Marília Franceschinelli de Souza

Otimização de Canteiros – Quadriláteros de perímetro constante e área máxima

CAMPINAS
2014

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

MARÍLIA FRANCESCHINELLI DE SOUZA

OTIMIZAÇÃO DE CANTEIROS – QUADRILÁTEROS DE PERÍMETRO CONSTANTE E ÁREA MÁXIMA

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra.

Orientadora: Sandra Augusta Santos

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELA ALUNA MARÍLIA FRANCESCHINELLI DE SOUZA, E ORIENTADA PELA PROFA. DRA. SANDRA AUGUSTA SANTOS.

Assinatura da Orientadora

Sandra A Santos

CAMPINAS
2014

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

So89o Souza, Marília Franceschinelli de, 1984-
Otimização de canteiros - quadriláteros de perímetro constante e área máxima / Marília Franceschinelli de Souza. – Campinas, SP : [s.n.], 2014.

Orientador: Sandra Augusta Santos.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Desigualdades (Matemática). 2. Otimização matemática. 3. Programação quadrática. I. Santos, Sandra Augusta,1964-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Optimization of grounds - quadrilaterals of constant perimeter and maximum area
Palavras-chave em inglês:
Inequalities (Mathematics)
Mathematical optimization
Quadratic programming
Área de concentração: Matemática em Rede Nacional
Titulação: Mestra
Banca examinadora:
Sandra Augusta Santos [Orientador]
Maria Aparecida Diniz Ehrhardt
Luis Felipe Cesar da Rocha Bueno
Data de defesa: 29-08-2014
Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 29 de agosto de 2014 e aprovada Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Sandra A Santos

Prof.(a). Dr(a). SANDRA AUGUSTA SANTOS

mdehrhardt

Prof.(a). Dr(a). MARIA APARECIDA DINIZ EHRHARDT

LfBueno

Prof.(a). Dr(a). LUIS FELIPE CESAR DA ROCHA BUENO

Abstract

The mathematics curriculum of the Brazilian High School is currently very dense. As a result, it is hard to explore alternative ways of teaching that allow the students to effectively participate in lessons, instead of just listening to the teacher and taking notes. The old fashioned expositive method, in general, does not encourage the interest of the students, especially in Mathematics, considered as a villain by many, because of it is intrinsic difficult. In this work it is presented the proposal of a project for the High School level. The problem of maximizing the area of quadrilaterals with constant perimeter is approached, using essentially the content of Basic Education. The starting point is a simple problem, present in most textbooks. The analysis is extended for situations closer to reality, offering students the opportunity to use many concepts already studied, in an application of mathematics. The problems are treated algebraically and geometrically, providing elements for the student to process information, anticipates possibilities, consider the general case, exemplify specific situations, so that they might indeed understand the problems and interpret the obtained solutions.

Keywords: quadratic function; area; perimeter; inequalities; optimal point; optimal value.

Resumo

O currículo de Matemática do Ensino Médio está atualmente muito denso e quase não permite ao professor explorar outros trabalhos que fujam das aulas expositivas, nas quais o papel do aluno é o de apenas escutar, anotar e reproduzir. Esse esquema antiquado desperta pouco interesse dos alunos pelas disciplinas, especialmente pela Matemática, tida por muitos como a vilã, bastante difícil de ser compreendida. Neste trabalho apresentamos uma proposta de projeto para ser trabalhado no Ensino Médio. O problema de otimização da área de quadriláteros de perímetro constante é abordado, utilizando essencialmente o conteúdo do Ensino Básico. O ponto de partida é um problema simples, presente na maioria dos livros-texto. A análise é ampliada gradativamente por situações mais próximas da realidade, oferecendo ao aluno a oportunidade de utilizar diversos conceitos estudados em uma aplicação da Matemática. Os problemas são abordados tanto de forma algébrica quanto geométrica, oferecendo elementos para que o aluno processe informações, anteveja possibilidades, analise o caso geral, exemplifique situações específicas e de fato possa compreender os problemas e interpretar as soluções obtidas.

Palavras-chave: função quadrática; área; perímetro; desigualdades; ponto ótimo; valor ótimo.

Sumário

Dedicatória

Aos meus familiares e amigos, que sempre me deram apoio, até mesmo naqueles momentos em que tive que me ausentar para me dedicar ao trabalho ....
Para todos os professores brasileiros, que por amor a essa tão linda profissão, são capazes de realizar trabalhos excepcionais, mesmo enfrentando imensas dificuldades ....
E, principalmente, dedico à minha mãe, que me ensinou a importância da Educação....

Agradecimentos

Agradeço a Sandra, minha orientadora, pela parceria, dedicação e paciência.

Agradeço ao colega Ivan, pela ajuda com a formatação do trabalho.

Agradeço a todos meus amigos, que demonstraram muita compreensão e paciência com meus muitos momentos de estudo e ausência em nossos encontros.

Agradeço em especial à minha família, minha mãe, meu pai, minha avó e irmãs, que me apoiaram e incentivaram em toda esta difícil jornada.

Capítulo 1

Introdução

Não é de hoje que o ensino de Matemática no Brasil está ruim. E ruim porque? Os professores são despreparados? Os alunos desinteressados? O currículo é muito denso? A forma de ensinar já está ultrapassada? Muitas são as hipóteses para se explicar este fato, mas a verdade é que todas elas juntas ocasionam a situação atual do ensino de Matemática no país. As aulas centradas no professor, onde o aluno assiste e apenas absorve o conhecimento, sem tentar construí-lo de alguma maneira, é um dos fatores que pode desmotivar os alunos. Um aluno do Ensino Médio, entre 14 e 18 anos, gosta de desafios, de mostrar sua capacidade, de se exibir, seja em qualquer área. Então, porque não proporcionarmos isto a ele? Este trabalho tem como proposta apresentar um tema de projeto para ser realizado com alunos do Ensino Médio, abordando um problema clássico da área de otimização da Matemática Aplicada e introduzindo alguns conceitos e noções intuitivas do cálculo. Tivemos como ponto de partida o artigo [3] e o material disponível em [11].

Este texto está organizado da seguinte maneira. Inicialmente, por meio de relatos de experiências pessoais, são apresentadas algumas reflexões sobre a importância da aprendizagem significativa para os alunos e a relação humana entre professor e aluno. O capítulo 2 aborda o clássico problema dos quadriláteros de perímetro constante, que é resolvido nos casos uni e bidimensional, utilizando apenas conteúdos previstos no Ensino Médio. São apresentadas tanto a resolução algébrica quanto a geométrica, proporcionando aos alunos meios para que eles sejam capazes de analisar as situações, antever possibilidades, ler os gráficos, e de fato compreeender o problema e sua solução.

1.1 Por que trabalhar com projetos?

Há alguns anos realizava um trabalho pedagógico em um parque de diversões. A ideia era transformar o parque em um grande laboratório. Alunos de todo o país iam com suas escolas para se divertir no parque. Porém, atrelado a isso, estava um projeto escolar, às vezes de Física, às vezes de Biologia, outras vezes até interdisciplinar, chegando a contar também com a disciplina de Artes. Antes do parque ser aberto ao público os alunos eram recepcionados pela sua equipe pedagógica para terem uma “aula diferente”. Eram levados para algum brinquedo, por exemplo, a montanha russa, e lá, o professor de Física, ou Biologia, lhes dava uma aula sobre velocidade, força, energia, aceleração, ou, sobre fisiologia e medo, respectivamente. Ou ainda, eles eram levados até o teatro e lá, com mais centenas de alunos, participariam de uma aula com muitos efeitos visuais e sonoros, algumas experiências e brincadeiras, todas elas feitas com o objetivo de ensinar determinado conteúdo. Por exemplo, apenas assistir, sem nenhum som, uma queda na montanha russa, e mesmo assim gritar de medo. Por que isso acontece?

Uma aula com esses conteúdos poderia ter acontecido na própria sala de aula, com seu próprio professor. Porém, estando o aluno na frente do brinquedo, ele visualizaria toda a situação, e mais ainda, logo após a explicação teria a oportunidade de vivenciar tudo aquilo que o professor acabara de explicar. Certamente, uma aula assim, ele dificilmente irá esquecer.

É claro que é impossível rechearmos nossos horários com passeios, aulas diferentes, projetos, mas, conseguimos, com certeza, conciliar e mesclar as aulas, fazendo com que os alunos passem a ser mais atuantes durante as aulas, que eles também se sintam responsáveis pelo seu próprio aprendizado.

Outro exemplo que gostaria de citar são as cartas para tia Belarmina. Deixe-me explicar melhor. Durante o primeiro ano de graduação, um professor pedia para que escrevêssemos cartas para uma suposta tia Belarmina explicando como tal exercício era resolvido, ou como provávamos tal teorema. Na época, confesso, não entendia o real significado daquilo, mas com certeza, aquelas escritas me ajudaram a desenvolver a linguagem matemática utilizando a língua portuguesa. Parece estranho dizer isso, mas a Matemática não se esgota por si só utilizando símbolos, precisamos escrevê-la em palavras, e muito. Os alunos do ensino básico dificilmente tiveram uma experiência nesse sentido, para eles Matemática é resolver contas e equações. Aquele livro de teoria que todos recebem no começo do ano chega ao fim do ano letivo praticamente intacto. Após relembrar destas famosas cartas, e lendo o artigo [12], resolvi pedir o mesmo para meus próprios alunos. Durante algumas semanas pedi para os alunos de uma determinada sala que escrevessem uma carta para sua tia explicando determinado assunto de cada aula. Com isso, os alunos começaram a ler o livro didático, tentar compreender as palavras que estavam ali e relacioná-las de fato com o que estavam resolvendo nos exercícios. Eles poderiam escrever da maneira que quisessem, cartas formais, informais, grandes, curtas, a única proibição era, eles não podiam escrever fórmulas e símbolos matemáticos, afinal, a tia Belarmina não entendia nada daquilo. No começo as fórmulas eram abundantes, era muito difícil explicar como calculávamos a probabilidade de obtermos o número 2 no lançamento de um dado sem pensarmos em escrever a fração $1/6$, por exemplo. Mas aos poucos, as cartas foram ficando mais narrativas, as explicações cada vez melhores, os exemplos usados para explicar determinado assunto eram cada vez mais diversos. Os alunos, sem perceber, começaram a entender de verdade o que significavam aquelas contas e equações que estavam resolvendo, começaram a "ler" e "escrever" matemática, e mais ainda, de uma forma bem humorada e posso dizer até prazerosa, tamanha a dedicação que eles depositavam nos envelopes entregues com as cartas.

Através dessas poucas experiências, pude perceber que fazendo os alunos participarem mais ativamente, e com trabalhos diferentes daqueles que eles estão acostumados, podemos ter resultados mais satisfatórios, para nós, professores, e para os alunos, que deixarão de ver a Matemática como um monstro, como é vista por muitos ainda hoje. O que queremos então neste trabalho é introduzir o cálculo no Ensino Médio de uma maneira mais prática, através de um problema que alguns só estudariam quando ingressassem na faculdade e outros, jamais veriam.

Capítulo 2

Otimização em problemas de perímetro constante

2.1 Otimização no Ensino Médio

A otimização é uma das áreas da Matemática Aplicada que mais pode despertar o gosto pela Matemática nos nossos alunos. Os problemas são sempre reais, envolventes, e que respondem àquela típica pergunta que com certeza todo professor já enfrentou: onde vou usar isso na minha vida? Os problemas de otimização tem como objetivo encontrar a melhor maneira de desempenhar uma tarefa, por exemplo, poderíamos estar interessados em encontrar a maneira mais rápida, ou até a mais lucrativa em desempenhar tal tarefa. Matematicamente, os problemas de otimização visam determinar o maior ou menor valor de uma função em determinado domínio, e para isso recorremos às ferramentas do cálculo.

O problema a ser estudado é uma variação de um clássico problema de otimização, conhecido como problema isoperimétrico.

O problema isoperimétrico clássico surgiu de uma lenda grega, conhecida como a Lenda de Dido. A lenda conta que Dido, fugindo da Grécia após o assassinato de seu marido pelo seu próprio irmão, chega à Africa e é muito bem recebida pelos nativos. Ela pede que eles lhe concedam um pedaço de terra para que possa plantar, construir moradia e sobreviver. Eles então lhe entregam uma pele de boi e dizem que ela poderia tomar a porção de terra que pudesse conter naquela pele. Dido então mandou cortar a pele em tiras finas e amarrou-as de tal maneira que formaram um fio bem longo. Então, com esse fio, delimitou uma área utilizando a beira do mar como um dos limitantes, formando algo parecido com uma semicirfunferência. Lá então fundou a cidade de Cartago.

Essa história da mitologia grega, que ficou famosa na Eneida, de Virgilio [7, 14], deu origem ao seguinte problema de otimização, conhecido como problema isoperimétrico clássico:

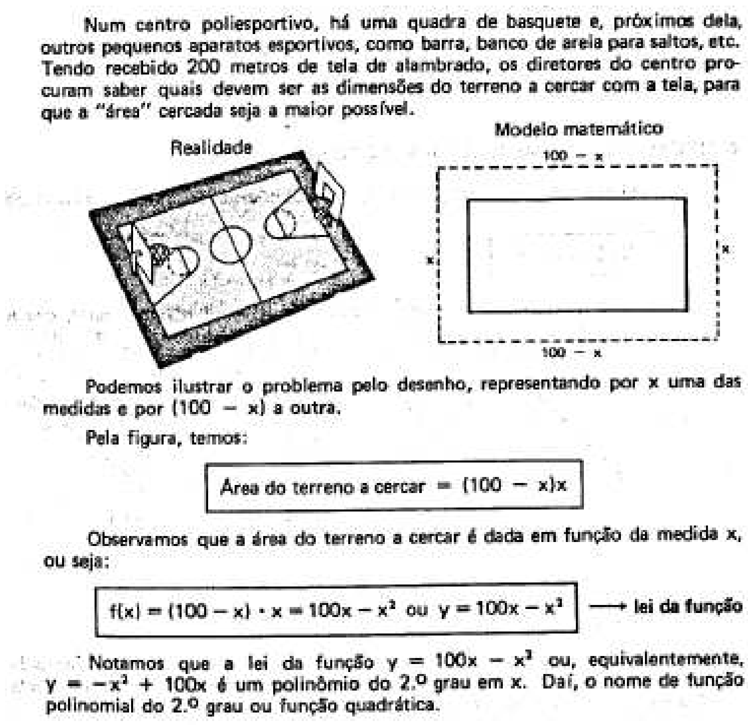
Dentre as curvas simples, que são aquelas que não se autointerceptam, e fechadas, que delimitam uma região fechada no plano, qual é a que delimita a maior área possível?

No problema de Dido, como ela usou a praia como um dos limitantes, temos que a maior área possível foi dada pela semicircunferência, porém, se utilizarmos apenas um comprimento fixo L, a maior área será dada por uma circunferência de perímetro L.

Apesar de o termo *isoperimétrico* significar perímetro constante, quando falamos em *problema isoperimétrico* nos remetemos ao problema clássico, tratado acima (ver também [9, 10]). Neste trabalho, estudaremos outro tipo de problema de áreas máximas utilizando perímetros constantes, nas quais as curvas simples que abordaremos serão sempre quadriláteros. Então, para não haver confusão com o termo isoperimétrico clássico, não adotaremos esta nomenclatura em nosso problema em questão.

O nosso ponto de partida é cercar um canteiro de formato retangular com um pedaço de tela de comprimento L, e o objetivo é determinar as dimensões que o canteiro deve ter para que sua área seja máxima.

Problemas deste tipo são cada vez mais frequentes em livros didáticos para o Ensino Médio e até mesmo para as séries finais do Ensino Fundamental, bem como em avaliações nacionais. Alguns exemplos são apresentados nas Figuras 2.1, 2.2 e 2.3.


Num centro poliesportivo, há uma quadra de basquete e, próximos dela, outros pequenos aparatos esportivos, como barra, banco de areia para saltos, etc. Tendo recebido 200 metros de tela de alambrado, os diretores do centro procuram saber quais devem ser as dimensões do terreno a cercar com a tela, para que a "área" cercada seja a maior possível.

Realidade

Modelo matemático

$100 - x$

x

Podemos ilustrar o problema pelo desenho, representando por x uma das medidas e por $(100 - x)$ a outra.

Pela figura, temos:

$$\boxed{\text{Área do terreno a cercar} = (100 - x)x}$$

Observamos que a área do terreno a cercar é dada em função da medida x, ou seja:

$$\boxed{f(x) = (100 - x) \cdot x = 100x - x^2 \text{ ou } y = 100x - x^2} \longrightarrow \text{lei da função}$$

Notamos que a lei da função $y = 100x - x^2$ ou, equivalentemente, $y = -x^2 + 100x$ é um polinômio do 2.º grau em x. Daí, o nome de função polinomial do 2.º grau ou função quadrática.

Figura 2.1: Problema extraído de [5], p.105.

No livro teórico, foi proposta uma problematização relativa a uma praça de Nagoya. O jardineiro responsável por aquele belo jardim havia reservado um pedaço de terra totalmente plana para produzir mudas com a finalidade de estar sempre remodelando-o. Desejando aproveitar um pedaço de terra livre para produzir mudas de uma nova planta exótica, faria um cercado para o novo canteiro e a forma seguiria o padrão de todos os outros, que eram retangulares já existentes na propriedade. Vimos também que ele tinha disponível somente 24 m de tela a ser utilizados. Vamos agora usar uma problematização um pouco diferente: suponha que o jardineiro resolva aproveitar um dos muros da propriedade como um dos lados do cercado, de acordo com o desenho a seguir.

Pergunta-se:

a) quais são as dimensões do cercado para que a área seja também a maior possível?

b) Será que dessa forma ele estará otimizando ainda mais o espaço, ou será que o fará na situação proposta no livro teórico?

E se agora a proposta fosse um pouco diferente da anterior? Se o muro medisse 2 m, como ficaria o cercado para que a área fosse máxima?

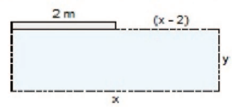
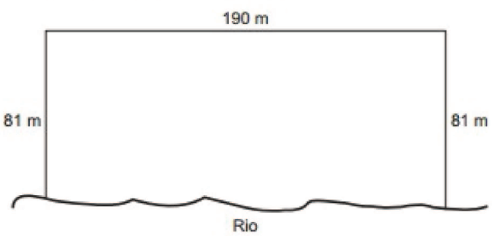


Figura 2.2: Problema extraído de [2], p.366-367.

Para o reflorestamento de uma área, deve-se cercar totalmente, com tela, os lados de um terreno, exceto o lado margeado pelo rio, conforme a figura. Cada rolo de tela que será comprado para confecção da cerca contém 48 metros de comprimento.



A quantidade mínima de rolos que deve ser comprada para cercar esse terreno é

a) 6. b) 7. c) 8. d) 11. e) 12.

Figura 2.3: Problema extraído de [4].

Percebemos então, que o problema de obter a área máxima de um terreno nas situações apresentadas está sempre relacionado com retângulos, que será também o quadrilátero que usaremos neste trabalho. Porém, podemos pensar em construir canteiros utilizando outros quadriláteros, por exemplo, paralelogramos, losangos ou trapézios.

No caso de um paralelogramo, se tivermos um comprimento fixo L, a figura que teríamos que maximizar seria tal que os dois pares de lados paralelos seriam iguais.

Considere um paralelogramo de lados de medidas x e y e altura h. Logo, temos $2x+2y=L$. E sabemos que a área desse paralelogramo é $A=x.h$, que é a mesma de um retângulo de comprimento x e largura h.

Observe que podemos rearranjar o paralelogramo de tal forma que sua área é a mesma de um retângulo de comprimento x e altura h. Logo, maximizar a área de um paralelogramo é o mesmo que maximizar a área de um retângulo.

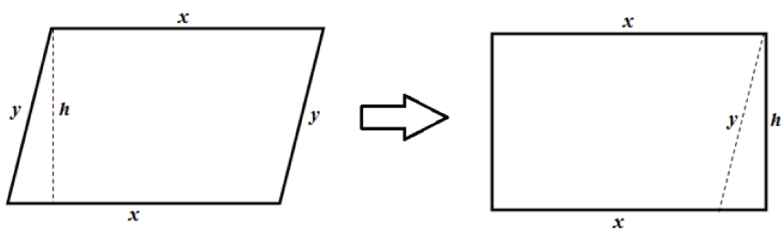


Figura 2.4: Paralelogramo(esq.) e retângulo(dir.) equivalentes(áreas iguais)

Podemos pensar nesse problema visualmente. Considerando o paralelogramo com um perímetro constante L podemos deformar o paralelogramo inicial considerado na Figura 2.4, mantendo-se a base de comprimento x fixa, de tal forma que conseguimos sempre transformá-lo em um retângulo de mesmo perímetro L. Conforme ilustrado na Figura 2.5, à medida que a altura h aumenta, a área tambem aumenta, e atinge seu valor máximo quando $h=y$.

