Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Fundamentos e Aplicações de Memórias Associativas Morfológicas Nebulosas

Autor: Marcos Eduardo Ribeiro do Valle Mesquita

Orientador: Prof. Dr. Peter Sussner

Campinas, SP

Fevereiro/2007

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Marcos Eduardo Ribeiro do Valle Mesquita** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 06 de Fevereiro de 2007

Prof. Dr. Peter Sussner

Banca Examinadora

1. Álvaro Rodolfo De Pierro, Dr. ..... DMA/IMECC/Unicamp
2. Emanuel Pimentel Barbosa, Dr. ..... DE/IMECC/Unicamp
3. Fernando Gomide, Dr. ..... DCA/FEEC/Unicamp
4. Junior Barrera, Dr. ..... DCC/IME/USP
5. Peter Sussner, Dr. ..... DMA/IMECC/Unicamp

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Matemática Aplicada.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues – CRB8a / 2116

Mesquita, Marcos Eduardo Ribeiro do Valle
M562f Fundamentos e aplicações de memórias associativas morfológicas nebulosas / Marcos Eduardo Ribeiro do Valle Mesquita -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2007.

Orientador: Peter Sussner
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Redes neurais (Computação) – Modelos matemáticos. 2. Conjuntos difusos. 3. Morfologia matemática. 4. Memória associativa. I. Sussner, Peter. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Fundamentals and applications of fuzzy morphological associative memories.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Neural networks (Computer Science) – Mathematical models. 2. Fuzzy sets. 3. Mathematical morphology. 4. Associative memory.

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Doutor em Matemática Aplicada

Banca examinadora: Prof. Dr. Álvaro Rodolfo de Pierro (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Fernando Antônio Campos Gomide (FEEC-UNICAMP)
Prof. Dr. Junior Barrera (IME-USP)
Prof. Dr. Emanuel Pimentel Barbosa (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Peter Sussner (IMECC-UNICAMP)

Data da defesa: 06-02-2007

Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática Aplicada

Tese de Doutorado defendida em 06 de fevereiro de 2007 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof. (a). Dr (a). PETER SUSSNER

Prof. (a). Dr (a). JUNIOR BARRERA

Prof. (a). Dr (a). FERNANDO ANTONIO CAMPOS GOMIDE

Prof. (a). Dr (a). EMANUEL PIMENTEL BARBOSA

Prof. (a) Dr. (a) ALVARO RODOLFO DE PIERRO

Resumo

Uma *Memória Associativa* (AM, Associative Memory) é um modelo projetado para armazenar pares de entrada e saída. Sobretudo, uma AM deve ser capaz de recordar uma saída desejada mesmo após a apresentação de uma versão incompleta ou distorcida de um padrão de entrada.

Essa tese de doutorado discute as *Memórias Associativas Morfológicas Nebulosas* (FMAMs, Fuzzy Morphological Associative Memories), uma classe de memórias associativas elaboradas para armazenar padrões nebulosos e descritas por redes neurais nebulosas cujos neurônios realizam operações elementares da morfologia matemática, i.e., dilatação, erosão, anti-dilatação e anti-erosão. É verificado que os principais modelos de *Memória Associativa Nebulosa* (FAM, Fuzzy Associative Memory) pertencem à classe das FMAMs.

Essa tese introduz as *Memórias Associativas Nebulosas Implicativas* (IFAMs, Implicative Fuzzy Associative Memories) e suas versões duais com respeito à negação e adjunção. Uma IFAM é uma FMAM onde os pares de entrada e saída são armazenados usando o armazenamento nebuloso implicativo. No armazenamento nebuloso implicativo, os pesos sinápticos são determinados computando o mínimo das implicações das ativações pré e pós-sinápticas. Resultados sobre a fase de armazenamento das IFAMs e das IFAMs duais são apresentados. Em particular, são demonstrados teoremas sobre a convergência, capacidade de armazenamento, tolerância à ruído e pontos fixos das IFAMs e das IFAMs duais para o caso autoassociativo. As IFAMs são comparadas com os principais modelos de FAMs por meio de exemplos e resultados teóricos. Finalmente, são apresentadas duas aplicações das FMAMs em problemas de previsão de séries temporais. O primeiro problema trata da previsão da mão-de-obra requerida em indústrias metalúrgicas enquanto que a segunda aplicação refere-se a previsão da vazão média mensal da usina hidrelétrica de Furnas.

Palavras-chave: Memória Associativa, Morfologia Matemática, Conjuntos Nebulosos, Redes Neurais.

Abstract

Associative memories (AMs) are models that allow for the storage of pattern associations and the retrieval of the desired output pattern upon presentation of a possibly noisy or incomplete version of an input pattern.

This thesis discusses *fuzzy morphological associative memories* (FMAMs), a general class of AMs designed to store fuzzy patterns and described by fuzzy neural networks. Each neuron of a FMAM model performs an elementary operation of mathematical morphology such as dilation, erosion, anti-dilation, and anti-erosion. We show that the most widely known models of *fuzzy associative memories* (FAMs) belong to the FMAM class.

This thesis introduces the *implicative fuzzy associative memories* (IFAMs) and their dual versions with respect to negation and adjunction. An IFAM is a FMAM model where the patterns are stored by means of *implicative fuzzy learning*. Specifically, in implicative fuzzy learning, the synaptic weights are given by the minimum of the implication of pre- and post-synaptic activations. We present results concerning the recall and storing phase of IFAM and the dual IFAM models. In particular, we present theorems concerning the convergence, the storage capacity, the noise tolerance, and the fixed points of the IFAM and dual IFAM models in the auto-associative case. We compare the IFAMs with several others FAM models by means of theoretical results and examples.

Finally, we present two applications of FMAM models in problems of time-series prediction. The first problem concerns the engineering manpower requirement in steel manufacturing industry while the second refers to the streamflow prediction of a large hydroelectric plant, namely Furnas.

Keywords: Associative Memory, Mathematical Morphology, Fuzzy Sets, Neural Networks.

Aos meus pais,

Antônio Marcos de Mesquita Silva e
Ana Lúcia Ribeiro do Valle Silva

Agradecimentos

À minha noiva, Luciana Maria Ricci, por nosso amor e todos os momentos felizes que passamos juntos.

À minha irmã, Ana Elisa do Valle Mesquita Lomazini, e seu recente marido, Juliano Lomazini, pelo apoio e incentivo durante esta jornada.

Ao meu orientador, Peter Sussner, sou grato pela orientação.

A minha família e a todos os meus colegas. Em particular para Márcio, Rangel, Gustavo, Roberto, Jorge e Silvia, Ângelo e Valéria, Juliana e Willian, Jonas, André, David, Ederson, Mateus, Homero, Denilson e Ângela, e vários outros. As boas amizades permanecem!

A todos os professores que contribuíram para a minha formação na Unicamp.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Sumário

1 Introdução **1**

1.1 Resultados Relevantes da Tese 2

1.2 Organização da Tese 4

2 Memórias Associativas, Morfologia Matemática e Teoria dos Conjuntos Nebulosos **7**

2.1 Principais Conceitos de Memórias Associativas Neurais 7

2.2 Morfologia Matemática em Reticulado Completo 8

2.2.1 Principais Conceitos da Teoria dos Reticulados Completos 9

2.2.2 Operadores Elementares da Morfologia Matemática 9

2.2.3 Principais Relações de Dualidade - Adjunção e Negação 10

2.3 Morfologia Matemática Binária e em Tons de Cinza 13

2.3.1 Morfologia Matemática Binária 13

2.3.2 Morfologia Matemática em Tons de Cinza - Abordagem da Umbra . . 14

2.4 Principais Conceitos da Teoria dos Conjuntos Nebulosos 17

2.4.1 Conjunção, Disjunção, Implicação e Negação Nebulosa 17

2.4.2 Relações entre os Operadores de Conjunção, Disjunção e Implicação Nebulosa 19

2.4.3 Medidas de Inclusão e Intersecção Nebulosa 22

2.5 Morfologia Matemática Nebulosa 24

2.5.1 Erosão Nebulosa Inf-I e Dilatação Nebulosa Sup-C 25

3 Redes Neurais Morfológicas Nebulosas **27**

3.1 Redes Neurais Artificiais 27

3.2 Redes Neurais Nebulosas 29

3.3 Redes Neurais Morfológicas 30

3.4 Redes Neurais Morfológicas Nebulosas 31

3.4.1 Neurônios Max-C e o Produto Max-C 31

3.4.2 Neurônios Min-D e o Produto Min-D 33
3.4.3 Neurônios Min-I e o Produto Min-I 34

4 Principais Modelos de Memórias Associativas Nebulosas e Morfológicas 37
4.1 Memórias Associativas Nebulosas Max-Min e Max-Prod 37
4.2 Memórias Associativas Nebulosas Generalizadas 39
4.3 Memória Associativa Nebulosa de Junbo 40
4.4 Memória Associativa Nebulosa Max-Min com Limiar 41
4.5 Memória Associativa Nebulosa Lógica Bidirecional 42
4.6 Memórias Associativas Morfológicas 43
4.6.1 Memórias Associativas Morfológicas Aditivas 43
4.6.2 Memórias Associativas Morfológicas Multiplicativas 46

5 Memórias Associativas Nebulosas Implicativas e suas Versões Duais 49
5.1 Memórias Associativas Nebulosas Implicativas 49
5.1.1 Aprendizado Nebuloso Implicativo 49
5.2 Memórias Nebulosas Implicativas Autoassociativas 53
5.2.1 Versão Dinâmica das AFIMs 55
5.2.2 Capacidade Absoluta de Armazenamento 56
5.2.3 Tolerância com Respeito à Padrões Corrompidos ou Incompletos . . . 57
5.2.4 Pontos Fixos 61
5.2.5 Memórias Implicativas Autoassociativas Binárias 61
5.3 Memórias Associativas Nebulosas Implicativas Duais 62
5.4 IFAMs Adjuntas e IFAMs Duais Adjuntas 68
5.5 Relações das IFAMs com Outros Modelos de Memória Associativa 72
5.5.1 Relação das IFAMs Duais com as FLBAMs 73
5.5.2 Relação das IFAMs com as Memórias Associativas Morfológicas . . . 75

6 Aplicações de Memórias Associativas Morfológicas Nebulosas 77
6.1 Previsão da Mão-de-obra em Indústrias Metalúrgicas 77
6.2 Previsão da Vazão Mensal de uma Usina Hidrelétrica 81
6.2.1 Noção Geral do Previsor Baseado na IFAM de Lukasiewicz 82
6.2.2 O Previsor Baseado na IFAM de Lukasiewicz 84

7 Conclusão 87

A Demonstrações dos Teoremas **91**
A.1 Demonstração dos Teoremas dos Capítulos 2, 3 e 4 91
A.2 Demonstração dos Teoremas do Capítulo 5 93

B Código de MATLAB para o Previsor Baseado na IFAM de Lukasiewicz **101**

Bibliografia **102**

Capítulo 1

Introdução

Em termos gerais, uma *memória associativa* é um modelo inspirado no cérebro humano e projetado para armazenar pares de entrada e saída. Além disso, uma memória associativa deve ser capaz de recordar uma saída desejada mesmo após a apresentação de uma versão incompleta ou distorcida de um padrão de entrada [56, 40].

Pesquisas em memória associativa iniciaram na metade do século XX [118, 104] e receberam mais atenção nos anos 1980 após a publicação do famoso artigo de Hopfield [42, 47]. Nos anos 1990, foram apresentados vários modelos que estendem o modelo de Hopfield, por exemplo, a *Memória Associativa de Capacidade Exponencial* (ECAM, Exponential Correlation Associative Memory) [16] e a *Memória Associativa Bidirecional* (BAM, Bidirectional Associative Memory) [59, 60]. Entretanto, assim como o modelo de Hopfield, a ECAM e a BAM são modelos usados para armazenar padrões binários. Em contraste com os modelos binários, os modelos de memórias associativas baseados na morfologia matemática e na teoria dos conjuntos nebulosos podem ser usados para armazenar padrões em tons de cinza.

Os primeiros modelos de memória associativa baseados na morfologia matemática foram introduzidos por Ritter e Sussner e são referidos simplesmente como *Memórias Associativas Morfológicas* (MAMs, Morphological Associative Memories) [89, 90]. As memórias associativas morfológicas possuem várias propriedades interessantes [115, 117]. Por exemplo, pode-se armazenar quantos padrões forem desejados num caso particular análogo ao modelo de Hopfield.

As *Memórias Associativas Nebulosas* (FAMs, Fuzzy Associative Memories) são modelos de memórias associativas descritas por redes neurais nebulosas que armazenam padrões nebulosos, i.e., padrões que representam conjuntos nebulosos. Os modelos de Kosko, chamadas *FAM Max-min* e *FAM Max-prod*, representam os modelos mais conhecidos de memória associativa nebulosa [58, 62]. Variações e extensões das FAMs de Kosko incluem o modelos de

Junbo *et al.* [49], Chung e Lee [18], Liu [63] e Bělohlávek [8].

São várias as aplicações de modelos de memória associativa. Por exemplo, Zhang *et al.* utilizaram um modelo de memória associativa para reconhecimento e classificação de padrões [127, 128]. A metodologia para classificação de padrões baseada em memórias associativas também foi aplicada em problemas de detecção de falha em motores [67], segurança de rede [125] e aprendizado de linguagem natural [39]. Hopfield mostrou que seu modelo pode ser usado para resolver problemas de otimização, por exemplo, o problema do caixeiro viajante [46]. As MAMs foram aplicadas em problemas de visão computacional, localização de faces, auto-localização de robôs e análise de imagens hiperespectrais [82, 35]. A FAM de Kosko foi aplicada com sucesso em problemas de controle [58, 62], rastreamento de alvos [74] e previsão de séries temporais [17].

1.1 Resultados Relevantes da Tese

Uma rede neural artificial onde cada neurônio efetua uma operação elementar da morfologia matemática é chamada *Rede Neural Morfológica* (MNN, Morphological Neural Network) [110]. A definição de MNN, introduzida por Sussner, é inspirada no seguinte resultado de Banon e Barrera: "Qualquer operador entre reticulados completos pode ser expresso em termos de combinações de supremos e ínfimos dos operadores elementares da morfologia matemática" [7]. Lembre-se que um operador elementar da morfologia matemática corresponde à uma dilatação, erosão, anti-dilatação ou anti-erosão [5]. Em particular, uma *Memória Associativa Morfológica Nebulosa* (FMAMs, Fuzzy Morphological Associative Memory) é um modelo de memória associativas descrito por uma MNN [109]. Essa tese discute os principais modelos de neurônios empregados nas MNNs e mostra que vários modelos de FAMs representam casos particulares de FMAMs [111, 112].

Sobretudo, essa tese de doutorado introduz as *Memórias Associativas Nebulosas Implicativas* (IFAMs, Implicative Fuzzy Associative Memories) e suas versões duais e adjuntas [116, 121, 120]. As IFAMs, que representam FMAMs particulares, generalizam ou estendem vários modelos de FAMs. Uma IFAM está baseada no *armazenamento nebuloso R-implicativo*, uma técnica também introduzida nessa tese de doutorado. Além disso, essa tese de doutorado apresenta vários resultados que caracterizam a fase de armazenamento e recordação das IFAMs.

Finalmente, essa tese apresenta aplicações das FMAMs em problemas de previsão de séries temporais. Especificamente, vários modelos de FMAMs são comparados no problema de previsão de mão-de-obra discutido em [17]. Além disso, uma IFAM particular, a IFAM

de Lukasiewicz, é aplicada com sucesso no problema de previsão da vazão mensal média da usina hidrelétrica de Furnas, um problema discutido previamente em [64, 65].

Em suma, essa tese de doutorado contribui com os seguintes items:

1. Redes Neurais e Memórias Associativas Morfológicas Nebulosas:
   (a) São discutidos três modelos de neurônios morfológicos nebulosos. Especificamente, os neurônios max-C, min-D e min-I. Sendo que os últimos podem ser descritos em termos de neurônios min-D;
   (b) Observa-se que os modelos discutidos em [18, 49, 62, 63] estão baseados em neurônios max-T, onde T é uma t-norma;
   (c) Observa-se também que o modelo introduzido em [8] está baseado em neurônios min-I ou min-D, onde D é uma disjunção nebulosa (não necessariamente uma t-norma);
2. Memórias Associativas Nebulosas Implicativas;
   (a) São introduzidas as IFAMs e o armazenamento nebuloso implicativo. Uma IFAM representa uma rede neural morfológica nebulosa progressiva de camada única com neurônios max-T, onde T é uma t-norma contínua. O armazenamento nebuloso R-implicativo está baseado no produto min-I_T, onde I_T é a R-implicação associada à t-norma usada na fase de recordação da IFAM;
   (b) São demonstrados teoremas sobre o armazenamento de padrões numa IFAM. Em particular, são demonstrados os seguintes resultados para um caso análogo ao modelo de Hopfield (caso autoassociativo):
      i. Convergência numa única iteração;
      ii. Pode-se armazenar quantos padrões forem desejados;
      iii. Tolerância com respeito à padrões erodidos (dilatados na versão dual);
      iv. O padrão recordado é o supremo (ínfimo no modelo dual) no conjunto dos pontos fixos de uma AFIM ;
      v. O conjunto dos pontos fixos inclui todas as combinações de máximos e mínimos dos padrões apresentados na fase de armazenamento;
   (c) Uma IFAMs dual é definida como a memória associativa que corresponde à negação de uma IFAM com respeito à negação usual. É demonstrado que uma IFAM dual representa uma rede neural morfológica nebulosa progressiva de camada única com neurônios min-S, onde S é uma s-norma contínua;

(d) Foram introduzidas as IFAMs adjuntas. Uma IFAM adjunta é derivada usando a relação de adjunção da morfologia matemática. As IFAMs adjuntas são descritas por neurônios min-I ou neurônios min-D, onde D é uma disjunção nebulosa geral;

(e) Foi discutida a relação das IFAMs com outros modelos de memória associativa neural.

3. Aplicações:

(a) O desempenho de vários modelos de memória associativa são comparados no problema de previsão da mão-de-obra em industrias metalúrgicas [17]. A IFAM de Lukasiewicz produziu o melhor resultado;

(b) A IFAM de Lukasiewicz é aplicada com sucesso no problema da previsão da vazão mensal média da usina hidrelétrica de Furnas [64, 65].

Finalmente, como frutos dessa tese de doutorado, o autor e seu orientador publicaram em conjunto dois artigos em revistas internacionais com árbitro [116, 115] e submeteram para publicação o artigo [114]. Além disso, eles publicaram quatro artigos em anais de conferência [113, 117, 120, 121] e foram convidados para escrever dois capítulos de livros [112, 111], previstos para serem publicados em 2007.

1.2 Organização da Tese

A tese de doutorado está dividida em 7 capítulos.

O capítulo 2 apresenta os conceitos básicos para o desenvolvimento da tese. Em termos gerais, esse capítulo começa com com os conceitos básicos de memórias associativas neurais e morfologia matemática. Em particular, são apresentados os operadores elementares da morfologia matemática e as relações de dualidade com respeito à adjunção e com respeito à negação. A morfologia matemática binária e a abordagem da umbra para a morfologia matemática em tons de cinza são apresentadas como exemplos. As principais operações da teoria dos conjuntos nebulosos são apresentadas em seguida. Precisamente, são apresentados os conceitos de conjunção, disjunção, implicação e negação nebulosa, bem como a relação entre esses conceitos sob o ponto de vista da morfologia matemática. Nesse capítulo são introduzidas as *implicações nebulosas duais*, um conceito usado posteriormente na fase de armazenamento das IFAMs duais e nos neurônios morfológicos das IFAMs adjuntas. O

capítulo termina apresentando medidas de inclusão e intersecção nebulosa e uma abordagem geral para a morfologia matemática nebulosa baseada nesses conceitos.

O capítulo 3 apresenta uma revisão dos conceitos de redes neurais artificiais, redes neurais nebulosas, MNNs e *Redes Neurais Morfológicas Nebulosas* (FMNNs, Fuzzy Morphological Neural Networks). Os principais modelos de neurônio morfológico-nebuloso e os produtos matriciais usados para descrevê-los são discutidos no final desse capítulo. Especificamente, são apresentados os neurônios max-C, min-D e min-I, os produtos max-C, min-D e min-I e a relação entre eles.

O capítulo 4 apresenta vários modelos de memórias associativas. Precisamente, são apresentadas as *FAMs Max-min* e *Max-prod* de Kosko [62], as *Memórias Associativas Nebulosas Generalizadas* (GFAMs, Generalized Fuzzy Associative Memories) de Chung e Lee [18], a FAM de Junbo *et al.* [49], a *FAM max-min com limiar* de Liu [63] e as *Memórias Associativas Nebulosas Lógicas Bidirecionais* (FLBAMs, Fuzzy Logical Bidirectional Associative Memories) de Bělohlávek [8]. Verifica-se que a maioria desses modelos pertence à classe das FMAMs - as excessões são alguns modelos não usuais de GFAMs baseados em t-normas que não são contínuas. Além dos modelos nebulosos, são também apresentadas duas versões da MAM de Ritter e Sussner [89, 90, 115].

O capítulo 5 introduz as IFAMs e suas versões duais e adjuntas. Em termos gerais, esse capítulo começa introduzindo as IFAMs e o armazenamento nebuloso implicativo. Depois são apresentados vários resultados sobre casos particulares das IFAMs. Esses resultados referem-se principalmente à capacidade absoluta de armazenamento, tolerância com respeito à ruído e aos pontos fixos do modelo. As IFAMs duais e as IFAMs adjuntas são introduzidas em seguida. O capítulo termina discutindo a relação das IFAMs com os modelos apresentados no capítulo 4.

O capítulo 6 apresenta duas aplicações de FMAMs em problemas de séries temporais. O primeiro problema trata da previsão da mão-de-obra requerida em indústrias metalúrgicas no estado Bengal do Oeste na Índia [17]. Vários modelos são testados e comparados nessa aplicação. A IFAM de Lukasiewicz é o modelo que apresenta a melhor previsão dentre os modelos considerados. O segundo problema refere-se a previsão da vazão mensal média da usina hidrelétrica de Furnas [64, 65]. É apresentado somente os resultados fornecidos pela IFAM de Lukasiewicz, pois os modelos baseados nas FMAMs produziram resultados parecidos. O resultado fornecido pela IFAM de Lukasiewicz é comparado com outros modelos para previsão de séries temporais.

A tese termina com a conclusão no capítulo 7, o apêndice A contendo as demostrações dos teoremas e o apêndice B com o código de `MATLAB` usado no problema da previsão da

vazão mensal média da usina hidrelétrica de Furnas. Para efeitos de organização, os resultados novos estão apresentados na forma de *teoremas* enquanto que resultados encontrados na literatura estão apresentados na forma de *proposições*.

Capítulo 2

Memórias Associativas, Morfologia Matemática e Teoria dos Conjuntos Nebulosos

2.1 Principais Conceitos de Memórias Associativas Neurais

Uma *memória associativa* é um modelo projetado para armazenar pares de entrada e saída. Sobretudo, uma memória associativa deve ser capaz de recordar uma saída desejada mesmo após a apresentação de uma versão incompleta ou distorcida de um padrão de entrada. Matematicamente, tem-se a seguinte formulação para um problema de memória associativa [40, 41]: Dado um conjunto de pares de entrada e saída $\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi) : \xi = 1, \ldots, k\}$, determine uma aplicação G tal que $G(\mathbf{x}^\xi) = \mathbf{y}^\xi$ para todo $\xi = 1, \ldots, k$. Além disso, a aplicação G deve possuir uma certa tolerância com respeito à ruído, i.e., $G(\tilde{\mathbf{x}}^\xi) = \mathbf{y}^\xi$ para versões corrompidas ou incompletas $\tilde{\mathbf{x}}^\xi$ de $\mathbf{x}^\xi$.

O conjunto dos pares de entrada e saída, $\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi) : \xi = 1, \ldots, k\}$, é chamado *conjunto das memórias fundamentais* e cada par $(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi)$ desse conjunto é chamado *memória fundamental* [40]. Diz-se que uma memória associativa *armazena corretamente* o conjunto das memórias fundamentais se $G(\mathbf{x}^\xi) = \mathbf{y}^\xi$ para todo $\xi = 1, \ldots, k$. Em particular, uma memória fundamental $(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi)$ é armazenada corretamente se $G(\mathbf{x}^\xi) = \mathbf{y}^\xi$. A *capacidade absoluta de armazenamento* refere-se ao número de pares de entrada e saída do conjunto das memórias fundamentais que foram armazenados corretamente. Tem-se uma *memória autoassociativa* quando o conjunto das memórias fundamentais é da forma $\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{x}^\xi) : \xi = 1, \ldots, k\}$. Uma memória é dita *heteroassociativa* se $\mathbf{y}^\xi$ for diferente de $\mathbf{x}^\xi$. Neste caso, o padrão de saída $\mathbf{y}^\xi$ pode ter uma natureza completamente diferente do padrão de entrada $\mathbf{x}^\xi$.

Um problema muito comum na construção de uma memória associativa é a criação de memórias falsas ou espúrias. Uma *memória espúria* é um par de entrada e saída que foi armazenado na memória, mas não pertence ao conjunto das memórias fundamentais, i.e., o par foi armazenado involuntariamente na memória associativa.

O processo usado para determinar G é chamado *fase de armazenamento* e a aplicação G é referida como *aplicação associativa*. Uma *memória associativa neural* é um modelo de memória associativa onde a aplicação G é descrita por uma rede neural artificial [40, 41]. Em particular, uma *Memória Associativa (Neural) Morfológica* (MAM, Morphological Associative Memory) é descrita por uma rede neural morfológica [89, 90] e uma *Memória Associativa (Neural) Nebulosa* (FAM, Fuzzy Associative Memory) é descrita por rede neural nebulosa que armazena e recorda padrões nebulosos [8, 18, 62, 63, 116]. Finalmente, uma *Memória Associativa Morfológica Nebulosa* (FMAM, Fuzzy Morphological Associative Memory) é uma memória associativa descrita por uma rede neural nebulosa morfológica que armazena e recorda padrões nebulosos [109].

2.2 Morfologia Matemática em Reticulado Completo

A *Morfologia Matemática* (MM) é uma teoria empregada no processamento e análise de objetos (ou imagens) [44, 97, 98, 103] que utiliza operadores e funções baseadas em conceitos topológicos e geométricos [37, 72]. Essa teoria foi desenvolvida por Matheron e Serra nos anos 1960 e estava baseada nos trabalhos de Minkowski e Hadwiger [68, 69, 70, 97]. Durante os anos 1980, a MM adquiriu créditos em áreas como processamento de imagens, reconhecimento de padrões e visão computacional. Sua aplicação abrange segmentação e reconstrução de imagens [53, 119, 122], reconhecimento de características [102] e decomposição de sinais [12].

Os primeiros operadores da morfologia matemática, desenvolvidos por Matheron e Serra, eram voltados apenas para imagens binárias. Posteriormente, usando a noção de umbra, Sternberg [105, 106] generalizou os principais operadores da morfologia matemática binária para o caso em tons de cinza. Outras abordagens usadas para a generalização dos operadores morfológicos binários para o caso em tons de cinza estão baseadas no conceito de operadores planos [44] e na teoria dos conjuntos nebulosos [25, 27, 113, 114]. Todas as abordagens - binária, em tons de cinza e nebulosa - possuem como base a teoria dos reticulados completos. De fato, reticulados completos representam o contexto mais geral onde a morfologia matemática pode ser conduzida [44, 94, 98].

2.2.1 Principais Conceitos da Teoria dos Reticulados Completos

O primeiro estudo sobre a teoria dos reticulados foi publicado em 1897 por Dedekind [26]. Hoje, muitos pesquisadores, em particular Birkhoff, afirmam que os conceitos da teoria dos reticulados estão difundidos em toda álgebra moderna [9]. De fato, muitos modelos de redes neurais artificiais estão explícita ou implicitamente baseados na teoria dos reticulados [79, 50, 89, 90, 99]. Além disso, os reticulados completos formam a base para a morfologia matemática [44, 94] e os reticulados com resíduo formam a base para a lógica nebulosa [34, 38]. Essa subseção apresenta somente os conceitos necessários para o desenvolvimento da tese. Uma exposição completa sobre a teoria dos reticulados pode ser encontrada em [9].

Um reticulado é um caso particular de conjunto parcialmente ordenado. Lembre-se que um conjunto não vazio X equipado com uma ordem parcial $\leq$ é referido como *conjunto parcialmente ordenado* e denotado por $(X, \leq)$ [9, 44]. Uma *ordem parcial* é uma relação binária $\leq$ em X que satisfaz as seguintes propriedades para todo $x, y, z \in X$:

1. Reflexidade: $x \leq x$;
2. Anti-simetria: Se $x \leq y$ e $y \leq x$ então $x = y$;
3. Transitividade: Se $x \leq y$ e $y \leq z$ então $x \leq z$.

Dado um conjunto parcialmente ordenado $(X, \leq)$ e um subconjunto $Y \subseteq X$, um elemento $x \in X$ é chamado *limitante superior* de Y se $y \leq x$ para todo $y \in X$. O menor limitante superior, quando existir, é chamado *supremo de* Y. Precisamente, $x \in X$ é o supremo de Y se x é um limitante superior de Y e dado outro limitante superior z, tem-se $x \leq z$. O supremo de um subconjunto Y, quando existir, é único e é denotado por $\bigvee Y$. Denota-se o supremo de Y por $\bigvee_{j \in J} y_j$ quando $Y = \{y_j, j \in J\}$ para algum conjunto de índices J. As noções de *limitante inferior* e *ínfimo* são definidas de um modo análogo. O ínfimo de um subconjunto Y é denotado por $\bigwedge Y$ ou $\bigwedge_{j \in J} y_j$.

