

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

ANÁLISE WAVELET NA SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS COM
ADAPTABILIDADE ESPACIAL

Tese de Doutorado em Matemática Aplicada

Margarete Oliveira Domingues

Orientadores:

Dra. Sônia Maria Gomes
Dr. Marco Antônio Raupp

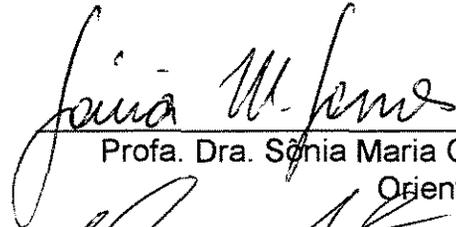
CAMPINAS, 24 DE OUTUBRO DE 2001

200207694

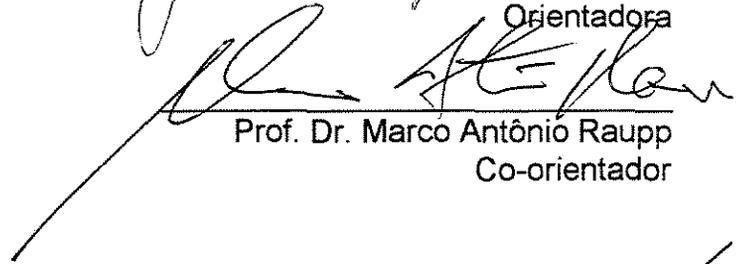
ANÁLISE WAVELET NA SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
PARCIAIS COM ADAPTABILIDADE ESPACIAL

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Margarete Oliveira Domingues e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 24 de outubro de 2001



Prof. Dra. Sônia Maria Gomes
Orientadora



Prof. Dr. Marco Antônio Raupp
Co-orientador



Banca Examinadora:

Abimael Fernando Dourado Loula
Anamaria Gomide
Pedro Leite da Silva Dias
Philippe Remy Bernard Devloo
Sônia Maria Gomes

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Matemática Aplicada.

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	T/UNICAMP
	D713a
V.	
TIPO	47904
PROJ.	16-837/03
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PRECIS	R\$ 11,00
DAT.	15-02-02
N.º CPD	

CM00163779-5

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Domingues, Margarete Oliveira

D713a Análise wavelet na simulação numérica de equações diferenciais parciais com adaptabilidade espacial / Margarete Oliveira Domingues -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2001

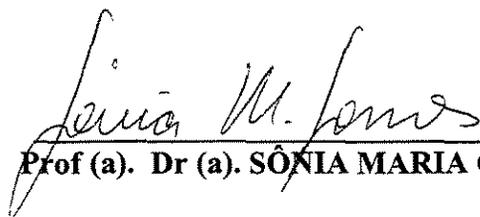
Orientadores : Sônia Maria Gomes; Marco Antônio Raupp

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Wavelets (Matemática). 2. Equações diferenciais parciais - Soluções numéricas. 3. Análise numérica. I. Gomes, Sônia Maria. II. Raupp, Marco Antônio. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Tese de Doutorado defendida em 24 de outubro de 2001 e aprovada

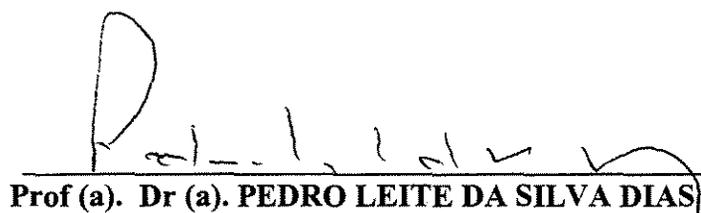
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



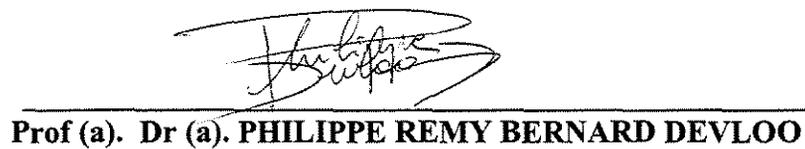
Prof (a). Dr (a). SÔNIA MARIA GOMES



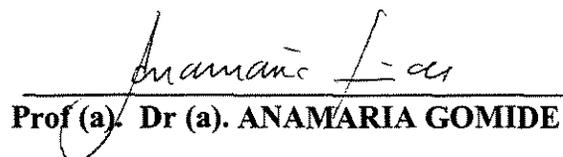
Prof (a). Dr (a). ABIMAEEL FERNANDO DOURADO LOULA



Prof (a). Dr (a). PEDRO LEITE DA SILVA DIAS



Prof (a). Dr (a). PHILIPPE REMY BERNARD DEVLOO



Prof (a). Dr (a). ANAMARIA GOMIDE

À minha família

A autora agradece:

- à Dra. Sônia Maria Gomes e ao Dr. Marco Antônio Raupp toda a orientação e apoio para a concretização desta pesquisa;
- à Dra. Sônia, Dra. Lilliam, Dra. Cristina, Dra. Vera e ao Dr. Phillippe o incentivo na realização deste trabalho e a dedicação como professores;
- à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) o auxílio financeiro a este programa de doutorado (proc. 94/2016–9);
- a todos os funcionários da Secretaria de Pós Graduação, representados na pessoa da Sra. Cidinha;
- a todos os funcionários do Departamento de Matemática Aplicada, representados na pessoa da Sra. Fátima;
- a todos os amigos da UNICAMP, em especial à Cláudia, Patrícia, Magda, Emília, ao Castilho, Mix, Elvio e Eric, o apoio durante o programa de doutorado.
- a todos os amigos do INPE, em especial ao Leonardo, Nelson, Marco, Clóvis, à Eni e Eloisa o apoio na conclusão deste trabalho.
- a todos os meus familiares e amigos, em especial ao Odim, à Tereza, à Maria das Dores, à Lucília, à Valéria, à Dirce, ao Rui, à Solange, ao Gerson e à Lama Tsering, os momentos alegres que vivemos juntos.
- a todos os que contribuem no desenvolvimento e divulgação de programas de livre distribuição e código aberto, em especial a GNU FreeSoftware Foundation e aos participantes dos projetos GNU/LINUX, GNU/Octave, GNU/gcc, GNU/Maxima, KDE, OpenDx, LaTeX e Prosper.

Resumo

Motivado pelos modelos de fenômenos em Meteorologia e áreas afins, o trabalho desta tese foi desenvolvido com o objetivo de formular um método numérico, com adaptabilidade espacial, adequado para a simulação computacional de problemas de equações diferenciais parciais evolutivas. Os resultados apresentados nesta pesquisa ressaltam as propriedades de detecção de estruturas singulares e compressão de dados, que são características das representações de funções e operadores em termos de bases wavelet. Nesse sentido, numa primeira etapa foram avaliados diversos aspectos de aproximações no contexto de wavelets splines biortogonais. Do ponto de vista teórico, foram estudados o erro de truncamento e o efeito da discretização na velocidade de fase e de grupo. Do ponto de vista computacional, foram avaliadas as representações esparsas de funções e de operadores diferenciais em multinível. Entre as várias estratégias analisadas, adotou-se um método híbrido wavelet + diferenças finitas em malhas adaptativas, com estrutura de blocos. Nesse método os coeficientes wavelets desempenham o papel de indicadores das regiões de refinamento. E a discretização dos operadores é feita por diferenças finitas usuais com espaçamento variável, de acordo com a escala de cada bloco da malha. Entre as razões dessa escolha, vale destacar a sua versatilidade, permitindo alterar, automaticamente, os níveis de refinamento durante a evolução temporal; a facilidade de lidar com condições de fronteiras e termos não lineares; e a estrutura de dados simplificada. Este trabalho resultou no desenvolvimento do programa WDF em OOP/C++ que executa esse método. Em princípio, dada uma precisão desejada, é possível fazer simulações com o refinamento requerido pela solução numérica. São apresentadas simulações 2D para a Equação de Advecção de um pulso, de Advecção-difusão de uma estrutura tipo frente-oblíqua e para o modelo não-linear de Burger.

Abstract

Motivated by the phenomena models in Meteorology and similar areas, the work of this thesis was developed with the objective to formulate a numerical method, with space adaptability, suitable for the computational time evolution partial differential equation simulation. The results presented in this research enhance the properties of detection of singular structures and data compression, characteristic of the representations of functions and operators in terms of wavelet basis. In this direction, in a first stage several aspects of approaches in the context of biorthogonal spline wavelets has been evaluated. From a theoretical point of view, the truncation error and the discretization effect on group and phase velocities has been studied. From the computational point of view, sparse representations has been evaluated for functions and differential operators in multilevel. Among several strategies analyzed, the hybrid method wavelet + finite differences is adopted, in adaptative meshes, with block structure. In this method the wavelet coefficients play the role of pointers of the refinement regions, and the operators discretization is done by usual finite difference schemes with a variable spacing, in accordance to the scale of each block of the mesh. Among the main reasons for this choice, were its versatility, allowing to modify, automatically, the refinement levels during the time evolution; the easiness to deal with boundary conditions and non-linear terms; and a simplified data structure. This work resulted in the development of the program WDF in OOP/C++ that executes this method. In principle, given a desired accuracy, it is possible to make simulations with the refinement required by the numerical solution. 2D simulations of the Equation of Advection of a pulse, Advection-diffusion of a structure type oblique front and for the non-linear Burger's model are presented.

Sumário

- 1 Introdução 1**

- 2 Wavelets Biortogonais 7**
 - 2.1 Introdução 7
 - 2.2 Análise Multirresolução do $L^2(\mathbb{R})$ 7
 - 2.3 Amr Biortogonal 9
 - 2.3.1 Funções Wavelets 10
 - 2.3.2 Esquemas de Aproximação 11
 - 2.3.3 Algoritmos de Mallat 12
 - 2.4 Propriedades 15
 - 2.5 Amrb Bidimensional 20
 - 2.5.1 Algoritmos de Mallat 22

- 3 Casos Particulares de Wavelets Biortogonais 31**
 - 3.1 Introdução 31
 - 3.2 Filtros Interpolantes de Lagrange 32
 - 3.3 Wavelets Splines Biortogonais 33
 - 3.4 Wavelets Ortogonais de Daubechies 35
 - 3.5 Amr Interpolante 37

4	Discretização de Operadores	51
4.1	Introdução	51
4.2	Operadores de Restrição e Prolongamento	52
4.3	Discretizações em um Único Nível	52
4.3.1	Advecção Linear	53
4.3.2	Difusão	55
4.3.3	Advecção Não Linear	56
4.3.4	Síntese das Discretizações	61
4.4	Erro de Truncamento	64
4.4.1	Advecção Linear	64
4.4.2	Advecção Não Linear	67
4.5	Discretização em Multinível	73
5	Modelo de Água Rasa	77
5.1	Introdução	77
5.2	Modelo	77
5.3	Movimentos Oscilatórios no Plano f	78
5.4	Movimentos Oscilatórios em Modelos Discretos	84
6	Método de Petrov–Galerkin Não Linear	97
6.1	Introdução	97
6.2	Modelo de Água Rasa	99
6.3	Discretização Biortogonal em um Único Nível	99
6.4	Discretização Biortogonal em 2 Níveis	100
6.5	Método de Petrov-Galerkin Não Linear	102

7	Método Híbrido: Wavelets + Diferenças Finitas	107
7.1	Caso Unidimensional	108
7.1.1	Discretização e Operação de Funções em Malhas Adaptáveis	108
7.1.2	Problemas de Evolução Temporal	115
7.1.3	Ilustração Numérica: Equação de Burger	116
7.2	Caso Bidimensional	118
7.2.1	As Malhas	119
7.2.2	Extensão e Redução de Malhas	127
7.2.3	Problemas de Evolução Temporal	129
7.2.4	Ilustração Numérica: Equação da Advecção Linear	132
7.2.5	Ilustração Numérica: Equação da Advecção–difusão	136
7.2.6	Ilustração Numérica: Equação de Burger	139
8	Conclusão	143
	Referências Bibliográficas	145
A	Convenções e Definições	151
A.1	Análise de Fourier	151
A.2	Base de Riesz	152
A.3	Condição de Strang–Fix	152
A.4	Funções Splines	152
A.5	Erro de Interpolação de Lagrange	155
B	Ilustrações de Funções Biortogonais	157

C	Demonstrações	161
C.1	Introdução	161
C.2	Teorema 2.4.1	162
C.3	Teorema 4.4.1	163
C.4	Teorema 4.4.2	165
C.5	Teorema 4.4.3	169
D	Teoria de Água Rasa	175
D.1	Modelo	175
E	Método de Petrov–Galerkin Não Linear	179
E.1	Discretização Biortogonal em um Único Nível	180
F	Malhas Adaptativas \mathcal{M}	187
F.1	Algoritmo de Redução de Árvore	187
F.2	Relações de Vizinhaça em Malhas \mathcal{M}	188
F.3	Comunicação entre Blocos	192
F.4	Condições de Fronteira e Malhas \mathcal{M}	193
F.5	Descrição Resumida do Programa WDF	194

Lista de Figuras

2.1	Exemplo de um filtro H típico.	9
2.2	Exemplo de um filtro G típico.	10
2.3	Arquitetura piramidal para a transformada wavelet biortogonal.	13
2.4	Esquema final de armazenamento dos coeficientes escala e wavelet.	14
2.5	Função escala e wavelet de Daubechies	15
2.6	Espectro da função escala e wavelet de Daubechies	16
2.7	Plano $x \times \xi$	16
2.8	Exemplo da localização dos coeficientes wavelets significativos	18
2.9	Imagem Meteosat original.	19
2.10	Imagem Meteosat reconstruída	20
2.11	Arquitetura piramidal para a DWT biortogonal 2D.	24
2.12	Arquitetura piramidal para a DWT inversa biortogonal 2D.	25
2.13	Esquema final de armazenamento para o caso bidimensional.	25
3.1	Filtro P_M para $M = 2, 4, 6, 8$	33
3.2	Filtro (H^*) para: (a) $(N, N^*) = (1, 5)$ e (b) $(N, N^*) = (2, 4)$	35
3.3	Funções ortogonais escala e wavelet de Daubechies para $K = 3, 4$	36
3.4	Função escala interpolante ϕ para $M = 2, \dots, 8$	37

3.5	Exemplo de malhas diádicas encaixadas.	38
3.6	Esquema do processo de interpolação	39
3.7	Representação da posição dos pontos de uma malha diádica \mathcal{X}^{j+1}	47
3.8	Posição dos coeficientes wavelets bidimensionais	48
4.1	Esquema para operador L^j na formulação mista.	60
4.2	Função $\tilde{\phi}_0$	60
4.3	Funções $\tilde{\phi}_0$ e $\tilde{\phi}_{1/2}$, para $(N^*, N) = (1, 3)$	61
4.4	Funções $\tilde{\phi}_0$ e $\tilde{\phi}_{1/2}$, para $(N^*, N) = (1, 5)$ e $(1, 7)$	62
4.5	Representação esquemática do erro de truncamento.	64
4.6	Gráfico de $-i\tilde{\Gamma}(z)$	66
4.7	Representação matricial dos operador L_{MR}^j e $(L_{MR}^j)^{-1}$	74
4.8	Porcentagem dos elementos das matrizes L_{MR}^j e $(L_{MR}^j)^{-1}$	75
4.9	Número dos elementos das matrizes L_{MR}^j e $(L_{MR}^j)^{-1}$	76
5.1	Derivada de $ \tilde{\Gamma}(z) $	87
5.2	Erro na frequência de fase w^e	88
5.3	Erro na componente zonal da velocidade de grupo V_g^e	89
5.4	Erro na frequência de fase w^i	92
5.5	Erro na componente zonal da velocidade de grupo V_g^i	92
5.6	Erro na frequência de fase ω_+^{si} do modelo discreto de água rasa.	95
5.7	Erro na velocidade de grupo $V_{g_+}^{si}$ do modelo discreto de água rasa.	96
6.1	Diagrama esquemático da variedade M	98
6.2	Divisão do espectro de frequência (um nível)	100

6.3	Divisão do espectro de frequência (multinível)	101
7.1	Ilustração de malhas adaptativas.	109
7.2	Número de coeficientes wavelets significativos	110
7.3	Ilustração de uma vizinhança.	111
7.4	Ilustração de uma extensão.	112
7.5	Um estêncil de diferenciação em malhas adaptativas.	113
7.6	Um estêncil de diferenciação não-centrado.	114
7.7	Evolução temporal do problema de Burger	116
7.8	$\#(\mathcal{M}^n)$ utilizados na evolução temporal da Equação de Burger	117
7.9	Coefficientes wavelet significativos para a solução da Equação de Burger	117
7.10	Avaliação do erro na solução de Burger	118
7.11	Uma geração de blocos.	120
7.12	Uma árvore quaternária completa.	120
7.13	Uma árvore quaternária não completa	121
7.14	Função tipo <i>pulso</i>	124
7.15	Ilustração de malhas adaptativas	125
7.16	Função tipo frente-oblíqua	126
7.17	Ilustração de malhas adaptativas	126
7.18	Extensão de uma malha	128
7.19	DFD para resolução de uma EDP em uma malha regular por blocos	131
7.20	Condição inicial do modelo de advecção linear.	132
7.21	Representação da condição inicial	133
7.22	Ilustração de uma evolução em malhas adaptativas.	135

7.23	Número de blocos utilizados	136
7.24	Evolução temporal da frente oblíqua.	137
7.25	Condição inicial do modelo advecção–difusão	138
7.26	Número de blocos utilizados	138
7.27	Frente–oblíqua: Malhas estendidas \mathcal{M}^{n+}	139
7.28	Número de blocos utilizados	140
7.29	Ilustração de uma evolução em malhas adaptativas.	141
A.1	Funções B-splines $\mathcal{B}_\ell(x)$ de ordem $\ell=0, 1, \dots, 5$	155
B.1	Funções escalas e wavelets biortogonais splines da família (1, 5).	157
B.2	Funções escalas e wavelets biortogonais splines da família (2, 4).	158
B.3	Funções escala e wavelets bidimensionais – família (1,5).	159
B.4	Funções escala e wavelets bidimensionais duais – família (1,5).	160
F.1	Ilustração das fronteiras de um bloco.	189
F.2	Ilustração dos vizinhos do bloco F.	190
F.3	Ilustração do armazenamento extra de dados em um bloco	193
F.4	Ilustração da comunicação entre blocos vizinhos.	193
F.5	Localização entre blocos vizinhos em condições de fronteiras periódicas.	194

Lista de Tabelas

3.1	Coeficientes do filtro escala e de seu filtro dual	34
3.2	Coeficientes escala $h(k)$ ortogonais de Daubechies	36
3.3	Valores de β_1 e de β_2	43
3.4	Valores dos coeficientes $p(\ell, k)$, para fronteira esquerda	46
3.5	Valores dos coeficientes $p(k)$ para os pontos interiores	46
4.1	Coeficientes de $\Gamma^{(1)}(k)$	54
4.2	Coeficientes $\Gamma^{df}(k)$	55
4.3	Coeficientes $\Gamma^{(2)}(k)$	56
4.4	Coeficientes $\Gamma(p, q)$ para $(N^*, N) = (1, 3)$	58
4.5	Coeficientes $\Gamma(p, q)$ para $(N^*, N) = (1, 5)$	58
4.6	Descretização em bases nodais	63
4.7	Valores de $\mathcal{E}(z)$	66
4.8	Valores de $\mathcal{E}(z)$ para diferenças finitas	67
7.1	Coeficientes $\Gamma_{df}^{(1)}$, para pontos interiores e de fronteira.	114
7.2	Coeficientes $\Gamma_{df}^{(2)}$, para pontos interiores e de fronteira.	114
7.3	Armazenagem em malhas regulares por blocos	125
7.4	Armazenagem em malhas regulares por blocos	127

Nomenclatura

Amr	Análise de multi-resolução
Amrb	Análise de multi-resolução biortogonal
#	Cardinalidade
CSF	Condição de Strang-Fix
DWT	Transformada discreta wavelet
EDP	Equação Diferencial Parcial
MSE	Erro quadrado médio
TE	Erro de truncamento
FFT	Transformada rápida de Fourier
IDWT	Transformada inversa discreta wavelet
IFFT	Transformada rápida inversa de Fourier
Mathematica	Programa de matemática numérica (http://www.wri.com)
Matlab	Programa de matemática numérica (http://www.mathworks.com)
<i>supp</i>	Suporte de uma dada função
T.O.S.	Termos de ordem superior

Capítulo 1

Introdução

Existe uma grande variedade de métodos para a resolução de equações diferenciais. Em geral, as equações diferenciais de maior interesse são não-lineares e não possuem soluções analíticas conhecidas. Com o progresso dos recursos computacionais, matemáticos, físicos, engenheiros, entre outros cientistas, têm se dedicado a desenvolver, quase que independentemente, técnicas numéricas de resolução dessas equações. Mais recentemente, ocorreram grandes êxitos em uma variedade de técnicas adaptativas, classificadas como sendo de multirresolução ou de multinível, que são próprias para o tratamento de estruturas localizadas no espaço. O desenvolvimento dessas técnicas contitui uma área de pesquisa extremamente ativa, com excelentes perspectivas de contribuições práticas.

A análise wavelet possui um papel de destaque nesse contexto numérico. Este tipo de análise foi introduzido formalmente na década de 80, com os principais resultados compilados em Meyer (1990) e Daubechies (1992). Esta nova teoria possui uma forma versátil e elegante de abordar, simplificar e integrar conceitos. Isso resultou na sua rápida adoção em diversas áreas interdisciplinares, com as mais variadas aplicações (ver página web <http://www.wavelet.org>).

Em especial, na última década, a comunidade de análise numérica para equações diferenciais tem dado bastante ênfase á aplicação da ferramenta matemática conhecida como análise multirresolução biortogonal, que é desenvolvida no contexto da teoria de wavelets (várias referências podem ser encontradas em Cohen (1999)). O propósito deste trabalho é contribuir de forma teórica e computacional na avaliação de discretizações biortogonais em equações diferenciais parciais evolutivas, em especial àquelas relacionadas a problemas de interesse em meteorologia, oceanografia e áreas afins. Particularmente, é dado destaque à aplicação dessa técnica ao sistema de águas rasas, que é considerado o protótipo para testes de novas técnicas numéricas em modelos de previsão de tempo (Morton, 1998; Grammelvedt, 1969; Steppeler, 1990; Yavneh e Williams, 1995; Jakob-Chien et al., 1995; Cai e Navon, 1995).

Há dois aspectos importantes em uma análise de multirresolução: um do ponto de vista discreto e outro do ponto de vista funcional. Do ponto de vista discreto, uma análise de multirresolução corresponde a transformações entre dois tipos de dados: um em um nível mais refinado e o outro em multinível. A seguir encontra-se um esquema dessa transformação

$$c^{j+1} \begin{array}{c} \xrightarrow{DWT} \\ \xleftarrow{IDWT} \end{array} c_{MR}^{j+1},$$

em que $c_{MR}^{j+1} = \{c^{j_0}, d^{j_0}, \dots, d^j\}$ são os dados em multirresolução. Os dados $c^j = (c_k^j)$ contêm informações locais de uma dada função f , em que o índice j refere-se ao nível de escala e o índice k está associado à localização espacial. Por esta razão c_k^j são conhecidos como coeficientes de escala. Os coeficientes c_k^j dão informações sobre f em torno de pontos x_k^j de uma malha diádica regular X^j . Os dados d_k^j são os chamados coeficientes wavelet e traduzem a diferença de informação entre os níveis j e $j + 1$ em torno daqueles pontos x_{2k+1}^{j+1} pertencentes à malha mais refinada X^{j+1} , mas que não estão em X^j . Neste sentido, DWT transforma os coeficientes de escala c^{j+1} , do nível mais refinado, nos coeficientes de escala c^{j_0} , do nível menos refinado, e nos detalhes d^ℓ , dos níveis intermediários $j_0 \leq \ell \leq j$. O sucesso de tal transformação deve-se essencialmente às propriedades:

- Não há um aumento do total de informações armazenadas, i.e., $\#c^{j+1} = \#c^j + \#d^j$.
- A transformada é inversível, i.e., as informações nas escalas mais finas podem ser recuperadas do conjunto de dados em multinível.
- Tanto a decomposição DWT quanto a reconstrução IDWT são efetuadas por algoritmos eficientes, i.e., esses algoritmos necessitam de $\#c^{j+1}$ operações de ponto flutuante.
- Os algoritmos de decomposição e reconstrução são estáveis, i.e., pequenas variações nos dados transformados causam apenas pequenas alterações nos dados reconstruídos.
- Os coeficientes wavelets são pequenos em regiões de suavidade da função.

Já, do ponto de vista funcional, consideram-se espaços de funções encaixados

$$V^j \subset V^{j+1}$$

e espaços complementares W^j , de tal forma que se verificam decomposições em multinível por somas diretas, do tipo:

$$V^{j+1} = V^{j_0} + W^{j_0} + \dots + W^j.$$

Existem bases $\{\phi_k^j\}$ de V^j e $\{\psi_k^j\}$ de W^j tais que as transformações DWT e IDWT correspondem a mudanças de base

$$\{\phi_k^{j+1}\} \leftrightarrow \{\phi_k^{j_0}\} \cup \{\psi_k^{j_0}\} \cup \dots \cup \{\psi_k^j\},$$

isto é,

$$\sum_k c_k^{j+1} \phi_k^{j+1}(x) = \sum_k c_k^j \phi_k^{j_0}(x) + \sum_{l=j_0}^j \sum_k d_k^l \psi_k^l(x).$$

As funções $\phi_k^j(x)$ são chamadas de funções de escalonamento e as $\psi_k^j(x)$ são denominadas de wavelets.

Como será detalhado no decorrer deste trabalho, análises de multirresolução podem ser definidas no contexto de wavelets biortogonais. Em particular, dar-se-á atenção às wavelets ortogonais de Daubechies e à família das splines biortogonais, que têm como caso especial as análises de multirresolução interpolantes (Daubechies (1992); Chui (1992); Donoho (1992)). Em todos os casos, os dados discretos c_k^j e d_k^j são determinados pela ação apropriada de funcionais definidos em termos de bases duais $\phi_k^{*j}(x)$ e $\psi_k^{*j}(x)$.

Por representarem os detalhes entre níveis de resolução, os coeficientes wavelet podem ser utilizados como indicadores locais de regularidade das funções analisadas. Esses coeficientes são pequenos em regiões onde f é suave e maiores em regiões com singularidade. Por esta razão, expansões em wavelets possuem a vantagem de poderem ser mais econômicas para uma classe bem ampla de funções. Por exemplo, uma função suave por partes possui a maioria dos seus coeficientes wavelet desprezíveis, de tal forma que eles até podem ser desconsiderados, mantendo uma boa aproximação da função original após a reconstrução. Esse é o princípio básico na maioria das aplicações de wavelets e, em particular, deste trabalho.

Proposta desta Tese:

Este trabalho, por meio da avaliação teórica e computacional das discretizações biortogonais, contribui na área de aplicações dos conceitos e técnicas de análise de multirresolução à análise numérica de equações diferenciais parciais. Neste sentido, para operadores diferenciais L , são considerados vários tipos de discretizações espaciais: esquemas do tipo Petrov-Galerkin, esquemas mistos e discretizações adaptativas, comentados a seguir.

Esquemas do tipo Petrov-Galerkin — Esse tipo de discretização pode ser efetuada por discretizações ou em um único nível L^j ou em multinível L_{MR}^j . Nos esquemas do tipo Petrov-Galerkin de um só nível, a idéia é usar as funções básicas $\phi_k^j(x)$ como funções *trial* e suas duais $\phi_k^{*j}(x)$ como funções teste. Neste caso, L^j reduz-se a um operador de diferenças finitas atuando sobre os

coeficientes escala c^j . Já, em discretizações em multinível as bases $\{\phi_k^{j_0}\} \cup \{\psi_k^{j_0}\} \cup \dots \cup \{\psi_k^{j-1}\}$ desempenham o papel de funções *trial* e suas respectivas duais atuam como funções teste. Neste caso a matriz L_{MR}^j opera sobre a representação dos dados em multinível c_{MR}^j . As duas formulações mostraram-se úteis nos estudos teóricos apresentados.

Esquemas mistos — Neste caso, mantém-se as funções *trial*, mas utiliza-se como funções teste com outro tipo de funcional. No caso de operadores não lineares, são de especial interesse os funcionais definidos por combinações de distribuições do tipo delta de Dirac.

Discretizações adaptativas — Este caso aplica-se a representações de multinível em que intervêm apenas um número reduzido de funções básicas, escolhidas de acordo com a solução do problema. Neste trabalho, são especificamente utilizadas as análises de multirresolução para valores pontuais. Neste contexto, a adaptatividade está associada a discretizações de funções em malhas com um número reduzido de pontos. Pode-se alterar o número e a posição desses pontos para um melhor ajuste das soluções numéricas representadas. Para operadores diferenciais, usam-se diferenças finitas com espaçamento regular adaptado à escala local de cada ponto. Os conceitos de multirresolução, tanto do ponto de vista discreto como funcional, são usados na construção de tais malhas e na interpolação de possíveis estênceis ausentes nas malhas (estênceis necessários, por exemplo, para a diferenciação).

Organização dos Capítulos:

No Capítulo 2 são introduzidos os conceitos e propriedades de interesse sobre as análises de multirresolução biortogonais, tanto do ponto de vista funcional quanto do ponto de vista discreto. A DWT e sua inversa IDWT são descritas em termos de bancos de filtros. Em particular, algoritmos no domínio de Fourier são desenvolvidos para a implementação de tais esquemas para dados periódicos bidimensionais.

No Capítulo 3 são apresentados dois exemplos importantes de wavelets biortogonais que são de particular interesse neste estudo: as wavelets ortogonais de Daubechies e as wavelets biortogonais splines. São destacadas também as propriedades das análises de multirresolução interpolantes.

No Capítulo 4 é introduzido um formalismo, baseado nos conceitos de operadores de restrição e prolongamento, visando uma formulação unificada de diferentes esquemas de discretização de operadores diferenciais no contexto de análise de multirresolução biortogonal. Utilizando tal formalismo, a ordem do erro de truncamento de tais esquemas é analisada. A análise do erro de truncamento fica mais simples na formulação em um único nível L^j . Na formulação em multinível L_{MR}^j alguns operadores podem ser representados por matrizes esparsas. No final deste capítulo, são apresentados exemplos numéricos para uma avaliação do grau de compacidade das matrizes L_{MR}^j da discretização de operadores diferenciais utilizando wavelets biortogonais.

No Capítulo 5 é avaliado o efeito das discretizações biortogonais de ordem superior nas velocidades de fase e de grupo quando aplicadas a modelos bidimensionais de advecção, de ondas de gravidade e de água rasa. A velocidade de fase e a velocidade de grupo são entidades físicas de grande importância no entendimento da propagação e dispersão dos modelos ondulatórios. O efeito de discretizações sobre essas quantidades físicas é importante para a verificação da adequação das versões numéricas dos modelos. Por exemplo, a equação de advecção, apesar de não ser dispersiva, possui uma grande variedade de versões numéricas que são dispersivas (Trefethen, 1982). Neste capítulo, aplica-se a metodologia desenvolvida no capítulo anterior, estendida para o caso bidimensional, combinada com os métodos de avaliação propostos por Grotjahn e O'Brien (1976); Kress e Oliger (1972); Swartz e Wendroff (1974); Torbjörn e Sundström (1973), estendidos ao caso de diferenças finitas provenientes de discretizações biortogonais de ordem superior.

No Capítulo 6 é discutida uma técnica para discretização temporal, conhecida como método de Galerkin não-linear, para o sistema não linear de água rasa. Esse método foi introduzido por Roger Temam e seus colaboradores no final da década de 80 (Temam, 1989, 1990). Tipicamente, esse tipo de formulação aplica-se na simulação numérica do comportamento das soluções de equações de evolução dissipativas, para tempos suficientemente grandes. Nesse regime, os modos altos possuem pequena quantidade de energia, de tal forma que suas interações podem ser desprezadas nos termos não lineares. Além disso, como a variação temporal desses modos altos é mais lenta do que a dos modos baixos, na prática eles podem ser considerados em regime quasi-estacionário. Portanto, a idéia fundamental é poder separar a solução em vários níveis de resolução, com contribuições de diferentes ordens de magnitude e velocidades de evolução. Neste sentido, uma análise de multirresolução biortogonal é um contexto natural para a aplicação dessa metodologia.

No Capítulo 7 é formalizado e implementado o método híbrido sugerido por Holmström (1997). Por um lado está um esquema tradicional de diferenças finitas em malha uniforme; por outro lado está a discretização com adaptação de funções por valores pontuais em malha irregular. A análise wavelet interpolante contribui na construção de tais malhas e na definição de um esquema de interpolação adaptativa para fazer a conexão entre os ambientes uniforme e não uniforme, utilizando as técnicas de análise descritas no Capítulo 3. Para o refinamento local da malha, utilizam-se os coeficientes wavelet significativos como indicadores das regiões de pouca suavidade da função representada. Nesse tipo de técnica, a estrutura da malha adaptativa resultante é dependente da função analisada, podendo apresentar uma composição bem heterogênea: esparsa em regiões de suavidade e densa nas regiões de pouca suavidade. Esse fato aumenta a complexidade da estrutura de dados, principalmente em dimensões superiores. Por isto, para o caso bidimensional, são preferidas malhas que sejam localmente regulares, em blocos, como as tratadas neste trabalho. Isso facilita as operações de acesso e de armazenamento e os cálculos, com o custo de se ter um maior número de pontos nas malhas.

No Capítulo 8 têm-se as conclusões e as perspectivas futuras deste estudo.

Para auxiliar na leitura e na compreensão desse trabalho, desenvolveram-se alguns tópicos em forma complementar, apresentados nos apêndices. No Apêndice A, apresentam-se algumas convenções e definições utilizadas no texto. No Apêndice B, incluíram-se algumas ilustrações de funções básicas biortogonais unidimensionais e bidimensionais. No Apêndice C, encontram-se as demonstrações dos teoremas enunciados nos Capítulos 2 e 4. No Apêndice D, encontra-se uma breve introdução à teoria de água rasa. No Apêndice E apresentam-se detalhes da discretização do método de Petrov–Galerkin não-linear no contexto biortogonal. No Apêndice F, são descritos alguns algoritmos, conceitos e definições auxiliares na implementação de malhas adaptativas por blocos.

Principais Contribuições Originais desta Tese:

- (Capítulo 2) A proposta do algoritmo, elaborado no domínio de Fourier, para a DWT biortogonal de dados bidimensionais periódicos. Esse algoritmo pode ser de utilidade no caso de filtros longos ou infinitos. Este resultado foi publicado em Domingues et al. (1995). Fez-se também uma aplicação à compressão de imagens meteorológicas publicado em Domingues (1998b) e à localização de estruturas convectivas nessas imagens, publicado em Domingues e Mendes Jr. (1998).
- (Capítulo 4) A avaliação da ordem do erro de truncamento nas discretizações dos operadores de difusão e advecção (linear e não-linear) usando formulações de Petrov–Galerkin e mista. Esses resultados integram o artigo Castilho et al. (1997) e foram apresentados no Mini-Simpósio sobre Wavelets do XIX CNMAC.
- (Capítulo 5) O estudo dos erros, em discretizações biortogonais de ordem superior, nas velocidades de fase e de grupo dos modelos bidimensionais de advecção, de ondas de gravidade e de água rasa. Esses resultados integram o artigo Domingues (1997) e foram parcialmente publicados em Domingues e Gomes (1997) e Domingues (1998a).
- (Capítulo 6) A formulação do método de Petrov–Galerkin não-linear no contexto biortogonal na discretizações do sistema de água rasa não-linear.
- (Capítulo 7) O detalhamento da formulação do método em malhas adaptativas (caso pontual 1D e por blocos 2D). A formulação e desenvolvimento dos algoritmos bidimensionais baseando-se nas estruturas de árvores quaternárias. Também, a implementação computacional, em que todas as simulações são realizadas no paradigma de programação orientada a objeto em linguagem C^{++} . Ainda, as validações numéricas para a equação de Burger 1D e para as equações 2D de advecção, de advecção–difusão (frente oblíqua) e de Burger.

Como um todo, essa tese contribui na discussão e avaliação de discretizações utilizando técnicas de análise multirresolução, no contexto de wavelets biortogonais, aplicadas à resolução de equações diferenciais parciais evolutivas.

Capítulo 2

Wavelets Biortogonais

2.1 Introdução

Neste capítulo é apresentada a definição das wavelet biortogonais e as propriedades de interesse ao estudo de resolução numérica de equações diferenciais parciais - EDP's. Nas próximas seções são introduzidos os conceitos de análise de multirresolução (Amr) do $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ e de análise de multirresolução biortogonal (Amrb) do $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$. Na Seção 2.5 essa definição é estendida à Amrb bidimensional, descrevendo o caso periódico bidimensional e seus algoritmos de cálculo. Na Seção 2.4 são apresentadas algumas propriedades de localização das bases wavelet e a condição de Strang-Fix.

2.2 Análise Multirresolução do $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$

Uma análise multirresolução do $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ $\{V^j, \phi\}$, designada Amr $\{V^j, \phi\}$, é uma sequência de sub-espacos lineares V^j de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ e uma função associada ϕ , conhecida como função escala, satisfazendo as seguintes condições:

1. $\dots \subset V^{-2} \subset V^{-1} \subset V^0 \subset V^1 \subset V^2 \subset \dots$,
 $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V^j = \{0\}$,
 $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}) = \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V^j}$,
2. $f(x) \in V^j \Leftrightarrow f(2x) \in V^{j+1}$;

3. $f(x) \in V^0 \Leftrightarrow f(x - k) \in V^0, \forall k \in \mathbb{Z}$;
4. $\phi(x - k)_{k \in \mathbb{Z}}$, forma uma base de Riesz¹ de V^0 .

Como consequência das propriedades descritas acima, têm-se os seguintes resultados:

- Existe uma sequência $h \in \ell^2$ tal que

$$\phi(x) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) \phi(2x - k) \quad (\text{Relação de Escala}). \quad (2.1)$$

em que $h(k)$ são os coeficientes do filtro escala.

- Para cada inteiro j , a família

$$\phi_k^j(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - k), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (2.2)$$

forma uma base de Riesz de V^j .

No domínio da frequência, a relação de escala é expressa como

$$\hat{\phi}(\xi) = H(\xi/2) \hat{\phi}(\xi/2), \quad (2.3)$$

em que $H(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) e^{-ik\xi}$ é o filtro de escala associado a ϕ . Tipicamente os filtros H são do tipo passa-baixa, i.e., $H(0) = 1$ e $H(\pi) = 0$ (conforme Figura 2.1). Para um maior detalhamento das principais propriedades de uma Amr veja em Daubechies (1992).

A grande contribuição da teoria wavelet é a caracterização de espaços complementares entre dois espaços encaixados $V^j \subset V^{j+1}$, através de somas diretas

$$V^{j+1} = V^j + W^j.$$

Neste sentido, os espaços W^j contêm a diferença de informação entre o nível de resolução j e o nível mais refinado $j + 1$, ou seja, os detalhes entre um nível e o seguinte. Essa representação em soma direta não é única. Na próxima seção um método para a construção dos W^j é descrito no contexto de Amr biortogonal.

¹Ver definição de base de Riesz na página 152.

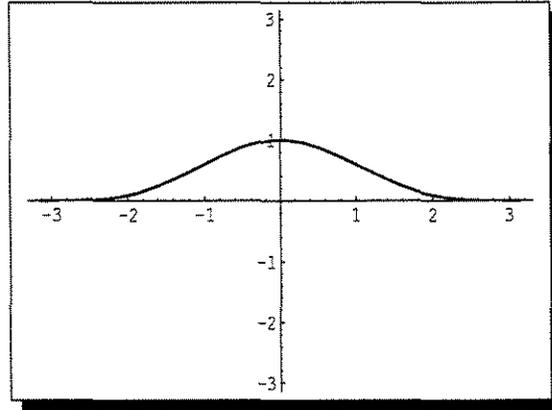


Figura 2.1: Exemplo de um filtro H típico.

2.3 Amr Biortogonal

Uma Amr biortogonal, designada Amrb, consiste de pares $\{V^j, \phi\}$ e $\{V^{*j}, \phi^*\}$ de Amr relacionadas por

$$\mathbb{L}^2(\mathbb{R}) = V^0 + V^{*0\perp},$$

de tal forma que as funções de escala associadas ϕ e ϕ^* satisfazem a relação de biortogonalidade

$$\langle \phi(\cdot - k), \phi^*(\cdot - \ell) \rangle := \int \phi(x - k) \phi^*(x - \ell) dx = \delta_{k,\ell}, \quad (2.4)$$

e por isso são chamadas funções de escala conjugadas ou duais. Analogamente, para um j fixo, as famílias $\{\phi_k^j\}$ e $\{\phi_k^{*j}\}$ também são biortogonais, i.e.

$$\langle \phi_k^j, \phi_\ell^{*j} \rangle = 2^j \int \phi(2^j x - k) \phi^*(2^j x - \ell) dx = \delta_{k,\ell}, \quad (2.5)$$

No domínio da frequência, a relação de biortogonalidade é expressa por

$$\sum_k \hat{\phi}(w + 2\pi k) \overline{\hat{\phi}^*(w + 2\pi k)} \equiv 1, \quad (2.6)$$

em que a barra superior indica o complexo conjugado. Essa expressão é uma consequência da fórmula do somatório de Poisson². Por outro lado, em termos dos filtros de escala $H(\xi)$ e $H^*(\xi)$, ela também pode ser expressa por

$$H(\xi) \overline{H^*(\xi)} + H(\xi + \pi) \overline{H^*(\xi + \pi)} = 1. \quad (2.7)$$

²Ver fórmula do somatório de Poisson, Teorema A.1.1, na página 152.

2.3.1 Funções Wavelets

Sejam $W^j = V^{j+1} \cap V^{*j}$ e $W^{*j} = V^{*j+1} \cap V^j$. São válidas as seguintes somas diretas:

$$\begin{aligned} V^{j+1} &= V^j + W^j, \\ V^{*j+1} &= V^{*j} + W^{*j}. \end{aligned}$$

Definindo as funções ψ e ψ^* como

$$\psi(x) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(k) \phi(2x - k), \quad (2.8)$$

$$\psi^*(x) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} g^*(k) \phi^*(2x - k), \quad (2.9)$$

em que $g(k) = (-1)^{k+1} h^*(-k + 1)$ e $g^*(k) = (-1)^{k+1} h(-k + 1)$, prova-se que as famílias

$$\psi_k^j(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k), \quad (2.10)$$

$$\psi_k^{*j}(x) = 2^{j/2} \psi^*(2^j x - k), \quad (2.11)$$

são bases de Riesz de W^j e W^{*j} . A escolha de g e g^* apresentada acima é a mais usual. Os filtros $G(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(k) e^{-ik\xi}$ e $G^*(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g^*(k) e^{-ik\xi}$ são do tipo passa-banda, i.e., $G(0) = G^*(0) = 0$ e $G(\pi) = G^*(\pi) = 1$ (conforme Figura 2.2). No domínio da frequência as relações de escala 2.8 e 2.9 são expressas por

$$\hat{\psi}(\xi) = G(\xi/2) \hat{\psi}(\xi/2), \quad (2.12)$$

$$\hat{\psi}^*(\xi) = G^*(\xi/2) \hat{\psi}^*(\xi/2). \quad (2.13)$$

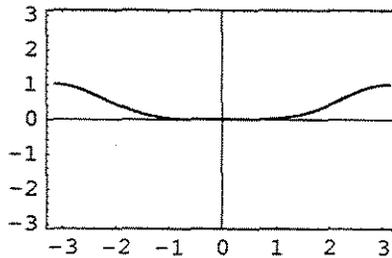


Figura 2.2: Exemplo de um filtro G típico.

As funções ψ_k^j são chamadas de funções wavelet, enquanto as funções ψ_k^{*j} são conhecidas como funções wavelet conjugadas ou duais. Essas famílias de funções satisfazem as condições de biortogonalidade

$$\begin{aligned}\langle \phi_k^j, \psi_\ell^{*j} \rangle &= 0, \\ \langle \phi_k^{*j}, \psi_\ell^j \rangle &= 0, \\ \langle \psi_k^{*j}, \psi_\ell^m \rangle &= \delta_{j,m} \delta_{k,\ell}.\end{aligned}\tag{2.14}$$

As conhecidas famílias wavelet ortogonais de Daubechies são casos particulares das famílias biortogonais em que $\phi = \phi^*$ e $\psi = \psi^*$. Um outro exemplo são as wavelet biortogonais splines em que as funções wavelet ψ^* são funções splines³. Essas wavelets são de particular interesse neste estudo e são descritas com mais detalhes no Capítulo 3.

2.3.2 Esquemas de Aproximação

Uma Amrb é uma ferramenta muito útil para o estudo de funções do $L^2(\mathbb{R})$. Funções $f \in L^2(\mathbb{R})$ podem ser aproximadas pelas suas projeções em V^j

$$\mathcal{P}^j f(x) = \sum_k \langle f, \phi_k^{*j} \rangle \phi_k^j(x).$$

As projeções em W^j ,

$$Q^j f(x) = \sum_k \langle f, \psi_k^{*j} \rangle \psi_k^j(x),$$

contêm a diferença de informação entre os níveis j e $j+1$, i.e.,

$$Q^j f(x) = [\mathcal{P}^{j+1} - \mathcal{P}^j] f(x).$$

Assim,

$$\mathcal{P}^{j+1} f(x) = [\mathcal{P}^j + Q^j] f(x),\tag{2.15}$$

que corresponde à decomposição,

$$V^{j+1} = V^j + W^j.$$

³Ver propriedades dessas funções splines no Apêndice A.4, páginas 152–155.

Em multinível para $j_0 < j$, têm-se:

$$\mathcal{P}^{j+1} f(x) = [\mathcal{P}^{j_0} + Q^{j_0} + \dots + Q^j] f(x), \quad (2.16)$$

que está associado à decomposição

$$V^{j+1} = V^{j_0} + W^{j_0} + \dots + W^j.$$

Definindo

$$c_k^j = \langle f, \phi_k^{*j} \rangle, \quad d_k^j = \langle f, \psi_k^{*j} \rangle, \quad (2.17)$$

a Equação 2.15 pode ser escrita como

$$\sum_k c_k^{j+1} \phi_k^{j+1}(x) = \sum_k c_k^j \phi_k^j(x) + \sum_k d_k^j \psi_k^j(x). \quad (2.18)$$

Em multinível passa-se a ter a seguinte fórmula

$$\sum_k c_k^{j+1} \phi_k^{j+1}(x) = \sum_k c_k^{j_0} \phi_k^{j_0}(x) + \sum_{m=j_0}^j \sum_k d_k^m \psi_k^m(x), \quad (2.19)$$

que corresponde à mudança de base

$$\{\phi_k^{j+1}\} \leftrightarrow \{\phi_k^{j_0}\} \cup \{\psi_k^{j_0}\} \dots \cup \{\psi_k^j\}.$$

Para efetuar essas operações, têm-se as transformada wavelet discreta $DWT = DWT_{j_0}^{j+1}$ e sua inversa $IDWT = IDWT_{j_0}^{j+1}$, i.e.,

$$\{c^{j+1}\} \begin{matrix} DWT \\ \rightleftarrows \\ IDWT \end{matrix} \{c^{j_0}, d^{j_0}, \dots, d^j\}$$

Na próxima seção descreve-se como calcular essas transformações.

2.3.3 Algoritmos de Mallat

No processo de decomposição da DWT, os coeficientes c_k^j e d_k^j são obtidos dos coeficientes c_k^{j+1} através de algumas manipulações das Equações 2.17 e das relações de escala de ϕ^* e ψ^* de tal forma que

$$c_k^j = \sqrt{2} \sum_m h^*(m - 2k) c_m^{j+1} \quad (2.20)$$

e

$$d_k^j = \sqrt{2} \sum_m g^*(m - 2k) c_m^{j+1}. \quad (2.21)$$

Esse algoritmo é esquematizado pela estrutura de bancos de filtros apresentada na Figura 2.3. Nessa figura, o quadrado indica convolução com um filtro. O nome do filtro está indicado no interior do quadrado. O símbolo $2 \downarrow$ indica um *downsampling* ou decimação, i.e., são eliminados os elementos de índice ímpar. O símbolo $2 \uparrow$ indica um *upsampling*, i.e., são acrescentados componentes com valor zero entres as componentes do vetor original. Assim, dado um vetor $c^{j+1} = (c_k^{j+1})$, obtém-se um novo vetor c^j pela aplicação de uma convolução entre c^{j+1} e o filtro h^* seguida de decimação. A diferença de informação entre c^j e c^{j+1} , ou seja, os detalhes de alta frequência, ficam contidos no vetor d^j obtido pela convolução entre c^{j+1} e o filtro g^* seguida de uma decimação. Os d_k^j correspondem aos coeficientes das expansões nas bases wavelet. Esse processo pode ser repetido outras vezes para se obter os coeficientes $d_k^{j-1}, d_k^{j-2}, d_k^{j-3}, \dots$.

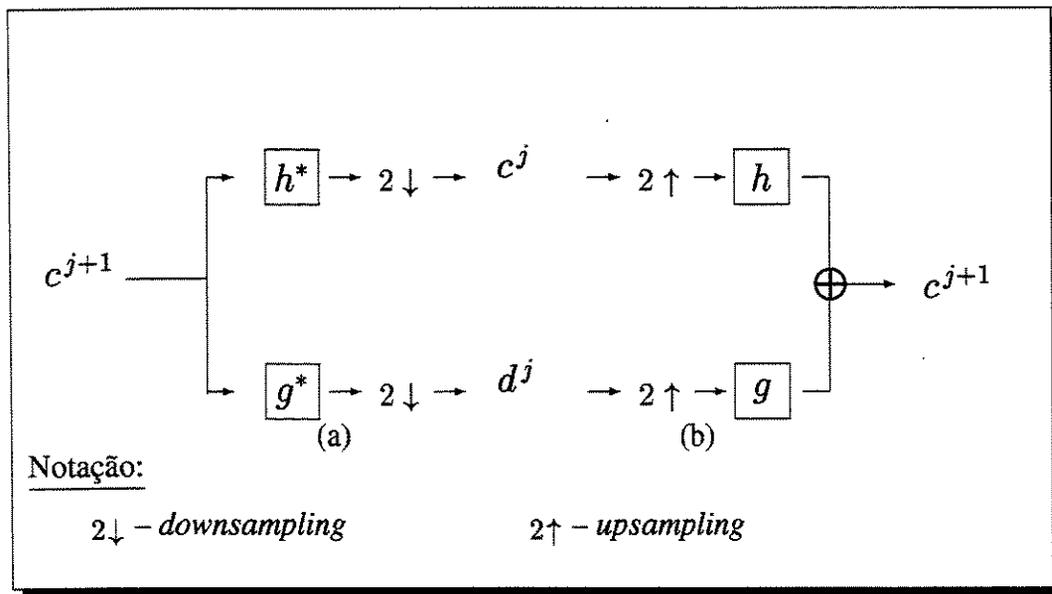


Figura 2.3: Arquitetura piramidal para a transformada wavelet biortogonal unidimensional: (a) decomposição em um nível e (b) um nível de reconstrução.

O processo de recuperação do sinal, a partir de sua Amrb, é semelhante ao descrito anteriormente. Neste caso, o cálculo dos coeficientes c_k^{j+1} em termos de c_k^j, d_k^j é dado por manipulações

entre as Equações 2.18, 2.1, 2.2, 2.8 e 2.10

$$c_{k,l}^{j+1} = \sqrt{2} \left\{ \sum_{k'} h(k - 2k') c_{k'}^j + \sum_{k'} g(k - 2k') d_{k'}^j \right\}. \quad (2.22)$$

Esse algoritmo também pode ser representado pela estrutura de bancos de filtros da Figura 2.3. Primeiro aplica-se um *upsampling* nos vetores c^j e d^j , seguido da convolução com o filtro h e g , respectivamente. A seguir, somam-se os resultados obtidos e encontra-se o vetor c^{j+1} .

Esses algoritmos de decomposição e reconstrução são conhecidos como algoritmos de Mallat (1991). Ao final do processo de decomposição, o armazenamento dos coeficientes wavelet e escala é feito no mesmo vetor de dados inicial e, dessa forma, não há necessidade de área física extra de armazenamento. Na Figura 2.4 é apresentado um esquema desse armazenamento. Inicialmente, o vetor de dados de entrada c^{j+1} ocupa todo o vetor de armazenamento, representado pelo retângulo contínuo. Após três níveis de decomposição esse vetor armazenam os coeficientes escala c^{j-2} e wavelet d^j, d^{j-1}, d^{j-2} .

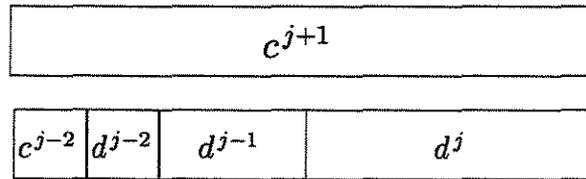


Figura 2.4: Esquema final de armazenamento dos coeficientes escala e wavelet após três níveis de decomposição.

O conceito de análise de multirresolução em duas dimensões é apresentado na Seção 2.5. Maiores detalhes sobre esse tipo de construção podem ser encontrados em Mallat (1991).

2.4 Propriedades

★ Dupla Localização

De modo geral, as wavelets possuem duas características fundamentais:

- **Localização física:** Tipicamente, a função escala $\phi(x)$ concentra-se em um intervalo finito, com comprimento Δx . Desta forma, à medida que j aumenta, $\phi(2^j x - k)$ fica localizada em intervalos de comprimento cada vez menores, de escala $\Delta^j x = O(2^{-j})$. Os índices k indicam a translação $k2^{-j}$ efetuada. Assim, em cada nível de escala j , todas as funções escala possuem a mesma forma, só mudando a posição em que estão localizadas, que diferem por um múltiplo inteiro da escala. Este comportamento é similar para as wavelets. Na Figura 2.5(a) e (b) estão os gráficos de uma função escala e a wavelet associada. Como é visto no Capítulo 3, este é um dos exemplos da família de wavelets ortogonais de Daubechies. Observa-se que, neste caso, o suporte de $\phi(x)$ é o intervalo $[0, 3]$ e $\psi(x)$ se anula fora de $[-1, 2]$.

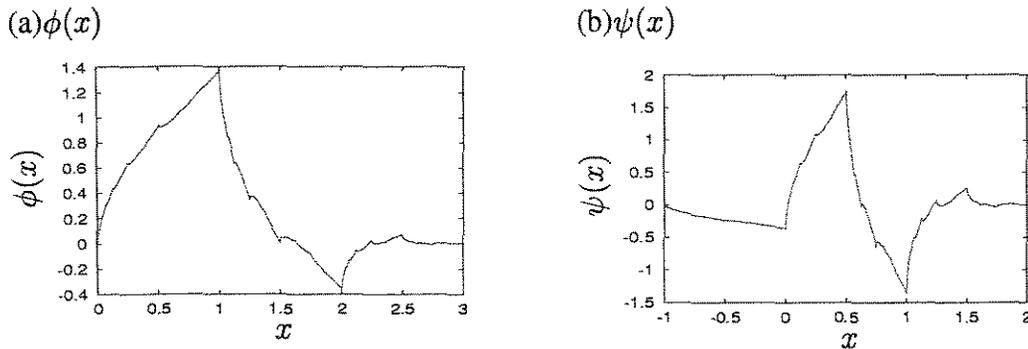


Figura 2.5: Gráficos de uma função escala e wavelet de Daubechies.

- **Localização em frequência:** Como visto anteriormente, as funções escala são construídas em termos de um filtro passa-baixa $H(\xi)$. Em consequência dessa construção, a transformada de Fourier $\hat{\phi}(\xi)$ está localizada simetricamente em uma região centrada em torno de $\xi = 0$. Desta forma, em operações de convolução, $\hat{\phi}(\xi)$ pode ser interpretada como um filtro *passa-baixa*, que privilegia as baixas frequências. Fazendo uma mudança de escala, resulta que $\hat{\phi}(2^{-j}\xi)$ também é um filtro passa-baixa, centrado em torno de $\xi = 0$, com largura de banda proporcional a 2^j . O caso das wavelets é diferente. Tipicamente, $\hat{\psi}(\xi)$ também é uma função simétrica, mas que se anula em $\xi = 0$. Para $\xi > 0$, concentra-se em uma região Ω de

comprimento $\Delta\xi$. Desta forma, em operações de convolução, $\hat{\psi}(\xi)$ pode ser interpretada como um filtro *passa-banda*, que privilegia as frequências $|\xi| \in \Omega$. Fazendo uma mudança de escala, resulta que $\hat{\psi}(2^{-j}\xi)$ também é um filtro passa-banda, com localização em uma região Ω^j , com largura de banda $\Delta^j\xi$, proporcional a 2^j . Na Figura 2.6(a) e (b) estão os gráficos das transformadas de Fourier $|\hat{\phi}(\xi)|$ e $|\hat{\psi}(\xi)|$ correspondentes ao exemplo de Daubechies.

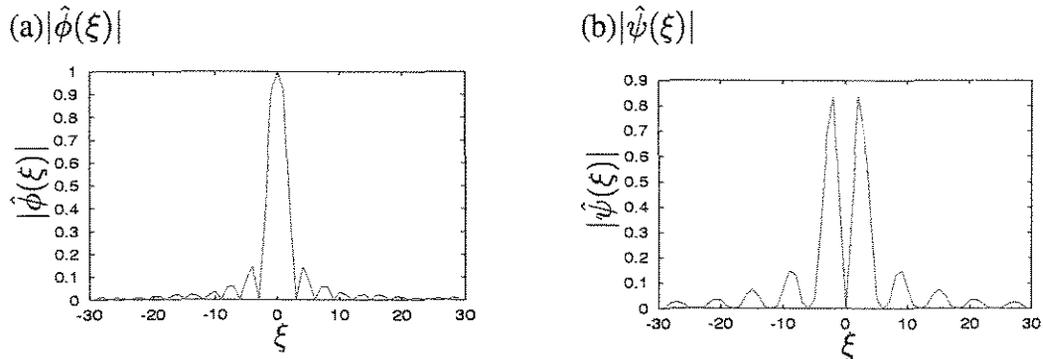


Figura 2.6: Gráficos do espectro da função escala e wavelet de Daubechies, referentes a Figura 2.5.

Tendo em vista as propriedades de dupla localização das wavelets, tanto no domínio temporal quanto no domínio das frequências, percebe-se que os coeficientes wavelet d_k^j são uma medida do conteúdo frequencial de f associado às frequências $\xi \in \Omega^j$ que ocorrem no suporte de $\psi_k^j(t)$. Neste sentido, a transformada wavelet é do tipo *local em tempo-frequência*, com resoluções temporal e frequencial inversamente proporcionais

$$\Delta^j x \times \Delta^j \xi = \text{constante},$$

como ilustrado na Figura 2.7.

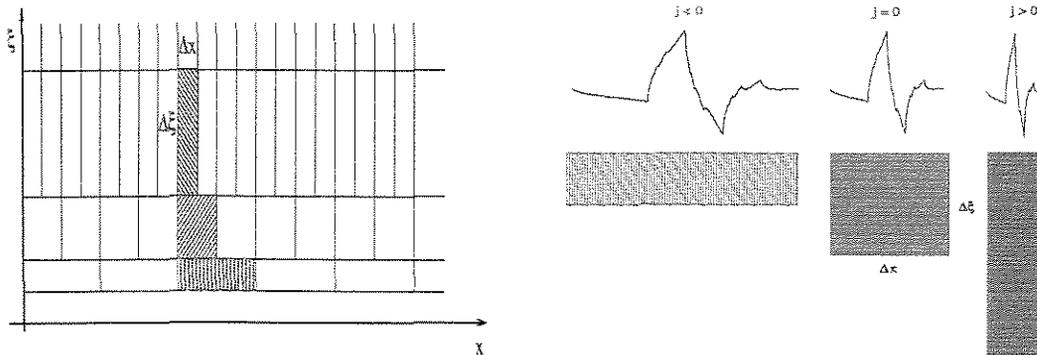


Figura 2.7: Plano $x \times \xi$

★ Ordem de Aproximação: Reprodução de Polinômios

Em uma Amrb as funções escala ϕ e suas duais ϕ^* devem satisfazer a condição de Strang-Fix (CSF) ⁴. Seja p a ordem da CSF satisfeita por ϕ , i.e., todo polinômio de grau menor ou igual a p pode ser representado exatamente por $\phi(x)$ e suas transladadas $\phi(x - k)$. Pode-se verificar que $p+1$ é exatamente a multiplicidade do zero do filtro $H(\xi)$ em $\xi = \pi$. Essa propriedade garante a ordem de aproximação

$$\|f - \mathcal{P}^j f\|_{L^2} = \mathcal{O}(2^{-j(p+1)}).$$

O mesmo é válido para as duais ϕ^* . Se p^* é a ordem da CSF das ϕ^* , a multiplicidade do zero em $H^*(\xi)$ em $\xi = \pi$ é $p^* + 1$.

★ Momentos Nulos: Cancelamento de Polinômios

Por outro lado, como $G(\xi) = e^{-i\xi} \overline{H^*(\xi + \pi)}$, a multiplicidade do zero do filtro $G(\xi)$, em $\xi = 0$, é igual a $p^* + 1$. Analogamente, como $G^*(\xi) = e^{-i\xi} \overline{H(\xi + \pi)}$, a multiplicidade do zero do filtro $G^*(\xi)$, em $\xi = 0$, é igual a $p + 1$. Pode-se verificar que o número de momentos nulos de uma função wavelet é igual a multiplicidade do zero do filtro $G(\xi)$ em $\xi = 0$. Portanto,

$$\int x^\ell \psi(x) dx = 0, \quad \ell = 0, \dots, p^*, \quad (2.23)$$

que está relacionado com

$$\frac{d^\ell \hat{\psi}(\xi)}{d\xi^\ell} \Big|_{\xi=0} = 0, \quad \ell = 0, \dots, p^*. \quad (2.24)$$

Analogamente, para as wavelet duais ψ^* , têm-se que:

$$\int x^\ell \psi^*(x) dx = 0, \quad \ell = 0, \dots, p, \quad (2.25)$$

que está relacionado com

$$\frac{d^\ell \hat{\psi}^*(\xi)}{d\xi^\ell} \Big|_{\xi=0} = 0, \quad \ell = 0, \dots, p. \quad (2.26)$$

⁴Ver Definição A.3.1, da página 152 (Strang e Fix, 1993).