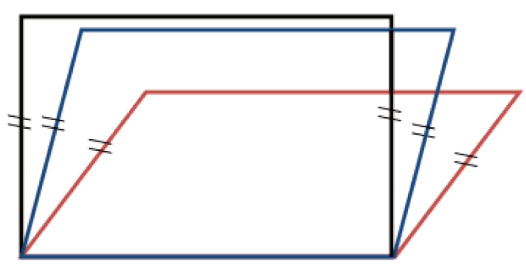


Figura 2.5: Deformações em um paralelogramo que preservam o perímetro.

No caso do losango, seu perímetro é dado por $4x=L$, em que x é o lado do losango. Chamando de d e D suas diagonais menor e maior, respectivamente, queremos maximizar a área $A=\frac{d.D}{2}$. De fato, conforme ilustra a Figura 2.6, podemos rearranjar o losango de maneira que ele se transforme em um retângulo de comprimento $\frac{D}{2}$ e altura d, e portanto de área $A=\frac{D}{2}.d$.

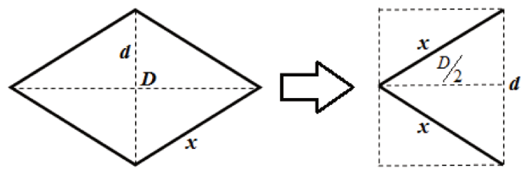


Figura 2.6: Rearranjo de um losango em um retângulo equivalente.

Então, o losango de área máxima será também um retângulo, e nesse caso, com lados congruentes, ou seja, um quadrado! Podemos também pensar em deformá-lo, como fizemos com o paralelogramo, e visualizar alguns quadriláteros desta sequência na Figura 2.7.

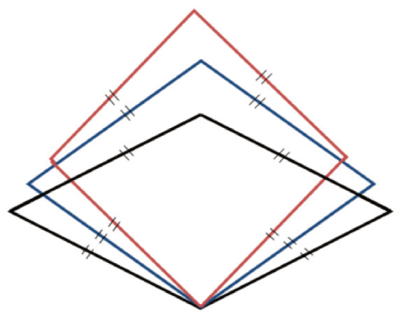


Figura 2.7: Deformações de um losango que preservam o perímetro.

No trapézio de perímetro constante L, a área é dada por $A = (x+y)\,\frac{h}{2}$, onde x é a base menor, y é a base maior e h é sua altura. Podemos reconstruí-lo de maneira que formemos um retângulo, conforme ilustrado na Figura 2.8.

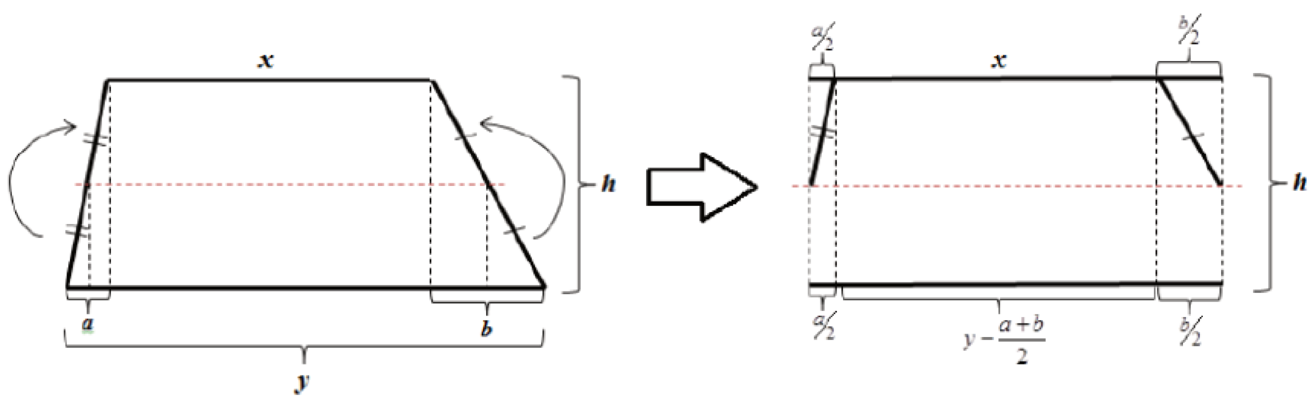


Figura 2.8: Rearranjo de um trapézio em um retângulo equivalente.

Vamos ver, algebricamente, que as áreas dos dois quadriláteros da Figura 2.8 são iguais. Seja

A' a área do retângulo, então,

$$A' = \left(x + \frac{a+b}{2}\right) h \tag{2.1}$$

Como $y = a + b + x \Longrightarrow a + b = y - x$, então, substituindo,

$$A' = \left(x + \frac{y-x}{2}\right) h \Longrightarrow A' = \frac{(x+y)}{2} h \Longrightarrow A' = (x+y)\,\frac{h}{2} \Longrightarrow A' = A \tag{2.2}$$

Portanto, maximizar a área de um trapézio é equivalente a maximizar a área de um retângulo.

Poderíamos ampliar esse estudo para um quadrilátero qualquer, mas pensando em uma aula no Ensino Médio acreditamos que as demonstrações "visuais"desses quatro principais quadriláteros são suficientes para concluir que não perdemos generalidade ao trabalharmos apenas com retângulos quando queremos maximizar uma área delimitada por um quadrilátero.

2.2 Nosso primeiro problema

Apresentaremos então um problema de otimização que pode ser desenvolvido com alunos do Ensino Médio para a introdução do cálculo usando apenas ferramentas que um aluno desse nível possui. A ideia é que o aluno participe deste problema na sua construção, não apenas observando o professor na lousa. Cada aluno pode ficar responsável por uma etapa, ou por um caso, como veremos mais para frente. Que ele construa os gráficos, seja no computador, ou até mesmo a mão livre. Que ele pense junto com o professor em todas as possibilidades de resolução, e para isso, o professor deve atuar como mediador e não como comandante. Para auxiliar uma possível reflexão nesse sentido veja, por exemplo, [8].

Antes de desenvolver o problema propriamente dito, vamos elencar os principais tópicos necessários para tal:

- Quadriláteros;
- Área;
- Perímetro;
- Funções Quadráticas;
- Funções definidas por partes;
- Desigualdades em R e R^2;
- Regiões Planas.

Vamos começar com um problema simples, que poderia ser muito bem resolvido por alunos de nono ano do Ensino Fundamental.

Temos um comprimento L fixo e desejamos construir um canteiro retangular com maior área possível e de perímetro L. O objetivo é encontrar as dimensões desse retângulo.

Considere x o comprimento do retângulo e y sua largura tais que $x \geq 0$ e $y \geq 0$, já que dimensões negativas não fazem sentido. Sabemos que o perímetro do retângulo é fixo, L. Logo, $2x + 2y = L$. Esta é a primeira equação importante do nosso problema.

Para calcularmos a área máxima do retângulo precisamos lembrar que $\mathcal{A}(x, y) = x.y$, onde $\mathcal{A}$ é a área do retângulo. Temos então o seguinte problema:

$$\begin{cases} \text{maximizar} & \mathcal{A}(x, y) = x \cdot y \\ \text{sujeita a} & 2x + 2y = L \\ & x \geq 0, y \geq 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

O problema (2.3) apresentado caracteriza um problema de otimização, em que queremos maximizar uma função chamada *função objetivo*, sujeita a restrições nas duas variáveis envolvidas, no caso, uma restrição de igualdade (perímetro constante) e uma de desigualdade (não negatividade das dimensões do retângulo). Para conseguirmos resolvê-lo primeiramente vamos reduzir o número de variáveis para transformá-lo em um problema unidimensional e simplificar nossa análise:

$$2x + 2y = L \Longrightarrow y = \frac{L - 2x}{2}. \tag{2.4}$$

Lembrando que $y \geq 0$,

$$\frac{L - 2x}{2} \geq \; 0 \Longrightarrow L \geq \; 2x \Longrightarrow x \leq \frac{L}{2} \Longrightarrow 0 \leq x \leq \frac{L}{2}. \tag{2.5}$$

Com isso, nossa função área será

$$A\left(x\right) = x\frac{L - 2x}{2} \Longrightarrow A\left(x\right) = \frac{xL}{2} - x^2. \tag{2.6}$$

Note que a função área original, de duas variáveis, foi reduzida a uma função quadrática de uma variável, no caso, x, que é o comprimento do retângulo. Além disso, a restrição do perímetro constante fica embutida, delimitando a variação permitida para a variável x (conforme desigualdades (2.5)). Então, o novo problema unidimensional é

$$\begin{cases} \text{maximizar} & A\left(x\right) = \dfrac{xL}{2} - x^2 \\ \text{sujeita a} & 0 \leq x \leq \dfrac{L}{2}. \end{cases} \tag{2.7}$$

Antes de resolvermos o problema propriamente dito, vamos destacar, a seguir, alguns aspectos e propriedades das funções quadráticas de uma variável.

No ensino Médio a função quadrática é apresentada da seguinte forma:

$$f : R \to R, f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ com } a, \; b, \; c \in R, \; e \; a \neq 0 \tag{2.8}$$

Quando falamos de máximos e mínimos as coordenadas são quase sempre "jogadas" ao aluno. Vamos tentar mostrar o significado do ponto de máximo e do valor máximo, dando uma noção de derivada através da definição de tangente, e depois apresentamos as coordenadas do vértice. A função quadrática é representada graficamente por uma parábola. A parábola é uma curva contínua. Intuitivamente, entende-se por função contínua em um intervalo aquela “cujo gráfico não se quebra. O gráfico pode ser desenhado sem remover a caneta do papel.” (Stewart, p. 124). Essa continuidade garante que a função sempre apresenta um valor máximo em um dado intervalo fechado. Alguns exemplos são apresentados nas Figuras 2.9 e 2.10.

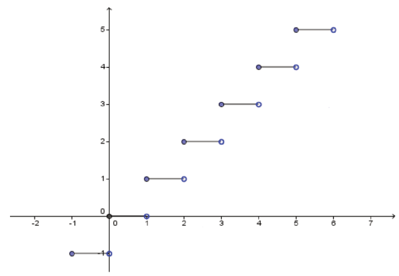


Figura 2.9: Função descontínua: Função chão: $f(x) = \lfloor x \rfloor$ (maior inteiro que é menor que ou igual a x). Ex: $\lfloor 1.2 \rfloor = 1$

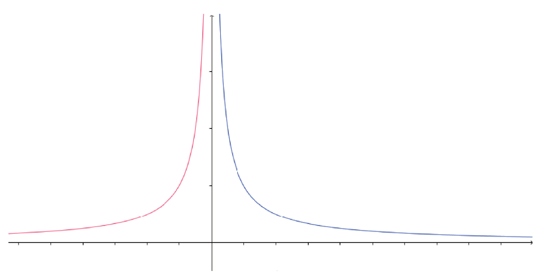


Figura 2.10: Função $f(x) = \dfrac{1}{|x|}, x \neq 0$ e $f(0) = 0$. Em qualquer intervalo $[-a, a]$, esta função não possui valor máximo, devido à sua descontinuidade na origem.

A parábola tem uma propriedade especial que é a simetria. Cada um de seus pontos possui um simétrico em relação ao eixo vertical que passa por um ponto chamado de *vértice*. O vértice é o ponto extremo da parábola, sendo máximo se a concavidade da parábola é voltada para baixo e mínimo caso contrário. Então, se queremos descobrir qual é o maior valor de uma função quadrática, basta encontrar o seu vértice.

Vamos agora ver como podemos calcular o vértice através das informações contidas no gráfico da Figura 2.11. Tomemos o ponto $A\,(0,\ c)$ e seu simétrico $B\,(x_B,\ c)$ de tal forma que A e B sejam distintos, ou seja, $x_B \neq 0$. Como os pontos A e B possuem a mesma ordenada, c, podemos escrever

$$ax^2 + bx + c = c \Rightarrow\ ax^2 + bx = 0 \Rightarrow\ a\,(ax + b) = 0 \Rightarrow\ x = 0, \tag{2.9}$$

que corresponde à abcissa do ponto A, ou $x = \frac{-b}{a}$, abcissa do ponto B.

O ponto médio do segmento $\overline{AB}$ possui abscissa x_v, logo,

$$x_v = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow\ x_v = \frac{0 + \frac{-b}{a}}{2} \Rightarrow\ x_v = \frac{-b}{2a}. \tag{2.10}$$

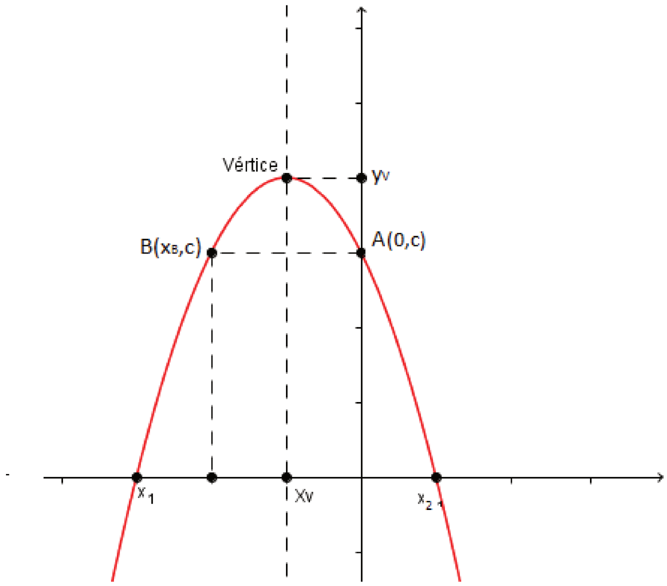


Figura 2.11: Gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, com destaque para o eixo de simetria, vértice, intercepto no eixo das ordenadas $(0, c)$ e seu simétrico.

Substituindo x_v na equação da parábola temos:

$$y_v = ax_v^2 + bx_v + c \Rightarrow \; y_v = a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c \Rightarrow \; y_v = \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c \Rightarrow \tag{2.11}$$

$$y_v = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} \Rightarrow \; y_v = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \Rightarrow \; y_v = -\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right). \tag{2.12}$$

Vale ressaltar que $\Delta = b^2 - 4ac$ é chamado de *discriminante* da função, logo, também podemos escrever $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$. Então, para calcularmos o valor máximo de uma função quadrática basta calcularmos o seu vértice

$$V = (x_v, y_v) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right). \tag{2.13}$$

Intuitivamente, uma reta tangente a uma curva é aquela que melhor a aproxima em uma vizinhança de um ponto, denominado ponto de tangência. Localmente, em torno do ponto de tangência a curva e a reta tangente se "confundem". Perceba que a reta pode interceptar a curva em mais pontos, mas naquela vizinhança o ponto de tangência geralmente é único, e também, uma reta pode ter um ponto comum com a curva e não ser tangente a ela. Observe a Figura 2.12:

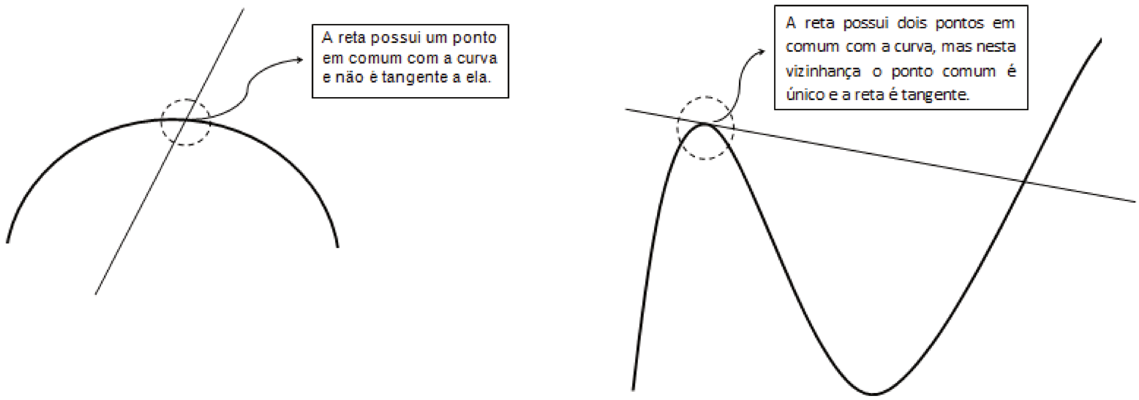


Figura 2.12: Reta tangente a uma curva em determinada vizinhança.

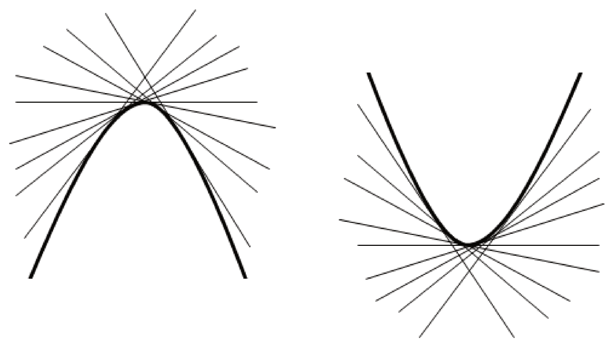


Figura 2.13: Parábola e família de retas tangentes associadas.

Podemos observar na Figura 2.13 que a parábola (curva em questão) possui, em cada um de seus pontos, uma única reta tangente. À inclinação dessa reta tangente damos o nome de *derivada* da curva no ponto. Inclinação da reta nada mais é que o coeficiente angular dessa reta. Ora, mas se estamos falando do vértice da parábola, a reta tangente a esse ponto é horizontal, ou seja, tem inclinação nula. Logo, a derivada da função quadrática no ponto $(x_v,\ y_v)$ é zero. Essa é a noção intuitiva de derivada, deixamos ao cargo do professor introduzir ou não o conceito de derivada com seus alunos, e como sugestão os livros [1], [13] e [6].

Retomemos agora a resolução do problema (2.3). A função quadrática obtida em (2.6) é tal que $a = -1$, $b = \frac{L}{2}$ e $c = 0$. Note que aqui o que chamamos de y_v é na verdade a área máxima, sendo y o valor da altura do retângulo. Substituindo nas expressões das coordenadas do vértice temos:

$$x_v = -\frac{\frac{L}{2}}{2\,(-1)} \Longrightarrow x_v = \frac{L}{4} \tag{2.14}$$

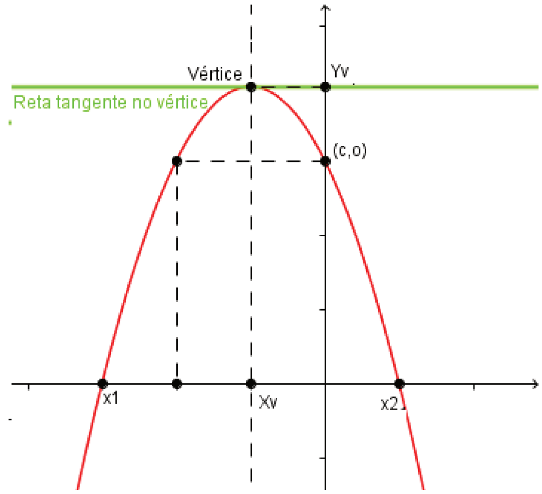


Figura 2.14: Parábola e reta tangente a ela no vértice.

e

$$y = \frac{L - 2\frac{L}{4}}{2} \Longrightarrow y = \frac{L - \frac{L}{2}}{2} \Longrightarrow y = \frac{L}{4}. \tag{2.15}$$

Logo, as dimensões do retângulo ótimo são $x = y = \frac{L}{4}$, ou seja, é um quadrado, e sua área máxima será

$$A_{max} = \frac{L}{4}\frac{L}{2} - \frac{L^2}{4^2} \Longrightarrow A_{max} = \frac{L^2}{8} - \frac{L^2}{16} \Longrightarrow A_{max} = \frac{L^2}{16}. \tag{2.16}$$

Observação: Chamamos *ponto ótimo* aquele que maximiza (ou minimiza) a função objetivo do problema, e usaremos a seguinte notação, $\bar{x}, \bar{y}$.

Vamos ilustrar esse problema com um exemplo numérico. Considere $L = 6$. Nosso problema fica

$$\begin{cases} \text{maximizar} & A(x) = 3x - x^2 \\ \text{sujeita a} & 0 \leq x \leq 3. \end{cases} \tag{2.17}$$

Resolvendo algebricamente encontramos $x_v = \dfrac{3}{2} = y_v$ e $A_{max} = \dfrac{9}{4}$. Porém, é importante agora entendermos como resolveremos o problema graficamente. Observe na Figura 2.15 que no eixo y temos a área $y = A(x)$. Ou seja, o valor y dado no gráfico não é y da altura do retângulo original. A região azul corresponde à restrição $0 \leq x \leq 3$ e o ponto V é o vértice da parábola, ou seja, o ponto onde a área é máxima (ponto ótimo). Utilizamos o *software* Geogebra [1] para construir os gráficos do problema.

