

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

TEOREMAS DO TIPO BANACH-STONE PARA
ÁLGEBRAS DE FUNÇÕES HOLOMORFAS EM ESPAÇOS
DE DIMENSÃO INFINITA

TESE DE DOUTORADO

DANIELA MARIZ SILVA VIEIRA

ORIENTADOR: JORGE TULIO MUJICA ASCUI

ESTE TRABALHO RECEBEU APOIO FINANCEIRO DA FAPESP

TEOREMAS DO TIPO BANACH-STONE PARA ÁLGEBRAS DE FUNÇÕES HOLOMORFAS EM ESPAÇOS DE DIMENSÃO INFINITA

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Daniela Mariz Silva Vieira** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 20 de Agosto de 2004.

Prof. Dr. **Jorge Tulio Mujica Ascui**
Orientador

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Jorge Tulio Mujica Ascui.

Prof. Dr. Mário Carvalho de Matos.

Profa. Dra. Luiza Amália de Moraes.

Profa. Dra. Mary Lilian Lourenço.

Prof. Dr. Humberto Daniel Carrión Villarroel.

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, **UNICAMP**, como requisito parcial para obtenção de Título de **Doutora em Matemática**.

à minha avó
Guiomar Matos da Silva
(em memória)

AGRADECIMENTOS

... ao meu orientador Jorge Mujica.

... à minha orientadora de mestrado Mary Lilian Lourenço.

... aos professores Mário Matos, Luiza Amália Moraes, Raymundo Alencar, Sueli Roversi, Ary Chiacchio e Geraldo Botelho.

... aos professores Domingo García, Manuel Maestre, Seán Dineen, Christopher Boyd, José Ansemil e Socorro Ponte.

... ao professor Marco Antonio Teixeira.

... ao funcionários da Secretaria de Pós Graduação, Tânia, Cidinha e Ednaldo.

... aos meus amigos.

... e à minha família.

A autora agradece à FAPESP o apoio financeiro.

*Ninguém sabe
mas você foi o escolhido.
O seu amor é único,
o seu amor é um homem sentado
pensando em seu cachorro morto.
O seu amor é a última orquídea do inverno
é pássaro pedindo água
pupila adormecida.
E você nem se importa
pelo fato de ser melhor.
O seu nariz é grego,
você é tão bonito e nem liga.
É verdade que você tem sofrido muito mas isso faz parte.
Quando você anda na rua as árvores florescem.
Você é meu amigo.
Você é
eu.*

(Ninguém Sabe, Renata Pallottini)

Resumo

Neste trabalho são provados teoremas do tipo Banach-Stone para diversas álgebras topológicas de funções holomorfas em espaços de dimensão infinita. Mais especificamente, se E e F são espaços de Fréchet, onde um deles é separável e tem a propriedade de aproximação limitada e $U \subset E$, $V \subset F$ são domínios de holomorfia conexos, provamos que os domínios U e V são biholomorficamente equivalentes se e somente se as álgebras $(\mathcal{H}(U), \tau)$ e $(\mathcal{H}(V), \tau)$ são topologicamente isomorfas, para $\tau = \tau_0$, τ_ω ou τ_δ . São apresentados dois exemplos: um onde o teorema falha se apenas um dos abertos é um domínio de holomorfia, e outro onde os resultados não são válidos se um dos espaços não é um espaço de Fréchet. Também são apresentados resultados similares para álgebras de funções holomorfas de tipo limitado. Com efeito, se E e F são espaços de Banach reflexivos, um deles do tipo Tsirelson, e $U \subset E$, $V \subset F$ são abertos convexos e equilibrados, então existe um tipo especial de aplicação biholomorfa entre U e V se e somente se as álgebras de Fréchet $\mathcal{H}_b(U)$ e $\mathcal{H}_b(V)$ são topologicamente isomorfas. Finalmente são demonstrados teoremas análogos para álgebras topológicas de germes holomorfos, a saber: se E e F são espaços de Banach do tipo Tsirelson-James, $K \subset E$ e $L \subset F$ são subconjuntos compactos convexos e equilibrados, então existe uma aplicação biholomorfa de uma vizinhança aberta de K sobre uma vizinhança aberta de L , que leva K em L , se e somente se as álgebras $\mathcal{H}(K)$ e $\mathcal{H}(L)$ são topologicamente isomorfas.

Abstract

We derive Banach-Stone theorems for several topological algebras of holomorphic functions on infinite dimensional spaces. To be more specific, if E and F are Fréchet spaces, one of them separable with the bounded approximation property and $U \subset E$, $V \subset F$ are connected domains of holomorphy, we prove that U and V are biholomorphically equivalent if and only if the algebras $(\mathcal{H}(U), \tau)$ and $(\mathcal{H}(V), \tau)$ are topologically isomorphic, for $\tau = \tau_0$, τ_ω or τ_δ . We present two examples: one in which the theorem fails if only one of the open subsets is a domain of holomorphy, and another one in which the results are not valid if one of the spaces is not a Fréchet space. We also present similar results for algebras of holomorphic functions of bounded type. In fact, if E and F are reflexive Banach spaces, one of them a Tsirelson-like space, and $U \subset E$, $V \subset F$ are absolutely convex open subsets, then there exists a suitable biholomorphic mapping between U and V if and only if the Fréchet algebras $\mathcal{H}_b(U)$ and $\mathcal{H}_b(V)$ are topologically isomorphic. Finally we give analogous theorems for topological algebras of germs of holomorphic functions as follows: if E and F are Tsirelson-James-like spaces, $K \subset E$ and $L \subset F$ are absolutely convex compact subsets, then there exists a biholomorphic mapping from an open neighborhood of K onto an open neighborhood of L , which maps K onto L , if and only if the algebras $\mathcal{H}(K)$ and $\mathcal{H}(L)$ are topologically isomorphic.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	4
1.1 Notação	4
1.2 Preliminares sobre espaços de Banach e espaços localmente convexos	6
1.3 Preliminares sobre polinômios	10
1.4 Preliminares sobre funções holomorfas	12
1.5 Preliminares sobre germes de funções holomorfas	19
2 Funções holomorfas em espaços localmente convexos	22
2.1 Operadores de composição entre álgebras de funções holomorfas	23
2.2 Funções holomorfas em domínios absolutamente convexos	25
2.3 Funções holomorfas em domínios polinomialmente convexos	40
2.4 Funções holomorfas em domínios pseudoconvexos	41
3 Funções holomorfas de tipo limitado em espaços de Banach	46
3.1 Operadores de composição entre álgebras de funções holomorfas de tipo limitado . . .	47

3.2	Funções holomorfas de tipo limitado em domínios absolutamente convexos	49
4	Germes de funções holomorfas em espaços de Banach	56
4.1	Germes de funções holomorfas em espaços do tipo Tsirelson	57
4.2	Germes de funções holomorfas em espaços do tipo Tsirelson-James	62
	Referências Bibliográficas	72

Introdução

Em 1932, S. Banach provou em [6] que dois espaços métricos compactos X e Y são homeomorfos se e somente se as álgebras de Banach $\mathcal{C}(X)$ e $\mathcal{C}(Y)$ são isometricamente isomorfas. M. H. Stone, em 1937, generalizou em [65] este resultado para espaços topológicos Hausdorff compactos arbitrários, resultado que ficou então conhecido como Teorema de Banach-Stone.

Neste trabalho apresentamos resultados similares para diversas álgebras topológicas de funções holomorfas. Mais especificamente, sejam E e F espaços localmente convexos; $U \subseteq E$ e $V \subseteq F$ subconjuntos abertos. Consideremos $\mathcal{H}(U)$ a álgebra de todas as funções holomorfas $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, e da mesma forma $\mathcal{H}(V)$, e dotemos $\mathcal{H}(U)$ e $\mathcal{H}(V)$ de uma de suas topologias naturais $\tau = \tau_0, \tau_\omega$ ou τ_δ . Nesta tese provamos, sob certas condições em E , F , U e V , que os abertos U e V são biholomorficamente equivalentes (isto é, existe uma aplicação bijetiva e holomorfa entre U e V cuja inversa é holomorfa) se e somente se as álgebras $(\mathcal{H}(U), \tau)$ e $(\mathcal{H}(V), \tau)$ são topologicamente isomorfas.

A seguir explicamos com mais detalhe o que é apresentado em cada capítulo deste texto.

No Capítulo 1 apresentamos alguns resultados em espaços de Banach e espaços localmente convexos, polinômios, funções holomorfas e germes de funções holomorfas, que serão necessários para os resultados principais desta tese.

No Capítulo 2, Seção 2.2, provamos que se E e F são espaços de Fréchet, um deles com a propriedade da aproximação, e U e V são convexos e equilibrados, então U e V são biholomorficamente equivalentes se e somente se $(\mathcal{H}(U), \tau)$ e $(\mathcal{H}(V), \tau)$ são álgebras topologicamente isomorfas, para $\tau = \tau_0$ ou τ_ω . Se E ou F é separável e tem a propriedade da aproximação, temos o mesmo resultado

para a topologia τ_δ . Apresentamos nesta seção um exemplo onde o teorema principal falha, quando um dos espaços em questão não é um espaço de Fréchet.

Na Seção 2.3, apresentamos resultados similares para abertos polinomialmente convexos. Para $\tau = \tau_0$ e τ_ω o resultado é válido para abertos polinomialmente convexos em espaços de Fréchet, um deles com a propriedade da aproximação. Para a topologia τ_δ , um dos espaços E ou F precisa ser separável e ter a propriedade da aproximação limitada, e os abertos U e V têm que ser conexos e polinomialmente convexos.

Na Seção 2.4, apresentamos resultados similares para domínios de holomorfia. Mais especificamente, se E e F são espaços de Fréchet, um deles separável com a propriedade da aproximação limitada, e U e V são domínios de holomorfia conexos, então U e V são biholomorficamente equivalentes se e só se $(\mathcal{H}(U), \tau)$ e $(\mathcal{H}(V), \tau)$ são álgebras topologicamente isomorfas, para $\tau = \tau_0, \tau_\omega$ e τ_δ .

Nesta seção mostramos que a hipótese dos abertos serem domínios de holomorfia não pode ser omitida. Mais especificamente, demonstramos que em qualquer espaço de Banach é possível construir dois abertos U e V , sendo que um deles não é um domínio de holomorfia, tal que as álgebras $(\mathcal{H}(U), \tau)$ e $(\mathcal{H}(V), \tau)$ são topologicamente isomorfas para $\tau = \tau_0, \tau_\omega$ e τ_δ , mas U e V não são biholomorficamente equivalentes.

O Capítulo 3 está dedicado ao estudo das álgebras de funções holomorfas de tipo limitado. Começamos apresentando na Seção 3.1 uma caracterização de quais aplicações holomorfas $\varphi : V \longrightarrow U$ definem um operador de composição entre as álgebras $\mathcal{H}_b(U)$ e $\mathcal{H}_b(V)$. Utilizando esse resultado obtemos um teorema do tipo Banach-Stone para tais álgebras. Mais especificamente, provamos que se E e F são espaços de Banach reflexivos, um deles um espaço de Tsirelson, e $U \subseteq E$ e $V \subseteq F$ são subconjuntos abertos convexos e equilibrados, então existe um tipo especial de aplicação biholomorfa entre U e V se e somente se as álgebras $\mathcal{H}_b(U)$ e $\mathcal{H}_b(V)$ são topologicamente isomorfas. Ainda nesta seção apresentamos um interessante corolário de extensão, onde provamos sob as mesmas hipóteses, que um isomorfismo topológico entre $\mathcal{H}_b(U)$ e $\mathcal{H}_b(V)$ estende-se a um isomorfismo topológico entre

$(\mathcal{H}(U), \tau)$ e $(\mathcal{H}(V), \tau)$, para $\tau = \tau_0, \tau_\omega$ ou τ_δ .

No último capítulo desta tese, Capítulo 4, apresentamos teoremas de Banach-Stone para álgebras de germes holomorfos. Na Seção 4.1 provamos que se K e L são subconjuntos compactos, convexos e equilibrados em espaços de Tsirelson, então K e L são biholomorficamente equivalentes (ou seja, existe uma aplicação biholomorfa entre uma vizinhança de K sobre uma vizinhança de L , que leva K em L) se e somente se $\mathcal{H}(K)$ e $\mathcal{H}(L)$ são álgebras topologicamente isomorfas. Obtemos ainda nesta seção um resultado mais forte em dimensão finita para subconjuntos compactos que são Oka-Weil compactos e conexos.

Na Seção 4.2, provamos um resultado similar quando $K \subset E$ e $L \subset F$ são subconjuntos compactos convexos e equilibrados em espaços de Tsirelson-James. As técnicas de demonstração nas duas seções são bastantes diferentes, uma vez que o espaço de Tsirelson é reflexivo, o que simplifica bastante as demonstrações. Terminamos o capítulo com algumas investigações acerca das relações entre a álgebra de germes de funções holomorfas em subconjuntos abertos de um espaço de Banach E que contém um compacto $K \subset E$; e a álgebra de germes de funções holomorfas em abertos de E'' que contém o mesmo compacto K .

Diversos teoremas do tipo Banach-Stone têm sido obtidos recentemente por vários autores. Encontramos teoremas do tipo Banach-Stone em [16] para diversas álgebras de funções holomorfas. Em [14] são apresentados teoremas do tipo Banach-Stone para espaços de polinômios homogêneos. Para álgebras de funções $\mathbb{R}$ -diferenciáveis citamos [31, 32]. Com relação a álgebras de germes holomorfos, citamos o trabalho [59], feito somente para dimensão finita.

Versões preliminares dos resultados apresentados nesta tese podem ser encontrados em [30, 69, 70, 71, 72].

Capítulo 1

Preliminares

A mente que se abre a uma nova idéia, jamais voltará ao seu tamanho original. (Albert Einstein)

1.1 Notação

Utilizamos a seguinte notação:

$\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais

$\mathbb{R}$ o corpo dos números reais

$\mathbb{C}$ o corpo dos números complexos

E, F espaços de Banach ou espaços localmente convexos Hausdorff sobre $\mathbb{C}$

E^n o produto $\underbrace{E \times \cdots \times E}_{n\text{-vezes}}$

x^n a n -upla $\underbrace{(x, \cdots, x)}_{n\text{-vezes}}$

$cs(E)$ o conjunto das seminormas contínuas em E

$\mathcal{L}(E; F)$ o espaço das aplicações lineares e contínuas de E em F

E' $\mathcal{L}(E; \mathbb{C})$

$J : E \longrightarrow E''$ a inclusão canônica de E em E''

$\mathcal{L}_f(E; F)$ o espaço de todos os elementos de $\mathcal{L}(E; F)$ que têm posto finito

$\mathcal{P}(^m E; F)$	o espaço de todos os polinômios m -homogêneos contínuos de E em F
$\mathcal{P}_f(^m E; F)$	o espaço de todos os polinômios m -homogêneos de tipo finito contínuos de E em F
$\mathcal{P}(E; F)$	o espaço de todos os polinômios contínuos de E em F
$\mathcal{P}(^m E)$	$\mathcal{P}(^m E; \mathbb{C})$
$\mathcal{P}_f(^m E)$	$\mathcal{P}_f(^m E; \mathbb{C})$
$\mathcal{P}(E)$	$\mathcal{P}(E; \mathbb{C})$
$B_E(x, r)$	a bola aberta em E com centro em x e raio r
$\overline{B_E}(x, r)$	a bola fechada em E com centro em x e raio r
U	um subconjunto aberto não vazio de E
$d_U(x)$	a distância de $x \in U$ à fronteira de U
$d_U(A)$	a distância de $A \subseteq U$ à fronteira de U
$\overline{\text{co}}(A)$	a envoltória convexa e fechada de $A \subseteq E$
$\mathcal{H}(U; F)$	o espaço das aplicações holomorfas de U em F
$\mathcal{H}(U)$	$\mathcal{H}(U; \mathbb{C})$
$\Re f$	a parte real de $f \in \mathcal{H}(U)$
$\Im f$	a parte imaginária de $f \in \mathcal{H}(U)$
$\mathcal{H}_b(U; F)$	o espaço das aplicações holomorfas de tipo limitado de U em F
$\mathcal{H}_b(U)$	$\mathcal{H}_b(U; \mathbb{C})$
$\mathcal{H}^\infty(U; F)$	o espaço das aplicações holomorfas de U em F que são limitadas em U
$\mathcal{H}^\infty(U)$	$\mathcal{H}^\infty(U; \mathbb{C})$
$\mathcal{H}_{wu}(U; F)$	o espaço das aplicações holomorfas de U em F que são w -uniformemente contínuas nos subconjuntos U -limitados
$\mathcal{H}_{wu}(U)$	$\mathcal{H}_{wu}(U; \mathbb{C})$
K	um subconjunto compacto de E
$\mathcal{H}(K; F)$	o espaço dos germes holomorfos em K com valores em F

$\mathcal{H}(K) \quad \mathcal{H}(K; \mathbb{C})$

$\mathcal{P}_s(U)$ o espaço das funções plurisubharmônicas em U

$\mathcal{P}_{sc}(U)$ o espaço das funções plurisubharmônicas e contínuas em U

$\mathcal{F}$ uma família de funções de U em $\mathbb{C}$

$\hat{A}_{\mathcal{F}}$ o conjunto $\{x \in U : |f(x)| \leq \sup_A |f|, \text{ para toda } f \in \mathcal{F}\}$

1.2 Preliminares sobre espaços de Banach e espaços localmente convexos

Todos os espaços localmente convexos em questão são Hausdorff.

Seja E um espaço localmente convexo. Denotamos por w a topologia fraca em E , $\sigma(E, E')$. Por w^* entendemos a topologia fraca estrela em E' , $\sigma(E', E)$. Seja F um espaço localmente convexo tal que (E, F) é um sistema dual. Então $\sigma(E, F)$ denota a topologia fraca em E com respeito à dualidade (E, F) . A *topologia de Mackey* em E é a topologia da convergência uniforme sobre os subconjuntos convexos, equilibrados e $\sigma(F, E)$ -compactos de F . A topologia de Mackey em E será denotada por $\tau(E, F)$.

Teorema 1.2.1 (Teorema de Mackey-Arens, [39], 3-§5, Proposição 4). *Sejam (E, F) um sistema dual e τ uma topologia localmente convexa em E . Então as seguintes condições são equivalentes.*

$$(1) \quad \sigma(E, F) \leq \tau \leq \tau(E, F).$$

$$(2) \quad (E, \tau)' = F.$$

Dizemos que uma família $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}(E; F)$ é *equicontínua* se para cada $\varepsilon > 0$ e $p \in cs(E)$ existe uma vizinhança V de zero em E tal que

$$p(T(x)) \leq \varepsilon, \text{ para todos } x \in V, T \in \mathcal{F}.$$

Definições 1.2.2 ([25], Definição 2.7). *Seja E um espaço localmente convexo.*

- (1) *Dizemos que E tem a propriedade de aproximação se para cada subconjunto compacto K de E , $p \in cs(E)$ e $\varepsilon > 0$, existe um operador de posto finito $T = T_{\varepsilon, K} \in \mathcal{L}_f(E; E)$ tal que*

$$p(T(x) - x) \leq \varepsilon, \text{ para todo } x \in K.$$

- (2) *Dizemos que E tem a propriedade de aproximação limitada se a família*

$$\{T_{\varepsilon, K} : \varepsilon > 0 \text{ e } K \text{ é um subconjunto compacto de } E\}$$

obtida no item (1) pode ser tomada equicontínua.

Proposição 1.2.3. *Se E é um espaço localmente convexo com a propriedade de aproximação (limitada), então todo subespaço complementado de E tem a propriedade de aproximação (limitada).*

Demonstração: Iremos demonstrar a proposição para a propriedade de aproximação, e observamos que para a propriedade de aproximação limitada os argumentos são similares.

Sejam N um subespaço complementado de E e $P : E \longrightarrow N$ uma projeção contínua tal que $P(x) = x$, para todo $x \in N$. Sejam $K \subset N$ um subconjunto compacto, $q \in cs(N)$ e $\varepsilon > 0$. É claro que $q \circ P$ é um elemento de $cs(E)$, e como E tem a propriedade de aproximação, existe um operador de posto finito $T : E \longrightarrow E$ tal que

$$(q \circ P)(T(x) - x) \leq \varepsilon, \text{ para todo } x \in K$$

Como T é de posto finito, temos que o operador $S = P \circ T|_N : N \longrightarrow N$ também é de posto finito. Logo para todo $x \in K$ segue que

$$q(S(x) - x) = q(P \circ T(x) - P(x)) = q(P(T(x) - x)) = q \circ P(T(x) - x) \leq \varepsilon,$$

e assim N tem a propriedade de aproximação. ■

A seguinte definição será utilizada no Capítulo 2.

Definição 1.2.4 ([47], Definição 1.1). *Sejam E um espaço vetorial, $(E_\alpha)_{\alpha \in A}$ uma família de espaços localmente convexos e $\pi_\alpha : E \longrightarrow E_\alpha$ uma aplicação de E em E_α , para todo $\alpha \in A$. Chamamos de topologia projetiva em E com relação à família de aplicações π_α à topologia mais fraca em E que torna cada π_α contínua.*

As seguintes definições e resultados relativos a limites indutivos de espaços localmente convexos serão utilizadas no Capítulo 4.

Definição 1.2.5 ([47], Definição 1.3). *Sejam E um espaço vetorial, $(E_\alpha)_{\alpha \in A}$ uma família de espaços localmente convexos e $i_\alpha : E_\alpha \longrightarrow E$ uma aplicação de E_α em E , para todo $\alpha \in A$. Chamamos de topologia indutiva em E com relação à família de aplicações i_α à topologia localmente convexa mais fina em E que torna cada i_α contínua.*

Definição 1.2.6 ([47], Definição 1.4). *Seja E um espaço vetorial que é a união de uma família de espaços localmente convexos $(E_\alpha)_{\alpha \in A}$ dirigida por inclusão. Suponha que cada inclusão $E_\alpha \hookrightarrow E_\beta$ é contínua, para $\alpha \leq \beta$. Então E , munido da topologia indutiva com relação às inclusões $E_\alpha \hookrightarrow E$ é chamado de limite indutivo dos subespaços E_α , e escrevemos*

$$E = \varinjlim_{\alpha \in A} E_\alpha.$$

Teorema 1.2.7 ([39], 2-§12, Proposição 1). *Sejam E um espaço vetorial e $(E_\alpha)_{\alpha \in A}$ uma família de espaços localmente convexos tais que $E = \varinjlim_{\alpha \in A} E_\alpha$. Seja F um espaço localmente convexo. Uma aplicação linear $T : E \longrightarrow F$ é contínua se e somente se $T \circ i_\alpha : E_\alpha \longrightarrow F$ é contínua, para todo $\alpha \in A$.*

O próximo teorema é devido a A. Grothendieck ([33, Teorema A] ou [34, Teorema 1]).

Teorema 1.2.8 ([33], Teorema A ou [34], Teorema 1). *Seja F um espaço Hausdorff localmente convexo que é a união de uma sequência crescente de espaços de Fréchet $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$, e suponha que cada inclusão $i_n : F_n \longrightarrow F$ é contínua. Seja $T : E \longrightarrow F$ uma aplicação linear contínua, onde E é*

um espaço de Fréchet. Então existem $n \in \mathbb{N}$ e uma aplicação linear contínua $T_n : E \longrightarrow F_n$ tal que $i_n \circ T_n = T$.

A demonstração do próximo Lema foi extraída de um curso ministrado por J. Mujica na UNICAMP.

Lema 1.2.9. *Sejam E um espaço localmente convexo e U uma vizinhança aberta, convexa e equilibrada de zero em E . Então*

$$(1) \quad \overline{U} = \{x \in E : \lambda x \in U \text{ para todo } 0 \leq \lambda < 1\}.$$

$$(2) \quad \overset{\circ}{U} = U.$$

Demonstração:

(1) Denotemos $\widetilde{U} = \{x \in E : \lambda x \in U \text{ para todo } 0 \leq \lambda < 1\}$. É claro que $\widetilde{U} \subseteq \overline{U}$. Se $x \notin \widetilde{U}$, então existe λ , $0 \leq \lambda < 1$ tal que $\lambda x \notin U$. Pelo Teorema de Hahn-Banach existe $\varphi \in E'$ tal que $\varphi(\lambda x) = 1$ e $|\varphi(y)| \leq 1$, para todo $y \in U$. Então $\varphi(x) = \frac{1}{\lambda} > 1$ e assim $x \notin \overline{U}$. Logo $\overline{U} \subseteq \widetilde{U}$ e (1) está provado.

(2) É claro que $U \subseteq \overset{\circ}{U}$. Por outro lado, se $x \in \overset{\circ}{U}$ então existe $\mu > 1$ tal que $\mu x \in \overset{\circ}{U} \subseteq \overline{U}$. Por (1), temos que $x = \frac{1}{\mu} \mu x \in U$ e assim $\overset{\circ}{U} \subseteq U$. ■

O conjunto $\widetilde{U}$ é chamado de *fecho algébrico de U* . Esta terminologia foi primeiramente dada por A. Grothendieck em 1954, em [35].

Sejam E um espaço de Banach e $A \subseteq E$ um subconjunto. Denotamos por $\overset{\circ}{A}^*$ o $\|\cdot\|$ -interior em E'' do fecho fraco-estrela de A , ou em outras palavras, $\overset{\circ}{A}^* = \text{int}_{\|\cdot\|}(\overline{A}^{w*})$.