★ Caracterização local de regularidade

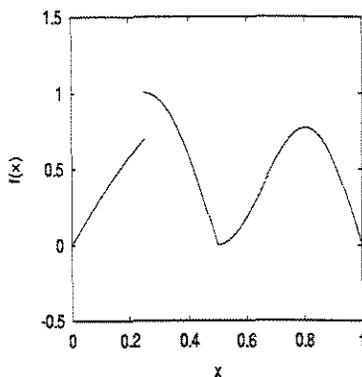
Em análise wavelet, há duas formas de representar funções nos espaços da Amr. A primeira, utiliza expansões em termos de funções escala, e a outra expansões em termos de wavelets. Como é verificado no teorema a seguir, uma importante característica dos coeficientes wavelet $d_k^j = \langle f, \psi_k^{*j} \rangle$ é que a sua ordem de grandeza está associada à suavidade da função f , no suporte de ψ_k^{*j} , e ao número de momentos nulos da função ψ^* . Portanto, os coeficientes wavelet podem ser usados como indicadores locais de regularidade das funções analisadas, pois tipicamente são pequenos em regiões de suavidade e maiores em regiões com singularidade. Por essa razão, expansões em wavelets possuem a vantagem de poderem ser mais econômicas para uma classe bem ampla de funções. Por exemplo, se a função for suave por partes, como ilustrado na Figura 2.8. Como pode ser visto na representação no plano posição \times escala ($x \times j$), a maioria dos seus coeficientes wavelet são desprezíveis e podem ser desconsiderados. Esse é o princípio básico na maioria das aplicações de wavelets. Em particular, esse princípio será utilizado intensivamente neste trabalho e é uma consequência do seguinte teorema, cuja demonstração encontra-se no Apêndice C.

Teorema 2.4.1 *Seja p a ordem da CSF de ϕ . Se f for uma função com derivada $f^{(s)}$ contínua no suporte ψ_k^{*j} , $0 \leq s \leq p + 1$, então o coeficiente wavelet $d_k^j = \langle f, \psi_k^{*j} \rangle$ satisfaz a estimativa*

$$|d_k^j| \leq C 2^{-j(s+1/2)} \|f^{(s)}\|_\infty \tag{2.27}$$

em que C é uma constante que depende de ψ^* e da norma $\|f^{(s)}\|_\infty$ no suporte de ψ_k^{*j} .

(a) Função



(b) Posição dos $|d_k^j| > 10^{-2}$

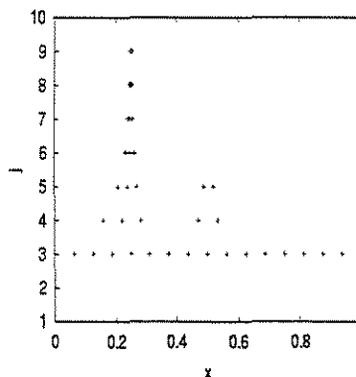


Figura 2.8: Exemplo da localização dos coeficientes wavelets significativos. (a) uma função não periódica com uma descontinuidade e uma variação abrupta; (b) posição de seus coeficientes wavelets significativos $|d_k^j| > 10^{-2}$ no plano $x \times j$.

★ **Suavidade × Momentos Nulos**

Pode-se verificar que o grau de suavidade de uma função escala está diretamente relacionado com a ordem da sua CSF, ou seja, a suavidade de ϕ , e consequentemente de ψ , aumenta com p . Logo, quanto mais suave for a ψ , maior será o número de momentos nulos de ψ^* .

Neste paradigma momentos nulos/suavidade das funções wavelet, a interpretação das seguintes formas de representação pode ser diferente:

$$f = \sum_{j,k} \langle f, \psi_k^{*j} \rangle \psi_k^j, \quad (2.28)$$

$$= \sum_{j,k} \langle f, \psi_k^j \rangle \psi_k^{*j}. \quad (2.29)$$

Supondo que ψ^* possui mais momentos nulos que ψ , então, ψ é muito mais suave que ψ^* . Logo, a primeira forma é muito mais indicada do que a segunda, do ponto de vista de compressão de dados, quando é utilizado na reconstrução apenas os coeficientes d_k^j maiores que um certo valor de corte escolhido.

Para exemplificar isso, a seguir são apresentados os resultados da compressão de uma imagem do canal infra-vermelho termal do satélite Meteosat (Figura 2.9). Consideram-se essas duas formas de representação no caso bidimensional, que é descrito em detalhes na próxima seção. Neste exemplo são utilizadas wavelets biortogonais (ψ^*, ψ) , com $p^* = 0$ e $p = 4$, i.e., 5 momentos nulos para ψ^* e 1 para ψ . Utilizam-se as representações associadas a (ψ^*, ψ) e (ψ, ψ^*) das Equações 2.28 e 2.29, com apenas os coeficientes wavelets significativos de módulo menor que 100. Para (ψ^*, ψ) apenas 8% dos coeficientes wavelet foram significativos, com um erro quadrado médio (mse) de 4,5 na reconstrução, Figura 2.10 (a). No outro caso, 11% dos coeficientes wavelet foram significativos e o mse=4,8, Figura 2.10 (b).

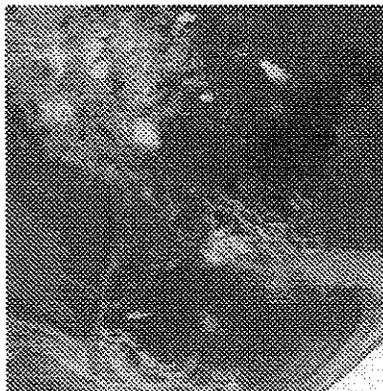
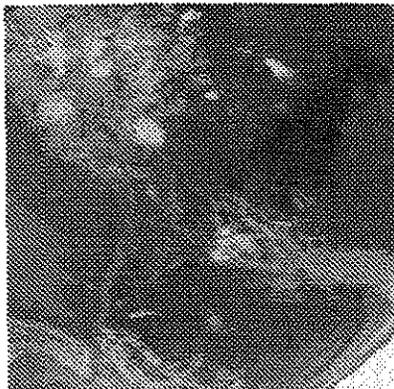


Figura 2.9: Imagem Meteosat original.

(a) 8% dos coeficientes



(b) 11% dos coeficientes

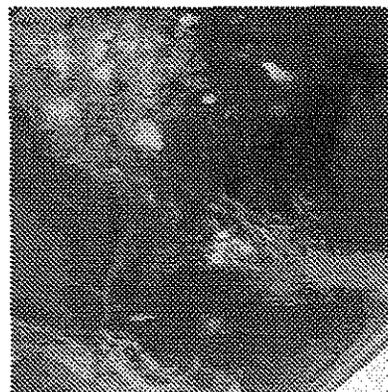


Figura 2.10: Imagem Meteosat reconstruída com 8% e 11% dos coeficientes wavelets.

2.5 Amrb Bidimensional

O método mais comum para se obter análise de multirresolução em duas dimensões é o produto tensorial

$$\mathcal{V}^j = V^j \times V^j.$$

Têm-se que

$$\mathcal{V}^j = \overline{\text{span} \{ \Phi_{k,l}^j(x,y) = \phi_k^j(x)\phi_l^j(y), k, l \in \mathbb{Z} \}}$$

e

$$\mathcal{V}^j \subset \mathcal{V}^{j+1}.$$

Os espaços vetoriais

$$\mathcal{W}^j = V^j \times W^j + W^j \times V^j + W^j \times W^j,$$

gerados por três famílias de wavelet,

$$\Upsilon_{k,l}^{j(1)}(x,y) = \phi_k^j(x)\psi_l^j(y),$$

$$\Upsilon_{k,l}^{j(2)}(x,y) = \psi_k^j(x)\phi_l^j(y),$$

$$\Upsilon_{k,l}^{j(3)}(x,y) = \psi_k^j(x)\psi_l^j(y),$$

(2.30)

são tais que,

$$\mathcal{V}^{j+1} = \mathcal{V}^j + \mathcal{W}^j.$$

De forma similar, definem-se os espaços duais

$$\mathcal{V}^{*j} = V^{*j} \times V^{*j}$$

gerados por

$$\Phi_{k,l}^{*j}(x, y) = \phi_k^{*j}(x)\phi_l^{*j}(y),$$

e

$$\mathcal{W}^{*j} = V^{*j} \times W^{*j} + W^{*j} \times V^{*j} + W^{*j} \times W^{*j},$$

gerados por

$$\Upsilon_{k,l}^{*j(1)}(x, y) = \phi_k^{*j}(x)\psi_l^{*j}(y),$$

$$\Upsilon_{k,l}^{*j(2)}(x, y) = \psi_k^{*j}(x)\phi_l^{*j}(y), \tag{2.31}$$

$$\Upsilon_{k,l}^{*j(3)}(x, y) = \psi_k^{*j}(x)\psi_l^{*j}(y),$$

tais que,

$$\mathcal{V}^{*j+1} = \mathcal{V}^{*j} + \mathcal{W}^{*j}.$$

Também são válidas as seguintes relações de biortogonalidade:

$$\langle \Phi_{k,l}^j, \Phi_{k',l'}^{*j} \rangle = \delta_{k,k'}\delta_{l,l'},$$

$$\langle \Phi_{k,l}^j, \Upsilon_{k',l'}^{*j(a)} \rangle = 0,$$

$$\langle \Phi_{k,l}^{*j}, \Upsilon_{k',l'}^j(a) \rangle = 0,$$

$$\langle \Upsilon_{k,l}^j(a), \Upsilon_{k',l'}^{*j(b)} \rangle = \delta_{j,j'}\delta_{k,k'}\delta_{l,l'}\delta_{a,b}.$$

(2.32)

O par $\{\mathcal{V}^j, \Phi_{k,l}^j\}$ e $\{\mathcal{V}^{*j}, \Phi_{k,l}^{*j}\}$ forma uma análise multirresolução biortogonal do $L^2(\mathbb{R}^2)$. Assim, uma aproximação de uma função $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ é dada pela sua projeção biortogonal sobre \mathcal{V}^j , i.e.,

$$\mathcal{P}^j f(x, y) = \sum_k \sum_l \langle f, \Phi_{k,l}^{*j} \rangle \Phi_{k,l}^j(x, y).$$

A diferença de informação entre \mathcal{V}^j and \mathcal{V}^{j+1} é expressa por

$$(\mathcal{P}^{j+1} - \mathcal{P}^j)f(x, y) = Q^{j(1)}f(x, y) + Q^{j(2)}f(x, y) + Q^{j(3)}f(x, y),$$

em que

$$Q^{j(a)}f(x, y) = \sum_k \sum_l \langle f, \Upsilon_{k,l}^{*j(a)} \rangle \Upsilon_{k,l}^{j(a)}(x, y),$$

para $a = 1, 2$ and 3 .

Na próxima seção é descrito como calcular a DWT e IDWT bidimensionais.

2.5.1 Algoritmos de Mallat

Usando as relações de escala e de biortogonalidade, obtêm-se as fórmulas de decomposição bidimensionais, que são expressas da seguinte forma,

$$c_{k,l}^j = 2 \sum_{k'} h^*(k' - 2k) \sum_{l'} h^*(l' - 2l) c_{k',l'}^{j+1}, \quad (2.33)$$

$$d_{k,l}^{j(1)} = 2 \sum_{k'} h^*(k' - 2k) \sum_{l'} g^*(l' - 2l) c_{k',l'}^{j+1}, \quad (2.34)$$

$$d_{k,l}^{j(2)} = 2 \sum_{k'} g^*(k' - 2k) \sum_{l'} h^*(l' - 2l) c_{k',l'}^{j+1}, \quad (2.35)$$

$$d_{k,l}^{j(3)} = 2 \sum_{k'} g^*(k' - 2k) \sum_{l'} g^*(l' - 2l) c_{k',l'}^{j+1}. \quad (2.36)$$

No processo de reconstrução, o cálculo dos coeficientes $c_{k,l}^{j+1}$ em termos de $c_{k,l}^j$, $d_{k,l}^{j(1)}$, $d_{k,l}^{j(2)}$ e $d_{k,l}^{j(3)}$ é dado pela expressão a seguir

$$\begin{aligned}
c_{k,l}^{j+1} = & 2 \left\{ \sum_{k'} h(k - 2k') \sum_{l'} h(l - 2l') c_{k',l'}^j \right. \\
& + \sum_{k'} g(k - 2k') \sum_{l'} h(l - 2l') d_{k',l'}^{j(1)} \\
& + \sum_{k'} h(k - 2k') \sum_{l'} g(l - 2l') d_{k',l'}^{j(2)} \\
& \left. + \sum_{k'} g(k - 2k') \sum_{l'} g(l - 2l') d_{k',l'}^{j(3)} \right\}. \tag{2.37}
\end{aligned}$$

Essas fórmulas definem os *algoritmos de Mallat* bidimensionais. Eles possuem uma estrutura de bancos de filtros similar ao caso unidimensional. Porém, neste caso, os dados de entrada formam uma matriz e as convoluções, *downsampling* e *upsampling* são efetuadas nas linhas e colunas dessa matriz. O *downsampling* de linhas consiste em retirar as linhas de índice ímpar. O *upsampling* de linhas é o processo de se introduzir linhas com elementos zero entre as linhas da matriz de entrada. Isto é feito de forma que essas novas linhas ocupem os índices ímpares da matriz resultante. Um procedimento análogo é efetuado nos *downsampling* e *upsampling* de colunas.

A arquitetura piramidal para este caso pode ser visualizada nas Figuras 2.11 (decomposição) e 2.12 (reconstrução). As operações realizadas nas colunas estão representadas por um traçado descontínuo e as realizadas nas linhas por um contínuo.

Dada uma matriz $c^{j+1} = (c_{k,l}^{j+1})$, que possui $2^{j+1} \times 2^{j+1}$ elementos, obtém-se uma matriz c^j , que possui $2^j \times 2^j$ elementos, através das seguintes etapas de processamento:

1. Cálculo da convolução entre o filtro h^* e cada linha da matriz de entrada, seguido de uma decimação de colunas.
2. Cálculo da convolução do filtro h^* com cada coluna dessa nova matriz e a seguir faz-se uma decimação de linhas.

Os coeficientes $d^{j(1)}$ são obtidos de forma similar. A primeira etapa é idêntica. Entretanto, na segunda etapa a convolução é feita com o filtro g^* . Os coeficientes $d^{j(2,3)}$ também são obtidos através de duas etapas. A primeira etapa é idêntica para ambos. Nesta etapa, calcula-se a convolução entre a matriz c^{j+1} e o filtro g^* seguido de uma decimação de colunas. A segunda etapa para se obter $d^{j(2)}$ é idêntica à segunda etapa para se obter c^j , descrita acima, enquanto que a segunda etapa para se obter $d^{j(3)}$ é idêntica à segunda etapa para se obter $d^{j(1)}$. As matrizes $d^{j(1,2,3)}$ também possuem $2^j \times 2^j$ elementos cada.

O processo inverso para se obter a matriz c^{j+1} a partir das matrizes c^j e $d^{j(1,2,3)}$ é apresentado na Figura 2.12. Neste caso faz-se um *upsampling* nas matrizes c^j e $d^{j(1,2,3)}$; a seguir aplicam-se convoluções entre o filtro h e as linhas das matrizes c^j e $d^{j(2)}$ e convoluções entre o filtro g e as linhas das matrizes $d^{j(2)}$ e $d^{j(3)}$; somam-se as matrizes parciais referentes a c^j e $d^{j(2)}$; somam-se as matrizes parciais referentes a $d^{j(1)}$ e $d^{j(3)}$. Nesta primeira etapa geram-se 2 matrizes intermediárias $2^j \times 2^{j+1}$ elementos. Faz-se um *upsampling* de linhas nessas matrizes e somam-se essas novas matrizes para se obter c^{j+1} .

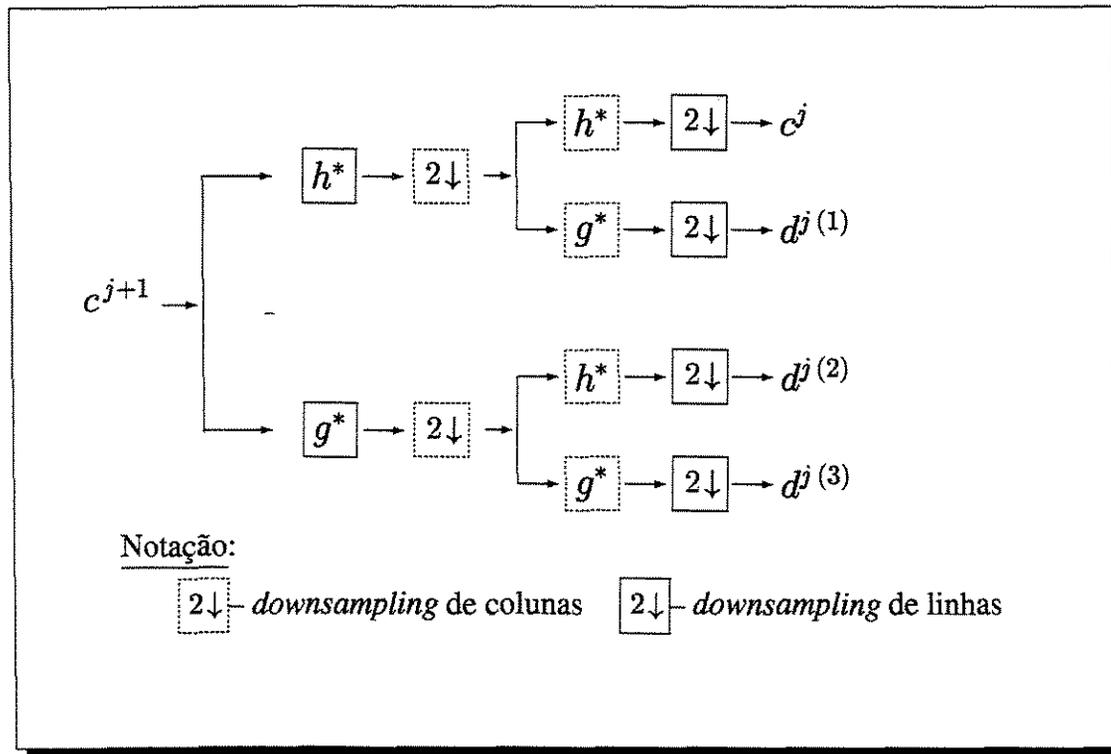


Figura 2.11: Arquitetura piramidal para a transformada wavelet biortogonal bidimensional (um nível de decomposição).

A implementação desses algoritmos pode ser simplificada de várias maneiras quando os filtros são de suporte compacto. Na seção a seguir, é apresentada uma maneira de se implementar essas transformadas no domínio da frequência, que é apropriada quando os filtros são muito longos ou infinitos. Um exemplo de funções wavelet que não possuem suporte compacto, e conseqüentemente estão associadas a filtros de resposta de impulso infinitos (IIR), são as wavelet de Battle-Lemarié (Chui, 1992; Daubechies, 1992; He, 1996). Essas wavelet são obtidas por um processo de ortonormalização das funções B-splines. Analogamente ao caso unidimensional, os coeficientes wavelet e escala são armazenados no final da decomposição na matriz de dados inicial. Na Figura 2.13 é apresentado um esquema desse armazenamento. Inicialmente, a matriz de entra-

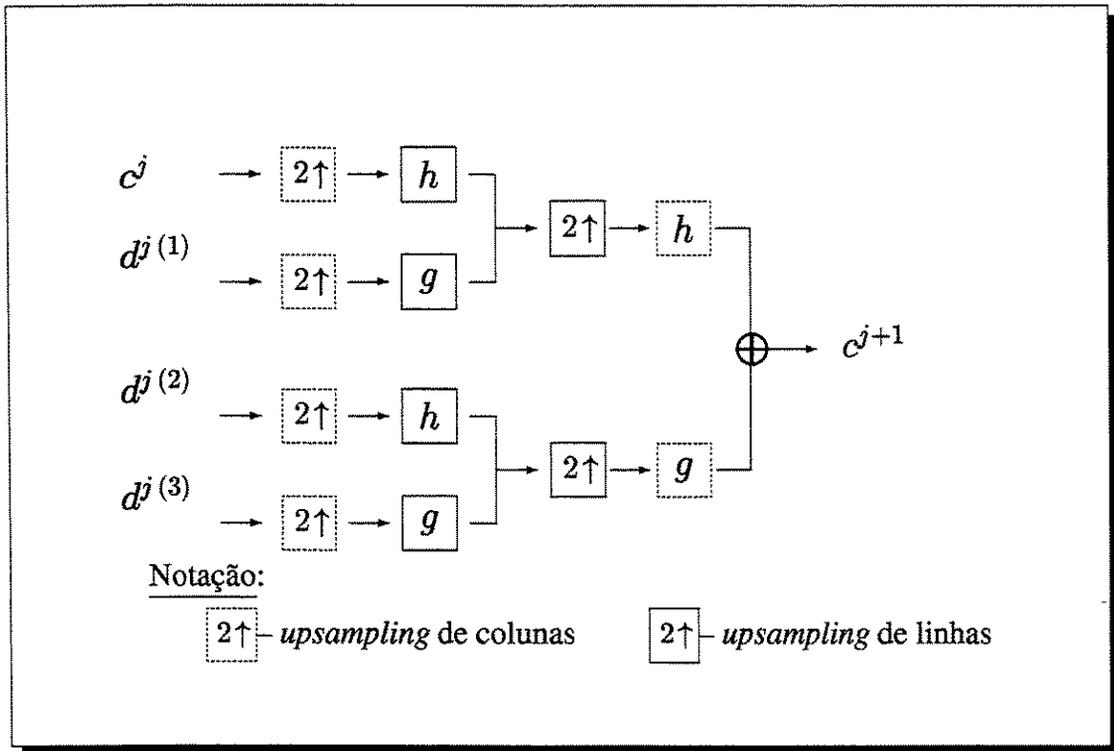


Figura 2.12: Arquitetura piramidal para a transformada inversa wavelet biortogonal bidimensional (um nível de reconstrução).

da contendo os c^{j+1} ocupa toda a matriz de armazenamento, representada pelo quadrado contínuo. Após um nível de decomposição os coeficientes wavelet $d^{(1)j}$, $d^{(2)j}$, $d^{(3)j}$, e os coeficientes escala c^j são armazenados numa matriz de tamanho igual ao inicial.

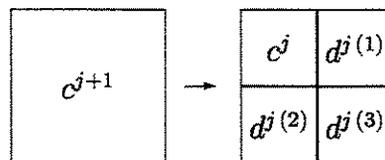


Figura 2.13: Esquema final de armazenamento para o caso 2D após um nível de decomposição.

Caso Periódico

A finalidade aqui é construir algoritmos eficientes para a implementação dos bancos de filtros apresentados nas Figuras 2.11 e 2.12, no espaço das frequências, através do uso de rotinas de FFT (transformada rápida de Fourier). Para isso, nesta seção, os dados de entrada são periódicos, i.e.,

$$c_{k+2^{j+1}, \ell+2^{j+1}}^{j+1} = c_{k, \ell}^{j+1}.$$

Algumas notações são introduzidas neste parágrafo. A transformada discreta de Fourier (DFT), de uma sequência 2^j -periódica bidimensional $\alpha^j(m, n)$, é expressa por

$$\hat{\alpha}^j(k, l) = \frac{1}{2^{2j}} \sum_{m=0}^{2^j-1} \sum_{n=0}^{2^j-1} \alpha^j(m, n) \omega_{mk}^j \omega_{ln}^j, \quad l, k = 1, \dots, 2^j, \quad (2.38)$$

em que

$$w_{r,v}^j = e^{-\frac{i2\pi r v}{2^j}},$$

sendo $i = \sqrt{-1}$.

As expressões a seguir denotam as DFTs de comprimento 2^{j-1} das sequências formadas por entradas pares e/ou ímpares de $\alpha^j(m, n)$:

$$\hat{\alpha}_{(0,0)}^j(k, l) = \frac{1}{2^{2(j-1)}} \sum_{m=0}^{2^{j-1}-1} \sum_{n=0}^{2^{j-1}-1} \alpha^j(2k, 2n) w_{m,k}^{j-1} w_{l,n}^{j-1}, \quad (2.39)$$

$$\hat{\alpha}_{(1,0)}^j(k, l) = \frac{1}{2^{2(j-1)}} \sum_{m=0}^{2^{j-1}-1} \sum_{n=0}^{2^{j-1}-1} \alpha^j(2k, 2n+1) w_{m,k}^{j-1} w_{l,n}^{j-1}, \quad (2.40)$$

$$\hat{\alpha}_{(0,1)}^j(k, l) = \frac{1}{2^{2(j-1)}} \sum_{m=0}^{2^{j-1}-1} \sum_{n=0}^{2^{j-1}-1} \alpha^j(2k+1, 2n) w_{m,k}^{j-1} w_{l,n}^{j-1}, \quad (2.41)$$

$$\hat{\alpha}_{(1,1)}^j(k, l) = \frac{1}{2^{2(j-1)}} \sum_{m=0}^{2^{j-1}-1} \sum_{n=0}^{2^{j-1}-1} \alpha^j(2k+1, 2n+1) w_{m,k}^{j-1} w_{l,n}^{j-1}. \quad (2.42)$$

Definindo

$$M(\hat{\alpha}^j; k, l) = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{(0,0)}^j(k, l) & \hat{\alpha}_{(0,1)}^j(k, l) \\ \hat{\alpha}_{(1,0)}^j(k, l) & \hat{\alpha}_{(1,1)}^j(k, l) \end{bmatrix}, \quad (2.43)$$

é válida a seguinte relação,

$$M(\hat{\alpha}^j; k, l) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \omega_l^j & -\omega_l^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\alpha}^j(k, l) & \hat{\alpha}^j(k + 2^{j-1}, l) \\ \hat{\alpha}^j(k, l + 2^{j-1}) & \hat{\alpha}^j(k + 2^{j-1}, l + 2^{j-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \omega_k^j \\ 1 & -\omega_k^j \end{bmatrix}.$$

Aplicando a DFT, com a notação apresentada nas Equações 2.38–2.42, a Equação 2.33 pode ser expressa como

$$\begin{aligned} \tilde{c}^j(k, l) &= 2 \left\{ H^{*(0)}(\xi_\ell^j) \left[H^{*(0)}(\xi_k^j) \tilde{c}_{(0,0)}^{j+1}(k, l) + H^{*(1)}(\xi_k^j) \tilde{c}_{(0,1)}^{j+1}(k, l) \right] \right. \\ &\quad \left. + H^{*(1)}(\xi_\ell^j) \left[H^{*(0)}(\xi_k^j) \tilde{c}_{(1,0)}^{j+1}(k, l) + H^{*(1)}(\xi_k^j) \tilde{c}_{(1,1)}^{j+1}(k, l) \right] \right\}, \end{aligned}$$

em que $\xi_\ell^j = -\frac{2l\pi}{2^j}$ e $\xi_k^j = -\frac{2k\pi}{2^j}$. Os símbolos $H^{*(0)}$ e $H^{*(1)}$ denotam filtros construídos a partir da transformada de Fourier dos coeficientes pares e ímpares, respectivamente, do filtro escala h^* , i.e.,

$$H^{*(0)}(\varsigma) = \sum_m h^*(2m) e^{i\varsigma m}, \quad (2.44)$$

$$H^{*(1)}(\varsigma) = \sum_m h^*(2m+1) e^{i\varsigma m}. \quad (2.45)$$

Na forma matricial, \tilde{c}^j é expresso por

$$\tilde{c}^j(k, l) = 2 \begin{bmatrix} H^{*(0)}(\xi_\ell^j) & H^{*(1)}(\xi_\ell^j) \end{bmatrix} M(\tilde{c}^{j+1}; k, l) \begin{bmatrix} H^{*(0)}(\xi_k^j) \\ H^{*(1)}(\xi_k^j) \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

De forma similar são válidas as seguintes fórmulas,

$$\tilde{d}^{j(1)}(k, l) = 2 \begin{bmatrix} H^{*(0)}(\xi_\ell^j) & H^{*(1)}(\xi_\ell^j) \end{bmatrix} M(\tilde{c}^{j+1}; k, l) \begin{bmatrix} G^{*(0)}(\xi_k^j) \\ G^{*(1)}(\xi_k^j) \end{bmatrix}, \quad (2.47)$$

$$\tilde{d}^{j(2)}(k, l) = 2 \begin{bmatrix} G^{*(0)}(\xi_\ell^j) & G^{*(1)}(\xi_\ell^j) \end{bmatrix} M(\tilde{c}^{j+1}; k, l) \begin{bmatrix} H^{*(0)}(\xi_k^j) \\ H^{*(1)}(\xi_k^j) \end{bmatrix}, \quad (2.48)$$

$$\tilde{d}^{j(3)}(k, l) = 2 \begin{bmatrix} G^{*(0)}(\xi_\ell^j) & G^{*(1)}(\xi_\ell^j) \end{bmatrix} M(\tilde{c}^{j+1}; k, l) \begin{bmatrix} G^{*(0)}(\xi_k^j) \\ G^{*(1)}(\xi_k^j) \end{bmatrix}, \quad (2.49)$$

em que os filtros $G^{*(0)}$, $G^{*(1)}$ denotam os filtros pares e ímpares associados a g^* .

Combinando as Equações 2.46–2.49, obtém-se a seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} \hat{c}^j(k, l) & \hat{d}^j(1)(k, l) \\ \hat{d}^j(2)(k, l) & \hat{d}^j(3)(k, l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H^{*(0)}(\xi_\ell^j) & H^{*(1)}(\xi_\ell^j) \\ G^{*(0)}(\xi_\ell^j) & G^{*(1)}(\xi_\ell^j) \end{bmatrix} M(\hat{c}^{j+1}; k, l) \begin{bmatrix} H^{*(0)}(\xi_k^j) & G^{*(0)}(\xi_k^j) \\ H^{*(1)}(\xi_k^j) & G^{*(1)}(\xi_k^j) \end{bmatrix}, \quad (2.50)$$

Essa equação permite calcular um nível de decomposição.

Em multinível o procedimento de decomposição pode ser resumido pelo seguinte algoritmo:

1. Procedimento inicial:

- Cálculo da matriz \hat{c}^{j+1} a partir da matriz c^{j+1} . Custo: 2D-FFT (2^{j+1})
- Cálculo dos filtros $H^{*(0)}(\xi^j)$, $H^{*(1)}(\xi^j)$, $H^{(0)}(\xi^j)$, $H^{(1)}(\xi^j)$, $G^{*(0)}(\xi^j)$, $G^{*(1)}(\xi^j)$, $G^{(0)}(\xi^j)$, $G^{(1)}(\xi^j)$. Custo: oito 1D-FFT (2^j).

2. Procedimento de decomposição em multinível, para $m = j, j-1, \dots, j_0$:

- Cálculo da matriz de coeficientes escalas \hat{c}^m e a dos coeficientes wavelet $\hat{d}^m(1,2,3)$, pela fórmula apresentada na Equação 2.50. Custo: $\mathcal{O}(2^{2m+4})$ operações.

3. Procedimento de finalização:

- Cálculo da IFFT das matrizes \hat{c}^{j_0} , $\hat{d}^m(1,2,3)$, para $m = j, j-1, \dots, j_0$ níveis. Custo: $\approx 3 \sum_{m=j_0}^j 2\text{D-FFT}(2^m) + 2\text{D-FFT}(2^{j_0})$.

Note que não é necessário calcular a IFFT dos coeficientes escala nas etapas intermediárias da decomposição. Esta é uma das grandes vantagens desse algoritmo. O cálculo dos filtros $H^{*(0)}(\xi^j)$, $H^{*(1)}(\xi^j)$, $H^{(0)}(\xi_k^j)$, $H^{(1)}(\xi_k^j)$, $G^{*(0)}(\xi_k^j)$, $G^{*(1)}(\xi_k^j)$, $G^{(0)}(\xi_k^j)$, $G^{(1)}(\xi_k^j)$ é efetuado apenas no nível inicial. Em níveis intermediários, para se obter esses filtros em pontos ξ_k^j aplica-se simplesmente uma decimação.

Analogamente ao caso da decomposição, é possível expressar o processo de reconstrução na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \hat{c}^j(k, l) & \hat{c}^j(k + 2^{j-1}, l) \\ \hat{c}^j(k, l + 2^{j-1}) & \hat{c}^j(k + 2^{j-1}, l + 2^{j-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \omega_l^{j+1} \\ 1 & -\omega_l^{j+1} \end{bmatrix} N^j(k, l) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \omega_k^{j+1} & -\omega_k^{j+1} \end{bmatrix}, \quad (2.51)$$

em que

$$N^j(k, l) = \begin{bmatrix} H^{(0)}(\xi_\ell^j) & G^{(0)}(\xi_\ell^j) \\ H^{(1)}(\xi_\ell^j) & G^{(1)}(\xi_\ell^j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{c}^j(k, l) & \hat{d}^j(1)(k, l) \\ \hat{d}^j(2)(k, l) & \hat{d}^j(3)(k, l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H^{(0)}(\xi_k^j) & H^{(1)}(\xi_k^j) \\ G^{(0)}(\xi_k^j) & G^{(1)}(\xi_k^j) \end{bmatrix},$$

e os filtros $G^{(0)}, G^{(1)}, H^{(0)}, H^{(1)}$ são os filtros pares e ímpares associados a g e h , respectivamente.

Esse procedimento de reconstrução, em multinível, pode ser resumido nas seguintes etapas:

1. Procedimento inicial:

- Cálculo das matrizes \hat{c}^{j_0} e $\hat{d}^{m(1,2,3)}$ a partir das matrizes c^{j_0} e $d^{m(1,2,3)}$. Custo: $\approx 3 \sum_{m=j_0}^j 2\text{D-FFT}(2^m) + 2\text{D-FFT}(2^{j_0})$.
- Cálculo dos filtros $H^{*(0)}, H^{*(1)}, H^{(0)}, H^{(1)}, G^{*(0)}, G^{*(1)}, G^{(0)}, G^{(1)}$. Custo: oito 1D-FFT (2^j) .

2. Procedimento de reconstrução em multinível, para $m = j_0, \dots, j-1$

- Cálculo da matriz de coeficientes escalas \tilde{c}^{m+1} . Custo: $\mathcal{O}(2^{2j+4})$ operações.

3. Procedimento de finalização:

- Cálculo da IFFT das matrizes \tilde{c}^{j+1} , pela fórmula expressa na Equação 2.51. Custo: $2\text{D-FFT}(2^{j+1})$.

O custo computacional total desse algoritmo de decomposição é da ordem de duas $2\text{D-FFT}(2^{j+1}) + \sum_{k=0}^j 2^{2j+4-2k}$ operações para uma matriz $2^{j+1} \times 2^{j+1}$. Os custos da reconstrução são dessa mesma ordem de grandeza. No algoritmo tradicional de cálculo da DWT/IDWT no domínio da frequência como o apresentado por Perrier e Basdevant (1989), as etapas iniciais e finais são equivalentes a proposta aqui. Por outro lado, nas etapas intermediárias, as decimações dos coeficientes c^m são efetuadas no espaço físico. Assim, a cada nível de decomposição/reconstrução é necessário uma $2\text{D-IFFT}(2^m)$ e uma $2\text{D-FFT}(2^m)$ adicionais ao algoritmo proposto nesta seção. Portanto, o algoritmo descrito nesta seção é mais eficiente do que os algoritmos usuais no domínio da frequência pela redução de FFT/IFFT nas etapas intermediárias de processamento. Em geral, algoritmos no domínio da frequência são mais indicados quando os filtros são longos e necessários quando os filtros são infinitos.

Capítulo 3

Casos Particulares de Wavelets Biortogonais

3.1 Introdução

Neste capítulo são apresentadas dois tipos importantes de wavelets biortogonais que são de particular interesse neste estudo. Precisamente, são descritas as propriedades das wavelets biortogonais splines e wavelets ortogonais de Daubechies. Além disso, são destacadas as análises de multirresolução interpolantes, que desempenham um papel fundamental na teoria de análise de multirresolução biortogonal.

Como visto no capítulo anterior, uma Amrb está associada a um par de filtros biortogonais H e H^* de tal forma que

$$P(\xi) = H(\xi) \overline{H^*(\xi)}, \quad (3.1)$$

satisfaça a relação

$$P(\xi) + P(\xi + \pi) = 1. \quad (3.2)$$

Filtros P satisfazendo a relação 3.1 são conhecidos como filtros interpolantes, pois estão associados a esquemas de refinamento interpolantes.

Diante deste fato, a construção de filtros biortogonais requer dois passos:

- Escolha de um filtro interpolante, como na Equação 3.2.
- Fatorização do filtro interpolante, como na Equação 3.1.

3.2 Filtros Interpolantes de Lagrange

Na teoria de wavelets os filtros interpolantes P_M desempenham um papel de grande importância. Para cada inteiro par $M = 2K$, o filtro P_M é definido por

$$P_M(\xi) = \left(\cos \frac{\xi}{2}\right)^M \sum_{m=0}^{K-1} \binom{K-1+m}{m} (\sin \xi/2)^{2m}, \quad K \geq 1. \quad (3.3)$$

O filtro P_M possui as seguintes propriedades:

- É um filtro interpolante.
- É simétrico em torno de $\xi = 0$, i.e., $P_M(\xi) = P_M(-\xi)$.
- $P_M(\xi) \geq 0$, para $-\pi \leq \xi \leq \pi$, e $P_M(\xi) = 0$ se e somente se $\xi = \pm\pi$. Além disso, para $\bar{\xi} = 0$, e $\bar{\xi} = \pm\pi$,

$$\frac{d^k P_M}{d\xi^k}(\bar{\xi}) = 0, \quad 1 \leq k \leq M-1.$$

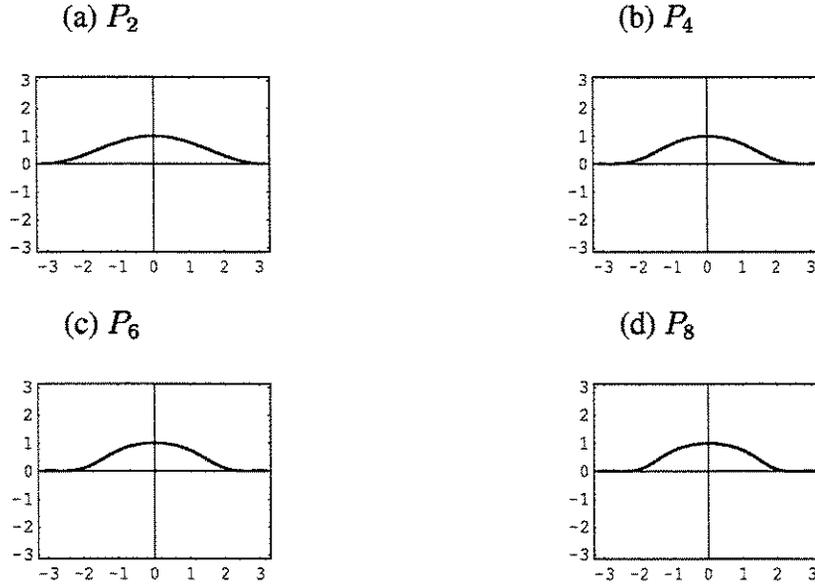
- Os coeficientes do filtro $p_M(\ell)$ são simétricos em torno de $\ell = 0$ e são nulos para $|\ell| \geq M$ e para todo inteiro par $\ell \neq 0$.

Filtros que satisfazem as propriedades acima são conhecidos na teoria de banco de filtros como *linear-phase halfband maxflat filters* (Strang e Nguyen, 1996; Daubechies, 1992). Nesse caso particular o filtro $P_M(\xi)$ está associado com o algoritmo de refinamento interpolantes, por interpolação polinomial de Lagrange centrada de grau $M-1$. Os coeficientes de índices ímpares de P_M possuem a seguinte fórmula (Sweldens e Schröder, 1995, pag. 37),

$$p_M(2k+1) = (-1)^{K+k} \frac{\prod_{i=0}^{M-1} (i - K - 0.5)}{(k + 0.5)(K + k)!(K - k - 1)!}. \quad (3.4)$$

A Figura 3.1 apresenta os gráficos de $P_M(\xi)$ para $M=2, 4, 6, 8$.

Os exemplos de filtros biortogonais H e H^* apresentados a seguir são todos obtidos por fatorizações do filtro P_M .


 Figura 3.1: Filtro P_M para $M=2, 4, 6, 8$.

3.3 Wavelets Splines Biortogonais

As wavelets splines biortogonais são construídas em Cohen et al. (1993). Para cada $1 \leq N^* < M$, seja N , de mesma paridade de N^* , tal que $M = N + N^*$. Seja $H^* = H_{N^*}$ o filtro definido por

$$H^*(\xi) = e^{-ik\xi/2} \left(\cos \frac{\xi}{2}\right)^{N^*},$$

e seja $H = H_{N,N^*}$ o filtro definido por

$$H(\xi) = e^{-ik\frac{\xi}{2}} \left(\cos \frac{\xi}{2}\right)^N \sum_{m=0}^{K-1} \binom{K-1+m}{m} (\sin \xi/2)^{2m},$$

em que $k=0$, se N^* for par e $k=1$, se N^* for ímpar.

H^* é o filtro associado à função B-spline $\phi^* = \mathcal{B}_{N^*}$, de ordem $N^* - 1$, cujas propriedades de interesse estão descritas no Apêndice A.4. Neste caso, a Amr $\{\phi^*, V^{*j}\}$ está associada aos espaços das funções de classe C^{N^*-2} , e polinomial por partes de grau $N^* - 1$ na malha diádica X^j , i.e.,

$$V^{*j} = \{f \in C^{N^*-2}(\mathbb{R}); f|_{(x_k^j, x_{k+1}^j)} \in \mathcal{P}_{N^*-1}\},$$

e

$$X^j = \{x_k^j = 2^{-j}k; k, j \in \mathbb{Z}\}. \quad (3.5)$$

Por outro lado, o filtro H_{N,N^*} define uma função escala $\phi = \phi_{N,N^*}$ de tal forma que $\{\phi, V^j\}$ e $\{\phi^*, V^{*j}\}$ definem uma Amrb. Da mesma forma que ϕ^* , ϕ é simétrica em torno de $x = 0$ se N for par, e simétrica em torno de $x = 1/2$ se N for ímpar. O suporte da função escala ϕ é $[-N, N+1]$.

A ordem dos zeros dos filtros H e H^* em π são N e N^* , respectivamente. Então, a condição de Strang-Fix - CSF para a função escala $\phi = \phi_{N,N^*}$ é da ordem de $N - 1$ e a CSF de sua dual é da ordem de $N^* - 1$. Logo, a wavelet ψ tem $N^* - 1$ momentos nulos, enquanto sua dual ψ^* possui $N - 1$ momentos nulos.

Os coeficientes dos filtros h^* e h , são números racionais cujos denominadores são potências de 2. Esta propriedade reduz erros na implementação numérica de algoritmos que utilizam esses valores. Além disso, são simétricos em torno de $k = 1/2$, se N for ímpar, ou em torno de $k = 0$ se N for par. Na Tabela 3.1 são apresentados os coeficientes $h(k)$ e $h^*(k)$ associados a $(N, N^*) = (1, 3), (1, 5), (2, 4), (2, 6)$. Os valores não incluídos na tabela são obtidos por simetria.

Tabela 3.1: Coeficientes $h(k)$ e $h^*(k)$, para $k \geq 0$.

	$N = 1$	$N^* = 3$	$N^* = 5$	$N = 2$	$N^* = 4$	$N^* = 6$
k	$256 h(k)$	$256 h^*(k)$	$256 h^*(k)$	$256 h(k)$	$128 h^*(k)$	$1024 h^*(k)$
-6						-5
-5						10
-4			3		3	34
-3			-3		-6	-78
-2		16	-22		-16	-123
-1		-16	22	64	38	324
0	128	128	128	128	90	700

Na Figura 3.2 estão os gráficos de H^* para $(N, N^*) = (1, 5)$ e $(2, 4)$. As funções escala e wavelet biortogonais dessas famílias e suas respectivas duais, são apresentadas nas Figuras B.1 e B.2.



Figura 3.2: Filtro (H^*) para: (a) $(N, N^*) = (1, 5)$ e (b) $(N, N^*) = (2, 4)$.

3.4 Wavelets Ortogonais de Daubechies

Outra maneira de fatorizar o filtro P_M é considerando $H = H^*$ dando origem aos filtros ortogonais de Daubechies $H = H_K(\xi)$, $M = 2K$, de tal forma que

$$P_M(\xi) = |H_K(\xi)|^2.$$

Os coeficientes $h(k)$ desse filtro são nulos para $k < 0$ e para $k \geq M$. A Tabela 3.2 contém esses coeficientes para $K = 2, 3$ e 4 .

As respectivas funções escala $\phi = \phi_K$ possuem suporte $[0, M-1]$ e definem uma família ortogonal em que $\phi^* = \phi$ e $\psi^* = \psi$. Essas funções escala não apresentam qualquer tipo de simetria. Isto pode ser verificado nos exemplos das funções escalas de Daubechies, para $K = 3$ e 4 , apresentados nas Figuras 3.3(a) e (c). No item (b) e (d) dessas figuras são apresentadas as suas respectivas funções wavelets. As funções escala e wavelet de Daubechies para $K = 2$ estão apresentadas na Figura 2.5(a) e (b), página 15. Maiores detalhes sobre a construção e propriedades dessas funções podem ser encontrados em Daubechies (1992, cap. 6).

Como a ordem dos zeros dos filtros H_K em π é K , então, a CSF para a função escala ϕ é da ordem de $K - 1$ e a wavelet ψ tem $K - 1$ momentos nulos.

Tabela 3.2: Coeficientes escala $h(k)$ ortogonais de Daubechies.

	$K = 2$	$K = 3$	$K = 4$
k	$h(k)$	$h(k)$	$h(k)$
0	0.341506350946110	0.235233603892082	0.162901714025649
1	0.591506350946109	0.570558457915722	0.505472857545914
2	0.158493649053890	0.325182500263116	0.446100069123380
3	-0.0915063509461096	-0.0954672077841637	-0.0197875131178224
4		-0.0604161041551981	-0.132253583684520
5		0.0249073356548795	0.0218081502370886
6			0.0232518005354909
7			-0.00749349466518071

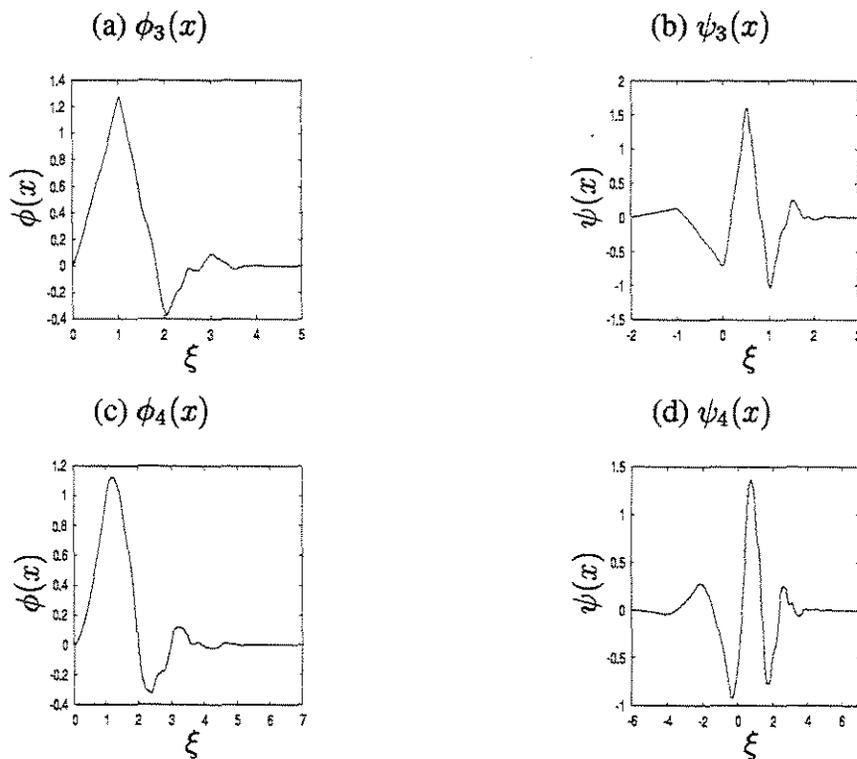


Figura 3.3: Funções ortogonais escala e wavelet de Daubechies para $K = 3, 4$.

3.5 Amr Interpolante

O próprio filtro interpolante $P_M(\xi)$ pode ser utilizado como filtro de escala, pois $H^*(\xi) = 1$. Se $p(k) = p_M(k)$ são seus coeficientes, define-se uma função escala $\phi = \phi_{0,M}$ tal que

$$\phi(x) = \sum_{k=-M+1}^{M-1} p(k) \phi(2x - k). \quad (3.6)$$

Esta ϕ é uma função interpolante, i.e.,

$$\phi(k) = \delta_{0,k}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

é simétrica em torno de $x = 0$ e possui suporte no intervalo $[-M + 1, M - 1]$. ϕ é contínua e sua regularidade aumenta à medida que M cresce. Essas características podem ser observadas na Figura 3.4. A CSF de ϕ é de ordem $M - 1$.

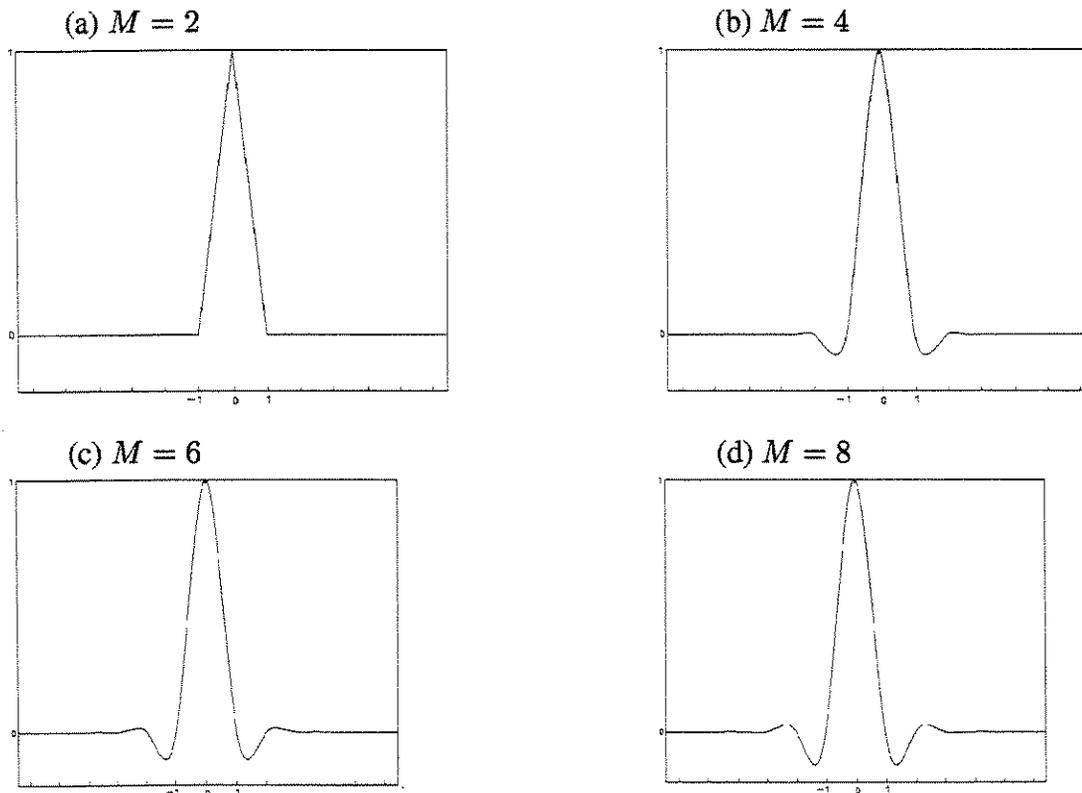


Figura 3.4: Função escala interpolante ϕ para $M = 2, \dots, 8$.

Essas funções interpolantes surgiram na literatura no trabalho de Deslauriers e Dubuc (1987, 1989) como *funções fundamentais* de um esquema de refinamento interpolante, descrito a seguir.

Trabalha-se com grades diádicas encaixadas

$$X^j = \{x_k^j = k 2^{-j}, k \in \mathbb{Z}\},$$

tais que $X^j \subset X^{j+1}$. Observa-se que os pontos $x_k^j \in X^j$ passam a ter índices pares em X^{j+1} , $x_k^j = x_{2k}^{j+1}$, enquanto que os pontos de índices ímpares de X^{j+1} correspondem a pontos novos $x_{2k+1}^{j+1} \in X^{j+1} \setminus X^j$ (ver Figura 3.5).

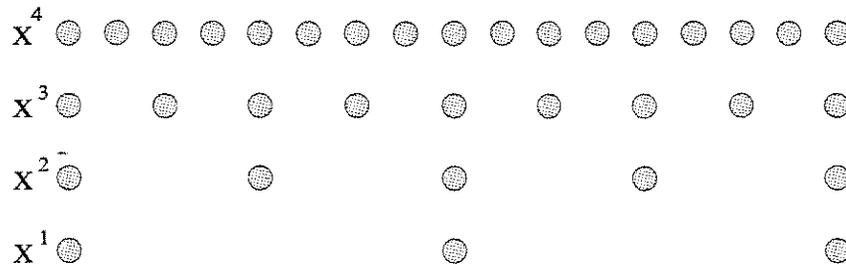


Figura 3.5: Exemplo de malhas diádicas encaixadas.

Seja $\{f_k^j\}$ os valores amostrados na malha X^j . Definem-se os valores \tilde{f}^{j+1} em X^{j+1} tais que

$$\tilde{f}_{2k}^{j+1} = f_k^j, \tag{3.7}$$

$$\tilde{f}_{2k+1}^{j+1} = \mathbb{P}_{2k+1}^{j+1}(x_{2k+1}^{j+1}) \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \tag{3.8}$$

em que $\mathbb{P}_{2k+1}^{j+1}(x)$ é o polinômio interpolador de grau $M-1$ escolhido de forma que

$$\mathbb{P}_{2k+1}^{j+1}(x_{k+\ell}^j) = f_{k+\ell}^j \quad -M/2 < \ell \leq M/2. \tag{3.9}$$

Na Figura 3.6 está apresentando um esquema desse processo.

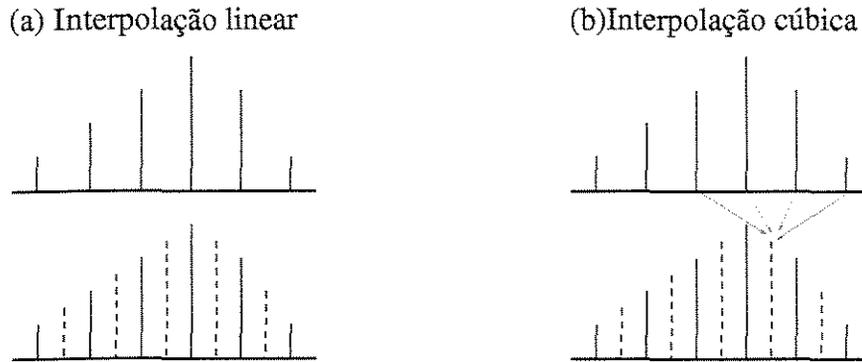


Figura 3.6: Esquema do processo de interpolação. As linhas verticais indicam os valores de f_{2k}^{j+1} e as linhas verticais tracejadas indicam os valores de f_{2k+1}^{j+1} . As setas indicam quais valores $f_k^j = f_{2k}^{j+1}$ contribuem para o cálculo de f_{2k+1}^{j+1} .

Esta interpolação pode ser expressa em termos dos coeficientes do filtro interpolante pela fórmula

$$\tilde{f}_k^{j+1} = \sum_{\ell} p(k - 2\ell) f_{\ell}^j. \quad (3.10)$$

A função $\phi(x)$ é obtida aplicando-se recursivamente este esquema de refinamento a partir da sequência inicial $f_k^0 = \delta_{0,k}$.

A Amr $\{V^j, \phi\}$ é conhecida como análise de multirresolução interpolante (Donoho, 1992) e as projeções

$$\Pi^j f(x) = \sum_k f_k^j \phi_k^j(x), \quad (3.11)$$

são operadores de interpolação que reproduzem polinômios de grau $\ell < M$ ($CSF = M - 1$), i.e.

$$\sum_k (x_k^j)^\ell \phi_k^j(x) = x^\ell, \quad \ell = 0, 1, \dots, M - 1. \quad (3.12)$$

Com a escolha da função wavelet

$$\psi(x) = \phi(2x - 1), \quad (3.13)$$

é válida a soma direta

$$V^{j+1} = V^j + W^j.$$

O que diferencia as funções wavelets interpolantes das wavelets em geral, como as biortogonais analisadas anteriormente, é que elas não possuem nenhum momento nulo. Observe que $\int \psi(x) dx \neq 0$.

Na representação em dois níveis

$$\sum_k f_k^{j+1} \phi_k^{j+1}(x) = \sum_k f_k^j \phi_k^j(x) + \sum_k d_k^j \psi_k^j(x), \quad (3.14)$$

os coeficientes wavelets d_k^j , referidos como coeficientes wavelets interpolantes, podem ser interpretados como erros de interpolação. De fato, considerando $x = (2s + 1) 2^{-(j+1)}$ na expressão

$$\begin{aligned} \sum_k d_k^j \psi_k^j(x) &= \sum_k d_k^j \psi(2^j x - k) \\ &= \sum_k d_k^j \phi(2^{j+1} x - 2k - 1), \end{aligned} \quad (3.15)$$

e levando em conta a propriedade interpolante de ϕ , segue que

$$d_s^j = \sum_k d_k^j \phi(2(s-k)).$$

Substituindo esse mesmo valor de x nos outros dois termos da Equação 3.14 obtêm-se

$$\begin{aligned} \Pi^{j+1} f(2^{-(j+1)}(2s+1)) &= \sum_k f_k^{j+1} \phi(2s+1-k) \\ &= f_{2s+1}^{j+1}, \end{aligned}$$

$$\Pi^j f(2^{-(j+1)}(2s+1)) = \sum_k f_k^j \phi(2^{-1}(2s+1) - k).$$

A relação de escala dada na Equação 3.6 implica que $\phi(\ell/2) = p(\ell)$. Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_k f_k^j \phi(2^{-1}(2s+1) - k) &= \sum_k f_k^j p(2s+1-2k) \\ &= \tilde{f}_{2s+1}^{j+1}, \end{aligned}$$

que é o resultado do esquema de refinamento interpolante nas malhas diádicas, introduzido na Equação 3.10. Sendo assim, determina-se os coeficientes wavelets,

$$d_s^j = f_{2s+1}^{j+1} - \tilde{f}_{2s+1}^{j+1}. \quad (3.16)$$

Portanto, sendo os \tilde{f}_{2s+1}^{j+1} uma aproximação de f_{2s+1}^{j+1} por interpolação, os d_s^j representam o erro dessa aproximação.

Portanto, a DWT no caso interpolante

$$\{f^{j+1}\} \rightarrow \{f^j, d^j\}$$

é feita em três etapas. Na primeira, faz-se a decimação $f_k^j = f_{2k}^{j+1}$. Na segunda, calcula-se \tilde{f}_{2k+1}^{j+1} a partir das Equações 3.9 e 3.10. Utilizando-se a condição de simetria do filtro p , tem-se que

$$\tilde{f}_{2k+1}^{j+1} = \sum_{s \geq 0} p(2s+1) [f_{k-s}^j + f_{k+s+1}^j]. \quad (3.17)$$

Este valor é uma aproximação de f_{2k+1}^{j+1} . Por último, calcula-se a diferença entre o valor exato e o valor aproximado, que é o erro de interpolação

$$d_k^j = f_{2k+1}^{j+1} - \tilde{f}_{2k+1}^{j+1}. \quad (3.18)$$

Este processo corresponde ao algoritmo de decomposição. Já o processo reverso IDWT

$$\{f^j, d^j\} \rightarrow \{f^{j+1}\}$$

é dado por:

$$f_{2k}^{j+1} = f_k^j, \quad (3.19)$$

$$f_{2k+1}^{j+1} = d_k^j + \tilde{f}_{2k+1}^{j+1}. \quad (3.20)$$

Em resumo, utilizam-se as seguintes fórmulas de decomposição (reconstrução), para calcular a transformada wavelet (inversa):

- **Fórmulas de decomposição**

$$f_k^j = f_{2k}^{j+1}, \quad (3.21)$$

$$d_k^j = f_{2k+1}^{j+1} - \sum_{\ell \geq 0}^{M/2-1} p(2\ell+1) [f_{k-\ell}^j + f_{k+\ell+1}^j].$$

- **Fórmulas de reconstrução**

$$f_{2k}^{j+1} = f_k^j, \quad (3.22)$$

$$f_{2k+1}^{j+1} = d_k^j + \sum_{\ell \geq 0}^{M/2-1} p(2\ell+1) [f_{k-\ell}^j + f_{k+\ell+1}^j].$$

Em multinível passa-se a ter a seguinte fórmula

$$\sum_k f_k^{j+1} \phi_k^{j+1}(x) = \sum_k f_k^{j_0} \phi_k^{j_0}(x) + \sum_{m=0}^j \sum_k d_k^m \psi_k^m(x), \quad (3.23)$$

que corresponde à mudança de base

$$\{\phi_k^{j+1}\} \leftrightarrow \{\phi_k^{j_0}\} \cup \{\psi_k^{j_0}\} \cdots \cup \{\psi_k^j\}.$$

Para efetuar essas operações, têm-se a transformada wavelet discreta interpolante e sua inversa, i.e.,

$$\{f^{j+1}\} \begin{matrix} DWT \\ \rightleftarrows \\ IDWT \end{matrix} \{f^{j_0}, d^{j_0}, \dots, d^j\}$$

★ Caracterização Local de Regularidade

Como em toda Amr, na Amr interpolante pode-se ter dois tipos de representações. Por um lado, pode-se usar uma discretização por valores pontuais em uma malha uniforme e expansões em funções escala interpolantes, ou podem ser utilizadas expansões em termos de wavelets interpolantes em que os coeficientes wavelet são interpretados como erro de interpolação, como na Equação 3.23. O princípio fundamental de compressão de dados também se aplica para wavelets interpolantes. Por exemplo, considerando $M=2$,

$$d_k^j = f_{2k+1}^{j+1} - \frac{1}{2}(f_k^j + f_{k+1}^j).$$

Da teoria de interpolação linear de Lagrange (Hoffman, 1992, pag. 241 e 257) são obtidas as estimativas a seguir.