[1]http://www.geogebra.org

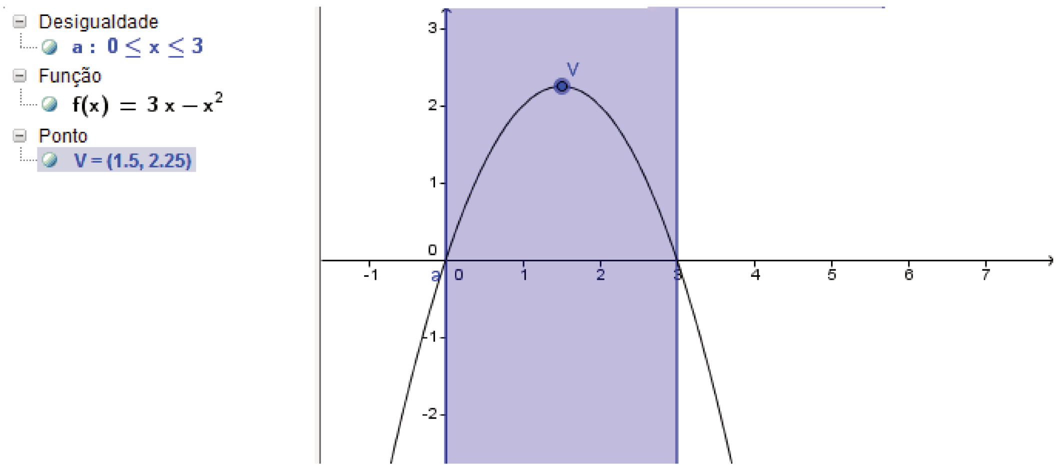


Figura 2.15: Resolução gráfica do problema (2.17) para $L = 6$ utilizando o *software* Geogebra.

Com esta resolução do problema simples de otimização podemos propor aos alunos uma variação. E se quisermos construir o canteiro aproveitando uma parede? Quais seriam as dimensões do retângulo de maior área?

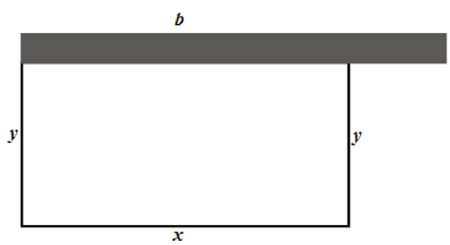


Figura 2.16: Canteiro aproveitando uma parede longa.

Se tivermos uma parede suficientemente longa, como na Figura 2.16 acima, nosso novo problema seria:

$$\begin{cases} \text{maximizar} & \mathcal{A}(x,y) = x \cdot y \\ \text{sujeita a} & x + 2y = L \\ & x \geq 0, y \geq 0. \end{cases} \tag{2.18}$$

A restrição de igualdade permite escrever o problema em uma única variável,

$$x + 2y = L \Longrightarrow y = \frac{L - x}{2}. \tag{2.19}$$

Como $y \geq 0$,

$$\frac{L - x}{2} \geq 0 \Longrightarrow L \geq x \Longrightarrow 0 \leq x \leq L. \tag{2.20}$$

E a função área será

$$A(x) = x\frac{L - x}{2} \Longrightarrow A(x) = \frac{xL}{2} - \frac{x^2}{2}. \tag{2.21}$$

Temos portanto o problema reduzido

$$\begin{cases} \text{maximizar} & A\left(x\right) = \dfrac{xL}{2} - \dfrac{x^2}{2} \\ \text{sujeita a} & 0 \leq x \leq L. \end{cases} \tag{2.22}$$

Calculando o ponto que maximiza a função área pelas relações encontradas em (2.13),

$$x_v = \frac{\frac{-L}{2}}{2.\left(\frac{-1}{2}\right)} \Longrightarrow x_v = \frac{L}{2} \tag{2.23}$$

e

$$y_v = \frac{L - \frac{L}{2}}{2} \Longrightarrow y_v = \frac{L}{4}. \tag{2.24}$$

As dimensões ótimas serão $\bar{x} = \frac{L}{2}$ e $\bar{y} = \frac{L}{4}$ e a área máxima é

$$A_{max} = \frac{L}{2}\frac{L}{2} - \frac{\left(\frac{L}{2}\right)^2}{2} \Longrightarrow A_{max} = \frac{L^2}{4} - \frac{L^2}{8} \Longrightarrow A_{max} = \frac{L^2}{8}. \tag{2.25}$$

Exemplificando, quando $L = 6$, temos a seguinte situação:

$$\begin{cases} \text{maximizar} & A\left(x\right) = 3x - \dfrac{x^2}{2} \\ \text{sujeita a} & 0 \leq x \leq \ 6, \end{cases} \tag{2.26}$$

e as dimensões ótimas são $\bar{x} = 3$ e $\bar{y} = \dfrac{3}{2}$, sendo a área máxima $A_{max} = \dfrac{9}{2}$. A Figura 2.17 ilustra a função objetivo do problema unidimensional (2.26), com destaque para o ponto ótimo.

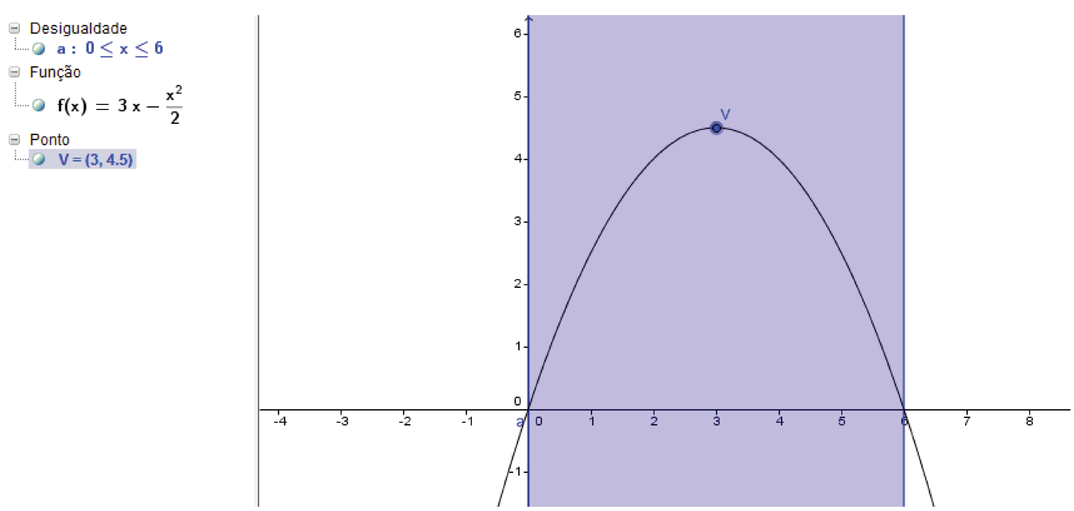


Figura 2.17: Resolução gráfica do problema (2.26) para $L = 6$ utilizando o *software* Geogebra.

Na situação anterior consideramos de imediato que a parede era mais longa que o comprimento do retângulo. Porém, podemos ter uma situação em que a parede é mais curta que o comprimento do retângulo. Quais serão então as dimensões do retângulo ótimo?

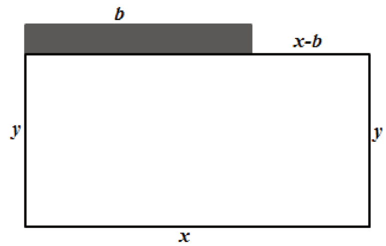


Figura 2.18: Canteiro aproveitando uma parede curta.

Neste caso, temos que considerar o parâmetro b, que é o comprimento da parede. Então, nosso problema é definido por

$$\begin{cases} \text{maximizar} & \mathcal{A}(x,y) = x \cdot y \\ \text{sujeita a} & 2x - b + 2y = L \\ & x \geq 0, y \geq 0. \end{cases} \tag{2.27}$$

Da restrição de igualdade temos

$$y = \frac{L - 2x + b}{2}. \tag{2.28}$$

Como $y \geq 0$,

$$\frac{L-2x+b}{2} \geq \ 0 \Longrightarrow L - 2x + b \geq \ 0 \Longrightarrow \frac{L+b}{2} \geq x \Longrightarrow 0 \leq x \leq \ \frac{L+b}{2}, \tag{2.29}$$

e a função área será

$$A\left(x\right) = x\frac{L-2x+b}{2} \Longrightarrow A\left(x\right) = \frac{xL}{2} - x^2 + \frac{xb}{2} \Longrightarrow A\left(x\right) = -x^2 + \frac{L+b}{2}x. \tag{2.30}$$

O problema reduzido é dado por:

$$\begin{cases} \text{maximizar} & A(x) = -x^2 + \dfrac{L+b}{2}x \\ \text{sujeita a} & 0 \leq x \leq \dfrac{L+b}{2}. \end{cases} \tag{2.31}$$

Calculando x que maximiza a função área,

$$\bar{x} = \frac{\frac{-L-b}{2}}{2.\left(-1\right)} \Longrightarrow \bar{x} = \frac{L+b}{4}. \tag{2.32}$$

Como $\bar{x} = \dfrac{L+b}{4}$ está dentro do intervalo $0 \leq x \leq \dfrac{L+b}{2}$, ele é o valor ótimo. A ordenada correspondente é

$$\bar{y} = \frac{L+b}{4}. \tag{2.33}$$

Então o retângulo ótimo é um quadrado de lado $\dfrac{L+b}{4}$ e área máxima $\left(\dfrac{L+b}{4}\right)^2$.

Como os dois problemas apresentados são na verdade particularizações de um mesmo, podemos escrevê-los usando uma única função objetivo, definida por partes:

$$A(x) = \begin{cases} \dfrac{x(L-x)}{2}, & 0 \leq x \leq b \\ \dfrac{x(L-2x+b)}{2}, & b \leq x \leq \dfrac{L+b}{2}. \end{cases} \tag{2.34}$$

Alguns questionamentos agora são pertinentes, tais como: De que maneira o valor de b interfere no ponto e no valor máximo desta função? De que modo b interfere para que a solução seja determinada pela primeira ou pela segunda expressão da definição (2.34)?

Se tivermos uma parede curta, a solução computada em (2.32)-(2.33), $\bar{x} = \dfrac{L+b}{4} = \bar{y}$, se aplicará desde que o tamanho da parede não ultrapasse a dimensão do quadrado ótimo: $b \leq \dfrac{L+b}{4}$, ou seja, $4b \leq L+b \Rightarrow 3b \leq L \Rightarrow b \leq \dfrac{L}{3}$.

Agora, se tivermos uma parede longa, a solução $\bar{x} = \dfrac{L}{2}$ e $\bar{y} = \dfrac{L}{4}$ se aplicará se $b \geq \dfrac{L}{2}$.

Finalmente, se $\dfrac{L}{3} \leq b \leq \dfrac{L}{2}$ vamos denominar como caso da parede média, e as dimensões ótimas serão $\bar{x} = b$ e $\bar{y} = L - b$, caso em que toda a parede é aproveitada.

Esquematicamente, temos tres casos: (a) parede curta (Figuras 2.19-2.20) ; (b) parede longa (Figuras 2.21-2.22) e (c) parede média (Figuras 2.23-2.24).

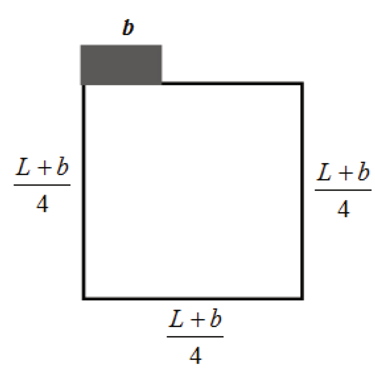


Figura 2.19: $b \leq \frac{L}{3}$ e o ponto ótimo é $\left(\frac{L+b}{4}, \frac{L+b}{4}\right)$.

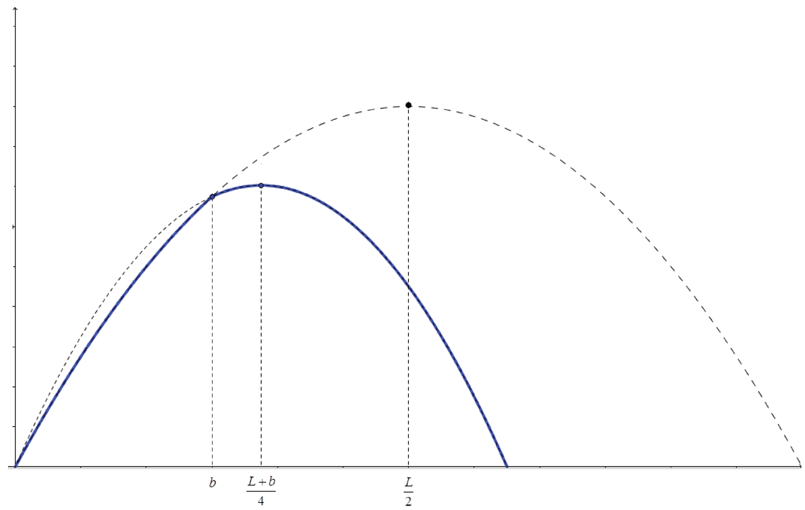


Figura 2.20: Gráfico da função $A(x)$ dada em (2.34) com destaque para as funções quadráticas que definem cada trecho, no caso, $b \leq \dfrac{L+b}{4}$, ou seja, $b \leq \dfrac{L}{3}$ (parede curta).

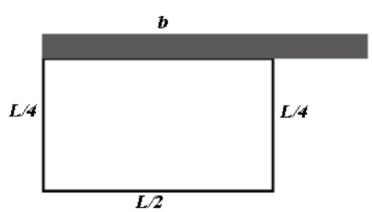


Figura 2.21: $b \geq \frac{L}{2}$ e o ponto ótimo é $\left(\frac{L}{2}, \frac{L}{4}\right)$.

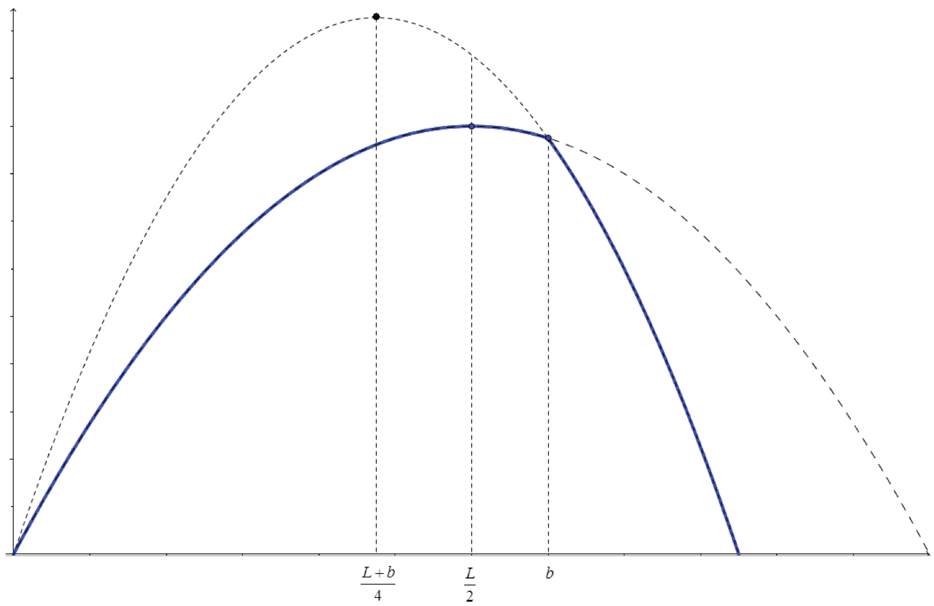


Figura 2.22: Gráfico da função $A(x)$ dada em (2.34) com destaque para as funções quadráticas que definem cada trecho, no caso, $b \geq \dfrac{L}{2}$ (parede longa).

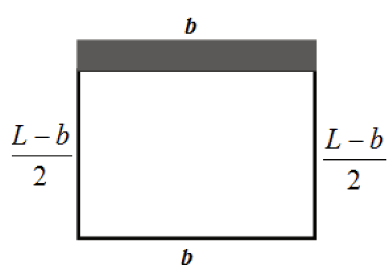


Figura 2.23: $\frac{L}{3} < b < \frac{L}{2}$ e o ponto ótimo é $\left(b, \frac{L-b}{2}\right)$.

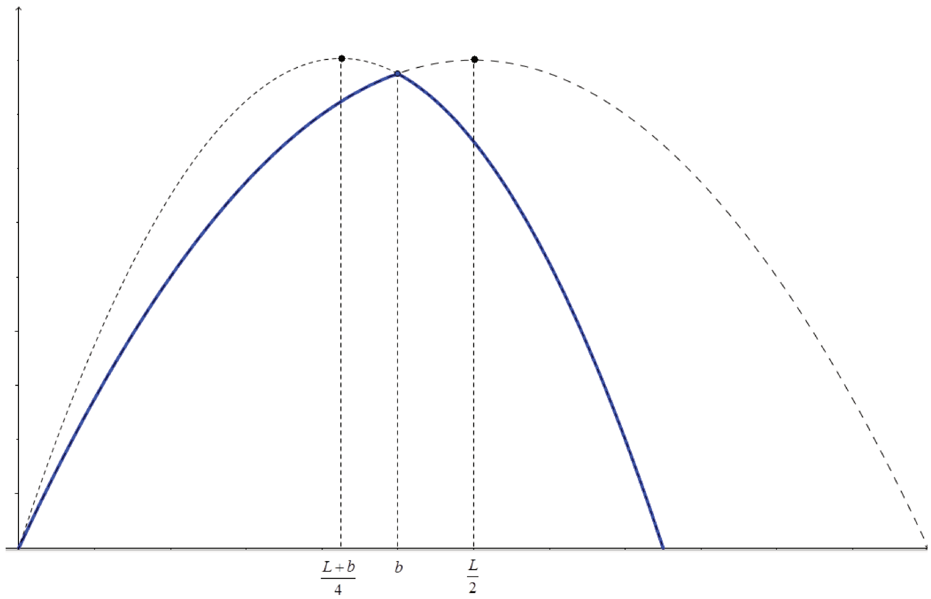


Figura 2.24: Gráfico da função $A(x)$ dada em (2.34) com destaque para as funções quadráticas que definem cada trecho, no caso, $\dfrac{L+b}{4} \leq b \leq \dfrac{L}{2}$, ou seja, $\dfrac{L}{3} \leq b \leq \dfrac{L}{2}$ (parede média).

Percebemos, pelo gráfico da Figura 2.24, que no intervalo $\dfrac{L+b}{4} \leq x \leq \dfrac{L}{2}$ umas das parábolas decresce e a outra cresce, por isso concluímos que b é ótimo para $\dfrac{L}{3} \leq b \leq \dfrac{L}{2}$.

Podemos observar a transição dos valores ótimos dependendo do valor do parâmetro b com o auxílio da Figura 2.25:

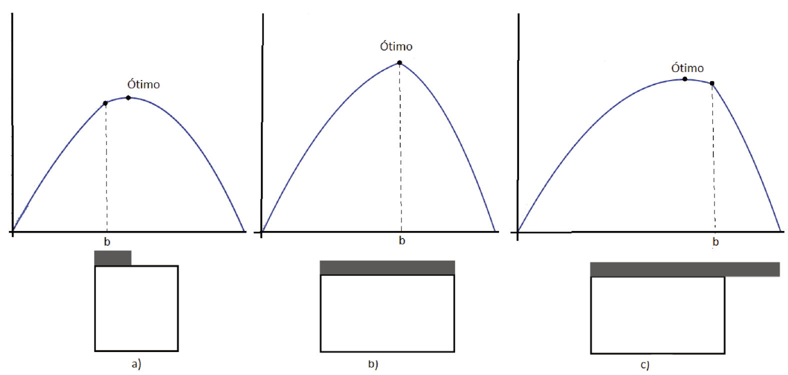


Figura 2.25: a) Função definida para o caso da parede curta; b) Função definida para o caso da parede média; c) Função definida para o caso da parede longa.

Vamos agora ver um exemplo numérico que ilustra cada uma das situações acima. Considere

$L = 120$, a função área é dada por:

$$A(x) = \begin{cases} \dfrac{x(120-x)}{2}, & 0 \leq x \leq b \\ \dfrac{x(120-2x+b)}{2}, & b \leq x \leq \dfrac{120+b}{2}. \end{cases} \tag{2.35}$$

Vamos variar os valores de b para obtermos os três casos vistos acima, parede curta, média e longa. Para o caso da parede curta, tomemos $b = 30$. Temos então:

$$A(x) = \begin{cases} 60x - \dfrac{x^2}{2}, & 0 \leq x \leq 30 \\ 75x - x^2, & 30 \leq x \leq 75. \end{cases} \tag{2.36}$$

As dimensões ótimas neste caso são $\bar{x} = \bar{y} = 37.5$ e a área máxima do canteiro $A(\bar{x}) = 1406.25$. Observe a Figura 2.26, na qual o gráfico da função é apresentado. Note que o ponto ótimo ocorre em um trecho da parábola com tangente horizontal. Chamamos tal solução de *suave*.