Definição 2.1 (Reticulado e Reticulado Completo [9, 44]). *Um conjunto parcialmente ordenado X é um* reticulado *se todo subconjunto finito admite um supremo e um ínfimo em X, i.e., para todo $Y \subseteq X$ finito tem-se $\bigvee Y \in X$ e $\bigwedge Y \in X$. Um reticulado X é* completo *se todo subconjunto, finito ou infinito, possui um ínfimo e um supremo em X. Nessa tese, um reticulado completo geral é denotado por $\mathbb{L}$ ou $\mathbb{M}$.*

2.2.2 Operadores Elementares da Morfologia Matemática

No contexto geral de reticulado completo, tem-se a seguinte definição para os operadores de dilatação e erosão da morfologia matemática:

Definição 2.2 (Dilatação e Erosão [44, 98]). *Sejam $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$ reticulados completos. Um operador $\delta : \mathbb{L} \to \mathbb{M}$ que comuta com a operação de supremo é chamado* dilatação. *Em outras palavras, o operador δ representa uma dilatação se a seguinte equação valer para todo subconjunto $X \subseteq \mathbb{L}$.*

$$\delta\left(\bigvee X\right) = \bigvee_{x \in X} \delta(x)\,. \tag{2.1}$$

De um modo análogo, uma erosão *é um operador $\varepsilon : \mathbb{M} \to \mathbb{L}$ que comuta com a operação de ínfimo. Em outras palavras, o operador ε representa uma erosão se a seguinte equação valer para todo subconjunto $Y \subseteq \mathbb{M}$.*

$$\varepsilon\left(\bigwedge Y\right) = \bigwedge_{y \in Y} \varepsilon(y)\,. \tag{2.2}$$

Muitos livros de álgebra, por exemplo [9], empregam a terminologia "*join morphism*" e "*meet morphism*" para operadores de dilatação e erosão, respectivamente. Além dos operadores de dilatação e erosão, muitos pesquisadores também consideram os operadores de anti-dilatação e anti-erosão que estão definidos abaixo.

Definição 2.3 (Anti-dilatação e Anti-erosão [7, 98]). *Sejam $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$ reticulados completos. Um operador $\bar{\delta} : \mathbb{L} \to \mathbb{M}$ representa uma* anti-dilatação *se a seguinte equação valer para todo subconjunto $X \subseteq \mathbb{L}$:*

$$\bar{\delta}\left(\bigvee X\right) = \bigwedge_{x \in X} \bar{\delta}(x)\,. \tag{2.3}$$

De um modo análogo, uma anti-erosão *é um operador $\bar{\varepsilon} : \mathbb{M} \to \mathbb{L}$ que satisfaz a seguinte equação para todo subconjunto $Y \subseteq \mathbb{M}$:*

$$\bar{\varepsilon}\left(\bigwedge Y\right) = \bigvee_{y \in Y} \bar{\varepsilon}(y)\,. \tag{2.4}$$

Operadores de dilatação, erosão, anti-dilatação e anti-erosão são considerados operadores elementares da morfologia matemática, pois qualquer aplicação entre reticulados completos pode ser expressa em termos de combinações de supremos e ínfimos desses [6, 7]. Observe que os operadores de dilatação e erosão são operadores crescentes. Todavia, uma anti-dilatação e uma anti-erosão representam operadores decrescentes.

2.2.3 Principais Relações de Dualidade - Adjunção e Negação

Os operadores de dilatação e erosão estão geralmente relacionados por meio de uma relação de dualidade. A noção de dualidade difere entre pesquisadores da morfologia matemática. Muitos, incluindo Bloch e Maître [10], Sinha e Dougherty [101], Nachtegael e Kerre [73],

empregam uma dualidade baseada no conceito de negação. Outros, tais como Maragos [66], Ronse [94], Deng e Heijmans [27], defendem a dualidade baseada no conceito de adjunção, um conceito que está relacionado com o conceito de resíduo de uma aplicação (na teoria dos resíduos [11]) e com o conceito de conexão de Galois (na teoria de Galois [9]).

Definição 2.4 (Adjunção [44]). *Sejam $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$ reticulados completos. Considere operadores $\delta : \mathbb{L} \to \mathbb{M}$ e $\varepsilon : \mathbb{M} \to \mathbb{L}$. O par (ε, δ) representa uma adjunção em $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$ se e somente se*

$$\delta(x) \leq y \Leftrightarrow x \leq \varepsilon(y), \tag{2.5}$$

para todo $x \in \mathbb{L}$ e para todo $y \in \mathbb{M}$.

A seguinte proposição garante, entre outras coisas, que o conceito de adjunção representa um conceito de dualidade entre os operadores de dilatação e erosão.

Proposição 2.5 (Adjunção, Dilatação e Erosão [44, 98]). *Sejam $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$ reticulados completos e considere os operadores $\delta : \mathbb{L} \to \mathbb{M}$ e $\varepsilon : \mathbb{M} \to \mathbb{L}$.*

1. *Se (ε, δ) é uma adjunção, então δ é uma dilatação e ε é uma erosão.*

2. *Para toda dilatação δ existe uma única erosão ε tal que (ε, δ) forma uma adjunção. A erosão adjunta é dada por:*

$$\varepsilon(y) = \bigvee \{x \in \mathbb{L} : \delta(x) \leq y\} \ , \tag{2.6}$$

   para todo $y \in \mathbb{M}$.

3. *Para toda erosão ε existe uma única dilatação δ tal que (ε, δ) forma uma adjunção. A dilatação adjunta é dada por:*

$$\delta(x) = \bigwedge \{y \in \mathbb{M} : x \leq \varepsilon(y)\} \ , \tag{2.7}$$

   para todo $x \in \mathbb{L}$.

O segundo conceito de dualidade está baseado no conceito de negação.

Definição 2.6 (Negação e Negação de um Operador Ψ [44]). *Sejam $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$ reticulados completos.*

- *Um operador $\nu : \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ é dito uma* negação em $\mathbb{L}$ *se ν é uma bijeção involutiva que reverte a ordem parcial de $\mathbb{L}$.*

- *Considere uma aplicação $\Psi : \mathbb{L} \to \mathbb{M}$ e sejam ν_L e ν_M negações em $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$, respectivamente. O operador $\Psi^\nu : \mathbb{L} \to \mathbb{M}$ dado por*

$$\Psi^\nu = \nu_M \circ \Psi \circ \nu_L \ , \tag{2.8}$$

é referido como negação de Ψ com respeito à ν_L e ν_M, *ou simplesmente como* negação de Ψ *se as negações de* $\mathbb{L}$ *e* $\mathbb{M}$ *estiverem claramente definidas.*

Lembre-se que um operador ν involutivo satisfaz $\nu(\nu(x)) = x$ para todo $x \in \mathbb{L}$. Conseqüentemente, se $\Psi : \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ e ν é uma negação em $\mathbb{L}$, então $(\Psi^\nu)^\nu = \Psi$. Além disso, tem-se a proposição:

Proposição 2.7 (Negação de Dilatações e Erosões [44]). *Sejam* $\mathbb{L}$ *e* $\mathbb{M}$ *reticulados completos com negações* ν_L *e* ν_M, *respectivamente. Um operador* $\delta : \mathbb{L} \to \mathbb{M}$ *é uma dilatação se e somente se* $\varepsilon = \delta^\nu : \mathbb{L} \to \mathbb{M}$ *é uma erosão.*

Note que se $\mathbb{L}$ é um reticulado completo com uma negação ν então

$$\nu\left(\bigvee X\right) = \bigwedge_{x \in X} \nu(x) \quad \text{e} \quad \nu\left(\bigwedge X\right) = \bigvee_{x \in X} \nu(x)\ , \tag{2.9}$$

para todo $X \in \mathbb{L}$ [44]. Em outras palavras, uma negação representa ambos operadores de anti-dilatação e anti-erosão. Além disso, se $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$ são reticulados completos com negações ν_L e ν_M, respectivamente, então pode-se representar uma anti-dilatação $\bar{\delta} : \mathbb{L} \to \mathbb{M}$, ou uma anti-erosão $\bar{\varepsilon} : \mathbb{M} \to \mathbb{L}$, em termos de composições de erosões, dilatações e negações.

Teorema 2.8 (Decomposição de Anti-dilatações e Anti-erosões). *Sejam* $\mathbb{L}$ *e* $\mathbb{M}$ *reticulados completos com negações* ν_L *e* ν_M, *respectivamente.*

- *Um operador* $\bar{\delta} : \mathbb{L} \to \mathbb{M}$ *é uma anti-dilatação se e somente se*

$$\bar{\delta} = \nu_M \circ \delta \quad e \quad \bar{\delta} = \varepsilon \circ \nu_L\ , \tag{2.10}$$

  onde δ *é a dilatação dada por* $\delta = \nu_M \circ \bar{\delta}$ *e* ε *é a erosão dada por* $\varepsilon = \bar{\delta} \circ \nu_L$.

- *Um operador* $\bar{\varepsilon} : \mathbb{M} \to \mathbb{L}$ *é uma anti-erosão se e somente se*

$$\bar{\varepsilon} = \nu_L \circ \varepsilon \quad e \quad \bar{\varepsilon} = \delta \circ \nu_M \tag{2.11}$$

  onde $\varepsilon = \nu_L \circ \bar{\varepsilon}$ *é uma erosão e* $\delta = \bar{\varepsilon} \circ \nu_M$ *é uma dilatação.*

A demonstração do teorema 2.8 encontra-se no apêndice A. Em vista desse teorema e o fato da maioria dos reticulados completos possuírem uma negação, dá-se ênfase aos operadores de dilatação e erosão.

Resumindo, pode-se associar uma única erosão a uma dada dilatação, e vice-versa, em termos de uma negação ou do conceito de adjunção. Finalmente, a seguinte proposição estabelece uma relação entre os conceitos de adjunção e negação.

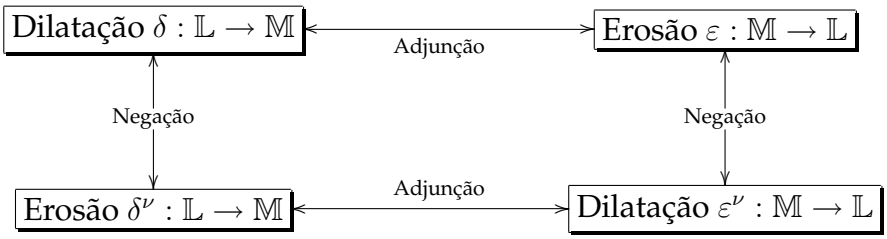

Fig. 2.1: Esquema para se obter uma erosão a partir de uma dilatação, e vice-versa, através dos conceitos de adjunção ou negação.

Proposição 2.9 (Relação entre Adjunção e Negação [44]). *Sejam $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$ reticulados completos com negações e considere operadores $\delta : \mathbb{L} \to \mathbb{M}$ e $\varepsilon : \mathbb{M} \to \mathbb{L}$. O par (ε, δ) forma uma adjunção em $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$ se e somente se o par $(\delta^\nu, \varepsilon^\nu)$ formar uma adjunção em $\mathbb{M}$ e $\mathbb{L}$.*

O diagrama apresentado na figura 2.1 foi construído com base nas proposições 2.5, 2.7 e 2.9. Esse diagrama pode ser usado para se obter uma erosão a partir de uma dilatação, e vice-versa, usando os conceitos de dualidade apresentados anteriormente.

2.3 Morfologia Matemática Binária e em Tons de Cinza

2.3.1 Morfologia Matemática Binária

A morfologia matemática foi inicialmente desenvolvida para análise de imagens binárias. Identifica-se uma imagem binária $\mathbf{A}$ com um subconjunto de $\mathbf{X}$, onde $\mathbf{X}$ denota o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^d$ ou o espaço digital $\mathbb{Z}^d$. O conjunto das partes de $\mathbf{X}$ é um conjunto parcialmente ordenado em termos da operação "$\subseteq$" e forma um reticulado completo. Portanto, o contexto de reticulado completo apresentado na seção anterior pode ser aplicado para a morfologia matemática binária.

As operações básicas da morfologia matemática binária são a erosão $\mathcal{E}_\mathcal{B}$ e a dilatação $\mathcal{D}_\mathcal{B}$. Essas operações estão associadas a um subconjunto $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{X}$ chamado *elemento estruturante*. Um elemento estruturante é geralmente usado para extrair informações topológicas ou geométricas da imagem [97, 103].

Definição 2.10 (Dilatação Binária e Erosão Binária [28, 92]). *Seja $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{X}$ uma imagem binária e seja $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{X}$ um elemento estruturante. A erosão binária $\mathcal{E}_\mathcal{B}(\mathbf{A}, \mathbf{S})$ e a dilatação binária $\mathcal{D}_\mathcal{B}(\mathbf{A}, \mathbf{S})$ de uma imagem $\mathbf{A}$ pelo elemento estruturante $\mathbf{S}$ são definidas em termos de translações e reflexões de conjuntos como segue:*

$$\mathcal{E}_\mathcal{B}(\mathbf{A}, \mathbf{S}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{X} : \mathbf{S}_\mathbf{x} \subseteq \mathbf{A}\} \quad e \quad \mathcal{D}_\mathcal{B}(\mathbf{A}, \mathbf{S}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{X} : \bar{\mathbf{S}}_\mathbf{x} \cap \mathbf{A} \neq \emptyset\}, \tag{2.12}$$

onde a translação $\mathbf{S_x}$ *de* $\mathbf{S}$ *por* $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ *é dada por* $\mathbf{S_x} = \{\mathbf{s} + \mathbf{x} : \mathbf{s} \in S\}$, *o símbolo* $\bar{\mathbf{S}}$ *denota a* reflexão *de* $\mathbf{S}$ *ao redor da origem, i.e.,* $\bar{\mathbf{S}} = \{-\mathbf{s} \in \mathbf{X} : \mathbf{s} \in \mathbf{S}\}$ *e* $\bar{\mathbf{S}}_\mathbf{x}$ *representa a translação de* $\bar{\mathbf{S}}$ *por* $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$.

Observação. A definição 2.10 corresponde à abordagem de Sternberg onde a erosão corresponde à subtração de Minkowski e a dilatação corresponde à soma de Minkowski [106]. Serra apresenta uma definição diferente, onde a dilatação de $\mathbf{A}$ pelo elemento estruturante $\mathbf{S}$ é dada por $\{\mathbf{x} \in \mathbf{X} : \mathbf{S_x} \cap \mathbf{A} \neq \emptyset\} = \mathcal{D}_\mathcal{B}(\mathbf{A}, \bar{\mathbf{S}})$ [97]. As definições de Sternberg e Serra coincidem para a erosão binária.

A definição 2.10 é coerente com a definição 2.2 apresentada na seção anterior, pois $\mathcal{E}_\mathcal{B}(\cdot, \mathbf{S})$ satisfaz (2.2) e $\mathcal{D}_\mathcal{B}(\cdot, \mathbf{S})$ satisfaz (2.1) para um elemento estruturante $\mathbf{S}$ fixo. Além disso, pode-se verificar que o par $\mathcal{E}_\mathcal{B}(\cdot, \mathbf{S})$ e $\mathcal{D}_\mathcal{B}(\cdot, \mathbf{S})$ forma uma adjunção satisfazendo (2.5). Note que o complemento de uma imagem define uma negação em $\mathbf{X}$, i.e., $\nu(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^c$ é uma negação em $\mathbf{X}$. Desse modo, para todo $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{X}$ tem-se $\mathcal{E}^\nu_\mathcal{B}(\cdot, \mathbf{S}) = \mathcal{D}_\mathcal{B}(\cdot, \bar{\mathbf{S}})$ e $\mathcal{D}^\nu_\mathcal{B}(\cdot, \mathbf{S}) = \mathcal{E}_\mathcal{B}(\cdot, \bar{\mathbf{S}})$ [44].

2.3.2 Morfologia Matemática em Tons de Cinza - Abordagem da Umbra

As ferramentas da morfologia matemática binária são limitadas, pois não podem ser aplicadas para imagens em tons de cinza. Serra e Sternberg desenvolveram diferentes abordagens para estender a morfologia matemática binária para o caso em tons de cinza [97, 105, 106]. Essa subseção apresenta a abordagem da umbra que foi introduzida por Sternberg e representa a abordagem mais conhecida para o caso em tons de cinza. Uma discussão entre diferentes abordagem da morfologia matemática em tons de cinza pode ser encontrada em [113, 114].

Na morfologia matemática em tons de cinza, aplica-se os conceitos da teoria dos reticulados para imagens, i.e., funções de um conjunto de pontos $\mathbf{X}$ em um reticulado completo $\mathbb{G}$ cujos valores correspondem aos tons de cinza da imagem. Essa subseção considera apenas imagens $\mathbf{X} \to \mathbb{G}$, onde $\mathbb{G}$ denota o conjunto dos reais estendidos $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ ou o conjunto dos inteiros estendidos $\bar{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Note que $\mathbb{G}$ é um reticulado completo com negação $\nu(x) = -x$, para todo $x \in \mathbb{G}$.

O conjunto das imagens $\mathbf{X} \to \mathbb{G}$ é denotado por $\mathbb{G}^\mathbf{X}$. Dada uma imagem $\mathbf{a} \in \mathbb{G}^\mathbf{X}$, define-se a *reflexão* $\bar{\mathbf{a}}$ de $\mathbf{a}$ com respeito à origem e a *translação* $\mathbf{a_y}$ de $\mathbf{a}$ por $\mathbf{y} \in \mathbf{X}$ através das seguintes equações:

$$\bar{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(-\mathbf{x}) \quad \text{e} \quad \mathbf{a_y}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{X}. \tag{2.13}$$

Note que o conjunto $\mathbb{G}^{\mathbf{X}}$ herda de $\mathbb{G}$ a estrutura de reticulado completo com negação se $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ e $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{a})$ forem definidos como segue para todo $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{G}^{\mathbf{X}}$:

$$\mathbf{a} \leq \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{b}(\mathbf{x}),\ \forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{X} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\nu}(\mathbf{a})(\mathbf{x}) = -\mathbf{a}(\mathbf{x}),\ \forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{X}\,. \tag{2.14}$$

As operações básicas da morfologia matemática em tons de cinza são a erosão e a dilatação no reticulado completo $\mathbb{G}^{\mathbf{X}}$. Essas operações estão geralmente associadas a um elemento estruturante que é usado para extrair informações relevantes sobre a forma e o tamanho dos objetos contidos na imagem. O elemento estruturante geralmente pertence à $\mathbb{G}^{\mathbf{X}}$. Nesse contexto, uma *erosão* refere-se a um operador $\mathcal{E} : \mathbb{G}^{\mathbf{X}} \times \mathbb{G}^{\mathbf{X}} \to \mathbb{G}^{\mathbf{X}}$ que comuta com o ínfimo no primeiro argumento. Nesse caso, diz-se que $\mathcal{E}(\mathbf{a}, \mathbf{s})$ é a erosão de uma imagem $\mathbf{a} \in \mathbb{G}^{\mathbf{X}}$ por um elemento estruturante $\mathbf{s} \in \mathbb{G}^{\mathbf{X}}$. Analogamente, um operador $\mathcal{D} : \mathbb{G}^{\mathbf{X}} \times \mathbb{G}^{\mathbf{X}} \to \mathbb{G}^{\mathbf{X}}$ é uma *dilatação* quando comutar com o supremo no primeiro argumento e $\mathcal{D}(\mathbf{a}, \mathbf{s})$ representa a dilatação da imagem $\mathbf{a}$ pelo elemento estruturante $\mathbf{s}$.

Por efeito de simplicidade, diz-se que o par $(\mathcal{E}, \mathcal{D})$ representa uma *adjunção* se e somente se $(\mathcal{E}(\cdot, \mathbf{s}), \mathcal{D}(\cdot, \mathbf{s}))$ representar uma adjunção para todo elemento estruturante $\mathbf{s} \in \mathbb{G}^{\mathbf{X}}$. De um modo similar, os $\mathcal{E}$ e $\mathcal{D}$ são ditos operadores duais com respeito à negação ν se $\mathcal{E}^{\nu}(\cdot, \mathbf{s}) = \mathcal{D}(\cdot, \bar{\mathbf{s}})$ e $\mathcal{D}^{\nu}(\cdot, \mathbf{s}) = \mathcal{E}(\cdot, \bar{\mathbf{s}})$ para todo $\mathbf{s} \in \mathbb{G}^{\mathbf{X}}$.

A abordagem da umbra para a morfologia matemática em tons de cinza está baseada na observação de que para toda imagem $\mathbf{a} : \mathbf{X} \to \mathbb{G}$, os pontos do gráfico e os pontos abaixo dele é um subconjunto de $\mathbf{X} \times \mathbb{G}$. Portanto, pode-se aplicar os operadores da morfologia matemática binária. Esses subconjuntos são chamados *umbra* e são definidos da seguinte forma:

Definição 2.11 (Umbra [44, 94]). *Considere um conjunto de pontos $\mathbf{X}$ e um conjunto de tons de cinza $\mathbb{G}$. Um subconjunto U de $\mathbf{X} \times \mathbb{G}$ é uma umbra se, para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ e para todo $s, t \in \mathbb{G}$ tal que $s < t$ e $(\mathbf{x}, t) \in U$, tem-se $(\mathbf{x}, s) \in U$. O conjunto de todas as umbras contidas em $\mathbf{X} \times \mathbb{G}$ é denotado por $\mathcal{U}_{\mathbf{X} \times \mathbb{G}}$.*

O subconjunto $\mathcal{U}_{\mathbf{X} \times \mathbb{G}}$ é um reticulado completo contido no conjunto das partes de $\mathbf{X} \times \mathbb{G}$, i.e., $\mathcal{U}_{\mathbf{X} \times \mathbb{G}} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{X} \times \mathbb{G})$. Pode-se definir um endomorfismo de reticulados $\mathcal{U} : \mathbb{G}^{\mathbf{X}} \to \mathcal{U}_{\mathbf{X} \times \mathbb{G}}$ que associa uma imagem em tons de cinza $\mathbf{a} \in \mathbb{G}^{\mathbf{X}}$ a sua umbra $\mathcal{U}(\mathbf{a})$, onde $\mathcal{U}(\mathbf{a})$ é definida como segue [94]:

$$\mathcal{U}(\mathbf{a}) = \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbf{X} \times \mathbb{G}' : t \leq \mathbf{a}(\mathbf{x})\}\ . \tag{2.15}$$

Aqui, $\mathbb{G}'$ denota $\mathbb{G} \setminus \{-\infty, \infty\}$.

Da definição de $\mathcal{U}(\mathbf{a})$, tem-se que o homomorfismo de reticulados $\mathcal{U} : \mathbb{G}^{\mathbf{X}} \to \mathcal{U}_{\mathbf{X} \times \mathbb{G}}$ torna-se um isomorfismo de reticulados se o conjunto de tons de cinza $\mathbb{G}$ é discreto, i.e., se $\mathbb{G} = \bar{\mathbb{Z}}$.

O inverso desse isomorfismo é $\mathcal{T} : \mathcal{U}_{\mathbf{X}\times\mathbb{G}} \to \mathbb{G}^{\mathbf{X}}$, onde $\mathcal{T}(U)$ é dado pela seguinte equação:

$$(\mathcal{T}(U))(\mathbf{x}) = \bigvee \{t \in \mathbb{G} : (\mathbf{x}, t) \in U\} \ , \ \forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{X}\,. \tag{2.16}$$

O isomorfismo $\mathcal{T}(U)$ é chamado *topo da umbra* U. No caso em tons de cinza contínuos, i.e., $\mathbb{G} = \bar{\mathbb{R}}$, o homomorfismo $\mathcal{U}$ é injetivo mas não é sobrejetivo. Entretanto, para ambos os casos, discreto e contínuo, define-se a dilatação da umbra $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}(\mathbf{a}, \mathbf{s})$ e a erosão da umbra $\mathcal{E}_{\mathcal{U}}(\mathbf{a}, \mathbf{s})$ como segue.

Definição 2.12 (Erosão da Umbra e Dilatação da Umbra [94, 106]). *Sejam* $\mathbf{a}, \mathbf{s} \in \mathbb{G}^{\mathbf{X}}$. *A erosão da umbra* $\mathcal{E}_{\mathcal{U}}(\mathbf{a}, \mathbf{s})$ *e a dilatação da umbra* $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}(\mathbf{a}, \mathbf{s})$ *da imagem* $\mathbf{a}$ *pelo elemento estruturante* $\mathbf{s}$ *são definidas da seguinte maneira, respectivamente:*

$$\mathcal{E}_{\mathcal{U}}(\mathbf{a}, \mathbf{s}) = \mathcal{T}\left(\mathcal{E}_{\mathcal{B}}\left(\mathcal{U}(\mathbf{a}), \mathcal{U}(\mathbf{s})\right)\right) \quad e \quad \mathcal{D}_{\mathcal{U}}(\mathbf{a}, \mathbf{s}) = \mathcal{T}\left(\mathcal{D}_{\mathcal{B}}\left(\mathcal{U}(\mathbf{a}), \mathcal{U}(\mathbf{s})\right)\right)\,. \tag{2.17}$$

Na prática, considera-se a seguinte formulação alternativa para $\mathcal{E}_{\mathcal{U}}$ e $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}$.

Proposição 2.13 (Formulação Alternativa para a Erosão e Dilatação da Umbra [44, 94]). *Sejam* $\mathbf{a}, \mathbf{s} \in \mathbb{G}^{\mathbf{X}}$. *A erosão da umbra* $\mathcal{E}_{\mathcal{U}}(\mathbf{a}, \mathbf{s})$ *e a dilatação da umbra* $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}(\mathbf{a}, \mathbf{s})$ *da imagem* $\mathbf{a}$ *pelo elemento estruturante* $\mathbf{s}$ *são descritas pelas seguintes equações, respectivamete:*

$$\mathcal{E}_{\mathcal{U}}(\mathbf{a}, \mathbf{s})(\mathbf{x}) = \bigwedge_{\mathbf{y}\in\mathbf{X}} \left(\mathbf{a}(\mathbf{y}) +' \left(-\mathbf{s}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})\right)\right) \quad e \quad \mathcal{D}_{\mathcal{U}}(\mathbf{a}, \mathbf{s})(\mathbf{x}) = \bigvee_{\mathbf{y}\in\mathbf{X}} \left(\mathbf{a}(\mathbf{y}) + \bar{\mathbf{s}}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})\right). \tag{2.18}$$

Observação. As operações "$+$" and "$+'$" coincidem com a soma usual em $\mathbb{R}$ exceto para ∞ e $-\infty$ onde valem as seguintes equações:

$$\infty + (-\infty) = (-\infty) + \infty = -\infty \quad \mathbf{e} \quad \infty +' (-\infty) = (-\infty) +' \infty = \infty\,. \tag{2.19}$$

Finalmente, a seguinte proposição garante que o par $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}$ e $\mathcal{E}_{\mathcal{U}}$ forma uma adjunção em $\mathbb{G}^{\mathbf{X}}$. Além disso, $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}$ e $\mathcal{E}_{\mathcal{U}}$ representam operadores duais com respeito à negação $\boldsymbol{\nu}$ dada em (2.14).

Proposição 2.14 (Adjunção dos Operadores de Umbra [44]). *A erosão* $\mathcal{E}_{\mathcal{U}}$ *e a dilatação* $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}$ *são operadores duais com respeito à adjunção e com respeito à negação* $\boldsymbol{\nu}$.

2.4 Principais Conceitos da Teoria dos Conjuntos Nebulosos

A teoria dos conjuntos nebulosos estende a teoria clássica dos conjuntos. Essa teoria matemática foi introduzida por Lotfi Zadeh como uma ferramenta para modelar a imprecisão e a ambiguidade que surge em sistemas complexos [126].

Um conjunto nebuloso é definido como uma função $\mathbf{a}$ de um conjunto $\mathbf{X}$ para o intervalo $[0, 1]$. A função $\mathbf{a}$ é referida como *função de pertinência* e o valor $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ representa o *grau de pertinência* de $\mathbf{x}$ no conjunto nebuloso $\mathbf{a}$. A classe dos conjuntos nebulosos em $\mathbf{X}$ é denotada por $\mathcal{F}(\mathbf{X}) = [0, 1]^{\mathbf{X}}$. Finalmente, identifica-se um conjunto clássico $\mathbf{A} \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$ com um conjunto nebuloso $\mathbf{a} \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$ como segue:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1\,, & \text{se } \mathbf{x} \in \mathbf{A}, \\ 0\,, & \text{caso contrário}\,. \end{cases} \tag{2.20}$$

Desse modo, um conjunto clássico $\mathbf{A}$ pode ser visto como um caso particular de um conjunto nebuloso onde o valor da função de pertinência pertence ao conjunto $\{0, 1\}$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$.

Note que a teoria dos conjuntos nebulosos pode ser usada para o desenvolvimento de operadores de imagens, pois uma imagem $\mathbf{a} : \mathbf{X} \to [0, 1]$ pode ser interpretada como um conjunto nebuloso em $\mathbf{X}$. De agora em diante, iremos nos referir a uma imagem $\mathbf{a} \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$ como uma *imagem nebulosa*. Em particular, uma imagem nebulosa $\mathbf{a} \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$ pode ser representada por um vetor sempre que $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ for um conjunto finito com n elementos. Nesse caso, tem-se $\mathbf{a} = [a_1, \ldots, a_n]^T \in [0, 1]^n$, onde $a_i = \mathbf{a}(\mathbf{x}_i)$, para $i = 1, \ldots, n$.