Se $f(x)$ for duas vezes continuamente diferenciável, então existe algum ξ , $x_k^j \leq \xi \leq x_{k+1}^j$, tal que:

$$d_k^j = \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!} (x_{2k+1}^{j+1} - x_k^j)(x_{2k+1}^{j+1} - x_{k+1}^j), \quad (3.24)$$

em que $f^{(2)}$ é a derivada segunda de f . Como

$$|(x_{2k+1}^{j+1} - x_k^j)| = |(x_{2k+1}^{j+1} - x_{k+1}^j)| = 2^{-j-1},$$

tem-se que,

$$|d_k^j| \leq \frac{2^{-2j}}{8} \max_{x_k^j \leq \xi \leq x_{k+1}^j} |f^{(2)}(\xi)|. \quad (3.25)$$

Se $f(x)$ for continuamente diferenciável, tem-se que:

$$|d_k^j| \leq 2^{-(j+2)} \omega(f^{(1)}; 2^{-j}), \quad (3.26)$$

sendo $f^{(1)}$ a derivada primeira de f e ω é o módulo da continuidade, apresentado na Definição A.5.1. Se $f(x)$ for contínua tem-se que:

$$|d_k^j| \leq \omega(f; 2^{-j}). \quad (3.27)$$

No caso geral, para uma interpolação de ordem $M-1$, os coeficientes wavelet podem ser avaliados da forma a seguir.

Proposição 3.5.1 *Se f for M vezes continuamente diferenciável no intervalo $[x_{k-m+1}^j, x_{k+m}^j]$, em que $m = M/2$, pode-se estimar o coeficiente wavelet d_k^j como:*

$$|d_k^j| \leq \beta(M) 2^{-jM} \max_{x_{k-m+1}^j \leq \xi \leq x_{k+m}^j} |f^{(M)}(\xi)|, \quad (3.28)$$

sendo $f^{(M)}$ a derivada m -ésima de f e $\beta(M)$ é uma constante que depende apenas de M .

Para se ter uma idéia da grandeza da constante $\beta(M)$, a Tabela 3.3 mostra esses valores para o caso de estênceis de interpolação centrado (β_1) e de interpolação não centrada, quando apenas um ponto do estêncil esteja a esquerda de x_{2k+1}^{j+1} , (β_2). De um modo geral $\beta_1 \leq \beta \leq \beta_2$.

Tabela 3.3: Valores de β_1 e de β_2 .

M	β_1	β_2
2	0,125	0,125
4	0,023	0,039
6	0,005	0,021
8	0,001	0,013

Proposição 3.5.2 *Se f for s vezes continuamente diferenciável, $0 \leq s < M$, no intervalo $[x_{k-m+1}^j, x_{k+m}^j]$, em que $m = M/2$, pode-se estimar o coeficiente wavelet d_k^j como:*

a) Se $2 \leq s < M$:

$$|d_k^j| \leq \beta(M, s) 2^{-js} \max_{x_{k-m+1}^j \leq \xi \leq x_{k+m}^j} |f^{(s)}(\xi)|, \quad (3.29)$$

sendo $f^{(s)}$ a derivada s -ésima de f e $\beta(M, s) = (1 + 2^{M-1})6^s \frac{s(s-1)^{s-1}}{(s-1)!}$.

b) Se $s = 1$:

$$|d_k^j| \leq \beta(M, 1) 2^{-j} \max_{x_{k-m+1}^j \leq \xi \leq x_{k+m}^j} |f^{(1)}(\xi)|, \quad (3.30)$$

sendo $f^{(1)}$ a derivada de f e $\beta(M, 1) = 3(1 + 2^{M-1})$.

c) Se $s = 0$:

$$|d_k^j| \leq \beta(M, 0) \omega(f; 2^{-j-1}), \quad (3.31)$$

sendo ω é o módulo da continuidade de f e $\beta(M, 0) = 6(1 + 2^{M-1})$.

★ Transformada Wavelet Interpolante no Intervalo

A adaptação de análises wavelet para o intervalo já foi apresentada em diversos artigos. Em Cohen et al. (1993), discute-se essa adaptação para as bases biortogonais. Já em Sweldens e Schröder (1995) e Donoho (1994) discute-se essa adaptação para o caso interpolante. Para este caso, a adaptação ao intervalo é mais simples do que no caso anterior.

Neste caso, as malhas diádicas X^j são da seguinte forma,

$$X^j = \{x_k^j = k 2^{-j} \mid 0 \leq k \leq 2^j\}. \quad (3.32)$$

Assim, em cada nível têm-se $N^j = 2^j + 1$ pontos. É assumido que na malha menos refinada X^{j_0} , $N^{j_0} \geq M$ pois são necessários no mínimo M pontos de interpolação ($M - 1$ representa o grau do polinômio interpolador).

Para $M = 2$ o esquema de refinamento funciona sem nenhuma modificação ao caso descrito na seção anterior. Em um ponto novo x_{2k+1}^{j+1} , o esquema de refinamento aproxima f_{2k+1}^{j+1} por

$$\tilde{f}_{2k+1}^{j+1} = \frac{f_k^j + f_{k+1}^j}{2}.$$

Isto é, na interpolação é utilizado o estêncil definido pelos pontos $\{x_k^j, x_{k+1}^j\}$, que estão em X^j . Assim para calcular \tilde{f}_1^{j+1} (ou $\tilde{f}_{2^{j+1}-1}^{j+1}$) são necessários os pontos $\{x_0^j, x_1^j\}$ (ou $\{x_{2^j-1}^j, x_{2^j}^j\}$). Portanto, todos os valores de \tilde{f}_{2k+1}^{j+1} podem ser calculados por interpolação centrada.

No caso geral, para $M > 2$, é necessário a adaptação dos estênceis, para o cálculo de \tilde{f}_{2k+1}^{j+1} , nas regiões de fronteira. Neste caso, a expressão região de fronteira refere-se aos $M/2 - 1$ pontos ímpares mais próximos dos limites à esquerda e à direita da malha X^{j+1} . Por exemplo, para $M = 4$ e em um ponto novo x_{2k+1}^{j+1} , a aproximação \tilde{f}_{2k+1}^{j+1} , por interpolação centrada de grau 3, requer os valores associados com o estêncil $\{x_{k-1}^j, x_k^j, x_{k+1}^j, x_{k+2}^j\}$. Logo, para calcular o valor \tilde{f}_1^{j+1} seriam necessários os pontos $\{x_{-1}^j, x_0^j, x_1^j, x_2^j\}$. Entretanto, como o ponto x_{-1}^j não pertence à grade X^j altera-se o estêncil de interpolação para $\{x_0^j, x_1^j, x_2^j, x_3^j\}$. Esse caso refere-se a fronteira esquerda. Já na fronteira direita seriam necessários os pontos $\{x_{2^j-2}^j, x_{2^j-1}^j, x_{2^j}^j, x_{2^j+1}^j\}$. Contudo, como o ponto $x_{2^j+1}^j$ também não pertence a grade X^j , altera-se o estêncil para $\{x_{2^j-3}^j, x_{2^j-2}^j, x_{2^j-1}^j, x_{2^j}^j\}$.

Em resumo, na região interior, o algoritmo de refinamento é o mesmo descrito na seção anterior, que se baseia na escolha de um estêncil de interpolação simétrico para os pontos novos x_{2k+1}^{j+1} . Já nas regiões de fronteira o estêncil é fixado como os M pontos mais próximos dos limites esquerdo e direito da malha. Dessa forma, na região de fronteira esquerda o estêncil de interpolação é sempre $\{x_0^j, \dots, x_{M-1}^j\}$, enquanto na fronteira direita têm-se os pontos $\{x_{2^j-M-1}^j, \dots, x_{2^j}^j\}$ como estêncil. Portanto, o polinômio interpolador é o mesmo para todos os pontos novos das regiões de fronteira, variando apenas os pontos aonde esse polinômio é calculado. Isto é, para pontos x_{2k+1}^{j+1} , que pertencem a região de fronteira, é utilizada a seguinte expressão,

$$\tilde{f}_{2k+1}^{j+1} = \sum_{\ell} p(\ell, k) f_{\ell}^j, \quad (3.33)$$

em que $p(\ell, k) = \mathbb{L}_{\ell}(x_{2k+1}^{j+1})$, sendo \mathbb{L}_{ℓ} o polinômio de Lagrange,

$$\mathbb{L}_{\ell}(x_{2k+1}^{j+1}) = \frac{\prod_{i \neq \ell} (x_{2k+1}^{j+1} - x_i^j)}{\prod_{i \neq \ell} (x_{\ell}^j - x_i^j)}, \quad (3.34)$$

A variação do índice i no produtório é de zero a $M-1$, quando o ponto a ser interpolado está na fronteira esquerda, e de $2^j - M + 1$ até 2^j , quando o ponto está na fronteira direita.

Na Tabela 3.4 encontram-se os valores de $p(\ell, k)$ para $M = 4, 6, 8$. Os valores descritos nessa tabela estão calculados para a fronteira esquerda, no caso da direita basta inverter a ordem dos coeficientes, isto é $k = 0$ passa a ser $k = 2^j$, $k = 1$ torna-se $k = 2^j - 1$ e assim por diante. O filtro $p(k)$, para os pontos interiores às fronteiras, está calculado para $M = 2, 4, 6, 8$ na Tabela 3.5.

Tabela 3.4: Valores dos coeficientes $p(\ell, k)$, para fronteira esquerda. Os coeficientes de $M = 4, 6$ e 8 estão multiplicados por $2^4, 2^8$ e 2^{12} .

M	k	ℓ							
		0	1	2	3	4	5	6	7
4	0	5	-15	15	5				
6	0	63	-315	730	-730	315	-63		
	1	-21	105	-210	210	-105	21		
8	0	429	-3003	9009	-15015	15015	-9009	3003	-429
	1	-99	-693	-2079	3465	-3465	2079	-693	99
	2	45	-315	945	-1575	1575	-945	315	-45

Tabela 3.5: Valores dos coeficientes $p(k)$ para os pontos interiores. Os coeficientes de $M = 4, 6$ e 8 estão multiplicados por $2^4, 2^8$ e 2^{12} .

M	k-3	k-2	k-1	k	k+1	k+2	k+3	k+4
2				1/2	1/2			
4			-1	9	9	-1		
6		150	-25	3	3	-25	150	
8	-5	49	-245	1225	1225	-245	49	-5

★ Amr Interpolante Bidimensional

Numa Amr interpolante bidimensional trabalha-se com valores pontuais $f_{k,\ell}^j = f(x_k^j, y_\ell^j)$ em grades diádicas

$$\mathcal{X}^j = \{(x_k^j, y_\ell^j) \in \mathbb{R}^2 : x_k^j = k 2^{-j}, y_\ell^j = l 2^{-j}; k, l \in \mathbb{Z}\}. \tag{3.35}$$

Essas grades também são encaixantes, $\mathcal{X}^j \subset \mathcal{X}^{j+1}$, de tal forma que os pontos $(x_k^j, y_\ell^j) \in \mathcal{X}^j$ passam a ser os pontos $(x_{2k}^{j+1}, y_{2\ell}^{j+1})$ da grade mais fina \mathcal{X}^{j+1} . Na Figura 3.7 está ilustrada a posição dos pontos de uma malha diádica \mathcal{X}^{j+1} , destacando as posições correspondentes aos pontos da malha \mathcal{X}^j e as posições correspondentes aos pontos novos, i.e., os pontos de $\mathcal{X}^{j+1} \setminus \mathcal{X}^j$.

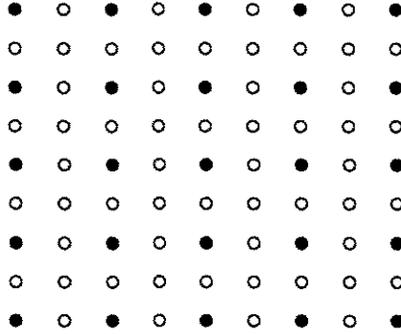


Figura 3.7: Representação da posição dos pontos de uma malha diádica \mathcal{X}^{j+1} . O símbolo \bullet correspondem a posição dos pontos da malha \mathcal{X}^j , enquanto o símbolo \circ correspondem a posição dos pontos de $\mathcal{X}^{j+1} \setminus \mathcal{X}^j$.

A construção de uma análise multirresolução interpolante bidimensional $\{\mathcal{V}^j, \Phi^j\}$ também é feita pelo produto tensorial

$$\mathcal{V}^j = V^j \times V^j. \quad (3.36)$$

Estes espaços \mathcal{V}^j são gerados por funções escala $\Phi_{k,\ell}^j = \Phi(2^j x - k, 2^j y - \ell)$, em que

$$\Phi(x, y) = \phi(x) \phi(y). \quad (3.37)$$

Vale a soma direta

$$\mathcal{V}^{j+1} = \mathcal{V}^j + \mathcal{W}^j,$$

em que o espaço complementar é dado por $\mathcal{W}^j = (V^j \times W^j) + (W^j \times V^j) + (W^j \times W^j)$. As bases $\Psi_{k,\ell}^{(\alpha)j}$ são obtidas em termos das wavelets básicas

$$\begin{aligned} \Psi^{(1)}(x, y) &= \Phi(2x, 2y - 1), \\ \Psi^{(2)}(x, y) &= \Phi(2x - 1, 2y), \\ \Psi^{(3)}(x, y) &= \Phi(2x - 1, 2y - 1). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Dada uma função $f(x, y)$, sua interpolante em \mathcal{V}^j pode ser representada como

$$\mathcal{P}^j f(x, y) = \sum_{k,\ell} f_{k,\ell}^j \Phi_{k,\ell}^j(x, y) \quad (3.39)$$

A diferença de informação entre um nível e o nível seguinte é expressa por

$$[\mathcal{P}^{j+1} - \mathcal{P}^j]f(x, y) = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{k,\ell} d_{k,\ell}^{(\alpha)j} \Psi_{k,\ell}^{(\alpha)j}(x, y), \quad (3.40)$$

em que os $d_{k,\ell}^{(\alpha)j}$ são os coeficientes wavelet interpolante. Na Figura 3.8 é apresentado um esquema ilustrativo da posição dos coefientes wavelets bidimensionais.

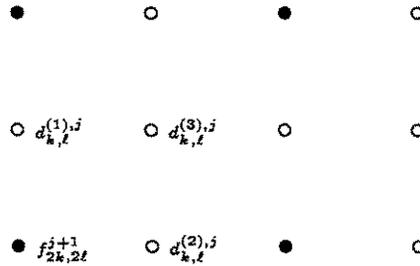


Figura 3.8: Esquema ilustrativo da posição dos coefientes wavelets bidimensionais. O símbolo \circ correspondem as posições associadas aos coeficientes wavelet. Os $d_{s,q}^{(\alpha)\ell}$: são dados pelas diferenças entre os valores de f nos pontos de $\mathcal{X}^{j+1} \setminus \mathcal{X}^j$ e aqueles obtidos por interpolação a partir dos valores de f em \mathcal{X}^j .

Analogamente ao caso unidimensional, os coeficientes de escala $f_{k,\ell}^j$ e os coeficientes wavelets $d_{k,\ell}^{(\alpha)j}$ podem ser obtidos a partir de $f_{k,\ell}^{j+1}$ por expressões do tipo

$$\begin{aligned}
 f_{k,\ell}^j &= f_{2k,2\ell}^{j+1} \\
 d_{k,\ell}^{(1)j} &= f_{2k,2\ell+1}^{j+1} - \tilde{f}_{2k,2\ell+1}^{j+1}, \\
 d_{k,\ell}^{(2)j} &= f_{2k+1,2\ell}^{j+1} - \tilde{f}_{2k+1,2\ell}^{j+1}, \\
 d_{k,\ell}^{(3)j} &= f_{2k,2\ell+1}^{j+1} - \tilde{f}_{2k,2\ell+1}^{j+1},
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

em que

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}_{2k,2\ell+1}^{j+1} &= \sum_q f_{k,q}^j p(2\ell+1-2q) \\
 \tilde{f}_{2k+1,2\ell}^{j+1} &= \sum_s f_{s,\ell}^j p(2k+1-2s) \\
 \tilde{f}_{2k,2\ell+1}^{j+1} &= \sum_{s,q} f_{s,q}^j p(2k+1-2s) p(2\ell+1-2q).
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

Observe que $\tilde{f}_{2k,2\ell+1}^{j+1}$ é obtido pela aplicação do esquema interpolante unidimensional na direção y (referente ao índice q de $f_{k,q}^j$). Analogamente, $\tilde{f}_{2k+1,2\ell}^{j+1}$ é obtido pela aplicação do esquema

interpolante unidimensional na direção x (referente ao índice s de $f_{s,\ell}^j$). Por outro lado, $\tilde{f}_{2k+1,2\ell+1}^{j+1}$ é obtido após a aplicação do esquema interpolante na direção x (índices s) e a seguir na direção y (índices q) de $f_{s,q}^j$.

Em resumo:

1. Os coeficientes wavelets $d_{s,q}^{(\alpha)j}$ também podem ser interpretados como erros entre os valores da função f nos pontos de $\mathcal{X}^{j+1} \setminus \mathcal{X}^j$ e aqueles obtidos por interpolação a partir dos valores de f em \mathcal{X}^j .
2. O cálculo desses coeficientes pode ser feito utilizando os esquemas de refinamento interpolante unidimensionais.
3. No caso de malhas finitas num retângulo, o cálculo dos coeficientes é feito utilizando os esquemas de refinamento adaptados ao intervalo.

Capítulo 4

Discretização de Operadores

4.1 Introdução

Neste capítulo é introduzida a discretização de operadores diferenciais utilizando análises de multirresolução biortogonais. Para isto, é útil um formalismo baseado em esquemas de aproximação composto por operadores de restrição e prolongamento. Esse formalismo permite analisar diferentes tipos de esquemas sob o mesmo ponto de vista. Esta metodologia foi inspirada no trabalho de Cullen e Morton (1980), em que um caso particular de discretização, utilizando uma base linear por partes, é estudado. São avaliados neste estudo dois tipos de esquemas: Petrov–Galerkin e misto (Petrov–Galerkin + colocação), e têm-se por objetivo analisar o erro de truncamento de tais esquemas de discretização. O esquema misto é de particular interesse no caso de operadores não lineares, em que os argumentos de colocação são usados nas etapas não lineares. Especial atenção é dada aos operadores de advecção linear $L(u) = u_x$, e não linear $L(u, v) = uv_x$ e ao operador de difusão $L(u) = u_{xx}$.

Como visto no Capítulo 2, esquemas de aproximação no contexto de análise multirresolução podem ser formulados de duas maneiras: em um único nível usando as funções escala, ou em vários níveis usando as bases hierárquicas de wavelets. As duas formulações são úteis. Por exemplo, na análise do erro de truncamento na discretização de operadores, fica mais simples usar os esquemas em um só nível. Por outro lado, certos tipos de operadores possuem representação mais compacta (esparsa) se for utilizado uma discretização em multinível.

4.2 Operadores de Restrição e Prolongamento

Nesta seção são consideradas discretizações de operadores diferenciais L da forma $L(u)$ e $L(u, v)$, com u e v em espaços funcionais apropriados. Em particular são considerados os seguintes casos:

$$L(u) = u_x, \quad L(u) = u_{xx}, \quad L(u, v) = uv_x.$$

Tipicamente, nos procedimentos de aproximação dos elementos de V são considerados espaços discretos \mathcal{S}^j , caracterizados pelo espaçamento 2^{-j} de uma malha. São definidos os operadores

$$r^j : V \rightarrow \mathcal{S}^j, \quad \text{operador de restrição,}$$

$$\Pi^j : \mathcal{S}^j \rightarrow V, \quad \text{operador de prolongamento.}$$

A partir do esquema de aproximação $\{r^j, \Pi^j\}$, as seguintes discretizações são definidas:

$$L(u) \sim L^j(u^j) = r^j[L \Pi^j u^j],$$

$$L(u, v) \sim L^j(u^j, v^j) = r^j[L(\Pi^j u^j, \Pi^j v^j)].$$

Um esquema é dito conservativo se $r^j \Pi^j$ é a identidade em \mathcal{S}^j . Isto significa que $\Pi^j r^j$ é sempre um operador de projeção,

$$(\Pi^j r^j)^2 = \Pi^j r^j.$$

Todos os esquemas considerados nesta tese são conservativos.

4.3 Discretizações em um Único Nível

É de interesse neste trabalho os operadores de restrição e prolongamento definidos em termos de duas funções básicas ϕ e ϕ^* , i.e.,

$$(r^j u)_s = 2^j \int u(x) \phi_s^{*j}(x) dx, \quad (4.1)$$

$$(\Pi^j u^j)(x) = \sum_k u_k^j \phi_k^j(x), \quad (4.2)$$

em que $\phi_s^{*j}(x) = \phi^*(2^j x - s)$ e $\phi_s^j(x) = \phi(2^j x - s)$. As discretizações correspondentes a $L^j(u^j)$ e $L^j(u^j, v^j)$ podem ser interpretadas como um esquema do tipo Petrov-Galerkin, em que $\phi_s^{*j}(x)$ são funções teste e $\phi_s^j(x)$ são funções *trial*.

Para que o esquema $\{r^j, \Pi^j\}$ seja conservativo é necessário que se verifique a relação de biortogonalidade expressa na Equação 2.5, i.e.,

$$\int \phi(x - k) \phi^*(x - \ell) dx = \delta_{k,\ell}.$$

Em tal caso verifica-se que $\mathcal{P}^j = \Pi^j r^j$ é a projeção biortogonal sobre V^j .

Nos exemplos a seguir somente os splines biortogonais $\phi = \phi_{N,N^*}$ e $\phi^* = \phi_N$ são considerados. No entanto os resultados apresentados podem ser estendidos ao caso ortogonal de Daubechies e a casos mais gerais.

4.3.1 Advecção Linear: $L(u) = u_x$

O operador discreto L^j aplicado em u^j possui a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} (L^j u^j)_s &= \left[r^j \sum_k u_k^j L\phi(2^j x - k) \right]_s \\ &= 2^j \sum_k u_k^j \Gamma^{(1)}(s - k), \end{aligned} \quad (4.3)$$

em que

$$\Gamma^{(1)}(k) = \Gamma_{N,N^*}^{(1)}(k) = \int \phi^*(x) \frac{d\phi}{dx}(x + k) dx. \quad (4.4)$$

Em Cunha e Gomes (1995) é mostrado que, na verdade, $\Gamma_{N,N^*}^{(1)} = \Gamma_M^{(1)}(k)$ e depende apenas da soma $M = N^* + N$, i.e.,

$$\Gamma^{(1)}(k) = \Gamma_M^{(1)}(k) = \frac{d\phi_{0,M}}{dx}(k),$$

em que $\phi_{0,M}$ é a função escala interpolante associada ao filtro $P_M(\xi)$, descrito no Capítulo 3. Por simetria das bases, pode ser mostrado que os valores dos coeficientes de $\Gamma^{(1)}(\ell)$ são anti-simétricos, i.e.,

$$\Gamma^{(1)}(\ell) = -\Gamma^{(1)}(-\ell).$$

Esses valores podem ser obtidos de uma equação de auto-valor construída a partir das relações de escala de ϕ e ϕ^* , i.e.,

$$\Gamma^{(1)}(\ell) = 2 \sum_m p_M(m - 2\ell) \Gamma^{(1)}(m), \quad (4.5)$$

em que $p_M(k)$ são os coeficientes do filtro interpolante $P_M(\xi)$. A normalização do auto-vetor $\Gamma^{(1)}$ é dada por

$$\sum_{\ell} \ell \Gamma^{(1)}(\ell) = -1.$$

Na Tabela 4.1 são apresentados os coeficientes não nulos $\Gamma^{(1)}(k)$, para $k > 0$ e $M = 2, 4, 6$ e 8 .

Tabela 4.1: Valores não nulos dos coeficientes de $\Gamma^{(1)}(k)$, para $k > 0$.

M	$\Gamma^{(1)}(1)$	$\Gamma^{(1)}(2)$	$\Gamma^{(1)}(3)$	$\Gamma^{(1)}(4)$	$\Gamma^{(1)}(5)$	$\Gamma^{(1)}(6)$
2	1/2					
4	-2/3	1/12				
6	-272/365	53/365	-16/1095	-1/2920		
8	-1747/2203	1483/7724	-399/11882	73/32823	128/743295	-1/1189272

O esquema expresso na Equação 4.3 também pode ser interpretado como um esquema do tipo diferenças finitas. Na literatura, o esquema de diferenças finitas centradas de ordem M mais usual usa os coeficientes Γ^{df} definidos por

$$\Gamma^{df}(\ell) = \sum_{m=0}^{M/2} \frac{-2(-1)^m (\ell!)^2}{(\ell - m)! (\ell + m)!}. \quad (4.6)$$

Maiores detalhes sobre esse assunto podem ser encontrados em (Kreiss e Oliger, 1972). Os valores não nulos de $\Gamma^{df}(\ell)$, para $\ell > 0$, são apresentados na Tabela 4.2, para $M = 2, 4, 6$ e 8 . Comparando as Tabelas 4.1 e 4.2, verifica-se que $\Gamma^{(1)}$ e Γ^{df} são idênticos para $M = 2$ e 4 . Nos demais casos eles são diferentes. Para $M > 2$, o número de coeficientes não nulos de $\Gamma^{(1)}$ é $2(M - 2)$, e de Γ^{df} é M . Portanto, o número de coeficientes não nulos de $\Gamma^{(1)}$ é sempre maior ou igual ao número de coeficientes não nulos de Γ^{df} .

Tabela 4.2: Valores não nulos dos coeficientes $\Gamma^{df}(k)$, para $k > 0$.

M	$\Gamma^{df}(1)$	$\Gamma^{df}(2)$	$\Gamma^{df}(3)$	$\Gamma^{df}(4)$
2	1/2			
4	-2/3	1/12		
6	3/2	-3/5	1/10	
8	8/5	-4/5	8/35	-1/35

4.3.2 Difusão: $L(u) = u_{xx}$

O operador discreto L^j aplicado em u^j possui a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
 (L^j u^j)_s &= r^j L \left(\sum_k u_k^j \phi(2^j x - k) \right)_s \\
 &= 2^{2j} \sum_k u_k^j \Gamma^{(2)}(s - k),
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

em que

$$\Gamma^{(2)}(k) = \Gamma_{N,N^*}^{(2)}(k) = \int \phi^*(x) \frac{d^2 \phi}{dx^2}(x + k) dx. \tag{4.8}$$

Novamente, $\Gamma_{N,N^*}^{(2)}$ depende somente de $M = N + N^*$,

$$\Gamma^{(2)}(k) = \Gamma_M^{(2)}(k) = \frac{d^2 \phi_{0,M}}{dx^2}(k).$$

Este esquema também pode ser pensado como um esquema do tipo diferenças finitas. Os valores numéricos dos coeficientes $\Gamma^{(2)}(k)$ estão apresentados na Tabela 4.3 para $M = 6, 8$. $\Gamma^{(2)}$ satisfaz o problema de auto-valor,

$$\Gamma^{(2)}(\ell) = 4 \sum_m p_M(m - 2\ell) \Gamma^{(2)}(m), \tag{4.9}$$

a possui a relação de simetria

$$\Gamma^{(2)}(\ell) = \Gamma^{(2)}(-\ell),$$

e a equação de normalização

$$\sum_{\ell} \ell^2 \Gamma^{(2)}(\ell) = 2.$$

Tabela 4.3: Valores não nulos dos coeficientes de $\Gamma^{(2)}(k)$, para $k > 0$

M	$\Gamma^{(2)}(0)$	$\Gamma^{(2)}(1)$	$\Gamma^{(2)}(2)$	$\Gamma^{(2)}(3)$	$\Gamma^{(2)}(4)$	$\Gamma^{(2)}(5)$	$\Gamma^{(2)}(6)$
6	-295/56	356/105	-92/105	4/35	3/560		
8	-1004/241	2399/908	-917/1314	194/1285	-235/22227	-31/19014	7/439653

4.3.3 Advecção Não Linear: $L(u, v) = u v_x$

Nos próximos parágrafos são apresentadas dois tipos de discretizações, uma relacionada ao esquema de Petrov–Galerkin e outra a um esquema misto Petrov–Galerin + colocação.

★ Esquema Petrov–Galerkin

Analogamente aos casos anteriores, a discretização do tipo Petrov–Galerkin do operador não linear $L(u, v) = u v_x$ pode ser expressa como:

$$\begin{aligned} [L^j(u^j, v^j)]_s &= r^j \left[L \left(\sum_m u_m^j \phi(2^j x - m), \sum_n v_n^j \phi(2^j x - n) \right) \right]_s \\ &= \sum_m \sum_n u_m^j v_n^j \Gamma(s - m, s - n), \end{aligned}$$

em que

$$\Gamma(m, n) = \Gamma_{N, N^*}(m, n) = \int \phi^*(y) \phi(y + m) \frac{d\phi}{dy}(y + n) dy. \quad (4.10)$$

Diferentemente dos casos lineares, agora Γ depende separadamente das escolhas de N e N^* . Pode-se verificar que são válidas as seguintes relações:

- Equação de auto–valor:

$$\Gamma(p, q) = 8 \sum_n \sum_m \alpha(2p - n, 2q - m) \Gamma(n, m), \quad (4.11)$$

em que $\alpha(n, m)$ depende dos filtros duais da seguinte forma

$$\alpha(n, m) = \sum_k h_k^* h_{k+n} h_{k+m}.$$

- Relação de anti-simetria:

$$\Gamma(p, q) = -\Gamma(-p, -q). \quad (4.12)$$

- Relações de normalização:

$$\sum_p \sum_q q \Gamma(p, q) = -1, \quad (4.13)$$

$$\sum_p \sum_q p \Gamma(p, q) = 0. \quad (4.14)$$

Para $(N^*, N) = (0, M)$, tem-se que $\Gamma(p, q)$ é dado por

$$\Gamma(p, q) = \phi_{0,M}(p) \frac{d\phi_{0,M}}{dx}(q) = \begin{cases} \Gamma_M^{(1)}(q), & p = 0, \\ 0, & p \neq 0. \end{cases}$$

Portanto,

$$L^j(u^j, v^j)_s = u_s^j \sum_k v_k^j \Gamma^{(1)}(s - k),$$

que se reduz a um esquema do tipo colocação. Nos demais casos, os valores de $\Gamma(p, q)$ são obtidos resolvendo-se o problema de auto-valor expresso na Equação 4.11.

Nos casos estudados a seguir, o problema de auto-valor, dado pela Equação 4.11, possui auto-espacos de dimensão 2. No entanto, é possível determinar de forma única o auto-vetor que satisfaz as condições de normalização, expressas nas Equações 4.13 e 4.14. Para a resolução numérica desse problema, a rotina de cálculo de auto-valor do programa Matlab é utilizada. Os valores não nulos de $\Gamma(p, q)$, $p \geq 0$, associados a $(N^*, N) = (1, 3)$ e $(N^*, N) = (1, 5)$ são apresentados nas Tabelas 4.4 e 4.3.3. No primeiro caso, tem-se que $\Gamma(p, q) \neq 0$ apenas para $-2 \leq p, q \leq 2$. No segundo caso, $\Gamma(p, q) \neq 0$ apenas para $-4 \leq p, q \leq 4$.

Tabela 4.4: Valores não nulos dos coeficientes $\Gamma(p, q)$ para $(N^*, N) = (1, 3)$

p	q				
	-2	-1	0	1	2
0	$-\frac{11}{180}$	$\frac{28}{45}$			
1	$\frac{1}{90}$	$-\frac{31}{270}$	$\frac{7}{30}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{27}$
2	$\frac{1}{4320}$	$\frac{1}{240}$	$-\frac{1}{80}$	$\frac{5}{432}$	$-\frac{1}{288}$

Tabela 4.5: Valores não nulos dos coeficientes $\Gamma(p, q)$ para $(N^*, N) = (1, 5)$.

p	q								
	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
0	$\frac{20}{89267}$	$\frac{314}{29267}$	$-\frac{395}{3003}$	$\frac{611}{837}$					
1	$-\frac{10}{190967}$	$-\frac{40}{13383}$	$\frac{369}{11429}$	$-\frac{768}{4751}$	$\frac{466}{1715}$	$-\frac{2281}{12630}$	$\frac{265}{5374}$	$-\frac{46}{5879}$	$-\frac{8}{39923}$
2	$\frac{1}{151618}$	$\frac{11}{37150}$	$-\frac{201}{44792}$	$\frac{245}{9993}$	$-\frac{181}{4285}$	$\frac{40}{1387}$	$-\frac{171}{20428}$	$\frac{76}{54335}$	$\frac{3}{73456}$
3		$\frac{8}{212103}$	$\frac{1}{35896}$	$-\frac{17}{20471}$	$\frac{3}{1721}$	$-\frac{45}{31771}$	$\frac{30}{54131}$	$-\frac{19}{170011}$	$-\frac{1}{223264}$
4			$\frac{1}{678343}$	$-\frac{1}{128891}$	$\frac{1}{74371}$	$-\frac{2}{195791}$	$\frac{1}{265548}$		

★ Esquema Misto (Petrov–Galerkin + Colocação)

O operador de advecção não linear envolve basicamente uma etapa linear (derivação) e outra não linear (multiplicação). Como os esquemas de colocação são bem mais simples na discretização da etapa não linear do que aqueles do tipo Petrov-Galerkin, define-se a seguir uma formulação mista que combina um esquema do tipo colocação, na etapa não linear, com outro

do tipo Petrov-Galerkin, na etapa linear. São necessários dois novos operadores. O operador de restrição

$$(r_i^j u)_s = u((s + \alpha) 2^{-j}), \quad (4.15)$$

corresponde à colocação nos pontos da forma $(s + \alpha) 2^j$, para algum $0 \leq \alpha < 1$. Para o operador de prolongamento introduz-se

$$(\Pi_i^j c^j)(x) = \sum_k c_k^j \theta(2^j x - k), \quad (4.16)$$

em que $\theta \in V^0$ é uma função interpolante nos pontos $k + \alpha$, isto é, $\theta(k + \alpha) = \delta_{k,0}$. A função θ deve satisfazer as seguintes condições:

$$\hat{\theta}(\zeta) = \frac{\hat{\phi}(\zeta)}{\tilde{\phi}_\alpha(\zeta)}, \quad (4.17)$$

em que

$$\tilde{\phi}_\alpha(\zeta) = \sum_k \phi(k + \alpha) e^{-ik\zeta}, \quad (4.18)$$

e

$$\tilde{\phi}_\alpha(\zeta) \neq 0 \quad \forall \zeta \in [-\pi, \pi]. \quad (4.19)$$

Desta maneira $r_i^j (\Pi_i^j r_i^j u)_s = u((s + \alpha) 2^{-j})$, o que significa que Π_i^j é um operador de interpolação e que o esquema $\{r_i^j, \Pi_i^j\}$ é conservativo.

A discretização mista proposta é a seguinte:

$$L^j(u^j, v^j)_s = r^j \{ \Pi_i^j [r_i^j L(\Pi^j u^j, \Pi^j v^j)] \}_s, \quad (4.20)$$

em que r^j e Π^j são os operadores definidos nas Equações 4.1 e 4.2. A Figura 4.1 representa esquematicamente este processo.

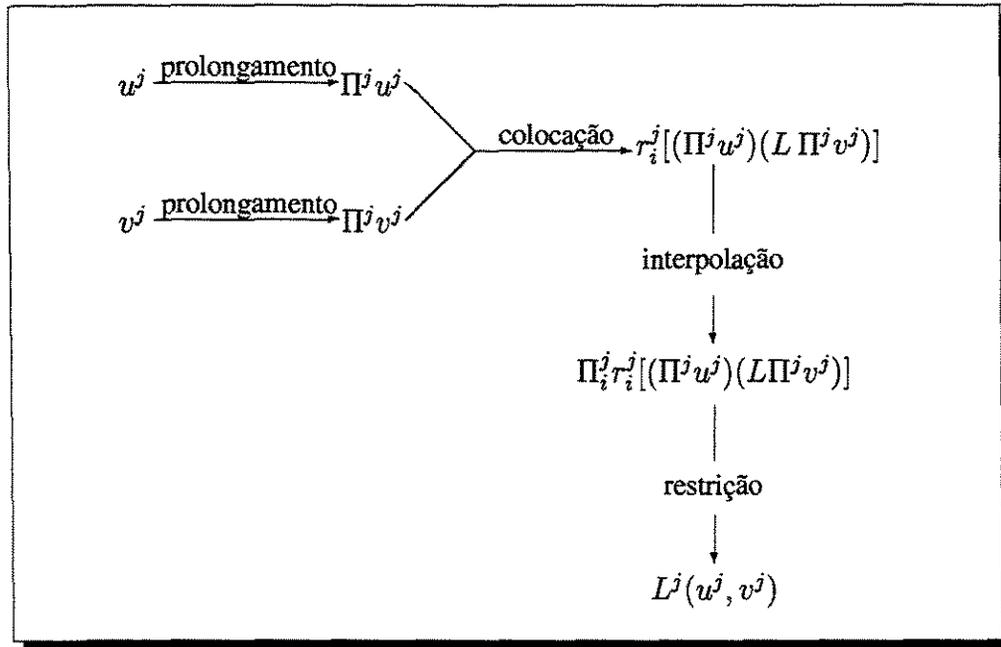


Figura 4.1: Esquema para operador L^j na formulação mista.

É conhecido que os splines ϕ_N satisfazem a condição de interpolação dada na Equação 4.19, com $\alpha = 0$ no caso N par, e $\alpha = 1/2$, no caso N ímpar (Schoenberg, 1969). Portanto, é razoável esperar que o mesmo comportamento seja válido para as funções duais ϕ_{N,N^*} . Exemplos de funções $\tilde{\phi}_0(\zeta)$ e $\tilde{\phi}_{1/2}(\zeta)$ são apresentadas a seguir. Na Figura 4.2 estão graficados $\tilde{\phi}_0(\zeta)$ para $N^* = 2$ e $N = 4$ e 6 . Pode-se observar que $\tilde{\phi}_0(\zeta) > 0$ para $\zeta \in [-\pi, \pi]$. Isto permite a definição de um operador de interpolação nos pontos discretos $k2^{-j}$.

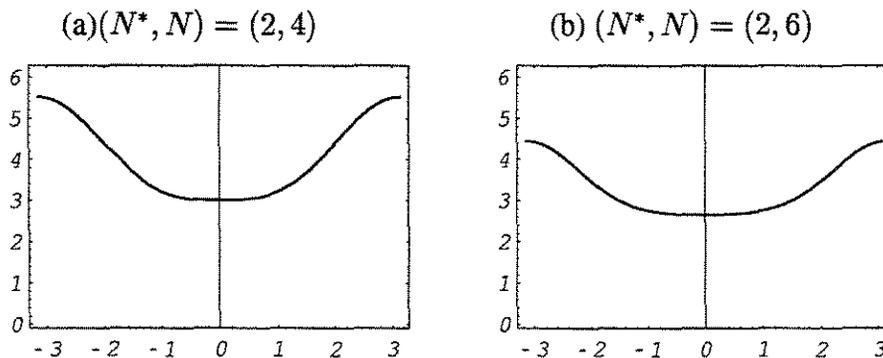


Figura 4.2: Função $\tilde{\phi}_0$.

Para $(N^*, N) = (1, 3)$ a Figura 4.3(a) mostra que

$$|\tilde{\phi}_0(\pi)| = |\tilde{\phi}_0(-\pi)| = 0,$$

o que impede a definição de um operador de interpolação nos pontos $k2^{-j}$. No entanto, a Figura 4.3(b) mostra que $\tilde{\phi}_{1/2}(\zeta) > 0$ para $-\pi \leq \zeta \leq \pi$, o que permite a definição de um operador de interpolação. O mesmo comportamento acontece para $N^* = 1$ e $N = 5$ e 7 , como mostra a Figura 4.3.

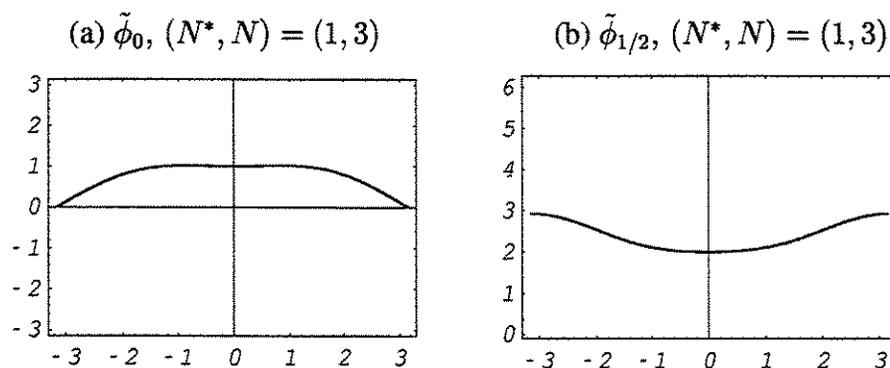


Figura 4.3: Funções $\tilde{\phi}_0$ e $\tilde{\phi}_{1/2}$.

4.3.4 Síntese das Discretizações

Uma síntese das discretizações na base nodal obtida nesta seção está apresentada na Tabela 4.6, da página 63.

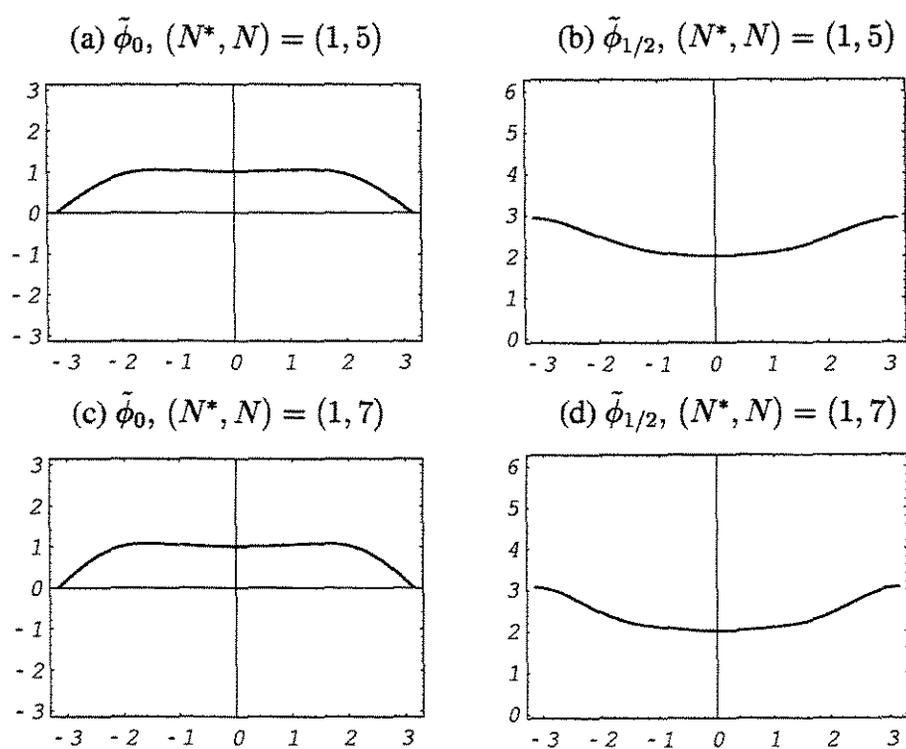
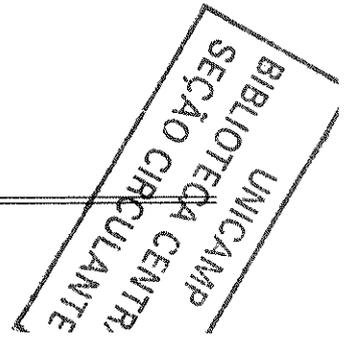


Figura 4.4: Funções $\tilde{\phi}_0$ e $\tilde{\phi}_{1/2}$.

Tabela 4.6: **Discretização em bases nodais** ($N + N^* = M$).

Operador	Discretização	
	Esquema Petrov–Galerkin	Símbolo
Advecção linear	$(L^j u^j)_s = 2^j \sum_k u_k^j \Gamma^{(1)}(s - k)$	$\Gamma^{(1)}(k) = \Gamma_{N, N^*}^{(1)}(k) = \int \phi^*(x) \frac{d\phi}{dx}(x + k) dx$
Difusão	$(L^j u^j)_s = 2^{2j} \sum_k u_k^j \Gamma^{(2)}(s - k)$	$\Gamma^{(2)}(k) = \Gamma_{N, N^*}^{(2)}(k) = \int \phi^*(x) \frac{d^2 \phi}{dx^2}(x + k) dx$
Advecção Não Linear	$[L^j(u^j, v^j)]_s = \sum_m \sum_n u_m^j v_n^j \Gamma(s - m, s - n)$	$\Gamma(m, n) = \Gamma_{N, N^*}(m, n) = \int \phi^*(y) \phi(y + m) \frac{d\phi}{dy}(y + n) dy$
	Colocação (N^*, N) = (0, M)	Símbolo
Advecção linear	mesma do esquema de Petrov–Galerkin	$\Gamma^{(1)}(k) = \Gamma_M^{(1)}(k) = \frac{d\phi_{0, M}}{dx}(k)$
Difusão	mesma do esquema de Petrov–Galerkin	$\Gamma^{(2)}(k) = \Gamma_M^{(2)}(k) = \frac{d^2 \phi_{0, M}}{dx^2}(k)$
Advecção Não Linear	$L^j(u^j, v^j)_s = u_s^j \sum_k v_k^j \Gamma^{(1)}(s - k)$	$\Gamma(p, q) = \phi_{0, M}(p) \frac{d\phi_{0, M}}{dx}(q) = \begin{cases} \Gamma_M^{(1)}(q), & p = 0, \\ 0, & p \neq 0. \end{cases}$
	Esquema Misto	
Advecção Não Linear	$L^j(u^j, v^j)_s = r^j \left\{ \Pi_i^j [r_i^j L(\Pi^j u^j, \Pi^j v^j)] \right\}_s$	



4.4 Erro de Truncamento

É de interesse estudar o comportamento assintótico dos erros de truncamento

$$TE = r^j Lu - L^j u^j, \quad (4.21)$$

$$TE = r^j L(u, v) - L^j(u^j, v^j). \quad (4.22)$$

O erro de truncamento pode ser interpretado como a diferença entre as operações de aplicar o operador L seguido de restrição e de tomar a restrição seguida de L^j . No diagrama da Figura 4.5 é apresentado esse processo para o caso linear.

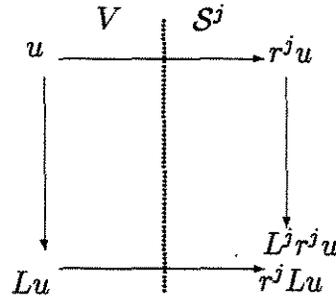


Figura 4.5: Representação esquemática do erro de truncamento.

A análise a seguir se restringe ao estudo do efeito do erro de truncamento sobre os modos de Fourier.

4.4.1 Advecção Linear

Considerando $u(x) = e^{-i\zeta x}$ tem-se que

$$u_k^j = 2^j \int e^{-i\zeta x} \phi^*(2^j x - k) dx = e^{-i\zeta k} \hat{\phi}^*(\zeta 2^{-j}).$$

Substituindo esse resultado na Equação 4.3 obtêm-se

$$\begin{aligned} (L^j u^j)_s &= 2^j \hat{\phi}^*(\zeta 2^{-j}) e^{-i\zeta 2^{-j} s} \sum_k e^{i\zeta 2^{-j} k} \Gamma^{(1)}(k) \\ &= 2^j \hat{\phi}^*(\zeta 2^{-j}) e^{-i\zeta 2^{-j} s} \overline{\tilde{\Gamma}(\zeta 2^{-j})}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

em que

$$\tilde{\Gamma}(\xi) = \sum_k \Gamma^{(1)}(k) e^{-i\xi k}.$$

Calculando $(r^j Lu)_s$ tem-se

$$\begin{aligned} r^j (Lu)_s &= 2^j \int -i\zeta e^{-i\zeta x} \phi^*(2^j x - s) dx \\ &= -i\zeta e^{-i\zeta 2^{-j}s} \hat{\phi}^*(\zeta 2^{-j}). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Substituindo as Equações 4.23 e 4.24 na Equação 4.21, tem-se que:

$$(TE)_s = -i\zeta e^{-izs} \mathcal{E}(z), \quad (4.25)$$

em que

$$\mathcal{E}(z) = \hat{\phi}^*(z) \left(1 - \frac{i}{z} \overline{\tilde{\Gamma}(z)} \right),$$

e $z = \zeta h$.

A Equação 4.25 mostra que usando diferentes bases ϕ^* e ϕ , mas mantendo fixo $M = N + N^*$, o único fator que diferencia os esquemas de discretização é $\hat{\phi}^*(z)$. É conhecido que no caso de colocação ($N^* = 0$) $\hat{\phi}^*(z) \equiv 1$ e nos demais casos ($N^* > 0$) $\hat{\phi}^*(z) \sim 1$ para $z \sim 0$, e $\hat{\phi}^*(z) \sim 0$ para $z \sim 2\pi$. No entanto, como $\hat{\phi}^*(z)$ é sempre limitada, a ordem do erro de truncamento para $z \sim 0$ é determinada em todos os casos em que $N + N^* = M$ pelo termo comum

$$\left(1 - \frac{i}{z} \overline{\tilde{\Gamma}(z)} \right).$$

Na Figura 4.6 é apresentado o gráfico de $-i\tilde{\Gamma}(z)$. Pode-se observar que $-i\tilde{\Gamma}(z) \sim z$ para $z \sim 0$ à medida que M aumenta. Além disso, vale o seguinte comportamento

$$1 - \frac{i}{z} \overline{\tilde{\Gamma}(z)} = \mathcal{O}(z^M),$$

conforme o enunciado do próximo teorema, que é demonstrado no Apêndice C.

Teorema 4.4.1 *Seja $\tilde{\Gamma}(z)$ o símbolo referente a discretização do operador $L(u) = u_x$ pelo esquema de Petrov–Galerkin, em termos dos splines biortogonais $\phi^* = \phi_N$, e $\phi = \phi_{N,N^*}$. Então,*

$$\mathcal{E}(z) = \hat{\phi}^*(z) \left(1 - \frac{i}{z} \overline{\tilde{\Gamma}(z)} \right) = \mathcal{O}(z^{N+N^*}).$$

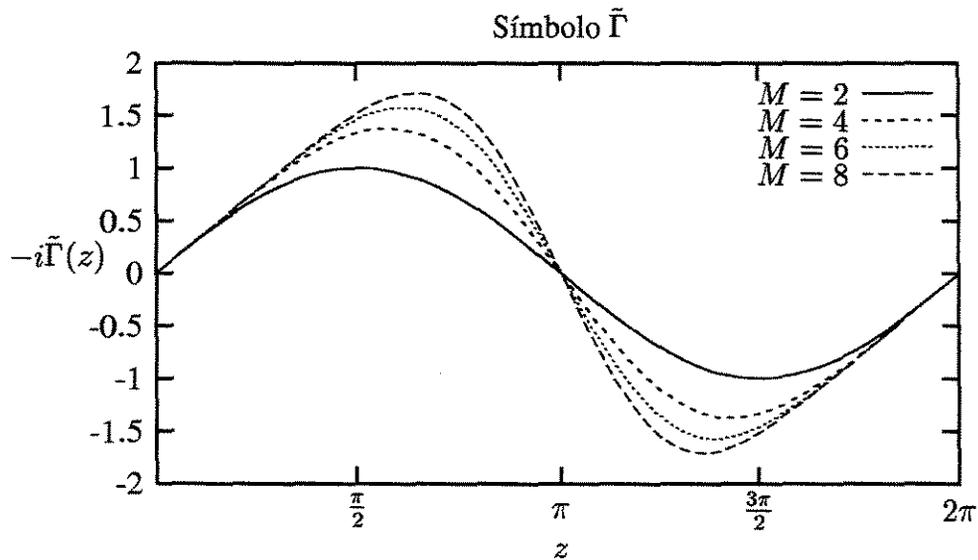


Figura 4.6: Gráfico de $-i\tilde{\Gamma}(z)$.

Exemplos Numéricos

Aplicando a relação de anti-simetria obtém-se que

$$\tilde{\Gamma}(z) = -2i \sum_{k \geq 1} \text{sen}(kz) \Gamma(k).$$

Então, calculando essa expansão utilizando o programa Mathematica, apresentadas nas tabelas a seguir, confirma-se a estimativa do Teorema 4.4.1.

Tabela 4.7: Valores de $\mathcal{E}(z)$.

M	$\mathcal{E}(z)$
4	$\frac{1}{30}z^4 + \mathcal{O}(z^6)$
6	$\frac{4}{511}z^6 + \mathcal{O}(z^8)$
8	$\frac{122}{63711}z^8 + \mathcal{O}(z^{10})$

(Cullen e Morton, 1980) obtêm

$$\mathcal{E}(z) \sim \frac{1}{180}z^4,$$

para o método de Galerkin usando funções lineares por partes. Comparando-se a constante $1/180$ com $1/30$ obtida usando-se o esquema de Petrov-Galerkin de ordem 4, observa-se que a primeira é seis vezes menor que a segunda. O símbolo $\mathcal{E}(z)$ dos esquemas usuais de diferenças finitas centradas estão apresentados na Tabela 4.8. As constantes assintóticas também são ligeiramente menores que as obtidas para o esquema biortogonal de mesma ordem.

Tabela 4.8: Valores de $\mathcal{E}(z)$ para diferenças finitas.

M	$\mathcal{E}(z)$
2	$\frac{1}{6}z^2 + \mathcal{O}(z^4)$
4	$\frac{1}{30}z^4 + \mathcal{O}(z^6)$
6	$\frac{1}{140}z^6 + \mathcal{O}(z^8)$
8	$\frac{1}{630}z^8 + \mathcal{O}(z^{10})$

4.4.2 Advecção Não Linear

Nos próximos parágrafos são apresentadas o erro de truncamento para as discretizações relacionadas ao esquema de Petrov-Galerkin e ao esquema misto Petrov-Galerkin + colocação.

★ Esquema Petrov-Galerkin

Tomando $u(x) = e^{-i\eta x}$ e $v(x) = e^{-i\zeta x}$ tem-se

$$u_m^j = (r_j u)_m = e^{-i\eta 2^{-j} m} \hat{\phi}^*(\eta 2^{-j}),$$

$$v_n^j = (r_j v)_n = e^{-i\zeta 2^{-j} n} \hat{\phi}^*(\zeta 2^{-j}).$$

Portanto,

$$L^j(u^j, v^j)_s = 2^j e^{-is(w+z)} \hat{\phi}^*(w) \hat{\phi}^*(z) \overline{\tilde{\Gamma}(w, z)}, \quad (4.26)$$

em que $w = \eta 2^{-j}$, $z = \zeta 2^{-j}$ e

$$\tilde{\Gamma}(w, z) = \sum_m \sum_n e^{-imw} e^{-inz} \Gamma(m, n).$$

Calculando $r^j [L(u, v)]_s$ tem-se que:

$$r^j [L(u, v)]_s = -i\zeta e^{-is(w+z)} \hat{\phi}^*(w+z). \quad (4.27)$$

Substituindo as Equações 4.27 e 4.26 na Equação 4.22 obtém-se que:

$$(TE)_s = -i\zeta e^{-is(w+z)} \mathcal{E}(w, z), \quad (4.28)$$

em que

$$\mathcal{E}(w, z) = \left[\hat{\phi}^*(w+z) - \frac{i}{z} \hat{\phi}^*(w) \hat{\phi}^*(z) \overline{\tilde{\Gamma}(w, z)} \right].$$

Teorema 4.4.2 *Seja $\phi = \phi_{N, N^*}$, $\phi^* = \phi_N$ com $N \geq N^*$. Então, $\mathcal{E}(z, w)$ apresentado na Equação 4.28 satisfaz o seguinte comportamento assintótico:*

$$\mathcal{E}(w, z) = \sum_{j=0}^M \mathcal{O}(w^j z^{M-j}).$$

Na fórmula acima aparece explicitamente apenas a dependência em M . No entanto, as constantes no limite assintótico dependem da escolha de N e N^* . Isto é comprovado a seguir.

Exemplos Numéricos

Para o caso interpolante $(N^*, N) = (0, M)$ tem-se que $\tilde{\Gamma}(w, z) = \tilde{\Gamma}(z)$ e $\hat{\phi}^*(\zeta) = 1$. Assim o erro de truncamento é expresso por

$$(TE)_s = -i\zeta e^{-is(w+z)} \mathcal{E}(z).$$

Portanto, neste caso valem as mesmas estimativas do caso linear (conforme Tabela 4.7).

Para $N^* = 1$,

$$\hat{\phi}^*(\zeta) = e^{-i\zeta/2} \frac{\text{sen}(\zeta/2)}{\zeta/2}. \quad (4.29)$$

Considerando a propriedade de anti-simetria, expressa na Equação 4.12, tem-se que

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}(w, z) = & -2i \left[\sum_{m \geq 1} \sum_{n \geq 1} \text{sen}(wm + zn) \Gamma(m, n) + \sum_{m \geq 1} \sum_{n \geq 1} \text{sen}(wm - zn) \Gamma(m, -n) + \right. \\ & \left. \sum_{n \geq 1} \text{sen}(zn) \Gamma(0, n) + \sum_{m \geq 1} \text{sen}(wm) \Gamma(m, 0) \right]. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Com isto obtêm-se os seguintes resultados:

A ordem de aproximação de $\mathcal{E}(z, w)$ no caso $(N, N^*) = (1, 3)$, é obtida usando as Equações 4.29 e 4.30 e os valores de $\Gamma(p, q)$, dados na Tabela 4.4, e possui a seguinte expressão:

$$\mathcal{E}(z, w) \sim \frac{1}{30} z^4 + \frac{1}{30} z^3 w + \frac{1}{80} z^2 w^2 - \frac{1}{80} z w^3.$$

Analogamente, para $(N^*, N) = (1, 5)$, e utilizando a Tabela 4.3.3, tem-se que

$$\mathcal{E}(z, w) \sim \frac{4}{511} z^6 + \frac{4}{511} z^5 w + \frac{5}{2016} z^4 w^2 - \frac{5}{2016} z w^5.$$

Portanto, esses dois exemplos confirmam a estimativa do Teorema 4.4.2.

O resultado obtido por Cullen e Morton (1980), pelo método de Galerkin, utilizando funções lineares por partes é

$$\mathcal{E}(z, w) \sim \frac{1}{180} z^4 + \frac{1}{90} z^3 w + \frac{7}{720} z^2 w^2 - \frac{1}{360} z w^3.$$

Comparando esse resultado com o obtido pelo esquema de Petrov-Galerkin, de mesma ordem, observa-se novamente que estas constantes são menores.