Lema 1.2.10. *Sejam E um espaço de Banach e $K \subseteq E$ um subconjunto compacto, convexo e equilibrado. Então $\overline{K + B_E(0, r)}^{\circ} = K + B_{E''}(0, r)$, para todo $r > 0$.*

Demonstração: Denotemos por $U_r = K + B_E(0, r)$. Por um lado, usando que K é compacto, e portanto w^* -compacto, e aplicando o Teorema de Goldstine, temos que

$$\overline{U_r}^* = \overline{K + B_E(0, r)}^* = \overline{K}^* + \overline{B_E(0, r)}^* = K + \overline{B_{E''}(0, r)}^{\|\cdot\|} = \overline{K + B_{E''}(0, r)}^{\|\cdot\|}.$$

Agora segue do Lema 1.2.9 que $\overline{\overline{U_r^*}}^{\circ} = \overline{K + B_{E''}(0, r)}^{\circ} = K + B_{E''}(0, r)$. ■

1.3 Preliminares sobre polinômios

Sejam E, F espaços de Banach e $m \in \mathbb{N}$. Um polinômio m -homogêneo $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$ é *de tipo finito* se existem $c_1, \dots, c_n \in F$, $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in E'$ tais que P pode ser escrito da forma:

$$P(x) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x)^m, \text{ para todo } x \in E.$$

Denotamos por $\mathcal{P}_f(^m E; F)$ o espaço de todos os polinômios m -homogêneos de E em F que são de tipo finito. Quando $F = \mathbb{C}$, escrevemos $\mathcal{P}_f(^m E)$ ao invés de $\mathcal{P}_f(^m E; \mathbb{C})$.

Proposição 1.3.1. *Seja E um espaço de Banach tal que $\mathcal{P}_f(^m E)$ é denso em norma em $\mathcal{P}(^m E)$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Então cada subespaço complementado de E tem a mesma propriedade.*

Demonstração: Sejam $m \in \mathbb{N}$, N um subespaço complementado de E e $T : E \longrightarrow N$ uma projeção contínua tal que $T(x) = x$, para todo $x \in N$. Seja $P \in \mathcal{P}(^m N)$. Então é claro que $P \circ T \in \mathcal{P}(^m E)$. Por hipótese, existe uma sequência de polinômios de tipo finito $(P_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}_f(^m E)$ que converge para $P \circ T$ uniformemente sobre os limitados de E , e em particular sobre todos os limitados de N . Como $P_j|_N \in \mathcal{P}_f(^m N)$, para todo $j \in \mathbb{N}$ e $T(N) = N$, temos que $P_j|_N \longrightarrow P$ uniformemente sobre os limitados de N . ■

Em geral, E não é um subespaço complementado de E'' . No entanto temos a seguinte Proposição.

Proposição 1.3.2. *Seja E um espaço de Banach tal que $\mathcal{P}_f(^m E'')$ é denso em norma em $\mathcal{P}(^m E'')$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Então $\mathcal{P}_f(^m E)$ é denso em norma em $\mathcal{P}(^m E)$, para todo $m \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Fixemos $m \in \mathbb{N}$. Vamos provar inicialmente que se $Q \in \mathcal{P}_f(^m E'')$ então $Q \circ J \in \mathcal{P}_f(^m E)$, onde J denota a inclusão canônica $J : E \longrightarrow E''$. Para tal propósito, seja

$Q \in \mathcal{P}_f({}^m E'')$. Então existem $x_1''', \dots, x_n''' \in E'''$ tais que

$$Q(x'') = \sum_{j=1}^n x_j''' (x'')^m, \text{ para todo } x'' \in E''.$$

Por outro lado, temos que $x_j''' \circ J = J'(x_j''') \in E'$, para todo $j = 1, \dots, n$, onde $J' : E''' \longrightarrow E'$ denota a transposta de J . Portanto

$$Q \circ J = \sum_{j=1}^n (J'(x_j'''))^m \in \mathcal{P}_f({}^m E).$$

Consideremos agora $P \in \mathcal{P}({}^n E)$ e $\bar{P} \in \mathcal{P}({}^n E'')$ a extensão de Aron-Berner de P , ([3] ou [25, Proposição 1.53]). Por hipótese existe uma sequência de polinômios de tipo finito $(P_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}_f({}^m E'')$ que converge para $\bar{P}$ uniformemente sobre os limitados de E'' , e em particular sobre todos os limitados de E . Isto implica que a sequência $(P_j \circ J)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}_f({}^m E)$ converge para $\bar{P} \circ J = P$ uniformemente sobre os limitados de E , ou em outras palavras, $\mathcal{P}_f({}^m E)$ é denso em norma em $\mathcal{P}({}^m E)$. ■

A recíproca da Proposição 1.3.2 não é verdade, pois $\mathcal{P}_f({}^m c_0)$ é denso em norma em $\mathcal{P}({}^m c_0)$ ([13, Observação 5.9.2 (b)]), mas ℓ_∞ não possui esta propriedade.

Proposição 1.3.3. *Sejam E , F e G espaços de Banach, $P \in \mathcal{P}(E; F)$, $Q \in \mathcal{P}(F; G)$. Então $Q \circ P \in \mathcal{P}(E; G)$.*

Demonstração: Temos que

$$P = P_1 + \dots + P_k, \text{ onde } P_i \in \mathcal{P}({}^{n_i} E; F), \text{ para } i = 1, \dots, k,$$

e da mesma forma

$$Q = Q_1 + \dots + Q_l, \text{ onde } Q_i \in \mathcal{P}({}^{m_i} F; G), \text{ para } i = 1, \dots, l.$$

Então $Q(P(x)) = Q_1(P(x)) + \dots + Q_l(P(x))$, para todo $x \in E$. É suficiente mostrar que $Q_1 \circ P$ é um polinômio, e depois aplicar os mesmos argumentos para $Q_i \circ P$, para $i = 2, \dots, l$. Vamos inicialmente supor que $k = 2$, ou seja, que P é uma soma de dois polinômios homogêneos. Sejam B a aplicação m_1 -linear simétrica associada a Q_1 , e A_i uma aplicação n_i -linear simétrica associada a

P_i , para $i = 1, 2$. Sem perda de generalidade vamos escrever m ao invés de m_1 . Segue da Fórmula Binomial de Newton [51, Corolário 1.9] que para cada $x \in E$:

$$\begin{aligned} Q_1(P(x)) &= Q_1(P_1(x) + P_2(x)) = B(P_1(x) + P_2(x))^m = \\ &= \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} B(P_1(x)^{m-j} P_2(x)^j) = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} B(A_1(x^{n_1})^{m-j} A_2(x^{n_2})^j). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Basta provar que cada termo da soma acima é um polinômio homogêneo em x . Para tal, sejam $j \in \{0, \dots, m\}$ fixado e $i = m - j$. Definamos $C : E^{in_1+jn_2} \longrightarrow G$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} C(x_1^1, \dots, x_{n_1}^1, x_1^2, \dots, x_{n_1}^2, \dots, x_1^i, \dots, x_{n_1}^i, y_1^1, \dots, y_{n_2}^1, y_1^2, \dots, y_{n_2}^2, \dots, y_1^j, \dots, y_{n_2}^j) = \\ = B(A_1(x_1^1, \dots, x_{n_1}^1), A_1(x_1^2, \dots, x_{n_1}^2), \dots, A_1(x_1^i, \dots, x_{n_1}^i), \\ A_2(y_1^1, \dots, y_{n_2}^1), A_2(y_1^2, \dots, y_{n_2}^2), \dots, A_2(y_1^j, \dots, y_{n_2}^j)). \end{aligned}$$

Então não é difícil ver que C é $(in_1 + jn_2)$ -linear, e que C aplicada à diagonal de $E^{in_1+jn_2}$ corresponde ao j -ésimo termo da soma (1.1).

Vamos supor agora que $P = P_1 + \dots + P_k$. Segue da Fórmula de Leibniz [51, Teorema 1.8] que para cada $x \in E$:

$$Q_1(P(x)) = Q_1(P_1(x) + \dots + P_k(x)) = B(P_1(x) + \dots + P_k(x))^m = \sum \frac{m!}{\alpha!} B(P_1(x)^{\alpha_1} \dots P_k(x)^{\alpha_k}),$$

onde a somatória é tomada sobre todos os multi-índices $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{N}^k$, tais que $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = m$. Portanto, seguindo as mesmas idéias da primeira parte desta demonstração, mostramos que cada termo da somatória acima é um polinômio homogêneo, concluindo a demonstração. ■

1.4 Preliminares sobre funções holomorfas

A seguir definimos aplicações holomorfas entre espaços localmente convexos, e apresentamos algumas de suas principais propriedades.

Definição 1.4.1 ([8], **Definição 18.1**). *Sejam E e F espaços localmente convexos e U um subconjunto aberto de E . Uma aplicação $f : U \longrightarrow F$ é holomorfa ou analítica em U se para cada $a \in U$ existe uma sequência de polinômios $P^m f(a) \in \mathcal{P}(^m E; F)$, para todo $m \in \mathbb{N}$, tal que para cada $q \in cs(F)$ existe uma vizinhança aberta V de a em U tal que*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} q(f(x) - \sum_{k=0}^m P^k f(a)(x - a)) = 0$$

uniformemente para $x \in V$.

Cada $P^m f(a) \in \mathcal{P}(^m E; F)$ é chamado de *m -ésimo polinômio homogêneo de Taylor de f em a* . Denotamos por $\mathcal{H}(U; F)$ o espaço vetorial de todas as aplicações holomorfas de U em F . Quando $F = \mathbb{C}$, escrevemos $\mathcal{H}(U)$ ao invés de $\mathcal{H}(U; \mathbb{C})$.

Sejam E e F espaços localmente convexos e U um subconjunto aberto de E . Dizemos que uma aplicação $f : U \longrightarrow F$ é *fracamente holomorfa* ou *w -holomorfa* se $\phi \circ f \in \mathcal{H}(U)$, para todo funcional linear $\phi \in F'$.

O próximo teorema garante que a composta de duas aplicações holomorfas é holomorfa.

Teorema 1.4.2 ([36], **Teorema 3, Página 79**). *Sejam E , F e G espaços localmente convexos, $U \subseteq E$ e $V \subseteq F$ subconjuntos abertos, $f \in \mathcal{H}(U; F)$, $g \in \mathcal{H}(V; G)$, onde $f(U) \subseteq V$. Então $g \circ f \in \mathcal{H}(U; G)$.*

Em [36, Teorema 3], é exigido que F seja quase completo. Esta hipótese adicional é necessária naquele texto pois os polinômios homogêneos de Taylor podem tomar valores no completamento $\widehat{F}$ de F . Mas com a definição adotada nesta tese, tal hipótese torna-se desnecessária.

Para mais informações sobre funções holomorfas em espaços de Banach ou em espaços localmente convexos, citamos [8, 10, 25, 51].

Daqui em diante, iremos apenas considerar a álgebra $\mathcal{H}(U)$. Antes de definir algumas topologias naturais em $\mathcal{H}(U)$, precisamos das seguintes definições.

Uma álgebra A é uma *álgebra topológica* se é um espaço vetorial topológico tal que a multiplicação é separadamente contínua. Uma álgebra topológica é uma *álgebra localmente m -convexa* se

a topologia de A é gerada por uma família de seminormas $(p_i)_{i \in \mathcal{I}}$ tal que

$$p_i(e) = 1 \text{ e } p_i(x \cdot y) \leq p_i(x) \cdot p_i(y), \text{ para todos } x, y \in A, i \in \mathcal{I}.$$

Uma *álgebra de Fréchet* é uma álgebra localmente m -convexa completa e metrizável.

A seguir definimos algumas das topologias naturais de $\mathcal{H}(U)$.

Definições 1.4.3. *Sejam E um espaço localmente convexo e $U \subseteq E$ um aberto.*

(1) *Denotamos por τ_0 a topologia em $\mathcal{H}(U)$ da convergência uniforme sobre os subconjuntos compactos de U .*

(2) *Uma seminorma p em $\mathcal{H}(U)$ é portada por um subconjunto compacto $K \subset U$ se para cada aberto V , com $K \subset V \subseteq U$, existe uma constante $C_V > 0$ tal que*

$$p(f) \leq C_V \|f\|_V, \text{ para toda } f \in \mathcal{H}(U).$$

A topologia τ_ω em $\mathcal{H}(U)$ é definida pela família das seminormas que são portadas pelos subconjuntos compactos de U .

(3) *Uma seminorma p em $\mathcal{H}(U)$ é τ_δ -contínua se para cada cobertura aberta enumerável $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de U existe uma constante $C > 0$ e um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que*

$$p(f) \leq C \|f\|_{\cup_{n=1}^{n_0} U_n}, \text{ para toda } f \in \mathcal{H}(U).$$

A topologia τ_δ em $\mathcal{H}(U)$ é definida pela família das seminormas que são τ_δ -contínuas.

A título de informação, na seguinte observação listamos as principais propriedades das três topologias definidas acima.

Observação 1.4.4. *Sejam E um espaço localmente convexo e $U \subseteq E$ um aberto.*

(1) [8, Proposição 8.12] *Se E tem dimensão finita, então $\tau_0 = \tau_\omega = \tau_\delta$.*

(2) [8, Proposição 8.12] ou [25, Lema 3.17] *Se E tem dimensão infinita, então $\tau_0 \leq \tau_\omega \leq \tau_\delta$.*

(3) [25, Exemplo 1.24] *Se E é metrizável, então τ_δ é a topologia bornológica associada a τ_0 e τ_ω .*

Mais ainda, τ_0 é completa e localmente m -convexa. Se E é metrizável, então a topologia τ_ω também satisfaz tais propriedades. Porém não se sabe, por exemplo, se τ_δ é completa ou mesmo localmente m -convexa. Em alguns casos, é possível saber se τ_δ tem algumas destas propriedades, pois em certos espaços ela coincide com τ_0 ou com τ_ω . Por exemplo, se E é um espaço de Banach separável com a propriedade de aproximação limitada, e $U \subseteq E$ é um aberto equilibrado, então τ_ω e τ_δ coincidem em $\mathcal{H}(U)$ [53, Corolário 3.3]. Se E é um espaço de Fréchet separável, $F = (E', \tau_0)$ e U um subconjunto aberto de F , então $\tau_0 = \tau_\delta$ em $\mathcal{H}(U)$ [25, Exercício 3.110]. Por outro lado, se $E = \ell^\infty$, então $\tau_\omega < \tau_\delta$ em $\mathcal{H}(E)$ [8, Exemplo 8.4] ou [25, Corolário 4.52], ou seja, τ_δ não coincide com τ_ω .

Para mais informações sobre as topologias definidas na Definição 1.4.3, citamos [7, 8, 25].

A seguir estudamos um outro espaço topológico de funções holomorfas. Daqui em diante, nos limitamos a espaços de Banach complexos.

Sejam E um espaço de Banach, $U \subseteq E$ um subconjunto aberto e $x \in U$. Definimos a *distância de x à fronteira de U* como sendo:

$$d_U(x) = \sup\{r > 0 : \overline{B}(x, r) \subseteq U\} = \inf_{y \in \partial U} \|x - y\|.$$

Se A é um subconjunto de U , então a *distância de A à fronteira de U* é definida por

$$d_U(A) = \inf_{x \in A} d_U(x).$$

Dizemos que $A \subseteq U$ é *U -limitado* se A é limitado e existe $\varepsilon > 0$ tal que $A + B(0, \varepsilon) \subseteq U$, ou seja, $d_U(A) > 0$. Denotamos por $\mathcal{H}_b(U; F)$ o espaço vetorial das funções holomorfas $f : U \longrightarrow F$ que são limitadas em cada subconjunto U -limitado. Seus elementos são chamados de *aplicações holomorfas de tipo limitado*. Quando $F = \mathbb{C}$, escrevemos $\mathcal{H}_b(U)$ ao invés de $\mathcal{H}_b(U; \mathbb{C})$.

O Teorema de Josefson-Nissenzweig (veja [42] e [55]), garante que cada espaço de Banach E de dimensão infinita admite uma sequência de funcionais lineares $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E'$ tal que $\|\varphi_n\| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e que $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = 0$, para todo $x \in E$. Este teorema permite provar que em qualquer espaço de Banach de dimensão infinita $\mathcal{H}_b(E; F) \neq \mathcal{H}(E; F)$.

Mais especificamente, [8, Proposição 11.3] ou [51, Proposição 7.15] mostram que a função

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (\varphi(x))^m$$

é uma função inteira cujo raio de limitação é 1, ou seja, f não é limitada em $B(0, r)$, onde $r > 1$, e assim não é uma função inteira de tipo limitado. Em resumo, $\mathcal{H}_b(E; F) \neq \mathcal{H}(E; F)$ se e somente se E tem dimensão infinita e $F \neq \{0\}$ [8, Proposição 11.3]. Em [8, Proposição 11.4] é provado o mesmo resultado para abertos, a saber, se U é um aberto de um espaço de Banach E , então $\mathcal{H}_b(U; F) \neq \mathcal{H}(U; F)$ se e somente se a dimensão de E é infinita e $F \neq \{0\}$.

Consideremos os seguintes conjuntos abertos

$$U_n = \{x \in U : \|x\| < n \text{ e } d_U(x) > 2^{-n}\}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Os conjuntos U_n , para $n \in \mathbb{N}$, formam uma sequência fundamental de subconjuntos U -limitados, ou seja, cada subconjunto U -limitado está contido em algum U_n . O espaço $\mathcal{H}_b(U; F)$ é um espaço de Fréchet para a topologia da convergência uniforme sobre todos os conjuntos U_n . Se $F = \mathbb{C}$, temos que $\mathcal{H}_b(U)$ é uma álgebra de Fréchet. Observamos que em dimensão finita, $\mathcal{H}_b(U; F) = (\mathcal{H}(U; F), \tau_0) = (\mathcal{H}(U; F), \tau_\omega) = (\mathcal{H}(U; F), \tau_\delta)$.

Dizemos que um subconjunto $A \subseteq E$ de um espaço de Banach é *circular* se $e^{i\theta}A \subseteq A$, para todo $\theta \in \mathbb{R}$. É claro que todo conjunto equilibrado é circular.

A seguinte proposição apresenta algumas propriedades que os subconjuntos U_n herdam de U e que serão utilizadas no Capítulo 3.

Proposição 1.4.5. *Sejam E um espaço de Banach e $U \subseteq E$ um subconjunto aberto.*

(1) *Se U é convexo então U_n é convexo, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

(2) Se U é circular, então U_n é circular, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(3) Se U é absolutamente convexo, então U_n é absolutamente convexo, para os $n \in \mathbb{N}$ tais que $0 \in U_n$.

Demonstração:

(1) Sejam $x, y \in U_n$, $\alpha, \beta \in [0, 1]$ tais que $\alpha + \beta = 1$. Então é claro que $\|\alpha x + \beta y\| < n$. Para mostrar que $d_U(\alpha x + \beta y) > 2^{-n}$, é suficiente mostrar que se $B(x, r) \subseteq U$ e $B(y, r) \subseteq U$ então $B(\alpha x + \beta y, r) \subseteq U$, para algum $r > 0$. Mas isto é verdade, uma vez que $B(\alpha x + \beta y, r) = \alpha B(x, r) + \beta B(y, r) \subseteq \alpha U + \beta U \subseteq U$, pois U é convexo. Logo temos que U_n é convexo, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(2) Seja $x \in e^{i\theta}U_n$, isto é, $x = e^{i\theta}y$, para algum $y \in U_n$. Então é claro que $\|x\| < n$. Para provar que $d_U(e^{i\theta}y) > 2^{-n}$, basta mostrar que se $B(y, r) \subseteq U$, para algum $r > 0$, então $B(e^{i\theta}y, r) \subseteq U$. Assim sendo, se $z \in B(e^{i\theta}y, r)$ então

$$r > \|z - e^{i\theta}y\| = \|e^{-i\theta}z - y\|.$$

Ou seja $e^{-i\theta}z \in B(y, r) \subseteq U$, e como U é circular segue que $z \in U$, terminando a demonstração.

(3) Considere $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 \in U_n$. Por (1), temos que U_n é convexo. Para provar que U_n é equilibrado, sejam $x \in U_n$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| \leq 1$. Escrevamos $\lambda = re^{i\theta}$, onde $r = |\lambda|$. Como $0 \in U_n$ e U_n é convexo, temos que $rx = rx + (1 - r)0 \in U_n$. Por (2) temos que U_n é circular e assim

$$e^{i\theta}rx = \lambda x \in U_n$$

e portanto U_n é equilibrado. ■

Dizemos que uma sequência crescente $\mathcal{U} = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos abertos de U é uma *cobertura regular de U* se

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \text{ e } d_{U_{n+1}}(U_n) > 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Os seguintes resultados serão utilizados no Capítulo 3.

Lema 1.4.6. *Sejam E um espaço de Banach, $U \subseteq E$ um subconjunto aberto e A um subconjunto de U tal que $\overline{A} \subseteq U$. Então $d_U(\overline{A}) = d_U(A)$.*

Demonstração: Como $A \subseteq \overline{A}$, segue que $d_U(A) \geq d_U(\overline{A})$. Para provar a outra desigualdade, seja $x \in \overline{A}$. Então existe uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em A tal que $x_n \rightarrow x$. Como d_U é uma função contínua [51, Exercício 7.D], temos que $d_U(x_n) \rightarrow d_U(x)$. Como $d_U(A) = \inf_{x \in A} d_U(x)$, temos que $d_U(x_n) \geq d_U(A)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Consequentemente $d_U(x) \geq d_U(A)$. Como x foi tomado de modo arbitrário em $\overline{A}$, segue que

$$d_U(\overline{A}) = \inf_{x \in \overline{A}} d_U(x) \geq d_U(A),$$

provando assim a desigualdade restante. ■

Denotamos por $\mathbb{C} \oplus E'$ o espaço vetorial de todas as formas contínuas afins em E , isto é, $f \in \mathbb{C} \oplus E'$ se existem únicos $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\varphi \in E'$ tais que

$$f(x) = \lambda + \varphi(x), \text{ para todo } x \in E.$$

Se A é um subconjunto de E , então $\widehat{A}_{\mathbb{C} \oplus E'}$ denota o conjunto

$$\widehat{A}_{\mathbb{C} \oplus E'} = \{x \in E : |f(x)| \leq \sup_A |f|, \text{ para toda } f \in \mathbb{C} \oplus E'\}.$$

Proposição 1.4.7. *Sejam E um espaço de Banach, $U \subseteq E$ um subconjunto aberto convexo e $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma cobertura regular de U tal que cada U_n é limitado. Então $d_U((\widehat{U_n})_{\mathbb{C} \oplus E'}) = d_U(U_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Como cada U_n é limitado, temos por [51, Proposição 11.1] que $(\widehat{U_n})_{\mathbb{C} \oplus E'} = \overline{co}(U_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como U é convexo, segue da Proposição 1.4.5(1) que $(\widehat{U_n})_{\mathbb{C} \oplus E'} = \overline{U_n} \subset U$. Para mostrar que $d_U((\widehat{U_n})_{\mathbb{C} \oplus E'}) = d_U(U_n)$ vamos mostrar que $d_U(\overline{co}(U_n)) = d_U(U_n)$. Pelo Lema 1.4.6, basta provar que $d_U(co(U_n)) = d_U(U_n)$. Como $U_n \subseteq co(U_n)$, temos que $d_U(U_n) \geq d_U(co(U_n))$. Para provar a outra desigualdade, seja $x \in co(U_n)$. Então

$$x = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i, \text{ onde } x_i \in U_n, \alpha_i \in [0, 1], \text{ com } \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1, i = 1, \dots, k.$$

Sejam $r = d_U(U_n)$ e $0 < \varepsilon < r$. Então

$$B(x, \varepsilon) = B\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i, \varepsilon\right) = \alpha_1 B(x_1, \varepsilon) + \cdots + \alpha_k B(x_k, \varepsilon) \subseteq U,$$

pois U é convexo. Ou seja, $B(x, \varepsilon) \subseteq U$, para todos $0 < \varepsilon < r$ e $x \in \text{co}(U_n)$. Portanto $d_U(\text{co}(U_n)) \geq r = d_U(U_n)$, provando a desigualdade restante. ■

Outros espaços de aplicações holomorfas que serão utilizadas nesta tese são os seguintes.

$\mathcal{H}^\infty(U; F)$ é o espaço de Banach de todas as aplicações holomorfas $f : U \longrightarrow F$ que são limitadas em U . A norma considerada é

$$\|f\| = \sup_{x \in U} \|f(x)\|.$$

Quando $F = \mathbb{C}$, escreveremos $\mathcal{H}^\infty(U)$ ao invés de $\mathcal{H}^\infty(U; \mathbb{C})$.

$\mathcal{H}_{wu}(U; F)$ é o espaço de todas as aplicações holomorfas $f : U \longrightarrow F$ que são uniformemente fracamente contínuas nos subconjuntos U -limitados. Quando $F = \mathbb{C}$, escreveremos $\mathcal{H}_{wu}(U)$ ao invés de $\mathcal{H}_{wu}(U; \mathbb{C})$.

1.5 Preliminares sobre germes de funções holomorfas

Sejam E e F espaços de Banach, e $K \subset E$ um subconjunto compacto. Consideremos o seguinte conjunto

$$h(K; F) = \cup \{ \mathcal{H}(U; F) : U \supset K \text{ é aberto em } E \}.$$

Sejam $f_1, f_2 \in h(K; F)$ e U_1, U_2 subconjuntos abertos de E com $K \subset U_1$ e $K \subset U_2$, tais que $f_1 \in \mathcal{H}(U_1, F)$ e $f_2 \in \mathcal{H}(U_2, F)$. Dizemos que f_1 e f_2 são *equivalentes* (e denotamos $f_1 \sim f_2$) se existe um subconjunto aberto $W \subseteq E$ com $K \subset W \subseteq U_1 \cap U_2$ tal que $f_1 = f_2$ em W . Desta forma $\sim$ é uma relação de equivalência em $h(K; F)$ e denotamos $\mathcal{H}(K; F) = h(K; F) / \sim$. Os elementos de $\mathcal{H}(K; F)$ são chamados de *germes holomorfos em K com valores em F* . Quando $F = \mathbb{C}$, escrevemos $\mathcal{H}(K)$ ao invés de $\mathcal{H}(K; \mathbb{C})$.

Finalmente, munimos $\mathcal{H}(K; F)$ da topologia indutiva localmente convexa com relação às inclusões $i_U : (\mathcal{H}(U; F), \tau_\omega) \hookrightarrow \mathcal{H}(K; F)$, onde U varia entre os subconjuntos abertos de E tais que $K \subset U$, e denotamos

$$(\mathcal{H}(K; F), \tau_\omega) = \varinjlim_{U \supseteq K} (\mathcal{H}(U; F), \tau_\omega).$$

A partir de agora nos restringimos ao estudo das propriedades da álgebra $\mathcal{H}(K)$. Foi provado em [47, Teorema 7.1] que $\mathcal{H}(K)$ é uma álgebra topológica localmente m-convexa.