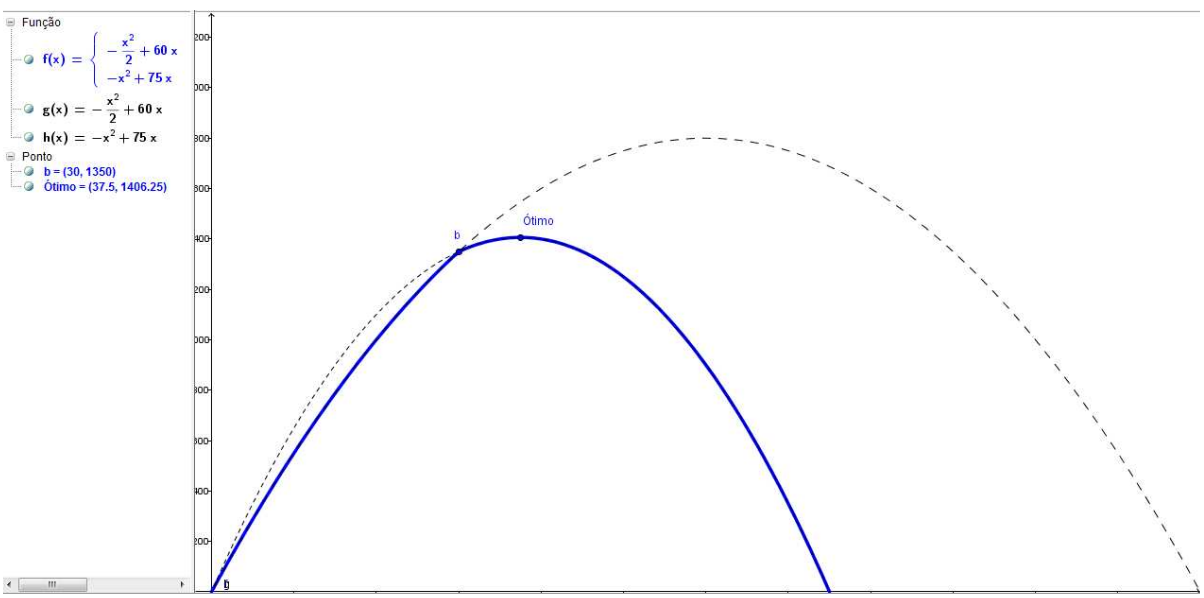


Figura 2.26: Gráfico da função $A(x)$ dada em (2.36) para $L = 120$ e $b = 30$, caracterizando o caso da parede curta.

Para o caso da parede longa, tomemos $b = 70$. Temos então:

$$A(x) = \begin{cases} 60x - \dfrac{x^2}{2}, & 0 \leq x \leq 70 \\ 95x - x^2, & 70 \leq x \leq 95. \end{cases} \tag{2.37}$$

As dimensões ótimas neste caso são $\bar{x} = 60$ e $\bar{y} = 30$ e a área máxima do canteiro $A(\bar{x}) = 1800$. Observe a Figura 2.27, na qual o gráfico da função é apresentado, com uma solução também suave.

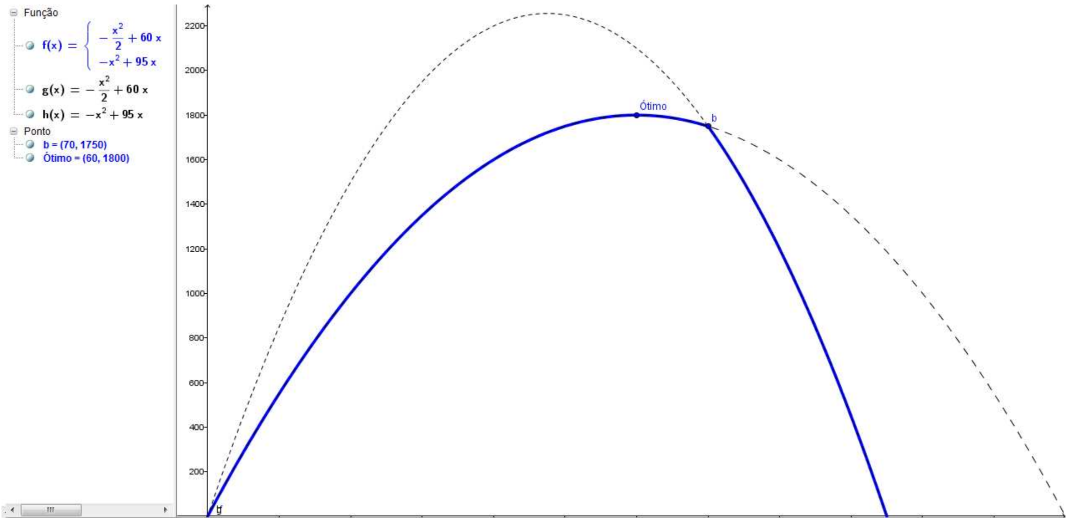


Figura 2.27: Gráfico da função $A(x)$ dada em (2.37) para $L = 120$ e $b = 70$, caracterizando o caso da parede longa.

Para o caso da parede média, tomemos $b = 50$. Temos então:

$$A(x) = \begin{cases} 60x - \dfrac{x^2}{2}, & 0 \leq x \leq 50 \\ 85x - x^2, & 50 \leq x \leq 85. \end{cases} \tag{2.38}$$

As dimensões ótimas neste caso são $\bar{x} = 50$ e $\bar{y} = 35$ e a área máxima do canteiro $A(\bar{x}) = 1750$. Observe a Figura 2.28, na qual o gráfico da função é apresentado. Neste caso, o ponto máximo ocorre na junção de dois trechos da função, de maneira contínua, porém *não suave*.

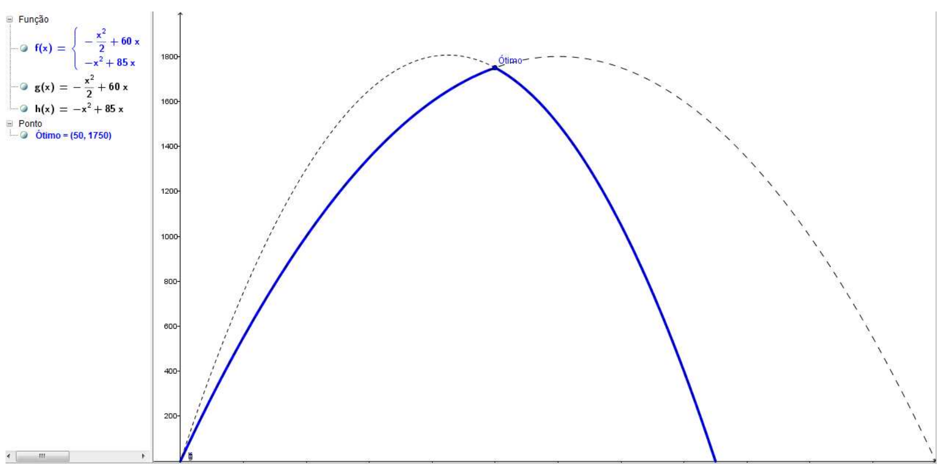


Figura 2.28: Gráfico da função $A(x)$ dada em (2.38) para $L = 120$ e $b = 50$, caracterizando o caso da parede média.

2.3 Nosso segundo problema

Uma vez concluída a análise do problema com uma parede, podemos ir mais longe e pensarmos em situações mais complexas. E se aproveitássemos duas paredes? E se essas paredes forem mais curtas que as possíveis dimensões do retângulo? E se apenas uma for mais curta? Vamos analisar a seguir algumas dessas possibilidades. Temos quatro configurações ilustrativas para esta nova situação, representadas na Figura 2.29, em que manteremos a notação b para o comprimento da parede na dimensão horizontal e introduzimos o parâmetro c, para denotar o comprimento da parede vertical.

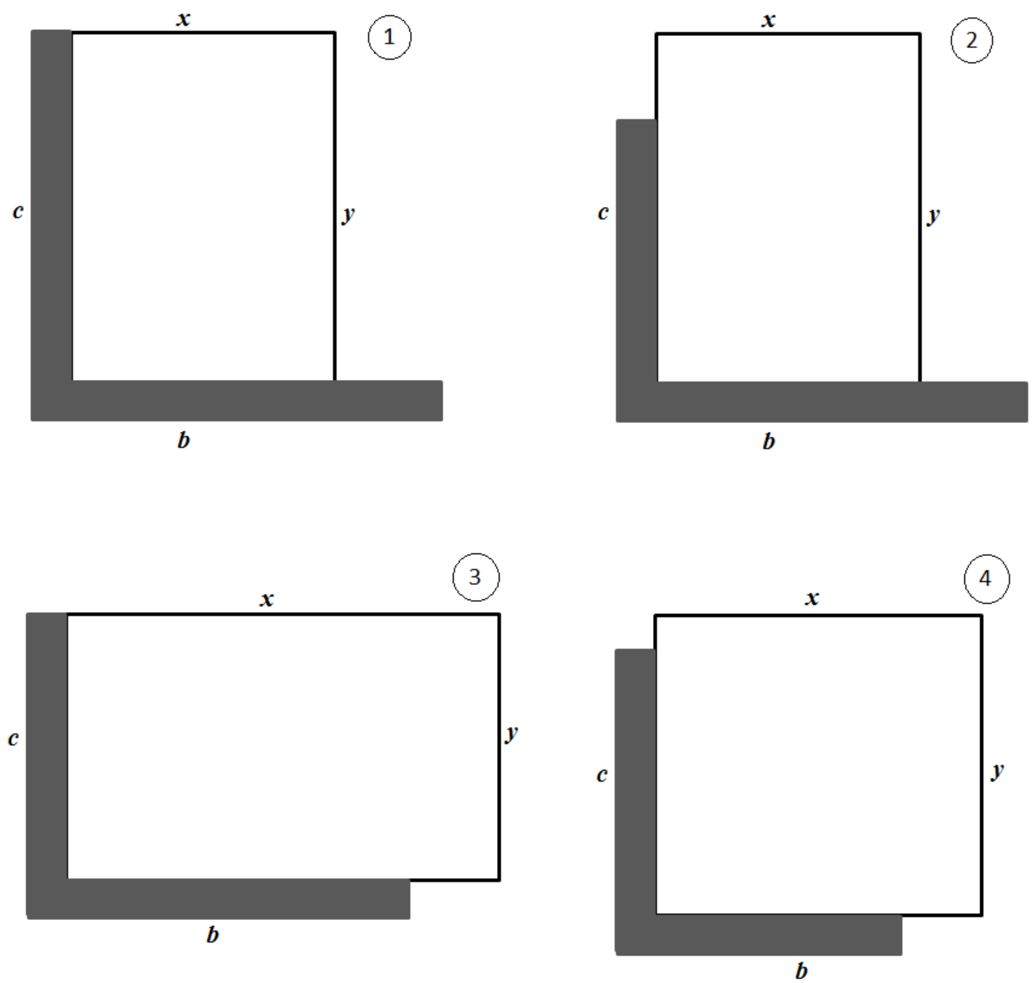


Figura 2.29: Algumas configurações possíveis quando aproveitamos duas paredes.

Se classificarmos cada caso de acordo com o tamanho de cada parede, curta, média ou longa, teríamos uma combinação desses três tipos nos dois sentidos, ou seja, $3 \times 3 = 9$ combinações possíveis de tamanhos. Porém, a atribuição das dimensões para b e para c é arbitrária, o que nos dá 3 repetições por simetria, longa-média e média-longa; longa-curta e curta-longa; média-curta e curta-média, por isso das 9 acabam ficando apenas 6 configurações distintas. São elas longa-longa, longa-média, longa-curta, média-média, média-curta e curta-curta.

Antes de iniciarmos nosso estudo para duas paredes, vamos voltar um pouco para o problema com uma parede. Podemos perceber que a variabilidade do comprimento da parede poderia ter sido embutida no problema original através da relação

$$\max\{0, x-b\} = \begin{cases} x-b, & x \geq b \text{ (parede média/curta)} \\ 0, & x < b \text{ (parede longa).} \end{cases} \tag{2.39}$$

Então, a restrição de perímetro do problema pode ser escrita como:

$$x + \max\{0, x-b\} + 2y = L, \text{ de onde concluímos que } y = \frac{L - x - \max\{0, x-b\}}{2}$$

e a área é

$$\mathcal{A}(x,y) = x \cdot y \Rightarrow A(x) = x \cdot \frac{L - x - \max\{0, x-b\}}{2},$$

pois

$$A(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}(L-x), & x < b \\ \frac{x}{2}(L-2x+b), & x \geq b. \end{cases} \tag{2.40}$$

Note que a função área acima é a mesma que (2.34).

Agora, com duas paredes, teremos que ampliar a restrição do perímetro, pois há um segundo parâmetro, que denotamos por c, que representa o tamanho da parede na vertical. Então, a nova restrição é

$$x + \max\{0, x-b\} + y + \max\{0, y-c\} = L.$$

Para eliminarmos a variável y precisamos considerar duas possibilidades:

$$\max\{0, y-c\} = \begin{cases} 0, & y < c \text{ (i)} \\ y-c, & y \geq c \text{ (ii)} \end{cases} \tag{2.41}$$

Em i) a restrição é $L = x + \max\{0, x-b\} + y + 0 \Leftrightarrow y = L - x - \max\{0, x-b\}$.

Em ii) a nova restrição será $L = x + \max\{0, x-b\} + y + y - c$, ou seja, $y = \dfrac{L + c - x - \max\{0, x-b\}}{2}$.

Agora, precisamos acrescentar a condição (2.39), que diz respeito ao parâmetro b. Logo, há quatro trechos para definirmos a função área:

i) $y < c$, parede longa em y:

$$y = L - x, \text{ se } y < c \text{ e } x < b \text{ ou } y = L + b - 2x, \text{ se } y < c \text{ e } x \geq b.$$

Então, a função área neste caso será dada por:

$$A(x) = \begin{cases} x(L-x), & x < b \text{ (Longa em } x) \\ x(L-2x+b), & x \geq b \text{ (Média/curta em } x). \end{cases} \tag{2.42}$$

ii) $y \geq c$, parede média/curta em y:

$$y = \frac{L+c-x}{2}, y \geq c \text{ e } x < b \text{ ou } y = \frac{L+b+c-2x}{2}, y \geq c \text{ e } x \geq b.$$

A função área neste caso será dada por:

$$A(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}\left(L+c-x\right), & x < b \text{ (Longa em } x) \\ \frac{x}{2}\left(L-2x+b+c\right), & x \geq b \text{ (Média/curta em } x) \end{cases} \tag{2.43}$$

Temos portanto os quatro trechos:

1) $A_1(x) = x\,(L-x)$, se $x < b$ e $y = L - x < c$;

2) $A_2(x) = x\,(L+b-2x)$, se $x \geq b$ e $y = L+b-2x < c$;

3) $A_3(x) = \frac{x}{2}\,(L+c-x)$, se $x < b$ e $y = \dfrac{L+c-x}{2} \geq c$;

4) $A_4(x) = \frac{x}{2}\,(L+b+c-2x)$, se $x \geq b$ e $y = \dfrac{L+b+c-2x}{2} \geq c$.

Vamos analisar agora os domínios em cada trecho. Como todas as dimensões e as áreas são não negativas, temos:
1) $x \geq 0, L-x \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq L$, mas $x < b \Rightarrow x \leq \min\{b, L\}$. Agora, $L - x < c \Rightarrow L - c < x$. Mas $x \geq 0$, logo, $\max\{0, L-c\} \leq x \leq \min\{b, L\}$.

2) $x \geq 0, L+b-2x \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq \dfrac{L+b}{2}$ mas $x \geq b \Rightarrow b \leq x \leq \dfrac{L+b}{2}$. Agora, $L+b-2x < c \Rightarrow \dfrac{L+b-c}{2} < x$. Logo, $\max\left\{b, \dfrac{L+b-c}{2}\right\} \leq x \leq \dfrac{L+b}{2}$.

3) $x \geq 0, L+c-x \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq L+c$. Agora, $\dfrac{L+c-x}{2} \geq c \Rightarrow L+c-x \geq 2c \Rightarrow L-c \geq x$, e como $x < b$ segue que, $0 \leq x \leq \min\{b, L-c\}$.

4) $x \geq 0, L+b+c-2x \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq \dfrac{L+b+c}{2}$. Agora, $\dfrac{L+b+c-2x}{2} \geq c \Rightarrow L+b+c-2x \geq 2c \Rightarrow L+b-c \geq 2x \Rightarrow x \leq \dfrac{L+b-c}{2}$. Como $x \geq 0$ temos que $b \leq x \leq \dfrac{L+b-c}{2}$.

Temos, portanto, a seguinte função área, definida por partes:

$$A(x) = \begin{cases} x(L-x), & \max\{0, L-c\} \leq x \leq \min\{b, L\}, \\ x(L+b-2x), & \max\left\{b, \dfrac{L+b-c}{2}\right\} \leq x \leq \dfrac{L+b}{2}, \\ \dfrac{x}{2}(L+c-x), & 0 \leq x \leq \min\{b, L-c\}, \\ \dfrac{x}{2}(L+b+c-2x), & b \leq x \leq \dfrac{L+b-c}{2}. \end{cases}$$

Conforme veremos na análise, trata-se de uma função contínua, definida de maneira genérica com quatro trechos. No entanto, dependendo dos valores dos parâmetros b e c, um, dois ou três dos trechos deixam de atuar. Consequentemente, o ponto de máximo e o valor máximo da função área dependem da tripla (b, c, L).

O próximo passo é analisar o problema de maximização para os quatro trechos, assim como fizemos no problema com uma parede. Faremos então a análise detalhada para o primeiro e o segundo trechos, e os trechos A_3 e A_4 serão apresentados mais resumidamente.

Nestes casos, como os valores de b e c são parâmetros pré-definidos do problema, vamos analisar e estabelecer as possíveis soluções do problema geral em um plano $b \times c$, de apoio para a análise, onde os pontos desse plano nos darão as combinações possíveis de tamanhos para b e c, originando paredes curtas, médias ou longas. Se tivéssemos um problema onde os tamanhos das duas paredes não interferissem no ponto ótimo, a Figura 2.30 abaixo já nos daria todas as configurações de possíveis soluções do problema, porém, os tamanhos das paredes influenciam nos possíveis pontos ótimos, logo, a divisão das regiões do plano $b \times c$ final não será exatamente essa.

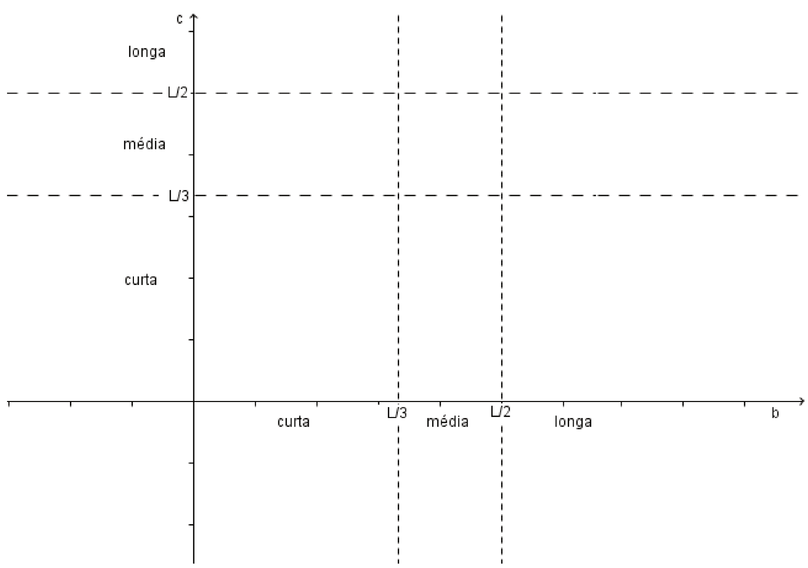


Figura 2.30: Configurações possíveis de acordo com a relação entre L e os valores dos parâmetros b e c.

É importante ressaltar, que para esta etapa, precisamos recuperar ou introduzir aos alunos a noção de inequações no plano, que será fundamental para o acompanhamento e a compreensão da análise.