★ Esquema Misto (Petrov–Galerkin + Colocação)

Seja $u(x) = e^{-i\eta x}$ e $v(x) = e^{-i\zeta x}$, então a Equação 4.20 pode ser calculada seguindo os passos apresentados no esquema da Figura 4.1. Com isto tem-se que:

$$\begin{aligned} (\Pi^j u^j)(x) &= \sum_k u_k^j \phi(2^j x - k) \\ &= \hat{\phi}^*(w) \sum_k e^{-ikw} \phi(2^j x - k). \end{aligned}$$

Logo, aplicando o operador r_i^j obtém-se que:

$$\begin{aligned} (r_i^j \Pi^j u^j)_l &= \hat{\phi}^*(w) \sum_k e^{-ikw} \phi(l + \alpha - k) \\ &= \hat{\phi}^*(w) e^{-ilw} \sum_p e^{ipw} \phi(p + \alpha) \\ &= \hat{\phi}^*(w) e^{-ilw} \overline{\tilde{\phi}_\alpha(w)}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

De forma análoga,

$$[r_i^j L(\Pi^j v^j)]_l = 2^j \hat{\phi}^*(z) e^{-ilz} \overline{\tilde{\beta}_\alpha(z)}, \quad (4.32)$$

em que

$$\tilde{\beta}_\alpha(z) = \sum_k e^{-ikz} L\phi(k + \alpha). \quad (4.33)$$

Como

$$r_i^j L^j(\Pi^j u^j, \Pi^j v^j) = r_i^j(\Pi^j u^j) r_i^j L(\Pi^j v^j),$$

ao se multiplicar a Equação 4.31 pela Equação 4.32 e aplicar o operador de prolongamento Π_i^j obtém-se que

$$\Pi_i^j [r_i^j L(\Pi^j u_j, \Pi^j v^j)](x) = 2^j \hat{\phi}^*(w) \hat{\phi}^*(z) \overline{\tilde{\phi}_\alpha(w)} \overline{\tilde{\beta}_\alpha(z)} \sum_l e^{-il(w+z)} \theta(2^j x - l).$$

Finalmente, aplicando o operador de restrição r^j , encontra-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} L^j(u^j, v^j)_s &= 2^j \hat{\phi}^*(w) \hat{\phi}^*(z) \overline{\tilde{\phi}_\alpha(w)} \overline{\tilde{\beta}_\alpha(z)} \sum_l e^{-il(w+z)} \int \theta(y + s - l) \phi^*(y) dy \\ &= 2^j \hat{\phi}^*(w) \hat{\phi}^*(z) \overline{\tilde{\phi}_\alpha(w)} \overline{\tilde{\beta}_\alpha(z)} \sum_l e^{-il(w+z)} \gamma(s - l) \\ &= 2^j e^{-is(w+z)} \hat{\phi}^*(w) \hat{\phi}^*(z) \overline{\tilde{\phi}_\alpha(w)} \overline{\tilde{\beta}_\alpha(z)} \overline{\tilde{\gamma}(w + z)}, \end{aligned}$$

em que

$$\gamma(q) = \int \theta(y+q)\phi^*(y)dy,$$

e

$$\tilde{\gamma}(w) = \sum_k e^{-ikw}\gamma(k).$$

Analisando $\tilde{\gamma}(w)$ obtém-se que

$$\tilde{\gamma}(w) = \frac{1}{\tilde{\phi}_\alpha(w)}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(w) &= \sum_k e^{-ikw} \int \theta(y+k)\phi^*(y)dy \\ &= \int \phi^*(y) \sum_k e^{-ikw}\theta(y+k)dy \\ &= \int \phi^*(y) \sum_k e^{iy(2\pi k+w)}\hat{\theta}(w+2\pi k)dy \\ &= \sum_k \hat{\theta}(w+2\pi k) \int \phi^*(y)e^{iy(2\pi k+w)}dy \\ &= \sum_k \hat{\theta}(w+2\pi k)\overline{\hat{\phi}^*(w+2\pi k)}. \end{aligned}$$

Utilizando a Equação 4.17, a periodicidade de $\tilde{\phi}_\alpha(w)$, e a condição de biortogonalidade, têm-se que:

$$\tilde{\gamma}(w) = \frac{1}{\tilde{\phi}_\alpha(w)} \sum_k \hat{\phi}(w+2\pi k)\overline{\hat{\phi}^*(w+2\pi k)} = \frac{1}{\tilde{\phi}_\alpha(w)}.$$

Portanto,

$$L^j(u^j, v^j)_s = 2^j \hat{\phi}^*(w)\hat{\phi}^*(z)e^{-is(w+z)} \frac{\overline{\tilde{\phi}_\alpha(w)} \overline{\tilde{\beta}_\alpha(z)}}{\tilde{\phi}_\alpha(w+z)}.$$

Com isto o erro de truncamento é dado por

$$(TE)_s = -i\zeta e^{-is(w+z)} \mathcal{E}(w, z), \quad (4.34)$$

em que

$$\mathcal{E}(w, z) = \frac{1}{\tilde{\phi}_\alpha(w+z)} \left[\hat{\phi}^*(w+z) \overline{\tilde{\phi}_\alpha(w+z)} - \frac{i}{z} \hat{\phi}^*(w) \hat{\phi}^*(z) \overline{\tilde{\phi}_\alpha(w)} \overline{\tilde{\beta}_\alpha(z)} \right].$$

Teorema 4.4.3 *Seja $\phi = \phi_{N, N^*}$, $\phi^* = \phi_N$ com $N^* \geq 1$. Suponha que seja verdadeira a condição de interpolação*

$$\tilde{\phi}_\alpha(\zeta) \neq 0, \quad \forall \zeta \in [-\pi, \pi],$$

em que $\alpha = 0$ para N par e $\alpha = 1/2$ para N ímpar. Então,

(a) para N par

$$\mathcal{E}(w, z) = \sum_{k=0}^N \mathcal{O}(w^k z^{N-k}),$$

(b) para N ímpar

$$\mathcal{E}(w, z) = \mathcal{O}(z)^{N-1} + \sum_{k=0}^{N+1} \mathcal{O}(w^k z^{N+1-k}).$$

Exemplos Numéricos

Numericamente, o comportamento assintótico de $\mathcal{E}(w, z)$, dado na Equação C.13, para $N^* = 2$ e $N = 4$ é dado por

$$\mathcal{E}(w, z) \sim \frac{691}{3150} z^4 + \frac{184}{315} z^3 w + \frac{92}{105} z^2 w^2 + \frac{184}{315} z w^3,$$

o que confirma a estimativa (a) do Teorema 4.4.3. Para $(N^*, N) = (1, 5)$, obtém-se a seguinte aproximação para $\mathcal{E}(w, z)$,

$$\mathcal{E}(w, z) \sim \frac{23}{180} z^4,$$

que confirma a estimativa (b) do Teorema 4.4.3. Nos cálculos, foram utilizadas as expressões de $\tilde{\phi}_{1/2}(z)$ e de $\tilde{\beta}_{1/2}(z)$ do Lema C.5.1.

4.5 Discretização em Multinível

Considerando os operadores r^j e Π^j de restrição e prolongamento, descritos nas Equações 4.1 e 4.2, $L^j(u^j)$ é expresso por

$$L^j(u^j) = r^j [L \Pi^j u^j]. \quad (4.35)$$

Como visto na Seção 4.3, essa discretização corresponde a um esquema tipo Petrov–Galerkin utilizando a base $\{\phi_k^{*j}\}$, como funções teste, e $\{\phi_k^j\}$, como funções trial. Nesta seção estende-se essas definições para o caso multinível. Para isto definem-se os operadores de restrição e prolongamento em multirresolução:

$$r_{MR}^{j,j_0} u = u_{MR}^{j,j_0} = \text{DWT}_{j_0}^j r^j u = 2^{j/2} \begin{pmatrix} d^{j-1} \\ \vdots \\ d^{j_0} \\ c^{j_0} \end{pmatrix}, \quad (4.36)$$

$$[\Pi_{MR}^{j,j_0} u_{MR}^{j,j_0}](x) = \sum_k c_k^{j_0} \phi_k^{j_0}(x) + \sum_k \sum_{m=j_0}^{j-1} d_k^m \psi_k^m(x). \quad (4.37)$$

O esquema de aproximação $\{r_{MR}^{j,j_0}, \Pi_{MR}^{j,j_0}\}$ também é conservativo, i.e., o operador $r_{MR}^{j,j_0} \Pi_{MR}^{j,j_0}$ é um operador de projeção. Analogamente, define-se a seguinte discretização:

$$L(u) \approx L_{MR}^{j,j_0}(u_{MR}^{j,j_0}) = r_{MR}^{j,j_0} [L \Pi_{MR}^j u_{MR}^{j,j_0}], \quad (4.38)$$

que corresponde a um esquema tipo Petrov–Galerkin utilizando a base $\{\phi_k^{*j_0}\} \cup \{\psi_k^{*j_0}\} \cdots \cup \{\psi_k^{*j}\}$ como funções teste, e a base $\{\phi_k^{j_0}\} \cup \{\psi_k^{j_0}\} \cdots \cup \{\psi_k^j\}$, como funções trial.

Um fato a ser observado é que para operadores diferenciais, a discretização L^j em um só nível, é representada por uma matriz de banda, com $2(M - 2)$ bandas. Já em multirresolução, a estrutura de L_{MR}^j é de uma matriz de banda por blocos. No entanto, enquanto $(L^j)^{-1}$ é em geral uma matriz cheia, $(L_{MR}^j)^{-1}$ preserva a mesma estrutura de banda por blocos, de L_{MR}^j (Daubechies, 1992, cap. 9).

Exemplos Numéricos

Seja $L(u) = u - \mu u_{xx}$, em que $\mu \neq 0$. Considerando o esquema de multirresolução dado por $\phi = \phi_{(1,5)}$ e $\phi^* = \phi_1$, as matrizes (L_{MR}^j) e $(L_{MR}^j)^{-1}$ são apresentadas na Figura 4.7. O nível

mais alto é $j = 10$ e o mais baixo é de $j_0 = 5$. Para o cálculo (L_{MR}^j) , primeiro calcula-se L^j , e então usa-se seguinte relação

$$r_{MR}^j \left[L \Pi_{MR}^j u_{MR}^{j,j_0} \right] = \text{DWT}_{j_0}^j \left(L^j u^j \right).$$

Nessa figura a ordem de grandeza dos elementos é expressa em níveis de cinza, quanto mais claro maior o valor numérico do elemento, i.e., a escala de cinza representa o valor do expoente s para $|d_k^j| \approx 10^s$.

A percentagem dos elementos das matrizes L_{MR}^j e $(L_{MR}^j)^{-1}$ menores que 10^s , para $s = -15, \dots, 0$, é apresentada na Figura 4.8. As diferentes curvas correspondem a $j = 8, \dots, 13$. Observa-se nessa figura que as matrizes tornam-se mais esparsas a medida que j aumenta. Na Figura 4.9 é representado $\mathcal{N}(s)$, que é o número total de elementos acima de 10^s , em função de s . As diferentes curvas estão associados aos splines biortogonais: $(N, N^*) = (0, 6), (1, 5), (5, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 3), (6, 0)$, e também ao esquema ortogonal de Daubechies com $K = 3$. Em todos os caso, M é mantido fixo e igual a 6, $j = 11$ e $j_0 = 5$. Observa-se que não ocorrem mudanças significativas em $\mathcal{N}(s)$ para esses esquemas.

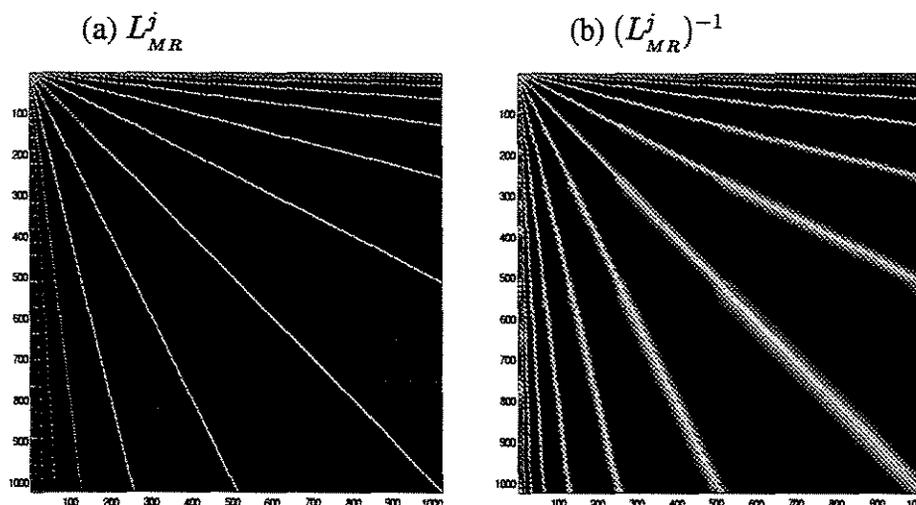


Figura 4.7: Representação matricial dos operador L_{MR}^j e $(L_{MR}^j)^{-1}$, para $(N^*, N) = (1, 5)$, $j = 10$ e $j_0 = 5$. Os valores mais claros correspondem aos elementos maiores que 10^{-5} .

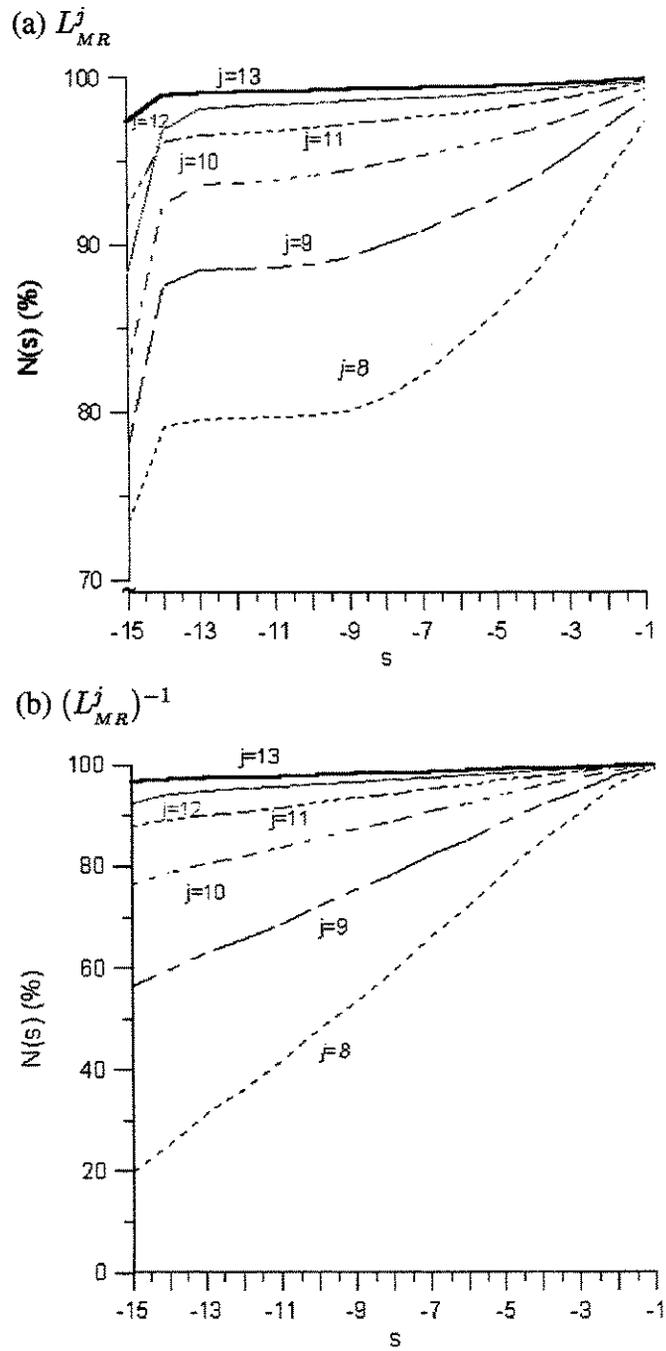


Figura 4.8: Percentagem dos elementos das matrizes L^j_{MR} e $(L^j_{MR})^{-1}$ abaixo de 10^s .

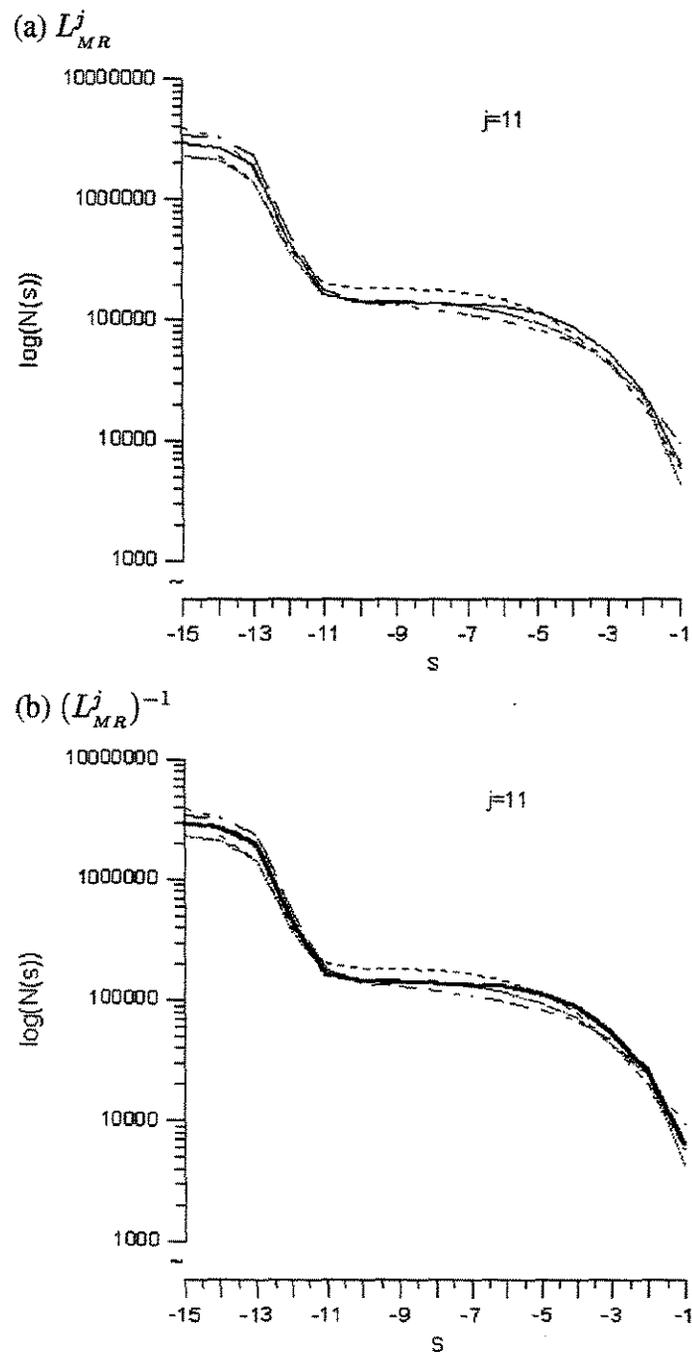


Figura 4.9: Número dos elementos das matrizes L_{MR}^j e $(L_{MR}^j)^{-1}$ abaixo de 10^8 , para a família $M = 6$, $j = 11$ e $j_0 = 5$.

Capítulo 5

Modelo de Água Rasa

5.1 Introdução

Na atmosfera e no oceano ocorrem diversos tipos de movimentos. É possível quantificá-los de uma forma estatística, de tal forma que a escala horizontal dos movimentos \mathcal{L} seja bem maior que a escala vertical \mathcal{D} . Por exemplo, se $\mathcal{D} = 10\text{km}$, que é ordem de grandeza da altura da troposfera em latitudes médias, e $\mathcal{L} > 100\text{km}$, os movimentos desse modelo atmosférico são considerados de escala sinótica ou planetária e estão em equilíbrio quasi-hidrostático. As equações de água rasa modelam esses tipos de movimentos. O modelo de água rasa que é discutido na próxima seção é capaz de descrever importantes aspectos dos movimentos atmosféricos e oceânicos que não dependam de múltiplas estratificações. Por outro lado, conceitualmente, quando há necessidade de estratificação, modelos mais complexos podem ser compostos por camadas de modelos de água rasa (Pedlosky, 1987; Daley, 1981).

5.2 Modelo

O modelo de água rasa é obtido das Equações do Movimento de Newton para um observador em um sistema de coordenadas com rotação uniforme, e da Equação da Continuidade, considerando as seguintes simplificações:

- $\mathcal{L} \gg \mathcal{D}$;
- fluido homogêneo e incompressível, i.e., densidade absoluta constante;

- fluido limitado em uma fronteira inferior, e possui uma superfície livre na parte superior (condição de fronteira cinemática);
- aproximação hidrostática.

Em coordenadas cartesianas bidimensionais o modelo de água rasa de interesse é composto do seguinte sistema de três equações e três incógnitas (u, v, η):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - f v + \bar{g} \frac{\partial \eta}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + f u + \bar{g} \frac{\partial \eta}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} + \eta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (5.1)$$

em que $u = u(x, y, t)$ e $v = v(x, y, t)$ são as componentes do vetor velocidade nas direções dos eixos x e y , conhecidas como componente zonal e meridional, e $\eta = \eta(x, y, t)$ é a altura do fluido. A variável t representa o tempo, $f = f(y)$ denota o parâmetro de Coriolis, e \bar{g} representa a aceleração da gravidade, considerada uma constante. As duas primeiras equações representam as Equações do Movimento de Newton e a terceira a Equação da Continuidade.

5.3 Movimentos Oscilatórios no Plano f

Para estudar os movimentos oscilatório do ponto de vista analítico, é de interesse o modelo de água rasa linear com coeficientes constantes. Para obtenção desse modelo linear, é utilizado o método das perturbações, descrito em Holton (1992), considerando que o estado básico é independente da posição e do tempo, no modelo de água rasa não dissipativo expresso pelo Sistema 5.1. Para simplificar o sistema linear resultante, aplica-se uma análise de escala para latitudes médias e utiliza-se a aproximação geostrófica. Com isso obtém-se o sistema linear descrito por Grotjahn e O'Brien (1976):

$$L u' - f_0 v' + \frac{\partial \varphi'}{\partial x} = 0 \quad (5.2)$$

$$L v' + f_0 u' + \frac{\partial \varphi'}{\partial y} = 0 \quad (5.3)$$

$$L \varphi' + \Phi \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right) = 0. \quad (5.4)$$

em que

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} + V \frac{\partial}{\partial y}, \quad (5.5)$$

$\varphi = \bar{g}\eta$, é a função geopotencial, $f \approx f_0$ é uma constante, (U, V, Φ) representam os estados básicos de (u, v, φ) e (u', v', φ') denotam as perturbações de (u, v, φ) . Para simplificar a notação, a partir de agora as perturbações são denominadas simplesmente de (u, v, φ) .

As soluções ondulatórias de interesse desse sistema são do tipo

$$e^{i(\xi x + \vartheta y - \omega t)},$$

em que (ξ, ϑ) são as componentes do **vetor número de onda** e ω é **frequência de fase** expressa por

$$\omega = \omega(\xi, \vartheta).$$

A razão entre essa frequência e as componentes do vetor número de onda compõem a **velocidade de fase**, que é velocidade de propagação da onda,

$$\vec{V}_f \equiv \left(\frac{\omega}{\xi}, \frac{\omega}{\vartheta} \right). \quad (5.6)$$

Outra quantidade de interesse é a **velocidade de grupo**, que por definição é expressa por

$$\vec{V}_g \equiv (V_{gx}, V_{gy}) = \left(\frac{\partial \omega}{\partial \xi}, \frac{\partial \omega}{\partial \vartheta} \right). \quad (5.7)$$

Essa velocidade fornece informações para estimar a velocidade de propagação de energia das ondas e avaliar a intensificação e o enfraquecimento dos fenômenos físicos modelados.

O objetivo dos próximos parágrafos é estudar frequência de fase e a velocidade de grupo do sistema de água rasa descritos nas Equações 5.2, 5.3 e 5.4. Para evidenciar melhor os tipos de movimentos associados a esse sistema, consideram-se as seguintes simplificações:

- Modelo de advecção:

$$L\varphi = 0. \quad (5.8)$$

Se o geopotencial tem a forma

$$\varphi = e^{i(\xi x + \vartheta y - \omega t)}, \quad (5.9)$$

então a frequência de fase é expressa por

$$\omega = U\xi + V\vartheta, \quad (5.10)$$

e as velocidades de fase e de grupo são

$$\vec{V}_f = \vec{V}_g = (U, V). \quad (5.11)$$

• Modelo de ondas de gravidade:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\Phi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (5.14)$$

Pode-se reduzir o sistema composto pelas Equações 5.12, 5.13 e 5.14 a uma única equação em φ . Primeiramente deve-se aplicar $\frac{\partial}{\partial x}$ na Equação 5.12, $\frac{\partial}{\partial y}$ na Equação 5.13 e $\frac{\partial}{\partial t}$ na Equação 5.14. É assumido que u , v e φ são suficientemente suaves, de forma que os operadores diferenciais possam comutar. Após as substituições necessárias chega-se ao seguinte resultado:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Phi \nabla^2 \right] \varphi = 0, \quad (5.15)$$

em que $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ é o operador Laplaciano. Substituindo φ , dada pela Equação 5.9, na Equação 5.15 obtém-se

$$-\omega^2 + \Phi(\xi^2 + \vartheta^2) = 0,$$

i.e., duas frequências de fase

$$\omega_{\pm} = \pm \sqrt{\Phi(\xi^2 + \vartheta^2)}, \quad (5.16)$$

conhecidas como **frequências de fase inerciais**. As suas velocidades de grupo são expressas por:

$$\vec{V}_{g,\pm} = \left(\pm \frac{\sqrt{\Phi}\xi}{\sqrt{[\xi^2 + \vartheta^2]}}, \pm \frac{\sqrt{\Phi}\vartheta}{\sqrt{[\xi^2 + \vartheta^2]}} \right). \quad (5.17)$$

Para valores típicos de $\Phi \approx 10.000\text{m}^2/\text{s}^2$ e $U \approx V \approx 10\text{m/s}$ tem-se que para cada número de onda

$$|\omega| \ll |\omega_{\pm}|.$$

Portanto, as ondas do modelo de advecção oscilam mais lentamente que as ondas do modelo de ondas de gravidade. Além disso, as ondas do modelo advectivo não são dispersivas, pois $\vec{V}_f = \vec{V}_g$.

- Modelo de água rasa:

No teorema a seguir são apresentadas as frequências de fase e as velocidades de grupo do sistema de água rasa, expresso nas Equações 5.2–5.4. Essas frequências são uma composição das frequências de fase dos modelos de advecção e de ondas de gravidade discutidos.

Teorema 5.3.1 *O sistema de água rasa linear, dado pelas Equações 5.2–5.4, possui três frequências de fase:*

$$\omega = U\xi + V\vartheta, \quad (5.18)$$

$$\omega_{\pm} = (U\xi + V\vartheta) \pm \sqrt{f_0^2 + \Phi(\xi^2 + \vartheta^2)}. \quad (5.19)$$

Por conseguinte, as velocidades de grupo associadas a essas frequências de fase são dadas por

$$\vec{V}_g = (U, V), \quad (5.20)$$

$$\vec{V}_{g,\pm} = \left(U \pm \frac{\xi\Phi}{\sqrt{f_0^2 + \Phi(\xi^2 + \vartheta^2)}}, V \pm \frac{\vartheta\Phi}{\sqrt{f_0^2 + \Phi(\xi^2 + \vartheta^2)}} \right). \quad (5.21)$$

Demonstração: São adotados os seguintes procedimentos para se reduzir esse sistema de equações a apenas uma equação na variável φ :

(i) Da Equação 5.2 tem-se

$$v = \frac{1}{f_0} \left(Lu + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right), \quad (5.22)$$

de forma que

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{f_0} \left[\frac{\partial(Lu)}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) \right]. \quad (5.23)$$

(ii) Substituindo a Equação 5.22 na Equação 5.3 obtém-se

$$(L^2 + f_0^2)u = -L\frac{\partial\varphi}{\partial x} - f_0\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad (5.24)$$

de forma que

$$(L^2 + f_0^2)\frac{\partial u}{\partial x} = -\left[L\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + f_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right], \quad (5.25)$$

$$(L^2 + f_0^2)\frac{\partial u}{\partial y} = -\left[L\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} + f_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial^2 y}\right]. \quad (5.26)$$

(iii) Aplicando o operador $[L^2 + f_0^2]$ na Equação 5.4 tem-se que:

$$L[L^2 + f_0^2]\varphi = -\Phi[L^2 + f_0^2]\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right). \quad (5.27)$$

Substituindo $[L^2 + f_0^2]\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial v}{\partial y}$, dados nas Equações 5.25 e 5.23, respectivamente, obtém-se que:

$$L[L^2 + f_0^2]\varphi = -\frac{\Phi}{f_0}[L^2 + f_0^2]\left(L\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right) + \Phi\left(L\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + f_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right). \quad (5.28)$$

Usando a expressão de $[L^2 + f_0^2]\frac{\partial u}{\partial y}$ dada pela Equação 5.26,

$$\begin{aligned} L[L^2 + f_0^2]\varphi &= \frac{\Phi}{f_0}L^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + \Phi L\frac{\partial^2\varphi}{\partial^2 y} - \frac{\Phi}{f_0}L^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + \\ &\quad -\Phi f_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + \Phi L\frac{\partial^2\varphi}{\partial^2 x} + \Phi f_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Portanto,

$$L[[L^2 + f_0^2] - \Phi\nabla^2]\varphi = 0. \quad (5.30)$$

Assumindo $\varphi = e^{i(\xi x + \vartheta y - \omega t)}$ na Equação 5.30 obtém-se que

$$[-\omega + U\xi + V\vartheta][-\omega^2 + 2(U\xi + V\vartheta)\omega - (U\xi + V\vartheta)^2 + f_0^2 + \Phi(\xi^2 + \vartheta^2)] = 0.$$

São três as soluções não triviais da equação anterior:

- $\omega = U\xi + V\vartheta$.

$$\bullet \omega_{\pm} = (U\xi + V\vartheta) \pm \sqrt{f_0^2 + \Phi(\xi^2 + \vartheta^2)}.$$

A velocidade de grupo associada à frequência de fase ω é

$$\vec{V}_g = (U, V),$$

enquanto as velocidades de grupo associadas às frequências ω_{\pm} são dadas por

$$\vec{V}_{g,\pm} = \left(U \pm \frac{\xi\Phi}{\sqrt{f_0^2 + \Phi(\xi^2 + \vartheta^2)}}, V \pm \frac{\vartheta\Phi}{\sqrt{f_0^2 + \Phi(\xi^2 + \vartheta^2)}} \right). \quad (5.31)$$

□

Observe que a frequência ω , dada na Equação 5.18, é igual à frequência de fase do caso puramente advectivo. Nas frequências inerciais ω_{\pm} , dadas na Equação 5.19, o primeiro termo é igual à frequência ω , enquanto que o segundo assemelha-se às frequências do modelo de ondas de gravidade. Isto é válido se $f_0^2 \ll \Phi(\xi^2 + \vartheta^2)$, e.g., nas latitudes médias em que $f_0 \approx 10^{-4} s^{-1}$.

Pelos resultados do Teorema 5.3.1, esse modelo de água rasa determina dois tipos de movimentos. Tipicamente para a atmosfera, o movimento associado à frequência ω é lento, com uma escala de tempo da ordem de 28 horas e uma velocidade de propagação da ordem de 10 m/s. Já os movimentos associados às frequências inerciais ω_{\pm} são mais rápidos, com uma escala temporal da ordem de 3 horas, com velocidade de propagação consideravelmente maior que 10 m/s, para latitudes médias.

Em geral, os movimentos encontrados na atmosfera e no oceano ocorrem devido a processos físicos dispersivos, i.e., a velocidade de propagação de ondas individuais é dependente de seu comprimento de onda. Em tais sistemas ondulatorios, a energia é propagada a uma velocidade que normalmente é diferente da velocidade de fase, que pode ser estimada pela velocidade de grupo. Tem-se, então, duas situações de interesse: se a velocidade de propagação da energia for maior que a velocidade de fase, novas ondas são geradas na frente do trem de ondas inicial; caso contrário, um alongamento do trem de ondas pode se desenvolver. Como é de interesse tanto em meteorologia quanto em oceanografia estudar não apenas a propagação de ondas, mas também a intensificação e o enfraquecimento desses sistemas, é de grande interesse o estudo dessas velocidades.

Na prática, os processos advectivos são mais significativos na troposfera de latitudes médias do que os movimentos inerciais. Em escalas planetárias e sinóticas, os movimentos associados às ondas de gravidades são usualmente considerados como *ruídos* (Daley, 1981). Os fluxos associados a esses movimentos tendem a estar em **balanço quasi-geostrófico**, i.e., ocorrem situações

de quasi-equilíbrio entre as forças de Coriolis e as forças devido ao gradiente de pressão. A manutenção desse balanço é conhecida como **ajustamento geostrófico**. Este ajuste natural do sistema troposférico equivale a uma dispersão da energia associada aos modos rápidos, de tal forma que não haja acúmulos locais. É esperado que numa modelagem desses fenômenos essas características sejam preservadas.

No modelo de água rasa estudado os movimentos mais rápidos, aqueles devidos às frequências inerciais, ocorrem processos dispersivos, pois a velocidade de fase depende do número de onda. Nesse sentido não há um comprometimento do processo de ajustamento geostrófico.

Por outro lado, a versão discreta desse modelo apresenta processos não dispersivos, observados quando a velocidade de grupo é nula. Nesses casos, não se verifica o processo de ajustamento geostrófico e surgem várias oscilações indesejadas que prejudicam a solução.

Nos modelos discretos é de extrema importância uma boa aproximação das características físicas dos fenômenos modelados. Por exemplo, é de importância minimizar os erros nas velocidades de fase e de grupo e também identificar os números de onda para os quais as velocidades de grupo discretas sejam iguais a zero. Na próxima seção versões discretizadas do modelo linear de água rasa são avaliadas sob esse paradigma.

5.4 Movimentos Oscilatórios em Modelos Discretos

O objetivo desta seção é avaliar o efeito na frequência de fase e na velocidade de grupo da discretização do modelo de água rasa não dissipativo no plano f . A metodologia apresentada é inspirada nos trabalhos Grotjahn e O'Brien (1976); Kress e Oliger (1972); Swartz e Wendroff (1974); e Torbjörn e Sundström (1973) em que são tratados alguns esquemas de diferenças finitas clássicos. No presente estudo, os operadores de diferenças finitas utilizados nas discretizações espaciais estão associados a aproximações por splines biortogonais $\{\phi_{N^*}, \phi_{N, N^*}\}$. No Capítulo 4 é verificado que para operadores diferenciais lineares os esquemas biortogonais são equivalentes a esquemas de colocação com $M = N^* + N$. Portanto, como nos modelos considerados somente aparecem derivadas lineares, os estudos a seguir se restringem a discretizações por valores pontuais.

São introduzidos dois tipos de modelos de discretização: semi-discreto e discreto. No primeiro apenas as variáveis espaciais são discretizadas, e.g.,

$$\varphi^h = \varphi^h(p, q)(t) = \varphi(hp, hq, t)$$

são valores pontuais de $\varphi(x, y, t)$ nos pontos (hp, hq) de uma malha regular com espaçamento h (em multirresolução $h = 2^{-j}$). No segundo caso, a variável tempo também é discretizada, e.g.,

$$\varphi^{h,\Delta t} = \varphi^{h,\Delta t}(p, q)(n) = \varphi(hp, hq, n\Delta t).$$

Conseqüentemente, para equações do tipo $L\varphi = 0$ têm-se as seguintes discretizações:

- $L^h \varphi^h = 0$, (semi-discreta)
- $L^{h,\Delta t} \varphi^{h,\Delta t} = 0$. (discreta)

Inicialmente são analisadas as discretizações dos modelos de advecção e de ondas de gravidade.

• Modelo de advecção:

Como visto no Capítulo 4, operadores diferenciais de primeira ordem do tipo $\partial/\partial x$ e $\partial/\partial y$ podem ser discretizados por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(ph, qh, t) &\approx (D_x^h \varphi^h)_{p,q}(t) = \frac{1}{h} \sum_k \varphi^h(k, q)(t) \Gamma(p-k), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(ph, qh, t) &\approx (D_y^h \varphi^h)_{p,q}(t) = \frac{1}{h} \sum_\ell \varphi^h(p, \ell)(t) \Gamma(q-\ell). \end{aligned} \quad (5.32)$$

Os coeficientes

$$\Gamma(k) = \Gamma_M^{(1)}(k) = \frac{d\phi_{0,M}}{dx}(k),$$

são os coeficientes da discretização da derivada, discutida no Capítulo 4, em que $M-1$ representa a ordem do esquema de interpolação. Portanto, para

$$L\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + U \frac{\partial \varphi}{\partial x} + V \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

tem-se que

$$\begin{aligned} (L^h \varphi^h)_{p,q}(t) &= \frac{d\varphi^h(p, q)}{dt}(t) + U (D_x^h \varphi^h)_{p,q}(t) + V (D_y^h \varphi^h)_{p,q}(t) \\ &= \frac{d\varphi^h(p, q)}{dt}(t) + \frac{U}{h} \sum_k \varphi^h(k, q)(t) \Gamma^{(1)}(p-k) + \frac{V}{h} \sum_\ell \varphi^h(p, \ell)(t) \Gamma^{(1)}(q-\ell). \end{aligned}$$

A versão semi-discreta de $L\varphi = 0$ é dada por

$$(L^h \varphi^h)_{p,q}(t) = 0,$$

que resulta num sistema de equações diferenciais ordinárias. Para soluções do tipo

$$\varphi^h(p, q, t) = e^{i[h(\xi p + \vartheta q) - \omega^h t]}, \quad (5.33)$$

a frequência de fase possui a seguinte fórmula:

$$\omega^h = \left[\frac{-i}{h} [U\tilde{\Gamma}(h\xi) + V\tilde{\Gamma}(h\vartheta)] \right], \quad (5.34)$$

em que $\tilde{\Gamma}(z) = \sum_k \Gamma(k) e^{-ikz}$ é uma função puramente imaginária. Conseqüentemente, tem-se que a velocidade de grupo associada a essa frequência é expressa por

$$\vec{V}_g^h = \left(-iU \frac{d\tilde{\Gamma}}{d\xi}(h\xi), -iV \frac{d\tilde{\Gamma}}{d\vartheta}(h\vartheta) \right). \quad (5.35)$$

O erro relativo na frequência de fase, para $U = V$, é dado pela da seguinte expansão

$$\frac{\omega - \omega^h}{\omega} = 1 - \frac{i\tilde{\Gamma}(h\xi) + i\tilde{\Gamma}(h\vartheta)}{h(\xi + \vartheta)}. \quad (5.36)$$

Como discutido no Capítulo 4

$$i\tilde{\Gamma}(z) = z + \mu_M z^{M+1} + \mathcal{O}(z^{M+3}).$$

Então, segue-se que

$$1 - \frac{\omega^h}{\omega} = \mu_M ((h\xi)^M + (h\vartheta)^M) + T.O.S.,$$

em que constantes assintóticas μ_M são $1/6, 1/30, 4/511$, e $122/63711$, para $M = 2, 4, 6$ e 8 .

O erro relativo da componente zonal da velocidade de grupo $V_{g_x}^h/V_{g_x}$ é expresso por

$$\begin{aligned} 1 - V_{g_x}^h/V_{g_x} &= 1 - i \frac{d\tilde{\Gamma}}{d\xi}(h\xi) \\ &= \alpha_M (h\xi)^M + T.O.S. \end{aligned}$$

em que as constantes assintóticas α_M são $1/2, 1/6, 4/73$ e $122/7079$ para $M = 2, 4, 6$ e 8 . O comportamento assintótico dos erros na frequência de fase e na velocidade de grupo com h tendendo a zero possui a mesma ordem M . Contudo as constantes

assintóticas da velocidade de grupo são $M + 1$ vezes maiores do que as da frequência de fase.

Na Figura 5.1 é plotada a derivada do símbolo $-i\tilde{\Gamma}(z)$. Nessa figura pode-se verificar que os valores em que as curvas se anulam são deslocados para a direita a medida que M aumenta. Esses valores estão associados a velocidades de grupo nulas e são de interesse numérico como já discutido.

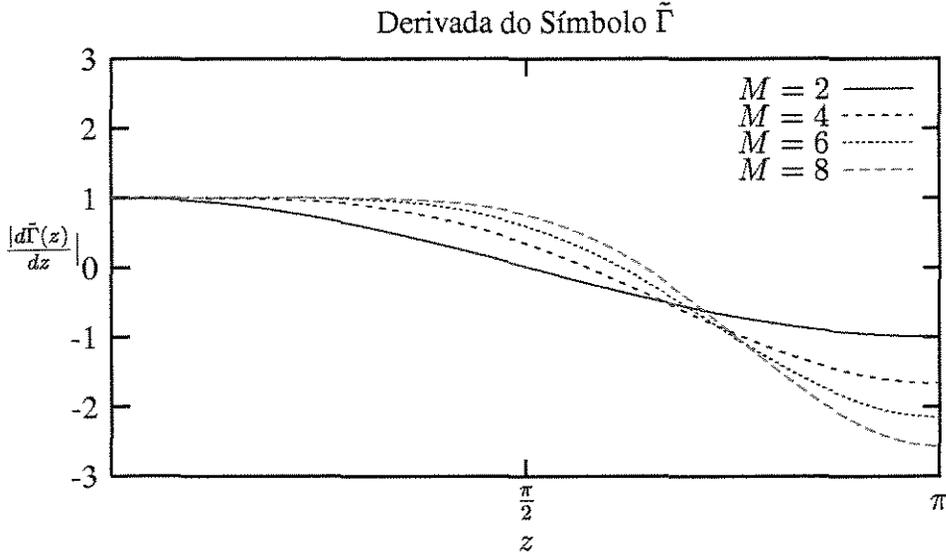


Figura 5.1: Derivada de $|\tilde{\Gamma}(z)|$.

A versão discreta do tempo de $L\varphi = 0$, considerando um esquema explícito, é expressa por

$$L^{h,\Delta t}\varphi^{h,\Delta t} = 0,$$

em que

$$\begin{aligned} (L^{h,\Delta t}\varphi^{h,\Delta t})_{p,q,n} &= \frac{1}{2\Delta t} [\varphi^{h,\Delta t}(p, q, n+1) - \varphi^{h,\Delta t}(p, q, n-1)] \\ &+ \frac{U}{h} \sum_k \varphi^{h,\Delta t}(k, q, n) \Gamma^{(1)}(p-k) + \frac{V}{h} \sum_\ell \varphi^{h,\Delta t}(p, \ell, n) \Gamma^{(1)}(q-\ell). \end{aligned} \quad (5.37)$$

Suponha $\varphi^{h,\Delta t}$ na forma

$$\varphi^{h,\Delta t}(p, q, n) = e^{i[h(\xi p + \vartheta q) - \omega^n n \Delta t]}, \quad (5.38)$$

em que o sobre-índice e denota o caso explícito. Então, a frequência de fase discreta ω^e é expressa por

$$\omega^e = \frac{1}{\Delta t} \arcsen \left[\frac{i\Delta t}{h} [U\tilde{\Gamma}(h\xi) + V\tilde{\Gamma}(h\vartheta)] \right]. \quad (5.39)$$

A expressão do argumento do arco-seno, entre colchetes anterior, deve ter módulo menor ou igual a 1. Por exemplo, no caso unidimensional, e sendo $U = V$, isto requer que o critério de estabilidade

$$\lambda \max_z |\tilde{\Gamma}(z)| \leq 1, \quad (5.40)$$

seja obedecido, em que

$$\lambda = \frac{U\Delta t}{h}$$

é o parametro CFL (Courant-Friederich-Lax). Como pode ser verificado na Figura 4.6, p. 66, que os valores máximos de $|\tilde{\Gamma}|$ aumentam com M , mas nos casos estudados estão entre 1 e 2.

Os erros relativos $|1 - \omega^e/\omega|$ estão plotados, para as famílias $M = 2, \dots, 8$, na Figura 5.2 para o caso particular de $U = V$ e $\lambda = 0.17$. Nesses gráficos observa-se uma redução do erro entre as famílias 2 e 8, e.g., de 0, 10 para valores menores que 0,01, para $(h\xi, h\vartheta) \lesssim \pi/4$.

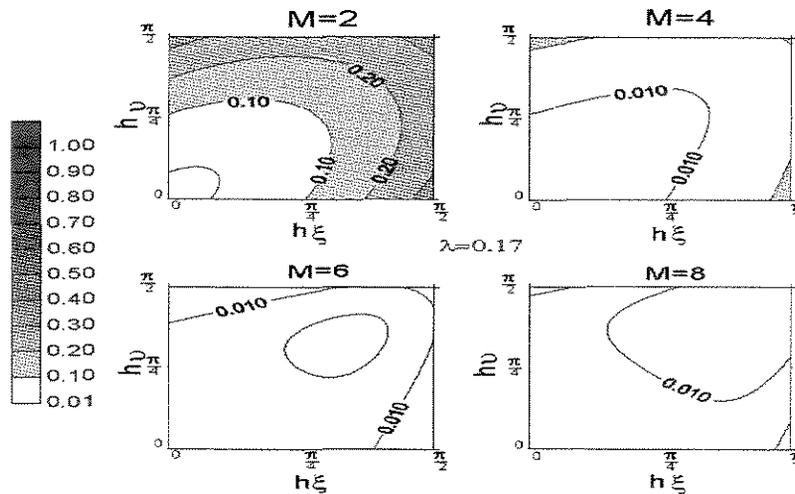


Figura 5.2: Erro na frequência de fase ω^e .

A velocidade de grupo discreta é dada pela seguinte fórmula

$$\vec{V}_g^e = \frac{1}{\Delta t \sqrt{1 - \left[\frac{\Delta t}{h} [iU\tilde{\Gamma}(h\xi) + iV\tilde{\Gamma}(h\vartheta)] \right]^2}} \left(iU \frac{d\tilde{\Gamma}(h\xi)}{d\xi}, iV \frac{d\tilde{\Gamma}(h\vartheta)}{d\vartheta} \right). \quad (5.41)$$

Observe que o termo dentro da raiz é positivo se for obedecido o critério de estabilidade, dado na Equação 5.40, com desigualdade estrita.

O erro relativo na componente zonal da velocidade de grupo, para as famílias $M = 2, \dots, 8$, está plotada na Figura 5.3, para o caso $U = V$ e $\lambda = 0.17$. Nesses gráficos observa-se uma redução do erro entre as famílias 2 e 8.

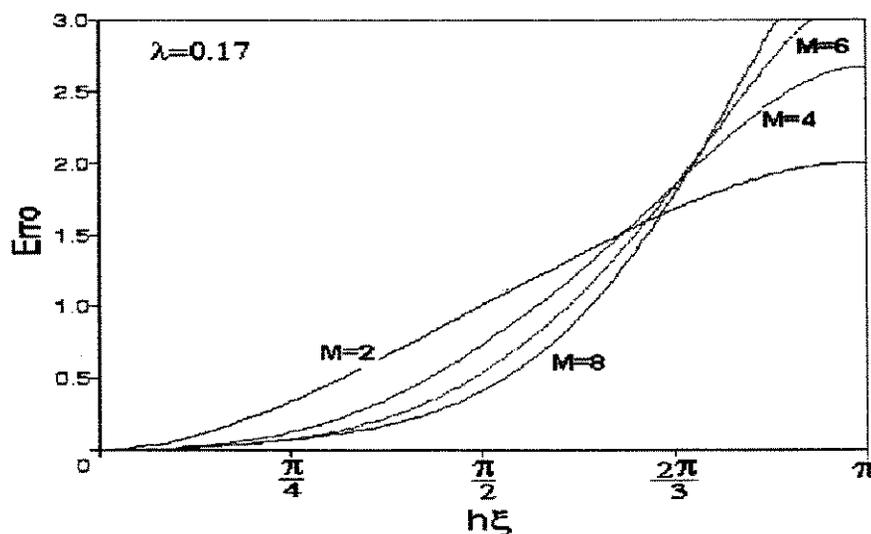


Figura 5.3: Erro na componente zonal da velocidade de grupo V_g^e .

- Modelo de ondas de gravidade:

A frequência de fase e a velocidade de grupo semi-discreta e discreta para o modelo de ondas de gravidade são apresentadas nos próximos parágrafos.

O modelo semi-discreto das ondas de gravidade pode ser expresso pelo seguinte sistema

$$\frac{du^h}{dt} = -D_x^h \varphi^h, \quad (5.42)$$

$$\frac{dv^h}{dt} = -D_y^h \varphi^h, \quad (5.43)$$

$$\frac{d\varphi^h}{dt} = -\Phi(D_x^h u^h + D_y^h v^h). \quad (5.44)$$

Como esses operadores discretos são expressos como convoluções, eles comutam. Então, seguindo passos similares aos descritos para o caso contínuo, obtém-se uma única expressão em φ^h ,

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + \Phi [D_x^{h^2} + D_y^{h^2}] \right] \varphi^h = 0. \quad (5.45)$$

Para soluções do tipo $\varphi^h(p, q, t) = e^{i[h(\xi p + \vartheta q) - \omega^h t]}$, as frequências de fase são expressas por

$$\omega_{\pm}^h = \pm \frac{\sqrt{\Phi}}{h} \sqrt{|\tilde{\Gamma}(h\xi)|^2 + |\tilde{\Gamma}(h\vartheta)|^2}. \quad (5.46)$$

Por conseguinte, a velocidade de grupo associada à frequência de fase ω_{\pm}^h são dadas por

$$\vec{V}_{g\pm}^h = \frac{\pm \sqrt{\Phi}}{\sqrt{|\tilde{\Gamma}(h\xi)|^2 + |\tilde{\Gamma}(h\vartheta)|^2}} \left(\tilde{\Gamma}(h\xi) \frac{d\tilde{\Gamma}(h\xi)}{d\xi}, \tilde{\Gamma}(h\vartheta) \frac{d\tilde{\Gamma}(h\xi)}{d\xi} \right). \quad (5.47)$$

O erro relativo das frequências de fase ω_{\pm}^h é expresso por

$$\begin{aligned} 1 - \omega_{\pm}^h / \omega_{\pm} &= 1 - \sqrt{\frac{|\tilde{\Gamma}(h\xi)|^2 + |\tilde{\Gamma}(h\vartheta)|^2}{h^2(\xi^2 + \vartheta^2)}} \\ &= \mu_M ((h\xi)^M + (h\vartheta)^M) + T.O.S. \end{aligned}$$

em que as constantes assintóticas μ_M são as mesmas do caso de advecção. O erro relativo na componente zonal da velocidade de grupo é expresso por

$$1 - V_{g\ x}^h / V_{g\ x} = \frac{d\tilde{\Gamma}(h\xi)}{d\xi} \frac{\tilde{\Gamma}(h\xi)}{\xi} \sqrt{\frac{h^2(\xi^2 + \vartheta^2)}{|\tilde{\Gamma}(h\xi)|^2 + |\tilde{\Gamma}(h\vartheta)|^2}}.$$

Então,

$$1 - V_{g\ x}^h / V_{g\ x} = \bar{\mu}_M (h\xi)^M + \mu_M (h\vartheta)^M + T.O.S.$$

em que as constantes assintóticas $\bar{\mu}_M$ são 5/6, 1/6, 36/511 e 122/63711, para $M = 2, 4, 6$ e 8. O erro relativo da componente meridional é obtido de forma análoga à apresentada anteriormente. A seguir são obtidas as frequências de fase e as velocidades de grupo, utilizando um esquema implícito para esse modelo de ondas de gravidade.

Para discretizações

$$(D_t^{\Delta t} \varphi^{h, \Delta t})_{p, q, n} = \frac{1}{2 \Delta t} [\varphi^{h, \Delta t}(k, q, n + 1) - \varphi^{h, \Delta t}(k, q, n - 1)], \quad (5.48)$$

$$\begin{aligned}
(\bar{D}_x^h \varphi^{h,\Delta t})_{p,q,n} &= \frac{1}{h} \sum_k \frac{[\varphi^{h,\Delta t}(k, q, n+1) + \varphi^{h,\Delta t}(k, q, n-1)]}{2} \Gamma(p-k), \\
(\bar{D}_y^h \varphi^{h,\Delta t})_{p,q,n} &= \frac{1}{h} \sum_\ell \frac{[\varphi^{h,\Delta t}(p, \ell, n+1) + \varphi^{h,\Delta t}(p, \ell, n-1)]}{2} \Gamma(q-\ell),
\end{aligned} \tag{5.49}$$

o modelo discreto das ondas de gravidade discreto pode ser expresso pelo seguinte sistema

$$\begin{aligned}
D_t^{\Delta t} u^{h,\Delta t} &= -\bar{D}_x^{h,\Delta t} \varphi^{h,\Delta t}, \\
D_t^{\Delta t} v^{h,\Delta t} &= -\bar{D}_y^{h,\Delta t} \varphi^{h,\Delta t}, \\
D_t^{\Delta t} \varphi^{h,\Delta t} &= -\Phi (\bar{D}_x^{h,\Delta t} u^{h,\Delta t} + \bar{D}_y^{h,\Delta t} v^{h,\Delta t}).
\end{aligned} \tag{5.50}$$

Aplicando uma análise similar às anteriores, este sistema reduz-se a uma única equação em $\varphi^{h,\Delta t}$,

$$(D_t^{\Delta t})^2 + ((\bar{D}_x^{h,\Delta t})^2 + (\bar{D}_y^{h,\Delta t})^2) \varphi^{h,\Delta t} = 0.$$

Para soluções da forma $\varphi^d = e^{i[h(p\xi + q\vartheta) - \omega^i \Delta t]}$, obtém-se

$$\frac{1}{\Delta t^2} \arctan \left(\frac{\omega^i \Delta t}{2} \right)^2 = \frac{\Phi}{h^2} \left(\tilde{\Gamma}(h\xi)^2 + \tilde{\Gamma}(h\vartheta)^2 \right).$$

Então, as frequências de fase ω^i são expressas por

$$\omega_{\pm}^i = \frac{2}{\Delta t} \arctan \left(\pm \frac{\Lambda}{2} \sqrt{|\tilde{\Gamma}(h\xi)|^2 + |\tilde{\Gamma}(h\vartheta)|^2} \right), \tag{5.51}$$

em que $\Lambda = \sqrt{\Phi} \Delta t / h$. A velocidade de grupo associada à ω_+^i é dada por

$$\vec{V}_{g_x}^i = \frac{\left(\sqrt{\Lambda |\tilde{\Gamma}(h\xi)|^2 + |\tilde{\Gamma}(h\vartheta)|^2} \right)^{-1}}{\Delta t \left(1 + \frac{\Lambda}{4} [|\tilde{\Gamma}(h\xi)|^2 + |\tilde{\Gamma}(h\vartheta)|^2] \right)} \left(-\tilde{\Gamma}(h\xi) \frac{d\tilde{\Gamma}(h\xi)}{d\xi}, -\tilde{\Gamma}(h\vartheta) \frac{d\tilde{\Gamma}(h\vartheta)}{d\vartheta} \right) \tag{5.52}$$

A Figura 5.4 apresenta os gráficos do erro $|1 - \omega_+^i / \omega_+|$. A Figura 5.5 apresenta os gráficos do erro $|1 - V_{g_x}^i / V_{g_x}|$.

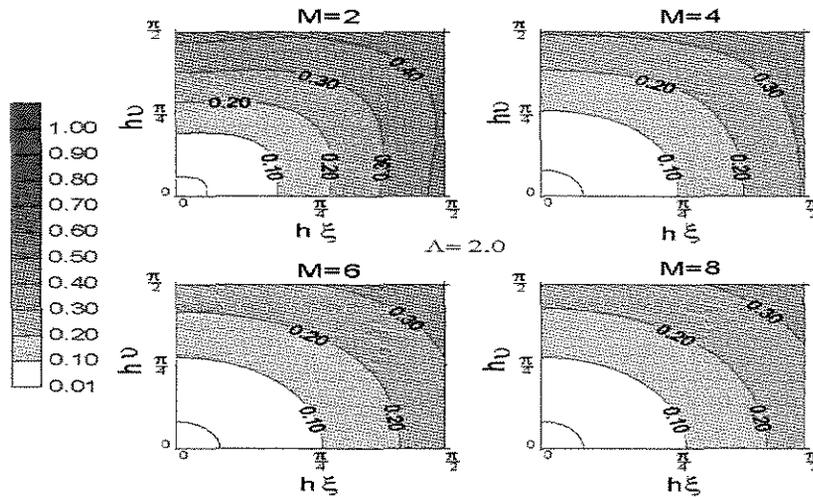


Figura 5.4: Erro na frequência de fase w^i .

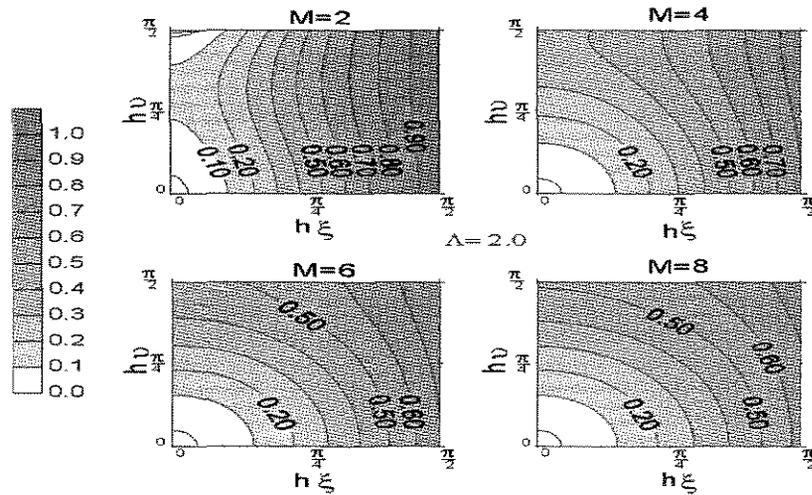


Figura 5.5: Erro na componente zonal da velocidade de grupo V_g^i .

- Modelo de água rasa:

No teorema a seguir são apresentadas as frequências de fase e as velocidades de grupo do sistema de água rasa, expresso nas Equações 5.2–5.4. Essas frequências são uma composição das frequências de fase dos modelos de advecção e de ondas de gravidade discutidos.

O sistema de água rasa linear, dado pelas Equações 5.2–5.4, possui três frequências de fase: Uma discretização do tipo semi-ímplicita do sistema de água rasa descrito nas Equações 5.2, 5.3 e 5.4 pode ser expressa como:

$$L^{h,\Delta t} u^{h,\Delta t} = f_0 v^{h,\Delta t} - \bar{D}_x^{h,\Delta t} \varphi^{h,\Delta t}, \quad (5.53)$$

$$L^{h,\Delta t} v^{h,\Delta t} = -f_0 u^{h,\Delta t} - \bar{D}_y^{h,\Delta t} \varphi^{h,\Delta t}, \quad (5.54)$$

$$L^{h,\Delta t} \varphi^{h,\Delta t} = -\Phi(\bar{D}_x^{h,\Delta t} u^{h,\Delta t} + \bar{D}_y^{h,\Delta t} v^{h,\Delta t}), \quad (5.55)$$

em que o operador discreto $L^{h,\Delta t}$ é definido na Equação 5.37 e os operadores $(\bar{D}_x^{h,\Delta t})$, $(\bar{D}_y^{h,\Delta t})$ são definidos na Equação 5.49.

Teorema 5.4.1 *O sistema semi-ímplicito de água rasa descrito anteriormente possui as seguintes frequências de fase:*

$$\omega^e = \frac{1}{\Delta t} \arcsen \mathcal{A},$$

$$\omega_{\pm}^{si} = \frac{1}{\Delta t} \arcsen G_{\pm},$$

em que

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{i}{\hbar} [U\bar{\Gamma}(h\xi) + V\bar{\Gamma}(h\vartheta)], & R &= \sqrt{(\Delta t^2 f_0^2 + \Lambda \mathcal{B})(1 + \Lambda \mathcal{B}) + \Lambda \mathcal{B} \mathcal{A}^2}, \\ \mathcal{B} &= |\bar{\Gamma}(h\xi)|^2 + |\bar{\Gamma}(h\vartheta)|^2, & G_{\pm} &= \frac{-\mathcal{A} \pm R}{1 + \Lambda \mathcal{B}}. \end{aligned}$$

A velocidade de grupo correspondente a ω^e é expressa por

$$\vec{V}_g^e = \frac{1}{\Delta t \sqrt{1 - \left[\frac{\Delta t}{\hbar} [iU\bar{\Gamma}(h\xi) + iV\bar{\Gamma}(h\vartheta)] \right]^2}} \left(iU \frac{d\bar{\Gamma}(h\xi)}{d\xi}, iV \frac{d\bar{\Gamma}(h\vartheta)}{d\vartheta} \right), \quad (5.56)$$

e as velocidades de grupo associadas às frequências ω_{\pm}^{si} são dadas por

$$\vec{V}_{g\pm}^{si} = \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{\sqrt{1 - G_{\pm}^2}} \left(\frac{\partial G_{\pm}}{\partial \xi}, \frac{\partial G_{\pm}}{\partial \vartheta} \right), \quad (5.57)$$

em que

$$\frac{\partial G_{\pm}}{\partial \xi} = \frac{-i\lambda \frac{\partial \bar{\Gamma}(h\xi)}{\partial \xi} \pm \frac{\partial R}{\partial \xi}}{1 + \Lambda \mathcal{B}} + 2\Lambda \bar{\Gamma}(h\xi) \frac{\partial \bar{\Gamma}(h\xi)}{\partial \xi} \frac{\mathcal{A} \pm R}{(1 + \Lambda \mathcal{B})^2},$$

$$\frac{\partial G_{\pm}}{\partial \vartheta} = \frac{-i\lambda \frac{\partial \bar{\Gamma}(h\vartheta)}{\partial \vartheta} \pm \frac{\partial R}{\partial \vartheta}}{1 + \Lambda \mathcal{B}} + 2\Lambda \bar{\Gamma}(h\vartheta) \frac{\partial \bar{\Gamma}(h\vartheta)}{\partial \vartheta} \frac{\mathcal{A} \pm R}{(1 + \Lambda \mathcal{B})^2},$$

sendo,

$$\frac{\partial R}{\partial \xi} = -\frac{\Lambda}{2R} \frac{\partial \tilde{\Gamma}(h\xi)}{\partial \xi} \left\{ 2\tilde{\Gamma}(h\xi) [2\Lambda B + \Delta t^2 f_0^2 + \mathcal{A}^2 + 1] + 2U \mathcal{A} B \right\},$$

$$\frac{\partial R}{\partial \vartheta} = -\frac{\Lambda}{2R} \frac{\partial \tilde{\Gamma}(h\vartheta)}{\partial \xi} \left\{ 2\tilde{\Gamma}(h\vartheta) [2\Lambda B + \Delta t^2 f_0^2 + \mathcal{A}^2 + 1] + 2V \mathcal{A} B \right\}.$$

Demonstração: Novamente, como esses operadores discretos do Sistema de Equações 5.53 são expressos como convoluções, eles comutam. Então, pode-se fazer passos similares ao caso contínuo para se obter uma expressão em $\varphi^{h,\Delta t}$,

$$L^{h,\Delta t} \left[[(L^{h,\Delta t})^2 + f_0^2] - \Phi[(D_x^{h,\Delta t})^2 + (D_y^{h,\Delta t})^2] \right] \varphi^{h,\Delta t} = 0. \quad (5.58)$$

Expressões do tipo $\varphi^{h,\Delta t}(p, q, n) = e^{i(h\xi p + h\vartheta q - n\omega^e \Delta t)}$ são auto-funções dos problemas

$$L^{h,\Delta t} \varphi^{h,\Delta t} = \alpha_1 \varphi^{h,\Delta t} \quad (5.59)$$

e

$$\left[[(L^{h,\Delta t})^2 + f_0^2] - \Phi[(D_x^{h,\Delta t})^2 + (D_y^{h,\Delta t})^2] \right] \varphi^{h,\Delta t} = \alpha_2 \varphi^{h,\Delta t}. \quad (5.60)$$

com auto-valores

$$\alpha_1 = \Delta t \left[-i \sin(\omega \Delta t) + \frac{U \Delta t}{h} \tilde{\Gamma}(h\xi) + \frac{V \Delta t}{h} \tilde{\Gamma}(h\vartheta) \right],$$

e

$$(\alpha_2)^2 = \Delta t^2 \left[\left(\frac{U \Delta t}{h} \tilde{\Gamma}(h\xi) + \frac{V \Delta t}{h} \tilde{\Gamma}(h\vartheta) \right)^2 - 2i \left(\frac{U \Delta t}{h} \tilde{\Gamma}(h\xi) + \frac{V \Delta t}{h} \tilde{\Gamma}(h\vartheta) \right) \text{sen}(\omega \Delta t) - \text{sen}(\omega \Delta t)^2 \right] + h^{-2} (\cos(\omega \Delta t))^2 \left[\tilde{\Gamma}^2(h\xi) + \tilde{\Gamma}^2(h\vartheta) \right].$$

Logo, para satisfazer a Equação 5.58 ou $\alpha_1 = 0$ ou $\alpha_2 = 0$. Isso implica que:

$$\omega^e = \frac{1}{\Delta t} \arcsen \left[\frac{i}{h} [U \tilde{\Gamma}(h\xi) + V \tilde{\Gamma}(h\vartheta)] \right],$$

e

$$\omega_{\pm}^{si} = \frac{1}{\Delta t} \arcsen G_{\pm},$$

em que

$$G_{\pm} = \frac{\left[\frac{U}{h} |\tilde{\Gamma}(h\xi)| + \frac{U}{h} |\tilde{\Gamma}(h\vartheta)| \right] \pm R}{(1 + \Lambda |\tilde{\Gamma}^2(h\xi)| + \Lambda |\tilde{\Gamma}^2(h\vartheta)|)}$$

$$R^2 = \left(\Delta t^2 f_0^2 + \Lambda |\tilde{\Gamma}^2(h\xi)| + \Lambda |\tilde{\Gamma}^2(h\vartheta)| \right) \left(1 + \Lambda |\tilde{\Gamma}^2(h\xi)| + \Lambda |\tilde{\Gamma}^2(h\vartheta)| \right) + \Lambda |\tilde{\Gamma}^2(h\xi)| + \Lambda |\tilde{\Gamma}^2(h\vartheta)| \left[\frac{U}{h} |\tilde{\Gamma}(h\xi)| + \frac{V}{h} |\tilde{\Gamma}(h\vartheta)| \right]^2.$$

Analogamente aos casos anteriores as velocidades de grupo podem ser obtidas diretamente dessas frequências, derivando-as em relação a ξ e ϑ .