Seja $U_n = K + B_E(0, \frac{1}{n})$, para todo $n \in \mathbb{N}$. É provado em [46, Lema 12.6] que

$$(\mathcal{H}(K), \tau_\omega) = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}^\infty(U_n). \quad (1.2)$$

E como $\mathcal{H}^\infty(U_n) \hookrightarrow \mathcal{H}_b(U_n) \hookrightarrow (\mathcal{H}(K), \tau_\omega)$, segue que

$$(\mathcal{H}(K), \tau_\omega) = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_b(U_n). \quad (1.3)$$

Denotamos por i_n as inclusões canônicas $i_n : \mathcal{H}_b(U_n) \hookrightarrow \mathcal{H}(K)$ (ou $i_n : \mathcal{H}^\infty(U_n) \hookrightarrow \mathcal{H}(K)$), para cada $n \in \mathbb{N}$. Denotamos por $[f]$ os elementos da álgebra $\mathcal{H}(K)$, isto é, a classe $[f] \in \mathcal{H}(K)$ se e somente se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f \in \mathcal{H}_b(U_n)$ (ou $f \in \mathcal{H}^\infty(U_n)$); e usaremos arbitrariamente as caracterizações (1.2) ou (1.3), de acordo com a conveniência.

Indicamos [11, 25, 47] para mais informações sobre germes de funções holomorfas.

Sejam E um espaço de Banach, e K um subconjunto compacto de E . Então K também é um subconjunto compacto de E'' . No que se segue, quando considerarmos K como um compacto de E , escrevemos K_E , e quando K for considerado como um subconjunto compacto de E'' , escrevemos $K_{E''}$.

Podemos considerar germes de funções holomorfas em vizinhanças abertas de K em E ou em E'' . Neste sentido, denotamos por $\mathcal{H}(K_E)$ a álgebra de germes de funções holomorfas em subconjuntos abertos de E que contém K ; e de maneira análoga $\mathcal{H}(K_{E''})$ denota a álgebra de germes de funções holomorfas em abertos de E'' que contém K .

A seguinte caracterização de $\mathcal{H}(K_{E''})$, para K absolutamente convexo, será útil no Capítulo 4.

Lema 1.5.1. *Sejam E um espaço de Banach e $K \subset E$ um subconjunto compacto convexo e equilibrado. Então $\mathcal{H}(K_{E''}) = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}^\infty\left(\overset{\circ}{U}_n^*\right)$, onde $U_n = K + B_E\left(0, \frac{1}{n}\right)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Sabemos por (1.2) que $\mathcal{H}(K_{E''}) = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}^\infty\left(K + B_{E''}\left(0, \frac{1}{n}\right)\right)$. Agora a conclusão segue imediatamente do Lema 1.2.10. ■

Capítulo 2

Funções holomorfas em espaços localmente convexos

Duvidar de tudo ou crer em tudo. São duas soluções igualmente cômodas, que nos dispensam ambas de refletir. (Henri Poincaré)

Sejam E e F espaços localmente convexos, $U \subseteq E$ e $V \subseteq F$ subconjuntos abertos. O objetivo principal deste capítulo é comparar as relações entre U e V e as relações entre as álgebras topológicas $(\mathcal{H}(U), \tau)$ e $(\mathcal{H}(V), \tau)$, quando τ é τ_0, τ_ω ou τ_δ . Não é difícil ver que se U e V são biholomorficamente equivalentes, então as álgebras $(\mathcal{H}(U), \tau)$ e $(\mathcal{H}(V), \tau)$ são topologicamente isomorfas. É natural perguntar quando a recíproca é verdadeira, e esta pergunta é respondida de maneira afirmativa nas próximas seções. O fato de, sob tais hipóteses, os elementos de $\mathcal{S}(\mathcal{H}(U))$ e $\mathcal{S}(\mathcal{H}(V))$ serem caracterizados como avaliações é essencial para a demonstração dos resultados.

2.1 Operadores de composição entre álgebras de funções holomorfas

Consideremos E e F espaços localmente convexos, $U \subseteq E$ e $V \subseteq F$ subconjuntos abertos não vazios.

Seja $z \in U$. A aplicação $\delta_z : \mathcal{H}(U) \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $\delta_z(f) = f(z)$, para toda $f \in \mathcal{H}(U)$, é chamada de *avaliação*. É claro que δ_z é um homomorfismo complexo de $\mathcal{H}(U)$.

Seja $\varphi \in \mathcal{H}(V; E)$ com $\varphi(V) \subseteq U$. A aplicação $C_\varphi : \mathcal{H}(U) \longrightarrow \mathcal{H}(V)$ dada por $C_\varphi(f) = f \circ \varphi$, para toda $f \in \mathcal{H}(U)$, é chamada de *operador de composição*. O Teorema 1.4.2 garante que C_φ está bem definido. Por fim, é claro que C_φ é um homomorfismo entre as álgebras $\mathcal{H}(U)$ e $\mathcal{H}(V)$.

O próximo lema, relativo a operadores de composição, será utilizado posteriormente neste capítulo.

Lema 2.1.1. *Sejam E, F e G espaços localmente convexos e $U \subseteq E, V \subseteq F$ e $W \subseteq G$ subconjuntos abertos. Sejam $\varphi \in \mathcal{H}(V; E)$ com $\varphi(V) \subseteq U$ e $\psi \in \mathcal{H}(W, F)$ com $\psi(W) \subseteq V$. Então: $C_\psi \circ C_\varphi = C_{\varphi \circ \psi} : \mathcal{H}(U) \longrightarrow \mathcal{H}(W)$.*

Demonstração: Basta observar que $C_\psi \circ C_\varphi(f) = C_\psi(f \circ \varphi) = f \circ \varphi \circ \psi = C_{\varphi \circ \psi}(f)$, para toda $f \in \mathcal{H}(U)$. ■

É claro que cada avaliação $\delta_z, z \in U$, é um homomorfismo complexo contínuo segundo τ_0, τ_ω ou τ_δ . Com relação à continuidade dos operadores de composição, temos a seguinte proposição.

Proposição 2.1.2. *Sejam E e F espaços localmente convexos e $U \subseteq E$ e $V \subseteq F$ subconjuntos abertos. Seja $\varphi \in \mathcal{H}(V; E)$ com $\varphi(V) \subseteq U$. Então $C_\varphi : (\mathcal{H}(U), \tau) \longrightarrow (\mathcal{H}(V), \tau)$ é contínuo, para $\tau = \tau_0, \tau_\omega, \tau_\delta$.*

Demonstração: Vamos mostrar que $C_\varphi : (\mathcal{H}(U), \tau_0) \longrightarrow (\mathcal{H}(V), \tau_0)$ é contínuo. Para tal, seja $q : \mathcal{H}(V) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma seminorma τ_0 -contínua. Então existe um subconjunto compacto $L \subset V$ tal que

$$q(g) = \sup_{y \in L} |g(y)|, \text{ para toda } g \in \mathcal{H}(V).$$

Definamos $p : \mathcal{H}(U) \longrightarrow \mathbb{R}$ por $p(f) = q(f \circ \varphi) = q(C_\varphi(f))$, para toda $f \in \mathcal{H}(U)$. Como C_φ é um operador linear, temos que p é uma seminorma. Consideremos agora o compacto $K = \varphi(L)$. Então:

$$p(f) = q(f \circ \varphi) = \sup_{y \in L} |f(\varphi(y))| = \sup_{x \in \varphi(L)} |f(x)| = \sup_{x \in K} |f(x)|, \text{ para toda } f \in \mathcal{H}(U),$$

o que mostra que p é τ_0 -contínua e portanto $C_\varphi : (\mathcal{H}(U), \tau_0) \longrightarrow (\mathcal{H}(V), \tau_0)$ é contínuo.

Agora vamos verificar que $C_\varphi : (\mathcal{H}(U), \tau_\omega) \longrightarrow (\mathcal{H}(V), \tau_\omega)$ é contínuo.

Seja $q : \mathcal{H}(V) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma seminorma em $\mathcal{H}(V)$ portada por um subconjunto compacto L de V . Consideremos a seguinte seminorma $p : \mathcal{H}(U) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $p(f) = q(f \circ \varphi) = q(C_\varphi(f))$, para toda $f \in \mathcal{H}(U)$. Vamos mostrar que p é portada pelo compacto $\varphi(L) = K \subset U$. Para tal seja O um aberto de U tal que $K \subset O \subseteq U$. Então temos que $L \subset \varphi^{-1}(O) \subseteq V$, e $\varphi^{-1}(O)$ é aberto. Como q é portada por L , existe $C_O > 0$ tal que $q(g) \leq C_O \|g\|_{\varphi^{-1}(O)}$. Consequentemente $p(f) = q(f \circ \varphi) \leq C_O \|f \circ \varphi\|_{\varphi^{-1}(O)} \leq C_O \|f\|_O$, para toda $f \in \mathcal{H}(U)$, o que mostra que p é portada por K . Portanto $C_\varphi : (\mathcal{H}(U), \tau_\omega) \longrightarrow (\mathcal{H}(V), \tau_\omega)$ é contínuo.

Finalmente mostremos que $C_\varphi : (\mathcal{H}(U), \tau_\delta) \longrightarrow (\mathcal{H}(V), \tau_\delta)$ é contínuo. Para tal, tomemos $q : \mathcal{H}(V) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma seminorma τ_δ -contínua e definamos uma seminorma $p : \mathcal{H}(U) \longrightarrow \mathbb{R}$ da seguinte forma: $p(f) = q(f \circ \varphi)$, para toda $f \in \mathcal{H}(U)$. Para mostrar que p é τ_δ -contínua, seja $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma cobertura aberta de U . Então

$$V = \varphi^{-1}(U) \subseteq \varphi^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \varphi^{-1}(U_n),$$

ou seja, $(\varphi^{-1}(U_n))_{n \in \mathbb{N}} = (V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma cobertura aberta de V . Portanto existem $C > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$q(g) \leq C \|g\|_{\cup_{n=1}^{n_0} V_n}, \text{ para toda } g \in \mathcal{H}(V).$$

Logo

$$p(f) = q(f \circ \varphi) \leq C \|f \circ \varphi\|_{\cup_{n=1}^{n_0} V_n} \leq C \|f\|_{\cup_{n=1}^{n_0} U_n},$$

para toda $f \in \mathcal{H}(U)$, o que mostra que p é τ_δ -contínua, e assim $C_\varphi : (\mathcal{H}(U), \tau_\delta) \longrightarrow (\mathcal{H}(V), \tau_\delta)$ é contínuo.

Observamos que a demonstração da Proposição 2.1.2 para τ_ω foi baseada na demonstração de [19, Proposição 2.2.1].

É extensa a bibliografia onde se trabalha com operadores de composição entre álgebras de funções holomorfas. Existem caracterizações de quais homomorfismos são operadores de composição, condições em φ para que C_φ seja compacto ou w -compacto, bem como investigações sobre quando um operador de composição w -compacto é compacto. Podemos citar por exemplo [5, 27, 28, 68].

No entanto, nesta tese utilizamos somente a continuidade dos operadores de composição, propriedade que já foi provada na Proposição 2.1.2, e que será provada também nos próximos capítulos, para as álgebras em questão.

2.2 Funções holomorfas em domínios absolutamente convexos

Nesta seção obtemos teoremas do tipo Banach-Stone para álgebras de funções holomorfas em domínios absolutamente convexos.

Sejam E e F espaços localmente convexos. Dizemos que dois subconjuntos abertos $U \subseteq E$ e $V \subseteq F$ são *biholomorficamente equivalentes* se existe uma aplicação $\varphi : V \longrightarrow U$ que é *biholomorfa*, isto é, $\varphi : V \longrightarrow U$ é uma bijeção, e ambas φ e φ^{-1} são holomorfas.

Diremos que dois espaços vetoriais topológicos são *topologicamente isomorfos* se existe entre eles um isomorfismo de espaços vetoriais que é um homeomorfismo. Diremos que duas álgebras topológicas são *topologicamente isomorfas* se existe entre elas um isomorfismo de álgebras que é um homeomorfismo. Deve ficar claro no contexto quando estamos falando de isomorfismos entre espaços vetoriais topológicos ou entre álgebras topológicas.

A próxima proposição nos diz que dois espaços localmente convexos E e F são biholomorficamente

equivalentes se e somente se eles são topologicamente isomorfos.

Proposição 2.2.1. *Sejam E e F espaços localmente convexos. Então as seguintes condições são equivalentes.*

(1) E e F são topologicamente isomorfos.

(2) E e F são biholomorficamente equivalentes.

(3) Existem abertos $U \subseteq E$ e $V \subseteq F$ que são biholomorficamente equivalentes.

Demonstração: As implicações (1) $\Rightarrow$ (2) e (2) $\Rightarrow$ (3) são imediatas. A implicação restante é consequência imediata do próximo Lema. ■

O Lema seguinte segue diretamente da Regra da Cadeia [51, Teorema 13.6], quando E e F são espaços de Banach. Como precisamos deste lema para espaços localmente convexos, apresentamos sua demonstração em detalhes.

Lema 2.2.2. *Sejam E e F espaços localmente convexos Hausdorff, $U \subseteq E$ e $V \subseteq F$ subconjuntos abertos. Sejam $f \in \mathcal{H}(U; F)$, $g \in \mathcal{H}(V; E)$ tais que $g(V) \subseteq U$ e $f \circ g : V \longrightarrow F$ é a inclusão. Então F é topologicamente isomorfo a um subespaço complementado de E . Se $f : U \longrightarrow V$ é bijetiva e $g = f^{-1}$, então E e F são topologicamente isomorfos.*

Demonstração: Sejam $g : V \longrightarrow U$ e $f : U \longrightarrow F$ tais que $f \circ g : V \longrightarrow F$ é a inclusão, ou seja, $f(g(w)) = w$, para todo $w \in V$. Consideremos $b \in V$, $a = g(b) \in U$. Então $f(a) = f(g(b)) = b$. Sejam $P^n = P^n f(a) \in \mathcal{P}(^n E; F)$ e $Q^m = Q^m g(b) \in \mathcal{P}(^m F; E)$ os polinômios da série de Taylor de f em a e de g em b , respectivamente, para todos $n, m \in \mathbb{N}$. Observamos ainda que $P^0 = f(a)$, $Q^0 = g(b)$, $P^1 \in \mathcal{L}(E; F)$ e que $Q^1 \in \mathcal{L}(F; E)$. Vamos mostrar que $P^1 \circ Q^1 : F \longrightarrow F$ é o operador identidade, e assim concluir que F é topologicamente isomorfo a um subespaço complementado de E . Denotemos

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^n P^i(x - a) \text{ para todos } x \in E, n \in \mathbb{N} \text{ e}$$

$$g_m(y) = \sum_{j=0}^m Q^j(y - b), \text{ para todos } y \in F, m \in \mathbb{N}.$$

Seja $U_0 \subset E$ uma vizinhança do zero convexa e equilibrada tal que $a + U_0 \subseteq U$. Como $g(b) = a$ e g é contínua, existe $V_0 \subset F$ uma vizinhança do zero convexa e equilibrada tal que $b + V_0 \subseteq V$ e $g(b + t) \in a + \frac{1}{2}U_0$, para todo $t \in V_0$. Segue de [8, Proposição 27.2] que

$$f_n \longrightarrow f \text{ uniformemente sobre os compactos de } a + U_0 \quad (2.1)$$

e que

$$g_m \longrightarrow g \text{ uniformemente sobre os compactos de } b + V_0. \quad (2.2)$$

Fixemos $t \in V_0$. Vamos mostrar que

$$f_n(g_n(b + \lambda t)) \longrightarrow f(g(b + \lambda t)) \text{ uniformemente para } |\lambda| \leq 1.$$

É equivalente provar que para cada $\beta \in cs(F)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta(f_n(g_n(b + \lambda t)) - f(g(b + \lambda t))) = 0, \text{ uniformemente para } |\lambda| \leq 1. \quad (2.3)$$

Para tal, fixemos $\beta \in cs(F)$ e $\varepsilon > 0$. Como $L = \{b + \lambda t : |\lambda| \leq 1\}$ é um subconjunto compacto de $b + V_0$, segue de (2.2) que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$g_m(v) - g(v) \in \frac{1}{2}U_0, \text{ para todos } m \geq n_1 \text{ e } v \in L.$$

Pela construção de V_0 , temos que $g(v) \in a + \frac{1}{2}U_0$, para todo $v \in L$. Assim, temos que:

$$g_m(v) \in a + U_0, \text{ para todos } m \geq n_1 \text{ e } v \in L.$$

Considere $K = \{g_m(v) : m \geq n_1, v \in L\} \cup g(L)$. Afirmamos que K é um subconjunto compacto de $a + U_0$. De fato, seja $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ uma cobertura aberta de K , isto é, $K = \{g_m(v) : m \geq n_1, v \in L\} \cup g(L) \subset \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Em particular, temos que $g(L) \subset \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Como $g(L)$ é compacto, existem $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in A$ tais que $g(L) \subset \cup_{i=1}^k U_{\alpha_i}$. Como $(g_m)_{m \geq n_1}$ converge para g uniformemente sobre L , temos que existe $n_2 \in \mathbb{N}$, necessariamente maior que n_1 , tal que

$$g_m(v) \in \bigcup_{i=1}^k U_{\alpha_i}, \text{ para todos } m \geq n_2, v \in L.$$

Por fim, é claro que os compactos $g_m(L)$, para $m = n_1, \dots, n_2$ estão contidos em um número finito de U_α 's. Assim concluimos que K é um subconjunto compacto de $a + U_0$. Agora segue de (2.1) que existe $n_3 \in \mathbb{N}$ tal que $\beta(f_n(u) - f(u)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ para todos $n \geq n_3$, $u \in K$. Em particular,

$$\beta(f_n(g_m(v)) - f(g_m(v))) \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para todos } n \geq n_3, m \geq n_1, v \in L.$$

Como f é contínua e K é compacto, temos que $f|_K : K \rightarrow F$ é uniformemente contínua. Mais ainda, como $(g_m)_{m \geq n_1}$ converge para g uniformemente sobre L , não é difícil ver que $f \circ g_m$ converge para $f \circ g$, uniformemente sobre L , uma vez que $K = \cup_{m \geq n_1} g_m(L) \cup g(L)$. Ou seja, existe $n_4 \in \mathbb{N}$, necessariamente maior que n_1 , tal que

$$\beta(f(g_m(v)) - f(g(v))) \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para todos } m \geq n_4, v \in L.$$

Sejam $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3, n_4\}$ e $n \geq n_0$. Então:

$\beta(f_n(g_n(v)) - f(g(v))) \leq \beta(f_n(g_n(v)) - f(g_n(v))) + \beta(f(g_n(v)) - f(g(v))) \leq \varepsilon$, uniformemente para $v \in L$ provando (2.3).

Seja $y \in F$. Vamos calcular $f_n(g_n(y))$. Com efeito, temos que

$$\begin{aligned} f_n(g_n(y)) &= \sum_{i=0}^n P^i(g_n(y) - a) = \sum_{i=0}^n P^i(g_n(y) - g(b)) = \sum_{i=0}^n P^i\left(\sum_{j=0}^n Q^j(y - b) - Q^0\right) = \\ &= \sum_{i=0}^n P^i\left(\sum_{j=1}^n Q^j(y - b)\right) = P^0 + P^1\left(\sum_{j=1}^n Q^j(y - b)\right) + \underbrace{\sum_{i=2}^n P^i\left(\sum_{j=1}^n Q^j(y - b)\right)}_{R_n(y-b)} = \\ &= P^0 + P^1\left(Q^1(y-b) + \sum_{j=2}^n Q^j(y-b)\right) + R_n(y-b) = P^0 + P^1(Q^1(y-b)) + \underbrace{P^1\left(\sum_{j=2}^n Q^j(y-b)\right) + R_n(y-b)}_{S_n(y-b)} = \\ &= b + P^1(Q^1(y-b)) + S_n(y-b). \end{aligned}$$

Ou seja, $f_n(g_n(y)) = b + P^1(Q^1(y-b)) + S_n(y-b)$, para todo $y \in F$, onde $S_n : F \rightarrow F$ é uma soma finita de polinômios homogêneos de grau ≥ 2 . Em particular, para $t \in V_0$ temos que

$$f_n(g_n(b + \lambda t)) = b + P^1(Q^1(\lambda t)) + S_n(\lambda t), \text{ uniformemente para } |\lambda| \leq 1.$$

Ou seja, provamos em (2.3) que

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta(f_n(g_n(b + \lambda t)) - f(g(b + \lambda t))) = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta(b + P^1(Q^1(\lambda t)) + S_n(\lambda t) - (b + \lambda t)) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta([P^1(Q^1(\lambda t)) - \lambda t] + S_n(\lambda t)),$$

uniformemente para $|\lambda| \leq 1$, para toda seminorma $\beta \in cs(F)$.

Em resumo, provamos que para cada $t \in V_0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\lambda t) = \lambda(t - P^1(Q^1(t))), \text{ uniformemente para } |\lambda| \leq 1.$$

Então $\{S_n(\lambda t) : n \in \mathbb{N}, |\lambda| \leq 1\} \cup \{\lambda(t - P^1(Q^1(t))) : |\lambda| \leq 1\}$ é um subconjunto compacto de F (basta aplicar os mesmos argumentos utilizados acima para mostrar que o conjunto K é compacto).

Portanto para cada $\beta \in cs(F)$ fixada, existe $C_{t,\beta} = C_t > 0$ tal que

$$\beta(S_n(\lambda t)) \leq C_t, \text{ para todos } n \in \mathbb{N}, |\lambda| \leq 1.$$

Observe ainda que $\zeta \mapsto S_n(\zeta t)$ é uma aplicação holomorfa de uma variável, para $|\zeta| \leq 1$, tal que seus dois primeiros polinômios de Taylor (os de grau zero e um) são nulos. Assim segue do Lema de Schwarz [51, Teorema 7.19] que

$$\beta(S_n(\zeta t)) \leq |\zeta|^2 C_t, \text{ para todo } |\zeta| \leq 1, n \in \mathbb{N}.$$

Como

$$\frac{S_n(\zeta t)}{\zeta} \longrightarrow \frac{\zeta t - P^1(Q^1(\zeta t))}{\zeta} = t - P^1(Q^1(t)), \text{ para todo } 0 < |\zeta| \leq 1,$$

segue que

$$\beta(t - P^1(Q^1(t))) = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta\left(\frac{S_n(\zeta t)}{\zeta}\right) \leq |\zeta| C_t, \text{ para todo } 0 < |\zeta| \leq 1.$$

Portanto, fazendo $\zeta \longrightarrow 0$, temos que $\beta(t - P^1(Q^1(t))) = 0$. Como β foi tomada de modo arbitrário em $cs(F)$, segue que $t - P^1(Q^1(t)) = 0$, para todo $t \in V_0$ e portanto $P^1(Q^1(t)) = t$ para todo $t \in F$, ou seja, $P^1 \circ Q^1 : F \longrightarrow F$ é o operador identidade.

Suponhamos agora que f é bijetiva e que $g = f^{-1}$. Então pelos mesmos argumentos provamos que $Q^1 \circ P^1 : E \longrightarrow E$ é o operador identidade e consequentemente E e F são topologicamente isomorfos. ■

O seguinte teorema é o principal resultado desta seção.

Teorema 2.2.3. *Sejam E e F espaços de Fréchet, um deles com a propriedade de aproximação, e $U \subseteq E$ e $V \subseteq F$ subconjuntos abertos convexos e equilibrados. Consideremos as seguintes condições.*

- (1) *U e V são biholomorficamente equivalentes.*
- (2) *As álgebras $(\mathcal{H}(U), \tau_0)$ e $(\mathcal{H}(V), \tau_0)$ são topologicamente isomorfas.*
- (3) *As álgebras $(\mathcal{H}(U), \tau_\omega)$ e $(\mathcal{H}(V), \tau_\omega)$ são topologicamente isomorfas.*
- (4) *As álgebras $(\mathcal{H}(U), \tau_\delta)$ e $(\mathcal{H}(V), \tau_\delta)$ são topologicamente isomorfas.*

Então as condições (1), (2) e (3) são equivalentes e implicam (4). Se E ou F é separável e tem a propriedade de aproximação, então (1) – (4) são equivalentes.

Para provar este teorema, usaremos os seguintes resultados.

Teorema 2.2.4 (J. M. Isidro, [40]). *Sejam E um espaço localmente convexo quase-completo com a propriedade de aproximação e $U \subseteq E$ um aberto convexo e equilibrado. Então o espectro de $(\mathcal{H}(U), \tau)$ é identificado com U , onde $\tau = \tau_0, \tau_\omega$.*

Teorema 2.2.5 (J. Mujica, [49]). *Sejam E um espaço de Fréchet separável com a propriedade de aproximação e $U \subset E$ um aberto convexo e equilibrado. Então o espectro de $(\mathcal{H}(U), \tau_\delta)$ é identificado com U .*

Demonstração do Teorema 2.2.3:

(1) $\Rightarrow$ (2) Seja $\varphi : V \longrightarrow U$ uma aplicação biholomorfa. Consideremos o operador de composição $C_\varphi : \mathcal{H}(U) \longrightarrow \mathcal{H}(V)$. Pelo Lema 2.1.1 temos que $C_\varphi \circ C_{\varphi^{-1}} = C_{\varphi^{-1} \circ \varphi} = C_{id} = Id$ e analogamente

$C_{\varphi^{-1}} \circ C_{\varphi} = Id$. Logo C_{φ} é uma bijeção e $(C_{\varphi})^{-1} = C_{\varphi^{-1}}$. Assim temos que C_{φ} é um isomorfismo algébrico.

Pela Proposição 2.1.2, todo operador de composição é contínuo segundo a topologia τ_0 . Como a inversa de C_{φ} é $C_{\varphi^{-1}}$, que por sua vez é um operador de composição, segue que $C_{\varphi^{-1}}$ também é contínuo e portanto C_{φ} é um isomorfismo topológico de $\mathcal{H}(U)$ sobre $\mathcal{H}(V)$.