2.4.1 Conjunção, Disjunção, Implicação e Negação Nebulosa

Essa subseção apresenta as definições de conjunção, disjunção, implicação e negação nebulosa. Esses conceitos, advindos da lógica nebulosa, serão utilizados posteriormente para o desenvolvimento de uma classe de memórias associativas morfológicas nebulosas.

Definição 2.15 (Conjunção Nebulosa e T-norma [27, 77, 55]). *Uma* conjunção nebulosa *é um operador crescente $C : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ que satisfaz $C(0, 0) = C(0, 1) = C(1, 0) = 0$ e $C(1, 1) = 1$, i.e., C estende a conjunção clássica. Em particular, uma conjunção nebulosa comutativa e associativa $T : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ que satisfaz $T(x, 1) = x$ para todo $x \in [0, 1]$ é chamada* norma triangular *ou simplesmente* t-norma.

Exemplo 1 (Mínimo, Produto, Conjução de Lukasiewicz e Conjunção de Kleene e Dienes). O mínimo e o produto são exemplos de conjunções nebulosas. Outras conjunções

nebulosas foram introduzidas por Lukasiewicz e Kleene e Dienes [27]:

$$C_M(x,y) = x \wedge y\,, \tag{2.21}$$

$$C_P(x,y) = xy\,, \tag{2.22}$$

$$C_L(x,y) = 0 \vee (x+y-1)\,, \tag{2.23}$$

$$C_K(x,y) = \begin{cases} 0, & y \leq 1-x\,, \\ y, & y > 1-x\,. \end{cases} \tag{2.24}$$

As conjunções nebulosas C_M, C_P e C_L são também exemplos de t-normas.

Definição 2.16 (Disjunção Nebulosa e S-norma [73, 77]). *Uma* disjunção nebulosa *é um operador crescente* $D : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *que satisfaz* $D(1,1) = D(0,1) = D(1,0) = 1$ *e* $D(0,0) = 0$*. Em particular, uma disjunção nebulosa comutativa e associativa* $S : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ *que satisfaz* $S(x,0) = x$ *para todo* $x \in [0,1]$ *é chamada* co-norma triangular *ou simplesmente* s-norma.

Exemplo 2 (Máximo, Soma Probabilística, Disjunção de Lukasiewicz e Disjunção de Kleene e Dienes). O máximo e a soma probabilística são exemplos de disjunções nebulosas. Outras disjunções nebulosas estão apresentadas abaixo:

$$D_M(x,y) = x \vee y\,, \tag{2.25}$$

$$D_P(x,y) = x + y - xy\,, \tag{2.26}$$

$$D_L(x,y) = 1 \wedge (x+y)\,, \tag{2.27}$$

$$D_K(x,y) = \begin{cases} 1, & x \geq 1-y\,, \\ y, & x < 1-y\,. \end{cases} \tag{2.28}$$

As disjunções nebulosas D_M, D_P e D_L são também exemplos de s-normas.

Embora foram apresentados os conceitos gerais de conjunção e disjunção nebulosa, em geral, a teoria dos conjuntos nebulosos trabalha apenas com t-normas e s-normas.

Definição 2.17 (Implicação Nebulosa [27, 77]). *Um operador* $I : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *decrescente no primeiro argumento e crescente no segundo argumento é chamado implicação nebulosa se* I *estende a implicação clássica usual em* $\{0,1\} \times \{0,1\}$*, i.e.,* $I(0,0) = I(0,1) = I(1,1) = 1$ *e* $I(1,0) = 0$*.*

Exemplo 3 (Implicação de Gödel, Implicação de Goguen, Implicação de Lukasiewicz e Implicação de Kleene e Dienes). Exemplos de implicações nebulosas foram introduzidos

por Gödel, Goguen, Lukasiewicz e Kleene e Dienes, e são dadas pelas seguintes equações, respectivamente [27].

$$I_M(x,y) = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ y, & x > y \end{cases}, \tag{2.29}$$

$$I_P(x,y) = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ y/x, & x > y \end{cases}, \tag{2.30}$$

$$I_L(x,y) = 1 \wedge (y - x + 1), \tag{2.31}$$

$$I_K(x,y) = (1-x) \vee y. \tag{2.32}$$

Definição 2.18 (Negação Nebulosa [27]). *Uma negação nebulosa é uma negação em* $[0,1]$*. Em outras palavras, uma negação nebulosa* N *é uma bijeção involutiva* $N : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *decrescente.*

Exemplo 4 (Negações Nebulosas N_S, N_D e N_R). Os seguintes operadores representam negações nebulosas.

$$N_S(x) = 1 - x, \tag{2.33}$$

$$N_D(x) = \frac{1-x}{1+px}, \quad p > -1, \tag{2.34}$$

$$N_R(x) = \sqrt[p]{1-x^p}, \quad p \in (0,\infty). \tag{2.35}$$

A negação nebulosa N_S é referida como negação nebulosa usual.

2.4.2 Relações entre os Operadores de Conjunção, Disjunção e Implicação Nebulosa

Uma conjunção nebulosa pode estar relacionada com uma implicação nebulosa através de uma relação de dualidade com respeito à adjunção [27]. Diz-se que uma conjunção nebulosa C e uma implicação nebulosa I formam uma *adjunção* se e somente se $C(x,\cdot)$ e $I(x,\cdot)$ for uma adjunção para todo $x \in [0,1]$. Nesse caso, C e I são ditos operadores *adjuntos*. Por exemplo, os pares (I_M, C_M), (I_P, C_P), (I_L, C_L), e (I_K, C_K) formam adjunções.

Se C é uma conjunção nebulosa e I é uma implicação nebulosa tal que C e I formam uma adjunção, então, pela proposição 2.5, $I(x,\cdot)$ é uma erosão e $C(x,\cdot)$ é uma dilatação em $[0,1]$ para todo $x \in [0,1]$. Outra consequência da proposição 2.5, para toda implicação nebulosa I existe no máximo uma conjunção nebulosa C, e vice-versa, tal que I e C formam uma

adjunção. Se o par (I, C) formar uma adjunção então

$$I(x, y) = \bigvee \{z \in [0, 1] : C(x, z) \leq y\}, \tag{2.36}$$

para todo $x, y \in [0, 1]$. A implicação I que satisfaz (2.36) é referida como a *R-implicação associada a conjunção* C [77, 75]. Em particular, uma R-implicação sempre está bem definida se a conjunção nebulosa em (2.36) for uma t-norma contínua, pois um operador contínuo representa uma dilatação [44]. Em outras palavras, dada uma t-norma contínua, obtem-se a implicação adjunta através de (2.36). Denota-se por I_T a R-implicação associada a uma t-norma contínua T.

Note que existem implicações nebulosas que não representam erosões e existem conjunções nebulosas que não são dilatações. Além disso, dado um par adjunto $(\tilde{I}, \tilde{C})$, $\tilde{I}$ não é necessariamente uma implicação nebulosa e/ou $\tilde{C}$ não é necessariamente uma conjunção nebulosa. Exemplos desses fatos podem ser encontrados em [114].

Exemplo 5 (Implicação Nebulosa I_{CE}). Considere a seguinte implicação nebulosa:

$$I_{CE}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = 1 \text{ e } y = 0, \\ 1, & \text{caso contrário .} \end{cases} \tag{2.37}$$

Note que $I_{CE}(1, \cdot)$ não satisfaz (2.2) pois

$$I_{CE}\left(1, \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n}\right) = I_{CE}(1, 0) = 0, \tag{2.38}$$

enquanto que

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} I_{CE}\left(1, \frac{1}{n}\right) = \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} 1 = 1. \tag{2.39}$$

Logo, I_{CE} é uma implicação nebulosa, mas $I_{CE}(x, \cdot)$ não representa uma erosão.

Uma conjunção nebulosa também pode estar associada a uma disjunção nebulosa através de uma relação de dualidade com respeito à negação [114]. Diz-se que uma conjunção nebulosa C e uma disjunção nebulosa D são operadores *duais com respeito à negação nebulosa* N se e somente se $D(x, \cdot)$ for a negação de $C(N(x), \cdot)$, para todo $x \in [0, 1]$. Em outras palavras, os operadores C e D são duais com respeito à negação nebulosa N se e somente se as seguintes equações valerem para todo $x, y \in [0, 1]$ [77].

$$D(x, y) = N\left(C\left(N(x), N(y)\right)\right) \quad \text{ou} \quad C(x, y) = N\left(D\left(N(x), N(y)\right)\right). \tag{2.40}$$

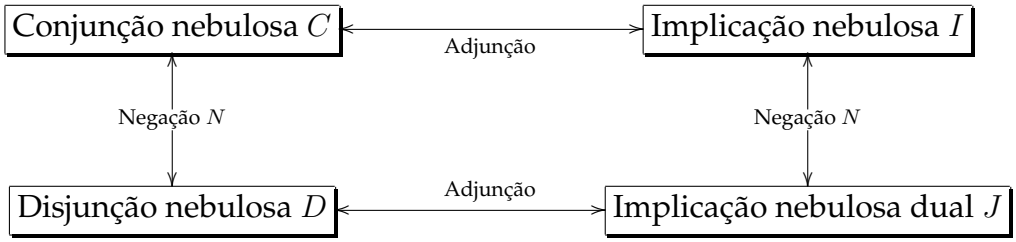

Fig. 2.2: Esquema relacionando conjunção, disjunção e implicação nebulosa através dos conceitos de adjunção ou negação nebulosa.

Observe que se C é uma conjunção nebulosa tal que $C(x,\cdot)$ é uma dilatação para todo $x \in [0,1]$, então a disjunção nebulosa D dual a C com respeito à uma dada negação nebulosa N é tal que $D(x,\cdot)$ representa uma erosão para todo $x \in [0,1]$. Analogamente, se D é uma disjunção nebulosa que realiza uma erosão em $[0,1]$ no segundo argumento, então a conjunção nebulosa C dual de D com respeito à uma negação nebulosa N realiza uma dilatação no segundo argumento.

A figura 2.2 apresenta uma adaptação do esquema da figura 2.1 relacionando os operadores de conjunção, disjunção e implicação nebulosa por meio das relações de dualidade com respeito à uma negação nebulosa ou adjunção. Esse esquema supõe que valem todas as relações de dualidade.

Note que o esquema da figura 2.2 possui um operador J chamado *implicação nebulosa dual*, ou simplesmente *implicação dual*. O operador J é tal que (D,J) representa uma adjunção, i.e., os operadores $D(x,\cdot)$ e $J(x,\cdot)$ formam uma adjunção para todo $x \in [0,1]$. Logo, $J(x,\cdot)$ representa uma dilatação para todo $x \in [0,1]$. Além disso, a seguinte equação vale para todo $x, y \in [0,1]$ (cf. proposição 2.5):

$$J(x,y) = \bigwedge \{z \in [0,1] : D(x,z) \geq y\}\,. \tag{2.41}$$

A equação (2.41) relaciona a implicação dual com uma disjunção nebulosa. Em particular, a equação (2.41) está bem definida sempre que a disjunção nebulosa for uma s-norma contínua. Tem-se também que a implicação dual J é o operador dual de I com respeito à uma negação nebulosa N (cf. figura 2.2). Precisamente, $J(x,\cdot) = I^N(N(x),\cdot)$, ou seja, J é dado pela seguinte equação para todo $x, y \in [0,1]$:

$$J(x,y) = N\left(I\left(N(x), N(y)\right)\right)\,. \tag{2.42}$$

De (2.41) e (2.42) conclui-se que $J : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ é um operador decrescente no

primeiro argumento e crescente no segundo argumento que satisfaz $J(0,0) = J(1,0) = J(1,1) = 0$ e $J(0,1) = 1$. Portanto, apesar do nome "implicação nebulosa dual", J não é uma implicação nebulosa segundo a definição 2.17. O operador J é na verdade o operador dual de uma implicação nebulosa I com respeito à uma negação N.

Exemplo 6 (Implicação Dual de Gödel, Goguen e Lukasiewicz). Os seguintes operadores representam as implicações duais de Gödel, Goguen e Lukasiewicz, respectivamente.

$$J_M(x,y) = \begin{cases} 0, & x \geq y \\ y, & x < y \end{cases}, \tag{2.43}$$

$$J_P(x,y) = \begin{cases} 0, & x \geq y \\ \frac{y-x}{1-x}, & x < y \end{cases}, \tag{2.44}$$

$$J_L(x,y) = 0 \vee (y - x), \tag{2.45}$$

2.4.3 Medidas de Inclusão e Intersecção Nebulosa

Acredita-se que a abordagem mais geral da morfologia matemática nebulosa está baseada nos conceitos de medida de inclusão e medida de intersecção nebulosa.

Definição 2.19 (Medidas de Inclusão e Intersecção Nebulosas [113, 114]). *Uma medida de inclusão nebulosa é uma aplicação* $Inc : \mathcal{F}(\mathbf{X}) \times \mathcal{F}(\mathbf{X}) \to [0,1]$ *tal que a restrição para* $\mathcal{P}(\mathbf{X}) \times \mathcal{P}(\mathbf{X})$ *coincide com a inclusão para conjuntos clássicos. De um modo análogo, uma medida de intersecção nebulosa é definida como sendo uma aplicação* $Sec : \mathcal{F}(\mathbf{X}) \times \mathcal{F}(\mathbf{X}) \to [0,1]$ *tal que a restrição para* $\mathcal{P}(\mathbf{X}) \times \mathcal{P}(\mathbf{X})$ *coincide com a intersecção de conjuntos clássicos.*

O valor $Inc(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ é interpretado como o *grau de inclusão* do conjunto nebuloso $\mathbf{a}$ no conjunto nebuloso $\mathbf{b}$ enquanto que $Sec(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ representa o *grau de intersecção* dos conjuntos nebulosos $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.

Vários pesquisadores apresentaram propostas de medidas de inclusão nebulosa. Entre as diferentes propostas, encontra-se as medidas de inclusão de Zadeh [126], Bandler e Kohout [4], Sinha e Dougherty [100, 101] e Kitainik [54]. Pode-se verificar que essas definições estendem a noção de inclusão de conjuntos clássicos.

Pode-se obter uma medida de inclusão nebulosa ou uma medida de intersecção nebulosa "fuzzificando" diretamente a inclusão ou a intersecção de conjuntos clássicos como segue. Considere conjuntos clássicos $\mathbf{A}, \mathbf{B} \subseteq \mathbf{X}$. Sabe-se que $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ se e somente se "$\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ implica $\mathbf{x} \in \mathbf{B}$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$", i.e.,

$$Inc_c(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \bigwedge_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} I_c\left(\mathbf{a}(\mathbf{x}), \mathbf{a}(\mathbf{x})\right), \tag{2.46}$$

onde $I_c : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$ representa a implicação clássica e $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são os conjuntos nebulosos que correspondem aos conjuntos clássicos $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, respectivamente. Em outras palavras, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$ são definidos através da equação (2.20). Pode-se mostrar também que

$$Sec_c(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \bigvee_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} C_c\left(\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{B}(\mathbf{x})\right), \tag{2.47}$$

corresponde à intersecção de conjuntos clássicos. Aqui, $C_c : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$ representa a conjunção clássica. As versões nebulosas de (2.46) e (2.47) fornecem as seguintes medidas de inclusão e intersecção nebulosa:

Definição 2.20 (Inclusão Inf-I e Intersecção Sup-C [4]). *Considere conjuntos nebulosos* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$. *Uma medida de inclusão nebulosa* $Inc : \mathcal{F}(\mathbf{X}) \times \mathcal{F}(\mathbf{X}) \to [0,1]$ *é dita uma intersecção Inf-I se e somente se essa é descrita pela equação*

$$Inc(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \bigwedge_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} I(\mathbf{a}(\mathbf{x}), \mathbf{b}(\mathbf{x})). \tag{2.48}$$

Analogamente, diz-se que uma medida de intersecção nebulosa $Sec : \mathcal{F}(\mathbf{X}) \times \mathcal{F}(\mathbf{X}) \to [0,1]$ *é uma intersecção Sup-C se e somente se* Sec *é dada pela equação*

$$Sec(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \bigvee_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} C(\mathbf{a}(\mathbf{x}), \mathbf{b}(\mathbf{x})). \tag{2.49}$$

Uma inclusão Inf-I é também referida como *inclusão nebulosa de Bandler-Kohout* [4]. Note que a restrição de uma medida de inclusão Inf-I para $\mathcal{P}(\mathbf{X}) \times \mathcal{P}(\mathbf{X})$ coincide com a inclusão clássica, pois I_c representa a restrição de I para $\{0,1\} \times \{0,1\}$. Analogamente, uma intersecção Sup-C aplicada à conjuntos clássicos coincide com a intersecção clássica.

Finalmente, observe que diferentes implicações e conjunções nebulosas produzem diferentes inclusões Inf-I e intersecções Sup-C, respectivamente. Dada uma inclusão Inf-I ou uma intersecção Sup-C particular, indica-se a implicação nebulosa ou a conjunção nebulosa utilizada através de um sub-índice. Por exemplo, Inc_L denota a inclusão Inf-I baseada na implicação de Lukasiewicz.

2.5 Morfologia Matemática Nebulosa Baseada em Medidas de Inclusão e Intersecção Nebulosa

O primeiro trabalho envolvendo morfologia matemática e conceitos da teoria dos conjuntos nebulosos foi apresentado por Goetcherian em 1980 [33]. Várias propostas surgiram posteriormente, entre elas encontra-se os trabalhos de Sinha e Dougherty [100, 101], Bloch e Maître [10], De Baets [25], Deng e Heijmans [27] e Maragos [66]. Comparações e revisões das diferentes abordagens para a morfologia matemática nebulosa podem ser encontradas nos artigos [73, 114].

De um modo geral, a morfologia matemática nebulosa consiste de todos os operadores morfológicos cujos domínio e contra-domínio são classes de conjuntos nebulosos. Por exemplo, uma dilatação nebulosa é uma dilatação $\delta : \mathcal{F}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbf{Y})$, onde $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ representam universos de discurso quaisquer. Entretanto, Sussner e Valle observaram que as principais abordagens da morfologia matemática nebulosa podem ser obtidas a partir da morfologia matemática binária usando os conceitos de medida de inclusão nebulosa e medida de intersecção nebulosa [114]. Nesse caso particular, a morfologia matemática nebulosa representa uma extensão da morfologia matemática binária baseada na teoria dos conjuntos nebulosos. Essa seção apresenta somente a definição dos operadores de dilatação e erosão baseados em medidas de inclusão e intersecção nebulosas.

Lembre-se que a erosão binária de um conjunto $\mathbf{A}$ por um elemento estruturante $\mathbf{S}$ é definida como sendo o conjunto de todos os pontos $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ tais que o elemento estruturante transladado $\mathbf{S_x}$ está contido em $\mathbf{A}$. Formalmente, tem-se a seguinte definição equivalente para $\mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\mathbf{A}, \mathbf{S})$:

$$\mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\mathbf{A}, \mathbf{S}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{X} : Inc_c(\mathbf{S_x}, \mathbf{A}) = 1\}, \tag{2.50}$$

onde $Inc_c : \mathcal{P}(\mathbf{X}) \times \mathcal{P}(\mathbf{X}) \rightarrow \{0, 1\}$ representa a inclusão de conjuntos clássicos, i.e., $\mathbf{S_x} \subseteq \mathbf{A}$ se e somente se $Inc_c(\mathbf{S_x}, \mathbf{A}) = 1$. Pode-se também definir a dilatação binária $\mathcal{D}_{\mathcal{B}}(\mathbf{A}, \mathbf{S})$ de $\mathbf{A}$ por $\mathbf{S}$ como o conjunto de todos os pontos $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ tais que a reflexão de $\mathbf{S_x}$ atinge o conjunto $\mathbf{A}$. Essa noção pode ser descrita em termos da intersecção de conjuntos clássicos $Sec_c : \mathcal{P}(\mathbf{X}) \times \mathcal{P}(\mathbf{X}) \rightarrow \{0, 1\}$, onde $Sec_c(\bar{\mathbf{S}}_\mathbf{x}, \mathbf{A}) = 1$ se e somente se $\mathbf{A} \cap \bar{\mathbf{S}}_\mathbf{x} \neq \emptyset$. Dessa forma, tem-se

$$\mathcal{D}_{\mathcal{B}}(\mathbf{A}, \mathbf{S}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{X} : Sec(\bar{\mathbf{S}}_\mathbf{x}, \mathbf{A}) = 1\}. \tag{2.51}$$

Com base nessas observações, pode-se introduzir a seguinte classe de erosões e dilatações nebulosas.

Definição 2.21 (Erosões e dilatações nebulosas baseadas em medidas de inclusão e inter-

secção nebulosas [73, 116]). *Seja Inc uma medida de inclusão nebulosa tal que $Inc(\mathbf{s}, \cdot)$ comuta com o ínfimo para todo $\mathbf{s} \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$. Dado uma imagem nebulosa $\mathbf{a} \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$ e um elemento estruturante nebuloso $\mathbf{s} \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$, define-se a* erosão nebulosa $\mathcal{E}$ de $\mathbf{a}$ por $\mathbf{s}$ referente à Inc *através da seguinte equação:*

$$\mathcal{E}(\mathbf{a}, \mathbf{s})(\mathbf{x}) = Inc(\mathbf{s}_{\mathbf{x}}, \mathbf{a}), \tag{2.52}$$

onde $\mathbf{s}_{\mathbf{x}}$ é a translação de $\mathbf{s}$ por $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$.

Analogamente, uma dilatação nebulosa $\mathcal{D} : \mathcal{F}(\mathbf{X}) \times \mathcal{F}(\mathbf{X}) \to \mathcal{F}(\mathbf{X})$ baseada em uma certa medida de intersecção nebulosa Sec é definida através da equação:

$$\mathcal{D}(\mathbf{a}, \mathbf{s})(\mathbf{x}) = Sec(\bar{\mathbf{s}}_{\mathbf{x}}, \mathbf{a}), \tag{2.53}$$

se e somente se $Sec(\mathbf{s}, \cdot)$ comuta com o supremo para todo $\mathbf{s} \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$. Aqui, $\bar{\mathbf{s}}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \mathbf{s}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$.

Note que $\mathcal{E}$ e $\mathcal{D}$ estendem a erosão binária $\mathcal{E}_{\mathcal{B}} : \mathcal{P}(\mathbf{X}) \times \mathcal{P}(\mathbf{X}) \to \mathcal{P}(\mathbf{X})$ e a dilatação binária $\mathcal{D}_{\mathcal{B}} : \mathcal{P}(\mathbf{X}) \times \mathcal{P}(\mathbf{X}) \to \mathcal{P}(\mathbf{X})$ para o caso nebuloso, respectivamente. Além disso, $\mathcal{E}(\cdot, \mathbf{s})$ representa uma erosão se e somente se a medida de inclusão nebulosa $Inc(\mathbf{s}, \cdot)$ comutar com o ínfimo para todo $\mathbf{s} \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$. Caso contrário, o operador dado por (2.52) não representa uma erosão (nebulosa). Uma observação análoga pode ser feita para a dilatação nebulosa e a medida de intersecção nebulosa. Finalmente, os operadores apresentados na definição 2.21 não correspondem ao caso mais geral de dilatação e erosão nebulosa. Portanto, deve-se ter sempre em mente que os operadores definidos em (2.52) e (2.53) estão baseados em uma medida de inclusão nebulosa e uma medida de interseção nebulosa, respectivamente.

Em analogia ao caso em tons de cinza, o par $(\mathcal{E}, \mathcal{D})$ representa uma *adjunção* se e somente se $(\mathcal{E}(\cdot, \mathbf{s}), \mathcal{D}(\cdot, \mathbf{s}))$ representar uma adjunção para todo elemento estruturante $\mathbf{s} \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$. Além disso, $\mathcal{E}$ e $\mathcal{D}$ são ditos operadores duais com respeito à uma negação $\mathbf{N}$ se e somente se $\mathcal{D}(\cdot, \mathbf{s}) = \mathcal{E}^{\mathbf{N}}(\cdot, \bar{\mathbf{s}})$ para todo $\mathbf{s} \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$. Uma negação $\mathbf{N}$ é geralmente definida aplicando uma negação nebulosa $N : [0, 1] \to [0, 1]$ pontualmente, i.e., $\mathbf{N}(\mathbf{a})(\mathbf{x}) = N(\mathbf{a}(\mathbf{x}))$ para todo $\mathbf{a} \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$ e $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$.

2.5.1 Erosão Nebulosa Inf-I e Dilatação Nebulosa Sup-C

Na seção 2.4.3 foram apresentadas as medidas de inclusão Inf-I e as medidas de intersecção Sup-C. Operadores $\mathcal{E}$ e $\mathcal{D}$ da definição 2.21 baseados nessas medidas são chamados *erosões Inf-I* e *dilatações Sup-C*, respectivamente.

Definição 2.22 (Erosão Nebulosa Inf-I e Dilatação Nebulosa Sup-C [114]). *Sejam $\mathbf{a}, \mathbf{s} \in$*

$\mathcal{F}(\mathbf{X})$. *Dado uma implicação nebulosa I tal que $I(s,\cdot)$ comuta com o ínfimo para todo $s \in [0,1]$, define-se a* erosão nebulosa Inf-I *de* $\mathbf{a}$ *por* $\mathbf{s}$ *através da equação:*

$$\mathcal{E}(\mathbf{a},\mathbf{s})(\mathbf{x}) = \bigwedge_{\mathbf{y}\in\mathbf{X}} I(\mathbf{s}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}), \mathbf{a}(\mathbf{y}))\,. \tag{2.54}$$

De um modo análogo, dado uma conjunção nebulosa C tal que $C(s,\cdot)$ comuta com o supremo para todo $s \in [0,1]$, define-se a dilatação nebulosa Sup-C *de* $\mathbf{a}$ *por* $\mathbf{s}$ *como segue:*

$$\mathcal{D}(\mathbf{a},\mathbf{s})(\mathbf{x}) = \bigvee_{\mathbf{y}\in\mathbf{X}} C(\bar{\mathbf{s}}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}), \mathbf{a}(\mathbf{y}))\,. \tag{2.55}$$

Observação. Indica-se com um sub-índice não caligrafado a implicação e a conjunção nebulosa empregada na definição da erosão nebulosa Inf-I e da dilatação nebulosa Sup-C, respectivamente. Por exemplo, $\mathcal{E}_M$ denota a erosão nebulosa Inf-I baseada na implicação de Gödel e $\mathcal{D}_M$ representa a dilatação nebulosa Sup-C baseada no mínimo como conjunção nebulosa.

Os operadores $\mathcal{E}(\cdot,\mathbf{s}) : \mathcal{F}(\mathbf{X}) \to \mathcal{F}(\mathbf{X})$ dados por (2.52) representam uma erosão se e somente se $Inc(\mathbf{s},\cdot)$ comuta com o ínfimo para todo $\mathbf{s} \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$. Pode-se mostrar que esse fato é verdadeiro para inclusões Inf-I se e somente se que $I(s,\cdot)$ é uma erosão para todo $s \in [0,1]$ [27]. Por esta razão, a definição de erosão nebulosa Inf-I contém a condição que $I(s,\cdot)$ representa uma erosão. Por exemplo, as implicações I_M, I_P, I_L e I_K comutam com o ínfimo no segundo argumento e portanto $\mathcal{E}_M$, $\mathcal{E}_P$, $\mathcal{E}_L$ e $\mathcal{E}_K$ representam erosões Inf-I. Se I_{CE} é a implicação nebulosa definida por (2.37) então pode-se mostar que $\tilde{\mathcal{E}}_{CE}$ não representa uma erosão Inf-I. Uma observação similar pode ser feita para o operador $\mathcal{D}$ definido em (2.55). É importante observar que esses detalhes passaram despercebidos em muitos trabalhos [25, 73].

O conceito de *adjunção* possui um papel fundamental na morfologia matemática nebulosa [27, 66]. A seguinte proposição relaciona a adjunção de I e C com a respectiva erosão Inf-I e dilatação Sup-C.

Proposição 2.23 (Condição Necessária e Suficiente para $(\mathcal{E},\mathcal{D})$ Ser uma Adjunção [27]). *Sejam I uma implicação nebulosa e C uma conjunção nebulosa. O par (I,C) forma uma adjunção em $[0,1]$ se e somente se o par $(\mathcal{E},\mathcal{D})$ dado pelas equações* (2.54) *e* (2.55) *formar uma adjunção em $\mathcal{F}(\mathbf{X})$.*

Capítulo 3

Redes Neurais Morfológicas Nebulosas

3.1 Redes Neurais Artificiais

Uma *Rede Neural Artificial* (ANN, Artificial Neural Network), ou simplesmente *rede neural*, é um modelo matemático inspirado no cérebro humano por sua habilidade de adquirir e armazenar conhecimento necessário para realizar uma dada tarefa. Devido a motivação biológica, os elementos básicos de processamento de uma rede neural são chamados *neurônios* ou *nós*.

Um neurônio artificial consiste dos seguintes elementos cuja representação gráfica está apresentada na figura 3.1 [42]:

1. Um conjunto de *pesos sinápticos* (ou *conexões sinápticas*), e uma operação binária que combina a entrada com a respectiva conexão sináptica.

2. Uma *regra de agregação* que combina as entradas dos neurônios ponderados com as respectivas conexões sinápticas.

3. Uma *função de ativação* com objetivo de introduzir não-linearidade no modelo ou confinar a saída do neurônio num dado intervalo.

Alguns modelos de neurônios também incluem um termo externo ou *bias*. Entretanto, na maioria dos casos, o bias pode ser interpretado como um peso sináptico conectado a uma entrada constante.

