{-\gamma/d}(\ln k)^{-\xi}, \quad \gamma > d/2,$$

$$e_k(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \asymp e^{-\mathcal{C}k^{r/(d+r)}}$$

e

$$e_k(\Lambda_*^{(2)}U_p, L^q) \asymp e^{-\mathcal{C}_* k^{r/(d+r)}},$$

onde

$$\mathcal{C} = \gamma^{d/(d+r)} \left(\frac{(d+r)d\Gamma(d/2)(\ln 2)}{2r\pi^{d/2}} \right)^{r/(d+r)} \quad e \quad \mathcal{C}_* = \gamma^{d/(d+r)} \left(\frac{(d+r)(\ln 2)}{2^d r} \right)^{r/(d+r)}.$$

Referências Bibliográficas

[1] Babenko, K. I., *Best approximations of a class of analytic functions* , *Izv. Akad. Nauk SSSR* **22** (1958), 631-640.

[2] Birman, M. S., Solomyak, M. Z., *Piecewise polynomial approximations of functions of classes* W_p^α, *Mat. Sb. (N.S.)* **73 (115)** (1967), 331-355.

[3] Chamizo, F., *Lattice Point Counting and Harmonic Analysis. Proceedings of the Segundas Jornadas de Teoría de Números*, p. 83-99. Bibl. Rev. Mat. Iberoamericana, Madrid, (2007).

[4] Cohen, A., Daubechies, I., Guleryuz, O. G., Orchard, M. T., *On the importance of combining wavelet-based nonlinear approximation with coding strategies, IEEE Trans. Inform. Theory* **48** (2002), 1895-1921.

[5] Donoho, D. L., *Unconditional bases and bit-level compression*, *Appl. Comput. Harmon. Anal.* **3** (1996), 388-392.

[6] Edmunds, D. E., Triebel, H., *Function Spaces, Entropy Numbers, Differential Operators*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996.

[7] Fisher, S. D., Micchelli, C. A., *The* n*-width of sets of analytic functions*, *Duke Math. J.* **47** (1980), 789-801.

[8] Folland, G. B., *Real Analysis.* John Wiley and Sons, New York, 1984.

[9] Fraser, W., Gotlieb, C. C., *A calculation of the number of lattice points in the circle and sphere*, *Math. Comp.* **16** (1962), 282-290.

[10] Galante, J., *Gauss's Circle Problem.* Senior Thesis, University of Rochester, 2005.

[11] Gluskin, E. D., *A certain problem concerning diameters*, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **219** (1974), 527-530.

[12] Grafakos, L., *Classical Fourier Analysis.* Springer, second edition, 2008.

[13] Hilbert, D., Cohn-Vossen, S., *Geometry and the Imagination.* Chelsea Publishing Company, New York, 1952.

[14] Ismagilov, R. S., *Diameters of sets in normed linear spaces, and the approximation of functions by trigonometric polynomials*, *Uspehi Mat. Nauk* **29** (1974), 161-178.

[15] Kashin, B. S., *On Kolmogorov diameters of octahedra*, *Soviet. Math. Dokl.* **15** (1974), 304-307.

[16] Kashin, B. S., *Diameters of some finite-dimensional sets and classes of smooth functions, Math. USSR Izv.* **11** (1977), 317-333.

[17] Kolmogorov, A., *Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse*, *Ann. of Math.* **37** (1936), 107-110.

[18] Kushpel, A., Tozoni, S., *Entropy and widths of multiplier operators on two-point homogeneous spaces*, *Constr. Approx.* **35** (2012), 137-180.

[19] Kushpel, A., Stábile, R. L. B., Tozoni, S., *Estimates for n-widths of sets of smooth functions on the torus* $\mathbb{T}^d$, *J. Approx. Theory* **183** (2014), 45-71.

[20] Kwapień, S., *Isomorphic characterizations of inner product spaces by orthogonal series with vector valued coefficients*, *Studia Math.* **44** (1972), 583-595.

[21] Maiorov, V. E., *Discretization of the problem of diameters*, *Uspehi Mat. Nauk* **30** (1975), 179-180.

[22] Makovoz, Ju. I., *Diameters of Sobolev classes and splines deviating least from zero*, *Mat. Zametki* **26** (1979), 805-812.

[23] Melkman, A. A., *n-Widths and optimal interpolation of time and band-limited functions. II., SIAM J. Math. Anal.* **16** (1985), 803-813.

[24] Mitchell, W. C., *The number of lattice points in a k-dimensional hypersphere*, *Math. Comp.* **20** (1966), 300-310.

[25] Pajor, A., Tomczak-Jaegermann, N., *Subspaces of small codimension of finite-dimensional Banach spaces*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **97** (1986), 637-642 .

[26] Pietsch, A., *Operator Ideals*. North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1980.

[27] Pinkus, A., *n-Widths in Approximation Theory*. Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[28] Pisier, G., *The Volume of Convex Bodies and Banach Space Geometry*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989.

[29] Rudin, W., *L^2-approximation by partial sums of orthogonal developments*, *Duke Math. J.* **19** (1952), 1-4.

[30] Scholz, R., *Durchmesseräbschatzungen für die Einheitskugel des Sobolev-Raumes $W_q^r(U)$ in $L_p(U)$*, *Applicable Anal.* **5** (1976), 257-264.

[31] Stábile, R. L. B., *n-Larguras de Conjuntos de Funções Suaves sobre a Esfera S^d*. Dissertação de Mestrado, IMECC/UNICAMP, 2009.

[32] Stechkin, S. R., *The best approximation of given classes of function*, *Uspehi Mat. Nauk* **9** (1954), 133-134.

[33] Stein, E. M., *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*. Princeton Univ. Press, Princeton, 1970.

[34] Taikov, L. V., *Best approximation in the mean of certain classes of analytic functions*, *Mat. Zametki* **1** (1967), 155-162.

[35] Tichomirov, V. M., *Diameters of sets in function spaces and the theory of best approximations*, *Uspehi Mat. Nauk* **15** (1960), 81-120.