2.3.1 Análise do primeiro trecho

Consideremos o seguinte problema:

$$\begin{cases} \text{maximizar} & A_1(x) = x\,(L - x) \\ \text{sujeita a} & \max\{0, L - c\} \leq x \leq \min\{b, L\}\,. \end{cases} \tag{2.44}$$

A ideia é representarmos no plano $b \times c$ a região que satisfaz as condições acima. Por definição, $b \geq 0, c \geq 0, L \geq 0$, e de (2.44) temos que $L - c \leq b \Rightarrow b + c \geq L$. A região no plano que satisfaz estas restrições é dada pela Figura 2.31:

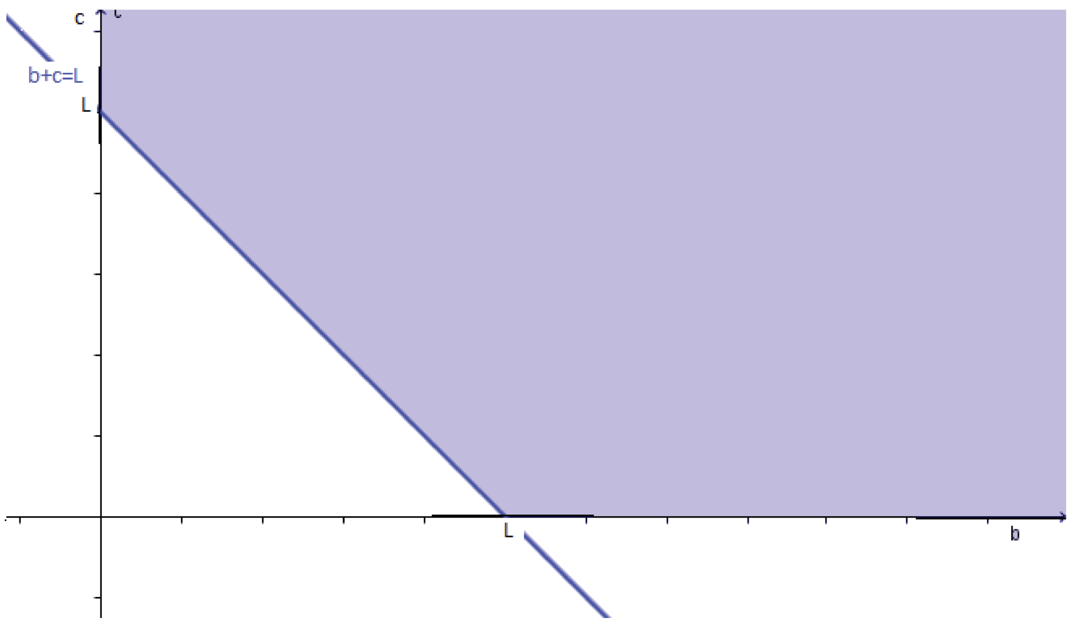


Figura 2.31: Região correspondente às restrições $b + c \geq L$, $b \geq 0$ e $c \geq 0$.

O ponto máximo irrestrito, ou seja, aquele no qual a função é maximizada, independentemente do intervalo que estabelece as restrições é $\bar{x} = L/2$, calculado de maneira análoga ao problema de uma parede. Note que a função $A_1(x)$ é suave e possui reta tangente horizontal neste ponto. Portanto, se a solução irrestrita satisfizer as restrições do problema em termos dos valores dados para b, c e L, isto é, se $\max\{0, L - c\} \leq L/2 \leq \min\{b, L\}$, então o ponto $\bar{x} = L/2$ será maximizador do problema. Neste caso, $L - c \leq L/2$, que implica $L/2 \leq c$. Mas $L/2 \leq b$ e $L/2 \leq L$ sempre. Logo, a solução irrestrita ocorre quando b e c estão na região destacada da Figura 2.32.

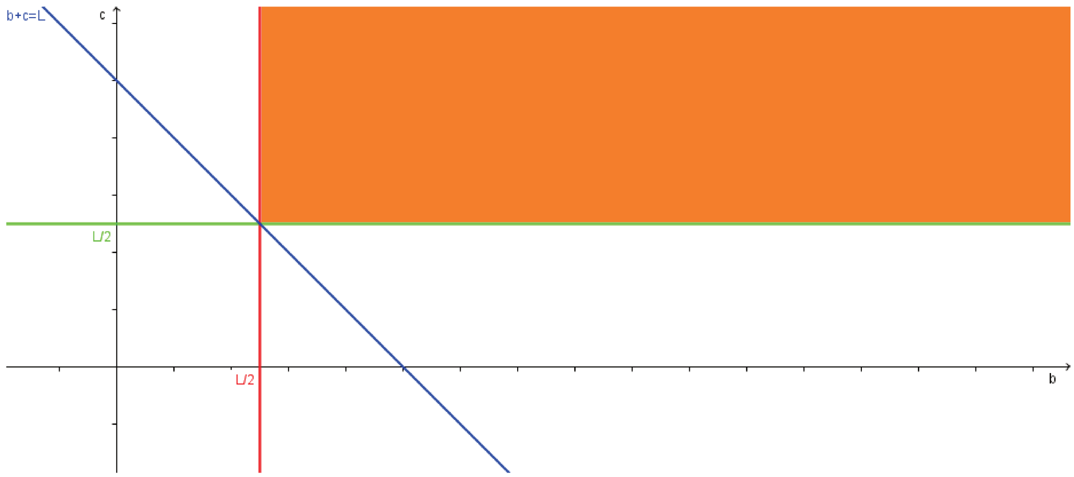


Figura 2.32: Região correspondente à solução irrestrita, onde $b + c \geq L$, $b \geq L/2$ e $c \geq L/2$.

Portanto, para $b, c \geq L/2$ teremos $\bar{x} = \bar{y} = L/2$, com as duas paredes totalmente aproveitadas, caracterizando assim o caso longo/longo.

Agora, precisamos pensar nos casos em que a condição $\max\{0, L - c\} \leq L/2 \leq \min\{b, L\}$ não é satisfeita, ou seja, quando:

a) $L - c > L/2 \Rightarrow c < L/2$ mas $b > L/2$:

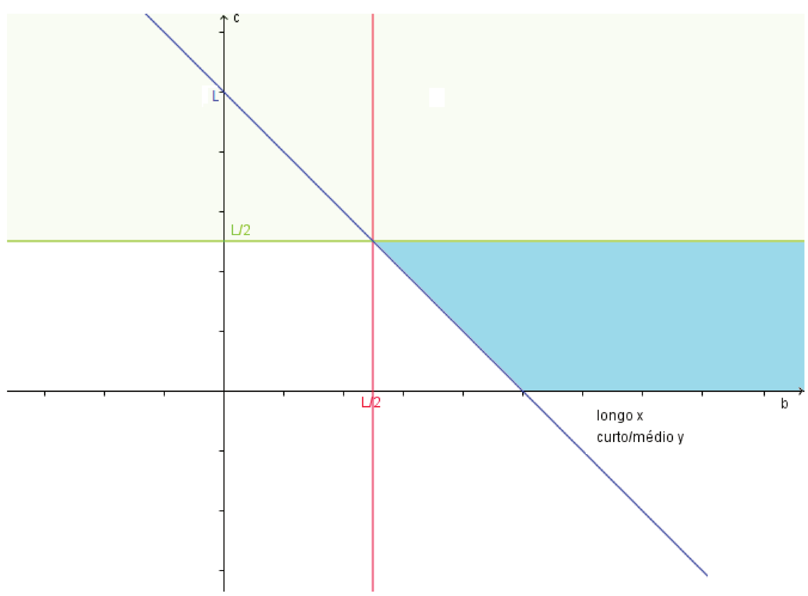


Figura 2.33: Região correspondente ao caso a), onde $c < L/2$, $b > L/2$ e $b + c > L$.

Como $L/2 > c \Rightarrow L > L/2 > c \Rightarrow L - c > 0$, portanto, $\max\{0, L - c\} = L - c$. Logo, $\bar{x} = L - c$ e $\bar{y} = c$.

b) $L/2 > b$ mas $L - c < L/2 \Rightarrow c > L/2$:

Como $b < L/2 < L, \min\{b, L\} = b$. Logo, $\bar{x} = b$ e $\bar{y} = L - b$.

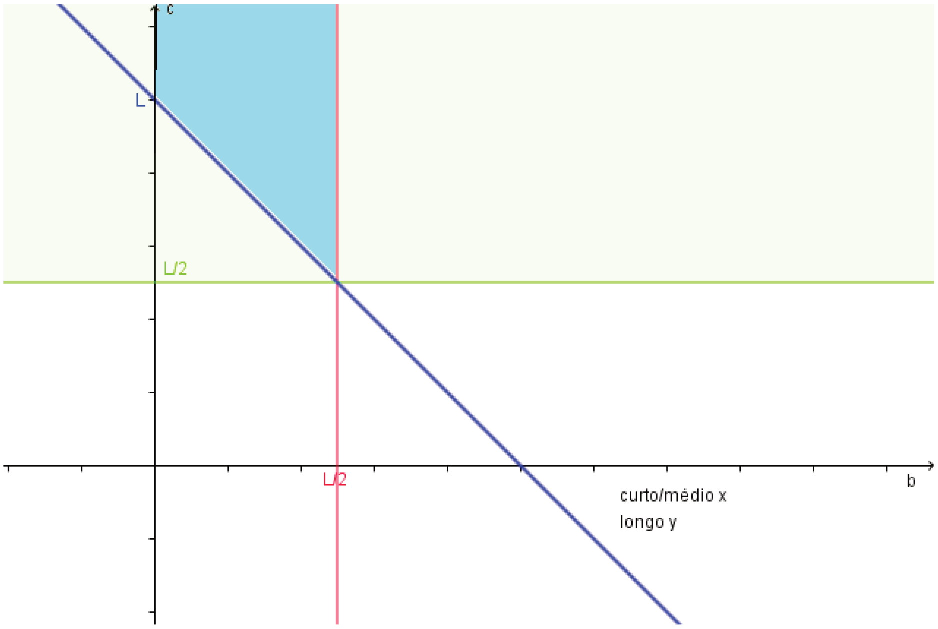


Figura 2.34: Região correspondente ao caso b), onde $b < L/2$, $c > L/2$ e $b + c > L$.

Percebemos que nos dois casos o ponto de máximo fica no extremo do intervalo, aproveitando completamente a parede correspondente. Como se trata da combinação médio/longo, a variável correspondente ao caso longo pode assumir tudo o que sobra em relação ao tamanho da tela.

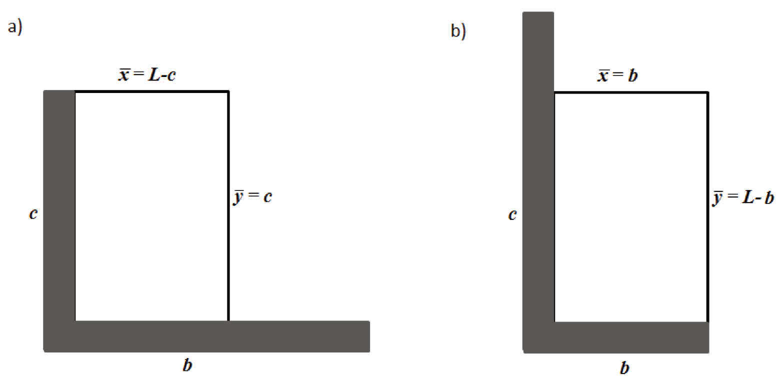


Figura 2.35: Configurações ótimas para os casos a) e b) descritos acima.

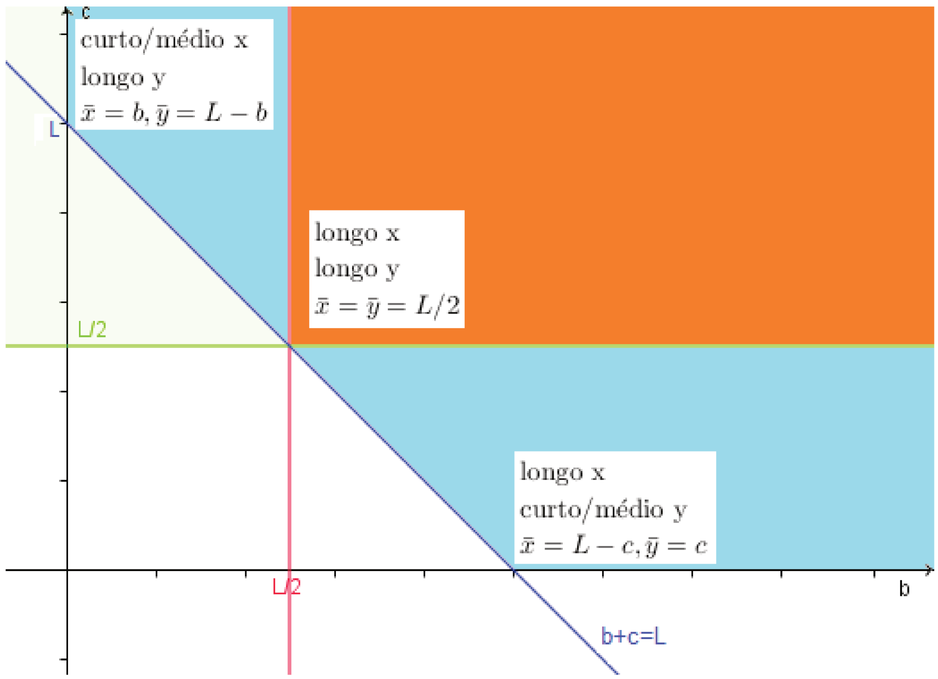


Figura 2.36: Regiões e tipos de máximo no trecho A_1

2.3.2 Análise do segundo trecho

Consideremos agora o seguinte problema:

$$\begin{cases} \text{maximizar} & A_2(x) = x\,(L + b - 2x) \\ \text{sujeita a} & \max\left\{b, \dfrac{L+b-c}{2}\right\} \leq x \leq \dfrac{L+b}{2}. \end{cases} \tag{2.45}$$

Analisando a restrição do problema, temos que $b \leq \dfrac{L+b}{2} \Rightarrow 2b \leq L + b \Rightarrow b \leq L$ e $\dfrac{L+b-c}{2} \leq \dfrac{L+b}{2} \Rightarrow c \geq 0$. Portanto, a região do plano $b \times c$ é $b \leq L, c \geq 0$.

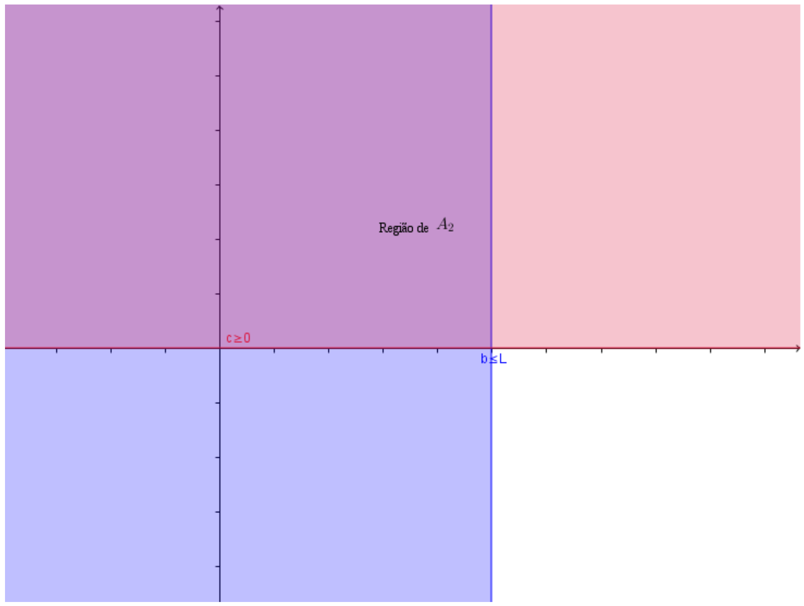


Figura 2.37: Região correspondente às restrições $b \leq L, c \geq 0$.

Calculando o ponto máximo irrestrito da função A_2 encontramos $\bar{x} = \dfrac{L+b}{4}$. Portanto, se $\max\left\{b, \dfrac{L+b-c}{2}\right\} \leq \dfrac{L+b}{4} \leq \dfrac{L+b}{2}$, o ponto $\bar{x} = \dfrac{L+b}{4}$ será maximizador do problema (2.45). Como a segunda desigualdade é sempre satisfeita, basta analisarmos a primeira:

$$b \leq \frac{L+b}{4} \Rightarrow 4b \leq L+b \Rightarrow 3b \leq L \leq\Rightarrow b \leq \frac{L}{3}$$

e

$$\frac{L+b-c}{2} \leq \frac{L+b}{4} \Rightarrow 2L+2b-2c \leq L+b \Rightarrow L+b \leq 2c \Rightarrow 2c-b \geq L.$$

Logo, na região $b \leq \dfrac{L}{3}, 2c-b \geq L$ a solução é o maximizador irrestrito $\bar{x} = \dfrac{L+b}{4}$, e $\bar{y} = \dfrac{L+b}{2}$.

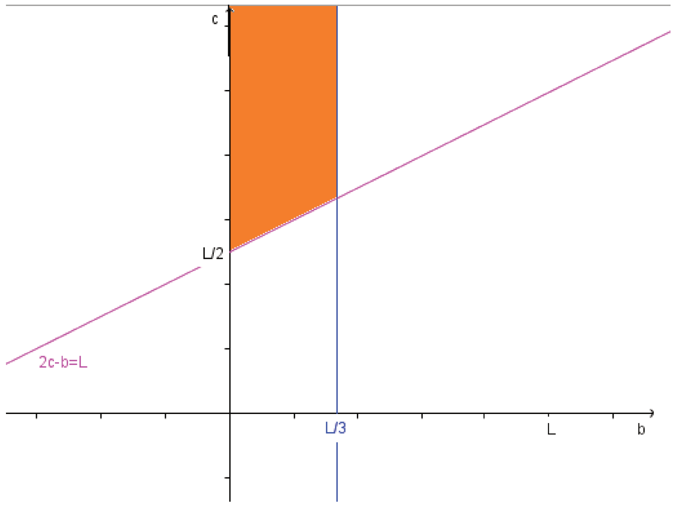


Figura 2.38: Região correspondente à solução irrestrita do problema (2.45) onde $b \leq \dfrac{L}{3}, 2c - b \geq L$.

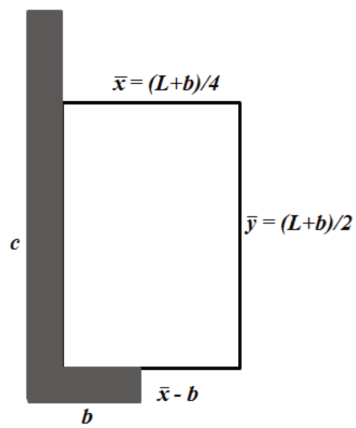


Figura 2.39: Configuração da solução irrestrita, caso longo em c e curto em b.

A condição $\max\left\{b, \dfrac{L+b-c}{2}\right\} \leq \dfrac{L+b}{4} \leq \dfrac{L+b}{2}$ falha se:

a) $b > \dfrac{L+b}{4} \Rightarrow 4b > L+b \Rightarrow 3b > L \Rightarrow b > \dfrac{L}{3}$, e $b+c > L$, já que $\max\left\{b, \dfrac{L+b-c}{2}\right\} = b$.
Neste caso, $\bar{x} = b$ e $\bar{y} = L - b$.

b) $\dfrac{L+b-c}{2} > \dfrac{L+b}{4} \Rightarrow 2L + 2b - 2c > L + b \Rightarrow L + b - 2c > 0 \Rightarrow 2c - b < L$ e $b + c \leq L$, já que $\max\left\{b, \dfrac{L+b-c}{2}\right\} = \dfrac{L+b-c}{2}$. Então, $\bar{x} = \dfrac{L+b-c}{2}$ e $\bar{y} = c$.

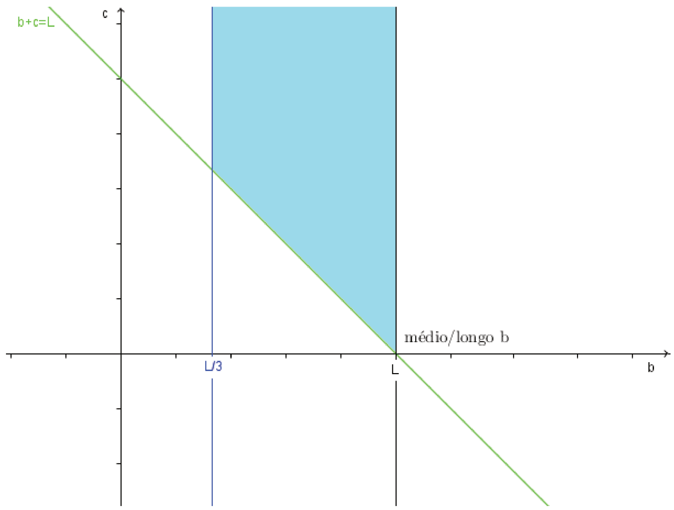


Figura 2.40: Região correspondente ao caso a), onde $b > L/3$ e $b + c > L$.