Uma rede neural artificial é caracterizada pelo *modelo do neurônio*, a *arquitetura* ou *topologia da rede* e a *regra de treinamento* ou *regra de aprendizado* [42]. Os elementos básicos de um neurônio artificial foram discutidos anteriormente. A *regra de aprendizado* corresponde ao processo que modifica os pesos sinápticos com a intenção de se atingir um dado objetivo.

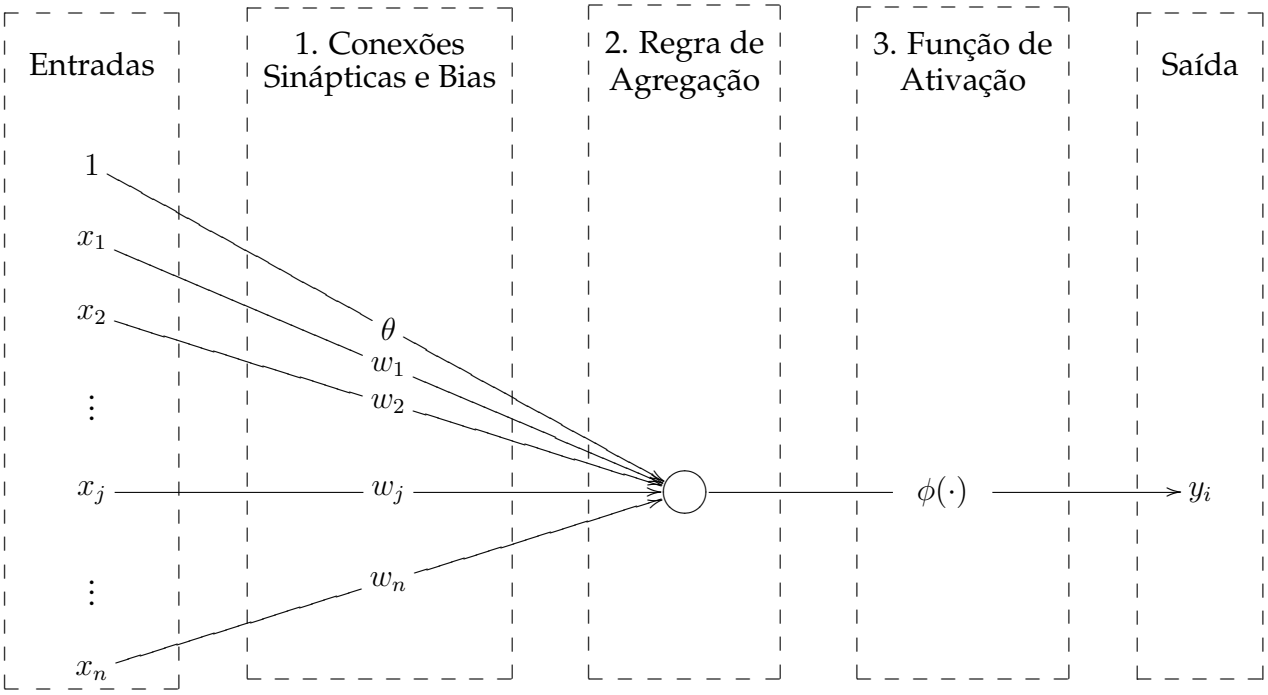

Fig. 3.1: Modelo geral de um neurônio.

No contexto de memória associativa, a regra de aprendizado corresponde à fase de armazenamento, i.e., a regra de aprendizado é aplicada para determinar uma aplicação G tal que $G(\mathbf{x}^\xi) = \mathbf{y}^\xi$ para todo $\xi = 1, \ldots, k$. A *topologia* de uma rede neural refere-se ao projeto da rede e ao modo como os neurônios são conectados. Em muitos casos, o projeto de uma rede consiste em camadas de neurônios. Geralmente, conta-se apenas as camadas de neurônios com pesos ajustaveis. Por exemplo, uma *rede de camada única* é uma rede neural com apenas uma camada de neurônios com pesos ajustaveis.

Uma rede neural pode ser progressiva ou recorrente. Numa *rede neural progressiva*, todas as conexões apontam para a direção da saída enquanto que uma *rede neural recorrente* possui conexões entre neurônios da mesma camada e/ou conexões apontando na direção da entrada. O *Perceptron de Múltiplas Camadas* (MLP, Multilayer Perceptron) [96, 95] e as *Redes de Função de Base Radial* (RBFN, Radial Basis Function Networks) [80, 81] são exemplos de redes neurais progressivas. Por outro lado, a famosa *rede de Hopfield* [47, 45] representa um modelo de rede neural recorrente. Os principais modelos de redes neurais discutidos nessa tese são descritos por redes progressivas de camada única cuja representação gráfica encontra-se na figura 3.2.

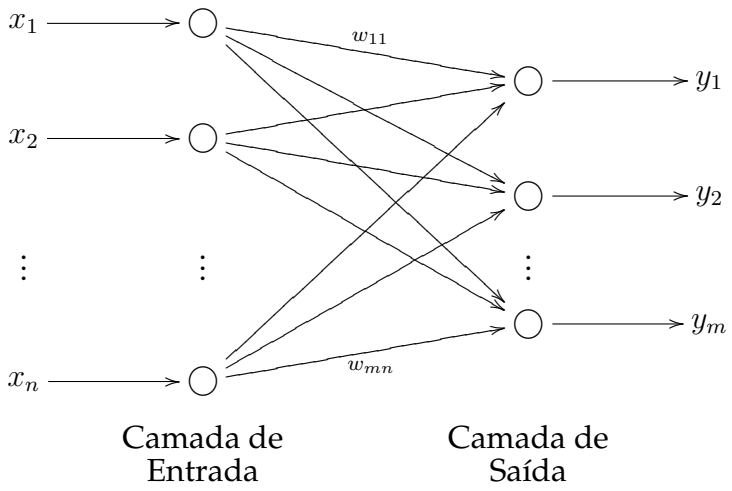

Fig. 3.2: Representação gráfica de uma rede neural progressiva de camada única.

3.2 Redes Neurais Nebulosas

Uma *Rede Neural Nebulosa* (FNN, Fuzzy Neural Network or Neurofuzzy Network), ou simplesmente *rede nebulosa*, é uma rede neural cujos padrões de entrada, padrões de saída e/ou conexões sinápticas representam conjuntos nebulosos [14, 31]. A definição acima abrange uma grande variedade de redes neurais baseadas na teoria dos conjuntos nebulosos que são geralmente divididas em duas classes: *redes (neurais) nebulosas regulares* e *redes (neurais) nebulosas híbridas*.

De um modo geral, uma rede nebulosa regular é projetada de um modo semelhante à uma rede neural não nebulosa, mas com a habilidade de trabalhar com informações nebulosas. Em outras palavras, uma rede nebulosa regular possui entradas e/ou pesos sinápticos nebulosos descritos por conjuntos ou números nebulosos. A função de ativação e todas as demais operações, incluindo a soma e a multiplicação, são definidas em termos do princípio de extensão de Zadeh [31, 77]. Apesar de não apresentar muitas propriedades atraentes, tal como a habilidade de aproximar funções contínuas, as redes nebulosas regulares foram aplicadas em problemas de classificação e controle [48].

Por outro lado, as redes nebulosas híbridas combinam entradas e conexões sinápticas nebulosas usando operações da lógica nebulosa, tais como conjunção, disjunção e implicação nebulosa. Aplicações de redes nebulosas híbridas inclui predição de séries temporais [3, 30] e nagevação autônoma [19]. Em contraste com as redes nebulosas regulares, certas redes nebulosas híbridas funcionam como aproximadores universais, i.e., elas são capazes de aproximar qualquer função contínua num domínio compacto [13]. Além disso, as redes nebu-

losas híbridas podem ser usadas para implementar sistemas de regras nebulosas da forma SE-ENTÃO [31]. As memórias associativas morfológicas nebulosas são exemplos de redes nebulosas híbridas.

3.3 Redes Neurais Morfológicas

Os primeiros modelos de *Redes Neurais Morfológicas* (MNN, Morphological Neural Networks) foram introduzidos por Ritter *et al.* no ínicio dos anos 1990 [24, 23, 85] e têm suas origens na álgebra de imagens [89, 93]. Em termos gerais, Ritter *et al.* observaram que a álgebra de imagens oferece ferramentas matemáticas necessárias para descrever tanto modelos clássicos de redes neurais, tais como o Perceptron e a rede de Hopfield [88, 92], como as operações de dilatação e erosão da abordagem da umbra para a morfologia matemática em tons de cinza [22, 92]. As redes neurais morfológicas foram aplicadas em problemas de reconhecimento automático de alvos, detecção de minas terrestres, reconhecimento de caracteres escritos a mão e previsão em mercados financeiros [2, 52, 32, 51].

Nessa tese, uma rede neural morfológica é definida como uma rede neural cujos neurônios realizam uma operação elementar da morfologia matemática, i.e., dilatação, erosão, anti-dilatação e anti-erosão. A definição acima, apresentada por Sussner [110], tem como inspiração o fato de qualquer operador entre reticulados completos poder ser expresso em termos de combinações de supremos e ínfimos dos operadores elementares da morfologia matemática [7]. Uma definição alternativa é apresentada na observação abaixo. Note que essa definição de redes neurais morfológicas inclui, em particular, os modelos de memórias associativas morfológicas introduzidas em [89]. Entretanto, exclui os modelos discutidos em [78, 83, 91, 108].

Observação. Uma rede neural morfológica também pode ser definida como uma rede neural onde os neurônios realizam operações elementares da morfologia matemática antes da aplicação da função de ativação, i.e., os primeiros passos de um neurônio artificial (referentes aos items 1 e 2) corresponde à uma operação elementar da morfologia matemática. Entretanto, nessa tese de doutorado, são tratados apenas modelos de neurônios morfológicos onde a função identidade é empregada como função de ativação e, nesse caso, as duas definições são equivalentes. É importante observar que um neurônio morfológico efetua uma operação não-linear durante a regra de agregação. Portanto, ao contrário dos modelos clássicos [42], o uso da função identidade como função de ativação em um neurônio morfológico não representa uma restrição severa nas aplicações de uma rede neural morfológica.

3.4 Redes Neurais Morfológicas Nebulosas

Uma *Rede Neural Morfológica Nebulosa* (FMNN, Fuzzy Morphological Neural Network) é simplesmente uma rede neural nebulosa (híbrida) que realiza uma operação elementar da morfologia matemática em cada nó. Em outras palavras, define-se uma rede neural morfológica nebulosa como uma rede neural cujos padrões de entrada, padrões de saída e conexões sinápticas representam conjuntos nebulosos (em um universo de discurso finito $\mathbf{X}$) e os neurônios realizam operações de dilatações, erosões, anti-dilatações e/ou anti-erosões. Nas próximas sub-seções são apresentados os principais modelos de neurônios que são usados nesse tipo de rede neural.

Para facilitar a apresentação, emprega-se a seguinte notação: O símbolo $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_n]^T$ corresponde ao vetor com as entradas nebulosas e y denota a saída nebulosa do neurônio. Os pesos sinápticos $w_i \in [0, 1]$ e $m_i \in [0, 1]$ serão agrupados em vetores $\mathbf{w} = [w_1, \ldots, w_n]^T$ e $\mathbf{m} = [m_1, \ldots, m_n]^T$, respectivamente. A letra grega θ e sua variação ϑ são usadas para representar o bias.

3.4.1 Neurônios Max-C e o Produto Max-C

Uma das classes mais gerais de nerônios nebulosos, conhecida como classe dos *neurônios lógicos agregativos*, foi introduzida por Pedrycz no início dos anos 1990 [76]. Os neurônios dessa classe recebem esse nome por realizarem uma agregação baseada em operadores da lógica nebulosa. Em particular, um *OU-neurônio* emprega uma s-norma como regra de agregação. Matematicamente, um OU-neurônio é descrito pela seguinte equação

$$y = \underset{j=1}{\overset{n}{S}} T\left(w_j, x_j\right) \,, \tag{3.1}$$

onde S é uma s-norma e T é uma t-norma. OU-neurônios são empregados em vários modelos de redes neurais nebulosas. Em particular, as memórias associativas de Kosko [62], bem como suas generalizações [18], estão baseadas nesse tipo de neurônio.

Pode-se adptar o modelo original de Pedrycz introduzindo um bias θ e substituindo a t-norma T por uma conjunção nebulosa mais geral C. Obtem-se assim um *OU-neurônio generalizado*, ou *neurônio S-C*, descrito pela seguinte equação:

$$y = \left[\underset{j=1}{\overset{n}{S}} C\left(w_j, x_j\right)\right] \,\mathrm{s}\, \theta \,. \tag{3.2}$$

Não faz sentido substituir a s-norma por uma disjunção nebulosa mais geral porque associ-

atividade e comutatividade são necessárias na regra de agregação de um neurônio artificial.

Em particular, tem-se um *neurônio max-C* quando S é a operação de máximo. Um neurônio max-C é descrito pela seguinte equação:

$$y = \left[\bigvee_{j=1}^{n} C\left(w_j, x_j\right)\right] \vee \theta\,. \tag{3.3}$$

Conjunções nebulosas particulares definem neurônios max-C específicos. Dado um neurônio max-C, indica-se a conjunção nebulosa empregada em (3.3) por meio de um sub-índice. Em particular, tem-se um neurônio max-T quando a conjunção nebulosa C em (3.3) for uma t-norma. Uma notação semelhante é empregada para descrever os neurônios min-D e os neurônios min-I introduzidos mais adiante.

Os neurônios max-C são empregados em vários modelos de memórias associativas nebulosas. Por exemplo, as *Memórias Associativas Nebulosas* (FAMs, Fuzzy Associative Memories) de Kosko empregam neurônios max-C_M ou max-C_P [58, 62]. A FAM de Junbo [49] e o modelo de Liu [63] também estão baseados nos neurônios max-C_M. As *Memórias Associativas Nebulosas Generalizadas* (GFAMs, Generalized Fuzzy Associative Memories) de Chung e Lee [18] e as *Memórias Associativas Nebulosas Implicativas* (IFAMs, Implicative Fuzzy Associative Memories) [116, 121] estão baseadas nos neurônios max-T, onde T é uma t-norma. O capítulo 4 contém uma breve revisão dos principais modelos de memória associativa. As IFAMs são introduzidas no capítulo 5.

Um neurônio max-C pode ser descrito em termos de um produto matricial. Sejam $A \in [0,1]^{m\times k}$ e $B \in [0,1]^{k\times n}$ matrizes nebulosas, o *produto max-C* de A por B, denotado por $C = A \circ B$, é definido através da seguinte equação:

$$c_{ij} = \bigvee_{l=1}^{k} C(a_{il}, b_{lj}) \quad \text{para } \; i = 1, \ldots, m \; \text{ e } \; j = 1, \ldots, n\,. \tag{3.4}$$

Desse modo, um neurônio max-C também pode ser descrito pela equação

$$y = (\mathbf{w}^T \circ \mathbf{x}) \vee \theta\,, \tag{3.5}$$

onde $\mathbf{w}^T$ representa a transposta do vetor dos pesos sinápticos $\mathbf{w}$.

Note que um neurônio max-C representa uma aplicação $\mathcal{W} : [0,1]^n \to [\theta, 1]$ caracterizada pelo vetor $\mathbf{w}$ e o bias θ. Essa aplicação é dada pela seguinte equação para todo $\mathbf{x} \in [0,1]^n$.

$$\mathcal{W}(\mathbf{x}) = (\mathbf{w}^T \circ \mathbf{x}) \vee \theta\,, \tag{3.6}$$

Tem-se um *neurônio morfológico max-C* se $\mathcal{W}$ representar uma operação de dilatação. O seguinte teorema revela que os neurônios max-C_M, max-C_P, max-C_L e max-C_K representam neurônios morfológicos max-C. A demonstração do teorema 3.1 encontra-se no apêndice A.

Teorema 3.1 (Condição Necessária e Suficiente para um Neurônio Morfológico Max-C). *Um neurônio max-C descrito por* (3.6) *representa uma dilatação se e somente se $C(w, \cdot)$ for uma dilatação para todo $w \in [0, 1]$.*

3.4.2 Neurônios Min-D e o Produto Min-D

Resumidamente, um *neurônio min-D* é descrito pela seguinte equação:

$$y = \left[\bigwedge_{j=1}^{n} D\left(m_j, x_j\right) \right] \wedge \vartheta \,. \tag{3.7}$$

Um neurônio min-D pertence à uma classe generalizada dos neurônios lógicos agregativos de Pedrycz [76]. De fato, um neurônio min-D pode ser obtido a partir de um *E-neurônio* substituindo a s-norma por uma disjunção nebulosa geral, adicionando o bias e considerando o mínimo como t-norma [77]. As IFAMs duais são exemplos de memórias associativas morfológicas nebulosas descritas por neurônios min-D [116, 121].

Um neurônio min-D pode ser descrito em termos de um produto matricial. Considere $A \in [0, 1]^{m \times k}$ e $B \in [0, 1]^{k \times n}$, define-se o *produto min-D*, denotado por $D = A \bullet B$, através da equação:

$$d_{ij} = \bigwedge_{l=1}^{k} D(a_{il}, b_{lj}) \quad \text{para } \; i = 1, \ldots, m \; \text{ e } \; j = 1, \ldots, n \,. \tag{3.8}$$

Desse modo, um neurônio min-D também pode ser descrito pela equação

$$y = (\mathbf{m}^T \bullet \mathbf{x}) \wedge \vartheta \,, \tag{3.9}$$

onde $\mathbf{m} = [m_1, \ldots, m_n]^T$ é um vetor coluna.

Note que um neurônio min-D representa uma aplicação $\mathcal{M} : [0, 1]^n \to [0, \vartheta]$ caracterizada por $\mathbf{m}$ e ϑ. A aplicação $\mathcal{M}$ é definida como segue para todo $\mathbf{x} \in [0, 1]^n$.

$$\mathcal{M}(\mathbf{x}) = (\mathbf{m}^T \bullet \mathbf{x}) \wedge \vartheta \,. \tag{3.10}$$

De um modo análogo aos neurônios max-C, diz-se que um neurônio descrito por (3.9) representa um *neurônio morfológico min-D* se $\mathcal{M}$ representar uma operação de erosão. Pode-se

mostrar que um neurônio min-D representa uma erosão se e somente se $D(x, \cdot)$ for uma erosão para todo $x \in [0, 1]$. Os neurônios min-D_M, min-D_P, min-D_L e min-D_K são exemplos de neurônios morfológicos min-D.

3.4.3 Neurônios Min-I e o Produto Min-I

Os neurônios min-I estão baseados no produto min-I. Sejam $A \in [0, 1]^{m \times k}$ e $B \in [0, 1]^{k \times n}$, o *produto min-I* de A por B, denotado por $E = A \circledast B$, é definido em termos da seguinte equação:

$$e_{ij} = \bigwedge_{l=1}^{k} I(b_{lj}, a_{il}) \quad \text{para } \; i = 1, \ldots, m \; \text{ e } \; j = 1, \ldots, n \,. \tag{3.11}$$

Observação. Note que os termos b_{lj} e a_{il} em (3.11) aparecem propositalmente em posições diferentes das usuais.

O produto min-I é também empregado no armazenamento nebuloso implicativo que corresponde à fase de armazenamento de uma IFAM (cf. capítulo 5). É apresentado a seguir dois tipos de neurônios baseados no produto min-I.

Um *neurônio min-I pela esquerda* é definido através da equação

$$y = (\mathbf{x}^T \circledast \mathbf{w}) \wedge \vartheta = \left[\bigwedge_{j=1}^{n} I\left(w_j, x_j\right) \right] \wedge \vartheta \,. \tag{3.12}$$

Neurônios min-I pela esquerda são empregados, por exemplo, nas IFAMs adjuntas introduzidas no capítulo 5. Precisamente, uma IFAM adjunta está baseada em um neurônio min-I_T com bias $\vartheta = 1$, onde a implicação nebulosa I_T forma uma adjunção com uma t-norma T contínua. Logo, $T(x, \cdot)$ realiza uma dilatação e $I_T(x, \cdot)$ realiza uma erosão para todo $x \in [0, 1]$. Como consequência, os neurônios de uma IFAM adjunta realizam operações de erosão. De um modo geral, um neurônio min-I pela esquerda realiza uma operação de erosão se e somente se $I(x, \cdot)$ for uma erosão para todo $x \in [0, 1]$.

De um modo similar, um *neurônio min-I pela direita* é definido através da seguinte equação para todo $\mathbf{x} \in [0, 1]^n$:

$$y = (\mathbf{m}^T \circledast \mathbf{x}) \wedge \vartheta = \left[\bigwedge_{j=1}^{n} I\left(x_j, m_j\right) \right] \wedge \vartheta \,. \tag{3.13}$$

Os neurônios min-I pela direita são empregados, em particular, nas *Memórias Associativas Bidirecionais Lógicas Nebulosas* (FLBAMs, Fuzzy Logical Bidirectional Associative Memories) introduzidas por Bělohlávek [8]. Especificamente, as FLBAMs estão baseadas em neurônios

min-I_T onde a implicação nebulosa I_T forma uma adjunção com uma t-norma T. Entretanto, esse fato não implica que os neurônios min-I_T das FLBAMs realizam erosões, pois as componentes do padrão de entrada são processados no primeiro argumento da implicação I_T (cf. equação (3.13)). Na verdade, os neurônios de uma FLBAM efetuam anti-dilatações, como mostra o teorema 4.5. De um modo geral, um neurônio min-I pela direita realiza uma operação de anti-dilatação se e somente se $I(\cdot, y)$ representar uma anti-dilatação para todo $y \in [0, 1]$.

O teorema 2.8 revela que uma anti-dilatação pode ser expressa em termos de composições de negações, dilatações e erosões. Em particular, pode-se escrever $\bar{\delta} = \varepsilon \circ \nu_L$, onde $\bar{\delta}$ é uma anti-dilatação, ν_L é uma negação e ε é uma erosão. Esse fato pode ser usado para estabelecer uma relação entre o produto min-I e o produto min-D. Conseqüentemente, tem-se uma relação entre os neurônios min-D e os neurônios min-I, tanto pela esquerda como pela direita. A relação entre os produtos min-I e min-D é obtida a partir da seguinte relação entre uma implicação nebulosa I e uma disjunção nebulosa D.

Considere uma implicação nebulosa I e uma negação nebulosa N. O operador $D(x, \cdot)$ obtido pela composição de $I(\cdot, x)$ com a negação nebulosa N, i.e., $D(x, \cdot) = I(\cdot, x) \circ N$, representa uma disjunção nebulosa para todo $x \in [0, 1]$. Em outras palavras, o operador D definido pela seguinte equação representa uma disjunção nebulosa para todo $x, y \in [0, 1]$:

$$D(x, y) = I(N(y), x) \quad \text{ou} \quad I(x, y) = D(y, N(x)) \,. \tag{3.14}$$

De fato, o operador D na primeira equação de (3.14) é crescente em ambos os argumentos e satisfaz as seguintes condições de fronteira:

$$D(0, 0) = I(N(0), 0) = I(1, 0) = 0 \,, \tag{3.15}$$

$$D(1, 0) = I(N(0), 1) = I(1, 1) = 1 \,, \tag{3.16}$$

$$D(0, 1) = I(N(1), 0) = I(0, 0) = 1 \,, \tag{3.17}$$

$$D(1, 1) = I(N(1), 1) = I(0, 1) = 1 \,. \tag{3.18}$$

Observe que essa não é uma relação de dualidade com respeito à negação N (cf. equação (2.8)). Entretanto, se $I(\cdot, x)$ é uma anti-dilatação, então $D(x, \cdot)$ é uma erosão para todo $x \in [0, 1]$ (cf. teorema 2.8).

Considere $A \in [0, 1]^{m \times k}$ e $B \in [0, 1]^{k \times n}$ e tome $E = A \circledast B$. Substituindo a relação dada

pela segunda equação de (3.14) em (3.11), encontra-se:

$$e_{ij} = \bigwedge_{l=1}^{k} I\left(b_{lj}, a_{il}\right) = \bigwedge_{l=1}^{k} D\left(a_{il}, N(b_{lj})\right) . \tag{3.19}$$

Seja $N(B) \in [0,1]^{k\times n}$ a matriz cujos elementos correspondem à negação dos elementos de B, i.e., $[N(B)]_{lj} = N(b_{lj})$ para todo $l = 1, \ldots, k$ e $j = 1, \ldots, n$. Desse modo, tem-se

$$A \circledast B = A \bullet N(B)\,, \tag{3.20}$$

onde os produtos min-D e min-I estão baseados em uma disjunção nebulosa D e em uma implicação nebulosa I tais que D e I satisfazem a relação (3.14).

Com base em (3.20), conclui-se que a resposta y de um neurônio min-I pela direita pode ser descrita pela seguinte equação envolvendo o produto min-D:

$$y = \left[\bigwedge_{j=1}^{n} D(m_j, N(x_j))\right] \wedge \vartheta = (\mathbf{m}^T \bullet \mathbf{N}(\mathbf{x})) \wedge \vartheta = \mathcal{M}(\mathbf{N}(\mathbf{x}))\,, \tag{3.21}$$

onde $[\mathbf{N}(\mathbf{x})]_j = N(x_j)$ para $j = 1, \ldots, n$.

De um modo análogo, um neurônio min-I pela esquerda pode ser descrito pela equação

$$y = \left[\bigwedge_{j=1}^{n} D(x_j, N(m_j))\right] \wedge \vartheta = (\mathbf{x}^T \bullet \mathbf{N}(\mathbf{w})) \wedge \vartheta = (\mathbf{x}^T \bullet \mathbf{m}) \wedge \vartheta\,, \tag{3.22}$$

onde $[\mathbf{N}(\mathbf{w})]_j = N(w_j)$, para todo $j = 1, \ldots, n$, e $\mathbf{m} = \mathbf{N}(\mathbf{w})$. Em particular, se a disjunção nebulosa do produto min-D for uma s-norma, então a resposta do neurônio será

$$y = \left(\mathbf{x}^T \bullet \mathbf{m}\right) \wedge \vartheta = \left(\mathbf{m}^T \bullet \mathbf{x}\right) \wedge \vartheta\,. \tag{3.23}$$

Em vista das últimas observações, redes neurais (morfológicas) nebulosas baseadas em neurônios min-I receberão menos atenção que as redes neurais (morfológicas) nebulosas descritas por neurônios min-D.

Capítulo 4

Principais Modelos de Memórias Associativas Nebulosas e Morfológicas

Esse capítulo descreve os principais modelos de memórias associativas nebulosas sob o ponto de vista da morfologia matemática. Verifica-se que a maiorida destes modelos realizam operações elementares da morfologia matemática em cada neurônio. Portanto, os principais modelos de memórias associativas nebulosas pertencem à classe das *Memórias Associativas Morfológicas Nebulosas* (FMAMs, Fuzzy Morphological Associative Memories). Lembre-se que uma FMAM é uma memória associativa neural cujos padrões de entrada, saída e conexões sinápticas representam conjuntos nebulosos (em um universo de discurso finito $\mathbf{X}$) e os neurônios realizam operações de dilatações, erosões, anti-dilatações e/ou anti-erosões. O capítulo termina apresentando as memórias associativas morfológicas introduzidas por Ritter e Sussner [89, 90, 115].

4.1 Memórias Associativas Nebulosas Max-Min e Max-Prod

As *Memórias Associativas Nebulosas* (FAMs, Fuzzy Associative Memories) de Kosko representam uma das primeiras propostas de memórias associativas baseadas na teoria dos conjuntos nebulosos. Esses modelos foram introduzidos no início dos anos 1990 e são geralmente referidos como *FAM max-min* e *FAM max-prod* [58, 62, 61]. As FAMs de Kosko foram aplicadas com sucesso em problemas de controle e rastreamento de alvos [58, 62, 74].

As FAMs max-min e max-prod são ambas descritas por redes neurais progressivas de camada única cuja arquitetura está apresentada na figura 3.2. A FAM max-min é equipada

com neurônios max-C_M enquanto que a FAM max-prod é descrita por neurônios max-C_P. Portanto, ambos os modelos pertencem à classe das FMAMs.

A proposta original de Kosko não inclui um bias. Conseqüentemente, se $W \in [0,1]^{m\times n}$ é a matriz dos pesos sinápticos de uma FAM max-min e se $\mathbf{x} \in [0,1]^n$ é o padrão de entrada, então o padrão de saída $\mathbf{y} \in [0,1]^m$ é calculado através da seguinte equação (cf. eq. (3.4)):

$$\mathbf{y} = W \circ_M \mathbf{x}\,. \tag{4.1}$$

De um modo similar, a FAM max-prod calcula a saída através da equação $\mathbf{y} = W \circ_P \mathbf{x}$.

Considere um conjunto de memórias fundamentais $\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi) : \xi = 1, \ldots, k\}$. A estratégia de armazenamento empregada numa FAM max-min é referida como *estratégia de codificação correlação-mínimo* (correlation-minimum encoding scheme). Essa estratégia determina a matriz dos pesos sinápticos através da seguinte equação:

$$W = Y \circ_M X^T\,, \tag{4.2}$$

onde $X = [\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^k] \in [0,1]^{n\times k}$ e $Y = [\mathbf{y}^1, \ldots, \mathbf{y}^k] \in [0,1]^{m\times k}$. Similarmente, a matriz dos pesos sinápticos de uma FAM max-prod é obtida através da equação $W = Y \circ_P X^T$. Nesse caso, tem-se uma *estratégia de codificação correlação-produto* (correlation-product encoding scheme).