□

Observe que a frequência de fase ω_e está associada à solução da discretização explícita do modelo de advecção linear.

A Figura 5.6 apresenta os gráficos do erro $|1 - \omega_+^{si}/\omega_+|$ para $M = 2, \dots, 8$. Observa-se nessas figuras que não ocorreu redução significativa para valores maiores que $M=4$. A Figura 5.7 apresenta os gráficos do erro relativo $|1 - V_g^{si}/V_{gx}|$ para $M = 2, \dots, 8$.

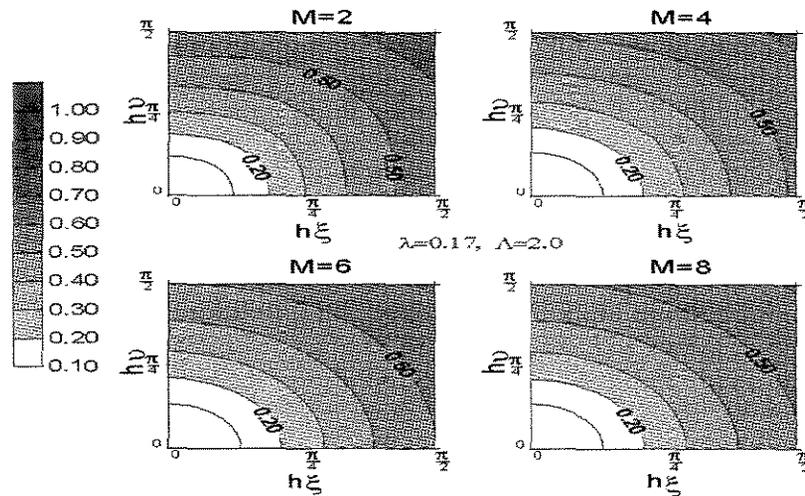


Figura 5.6: Erro na frequência de fase ω_+^{si} do modelo discreto de água rasa.

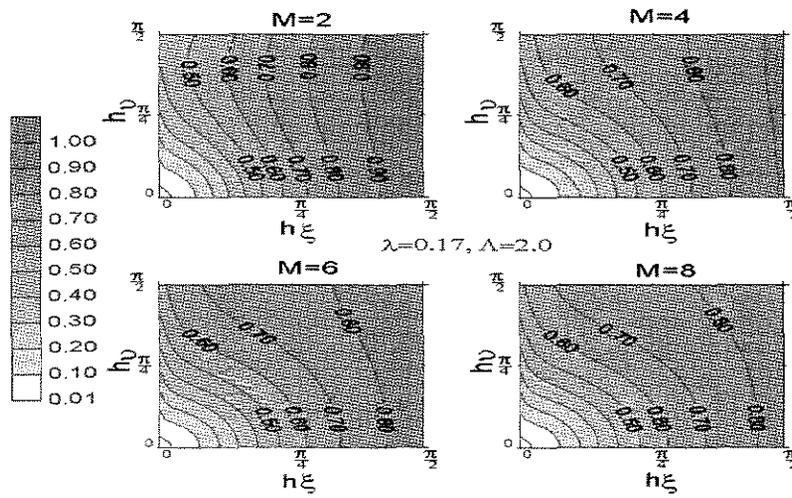


Figura 5.7: Erro na velocidade de grupo $V_{g_{x+}}^{si}$ do modelo discreto de água rasa.

Capítulo 6

Método de Petrov–Galerkin Não Linear

6.1 Introdução

O método de Galerkin não linear é considerado um algoritmo numérico para a construção das chamadas *variedades inerciais aproximadas*. Este conceito foi introduzido com o objetivo de viabilizar computacionalmente simulações de turbulência (Temam, 1989, 1990, 1992). Tipicamente, esse tipo de formulação aplica-se na simulação numérica do comportamento das soluções de equações de evolução dissipativas, para tempos suficientemente grandes. Nesse regime, os modos altos possuem pequena quantidade de energia, de tal forma que suas interações podem ser desprezadas nos termos não lineares. Além disso, como a variação temporal desses modos altos é mais lenta do que a dos modos baixos, na prática, eles podem ser considerados em regime quasi-estacionário. Portanto, a idéia fundamental é poder separar a solução \mathcal{U} em componentes de diferentes ordens de magnitude e velocidades de evolução

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_b + \mathcal{U}_a,$$

em que os sub-índices a , b indicam os modos associados as altas e baixas frequências, tais que

$$\|\mathcal{U}_a\| \ll \|\mathcal{U}_b\|, \quad \left\| \frac{\partial \mathcal{U}_a}{\partial t} \right\| \ll \left\| \frac{\partial \mathcal{U}_b}{\partial t} \right\|.$$

A componente \mathcal{U}_a , apesar de ser pequena, não pode ser simplesmente desprezada, pois sua contribuição pode afetar significativamente o comportamento da solução após um longo periodo de integração. A formulação do método está baseada na forma diferenciada com que essas duas componentes são tratadas (Temam, 1992; Dubois et al., 1998; Chehab, 1995; Temam, 1990; Chen e

Temam, 1991a,b,c). A idéia básica desse tratamento é que a componente \mathcal{U}_a seja representada em função de \mathcal{U}_b , de tal forma que

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_b + f(\mathcal{U}_b) \in M,$$

em que o símbolo M representa a variedade. Uma simples ilustração desses conceitos é indicada na Figura 6.1.

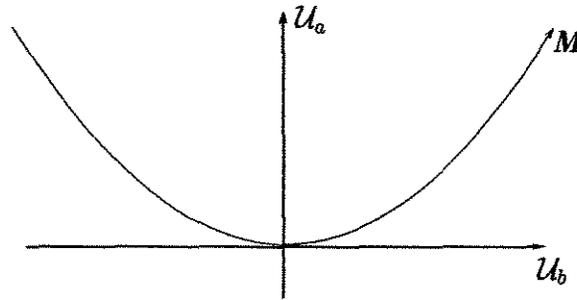


Figura 6.1: Diagrama esquemático da variedade M .

O método de Galerkin não linear foi desenvolvido tradicionalmente no contexto de métodos espectrais, entretanto, também pode ser formulado no contextos de elementos finitos, diferenças finitas e de wavelets.

Uma técnica muito similar ao método de Galerkin não linear é introduzida no final da década de 70, simultaneamente, por Machenhauer e por Baer e Tribbia, no contexto de inicialização não linear por modos normais em modelos meteorológicos (Leith, 1980). Nesse contexto, a condição $\|\mathcal{U}_a\| \ll \|\mathcal{U}_b\|$ não é assumida. O que é considerado é a chamada condição de balanço não linear $\|\frac{\partial \mathcal{U}_a}{\partial t}\| \sim 0$, que conduz a estados $\mathcal{U} = \mathcal{U}_b + f(\mathcal{U}_b)$ pertencentes a variedades chamadas variedades lentas ou de estado não linearmente balanceados. Em Daley (1981) encontra-se um tutorial sobre as técnica de inicialização em modos normais e uma ampla bibliografia sobre o assunto. Uma aplicação dessa técnica no modelo de água rasa para latitudes tropicais, no caso em que o termo não linear é substituído por uma forçante no campo de massa, é discutida em Silva Dias et al. (1983). A separação dos modos de alta e baixa frequência das ondas do modelo de água rasa é imediata no caso do modelo de água rasa para latitudes médias, em que separam-se as ondas de Rossby (modo baixo) das ondas de gravidade (modo alto). No caso equatorial, essa separação precisa ser feita com mais cuidado, pois, por exemplo, as ondas de Kelvin não se enquadram nesse tipo de separação (Daley, 1981).

Uma vantagem do método de Galerkin não linear é permitir a integração temporal de ondas curtas com grandes passos de tempo. Do ponto de vista prático, isto implica um significativo ganho de tempo computacional, e uma maior estabilidade. Essas vantagens foram detectadas em

Sotil (1999), em que o método de Galerkin não linear espectral é utilizado na discretização do modelo de água rasa.

Neste capítulo o objetivo é formular o método de Galerkin não linear para as discretizações de Petrov–Galerkin, no contexto de análise multirresolução biortogonal, para as equações de água rasa seguindo as idéias de Sotil (1999).

6.2 Modelo de Água Rasa

Neste capítulo é considerado o modelo de água rasa não linear adimensionalizado, descrito no Apêndice D,

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} - \mathbf{A}(\mathbf{U}) + \mathbf{B}(\mathbf{U}) + \mathbf{C}(\mathbf{U}) = \mathbf{F} \quad (6.1)$$

em que

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{V} \\ \eta \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \mu \nabla^2 \vec{V} \\ \kappa \nabla^2 \eta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \\ \nabla \cdot (\eta \vec{V}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \vec{k} \times \vec{V} + \nabla \eta \\ g_0 \nabla \cdot \vec{V} \end{pmatrix}.$$

com condições de fronteira periódicas.

6.3 Discretização Biortogonal em um Único Nível

Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{V}^j$ espaços de funções periódicas de uma análise de multirresolução biortogonal bidimensional, como descrito na Seção 2.5, página 20, e $\mathcal{P} = \mathcal{P}^j$ as projeções biortogonais sobre estes espaços. Na discretização do Sistema 6.1 pelo esquema de Petrov–Galerkin associado a esta AMRB–2D, no nível j , considera-se uma solução aproximada $\mathbb{U} \in \mathcal{V}$ tal que

$$\frac{\partial \mathbb{U}}{\partial t} + \mathcal{P} [-\mathbf{A}(\mathbf{U}) + \mathbf{B}(\mathbf{U}) + \mathbf{C}(\mathbf{U})] = \mathcal{P} \mathbf{F}. \quad (6.2)$$

★ Discretização Temporal (em Três Etapas)

Um esquema semi-implícito, com três etapas temporais, para o sistema 6.2 pode ser obtido da seguinte maneira:

- os termos lineares \mathbf{A} e \mathbf{C} são tratados implicitamente, fazendo-se uma média num intervalo de dois passos no tempo, de t_{n-1} a t_{n+1} ;
- o termo não linear \mathbf{B} é tratado explicitamente no tempo t_n .

Conhecendo-se a solução no tempo t_{n-1} e t_n , determina-se a solução no tempo t_{n+1} pela resolução do sistema

$$\frac{U^{n+1} - U^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{1}{2} \mathcal{P} [-\mathbf{A}(U^{n+1} + U^{n-1}) + \mathbf{C}(U^{n+1} + U^{n-1})] = -\mathcal{P} [\mathbf{B}(U^n) - \mathbf{F}] .$$

No Apêndice E está desenvolvida em detalhes esta forma de discretização temporal.

6.4 Discretização Biortogonal em 2 Níveis

Como descrito no Capítulo 2, os espaços \mathcal{V}^j admitem decomposições em somas diretas de sub-espaços em vários níveis de escala. No caso específico de dois níveis, tem-se que

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_b + \mathcal{V}_a$$

em que $\mathcal{V}_b = \mathcal{V}^{j-1}$ representa as funções de \mathcal{V} com *ondas longas* (frequências baixas) e $\mathcal{V}_a = \mathcal{W}^{j-1}$ contém as funções de \mathcal{V} com *ondas curtas* (frequências altas). Essa separação em componentes de alta e baixa frequência é discutida na Seção 2.4, página 15. Nessa seção, é visto que as funções de \mathcal{V}^j podem ser decompostas em duas componentes, uma de baixa frequência em \mathcal{V}^{j-1} e outra de alta frequência em \mathcal{W}^{j-1} . Na Figura 6.2 é esquematizado o espectro de \mathcal{V}^j e sua respectiva divisão em \mathcal{V}^{j-1} e \mathcal{W}^{j-1} .

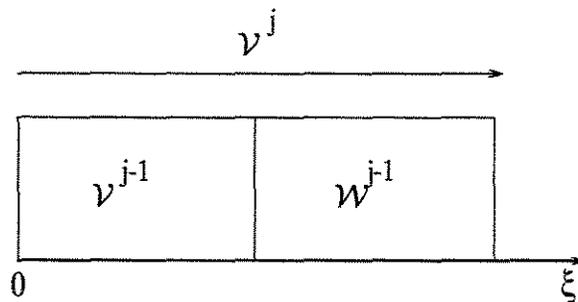


Figura 6.2: Divisão do espectro de frequência em relação ao espaço $\mathcal{V}^j = \mathcal{V}^{j-1} + \mathcal{W}^{j-1}$.

De maneira análoga, a projeção $\mathcal{P} = \mathcal{P}^j$ pode ser decomposta como $\mathcal{P} = \mathcal{P}_b + \mathcal{P}_a$ em que $\mathcal{P}_b = \mathcal{P}^{j-1}$ e $\mathcal{P}_a = \mathcal{Q}^{j-1}$ são as projeções biortogonais sobre \mathcal{V}^{j-1} e \mathcal{W}^{j-1} , respectivamente. Assim, a solução numérica \mathbb{U} pode ser decomposta em suas componentes de baixa e alta frequências

$$\mathbb{U} = \mathbb{U}_a + \mathbb{U}_b = \begin{pmatrix} \vec{V}_b + \vec{V}_a \\ \eta_b + \eta_a \end{pmatrix},$$

de tal forma que

$$\mathcal{P}_a \mathbb{U}_b = 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{P}_b \mathbb{U}_a = 0.$$

Neste contexto, o Sistema 6.1 se transforma em dois sub-sistemas

- Sistema das ondas longas:

$$\frac{\partial \mathbb{U}_b}{\partial t} + \mathcal{P}_b [-\mathbb{A}(\mathbb{U}_a + \mathbb{U}_b) + \mathbb{C}(\mathbb{U}_a + \mathbb{U}_b)] = -\mathcal{P}_b [\mathbb{B}(\mathbb{U}_a + \mathbb{U}_b) - \mathbb{F}] \quad (6.3)$$

- Sistema das ondas curtas

$$\frac{\partial \mathbb{U}_a}{\partial t} + \mathcal{P}_a [-\mathbb{A}(\mathbb{U}_a + \mathbb{U}_b) + \mathbb{C}(\mathbb{U}_a + \mathbb{U}_b)] = -\mathcal{P}_a [\mathbb{B}(\mathbb{U}_a + \mathbb{U}_b) - \mathbb{F}] \quad (6.4)$$

No Apêndice E encontram-se mais detalhes desta discretização temporal.

As mesmas idéias apresentadas nesta seção podem ser estendidas a vários níveis. Nesse caso, a divisão do espectro é feita em várias bandas, como esquematizado para 3 níveis na Figura 6.3.

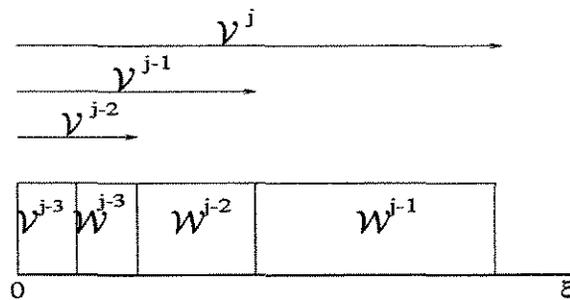


Figura 6.3: Divisão do espectro de frequência em $\nu^j = \nu^{j-3} + \mathcal{W}^{j-3} + \mathcal{W}^{j-2} + \mathcal{W}^{j-1}$.

6.5 Método de Petrov-Galerkin Não Linear

De forma análoga ao método de Galerkin não linear para espaços de Fourier e de elementos finitos, define-se o método de Petrov-Galerkin não linear por meio das seguintes modificações nos Sistemas 6.3 e 6.4:

- Desprezam-se as interações entre duas componentes de alta frequência no termo não linear do Sistema 6.3 (i.e., interações de termos com sub-índices a). Assim,

$$\begin{aligned} \mathbb{B}(\mathbf{U}_a + \mathbf{U}_b) &= \begin{pmatrix} (\vec{V}_b + \vec{V}_a) \cdot \nabla (\vec{V}_b + \vec{V}_a) \\ \nabla \cdot [(\eta_b + \eta_a) (\vec{V}_b + \vec{V}_a)] \end{pmatrix} \\ &\approx \begin{pmatrix} (\vec{V}_b + \vec{V}_a) \cdot \nabla \vec{V}_b + \vec{V}_b \cdot \nabla \vec{V}_a \\ \nabla \cdot [(\eta_b + \eta_a) \vec{V}_b] + \nabla \cdot (\eta_b \vec{V}_a) \end{pmatrix} = \mathbb{B}_b(\mathbf{U}_b, \mathbf{U}_a). \end{aligned}$$

Logo, pode-se definir

$$\mathbb{S}_b = -\mathcal{P}_b [\mathbb{B}_b(\mathbf{U}_b, \mathbf{U}_a) - \mathbb{F}].$$

- Desprezam-se todas as interações em que uma das componentes seja de frequência alta no termo não linear do Sistema 6.4. Assim,

$$\mathbb{B}(\mathbf{U}_a + \mathbf{U}_b) \approx \begin{pmatrix} \vec{V}_b \cdot \nabla \vec{V}_b \\ \nabla \cdot (\eta_b \vec{V}_b) \end{pmatrix} = \mathbb{B}_a(\mathbf{U}_b).$$

Logo, pode-se definir

$$\mathbb{S}_a = -\mathcal{P}_a [\mathbb{B}_a(\mathbf{U}_b) - \mathbb{F}]. \quad (6.5)$$

- Elimina-se o termo da derivada temporal no sub-sistema de ondas curtas, tornando-o um sistema diagnóstico.

Em resumo, o sistema de água rasa com a aproximação de Petrov-Galerkin não linear é expresso pelos sistemas,

- **Sistema das ondas longas**

$$\frac{\partial \mathbf{U}_b}{\partial t} + \mathcal{P}_b [-\mathbb{A}(\mathbf{U}_a + \mathbf{U}_b) + \mathbb{C}(\mathbf{U}_a + \mathbf{U}_b)] = \mathbb{S}_b. \quad (6.6)$$

• **Sistema das ondas curtas**

$$\mathcal{P}_a [-\mathbf{A}(\mathbf{U}_a + \mathbf{U}_b) + \mathbf{C}(\mathbf{U}_a + \mathbf{U}_b)] = \mathbb{S}_a. \quad (6.7)$$

O termo no segundo membro da igualdade do sistema de ondas curtas, depende apenas da componente de onda longa $\mathbb{S}_a = \mathbb{S}_a(\mathbf{U}_b)$, conforme Equação 6.5. Portanto, a componente de ondas curtas \mathbf{U}_a pode ser expressa como uma função da componente de ondas longas \mathbf{U}_b

$$\mathbf{U}_a = \mathbb{D}^{-1} [\mathbb{S}_a - \mathbb{D}] (\mathbf{U}_b),$$

em que $\mathbb{D} = \mathcal{P}_a [-\mathbf{A} + \mathbf{C}]$. Esta é a característica não linear do método, no sentido de que as componentes da solução $\{\mathbf{U}_b, \mathbf{U}_a\}$ encontram-se na variedade não linear, definida pelo gráfico do operador $\mathbb{D}^{-1} [\mathbb{S}_a - \mathbb{D}]$ sobre \mathcal{V}_b .

★ **Discretização Temporal (em Três Etapas)**

Para discretização temporal, são adotados esquemas de diferenças finitas apropriados nos Sistemas 6.7 e 6.6. Com intuito de desacoplar as equações são introduzidas algumas simplificação como descrito a seguir.

- **Sistema das ondas curtas** — Os termos referentes às baixas frequências são avaliados no tempo n e os termos referentes às altas frequências no tempo $n + 1$.
- **Sistema das ondas longas** — Nos termos lineares, o mesmo esquema implícito do caso de Petrov–Galerkin é utilizado. Já no termo não linear, a componente de baixa frequência é avaliada no tempo n e a componente de alta frequência no tempo $n + 1$. Observe que a componente de alta frequência do tempo $n + 1$ é obtida do sistema das ondas curtas.

Mais explicitamente, o esquema de diferenças finitas utilizado está apresentado no quadro a seguir, em que o termo linear L se refere aos termos A e C, e o termo não linear NL se refere ao termo B.

Termos	$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}$	Linear (L)	Não-Linear (NL)
Discretização (ondas longas)	$\frac{\mathbf{U}_b^{n+1} - \mathbf{U}_b^{n-1}}{2\Delta t}$	$\frac{1}{2} [\mathbf{L}(\mathbf{U}_b^{n+1} + \mathbf{U}_a^{n+1}) + \mathbf{L}(\mathbf{U}_b^{n-1} + \mathbf{U}_a^{n-1})]$	$\text{NL}(\mathbf{U}_b^n + \mathbf{U}_a^{n+1})$
Discretização (ondas curtas)		$\mathbf{L}(\mathbf{U}_b^n + \mathbf{U}_a^{n+1})$	$\text{NL}(\mathbf{U}_b^n)$

Posto isso, têm-se que os sistemas discretos podem ser expressos da seguinte forma:

1. Sistema das ondas longas

$$\mathbb{U}_b^{n+1} + \Delta t \mathcal{P}_b [-\mathbb{A} (\mathbb{U}_b^{n+1} + \mathbb{U}_a^{n+1}) + \mathbb{C} (\mathbb{U}_b^{n+1} + \mathbb{U}_a^{n+1})] = \mathbb{S}_b^{n-1} + 2 \mathbb{S}_b^{n,n+1},$$

em que

$$\mathbb{S}_b^{n-1} = \mathbb{U}_b^{n-1} - \Delta t \mathcal{P}_b [-\mathbb{A} (\mathbb{U}_b^{n-1} + \mathbb{U}_a^{n-1}) + \mathbb{C} (\mathbb{U}_b^{n-1} + \mathbb{U}_a^{n-1})],$$

$$\mathbb{S}_b^{n,n+1} = -2\Delta t \mathcal{P}_b [\tilde{\mathbb{B}}_b (\mathbb{U}_b^n + \mathbb{U}_a^{n+1}) - \mathbb{F}].$$

2. Sistema das ondas curtas (sistema diagnóstico)

$$\mathcal{P}_a [-\mathbb{A} (\mathbb{U}_b^n + \mathbb{U}_a^{n+1}) + \mathbb{C} (\mathbb{U}_b^n + \mathbb{U}_a^{n+1})] = \mathbb{S}_a^n,$$

em que

$$\mathbb{S}_a^n = -\mathcal{P}_a [\mathbb{B}_a (\mathbb{U}_b^n) - \mathbb{F}].$$

Observe que \mathbb{U}_a^{n+1} é uma função de \mathbb{U}_b^n .

A seguir são apresentados as etapas necessárias para se resolver esses sistemas por meio desse método.

★ Algoritmo de Evolução Temporal

1. Dados de Entrada: $(\mathbb{U}_a^{n-1}, \mathbb{U}_b^{n-1})$ e $(\mathbb{U}_a^n, \mathbb{U}_b^n)$.
2. Calcular \mathbb{U}_a^{n+1} , resolvendo o sistema diagnóstico, que é linear.
3. Calcular \mathbb{U}_b^{n+1} , resolvendo o sistema de ondas longas.
4. Retorna-se ao passo 2.

★ Comentários sobre a Implementação

No trabalho de Sotil (1999) a implementação numérica do método de Galerkin não linear, utilizando bases de Fourier, mostra-se competitiva comparada com a do método de Galerkin

tradicional. Esse ganho computacional foi obtido utilizando um "congelamento" da solução do sistema de ondas curtas por um certo número de passos.

Em princípio, essa idéia também poderia ser implementada no contexto de Petrov–Galerkin não linear biortogonal, descrito neste capítulo. Mas, antes disso, muitos detalhes da implementação numérica, tanto dos ternos lineares, quanto dos não lineares, em multinível precisam ser melhor avaliados.

No contexto de wavelets, a idéia principal é poder tirar proveito de representações compactas de funções, para desenhar esquemas adaptáveis espacialmente. Nesse sentido, o desafio é tentar combinar as vantagens de uma representação esparsa espacialmente com um esquema adaptável no tempo, como o descrito neste capítulo. Isso se torna ainda mais atrativo quando as discretizações espaciais puderem ser alterados de forma automática, de acordo com a evolução do comportamento da solução. No próximo capítulo dar-se-á atenção especial aos aspectos da adaptatividade espacial, que é um dos pré-requisitos necessários ao sucesso do método de Petrov–Galerkin não linear no contexto de wavelets.

Capítulo 7

Método Híbrido: Wavelets + Diferenças Finitas

Em Hidrodinâmica são comuns as situações em que o escoamento apresenta estruturas com variações bruscas. Para uma representação adequada dessas estruturas são necessárias grades muito refinadas. Em muitos casos, essas estruturas possuem uma localização espacial reduzida, em comparação com o domínio do escoamento. Por essa razão, há um interesse por métodos numéricos adaptativas que usem grades mais refinadas apenas nessas regiões, e menos refinadas nas regiões em que o escoamento seja mais suave. Além disso, com a variação temporal da posição dessas estruturas, é importante que seja possível redefinir as grades, dinâmica e automaticamente, durante as simulações numéricas.

O método adotado neste trabalho foi sugerido por Holmström (1997). Por um lado, está um esquema tradicional de diferenças finitas em malha uniforme. Por outro lado está a discretização com adaptação de funções por valores pontuais em malha irregular. A análise wavelet contribui na construção de tais malhas e na construção de um esquema de interpolação adaptativa para fazer a conexão entre os ambientes uniforme e não uniforme, utilizando as técnicas de análise wavelet interpolatória descritas no Capítulo 3. Para o refinamento local da malha utilizam-se os coeficientes wavelet significativos como indicadores das regiões de pouca suavidade da função representada.

Nesse tipo de técnica, a estrutura da malha adaptativa resultante é totalmente dependente da função analisada, podendo apresentar uma composição bem heterogênea: esparsa em regiões de suavidade e densa nas regiões de pouca suavidade. Esse fato aumenta a complexidade da estrutura de dados, principalmente em dimensões superiores. Por isso, para o caso bidimensional, são preferidas malhas que sejam localmente regulares, em blocos, como as tratadas neste trabalho. Isso facilita as operações de acesso, armazenamento e dos cálculos, com o custo de se ter um maior número de pontos nas malhas.

7.1 Caso Unidimensional

7.1.1 Discretização e Operação de Funções em Malhas Adaptáveis

As desejadas discretizações com adaptação têm como objetivo a representação de funções por valores pontuais em uma malha \mathcal{M} , de maneira precisa e mais econômica possível. Naturalmente, \mathcal{M} deverá ter uma maior densidade de pontos nas vizinhanças das singularidades, enquanto que, nas regiões de suavidade, a malha pode ser mais esparsa. Esse é justamente o padrão característico da posição dos coeficientes wavelets significativos em uma análise de multi-resolução. Portanto, eles são bons candidatos a indicadores na construção de tais malhas.

★ As Malhas

As malhas adaptativa adotadas possuem as seguintes características:

- Os pontos da malha \mathcal{M} pertencem a uma malha regular $X^{\mathcal{J}}$, em que \mathcal{J} é o nível mais refinado, escolhido de tal forma a resolver adequadamente as possíveis irregularidades da função.
- \mathcal{M} deve conter X^{j_0} , em que j_0 é o nível menos refinado, escolhido de tal forma a garantir uma precisão mínima desejada nas regiões de suavidade.

Portanto a malha \mathcal{M} é do tipo

$$\mathcal{M} = X^{j_0} \cup \bigcup_{j=j_0}^{j_m} \Lambda^j,$$

em que $\Lambda^j \subset X^{j+1} \setminus X^j$ e $j_0 \leq j_m < \mathcal{J}$.

Seja $f^{\mathcal{M}}$ o conjunto de valores de uma dada função f numa malha \mathcal{M} desse tipo. As seguintes operações sobre a representação $(\mathcal{M}, f^{\mathcal{M}})$ são de interesse.

★ Truncamento: Redução de Malhas

Dada a representação $(\mathcal{M}, f^{\mathcal{M}})$ e um parâmetro de truncamento $\epsilon > 0$, define-se uma nova representação eliminando de \mathcal{M} aqueles pontos $x_{2k+1}^{j+1} \in \Lambda^j$ que estiverem associados a

coeficientes wavelet $|d_k^j| < \epsilon$. A malha resultante é denotada de \mathcal{M}_ϵ . Isso define o operador de truncamento \mathcal{T}_ϵ ,

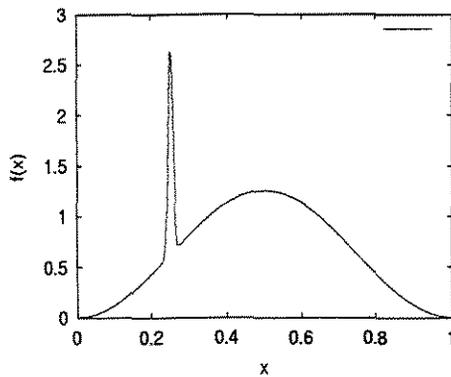
$$(\mathcal{M}, f^{\mathcal{M}}) \xrightarrow{\mathcal{T}_\epsilon} (\mathcal{M}_\epsilon, f^{\mathcal{M}_\epsilon}).$$

Na Figura 7.1 é apresentado o gráfico da função

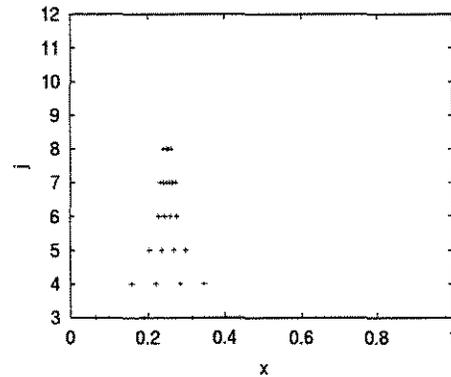
$$f(x) = 5 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 2 \exp^{-12500(x-\frac{1}{4})^2}$$

e a posição dos pontos de grade em malhas adaptativas \mathcal{M}_ϵ , para $\epsilon = 10^{-2}, 10^{-4}$ e 10^{-6} , com respectivamente 36, 84 e 265 pontos referentes a uma malha regular com 2049 pontos.

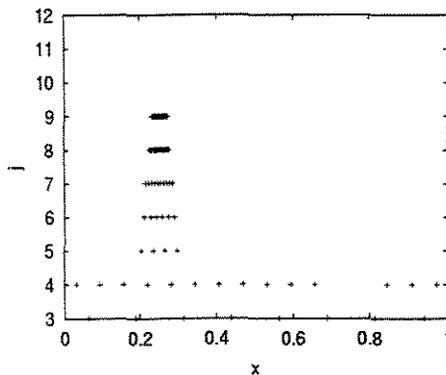
a) $f(x)$



b) $\mathcal{M}_{10^{-2}}$, com 36 pontos



c) $\mathcal{M}_{10^{-4}}$, com 84 pontos



d) $\mathcal{M}_{10^{-6}}$, com 265 pontos

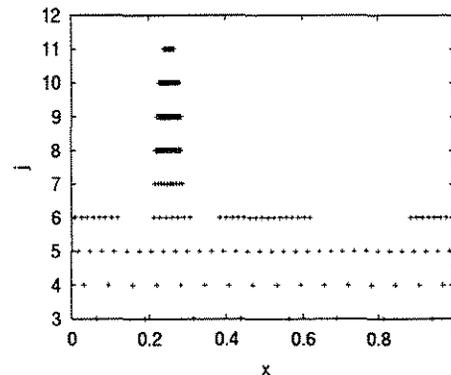


Figura 7.1: Ilustração de malhas adaptativas. (a) Representação de $f(x)$; (b) posição dos pontos de grade em malhas adaptativas \mathcal{M}_ϵ associados aos coeficientes wavelets significativos, para $\epsilon = 10^{-2}, 10^{-4}$ e 10^{-6} . Sendo $M = 4, \mathcal{J} = 11$ e $j_0 = 3$.

Na Figura 7.2 são apresentados o número de pontos (coeficientes wavelets significativos) necessários na representação da função f numa malha \mathcal{M}_ϵ , para $\epsilon = 10^{-10}, \dots, 1$. A construção dessas representações tem como base uma malha regular $X^{\mathcal{J}}$, para $\mathcal{J} = 10$ e 11. Observa-se nessa figura que para valores de $\epsilon > 10^{-4}$ basta iniciar-se a construção da malha \mathcal{M}_ϵ a partir da malha regular X^{10} . Assintoticamente, quando $\epsilon \rightarrow 0$, as curvas representadas nessa figura possuem uma inclinação de $\approx -1/4$. Esse resultado concorda com as estimativas de Donoho (1992) e com os resultados numéricos de Holmström (1997).

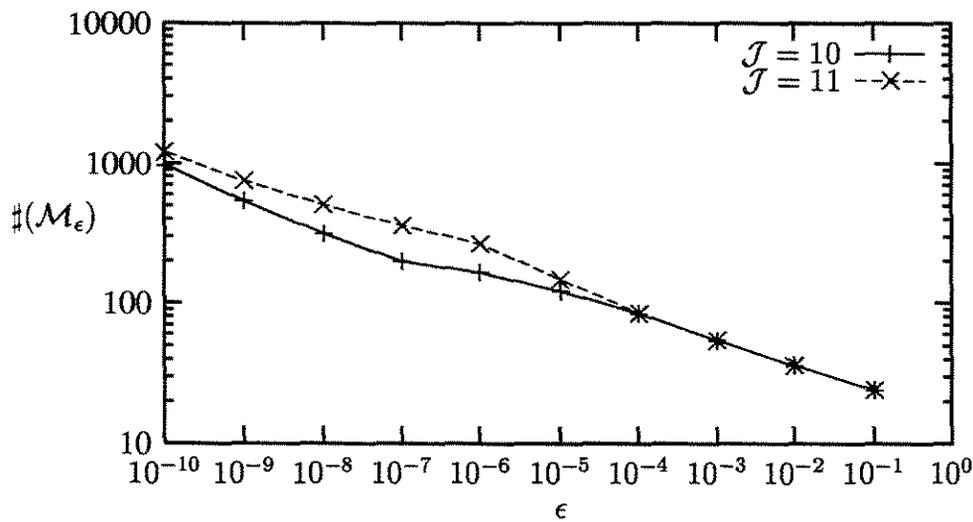


Figura 7.2: Número de coeficientes significativos $|d_k^\ell| > \epsilon$ em malhas $X^{\mathcal{J}}$, para $\mathcal{J} = 10$ e 11.

★ Extensão: Refinamento de Malhas

Dada a representação $(\mathcal{M}, f^{\mathcal{M}})$, pode ser de interesse ter uma representação $(\tilde{\mathcal{M}}, f^{\tilde{\mathcal{M}}})$ em uma malha estendida $\tilde{\mathcal{M}}$. Seja

$$\Lambda^{\mathcal{M}} = \bigcup_{j=j_0}^{j_m} \Lambda^j,$$

de tal forma que $\mathcal{M} = X^{j_0} \cup \Lambda^{\mathcal{M}}$. Tipicamente, para a construção da malha estendida $\tilde{\mathcal{M}} = X^{j_0} \cup \Lambda^{\mathcal{M}}$, escolhe-se o conjunto $\Lambda^{\mathcal{M}}$ formado pelos pontos de $\Lambda^{\mathcal{M}}$ acrescidos de uma vizinhança. Isto é, para cada ponto de $\Lambda^{\mathcal{M}}$ incluem-se também alguns vizinhos, tanto no mesmo nível de escala,

quanto em alguns níveis superiores. Na prática, os valores de $f^{\tilde{\mathcal{M}}}$ nos pontos novos nem sempre estão disponíveis. Neste caso, aplica-se iterativamente um esquema de refinamento interpolatório, das escalas inferiores para as superiores. Dessa forma fica definido o operador de extensão

$$(\mathcal{M}, f^{\mathcal{M}}) \xrightarrow{\varepsilon} (\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{f}^{\tilde{\mathcal{M}}}),$$

em que \tilde{f} representa a interpolação de f em $\tilde{\mathcal{M}}$ a partir dos valores de f em \mathcal{M} .

A Figura 7.3 ilustra a operação de extensão de malhas. A malha \mathcal{M} é formada pelos pontos da malha mais grossa marcados com o símbolo \square e um ponto $\mu = x_{2k+1}^{j_0+1} \in X^{j_0+1} \setminus X^{j_0}$, identificado pelo símbolo \diamond . Na extensão, são incluídos os dois vizinhos de μ mais próximos na mesma escala, $x_{2k-1}^{j_0+1}$ e $x_{2k+3}^{j_0+1}$ e dois na escala imediatamente superior $x_{2(2k+1)-1}^{j_0+2}$ e $x_{2(2k+1)+1}^{j_0+2}$. Nesses pontos novos, marcados com \circ , deve ser efetuado o refinamento interpolatório.

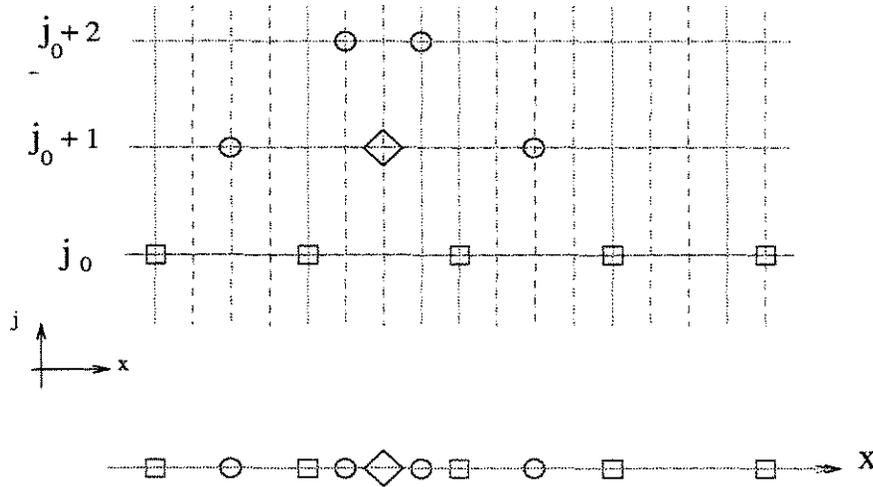


Figura 7.3: Ilustração de uma vizinhança. Os pontos da malha mais grossa são marcados com o símbolo \square , o ponto de $\Lambda^{\mathcal{M}}$ é marcado com \diamond e os seus vizinhos com o símbolo \circ .

Espera-se que o número de pontos de \mathcal{M} seja da mesma ordem do número de pontos de sua malha estendida $\tilde{\mathcal{M}}$, i.e.,

$$\#(\tilde{\mathcal{M}}) = \mathcal{O}(\#\mathcal{M}).$$

Por exemplo, isso ocorre se \mathcal{M} tiver uma estrutura de cone, como descrita por (Plantevin, 1995), tendo em vista que a maioria dos pontos que compõem a vizinhança de cada ponto em uma malha \mathcal{M} em forma de cone, já está presente em \mathcal{M} . Isto é ilustrado na Figura 7.4.

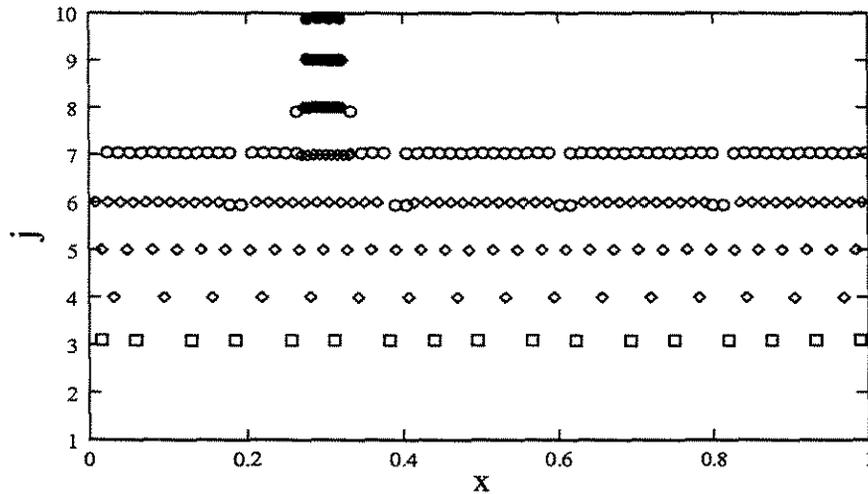


Figura 7.4: Ilustração de uma malha extensão de malhas. Os pontos da malha mais gossa são marcados com o símbolo \square , os pontos de $\Lambda^{\mathcal{M}}$ são marcados com \diamond e os seus vizinhos com o símbolo \circ .

★ Operações Algébricas

As operações de soma e multiplicação entre funções representadas em malhas adaptativas são simples quando as malhas envolvidas são idênticas. Nesse caso, a operação em questão é efetuada ponto a ponto. Caso contrário, primeiro é necessário acrescentar nas representações novos valores pontuais, de tal forma que todas as representações possuam malhas idênticas. Esse valores também são obtidos por refinamento interpolante. Ou seja, dadas as representações $(\mathcal{M}, f^{\mathcal{M}})$ e $(\mathcal{M}', g^{\mathcal{M}'})$, as funções $z = f + g$ ou $z = f * g$ são representadas por $(\check{\mathcal{M}}, \check{z}^{\check{\mathcal{M}}})$ em que $\check{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \cup \mathcal{M}'$, $\check{z} = \check{f} + \check{g}$, ou $\check{z} = \check{f} * \check{g}$, em que \check{f} e \check{g} são as interpolações de f e g em $\check{\mathcal{M}}$ a partir de $f^{\mathcal{M}}$ e $g^{\mathcal{M}'}$.

★ Diferenciação

Outra operação de importância é a diferenciação de funções representadas em malhas adaptativas. A proposta é usar diferenças finitas com espaçamento uniforme. Para cada ponto da malha \mathcal{M} escolhe-se o espaçamento igual à escala local, dada pela menor distância entre o ponto e seus vizinhos. Como eventualmente os estênceis necessários podem não estar presentes na representação, eles são obtidos por refinamento interpolatório. Precisamente, seja L um operador diferencial e L^h é sua discretização por diferenças finitas em uma malha uniforme com espaça-

mento h . O operador de diferenças finitas adaptativa L_a

$$(\mathcal{M}, f^{\mathcal{M}}) \xrightarrow{L_a} (\mathcal{M}, (L_a f)^{\mathcal{M}}).$$

é definido em cada ponto $\mu \in \mathcal{M}$ pela seguinte expressão

$$(L_a f^{\mathcal{M}})(\mu) = (L^{h_\mu} \tilde{f})(\mu), \tag{7.1}$$

em que $h_\mu = \min_{x \in \mathcal{M}, x \neq \mu} |x - \mu|$ e \tilde{f} é o resultado do esquema de refinamento aplicado a $f^{\mathcal{M}}$

até a escala h_μ . Isso é ilustrado na Figura 7.5, para diferenças centradas de ordem 2.

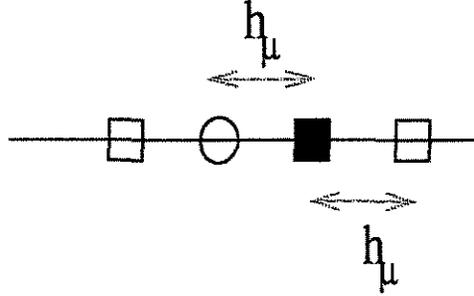


Figura 7.5: Ilustração de um estêncil de diferenciação centrada de ordem 2, em malhas adaptativas. Os pontos da malha são marcados com o símbolo \square e o ponto aonde é aplicada a diferenciação é marcado com \blacksquare . O ponto denotado por \circ também pertence ao estêncil de diferenciação, mas não pertence a malha adaptativas.

Para os operadores $L^{(1)}f(x) = df/dx$ e $L^{(2)}f(x) = d^2f/dx^2$, aplicados em funções periódicas, são utilizados nesse trabalho os operadores de diferenças finitas centradas, definidos no Capítulo 4. Quando houver condições de fronteira não periódicas, para aqueles pontos nas regiões de fronteira são utilizados operadores de diferenças finitas de mesma ordem com estênceis descentralizados. Precisamente,

$$L^{(1),h}f(x) = \frac{1}{h} \sum_k \Gamma_{df}^{(1)}(k) f(x + kh),$$

$$L^{(2),h}f(x) = \frac{1}{h^2} \sum_k \Gamma_{df}^{(2)}(k) f(x + kh),$$

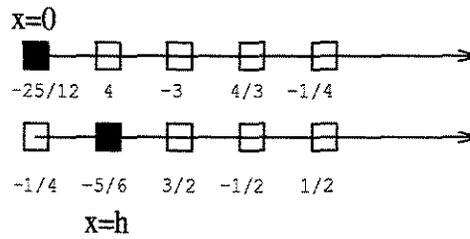


Figura 7.6: Ilustração de um estêncil de diferenciação não centrada de ordem 4, para a fronteira esquerda. Os pontos da malha são marcados com o símbolo \square e pertencem ao estêncil de diferenciação associado ao ponto é marcado com o símbolo \blacksquare .

em que os coeficientes $\Gamma_{df}^{(1)}$ e $\Gamma_{df}^{(2)}$ encontram-se nas Tabela 7.1 e Tabela 7.2, para a região interior e de fronteira esquerda do intervalo $[0, 1]$. Para a fronteira direita, basta reverter a posição dos coeficientes apresentados nessas tabelas. Na Figura 7.6 são apresentados os estêncil de diferenciação não centrada de ordem 4 para a fronteira esquerda.

Tabela 7.1: Coeficientes $\Gamma_{df}^{(1)}$, para os pontos interiores e para a fronteira esquerda.

M	k	-2	-1	0	1	2	3	4
2	$x = 0$			-3/2	-1/2			
	$h \leq x < 1$		-1/2	0	1/2			
4	$x = 0$			-25/12	4	-3	4/3	-1/4
	$x = h$		-1/4	-5/6	3/2	-1/2	1/12	
	$2h \leq x < 1 - h$	1/12	-2/3	0	2/3	-1/12		

Tabela 7.2: Coeficientes $\Gamma_{df}^{(2)}$, para os pontos interiores e para a fronteira esquerda.

M	k	-2	-1	0	1	2	3	4	5
2	$x = 0$			2	-5	4	-1		
	$h \leq x < 1$		1	-2	1				
4	$x = 0$			15/4	-77/6	107/6	-13	61/12	-5/6
	$x = h$		5/6	5/4	-1/3	7/6	1/12		
	$2h \leq x < 1 - h$	-1/12	4/3	-5/2	4/3	-1/12			

7.1.2 Problemas de Evolução Temporal

A representação de funções em malhas adaptativas é utilizada na solução numérica de EDPs de evolução

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} = L\mathcal{U}, & t > 0, x \in [0, 1] \\ \mathcal{U}(x, 0) = \mathcal{U}_0(x), \end{cases} \quad \mathcal{U} = \mathcal{U}(x, t)$$

com condições de contorno periódicas ou não periódicas. Supõe-se que no tempo $t_n = n \Delta t$ seja conhecida a representação $(\mathcal{M}^n, \mathcal{U}^n)$, em que \mathcal{U}^n são os valores da solução numérica numa malha adaptável \mathcal{M}^n . No passo seguinte de tempo, a representação $(\mathcal{M}^{n+1}, \mathcal{U}^{n+1})$ é obtida adotando-se os próximos procedimentos.

1. **Extensão:** $(\mathcal{M}^n, \mathcal{U}^n) \xrightarrow{\mathcal{E}} (\mathcal{M}^{n+1}, \mathcal{U}^{n+1})$,

O processo de extensão está associado à idéia de se obter uma malha \mathcal{M}^{n+1} cujos pontos possam representar bem a solução no próximo passo de tempo. Ou seja, espera-se que \mathcal{M}^{n+1} contenha \mathcal{M}^n . Como explicado anteriormente, a extensão da malha é obtida pelo acréscimo de pontos vizinhos na mesma escala e em alguns níveis de escala superiores para prever possíveis deslocamentos das estruturas ou surgimento de estruturas nas escalas mais finas. O tamanho dessa vizinhança pode variar com o fenômeno físico modelado pela EDP.

2. **Evolução Temporal:** $(\mathcal{M}^{n+1}, \mathcal{U}^{n+1}) \xrightarrow{\mathcal{D}_a} (\mathcal{M}^{n+1}, \check{\mathcal{U}}^{n+1})$,

A partir dos valores \mathcal{U}^{n+1} da solução numérica nos pontos da malha \mathcal{M}^{n+1} no tempo t_n , faz-se a evolução temporal usando métodos explícitos, em especial o método de Runge–Kutta, com passo de tempo Δt variável, dependente da menor escala espacial local presente na malha \mathcal{M}^{n+1} . O resultado deste procedimento é denotado por $\check{\mathcal{U}}^{n+1}$, que corresponde ao valor da solução numérica nos pontos da malha \mathcal{M}^{n+1} no tempo t_{n+1} . A notação \mathcal{D}_a envolve a aplicação dos operadores de diferenças finitas adaptativas, como descrito anteriormente, e do método de Runge–Kutta adotado para a evolução temporal.

3. **Truncamento:** $(\mathcal{M}^{n+1}, \check{\mathcal{U}}^{n+1}) \xrightarrow{\mathcal{T}_c} (\mathcal{M}^{n+1}, \mathcal{U}^{n+1})$

Não necessariamente a malha \mathcal{M}^{n+1} é a mais adequada para representar a solução numérica em t_{n+1} . Então, aplica-se o operador de truncamento para adequar a malha \mathcal{M}^{n+1} , de forma a se obter uma possível representação mais econômica \mathcal{M}^{n+1} .

Em resumo, a evolução temporal numérica de uma EDP, cuja solução é representada em malhas adaptativas, pode ser esquematizada como

$$(\mathcal{M}^n, \mathcal{U}^n) \xrightarrow{\mathcal{E}} (\mathcal{M}^{n+}, \mathcal{U}^{n+}) \xrightarrow{\mathcal{D}_a} (\mathcal{M}^{n+}, \check{\mathcal{U}}^{n+1}) \xrightarrow{\mathcal{I}_\epsilon} (\mathcal{M}^{n+1}, \mathcal{U}^{n+1}).$$

7.1.3 Ilustração Numérica: Equação de Burger

Os resultados numéricos apresentados a seguir são para a Equação de Burger

$$\frac{\partial \mathcal{U}(x, t)}{\partial t} + \mathcal{U}(x, t) \frac{\partial \mathcal{U}(x, t)}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 \mathcal{U}(x, t)}{\partial x^2}, \quad (7.2)$$

para $t \geq 0$, $x \in [0, 1]$ e coeficiente de viscosidade $\mu = 10^{-2}/\pi$. As condições de fronteira e inicial adotadas são

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(0, t) = u(1, t) &= 0, \\ \mathcal{U}(x, 0) &= \text{sen}(2\pi x). \end{aligned}$$

Essa equação representa um modelo de advecção-difusão não linear. Com a condição inicial escolhida, a solução desenvolve uma região de variação brusca em torno de $x = 1/2$, para tempos $t \approx 3/2\pi$, como ilustrado na Figura 7.7.

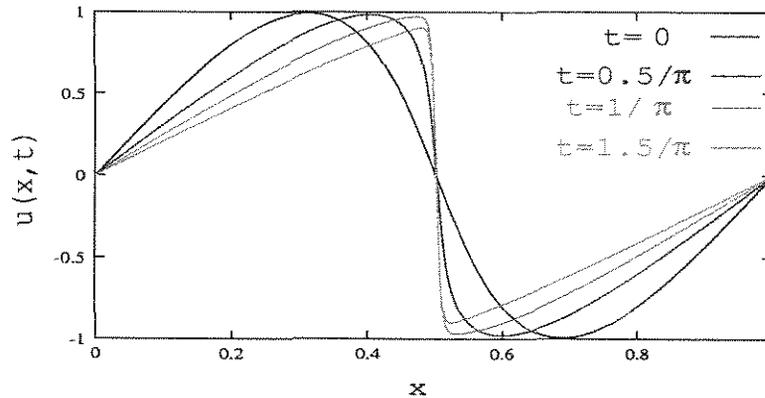


Figura 7.7: Evolução temporal do problema de Burger

Para este exemplo são utilizados os procedimentos de discretização espacial em malhas adaptativas \mathcal{M}^n , descritos na seção anterior, com interpolação polinomial de grau 3 ($M = 4$). Para a evolução temporal foi utilizado o método de Runge-Kutta de ordem 4.

Na Figura 7.8 são apresentadas as quantidades de pontos $\sharp(\mathcal{M}^n)$ presentes nas malhas adaptativas durante a evolução do modelo até o tempo $t = 3/2\pi$, para os diferentes valores de $\epsilon = 10^{-s}$, $s = 5, \dots, 10$. Observa-se nessa figura que a medida que ϵ aumenta $\sharp(\mathcal{M}^n)$ diminui.

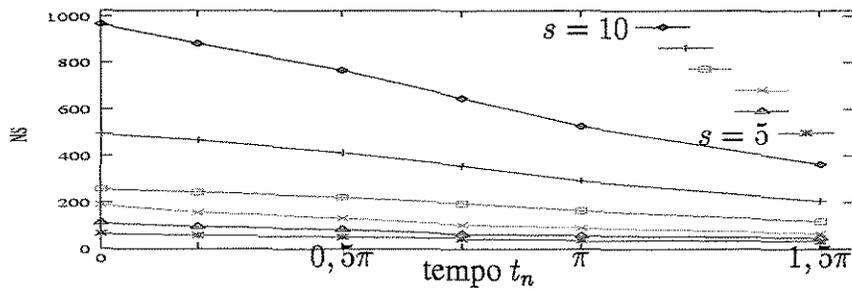
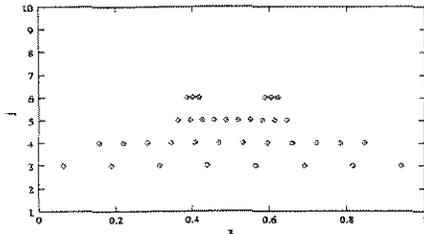


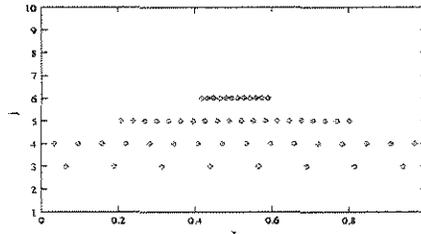
Figura 7.8: Número de pontos $\sharp(\mathcal{M}^n)$ utilizados na evolução temporal da Equação de Burger em malhas \mathcal{M}_ϵ , para $\epsilon = 10^{-s}$, sendo $s = 5, \dots, 10$.

As malhas \mathcal{M}^n para $t_n = 3/2\pi$ estão ilustrada no plano posição \times escala da Figura 7.9, para diferentes valores de $\epsilon = 10^{-s}$, $s = 6, \dots, 9$. Pode-se verificar nessa figura que uma estrutura tipo cone, desenvolvida em torno de $x = 1/2$, fica mais nítida à medida que ϵ é reduzido.

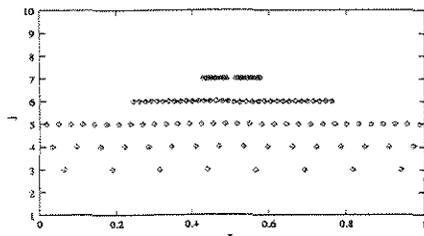
a) $\epsilon = 10^{-6}$



b) $\epsilon = 10^{-7}$



c) $\epsilon = 10^{-8}$



d) $\epsilon = 10^{-9}$

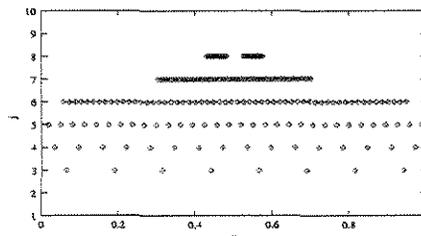


Figura 7.9: Posição dos coeficientes wavelet significativos para a solução da Equação de Burger em $t = 3/2\pi$, em uma malha \mathcal{M}_ϵ .

Para avaliar o desempenho do método, usa-se como referência a solução numérica \mathcal{V}^{j_0} , obtida sem nenhum tipo de adaptação em uma malha uniforme X^{j_0} bem mais refinada do que aquelas que ocorrem nos testes (usa-se $j_0 = 13$). Seja \tilde{U} a extensão, até a malha X^ℓ , da solução numérica do método adaptável, em que ℓ é o nível mais fino presente na malha adaptável utilizada. É calculada a diferença $\mathcal{V}^{j_0} - \tilde{U}$ nos pontos de X^ℓ . Para efeito de comparação, calcula-se também as diferenças $\mathcal{V}^{j_0} - \mathcal{V}^j$ nos pontos de X^j , para $j \leq 10$. Na Figura 7.10 estão apresentadas as normas ℓ^2 (MSE) dessas diferenças em relação ao número de pontos utilizados em cada caso. Observa-se nessa figura que, para um certo erro estipulado, o número de pontos utilizados no método adaptável é menor do que no método usual em malha uniforme. Além disso, observa-se que a redução de ϵ não necessariamente implica em uma redução do erro. Isto ocorre porque o erro do esquema de diferenças finitas domina o processo para valores de truncamento ϵ muito pequenos.

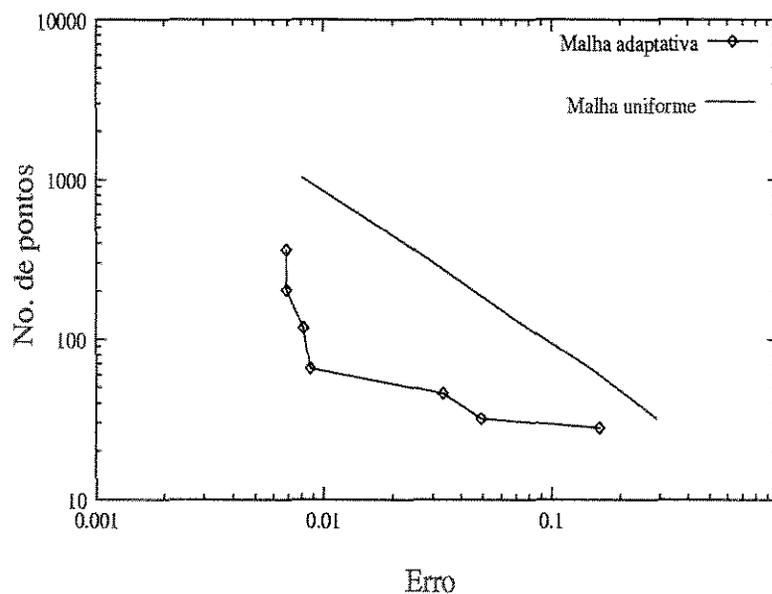


Figura 7.10: Avaliação do erro na solução de Burger em $t = 3/2\pi$.

7.2 Caso Bidimensional

Os coeficientes wavelet do caso bidimensional também podem ser interpretados como erros de interpolação. Portanto, em princípio, a metodologia do caso unidimensional se aplica também ao caso bidimensional. No entanto, a topologia das malhas irregulares bidimensionais podem aumentar a complexidade de armazenamento, de busca e de cálculos. Por isso, são geralmente preferidas aquelas malhas que sejam localmente regulares, em blocos, como as tratadas neste trabalho.

Conceitualmente, para a construção e operação com essas malhas em blocos, é utilizada uma estrutura de árvores quaternárias. Então, para facilitar o formalismo, uma nomenclatura e algumas propriedades de árvores quaternárias são introduzidas. A seguir é apresentada a definição de uma árvore constituída de blocos localmente regulares.

7.2.1 As Malhas

No caso bidimensional são utilizadas malhas definidas por partições de um retângulo $[0, L] \times [0, D]$. No nível menos refinado, é assumido que \mathcal{X}^0 é a malha com $N_x \times N_y$ pontos obtida pela partição regular do retângulo, com espaçamento $h_x = \frac{L}{N_x}$ na direção de x e $h_y = \frac{D}{N_y}$ na direção de y . Isto é

$$\mathcal{X}^0 = \{\gamma = (kh_x, \ell h_y), 0 \leq k < N_x, 0 \leq \ell < N_y\}.$$

Por refinamento diádico, têm-se as malhas regulares

$$\mathcal{X}^j = \{\gamma = (kh_x^j, \ell h_y^j), 0 \leq k < N_x^j, 0 \leq \ell < N_y^j\},$$

em que $N_x^j = 2^j N_x$, $N_y^j = 2^j N_y$, e $h_x^j = 2^{-j} h_x$ e $h_y^j = 2^{-j} h_y$. Desta maneira, tem-se uma sequência de malhas encaixadas $\mathcal{X}^j \subset \mathcal{X}^{j+1}$, em que \mathcal{X}^{j+1} é obtida incluindo pontos médio em \mathcal{X}^j .