(2) $\Rightarrow$ (1)

(a) Suponhamos inicialmente que E e F ambos têm a propriedade de aproximação. Seja $T : (\mathcal{H}(U), \tau_0) \longrightarrow (\mathcal{H}(V), \tau_0)$ um isomorfismo topológico. Vamos construir uma aplicação biholomorfa $\varphi : V \longrightarrow U$. Para tal seja $w \in V$. Então $\delta_w \circ T : (\mathcal{H}(U), \tau_0) \longrightarrow \mathbb{C}$ é um homomorfismo complexo de $(\mathcal{H}(U), \tau_0)$. Pelo Teorema 2.2.4, existe um único $z \in U$ tal que $\delta_w \circ T = \delta_z$. Definamos $\varphi : V \longrightarrow U$ por $\varphi(w) = z$. Vamos mostrar que φ é holomorfa. Com efeito,

$$(\delta_w \circ T)(f) = f(z) = f(\varphi(w)), \text{ para todo } w \in V, \text{ para toda } f \in \mathcal{H}(U),$$

ou seja, $T(f)(w) = f(\varphi(w))$, para todo $w \in V$ e para toda $f \in \mathcal{H}(U)$. Logo $T(f) = f \circ \varphi$, para toda $f \in \mathcal{H}(U)$.

Em particular, temos que $T(f) = f \circ \varphi \in \mathcal{H}(U)$, para todo $f \in E'$, ou seja, φ é w -holomorfa e consequentemente holomorfa, por [25, Proposição 3.21]. Portanto $T = C_{\varphi}$.

O mesmo argumento nos garante a existência de uma aplicação $\psi \in \mathcal{H}(U; F)$ com $\psi(U) \subseteq V$, tal que $T^{-1} = C_{\psi}$. Assim $Id = C_{\varphi} \circ C_{\psi} = C_{\psi \circ \varphi}$, isto é, $g = g \circ \psi \circ \varphi$, para todo $g \in \mathcal{H}(V)$ e em particular para todo $g \in F'$. Portanto, para cada $w \in V$ temos que $g(w) = g(\psi(\varphi(w)))$, para todo $g \in F'$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, segue que $\psi \circ \varphi = id : V \longrightarrow V$; e pelos mesmos argumentos temos que $\varphi \circ \psi = id : U \longrightarrow U$. Portanto φ é bijetiva e $\varphi^{-1} = \psi \in \mathcal{H}(U; F)$, e assim φ é biholomorfa.

(b) Vamos agora supor que apenas E tem a propriedade de aproximação, e provar que F também tem. Seja $\varphi : V \longrightarrow U$ a aplicação holomorfa construída na parte (a). Note que para construir $\varphi : V \longrightarrow U$ utilizamos apenas a hipótese de que E (e não F) tem a propriedade de aproximação.

Para cada $z \in U$ temos que $\delta_z \circ T^{-1} : (\mathcal{H}(V), \tau_0) \longrightarrow \mathbb{C}$ é um homomorfismo complexo contínuo. Como $F' \subset \mathcal{H}(V)$, segue que $\delta_z \circ T^{-1}|_{F'} \in (F', \tau_0)' = F$, pelo Teorema 1.2.1 (Mackey-Arens).

Portanto existe um único $w \in F$ tal que $\delta_z \circ T^{-1}(g) = \delta_w(g)$, para todo funcional $g \in F'$. Definamos $\psi : U \longrightarrow F$ por $\psi(z) = w$, para todo $z \in U$. Desta forma temos que $T^{-1}(g)(z) = g(\psi(z))$, para todos $g \in F'$ e $z \in U$, isto é, $T^{-1}(g) = g \circ \psi$, para todo $g \in F'$. Em particular, segue que $g \circ \psi \in \mathcal{H}(U)$, para todo $g \in F'$, o que mostra que ψ é fracamente holomorfa e portanto holomorfa por [25, Proposição 3.21]. Aplicando T em ambos os lados da igualdade acima, temos que $g = g \circ \psi \circ \varphi$, para todo $g \in F'$. Então para cada $w \in V$ fixado temos que $g(w) = g(\psi(\varphi(w)))$, para todo $g \in F'$. Pelo Teorema de Hahn-Banach temos que $\psi(\varphi(w)) = w$, para todo $w \in V$, ou seja, $\psi \circ \varphi : V \longrightarrow F$ é a inclusão. Aplicando o Lema 2.2.2, temos que F é topologicamente isomorfo a um subespaço complementado de E , e portanto F tem a propriedade de aproximação, pela Proposição 1.2.3. No que se segue basta aplicar a parte (a).

(1) $\Rightarrow$ (3) Basta usar os mesmos raciocínios de (1) $\Rightarrow$ (2).

(3) $\Rightarrow$ (1) Pelo Teorema 2.2.4, temos que $\mathcal{S}(\mathcal{H}(U), \tau_0) = \mathcal{S}(\mathcal{H}(U), \tau_\omega) = U$. Em seguida basta usar os mesmos raciocínios de (2) $\Rightarrow$ (1).

(1) $\Rightarrow$ (4) Basta usar os mesmos raciocínios de (1) $\Rightarrow$ (2).

(4) $\Rightarrow$ (1) Se E e F são ambos separáveis, usamos o Teorema 2.2.5 e o mesmo raciocínio de (2) $\Rightarrow$ (1). Se apenas E é separável e tem a propriedade de aproximação, o argumento da demonstração de (2) $\Rightarrow$ (1), parte (b), garante que F também é separável e tem a propriedade de aproximação. ■

Examinando a prova do Teorema 2.2.3 acima, podemos perceber que a equivalência de (1), (2) e (3) vale para uma classe maior de espaços localmente convexos quase-completos, os chamados espaços *holomorficamente Mackey*. Dizemos que um espaço localmente convexo E é *holomorficamente Mackey* se para cada subconjunto aberto U de E , tem-se que $\mathcal{H}(U; F) = \mathcal{H}(U, F_\sigma)$, onde $F_\sigma = (F, \sigma(F, F'))$, para todo espaço localmente convexo Hausdorff completo F , o que significa dizer que toda aplicação w -holomorfa em U é holomorfa. Assim temos o seguinte teorema, que melhora o Teorema 2.2.3.

Teorema 2.2.6. *Sejam E e F espaços holomorficamente Mackey quase-completos, um deles com a propriedade de aproximação e $U \subseteq E$ e $V \subseteq F$ subconjuntos abertos convexos e equilibrados. Então as seguintes condições são equivalentes.*

(1) U e V são biholomorficamente equivalentes.

(2) As álgebras $(\mathcal{H}(U), \tau_0)$ e $(\mathcal{H}(V), \tau_0)$ são topologicamente isomorfas.

(3) As álgebras $(\mathcal{H}(U), \tau_\omega)$ e $(\mathcal{H}(V), \tau_\omega)$ são topologicamente isomorfas.

Todo espaço localmente convexo metrizável é holomorficamente Mackey [25, Exemplo 3.20(a)]. Em [22, Corolário 10] (e também em [25, Exemplo 3.20(a)]), S. Dineen mostra que todo espaço $\mathcal{DFM}$ é holomorficamente Mackey. Em [9], J. Barroso, M. Matos e L. Nachbin mostram que todo espaço $\mathcal{DFS}$ é holomorficamente Mackey. Para outros exemplos de espaços holomorficamente Mackey sugerimos [12, 24] e [58, Capítulo 12]. Se A é um conjunto não-enumerável, então $\mathbb{C}^{(A)}$ não é holomorficamente Mackey [25, Exercício 3.114].

Iremos apresentar um exemplo mostrando que a hipótese *holomorficamente Mackey* do Teorema 2.2.6 não pode ser omitida. Os espaços localmente convexos que serão apresentados neste exemplo foram estudados por B. Josefson em [41], e depois com mais detalhes por P. Noverraz em [56] e por S. Dineen em [23]. O exemplo que apresentamos foi inspirado nestes três trabalhos, e foi uma sugestão de Seán Dineen, a quem também se deve a demonstração da Proposição 2.2.7.

Seja A um conjunto não enumerável, e consideremos $C_0(A)$ o conjunto de todas as funções $x : A \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe um subconjunto finito $A(\varepsilon) \subset A$ tal que

$$\sup_{\alpha \in A \setminus A(\varepsilon)} |x(\alpha)| \leq \varepsilon.$$

Os elementos de $C_0(A)$ serão denotados por $x = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$, onde $x_\alpha = x(\alpha)$, para todo $\alpha \in A$. Temos que $C_0(A)$ é um espaço de Banach com a norma do supremo.

Seja $I = \{i : A_i \text{ é um subconjunto enumerável de } A\}$, isto é, $i \in I$ se e somente se $A_i \subset A$ é enumerável. Consideremos agora em $C_0(A)$ uma outra topologia, a saber, a topologia gerada pela família de seminormas $(p_{A_i})_{i \in I}$, onde $p_{A_i}(x) = \sup_{\alpha \in A_i} |x_\alpha|$. O espaço $C_0(A)$ munido desta topologia será denotado por $C_{0,p}(A)$ e por $C_0(A)$ entendemos $C_0(A)$ munido da norma. É fácil ver que a topologia da norma em $C_0(A)$ é estritamente mais fina, e portanto pelo Teorema da

Aplicação Aberta, $C_{0,p}(A)$ não é um espaço de Fréchet. Em outras palavras, o operador identidade $Id : C_0(A) \longrightarrow C_{0,p}(A)$ sempre é contínuo, mas a aplicação inversa não é contínua.

Se $x \in C_0(A)$, então não é difícil ver que existe $A_i \subset A$ enumerável tal que $x_\alpha = 0$, para todo $\alpha \in A \setminus A_i$, ou seja,

$$C_0(A) = \cup_{i \in I} C_0(A_i), \quad (2.4)$$

onde identificamos cada $C_0(A_i)$ com um subespaço fechado de $C_0(A)$ da seguinte maneira: se $x \in C_0(A_i)$, identificamos x com $y = (y_\alpha) \in C_0(A)$ da seguinte forma: $y_\alpha = x_\alpha$ se $\alpha \in A_i$ e $y_\alpha = 0$ se $\alpha \in A \setminus A_i$. Para cada $i \in I$, considere a projeção $u_i : C_0(A) \longrightarrow C_0(A_i)$ definida por $u_i((x_\alpha)) = (x_\alpha)_{\alpha \in A_i}$. Também não é difícil ver que a topologia de $C_{0,p}(A)$ coincide com a topologia projetiva (completa e localmente convexa) com relação às projeções u_i , para todo $i \in I$.

Em [41, §4, Proposição Principal], B. Josefson mostra que $\mathcal{H}(C_0(A)) = \mathcal{H}(C_{0,p}(A))$. Mais especificamente, P. Noverraz mostra em [56, Página 323], que dada uma função $f \in \mathcal{H}(C_0(A))$ existem um índice $i \in I$ e $\tilde{f} \in \mathcal{H}(C_0(A_i))$ tais que $f = \tilde{f} \circ u_i$, ou seja, uma função holomorfa em $C_0(A)$ depende apenas de um subconjunto enumerável de A . Este fato nos permite provar a seguinte proposição.

Proposição 2.2.7. *O espaço localmente convexo $C_{0,p}(A)$ não é holomorficamente Mackey.*

Demonstração: Seja $\varphi \in C_{0,p}(A)' \subset C_0(A)'$. Então $\varphi \in \mathcal{H}(C_0(A)) = \mathcal{H}(C_{0,p}(A))$, ou seja, $\varphi = \varphi \circ Id : C_{0,p}(A) \longrightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa. Mas $Id : C_{0,p}(A) \longrightarrow C_0(A)$ não é holomorfa, pois não é contínua. Assim $C_{0,p}(A)$ não é um espaço holomorficamente Mackey. ■

O espaço $C_{0,p}(A)$ satisfaz uma propriedade adicional, chamada de $(*)$ por P. Noverraz em [56, Página 324].

$(*)$ para todo $J \subseteq I$ enumerável, existe $i_o \in I$ tal que $\cup_{j \in J} C_0(A_j) \subseteq C_0(A_{i_o})$.

A seguir apresentaremos alguns lemas que serão úteis para a conclusão do exemplo.

Lema 2.2.8 ([56], Proposição 1). *Os espaços $C_0(A)$ e $C_{0,p}(A)$ têm os mesmos subconjuntos compactos.*

Demonstração: É claro que todo compacto de $C_0(A)$ é um compacto de $C_{0,p}(A)$. Consideremos K um subconjunto compacto de $C_{0,p}(A)$. Então $u_i(K)$ é um subconjunto compacto de $C_0(A_i)$, para todo $i \in \mathcal{I}$. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em K . Por (2.4), para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $i_n \in \mathcal{I}$ tal que $x_n \in C_0(A_{i_n})$. Pela propriedade $(*)$ existe $i_0 \in \mathcal{I}$ tal que $x_n \in C_0(A_{i_0})$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como u_{i_0} é uma projeção, temos que $x_n = u_{i_0}(x_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e portanto (x_n) está contida no compacto $u_{i_0}(K)$. Como $C_0(A_{i_0})$ é Banach, existe uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) que converge a um ponto $x \in C_0(A_{i_0})$, e portanto convergente em $C_0(A)$, concluindo a demonstração. ■

Como $Id : C_0(A) \longrightarrow C_{0,p}(A)$ é linear e contínua, e portanto holomorfa, segue em particular que $Id : (\mathcal{H}(C_{0,p}(A)), \tau) \longrightarrow (\mathcal{H}(C_0(A)), \tau)$ é contínua, para $\tau = \tau_0, \tau_\omega$ e τ_δ . Para ver isso, basta aplicar a Proposição 2.1.2 para $E = U = C_{0,p}(A)$, $F = V = C_0(A)$ e $\varphi = Id : V \longrightarrow U$. Nos próximos três lemas provamos que de fato $Id : (\mathcal{H}(C_{0,p}(A)), \tau) \longrightarrow (\mathcal{H}(C_0(A)), \tau)$ é um isomorfismo topológico.

Lema 2.2.9. *O operador $Id : (\mathcal{H}(C_0(A)), \tau_0) \longrightarrow (\mathcal{H}(C_{0,p}(A)), \tau_0)$ é um isomorfismo topológico.*

Demonstração: Segue imediatamente do fato de $\mathcal{H}(C_0(A)) = \mathcal{H}(C_{0,p}(A))$ e do Lema 2.2.8. ■

A fim de simplificar a notação, τ_0 denota a topologia τ_0 em $\mathcal{H}(C_0(A))$ e $\tau_{0,p}$ denota a topologia τ_0 em $\mathcal{H}(C_{0,p}(A))$. Tal notação será utilizada de maneira análoga para as topologias τ_ω e τ_δ .

Lema 2.2.10 ([56], Página 330). *O operador $Id : (\mathcal{H}(C_0(A)), \tau_\omega) \longrightarrow (\mathcal{H}(C_{0,p}(A)), \tau_\omega)$ é um isomorfismo topológico.*

Demonstração: Para provar a continuidade não trivial, seja p uma seminorma $\tau_{\omega,p}$ contínua. Se p não é τ_ω -contínua, então para todo subconjunto compacto $K \subset C_0(A)$, existe um aberto $U \subseteq C_0(A)$ com $K \subset U$, e uma sequência $(f_{n,K})_{n \in \mathbb{N}}$ contida em $\mathcal{H}(C_0(A))$ tal que

$$p(f_{n,K}) \geq n \|f_{n,K}\|_U, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado para cada $n \in \mathbb{N}$ existem $i_n \in \mathcal{I}$ e $\widetilde{f_{n,K}} \in \mathcal{H}(C_0(A_{i_n}))$ tais que $f_{n,K} = \widetilde{f_{n,K}} \circ u_{i_n}$. Pela condição $(*)$, seja $i_0 \in \mathcal{I}$ tal que $\cup_{n \in \mathbb{N}} C_0(A_{i_n}) \subseteq C_0(A_{i_0})$, e desta forma $\widetilde{f_{n,K}} \in \mathcal{H}(C_0(A_{i_0}))$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Seja $u_{i_n, i_0} : C_0(A_{i_0}) \longrightarrow C_0(A_{i_n})$ a projeção canônica, e denotemos $g_{n,K} = \widetilde{f_{n,K}} \circ u_{i_n, i_0}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim temos que $f_{n,K} = g_{n,K} \circ u_{i_0}$. Seja $U_K = u_{i_0}^{-1}(u_{i_0}(U))$. Então U_K é aberto em $C_{0,p}(A)$. De fato, como U é aberto em norma, então $u_{i_0}(U)$ é aberto em $C_0(A_{i_0})$ (topologia da norma induzida em $C_0(A_{i_0})$). Agora é claro que $u_{i_0}^{-1}(u_{i_0}(U))$ é aberto. Afirmamos que $\|f_{n,K}\|_{U_K} = \|f_{n,K}\|_U$. De fato, como $U \subset U_K$ segue que $\|f_{n,K}\|_U \leq \|f_{n,K}\|_{U_K}$. Seja agora $x \in U_K$. Então $u_{i_0}(x) \in u_{i_0}(U)$. Portanto $f_{n,K}(x) = g_{n,K} \circ u_{i_0}(x) = g_{n,K}(y)$, onde $y \in u_{i_0}(U)$ e assim

$$|f_{n,K}(x)| = |g_{n,K}(y)| \leq \|g_{n,K}\|_{u_{i_0}(U)} = \|g_{n,K} \circ u_{i_0}\|_U = \|f_{n,K}\|_U,$$

para todo $x \in U_K$. Ou seja $\|f_{n,K}\|_{U_K} \leq \|f_{n,K}\|_U$ e portanto a igualdade está demonstrada. Agora K é compacto em $C_{0,p}(A)$ pelo Lema 2.2.8 e $p(f_{n,K}) \geq n\|f_{n,K}\|_{U_K}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, o que mostra que p não é $\tau_{\omega,p}$ contínua, uma contradição. ■

Em [56, Seção 3, Página 327], é provado que $\tau_{\delta,p}$ é a topologia bornológica associada a $\tau_{0,p}$ ou $\tau_{\omega,p}$. Com isso podemos provar o seguinte lema.

Lema 2.2.11. *O operador $Id : (\mathcal{H}(C_0(A)), \tau_\delta) \longrightarrow (\mathcal{H}(C_{0,p}(A)), \tau_\delta)$ é um isomorfismo topológico.*

Demonstração: Para provar a continuidade não trivial, considere $B \subset (\mathcal{H}(C_0(A)), \tau_\delta)$ um subconjunto limitado. Como $C_0(A)$ é Banach, temos pela Observação 1.4.4(3) que τ_δ é a topologia bornológica em $\mathcal{H}(C_0(A))$ associada a τ_0 e portanto B é τ_0 -limitado. Pelo Lema 2.2.9, B é $\tau_{0,p}$ -limitado. Como $\tau_{\delta,p}$ é a topologia bornológica associada a $\tau_{0,p}$, segue que B é $\tau_{\delta,p}$ -limitado. Portanto a identidade $(\mathcal{H}(C_0(A)), \tau_\delta) \longrightarrow (\mathcal{H}(C_{0,p}(A)), \tau_{\delta,p})$ leva limitados em limitados. Como $(\mathcal{H}(C_0(A)), \tau_\delta)$ é um espaço bornológico, segue que $Id : (\mathcal{H}(C_0(A)), \tau_\delta) \longrightarrow (\mathcal{H}(C_{0,p}(A)), \tau_{\delta,p})$ é contínua. ■

Agora estamos prontos para demonstrar o seguinte exemplo.

Exemplo 2.2.12. *As álgebras $(\mathcal{H}(C_0(A)), \tau)$ e $(\mathcal{H}(C_{0,p}(A)), \tau)$ são topologicamente isomorfas, para $\tau = \tau_0, \tau_\omega$ e τ_δ , mas $C_0(A)$ e $C_{0,p}(A)$ não são biholomorficamente equivalentes.*

Demonstração: A primeira afirmação segue dos Lemas 2.2.9, 2.2.10 e 2.2.11. Se $C_0(A)$ e $C_{0,p}(A)$ são biholomorficamente equivalentes, então segue da Proposição 2.2.1 que eles são topologicamente isomorfos, o que não é verdade. ■

Na sequência apresentamos dois corolários que melhoram a Proposição 2.2.1 e o Teorema 2.2.3 para bolas abertas e abertos convexos, equilibrados e limitados em espaços de Banach.

Corolário 2.2.13. *Sejam E e F espaços de Banach, um deles com a propriedade de aproximação. Consideremos as seguintes condições:*

- (1) *E e F são isometricamente isomorfos.*
- (2) *B_E e B_F são biholomorficamente equivalentes.*
- (3) *As álgebras $(\mathcal{H}(B_E), \tau_0)$ e $(\mathcal{H}(B_F), \tau_0)$ são topologicamente isomorfas.*
- (4) *As álgebras $(\mathcal{H}(B_E), \tau_\omega)$ e $(\mathcal{H}(B_F), \tau_\omega)$ são topologicamente isomorfas.*
- (5) *As álgebras $(\mathcal{H}(B_E), \tau_\delta)$ e $(\mathcal{H}(B_F), \tau_\delta)$ são topologicamente isomorfas.*

Então as condições (1), (2), (3) e (4) são equivalentes e implicam (5). Se E ou F é separável e tem a propriedade de aproximação, então (1) – (5) são equivalentes.

A equivalência entre (1) e (2) do Corolário 2.2.13 deve-se a um teorema de W. Kaup e W. Upmeyer que enunciamos abaixo. As outras conclusões seguem do Teorema 2.2.3.

Teorema 2.2.14 (W. Kaup, W. Upmeyer, [43]). *Dois espaços de Banach E e F são isometricamente isomorfos se e somente se existe uma aplicação biholomorfa entre a bola unitária de E e a bola unitária de F .*

Sejam E e F espaços de Banach. Dizemos que dois abertos $U \subseteq E$ e $V \subseteq F$ são *linearmente equivalentes* se existe um isomorfismo topológico $\varphi : E \longrightarrow F$ tal que $\varphi(U) = V$.

Vamos agora supor que U é um aberto convexo, equilibrado e limitado de um espaço de Banach E . Então o espaço

$$E_U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nU,$$

munido do funcional de Minkowski de U , é um espaço de Banach topologicamente isomorfo a E . Como U é aberto, temos que U é a bola unitária de E_U e assim temos o seguinte corolário, que melhora o Teorema 2.2.3 para abertos convexos, equilibrados e limitados.

Corolário 2.2.15. *Sejam E e F espaços de Banach, um deles com a propriedade de aproximação e sejam $U \subseteq E$ e $V \subseteq F$ abertos convexos, equilibrados e limitados. Consideremos as seguintes condições:*

- (1) U e V são linearmente equivalentes.
- (2) U e V são biholomorficamente equivalentes.
- (3) As álgebras $(\mathcal{H}(U), \tau_0)$ e $(\mathcal{H}(V), \tau_0)$ são topologicamente isomorfas.
- (4) As álgebras $(\mathcal{H}(U), \tau_\omega)$ e $(\mathcal{H}(V), \tau_\omega)$ são topologicamente isomorfas.
- (5) As álgebras $(\mathcal{H}(U), \tau_\delta)$ e $(\mathcal{H}(V), \tau_\delta)$ são topologicamente isomorfas.

Então as condições (1), (2), (3) e (4) são equivalentes e implicam (5). Se E ou F é separável e tem a propriedade de aproximação, então (1) – (5) são equivalentes.

Demonstração: Temos que (2), (3), (4) e (5) são equivalentes pelo Teorema 2.2.3. Vamos mostrar que (1) e (2) são equivalentes. Se U e V são linearmente equivalentes, o isomorfismo topológico $\varphi : E \longrightarrow F$ tal que $\varphi(U) = V$ é a aplicação biholomorfa procurada.

Reciprocamente, temos pelo Teorema 2.2.14 que E_U e F_V são isometricamente isomorfos. Portanto, se $T : E_U \longrightarrow F_V$ é tal isometria, então $T(U) = V$, uma vez que T leva a bola unitária de E_U na bola unitária de F_V . Por fim, como E_U é topologicamente isomorfo a E e F_V é topologicamente isomorfo a F , segue que U e V são linearmente equivalentes. ■

Terminamos esta seção com um teorema do tipo Banach-Stone para polinômios em espaços de Banach.

Teorema 2.2.16. *Sejam E e F espaços de Banach, um deles com a propriedade de aproximação. Então são equivalentes.*

(1) *Existe um polinômio bijetivo $Q \in \mathcal{P}(F; E)$ tal que $Q^{-1} \in \mathcal{P}(E; F)$.*

(2) *As álgebras $(\mathcal{P}(E), \tau_0)$ e $(\mathcal{P}(F), \tau_0)$ são topologicamente isomorfas.*

Para demonstrar este teorema, utilizaremos o seguinte resultado.

Teorema 2.2.17 (J. M. Isidro, [40]). *Seja E um espaço localmente convexo quase-completo com a propriedade de aproximação. Então o espectro de $(\mathcal{P}(E), \tau_0)$ é identificado com E .*

Demonstração do Teorema 2.2.16

(1) $\Rightarrow$ (2) Seja $Q \in \mathcal{P}(F; E)$ um polinômio bijetivo tal que $Q^{-1} \in \mathcal{P}(E; F)$. Vamos definir $T : (\mathcal{P}(E), \tau_0) \longrightarrow (\mathcal{P}(F), \tau_0)$ da seguinte maneira:

$$T(P) = P \circ Q, \text{ para todo } P \in \mathcal{P}(E).$$

O operador T está bem definido pela Proposição 1.3.3. Para as conclusões restantes basta seguir as mesmas idéias da demonstração (1) $\Rightarrow$ (2) do Teorema 2.2.3

(2) $\Rightarrow$ (1) Seja $T : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(F)$ um isomorfismo topológico. Usando o Teorema 2.2.17 e seguindo as mesmas idéias da demonstração de (2) $\Rightarrow$ (1) do Teorema 2.2.3, conseguimos uma aplicação holomorfa $Q : F \longrightarrow E$ tal que $T(P) = P \circ Q$, para todo $P \in \mathcal{P}(E)$. Em particular, temos que $f \circ Q \in \mathcal{P}(F)$, para todo funcional linear $f \in E'$. Agora segue de [51, Teorema 3.11] que Q de fato é um polinômio. Aplicando o mesmo raciocínio para T^{-1} , obtemos um polinômio $R : E \longrightarrow F$ tal que $R = Q^{-1}$. ■

2.3 Funções holomorfas em domínios polinomialmente convexos

Nesta seção obtemos teoremas do tipo Banach-Stone para álgebras de funções holomorfas em domínios polinomialmente convexos.