Ambas estratégias de armazenamento, codificações correlação-mínimo e correlação produto, estão baseadas no postulado de Hebb que afirma que a variação de uma conexão sináptica depende da ativação da entrada e da saída [43]. Infelizmente, a estratégia de armazenamento baseada na correlação da ativação da entrada e da saída proporciona uma capacidade absoluta extremamente baixa. Precisamente, tem-se a seguinte proposição com respeito à recordação de padrões pelas FAMs max-min e max-prod. A demonstração dessa proposição encontra-se em [62].

Proposição 4.1. *Suponha que um único par de memórias fundamentais $(\mathbf{x}^1, \mathbf{y}^1)$ é armazenado numa FAM max-min através da estratégia de codificação correlação-mínimo, então $W \circ_M \mathbf{x}^1 = \mathbf{y}^1$ se e somente se $\bigvee_{j=1}^n x_j^1 \leq \bigvee_{i=1}^m y_i^1$. Além disso $W \circ_M \mathbf{x} \leq \mathbf{y}^1$ para todo $\mathbf{x} \in [0,1]^n$.*

Analogamente, se um par $(\mathbf{x}^1, \mathbf{y}^1)$ é armazenado numa FAM max-prod por meio da estratégia de codificação correlação-produto, então $W \circ_P \mathbf{x}^1 = \mathbf{y}^1$ se e somente se $\bigvee_{j=1}^n x_j^1 = 1$. Além disso, tem-se $W \circ_P \mathbf{x} \leq \mathbf{y}^1$ para todo $\mathbf{x} \in [0,1]^n$.

Na próxima seção são apresentadas condições para o armazenamento perfeito de um conjunto de memórias fundamentais com mais de um par entrada-saída nas FAMs max-min

e max-prod (cf. proposição 4.2). Na seção 4.3 é apresentado uma estratégia de armazenamento que não está baseada na correlação entre a ativação da entrada e da saída.

4.2 Memórias Associativas Nebulosas Generalizadas

Chung e Lee generalizaram as FAMs de Kosko substituindo o produto max-min ou o produto max-prod das equações (4.1) e (4.2) por um produto max-T geral [18]. O modelo resultante, chamado *Memória Associativa Nebulosa Generalizada* (GFAM, Generalized Fuzzy Associative Memory), pode ser descrito em termos da seguinte relação entre um padrão de entrada $\mathbf{x} \in [0,1]^n$ e a saída correspondente $\mathbf{y} \in [0,1]^m$.

$$\mathbf{y} = W \circ_T \mathbf{x} \quad \text{onde} \quad W = Y \circ_T X^T . \tag{4.3}$$

Aqui, o símbolo $\circ_T$ representa o produto max-T, onde T é uma t-norma. A estratégia de armazenamento empregada para gerar a matriz dos pesos sinápticos é descrita pela equação $W = Y \circ_T X^T$ e referida como *estratégia de codificação correlação-t* (correlation-t encoding scheme).

Note que uma GFAM realiza uma dilatação em cada neurônio se e somente se a t-norma empregada nos modelos neurais representar uma dilatação em $[0,1]$. Felizmente, não encontramos na literatura nenhum modelo de GFAM baseado numa t-norma que não realiza uma dilatação.

Pode-se generalizar mais a GFAM substituindo a t-norma por uma conjunção nebulosa geral. Entretanto, o modelo resultante não satisfaz a proposição 4.2 abaixo, pois sua demonstração requer a associatividade e a condição de fronteira $T(x,1) = x$ de uma t-norma.

Na teoria das memórias associativas lineares com uma estratégia de armazenamento baseada no postulado de Hebb, tem-se um armazenamento perfeito das memórias fundamentais se os padrões $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^k$ constituirem um conjunto ortonormal [40, 42]. Chung e Lee observaram que uma sentença similar pode ser formulada para as GFAMs, como revela a proposição 4.2 abaixo cuja demonstração encontra-se em [18].

Uma "fuzzificação" direta dos conceitos de ortogonalidade e ortonormalidade levam as seguintes definições [18]. Os padrões nebulosos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in [0,1]^n$ são ditos *max-t ortogonais* se e somente se $\mathbf{x}^T \circ_T \mathbf{y} = 0$, i.e., $T(x_j, y_j) = 0$ para todo $j = 1, \ldots, n$. Conseqüentemente, um conjunto $\{\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^k\}$ é dito *max-t ortonormal* se e somente se $\mathbf{x}^\xi$ e $\mathbf{x}^\eta$ forem max-t ortogonais para todo $\xi \neq \eta$ e $\mathbf{x}^\xi$ for um conjunto nebuloso normal para todo $\xi = 1, \ldots, k$. Lembre-se

que um conjunto nebulos $\mathbf{x} \in [0,1]^n$ é normal se e somente se $\bigvee_{j=1}^{n} x_j = 1$, i.e., $\mathbf{x}^T \circ_T \mathbf{x} = 1$.

Proposição 4.2 ([18]). *Suponha que o conjunto das memórias fundamentais* $\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi) : \xi = 1, \ldots, k\}$ *seja armazenado numa GFAM através da estratégia de codificação correlação-t. Se o conjunto* $\{\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^k\}$ *for max-t ortonormal, então* $W \circ_T \mathbf{x}^\xi = \mathbf{y}^\xi$ *para todo* $\xi = 1, \ldots, k$.

Em particular, Chung e Lee observaram que a GFAM de Lukasiewicz, i.e., a GFAM baseada na conjunção nebulosa de Lukasiewicz, é capaz de armazenar todas as memórias fundamentais se os padrões $\mathbf{x}^\xi$'s forem tais que $0 \vee (\mathbf{x}_j^\xi + \mathbf{x}_j^\eta - 1) = 0$ para todo $\xi \neq \eta$ e $j = 1, \ldots, n$. Em outras palavras, $\mathbf{y}^\xi = W \circ_L \mathbf{x}^\xi$ para todo $\xi = 1, \ldots, k$ se $\mathbf{x}_j^\xi + \mathbf{x}_j^\eta \leq 1$ para todo $\xi \neq \eta$ e $j = 1, \ldots, n$. Note que a condição $\mathbf{x}_j^\xi + \mathbf{x}_j^\eta \leq 1$ vale, em particular, para padrões $\mathbf{x}^\xi$'s que satisfazem a condição ordinária $\sum_{\xi=1}^{k} x_j^\xi = 1$ para todo $j = 1, \ldots, n$.

4.3 Memória Associativa Nebulosa de Junbo

A FAM de Junbo e a FAM max-min compartilham a mesma arquitetura (cf. figura 3.2) e os mesmos neurônios morfológicos, i.e, os neurônios max-C_M [49]. Logo, a FAM de Junbo produz a saída $\mathbf{y} = W \circ_M \mathbf{x}$ após a apresentação do padrão $\mathbf{x} \in [0,1]^n$ como entrada.

A diferença entre a FAM max-min de Kosko e a FAM de Junbo encontra-se na estratégia de armazenamento. Junbo *et al.* introduziram uma estratégia de armazenamento que permite o armazenamento de múltiplos pares de memórias fundamentais. A matriz dos pesos sinápticos dessa estratégia é dada pela equação abaixo onde o símbolo $\circledast_M$ corresponde ao produto min-I_M (cf. eq. (3.11)):

$$W = Y \circledast_M X^T . \tag{4.4}$$

Em vista da implicação empregada no produto min-I_M (implicação nebulosa de Gödel), denomina-se essa estratégia *armazenamento nebuloso implicativo de Gödel* [121].

A segunda parte da proposição abaixo revela uma condição de otimalidade, em termos das memórias fundamentais, do armazenamento nebuloso implicativo de Gödel para a FAM baseada nos neurônios max-C_M. A primeira parte apresenta condições para o armazenamento das memórias fundamentais na FAM de Junbo. Essa proposição encontra-se nos artigos de Junbo *et al.*, Fan *et al.* e Liu [49, 29, 63]

Proposição 4.3. *Suponha que as memórias fundamentais* $(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi)$, *para* $\xi = 1, \ldots, k$, *sejam armazenadas na FAM de Junbo através do armazenamento nebuloso implicativo de Gödel e considere os seguintes conjuntos:*

$$GE_{ij} = \{\xi : x_j^\xi \geq y_i^\xi\} \quad e \quad S_{ij} = \{\xi \in GE_{ij} : y_i^\xi \leq w_{ij}\} . \tag{4.5}$$

Então, $\mathbf{y}^\xi = W \circ \mathbf{x}^\xi$*, para todo* $\xi = 1, \ldots, k$*, se e somente se* $\cup_{j=1}^{n} S_{ij} = \{1, \ldots, k\}$.

Além disso, dado $X \in [0,1]^{n\times k}$ *e* $Y = [0,1]^{m\times k}$*. Se existe* $A \in [0,1]^{m\times n}$ *tal que* $A \circ_M X = Y$ *então* $W = Y \circledast_M X^T$ *é tal que* $W \circ_M X = Y$.

4.4 Memória Associativa Nebulosa Max-Min com Limiar

A proposição 4.3 apresenta uma condição de otimalidade do armazenamento nebuloso implicativo de Gödel para as FAMs baseadas em neurônios max-C_M. Logo, só é possível melhorar a capacidade de armazenamento de uma FAM com neurônios max-C_M alterando a arquitetura da rede. Posto que adicionar camadas ocultas não traz melhoras para a memória associativa, Liu propôs em 1999 a *FAM max-min com limiar* (max-min FAM with threshold) descrita pela seguinte equação [63]:

$$\mathbf{y} = (W \circ_M (\mathbf{x} \vee \mathbf{c})) \vee \mathbf{d}\,. \tag{4.6}$$

A matriz dos pesos sinápticos $W \in [0,1]^{m\times n}$ é obtida através do armazenamento nebuloso implicativo de Gödel e os vetores $\mathbf{d} \in [0,1]^m$ e $\mathbf{c} = [c_1, \ldots, c_n]^T \in [0,1]^n$ são dados por:

$$\mathbf{d} = \bigwedge_{\xi=1}^{k} \mathbf{y}^\xi \quad \text{e} \quad c_j = \begin{cases} \bigwedge_{i\in D_j} \bigwedge_{\xi\in LE_{ij}} y_i^\xi & \text{se } D_i \neq \emptyset\,, \\ 0 & \text{se } D_j = \emptyset\,, \end{cases} \quad \text{para } \; j = 1, \ldots, n\,, \tag{4.7}$$

onde $LE_{ij} = \{\xi : x_j^\xi \leq y_i^\xi\}$ e $D_j = \{i : LE_{ij} \neq \emptyset\}$. Note que os neurônios da FAM max-min com limiar ainda realizam operações de dilatações. Portanto, a FAM max-min com limiar pertence à classe das memórias associativas morfológicas nebulosas.

A seguinte proposição refere-se ao armazenamento de padrões nas FAMs max-min com limiar. A demonstração dessa proposição encontra-se em [63].

Proposição 4.4. *Suponha que* W, $\mathbf{c}$ *e* $\mathbf{d}$ *sejam a matriz de pesos sinápticos e os vetores de limiar da FAM max-min de Liu obtidos após serem armazenadas as memórias fundamentais* $(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi)$*, onde* $\xi = 1, \ldots, k$*. Considere os conjuntos* TG_{ij}*,* TE_{ij} *e* TS_{ij} *definidos abaixo:*

$$TG_{ij} = \{\xi \in \{1, \ldots, k\} : x_j^\xi \vee (c_j \wedge d_i) > y_i^\xi\}\,, \tag{4.8}$$

$$TE_{ij} = \{\xi \in \{1, \ldots, k\} : x_j^\xi \vee c_j \vee d_i = y_i^\xi\}\,, \tag{4.9}$$

$$TS_{ij} = \{\xi \in TG_{ij} \cup TE_{ij} : y_i^\xi \leq w_{ij}\}\,. \tag{4.10}$$

Tem-se $\mathbf{y}^\xi = (W \circ (\mathbf{x}^\xi \vee \mathbf{c})) \vee \mathbf{d}$ *para todo* $\xi = 1, \ldots, k$ *se e somente se* $\cup_{j=1}^{n} TS_{ij} = \{1, \ldots, k\}$.

Além disso, se existe $M \in [0,1]^{m\times n}$ *tal que* $M \circ_M \mathbf{x}^\xi = \mathbf{y}^\xi$ *para todo* $\xi = 1,\ldots,k$ *então* $\mathbf{y}^\xi = (W \circ (\mathbf{x}^\xi \vee \mathbf{c})) \vee \mathbf{d}$, *para todo* $\xi = 1,\ldots,k$.

Portanto, a FAM max-min com limiar pode armazenar, no pior dos casos, todos os padrões armazenados na FAM de Junbo. No próximo capítulo é apresentado modelos de FAMs cuja capacidade de armazenamento é no mínimo superior ao modelo de Liu e não requer o cálculo de vetor de limiar $\mathbf{c} \in [0,1]^n$.

4.5 Memória Associativa Nebulosa Lógica Bidirecional

A *Memória Associativa Nebulosa Lógica Bidirecional* (FLBAM, Fuzzy Logical Bidirectional Associative Memory) [8] representa um modelo recorrente cuja arquitetura coincide com a *Memória Associativa Bidirecional* (BAM, Bidirectional Associative Memory) de Kosko [59, 60]. Entretanto, em contraste com a BAM, os neurônios da FLBAM estão baseados no produto min-I_T pela direita onde a implicação nebulosa I_T é adjunta a alguma t-norma contínua T. Usando a estratégia de codificação correlação-t, Bělohlávek define a matriz dos pesos sinápticos W da direção progressiva da FLBAM como segue:

$$W = Y \circ_T X^T . \tag{4.11}$$

A matriz dos pesos sinápticos na outra direção é simplesmente W^T. Desse modo, dado um padrão de entrada $\mathbf{x}_0 \in [0,1]^n$, a FLBAM gera a sequência $(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0),(\mathbf{x}_1,\mathbf{y}_0),(\mathbf{x}_1,\mathbf{y}_1)$, $(\mathbf{x}_2,\mathbf{y}_1),\ldots$ através das seguintes equações:

$$\mathbf{y}_k = W \circledast_T \mathbf{x}_k \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_{k+1} = W^T \circledast_T \mathbf{y}_k \quad \text{para} \quad k = 0,1,2,\ldots . \tag{4.12}$$

O seguinte teorema mostra que as FLBAMs realizam operações de anti-dilatação em cada neurônio em ambas as direções. Conseqüentemente, uma FLBAM também representa uma FMAM. A demonstração do teorema 4.5 encontra-se no apêndice A.

Teorema 4.5. *Considere uma t-norma* T *e uma implicação nebulosa* I_T *tal que* (I_T,T) *representa uma adjunção. Um neurônio min-*I_T *descrito pela equação* $y = \mathbf{w}^T \circledast_T \mathbf{x}$ *efetua uma operação de anti-dilatação da morfologia matemática. Aqui,* $\mathbf{w} = [w_1,\ldots,w_n]^T \in [0,1]^n$, $\mathbf{x} = [x_1,\ldots,x_n]^T \in [0,1]^n$ *e* $y \in [0,1]$ *representam os pesos sinápticos, as entradas e a saída do neurônio, respectivamente.*

A seguinte proposição revela que a FLBAM encontra um ponto estável após um passo na direção progressiva e um passo na direção oposta. A demonstração dessa proposição encontra-se em [8].

Proposição 4.6. *Para um padrão de entrada arbitrário* $\mathbf{x}_0 \in [0,1]^n$*, o par* $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_0)$ *é um ponto estável da FLBAM.*

4.6 Memórias Associativas Morfológicas

As *Memórias Associativas Morfológicas* (MAMs, Morphological Associative Memories) representam um dos primeiros modelos de redes neurais morfológicas para padrões com valores reais [86, 90]. Nessa tese, as MAMs estão divididas em duas classes chamadas *MAMs aditivas* e *MAMs multiplicativas*. Embora as primeiras pesquisas conduzidas trataram das MAMs aditivas para o caso binário, as MAMs foram concebidas inicialmente como um modelo heteroassociativo para armazenar e recordar padrões com valores reais. Raducanu, Graña *et al.* aplicaram modelos de MAMs em problemas de reconhecimento de faces, auto-localização e análise de imagens hiperespectrais [36, 35, 82].

As MAMs podem ser descritas em termos de produtos matriciais definidos na álgebra minimax, uma teoria matemática que surgiu de problemas de pesquisa operacional e agendamento de máquinas [20, 21, 129]. Resumidamente, a álgebra minimax está fundamentada em estruturas algébricas chamadas *belts* e *blogs* ("bounded lattice ordered groups").

O conjunto dos números reais estendidos $\mathbb{R}_{\pm\infty} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$, representa tanto um belt como um blog. Precisamente, $(\mathbb{R}_{\pm\infty}, \vee, +)$ e $(\mathbb{R}_{\pm\infty}, \wedge, +')$ representam belts enquanto que $(\mathbb{R}_{\pm\infty}, \vee, \wedge, +, +')$ representa um blog. Lembre-se que as operações "$+$" e "$+'$" atuam como a adição usual, exceto para $-\infty$ e $+\infty$ (cf. subseção 2.3.2).

O conjunto $\mathbb{R}^{\geq 0}_{+\infty} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \cup \{+\infty\}$ também representa tanto um belt como um blog [84]. Especificamente, defina em $\mathbb{R}^{\geq 0}_{+\infty}$ operações "$\cdot$" e "$\cdot'$" que atuam como o produto usual exceto em 0 e $+\infty$ onde valem as seguintes equações:

$$0 \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot 0 = 0 \quad \text{e} \quad 0 \cdot' (+\infty) = (+\infty) \cdot' 0 = +\infty\,. \tag{4.13}$$

Desse modo, $\left(\mathbb{R}^{\geq 0}_{+\infty}, \vee, \cdot\right)$ e $\left(\mathbb{R}^{\geq 0}_{+\infty}, \wedge, \cdot'\right)$ representam belts enquanto que $\left(\mathbb{R}^{\geq 0}_{+\infty}, \vee, \wedge, \cdot, \cdot'\right)$ representa um blog.

As MAMs aditivas são desenvolvidas no blog $(\mathbb{R}_{\pm\infty}, \vee, \wedge, +, +')$ enquanto que as MAMs multiplicativas são desenvolvidas no blog $\left(\mathbb{R}^{\geq 0}_{+\infty}, \vee, \wedge, \cdot, \cdot'\right)$.

4.6.1 Memórias Associativas Morfológicas Aditivas

Existem dois tipos de produtos matriciais no blog $(\mathbb{R}_{\pm\infty}, \vee, \wedge, +, +')$. Considere matrizes $A \in \mathbb{R}^{m\times k}_{\pm\infty}$ e $B \in \mathbb{R}^{k\times n}_{\pm\infty}$. A matriz $C = A \boxtimes B$, chamada *produto máximo aditivo* de A por B, e

a matriz $D = A \boxtimes B$, conhecido como *produto mínimo aditivo* de A por B, são definidas em termos das seguintes equações:

$$c_{ij} = \bigvee_{l=1}^{k} (a_{il} + b_{lj}) \quad \text{e} \quad d_{ij} = \bigwedge_{l=1}^{k} (a_{il} +' b_{lj}) \ . \tag{4.14}$$

Além disso, uma matriz $A \in \mathbb{R}_{\pm\infty}^{m\times n}$ corresponde à uma matriz conjugada aditiva $A^* \in \mathbb{R}_{\pm\infty}^{n\times m}$ onde cada componente a_{ij}^* de A^* é dada pela equação

$$a_{ij}^* = \begin{cases} -a_{ji} & \text{se} \quad a_{ji} \in \mathbb{R}\,, \\ -\infty & \text{se} \quad a_{ji} = +\infty\,, \\ +\infty & \text{se} \quad a_{ji} = -\infty\,. \end{cases} \tag{4.15}$$

Note que $(A^*)^* = A$ para toda matriz $A \in \mathbb{R}_{\pm\infty}^{m\times n}$. Finalmente, pode-se mostrar que as seguintes equações valem para todas as matrizes A e B de dimensões apropriadas com componentes em $\mathbb{R}_{\pm\infty}^{m\times n}$:

$$(A \boxbslash B)^* = B^* \boxtimes A^* \qquad \text{e} \qquad (A \boxtimes B)^* = B^* \boxbslash A^*\,, \tag{4.16}$$

$$(A \vee B)^* = A^* \wedge B^* \qquad \text{e} \qquad (A \wedge B)^* = A^* \vee B^*\,. \tag{4.17}$$

Note que as equações da direita em (4.16) e (4.17) são versões duais das equações da esquerda. Conseqüentemente, (4.16) e (4.17) implicam que toda sentença na álgebra minimax induz uma sentença dual obtida substituindo os símbolos "$\vee$" por "$\wedge$", "$\boxbslash$" por "$\boxtimes$" e vice-versa, e revertendo a ordem em inequações.

O produto máximo aditivo e o produto mínimo aditivo induzem dois modelos de neurônios artificiais definidos como segue. Primeiramente, considere um conjunto de conexões sinápticas $w_1^a, \ldots, w_n^a$ organizados num vetor $\mathbf{w}^a \in \mathbb{R}^n$. Dado um padrão de entrada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, define-se a resposta $y \in \mathbb{R}$ de um *neurônio máximo aditivo* através da seguinte equação envolvendo o produto max:

$$y = (\mathbf{w}^a)^T \boxbslash \mathbf{x} = \bigvee_{j=1}^{n} \left(w_j^a + x_j\right) \ . \tag{4.18}$$

Note que o operador $\mathcal{W}^a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definido pela equação $\mathcal{W}^a(\mathbf{x}) = (\mathbf{w}^a)^T \boxbslash \mathbf{x}$ representa uma operação de dilatação da morfologia matemática. Finalmente, observe que uma memória associativa morfológica com m neurônios máximo aditivo em paralelo, i.e., uma rede neural progressiva de camada única com neurônios máximo aditivos (cf. figura 3.2),

pode ser descrita pela equação

$$\mathbf{y} = W^a_{XY} \boxtimes \mathbf{x}\,, \tag{4.19}$$

onde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é o padrão de entrada, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ é o padrão de saída e $W^a_{XY} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ é a matriz dos pesos sinápticos.

De um modo similar, um modelo de neurônio artificial pode ser defindo em termos da equação $y = (\mathbf{m}^a)^T \boxtimes \mathbf{x}$, onde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é a entrada, $y \in \mathbb{R}$ é a saída e $\mathbf{m}^a \in \mathbb{R}^n$ é o vetor com os pesos sinápticos do neurônio. O neurônio descrito por essa equação realiza uma operação de erosão da morfologia matemática é referido como *neurônio mínimo aditivo*. Finalmente, uma rede neural progressiva de camada única com neurônios mínimo aditivos pode ser descrita pela equação $\mathbf{y} = M^a_{XY} \boxtimes \mathbf{x}$, onde M^a_{XY} representa a matriz dos pesos sinápticos.

As MAMs são equipadas com uma estratégia de armazenamento semelhante ao armazenamento por correlação das memórias associativas lineares [40, 42, 90]. Considere um conjunto de memórias fundamentais $\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi) : \xi = 1, \ldots, k\}$. Denote $X = [\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^k] \in \mathbb{R}^{n\times k}$ e $Y = [\mathbf{y}^1, \ldots, \mathbf{y}^k] \in \mathbb{R}^{m\times k}$, as matrizes com as memórias fundamentais como coluna. A primeira estratégia de armazenamento define uma matriz de pesos sinápticos $W^a_{XY} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ através da seguinte equação:

$$W^a_{XY} = Y \boxtimes X^*\,. \tag{4.20}$$

Em outras palavras, a componente w^a_{ij} de W^a_{XY} é dada pela equação

$$w^a_{ij} = \bigwedge_{\xi=1}^{k} (y^\xi_i - x^\xi_j)\,. \tag{4.21}$$

A segunda, correspondendo à estratégia dual, define uma matriz $M^a_{XY} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ através da equação $M_{XY} = Y \boxtimes X^*$. Note que a identidade $(W_{XY})^* = M_{YX}$ pode ser deduzida a partir das equações (4.20) e (4.16).

Foram demonstradas várias propriedades das MAMs aditivas [86, 90, 115, 112]. É apresentado a seguir os resultados mais relevantes. Note que esses resultados permanecem válidos para padrões com valores inteiros, pois as MAMs aditivas podem ser aplicadas nesse contexto sem erros de arredondamento.

O seguinte teorema caracteriza completamente a fase de recordação da MAM W^a_{XY} [117, 112]. Um resultado análogo pode ser obtido para a MAM M^a_{XY} através das relações de dualidade apresentadas nas equações (4.16) e (4.17).

Proposição 4.7 (Caracterização da Fase de Recordação da MAM W^a_{XY}). *Considere $X \in \mathbb{R}^{n\times k}$ e $Y \in \mathbb{R}^{m\times k}$ e defina $W^a_{XY} = Y \boxtimes X^*$. Se $\mathcal{O} = \{W^a_{XY} \boxtimes \mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$ representa o conjunto de todos*

os padrões que podem ser recordados pela MAM W^a_{XY}, então $\mathcal{O}$ consite exatamente das seguintes expressões com $a_i^\xi \in \mathbb{R}$:

$$\bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{\xi=1}^{k} (a_i^\xi + \mathbf{y}^\xi)\,. \tag{4.22}$$

Além disso, para uma entrada arbitrária $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, o padrão recordado $W^a_{XY} \boxslash \mathbf{x}$ é a menor expressão dada em (4.22) *tal que $\bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{\xi=1}^{k} (a_i^\xi + \mathbf{x}^\xi)$ é o supremo de $\mathbf{x}$ no conjunto $\mathcal{F}$ que consite exatamente das expressões:*

$$\bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{\xi=1}^{k} (a_i^\xi + \mathbf{x}^\xi) \quad \text{com} \quad a_i^\xi \in \mathbb{R}\,. \tag{4.23}$$

O conjunto $\mathcal{F}$ representa o conjunto dos pontos fixos de $W^a_{XX} = X \boxslash X^*$, i.e., o conjunto de todos os padrões $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_{\pm\infty}$ tais que $W_{XX} \boxslash \mathbf{x} = \mathbf{x}$. De fato, vale o seguinte corolário para o caso autoassociativo:

Corolário 4.8. *Seja. $X \in \mathbb{R}^{n\times k}$. Defina $W^a_{XX} = X \boxslash X^*$ e $\mathcal{F} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_{\pm\infty} : W^a_{XX} \boxslash \mathbf{x} = \mathbf{x}\}$. O conjunto $\mathcal{F}$ consiste exatamente das expressões:*

$$\bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{\xi=1}^{k} (a_i^\xi + \mathbf{x}^\xi)\,, \quad \textit{onde} \quad a_i^\xi \in \mathbb{R}\,. \tag{4.24}$$

Além disso, $W_{XX} \boxslash \mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, onde $\hat{\mathbf{x}}$ é o supremo de $\mathbf{x}$ em $\mathcal{F}$.

A demonstração do corolário 4.8 foi apresentada independentemente em [87, 115] e antes da demonstração da proposição 4.7. De fato, a demonstração da proposição 4.7 apresentada por Sussner e Valle em [112] está baseada no corolário 4.8.

Note que o conjunto dos pontos fixos de W^a_{XX} contém as memórias fundamentais $\mathbf{x}^\xi$, para $\xi = 1, \ldots, k$. Portanto, pode-se armazenar quantos padrões forem desejados numa MAM no caso autoassociativo. Outra consequência importante do corolário 4.8 é que uma MAM autoassociativa W^a_{XX} possui "convergência" numa única iteração, i.e., o padrão recordado pela MAM $\mathbf{y} = W^a_{XX} \boxslash \mathbf{x}$ é um ponto fixo de W^a_{XX} para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

4.6.2 Memórias Associativas Morfológicas Multiplicativas

De um modo similar, existem dois produtos matriciais no blog $(\mathbb{R}_{\pm\infty}, \vee, \wedge, +, +')$. Especificamente, para matrizes A e B de dimensões apropriadas com entradas em $\mathbb{R}^{\geq 0}_{+\infty}$, o *produto máximo multiplicativo* e o *produto mínimo multiplicativo* de A por B, denotados por $C = A \bigcirc\!\!\!\!\vee\, B$

e $D = A \boxtimes B$, respectivamente, são definidas em termos das equações

$$c_{ij} = \bigvee_{l=1}^{k} (a_{il} \cdot b_{lj}) \quad \text{e} \quad d_{ij} = \bigwedge_{l=1}^{k} (a_{il} \cdot' b_{lj}) \ . \tag{4.25}$$

para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. Além disso, toda matriz $A \in (\mathbb{R}_{+\infty}^{\geq 0})^{m \times n}$ está associada a uma matriz conjugada multiplicativa $\bar{A} \in (\mathbb{R}_{+\infty}^{\geq 0})^{n \times m}$ onde as componentes $\bar{a}_{ij}$ são definidas pela seguinte equação para $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$:

$$\bar{a}_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad a_{ji} = +\infty \, , \\ +\infty & \text{se} \quad a_{ji} = 0 \, , \\ 1/a_{ji} & \text{caso contrário} \, . \end{cases} \tag{4.26}$$

A matriz conjugada multiplicativa possui o mesmo papel da matriz conjugada aditiva. Por exemplo, pode-se mostrar que $\overline{(A \boxtimes B)} = \bar{B} \boxtimes \bar{A}$ para matrizes A e B de dimensões apropriadas. Portanto, existe uma relação de dualidade que permite reescrever uma dada sentença primal substituindo os símbolos "$\vee$" por "$\wedge$", "$\boxtimes$" por "$\boxtimes$" e vice-versa, e revertendo a ordem em inequações.