★ Estrutura de Árvores

De modo geral, também são considerados blocos de malhas regulares $\mathcal{B}_\mu^j \subset \mathcal{X}^j$, com $N_x \times N_y$ pontos, do tipo

$$\mathcal{B}_\mu^j = \{\gamma = \mu + (kh_x^j, \ell h_y^j), 0 \leq k < N_x, 0 \leq \ell < N_y\}.$$

O ponto μ do extremo inferior esquerdo de \mathcal{B}_μ^j é chamado de ponto diretor, e j de nível de escala do bloco. Por refinamento diádico e partição em quadrantes, o bloco \mathcal{B}_μ^j dá origem a quatro novos blocos disjuntos no nível $j + 1$

$$\mathcal{B}_\mu^j \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{B}_\mu^j) = \{\mathcal{B}_{\mu_{00}}^{j+1}, \mathcal{B}_{\mu_{01}}^{j+1}, \mathcal{B}_{\mu_{10}}^{j+1}, \mathcal{B}_{\mu_{11}}^{j+1}\}.$$

Se μ é um ponto com coordenadas (x, y) , então os pontos diretores dos novos blocos são dados por $\mu_{00} = \mu$, $\mu_{0,1} = \mu + (0, \frac{N_y}{2} h_y^j)$, $\mu_{10} = \mu + (\frac{N_x}{2} h_x^j, 0)$, e $\mu_{11} = \mu + (\frac{N_x}{2} h_x^j, \frac{N_y}{2} h_y^j)$. Na terminologia de árvores quaternárias, os elementos do conjunto $\mathcal{S}(\mathcal{B}_\mu^j)$ são chamados de filhos do nó \mathcal{B}_μ^j , que

por sua vez é dito a mãe dos nós de $\mathcal{S}(\mathcal{B}_\mu^j)$, que são irmãos entre si. Uma geração de blocos está ilustrada na Figura 7.11.

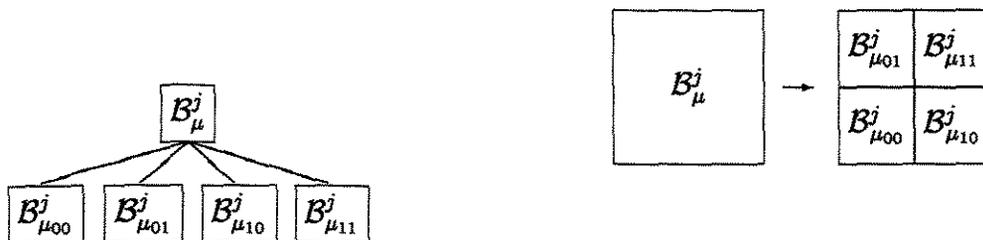


Figura 7.11: Ilustração de uma geração de blocos numa estrutura de uma árvore e na malha associada.

Considerando a raiz $\mathcal{B}_{(0,0)}^0 = \mathcal{X}^0$, após \mathcal{J} gerações tem-se uma árvore quaternária completa de $\mathcal{J} + 1$ níveis. Em cada nível $0 \leq j \leq \mathcal{J}$ existem 2^{2j} blocos (nós), cujos pontos diretores integram um conjunto que denominamos \mathcal{I}^j . O diagrama de uma árvore quaternária completa de três níveis é apresentado na Figura 7.12.

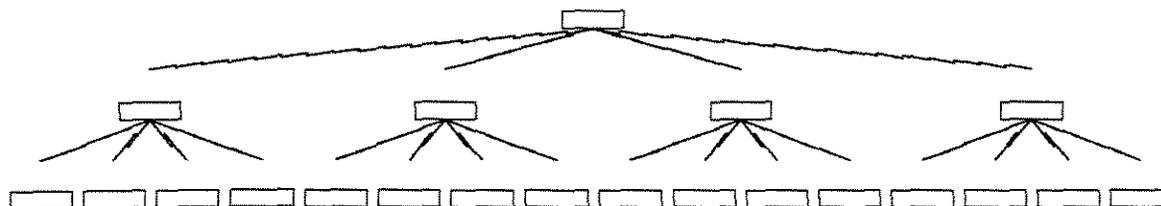


Figura 7.12: Ilustração de árvore quaternária completa com 3 níveis.

Numa árvore completa de $\mathcal{J} + 1$ níveis, as folhas são os blocos $\mathcal{B}_\mu^\mathcal{J}$ do último nível, cuja união completam a malha regular mais fina. Isto é

$$\mathcal{X}^\mathcal{J} = \bigcup_{\mu \in \mathcal{I}^\mathcal{J}} \mathcal{B}_\mu^\mathcal{J}.$$

Podem-se ter também árvores quaternárias incompletas, em que é possível ter nós em níveis intermediários $1 \leq j < \mathcal{J}$ que não tenham filhos. Isso leva ao conceito mais geral de folhas de uma árvore:

folhas são os nós que não possuem filhos.

Na Figura 7.13(a) está o diagrama de uma árvore incompleta com quatro níveis $\mathcal{J} = 4$. Nesta árvore de blocos de malhas, as folhas ocorrem quando em algum bloco de um nível j é interrompido o processo de refinamento. A união das folhas

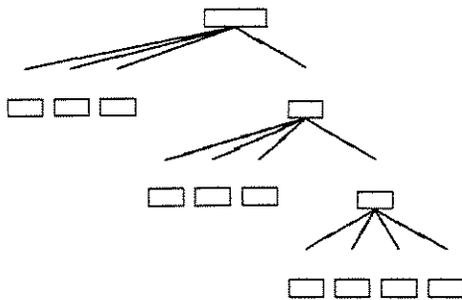
$$\mathcal{M} = \bigcup \mathcal{F}(\mathcal{A}),$$

fornece uma malha $\mathcal{M} \subset \mathcal{X}^{\mathcal{J}}$ que é regular por blocos, mas com espaçamentos variáveis, como ilustrado na Figura 7.13(b). De fato, se $\Lambda^j \subset \mathcal{I}^j$ é o conjunto dos pontos diretores dos blocos folha do nível j , então

$$\mathcal{M} = \bigcup_{j=1}^{\mathcal{J}} \bigcup_{\mu \in \Lambda^j} \mathcal{B}_{\mu}^j,$$

sendo esta uma união disjunta.

a)Árvore



b)Malha Regular por Blocos

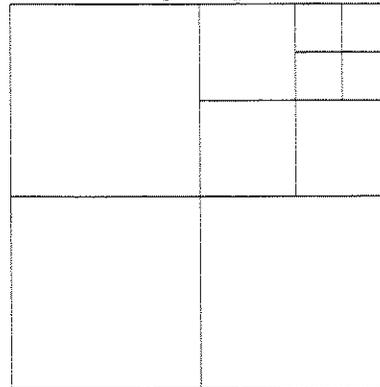


Figura 7.13: Ilustração de uma árvore quaternária não completa com 4 níveis e sua respectiva malha regular por blocos.

★ Construção de Malhas Adaptáveis Regulares por Blocos

Como no caso unidimensional, a idéia é permitir a representação de funções suaves, com irregularidades localizadas, de uma forma mais econômica em malhas localmente regulares por blocos. Os critérios de como construir tais malhas são apresentados a seguir. Segue-se a proposta de M. Hoslmstrom (1997).

Um ingrediente fundamental na criação de uma malha adaptável regular por blocos é um indicador para teste de refinamento $\iota_{\epsilon}(\mathcal{B})$ de um determinado bloco, que é caracterizado por

um esquema de multiresolução interpolante e por um parâmetro ϵ de truncamento dos coeficientes wavelet, escolhidos a priori.

Dado um bloco \mathcal{B}_μ^j , seja $\bar{\mathcal{B}}_\mu^j$ o complemento de \mathcal{B}_μ^j pela inclusão de uma coluna adicional de pontos à direita e uma linha adicional acima. Isto é,

$$\bar{\mathcal{B}}_\mu^j = \{ \gamma = \mu + (kh_x^j, \ell h_y^j), 0 \leq k \leq N_x, 0 \leq \ell \leq N_y \}.$$

Consideram-se as malhas retangulares $\mathcal{R}^j = \bar{\mathcal{B}}_\mu^j$ e o seu refinamento diádico \mathcal{R}^{j+1}

$$\mathcal{R}^{j+1} = \{ \gamma = \mu + (kh_x^{j+1}, \ell h_y^{j+1}), 0 \leq k \leq 2N_x, 0 \leq \ell \leq 2N_y \},$$

de tal forma que

$$\mathcal{R}^{j+1} = \overline{\bigcup \mathcal{B}_{\mu_{p,q}}^{j+1}}.$$

Aplicando um nível da DWT interpolante sobre os valores de uma função nos pontos de \mathcal{R}^{j+1} , obtém-se os coeficientes wavelet $d_{k,\ell}^{(\alpha)j}$ associados aos pontos

$$\begin{aligned} \gamma_{k,\ell}^{(1),j} &= \mu + (2kh_x^{j+1}, (2\ell + 1)h_y^{j+1}), \\ \gamma_{k,\ell}^{(2),j} &= \mu + ((2k + 1)h_x^{j+1}, 2\ell h_y^{j+1}), \\ \gamma_{k,\ell}^{(3),j} &= \mu + ((2k + 1)h_x^{j+1}, (2\ell + 1)h_y^{j+1}), \end{aligned}$$

pertencentes a $\mathcal{R}^{j+1} \setminus \mathcal{R}^j$. Utiliza-se a notação $\mathcal{D}(\mathcal{B}_{\mu_{p,q}}^{j+1})$ para indicar o conjunto de todos os coeficientes wavelet associados a pontos de $\bar{\mathcal{B}}_{\mu_{p,q}}^{j+1}$. Se todos os coeficientes wavelet $d_{k,\ell}^{(\alpha)j} \in \mathcal{D}(\mathcal{B}_{\mu_{p,q}}^{j+1})$ tiverem módulo menor do que o valor de truncamento ϵ , então define-se $\iota_\epsilon(\mathcal{B}_{\mu_{p,q}}^{j+1}) = 0$. Caso contrário, define-se $\iota_\epsilon(\mathcal{B}_{\mu_{p,q}}^{j+1}) = 1$.

Inicia-se a construção da malha $\mathcal{M} = \mathcal{M}_\epsilon$ a partir do bloco inicial $\mathcal{B} = \mathcal{X}^0$ e faz-se $\iota_\epsilon(\mathcal{B}) = 1$. A seguir, calcula-se o indicador ι_ϵ de seus filhos. Se o indicador for nulo em todos os quatro casos, então o bloco \mathcal{B} é considerado folha e integra-se à malha \mathcal{M} . Caso contrário, apenas são considerados folha, e integrados à malha, aqueles blocos filhos com indicador nulo. Nos demais blocos, com indicador igual a um, repete-se o processo de teste até alcançar um nível em que todos os blocos são considerados folha. Na prática, no entanto, pode ser necessário antecipar a interrupção deste processo de construção devido a limitações físicas da máquina, em cujo caso, estabelece-se um número máximo de blocos presentes na malha. Esse procedimento é resumido nos Algoritmos 7.1 e 7.2.

Algoritmo 7.1 Construção de Malhas: $Constr(\mathcal{B}, \mathcal{F}, \epsilon)$.

```

forall  $\mathcal{B}_\gamma \in \mathcal{S}(\mathcal{B})$  do
  if  $\iota_\epsilon(\mathcal{B}_\gamma) = 0, \forall(\mathcal{B}_\gamma) \in \mathcal{S}(\mathcal{B})$  then
     $\mathcal{F} = \mathcal{F} \cup (\mathcal{B})$ 
  return
  else
    if  $\iota_\epsilon(\mathcal{B}_\gamma) = 0$ , then
       $\mathcal{F} = \mathcal{F} \cup (\mathcal{B}_\gamma)$ .
    else
      Apply:  $Constr(\mathcal{B}_\gamma, \mathcal{F}, \epsilon)$ .
    end if
  end if
end do

```

Algoritmo 7.2 Indicador de Refinamento: $\iota_\epsilon(\mathcal{B})$

```

 $m = \text{Level}(\mathcal{B}) - 1$ .
if  $|d_{k,\ell}^{(\alpha)m}| \leq \epsilon \forall d_{k,\ell}^{(\alpha)m} \in \mathcal{D}(\mathcal{B})$  then
  return 0      (Não há coeficientes wavelet significativos)
else
  return 1      (Há coeficientes wavelet significativos)
end if

```

Ilustrações Numéricas:

Na Figura 7.14 são apresentadas as curvas de nível e uma representação 3D da função tipo *pulso*

$$f(x, y) = 3 \exp^{-2500.0((x-0.3)^2+(y-0.3)^2)} + \text{sen}(2\pi x) + \text{sen}(2\pi y)$$

em que se percebe a localização da singularidade em torno do ponto (0.3, 0.3).

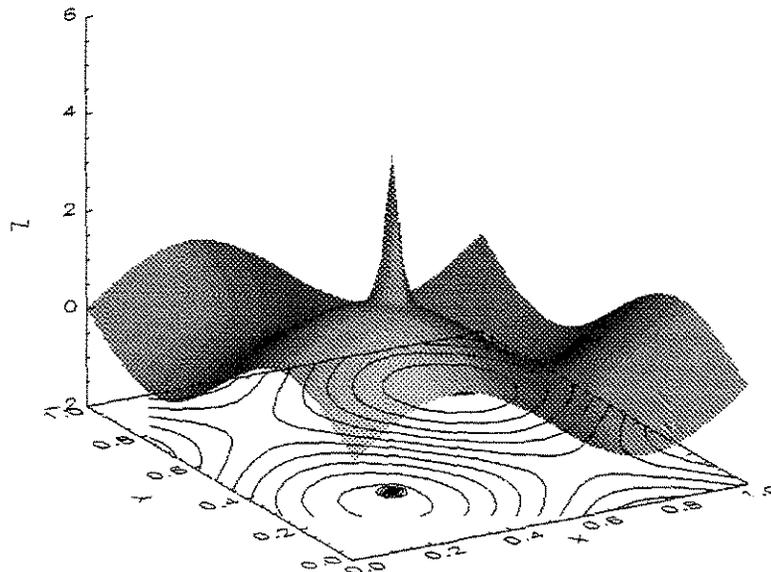


Figura 7.14: Representação da função tipo *pulso* utilizada.

As malhas \mathcal{M}_ϵ adaptativas para essa $f(x, y)$, com $M = 4$ estão representadas na Figura 7.15. Os blocos utilizados possuem $N_x = N_y = 32$. Observa-se nesta figura o posicionamento dos blocos mais refinados na vizinhança da singularidade a medida que ϵ diminui.

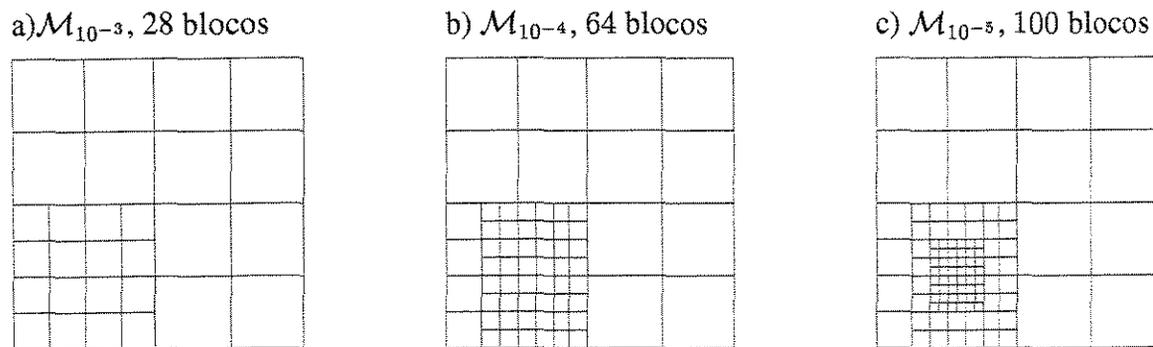


Figura 7.15: Representação de função tipo *pulso* em malhas \mathcal{M}_ϵ para $M = 4$.

A Tabela 7.3 apresenta a economia de pontos alcançada em cada representação adaptável, comparada com a representação em uma malha uniforme \mathcal{X}^ℓ correspondente ao nível mais refinado atingido. Observa-se que o número de blocos aumenta à medida que ϵ diminui. No entanto, a proporção $\#(\mathcal{M}_\epsilon)/\#(\mathcal{X}^\ell)$, entre o número de pontos utilizados nas malhas adaptativas e o total de pontos da malha regular do nível mais refinado diminui drasticamente com a redução de ϵ .

Tabela 7.3: Armazenagem em malhas \mathcal{M}_ϵ (função *pulso*).

ϵ	Número de Blocos	$\#(\mathcal{M}_\epsilon)$	$\#(\mathcal{X}^\ell)$	$\#(\mathcal{M}_\epsilon)/\#(\mathcal{X}^\ell)$
10^{-5}	100	102400	2097152	0.05
10^{-4}	64	65536	262144	0.25
10^{-3}	28	28672	65536	0.43

Nas Figuras 7.16 e 7.17, e na Tabela 7.4 resultados semelhantes são apresentados para a função frente oblíqua

$$f(x, y) = 1 - \tanh(25x + 5(y - 1)). \tag{7.3}$$

Observa-se o posicionamento dos blocos mais refinados em torno da região de variação mais brusca da função. Comparando estes resultados com os do exemplo anterior, é observado que ocorre um melhor desempenho de armazenagem para estruturas pontualmente localizadas, como no caso do *pulso*. Observa-se também que o nível máximo ℓ da função *pulso* é maior que o alcançado na representação da frente oblíqua.

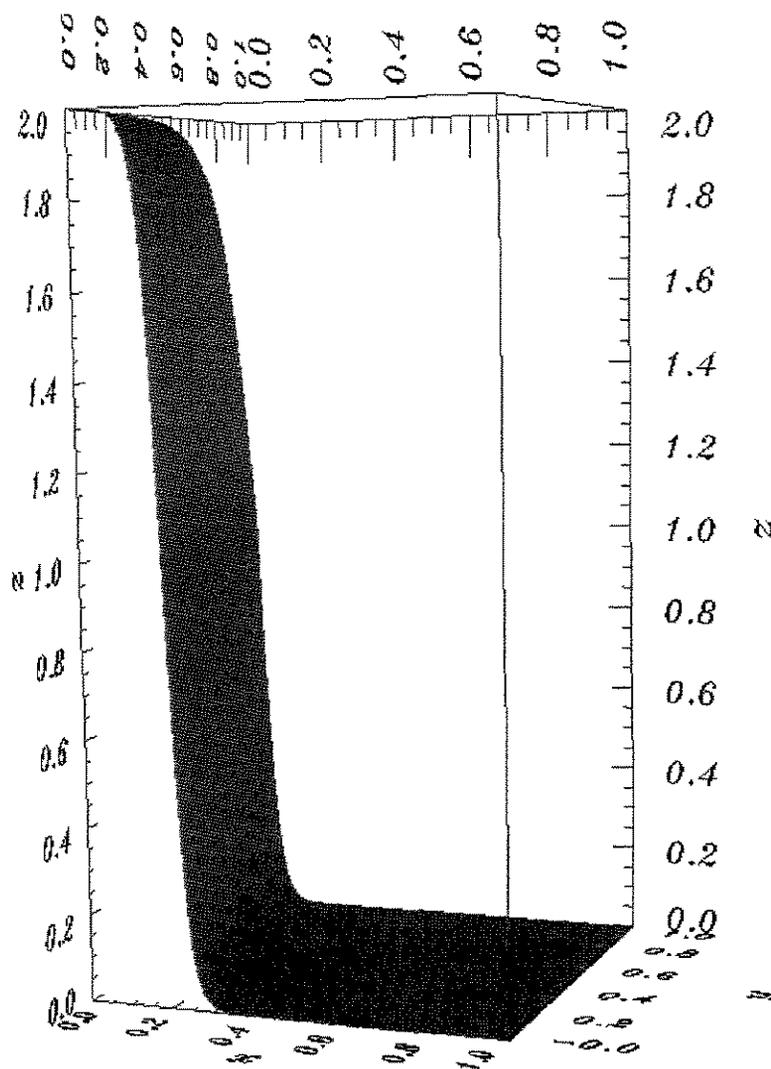
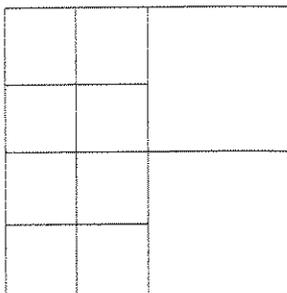
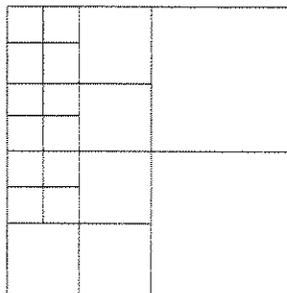


Figura 7.16: Frente-oblíqua (vista lateral).

a) $\mathcal{M}_{10^{-3}}$, com 10 blocos



b) $\mathcal{M}_{10^{-4}}$, com 19 blocos



c) $\mathcal{M}_{10^{-5}}$, com 44 blocos

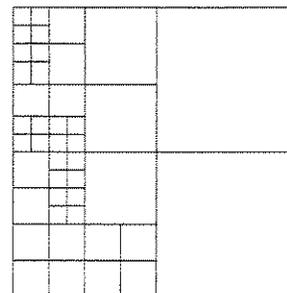


Figura 7.17: Representação de uma função tipo frente oblíqua em malhas \mathcal{M}_ϵ para $M = 4$.

Tabela 7.4: Armazenagem em malhas \mathcal{M}_ϵ (frente oblíqua).

ϵ	Número de Blocos	$\#(\mathcal{M}_\epsilon)$	$\#(\mathcal{X}^j)$	$\#(\mathcal{M}_\epsilon)/\#(\mathcal{X}^j)$
10^{-5}	44	45056	262144	0.17
10^{-4}	19	19456	65536	0.30
10^{-3}	10	10240	16384	0.60
10^{-2}	4	4096	4096	1.00

7.2.2 Extensão e Redução de Malhas

Para a adaptação dinâmica e automática de malhas nas aplicações de interesse neste trabalho, operações de extensão e redução são necessárias. Como as malhas estão associadas a árvores quaternárias, é utilizada a nomenclatura de árvores para definir essas operações.

Se \mathcal{A} e $\tilde{\mathcal{A}}$ são duas árvores tais que $\mathcal{A} \subset \tilde{\mathcal{A}}$, então diz-se que $\tilde{\mathcal{A}}$ é uma extensão de \mathcal{A} , ou que \mathcal{A} é uma redução de $\tilde{\mathcal{A}}$. Em particular, há interesse nas expansões e reduções de árvores como descritas a seguir.

Extensão: $\mathcal{A} \xrightarrow{\mathcal{E}} \tilde{\mathcal{A}}$

Adota-se a extensão

$$\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cup \mathcal{S}(\mathcal{F}(\mathcal{A}))$$

em que para obter a árvore estendida $\tilde{\mathcal{A}}$, agrega-se à estrutura hierárquica de \mathcal{A} uma nova geração de nós associados a cada folha existente em \mathcal{A} .

Na Figura 7.18 está a ilustração de uma malha \mathcal{M} regular por blocos juntamente com sua respectiva malha regular por blocos estendida $\tilde{\mathcal{M}}$. A extensão apresentada é de apenas um nível.

Dada uma representação $(\mathcal{M}, f^{\mathcal{M}})$, os valores funcionais $f^{\tilde{\mathcal{M}}}$ na malha estendida $\tilde{\mathcal{M}}$ podem não estar disponíveis. Neste caso, $f^{\tilde{\mathcal{M}}}$ é obtido por um esquema de refinamento interpolante.

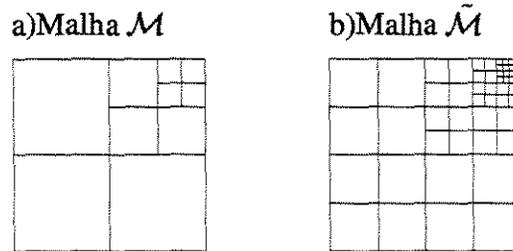


Figura 7.18: Ilustração de (a) uma malha regular por blocos e (b) sua respectiva malha estendida.

Redução: $\tilde{\mathcal{A}} \xrightarrow{\mathcal{T}_\epsilon} \mathcal{A}$

Como na construção de malhas adaptativas por blocos, o operador de redução \mathcal{T}_ϵ é caracterizado pelo indicador $\iota_\epsilon(\mathcal{B})$. Todas as folhas de $\tilde{\mathcal{A}}$ cujos irmãos também são folhas, são testadas. Quando uma folha e todos os seus irmãos tiverem indicadores nulos, esses nós são eliminados da estrutura hierárquica, e, por conseguinte, a mãe deles passa a ser um nó folha. Neste caso, como a estrutura de folhas é alterada, o processo é repetido. O procedimento de redução está descrito no Algoritmo F.1 do Apêndice F.1.

★ Operações Algébricas

Analogamente ao caso unidimensional, as operações de soma e multiplicação entre funções representadas por valores pontuais em malhas adaptativas são simples quando as malhas envolvidas são idênticas. Nesse caso, a operação em questão é efetuada ponto a ponto nos blocos. Caso contrário, primeiro é necessário acrescentar novos blocos nas representações, de tal forma que todas as representações possuam malhas idênticas. Caso os valores funcionais nos novos blocos não forem disponíveis, eles são obtidos por refinamento interpolante. Ou seja, dadas as representações $(\mathcal{M}, f^{\mathcal{M}})$ e $(\mathcal{M}', g^{\mathcal{M}'})$, as funções $z = f + g$ ou $z = f * g$ são representadas por $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{z}^{\tilde{\mathcal{M}}})$ em que $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \cup \mathcal{M}'$, $\tilde{z} = \tilde{f} + \tilde{g}$, ou $\tilde{z} = \tilde{f} * \tilde{g}$, em que \tilde{f} e \tilde{g} são as interpolações de f e g em $\tilde{\mathcal{M}}$ a partir de $f^{\mathcal{M}}$ e $g^{\mathcal{M}'}$.

★ Diferenciação

Outra operação de importância é a diferenciação de funções representadas em malhas adaptativas regulares por blocos. A proposta é usar diferenças finitas com espaçamento uniforme em cada bloco individualmente. Em cada direção, as derivadas parciais são aproximadas por diferenças finitas cujos coeficientes são os mesmos do caso unidimensional. O espaçamento é h_x^j na

direção x e h_y^j na direção y para os blocos do nível j . Por outro lado, é importante manter uma comunicação entre as estruturas representadas na malha. Para garantir a transferência de informação entre blocos vizinhos, nos cálculos das diferenças finitas centradas nos pontos de fronteira, cujos estênceis não estão presentes no bloco, usam-se informações obtidas dos blocos vizinhos. No caso específico de interpolação cúbica ($M = 4$), são necessárias duas linhas e duas colunas extras de dados em cada bloco. Somente no caso em que os pontos da fronteira do bloco coincidirem com a fronteira física da malha é que utilizam-se diferenças finitas não centradas adaptadas à fronteira. Em todos os casos apresentados a seguir são utilizadas na discretização espacial o método diferenças finitas de ordem 4, cujos estênceis são apresentados nas Tabelas 7.1 e 7.2.

Como visto anteriormente, para efetuar as diversas operações em cada bloco, faz-se necessário agregar informações extras tomadas de blocos vizinhos. Para preservar a independência na implementação dessas operações em cada bloco, na prática, trabalha-se com uma estrutura de dados ampliada contendo todas as informações extras necessárias. Para tal fim, os seguintes aspectos são cruciais: (a) a relação de vizinhança entre blocos; e (b) a troca de informação entre blocos vizinhos. Detalhes sobre estes dois assuntos estão no Apêndices F.2 e F.3. Um grande interesse prático na manutenção da independência dos blocos é permitir a utilização de métodos de paralelização.

7.2.3 Problemas de Evolução Temporal

A representação de funções em malhas adaptativas é utilizada na solução numérica de EDPs de evolução

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = L u, & t > 0, (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] & u = u(x, y, t) \\ u(x, y, 0) = u_o(x, y), \end{cases}$$

com condições de contorno periódicas e/ou Neumann e/ou Dirichlet. Supõe-se que no tempo $t_n = n \Delta t$ seja conhecida a representação $(\mathcal{M}^n, \mathcal{U}^n)$, em que \mathcal{U}^n são os valores da solução numérica numa malha adaptável \mathcal{M}^n . No passo seguinte de tempo, a representação $(\mathcal{M}^{n+1}, \mathcal{U}^{n+1})$ é obtida adotando-se os próximos procedimentos.

1. **Extensão:** $(\mathcal{M}^n, \mathcal{U}^n) \xrightarrow{\varepsilon} (\mathcal{M}^{n+1}, \mathcal{U}^{n+1})$,

O processo de extensão está associado à idéia de se obter uma malha estendida \mathcal{M}^{n+1} cujos pontos possam representar melhor a solução no próximo passo de tempo. Ou seja, espera-se que \mathcal{M}^{n+1} contenha \mathcal{M}^n . Como explicado anteriormente, a extensão da malha é obtida pelo acréscimo de um ou mais níveis na árvore associada à malha \mathcal{M}^n . Isto auxilia na prevenção de possíveis deslocamentos das estruturas ou surgimento de estruturas nas escalas

mais finas. O número de níveis acrescentados pode variar com o fenômeno físico modelado pela EDP. Nas aplicações deste trabalho apenas um nível de refinamento é usado, como descrito anteriormente.

2. **Evolução Temporal:** $(\mathcal{M}^{n+}, \mathcal{U}^{n+}) \xrightarrow{\mathcal{D}_a} (\mathcal{M}^{n+}, \check{\mathcal{U}}^{n+1})$.

A partir dos valores \mathcal{U}^{n+} da solução numérica no tempo t_n na malha estendida \mathcal{M}^{n+} , faz-se a evolução temporal usando métodos explícitos, em especial o método de Runge–Kutta na discretização temporal e o esquema de diferenças finitas adaptável por blocos nas derivadas espaciais. O resultado deste procedimento é denotado por $\check{\mathcal{U}}^{n+1}$, que corresponde à solução numérica no tempo t_{n+1} na malha \mathcal{M}^{n+} .

3. **Truncamento:** $(\mathcal{M}^{n+1}, \check{\mathcal{U}}^{n+1}) \xrightarrow{\mathcal{T}_\epsilon} (\mathcal{M}^{n+1}, \mathcal{U}^{n+1})$.

Não necessariamente a malha \mathcal{M}^{n+} é a mais adequada para representar a solução numérica em t_{n+1} . Então, aplica-se o operador de truncamento para adequar a malha \mathcal{M}^{n+} , de forma a se obter uma possível representação mais econômica \mathcal{M}^{n+1} .

Em resumo, a evolução temporal numérica de uma EDP, cuja solução é representada em malhas adaptativas, pode ser esquematizada como

$$\boxed{(\mathcal{M}^n, \mathcal{U}^n) \xrightarrow{\mathcal{E}} (\mathcal{M}^{n+}, \mathcal{U}^{n+}) \xrightarrow{\mathcal{D}_a} (\mathcal{M}^{n+}, \check{\mathcal{U}}^{n+1}) \xrightarrow{\mathcal{T}_\epsilon} (\mathcal{M}^{n+1}, \mathcal{U}^{n+1})}$$

conforme ilustrado no diagrama de fluxo de dados da Figura 7.19. Esse método é implementado no programa WDF em OOP/C++ nesta pesquisa.

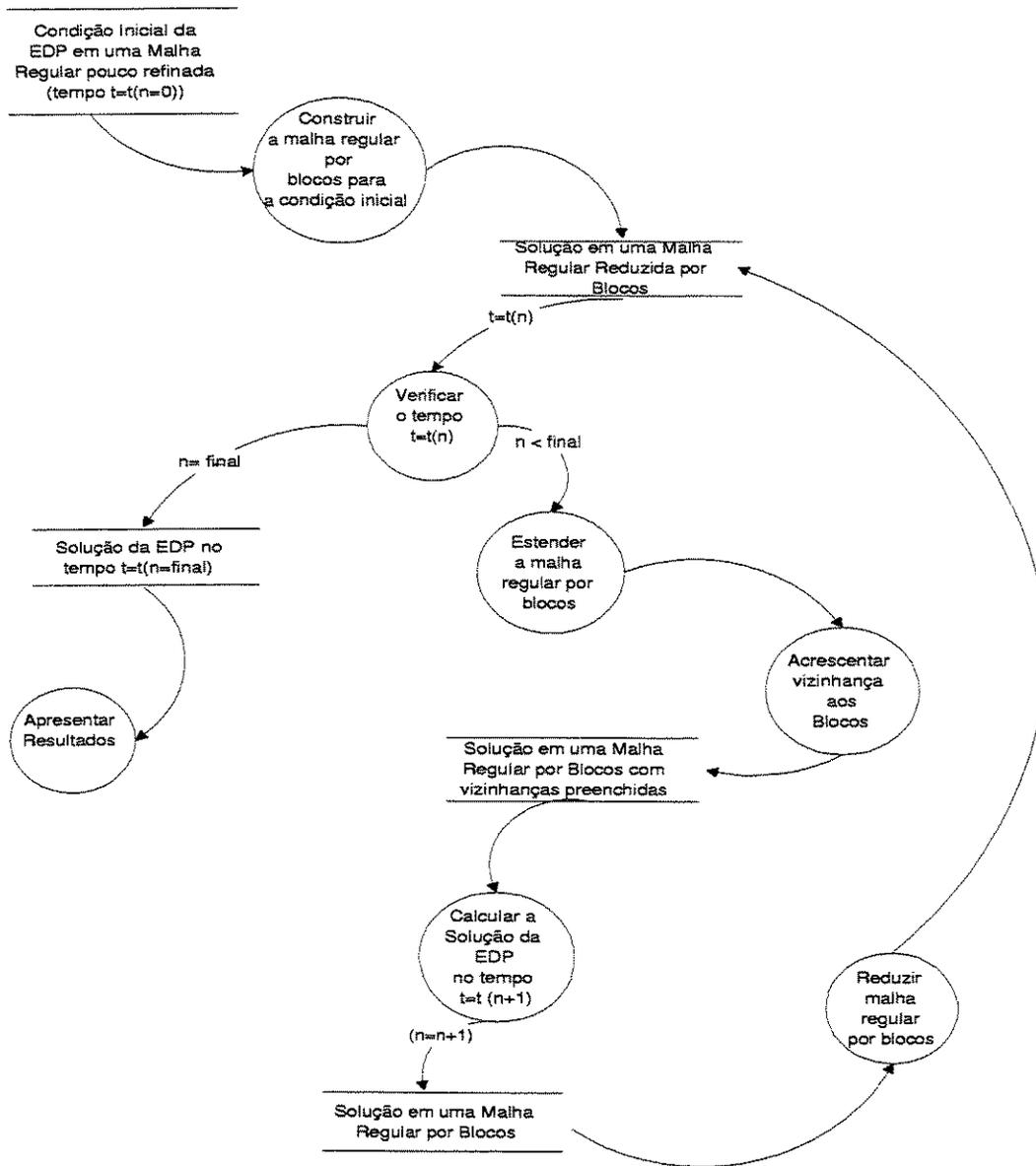


Figura 7.19: Diagrama de fluxo de dados para resolução de uma EDP em uma malha regular por blocos.

7.2.4 Ilustração Numérica: Equação da Advecção Linear

Os resultados numéricos apresentados a seguir são para a Equação da Advecção

$$\frac{\partial \mathcal{U}(x, y, t)}{\partial t} + \left(\frac{\partial \mathcal{U}(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{U}(x, y, t)}{\partial y} \right) = 0, \quad (7.4)$$

para $t \geq 0$ e $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$. As condições de fronteira e inicial adotadas são

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(0, y, t) &= \mathcal{U}(1, y, t), & 0 \leq y \leq 1 \\ \mathcal{U}(x, 0, t) &= \mathcal{U}(x, 1, t), & 0 \leq x \leq 1 \\ \mathcal{U}(x, y, 0) &= \exp^{-300((x-0.5)^2 + (y-0.5)^2)} + 0.2 \sin(2\pi x) + \sin(2\pi y). \end{aligned}$$

A condição inicial está apresentada na Figura 7.20. Na evolução temporal desse modelo, essa estrutura é deslocada ao longo da diagonal do domínio $[0, 1] \times [0, 1]$.

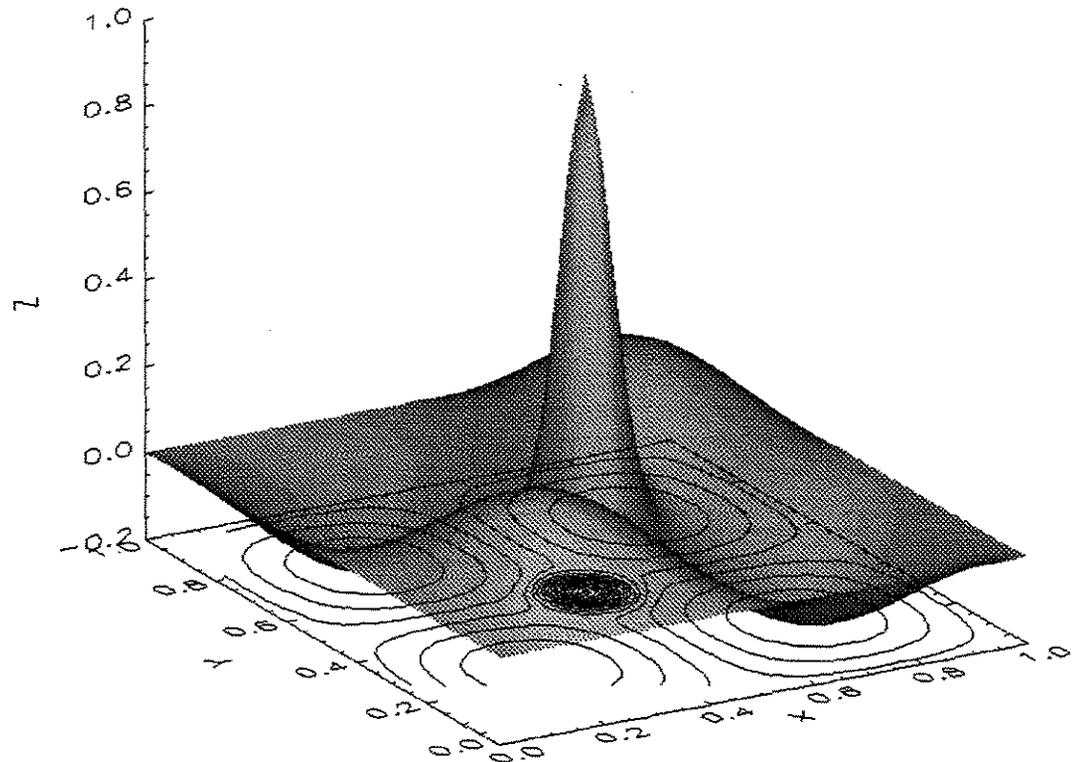


Figura 7.20: Condição inicial do modelo de advecção linear.

As representações em malhas adaptáveis \mathcal{M}_{10-3} para a condição inicial estão apresentadas na Figura 7.21. Os coeficientes wavelets estão associados a interpolações lineares e cúbicas ($M = 2$ e 4). São considerados blocos $N_x \times N_y$, com $N_x = N_y = 32$. Como esperado, observa-se que a malha associada a $M = 2$ possui um número maior de blocos (mais do dobro de blocos do que com $M = 4$). Para $M = 4$, considera-se também $N_x = N_y = 16$. Observa-se que, variando o tamanho dos blocos, o número de blocos resultantes é duas vezes maior com $N_x = N_y = 16$. No entanto o número total de pontos é a metade. Este paradigma número de blocos versus número de pontos requer uma avaliação do ponto de vista de custo computacional. Em termos de armazenamento, a representação com $N_x = N_y = 16$ é mais vantajosa. Por outro lado, as operações de extensão e diferenciação (busca de vizinhos) são mais econômicas no outro caso $N_x = N_y = 32$, que possui número menor de blocos. Portanto, nas simulações a seguir, os parâmetros adotados $M = 4$ e blocos com $N_x = N_y = 32$.

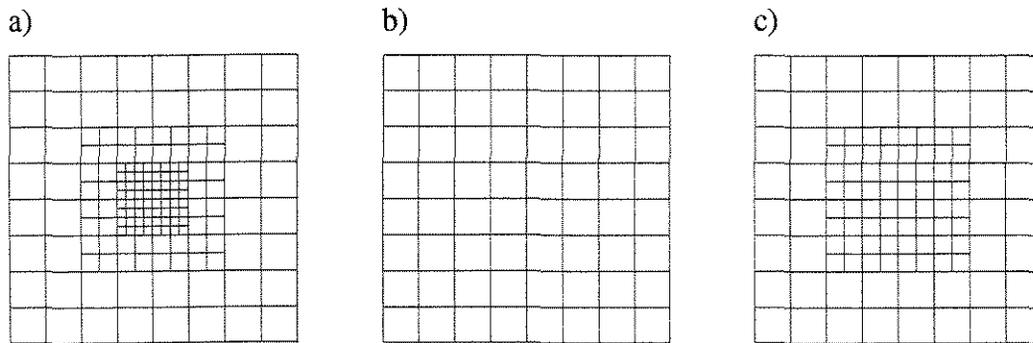
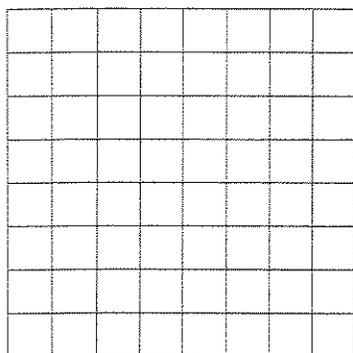


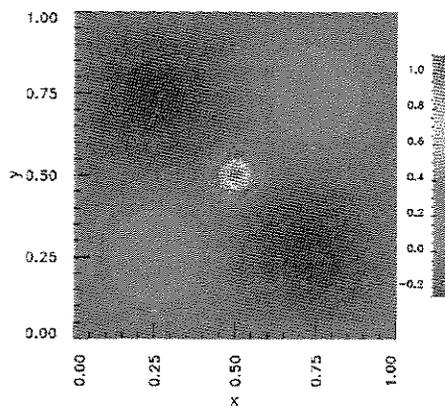
Figura 7.21: Representação da condição inicial em malhas estendidas \mathcal{M}_{10-3} : a) $M = 2$, com 160 blocos 32×32 ; b) $M = 4$, com 64 blocos 32×32 ; e c) $M = 4$, com 112 blocos 16×16 .

Nos experimentos numéricos, à medida que a estrutura inicial é deslocada, ocorre um pequeno alargamento do *spike*. Na Figura 7.22 está exemplificado esse fenômeno numérico para $M = 4$, blocos de 32×32 pontos e um parâmetro de CFL igual 0.05. Na Figura 7.23 está apresentada a variação de pontos na malha adaptável estendida durante a evolução temporal. Observa-se que à medida que o *spike* desloca-se, afastando-se do centro, ao longo da diagonal, há uma redução de 56% do número de pontos (i.e., há uma redução de até 36 blocos).

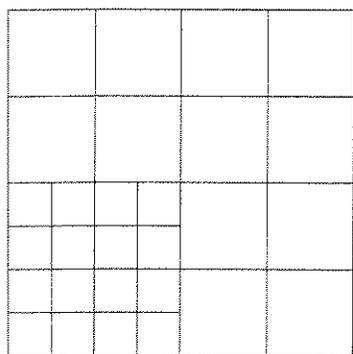
a) $\mathcal{M}_{10^{-3}}, t = 0$



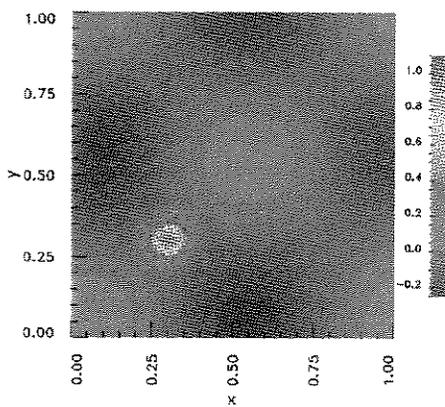
b) $U(x, y, t), t = 0$



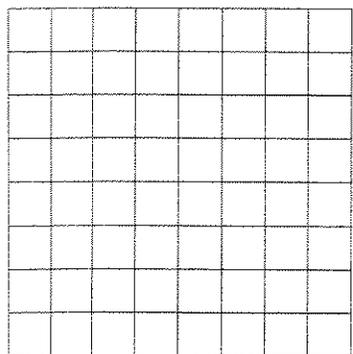
c) $\mathcal{M}_{10^{-3}}, t = 0.2$



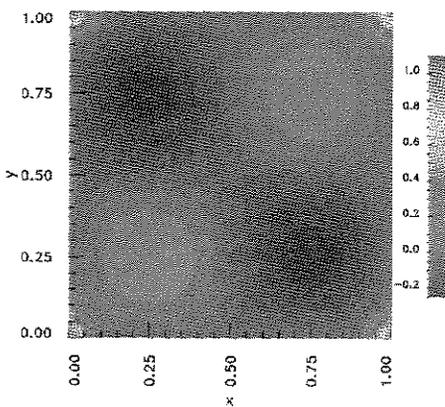
d) $U(x, y, t), t = 0.2$



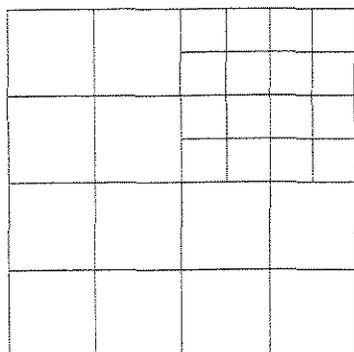
e) $\mathcal{M}_{10^{-3}}, t = 0.5$



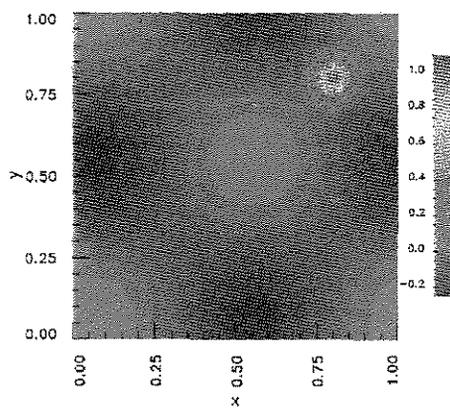
f) $U(x, y, t), t = 0.5$



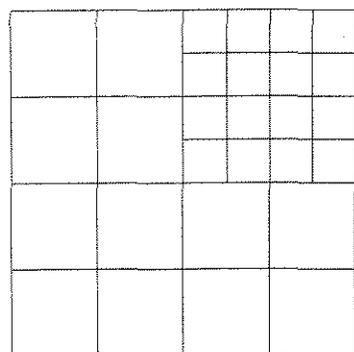
g) $\mathcal{M}_{10^{-3}}, t = 0.7$



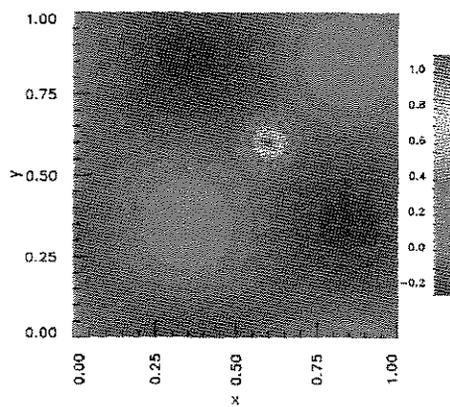
h) $\mathcal{U}(x, y, t), t = 0.7$



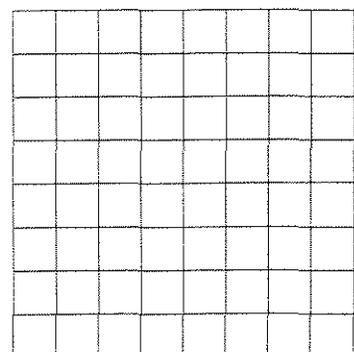
i) $\mathcal{M}_{10^{-3}}, t = 0.9$



j) $\mathcal{U}(x, y, t), t = 0.9$



l) $\mathcal{M}_{10^{-3}}, t = 1.0$



m) $\mathcal{U}(x, y, t), t = 1.0$

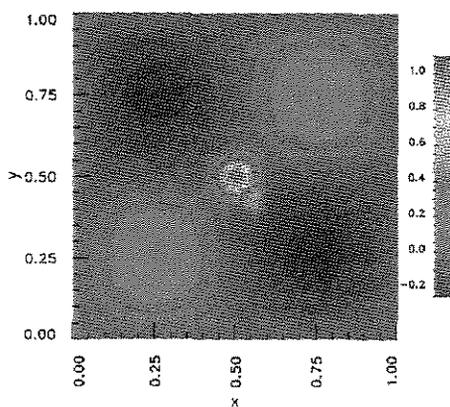


Figura 7.22: Representação de $\mathcal{U}(x, y, t)$ em em malhas adaptativas \mathcal{M}_ϵ , para $\epsilon = 10^{-3}$, $M = 4$ e $N_x = N_y = 32$.

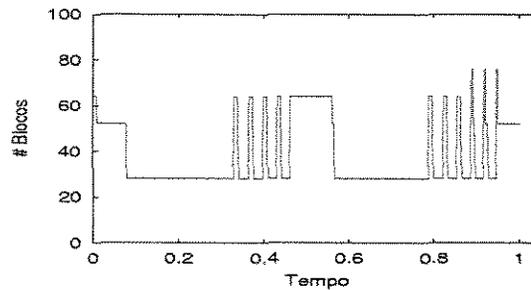


Figura 7.23: Número de blocos utilizados na malha adaptável em cada passo da evolução temporal apresentada na Figura 7.22

7.2.5 Ilustração Numérica: Equação da Advecção–difusão

Os resultados numéricos apresentados a seguir são para a evolução de uma frente oblíqua representada no modelo advecção–difusão

$$\frac{\partial \mathcal{U}(x, y, t)}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{U}(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{U}(x, y, t)}{\partial y} - \frac{\partial^2 \mathcal{U}(x, y, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \mathcal{U}(x, y, t)}{\partial y^2} = f(x, y, t), \quad (7.5)$$

para $t \geq 0$ e $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$. As condições de fronteira, a solução inicial e a forçante $f(x, y, t)$ adotadas são de tal forma que

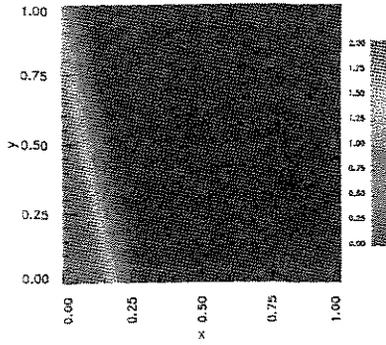
$$\mathcal{U}(x, y, t) = 1 - \tanh(z(x, y, t)),$$

em que $z(x, y, t) = \alpha(x - t) + \beta(y - 1)$ para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$. Nesse caso a forçante $f(x, y, t)$ é representada pela seguinte expressão

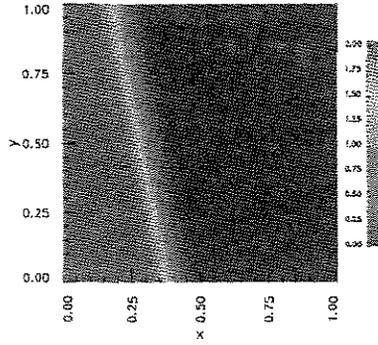
$$f(x, y, t) = -\beta \operatorname{sech}^2(z(x, y, t)) - 2(\alpha^2 + \beta^2) \operatorname{sech}^2(z(x, y, t)) \tanh(z(x, y, t)).$$

A condição inicial para $\alpha = 25$ e $\beta = 5$ representa uma frente oblíqua em relação ao domínio, com inclinação bem acentuada na vertical, como pode ser observado na Figura 7.16, página 126. Na evolução temporal, esta frente propaga-se da esquerda para a direita, atingindo a fronteira direita ($x = 1$) em $t = 0.75$ (Figura 7.24).

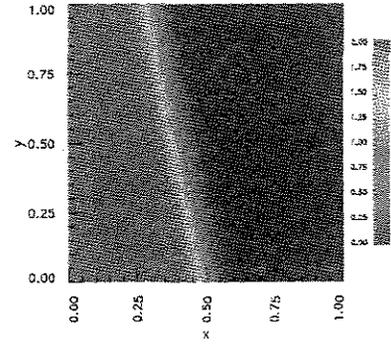
a) $\mathcal{U}(x, y, t), t = 0$



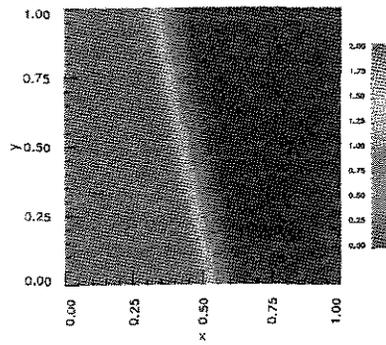
b) $\mathcal{U}(x, y, t), t = 0.2$



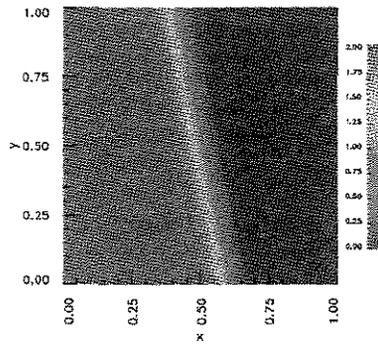
c) $\mathcal{U}(x, y, t), t = 0.3$



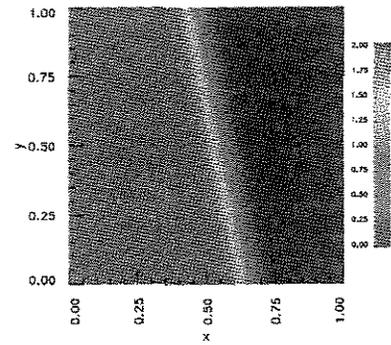
d) $\mathcal{U}(x, y, t), t = 0.35$



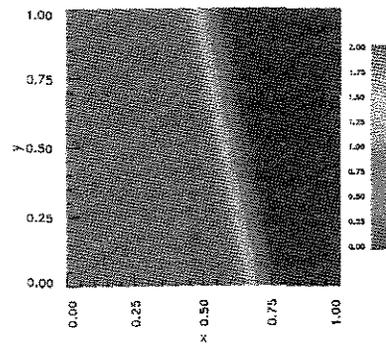
e) $\mathcal{U}(x, y, t), t = 0.4$



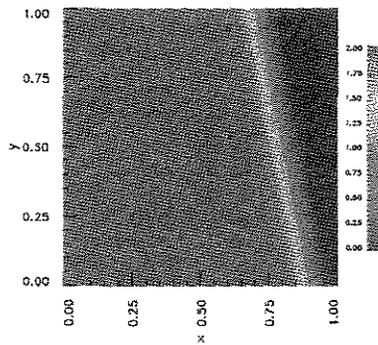
f) $\mathcal{U}(x, y, t), t = 0.45$



g) $\mathcal{U}(x, y, t), t = 0.50$



h) $\mathcal{U}(x, y, t), t = 0.70$



i) $\mathcal{U}(x, y, t), t = 0.75$

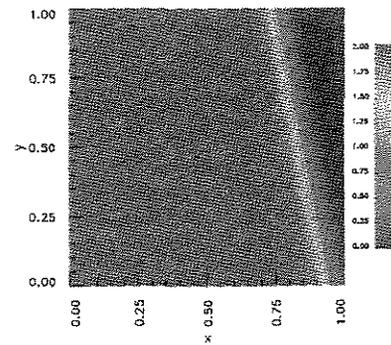


Figura 7.24: Evolução temporal da frente oblíqua.

As malhas \mathcal{M}_{10-3} adaptáveis à condição inicial, obtidas com blocos 32×32 e ordem de interpolação $M = 2$ e 4 , estão apresentadas na Figura 7.25 a) e b). Observa-se que para $M = 2$ a malha associada possui mais do que duas vezes o número de blocos do que para $M = 4$. Fixando $M = 4$, e variando o tamanho dos blocos, observa-se na Figura 7.25 b) e c) que com $N_x = N_y = 16$, não somente aumenta-se o número de blocos, como também o número de pontos da malha. Comportamento semelhante acontece com $\epsilon = 10^{-4}$. Ou seja, para valores de ϵ muito pequenos, o efeito de diminuir o número de blocos não produz, necessariamente, o efeito de reduzir o total de número de pontos.

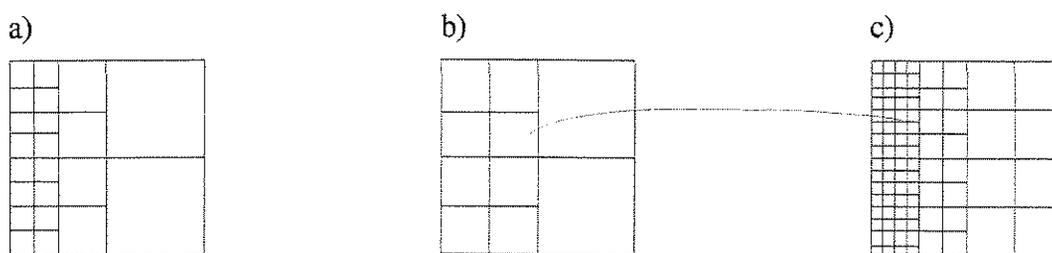


Figura 7.25: Representação da condição inicial em malhas \mathcal{M}_{10-3} : a) $M = 2$, com 22 blocos 32×32 ; b) $M = 4$, com 10 blocos 32×32 e c) $M = 4$, com 88 blocos 16×16 .

Nos cálculos apresentados a seguir são utilizadas representações da malha adaptável \mathcal{M}_{10-2} em que $M = 4$, com $N_x = N_y = 16$, com um parametro de CFL de 0.001. Como no caso da equação da advecção, há uma variação de blocos na malha adaptável durante a evolução temporal. Isso ocorre devido ao deslocamento da frente. Na Figura 7.26 está apresentada a variação de blocos na malha estendida \mathcal{M}^{n+} . Observa-se nessa figura que para $0 \leq t \lesssim 0.3$ a malha \mathcal{M}^{n+} possui 40 blocos, aumentando para 52 blocos entre $0.3 < t \lesssim 0.4$, e para 64 blocos $t \approx 0.4$, a partir desse tempo a malha retorna a 52 blocos entre $0.4 < t \lesssim 0.5$ e a 40 blocos entre $0.5 < t \leq 0.75$. Na Figura 7.27 estão apresentados a disposição desses blocos nessas malhas estendidas.

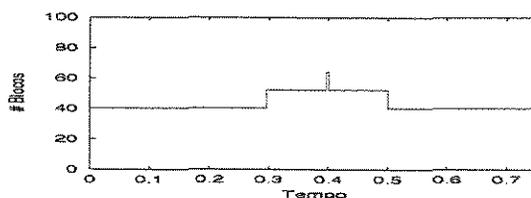


Figura 7.26: Número de blocos utilizados na malha adaptável em cada passo da evolução temporal apresentada na Equação 7.5.

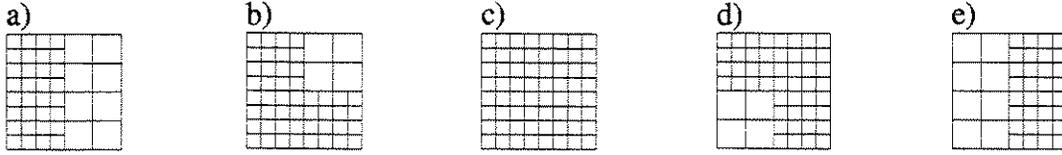


Figura 7.27: Malhas estendidas \mathcal{M}^{n+} , para a evolução temporal da frente oblíqua com blocos 16×16 pontos e $M = 4$: a) $0 \leq t \lesssim 0.3$, com 40 blocos; b) $0.3 < t \lesssim 0.4$, com 52 blocos; c) $t \approx 0.4$, com 64 blocos; d) $0.4 < t \lesssim 0.5$, com 52 blocos; e) $0.5 < t \leq 0.75$, com 40 blocos.

7.2.6 Ilustração Numérica: Equação de Burger

Os resultados apresentados a seguir são para a evolução da Equação de Burger

$$\frac{\partial \mathcal{U}(x, y, t)}{\partial t} + \mathcal{U} \frac{\partial \mathcal{U}(x, y, t)}{\partial x} + \mathcal{U} \frac{\partial \mathcal{U}(x, y, t)}{\partial y} - \mu_x \frac{\partial^2 \mathcal{U}(x, y, t)}{\partial x^2} - \mu_y \frac{\partial^2 \mathcal{U}(x, y, t)}{\partial y^2} = 0, \quad (7.6)$$

para $t \geq 0$, $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ e $\mu_x = \mu_y = 10^{-2}$. As condições de fronteira são periódicas e a condição inicial é expressa por

$$\mathcal{U}(x, y, 0) = \text{sen}(2\pi x) \text{sen}(2\pi y).$$

Este exemplo ilustra a formação de regiões de choque a partir de uma condição inicial suave. As regiões em que a solução \mathcal{U} é negativa irão deslocar-se em direção oposta as regiões em que a solução \mathcal{U} é positiva. Isso irá causar regiões de choque.

Na Figura 7.28 está apresentado a variação de blocos na malha adaptável estendida durante essa evolução temporal, sendo $\epsilon = 10^{-5}$, $N_x = N_y = 32$ blocos e um parâmetro tipo CFL com o valor de 0.05. Observa-se que há um aumento de blocos devido ao início da formação do choque. A partir desse tempo o número máximo de blocos é atingido e a solução é evolvida nessa malha irregular por blocos. Na Figura 7.29 estão apresentadas ilustrações da evolução da solução e de sua malha estendida. Inicialmente a função é suave e a malha estendida possui apenas 16 blocos, como ilustrado na Figura 7.29(a) e (b). Próximo a $t = 0.04$ a solução passa a necessitar mais níveis de refinamento, como mostra a Figura 7.29(c) e (d). E em torno de $t \approx 0.9$ a malha localiza a região em que ocorrerá o choque e se refina nessas regiões, como ilustrado nas Figuras 7.29(e) e (f).