Dizemos que um subconjunto aberto U de um espaço localmente convexo E é *polinomialmente convexo* se $\widehat{K}_{\mathcal{P}(E)} \cap U$ é compacto, para cada subconjunto compacto $K \subset U$. Aqui $\widehat{K}_{\mathcal{P}(E)}$ denota o conjunto

$$\widehat{K}_{\mathcal{P}(E)} = \left\{ x \in E : |P(x)| \leq \sup_K |P|, \text{ para todo } P \in \mathcal{P}(E) \right\}.$$

Seja $P \in \mathcal{P}(E)$. O aberto $U = \{x \in E : |P(x)| < 1\}$ é polinomialmente convexo, mas não é convexo em geral. Ou seja, a classe dos abertos polinomialmente convexos é estritamente maior que a dos absolutamente convexos.

O Teorema 2.2.3 pode ser estendido ao caso de domínios polinomialmente convexos da maneira seguinte.

Teorema 2.3.1. *Sejam E e F espaços de Fréchet, um deles com a propriedade de aproximação e $U \subseteq E$ e $V \subseteq F$ subconjuntos abertos polinomialmente convexos. Consideremos as seguintes condições.*

- (1) U e V são biholomorficamente equivalentes.
- (2) As álgebras $(\mathcal{H}(U), \tau_0)$ e $(\mathcal{H}(V), \tau_0)$ são topologicamente isomorfas.
- (3) As álgebras $(\mathcal{H}(U), \tau_\omega)$ e $(\mathcal{H}(V), \tau_\omega)$ são topologicamente isomorfas.
- (4) As álgebras $(\mathcal{H}(U), \tau_\delta)$ e $(\mathcal{H}(V), \tau_\delta)$ são topologicamente isomorfas.

Então (1), (2) e (3) são equivalentes e implicam (4). Se E ou F é separável e tem a propriedade de aproximação limitada, e U e V são conexos, então (1) – (4) são equivalentes.

A demonstração do Teorema 2.3.1 é similar à do Teorema 2.2.3, mas em lugar dos Teoremas 2.2.4 e 2.2.5, utilizamos os resultados seguintes.

Teorema 2.3.2 (J. Mujica, [48, 50]). *Sejam E um espaço localmente convexo quase-completo com a propriedade de aproximação e $U \subseteq E$ um aberto polinomialmente convexo. Então o espectro de $(\mathcal{H}(U), \tau)$ é identificado com U , onde $\tau = \tau_0, \tau_\omega$.*

Teorema 2.3.3 (J. Mujica, [49]). *Sejam E um espaço de Fréchet separável com a propriedade de aproximação limitada e $U \subseteq E$ um aberto conexo e polinomialmente convexo. Então o espectro de $(\mathcal{H}(U), \tau_\delta)$ é identificado com U .*

Os comentários após a demonstração do Teorema 2.2.3 mostram que no caso das topologias τ_0 e τ_ω , podemos obter um resultado mais geral.

Teorema 2.3.4. *Sejam E e F espaços holomorficamente Mackey quase-completos, um deles com a propriedade de aproximação e $U \subseteq E$ e $V \subseteq F$ subconjuntos abertos polinomialmente convexos. Então as seguintes condições são equivalentes.*

- (1) *U e V são biholomorficamente equivalentes.*
- (2) *As álgebras $(\mathcal{H}(U), \tau_0)$ e $(\mathcal{H}(V), \tau_0)$ são topologicamente isomorfas.*
- (3) *As álgebras $(\mathcal{H}(U), \tau_\omega)$ e $(\mathcal{H}(V), \tau_\omega)$ são topologicamente isomorfas.*

2.4 Funções holomorfas em domínios pseudoconvexos

Nesta seção obtemos teoremas do tipo Banach-Stone para álgebras de funções holomorfas em domínios pseudoconvexos.

Definição 2.4.1 ([10], Definição 14.1.1). *Sejam E um espaço localmente convexo e $U \subseteq E$ um subconjunto aberto. Dizemos que uma função $f : U \rightarrow [-\infty, \infty)$ é plurisubharmônica se f é*

semi-contínua superiormente e:

$$f(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + e^{i\theta}b) d\theta,$$

para todos $a \in U$ e $b \in E$ tais que $a + \overline{\Delta}b \subseteq U$, onde $\overline{\Delta} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$.

Dizemos que um subconjunto aberto U de um espaço localmente convexo E é *pseudoconvexo* se $\widehat{K}_{\mathcal{P}_s(U)}$ é relativamente compacto, para cada subconjunto compacto $K \subset U$ (veja caracterização em [10, 14.1.9]). Aqui, $\mathcal{P}_s(U)$ denota a família de todas as funções plurisubharmônicas em U , e $\widehat{K}_{\mathcal{P}_s(U)}$ denota o conjunto

$$\widehat{K}_{\mathcal{P}_s(U)} = \left\{ x \in U : f(x) \leq \sup_K f, \text{ para toda } f \in \mathcal{P}_s(U) \right\}.$$

Seja $f \in \mathcal{P}_s(E)$. O aberto $U = \{x \in E : f(x) < 0\}$ é pseudoconvexo, mas não é polinomialmente convexo em geral ([37, Proposição 5.1.3(c)]). Por exemplo, se $f \in \mathcal{H}(E)$, então $\Re(f)$ e $\Im(f)$ são ambas funções plurisubharmônicas ([37, Proposição 4.4.2]).

O próximo resultado melhora o Teorema 2.3.1 para abertos pseudoconvexos.

Teorema 2.4.2. *Sejam E e F espaços de Fréchet, um deles separável com a propriedade de aproximação limitada e $U \subseteq E$ e $V \subseteq F$ subconjuntos abertos conexos e pseudoconvexos. Então as seguintes condições são equivalentes.*

- (1) U e V são biholomorficamente equivalentes.
- (2) As álgebras $(\mathcal{H}(U), \tau_0)$ e $(\mathcal{H}(V), \tau_0)$ são topologicamente isomorfas.
- (3) As álgebras $(\mathcal{H}(U), \tau_\omega)$ e $(\mathcal{H}(V), \tau_\omega)$ são topologicamente isomorfas.
- (4) As álgebras $(\mathcal{H}(U), \tau_\delta)$ e $(\mathcal{H}(V), \tau_\delta)$ são topologicamente isomorfas.

A demonstração do Teorema 2.4.2 é similar a do Teorema 2.2.3, mas em lugar dos Teoremas 2.2.4 e 2.2.5, utiliza os resultados seguintes.

Teorema 2.4.3 (M. Schottenloher, [63]). *Sejam E um espaço de Fréchet separável com a propriedade de aproximação limitada e $U \subseteq E$ um aberto conexo e pseudoconvexo. Então o espectro de $(\mathcal{H}(U), \tau)$ é identificado com U , para $\tau = \tau_0$ e τ_ω .*

Teorema 2.4.4 (J. Mujica, [52]). *Sejam E um espaço de Fréchet separável com a propriedade de aproximação limitada e $U \subseteq E$ um aberto conexo e pseudoconvexo. Então o espectro de $(\mathcal{H}(U), \tau_\delta)$ é identificado com U .*

A seguir definimos uma outra classe de abertos em espaços localmente convexos.

Definição 2.4.5 ([10], Definição 14.1.6). *Sejam E um espaço localmente convexo e $U \subseteq E$ um subconjunto aberto. Dizemos que U é um domínio de holomorfia se não existem subconjuntos abertos conexos V e W de E tais que:*

- (1) $\emptyset \neq W \subseteq U \cap V$ e $V \not\subseteq U$.
- (2) Para cada $f \in \mathcal{H}(U)$ existe $\tilde{f} \in \mathcal{H}(V)$ tal que $f = \tilde{f}$ em W .

Como se sabe, todo domínio de holomorfia é pseudoconvexo, e em [62, Corolário 3.4], M. Schottenloher mostra que em um espaço de Fréchet separável com a propriedade de aproximação limitada, cada domínio pseudoconvexo é na verdade um domínio de holomorfia.

Para finalizar esta seção, mostramos que em qualquer espaço de Banach é possível construir um par de subconjuntos abertos H e D , onde um deles não é um domínio de holomorfia, que não são biholomorficamente equivalentes, mas as álgebras $(\mathcal{H}(H), \tau)$ e $(\mathcal{H}(D), \tau)$ são topologicamente isomorfas, para $\tau = \tau_0, \tau_\omega, \tau_\delta$.

Exemplo 2.4.6. *Seja E um espaço de Banach tal que $\dim(E) \geq 2$, e escrevemos $E = \mathbb{C}^2 \oplus N$, onde N é um espaço de Banach. Sejam $D = \{z = (z_1, z_2, w) \in E : |z_1| < R_1, |z_2| < R_2 \text{ e } \|w\| < R\}$ e $H = \{z = (z_1, z_2, w) \in D : |z_1| > r_1 \text{ ou } |z_2| < r_2\}$, onde $0 < R \leq \infty$ e $0 < r_j < R_j \leq \infty$, para $j = 1, 2$. Então as álgebras $(\mathcal{H}(H), \tau)$ e $(\mathcal{H}(D), \tau)$ são topologicamente isomorfas, para $\tau = \tau_0, \tau_\omega, \tau_\delta$, mas H e D não são biholomorficamente equivalentes.*

Demonstração: Primeiro provemos que cada $f \in \mathcal{H}(H)$ admite uma única extensão $\tilde{f} \in \mathcal{H}(D)$.

Para isso, sejam $\rho_1 > 0$ tal que $r_1 < \rho_1 < R_1$ e $D' = \{z = (z_1, z_2, w) \in D : |z_1| < \rho_1\}$. Observe que $D = H \cup D'$. Dada $f \in \mathcal{H}(H)$, definamos

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_1|=\rho_1} \frac{f(\zeta_1, z_2, w)}{\zeta_1 - z_1} d\zeta_1, \text{ para todo } z \in D'. \quad (2.5)$$

Como

$$(\zeta_1 - z_1)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} z_1^m \zeta_1^{-(m+1)},$$

segue que para z_2 e w fixos, g é uma função holomorfa de z_1 , para todo $|z_1| < \rho_1$. Para z_1 e w fixos, a função $\frac{f(\zeta_1, z_2, w)}{\zeta_1 - z_1}$ é uma função diferenciável de z_2 , e portanto g é uma função diferenciável de z_2 por [51, Proposição 13.14]. Pelo mesmo argumento temos que, para z_1 e z_2 fixos, g é diferenciável em w . Portanto g é separadamente holomorfa por [51, Teorema 14.7], e portanto holomorfa por [51, Teorema 36.8]. Pela Fórmula Integral de Cauchy para funções holomorfas de uma variável, temos que $g(z) = f(z)$ para todo $z = (z_1, z_2, w)$ tal que $|z_1| < \rho_1$ e $|z_2| < r_2$, e portanto para todo $z \in D' \cap H$, pois $D' \cap H$ é conexo. Assim a função $\tilde{f}$ definida por $\tilde{f} = f$ em H e $\tilde{f} = g$ em D' é a extensão procurada. Portanto H não pode ser um domínio de holomorfia.

Definamos $T : \mathcal{H}(H) \longrightarrow \mathcal{H}(D)$ por $T(f) = \tilde{f}$, para toda $f \in \mathcal{H}(H)$. Então T é um isomorfismo entre álgebras, uma vez que $\tilde{f}$ é única. É fácil ver que $T^{-1} : \mathcal{H}(D) \longrightarrow \mathcal{H}(H)$ é o operador restrição. Vamos mostrar que as álgebras $(\mathcal{H}(H), \tau)$ e $(\mathcal{H}(D), \tau)$ são topologicamente isomorfas, para $\tau = \tau_0$ e τ_ω . Temos que $D \subset \mathcal{S}(\mathcal{H}(H), \tau_0)$. De fato, para $z \in D$ definimos

$$h_z : \mathcal{H}(H) \longrightarrow \mathbb{C} \text{ por } h_z(f) = \tilde{f}(z), \text{ para todo } f \in \mathcal{H}(H).$$

Se $z \in H$, é claro que h_z é τ_0 -contínua. Se $z \in D'$, então $h_z(f) = g(z)$, onde g está definida em (2.5).

Temos que existe $C > 0$ tal que

$$|g(z)| \leq C \sup_{|\zeta_1|=\rho_1} |f(\zeta_1, z_2, w)| = C \sup_{z \in K} |f(z)|, \text{ para todo } f \in \mathcal{H}(H),$$

onde $K = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| = \rho_1\} \times \{z_2\} \times \{w\}$. Assim h_z é τ_0 -contínua e portanto

$$D \subset \mathcal{S}(\mathcal{H}(H), \tau_0) = \mathcal{S}(\mathcal{H}(H), \tau_\omega) = \Sigma.$$

Consideremos a aplicação $G : \mathcal{H}(H) \longrightarrow \mathcal{H}(\Sigma)$ dada por $G(f) = \hat{f}$, onde $\hat{f}(h) = h(f)$, para todo $h \in \Sigma$. Temos que G é contínua para τ_0 por [2, Seção 4, Teorema 1] e para τ_ω por [45, Teorema 1]. Como $H \subset D \subset \Sigma$, segue que as seguintes aplicações são contínuas

$$(\mathcal{H}(\Sigma), \tau) \longrightarrow (\mathcal{H}(D), \tau) \xrightarrow{T^{-1}} (\mathcal{H}(H), \tau) \xrightarrow{G} (\mathcal{H}(\Sigma), \tau), \text{ para } \tau = \tau_0, \tau_\omega.$$

E conseqüentemente temos que $(\mathcal{H}(H), \tau)$ e $(\mathcal{H}(D), \tau)$ são topologicamente isomorfas, para $\tau = \tau_0, \tau_\omega$. Resta provar que $T : (\mathcal{H}(H), \tau_\delta) \longrightarrow (\mathcal{H}(D), \tau_\delta)$ é um isomorfismo topológico, mas isto é feito em [61, Teorema 5.3]. (Veja também em [18, 38, 60]).

Vamos agora supor que existe uma aplicação biholomorfa $\varphi : H \longrightarrow D$. Por [60, Teorema 1.8] ou [38, Teorema 2.15], temos que φ admite uma extensão biholomorfa $\bar{\varphi} : \varepsilon(H) \longrightarrow \varepsilon(D)$, onde $\varepsilon(H)$ denota o envelope de holomorfia ([51, Definição 56.1]) de H (e o mesmo para $\varepsilon(D)$), tal que o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{array}{ccc} \varepsilon(H) & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & \varepsilon(D) = D \\ \varepsilon \uparrow & & \uparrow \\ H & \xrightarrow{\varphi} & D \end{array}$$

Como φ e $\bar{\varphi}$ são bijeções, segue que ε é uma bijeção e assim H é um domínio de holomorfia, por [51, Exercício 56.B], o que é uma contradição. ■

Quando $E = \mathbb{C}^2$, o par (H, D) é chamado *figura de Hartogs* em $\mathbb{C}^2$. O exemplo apresentado acima foi inspirado em [51, Exemplo 10.2].

Definição 2.4.7 ([2], Seção 4). *Seja (U, V) um par de subconjunto abertos em um espaço de Banach tal que $U \subseteq V$. Se toda função holomorfa $f \in \mathcal{H}(U)$ pode ser estendida a uma única função holomorfa $\tilde{f} \in \mathcal{H}(V)$, dizemos que (U, V) é um par de extensão. Se o isomorfismo algébrico $f \in \mathcal{H}(U) \mapsto \tilde{f} \in \mathcal{H}(V)$ é um isomorfismo topológico para a topologia compacto-aberta, dizemos que (U, V) é um par de extensão normal.*

Neste sentido, o par (H, D) construído no Exemplo 2.4.6 é um par de extensão normal.

Capítulo 3

Funções holomorfas de tipo limitado em espaços de Banach

Não importa o quanto devagar você caminhe. O importante é não parar. (Confúcio)

No Capítulo 2, provamos que dois abertos convexos e equilibrados U e V em espaços de Fréchet com a propriedade de aproximação são biholomorficamente equivalentes se e somente se as álgebras $(\mathcal{H}(U), \tau_0)$ e $(\mathcal{H}(V), \tau_0)$ são topologicamente isomorfas. É natural perguntar se existe um resultado similar para as álgebras de Fréchet $\mathcal{H}_b(U)$ e $\mathcal{H}_b(V)$ de funções holomorfas de tipo limitado. Esta pergunta é respondida de maneira afirmativa neste capítulo, para abertos convexos e equilibrados em espaços de Banach do tipo Tsirelson. Mais ainda, é respondida para certas álgebras de funções holomorfas que são generalizações de $\mathcal{H}_b(U)$ e $\mathcal{H}_b(V)$.

3.1 Operadores de composição entre álgebras de funções holomorfas de tipo limitado

Sejam E um espaço de Banach complexo e U um subconjunto aberto de E . Lembramos que uma sequência crescente $\mathcal{U} = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos abertos de U é uma *cobertura regular de U* se

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \text{ e } d_{U_{n+1}}(U_n) > 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Sejam F um espaço de Banach, e $\mathcal{U} = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma cobertura regular de U . Denotamos por $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}; F)$ o espaço vetorial de todas as aplicações holomorfas $f : U \longrightarrow F$ que são limitadas em cada U_n , para $n \in \mathbb{N}$. $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}; F)$ é um espaço de Fréchet para a topologia da convergência uniforme sobre os conjuntos U_n . Quando $F = \mathbb{C}$, escrevemos $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$ ao invés de $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}; \mathbb{C})$. Neste caso temos que $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$ é uma álgebra de Fréchet.

É claro que cada aplicação holomorfa $\varphi : V \longrightarrow U$ define um operador de composição entre as álgebras $\mathcal{H}(U)$ e $\mathcal{H}(V)$. Mas esse resultado não vale no caso das álgebras $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$ e $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{V})$. Na próxima proposição caracterizamos as aplicações holomorfas $\varphi : V \longrightarrow U$ que definem um operador de composição entre $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$ e $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{V})$. Lembramos que se $A \subseteq U$, então $\widehat{A}_{\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})}$ é o conjunto:

$$\widehat{A}_{\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})} = \{x \in U : |f(x)| \leq \sup_A |f|, \text{ para toda } f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})\}.$$

Proposição 3.1.1. *Sejam E, F espaços de Banach, $U \subseteq E$ e $V \subseteq F$ subconjuntos abertos, $\mathcal{U} = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $\mathcal{V} = (V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ coberturas regulares de U e V , respectivamente. Considere $\varphi \in \mathcal{H}(V; E)$. Então o operador $C_\varphi : \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{H}^\infty(\mathcal{V})$ definido por $C_\varphi(f) = f \circ \varphi$, para toda $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$, está bem definido e é um homomorfismo contínuo se e somente se para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi(V_k) \subseteq (\widehat{U_{n_k}})_{\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})}$.*

Demonstração: Vamos inicialmente supor que C_φ está bem definido e é um homomorfismo contínuo. Seja $k \in \mathbb{N}$. Como C_φ por hipótese é contínuo, temos que existem $C > 0$ e $n_k \in \mathbb{N}$ tais que

$$\sup_{V_k} |C_\varphi(f)| \leq C \sup_{U_{n_k}} |f|, \text{ para toda } f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}).$$

Através de um argumento clássico, substituímos f por f^n , tomamos raízes n -ésimas e fazemos $n \rightarrow \infty$, para obter

$$\sup_{V_k} |C_\varphi(f)| \leq \sup_{U_{n_k}} |f|, \text{ para toda } f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}).$$

Seja agora $y \in V_k$. Então $|f(\varphi(y))| = |C_\varphi(f)(y)| \leq \sup_{U_{n_k}} |f|$, para toda $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$, ou seja, $\varphi(y) \in (\widehat{U_{n_k}})_{\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})}$. Como y é um elemento arbitrário de V_k , segue que $\varphi(V_k) \subseteq (\widehat{U_{n_k}})_{\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})}$.

Reciprocamente, vamos supor que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi(V_k) \subseteq (\widehat{U_{n_k}})_{\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})}$ e provar que C_φ está bem definido e é um homomorfismo contínuo entre álgebras. Para mostrar que C_φ está bem definido, é preciso garantir que $f \circ \varphi \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{V})$, para toda $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$, ou seja, precisamos provar que $f \circ \varphi$ é limitada em cada V_k . Para tal seja $k \in \mathbb{N}$. Por hipótese temos que existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi(V_k) \subseteq (\widehat{U_{n_k}})_{\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})}$. Ou seja, se $y \in V_k$ e então $\varphi(y) \in (\widehat{U_{n_k}})_{\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})}$. Logo

$$|f(\varphi(y))| \leq \sup_{U_{n_k}} |f| < \infty, \text{ para toda } f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}). \quad (3.1)$$

Como y é um elemento arbitrário de V_k , segue que $f \circ \varphi$ é limitada em V_k , para todos $k \in \mathbb{N}$ e $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$, provando assim que $f \circ \varphi \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{V})$, para toda $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$. Por fim, segue de (3.1) que C_φ é um homomorfismo contínuo entre as álgebras $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$ e $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{V})$, terminando a demonstração. ■

A proposição acima motiva a seguinte definição.

Definição 3.1.2. *Sejam E e F espaços de Banach, $U \subseteq E$ e $V \subseteq F$ subconjuntos abertos e $\mathcal{U} = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $\mathcal{V} = (V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ coberturas regulares de U e V , respectivamente.*

- (1) *Denotamos por $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{V}; \mathcal{U})$ o conjunto das aplicações $\varphi \in \mathcal{H}(V; E)$ tais que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi(V_k) \subseteq (\widehat{U_{n_k}})_{\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})}$.*
- (2) *Seja $\varphi \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{V}; \mathcal{U})$. Então o operador $C_\varphi : \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{H}^\infty(\mathcal{V})$ definido por $C_\varphi(f) = f \circ \varphi$, para toda $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$, é chamado de operador de composição.*

O próximo lema, relativo a operadores de composição, será utilizado posteriormente neste texto. Sua demonstração é análoga à do Lema 2.1.1, e por isso será omitida.

Lema 3.1.3. *Sejam E, F e G espaços de Banach e $U \subseteq E, V \subseteq F$ e $W \subseteq G$ subconjuntos abertos. Sejam $\mathcal{U} = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}, \mathcal{V} = (V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $\mathcal{W} = (W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ coberturas regulares de U, V e W , respectivamente. Sejam $\varphi \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{V}; \mathcal{U})$ e $\psi \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{W}; \mathcal{V})$. Então $C_\psi \circ C_\varphi = C_{\varphi \circ \psi} : \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{H}^\infty(\mathcal{W})$.*

3.2 Funções holomorfas de tipo limitado em domínios absolutamente convexos

Nesta seção apresentamos teoremas do tipo Banach-Stone para álgebras de funções holomorfas de tipo limitado em domínios absolutamente convexos.

Em [67], B. Tsirelson constrói um espaço de Banach reflexivo X , com uma base de Schauder incondicional, que não contém nenhum subespaço isomorfo a c_0 ou a qualquer l_p . R. Alencar, R. Aron e S. Dineen provam em [1] que $\mathcal{P}_f(^m X)$ é denso em norma em $\mathcal{P}(^m X)$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Inspirados por este resultado, dizemos que um espaço de Banach E é *do tipo Tsirelson* se E é reflexivo e $\mathcal{P}_f(^m E)$ é denso em norma em $\mathcal{P}(^m E)$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

A fim de demonstrar o resultado principal desta seção, vamos provar um resultado intermediário, que é o próximo teorema.

Teorema 3.2.1. *Sejam E um espaço de Banach do tipo Tsirelson, e F um espaço de Banach. Sejam $U \subseteq E$ um subconjunto aberto convexo e equilibrado e $V \subseteq F$ um subconjunto aberto. Sejam $\mathcal{U} = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $\mathcal{V} = (V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ coberturas regulares de U e V respectivamente, onde cada U_n é limitado e circular. Então para cada homomorfismo contínuo $T : \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{H}^\infty(\mathcal{V})$ existe uma única aplicação $\varphi : V \longrightarrow U$ tal que $T(f) = f \circ \varphi$, para toda $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$. A aplicação φ pertence a $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{V}; \mathcal{U})$.*

Para provar este teorema, usamos o seguinte resultado.

Teorema 3.2.2 (J. Mujica, [54]). *Sejam E um espaço de Banach do tipo Tsirelson, $U \subseteq E$ um subconjunto aberto convexo e equilibrado e $\mathcal{U} = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma cobertura regular de U onde cada U_n é*

limitado e circular. Então o espectro de $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$ é identificado com U .

Demonstração do Teorema 3.2.1: Seja $T : \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{H}^\infty(\mathcal{V})$ um homomorfismo contínuo. Vamos construir uma aplicação holomorfa $\varphi : V \longrightarrow U$. Para tal seja $w \in V$. Então $\delta_w \circ T : \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathbb{C}$ é um homomorfismo complexo contínuo. Pelo Teorema 3.2.2, existe um único $z \in U$ tal que $\delta_w \circ T = \delta_z$. Definamos $\varphi : V \longrightarrow U$ por $\varphi(w) = z$. Temos que

$$(\delta_w \circ T)(f) = f(z) = f(\varphi(w)), \text{ para todos } w \in V, f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}),$$

ou seja, $T(f)(w) = f(\varphi(w))$ para todos $w \in V$ e $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$. Logo $T(f) = f \circ \varphi$, para toda $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$.