O produto máximo multiplicativo e o produto mínimo multiplicativo são usados para definir os *neurônios máximo multiplicativos* e os *neurônios mínimo multiplicativos*, que são descritos, respectivamente, pelas seguintes equações:

$$y = \mathcal{W}^m(\mathbf{x}) = (\mathbf{w}^m)^T \boxtimes \mathbf{x} \quad \text{e} \quad z = \mathcal{M}^m(\mathbf{x}) = (\mathbf{m}^m)^T \boxtimes \mathbf{x} \, , \tag{4.27}$$

onde $\mathbf{x} \in (\mathbb{R}_{+\infty}^{\geq 0})^n$ é o padrão de entrada, $\mathbf{w} \in (\mathbb{R}_{+\infty}^{\geq 0})^n$ e $\mathbf{m} \in (\mathbb{R}_{+\infty}^{\geq 0})^n$ representam os vetores contendo os pesos sinápticos e $y \in \mathbb{R}_{+\infty}^{\geq 0}$ e $z \in \mathbb{R}_{+\infty}^{\geq 0}$ correspondem as saídas dos neurônios máximo multiplicativo e mínimo multiplicativo, respectivamente. Note que o operador $\mathcal{W}^m : (\mathbb{R}_{+\infty}^{\geq 0})^n \to \mathbb{R}_{+\infty}^{\geq 0}$ definido acima representa uma dilatação enquanto que $\mathcal{M}^m : (\mathbb{R}_{+\infty}^{\geq 0})^n \to \mathbb{R}_{+\infty}^{\geq 0}$ representa uma erosão. Portanto, redes neurais com neurônios máximo multiplicativos ou mínimo multiplicativos são redes neurais morfológicas.

As MAMs multiplicativas são definidas de um modo similar as MAMs aditivas. Resumidamente, uma MAM multiplicativa M_{XY}^m é uma rede neural progressiva de camada única com neurônios mínimo multiplicativos (cf. figura 3.2). Esse modelo de memória associativa é descrito pela equação $\mathbf{y} = M_{XY} \boxtimes \mathbf{x}$, onde $\mathbf{y}$ é o padrão recordado, $\mathbf{x}$ é o padrão de entrada e M_{XY}^m representa a matriz dos pesos sinápticos. Dado um conjunto de memórias fundamentais $\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi) : \xi = 1, \ldots, k\}$, a matriz dos pesos sinápticos da MAM multiplicativa M_{XY}^m é obtida através da equação $M_{XY}^m = Y \boxtimes \bar{X}$, onde $X = [\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^k]$ e $Y = [\mathbf{y}^1, \ldots, \mathbf{y}^k]$

são as matrizes com as memórias fundamentais como coluna. Analogamente, uma MAM multiplicativa W^m_{XY} é descrita pelas seguintes equações:

$$\mathbf{y} = W^m_{XY} \boxtimes \mathbf{x} \quad \text{onde} \quad W^m_{XY} = Y \boxtimes \bar{X}\,. \tag{4.28}$$

Finalmente, note que a resposta de um neurônio máximo multiplicativo com vetor de pesos sinápticos $\mathbf{w} \in [0,1]^n$ coincide com a resposta do neurônio max-C_M com os mesmos pesos sinápticos e $\theta = 0$ se a entrada $\mathbf{x} \in [0,1]^n$. Portanto, a fase de recordação da MAM multiplicativa W^m_{XY} coincide com a fase de recordação da memória associativa nebulosa max-prod de Kosko (cf. seção 4.1). Observe também que a fase de recordação da MAM multiplicativa M^m_{XY} está baseada nas operações "$\wedge$" e "$\cdot$'", que representam t-normas quando restritas ao domínio $[0,1]$. Em vista desses fatos, Wang e Lu chamam as MAMs multiplicativas de memórias associativas morfológicas nebulosas [123]. Essa nomenclatura não será adotada nessa tese porque as matrizes dos pesos sinápticos W^m_{XY} e M^m_{XY} e os padrões recordados pelas MAMs multiplicativas não pertencem necessariamente ao domínio nebuloso, mesmo quando o conjunto das memórias fundamentais possui apenas padrões nebulosos. Em outras palavras, uma MAM multiplicativa não corresponde à uma FMAM segundo a definição apresentada no capítulo 3.

Exemplo 7. Considere matrizes $X = [0.1, 0.1]^T$ e $Y = [1, 1]^T$ correspondendo às memórias fundamentais e seja $\mathbf{x} = [0.5, 0.5]^T$ o padrão de entrada. A matriz dos pesos sinápticos W^m_{XY} e o padrão recordado $\mathbf{y}$ pela MAM multiplicativa com neurônios máximo multiplicativo são dados pelas seguintes equações, respectivamente.

$$W^m_{XY} = Y \boxtimes \bar{X} = \begin{bmatrix} 10 & 10 \\ 10 & 10 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{y} = W_{XY} \boxtimes \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}. \tag{4.29}$$

Capítulo 5

Memórias Associativas Nebulosas Implicativas e suas Versões Duais

5.1 Memórias Associativas Nebulosas Implicativas

Em poucas palavras, uma *Memória Associativa Nebulosa Implicativa* (IFAM, Implicative Fuzzy Associative Memory) é um modelo de memória associativa descrito por uma rede neural nebulosa híbrida progressiva de camada única com neurônios max-T, onde T é uma t-norma contínua. Logo, cada neurônio realiza uma operação de dilatação e portanto, uma IFAM é uma *Memória Associativa Morfológica Nebulosa* (FMAM, Fuzzy Morphological Associative Memory). A topologia de uma IFAM está apresentada na figura 3.2. Matematicamente, uma IFAM com m neurônios max-T é descrita pela equação

$$\mathbf{y} = (W \circ_T \mathbf{x}) \vee \boldsymbol{\theta}\,, \tag{5.1}$$

onde $\mathbf{x} \in [0,1]^n$ é o padrão de entrada, $W \in [0,1]^{m\times n}$ é a matriz dos pesos sinápticos, $\boldsymbol{\theta} \in [0,1]^n$ é o vetor bias e $\mathbf{y} \in [0,1]^m$ é a resposta da IFAM. A matriz dos pesos sinápticos e o vetor bias de uma IFAM são obtidos através do *armazenamento nebuloso implicativo*.

5.1.1 Aprendizado Nebuloso Implicativo

Considere inicialmente um único par de entrada e saída $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, onde $\mathbf{x} \in [0,1]^n$ e $\mathbf{y} \in [0,1]^m$. O postulado de Hebb afirma que a variação de uma conexão sináptica depende de ambas ativações pré-sináptica (entrada) e pós-sináptica (saída) [43]. Em [42], Haykin apresenta a seguinte formulação matemática para o postulado de Hebb: O valor do peso sináptico w_{ij},

com ativação pré-sináptica x_j e ativação pós-sináptica y_i, é dado pela seguinte equação após o processo de armazenamento

$$w_{ij} = F(x_j, y_i)\,, \tag{5.2}$$

onde F é uma função binária. Haykin afirma que todas as formas da equação (5.2) podem ser classificadas como hebbianas.

O armazenamento nebuloso implicativo considera uma implicação nebulosa I como função das ativações pré e pós-sinápticas. Se x_j é a entrada e y_i é a saída, então a conexão sináptica w_{ij} é dada pela equação

$$w_{ij} = I\left(x_j, y_i\right). \tag{5.3}$$

O armazenamento nebuloso implicativo pode ser interpretado do seguinte modo: a variação de um peso sináptico é o grau de veracidade da afirmação: "Se estímulo, então resposta".

A forma tradicional de uma estratégia de armazenamento baseada no postulado de Hebb considera o produto das ativações x_j e y_i. Como consequência, uma estratégia baseada na forma tradicional do postulado de Hebb possui uma natureza correlativa. Note que o armazenamento nebuloso implicativo dado por (5.3) não possui uma natureza correlativa. Uma natureza correlativa poderia ser obtida substituindo a implicação por uma bi-implicação em (5.3). Nesse caso, teríamos $w_{ij} = T(I(x_j, y_i), I(y_i, x_j))$ e o valor da conexão sináptica representaria o grau de veracidade da afirmação "Estímulo se e somente se resposta". No entanto, essa segunda proposta não será considerada nessa tese porque pode restringir muito o valor das conexões sinápticas produzindo valores próximos de zero. Além disso, o teorema 5.1 não valeria para as memórias associativas nebulosas treinadas com essa estratégia de armazenamento alternativa.

A matriz de pesos sinápticos $W \in [0,1]^{m\times n}$ de uma IFAM pode ser determinada aplicando diretamente (5.3) para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. Para determinar o vetor $\boldsymbol{\theta} \in [0,1]^n$, usamos (5.3) e o fato de θ_i poder ser interpretado como uma conexão sináptica w_{i0} conectada à uma entrada constante $x_0 = 1$. Conseqüentemente, tem-se $\theta_i = w_{i0} = I(x_0, y_i) = I(1, y_i)$, para todo $i = 1, \ldots, m$. Além disso, se a implicação nebulosa for tal que $I(1, y) = y$, então $\theta_i = y_i$, para $i = 1, \ldots, m$. De agora em diante, serão consideradas apenas implicações nebulosas I que satisfazem a condição $I(1, y) = y$. Essa não é uma condição muito restritiva e é satisfeita, em particular, por todas as R-implicações.

Considere agora um conjunto de memórias fundamentais $\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi) : \xi = 1, \ldots, k\}$. Deseja-se determinar uma matriz de pesos sinápticos $W \in [0,1]^{m\times n}$ e um vetor $\boldsymbol{\theta} \in [0,1]^m$ tais que os pares $(\mathbf{x}^1, \mathbf{y}^1)$ e $(\mathbf{x}^2, \mathbf{y}^2)$ e $\ldots$ e $(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k)$ sejam armazenados numa IFAM descrita por (5.1). Lembrando que a conjunção lógica "e" pode ser descrita, em particular, pela operação de

mínimo, tem-se que W e $\boldsymbol{\theta}$ serão simplesmente o mínimo das matrizes dos pesos sinápticos e dos vetores bias obtidos para cada par $(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi)$, i.e.,

$$w_{ij} = \bigwedge_{\xi=1}^{k} I\left(x_j^\xi, y_i^\xi\right) \quad \text{e} \quad \theta_i = \bigwedge_{\xi=1}^{k} y_i^\xi \,, \tag{5.4}$$

para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. Em outras palavras, a matriz dos pesos sinápticos W e o vetor $\boldsymbol{\theta}$ são determinados através das seguintes equações:

$$W = Y \circledast X^T \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\theta} = \bigwedge_{\xi=1}^{k} \mathbf{y}^\xi \,, \tag{5.5}$$

onde o produto min-I foi definido em (3.11). Aqui, $X = [\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^k] \in [0,1]^{n\times k}$ e $Y = [\mathbf{y}^1, \ldots, \mathbf{x}^k] \in [0,1]^{m\times n}$ são as matrizes cujas colunas representam os padrões de entrada e saída, respectivamente. Cabe observar que uma t-norma poderia ser empregada no lugar do mínimo em (5.4), entretanto, o teorema 5.1 abaixo não seria válido.

As IFAM empregam a R-implicação I_T associada a t-norma contínua T do modelo neural. Lembre-se que uma R-implicação I_T forma uma adjunção com a t-norma T e pode ser obtida através da equação (2.36). A estratégia definida em (5.5) é chamada *armazenamento nebuloso implicativo*. Quando uma R-implicação é empregada em (5.4), tem-se um *armazenamento nebuloso R-implicativo* e utiliza-se a notação $\circledast_T$ para lembrar que a R-implicação forma uma adjunção com a t-norma T empregada em (5.1).

A matriz dos pesos sinápticos e o vetor bias obtidos através do armazenamento nebuloso R-implicativo satisfazem o seguinte teorema cuja demonstração encontra-se no apêndice A:

Teorema 5.1 (Teorema Principal do Aprendizado Nebuloso R-Implicativo). *Considere um conjunto de memórias fundamentais $\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi) : \xi = 1, \ldots, k\}$. A matriz dos pesos sinápticos W e o vetor bias $\boldsymbol{\theta}$ dados pelo armazenamento nebuloso R-implicativo são tais que $[W, \boldsymbol{\theta}]$ representa o supremo do conjunto*

$$\left\{[A, \boldsymbol{\beta}] \in [0,1]^{m\times(n+1)} : (A \circ_T \mathbf{x}^\xi) \vee \boldsymbol{\beta} \leq \mathbf{y}^\xi,\ \forall \xi = 1, \ldots, k\right\} \,, \tag{5.6}$$

onde $[W, \boldsymbol{\theta}]$ (resp. $[A, \boldsymbol{\beta}]$) é a matriz $m \times (n+1)$ obtida concatenando $W \in [0,1]^{m\times n}$ e $\boldsymbol{\theta} \in [0,1]^m$ (resp. A e $\boldsymbol{\beta}$).

O seguinte corolário refere-se ao armazenamento de padrões numa IFAM.

Corolário 5.2 (Otimalidade do Aprendizado Nebuloso R-Implicativo). *Dado um conjunto de memórias fundamentais $\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi) : \xi = 1, \ldots, k\}$. Se existe uma matriz de pesos sinápticos A*

ξ	Entrada: $\mathbf{a}^\xi$	Saída: $\mathbf{b}^\xi$
1	$[0.5, 0.5, 0.4, 0.4, 0.3]^T$	$[0.5, 0.6, 0.3]^T$
2	$[0.1, 0.3, 0.3, 0.4, 0.4]^T$	$[0.5, 0.6, 0.4]^T$
3	$[0.8, 0.4, 0.6, 0.7, 0.4]^T$	$[0.6, 0.8, 0.4]^T$
4	$[0.3, 0.4, 0.4, 0.3, 0.4]^T$	$[0.5, 0.6, 0.4]^T$
5	$[0.6, 0.4, 0.7, 0.7, 0.5]^T$	$[0.7, 0.7, 0.5]^T$
6	$[0.1, 0.1, 0.2, 0.2, 0.1]^T$	$[0.5, 0.6, 0.3]^T$
7	$[0.7, 0.2, 0.4, 0.3, 0.2]^T$	$[0.5, 0.7, 0.3]^T$
8	$[0.8, 0.4, 0.3, 0.4, 0.2]^T$	$[0.5, 0.8, 0.3]^T$

Tab. 5.1: Padrões de entrada e saída utilizados nos exemplos 8, 10 e 12.

e um vetor bias $\boldsymbol{\beta}$ tais que $\mathbf{y}^\xi = (A \circ_T \mathbf{x}^\xi) \vee \boldsymbol{\beta}$, para todo $\xi = 1, \ldots, k$, então valem as seguintes inequações

$$A \leq W = Y \circledast_T X^T \quad e \quad \boldsymbol{\beta} \leq \boldsymbol{\theta} = \bigwedge_{\xi=1}^{k} \mathbf{y}^\xi \,. \tag{5.7}$$

Além disso, a seguinte equação vale para todo $\xi = 1, \ldots, k$.

$$\mathbf{y}^\xi = (W \circ_T \mathbf{x}^\xi) \vee \boldsymbol{\theta} \,. \tag{5.8}$$

Exemplo 8. Um exemplo discutido em [63] mostra que a capacidade absoluta de armazenamento da FAM max-min com limiar de Liu supera a capacidade absoluta de armazenamento da FAM de Junbo *et al.*, da FAM de Kosko e da GFAM de Chung e Lee com a t-norma de Lukasiewicz. O mesmo exemplo revela que a capacidade absoluta de armazenamento da IFAM de Lukasiewicz, Gödel e Goguen equipara-se com a capacidade absoluta de armazenamento da FAM max-min com limiar.

Considere o conjunto de memórias fundamentais $(\mathbf{a}^\xi, \mathbf{b}^\xi)$, para $\xi = 1, \ldots, 8$, apresentadas na tabela 5.1. Denote $X = [\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^8] \in [0,1]^{5\times 8}$ e $Y = [\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^8] \in [0,1]^{3\times 8}$. Os 8 pares de entrada e saída da tabela 5.1 foram armazenadas nos modelos de memória associativa apresentados no capítulo 4. A FAM max-min com limiar recordou corretamente todos os padrões. A FAM de Junbo recordou corretamente somente os pares $(\mathbf{a}^3, \mathbf{b}^3), (\mathbf{a}^5, \mathbf{b}^5), (\mathbf{a}^7, \mathbf{b}^7)$ e $(\mathbf{a}^8, \mathbf{b}^8)$. As FLBAMs de Lukasiewicz e Goguen recordaram corretamente os pares $(\mathbf{a}^3, \mathbf{b}^3)$ e $(\mathbf{a}^5, \mathbf{b}^5)$. A FAM de Kosko foi capaz de recordar somente o par $(\mathbf{a}^5, \mathbf{b}^5)$. A GFAM de Lukasiewicz e a FLBAM de Gödel foram incapazes de armazenar e recordar corretamente o conjunto de memórias fundamentais. A MAM multiplicativa W^m_{XX} foi capaz de recordar somente os pares $(\mathbf{a}^1, \mathbf{b}^1), (\mathbf{a}^3, \mathbf{b}^3), (\mathbf{a}^5, \mathbf{b}^5)$ e $(\mathbf{a}^8, \mathbf{b}^8)$. Finalmente, a MAM W^a_{XY} foi capaz de recordar os pares $(\mathbf{a}^1, \mathbf{b}^1), (\mathbf{a}^2, \mathbf{b}^2), (\mathbf{a}^3, \mathbf{b}^3), (\mathbf{a}^4, \mathbf{b}^4), (\mathbf{a}^5, \mathbf{b}^5)$ e $(\mathbf{a}^8, \mathbf{b}^8)$ enquanto que a MAM

M^a_{XY} foi capaz de recordar somente os padres $(\mathbf{a}^2, \mathbf{b}^2)$ e $(\mathbf{a}^6, \mathbf{b}^6)$.

Usando (5.5), obtem-se para a IFAM de Lukasiewicz a matriz de pesos sinápticos W_L e o vetor bias $\boldsymbol{\theta}$ apresentados abaixo.

$$W_L = Y \circledast_L X^T = \begin{bmatrix} 0.7 & 1.0 & 1.0 & 0.9 & 1.0 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 0.5 & 1.0 & 0.8 & 0.7 & 1.0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\theta} = \bigvee_{\xi=1}^{8} \mathbf{b}^\xi = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.6 \\ 0.3 \end{bmatrix}. \tag{5.9}$$

A fase de recordação da IFAM de Lukasiewicz é realizada usando a t-norma de Lukasiewicz na composição max-T, i.e., a IFAM de Lukasiewicz está baseada no produto max-C_L. Verifica-se que $(W_L \circ_L \mathbf{a}^\xi) \vee \boldsymbol{\theta} = \mathbf{b}^\xi$ para $\xi = 1, \ldots, 8$. Observa-se que o mesmo resultado também vale para as IFAMs de Goguen e Gödel, i.e., $(W_P \circ_P \mathbf{a}^\xi) \vee \boldsymbol{\theta} = \mathbf{b}^\xi$ e $(W_M \circ_M \mathbf{a}^\xi) \vee \boldsymbol{\theta} = \mathbf{b}^\xi$ para $\xi = 1, \ldots, 8$. As matrizes dos pesos sinápticos das IFAMs de Goguen e Gödel são

$$W_P = \begin{bmatrix} 0.6250 & 1.0000 & 1.0000 & 0.8571 & 1.0000 \\ 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 \\ 0.3750 & 0.6000 & 0.6667 & 0.5714 & 1.0000 \end{bmatrix} \text{ e } W_M = \begin{bmatrix} 0.5 & 1.0 & 1.0 & 0.6 & 1.0 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 1.0 \end{bmatrix}, \tag{5.10}$$

respectivamente. O vetor bias da IFAM de Goguen, Gödel e Lukasiewicz coincidem, pois não dependem da t-norma do produto max-T. O vetor bias encontra-se em (5.9). Note que a IFAM de Goguen utiliza os produtos max-C_P e min-I_P e a IFAM de Gödel utiliza os produtos max-C_M e min-I_M na fase de recordação e armazenamento, respectivamente.

A tabela 5.2 apresenta resumidamente a capacidade absoluta de armazenamento e o conjunto dos índices dos pares de padrões recordados corretamente pelos modelos apresentados nesse exemplo. Note que essa tabela inclui a capacidade absoluta de armazenamento das chamadas IFAMs duais e das IFAMs adjuntas que são apresentadas nas seções 5.3 e 5.4, respectivamente.

5.2 Memórias Nebulosas Implicativas Autoassociativas

Uma IFAM é referida como *Memória Nebulosa Implicativa Autoassociativa* (AFIM, Autoassociative Fuzzy Implicative Memory) no caso autoassociativo. Lembre-se que no caso autoassociativo $\mathbf{y}^\xi = \mathbf{x}^\xi$, para $\xi = 1, \ldots, k$. Em outras palavras, o conjunto das memórias fundamentais é da forma $\{\mathbf{x}^\xi : \xi = 1, \ldots, k\}$, com $\mathbf{x}^\xi \in [0,1]^n$ para $\xi = 1, \ldots, k$.

Seja $X = [\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^k] \in [0,1]^{n \times k}$ a matriz cujas colunas são as memórias fundamentais. A matriz dos pesos sinápticos e o vetor bias de uma AFIM são dados respectivamente pelas

Modelo	Conjunto dos índices dos pares recordados corretamente	Capacidade absoluta de armazenamento
FAM de Kosko	$\{5\}$	1
GFAM de Lukasiewicz	$\emptyset$	0
FAM de Junbo	$\{3, 5, 7, 8\}$	4
Max-min FAM com limiar	$\{1, 2, \ldots, 8\}$	8
FLBAM de Lukasiewicz	$\{3, 5\}$	2
FLBAM de Goguen	$\{3, 5\}$	2
FLBAM de Gödel	$\emptyset$	0
MAM W^a_{XY}	$\{1, 2, 3, 4, 5, 8\}$	6
MAM M^a_{XY}	$\{2, 6\}$	2
MAM W^m_{XY}	$\{1, 3, 4, 8\}$	4
IFAM de Lukasiewicz	$\{1, 2, \ldots, 8\}$	8
IFAM de Gödel	$\{1, 2, \ldots, 8\}$	8
IFAM de Goguen	$\{1, 2, \ldots, 8\}$	8
IFAM dual de Gödel	$\{3, 5, 7, 8\}$	4
IFAM dual de Lukasiewicz	$\{2, 6\}$	2
IFAM dual de Goguen	$\{2, 6\}$	2
IFAM adjunta de Lukasiewicz	$\{2, 6\}$	2
IFAM adjunta de Goguen	$\{2, 6\}$	2
IFAM adjunta de Gödel	$\emptyset$	0
IFAM dual adj. de Lukasiewicz	$\{3, 5, 8\}$	3
IFAM dual adj. de Goguen	$\{3, 5, 8\}$	3
IFAM dual adj. de Gödel	$\{3, 5\}$	2

Tab. 5.2: Capacidade absoluta de armazenamento e o conjunto dos índices dos pares recordados corretamente pelos modelos de memória associativa apresentados nos exemplos 8, 10 e 12.

equações

$$W = X \circledast_T X^T \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\theta} = \bigwedge_{\xi=1}^{k} \mathbf{x}^{\xi}\,. \tag{5.11}$$

Após a apresentação de um padrão de entrada $\mathbf{x} \in [0,1]^n$, a AFIM produz o padrão $\mathbf{y} = (W \circ_T \mathbf{x}) \vee \boldsymbol{\theta}$ como saída.

O teorema 5.3 abaixo apresenta duas propriedades importantes da matriz dos pesos sinápticos $W = X \circledast_T X^T$. A demonstração do teorema 5.3 encontra-se no apêndice A.

Teorema 5.3 (Reflexividade e Idempotência da Matrix W). *Seja $X \in [0,1]^{n\times k}$. A matriz $W = X \circledast_T X^T$ é reflexiva e max-T idempotente. Em outras palavras, tem-se $I \leq W$ e $W \circ_T W = W$, onde $\circ_T$ é um produto max-T com a t-norm adjunta da implicação empregada no armazenamento R-implicativo.*

5.2.1 Versão Dinâmica das AFIMs

Uma AFIM pode ser convertida em um modelo dinâmico introduzindo a saída $(W \circ_T \mathbf{x}) \vee \boldsymbol{\theta}$ como uma nova entrada da memória associativa. Em outras palavras, pode-se construir uma sequência de padrões $\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), \ldots$ onde $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}$ é o padrão de entrada e $\mathbf{x}(k+1)$ é dado pela seguinte equação:

$$\mathbf{x}(k+1) = (W \circ_T \mathbf{x}(k)) \vee \boldsymbol{\theta} \quad \text{para todo } \; k = 0, 1, \ldots\,. \tag{5.12}$$

O próximo teorema revela, entre outras coisas, que a sequência definida em (5.12) sempre converge. Desse modo, define-se o limite da sequência em (5.12) como sendo o padrão recordado pela AFIM dinâmica.

Teorema 5.4 (Convergência da AFIM Dinâmica). *Seja $X = [\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^k] \in [0,1]^{n\times k}$ a matriz com as memórias fundamentais e sejam W e $\boldsymbol{\theta}$ obtidos pelo armazenamento nebuloso R-implicativo. Dado um padrão de entrada $\mathbf{x} \in [0,1]^n$, a sequência dada pela equação* (5.12) *converge com uma única iteração.*

O teorema 5.4 revela que as AFIMs dinâmicas apresentam convergência com uma única iteração e, portanto, não há necessidade de utilizar este recurso. A demonstração do teorema 5.3 encontra-se no apêndice A.

5.2.2 Capacidade Absoluta de Armazenamento

O próximo teorema refere-se a capacidade absoluta de armazenamento das AFIMs, i.e., o número de padrões que podem ser armazenados e recordados corretamente pela memória associativa.

Teorema 5.5. *Seja* $X = [\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^k] \in [0,1]^{n\times k}$. *Se* $W = X \circledast_T X^T$ *então* $W \circ_T \mathbf{x}^\xi = \mathbf{x}^\xi$ *para todo* $\xi = 1, \ldots, k$.

Note que o teorema 5.5 não impõe nenhuma restrição sobre a dimensão de $X \in [0,1]^{n\times k}$. Portanto, qualquer conjunto de memórias fundamentais $\{\mathbf{x}^\xi : \xi = 1, \ldots, k\}$ pode ser armazenado numa AFIM. Entretanto, a matriz dos pesos sinápticos W obtida pelo armazenamento nebuloso R-implicativo converge para a matriz I quando $k \to \infty$. Logo, espera-se que a tolerância à ruído decresça conforme mais e mais padrões são armazenados numa AFIM. A figura 5.1 apresenta o gráfico da distância $\|W - I\|_F$, calculada usando a norma de Frobenius, para matrizes $W = X \circledast_T X^T \in [0,1]^{100\times 100}$ como uma função da porcentagem de padrões armazenados na AFIM. Esse gráfico foi gerado calculando-se a média após 1000 simulações onde as matrizes $X \in [0,1]^{100\times k}$ foram geradas aleatoriamente com distribuição uniforme. Precisamente, as matrizes X's foram obtidas utilizando o comando `rand` do `MATLAB`. A linha marcada com '$+$' corresponde à matriz dos pesos sinápticos da AFIM de Lukasiewicz. A linha marcada com '$\triangle$' refere-se a matriz dos pesos sinápticos da IFAM de Gödel. As linhas marcadas com '$\times$' e '$\circ$' representam a IFAM de Goguen e a MAM multiplicativa W^m_{XY}, respectivamente. Note que $\|W_P - I\|_F$ coincide com $\|W^m_{XX} - I\|_F$ para um conjunto grande de memórias fundamentais. Aqui, W^m_{XX} e W_P representam as matrizes dos pesos sinápticos da MAM multiplicativa e da AFIM de Goguen, respectivamente. Uma justificativa para este fato encontra-se na subseção 5.5.2.

Note que a matriz W_L fornecida pelo armazenamento nebuloso implicativo baseado na implicação de Lukasiewicz apresentou a convergência mais lenta para I dentre as matrizes das quatro estratégias de armazenamento consideradas. Logo, pode-se esperar da AFIM de Lukasiewicz uma tolerância com respeito à ruído melhor que a AFIM de Gödel, a AFIM de Goguen e a MAM multiplicativa. Essa observação será confirmada em experimentos numéricos e será usada para justificar nossa escolha de t-norma no problema de previsão da vazão média da usina hidrelétrica de Furnas apresentados no capítulo 6. Ressaltamos, entretanto, que ainda é preciso conduzir mais pesquisas sobre a escolha da melhor t-norma para um dado problema.

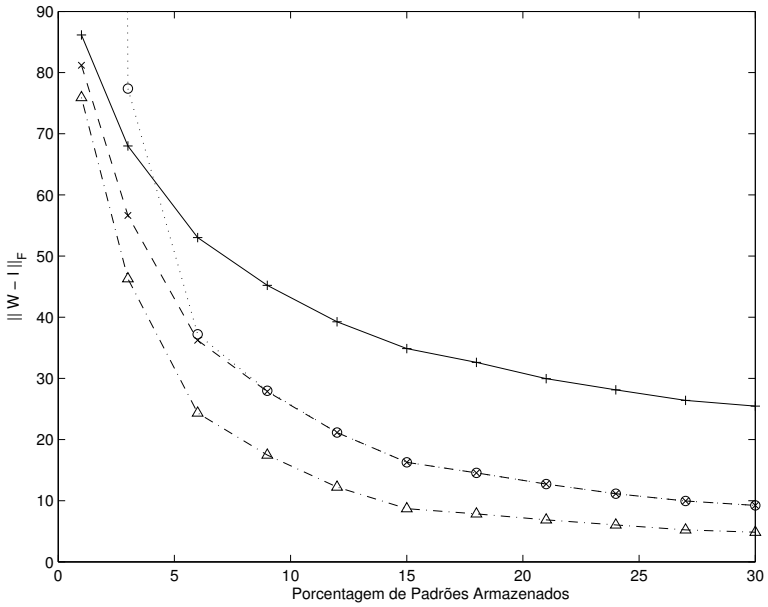

Fig. 5.1: Gráfico de $\|W - I\|_F$ pela porcentagem de padrões armazenados. A linha marcada com '$+$' corresponde à AFIM de Lukasiewicz. A linha marcada com '$\triangle$' refere-se a AFIM de Gödel. As linhas marcadas com '$\times$' e '$\circ$' representam a AFIM de Goguen e a MAM W^m_{XX}, respectivamente.