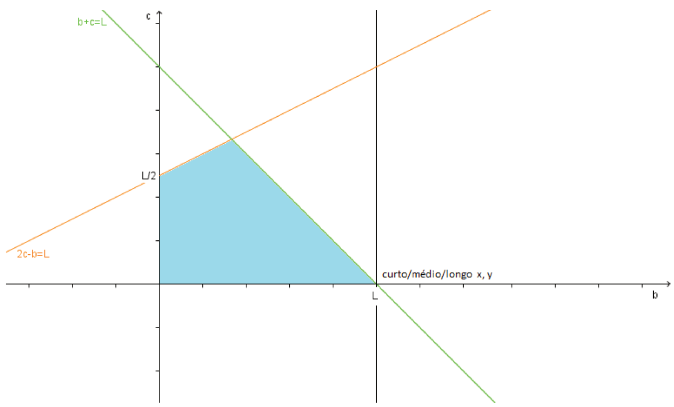


Figura 2.41: Região correspondente ao caso b), onde $2c - b < L$ e $b + c \leq L$.

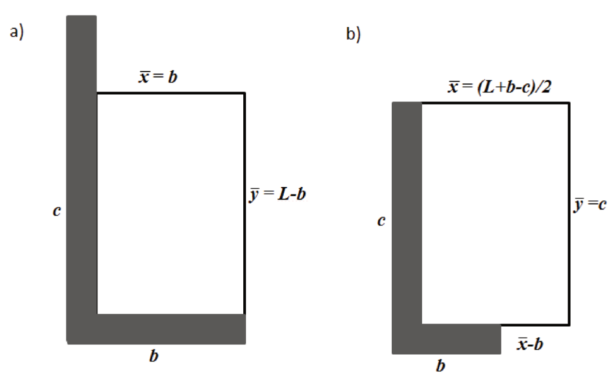


Figura 2.42: Configurações das paredes quando a restrição do problem (2.45) é satisfeita em um dos extremos do intervalo. A configuração da esquerda ilustra o caso (a) e, a da direita, o caso (b).

Finalmente, analisando as regiões no plano $b \times c$ para a função objetivo do problema (2.45) temos as configurações ilustradas na Figura 2.43.

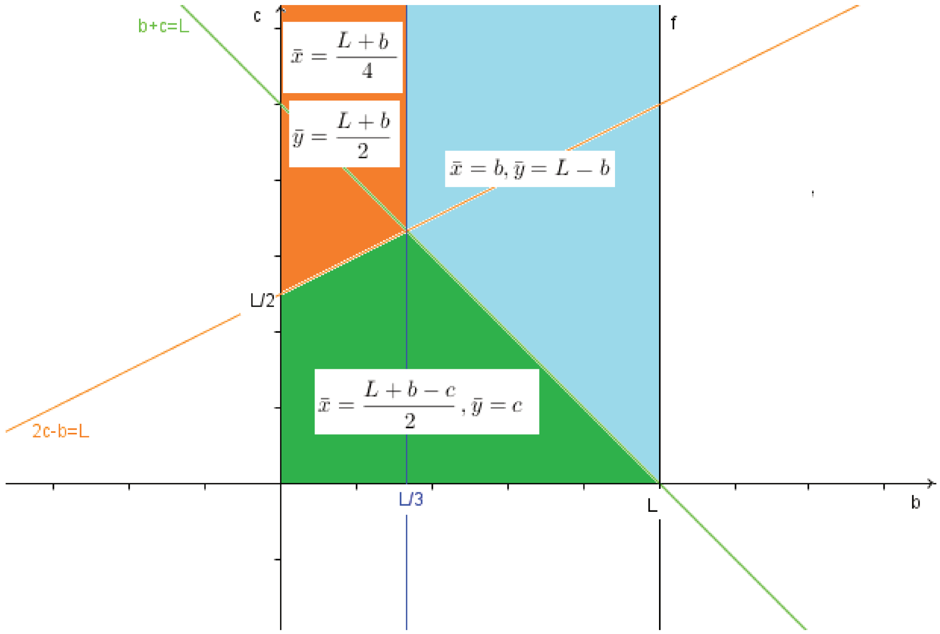


Figura 2.43: Pontos ótimos para as configurações analisadas para o problema (2.45).

2.3.3 Análise do terceiro trecho

Como dito anteriormente, vamos resumir como seriam as configurações do problema do trecho A_3. Nosso problema é:

$$\left\{ \begin{array}{rl} \text{maximizar} & A_3(x) = \frac{x}{2}\,(L + c - x) \\ \text{sujeita a} & 0 \leq x \leq \min\{b, L - c\}\,. \end{array} \right. \tag{2.46}$$

As restrições do problema (2.46) implicam que $b \geq 0$ e $0 \leq c \leq L$ e seu ponto máximo irrestrito é $\bar{x} = \dfrac{L+c}{2}$ e $\bar{y} = \dfrac{L+c}{4}$, que será o maximizador do problema se $c \leq L/3$ e $2b - c \geq L$, caso médio/curto ou longo/curto.

Quando a condição $0 \leq \dfrac{L+c}{2} \leq \min\{b, L-c\}$ não é satisfeita temos duas situações:

a) $2b - c < L$ e $b + c \leq L$, onde o ponto ótimo será dado por $\bar{x} = b$ e $\bar{y} = \dfrac{L+c-b}{2}$, caracterizando o caso médio/curto.

b) $c > L/3$ e $b + c \geq L$, cujo ponto ótimo é $\bar{x} = L - c$ e $\bar{y} = c$, caracterizando o caso longo/médio. Note que também poderíamos ter o caso médio/médio, se $c + b = L$.

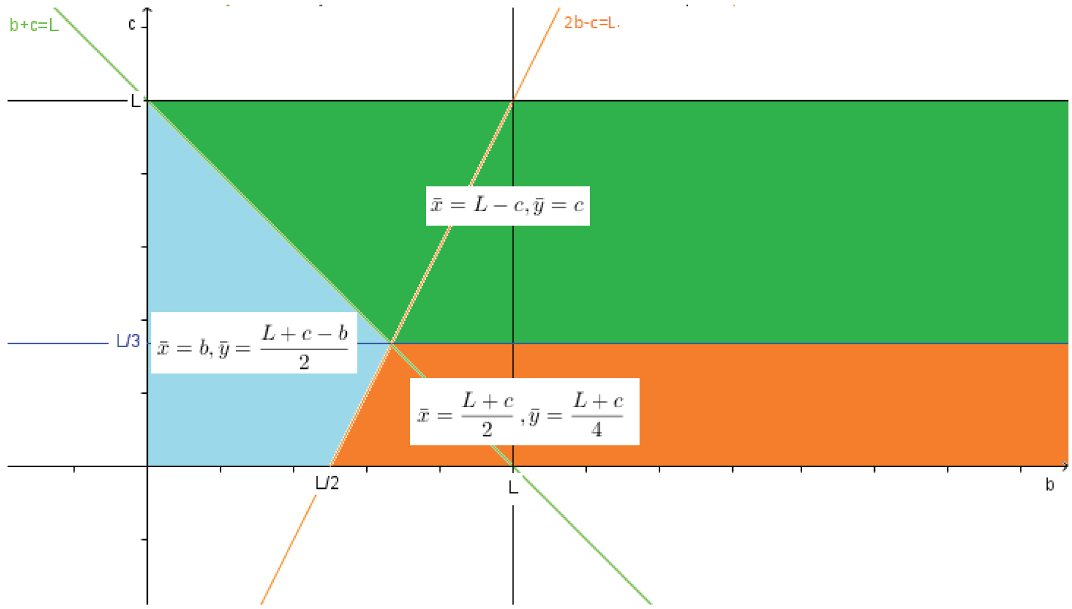


Figura 2.44: Regiões correspondentes à solução irrestrita do problema (2.46), e aos casos a) e b) e seus respectivos valores ótimos.

Note que as regiões obtidas para os problemas A_2 e A_3 são simétricas em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

2.3.4 Análise do quarto trecho

Nosso problema agora é:

$$\begin{cases} \text{maximizar} \quad A_4(x) = \dfrac{x}{2}\,(L+b+c-2x) \\ \text{sujeita a} \quad b \le x \le \dfrac{L+b-c}{2}. \end{cases} \tag{2.47}$$

Analisando as restrições do problema (2.47) concluimos que $c+b \le L$ e calculando o ponto máximo interior chegamos a $\bar{x} = \bar{y} = \dfrac{L+b+c}{4}$, que será de fato o maximizador do problema se $3b-c \le L$ e $3c-b \le L$. Porém, se essas condições não são satisfeitas teremos mais duas situações:
a) se $3b-c \le L$ e $b+c \le L$ o ponto ótimo será $\bar{x} = b$ e $\bar{y} = \dfrac{L+c-b}{2}$;
b) se $3c-b \ge L$ e $b+c \le L$ o ponto ótimo será $\bar{x} = \dfrac{L+b-c}{2}$ e $\bar{y} = c$.

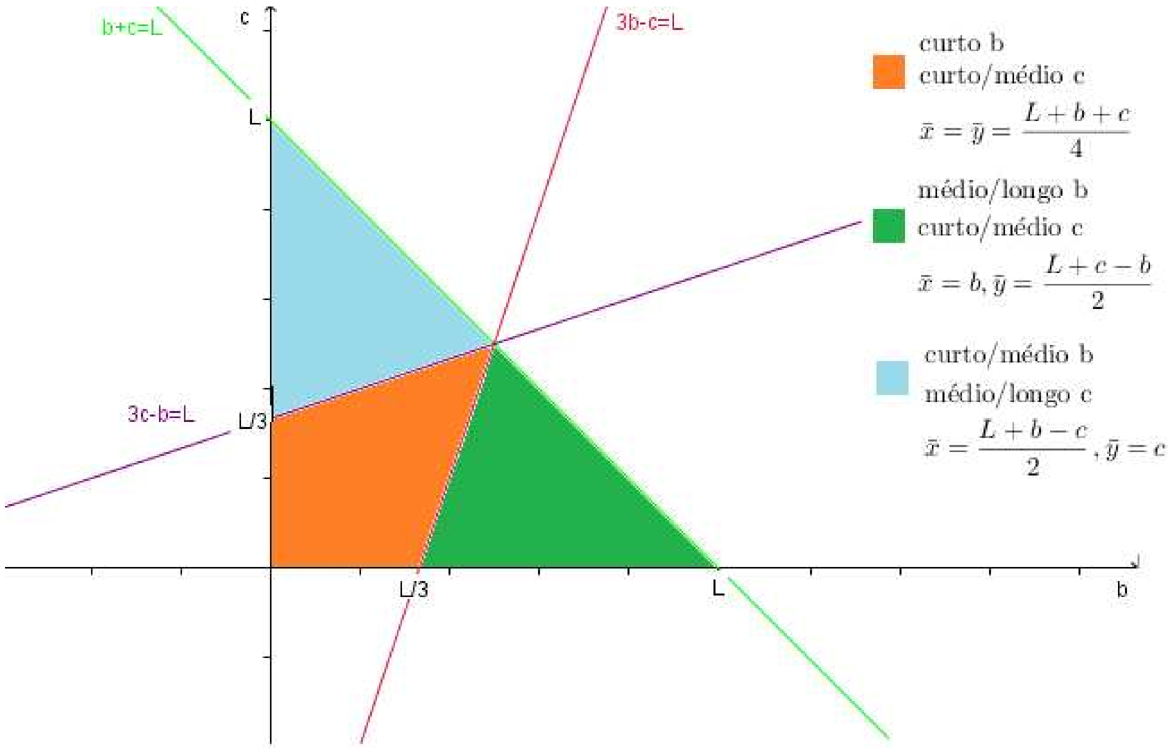


Figura 2.45: Regiões correspondentes à solução irrestrita do problema (2.46), e aos casos a) e b) e seus respectivos valores ótimos.

2.3.5 Reunindo os resultados obtidos

Vamos agora sobrepor as regiões encontradas nos quatro problemas estudados para analisarmos todos os pontos ótimos. Observe no gráfico da Figura 2.46 apresenta uma simetria em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, fato que nos permite calcular apenas os pontos ótimos da região $c \geq b$ e utilizarmos seus simétricos para a região $c \leq b$.

Em cada uma dessas dez regiões observamos que há mais de um valor ótimo, calculado anteriormente em cada uma das funções. O que precisamos agora é saber quais deles nos darão a área máxima em cada região. Para isso, faremos a comparação das áreas máximas encontradas com cada ponto ótimo. Note que faremos apenas com as regiões acima da bissetriz, voltando a enfatizar que as regiões abaixo dela são simétricas, ou seja, basta trocarmos em cada caso o par (b, c) por (c, b).

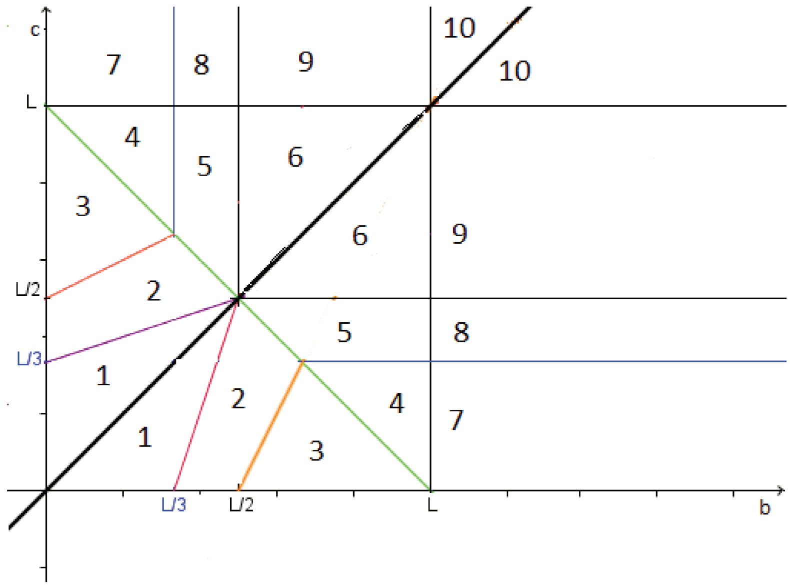


Figura 2.46: Regiões encontradas a partir da sobreposição de todas as regiões anteriores. Os números iguais correspondem a regiões simétricas.

Para um melhor entendimento, vamos tomar um exemplo numérico. Considere $L = 120$, $b = c = 80$. Para esses valores temos três regiões possíveis, o trecho A_1, A_2 e A_3. Calculando as dimensões ótimas para cada um dos trechos encontramos para o trecho A_1, $\bar{x} = \bar{y} = 60$, e área máxima $A(\bar{x}) = 3600$; para o trecho A_2, $\bar{x} = 80$ e $\bar{y} = 40$, e área máxima $A(\bar{x}) = 3200$; e para o trecho A_3, $\bar{x} = 40$ e $\bar{y} = 80$, com área máxima $A(\bar{x}) = 3200$. Como a área encontrada no trecho A_1 é a maior, as dimensões ótimas para este problema são $\bar{x} = \bar{y} = 60$.

- Na **região 1** atuam os trechos A_4, com $\bar{x} = \bar{y} = \dfrac{L+b+c}{4}$, A_3, com $\bar{x} = b, \bar{y} = \dfrac{L+c-b}{2}$ e A_2, com $\bar{x} = \dfrac{L+c-b}{2}, \bar{y} = c$, onde temos $b \le c \le L - b$.

  Para A_2, a área máxima é dada por $\bar{A}_2\left(\dfrac{L+c-b}{2}\right) = \dfrac{Lc+bc-c^2}{2}$.

  O trecho A_3 tem área máxima $\bar{A}_3(b) = \dfrac{Lb+cb-b^2}{2}$.

  E para a A_4, a área máxima é $\bar{A}_4\left(\dfrac{L+b+c}{4}\right) = \dfrac{L^2+b^2+c^2+2bc+2Lb+2Lc}{16}$.

  Subtraindo $\bar{A}_3$ de $\bar{A}_2$ obtemos $\dfrac{(c-b)(L-(c+b))}{2} \ge 0$, pois $c \ge b$ e $c + b \le L$. Logo, podemos dizer que $\bar{A}_2 \ge \bar{A}_3$.

  Agora vamos comparar $\bar{A}_2$ com $\bar{A}_4$. Para isso, subtraímos $\bar{A}_2$ de $\bar{A}_4$ e obtemos $\dfrac{(L+b-3c)^2}{16} \ge 0$. Logo, $\bar{A}_4 \ge \bar{A}_2$. Como a maior área dessa região é dada pelas coordenadas $\bar{x} = \bar{y} = \dfrac{L+b+c}{4}$ podemos dizer que elas são as ótimas.

- Na **região 2** atuam os trechos A_2 e A_4, com $\bar{x} = \dfrac{L+b-c}{2}$ e $\bar{y} = c$ e A_3, com $\bar{x} = b, \bar{y} = \dfrac{L+c-b}{2}$, além disso, nessa região $b+c \leq L$, $\dfrac{b+L}{3} \leq c \leq \dfrac{b+L}{2}$.

  Nos trechos A_2 e A_4 a área máxima é dada por $\bar{A}_2\left(\dfrac{L+c-b}{2}\right) = \dfrac{Lc+bc-c^2}{2}$.

  Em A_3, a área máxima é $\bar{A}_3\left(b\right) = \dfrac{Lb+cb-b^2}{2}$.

  Vemos então que a comparação destes três trechos é análoga à comparação feita para os trechos A_2 e A_3 na região 1, logo, a maior área é aquela correspondente ao trecho A_2, com ponto ótimo $\bar{x} = \dfrac{L+b-c}{2}$ e $\bar{y} = c$.

- Na **região 3** atuam os trechos A_2, com $\bar{x} = \dfrac{L+b}{4}$, $\bar{y} = \dfrac{L+b}{2}$, A_3, com $\bar{x} = b, \bar{y} = \dfrac{L+c-b}{2}$ e A_4, com $\bar{x} = \dfrac{L+b-c}{2}, \bar{y} = c$, onde temos $\dfrac{L+b}{2} \leq c \leq L-b$.

  Para A_2, a área máxima é dada por $\bar{A}_2\left(\dfrac{L+b}{4}\right) = \dfrac{L^2+2Lb+b^2}{8}$.

  O trecho A_3 tem área máxima $\bar{A}_3\left(b\right) = \dfrac{Lb+cb-b^2}{2}$.

  E para a A_4, a área máxima é $\bar{A}_4\left(\dfrac{L+b-c}{2}\right) = \dfrac{Lc+bc-c^2}{2}$.

  Subtraindo $\bar{A}_3$ de $\bar{A}_4$ obtemos $\dfrac{\left(c-b\right)\left(c+b-L\right)}{2} \leq 0$, pois $c \geq b$ e $c+b \leq L$. Logo, podemos dizer que $\bar{A}_4 \geq \bar{A}_3$.

  Agora vamos comparar $\bar{A}_2$ com $\bar{A}_4$. Para isso, subtraímos $\bar{A}_4$ de $\bar{A}_2$ e obtemos $\dfrac{\left(L-2c+b\right)^2}{8} \geq 0$. Logo, $\bar{A}_2 \geq \bar{A}_4$. Como a maior área dessa região é produzida pelas coordenadas $\bar{x} = \dfrac{L+b}{4}$ e $\bar{y} = \dfrac{L+b}{2}$ podemos dizer que elas são as ótimas.

- Na **região 4** atuam os trechos A_1, com $\bar{x} = b$, $\bar{y} = L-b$, A_2, com $\bar{x} = \dfrac{L+b}{4}$ e $\bar{y} = \dfrac{L+b}{2}$ e A_3, com $\bar{x} = L-c$, $\bar{y} = c$, além disso, $b \leq \dfrac{L}{3}$, $L-b \leq c \leq L$.

  Para A_1, a área máxima é dada por $\bar{A}_1\left(b\right) = Lb-b^2$.

  O trecho A_2 tem área máxima $\bar{A}_2\left(\dfrac{L+b}{4}\right) = \dfrac{\left(L+b\right)^2}{8}$.

  E para a A_3, a área máxima é $\bar{A}_3\left(L-c\right) = Lc-c^2$.

Subtraindo $\bar{A}_1$ de $\bar{A}_3$ obtemos $(c-b)(L-b-c) \leq 0$, pois $c \geq b$ e $L-b \leq c$. Logo, podemos dizer que $\bar{A}_1 \geq \bar{A}_3$.

Agora vamos comparar $\bar{A}_2$ com $\bar{A}_1$. Subtraindo $\bar{A}_1$ de $\bar{A}_2$ obtemos $\dfrac{L(L-b)}{8} \geq 0$, pois $L \geq b \geq 0$. Então, $\bar{A}_2$ nos dá a maior área, e as dimensões ótimas são $\bar{x} = \dfrac{L+b}{4}$ e $\bar{y} = \dfrac{L+b}{2}$.

- Na **região 5** atuam os trechos A_1 e A_2, com $\bar{x} = b$, $\bar{y} = L-b$ e A_3, com $\bar{x} = L-c, \bar{y} = c$, onde $\dfrac{L}{3} \leq b \leq \dfrac{L}{2}$, $L-b \leq c \leq L$.

  Para A_1 e A_2, a área máxima é dada por $\bar{A}_2(b) = bL - L^2$.

  O trecho A_3 tem área máxima $\bar{A}_3(L-c) = cL - c^2$.