Em particular, temos que $T(f) = f \circ \varphi \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{V})$, para toda $f \in E'$, ou seja, φ é w -holomorfa e consequentemente holomorfa, por [51, Teorema 8.12.b]. Para provar a unicidade de φ , vamos supor que existe uma aplicação holomorfa $\psi : V \longrightarrow U$ tal que $T(f) = f \circ \psi$, para toda $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$. Portanto $f \circ \psi = f \circ \varphi$, para toda $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$. Em particular, temos que $f(\psi(w)) = f(\varphi(w))$, para todos $f \in E'$ e $w \in V$. Segue do teorema de Hahn-Banach que $\psi(w) = \varphi(w)$, para todo $w \in V$, ou seja, $\psi = \varphi$ e portanto φ é única.

Resta mostrar que $\varphi \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{V}; \mathcal{U})$. Mas isto é imediato, pois, uma vez que $T = C_\varphi$ é um homomorfismo contínuo, segue da Proposição 3.1.1 que $\varphi \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{V}; \mathcal{U})$. ■

Agora estamos prontos para demonstrar o seguinte resultado, que é o principal teorema desta seção.

Teorema 3.2.3. *Sejam E e F espaços de Banach reflexivos, um deles do tipo Tsirelson. Sejam $U \subseteq E$ e $V \subseteq F$ subconjuntos abertos convexos e equilibrados, $\mathcal{U} = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $\mathcal{V} = (V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ coberturas regulares de U e V respectivamente, tais que cada U_n e V_n são limitados e circulares. Então as seguintes condições são equivalentes.*

- (1) *Existe uma aplicação bijetiva $\varphi : V \longrightarrow U$ tal que $\varphi \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{V}; \mathcal{U})$ e $\varphi^{-1} \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}; \mathcal{V})$.*

(2) As álgebras $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$ e $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{V})$ são topologicamente isomorfas.

Demonstração:

(1) $\Rightarrow$ (2) Como $\varphi \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{V}; \mathcal{U})$, segue da Proposição 3.1.1 que o operador $C_\varphi : \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{H}^\infty(\mathcal{V})$ está bem definido, e é um homomorfismo contínuo, e analogamente para $C_{\varphi^{-1}}$. Pelo Lema 3.1.3 temos que $C_\varphi \circ C_{\varphi^{-1}} = C_{\varphi^{-1} \circ \varphi} = C_{id} = Id$ e analogamente $C_{\varphi^{-1}} \circ C_\varphi = Id$. Logo C_φ é uma bijeção e $(C_\varphi)^{-1} = C_{\varphi^{-1}}$. Assim as álgebras $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$ e $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{V})$ são topologicamente isomorfas.

(2) $\Rightarrow$ (1)

(a) Vamos supor inicialmente que E e F são do tipo Tsirelson. Seja $T : \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{H}^\infty(\mathcal{V})$ um isomorfismo topológico. Pelo Teorema 3.2.1, existem $\varphi \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{V}; \mathcal{U})$ com $\varphi(V) \subseteq U$ e $\psi \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}; \mathcal{V})$ com $\psi(U) \subseteq V$, tais que $T(f) = f \circ \varphi$ e $T^{-1}(g) = g \circ \psi$, para todas $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$ e $g \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{V})$.

Vamos mostrar que φ é invertível e que $\varphi^{-1} = \psi$. Com efeito, temos que $Id = T \circ T^{-1}$, ou seja, $g = g \circ \psi \circ \varphi$, para cada $g \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{V})$. Portanto, para cada $w \in V$ temos que $g(w) = g(\psi(\varphi(w)))$, para todo funcional $g \in F'$. Por Hahn-Banach, temos que $w = \psi(\varphi(w))$, para todo $w \in V$. Analogamente mostramos que $z = \varphi(\psi(z))$, para todo $z \in U$, o que mostra que φ é invertível e que $\varphi^{-1} = \psi$.

(b) Vamos supor agora que somente E é do tipo Tsirelson, e provar que F também é. Seja $\varphi : V \longrightarrow U$ a aplicação holomorfa obtida no Teorema 3.2.1. Para cada $z \in U$ temos que $\delta_z \circ T^{-1} : \mathcal{H}^\infty(\mathcal{V}) \longrightarrow \mathbb{C}$ é um homomorfismo complexo contínuo, e portanto existem $n \in \mathbb{N}$ e $C > 0$ tais que

$$|\delta_z \circ T^{-1}(g)| \leq C \|g\|_{V_n},$$

para toda $g \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$. Como V_n é limitado e $F' \subset \mathcal{H}^\infty(\mathcal{V})$, segue que $\delta_z \circ T^{-1}|_{F'}$ é um elemento de $F'' = F$. Portanto existe um único $b \in F$ tal que $\delta_z \circ T^{-1}|_{F'} = \delta_b$.

Definamos $\psi : U \longrightarrow F$ por $\psi(z) = b$, para todo $z \in U$ e assim temos que $T^{-1}(g)(z) = g(b) = g(\psi(z))$, para todos $g \in F'$ e $z \in U$. Em particular segue que $T^{-1}(g) = g \circ \psi \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$, para todo $g \in F'$, o que mostra que ψ é fracamente holomorfa e portanto holomorfa por [51, Teorema 8.12.b]. Aplicando T em ambos os lados da última igualdade, temos que $g = g \circ \psi \circ \varphi$, para todo $g \in F'$. Pelo Teorema de Hahn-Banach segue que $\psi \circ \varphi : V \longrightarrow F$ é a aplicação inclusão. Aplicando o Lema

2.2.2, temos que F é topologicamente isomorfo a um subspaço complementado de E , e assim segue da Proposição 1.3.1 que F é do tipo Tsirelson. Para concluir a demonstração, basta aplicar a parte (a). ■

Como consequência do Teorema 3.2.3, temos o seguinte resultado de extensão.

Corolário 3.2.4. *Sejam E e F espaços de Banach reflexivos, um deles do tipo Tsirelson. Sejam $U \subseteq E$ e $V \subseteq F$ subconjuntos abertos convexos e equilibrados, $\mathcal{U} = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $\mathcal{V} = (V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ coberturas regulares de U e V respectivamente, tais que cada U_n e V_n são limitados e circulares. Se as álgebras $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$ e $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{V})$ são topologicamente isomorfas então as álgebras $(\mathcal{H}(U), \tau)$ e $(\mathcal{H}(V), \tau)$ são topologicamente isomorfas, para $\tau = \tau_0, \tau_\omega$ e τ_δ .*

Demonstração: Se $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$ e $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{V})$ são topologicamente isomorfas, então pelo Teorema 3.2.3 existe uma aplicação biholomorfa $\varphi : V \longrightarrow U$. Consideremos o operador de composição $C_\varphi : (\mathcal{H}(U), \tau) \longrightarrow (\mathcal{H}(V), \tau)$. Então C_φ é um isomorfismo topológico para τ_0, τ_ω e τ_δ , pela Proposição 2.1.2. ■

Consideremos agora os seguintes subconjuntos abertos de U .

$$U_n = \{x \in U : \|x\| < n \text{ e } d_U(x) > 2^{-n}\}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

A família $\mathcal{U} = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forma uma sequência fundamental de subconjuntos abertos U -limitados que cobre U e $d_{U_{n+1}}(U_n) > 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Não é difícil ver que, neste caso, o espaço $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}; F)$ é na verdade $\mathcal{H}_b(U; F)$, o espaço das aplicações holomorfas de tipo limitado de U em F , para qualquer espaço de Banach F . Sejam $V \subseteq F$ um subconjunto aberto, e $\mathcal{V} = (V_n)$ definido de maneira similar à feita acima. Então o conjunto $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{V}; \mathcal{U})$ será denotado por $\mathcal{H}_b(V; U)$.

É natural perguntar se o conjunto

$$\mathcal{H}_b(V; U) = \{\varphi \in \mathcal{H}(V; F) : \varphi(V) \subseteq U \text{ e para cada } k \in \mathbb{N} \text{ existe } n_k \in \mathbb{N} \text{ tal que } \varphi(V_k) \subseteq \widehat{U_{n_k}}_{\mathcal{H}_b(U)}\}$$

coincide com o conjunto de todas as aplicações holomorfas $\varphi : V \longrightarrow U$ que levam subconjuntos V -limitados em subconjuntos U -limitados. É claro que se φ é tal aplicação, então $\varphi \in \mathcal{H}_b(V; U)$ e

portanto uma inclusão entre os dois conjuntos sempre vale. A inclusão oposta vale quando o aberto U pertence à classe dos subconjuntos abertos $\mathcal{H}_b(U)$ -convexos, que introduzimos a seguir.

Sejam E um espaço de Banach, U um subconjunto aberto de E e A um subconjunto U -limitado. Consideremos o seguinte conjunto

$$\widehat{A}_{\mathcal{H}_b(U)} = \{x \in U : |f(x)| \leq \sup_A |f|, \text{ para toda } f \in \mathcal{H}_b(U)\}.$$

Dizemos que U é $\mathcal{H}_b(U)$ -convexo se $\widehat{A}_{\mathcal{H}_b(U)}$ é um subconjunto U -limitado, para todo A subconjunto U -limitado.

Por exemplo, todo aberto convexo é $\mathcal{H}_b(U)$ -convexo. De fato, como $\mathbb{C} \oplus E' \subseteq \mathcal{H}_b(U)$, então $(\widehat{U}_n)_{\mathcal{H}_b(U)} \subseteq (\widehat{U}_n)_{\mathbb{C} \oplus E'}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora segue da Proposição 1.4.7 que $(\widehat{U}_n)_{\mathbb{C} \oplus E'}$ é limitado e que $d_U((\widehat{U}_n)_{\mathbb{C} \oplus E'}) = d_U(U_n) > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Ou seja, $(\widehat{U}_n)_{\mathcal{H}_b(U)}$ é U -limitado, para todo $n \in \mathbb{N}$ e portanto U é $\mathcal{H}_b(U)$ -convexo.

Na próxima proposição respondemos à pergunta feita acima, para abertos $\mathcal{H}_b(U)$ -convexos.

Proposição 3.2.5. *Sejam E, F espaços de Banach, $U \subseteq E$ e $V \subseteq F$ subconjuntos abertos, onde U é $\mathcal{H}_b(U)$ -convexo. Então o espaço $\mathcal{H}_b(V; U)$ coincide com o espaço das aplicações holomorfas $\varphi : V \longrightarrow U$ que levam subconjuntos V -limitados em subconjuntos U -limitados.*

Demonstração: Sejam $\varphi \in \mathcal{H}_b(V; U)$ e B um subconjunto V -limitado. Então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $B \subseteq V_k$. Por hipótese existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi(V_k) \subseteq (\widehat{U}_{n_k})_{\mathcal{H}_b(U)}$. Agora $(\widehat{U}_{n_k})_{\mathcal{H}_b(U)}$ é um subconjunto U -limitado, pois U é $\mathcal{H}_b(U)$ -convexo. ■

Se U é convexo e equilibrado então segue da Proposição 1.4.5 que a sequência $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaz as hipóteses do Teorema 3.2.3, e assim temos os seguintes corolários.

Corolário 3.2.6. *Sejam E e F espaços de Banach reflexivos, um deles do tipo Tsirelson. Sejam $U \subseteq E$ e $V \subseteq F$ subconjuntos abertos convexos e equilibrados. Então as seguintes condições são equivalentes.*

- (1) *Existe uma aplicação bijetiva $\varphi : V \longrightarrow U$ tal que $\varphi \in \mathcal{H}_b(V; U)$ e $\varphi^{-1} \in \mathcal{H}_b(U; V)$.*

(2) As álgebras $\mathcal{H}_b(U)$ e $\mathcal{H}_b(V)$ são topologicamente isomorfas.

Corolário 3.2.7. *Sejam E e F espaços de Banach reflexivos, um deles do tipo Tsirelson. Sejam $U \subseteq E$ e $V \subseteq F$ subconjuntos abertos convexos e equilibrados. Se as álgebras $\mathcal{H}_b(U)$ e $\mathcal{H}_b(V)$ são topologicamente isomorfas então as álgebras $(\mathcal{H}(U), \tau)$ e $(\mathcal{H}(V), \tau)$ são topologicamente isomorfas, para $\tau = \tau_0, \tau_\omega$ e τ_δ .*

O Corolário 3.2.6 foi obtido de maneira independente em [16], como consequência do seguinte teorema.

Teorema 3.2.8 (D. Carando, D. García, M. Maestre, [16]). *Sejam E e F espaços de Banach, e suponha que $\mathcal{P}_f({}^m E'')$ é denso em norma em $\mathcal{P}({}^m E'')$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Sejam $U \subseteq E$ e $V \subseteq F$ subconjuntos abertos convexos e equilibrados. Então as seguintes condições são equivalentes.*

(1) As álgebras $\mathcal{H}_b(U)$ e $\mathcal{H}_b(V)$ são topologicamente isomorfas.

(2) Existe uma aplicação bijetiva $\varphi : \overset{\circ}{V}^* \longrightarrow \overset{\circ}{U}^*$ tal que $\varphi \in \mathcal{H}_b(\overset{\circ}{V}^*; \overset{\circ}{U}^*)$ e $\varphi^{-1} \in \mathcal{H}_b(\overset{\circ}{U}^*; \overset{\circ}{V}^*)$.

Se os espaços de Banach E e F não são reflexivos, vemos pelo Teorema acima que não se pode obter um teorema do tipo Banach-Stone tal como está enunciado no Corolário 3.2.6, em outras palavras, a aplicação biholomorfa no caso não reflexivo se dá entre dois subconjuntos abertos dos respectivos biduais E'' e F'' , e não de E e F .

No próximo exemplo mostramos que em qualquer espaço de dimensão finita é possível construir um par de abertos H e D onde um deles não é um domínio de holomorfia e o Corolário 3.2.6 falha. Mais especificamente, demonstramos que as álgebras $\mathcal{H}_b(H)$ e $\mathcal{H}_b(D)$ são topologicamente isomorfas mas H e D não são biholomorficamente equivalentes. Apesar de ser um caso particular do Exemplo 2.4.6, vamos apresentar a demonstração, pois neste caso ela é um pouco diferente e bem mais simples.

Exemplo 3.2.9. *Sejam $D = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_j| < R_j, \text{ para } j = 1, \dots, n\}$, onde $n \geq 2$ e $0 < R_j \leq \infty$, para todo $j = 1, \dots, n$; e $H = \{z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in D, : |z_1| > r_1 \text{ ou } |z_2| < r_2\}$, onde*

$0 < r_j < R_j \leq \infty$, para $j = 1, 2$. Então as álgebras $\mathcal{H}_b(H)$ e $\mathcal{H}_b(D)$ são topologicamente isomorfas mas H e D não são biholomorficamente equivalentes.

Demonstração: Vamos provar que cada $f \in \mathcal{H}_b(H)$ admite uma única extensão $\tilde{f} \in \mathcal{H}_b(D)$. Para tal, sejam $\rho_1 > 0$ tal que $r_1 < \rho_1 < R_1$ e $D' = \{z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in D : |z_1| < \rho_1\}$. Observe que $D = H \cup D'$. Dada $f \in \mathcal{H}_b(H)$, definamos

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_1|=\rho_1} \frac{f(\zeta_1, z_2, \dots, z_n)}{\zeta_1 - z_1} d\zeta_1, \text{ para toda } z \in D'.$$

Pelos mesmos argumentos de [51, Exemplo 10.2] ou do Exemplo 2.4.6, temos que g é separadamente holomorfa e como g é claramente localmente limitada, segue de [51, Lemas 8.8 e 8.9] que g é holomorfa, ou seja $g \in \mathcal{H}(D')$. Pela Fórmula Integral de Cauchy para funções holomorfas de uma variável, temos que $g(z) = f(z)$ para todo $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ tal que $|z_1| < \rho_1$ e $|z_2| < r_2$, e portanto para todo $z \in D' \cap H$, pois $D' \cap H$ é conexo. Assim a função $\tilde{f}$ definida por $\tilde{f} = f$ em H e $\tilde{f} = g$ em D' é a extensão procurada. A unicidade da extensão é clara. Portanto H não pode ser um domínio de holomorfia.

Agora definamos $T : \mathcal{H}_b(H) \longrightarrow \mathcal{H}_b(D)$ por $T(f) = \tilde{f}$, para toda $f \in \mathcal{H}_b(H)$. É claro que T é um isomorfismo entre álgebras e $T^{-1} : \mathcal{H}_b(D) \longrightarrow \mathcal{H}_b(H)$ é o operador restrição. Como $T^{-1} : \mathcal{H}_b(D) \longrightarrow \mathcal{H}_b(H)$ é contínuo e $\mathcal{H}_b(H)$ e $\mathcal{H}_b(D)$ são álgebras de Fréchet, segue do Teorema da Aplicação Aberta que T é um isomorfismo topológico.

Para mostrar que H e D não são biholomorficamente equivalentes, basta seguir os mesmos argumentos do Exemplo 2.4.6. ■

O Exemplo 3.2.9 nos leva a crer que os Teoremas do tipo Banach-Stone para álgebras de funções holomorfas de tipo limitado também não podem ir além de domínios de holomorfia.

Capítulo 4

Germes de funções holomorfas em espaços de Banach

Primeiro, faça o necessário; depois faça o possível, e de repente você vai perceber que pode fazer o impossível. (São Francisco de Assis)

Uma outra álgebra que merece destaque é a álgebra de germes holomorfos em um compacto de um espaço de Banach. Neste capítulo apresentamos teoremas do tipo Banach-Stone para álgebras de germes holomorfos em subconjuntos compactos absolutamente convexos em espaços do tipo Tsirelson e do tipo Tsirelson-James. Ainda que existam estudos acerca do espectro de álgebras de germes holomorfos, vemos nesta seção que a técnica para estabelecer teoremas do tipo Banach-Stone para tais álgebras difere da que tem sido utilizada nos capítulos anteriores.

4.1 Germes de funções holomorfas em espaços do tipo Tsirelson

Nesta seção apresentamos teoremas do tipo Banach-Stone para álgebras de germes de funções holomorfas em subconjuntos compactos absolutamente convexos.

Sejam E e F espaços de Banach, $K \subset E$ e $L \subset F$ subconjuntos compactos. Dizemos que K_E e L_F são *biholomorficamente equivalentes* se existem subconjuntos abertos $U \subseteq E$ e $V \subseteq F$ com $K \subset U$ e $L \subset V$ e uma aplicação biholomorfa $\varphi : V \longrightarrow U$ tal que $\varphi(L) = K$.

A seguir temos o principal teorema desta seção.

Teorema 4.1.1. *Sejam E e F espaços do tipo Tsirelson, $K \subset E$ e $L \subset F$ subconjuntos compactos convexos e equilibrados. Então as seguintes condições são equivalentes.*

- (1) K_E e L_F são biholomorficamente equivalentes.
- (2) As álgebras $\mathcal{H}(K)$ e $\mathcal{H}(L)$ são topologicamente isomorfas.

Demonstração:

(1) $\Rightarrow$ (2) Sejam $V \supset L$, $U \supset K$ subconjuntos abertos, e $\varphi : V \longrightarrow U$ uma aplicação biholomorfa tal que $\varphi(L) = K$. Definamos $T : \mathcal{H}(K) \longrightarrow \mathcal{H}(L)$ da seguinte forma. Dada $[f] \in \mathcal{H}(K)$, escolhamos um representante $f \in \mathcal{H}(U_0)$, onde U_0 é um aberto de E contendo K , e seja $V_0 = \varphi^{-1}(U \cap U_0)$. Então definimos $T([f]) = [f \circ (\varphi|_{V_0})] \in \mathcal{H}(L)$, pois $L \subset V_0$.

Sejam $[f_1], [f_2] \in \mathcal{H}(K)$ tais que $[f_1] = [f_2]$. Consideremos U_1 e U_2 subconjuntos abertos de E contendo K tais que $f_1 \in \mathcal{H}(U_1)$ e $f_2 \in \mathcal{H}(U_2)$, e $O \subseteq U_1 \cap U_2$ tal que $f_1 = f_2$ em O . Sejam $V_1 = \varphi^{-1}(U \cap U_1)$, $V_2 = \varphi^{-1}(U \cap U_2)$ e $W = \varphi^{-1}(U \cap O)$. Então W é um subconjunto aberto de $V \cap V_1 \cap V_2$ contendo L . Seja $w \in W$. Então

$$f_1 \circ (\varphi|_{V_1})(w) = f_1 \circ \varphi(w) = f_1|_{U \cap O}(\varphi(w)) = f_2|_{U \cap O}(\varphi(w)) = f_2 \circ \varphi(w) = f_2 \circ (\varphi|_{V_2})(w).$$

Logo $[f_1 \circ (\varphi|_{V_1})] = [f_2 \circ (\varphi|_{V_2})]$, ou seja, $T([f_1]) = T([f_2])$. Assim T está bem definida.

Para mostrar que T é linear, considere $[f_1], [f_2] \in \mathcal{H}(K)$ e os abertos construídos acima. Não é difícil ver que

$$[f_1 \circ (\varphi|_{V_1}) + f_2 \circ (\varphi|_{V_2})] = [(f_1 + f_2) \circ (\varphi|_W)],$$

uma vez que $W \subseteq V \cap V_1 \cap V_2$. Com isso concluímos que

$$\begin{aligned} T([f_1] + [f_2]) &= T([f_1 + f_2]) = [(f_1 + f_2) \circ (\varphi|_W)] = \\ &= [f_1 \circ (\varphi|_{V_1}) + f_2 \circ (\varphi|_{V_2})] = [f_1 \circ (\varphi|_{V_1})] + [f_2 \circ (\varphi|_{V_2})] = T([f_1]) + T([f_2]). \end{aligned}$$

De maneira análoga mostramos que $T(\lambda[f]) = \lambda T([f])$, para todos $\lambda \in \mathbb{C}$ e $[f] \in \mathcal{H}(K)$, e também que T é multiplicativa. Portanto T é um homomorfismo entre álgebras.

Para mostrar que T é contínuo, sejam $U_\alpha \supset K$ um subconjunto aberto e $V_\alpha = \varphi^{-1}(U \cap U_\alpha) \subseteq V$. Denotemos $\varphi_\alpha = \varphi|_{V_\alpha} : V_\alpha \longrightarrow E$, com $\varphi_\alpha(V_\alpha) \subseteq U_\alpha$. Considere $i_{U_\alpha} : \mathcal{H}(U_\alpha) \hookrightarrow (\mathcal{H}(K), \tau_\omega)$ a inclusão canônica, e da mesma forma $i_{V_\alpha} : \mathcal{H}(V_\alpha) \hookrightarrow (\mathcal{H}(L), \tau_\omega)$. Então o seguinte diagrama é comutativo.

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{H}(K), \tau_\omega) & \xrightarrow{T} & (\mathcal{H}(L), \tau_\omega) \\ i_{U_\alpha} \uparrow & & \uparrow i_{V_\alpha} \\ (\mathcal{H}(U_\alpha), \tau_\omega) & \xrightarrow{C_{\varphi_\alpha}} & (\mathcal{H}(V_\alpha), \tau_\omega) \end{array}$$

Com efeito, seja $f \in \mathcal{H}(U_\alpha)$. Então $T \circ i_{U_\alpha}(f) = T([f]) = [f \circ (\varphi|_{V_\alpha})] = [f \circ \varphi_\alpha] = i_{V_\alpha}(f \circ \varphi_\alpha) = i_{V_\alpha} \circ C_{\varphi_\alpha}(f)$.

Como pela Proposição 2.1.2 C_{φ_α} é contínuo, concluímos que T também é contínuo pelo Teorema 1.2.7. Seja $\psi = \varphi^{-1}$, e definamos $S : \mathcal{H}(L) \longrightarrow \mathcal{H}(K)$ da mesma maneira que definimos T , usando neste caso ψ ao invés de φ , e vamos mostrar que as álgebras $\mathcal{H}(K)$ e $\mathcal{H}(L)$ são topologicamente isomorfas.

Dada $[f] \in \mathcal{H}(K)$, sejam U_0 um aberto de E contendo K tal que $f \in \mathcal{H}(U_0)$; e $V_0 = \varphi^{-1}(U \cap U_0)$. Então por definição $T([f]) = [f \circ (\varphi|_{V_0})]$. Agora pela definição de S segue que

$$S(T([f])) = S([f \circ (\varphi|_{V_0})]) = [f \circ (\varphi|_{V_0}) \circ (\psi|_{U \cap U_0})] = [f],$$

pois $(\varphi|_{V_0}) \circ (\psi|_{U \cap U_0})$ é a identidade em $U \cap U_0$. De maneira análoga provamos que $T(S([g])) = [g]$, para todo $[g] \in \mathcal{H}(L)$, ou seja $S = T^{-1}$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Seja $T : \mathcal{H}(K) \longrightarrow \mathcal{H}(L)$ um isomorfismo topológico, e denotemos $S = T^{-1}$. Recorde-mos que $U_n = K + B_E(0, \frac{1}{n})$ e $V_n = L + B_F(0, \frac{1}{n})$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Fixemos $k \in \mathbb{N}$ e consideremos

$$T \circ i_k : \mathcal{H}_b(U_k) \longrightarrow \mathcal{H}(L).$$

Como $\mathcal{H}_b(U_k)$ é um espaço de Fréchet e $(\mathcal{H}(L), \tau_\omega) = \varinjlim_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_b(V_k)$, segue do Teorema 1.2.8 que existem $m_k \in \mathbb{N}$ e um operador linear contínuo $T_k : \mathcal{H}_b(U_k) \longrightarrow \mathcal{H}_b(V_{m_k})$ tais que o seguinte diagrama é comutativo.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}(K) & \xrightarrow{T} & \mathcal{H}(L) \\ i_k \uparrow & & \uparrow i_{m_k} \\ \mathcal{H}_b(U_k) & \xrightarrow{T_k} & \mathcal{H}_b(V_{m_k}) \end{array}$$

Ou em outras palavras $T \circ i_k = i_{m_k} \circ T_k$. Sejam $f_1, f_2 \in \mathcal{H}_b(U_k)$. Então $[T_k(f_1 \cdot f_2)] = i_{m_k} \circ T_k(f_1 \cdot f_2) = T \circ i_k(f_1 \cdot f_2) = T([f_1 \cdot f_2]) = T([f_1]) \cdot T([f_2]) = (T \circ i_k(f_1)) \cdot (T \circ i_k(f_2)) = (i_{m_k} \circ T_k(f_1)) \cdot (i_{m_k} \circ T_k(f_2)) = [T_k(f_1) \cdot T_k(f_2)]$. Portanto existe um subconjunto aberto $W \subseteq V_{m_k}$ tal que $T_k(f_1 \cdot f_2) = T_k(f_1) \cdot T_k(f_2)$ em W . Como V_{m_k} é convexo, segue do Princípio da Identidade [51, Proposição 5.7] que $T_k(f_1 \cdot f_2) = T_k(f_1) \cdot T_k(f_2)$ em V_{m_k} , e assim T_k é multiplicativo.