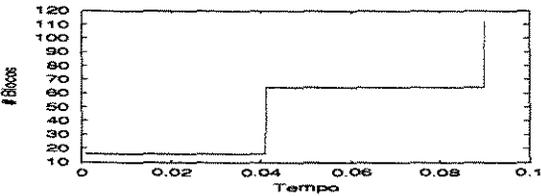
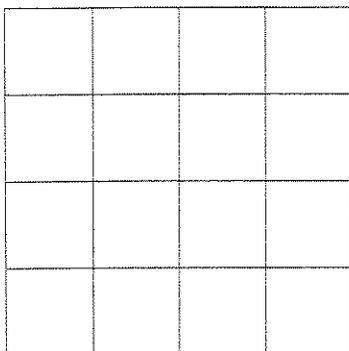
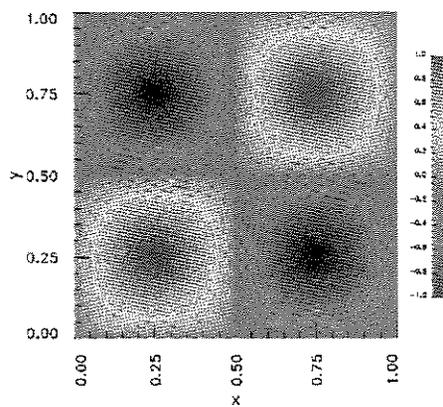


Figura 7.28: Número de blocos utilizados na malha adaptável em cada passo da evolução temporal.

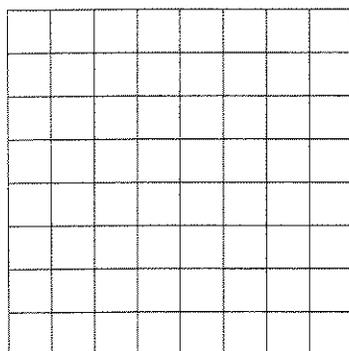
a) $\mathcal{M}_{10^{-5}}, t = 0$



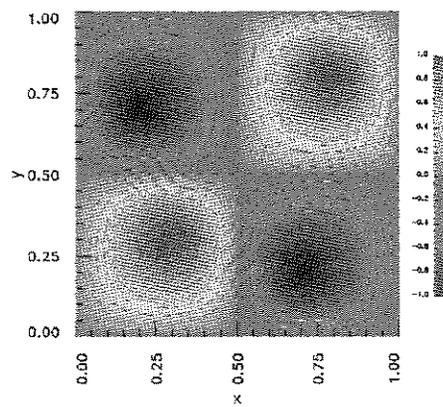
b) $\mathcal{U}(x, y, t), t = 0$



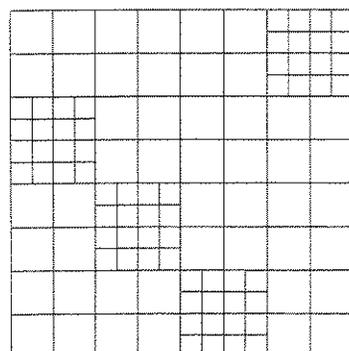
c) $\mathcal{M}_{10^{-5}}, t = 0.05$



d) $\mathcal{U}(x, y, t), t = 0.05$



e) $\mathcal{M}_{10^{-5}}, t = 0.09$



f) $\mathcal{U}(x, y, t), t = 0.09$

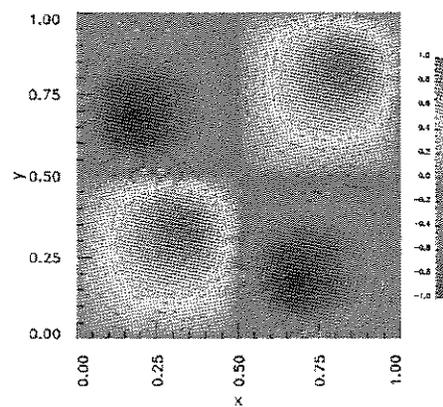


Figura 7.29: Representação de $\mathcal{U}(x, y, t)$ em em malhas adaptativas \mathcal{M}_ϵ , para $\epsilon = 10^{-5}$, $M = 4$, e $N_x = N_y = 32$.

Capítulo 8

Conclusão

O trabalho desta tese foi desenvolvido com o objetivo de formular um método numérico, com adaptabilidade espacial, adequado para a simulação computacional de problemas de equações diferenciais parciais evolutivas, em especial, as de interesse em Meteorologia e áreas afins. Os resultados apresentados nesta pesquisa ressaltam as propriedades de detecção de estruturas singulares e compressão de dados, que são características das representações de funções e operadores em termos de bases wavelet. Nesse sentido, foram avaliados diversos aspectos de aproximações no contexto de splines biortogonais, tanto do ponto de vista teórico (erro de truncamento, efeito da discretização na velocidade de grupo) quanto computacional (representação esparsa de funções e de operadores diferenciais em multinível).

Entre as várias estratégias analisadas, verificou-se que o método híbrido wavelet + diferenças finitas com estrutura de blocos é o mais adequado para alcançar os objetivos almejados. As razões dessa escolha estão associadas à facilidade de alterar, automaticamente, os níveis de refinamento durante a evolução temporal, caso isso seja necessário para uma melhor representação da solução; à versatilidade da formulação, que permite incorporar outros métodos de diferenças finitas; à facilidade de lidar com condições de fronteiras e termos não lineares; às características paralelas do método, em que as estruturas de blocos são unidades independentes; e à estrutura de dados ser mais simples no sentido de busca/armazenamento para as operações numéricas. Um dos resultados relevantes deste trabalho é o desenvolvimento do programa WDF em OOP/C++ que executa esse método. Em princípio, dada uma precisão desejada, é possível fazer simulações com o refinamento requerido pela solução numérica.

Nos casos estudados, adotou-se uma discretização temporal explícita de mesma ordem da discretização espacial. Apesar de ser mais simples de implementação numérica, verificou-se que esse tipo de esquema limita o total aproveitamento do potencial do método adaptativo wavelet

+ diferenças finitas. De fato, por questões de estabilidade, o passo de tempo deve ser escolhido de acordo com a menor escala presente na solução numérica. Portanto, se o problema analisado requer um refinamento intenso da malha em pequenas regiões de variações bruscas, o espaçamento temporal também deverá ser muito pequeno, aumentando o tempo computacional como um todo. Com isso, essa pesquisa também permitiu avaliar a importância do desenvolvimento de esquemas de discretização temporal mais adequados a aproximações em multinível (como o Método de Petrov–Galerin não linear, apresentado no Capítulo 6) que possam ser combinadas com estratégias de adaptabilidade espacial, que será um dos assuntos tratados na continuação deste trabalho.

Perspectivas para Estudos Decorrentes desta Tese

- Aspectos teóricos:
 - Avaliar a possibilidade de se acoplar métodos implícitos, incondicionalmente estáveis no tempo, ao método híbrido wavelet–diferenças finitas proposto.
 - Avaliar a adaptação temporal do tipo Galerkin não-linear com esquemas adaptativos no espaço.
 - Analisar a discretização biortogonal de ordem superior na velocidade de grupo em malhas justapostas (Arakawa, 1997), como a grade C de Arakawa, para os modelos de advecção, gravidade e água rasa estudados.
- Aspectos Computacionais:
 - Otimizar o tempo/armazenagem de dados dos programas gerados nesta tese por meio avaliações de performance de tempo, de chamadas recursivas das funções e de memória utilizada.
 - Implementar outros esquemas de diferenças finitas espaciais no método híbrido wavelet–diferenças finitas.
 - Implementar outras propostas de discretização temporal que se mostrarem mais adequadas.

Referências Bibliográficas

- Arakawa, A. Adjustment mechanisms in atmospheric models. **Journal Meteorology Society Japan**, v. 75, p. 155–179, 1997.
- Cai, Y.; Navon, I. M. Parallel block preconditioning techniques for the numerical simulation of the shallow water flow using finite element methods. **Journal of Computational Physics**, v. 122, n. 1, p. 39–50, 1995.
- Castilho, J. E.; Domingues, M.; Gomes, S. M. **Estimativas do erro de truncamento para operadores diferenciais não lineares usando wavelets biortogonais**. Unicamp, Campinas, SP, 1997. (<http://www.ime.unicamp.br/margaret/meg.html>).
- Chehab, J. P. A nonlinear adaptative multiresolution methods in finite differences with incremental unknowns. **Mathematical Modelling and Numerical Analysis**, v. 29, n. 4, p. 451–475, 1995.
- Chen, M.; Temam, R. Incremental unknowns for solving partial differential equations. **Numer. Math.**, v. 59, p. 255–271, 1991a.
- . Incremental unknowns method I. **Appl. Math. Lett.**, v. 4, n. 3, p. 73–76, 1991b.
- . Incremental unknowns method II. **Appl. Math. Lett.**, v. 4, n. 3, p. 77–80, 1991c.
- Chui, C. **An introduction to wavelets**. Academic Press, 1992. v. 1.
- Cohen, A. Wavelet methods in numerical analysis. In: Ciarlet, P. G.; Lions, J. L. ed. **Handbook of Numerical Analysis**. 1999. v. VII. (to appear).
- Cohen, A.; Daubechies, I.; Vial, P. Wavelets on the interval and fast wavelet transforms. **Applied and Computacional Harmonic Analysis**, v. 1, p. 54–81, 1993.
- Cullen, M.; Morton, K. Analysis of evolutionary error in finite element and other methods. **Journal of Computational Physics**, v. 34, p. 245–267, 1980.

- Cunha, C.; Gomes, S. M. **Petrov–galerkin and collocation methods using biorthogonal spline wavelets**. RP 26/95. Unicamp, Campinas, Brasil, May 1995.
- Daley, R. Normal mode initialization. **Reviews of Geophysics and Space Physics**, v. 9, n. 3, p. 450–468, Aug 1981.
- Daubechies, I. **Ten lectures on wavelets**. Philadelphia, PA: SIAM, 1992. v. 61 of **CBMS-NSF Regional Conference (Series in Applied Mathematics)**, 351 p.
- Deslauriers, G.; Dubuc, S. Interpolation dyadique. In: **Fractals, dimensions non entières et applications**. Paris: Masson, 1987. p. 44–55.
- . Symetric iterative interpolation processes. **Constr. Approximation**, v. 5, n. 1, p. 49–68, 1989.
- DeVore, R. A.; Lorentz, G. G. **Construtive approximation**. Berlin: Springer–Verlage, 1993. *Grundlehren Mathematischen Missenschaften*, 449 p.
- Domingues, M. **Estudo do erro na freqüência de fase e na velocidade de grupo em um modelo discreto biortogonal para as equações de águas rasas**. Unicamp, Campinas, SP, 1997. ([http:// www.ime.unicamp.br/ margaret/meg.html](http://www.ime.unicamp.br/margaret/meg.html)).
- Domingues, M. O. Compression wavelet: Bytes storage for satellite image. In: **SBMet/FLISMet. X Congresso Brasileiro de Meteorologia, VIII Congresso Latino-Americano e Ibérico de Meteorologia**. Centro de Convenções Parlamundi, Brasília, DF: SBMet/FLISMet, 1998a. (CD-Room).
- . Shallow water equations: Accuracy of high order biorthogonal schemes. In: **SBMET/FLISMet. X Congresso Brasileiro de Meteorologia, VIII Congresso Latino-Americano e Ibérico de Meteorologia**. Centro de Convenções Parlamundi, Brasília, DF: SBMET/FLISMet, 1998b. (CD-Room).
- Domingues, M. O.; Gomes, S.; Cortina, E. Biorthogonal wavelets applied to meteosat image compressing. In: *Spie. Wavelet and Applications II*. Orlando, FL: Spie, 1995. v. 2491, p. 726–733.
- Domingues, M. O.; Gomes, S. M. Estudo do erro na freqüência de fase e velocidade de grupo em um modelo discreto biortogonal para as equações de água rasa. In: **SBMAC. XX Congresso Nacional de Matemática Aplicada**. Gramado, RS: SBMAC, 1997. p. pp. 434–435. (Anais).
- Domingues, M. O.; Mendes Jr., O. Transformada wavelet ortogonal: aplicação a localização automática de estruturas convectivas. In: **SBMAC. XXI Congresso Nacional de Matemática Aplicada**. Caxambu, MG: SBMAC, 1998. p. pp. 42. (Anais).

- Donoho, D. L. **Interpolating wavelet transforms.** Department of Statistics. Stanford University, Stanford, Oct 1992.
- . On minimum entropy segmentation. In: Chui, C.; et all ed. **Wavelets theory, algorithms.** Academic Press, 1994. p. 233–269.
- Dubois, T.; Jeanberteau, F.; Temam, R. Incremental unknown, multilevel methods and numerical simulation of turbulence. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 159, p. 123–189, 1998.
- Grammelvedt, A. A Survey of Finite Difference Schemes for Primitive Equations for a Barotropic Fluid. **Monthly Weather Review**, v. 97, p. 384–404, 1969.
- Grotjahn, R.; O'Brien, J. J. Some inaccuracies in finite differencing hyperbolic equations. **Monthly Weather Review**, v. 104, p. 180–194, 1976.
- Hämmerlin, G.; Hoffman, K. H. **Numerical mathematics.** New York: Springer-Verlag, 1991. 422 p.
- He, Y., ed. **Wavelet explorer. new generation signal and image analysis.** Champaign, Illinois: Wolfram Research, 1996. Mathematica, 221 p. (Mathematica).
- Hoffman, J. D. **Numerical methods for engineers and scientists.** McGraw-Hill International editions, 1992. 825 p.
- Holmström, M. **Wavelet based methods for time dependent pdes.** Tese – Uppsala University, 1997.
- Holton, J. R. **An introduction to dynamic meteorology.** 3. ed. San Diego: Academic Press, 1992. v. 48 of **International Geophysics Series**, 507 p.
- Jakob-Chien, R.; Hack, J. J.; Williams, D. L. Spectral transform solutions to the shallow water test set. **Journal of Computational Physics**, v. 119, n. 1, p. 164–187, June 1995.
- Kreiss, H.-O.; Olinger, J. Comparison of accurate methods for the integration of hiperbolic equations. **Tellus**, v. XXIV, p. 199–215, 1972.
- Kress, H.; Olinger, J. Comparison of accurate methods for the integration of hyperbolic equation. **Tellus**, v. 24, p. 199–215, 1972.
- Leith, C. E. Nonlinear normal mode initialization and quasi–geostrophic theory. **Journal of the Atmospheric Sciences**, v. 37, p. 958–968, 1980.
- Lorenz, E. On the existence of slow manifolds. **Journal of Atmospheric Sciences**, v. 43, p. 1547–1557, 1986.

- Mallat, S. Multiresolution approximations and wavelets orthonormal bases. **Trans. of American Mathematical Society**, v. 315, p. 334–351, 1991.
- Meyer, Y. **Ondelettes et operateurs**. Paris: Hermann, 1990.
- Morton, K. W. On the analysis of finite volume methods for evolutionary problems. **SIAM Journal of Numerical Analysis**, v. 35, n. 6, p. 2195–2222, Dec 1998.
- Pedlosky, J. **Geophysical fluid dynamics**. 2. ed. New York: Springer-Verlag, 1987. 710 p.
- Perrier, V.; Basdevant, C. La décomposition en ondelettes périodiques, un outil pour l'analyse de champs inhomogènes. Théorie et algorithmes. **La Recherche Aérospatiale**, v. 3, p. 53–67, May–June 1989.
- Plantevin, F. Wavelet on irregular meshes. **Advances in Computational Mathematics**, v. 4, p. 293–329, 1995.
- Prenter, P. M. **Splines and variational methods**. New York: John Wiley, 1975. 317 p.
- Schoenberg, I. J. Cardinal interpolation and spline functions. **Journal of Approximation Theory**, v. 3, p. 167–203, 1969.
- Silva Dias, P. L.; Schubert, W. H.; DeMaria, M. Large-scale response of tropical atmosphere to transient convection. **Journal of the Atmospheric Sciences**, v. 40, p. 2689–2707, 1983.
- Sotil, J. W. C. **Variedades inerciais aproximadas e métodos de galerkin não linear para as equações de água rasa**. Tese – Instituto de Matemática e Estatística. Universidade de São Paulo, 1999.
- Stappeler, J. FE2DY: A finite element Fortran program for the solution of the shallow-water equations with energy conservation. **Computers Geosciences**, v. 16, n. 5, p. 645–667, 1990.
- Strang, G.; Fix, G. A. **A fourier analysis of finite element method**. Cremonese, 1973. v. Constructive aspects of functional analysis.
- . A fourier analysis of finite element method. **Bulletim American Mathematics Society**, v. 28, p. 288–305, 2 1993.
- Strang, G.; Nguyen, T. **Wavelet and filters bank**. : Wellesley–Cambridge, 1996. 490 p. <http://saigon.ece.wisc.edu/waveweb/tutorials/book.html>.
- Swartz, B.; Wendroff, B. The relative efficiency of finite difference and finite elements methods. I: Hyperbolic problems and splines. **SIAM Journal of Numerical Analysis**, v. 11, p. 979–993, oct 1974.

- Sweldens, W.; Schröder, P. Building your own wavelet at home. In: ACM Siggraph. **Computer Graphics Proceedings**. SIGGRAPH 95, 1995. (<http://cm.bell-labs.com/cm/ms/who/wim/papers/papers.html>).
- Temam, R. Induced trajectories and approximate inertial manifolds. **Mathematical Modelling and Numerical Analysis**, v. 23, p. 541–561, 1989.
- . Inertial manifolds and multigrid methods. **SIAM Journal Numerical Analysis**, v. 21, n. 1, p. 154–178, Jan 1990.
- . General methods for approximating inertial manifolds. Applications to computing. In: Broomhead, D. S.; Iseles, A. ed. **The Dynamics of Numerical and the numerics of the dynamics**. Clarudo Press, 1992. v. 1, p. 1–21.
- Torbjörn, E.; Sundström, A. The computational efficient schemes and boundary conditions for a fine-mesh barotropic model based on shallow water equations. **Tellus**, v. 25, n. 2, p. 132–156, 1973.
- Trefethen, L. N. Group velocity in finite difference schemes. **SIAM Review**, v. 24, n. 2, p. 113–136, 1982.
- Yavneh, I.; Williams, J. C. Robust multigrid solution of the shallow water balance equations. **Journal of Computational Physics**, v. 119, n. 1, p. 1–25, June 1995.

Apêndice A

Convenções e Definições

Neste capítulo são apresentados algumas convenções e definições utilizadas neste trabalho.

A.1 Análise de Fourier

Definição A.1.1 (Convolução) A convolução de duas funções f, g em \mathbb{R}^n é dada por

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y)dy. \quad (\text{A.1})$$

Definição A.1.2 (Transformada de Fourier) A transformada de Fourier e sua inversa, em uma dimensão, são expressas por

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x)dx, \quad (\text{A.2})$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi)d\xi, \quad (\text{A.3})$$

A relação entre uma série e sua série construída a partir da Transformada de Fourier é conhecida como fórmula do somatório de Poisson e é descrita no teorema a seguir.

Teorema A.1.1 (Fórmula do Somatório de Poisson) *Seja $f \in C^\infty$ uma função rapidamente decrescente em \mathbb{R} . Então,*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-ina} f(x + nb) = \frac{1}{|b|} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f} \frac{(2\pi m + a)}{b} e^{ix \frac{(2\pi m + a)}{b}}, \quad (\text{A.4})$$

em que $a, b, x \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$.

A.2 Base de Riesz

Definição A.2.1 (Base de Riesz) *O conjunto de funções $\{\phi(x - k); k \in \mathbb{Z}\}$ é uma base de Riesz para V^0 se e somente se ele gera V^0 , e para todo $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2$ têm-se que*

$$A \sum_k |c_k|^2 \leq \left\| \sum_k c_k \phi(x - k) \right\|^2 \leq B \sum_k |c_k|^2,$$

em que $0 < A, B < \infty$.

A.3 Condição de Strang-Fix

A ordem de precisão de esquemas de aproximação é usualmente definida pela capacidade de esses esquemas possuem de reproduzir polinômios. No caso específico de aproximações em termos das transladadas de uma função básica numa malha regular, isto é caracterizado pela condição de Strang-Fix (Strang e Fix, 1973).

Definição A.3.1 (Condição de Strang-Fix) *Seja p um inteiro não negativo. Uma função f satisfaz a condição de Strang-Fix de ordem p se $\hat{f}(0) \neq 0$ e $\hat{f}(\zeta)$ tem zeros de ordem $p + 1$ em todos os pontos $\zeta = 2\pi k$, $0 \neq k \in \mathbb{Z}$.*

A.4 Funções Splines

Algumas das propriedades básicas das funções B-splines, $\mathcal{B}_\ell(x)$ de interesse neste trabalho são apresentadas nesta seção. Maiores detalhes sobre essas funções podem ser encontrados em Hämmerlin e Hoffman (1991); Chui (1992) e He (1996).

As funções B-splines $B_\ell(x)$ de ordem ℓ , em que $x \in \mathbb{R}$, são construídas a partir da seguinte convolução:

$$B_\ell(x) = (B_0 * B_{\ell-1})(x), \quad \ell \geq 1,$$

em que $B_0(x)$ é a função característica no intervalo $[0, 1]$, i.e.,

$$B_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \in [0, 1), \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para calcular as funções B-splines de ordem superior, utiliza-se a seguinte fórmula:

$$B_\ell(x) = \frac{1}{\ell!} \sum_{k=0}^{\ell+1} (-1)^k \binom{\ell+1}{k} (\max(0, s(x)))^\ell.$$

O primeiro termo entre parênteses da equação anterior representa uma binomial

$$\binom{p}{q} = \frac{p!}{(q-p)! q!},$$

e $s(x)$ é expresso da forma a seguir

$$s(x) = \begin{cases} x + \frac{\ell}{2} - k, & \text{se } \ell \text{ for par,} \\ x + \frac{\ell+1}{2} - k, & \text{se } \ell \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

O suporte das $B_\ell(x)$ é

$$\text{supp } B_\ell = \begin{cases} [-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2} + 1], & \text{se } \ell \text{ for par} \\ [-\frac{\ell+1}{2}, \frac{\ell+1}{2}], & \text{se } \ell \text{ for ímpar} \end{cases}$$

Essas funções são sempre positivas no interior desse suporte e elas são simétricas em torno do ponto zero se ℓ for ímpar e do ponto $1/2$ se ℓ for par.

Pode-se verificar na Figura A.1(b) que a função B_1^k é a conhecida função chapéu, i.e.,

$$B_1(x) = \begin{cases} x+1 & -1 \leq x < 0, \\ x-1 & 0 \leq x < 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Outros exemplos de funções $B_\ell(x)$, para $\ell = 0, \dots, 5$, também são apresentados nessa figura. Nella, também é possível verificar as propriedades descritas anteriormente, como suporte, positividade e simetria.

A transformada de Fourier das funções $B_\ell(x)$ também possui uma fórmula explícita, que é expressa por,

$$\hat{B}_\ell(\xi) = \begin{cases} \left(\frac{\text{sen}\xi/2}{\xi/2}\right)^\ell, & \text{se } \ell \text{ é par,} \\ e^{-i\xi/2} \left(\frac{\text{sen}\xi/2}{\xi/2}\right)^\ell, & \text{se } \ell \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

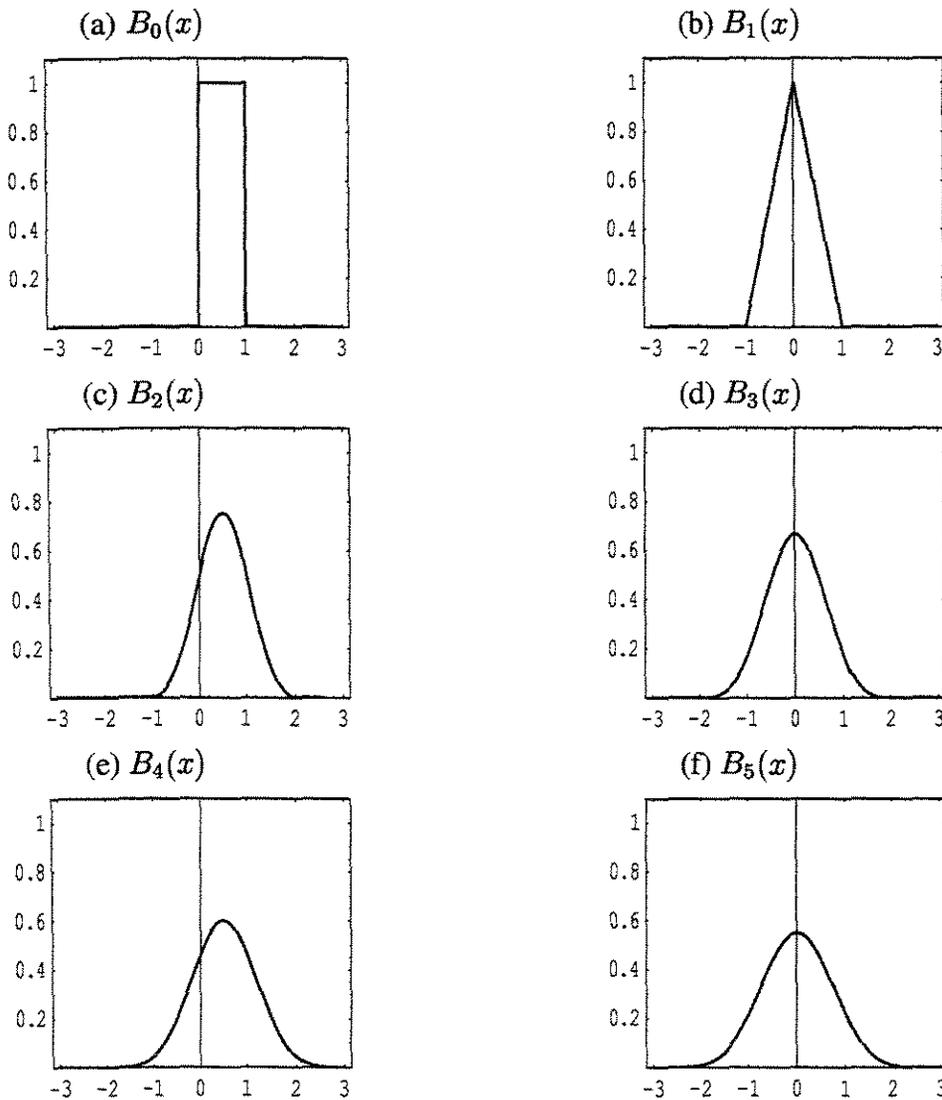


Figura A.1: Funções B-splines $B_\ell(x)$ de ordem $\ell=0, 1, \dots, 5$.

A.5 Erro de Interpolação de Lagrange

O erro de interpolação de Lagrange ((Prenter, 1975, pages:42–44)) é estimado a seguir :

Teorema A.5.1 (Erro de interpolação de Lagrange) *Seja $p(x)$ o polinômio de Lagrange de grau n que interpola f em $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Então:*

- Se $f \in C^{n+1}[a, b]$, o erro de interpolação de Lagrange pode ser estimado por

$$\max_{\eta \in [a, b]} |f(\eta) - p(\eta)| \leq \max_{\xi \in [a, b]} \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{4(n+1)} h^{n+1}, \quad (\text{A.5})$$

para

$$h = \max_{0 \leq i < n} (x_{i+1} - x_i),$$

e $f^{(n)}$ denota a n -ésima derivada de f .

- Se $f \in C^k[a, b]$, $0 \leq k \leq n$, o erro de interpolação de Lagrange pode ser estimado por

$$\max_{\eta \in [a, b]} |f(\eta) - p(\eta)| \leq \left[1 + \left(\frac{2h}{\hat{h}} \right)^n \right] g_k(f, n), \quad (\text{A.6})$$

em que

$$g_k(f, n) = \begin{cases} 6\omega(f, \frac{b-a}{2n}), & k = 0 \\ 3\frac{b-a}{n} \max_{\xi \in [a, b]} |f^{(1)}(\xi)|, & k = 1 \\ 6^k \frac{(k-1)^{k-1}}{(k-1)! n^k} k(b-a)^k \max_{\xi \in [a, b]} |f^{(k)}(\xi)|, & k > 1 \text{ e } n > k - 1 \geq 1 \end{cases}$$

em que $\omega(f, h)$ é o módulo da continuidade definido a seguir.

Definição A.5.1 (Módulo da Continuidade) *Seja f uma função definida em algum intervalo I e seja $h > 0$ um número real. O módulo de continuidade $w(f, h)$ de f com respeito a h nesse intervalo é definido por*

$$w(f, h) = \sup\{|f(x + \hat{h}) - f(x)| : x, x + \hat{h} \in I, |\hat{h}| \leq h\}.$$

Apêndice B

Ilustrações de Funções Biortogonais

Neste capítulo são apresentadas algumas ilustrações de funções escalas e wavelets biortogonais de interesse neste trabalho. Essas ilustrações podem ser obtidas aplicando-se o algoritmo de construção desas funções biortogonais descrito em Daubechies (1992).

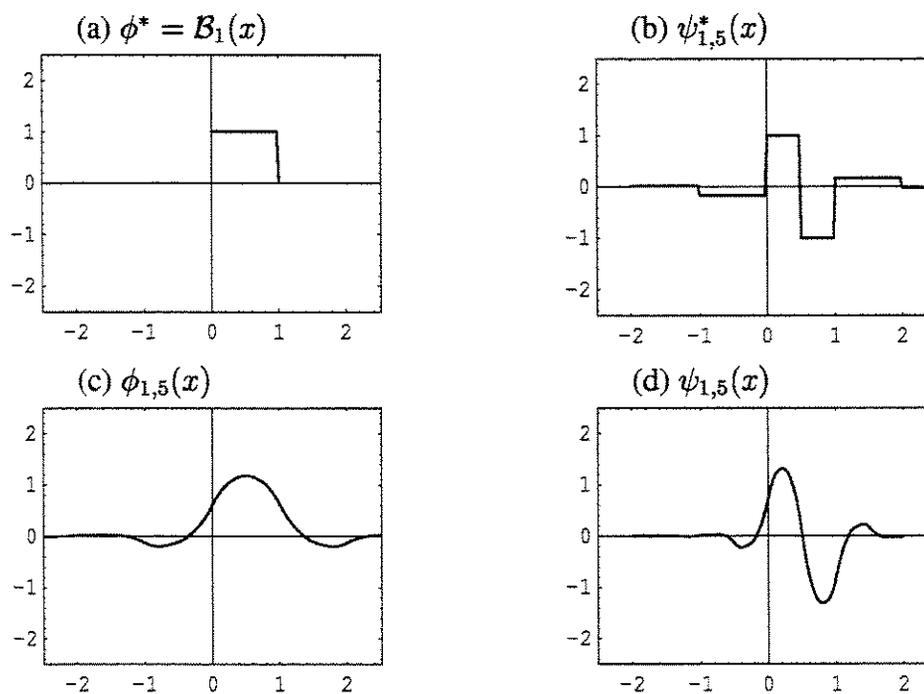


Figura B.1: Funções escalas e wavelets biortogonais splines da família (1, 5).

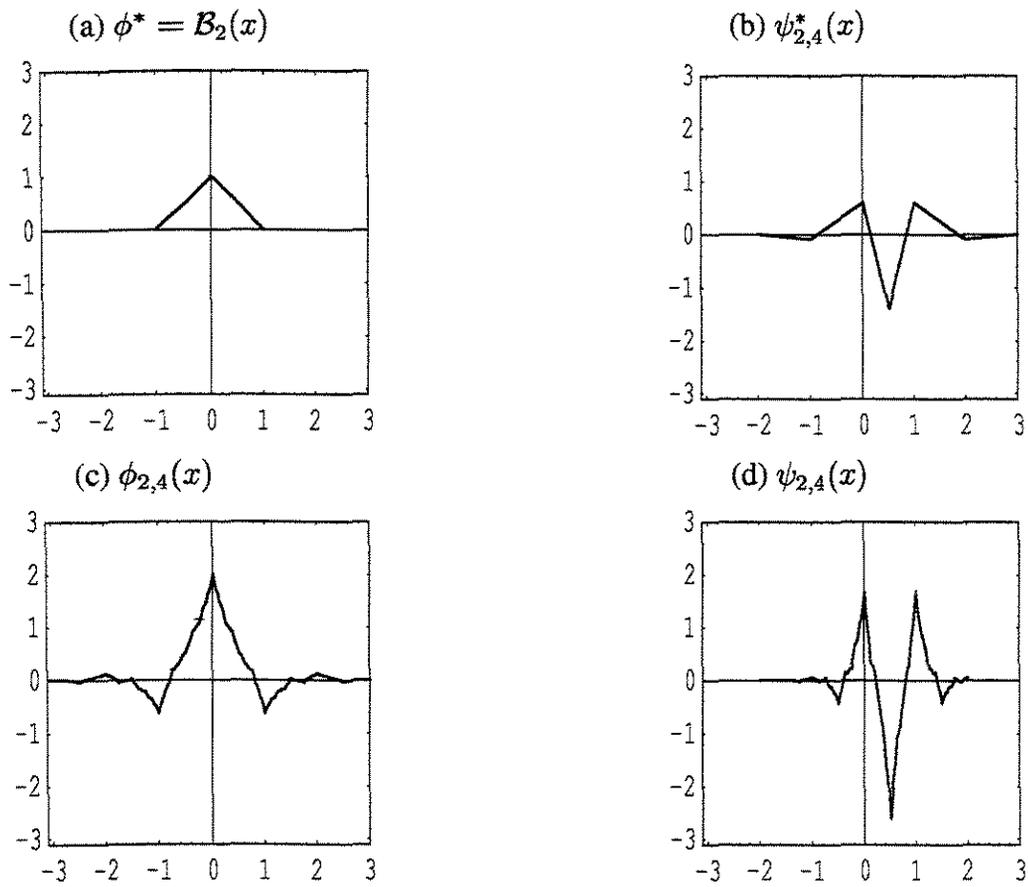


Figura B.2: Funções escalas e wavelets biortogonais splines da família (2, 4).

As funções básicas para o caso bidimensional da família (1, 5) estão apresentadas nas Figuras B.3 e B.4.

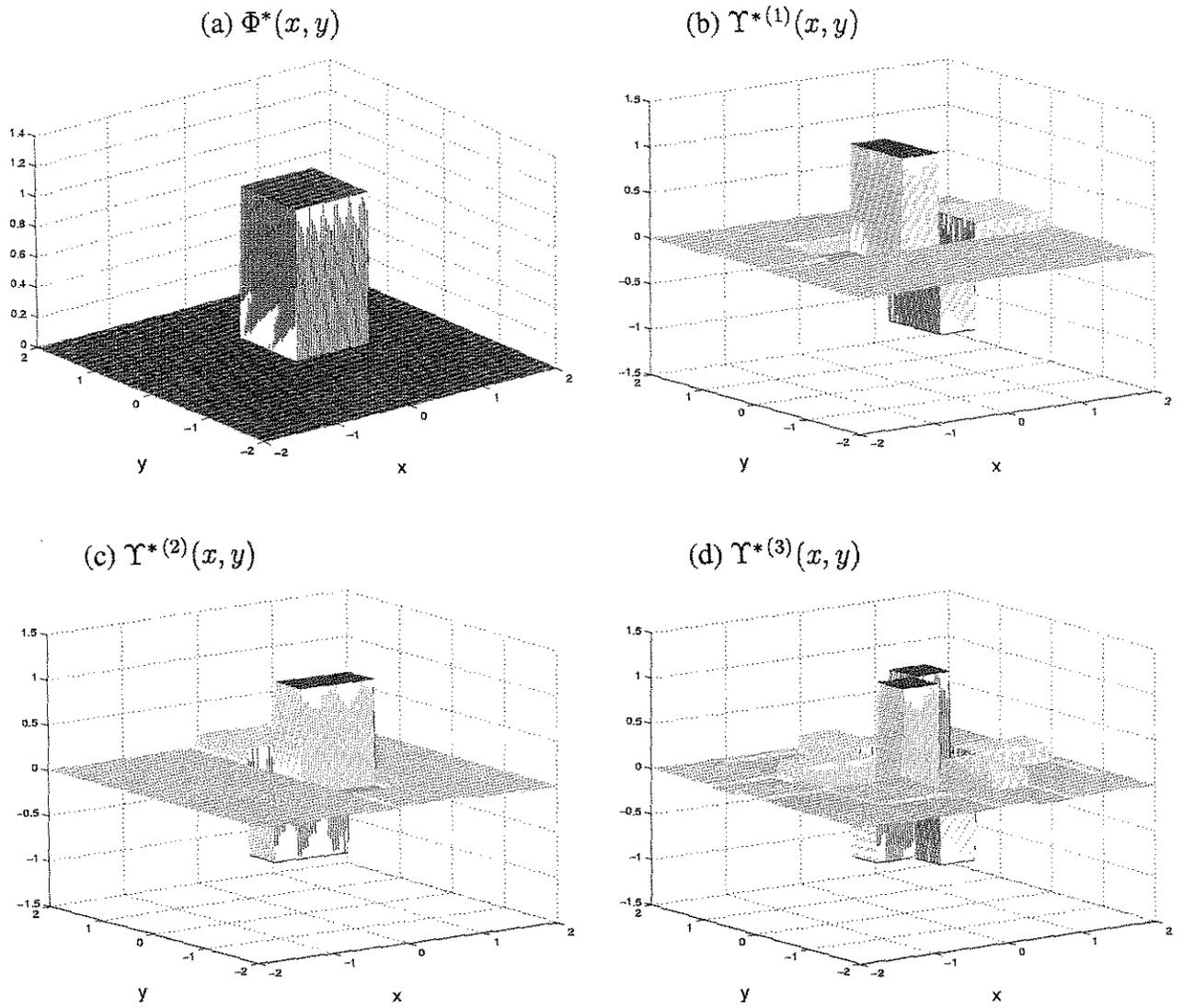


Figura B.3: Funções escala e wavelets bidimensionais – família (1,5).

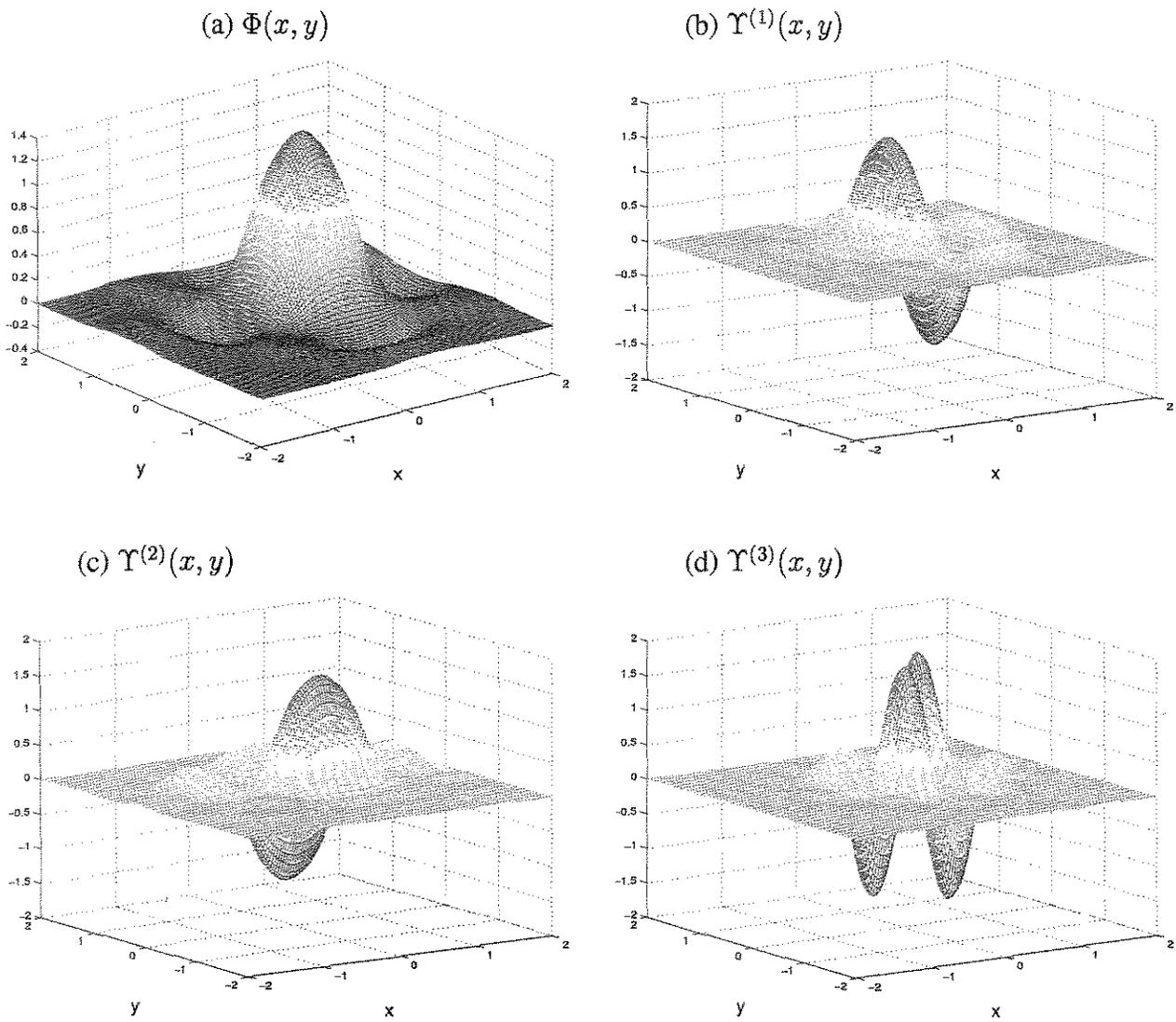


Figura B.4: Funções escala e wavelets bidimensionais duais – família (1,5).

Apêndice C

Demonstrações

C.1 Introdução

Neste capítulo são apresentadas as demonstrações dos teoremas enunciados no Capítulo 4.

O seguinte lema é utilizado freqüentemente no decorrer desse apêndice.

Lema C.1.1 *Seja $\{\phi, \phi^*\}$ uma família de funções splines biortogonais, $\phi = \phi_N$, $\phi^* = \phi_{N, N^*}$. Então,*

$$\hat{\phi}(w)\overline{\hat{\phi}^*(w)} = 1 + \mathcal{O}(w)^{N+N^*}.$$

Demonstração: Utilizando a relação de biortogonalidade obtém-se que:

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_k \hat{\phi}(w + 2\pi k)\overline{\hat{\phi}^*(w + 2\pi k)} \\ &= \hat{\phi}(w)\overline{\hat{\phi}^*(w)} + \sum_{k \neq 0} \hat{\phi}(w + 2\pi k)\overline{\hat{\phi}^*(w + 2\pi k)}. \end{aligned}$$

Esse somatório define uma função C^∞ que se anula, juntamente com todas as derivadas de ordem menor ou igual a $N + N^* - 1$ em $w = 0$. Seja

$$g_k(w) = \hat{\phi}(w + 2\pi k)\overline{\hat{\phi}^*(w + 2\pi k)}.$$

Para $n \leq N + N^* - 1$ tem-se que

$$\frac{d^n g_k}{dz^n}(0) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \hat{\phi}^{(m)}(2\pi k) \overline{\hat{\phi}^{*(n-m)}(2\pi k)} = 0.$$

Isto é uma consequência da condição de Strang-Fix de ϕ , e ϕ^* . Para $m \leq N - 1$, $\hat{\phi}^{(m)}(2\pi k) = 0$. Para $m \geq N$, temos $n - m \leq N^* - 1$, e logo $\hat{\phi}^{*(n-m)}(2\pi k) = 0$. Consequentemente,

$$\hat{\phi}(w) \overline{\hat{\phi}^*(w)} = 1 + \mathcal{O}(w)^{N+N^*}.$$

□

C.2 Teorema 2.4.1

Demonstração do Teorema 2.4.1 Pela propriedade dos momentos nulos para as ψ^* tem-se que $\langle g, \psi_k^{*j} \rangle = 0$ para todo polinômio g de grau $\leq s - 1 \leq p$, i.e., $g \in P_{s-1}$. Portanto, os coeficientes wavelet podem ser expressos como,

$$\begin{aligned} |d_k^j| &= |\langle f, \psi_k^{*j} \rangle| \\ &= |\langle f - g, \psi_k^{*j} \rangle| \\ &= \left| \int (f(x) - g(x)) \psi_k^{*j}(x) dx \right| \\ &\leq \int_{\text{supp } \psi_k^{*j}} |(f(x) - g(x)) \psi_k^{*j}(x)| dx \\ &\leq \max_{x \in \text{supp } \psi_k^{*j}} |f(x) - g(x)| \int_{\text{supp } \psi_k^{*j}} |\psi_k^{*j}(x)| dx. \end{aligned} \tag{C.1}$$

Logo,

$$|d_k^j| \leq \inf_{g \in P_{s-1}} \max_{x \in \text{supp } \psi_k^{*j}} |f(x) - g(x)| \int_{\text{supp } \psi_k^{*j}} |\psi_k^{*j}(x)| dx.$$

A estimativa do erro da melhor aproximação de f em P_{s-1} é apresentada no Teorema de Whitney (DeVore e Lorentz, 1993, pp. 183). Neste caso, tem-se que:

$$\inf_{g \in P_{s-1}} \max_{x \in \text{supp } \psi_k^{*j}} |f(x) - g(x)| \leq C_1 2^{-js} \|f^{(s)}\|_{\infty},$$

em que C_1 é uma constante independente do nível j e da função f . Por outro lado, como $\psi_k^{*j}(x) = 2^{j/2}\psi^*(2^j x - k)$, tem-se que:

$$\begin{aligned} \int_{\text{supp } \psi_k^{*j}} |\psi_k^{*j}(x)| dx &= 2^{j/2} \int_{\text{supp } \psi_k^{*j}} |\psi^*(2^j x - k)| dx \\ &= 2^{-j/2} \int_{\text{supp } \psi^*} |\psi^*(y)| dy \\ &= C_2 2^{-j/2}. \end{aligned} \tag{C.2}$$

Portanto,

$$|d_k^j| \leq C 2^{-j(s+1/2)} \|f^{(s)}\|_\infty, \tag{C.3}$$

em que C é uma constante independente da função f e do nível j .

□

C.3 Teorema 4.4.1

Demonstração do Teorema 4.4.1: Escrevendo $\tilde{\Gamma}(z)$ através da fórmula do somatório de Poisson e utilizando algumas propriedades da transformada de Fourier, obtêm-se que:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}(z) &= \sum_k \Gamma^{(1)}(k) e^{-izk} \\ &= \sum_k e^{-ikz} \int \phi^*(x) \phi'(x+k) dx \\ &= \int \phi^*(x) \sum_k e^{-ikz} \phi'(x+k) dx \\ &= \int \phi^*(x) \sum_k e^{ix(z+2\pi k)} \hat{\phi}'(z+2\pi k) dx \\ &= i \sum_k (z+2\pi k) \hat{\phi}(z+2\pi k) \int \phi^*(x) e^{ix(z+2\pi k)} dx \\ &= i \sum_k (z+2\pi k) \hat{\phi}(z+2\pi k) \overline{\hat{\phi}^*(z+2\pi k)}. \end{aligned} \tag{C.4}$$

Pelas propriedades de simetria pode-se representar

$$\phi(x) = v(x - \alpha), \quad \phi^*(x) = v^*(x - \alpha),$$

em que $\alpha = 0$ para N e N^* pares, e $\alpha = 1/2$ para N e N^* ímpares, onde v e v^* são simétricas e centradas no zero. Com isto tem-se que:

$$\hat{\phi}(\zeta) = e^{-i\zeta\alpha}\hat{v}(\zeta), \quad \hat{\phi}^*(\zeta) = e^{-i\zeta\alpha}\hat{v}^*(\zeta), \quad (\text{C.5})$$

sendo \hat{v} e \hat{v}^* funções reais.

Portanto da Equação C.4 segue que:

$$\tilde{\Gamma}(z) = i \sum_k (z + 2\pi k) \hat{v}(z + 2\pi k) \hat{v}^*(z + 2\pi k). \quad (\text{C.6})$$

Seja

$$g(z; k) = \hat{v}(z + 2\pi k) \hat{v}^*(z + 2\pi k)$$

e

$$f(z; k) = g(z; k) (z + 2\pi k) + g(z; -k) (z - 2\pi k).$$

Então o somatório da Equação C.6 pode ser expresso por:

$$\tilde{\Gamma}(z) = iz\hat{v}(z)\hat{v}^*(z) + i \sum_{k \geq 1} f(z; k).$$

Conseqüentemente,

$$1 - \frac{i}{z} \overline{\tilde{\Gamma}(z)} = [1 - \hat{v}(z)\hat{v}^*(z)] - \frac{1}{z} \sum_{k \geq 1} f(z; k).$$

Como na demonstração do Lema C.1.1 tem-se que

$$\frac{d^n}{dz^n} g(0; k) = 0, \quad \text{para } n \leq N + N^* - 1.$$

Logo,

$$\frac{d^n}{dz^n} f(0; k) = 0, \quad \text{para } 0 \leq n \leq N + N^* - 1.$$

Além disso, como $f(-z; k) = -f(z; k)$, tem-se que

$$\frac{d^n}{dz^n} f(0; k) = 0 \text{ para } n \text{ par.}$$

Isto é válido em particular para $n = N + N^*$. Consequentemente a série $\sum_{k \geq 1} f(z; k)$, que define uma função C^∞ , se anula em $z = 0$, juntamente com todas as derivadas de ordem menor ou igual a $N + N^*$. Portanto, combinando este resultado com o Lema C.1.1, tem-se que

$$1 - \frac{i}{z} \overline{\tilde{\Gamma}(z)} = \mathcal{O}(z)^{N+N^*}.$$

□

C.4 Teorema 4.4.2

Demonstração do Teorema 4.4.2: Essa demonstração é análoga à do Teorema 4.4.1. Considerando v e v^* dados na Equação C.5, tem-se que:

$$|\mathcal{E}(w, z)| = \left| \hat{v}^*(w+z) - \frac{i}{z} \hat{v}^*(w) \hat{v}^*(z) \overline{\tilde{\Gamma}(w, z)} \right|. \quad (\text{C.7})$$

O objetivo desta demonstração é estimar o segundo membro da equação anterior. Escrevendo $\tilde{\Gamma}(w, z)$ utilizando a fórmula do somatório de Poisson, obtêm-se a seguinte expressão:

$$\overline{\tilde{\Gamma}(w, z)} = -i \sum_{m, n} \hat{v}(w + 2\pi m) \hat{v}(z + 2\pi n) \hat{v}^*(z + w + 2\pi(m+n))(z + 2\pi n).$$

O somatório acima pode ser separado da seguinte forma:

$$\overline{\tilde{\Gamma}(w, z)} = \underbrace{\sum_{m=-n} [\quad]}_{\text{(I)}} + \underbrace{\sum_{\substack{m=0 \\ n \neq 0}} [\quad]}_{\text{(II)}} + \underbrace{\sum_{\substack{m \neq 0 \\ n=0}} [\quad]}_{\text{(III)}} + \underbrace{\sum_{\substack{m \neq 0, n \neq 0 \\ m \neq -n}} [\quad]}_{\text{(IV)}},$$

em que,

$$\begin{aligned} \text{(I)} &= -i \hat{v}^*(z+w) \left[\hat{v}(z) \hat{v}(w) z + \sum_{m \neq 0} \hat{v}(z - 2\pi m) \hat{v}(w + 2\pi m) (z - 2\pi m) \right], \\ \text{(II)} &= -i \hat{v}(w) \sum_{n \neq 0} \hat{v}(z + 2\pi n) \hat{v}^*(z + w + 2\pi n) (z + 2\pi n), \\ \text{(III)} &= -i \hat{v}(z) z \sum_{m \neq 0} \hat{v}(w + 2\pi m) \hat{v}^*(z + w + 2\pi m). \\ \text{(IV)} &= -i \sum_{\substack{m, n \neq 0 \\ m \neq -n}} \hat{v}(z + 2\pi n) \hat{v}(w + 2\pi m) \hat{v}^*(z + w + 2\pi(n+m))(z + 2\pi n). \end{aligned}$$

Nos próximos parágrafos são analisados cada um desses termos separadamente.

Termo (I): Seja

$$f(w, z; k) = g(w, z; k)(z - 2\pi k) + g(w, z; -k)(z + 2\pi k),$$

em que $g(w, z; k) = \hat{v}(w + 2\pi k) \hat{v}(z - 2\pi k)$. Então,

$$\frac{-i}{z} \hat{v}^*(w) \hat{v}^*(z) (I) = -\hat{v}^*(w + z) \left[\hat{v}^*(w) \hat{v}(w) \hat{v}^*(z) \hat{v}(z) + \frac{\hat{v}^*(w) \hat{v}^*(w)}{z} \sum_k f(w, z; k) \right].$$

Por um lado, como consequência do Lema C.1.1, tem-se que:

$$\hat{v}^*(w) \hat{v}(w) \hat{v}^*(z) \hat{v}(z) = 1 + \mathcal{O}(w^{N+N^*}) + \mathcal{O}(z^{N+N^*}). \quad (\text{C.8})$$

Pode-se provar que

$$\frac{1}{z} \sum_{k \geq 1} f(w, z; k) = \sum_{n=1}^{2N} \mathcal{O}(w^n z^{2N-n}). \quad (\text{C.9})$$

Assim, tem-se que para $n \leq 2N - 1$

$$\frac{\partial^n}{\partial w^l \partial z^{n-l}} g(0, 0; k) = \hat{v}^{(l)}(2\pi k) \hat{v}^{(n-l)}(2\pi k) = 0, \quad (\text{C.10})$$

pois pela condição de Strang-Fix de v , $\hat{v}^{(l)}(2\pi k) = 0$ para $l \leq N - 1$. Por outro lado, como para $l \geq N$ tem-se que $n - l \leq N - 1$, assim segue que $\hat{v}^{(n-l)}(2\pi k) = 0$. Logo, é possível concluir que

$$\frac{\partial^n}{\partial w^l \partial z^{n-l}} f(0, 0; k) = 0 \quad 0 \leq n \leq 2N - 1.$$

Além disto, como $f(-w, -z; k) = -f(w, z; k)$, tem-se que para todo n par

$$\frac{\partial^n}{\partial w^l \partial z^{n-l}} f(0, 0; k) = 0.$$

Em particular, para $n = 2N$, isto implica na relação expressa pela Equação C.9, se for observado que

$$\frac{\partial^{2N+1}}{\partial w^{2N+1}} f(0, 0; k) = 0.$$

Combinando as Equações C.8 e C.9, e levando em consideração que $2N \geq N + N^*$, obtém-se

$$\frac{-i}{z} \hat{v}^*(w) \hat{v}^*(z)(I) = -\hat{v}^*(w+z) + \mathcal{O}(z)^{N+N^*} + \mathcal{O}(w)^{N+N^*}.$$

Termo (II): Considerando

$$g(w, z; k) = \hat{v}(z + 2\pi k) \hat{v}^*(z + w + 2\pi k)$$

e $f(w, z; k)$ definido como no caso anterior, obtém-se que:

$$(II) = -i \hat{v}(w) \sum_{k \geq 1} f(w, z; k).$$

Novamente, pelas condições de Strang-Fix de v e v^* , para $n \leq N + N^* - 1$, tem-se que

$$\frac{\partial^n}{\partial w^l \partial z^{n-l}} g(0, 0; k) = \sum_{m=0}^{n-l} \binom{n-l}{m} \hat{v}^{(m)}(2\pi k) \hat{v}^{*(n-m)}(2\pi k) = 0.$$

Isto, em combinação com a anti-simetria de $f(w, z; k)$, implica que:

$$\frac{\partial^n}{\partial w^l \partial z^{n-l}} f(0, 0; k) = 0 \quad 0 \leq n \leq N + N^*.$$

Além disto, também tem-se que

$$\frac{\partial^{N+N^*+1} f}{\partial w^{N+N^*+1}}(0, 0; k) = 0.$$

Desta forma é válida a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \frac{-i}{z} \hat{v}^*(w) \hat{v}^*(z)(II) &= -\hat{v}^*(w) \hat{v}^*(z) \hat{v}(w) \sum_k f(w, z; k) \\ &= \sum_{m=0}^{N+N^*} \mathcal{O}(w^m z^{N+N^*-m}). \end{aligned} \tag{C.11}$$

Termo (III): Seja

$$f(w, z; k) = \hat{v}(w + 2\pi k) \hat{v}^*(z + w + 2\pi k),$$

tal que

$$(III) = -i\hat{v}(z)z \sum_{k \neq 0} f(w, z; k).$$

Novamente, pelas condições de Strang-Fix de v e v^* , para $n \leq N + N^* - 1$, tem-se que:

$$\frac{\partial^n f}{\partial w^l \partial z^{n-l}}(0, 0; k) = 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{-i}{z} \hat{v}^*(w) \hat{v}^*(z) (III) &= -\hat{v}^*(w) \hat{v}^*(z) \hat{v}(z) \sum_{k \neq 0} f(w, z; k) \\ &= \sum_{m=0}^{N+N^*} \mathcal{O}(w^m z^{N+N^*-m}). \end{aligned} \quad (C.12)$$

Termo (IV): Seja $a(w, z; \ell, k) = g(w, z; \ell, k) f(w, z; \ell, k)$, em que

$$\begin{aligned} g(w, z; \ell, k) &= \hat{v}(w + 2\pi k) \hat{v}(z + 2\pi \ell), \\ f(w, z; \ell, k) &= \hat{v}^*(z + w + 2\pi(\ell + k)) (z + 2\pi \ell), \end{aligned}$$

de maneira que:

$$(IV) = -i \sum_{\substack{\ell, k \neq 0 \\ \ell \neq -k}} a(w, z; \ell, k).$$

Pelas condições de Strang-Fix de v e v^* tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n}{\partial w^l \partial z^{n-l}} g(0, 0; \ell, k) &= 0, \quad 0 \leq n \leq 2N - 1, \\ \frac{\partial^n}{\partial w^l \partial z^{n-l}} f(0, 0; \ell, k) &= 0, \quad 0 \leq n \leq N^* - 1. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\partial^n a}{\partial w^l \partial z^{n-l}}(0, 0; \ell, k) = 0, \quad 0 \leq n \leq 2N + N^* - 1,$$

o que implica em:

$$\begin{aligned} \frac{-i}{z} \hat{v}^*(w) \hat{v}^*(z) (IV) &= \frac{-1}{z} \hat{v}^*(w) \hat{v}^*(z) \sum_{\substack{\ell, k \neq 0 \\ j \neq -k}} a(w, z; \ell, k) \\ &= \sum_{m=1}^{2N+N^*} \mathcal{O}(w^m z^{2N+N^*-m}). \end{aligned}$$

O termo (IV) é de ordem superior aos termos (I), (II) e (III). Portanto, para finalizar esta demonstração basta substituir as contribuições apenas dos termos (I), (II) e (III), expressas nas Equações C.4, C.11 e C.12, na Equação 4.28.

□

C.5 Teorema 4.4.3

Demonstração do Teorema 4.4.3: Considerando v e v^* como em (C.5) tem-se que

$$|\mathcal{E}(w, z)| = \left| \frac{1}{\tilde{\phi}_\alpha(w+z)} \left[\hat{v}^*(w+z) \overline{\tilde{\phi}_\alpha(w+z)} - \frac{i}{z} \hat{v}^*(w) \hat{v}^*(z) \overline{\tilde{\phi}_\alpha(w)} \overline{\tilde{\beta}_\alpha(z)} \right] \right|.$$

Seja

$$\tilde{g}(w) = \hat{v}^*(w) \overline{\tilde{\phi}_\alpha(w)}$$

e

$$\tilde{f}(z) = \hat{v}^*(z) \overline{\tilde{\phi}_\alpha(z)}$$

tal que

$$|\mathcal{E}(w, z)| = \left| \frac{1}{\tilde{\phi}_\alpha(w+z)} \left[\tilde{g}(w+z) - \frac{i}{z} \tilde{g}(w) \tilde{f}(z) \right] \right|. \quad (C.13)$$

A estimativa do segundo membro da Equação C.13 é avaliada nos próximos parágrafos. Aplicando a fórmula do somatório de Poisson em $\tilde{\phi}_\alpha(w)$ tem-se que:

$$\tilde{\phi}_\alpha(w) = \sum_k \hat{\phi}(w + 2\pi k) e^{i\alpha(w+2\pi k)} = \sum_k \hat{v}(w + 2\pi k).$$

Com isto obtém-se que:

$$\tilde{g}(w) = \hat{v}^*(w)\hat{v}(w) + \hat{v}^*(w) \sum_{k \geq 1} g(w; k),$$

em que $g(w; k) = \hat{v}(w + 2\pi k) + \hat{v}(w - 2\pi k)$. Pela condição de Strang-Fix de v segue que

$$\frac{d^n}{dw^n} g(0; k) = 0, \quad 0 \leq n \leq N - 1.$$

Como $g(-w; k) = g(w; k)$ tem-se que para N ímpar

$$\frac{d^N}{dz^N} g(0; k) = 0.$$

Portanto,

$$\tilde{g}(w) = \begin{cases} 1 + \mathcal{O}(w^N) & \text{para } N \text{ par,} \\ 1 + \mathcal{O}(w^{N+1}) & \text{para } N \text{ ímpar.} \end{cases} \quad (\text{C.14})$$

De forma análoga, é válida a seguinte estimativa:

$$\tilde{g}(w + z) = \begin{cases} 1 + \sum_{m=0}^N \mathcal{O}(w^m z^{N-m}) & \text{para } N \text{ par,} \\ 1 + \sum_{m=0}^{N+1} \mathcal{O}(w^m z^{N+1-m}) & \text{para } N \text{ ímpar.} \end{cases} \quad (\text{C.15})$$

Aplicando a fórmula do somatório de Poisson em $\tilde{\beta}_\alpha(z)$,

$$\tilde{\beta}_\alpha(z) = i \sum_k (z + 2\pi k) \hat{\phi}(z + 2\pi k) e^{i\alpha(z+2\pi k)} = i \sum_k (z + 2\pi k) \hat{v}(z + 2\pi k).$$

Desta forma, segue que

$$\tilde{f}(z) = \hat{v}^*(z)\hat{v}(z)z + \hat{v}^*(z) \sum_{k > 0} f(z; k),$$

em que $f(z; k) = \hat{v}(z + 2\pi k)(z + 2\pi k) + \hat{v}(z - 2\pi k)(z - 2\pi k)$.