  Subtraindo $\bar{A}_3$ de $\bar{A}_2$ obtemos $(c-b)(c+b-L) \geq 0$, pois $c \geq L-b$ e $c \geq b$. Logo, podemos dizer que $\bar{A}_2 \geq \bar{A}_3$. Então, a maior área dessa região é dada pelas coordenadas $\bar{x} = b$ e $\bar{y} = L-b$.

- Na **região 6** atuam os trechos A_1, com $\bar{x} = \bar{y} = \dfrac{L}{2}$, A_2, com $\bar{x} = b, \bar{y} = L-b$ e A_3, com $\bar{x} = L-c, \bar{y} = c$, onde temos $\dfrac{L}{2} \leq b \leq L$ e $b \leq c \leq L$.

  Para A_1, a área máxima é dada por $\bar{A}_1\left(\dfrac{L}{2}\right) = \dfrac{L^2}{4}$.

  O trecho A_2 tem área máxima $\bar{A}_2(b) = Lb - b^2$.

  E para a A_3, a área máxima é $\bar{A}_3(L-c) = Lc - c^2$.

  Subtraindo $\bar{A}_2$ de $\bar{A}_1$ obtemos $\left(\dfrac{L}{2} - b\right)^2 \geq 0$. Logo, podemos dizer que $\bar{A}_1 \geq \bar{A}_2$.

  Agora vamos comparar $\bar{A}_1$ com $\bar{A}_3$. Para isso, subtraímos $\bar{A}_3$ de $\bar{A}_1$ e obtemos $\left(\dfrac{L}{2} - c\right)^2 \geq 0$. Logo, $\bar{A}_1 \geq \bar{A}_3$. Como a maior área dessa região é dada pelas coordenadas $\bar{x} = \bar{y} = \dfrac{L}{2}$ podemos dizer que elas são as ótimas.

- Na **região 7** atuam os trechos A_1, com $\bar{x} = b$, $\bar{y} = L-b$ e A_2, com $\bar{x} = \dfrac{L+b}{4}, \bar{y} = \dfrac{L+b}{2}$, onde $0 \leq b \leq \dfrac{L}{3}$ e $L \leq c$.

  Para A_1, a área máxima é dada por $\bar{A}_1(b) = Lb - b^2$.

  O trecho A_2 tem área máxima $\bar{A}_2\left(\dfrac{L+b}{4}\right) = \dfrac{(L+b)^2}{8}$.

Subtraindo $\bar{A}_1$ de $\bar{A}_2$ obtemos $\frac{(L-3b)^2}{8} \geq 0$. Logo, podemos dizer que $\bar{A}_2 \geq \bar{A}_1$. O ponto ótimo dessa região tem coordenadas $\bar{x} = \frac{L+b}{4}, \bar{y} = \frac{L+b}{2}$.

- Na **região 8** atuam os trechos A_1 e A_2, que possuem as mesmas coordenadas de pontos ótimos, logo, nessa região não precisamos comparar nada, e o ponto ótimo será $\bar{x} = b, \bar{y} = L - b$

- Na **região 9** atuam pelos trechos A_1, com $\bar{x} = \bar{y} = \frac{L}{2}$ e A_2, com $\bar{x} = b, \bar{y} = L - b$, onde $\frac{L}{2} \leq b \leq L$ e $c \geq L$.

  Para A_1, a área máxima é dada por $\bar{A}_1\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{L^2}{4}$.

  O trecho A_2 tem área máxima $\bar{A}_2\left(b\right) = Lb - b^2$.

  Subtraindo $\bar{A}_2$ de $\bar{A}_1$ obtemos $\left(\frac{L}{2} - b\right)^2 \geq 0$. Logo, podemos dizer que $\bar{A}_1 \geq \bar{A}_2$. O ponto ótimo dessa região tem coordenadas $\bar{x} = \bar{y} = \frac{L}{2}$.

- Finalmente, na **região 10** temos apenas o trecho A_1, com coordenadas ótimas $\bar{x} = \bar{y} = \frac{L}{2}$.

Observamos então, que dessas dez regiões podemos formar apenas seis, de acordo com os pontos ótimos encontrados. As regiões 3, 4 e 7 possuem o mesmo ponto ótimo, dado por $\bar{x} = \frac{L+b}{4}, \bar{y} = \frac{L+b}{2}$. As regiões 5 e 8 tem como ponto ótimo $\bar{x} = b, \bar{y} = L - b$. E as regiões 6, 9 e 10 possuem áreas máximas quando $\bar{x} = \bar{y} = \frac{L}{2}$.

Destacamos a região formada pelo segmento sobre a reta $b + c = L$, com $c \leq \frac{2L}{3}, b \geq \frac{L}{3}$, que separa as regiões 2 e 5. Nessa fronteira, temos um caso especial, em que o ponto ótimo tem coordenadas $\bar{x} = b$ e $\bar{y} = c$, caracterizando o caso das duas paredes totalmente aproveitadas. Note que o ponto ótimo neste trecho satisfaz tanto a regra da região 2 quanto da 5.

Agora, podemos organizar todas essas regiões em um gráfico, com essas seis regiões e suas simétricas, como mostra a Figura 2.47.

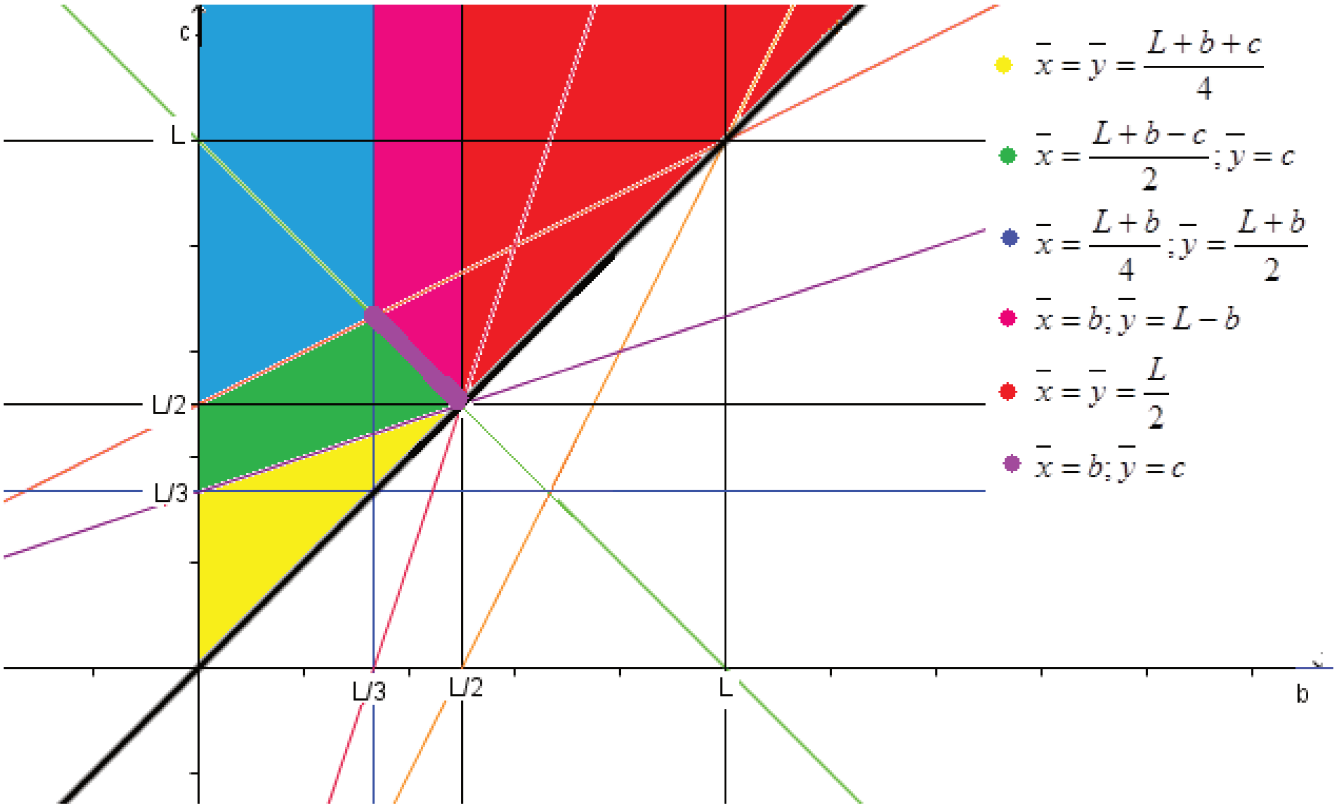


Figura 2.47: Composição final das seis regiões de acordo com os pontos ótimos.

Para exemplificar essas situações, vamos analisar o problema para cada umas dessas seis regiões finais encontradas. Para isso, tomemos $L = 120$ para todos os casos, então, nossa função será

$$A(x) = \begin{cases} x(120-x), & \max\{0, 120-c\} \leq x \leq \min\{b, 120\}, \\ x(120+b-2x), & \max\left\{b, \dfrac{120+b-c}{2}\right\} \leq x \leq \dfrac{120+b}{2}, \\ \dfrac{x}{2}(120+c-x), & 0 \leq x \leq \min\{b, 120-c\}, \\ \dfrac{x}{2}(120+b+c-2x), & b \leq x \leq \dfrac{120+b-c}{2}. \end{cases}$$

Exemplo 1: Tomando $b = 10$ e $c = 20$ temos uma situação característica da região amarela da Figura 2.47. A função será

$$A(x) = \begin{cases} x(120-x), & \max\{0, 100\} \leq x \leq \min\{10, 120\}, \\ x(130-2x), & \max\left\{10, \dfrac{110}{2}\right\} \leq x \leq \dfrac{130}{2}, \\ \dfrac{x}{2}(140-x), & 0 \leq x \leq \min\{10, 100\}, \\ \dfrac{x}{2}(150-2x), & 10 \leq x \leq \dfrac{110}{2}. \end{cases}$$

Podemos perceber que o primeiro trecho A_1 não atua neste caso, pois temos uma incompatibilidade. Logo, nosso problema é dado pela função composta pelos trechos restantes, que reorganizando nos dá

$$A(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}(140 - x), & 0 \leq x \leq 10 \qquad (A_3) \\ \dfrac{x}{2}(150 - 2x), & 10 \leq x \leq 55 \qquad (A_4) \\ x(130 - 2x), & 55 \leq x \leq 65 \qquad (A_2)\,. \end{cases} \tag{2.48}$$

Pela Figura 2.48 podemos analisar os trechos e também o ponto ótimo. Percebemos que o ponto ótimo é suave, e o quadrilátero *ótimo* é um quadrado, caracterizando o caso curto/curto.

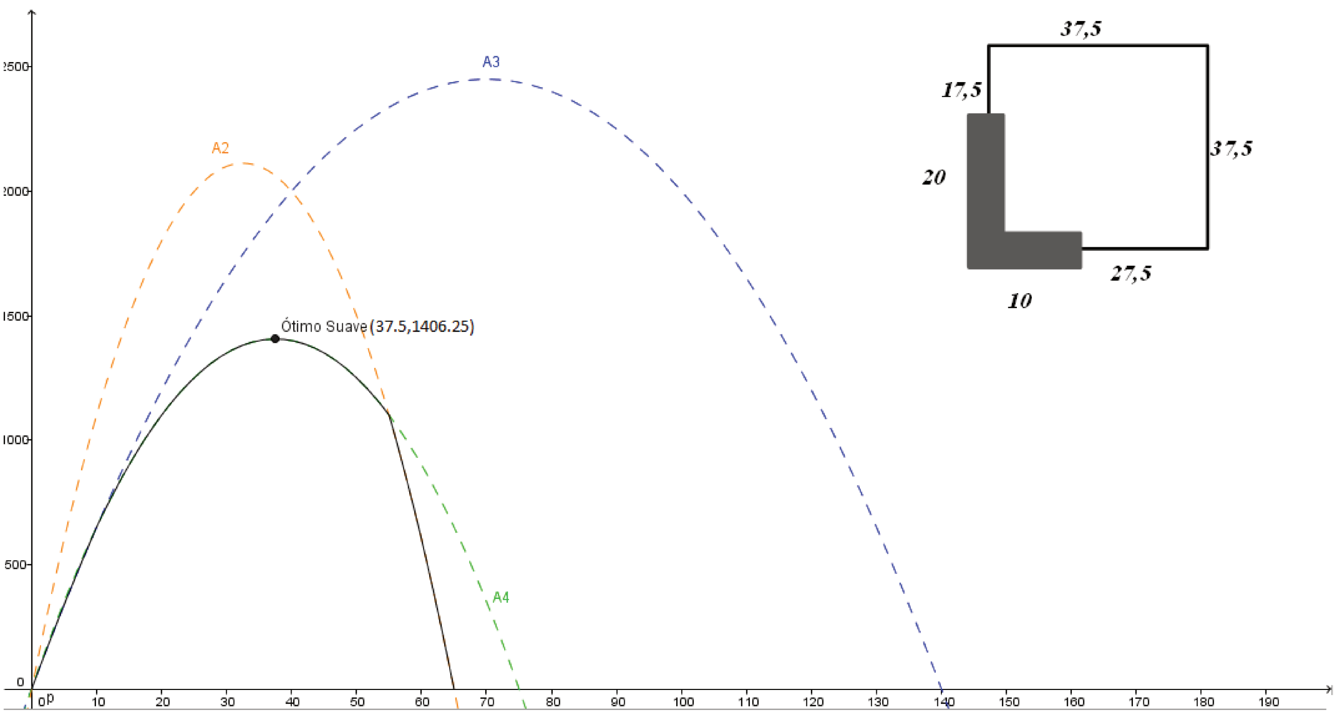


Figura 2.48: Gráfico da função $A(x)$ dada por (2.48) com destaque para as funções quadráticas que definem cada trecho, o ponto ótimo suave e o respectivo quadrilátero ótimo.

Exemplo 2: Tomando $b = 10$ e $c = 50$ temos uma situação característica da região verde da Figura 2.47. A função será

$$A(x) = \begin{cases} x(120 - x), & \max\{0, 70\} \leq x \leq \min\{10, 120\}, \\ x(130 - 2x), & \max\left\{10, \dfrac{80}{2}\right\} \leq x \leq \dfrac{130}{2}, \\ \dfrac{x}{2}(170 - x), & 0 \leq x \leq \min\{10, 70\}, \\ \dfrac{x}{2}(180 - 2x), & 10 \leq x \leq \dfrac{80}{2}. \end{cases}$$

Podemos perceber que o primeiro trecho A_1 não atua neste caso, pois temos uma incompatibilidade. Logo, nosso problema é dado pela função composta pelos trechos restantes, que reorganizando ficam

$$A(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}(170 - x), & 0 \leq x \leq 10 \qquad (A_3) \\ \dfrac{x}{2}(180 - 2x), & 10 \leq x \leq 40 \qquad (A_4) \\ x(130 - 2x), & 40 \leq x \leq 65 \qquad (A_2)\,. \end{cases} \tag{2.49}$$

Pela Figura 2.49 podemos analisar os trechos e também o ponto ótimo. Percebemos que o ponto ótimo não é suave, ele se encontra na interseção dos trechos de A_2 e A_4, e o quadrilátero *ótimo* é um retângulo caracterizando o caso curto/médio.

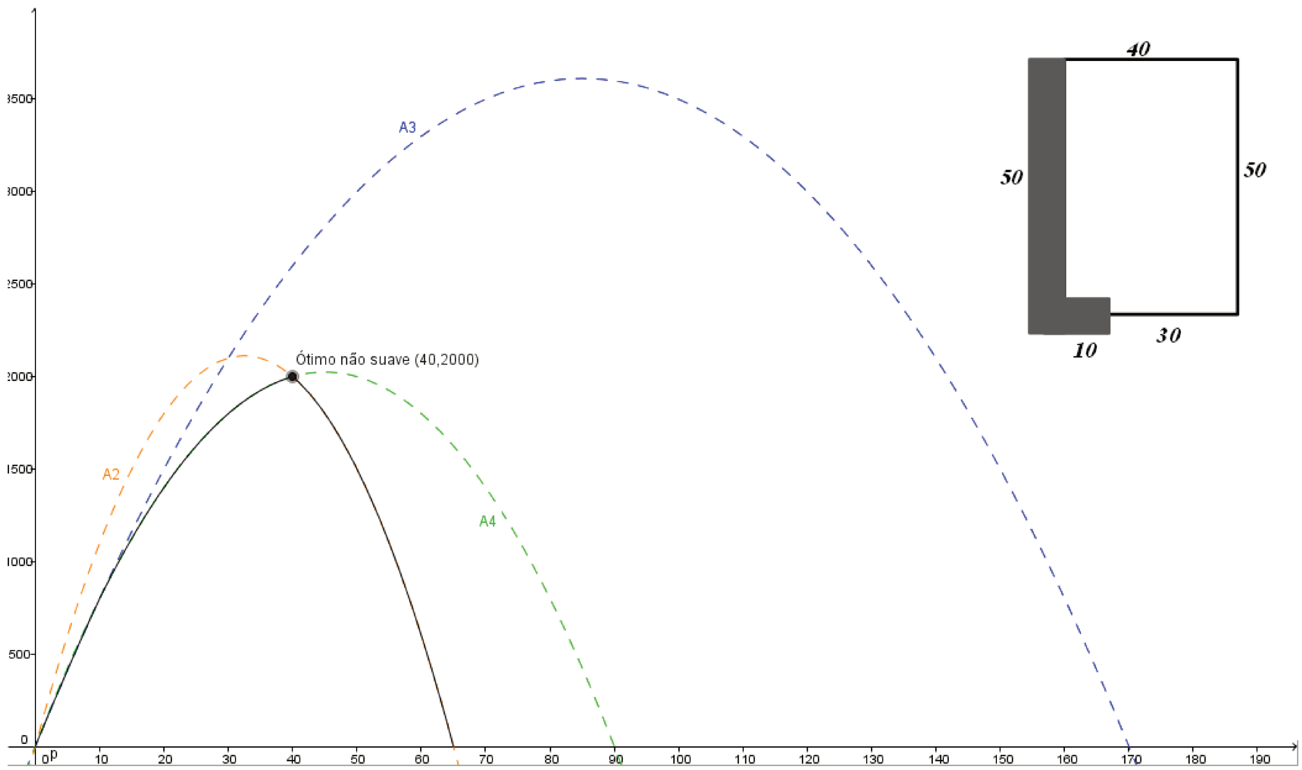


Figura 2.49: Gráfico da função $A(x)$ dada por (2.49) com destaque para as funções quadráticas que definem cada trecho, o ponto ótimo não suave e o respectivo quadrilátero ótimo.

Exemplo 3: Tomando $b = 20$ e $c = 80$ temos uma situação característica da região azul da

Figura 2.47. A função será

$$A(x)=\begin{cases} x(120-x), & \max\{0,40\}\le x\le \min\{20,120\},\\ x(140-2x), & \max\left\{20,\dfrac{60}{2}\right\}\le x\le \dfrac{140}{2},\\ \dfrac{x}{2}(200-x), & 0\le x\le \min\{20,40\},\\ \dfrac{x}{2}(220-2x), & 20\le x\le \dfrac{60}{2}.\end{cases}$$

Podemos perceber que o primeiro trecho A_1 não atua neste caso, pois temos uma incompatibilidade. Logo, nosso problema é dado pela função composta pelos trechos restantes, que reorganizando ficam

$$A(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{2}(200-x), & 0\le x\le 20 & (A_3)\\ \dfrac{x}{2}(220-2x), & 20\le x\le 30 & (A_4)\\ x(140-2x), & 30\le x\le 70 & (A_2)\,.\end{cases} \tag{2.50}$$

Pela Figura 2.50 podemos analisar os trechos e também o ponto ótimo. Percebemos que o ponto ótimo é suave, e o quadrilátero *ótimo* é um retângulo caracterizando o caso curto/longo.