Como E é do tipo Tsirelson e U_k é convexo e equilibrado, segue do Corolário 3.2.6 que existe uma aplicação holomorfa $\varphi_k : V_{m_k} \longrightarrow E$ com $\varphi_k(V_{m_k}) \subseteq U_k$, tal que $T_k = C_{\varphi_k}$. Aplicando este mesmo argumento ao isomorfismo topológico $S : \mathcal{H}(L) \longrightarrow \mathcal{H}(K)$ e ao inteiro m_k , podemos encontrar um inteiro n_k , estritamente maior que k , e uma aplicação holomorfa $\psi_k : U_{n_k} \longrightarrow F$ com $\psi_k(U_{n_k}) \subseteq V_{m_k}$, tal que o seguinte diagrama é comutativo.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}(L) & \xrightarrow{S} & \mathcal{H}(K) \\ i_{m_k} \uparrow & & \uparrow i_{n_k} \\ \mathcal{H}_b(V_{m_k}) & \xrightarrow{C_{\psi_k}} & \mathcal{H}_b(U_{n_k}) \end{array}$$

Ou seja, $S \circ i_{m_k} = i_{n_k} \circ C_{\psi_k}$. Como $T \circ i_k = i_{m_k} \circ T_k$, aplicando S nesta igualdade, obtemos $S \circ T \circ i_k = S \circ i_{m_k} \circ T_k = i_{n_k} \circ C_{\psi_k} \circ C_{\varphi_k}$, e assim

$$i_k = i_{n_k} \circ C_{\psi_k} \circ C_{\varphi_k}.$$

Em particular temos que $i_k(f) = i_{n_k} \circ C_{\psi_k} \circ C_{\varphi_k}(f)$, para todo funcional linear $f \in E'$, ou seja $[f] = [f \circ \varphi_k \circ \psi_k]$, para todo $f \in E'$. Portanto existe um aberto $O \subseteq U_{n_k}$ tal que $f = f \circ \varphi_k \circ \psi_k$ em O . Como U_{n_k} é convexo, segue novamente do Princípio de Identidade [51, Proposição 5.7] que $f = f \circ \varphi_k \circ \psi_k$ em U_{n_k} , para todo $f \in E'$, e assim concluímos através do Teorema de Hahn-Banach que $\varphi_k \circ \psi_k : U_{n_k} \longrightarrow U_k$ é a aplicação inclusão.

Assim, temos sequências crescentes $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$; e aplicações holomorfas

$$\varphi_k : V_{m_k} \longrightarrow U_k \text{ e } \psi_k : U_{n_k} \longrightarrow V_{m_k},$$

tais que $\varphi_k \circ \psi_k : U_{n_k} \longrightarrow U_k$ é a aplicação inclusão, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Afirmção 1: $\varphi_1 = \varphi_k$ sobre cada V_{m_k} . De fato, como $E' \subseteq \mathcal{H}_b(U_k)$, para todo $k \in \mathbb{N}$, temos que $T([f]) = [f \circ \varphi_1] = [f \circ \varphi_k]$, para cada $f \in E'$ e cada $k \in \mathbb{N}$. Através de um raciocínio já utilizado nesta demonstração, concluímos que $f \circ \varphi_1 = f \circ \varphi_k$ em V_{m_k} , para todo $f \in E'$ e pelo Teorema de Hahn-Banach que $\varphi_1 = \varphi_k$ em V_{m_k} . Pelos mesmos argumentos mostramos que $\psi_1 = \psi_k$ sobre cada U_{n_k} .

Afirmção 2: T depende apenas de φ_1 . Com efeito, sejam $[f] \in \mathcal{H}(K)$ e $k \in \mathbb{N}$ tal que $f \in \mathcal{H}_b(U_k)$. Segue da Afirmção 1 que $T([f]) = [f \circ \varphi_k] = [f \circ (\varphi_1|_{V_{m_k}})]$; e de maneira análoga, para cada $g \in \mathcal{H}_b(V_{m_k})$ temos que $S([g]) = [g \circ \psi_k] = [g \circ (\psi_1|_{U_{n_k}})]$.

Afirmção 3: $\varphi_1(L) \subseteq K$. De fato, como $L \subset V_{m_k}$, para todo $k \in \mathbb{N}$, segue da Afirmção 1 que $\varphi_1(L) = \varphi_k(L) \subseteq U_k = K + B(0, \frac{1}{k})$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Como K é fechado, segue que $\varphi_1(L) \subseteq K$. Pelos mesmos argumentos temos que $\psi_1(K) \subseteq L$.

Como vemos através das Afirmções 1, 2 e 3, φ_1 parece ser a principal candidata para a aplicação biholomorfa que leva L em K . Neste sentido, iremos nos restringir daqui em diante aos abertos U_{n_1} , V_{m_1} e $V_{m_{n_1}}$.

Para cada $g \in F' \subseteq \mathcal{H}_b(V_{m_1})$ temos que $S([g]) = [g \circ \psi_1]$. Como $g \circ \psi_1 \in \mathcal{H}_b(U_{n_1})$ segue da Afirmção 2 que $T \circ S([g]) = [(g \circ \psi_1) \circ \varphi_{n_1}] = [g \circ \psi_1 \circ (\varphi_1|_{V_{m_{n_1}}})]$. Por outro lado, $T \circ S([g]) = [g]$, e como $V_{m_{n_1}}$ é convexo, segue do Princípio de Identidade [51, Proposição 5.7] que $g = g \circ \psi_1 \circ \varphi_1$ em $V_{m_{n_1}}$, para todo $g \in F'$. Pelo Teorema de Hahn-Banach temos que $\psi_1 \circ \varphi_1 : V \longrightarrow V$ é a

aplicação identidade, onde $V = V_{m_{n_1}}$. Se denotarmos $U = \psi_1^{-1}(V)$, temos que $U \subseteq U_{n_1}$ e assim $\varphi_1 \circ \psi_1 : U \longrightarrow U$ é a aplicação identidade.

Como $\psi_1(\varphi_1(V)) = V$, temos que $\varphi_1(V) \subseteq \psi_1^{-1}(V) = U$. Finalmente, definimos $\varphi = \varphi_1|_V : V \longrightarrow U$ e $\psi = \psi_1|_U : U \longrightarrow V$. Assim temos que $\varphi^{-1} = \psi$ e pela Afirmação 3 segue que $\varphi(L) = K$. Com isso concluímos que K e L são biholomorficamente equivalentes. ■

A demonstração do Teorema 4.1.1 foi inspirada em idéias de [19, 20].

Não sabemos se o Teorema 4.1.1 continua válido se apenas um dos espaços de Banach E ou F é do tipo Tsirelson.

É claro que todo espaço de dimensão finita é do tipo Tsirelson, mas neste caso o Teorema 4.1.1 é válido para uma classe maior de subconjuntos compactos, a saber os conjuntos *Oka-Weil compactos*. Dizemos que um subconjunto compacto K de um espaço de Banach é *Oka-Weil compacto* se existe um conjunto aberto pseudoconvexo U contendo K tal que $K = \widehat{K}_{\mathcal{P}_s(U)}$.

Um subconjunto compacto K de um espaço de Banach E é *polinomialmente convexo* se $\widehat{K}_{\mathcal{P}(E)} = K$. Se K é formado de dois elementos, então K é polinomialmente convexo. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência convergindo a um ponto $x \in E$. Então $K = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ é polinomialmente convexo.

Exemplos 4.1.2. *A seguir apresentamos alguns exemplos de conjuntos Oka-Weil compactos.*

- (1) Todo compacto polinomialmente convexo é Oka-Weil compacto.
- (2) Sejam U um aberto pseudoconvexo, L um subconjunto compacto de U e $K = \widehat{L}_{\mathcal{P}_{sc}(U)}$. Então K é Oka-Weil compacto.

A seguir temos o resultado anunciado para o caso de espaços de dimensão finita.

Teorema 4.1.3. *Sejam E e F espaços de dimensão finita, $K \subset E$ e $L \subset F$ subconjuntos Oka-Weil compactos e conexos. Então as seguintes condições são equivalentes.*

- (1) K_E e L_F são biholomorficamente equivalentes.

(2) As álgebras $\mathcal{H}(K)$ e $\mathcal{H}(L)$ são topologicamente isomorfas.

Demonstração:

(1) $\Rightarrow$ (2) É idêntica à demonstração do Teorema 4.1.1.

(2) $\Rightarrow$ (1) Afirmamos que $\mathcal{H}(K)$ é o limite indutivo de uma sequência de espaços $(\mathcal{H}(W_n), \tau_\omega)$, onde cada W_n é conexo e pseudoconvexo (e o mesmo para $\mathcal{H}(L)$). Com efeito, seja $U_n = K + B(0; \frac{1}{n})$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja U um aberto pseudoconvexo tal que $K = \widehat{K}_{\mathcal{P}_s(U)}$. Então por [51, Teorema 46.2], para cada $n \in \mathbb{N}$ existe um subconjunto aberto pseudoconvexo V_n tal que $K \subset V_n \subseteq U \cap U_n$. Seja W_n a componente conexa de V_n que contém K . Por [51, Exercício 37.A], temos que $W_n \subseteq U_n$ é pseudoconvexo. Como $\mathcal{H}(K) = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} (\mathcal{H}(U_n), \tau_\omega)$ e a inclusão $(\mathcal{H}(U_n), \tau_\omega) \hookrightarrow (\mathcal{H}(W_n), \tau_\omega)$ é contínua para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que

$$\mathcal{H}(K) = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} (\mathcal{H}(W_n), \tau_\omega).$$

Agora basta aplicar os mesmos argumentos da demonstração do Teorema 4.1.1. O Teorema 1.2.8 pode ser aplicado neste caso uma vez que em dimensão finita $(\mathcal{H}(W_n), \tau_\omega)$ é uma álgebra de Fréchet, para todo $n \in \mathbb{N}$. Observamos que para abertos conexos e pseudoconvexos utilizamos o Teorema 2.4.2 ao invés do Corolário 3.2.6 para obter as sequências de aplicações holomorfas $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ e $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

■

4.2 Germes de funções holomorfas em espaços do tipo

Tsirelson-James

Neste seção mostramos que é possível generalizar o Teorema 4.1.1 para uma classe especial de espaços de Banach não reflexivos, que será definida a seguir.

Em [17], P. G. Casazza et al constróem um espaço de Banach não reflexivo X que não contém nenhum subespaço isomorfo a c_0 ou a algum l_p , (veja também [25, Exemplo 2.43]). Em [13, Observação 5.9.2(b)], G. Botelho mostra que $\mathcal{P}_f({}^m X)$ é denso em $\mathcal{P}({}^m X)$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Em [21,

Lema 19], é provado que X'' também tem esta propriedade. O espaço X é conhecido como espaço de Tsirelson-James.

Vamos dizer que um espaço de Banach E é *do tipo Tsirelson-James* se $\mathcal{P}_f({}^m E)$ é denso em $\mathcal{P}({}^m E)$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Com esta terminologia, tanto X como X'' são espaços do tipo Tsirelson-James.

Exemplos 4.2.1. *A seguir apresentamos alguns exemplos de espaços do tipo Tsirelson-James.*

- (1) O espaço de sequências c_0 é do tipo Tsirelson-James. Veja por exemplo em [13, Observação 5.9.2 (b)]. Este fato é conhecido como Teorema de Littlewood-Bogdanowicz-Pelczynski, veja em [13, Observação 5.9.2 (c)]. Mais geralmente, seja X um espaço topológico Hausdorff compacto e disperso (isto é, todo subconjunto fechado de X contém um ponto isolado). Então $\mathcal{C}(X)$ é do tipo Tsirelson-James. Veja por exemplo em [29, Exemplo 2.1].
- (2) O predual do espaço de Stegall [64] é um espaço do tipo Tsirelson-James. Isto está demonstrado, por exemplo, em [66, Proposição 2.2 (3)].
- (3) Seja w uma sequência decrescente de números positivos em $c_0 \setminus \ell_p$, para $p > 1$. Considere o predual do espaço das sequências de Lorentz $d(w, 1)$ [44, Definição 4.e.1]. Então tal espaço é do tipo Tsirelson-James. Isto está demonstrado, por exemplo, em [57, Exemplos 2.4 (b)].

É claro que ℓ_∞ não é do tipo Tsirelson-James, mas não sabemos se os biduais dos espaços dos Exemplos 4.2.1(2) e 4.2.1(3) são do tipo Tsirelson-James.

A seguir apresentamos o principal resultado desta seção.

Teorema 4.2.2. *Sejam E e F espaços de Banach tais que E'' e F'' são do tipo Tsirelson-James. Sejam $K \subset E$ e $L \subset F$ subconjuntos compactos convexos e equilibrados. Então as seguintes condições são equivalentes.*

- (1) $K_{E''}$ e $L_{F''}$ são biholomorficamente equivalentes.
- (2) As álgebras $\mathcal{H}(K_E)$ e $\mathcal{H}(L_F)$ são topologicamente isomorfas.

Para demonstrar este teorema, necessitamos alguns resultados auxiliares. Os próximos teoremas são resultados relativos à extensão de Aron-Berner, [3], de funções holomorfas de tipo limitado em abertos convexos e equilibrados.

Teorema 4.2.3 (P. Galindo, D. García, M. Maestre, [26]). *Seja U um subconjunto aberto absolutamente convexo de um espaço de Banach E . Então existe uma extensão linear, multiplicativa e isométrica $AB : \mathcal{H}^\infty(U) \longrightarrow \mathcal{H}^\infty(\overset{\circ}{\bar{U}}^*)$.*

Teorema 4.2.4 (P. Galindo, D. García, M. Maestre, [26]). *Seja U um subconjunto aberto absolutamente convexo de um espaço de Banach E . Então para cada $f \in \mathcal{H}_b(U)$ existe $\bar{f} \in \mathcal{H}_b(\overset{\circ}{\bar{U}}^*)$ tal que $\bar{f}|_U = f$.*

Sejam E um espaço de Banach, $U \subseteq E$ um subconjunto aberto convexo e equilibrado e $f \in \mathcal{H}^\infty(U)$ ou $f \in \mathcal{H}_b(U)$. Durante toda esta seção, $\bar{f}$ denotará a extensão de f obtida nos Teoremas 4.2.3 ou 4.2.4. A próxima proposição mostra que em espaços do tipo Tsirelson-James, extensões como as dos Teoremas 4.2.3 e 4.2.4 são únicas.

Proposição 4.2.5. *Seja E um espaço de Banach tal que E'' é do tipo Tsirelson-James, e $U \subseteq E$ um subconjunto aberto convexo e equilibrado. Sejam $f \in \mathcal{H}_b(U)$ e $g \in \mathcal{H}_b(\overset{\circ}{\bar{U}}^*)$ tais que $g|_U = f$. Então $g = \bar{f}$.*

Demonstração: Como E'' é do tipo Tsirelson-James, temos pela Proposição 1.3.2 que E também é. Como U e $\overset{\circ}{\bar{U}}^*$ são equilibrados, segue de [4, Lema 6.2] ou de [15, Proposição 1.1], que $f \in \mathcal{H}_{wu}(U)$ e que $g \in \mathcal{H}_{wu}(\overset{\circ}{\bar{U}}^*)$, e portanto $g \in \mathcal{H}_{w^*u}(\overset{\circ}{\bar{U}}^*)$. Por outro lado, como U é convexo e equilibrado, temos por [16, Observação 1.13] que f admite única extensão $\hat{f} \in \mathcal{H}_{w^*u}(\overset{\circ}{\bar{U}}^*)$ tal que $\hat{f}|_U = f$. Logo $g = \bar{f} = \hat{f}$. ■

É claro que a proposição acima também vale para $f \in \mathcal{H}^\infty(U)$ e sua extensão dada pelo Teorema 4.2.3. Agora estamos prontos para demonstrar o Teorema 4.2.2.

Demonstração do Teorema 4.2.2:

(1) $\Rightarrow$ (2) Sejam $B \supset L$ e $A \supset K$ subconjuntos abertos de E'' e F'' respectivamente, e $\varphi : B \longrightarrow A$ uma aplicação biholomorfa tal que $\varphi(L) = K$. Definamos $T : \mathcal{H}(K_E) \longrightarrow \mathcal{H}(L_F)$ da seguinte forma. Dada $[f] \in \mathcal{H}(K_E)$, seja $U \subseteq E$ um aberto convexo e equilibrado contendo K tal que $f \in \mathcal{H}^\infty(U)$. Pelo Lema 1.2.10, $\overset{\circ}{\bar{U}}^*$ é um subconjunto aberto de E'' que contém K , e portanto $\varphi^{-1}(\overset{\circ}{\bar{U}}^* \cap A)$ é um aberto de F'' que contém L . Finalmente $\varphi^{-1}(\overset{\circ}{\bar{U}}^* \cap A) \cap F$ é um subconjunto aberto de F que contém L . Portanto existe um aberto convexo e equilibrado $V \subseteq F$ tal que

$$L \subset V \subseteq \varphi^{-1}(\overset{\circ}{\bar{U}}^* \cap A) \cap F.$$

Desta forma definimos $T([f]) = [\bar{f} \circ (\varphi|_V)]$. Procedemos de maneira similar à feita na demonstração do Teorema 4.1.1 para mostrar que T está bem definida e é um homomorfismo.

Para mostrar que T é contínua, vamos mostrar que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $m_k \in \mathbb{N}$ e um homomorfismo contínuo $T_k : \mathcal{H}^\infty(U_k) \longrightarrow \mathcal{H}^\infty(V_{m_k})$ tal que o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}(K_E) & \xrightarrow{T} & \mathcal{H}(L_F) \\ i_k \uparrow & & \uparrow i_{m_k} \\ \mathcal{H}^\infty(U_k) & \xrightarrow{T_k} & \mathcal{H}^\infty(V_{m_k}) \end{array}$$

Sejam $k \in \mathbb{N}$ fixado e $f \in \mathcal{H}^\infty(U_k)$. Pelo mesmo raciocínio feito no início desta demonstração, temos que $\varphi^{-1}(\overset{\circ}{\bar{U}}_k^* \cap A) \cap F$ é um subconjunto aberto de F que contém L , e portanto existe $m_k \in \mathbb{N}$ tal que $L \subset V_{m_k} \subseteq \varphi^{-1}(\overset{\circ}{\bar{U}}_k^* \cap A) \cap F$. Consideremos $\varphi_k = \varphi|_{V_{m_k}} : V_{m_k} \longrightarrow \overset{\circ}{\bar{U}}_k^*$, e definamos $T_k : \mathcal{H}^\infty(U_k) \longrightarrow \mathcal{H}^\infty(V_{m_k})$ por $T_k(f) = \bar{f} \circ \varphi_k$, para toda $f \in \mathcal{H}^\infty(U_k)$. É claro que T_k é linear e multiplicativa, uma vez que T_k é a composta do operador de composição C_{φ_k} com o homomorfismo AB do Teorema 4.2.3.

Para cada $w \in V_{m_k}$ temos que $\varphi_k(w) \in \overset{\circ}{\bar{U}}_k^*$. Então

$$|T_k(f)(w)| = |\bar{f}(\varphi_k(w))| \leq \|\bar{f}\|_{\overset{\circ}{\bar{U}}_k^*} = \|AB(f)\| = \|f\| = \|f\|_{U_k},$$

e portanto T_k é contínua. Vamos agora mostrar que o diagrama comuta, isto é, que $T \circ i_k = i_{m_k} \circ T_k$.

Se $f \in \mathcal{H}^\infty(U_k)$, então $i_{m_k}(T_k(f)) = [\bar{f} \circ \varphi_k] = [\bar{f} \circ (\varphi|_{V_{m_k}})] = T([f]) = T \circ i_k(f)$.

Se definimos $S : \mathcal{H}(L_F) \longrightarrow \mathcal{H}(K_E)$ da mesma forma, usando neste caso φ^{-1} ao invés de φ , temos que $S = T^{-1}$. Com efeito, sejam $[g] \in \mathcal{H}(L_F)$, $V_k \subseteq F$ convexo e equilibrado tal que $g \in \mathcal{H}^\infty(V_k)$, e $U_{n_k} \subseteq E$ tal que $S([g]) = [\bar{g} \circ (\psi|_{U_{n_k}})]$, onde $\psi = \varphi^{-1}$. Seja $f = \bar{g} \circ (\psi|_{U_{n_k}}) \in \mathcal{H}^\infty(U_{n_k})$. Por um lado temos que $\bar{g} \circ (\psi|_{\frac{\circ}{U_{n_k}}}) \in \mathcal{H}^\infty(\frac{\circ}{U_{n_k}})$. Como $\bar{f}|_{U_{n_k}} = f = \bar{g} \circ (\psi|_{U_{n_k}})$, segue da Proposição 4.2.5 que $\bar{f} = \bar{g} \circ (\psi|_{\frac{\circ}{U_{n_k}}})$.

Agora seja $V_{m_k} \subseteq F$ tal que $T([f]) = [\bar{f} \circ (\varphi|_{V_{m_k}})]$. Então

$$T(S([g])) = T([\bar{g} \circ (\psi|_{U_{n_k}})]) = [\bar{g} \circ (\psi|_{\frac{\circ}{U_{n_k}}}) \circ (\varphi|_{V_{m_k}})] = [\bar{g}|_{V_{m_k}}] = [g].$$

Através dos mesmos argumentos mostramos que $S \circ T([f]) = [f]$, para toda $[f] \in \mathcal{H}(K_E)$; e portanto T é um isomorfismo topológico entre $\mathcal{H}(K_E)$ e $\mathcal{H}(L_F)$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Seja $T : \mathcal{H}(K_E) \longrightarrow \mathcal{H}(L_F)$ um isomorfismo topológico. Pelo mesmo argumento utilizado na demonstração de (2) $\Rightarrow$ (1) do Teorema 4.1.1, para cada $k \in \mathbb{N}$ fixado existem $m_k \in \mathbb{N}$ e um homomorfismo contínuo T_k tal que o seguinte diagrama é comutativo.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}(K_E) & \xrightarrow{T} & \mathcal{H}(L_F) \\ i_k \uparrow & & \uparrow i_{m_k} \\ \mathcal{H}_b(U_k) & \xrightarrow{T_k} & \mathcal{H}_b(V_{m_k}) \end{array}$$

Como E'' é do tipo Tsirelson-James, segue que E é do tipo Tsirelson-James, pela Proposição 1.3.2, e sendo U_k convexo e equilibrado, temos pelo Teorema 3.2.8 que existe um aplicação holomorfa $\varphi_k : \frac{\circ}{V_{m_k}} \longrightarrow \frac{\circ}{U_k}$ tal que $\overline{T_k(f)} = \bar{f} \circ \varphi_k$, para toda $f \in \mathcal{H}_b(U_k)$. Assim $T_k(f) = \overline{T_k(f)}|_{V_{m_k}} = \bar{f} \circ (\varphi|_{V_{m_k}})$, para toda $f \in \mathcal{H}_b(U_k)$.

Aplicando o mesmo argumento para $S = T^{-1}$, encontramos um inteiro $n_k \geq k$ e uma aplicação holomorfa $\psi_k : \frac{\circ}{U_{n_k}} \longrightarrow \frac{\circ}{V_{m_k}}$, tal que o seguinte diagrama é comutativo,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}(L_F) & \xrightarrow{S} & \mathcal{H}(K_E) \\ i_{m_k} \uparrow & & \uparrow i_{n_k} \\ \mathcal{H}_b(V_{m_k}) & \xrightarrow{S_k} & \mathcal{H}_b(U_{n_k}) \end{array}$$

onde $S_k : \mathcal{H}_b(V_{m_k}) \longrightarrow \mathcal{H}_b(U_{n_k})$ é tal que $\overline{S_k(g)} = \bar{g} \circ \psi_k$, para toda $g \in \mathcal{H}_b(V_{m_k})$.

Como $T \circ i_k = i_{m_k} \circ T_k$, aplicamos S nesta igualdade obtemos que $i_k = S \circ i_{m_k} \circ T_k$. Usando que $S \circ i_{m_k} = i_{n_k} \circ S_k$ temos que $i_k = i_{n_k} \circ S_k \circ T_k$. Em particular, para cada $f \in E' \subseteq \mathcal{H}_b(U_k)$ segue que $[f] = [S_k(T_k(f))]$, e portanto pelo Princípio da Identidade [51, Proposição 5.7] temos que $f = S_k(T_k(f))$ sobre U_{n_k} . Assim $\bar{f} = \overline{S_k(T_k(f))}$ sobre $\overline{U_{n_k}}^*$. Ou seja, $\bar{f} = \overline{T_k(f)} \circ \psi_k$, e assim $\bar{f} = \bar{f} \circ \varphi_k \circ \psi_k$ sobre $\overline{U_{n_k}}^*$, para todo $f \in E'$. Desta forma, para cada $z \in \overline{U_{n_k}}^* \subset E''$, temos que $z(f) = (\varphi_k \circ \psi_k)(z)(f)$, para todo $f \in E'$, isto é, $\varphi_k \circ \psi_k : \overline{U_{n_k}}^* \longrightarrow \overline{U_k}^*$ é a aplicação inclusão.