5.2.3 Tolerância com Respeito à Padrões Corrompidos ou Incompletos

Essa seção trata da tolerância das AFIMs com respeito à padrões incompletos ou corrompidos com ruído. Para uma exposição mais clara, considere as seguintes definições:

Definição 5.6 (Versão Erodida e Versão Dilatada de um Padrão x [90, 115]). *Um padrão $\tilde{\mathbf{x}} \in [0,1]^n$ é uma versão* erodida *de um padrão $\mathbf{x} \in [0,1]^n$ se e somente se $\tilde{\mathbf{x}} \leq \mathbf{x}$. Analogamente, um padrão $\tilde{\mathbf{x}} \in [0,1]^n$ é uma versão* dilatada *de $\mathbf{x} \in [0,1]^n$ se e somente se $\tilde{\mathbf{x}} \geq \mathbf{x}$.*

Definição 5.7 (Ponto Fixo de W). *Seja $W \in [0,1]^{n \times n}$. Um padrão $\mathbf{x} \in [0,1]^n$ é um ponto fixo de W com respeito ao produto max-T se e somente se $W \circ_T \mathbf{x} = \mathbf{x}$.*

O teorema a seguir mostra que uma AFIM apresenta tolerância somente com respeito à padrões erodidos. A seção 5.3 discute modelos que apresentam tolerância com respeito à padrões dilatados. A demonstração do teorema 5.8 encontra-se no apêndice A.

Teorema 5.8. *Sejam $X \in [0,1]^{n \times k}$, $W = X \circledast_T X^T$ e $\boldsymbol{\theta} \in [0,1]^n$. Para todo padrão de entrada $\mathbf{x} \in [0,1]^n$, a saída $(W \circ_T \mathbf{x}) \vee \boldsymbol{\theta}$ de uma AFIM é o* supremo *de $\mathbf{x}$ no conjunto dos pontos fixos de W maiores que $\boldsymbol{\theta}$. Em outras palavras, $(W \circ_T \mathbf{x}) \vee \boldsymbol{\theta}$ é o maior ponto fixo $\mathbf{y}$ de W com respeito ao produto max-T tal que $\mathbf{y} \geq \mathbf{x}$ e $\mathbf{y} \geq \boldsymbol{\theta}$.*

Exemplo 9. Considere as imagens em tons de cinza $\mathbf{a}^\xi \in [0,1]^{56\times 46}$, para $\xi = 1, \ldots, 12$, apresentadas na figura 5.2. Essas imagens correspondem à versões reduzidas de imagens do banco de dados da AT&T Laboratories Cambridge [1]. Precisamente, o banco de dados da AT&T possui imagens no formato PGM. Cada imagem possui 92×112 pixels, cada pixel com 256 tons de cinza. As imagens originais foram reduzidas através do comando `imresize` do `MATLAB` com a opção padrão `nearest` e convertidas para o formato `double` usando o comando `im2double`. Obtem-se assim imagens $\mathbf{a}^\xi \in [0,1]^{56\times 46}$, para $\xi = 1, \ldots, k$. Finalmente, os padrões $\mathbf{x}^\xi \in [0,1]^{2576}$ que constituem o conjunto de memórias fundamentais foram obtidos fazendo uma leitura por linhas dos elementos das imagems reduzidas $\mathbf{a}^\xi$. Isso foi feito utilizando o comando `reshape`. Desse modo, cada padrão pode ser tratado como um conjunto nebuloso.

Considere inicialmente a AFIM de Lukasiewicz. Primeiramente, verificou-se que todos os padrões do conjunto das memórias fundamentais são pontos fixos dessa AFIM. Depois foram apresentadas como entrada padrões $\mathbf{r}^1, \ldots, \mathbf{r}^6$ correspondendo as imagens da figura 5.3. Esses padrões representam versões corrompidas ou incompletas do padrão $\mathbf{x}^1$. Precisamente, $\mathbf{r}^1, \mathbf{r}^2$ e $\mathbf{r}^3$ foram obtidos excluindo uma certa quantidade de pixels da imagem, i.e., foi introduzido na imagem um ruído do tipo "pepper". As probabilidades de excluir um pixel foram 25%, 50% e 75%, respectivamente. As demais imagens da figura 5.3, $\mathbf{r}^4, \mathbf{r}^5$ e $\mathbf{r}^6$, correspondem à versões incompletas de $\mathbf{x}^1$ onde foram excluídos 25%, 50% e 75% do número total de pixels, respectivamente. Nesse exemplo, foi atribuído o valor 0 para os pixels ausêntes de $\mathbf{r}^4, \mathbf{r}^5$ e $\mathbf{r}^6$. Note que os padrões corrompidos e incompletos são todos menores que o padrão original. As imagens na primeira linha da figura 5.4 correspondem aos padrões recordados pela AFIM de Lukasiewicz. Observe que a AFIM de Lukasiewicz recordou os padrões originais razoavelmente bem. A tabela 5.3 apresenta o erro normalizado dos padrões recordados. Aqui, $Er(\mathbf{r})$ é calculado através da equação

$$Er(\mathbf{r}) = \frac{\|\mathbf{x}^1 - [(W \circ_T \mathbf{r}) \vee \boldsymbol{\theta}]\|_E}{\|\mathbf{x}^1\|_E}, \tag{5.13}$$

onde $\mathbf{r}$ representa o padrão corrompido ou incompleto e $\|\cdot\|_E$ corresponde à norma Euclidiana.

O mesmo experimento foi conduzido depois com a AFIM de Gödel e a AFIM de Goguen. Verificou-se que todos os padrões do conjunto das memórias fundamentais representam pontos fixos do modelo. A figura 5.4 também apresenta os padrões recordados por esses modelos após apresentar como entrada os padrões $\mathbf{r}^1, \ldots, \mathbf{r}^6$ correspondendo as imagens da figura 5.3. Precisamente, as imagens da segunda linha da figura 5.4 correspondem

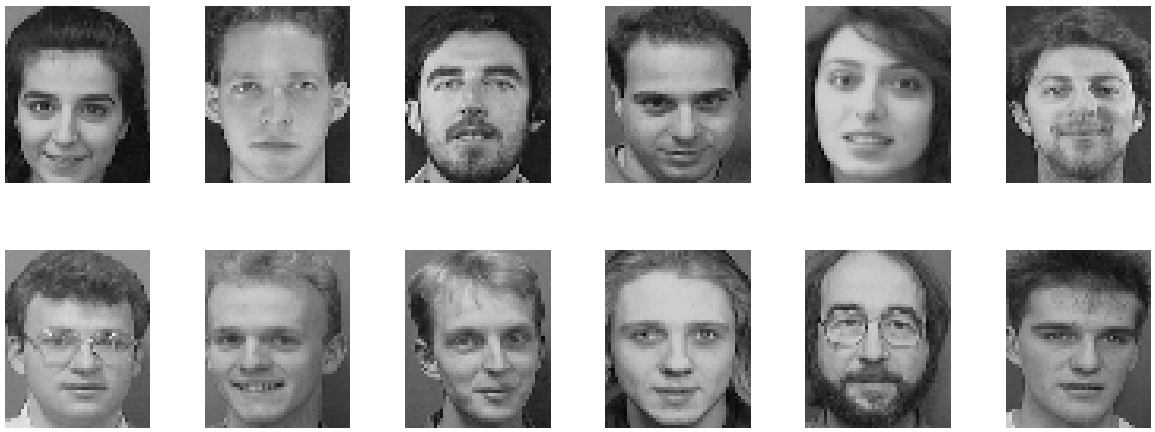

Fig. 5.2: Imagens que correspondem as memórias fundamentais $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^{12}$ dos exemplos 9 e 11.

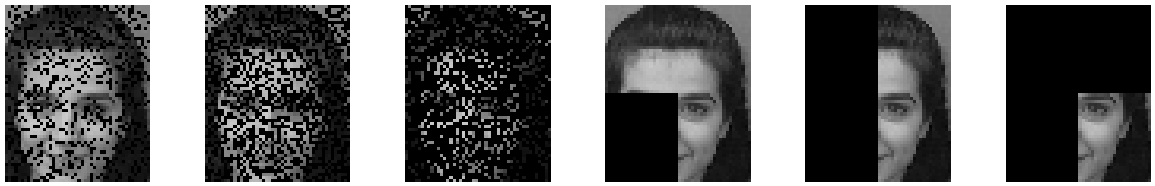

Fig. 5.3: Versões erodidas da primeira imagem da figura 5.2.

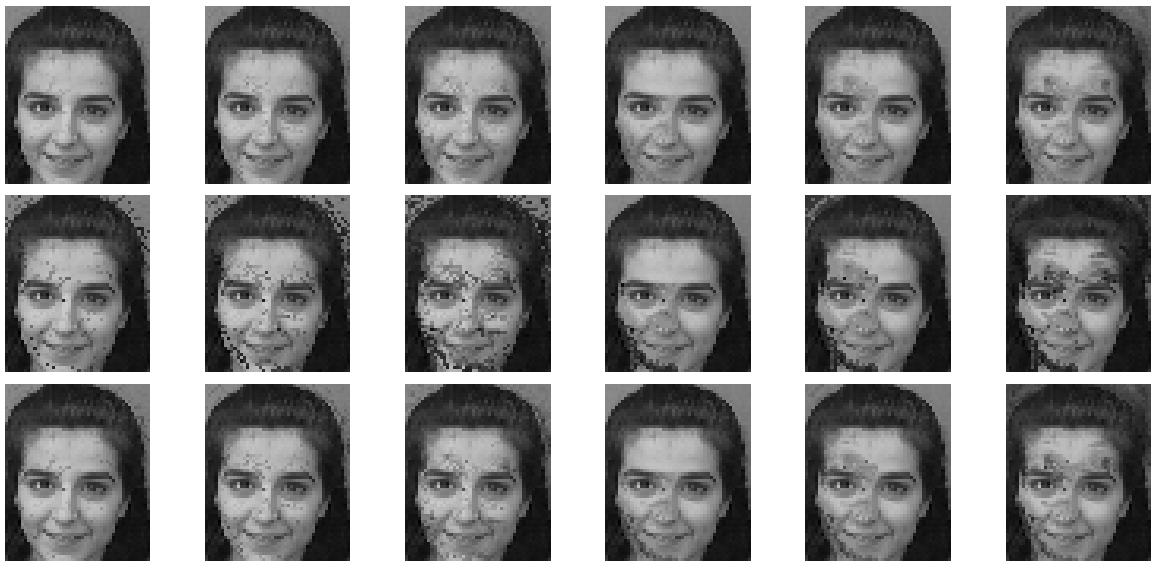

Fig. 5.4: Imagens que correspondem aos padrões recordados pela AFIM de Lukasiewicz (primeira linha), Gödel (segunda linha) e Goguen (terceira linha). Os padrões utilizados como entrada correspondem as imagens da figura 5.3.

Modelo	$Er(\mathbf{r}^1)$	$Er(\mathbf{r}^2)$	$Er(\mathbf{r}^3)$	$Er(\mathbf{r}^4)$	$Er(\mathbf{r}^5)$	$Er(\mathbf{r}^6)$
IFAM de Lukasiewicz	0.0248	0.0388	0.0587	0.0842	0.1051	0.1499
IFAM de Gödel	0.1132	0.1690	0.2440	0.1878	0.2419	0.3355
IFAM de Goguen	0.0459	0.0682	0.1079	0.1241	0.1498	0.2356
FAM max-min	0.8331	0.8309	0.8332	0.8257	0.8066	0.7555
FAM max-prod	0.4730	0.4723	0.4706	0.4729	0.4736	0.4565
Lukasiewicz GFAM	0.5298	0.4944	0.4932	0.5061	0.6200	0.7013
FAM de Junbo	0.1132	0.1690	0.2440	0.1878	0.2419	0.3355
FAM max-min com limiar	0.1132	0.1690	0.2440	0.1878	0.2419	0.3355
MAM Aditiva	0.0241	0.0380	0.0580	0.0804	0.0994	0.1486
MAM Multiplicativa	0.0437	0.0653	0.1056	0.1146	0.1354	0.2335
OLAM	0.2531	0.4892	0.7452	0.4258	0.6673	0.8442

Tab. 5.3: Erro normalizado dos padrões recordados por diferentes modelos de memória associativa quando os padrões $\mathbf{r}^1, \ldots, \mathbf{r}^6$ da figura 5.3 são apresentados como entrada.

aos padrões $(W_M \circ_M \mathbf{z}^k) \vee \boldsymbol{\theta}$ recordados pela AFIM de Gödel para $k = 1, \ldots, 6$, respectivamente. Lembre-se que $W_M = X \circledast_M X^T$ é a matriz obtida pelo armazenamento nebuloso R-implicativo baseado na implicação I_M. As imagens na terceira linha correspondem aos padrões recordados pela AFIM de Goguen. Os erros normalizados dos padrões recordados pelas AFIMs de Gödel e Goguen estão apresentados na tabela 5.3.

Finalmente, a tabela 5.3 também apresenta o erro normalizado de outros modelos de memória associativa. Verificou-se que a max-mim FAM, a FAM max-prod e a GFAM de Lukasiewicz foram incapazes de recordar as memórias fundamentais devido a interferência cruzada entre os padrões armazenados. A AFIM de Gödel, a FAM de Junbo *et al.* e a FAM max-min com limiar de Liu produziram os mesmos erros de recordação. Além disso, a MAM aditiva e a AFIM de Lukasiewicz produziram erros muito parecidos. De um modo semelhante, a MAM multiplicativa e a AFIM de Goguen produziram praticamente o mesmo erro. Essas semelhanças serão justificadas na seção 5.5. Observe que a tabela 5.3 inclui também o erro normalizado obtido pela *Memória Associativa Linear Ótima* (OLAM, Optimal Linear Associative Memory) de Kohonen [56, 57]. A OLAM representa um dos primeiros modelos de memória associativa para imagens em tons de cinza. Note que a AFIM de Lukasiewicz e a MAM aditiva produziram os menores erros de recordação.

5.2.4 Pontos Fixos

O teorema 5.8 apresentado na subseção anterior relaciona o padrão recordado com o conjunto dos pontos fixos da AFIM. Essa subseção trata dos pontos fixos das AFIMs.

Primeiramente, lembre-se que um padrão $\mathbf{x}$ é um ponto fixo da AFIM com respeito à composição max-T se e somente se $(W \circ_T \mathbf{y}) \vee \boldsymbol{\theta} = \mathbf{y}$. De um modo similar, um padrão $\mathbf{x} \in [0,1]^n$ é um ponto fixo de W com respeito ao produto max-T se e somente se $W \circ_T \mathbf{x} = \mathbf{x}$. Note que os pontos fixos da AFIM estão intimamente relacionados com os pontos fixos da matriz dos pesos sinápticos $W = X \circledast_R X^T$. Por esta razão, essa subseção começa com um teorema sobre os pontos fixos de W.

Teorema 5.9. *Sejam $X = [\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^k] \in [0,1]^{n \times k}$ e $W = X \circledast_T X^T$. Um padrão $\mathbf{y}$ é um ponto fixo de W com respeito à composição max-T se $\mathbf{y} = \mathbf{c}$ para algum vetor constante $\mathbf{c} = [c, c, \ldots, c]^T \in [0,1]^n$ ou se $\mathbf{y}$ é da forma*

$$\mathbf{y} = \bigvee_{l=1}^{p} \bigwedge_{\xi \in L_l} \mathbf{x}^{\xi}, \tag{5.14}$$

para algum $L_l \subseteq \{1, \ldots, k\}$ e algum $p \in \mathbb{N}$.

A expressão $\bigvee_{l=1}^{k} \bigwedge_{\xi \in L_l} \mathbf{x}^{\xi}$, envolvendo os símbolos $\vee$, $\wedge$ e $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^k$, representa um polinômio reticulado em $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^k$ [9]. Sendo $[0,1]^n$ um reticulado distributivo, todo polinômio reticulado em $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^k$ é da forma dada em (5.14). Além disso, todo polinômio reticulado em $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^k$ é também um ponto fixo de W com respeito ao produto max-T, conforme o teorema 5.9. Note que o vetor bias $\boldsymbol{\theta}$ é o menor polinômio reticulado em $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^k$ e, portanto, $W \circ_T \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}$. O vetor $\boldsymbol{\theta}$ exclui as memórias espúrias menores que $\boldsymbol{\theta}$. Mesmo assim, as AFIMs possuem um grande número de pontos fixos que incluem as memórias fundamentais e um grande número de memórias espúrias.

5.2.5 Memórias Implicativas Autoassociativas Binárias

Muitos modelos tradicionais de memória associativa, tais como a rede de Hopfield, a BSB e a ECAM, foram desenvolvidas para o caso binário autoassociativo, onde $X = Y \in \{0,1\}^{n \times k}$ [47, 40]. Essa subseção trata desse caso particular.

Primeiramente, note que no caso binário, todas as t-normas e implicações coincidem. Conseqüentemente, existe uma única AFIM no caso binário. Sem perda de generalidade, considere $T(x,y) = x \wedge y$ (mínimo) e $I_T(x,y) = (1-x) \vee y$, para todo $x, y \in \{0,1\}$.

Foi mostrado na subseção 5.2.2 que podem ser armazenados quantos padrões forem desejados numa AFIM. No caso binário, pode-se armazenar no máximo 2^n padrões, onde n é

a dimensão dos padrões. Observe que a capacidade absoluta de armazenamento de uma AFIM binária excede a capacidade absoluta da rede de Hopfield que é assintóticamente $n/(4 \log n)$ padrões binários aleatórios [71].

Os resultados apresentados nas subseções anteriores sobre a tolerância à ruído e os pontos fixos das AFIMs também continuam válidos no caso binário. Entretanto, existe um resultado mais forte que caracteriza todos os pontos fixos no caso binário.

Teorema 5.10. *Sejam $X = [\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^k] \in \{0,1\}^{n \times k}$ e $W = X \circledast_T X^T$. Um padrão binário $\mathbf{y}$ é um ponto fixo de W com respeito ao produto max-T se e somente se $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ ou $\mathbf{y} = \mathbf{1}$ ou se $\mathbf{y}$ é um polinômio reticulado em $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^k$.*

O teorema 5.10 fornece uma caracterização precisa do conjunto dos pontos fixos de $W = X \circledast_T X$ com respeito ao produto max-T (max-min) no caso binário. Como consequência, o vetor bias exclui apenas o ponto fixo $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ no caso binário autoassociativo. Além disso, o teorema 5.8 e o teorema 5.10 mostram que a AFIM e as *Memórias Autoassociativas Morfológicas* (AMMs, Autoassociative Morphological Memories) atuam da mesma forma no caso binário se uma condição fraca sobre os padrões armazenados é satisfeita [107, 108]. Na seção 5.5.2 é mostrado que estas semelhanças não são restritas ao caso binário autoassociativo.

5.3 Memórias Associativas Nebulosas Implicativas Duais com Respeito à Negação Usual

Uma IFAM é composta por neurônios max-T, onde T é uma t-norma contínua. Conseqüentemente, dada uma IFAM com matriz de pesos sinápticos $W \in [0,1]^{m \times n}$ e vetor bias $\boldsymbol{\theta} \in [0,1]^m$, o operador $\mathcal{W}$ definido pela equação

$$\mathcal{W}(\mathbf{x}) = (W \circ_T \mathbf{x}) \vee \boldsymbol{\theta}\,, \tag{5.15}$$

efetua uma operação de dilatação. Um modelo dual pode ser obtido a partir da relação de dualidade com respeito à negação (cf. subseção 2.2.3). O modelo obtido é chamado *IFAM dual com respeito à negação usual*, ou simplesmente *IFAM dual* [116, 121], e será discutido a seguir. O modelo obtido a partir da relação de dualidade com respeito à adjunção é discutido na próxima subseção.

Observação. Note que $\mathcal{W}$ é uma dilatação de $[0,1]^n$ em $[\boldsymbol{\theta}, \mathbf{1}_m]$, i.e., $\mathcal{W} : [0,1]^n \to [\boldsymbol{\theta}, \mathbf{1}_m]$, onde

$$[\boldsymbol{\theta}, \mathbf{1}_m] = \{\mathbf{y} \in [0,1]^m : \boldsymbol{\theta} \leq \mathbf{y}\}\,. \tag{5.16}$$

Desse modo, $\mathcal{W}(\mathbf{0}_n) = \boldsymbol{\theta}$, onde $\mathbf{0}_n$ é o vetor coluna n-dimensional $[0, \ldots, 0]^T$. Em outras palavras, a dilatação do menor elemento do domínio de $\mathcal{W}$, o reticulado completo $[0,1]^n$, é o menor elemento do contra-domínio de $\mathcal{W}$, o reticulado completo $[\boldsymbol{\theta}, \mathbf{1}_m]$.

Considere negações $\mathbf{N}_S^p : [0,1]^p \to [0,1]^p$ obtidas aplicando a negação usual N_S em cada componente do vetor de entrada, i.e., $[\mathbf{N}_S(\mathbf{x})]_i = N_S(x_i)$, para todo $i = 1, \ldots, p$. Seja $\mathcal{W}$ o operador definido em (5.15) e defina $\mathcal{M}$ como sendo a negação de $\mathcal{W}$ com respeito as negações $\mathbf{N}_S^n$ e $\mathbf{N}_S^m$. Em outras palavras, defina $\mathcal{M}$ através da seguinte equação para todo $\mathbf{x} \in [0,1]^n$:

$$\mathcal{M}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_S^m \left(\mathcal{W} \left[\mathbf{N}_S^n (\mathbf{x}) \right] \right) . \tag{5.17}$$

Uma IFAM dual é definida como sendo o modelo de memória associativa que corresponde ao operador $\mathcal{M}$. O teorema 5.11 abaixo mostra que $\mathcal{M}$ é uma erosão de $[0,1]^n$ em $[\mathbf{0}_m, \boldsymbol{\vartheta}] = \{\mathbf{y} \in [0,1]^m : \mathbf{y} \leq \boldsymbol{\vartheta}\}$ com $\boldsymbol{\vartheta} \in [0,1]^m$. Além disso, o teorema 5.11 revela que uma IFAM dual é descrita por neurônios min-S, onde S é uma s-norma contínua. Lembre-se que um neurônio min-S com uma s-norma contínua realiza uma erosão. Portanto, as IFAMs duais também pertencem à classe das FMAMs.

Observação. A proposta original de uma IFAM dual considera apenas a negação $\mathbf{N}_S^p$ induzida pela negação nebulosa usual N_S [116, 121]. Entretanto, outros modelos podem ser obtidos a partir de negações nebulosas diferentes da negação nebulosa usual.

Teorema 5.11. *Sejam $W \in [0,1]^{m \times n}$, $\boldsymbol{\theta} \in [0,1]^m$ e $\mathcal{W} : [0,1]^n \to [\boldsymbol{\theta}, \mathbf{1}_m]$ o operador definido em* (5.15)*. O operador dual de $\mathcal{W}$ com respeito as respeito as negações $\mathbf{N}_S^n$ e $\mathbf{N}_S^m$, denotado por $\mathcal{M} : [0,1]^n \to [\mathbf{0}_m, \boldsymbol{\vartheta}]$, é dado pela seguinte equação para todo $\mathbf{x} \in [0,1]^n$*

$$\mathcal{M}(\mathbf{x}) = (M \bullet_S \mathbf{x}) \wedge \boldsymbol{\vartheta} , \tag{5.18}$$

onde $M \in [0,1]^{m \times n}$ e $\boldsymbol{\vartheta} \in [0,1]^m$ são tais que $m_{ij} = N_S(w_{ij})$ e $\vartheta_i = N_S(\theta_i)$, para todo $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. O produto min-S em (5.18) *está baseado na s-norma contínua dual, com respeito à negação N_S, da t-norma (contínua) empregada no produto max-T em* (5.15)*.*

Desse modo, dado uma matriz de pesos sinápticos $M \in [0,1]^{m \times n}$ e um vetor bias $\vartheta \in [0,1]^m$, o padrão $\mathbf{y} \in [0,1]^m$ recordado pela IFAM dual após introduzir com entrada o padrão $\mathbf{x} \in [0,1]^n$ é dado pela equação

$$\mathbf{y} = \mathcal{M}(\mathbf{x}) = (M \bullet_S \mathbf{x}) \wedge \boldsymbol{\vartheta} , \tag{5.19}$$

onde o símbolo $\bullet_S$ representa o produto min-S com uma s-norma contínua. A equação (5.19)

mostra que uma IFAM dual representa uma rede neural morfológica nebulosa progressiva de camada única (cf. figura 3.2).

A matriz dos pesos sinápticos $M \in [0,1]^{m\times n}$ e o vetor bias $\boldsymbol{\vartheta} \in [0,1]^m$ de uma IFAM dual são obtidos pelo *armazenamento nebuloso R-implicativo dual* que pode ser derivado do armazenamento nebuloso R-implicativo como segue.

Considere um conjunto de memórias fundamentais $\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi) : \xi = 1, \ldots, k\}$. Suponha que $\mathbf{y}^\xi = \mathcal{M}(\mathbf{x}^\xi) = \mathbf{N}_S^m\left(\mathcal{W}\left[\mathbf{N}_S^n(\mathbf{x})\right]\right)$. Desse modo, a negação $\mathbf{N}_S^m(\mathbf{y}^\xi)$ satisfaz as equações:

$$\mathbf{N}_S^m(\mathbf{y}^\xi) = \mathcal{W}\left[\mathbf{N}_S^n(\mathbf{x})\right] = \left[W \circ_T \mathbf{N}_S^n(\mathbf{x}^\xi)\right] \vee \boldsymbol{\theta}\,, \tag{5.20}$$

onde $w_{ij} = N_S(m_{ij})$ e $\theta_i = N_S(\vartheta_i)$, para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. Denotando $\mathbf{v}^\xi = \mathbf{N}_S^m(\mathbf{y}^\xi)$ e $\mathbf{u}^\xi = \mathbf{N}_S^n(\mathbf{x}^\xi)$, para $\xi = 1, \ldots, k$, a equação (5.20) torna-se

$$\mathbf{v}^\xi = (W \circ_T \mathbf{u}^\xi) \vee \boldsymbol{\theta}\,. \tag{5.21}$$

Note que (5.21) descreve uma IFAM com entrada $\mathbf{u}^\xi$ e saída $\mathbf{v}^\xi$, para $\xi = 1, \ldots, k$. O armazenamento nebuloso R-implicativo aplicado ao conjunto de memórias fundamentais $\{(\mathbf{u}^\xi, \mathbf{v}^\xi) : \xi = 1, \ldots, k\}$ define

$$w_{ij} = \bigwedge_{\xi=1}^{k} I_T(u_j^\xi, v_i^\xi) \quad \text{e} \quad \theta_i = \bigwedge_{\xi=1}^{k} v_i^\xi\,, \tag{5.22}$$

como sendo os elementos da matriz dos pesos sinápticos e do vetor bias da IFAM descrita por (5.21). Substituindo as equações $w_{ij} = N_S(m_{ij})$, $\theta_i = N_S(\vartheta_i)$, $u_j^\xi = N_S(x_j^\xi)$ e $v_j^\xi = N_S(y_j^\xi)$ em (5.22) obtem-se

$$N_S(m_{ij}) = \bigwedge_{\xi=1}^{k} I_T\left(N_S(x_j^\xi), N_S(y_i^\xi)\right) \quad \text{e} \quad N_S(\vartheta_i) = \bigwedge_{\xi=1}^{k} N_S(y_i^\xi)\,. \tag{5.23}$$

Logo, os elementos da matriz dos pesos sinápticos M satisfazem as seguintes equações para todo $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$:

$$m_{ij} = N_S\left[\bigwedge_{\xi=1}^{k} I_T\left(N_S(x_j^\xi), N_S(y_i^\xi)\right)\right] = \bigvee_{\xi=1}^{k} N_S\left[I_T\left(N_S(x_j^\xi), N_S(y_i^\xi)\right)\right] = \bigvee_{\xi=1}^{k} J_S\left(x_j^\xi, y_i^\xi\right), \tag{5.24}$$

onde J_S é a implicação nebulosa dual de I_T com respeito à N_S. Lembre-se que J_S é também o operador tal que o par (J_S, S) forma uma adjunção. Finalmente, os elementos do vetor

bias $\boldsymbol{\vartheta}$ satisfazem as seguintes equações para todo $i = 1, \ldots, m$:

$$\vartheta_i = N_S \left[\bigwedge_{\xi=1}^{k} N_S(y_i^\xi) \right] = \bigvee_{\xi=1}^{k} y_i^\xi \,. \tag{5.25}$$

Concluindo, os elementos da matriz dos pesos sinápticos M e do vetor bias $\boldsymbol{\vartheta}$ fornecidos pelo armazenamento nebuloso R-implicativo dual são dados pelas equações (5.24) e (5.25) para todo $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. Se $X = [\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^k] \in [0,1]^{n \times k}$ e $Y = [\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^k] \in [0,1]^{m \times n}$ forem as matrizes com as memórias fundamentais como coluna, então M e $\boldsymbol{\vartheta}$ são dados pelas equações

$$M = Y \bar{\circledast}_S X^T \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\vartheta} = \bigvee_{\xi=1}^{k} \mathbf{y}^\xi \,, \tag{5.26}$$

onde $C = A \bar{\circledast} B \in [0,1]^{m \times n}$, chamado *produto max-$J_S$* de $A \in [0,1]^{m \times k}$ por $B \in [0,1]^{k \times n}$, é definido pela seguinte equação:

$$c_{ij} = \bigvee_{l=1}^{k} J_S(b_{lj}, a_{il}) \quad \text{para} \quad i = 1, \ldots, m \quad \text{e} \quad j = 1, \ldots, n \,. \tag{5.27}$$

Exemplo 10. Considere as memórias fundamentais $(\mathbf{a}^\xi, \mathbf{b}^\xi)$, $\xi = 1, \ldots, 8$, apresentadas na tabela 5.1 e denote $X = [\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^8] \in [0,1]^{5 \times 8}$ e $Y = [\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^8] \in [0,1]^{3 \times 8}$. Lembre-se que esse conjunto de memórias fundamentais foi discutido em [63] e no exemplo 8.