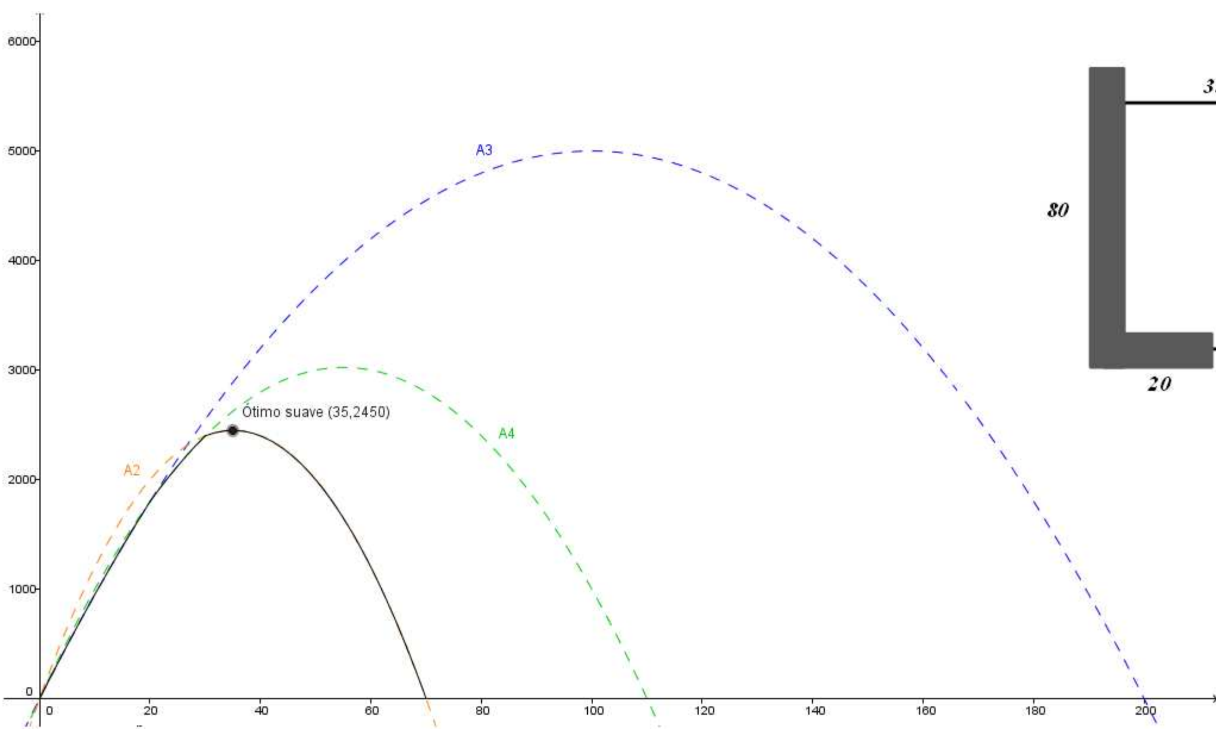


Figura 2.50: Gráfico da função $A(x)$ dada por (2.50) com destaque para as funções quadráticas que definem cada trecho, o ponto ótimo suave e o respectivo quadrilátero ótimo.

Exemplo 4: Tomando $b = 50$ e $c = 100$ temos uma situação característica da região rosa da Figura 2.47. A função será

$$A(x) = \begin{cases} x(120 - x), & \max\{0, 20\} \leq x \leq \min\{50, 120\}, \\ x(170 - 2x), & \max\left\{50, \dfrac{70}{2}\right\} \leq x \leq \dfrac{170}{2}, \\ \dfrac{x}{2}(220 - x), & 0 \leq x \leq \min\{50, 20\}, \\ \dfrac{x}{2}(270 - 2x), & 50 \leq x \leq \dfrac{70}{2}. \end{cases}$$

Podemos perceber que o último trecho A_4 não atua neste caso, pois temos uma incompatibilidade. Logo, nosso problema é dado pela função composta pelos trechos restantes, que reorganizando ficam

$$A(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}(220 - x), & 0 \leq x \leq 20 \quad (A_3) \\ x(120 - x), & 20 \leq x \leq 50 \quad (A_1) \\ x(170 - 2x), & 50 \leq x \leq 85 \quad (A_2)\,. \end{cases} \tag{2.51}$$

Pela Figura 2.51 podemos analisar os trechos e também o ponto ótimo. Percebemos que o ponto ótimo não é suave, e o quadrilátero *ótimo* é um retângulo caracterizando o caso médio/longo.

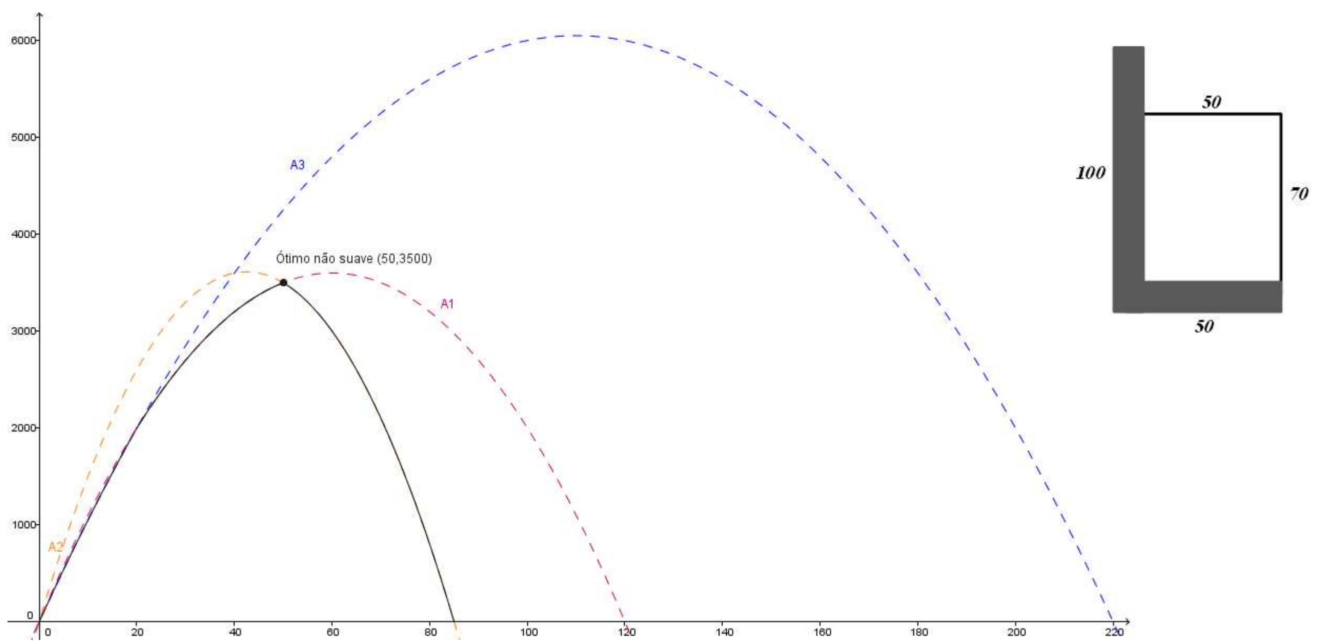


Figura 2.51: Gráfico da função $A(x)$ dada por (2.51) com destaque para as funções quadráticas que definem cada trecho, o ponto ótimo não suave e o respectivo quadrilátero ótimo.

Exemplo 5: Tomando $b = 70$ e $c = 90$ temos uma situação característica da região vermelha da Figura 2.47. A função será

$$A(x) = \begin{cases} x(120-x), & \max\{0,30\} \leq x \leq \min\{70,120\}, \\ x(190-2x), & \max\left\{70, \dfrac{100}{2}\right\} \leq x \leq \dfrac{190}{2}, \\ \dfrac{x}{2}(210-x), & 0 \leq x \leq \min\{70,30\}, \\ \dfrac{x}{2}(280-2x), & 70 \leq x \leq \dfrac{100}{2}. \end{cases}$$

Podemos perceber que o último trecho A_4 não atua neste caso, pois temos uma incompatibilidade. Logo, nosso problema é dado pela função composta pelos trechos restantes, que reorganizando ficam

$$A(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}(210-x), & 0 \leq x \leq 30 \qquad (A_3) \\ x(120-x), & 30 \leq x \leq 70 \qquad (A_1) \\ x(190-2x), & 70 \leq x \leq 95 \qquad (A_2)\,. \end{cases} \tag{2.52}$$

Pela Figura 2.52 podemos analisar os trechos e também o ponto ótimo. Percebemos que o ponto ótimo é suave, e o quadrilátero *ótimo* é um retângulo caracterizando o caso longo/longo.

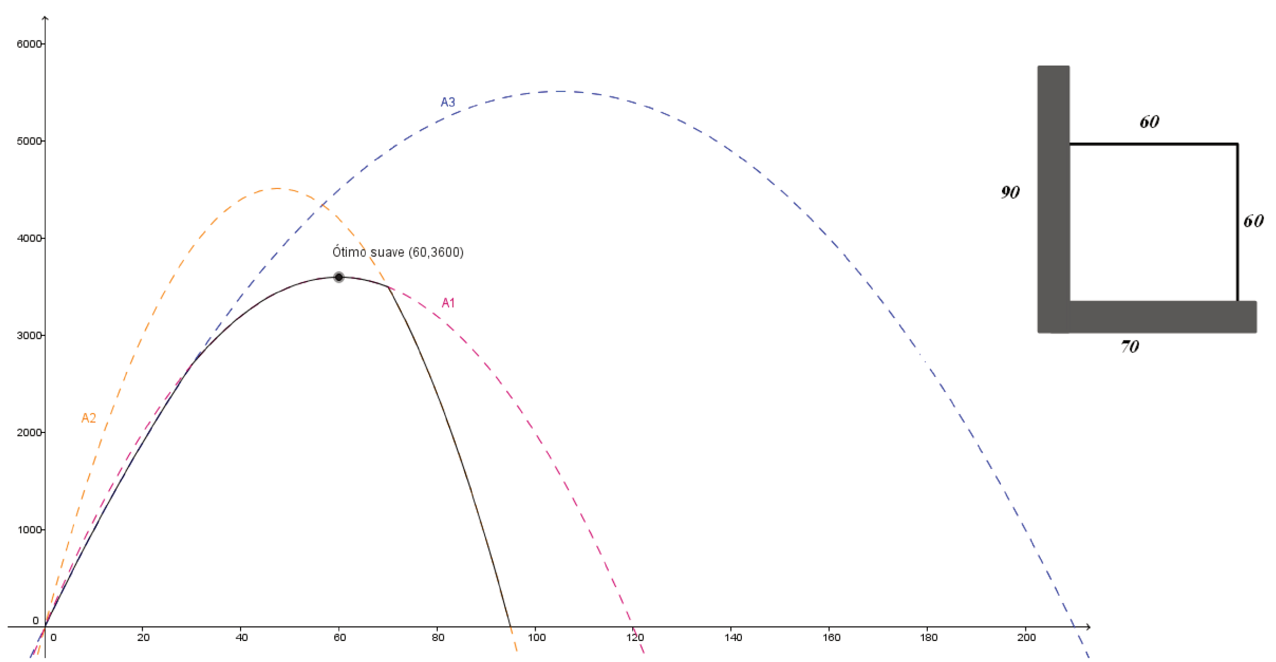


Figura 2.52: Gráfico da função $A(x)$ dada por (2.52) com destaque para as funções quadráticas que definem cada trecho, o ponto ótimo suave e o respectivo quadrilátero ótimo.

Exemplo 6: Tomando $b = 50$ e $c = 70$ temos uma situação característica da região lilás, o segmento da reta $b+c=L$, da Figura 2.47. A função será

$$A(x)=\begin{cases} x(120-x), & \max\{0,50\}\leq x\leq \min\{50,120\},\\ x(170-2x), & \max\left\{50,\dfrac{100}{2}\right\}\leq x\leq \dfrac{170}{2},\\ \dfrac{x}{2}(190-x), & 0\leq x\leq \min\{50,50\},\\ \dfrac{x}{2}(240-2x), & 50\leq x\leq \dfrac{100}{2}.\end{cases}$$

Podemos perceber que os trechos A_1 e A_4 são equivalentes e se limitam ao ponto $x=50$, já contemplado nos extremos dos dois trechos da função contínua A(x). Então, reduzindo nosso problema temos

$$A(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{2}(190-x), & 0\leq x\leq 50 \qquad (A_3)\\ x(170-2x), & 50\leq x\leq 85 \qquad (A_2)\,.\end{cases} \tag{2.53}$$

Pela Figura 2.53 podemos analisar os trechos e também o ponto ótimo. Percebemos que o ponto ótimo não é suave, e o quadrilátero *ótimo* é um retângulo, caracterizando o caso médio/médio.

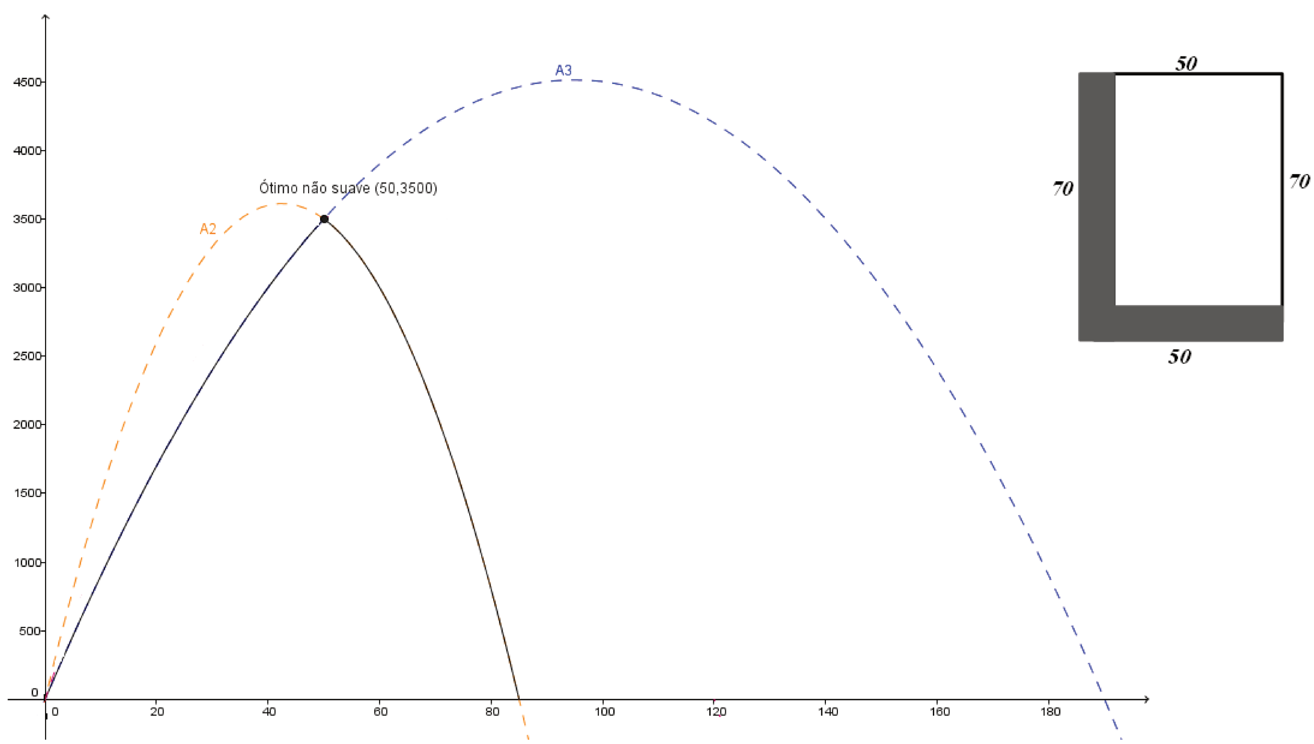


Figura 2.53: Gráfico da função $A(x)$ dada por (2.53) com destaque para as funções quadráticas que definem cada trecho, o ponto ótimo não suave e o respectivo quadrilátero ótimo.

Terminamos aqui a proposta de um projeto de otimização para ser trabalhado com alunos do Ensino Médio. Neste projeto exploramos um problema clássico de otimização, o cálculo da maior área retangular sujeita a um perímetro constante, e isso foi feito desde sua abordagem mais simples, onde não existiam paredes a serem aproveitadas, e aos poucos, dificultando-o através de hipóteses e questionamentos relevantes, como "e se usássemos uma parede?, e se essa parede for mais curta que um lado do retângulo?, e se aproveitássemos duas paredes?, e se uma delas for longa e a outra for curta?". Questionamentos como esses instigam os alunos e fazem com que eles atuem como investigadores do problema, ajudando na construção do próprio conhecimento.

Juntamente com a resolução algébrica de cada problema, sua resolução geométrica também foi explorada, utilizando para isso o *software* livre Geogebra, fazendo com que o aluno fosse capaz de relacionar ambas as resoluções, analisando as situações e lendo os gráficos para realmente entender o problema. É importante ressaltar que esse trabalho com gráficos poderia ser feito em qualquer outro *software* deste tipo ou até mesmo com desenhos feitos a mão livre.

Para conseguirmos resolver este problema, desde o mais simples até o mais complicado, introduzimos um dos conceitos básicos do Cálculo, a derivada, porém, adaptada aos conteúdos previstos para o Ensino Médio.

Após a realização deste projeto, é necessário fazer seu fechamento com os alunos, seja através de uma exposição em um Feira de Ciências, seja com a publicação em alguma revista da área, ou mesmo no jornal da escola, caso exista. Acreditamos que uma prova não seja a melhor maneira de avaliarmos este projeto, que foi idealizado para ser um trabalho conjunto com os alunos, um trabalho investigativo e não tão formal no sentido de cobranças de conteúdos. É importante que os alunos se sintam reconhecidos após a realização deste projeto, incentivando-os cada vez mais a se dedicarem a trabalhos extra-curriculares, trabalhos onde o estudo e a aprendizagem sejam prazerosos e façam sentido para eles.

Capítulo 3

Considerações finais

A Matemática Aplicada é uma área dessa ciência que pode ser muito atrativa a alunos de Ensino Médio; seus problemas práticos e reais podem envolver até mesmo aqueles alunos que dizem odiar essa disciplina escolar. Neste trabalho, foi proposta uma abordagem de um problema clássico, o problema de otimizar a área de quadriláteros de perímetro constante. A ideia foi transformar um problema do Ensino Superior em um problema que pudesse ser resolvido no Ensino Médio, ou seja, abordando conteúdos do currículo de Matemática trabalhado nesse nível. Começamos com o problema mais simples, seguido de um problema em um espaço de parâmetros unidimensional, fazendo uma revisão de conteúdos fundamentais para o entendimento e resolução desse problema, para que depois pudéssemos avançar para o problema em um espaço de parâmetros bidimensional. No problema bidimensional, o aluno precisa analisar situações, antever possibilidades, ler gráficos para conseguir resolver o problema e entendê-lo de fato.

Nas escolas brasileiras de hoje raramente há tempo e/ou espaço para o desenvolvimento de um trabalho extra-classe como este, já que exigiria empenho de várias partes, da direção e coordenação da escola, dos professores e é claro, dos próprios alunos. Num primeiro momento aqueles alunos que já possuem uma empatia ou habilidade com a Matemática ficariam empolgados, mas logo depois, acreditamos que os alunos desmotivados, principalmente por não conseguirem enxergar uma aplicabilidade da Matemática em suas vidas, seriam atraídos para tentar essa nova experiência. E é justamente este o objetivo de realizar um trabalho diferenciado com os alunos, para que eles sintam, de alguma maneira, que a Matemática faz sim parte de suas vidas.

Referências Bibliográficas

[1] Anton, H. *Cálculo, um novo horizonte*. Tradução Cyro de Carvalho Patarra e Márcia Tamanaha, 6 ed., Volume 1, Porto Alegre, 2000.

[2] Apostila do Sistema COC de Ensino - Matemática - 9º ano-Grupo 08, 2013.

[3] Bevis, J.H.; Boal,J.L. (1984). County Agent's problem; or, how long is a short barn?. *The Mathematics teacher*, volume 77, number 4, april 1984:278-282.

[4] Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) 2013, disponível em `http://portal.inep.gov.br/web/enem/edicoes-anteriores/provas-e-gabaritos`. Último acesso em 04/08/2014.

[5] Giovanni, J. R; Dante, L. R. *Matemática 2º grau, Teoria-Exercícios-Aplicações.* s.l.: São Paulo: Editora FTD S.A. Volume 1, s.d.

[6] Iezzi, G.; Murakami, C.; Machado, N. J. *Fundamentos de Matemática Elementar 8: Limites, Derivadas, Noções de Integral* 6 ed., São Paulo: Atual Editora, 2005.

[7] Hamilton, E. *A mitologia.* Lisboa: Publicações Dom Quixote, Outubro 1983.

[8] Khan, S. *Um mundo, uma escola. A educação reinventada.* Tradução de George Schiesinger. s.l.: Editora Intrínseca Ltda, 2013.

[9] Limberger, R. *Abordagens do problema isoperimétrico.* 2011. Dissertação de Mestrado em Matemática, IMECC, Unicamp, fevereiro 2011.

[10] Madeira, T. M. *O Problema Isoperimétrico Clássico.* 2005. Dissertação de Mestrado em Matemática para o Ensino, Faculdade de Ciências e Tecnologia de Coimbra.

[11] Módulo animado para o ensino de Cálculo, disponível em `http://www.ime.unicamp.br/~calculo/ambientedeensino/modulos/canteiro/`. Último acesso em 04/08/2014.

[12] Santos, S. A. Exploração da linguagem escrita nas aulas de Matemática. In: Nacarato, A.M.; Lopes,C.E.(Org) *Escritas e Leituras na Educação Matemática*, Belo Horizonte-MG: Autêntica, 2005.p.127-141.

[13] Stewart, J. *Cálculo.* Tradução da 7ª edição norte americana, Volume 1, 2014.

[14] Virgílio, P. *Eneida.* Tradução de Manuel Odorico Mendes. Disponível em `http://www.ebooksbrasil.org/eLibris/eneida.html`. Último acesso em 07/07/2014.