Afirmção 1: $\varphi_1 = \varphi_k$ sobre cada $\overline{V_{m_k}}^*$. De fato, como $E' \subseteq \mathcal{H}_b(U_k)$, para cada $k \in \mathbb{N}$, segue que $i_1(f) = i_k(f)$. Então $T(i_1(f)) = T(i_k(f))$ e portanto $i_{m_1} \circ T_1(f) = i_{m_k} \circ T_k(f)$, isto é, $[T_1(f)] = [T_k(f)]$, o que mostra que $T_1(f) = T_k(f)$ sobre V_{m_k} . Portanto $\overline{T_1(f)} = \overline{T_k(f)}$ em $\overline{V_{m_k}}^*$, para todo funcional linear $f \in E'$. Ou seja $\bar{f} \circ \psi_1 = \bar{f} \circ \psi_k$, para todo $f \in E'$. Portanto, para cada $w \in \overline{V_{m_k}}^* \subseteq F''$, temos que $\psi_1(w)(f) = \psi_k(w)(f)$, para todo $f \in E'$. Isto implica que $\varphi_1 = \varphi_k$ em cada $\overline{V_{m_k}}^*$. Pelos mesmos argumentos provamos que $\psi_1 = \psi_k$ em cada $\overline{U_{n_k}}^*$.

Afirmção 2: T depende apenas de φ_1 . Seja $[f] \in \mathcal{H}(K_E)$. Então $f \in \mathcal{H}_b(U_k)$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Pela Afirmção 1 temos que $T([f]) = [\bar{f} \circ \varphi_k|_{V_{m_k}}] = [\bar{f} \circ \varphi_1|_{V_{m_k}}]$. Pelos mesmos argumentos temos que S depende somente de ψ_1 .

Afirmção 3: $\varphi_1(L) \subseteq K$. Como efeito, como $L \subset V_{m_k}$, para todo $k \in \mathbb{N}$, segue da Afirmção 1 que $\varphi_1(L) = \varphi_k(L) \subseteq \overline{U_{n_k}}^* = K + B_{E''}(0, \frac{1}{n_k})$, para todo $k \in \mathbb{N}$, onde a última igualdade segue do Lema 1.2.10. Como K é fechado, segue que $\varphi_1(L) \subseteq K$. Pelos mesmos argumentos temos que $\psi_1(K) \subseteq L$.

Para cada $g \in F' \subset \mathcal{H}_b(V_{m_1})$, temos pela Afirmção 2 que $S([g]) = [\bar{g} \circ (\psi_1|_{U_{n_1}})]$. Como $f = \bar{g} \circ (\psi_1|_{U_{n_1}}) \in \mathcal{H}_b(U_{n_1})$, segue que $[g] = T \circ S([g]) = [\bar{f} \circ (\varphi_1|_{V_{m_{n_1}}})]$. Do Princípio da Identidade [51, Proposição 5.7] concluímos que

$$\bar{f} \circ (\varphi_1|_{V_{m_{n_1}}}) = g \text{ em } V_{m_{n_1}}.$$

Por outro lado, segue da Proposição 4.2.5 que $\bar{f} = \bar{g} \circ \psi_1 \in \mathcal{H}_b(\overline{U_{n_1}}^*)$. Ou seja,

$$\bar{g} \circ \psi_1 \circ \varphi_1 = g \text{ em } V_{m_{n_1}}.$$

Portanto $\bar{g} \circ \psi_1 \circ \varphi_1 = \bar{g}$ em $\overline{V_{m_{n_1}}}^{\circ*}$. Ou seja, para cada $w \in \overline{V_{m_{n_1}}}^{\circ*}$ temos que

$$(\psi_1 \circ \varphi_1)(w)(g) = w(g), \text{ para todo } g \in F',$$

isto é, $\psi_1 \circ \varphi_1 : B \longrightarrow B$ é a aplicação identidade, onde $B = \overline{V_{m_{n_1}}}^{\circ*}$. Se denotarmos $A = \psi_1^{-1}(B) \subseteq \overline{U_{n_1}}^{\circ*}$, também vale que $\varphi_1 \circ \psi_1 : A \longrightarrow A$ é a aplicação identidade. Finalmente se definimos $\varphi = \varphi_1|_B : B \longrightarrow A$ e $\psi = \psi_1|_A : A \longrightarrow B$, temos que $\psi = \varphi^{-1}$ e pela Afirmação 3 que $\varphi(L) = K$, o que mostra que $K_{E''}$ e $L_{F''}$ são biholomorficamente equivalentes. ■

O Teorema 4.2.2 foi obtido durante uma visita ao Departamento de Análisis Matemático da Universidad de Valencia, e gostaríamos de agradecer a este Departamento a sua amável hospitalidade.

O próximo teorema mostra que, sob certas hipóteses, as álgebras $\mathcal{H}(K_E)$ e $\mathcal{H}(K_{E''})$ são topologicamente isomorfas, ou seja, do ponto de vista algébrico e topológico, $\mathcal{H}(K_E)$ e $\mathcal{H}(K_{E''})$ são o mesmo conjunto.

Teorema 4.2.6. *Sejam E um espaço de Banach tal que E'' é do tipo Tsirelson-James e K um subconjunto compacto convexo e equilibrado de E . Então as álgebras $\mathcal{H}(K_E)$ e $\mathcal{H}(K_{E''})$ são topologicamente isomorfas.*

Demonstração: Vamos construir um isomorfismo topológico $T : \mathcal{H}(K_E) \longrightarrow \mathcal{H}(K_{E''})$. Para tal sejam $[f] \in \mathcal{H}(K_E)$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que $f \in \mathcal{H}^\infty(U_n)$. Considere $\bar{f} \in \mathcal{H}^\infty(\overline{U_n}^{\circ*})$. Como pelo Lema 1.2.10 $\overline{U_n}^{\circ*} = K + B_{E''}(0, \frac{1}{n})$, temos que $K \subset \overline{U_n}^{\circ*}$ e assim $[\bar{f}] \in \mathcal{H}(K_{E''})$. Desta forma definimos $T([f]) = [\bar{f}]$, para cada $[f] \in \mathcal{H}(K_E)$.

Se $[f_1], [f_2] \in \mathcal{H}(K_E)$ são tais que $[f_1] = [f_2]$, então existe um aberto convexo e equilibrado $U \subseteq E$ contendo K tal que $f_1 = f_2$ em U . Consequentemente $\bar{f}_1 = \bar{f}_2$ em $\overline{U}^*$. Portanto $[\bar{f}_1] = [\bar{f}_2]$, ou seja $T([f_1]) = T([f_2])$, e assim T está bem definida.

T é linear e multiplicativa pois T é a composta do operador inclusão $f \in \mathcal{H}^\infty(U) \longmapsto [f] \in \mathcal{H}(K_E)$ com o isomorfismo $AB : \mathcal{H}^\infty(U) \longrightarrow \mathcal{H}^\infty(\overline{U}^{\circ*})$ do Teorema 4.2.3.

Sejam $[f] \in \mathcal{H}(K_E)$ e $U \subseteq E$ um aberto convexo e equilibrado contendo K tal que $f \in \mathcal{H}^\infty(U)$. Suponha que $T([f]) = [\bar{f}] = [0]$. Como $\overset{\circ}{U}^*$ é convexo, segue do Princípio da Identidade [51, Proposição 5.7] que $\bar{f} = 0$ e portanto $f = \bar{f}|_U = 0$, e assim temos que T é injetiva.

Para mostrar que T é sobrejetiva, seja $[g] \in \mathcal{H}(K_{E''})$. Pelo Lema 1.5.1, existe $U \subseteq E$ um aberto convexo e equilibrado contendo K tal que $g \in \mathcal{H}^\infty(\overset{\circ}{U}^*)$. Seja $f = g|_U$ e considere $\bar{f} \in \mathcal{H}^\infty(\overset{\circ}{U}^*)$. Como E'' é do tipo Tsirelson-James, segue da Proposição 1.3.2 que E é do tipo Tsirelson-James. Agora temos pela Proposição 4.2.5 que $\bar{f} = g$ e assim $T([f]) = [\bar{f}] = [g]$, provando que T é sobrejetiva.

Assim temos definida a inversa de T . Com efeito, sejam $[g] \in \mathcal{H}(K_{E''})$ e $U \subseteq E$ um aberto convexo e equilibrado contendo K tal que $g \in \mathcal{H}^\infty(\overset{\circ}{U}^*)$. Então $T^{-1}([g]) = [g|_U]$.

Seja $U \subseteq E$ um aberto convexo e equilibrado contendo K . Então pela definição de T , temos que o seguinte diagrama comuta,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}(K_E) & \xrightarrow{T} & \mathcal{H}(K_{E''}) \\ i \uparrow & & \uparrow j \\ \mathcal{H}^\infty(U) & \xrightarrow{AB} & \mathcal{H}^\infty(\overset{\circ}{U}^*) \end{array}$$

onde i e j denotam as inclusões canônicas. Agora como AB é contínua, segue que T é contínua. De maneira análoga, se denotarmos por R o operador restrição de $\mathcal{H}^\infty(\overset{\circ}{U}^*)$ em $\mathcal{H}^\infty(U)$, então é claro que R é contínuo e que o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}(K_{E''}) & \xrightarrow{T^{-1}} & \mathcal{H}(K_E) \\ j \uparrow & & \uparrow i \\ \mathcal{H}^\infty(\overset{\circ}{U}^*) & \xrightarrow{R} & \mathcal{H}^\infty(U) \end{array}$$

Portanto T^{-1} é contínua e assim as álgebras $\mathcal{H}(K_E)$ e $\mathcal{H}(K_{E''})$ são topologicamente isomorfas. ■

Dos Teoremas 4.1.1 e 4.2.2 temos o seguinte corolário.

Corolário 4.2.7. *Sejam E e F espaços de Banach tais que E'' e F'' são do tipo Tsirelson-James, K e L subconjuntos compactos convexos e equilibrados de E e F , respectivamente. Se K_E e L_F são biholomorficamente equivalentes então $K_{E''}$ e $L_{F''}$ são biholomorficamente equivalentes.*

Demonstração: Se K_E e L_F são biholomorficamente equivalentes então sempre vale que $\mathcal{H}(K_E)$ e $\mathcal{H}(L_F)$ são topologicamente isomorfos (veja demonstração de $(1) \Rightarrow (2)$ do Teorema 4.1.1). Aplicando o Teorema 4.2.2, temos que $K_{E''}$ e $L_{F''}$ são biholomorficamente equivalentes. ■

Não sabemos se vale a recíproca do Corolário 4.2.7, ou caso contrário, se existe algum exemplo mostrando que tal recíproca é falsa.

Se E'' não é do tipo Tsirelson-James, então temos um resultado mais fraco com relação ao Teorema 4.2.6.

Teorema 4.2.8. *Sejam E um espaço de Banach e K um subconjunto compacto, convexo e equilibrado de E . Então $\mathcal{H}(K_E)$ é topologicamente isomorfo a um subespaço complementado de $\mathcal{H}(K_{E''})$.*

Demonstração: Considere $T : \mathcal{H}(K_E) \longrightarrow \mathcal{H}(K_{E''})$ definida no Teorema 4.2.6, e observe que T é linear, injetiva e contínua. Vamos construir $S : \mathcal{H}(K_{E''}) \longrightarrow \mathcal{H}(K_E)$ da seguinte forma. Dada $[g] \in \mathcal{H}(K_{E''})$. Pelo Lema 1.5.1, existe $U \subseteq E$ um aberto convexo e equilibrado contendo K tal que $g \in \mathcal{H}^\infty(\overset{\circ}{U}^*)$. Então definimos $S([g]) = [g|_U]$.

Sejam $[g_1], [g_2] \in \mathcal{H}(K_{E''})$ tais que $[g_1] = [g_2]$. Pelo Lema 1.5.1, existem U_1 e U_2 subconjuntos abertos convexos e equilibrados de E , contendo K , tais que $g_1 \in \mathcal{H}^\infty(\overset{\circ}{U}_1^*)$ e $g_2 \in \mathcal{H}^\infty(\overset{\circ}{U}_2^*)$. Consideremos $A \subset \overset{\circ}{U}_1^* \cap \overset{\circ}{U}_2^*$ um subconjunto aberto de E'' tal que $g_1 = g_2$ em A . Então $g_1 = g_2$ em $A \cap U_1 \cap U_2 \subseteq E$ e consequentemente pelo Princípio de Identidade [51, Proposição 5.7] temos que $g_1 = g_2$ em $U_1 \cap U_2$. Portanto

$$[g_1|_{U_1}] = [g_1|_{U_1 \cap U_2}] = [g_2|_{U_1 \cap U_2}] = [g_2|_{U_2}],$$

ou seja $S([g_1]) = S([g_2])$ e assim S está bem definida.

Para mostrar que S é linear, sejam $[g_1], [g_2] \in \mathcal{H}(K_{E''})$ e os abertos construídos acima. Então

$$S([g_1 + g_2]) = [(g_1 + g_2)|_{U_1 \cap U_2}] = [g_1|_{U_1 \cap U_2}] + [g_2|_{U_1 \cap U_2}] = [g_1|_{U_1}] + [g_2|_{U_2}] = S([g_1]) + S([g_2]).$$

De maneira análoga mostramos que $S(\lambda[g]) = \lambda S([g])$, para todos $\lambda \in \mathbb{C}$ e $[g] \in \mathcal{H}(K_{E''})$, e também que S é multiplicativa. Por fim, é claro que S é contínua, uma vez que é a composta do operador

inclusão $\mathcal{H}^\infty(\overset{\circ}{\overline{U}}^*) \hookrightarrow \mathcal{H}(K_{E''})$ com o operador restrição $R : \mathcal{H}^\infty(\overset{\circ}{\overline{U}}^*) \longrightarrow \mathcal{H}^\infty(U)$ definido no Teorema anterior, para todo aberto U convexo e equilibrado que contém K . Agora

$$S \circ T([f]) = S([\bar{f}]) = [\bar{f}|_U] = [f].$$

Ou seja $S \circ T : \mathcal{H}(K_E) \longrightarrow \mathcal{H}(K_E)$ é a identidade e portanto segue o teorema. ■

Referências Bibliográficas

- [1] R. Alencar, R. Aron, S. Dineen, *A reflexive space of holomorphic functions in infinitely many variables*. Proc. Amer. Math. Soc. 90 (3) (1984), 407-411.
- [2] H. Alexander, *Analytic functions on Banach spaces*, Ph. D. Thesis, University of California at Berkeley, 1968.
- [3] R. Aron, P. Berner, *A Hahn-Banach extension theorem for analytic mappings*, Bull. Soc. Math. France 106 (1) (1978), 3-24.
- [4] R. Aron, B. Cole, T. W. Gamelin, *Weak-star continuous analytic functions*, Canad. J. Math. 47 (4) (1995), 673-683.
- [5] R. Aron, P. Galindo, M. Lindström, *Compact homomorphisms between algebras of analytic functions*, Studia Math. 123 (3) (1997), 235-247.
- [6] S. Banach, *Théorie des Opérations Linéaires*, Warsaw, 1932. Reprinted by Chelsea, New York, 1955.
- [7] J. A. Barroso, *Topologias nos espaços de aplicações holomorfas entre espaços localmente convexos*, An. Acad. Brasil. Ci. 43 (1971), 527-546.
- [8] J. A. Barroso, *Introduction to Holomorphy*, North-Holland Math. Stud. 106. North Holland, Amsterdam, 1985.

- [9] J. Barroso, M. Matos, L. Nachbin, *On holomorphy versus linearity in classifying locally convex spaces*, in: Infinite Dimensional Holomorphy and Applications, M. Matos (ed.), pp. 31-74, North-Holland Math. Stud. 12, North-Holland, Amsterdam, 1977.
- [10] J. F. Colombeau, *Differential Calculus and Holomorphy*, North-Holland Math. Stud. 64. North-Holland, Amsterdam, 1982.
- [11] K. -D. Bierstedt, R. Meise, *Aspects of inductive limits in spaces of germs of holomorphic functions on locally convex spaces and applications to the study of $(\mathcal{H}(U), \tau_\omega)$* , in: Advances in Holomorphy, J. A. Barroso (ed.), pp. 111-178, North-Holland Math. Stud. 34, North-Holland, Amsterdam, 1979.
- [12] J. Bonet, P. Galindo, D. García, M. Maestre, *Locally bounded sets of holomorphic mappings*, Trans. Amer. Math. Soc. 309 (2) (1988), 609-620.
- [13] G. Botelho, *Ideals of polynomials generated by weakly compact operators*, to appear in Note Mat., 2004.
- [14] C. Boyd, S. Lassalle, *Isometries between spaces of n -homogeneous polynomials*, preprint.
- [15] P. Burlandy, L. A. Moraes, *The spectrum of an algebra of weakly continuous holomorphic mappings*, Indag. Math. (N.S.) 11 (4) (2000), 525-532.
- [16] D. Carando, D. García, M. Maestre, *Homomorphisms and composition operators on algebras of analytic functions of bounded type*, preprint.
- [17] P. G. Casazza, B. Lin, R. H. Lohman, *On nonreflexive Banach spaces which contains no c_0 or l_p* , Canad. J. Math. 32 (6) (1980), 1382-1389.
- [18] G. Coeuré, *Fonctions plurisousharmoniques sur les espaces vectoriels topologiques et applications a l'étude des fonctions analytiques*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 20 (1) (1970), 361-432.

- [19] L. O. Condori, *Homomorfismos contínuos entre álgebras de germes holomorfos*. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, 2001.
- [20] L. O. Condori, M. L. Lourenço, *Continuous homomorphisms between topological algebras of holomorphic germs*, to appear in Rocky Mountain J. Math., 2004.
- [21] V. Dimant, P. Galindo, M. Maestre and I. Zalduendo, *Integral holomorphic functions*, Studia Math. 160 (1) (2004), 83-99.
- [22] S. Dineen, *Holomorphic functions on strong duals of Fréchet-Montel spaces*, in: Infinite Dimensional Holomorphy and Applications, M. Matos (ed.), pp. 147-166, North-Holland Math. Stud. 12, North-Holland, Amsterdam, 1977.
- [23] S. Dineen, *Growth properties of pseudo-convex domains and domains of holomorphy in locally convex topological vector spaces*, Math. Ann. 226 (1977), 229-236.
- [24] S. Dineen, *Holomorphic functions on inductive limits of $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$* , Math. Proc. R. Ir. Acad. 86A (2) (1986), 143-146.
- [25] S. Dineen, *Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces*, Springer-Verlag London, 1999.
- [26] P. Galindo, D. García, M. Maestre, *Entire functions of bounded type on Fréchet spaces*, Math. Nachr. 161 (1993), 185-198.
- [27] P. Galindo, M. Lindström, *Gleason parts and weakly compact homomorphisms between uniform Banach algebras*, Monatsh. Math. 128 (2) (1999), 89-97.
- [28] P. Galindo, L. A. Moraes, M. L. Lourenço, *Compact and weakly compact homomorphisms on Fréchet algebras of holomorphic functions*, Math. Nachr. 236 (2002), 109-118.
- [29] D. García, M. L. Lourenço, L. A. Moraes, O. W. Paques, *The spectra of some algebras of analytic mappings*, Indag. Math. (N.S.) 10 (3) (1999), 393-406.

- [30] D. García, M. Maestre, D. M. Vieira, *Theorems of Banach-Stone type for algebras of germs of holomorphic functions on Banach spaces*, 59^o Seminário Brasileiro de Análise, Ribeirão Preto, SP, Maio 2004, pp. 236-243.
- [31] M. I. Garrido, J. A. Jaramillo, *Variations on the Banach-Stone theorem*, preprint.
- [32] M. I. Garrido, J. A. Jaramillo, A. Prieto, *Banach-Stone theorems for Banach manifolds*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. (Esp.) 94 (4) (2000), 525-528.
- [33] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc. 16, 1955.
- [34] A. Grothendieck, *Espaces Vectoriels Topologiques*, 2nd. ed., Soc. Mat. São Paulo, São Paulo, 1958.
- [35] A. Grothendieck, *Sur les espaces (F) et (DF)* , Summa Brasil. Math. 3 (1954), 57-123.
- [36] M. Hervé, *Analytic and Plurisubharmonic Functions in Finite and Infinite Dimensional Spaces*, Lecture Notes in Mathematics 198. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.
- [37] M. Hervé, *Analyticity in Infinite-Dimensional Spaces*, de Gruyter Studies in Mathematics 10. Walter de Gruyter and Co., Berlin, 1989.
- [38] A. Hirschowitz, *Prolongement analytique en dimension infinie*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 22 (2) (1972), 255-292.
- [39] J. Horváth, *Topological Vector Spaces and Distributions. Vol. I*. Addison-Wesley, Reading-Massachusetts (1966).
- [40] J. M. Isidro, *Characterization of the spectrum of some topological algebras of holomorphic functions*, in: Advances in Holomorphy, J. A. Barroso (ed.), pp. 407-416, North-Holland Math. Stud. 34, North-Holland, Amsterdam, 1979.

- [41] B. Josefson, *A counterexample in the Levi problem*, Proceedings on Infinite Dimensional Holomorphy, pp.168-177. Lecture Notes in Math. 364, Springer, Berlin, 1974.
- [42] B. Josefson, *Weak sequential convergence in the dual of a Banach space does not imply norm convergence*, Ark. Mat. 13 (1975), 79-89.
- [43] W. Kaup, H. Upmeyer, *Banach spaces with biholomorphically equivalent unit balls are isomorphic*. Proc. Amer. Math. Soc. 58 (1976), 129-133.
- [44] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces I. Sequence spaces*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977.
- [45] M. Matos, *The envelope of holomorphy of Riemann domains over a countable product of complex planes*, Trans. Amer. Math. Soc. 167 (1972), 379-387.
- [46] J. Mujica, *Gérmenes holomorfos y funciones holomorfas en espacios de Fréchet*, Publicaciones del Departamento de Teoria de Funciones 1. Universidad Santiago de Compostela, 1978.
- [47] J. Mujica, *Spaces of germs of holomorphic functions*, Studies in analysis, pp. 1-41, Adv. Math. Suppl. Stud., 4, Academic Press, New York, 1979.
- [48] J. Mujica, *Ideals of holomorphic functions on Fréchet spaces*, in: Advances in Holomorphy, J. A. Barroso (ed.), pp. 563-576, North-Holland Math. Stud. 34, North-Holland, Amsterdam, 1979.
- [49] J. Mujica, *Complex homomorphisms of the algebras of holomorphic functions on Fréchet spaces*, Math. Ann. 241 (1979), 73-82.
- [50] J. Mujica, *The Oka-Weil theorem in locally convex spaces with the approximation property*. Seminaire Paul Krée, 4e année: 1977-1978. Equations aux dérivées partielles en dimension infinie, Exp. 3, 7 pp., Paris, 1979.
- [51] J. Mujica, *Complex Analysis in Banach Spaces*, North-Holland Math. Stud. 120. North-Holland, Amsterdam, 1986.

- [52] J. Mujica, *Spectra of algebras of holomorphic functions on infinite dimensional Riemann domains*, Math. Ann. 276 (1987), 317-322.
- [53] J. Mujica, *Spaces of holomorphic mappings on Banach spaces with a Schauder basis*, Studia Math. 122 (2) (1997), 139-151.
- [54] J. Mujica, *Ideals of holomorphic functions on Tsirelson's space*, Arch. Math. 76 (2001), 292-298.
- [55] A. Nissenzweig, *w^* -sequential convergente*, Israel J. Math. 22 (3-4) (1975), 266-272.
- [56] P. Noverraz, *On a particular case of surjective limit*, in: Infinite Dimensional Holomorphy and Applications, M. Matos (ed.), pp. 323-331, North-Holland Math. Stud. 12, North-Holland, Amsterdam, 1977.
- [57] L. Pellegrini, *Bases em espaços de polinômios homogêneos*, 59º Seminário Brasileiro de Análise, Ribeirão Preto, SP, Maio 2004, pp. 192-198.
- [58] P. Pérez Carreras, J. Bonet, *Barrelled Locally Convex Spaces*, North-Holland Math. Studies 131. North-Holland, Amsterdam, 1987.
- [59] Y. I. Petunin, V. I. Savkin, *Convergence generated by analytic functionals, and isomorphism of algebras of analytic functions*, Ukrainian Math. J. 40 (6) (1988), 676-679.
- [60] M. Schottenloher, *Über analytische Fortsetzung in Banachräumen*, Math. Ann. 199 (1972), 313-336.
- [61] M. Schottenloher, *Analytic continuation and regular classes in locally convex Hausdorff spaces*, Portugal. Math. 33 (1974), 219-250.
- [62] M. Schottenloher, *The Levi problem for domains spread over locally convex spaces with a finite dimensional Schauder decomposition.*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 26 (4) (1974), 207-237.

- [63] M. Schottenloher, *Spectrum and envelope of holomorphy for infinite dimensional Riemann domains*, Math. Ann. 263 (1983), 213-219.
- [64] C. Stegall, *Dual of certain spaces with the Dunford-Pettis property*, Notices Amer. Math. Soc. 19 (7) (1972), A799.
- [65] M. H. Stone, *Applications of the theory of Boolean rings to general topology*, Trans. Amer. Math. Soc. 41 (3) (1937), 375-481.
- [66] N. N. Tocha, *As propriedades (P) e (RP) no predual do espaço de Stegall*, 59º Seminário Brasileiro de Análise, Ribeirão Preto, SP, Maio 2004, pp. 170-176.
- [67] B. Tsirelson, *Not every Banach space contains an imbedding of l_p or c_0* , Functional Anal. Appl. 8 (1974), 138-141.
- [68] D. M. Vieira, *Operadores de composição entre as álgebras clássicas de funções analíticas*, Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, 2000.
- [69] D. M. Vieira, *Álgebras topológicas de funções holomorfas em espaços de Banach*, 55º Seminário Brasileiro de Análise, Uberlândia, MG, Maio 2002, pp. 577-582.
- [70] D. M. Vieira, *Álgebras topológicas de funções holomorfas no espaço de Tsirelson*, 56º Seminário Brasileiro de Análise, Niterói, RJ, Novembro 2002, pp. 752-756.
- [71] D. M. Vieira, *Álgebras de Fréchet de funções holomorfas no espaço de Tsirelson*, 57º Seminário Brasileiro de Análise, Viçosa, MG, Maio 2003, pp. 391-396.
- [72] D. M. Vieira, *Theorems of Banach-Stone type for algebras of germs of holomorphic functions*, 58º Seminário Brasileiro de Análise, Campinas, SP, Novembro 2003, pp. 505-510.
- [73] D. M. Vieira, *Theorems of Banach-Stone type for algebras of holomorphic functions on infinite dimensional spaces*, preprint.