Pela condição de Strang-Fix de v segue que

$$\frac{d^n}{dz^n} f(0; k) = 0 \quad 0 \leq n \leq N - 1.$$

Além disso, como $f(-z; k) = -f(z; k)$, temos que para todo N par

$$\frac{d^N}{dz^N} f(0; k) = 0.$$

Conseqüentemente,

$$\frac{-i}{z} \tilde{f}(z) = \begin{cases} -1 + \mathcal{O}(z^N) & \text{para } N \text{ par,} \\ -1 + \mathcal{O}(z^{N-1}) & \text{para } N \text{ ímpar.} \end{cases} \quad (\text{C.16})$$

Portanto, substituindo as Equações C.14, C.15 na Equação C.13 é concluída a demonstração deste teorema. □

A seguir são derivadas as expressões que facilitam o cálculo das funções $\tilde{\phi}_{1/2}(\zeta)$ e $\tilde{\beta}_{1/2}(\zeta)$. Essas funções são necessárias para se estimar $\mathcal{E}(w, z)$, dado na Equação C.13, quando N é ímpar.

Lema C.5.1 *Sejam $\tilde{\phi}_\alpha$ e $\tilde{\beta}_\alpha$ definidas nas Equações 4.18 e 4.33. Então*

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_{1/2}(z) &= 4 [H^+(z/2) \phi^+(z/2) + H^+(z/2 + \pi) \phi^+(z/2 + \pi)], \\ \tilde{\beta}_{1/2}(z) &= i 8 [H^+(z/2) \beta^+(z/2) + H^+(z/2 + \pi) \beta^+(z/2 + \pi)], \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned} H^+(\zeta) &= \sum_{k \geq 1} h_k \cos(k - 1/2)\zeta, \\ \phi^+(\zeta) &= \sum_{k \geq 1} \phi(k) \cos(k - 1/2)\zeta, \\ \beta^+(\zeta) &= \sum_{k \geq 1} \phi'(k) \text{sen}(k - 1/2)\zeta. \end{aligned}$$

Demonstração: Da relação de escala de ϕ tem-se que:

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_{1/2}(w) &= 2 \sum_k \sum_n h_n \phi(2k + 1 - n) e^{-ikw} \\ &= 2 \sum_k \left\{ \sum_n h_{2n} \phi(2k + 1 - 2n) + \sum_n h_{2n+1} \phi(2k - 2n) \right\} e^{-ikw} \\ &= 2 \left(H^0(w) \tilde{\phi}^1(w) + H^1(w) \tilde{\phi}^0 \right), \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

em que

$$\begin{aligned} H^0(w) &= \sum_n h_{2n} e^{-inw}, & H^1(w) &= \sum_n h_{2n+1} e^{-inw}, \\ \tilde{\phi}^0(w) &= \sum_n \phi(2n) e^{-inw}, & \tilde{\phi}^1(w) &= \sum_n \phi(2n+1) e^{-inw}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(w) &= \sum_k \phi(k) e^{-ikw} \\ &= \sum_k \phi(2k) e^{-i2kw} + \sum_k \phi(2k+1) e^{-i(2k+1)w} \\ &= \tilde{\phi}^0(2w) + e^{-iw} \tilde{\phi}^1(2w). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{cases} \tilde{\phi}(w) + \tilde{\phi}(w + \pi) = 2 \tilde{\phi}^0(2w), \\ \tilde{\phi}(w) - \tilde{\phi}(w + \pi) = 2 e^{-iw} \tilde{\phi}^1(2w). \end{cases} \quad (\text{C.18})$$

Analogamente, tem-se que $H(w)$ satisfaz a seguinte equação:

$$\begin{cases} H(w) + H(w + \pi) = 2H^0(2w), \\ H(w) - H(w + \pi) = 2e^{-iw} H^1(2w). \end{cases} \quad (\text{C.19})$$

Substituindo (C.18) e (C.19) em (C.17) tem-se que

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_{1/2}(w) &= \frac{e^{iw/2}}{2} \left\{ [H(w/2) + H(w/2 + \pi)] [\tilde{\phi}_0(w/2) - \tilde{\phi}_0(w/2 + \pi)] + \right. \\ &\quad \left. [H(w/2) - H(w/2 + \pi)] [\tilde{\phi}_0(w/2) + \tilde{\phi}_0(w/2 + \pi)] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

Sendo N ímpar a função $\phi(x)$ é centrada em $1/2$, $\phi(k) = \phi(1 - k)$. Logo,

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(w) &= \sum_k \phi(k) e^{-ikw} \\ &= e^{-iw/2} \sum_{k \geq 1} \phi(k) [e^{-iw(k-1/2)} + e^{-iw(k-1/2)}] \\ &= 2e^{-iw/2} \sum_{k \geq 1} \phi(k) \cos(k - 1/2)w \\ &= 2e^{-iw/2} \phi^+(w). \end{aligned}$$

Assim,

$$\tilde{\phi}(w) \pm \tilde{\phi}(w + \pi) = 2e^{-iw/2}[\phi^+(w) \mp i\phi^+(w + \pi)]. \quad (\text{C.21})$$

H também satisfaz uma relação dada na Equação (C.21) e assim,

$$[\tilde{\phi}(w) + \tilde{\phi}(w + \pi)][H(w) - H(w + \pi)] = 4e^{-iw} [H^+(w)\phi^+(w) + iH^+(w)\phi^+(w + \pi) - iH^+(w + \pi)\phi^+(w) + H^+(w + \pi)\phi^+(w + \pi)],$$

$$[\tilde{\phi}(w) - \tilde{\phi}(w + \pi)][H(w) + H(w + \pi)] = 4e^{-iw} [H^+(w)\phi^+(w) - iH^+(w)\phi^+(w + \pi) + iH^+(w + \pi)\phi^+(w) + H^+(w + \pi)\phi^+(w + \pi)].$$

Portanto, substituindo as relações acima na Equação C.20, tem-se que

$$\tilde{\phi}_{1/2}(z) = 4 [H^+(z/2)\phi^+(z/2) + H^+(z/2 + \pi)\phi^+(z/2 + \pi)].$$

De forma análoga,

$$\tilde{\beta}_{1/2}(z) = 8i [H^+(z/2)\beta^+(z/2) + H^+(z/2 + \pi)\beta^+(z/2 + \pi)],$$

em que

$$\beta^+(z) = \sum_{k \geq 1} \phi'(k) \text{sen}(k - 1/2)z.$$

□

Apêndice D

Teoria de Água Rasa

Neste capítulo faz-se um resumo da teoria de água rasa apresentada em Pedlosky (1987).

D.1 Modelo

O modelo de água rasa é obtido de simplificações nas Equações do Movimento de Newton e na Equação da Continuidade. Essas equações do movimento expressam que a massa por unidade de volume vezes aceleração é igual a soma das seguintes forças: força devido ao gradiente de pressão, forças conservativas que atuam no corpo em questão (tais como a força da gravidade) e da força de atrito. Na sua forma vetorial, essas equações são expressas por:

$$\rho \left[\frac{d\vec{V}}{dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{V} \right] = -\nabla p + \rho \nabla \phi + \mathcal{F}(u), \quad (\text{D.1})$$

em que ρ é a densidade absoluta, $\vec{\Omega}$ é a velocidade do sistema de rotação, $2\vec{\Omega} \times \vec{V}$ é a aceleração de Coriolis, \vec{V} é o vetor velocidade, p é a pressão, $\nabla \phi$ é o gradiente da função potencial das forças conservativas, e \mathcal{F} representa a força de atrito no fluido. Para o ar e a água, em geral, considera-se

$$\mathcal{F} = \mu \nabla^2 \vec{V} + \frac{\mu}{3} \nabla(\nabla \cdot \vec{V}), \quad (\text{D.2})$$

em que μ é a viscosidade molecular, $\nabla^2 \vec{V}$ é o laplaciano do vetor velocidade e $\nabla(\nabla \cdot \vec{V})$ representa o gradiente do divergente do vetor velocidade. Na ausência de fontes ou sumidouros, a condição de conservação de massa é expressa pela Equação da Continuidade,

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{V} = 0, \quad (\text{D.3})$$

em que notação d/dt representa a derivada total ou derivada substantiva, i.e.,

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \quad (\text{D.4})$$

Em particular, é de interesse um modelo de água rasa bidimensional em coordenadas cartesianas em que são consideradas movimentos ondulatórios de um fluido homogêneo, incompressível, limitado numa fronteira inferior e com uma superfície livre na parte superior (condição de fronteira cinemática), e com a escala de profundidade \mathcal{D} muito menor que a escala horizontal \mathcal{L} . Essa última consideração é uma das principais condições que caracterizam a teoria de água rasa.

Na teoria de água rasa é também assumido que a pressão é determinada pela aproximação hidrostática, i.e.,

$$\frac{d\mathbf{p}}{dz} = -\rho \tilde{g} + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

em que \tilde{g} é a componente vertical da aceleração da gravidade, considerada constante, e $\varepsilon = \mathcal{D}/\mathcal{L} \ll 1$.

As condições de homogeneidade e incompressibilidade implicam que ρ é constante e, conseqüentemente, o gradiente de pressão horizontal é independente da altura,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x} &= -\rho \tilde{g} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \\ \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial y} &= -\rho \tilde{g} \frac{\partial \eta}{\partial y}, \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

em que $\eta(x, y, t)$ é a altura do fluido. Então, pelas equações do movimento, é consistente que as velocidades horizontais sejam independentes de z , se inicialmente elas também o forem. Portanto, os termos convectivos da Equação do Movimento são omitidos no modelo em questão.

Simplificando o modelo de água rasa para o oceano ou a atmosfera, $\nabla \check{\phi}$ é simplesmente a componente vertical da aceleração da gravidade $-\tilde{g}\hat{k}$. Projetando o eixo de rotação no eixo vertical z , tem-se que $\vec{\Omega} = f\hat{k}$, em que $f = 2\Omega \text{sen}(\alpha)$ é conhecido como parâmetro de Coriolis, e α é a latitude da Terra.

Por outro lado, como ρ é constante, a Equação da Continuidade pode ser reescrita como:

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (\text{D.6})$$

em que (u, v, w) são as componentes do vetor velocidade nas direções (x, y, z) , conhecidas como componente zonal, componente meridional e vertical do vetor velocidade. Integrando essa equação em relação a z de $z = 0$ até um $z = \eta$ tem-se que:

$$\eta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + w|_{z=\eta} = 0,$$

pois na fronteira inferior $w|_{z=0} = 0$. Como w representa a taxa de variação da superfície livre, e pela condição cinemática na superfície $z = \eta(x, y, t)$, tem-se que $w|_{z=\eta} = d\eta/dt$. Logo,

$$\eta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{d\eta}{dt}. \quad (\text{D.7})$$

Aplicando a Equação D.6 na Equação D.2 tem-se que

$$\mathcal{F} = \mu \nabla^2 \vec{V}. \quad (\text{D.8})$$

Considerando $\mu = 0$ têm-se um dos modelos de água rasa de interesse composto dos seguinte sistema de três equações e três incógnitas (u, v, η) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - f v + \bar{g} \frac{\partial \eta}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + f u + \bar{g} \frac{\partial \eta}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} + \eta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

Os parâmetros adimensionais $\mathcal{L} = 1$, $\mathcal{D} = 0.73333$, gravidade $\bar{g} = 6.0 \times 10^{-5}$, e do parâmetro de Coriolis $f = f_0 + \beta y$, tal que $f_0 = 60$ e $\beta = 54$.

No Capítulo 6 o modelo de água rasa com forçante e dissipativo utilizado é o sistema proposto por Lorenz (1986). Ele consiste do seguinte sistema adimensional (u, v, η) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - v + \bar{g} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \nu \nabla^2 u &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + u + \bar{g} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \nu \nabla^2 v &= 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} + (\eta + g_0) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \kappa \nabla^2 \eta &= F \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

em que $u = u(x, y, t)$, $v = v(x, y, t)$ e $\eta = \eta(x, y, t)$ são os mesmos definidos anteriormente; $F = F(x, y)$ representa uma forçante; ν, κ são constantes de adimensionalização correspondentes ao número de Reynolds; e g_0 é uma constante de adimensionalização correspondente a aceleração gravitacional.

Apêndice E

Método de Petrov–Galerkin Não Linear

O modelo de água rasa descrito na Equação D.10 pode ser discretizado temporalmente por um método semi-implícito de três etapas. Nas Equações D.10 os termos dissipativos e os termos relativos as ondas de gravidade são discretizados implicitamente com uma média temporal num intervalo de dois passos no tempo. Em outras palavras, toma-se a média dos termos lineares nos tempos $t_{n+1} = (n + 1) \Delta t$ e $t_{n-1} = (n - 1) \Delta t$. Os termos não lineares, referentes a ondas de Rossby, são discretizados explicitamente no tempo $t_n = n \Delta t$. A forçante F é considerada independente do tempo. Em resumo utiliza-se a seguinte discretização:

Termos	$\frac{\partial u}{\partial t}$	Linear (L)	Não-Linear (NL)	Forçante F
Discretização	$\frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2\Delta t}$	$\frac{1}{2}(L_{n+1} + L_{n-1})$	$(NL)_n$	F

Aplicando essa discretização têm-se que:

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - \Delta t v_{n+1} + \Delta t \frac{\partial \eta_{n+1}}{\partial x} - \nu \nabla^2 u_{n+1} &= \mathcal{L}_{n-1}^{(1)} + \mathcal{N}_n^{(1)}, \\
 v_{n+1} + \Delta t u_{n+1} + \Delta t \frac{\partial \eta_{n+1}}{\partial y} - \nu \nabla^2 v_{n+1} &= \mathcal{L}_{n-1}^{(2)} + \mathcal{N}_n^{(2)}, \\
 \eta_{n+1} + g_0 \Delta t \left(\frac{\partial u_{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial v_{n+1}}{\partial y} \right) - \kappa \nabla^2 \eta_{n+1} &= \mathcal{L}_{n-1}^{(3)} + \mathcal{N}_n^{(3)},
 \end{aligned} \tag{E.1}$$

em que os termos lineares $\mathcal{L}_{n-1}^{(\ell)}$, no tempo t_{n-1} , para $\ell = 1, 2$ e 3 são

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{n-1}^{(1)} &= u_{n-1} + \Delta t \left(v_{n-1} - \frac{\partial \eta_{n-1}}{\partial x} + \nu \nabla^2 u_{n-1} \right), \\ \mathcal{L}_{n-1}^{(2)} &= v_{n-1} - \Delta t \left(u_{n-1} - \frac{\partial \eta_{n-1}}{\partial y} + \nu \nabla^2 v_{n-1} \right), \\ \mathcal{L}_{n-1}^{(3)} &= \eta_{n-1} + \Delta t \left[g_0 \left(\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial v_{n-1}}{\partial y} \right) - \kappa \nabla^2 \eta_{n-1} \right],\end{aligned}\tag{E.2}$$

e os termos não lineares e a forçante $\mathcal{N}_n^{(\ell)}$, no tempo t_n , para $\ell = 1, 2$ e 3 são

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_n^{(1)} &= -2 \Delta t \left(u_n \frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\partial v_n}{\partial x} \right), \\ \mathcal{N}_n^{(2)} &= -2 \Delta t \left(u_n \frac{\partial v_n}{\partial x} + \frac{\partial v_n}{\partial y} \right), \\ \mathcal{N}_n^{(3)} &= -2 \Delta t \left(\frac{\partial(\eta_n u_n)}{\partial x} + \frac{\partial(\eta_n v_n)}{\partial y} + F \right) \\ &= -2 \Delta t \left(u_n \frac{\partial \eta_n}{\partial x} + \eta_n \frac{\partial u_n}{\partial x} + v_n \frac{\partial \eta_n}{\partial y} + \eta_n \frac{\partial v_n}{\partial y} + F \right).\end{aligned}\tag{E.3}$$

E.1 Discretização Biortogonal em um Único Nível

A seguir são recordadas algumas definições vistas nos capítulos anteriores, considerando uma malha com espaçamento $h = 2^{-j}$.

- Discretização

$$\mathcal{U}_n^h(x, y) = \sum_{k, \ell} \mathcal{U}_{k, \ell, n}^h \phi(h^{-1}x - k) \phi(h^{-1}y - \ell).\tag{E.4}$$

- Discretização das derivadas

$$\frac{\partial^s \mathcal{U}_n}{\partial x^s} \approx (D_x^{(s)} \mathcal{U}^h)_{p,q,n} = h \sum_k \mathcal{U}_{k,q,n}^h \Gamma^{(s)}(p-k), \quad (\text{E.5})$$

$$\frac{\partial^s \mathcal{U}_n}{\partial y^s} \approx (D_y^{(s)} \mathcal{U}^h)_{p,q,n} = h \sum_\ell \mathcal{U}_{p,\ell,n}^h \Gamma^{(s)}(q-\ell),$$

para $s = 1$ e 2 . Recordando, $\Gamma^{(1)}$ é o símbolo da primeira derivada e $\Gamma^{(2)}$ é o símbolo referente a segunda derivada.

- A transformada discreta de Fourier de $\mathcal{U}_{p,q,n}^h$ é expressa por

$$\hat{\mathcal{U}}_n^h(\xi, \vartheta) = \sum_{k,\ell} \mathcal{U}_{k,q,n}^h e^{i(k\xi + \ell\vartheta)}. \quad (\text{E.6})$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\mathcal{U}}_n^h(\xi, \vartheta)}{\partial \xi} &= h \sum_{p,q,k} \mathcal{U}_{k,q,n}^h \Gamma^{(1)}(p-k) e^{i(p\xi + q\vartheta)} \\ &= h \sum_s \Gamma^{(1)}(s) e^{is\xi} \sum_{q,k} \mathcal{U}_{k,q,n}^h e^{i(k\xi + q\vartheta)} \\ &= h \tilde{\Gamma}(\xi) \hat{\mathcal{U}}_n^h(\xi, \vartheta). \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

Modelo de água rasa:

A discretização espacial em um nível, utilizando o método biortogonal descrito nos capítulos anteriores, para o Sistema E.1 é expresso por

$$\begin{aligned} u_{p,q,n+1}^h - \Delta t v_{p,q,n+1}^h + \frac{\Delta t}{h^2} \left[(D_x^{(1),h} \eta^h)_{p,q,n+1} - \nu (D_x^{(2),h} u^h)_{p,q,n+1} - \nu (D_y^{(2),h} u^h)_{p,q,n+1} \right] &= \frac{(I)}{h^2} \\ v_{p,q,n+1}^h + \Delta t u_{p,q,n+1}^h + \frac{\Delta t}{h^2} \left[(D_y^{(1),h} \eta^h)_{p,q,n+1} - \nu (D_x^{(2),h} v^h)_{p,q,n+1} - \nu (D_y^{(2),h} v^h)_{p,q,n+1} \right] &= \frac{(II)}{h^2} \\ \eta_{p,q,n+1}^h + \frac{\Delta t}{h^2} \left\{ g_0 \left[(D_x^{(1),h} u^h)_{p,q,n+1} + (D_y^{(1),h} v^h)_{p,q,n+1} \right] - \kappa \left[(D_x^{(2),h} \eta^h)_{p,q,n+1} + (D_y^{(2),h} \eta^h)_{p,q,n+1} \right] \right\} &= \frac{(III)}{h^2} \end{aligned}$$

em que os termos (I), (II) e (III) representam a soma das discretizações dos termos linear $\mathcal{L}_{n-1}^{(1,2,3)}$ e não lineares $\mathcal{N}_n^{(1,2,3)}$, respectivamente. Esses termos estão descritos nas Equações E.2 E.3. Então,

as discretizações desses termos lineares são

$$\frac{\mathcal{L}_{n-1}^{(1)}}{h^2} \approx u_{p,q,n-1}^h + \Delta t v_{p,q,n-1}^h - \frac{\Delta t}{h^2} \left[\left(D_x^{(1),h} \eta^h \right)_{p,q,n-1} - \nu \left(D_x^{(2),h} u^h \right)_{p,q,n-1} - \nu \left(D_y^{(2),h} u^h \right)_{p,q,n-1} \right],$$

$$\frac{\mathcal{L}_{n-1}^{(2)}}{h^2} \approx v_{p,q,n-1}^h - \Delta t u_{p,q,n-1}^h - \frac{\Delta t}{h^2} \left[\left(D_y^{(1),h} \eta^h \right)_{p,q,n-1} - \nu \left(D_x^{(2),h} v^h \right)_{p,q,n-1} - \nu \left(D_y^{(2),h} v^h \right)_{p,q,n-1} \right],$$

$$\frac{\mathcal{L}_{n-1}^{(3)}}{h^2} \approx \eta_{p,q,n-1}^h - \frac{\Delta t}{h^2} \left\{ g_0 \left[\left(D_x^{(1),h} u^h \right)_{p,q,n-1} + \left(D_y^{(1),h} v^h \right)_{p,q,n-1} \right] - \kappa \left[\left(D_x^{(2),h} \eta^h \right)_{p,q,n-1} + \left(D_y^{(2),h} \eta^h \right)_{p,q,n-1} \right] \right\}$$

enquanto as dos termos não lineares são

$$\frac{\mathcal{N}_n^{(1)}}{h^2} \approx -2 \Delta t \left[\Lambda_x^h(u^h, u^h) + \Lambda_y^h(v^h, u^h) \right]_{p,q,n},$$

$$\frac{\mathcal{N}_n^{(2)}}{h^2} \approx -2 \Delta t \left[\Lambda_x^h(u^h, v^h) + \Lambda_y^h(\eta^h, u^h) \right]_{p,q,n},$$

$$\frac{\mathcal{N}_n^{(3)}}{h^2} \approx -2 \Delta t \left[\Lambda_x^h(u^h, \eta^h) + \Lambda_x^h(\eta^h, u^h) + \Lambda_y^h(v^h, \eta^h) + \Lambda_y^h(\eta^h, v^h) + F^h \right]_{p,q,n},$$

em que

$$\left[\Lambda_x^h(\mathcal{U}^h, \mathcal{V}^h) \right]_{p,q,n} = h \sum_{s', r', k', \ell'} \lambda^{(0)}(\ell', s') \lambda^{(1)}(k', r') \mathcal{U}_{p-k', q-\ell'} \mathcal{V}_{p-r', q-s'},$$

$$\left[\Lambda_y^h(\mathcal{U}^h, \mathcal{V}^h) \right]_{p,q,n} = h \sum_{s', r', k', \ell'} \lambda^{(0)}(k', r') \lambda^{(1)}(\ell', s') \mathcal{U}_{p-k', q-\ell'} \mathcal{V}_{p-r', q-s'},$$

e

$$\lambda^{(0)}(k, \ell) = \int \phi(z+k) \phi(z+\ell) \phi^*(z) dz$$

$$\lambda^{(1)}(k, \ell) = \int \phi(z+k) \frac{\partial \phi(z+\ell)}{\partial z} \phi^*(z) dz$$

Esse sistema discreto pode ser reescrito no espaço de Fourier como

$$\hat{u}_{n+1}^h(\xi, \vartheta) - \Delta t \hat{v}_{n+1}^h(\xi, \vartheta) + \frac{\Delta t}{h} \tilde{\Gamma}^{(1)}(\xi) \hat{\eta}_{n+1}^h(\xi, \vartheta) - \frac{\nu \Delta t}{h^2} \left[\tilde{\Gamma}^{(2)}(\xi) + \tilde{\Gamma}^{(2)}(\vartheta) \right] \hat{u}_{n+1}^h(\xi, \vartheta) = \widehat{(I)}$$

$$\hat{v}_{n+1}^h(\xi, \vartheta) + \Delta t \hat{u}_{n+1}^h(\xi, \vartheta) + \frac{\Delta t}{h} \tilde{\Gamma}^{(1)}(\vartheta) \hat{\eta}_{n+1}^h(\xi, \vartheta) - \frac{\nu \Delta t}{h^2} \left[\tilde{\Gamma}^{(2)}(\xi) + \tilde{\Gamma}^{(2)}(\vartheta) \right] \hat{v}_{n+1}^h(\xi, \vartheta) = \widehat{(II)}$$

$$\hat{\eta}_{n+1}^h(\xi, \vartheta) + \frac{g_0 \Delta t}{h} \left[\tilde{\Gamma}^{(1)}(\xi) \hat{u}_{n+1}^h(\xi, \vartheta) + \tilde{\Gamma}^{(1)}(\vartheta) \hat{v}_{n+1}^h(\xi, \vartheta) \right] - \frac{\kappa \Delta t}{h^2} \left[\tilde{\Gamma}^{(2)}(\xi) + \tilde{\Gamma}^{(2)}(\vartheta) \right] \hat{\eta}_{n+1}^h(\xi, \vartheta) = \widehat{(III)}.$$

em que os termos (\widehat{I}) , (\widehat{II}) e (\widehat{III}) representam a soma das discretizações dos termos linear $\mathcal{L}_{n-1}^{(1,2,3)}$ e não lineares $\mathcal{N}_n^{(1,2,3)}$, no domínio da frequência:

$$\frac{\widehat{\mathcal{L}}_{n-1}^{(1)}}{h^2} \approx \widehat{u}_{n-1}^h(\xi, \vartheta) + \Delta t \widehat{v}_{n-1}^h(\xi, \vartheta) - \frac{\Delta t}{h} \widehat{\Gamma}^{(1)}(\xi) \widehat{\eta}_{n-1}^h(\xi, \vartheta) + \frac{\nu \Delta t}{h^2} [\widehat{\Gamma}^{(2)}(\xi) + \widehat{\Gamma}^{(2)}(\vartheta)] \widehat{u}_{n-1}^h(\xi, \vartheta)$$

$$\frac{\widehat{\mathcal{L}}_{n-1}^{(2)}}{h^2} \approx \widehat{v}_{n-1}^h(\xi, \vartheta) - \Delta t \widehat{u}_{n-1}^h(\xi, \vartheta) - \frac{\Delta t}{h} \widehat{\Gamma}^{(1)}(\vartheta) \widehat{\eta}_{n-1}^h(\xi, \vartheta) + \frac{\nu \Delta t}{h^2} [\widehat{\Gamma}^{(2)}(\xi) + \widehat{\Gamma}^{(2)}(\vartheta)] \widehat{v}_{n-1}^h(\xi, \vartheta)$$

$$\frac{\widehat{\mathcal{L}}_{n-1}^{(3)}}{h^2} \approx \widehat{\eta}_{n-1}^h(\xi, \vartheta) - \frac{g_0 \Delta t}{h} [\widehat{\Gamma}^{(1)}(\xi) \widehat{u}_{n-1}^h(\xi, \vartheta) + \widehat{\Gamma}^{(1)}(\vartheta) \widehat{v}_{n-1}^h(\xi, \vartheta)] + \frac{\kappa \Delta t}{h^2} [\widehat{\Gamma}^{(2)}(\xi) + \widehat{\Gamma}^{(2)}(\vartheta)] \widehat{\eta}_{n-1}^h(\xi, \vartheta).$$

enquanto as dos termos não lineares são

$$\frac{\widehat{\mathcal{N}}_n^{(1)}}{h^2} \approx -2 \Delta t [\widehat{\Lambda}_x^h(u^h, u^h) + \widehat{\Lambda}_y^h(v^h, u^h)]_n(\xi, \vartheta),$$

$$\frac{\mathcal{N}_n^{(2)}}{h^2} \approx -2 \Delta t [\widehat{\Lambda}_x^h(u^h, v^h) + \widehat{\Lambda}_y^h(\eta^h, u^h)]_n(\xi, \vartheta),$$

$$\frac{\mathcal{N}_n^{(3)}}{h^2} \approx -2 \Delta t [\widehat{\Lambda}_x^h(u^h, \eta^h) + \widehat{\Lambda}_x^h(\eta^h, u^h) + \widehat{\Lambda}_y^h(v^h, \eta^h) + \widehat{\Lambda}_y^h(\eta^h, v^h) + F^h]_p(\xi, \vartheta),$$

em que

$$[\widehat{\Lambda}_x^h(\mathcal{U}^h, \mathcal{V}^h)]_n(\xi, \vartheta) = \bar{\lambda}^{(0)}(\vartheta) \bar{\lambda}^{(1)}(\xi) \widehat{\mathcal{U}}_n^h(\xi, \vartheta) \widehat{\mathcal{V}}_n^h(\xi, \vartheta),$$

$$[\widehat{\Lambda}_y^h(\mathcal{U}^h, \mathcal{V}^h)]_n(\xi, \vartheta) = \bar{\lambda}^{(0)}(\xi) \bar{\lambda}^{(1)}(\vartheta) \widehat{\mathcal{U}}_n^h(\xi, \vartheta) \widehat{\mathcal{V}}_n^h(\xi, \vartheta),$$

e

$$\bar{\lambda}^{(0)}(\zeta) = \sum_{s,r} \lambda^{(0)}(s, r) e^{i(s+r)\zeta}$$

$$\bar{\lambda}^{(1)}(\zeta) = \sum_{s,r} \lambda^{(1)}(s, r) e^{i(s+r)\zeta}$$

A solução desse sistema num tempo $n+1$ no domínio da frequência pode ser expressa como

$$A_+ \begin{bmatrix} \widehat{u}_{n+1}^h(\xi, \vartheta) \\ \widehat{v}_{n+1}^h(\xi, \vartheta) \\ \widehat{\eta}_{n+1}^h(\xi, \vartheta) \end{bmatrix} = A_- \begin{bmatrix} \widehat{u}_{n-1}^h(\xi, \vartheta) \\ \widehat{v}_{n-1}^h(\xi, \vartheta) \\ \widehat{\eta}_{n-1}^h(\xi, \vartheta) \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} \widehat{u}_n^h(\xi, \vartheta) \\ \widehat{v}_n^h(\xi, \vartheta) \\ \widehat{\eta}_n^h(\xi, \vartheta) \end{bmatrix} + F,$$

em que

$$A_+ = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\nu \Delta t}{h^2} [\tilde{\Gamma}^{(2)}(\xi) + \tilde{\Gamma}^{(2)}(\vartheta)] & -\Delta t & \frac{\Delta t}{h} \tilde{\Gamma}^{(1)}(\xi) \\ \Delta t & 1 - \frac{\nu \Delta t}{h^2} [\tilde{\Gamma}^{(2)}(\xi) + \tilde{\Gamma}^{(2)}(\vartheta)] & \frac{\Delta t}{h} \tilde{\Gamma}^{(1)}(\vartheta) \\ g_0 \frac{\Delta t}{h} \tilde{\Gamma}^{(1)}(\xi) & g_0 \frac{\Delta t}{h} \tilde{\Gamma}^{(1)}(\vartheta) & 1 - \frac{\kappa \Delta t}{h^2} [\tilde{\Gamma}^{(2)}(\xi) + \tilde{\Gamma}^{(2)}(\vartheta)] \end{bmatrix}$$

$$A_- = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\nu \Delta t}{h^2} [\tilde{\Gamma}^{(2)}(\xi) + \tilde{\Gamma}^{(2)}(\vartheta)] & \Delta t & -\frac{\Delta t}{h} \tilde{\Gamma}^{(1)}(\xi) \\ -\Delta t & 1 + \frac{\nu \Delta t}{h^2} [\tilde{\Gamma}^{(2)}(\xi) + \tilde{\Gamma}^{(2)}(\vartheta)] & -\frac{\Delta t}{h} \tilde{\Gamma}^{(1)}(\vartheta) \\ -g_0 \frac{\Delta t}{h} \tilde{\Gamma}^{(1)}(\xi) & -g_0 \frac{\Delta t}{h} \tilde{\Gamma}^{(1)}(\vartheta) & 1 + \frac{\kappa \Delta t}{h^2} [\tilde{\Gamma}^{(2)}(\xi) + \tilde{\Gamma}^{(2)}(\vartheta)] \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} \hat{u}_n^h(\xi, \vartheta) \tilde{\Lambda}^{(0)}(\vartheta) \tilde{\Lambda}^{(1)}(\xi) & \hat{u}_n^h(\xi, \vartheta) \tilde{\Lambda}^{(0)}(\xi) \tilde{\Lambda}^{(1)}(\vartheta) & 0 \\ \hat{v}_n^h(\xi, \vartheta) \tilde{\Lambda}^{(0)}(\xi) \tilde{\Lambda}^{(1)}(\vartheta) & \hat{v}_n^h(\xi, \vartheta) \tilde{\Lambda}^{(0)}(\vartheta) \tilde{\Lambda}^{(1)}(\xi) & 0 \\ \hat{\eta}_n^h(\xi, \vartheta) \tilde{\Lambda}^{(0)}(\vartheta) \tilde{\Lambda}^{(1)}(\xi) & \hat{\eta}_n^h(\xi, \vartheta) \tilde{\Lambda}^{(0)}(\xi) \tilde{\Lambda}^{(1)}(\vartheta) & \hat{u}_n^h(\xi, \vartheta) \tilde{\Lambda}^{(0)}(\vartheta) \tilde{\Lambda}^{(1)}(\xi) + \hat{v}_n^h(\xi, \vartheta) \tilde{\Lambda}^{(0)}(\xi) \tilde{\Lambda}^{(1)}(\vartheta) \end{bmatrix}$$

Ou, ainda, explicitamente pela expressão apresentada a seguir.

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_{n+1}^h(\xi, \vartheta) \\ \hat{v}_{n+1}^h(\xi, \vartheta) \\ \hat{\eta}_{n+1}^h(\xi, \vartheta) \end{bmatrix} = (A_+)^{-1} A_- \begin{bmatrix} \hat{u}_{n-1}^h(\xi, \vartheta) \\ \hat{v}_{n-1}^h(\xi, \vartheta) \\ \hat{\eta}_{n-1}^h(\xi, \vartheta) \end{bmatrix} + (A_+)^{-1} B \begin{bmatrix} \hat{u}_n^h(\xi, \vartheta) \\ \hat{v}_n^h(\xi, \vartheta) \\ \hat{\eta}_n^h(\xi, \vartheta) \end{bmatrix} + (A_+)^{-1} F,$$

em que

$$(A_+)^{-1} = \frac{1}{\det(A_+)}$$

$$\begin{bmatrix} -g_0 \left[\frac{\delta t}{h} \tilde{\Gamma}^{(1)}(\vartheta) \right]^2 + \Gamma_{\square}(k, \nu; \xi, \vartheta) & \Gamma_{\star}(\xi, \vartheta) - \Delta \Gamma_+(k; \xi, \vartheta) & \frac{(\Delta t)^2}{h} \tilde{\Gamma}^{(1)}(\vartheta) - \frac{\Delta t}{h} \tilde{\Gamma}^{(1)}(\xi) \Gamma_+(\nu; \xi, \vartheta) \\ \Delta t - \Gamma_{\star}(\xi, \vartheta) - \Delta t \Gamma_+(\kappa; \xi, \vartheta) & -g_0 \left[\frac{\delta t}{h} \tilde{\Gamma}^{(1)}(\xi) \right]^2 + \Gamma_{\square}(k, \nu; \xi, \vartheta) & \frac{(\Delta t)^2}{h} \tilde{\Gamma}^{(1)}(\xi) - \frac{\Delta t}{h} \Gamma_+(\nu; \xi, \vartheta) \\ g_0 \left[\frac{(\Delta t)^2}{h} \tilde{\Gamma}^{(1)}(\vartheta) + \frac{(\Delta t)}{h} \tilde{\Gamma}^{(1)}(\xi) \Gamma_+(\nu; \xi, \vartheta) \right] & g_0 \left[\frac{(\Delta t)^2}{h} \tilde{\Gamma}^{(1)}(\xi) - \frac{(\Delta t)}{h} \tilde{\Gamma}^{(1)}(\vartheta) \right] & (\Delta t)^2 + [\Gamma_+(\nu; \xi, \vartheta)]^2 \end{bmatrix}$$

sendo,

$$\begin{aligned}
 \det(A_+) &= (\Delta t)^2 - \frac{\kappa (\Delta t)^3}{h^2} [\tilde{\Gamma}^{(2)}(\xi) + \tilde{\Gamma}^{(2)}(\vartheta)] \\
 &+ g_0 \left(\frac{\Delta t}{h} \right)^2 \left[\frac{\nu \Delta t}{h^2} [\tilde{\Gamma}^{(2)}(\xi) + \tilde{\Gamma}^{(2)}(\vartheta)] - 1 \right] \left[\left(\tilde{\Gamma}^{(1)}(\xi) \right)^2 + \left(\tilde{\Gamma}^{(1)}(\vartheta) \right)^2 \right] - 1 \\
 &+ (\kappa + \nu) \frac{\Delta t}{h^2} [\tilde{\Gamma}^{(2)}(\xi) + \tilde{\Gamma}^{(2)}(\vartheta)] - (\kappa + \nu) \frac{(\Delta t)^2}{h^4} [\tilde{\Gamma}^{(2)}(\xi) + \tilde{\Gamma}^{(2)}(\vartheta)],
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\Gamma_+(z; \xi, \vartheta) &= z \frac{\Delta t}{h^2} \left(\tilde{\Gamma}^{(2)}(\xi) + \tilde{\Gamma}^{(2)}(\vartheta) \right), \\ \Gamma_*(\xi, \vartheta) &= g_0 \frac{(\Delta t)^2}{h^2} \tilde{\Gamma}^{(1)}(\xi) \tilde{\Gamma}^{(1)}(\vartheta), \\ \Gamma_{\square}(z_1, z_2; \xi, \vartheta) &= (\Gamma_+(z_1; \xi, \vartheta) - 1) (\Gamma_+(z_2; \xi, \vartheta) - 1).\end{aligned}$$

Apêndice F

Malhas Adaptativas \mathcal{M}

Neste capítulo são apresentados alguns algoritmos, convenções e resultados auxiliares referentes ao Capítulo 7.

A seguinte notação é adotada:

$$\mathcal{B}_\mu^j = \mathbb{M}(\mathcal{B}_{\mu pq}^{j+1}) \rightarrow \mathcal{B}_\mu^j \text{ é mãe de } \mathcal{B}_{\mu pq}^{j+1}$$

$$\mathcal{B}_{\mu pq}^{j+1} = \mathbb{S}(\mathcal{B}_\mu^j) \rightarrow \mathcal{B}_{\mu pq}^{j+1} \text{ é filho } \mathcal{B}_\mu^j$$

$$\mathcal{B}_{\mu pq}^{j+1} = \mathbb{B}(\mathcal{B}_{\mu p' q'}^{j+1}) \rightarrow \mathcal{B}_{\mu pq}^{j+1} \text{ é irmão de } \mathcal{B}_{\mu p' q'}^{j+1}$$

F.1 Algoritmo de Redução de Árvore

No Algoritmo F.1 são utilizados os seguintes conjuntos temporários: a) \mathcal{F}_1 formado pelos nós folhas que possuem irmãos que não são folhas conjuntamente com as novas folhas introduzidas na estrutura, i.e., aqueles nós cujos filhos foram eliminados; e b) \mathcal{F}^0 composto de todos os nós que não são folhas.

Esse algoritmo não é ótimo, pois alguns blocos podem estar sendo testados desnecessariamente. Por exemplo, se um bloco mantido na estrutura os seus tios não precisariam ser testados, o que não ocorre no algoritmo apresentado. Por outro lado, como é esperado que nas aplicações o processo de redução não envolva muitos níveis, essa deficiência não compromete o desempenho desse algoritmo.

Algoritmo F.1 Redução $\tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{A}$

```

flag = 1
 $\mathcal{F}(\mathcal{A}) = \emptyset$ 
 $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}(\tilde{\mathcal{A}})$ 
while flag = 1 do
  flag = 0
   $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$ 
   $\mathcal{F}_1 = \emptyset$ 
  for all  $\mathcal{B} \in \mathcal{F}$  do
    if  $(\mathbb{B}(\mathcal{B}) \cap \mathcal{F}^c) \neq \emptyset$  then
       $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_1 \cup (\mathbb{B}(\mathcal{B}) \cap \mathcal{F})$ 
       $\mathcal{F} = \mathcal{F} \setminus (\mathbb{B}(\mathcal{B}) \cap \mathcal{F})$ 
    else if  $\nu_\epsilon(B') = 0, \forall B' \in \mathbb{B}(\mathcal{B})$  then
      flag = 1
       $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_1 \cup \mathbb{M}(\mathcal{B})$ 
       $\mathcal{F} = \mathcal{F} \setminus \mathbb{B}(\mathcal{B})$ 
    else
       $\mathcal{F}(\mathcal{A}) = \mathcal{F}(\mathcal{A}) \cup \mathbb{B}(\mathcal{B})$ 
       $\mathcal{F} = \mathcal{F} \setminus \mathbb{B}(\mathcal{B})$ 
    end if
  end for
end while
 $\mathcal{F}(\mathcal{A}) = \mathcal{F}(\mathcal{A}) \cup \mathcal{F}_1$ 

```

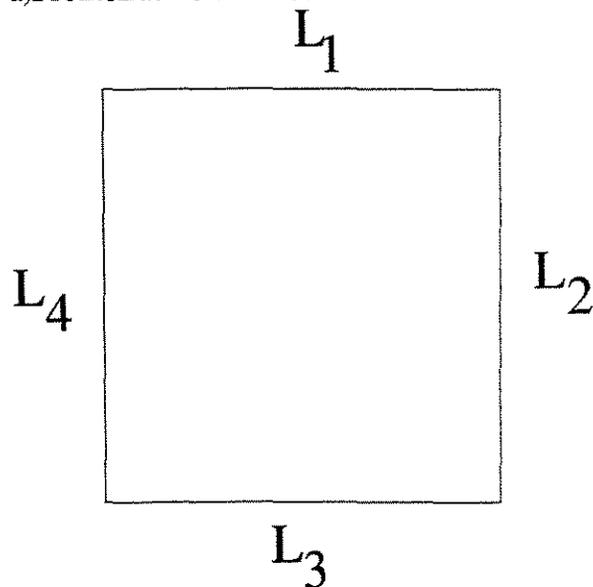
F.2 Relações de Vizinhança em Malhas \mathcal{M}

Para definir as relações de vizinhança a primeiro é necessário definir dois conceitos. O primeiro deles é o conceito de fronteiras de um bloco B_μ^j . Definem-se as fronteiras de B_μ^j como as coleções de pontos laterais L_1, L_2, L_3, L_4 , tais que:

$$\begin{aligned}
 \text{Fronteira Superior } L_1 &= \{\mu + (k h_x^j, N_y h_y^j), \text{ para } k = 0, \dots, N_x\}, \\
 \text{Fronteira Esquerda } L_2 &= \{\mu + (N_x h_x^j, \ell h_y^j), \text{ para } \ell = 0, \dots, N_y\}, \\
 \text{Fronteira Inferior } L_3 &= \{\mu + (k h_x^j, 0), \text{ para } k = 0, \dots, N_x\}, \\
 \text{Fronteira Direita } L_4 &= \{\mu + (0, \ell h_y^j), \text{ para } \ell = 0, \dots, N_y\}.
 \end{aligned}$$

Na Figura F.1(a) está esquematizado essa coleção de pontos de fronteiras em relação à posição que ocupa na malha. Um bloco é chamado de interior, lateral ou de canto quando, respectivamente, todas as suas fronteiras não coincidirem com as fronteiras da malha, apenas uma de suas fronteiras coincidir com as fronteiras da malha, ou duas de suas fronteiras coincidirem com as fronteiras da malha. Na Figura F.1(b) está ilustrada essa classificação: os blocos identificados com a letra A são blocos interiores, os blocos identificados por B são blocos laterais e os blocos identificados por C são blocos de canto.

a) Fronteiras de um bloco



b) Disposição dos blocos

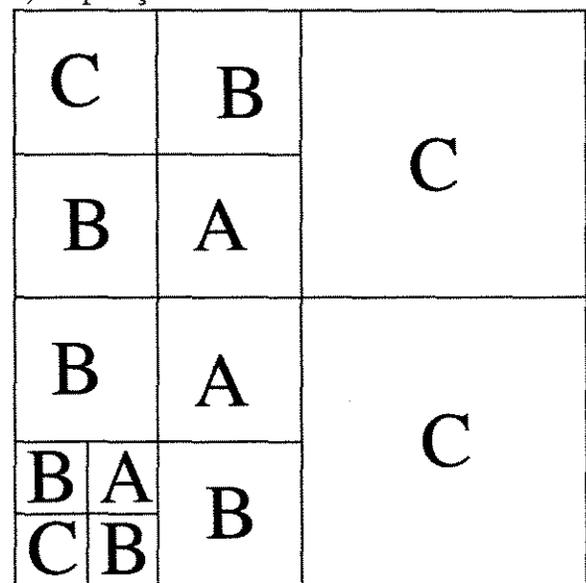
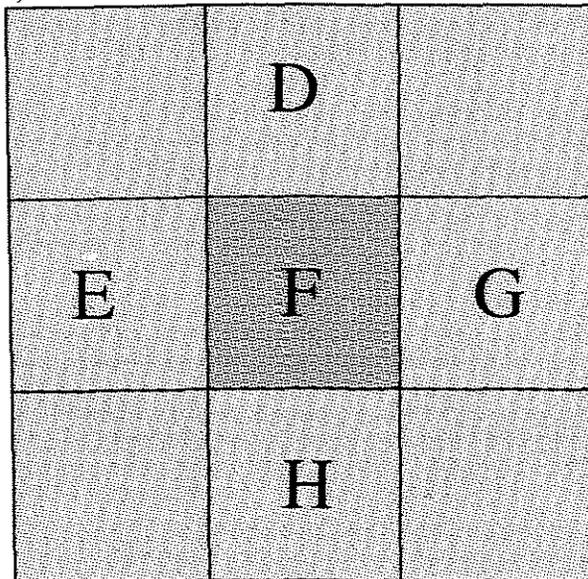


Figura F.1: Ilustração das fronteiras de um bloco: (a) L_1 - fronteira superior, L_2 - fronteira à esquerda, L_3 - fronteira inferior, L_4 - fronteira à direita; e (b) A - blocos interiores, B - blocos laterais e C - blocos de canto.

O outro conceito é o de vizinhança de um bloco. Dois blocos B_μ^j e $B_{\mu'}^{j'}$ são ditos vizinhos quando compartilham elementos de suas fronteiras. Existe quatro tipos de vizinhança entre blocos: vizinhança à esquerda, vizinhança à direita, vizinhança acima ou vizinhança abaixo. Na Figura F.2 está esquematizada a vizinhança do bloco F . Nessa figura os blocos D são os vizinhos superiores, os blocos G são os vizinhos à direita, os blocos H são os vizinhos inferiores e os blocos E são os vizinhos à esquerda. Blocos interiores possuem pelo menos quatro vizinhos, enquanto os laterais possuem pelo menos três vizinhos e os blocos canto possuem pelo menos dois vizinhos.

Em malhas \mathcal{M} os blocos menos refinados (aqueles mais próximos a raiz da árvore) podem compartilhar suas fronteiras com vários blocos de níveis superiores ao seu. Isso não acontece com os blocos do nível mais refinado. Existe um único bloco vizinho em cada um dos seus lados

a) Blocos de mesmo nível



b) Blocos de níveis distintos

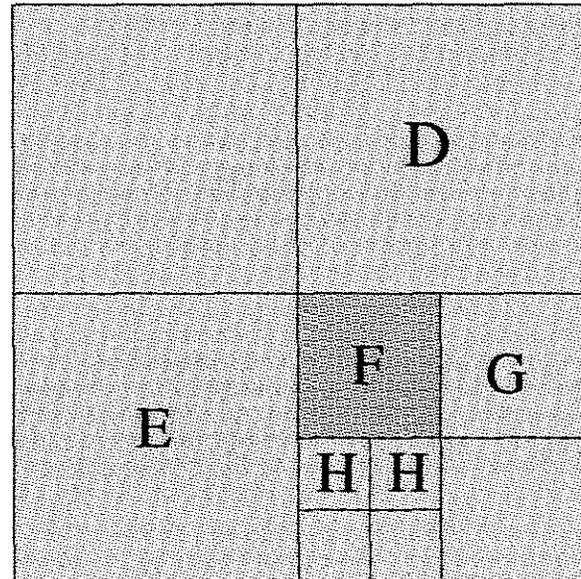


Figura F.2: Ilustração dos vizinhos do bloco F. Os blocos D são os vizinhos superiores, os blocos G são os vizinhos à direita, os blocos H são os vizinhos inferiores e os blocos E são os vizinhos à esquerda.

interiores à malha. Portanto é mais conveniente realizar o processo de busca no sentido decrescente dos níveis (ou seja, algoritmos do tipo "bottom-top" nas folhas da árvore associada). Isso garante que a cada busca todos os vizinhos dos blocos do nível em questão ficam completamente definidos.

O Algoritmo F.2 classifica a vizinhança entre blocos de mesmo nível, i.e., $j = j'$. Enquanto que o Algoritmo F.3 classifica a vizinhança entre blocos com níveis distintos, tal que $j > j'$. Nesses algoritmos a identificação dos blocos vizinhos é realizada por critérios geométricos de localização das fronteiras laterais que compartilham.

Algoritmo F.2 Identificação da Vizinhança do Bloco $\mathcal{B}_\mu^j \subset \mathcal{M}$ (mesmo nível)

Require: $\mu \neq \mu', j = j'$ and $\mathcal{B}_{\mu'}^{j'} \subset \mathcal{M}$.

$(x, y) = \mu, (x', y') = \mu'$.

$dx \leftarrow x - x', \quad dy \leftarrow y - y'$.

$r_x \leftarrow N_x^j, \quad r_y \leftarrow N_y^j, \quad r'_x \leftarrow N_{x'}^{j'}, \quad r'_y \leftarrow N_{y'}^{j'}$.

if $(|dx| = r'_x)$ and $(dx < 0)$ and $(dy \geq 0)$ **then**

if $((x' + r'_x) = x)$ and $(|dy| = r'_y)$ **then**

 return 0 *(Os blocos não são vizinhos.)*

else if $y = y'$ **then**

 return 4 *($\mathcal{B}_{\mu'}^{j'}$ é vizinho à esquerda de \mathcal{B}_μ^j .)*

end if

end if

if $(|dx| = r_x)$ and $(|dy| \geq r_y)$ **then**

if $(dy \geq 0)$ and $(|dy| = r_y)$ **then**

 return 0 *(Os blocos não são vizinhos.)*

end if

if $((x + r_x) \leq x')$ and $(|dy| = r_y)$ **then**

 return 0 *(Os blocos não são vizinhos.)*

end if

if $(x = x')$ **then**

 return 1 *($\mathcal{B}_{\mu'}^{j'}$ é vizinho superior de \mathcal{B}_μ^j .)*

end if

end if

if $(|dy| = r'_y)$ and $(dy < 0)$ **then**

if $((x' + r'_x) = 0)$ and $(|dy| = r'_y)$ **then**

 return 0 *(Os blocos não são vizinhos.)*

end if

if $((x + r_x) \leq x')$ and $(|dy| = r_y)$ **then**

 return 0 *(Os blocos não são vizinhos.)*

end if

if $(x == x')$ **then**

 return 3 *($\mathcal{B}_{\mu'}^{j'}$ é vizinho inferior de \mathcal{B}_μ^j .)*

end if

end if

if $(|dx| = r'_x)$ and $(dx > 0)$ and $(dy \geq 0)$ **then**

if $((x + r_x) = x')$ and $(|dy| = r'_y)$ **then**

 return 0 *(Os blocos não são vizinhos.)*

else if $(y = y')$ **then**

 return 2 *($\mathcal{B}_{\mu'}^{j'}$ é vizinho à direita de \mathcal{B}_μ^j .)*

end if

end if

return 0 *(Os blocos não são vizinhos.)*

Algoritmo F.3 Identificação da Vizinhança do Bloco $\mathcal{B}_\mu^j \subset \mathcal{M}$ (níveis distintos).

Require: $\mu \neq \mu', j > j'$ and $\mathcal{B}_{\mu'}^{j'} \subset \mathcal{M}$.

$(x, y) = \mu$.

$(x', y') = \mu'$.

$dx \leftarrow x - x', \quad dy \leftarrow y - y'$.

$r_x \leftarrow N_x^j, \quad r_y \leftarrow N_y^j$.

$r'_x \leftarrow N_{x'}^{j'}, \quad r'_{y'} \leftarrow N_{y'}^{j'}$.

if $(x = (x' + r'_x))$ and $(y' \leq y)$ and $(y < (y' + r'_{y'}))$ **then**

 return 4 ($\mathcal{B}_{\mu'}^{j'}$ é vizinho à esquerda de \mathcal{B}_μ^j .)

end if

if $(x' = (x + r_x))$ and $(y' \leq y)$ and $(y < (y' + r'_{y'}))$ **then**

 return 2 ($\mathcal{B}_{\mu'}^{j'}$ é vizinho à direita de \mathcal{B}_μ^j .)

end if

if $(x < (x' + r'_x))$ and $(x' \leq x)$ and $(y = (y' + r'_{y'}))$ **then**

 return 3 ($\mathcal{B}_{\mu'}^{j'}$ é vizinho inferior de \mathcal{B}_μ^j .)

end if

if $(x < (x' + r'_x))$ and $(x' \leq x)$ and $(y' = (y + r_y))$ **then**

 return 1 ($\mathcal{B}_{\mu'}^{j'}$ é vizinho superior de \mathcal{B}_μ^j .)

end if

return 0 (Os blocos não são vizinhos.)

F.3 Comunicação entre Blocos

Como visto no Capítulo 7, quando há interesse em diferenciar funções representadas em malhas \mathcal{M} , regulares por blocos, pelo método de diferenças finitas centradas de ordem 4, faz-se necessário acrescentar a cada \mathcal{B}_μ^j mais duas linhas ou duas colunas de dados extras nas laterais. Esse armazenamento extra de elementos está ilustrado na Figura F.3 pelas linhas pontilhadas. Se a lateral for entre blocos vizinhos de mesmo nível, os dados extras são simplesmente copiados do bloco vizinho em questão. Por outro lado, quando os blocos vizinhos estiverem em níveis diferentes, os valores requeridos na diferenciação do bloco mais refinado não estão presentes no bloco vizinho. Neste caso, faz-se a interpolação diádica nos pontos ausentes, utilizando os valores do bloco vizinho que forem necessários. Para o preenchimento dos dados extras do bloco menos refinado, copiam-se os correspondentes valores do bloco vizinho mais refinado. Ilustra-se tal procedimento na Figura F.4.

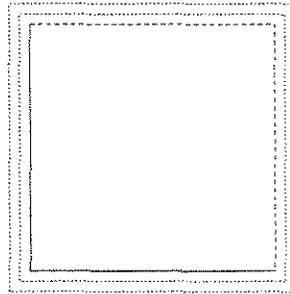


Figura F.3: Ilustração do armazenamento extra de dados em um bloco. As linhas pontilhadas representam as duas linhas e colunas extras nas laterais do bloco $\bar{\mathcal{B}}_\mu^j$. As linhas tracejadas indicam a linha e coluna extra para completar \mathcal{B}_μ^j e obter $\bar{\mathcal{B}}_\mu^j$.

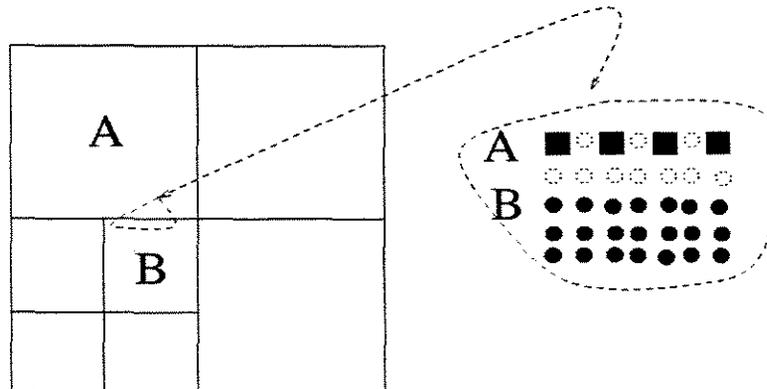


Figura F.4: Ilustração da comunicação entre blocos vizinhos de escalas diferentes. Os símbolos preenchidos representam os pontos que já pertencem aos blocos. O círculo está associado aos elementos do bloco mais refinado **B** e o quadrado aos do bloco menos refinado **A**. Os círculos tracejados indicam os pontos extras do bloco **B** em que há necessidade de interpolação. Os círculos azuis representam os pontos do bloco **B** que também são pontos extras do bloco **A**.

F.4 Condições de Fronteira e Malhas \mathcal{M}

No caso da Malha \mathcal{M} ser considerada de fronteira periódica, para preenchimento dos blocos laterais ou de canto, deve-se primeiro buscar os blocos "vizinhos" das laterais da malha, identificando e preenchendo as áreas extras de armazenamento como usual no método. Um exemplo dessa identificação está apresentado na Figura F.5. Após essa identificação e o preenchimento finalizados, a diferenciação é realizada utilizando o método de diferenças finitas centradas nos pontos interiores ao bloco.

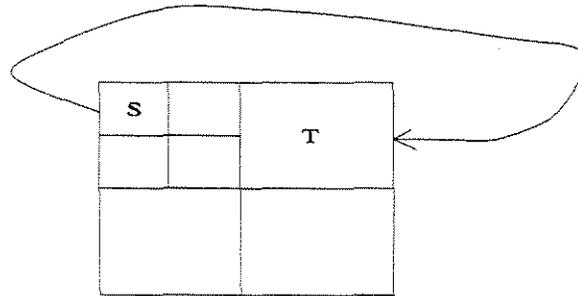


Figura F.5: Ilustração da localização entre blocos vizinhos em condições de fronteiras periódicas. O bloco **S** possui como vizinho lateral esquerdo o bloco **T**.

Para utilizar as condições de fronteira de Dirichlet em discretizações em malhas adaptativas, primeiro é necessário identificar os blocos com fronteiras laterais e de canto. Feito isso, substitui-se a condição de Dirichlet em questão, nos pontos de fronteiras desses blocos. Neste caso as diferenciações são efetuadas com estêncil de fronteira, quando necessário, nesses blocos laterais. Um procedimento similar de localização pode ser adotado para o caso de fronteiras de Neumann, e a seguir aplica-se essa condição de fronteira. Como no caso anterior, o estêncil de fronteira é adotado, quando necessário, nesses blocos laterais.

F.5 Descrição Resumida do Programa WDF

O programa WDF executa a evolução temporal das EDP apresentadas nos exemplos numéricos bidimensionais apresentados no Capítulo 7. Esse programa é escrito na linguagem $C++$, sob o paradigma de orientação a objetos, e os executáveis são gerados pelo compilador $g++$, versão 2.95, da GNU Software Foundation, para ambientes GNU/LINUX.

As cinco classes fundamentais que compõem esse programa são: **TBlock**, **TMesh**, **TInterp**, **TModel** e **TDFinite**. A seguir são apresentadas brevemente cada uma dessas classes, seus dados e suas funções membro principais.

- (a) A Classe **TBlock** é responsável pelo armazenamento das informações dos pontos diretores (fX , fY), dimensão do bloco de malha (fN , fIN), código genealógico do bloco ($fCodex$, $fCodey$), nível de refinamento do bloco ($fLevel$), valor de truncamento ($fepsilon$) e as informações da função no bloco de malha ($ff00$). Nessa classe encontram-se os métodos de tratamento e identificação de blocos. Os principais métodos são:

IsdSignificative — identifica se um bloco precisa ou não ser refinado, e se precisar, em qual dos seus quatro quadrantes isso deve ser realizado;

UpdateCodeUp, UpdatecodeDown — altera o código genealógico do bloco;

WhereIsX, WhereIsY, WhichLevel — identifica o bloco a partir do código genealógico;

IsBoundaryBlock — define se o bloco é de fronteira ou não, e caso ele seja, codifica as suas fronteiras;

Splash — gera quatro filhos de um bloco;

ConcateBack — une quatro blocos irmãos e gera a malha bloco mãe;

StoreNeighborPoints, FillBrother, FillCousin — processa o armazenamento dos pontos extras adicionados ao bloco de malha;

IsNeighborBlock — indica a relação de vizinhança do bloco

PrintBlock — imprime os dados e informações do Block para um arquivo de dados.

- (b) A classe **TMesh** é uma herança da classe **TBlock**. Ela é responsável pelo armazenamento das informações da malha adaptável: nível mais refinado (**fLevelMax**), número máximo de blocos na malha adaptativa (**fNMaxBlock**), o armazenamento dos vetores de **TBlock**. Nessa classe encontram-se os métodos de gerenciamento da informações na malha adaptativa e os processos de extensão e redução. Os principais métodos são:

Mesh0 — constrói a representação de uma função em uma malha adaptável a partir de um bloco raiz;

StoreBlocks — gerencia o armazenamento dos blocos de malha;

SplitBlock, SplitAndStore, RefineBlocks, SplitIC — executam e gerenciam a extensão da malha adaptável;

Neighbor, IsNeighborBlock, AddNeighborPoints, NeighborFill — executam e gerenciam a localização de vizinhanças entre os blocos de malha na malha adaptativa;

AddBlock, PutLevelLeaves, CutBlock — incluem e excluem blocos na malha adaptativa;

ViewMeshBlocks — imprime os dados da malha adaptativa para uma futura evolução temporal;

PrintOctave, PrintMatlab, PrintDataExplorer — formata os dados e redige os *scripts* para facilitar e automatizar a visualização da malha adaptativa;

- (c) A classe **TInterp** é responsável pelo armazenamento dos dados do filtro interpolatório (**fp**) e pela ordem da aproximação (**fM**) do esquema de interpolação. Nessa classe encontram-se os métodos de interpolação. Os principais métodos são:

StartFilters — preenche os filtros de interpolação desejados;

FillOddPoints — interpola vetores de dados de acordo com a escala local dos pontos ausentes;

- (d) A classe **TDFinite** é responsável pelos filtros dos operadores diferenciais espaciais de primeira e segunda ordem ($f\Gamma_1$, $f\Gamma_2$) do método de diferenças finitas e sua ordem de aproximação (fM); e também pela discretização temporal utilizando o método de Runge Kutta de ordem 4. Nessa classe encontram-se os métodos:

StartFilters1, StartFilters2 — preenchem os coeficientes dos filtros de interpolação desejados;

CenterDifferenceWithBoundary, CenterDifferencePeriodicBoundary, CenterDifference — calculam as convoluções dos dados com os filtros de diferenças finitas.

- (e) A classe **TModel** é responsável pelos dados referentes à evolução temporal de cada EDP (f_{mux} , f_{muy} , f_c , f_{dt}) e pelos modelos das EDP utilizadas. Nessa classe encontram-se os métodos:

AdvectionModel, ObFrontModel, BurgerModel — definem o modelo estabelecido e as condições de iniciais e de contorno;

Run, Advection2D, ObFront2D, Burgers2D — executam e gerenciam a evolução temporal do modelo escolhido;