O conjunto de memórias fundamentais da tabela 5.1 foi armazenado na IFAM de Gödel descrita por (5.19) com o produto min-C_M, i.e., o símbolo "$\bullet_M$" representando o produto min-max. A matriz dos pesos sinápticos M_M e o vetor bias $\boldsymbol{\vartheta}$ obtidos através do armazenamento nebuloso R-implicativo dual são dados pelas seguintes equações:

$$M_M = Y \bar{\circledast}_M X^T = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.7 & 0.5 & 0.5 & 0.7 \\ 0.7 & 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8 \\ 0.4 & 0.5 & 0.4 & 0.4 & 0.3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\vartheta} = \bigwedge_{\xi=1}^{8} \mathbf{b}^\xi = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.8 \\ 0.5 \end{bmatrix} . \tag{5.28}$$

Introduzindo como entrada os padrões $\mathbf{a}^\xi$, para $\xi = 1, \ldots, 8$, verificou-se que a equação $\mathbf{b}^\xi = (M_L \bullet_M \mathbf{a}^\xi) \wedge \boldsymbol{\vartheta}$ é satisfeita apenas para $\xi \in \{3, 5, 7, 8\}$. Em outras palavras, a IFAM dual de Gödel foi capaz de recordar somente os pares $(\mathbf{a}^3, \mathbf{b}^3)$, $(\mathbf{a}^5, \mathbf{b}^5)$, $(\mathbf{a}^7, \mathbf{b}^7)$ e $(\mathbf{a}^8, \mathbf{b}^8)$.

De um modo similar, a matriz dos pesos sinápticos da IFAM dual de Lukasiewicz $M_L = Y \bar{\circledast}_L X^T$ e a matriz dos pesos sinápticos da IFAM dual de Goguen $M_P = Y \bar{\circledast}_P X^T$ obtidas

através do armazenamento nebuloso R-implicativo dual são dadas, respectivamente, pelas seguintes equações:

$$M_L = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.4 & 0.6 \\ 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.2 \end{bmatrix} \text{ e } M_P = \begin{bmatrix} 0.4444 & 0.5000 & 0.3750 & 0.3750 & 0.4444 \\ 0.5556 & 0.6667 & 0.7143 & 0.6667 & 0.7500 \\ 0.3333 & 0.2222 & 0.1429 & 0.1429 & 0.2222 \end{bmatrix}. \tag{5.29}$$

Verifica-se que as IFAMs duais de Lukasiewicz e Goguen são capazes de recordar somente os pares $(\mathbf{a}^2, \mathbf{b}^2)$ e $(\mathbf{a}^6, \mathbf{b}^6)$. Em outras palavras, as equações $\mathbf{b}^\xi = (M_L \bullet_L \mathbf{a}^\xi) \wedge \boldsymbol{\vartheta}$ e $\mathbf{b}^\xi = (M_P \bullet_P \mathbf{a}^\xi) \wedge \boldsymbol{\vartheta}$ valem apenas para $\xi = 2$ e $\xi = 6$.

Novamente, a tabela 5.2 apresenta resumidamente a capacidade absoluta de armazenamento e o conjunto dos índices dos pares de padrões recordados corretamente pelos modelos apresentados nesse exemplo.

A relação de dualidade entre as IFAMs e as IFAMs duais, bem como a dualidade entre o armazenamento nebuloso R-implicativo e armazenamento nebuloso R-implicativo dual, implicam que cada resultado referente a uma IFAM possui um resultado correspondente dual para uma IFAM dual. De um modo geral, os resultados duais são obtidos revertendo a ordem das desigualdades e substituindo o máximo pelo mínimo, a t-norma pela s-norma dual e a R-implicação pela implicação dual correspondente. Por exemplo, o correspondente dual do teorema 5.1 é:

Teorema 5.12 (Teorema Principal do Aprendizado Nebuloso R-Implicativo Dual). *Considere um conjunto de memórias fundamentais $\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi) : \xi = 1, \ldots, k\}$. A matriz dos pesos sinápticos M e o vetor bias $\boldsymbol{\vartheta}$ dados pelo armazenamento nebuloso R-implicativo dual são tais que $[M, \boldsymbol{\vartheta}]$ representa o infimo do conjunto*

$$\left\{[A, \boldsymbol{\beta}] \in [0,1]^{m\times(n+1)} : (A \bullet_S \mathbf{x}^\xi) \wedge \boldsymbol{\beta} \geq \mathbf{y}^\xi,\ \forall \xi = 1, \ldots, k\right\}, \tag{5.30}$$

onde $[M, \boldsymbol{\vartheta}]$ (resp. $[A, \boldsymbol{\beta}]$) é a matriz $m \times (n+1)$ obtida concatenando $M \in [0,1]^{m\times n}$ e $\boldsymbol{\vartheta} \in [0,1]^m$ (resp. A e $\boldsymbol{\beta}$).

Exemplo 11. Considere os padrões $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^{12}$ que correspondem as imagens da figura 5.2. Esses padrões foram armazenados nas AFIMs duais de Lukasiewicz, Gödel e Goguen. Uma AFIM dual corresponde ao caso autoassociativo de uma IFAM dual. Verificou-se que todos os padrões $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^{12}$ reprentam pontos fixos desses três modelos. Essa observação confirma a versão dual do teorema 5.5.

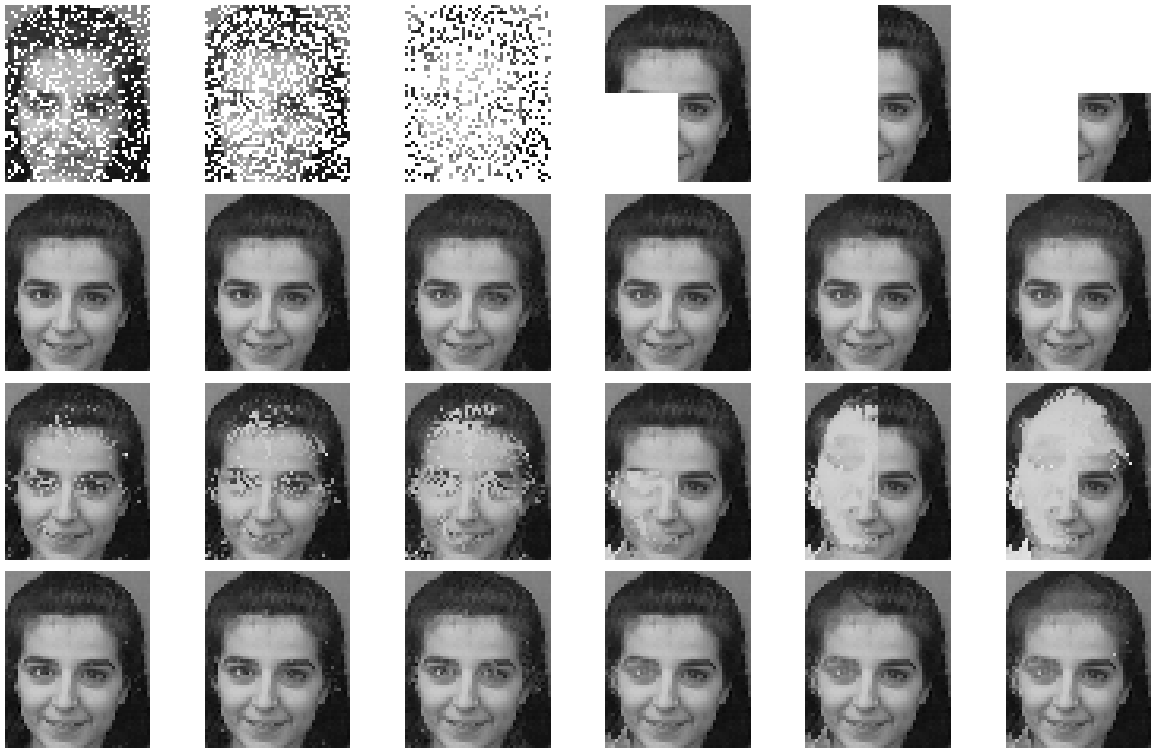

Fig. 5.5: Versões dilatadas da primeira imagem da figura 5.2 (primeira linha) e imagens referentes aos respectivos padrões recordados pela AFIM dual de Lukasiewicz (segunda linha), Gödel (terceira linha) e Goguen (quarta linha).

O teorema 5.8 revela que uma AFIM apresenta tolerância com respeito à padrões erodidos. A versão dual desse teorema diz que uma AFIM dual apresenta tolerância com respeito à padrões dilatados. Para verificar esse fato, considere os padrões $\mathbf{s}^1, \ldots, \mathbf{s}^6$ apresentados na primeira linha da figura 5.5. Os padrões $\mathbf{s}^1, \mathbf{s}^2$ e $\mathbf{s}^3$ foram gerados introduzindo pixels com valor 1 na imagem $\mathbf{x}^1$, i.e., foi introduzido na imagem um ruído do tipo "salt". As probabilidades de introduzir um pixel com valor 1 foram 25%, 50% e 75%, respectivamente. As demais imagens da figura 5.3, $\mathbf{s}^4, \mathbf{s}^5$ e $\mathbf{s}^6$, correspondem à versões incompletas de $\mathbf{x}^1$ onde foram excluídos 25%, 50% e 75% do número total de pixels, respectivamente. Foram atribuídos o valor 1 para os pixels ausêntes de $\mathbf{s}^4, \mathbf{s}^5$ e $\mathbf{s}^6$. Note que $\mathbf{s}^k \geq \mathbf{x}^1$ para todo $k = 1, \ldots, 6$. A figura 5.5 apresenta os padrões recordados pelas AFIMs duais de Lukasiewicz, Gödel e Goguen após apresentar como entrada os padrões $\mathbf{s}^k$ para $k = 1, \ldots, 6$. O erro de recordação desses modelos está apresentado na tabela 5.4. Note que a IFAM dual de Lukasiewicz produziu os menores erros de recordação enquanto que a IFAM dual de Gödel apresentou os piores. Esse exemplo resalta a necessidade de serem conduzidas mais pesquisas sobre "a escolha da melhor" IFAM dual (ou IFAM) para um dado problema.

Modelo	$Er(\mathbf{s}^1)$	$Er(\mathbf{s}^2)$	$Er(\mathbf{s}^3)$	$Er(\mathbf{s}^4)$	$Er(\mathbf{s}^5)$	$Er(\mathbf{s}^6)$
IFAM Dual de Lukasiewicz	0.0184	0.0267	0.0583	0.0661	0.0768	0.0846
IFAM Dual de Gödel	0.1536	0.2396	0.3254	0.2600	0.4117	0.5456
IFAM Dual de Goguen	0.0311	0.0529	0.0932	0.1357	0.1624	0.1866

Tab. 5.4: Erro normalizado dos padrões recordados pelas AFIMs duais quando os padrões $\mathbf{s}^1, \ldots, \mathbf{s}^6$ da primeira linha da figura 5.5 são apresentados como entrada.

5.4 IFAMs Adjuntas e IFAMs Duais Adjuntas

Outros modelos de memórias associativas podem ser obtidos através do conceito de dualidade com respeito à adjunção. O modelo que forma uma adjunção com uma IFAM é chamado *IFAM adjunta* e o modelo que forma uma adjunção com uma IFAM dual é referido como *IFAM dual adjunta*.

Considere uma IFAM com matriz de pesos sinápticos $W \in [0,1]^{m\times n}$ e vetor bias $\boldsymbol{\theta} \in [0,1]^m$. O operador $\mathcal{W} : [0,1]^n \to [\boldsymbol{\theta}, \mathbf{1}_m]$ definido em (5.15) efetua uma operação de dilatação. Portanto, pela proposição 2.5, existe uma única erosão $\mathcal{A} : [\boldsymbol{\theta}, \mathbf{1}_m] \to [0,1]^n$ tal que $(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ forma uma adjunção em $[0,1]^n$ e $[\boldsymbol{\theta}, \mathbf{1}_m]$. A erosão $\mathcal{A}$ é dada por

$$\mathcal{A}(\mathbf{y}) = \bigvee \{\mathbf{x} \in [0,1]^n : \mathcal{W}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{y}\} \ . \tag{5.31}$$

Define-se uma IFAM adjunta como sendo a memória associativa que corresponde ao operador $\mathcal{A}$. O teorema 5.13 abaixo revela que uma IFAM adjunta é composta por neurônios morfológicos descritos pelo produto min-I. Esses neurônios morfológicos realizam operações de erosão em $[\boldsymbol{\theta}, \mathbf{1}_m] \to [0,1]$. Portanto, uma IFAM adjunta pertence à classe das FMAMs.

A relação de dualidade com respeito à adjunção também pode ser aplicada ao operador que descreve uma IFAM dual. Seja $\mathcal{M} : [0,1]^n \to [\mathbf{0}_m, \boldsymbol{\vartheta}]$ o operador que descreve uma IFAM dual com matriz de pesos sinápticos $M \in [0,1]^{m\times n}$ e vetor bias $\boldsymbol{\vartheta} \in [0,1]^m$. O operador $\mathcal{M}$ representa uma erosão, portanto, existe uma única dilatação $\mathcal{B} : [\mathbf{0}_m, \boldsymbol{\vartheta}] \to [0,1]^n$ tal que $(\mathcal{M}, \mathcal{B})$ forma uma adjunção em $[0,1]^n$ e $[\mathbf{0}_m, \boldsymbol{\vartheta}]$. A IFAM dual adjunta é a memória associativa que corresponde à dilatação $\mathcal{B}$. Conforme a proposição 2.5, essa dilatação é dada pela seguinte equação:

$$\mathcal{B}(\mathbf{y}) = \bigwedge \{\mathbf{x} \in [0,1]^n : \mathcal{M}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{y}\} \ . \tag{5.32}$$

O teorema 5.13 abaixo mostra que uma IFAM dual adjunta é composta por neurônios morfológicos que realizam operações de dilatação em $[\mathbf{0}_m, \boldsymbol{\vartheta}] \to [0,1]$. Conseqüentemente, uma

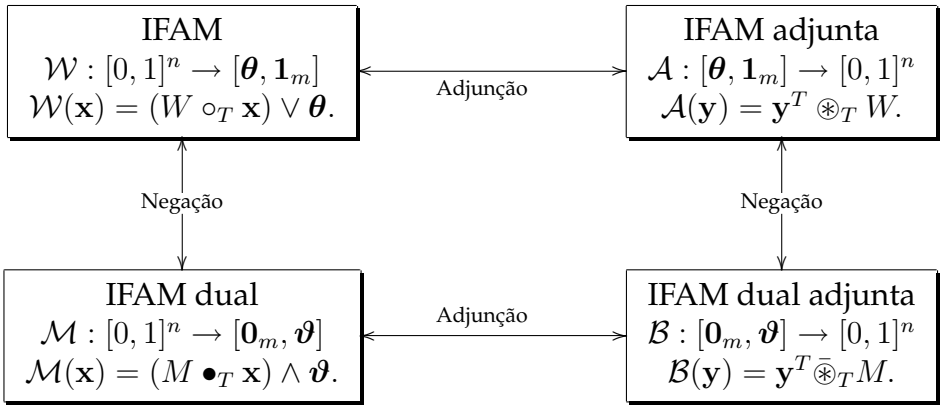

Fig. 5.6: Esquema relacionando as IFAMs, IFAMs duais, IFAMs adjuntas e IFAMs duais adjuntas.

IFAM dual adjunta também pertence à classe das FMAMs.

Teorema 5.13. *Sejam $Y = [\mathbf{y}^1, \ldots, \mathbf{y}^k] \in [0,1]^{m \times k}$ e $X = [\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^k] \in [0,1]^{n \times k}$ as matrizes com as memórias fundamentais como coluna. Defina $W = Y \circledast_T X^T \in [0,1]^{m \times n}$ e $\boldsymbol{\theta} = \bigwedge_{\xi=1}^{k} \mathbf{y}^\xi \in [0,1]^m$. Dado um padrão de entrada $\mathbf{y} \in [\boldsymbol{\theta}, \mathbf{1}_m]$, o padrão recordado pela IFAM adjunta com matriz de pesos sinápticos W é dado pela seguinte equação*

$$\mathbf{x}^T = \mathcal{A}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T \circledast_T W\,. \tag{5.33}$$

Analogamente, considere $M = Y \bar{\circledast}_S X^T \in [0,1]^{m \times n}$ e $\boldsymbol{\vartheta} = \bigvee_{\xi=1}^{k} \in [0,1]^m$. O padrão recordado pela IFAM dual adjunta com matriz de pesos sinápticos M é dado pela equação

$$\mathbf{x}^T = \mathcal{B}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T \bar{\circledast}_T M\,, \tag{5.34}$$

onde $\mathbf{y} \in [\mathbf{0}_m, \boldsymbol{\vartheta}]$ representa o padrão de entrada.

Observação. Note que uma IFAM adjunta não possui um vetor bias, mas deve ter como entrada um padrão $\mathbf{y} \geq \boldsymbol{\theta}$. Uma alternativa seria definir uma IFAM adjunta através da equação $\mathbf{x} = (\mathbf{y} \vee \boldsymbol{\theta})^T \circledast_T W$. O operador que corresponde à essa nova proposta extende a IFAM adjunta para o domínio $[0,1]^m$. De um modo similar, uma IFAM dual adjunta também não possui um vetor bias e deve ter como entrada um padrão $\mathbf{y} \leq \boldsymbol{\vartheta}$. O operador que corresponde à equação $\mathbf{x} = (\mathbf{y} \wedge \boldsymbol{\theta})^T \bar{\circledast}_T M$ extende $\mathcal{B}$ para o domínio $[0,1]^m$. Uma IFAM dual adjunta poderia ser definida através desse novo operador.

A figura 5.6 apresenta um esquema que resume a relação entre as IFAMs, IFAMs duais, IFAMs adjuntas e IFAMs adjuntas duais. Esse esquema é análogo ao esquema apresentado

na figura 2.1.

Exemplo 12. Considere novamente o conjunto de memórias fundamentais apresentado na tabela 5.1. Note que as equações (5.33) e (5.34), que descrevem uma IFAM adjunta e uma IFAM dual adjunta, respectivamente, consideram como entrada um padrão $\mathbf{y}$ e tem como saída um padrão $\mathbf{x}$. Desse modo, denote $Y = [\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^8] \in [0,1]^{5\times 8}$ e $X = [\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^8] \in [0,1]^{3\times 8}$ como sendo as matrizes cujas colunas correspondem aos padrões de entrada e saída, respectivamente.

Os pares de entrada e saída foram armazenados primeiramente na IFAM adjunta de Lukasiewicz. A matriz dos pesos sinápticos $W_L^a \in [0,1]^{5\times 8}$ da IFAM adjunta de Lukasiewicz é dada pela seguinte equação:

$$W_L^a = Y \circledast_L X^T = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 & 0.7 \\ 0.6 & 0.5 & 0.8 \\ 0.7 & 0.5 & 0.9 \\ 0.7 & 0.6 & 0.9 \\ 0.6 & 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}. \tag{5.35}$$

Note que W_L^a dada em (5.35) é diferente de W_L dada em (5.9), que corresponde à matriz dos pesos sinápticos da IFAM de Lukasiewicz, pois as matrizes X e Y foram definidas de um modo diferente no exemplo 8. O mesmo argumento vale para os demais modelos de memória associativa adjunta apresentadas nesse exemplo. Apresentando como entrada os padrões $\mathbf{a}^\xi$, para $\xi = 1, \ldots, 8$, verifica-se que $\mathbf{b}^{\xi^T} = \mathbf{a}^{\xi^T} \circledast_L W_L^a$ somente para os pares $(\mathbf{a}^2, \mathbf{b}^2)$ e $(\mathbf{a}^6, \mathbf{b}^6)$. Note que $\mathbf{a}^\xi \in [\boldsymbol{\theta}, \mathbf{1}_5]$, para todo $\xi = 1, \ldots, 8$, onde $\boldsymbol{\theta} = \bigwedge_{\xi=1}^{8} \mathbf{a}^\xi$.

De um modo similar, verifica-se que a IFAM adjunta de Goguen recorda somente os pares $(\mathbf{a}^2, \mathbf{b}^2)$ e $(\mathbf{a}^6, \mathbf{b}^6)$ enquanto que a IFAM adjunta de Gödel é incapaz de recordar corretamente qualquer um dos pares $(\mathbf{a}^\xi, \mathbf{b}^\xi)$, para $\xi = 1, \ldots, 8$.

A matriz dos pesos sinápticos da IFAM dual adjunta de Lukasiewicz $M_L^a \in [0,1]^{5\times 8}$ é dada pela seguinte equação:

$$M_L^a = Y \bar{\circledast}_L X^T = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.0 & 0.5 \\ 0.0 & 0.0 & 0.2 \\ 0.0 & 0.0 & 0.2 \\ 0.1 & 0.0 & 0.3 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}. \tag{5.36}$$

Verifica-se que $\mathbf{a}^\xi \in \left[\mathbf{0}_m, \bigvee_{\xi=1}^{8} \mathbf{a}^\xi\right]$, para todo $\xi = 1, \ldots, 8$. Entretanto, $\mathbf{b}^{\xi^T} = \mathbf{a}^{\xi^T} \bar{\circledast}_L M_L^a$

somente para $\xi \in \{3, 5, 8\}$. Finalmente, a IFAM dual adjunta de Goguen também é capaz de recordar somente os pares $(\mathbf{a}^3, \mathbf{b}^3)$, $(\mathbf{a}^5, \mathbf{b}^5)$ e $(\mathbf{a}^8, \mathbf{b}^8)$ enquanto que a IFAM dua adjunta de Gödel foi capaz de recordar somente os pares $(\mathbf{a}^3, \mathbf{b}^3)$ e $(\mathbf{a}^5, \mathbf{b}^5)$.

A tabela 5.2 apresenta de forma resumida os resultados obtidos para a capacidade absoluta de armazenamento das IFAMs adjuntas e das IFAMs duais adjuntas discutidas nesse exemplo.

As propriedades das IFAMs adjuntas e das IFAMs duais adjuntas não serão discutidas nessa tese. Entretanto, existe uma relação entre as IFAMs adjuntas e as FMAMs com neurônios morfológicos min-D que incluem as IFAMs duais como caso particular. De fato, considere uma IFAM adjunta com matriz dos pesos sinápticos $W \in [0, 1]^{m \times n}$ e padrão de entrada $\mathbf{y} \in [\boldsymbol{\theta}, \mathbf{1}_m]$, onde $\boldsymbol{\theta} \in [0, 1]^m$. Utilizando a equação (3.20), tem-se que o padrão recordado pela IFAM adjunta é descrito pela equação

$$\mathbf{x}^T = \mathbf{y}^T \circledast_T W = \mathbf{y}^T \bullet N(W) = \mathbf{y}^T \bullet M \,, \tag{5.37}$$

onde N é uma negação nebulosa e $M = N(W) \in [0, 1]^{m \times n}$ é tal que $m_{ij} = N(w_{ij})$ para todo $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. A disjunção nebulosa empregada no produto min-D é definida através da equação (3.14), i.e., $D(x, y) = I_T(N(y), x)$, para todo $x, y \in [0, 1]$. Em alguns casos, a fase de recordação de uma IFAM adjunta pode ser descrita em termos das equações que descrevem a fase correspondente de uma IFAM dual.

Exemplo 13 (Fase de recordação da IFAM adjunta de Lukasiewicz). Considere a IFAM adjunta baseada na implicação de Lukasiewicz I_L dada pela equação (2.31). Suponha que $W \in [0, 1]^{m \times n}$ seja a matriz dos pesos sinápticos e considere $\boldsymbol{\theta} \in [0, 1]^m$. Dado um padrão de entrada $\mathbf{y} = [y_1, \ldots, y_m]^T \in [\boldsymbol{\theta}, \mathbf{1}_m]$, o padrão recordado pela IFAM adjunta de Lukasiewicz $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_n]^T \in [0, 1]^n$ é dado pela seguinte equação para todo $j = 1, \ldots, n$:

$$x_j = \bigwedge_{i=1}^{m} I_L(w_{ij}, y_i) = \bigwedge_{i=1}^{m} [1 \wedge (y_i - w_{ij} + 1)] \,. \tag{5.38}$$

Denotando $m_{ji} = 1 - w_{ij}$ para todo $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$, tem-se

$$x_j = \bigwedge_{i=1}^{m} [1 \wedge (y_i + m_{ji})] = \bigwedge_{i=1}^{m} D_L\left(m_{ji}, y_i\right) \,, \tag{5.39}$$

para todo $j = 1, \ldots, n$. Em outras palavras, o padrão recordado pela IFAM adjunta de Lukasiewicz é dado por $\mathbf{x} = M \bullet_L \mathbf{y}$. Portanto, a fase de recordação da IFAM adjunta de

Lukasiewicz coincide com a fase de recordação da IFAM dual de Lukasiewicz.

Infelizmente, a disjunção nebulosa dada em (3.14) nem sempre representa uma s-norma contínua. Portanto, a fase de recordação de uma IFAM adjunta nem sempre corresponde à fase de recordação de uma IFAM dual, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 14 (Fase de recordação da IFAM adjunta de Gödel). Sejam $W \in [0,1]^{m\times n}$ e $\boldsymbol{\theta} \in [0,1]^m$. Considere a IFAM adjunta baseada na implicação de Gödel I_M dada pela equação (2.29). O padrão recordado pela IFAM adjunta de Gödel $\mathbf{x} \in [0,1]^n$ é dado pela equação (5.37) com a disjunção nebulosa D dada pela equação (3.14). Se a negação nebulosa considerada for a negação nebulosa usual N_S, então a disjunção nebulosa empregada no produto min-D em (5.37) satisfaz as seguintes equações para todo $x, y \in [0,1]$:

$$D(x,y) = I_M(N_S(y), x) = \begin{cases} 1, & y \geq 1-x \\ x, & y < 1-x \end{cases} . \tag{5.40}$$

Note que a disjunção nebulosa não representa uma s-norma, pois D não é comutativa. Logo, a fase de recordação da IFAM adjunta de Gödel não corresponde à fase de recordação de uma IFAM.

Concluindo, a fase de recordação de uma IFAM adjunta pode ser descrita por uma FMAM com neurônios min-D. De um modo análogo, espera-se que uma IFAM dual adjunta possa ser descrita por uma FMAM com neurônios max-C. Essas observações servem como estímulo para pesquisas em modelos de FMAMs descritas pelos produtos max-C e min-D gerais, i.e., casos não restritos a t-normas e s-normas contínuas.

5.5 Relações das IFAMs com Outros Modelos de Memória Associativa

Essa seção discute a relação das IFAMs com os modelos de memória associativa apresentados no capítulo 4.

Primeiramente, note que as FAMs max-min e max-prod de Kosko são casos particulares das GFAMs de Chung e Lee. Entretanto, a equação que descreve a fase de recordação de uma GFAM com uma t-norma contínua é a mesma que descreve a fase de recordação de uma IFAM com vetor bias $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}_m$. Precisamente, ambos modelos são descritos pela equação $\mathbf{y} = (W \circ_T \mathbf{x}) \vee \boldsymbol{\theta}$, onde $\mathbf{x}$ é a entrada, $\mathbf{y}$ é a saída, W é a matriz dos pesos sinápticos e $\boldsymbol{\theta}$ é o vetor bias (tome $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}_m$ em uma GFAM). Logo, a diferença entre os dois modelos está na fase

de armazenamento: as GFAMs utilizam a estratégia de codificação correlação-t enquanto que as IFAMs empregam o armazenamento nebuloso R-implicativo. Todavia, o teorema 5.1 garante que uma IFAM consegue armazenar e recordar corretamente todos os padrões se a GFAM correspondente for capaz de armazenar e recordar corretamente o mesmo conjunto de memórias fundamentais. Em outras palavras, a capacidade absoluta de armazenamento de uma IFAM é sempre maior ou igual a capacidade absoluta de armazenamento de uma GFAM com uma t-norma contínua.

Em [63], Liu mostrou que a capacidade absoluta de armazenamento da FAM max-min com limiar é sempre maior ou igual a capacidade absoluta de armazenamento da FAM de Junbo [49]. É mostrado a seguir que o desempenho da IFAM de Gödel é no mínimo tão bom quanto o desempenho da FAM max-min com limiar [116].

Considere um padrão de entrada $\mathbf{x} \in [0,1]^n$. O padrão recordado pela FAM max-min com limiar é $\mathbf{y} = [W \circ_M (\mathbf{x} \vee \mathbf{c})] \vee \mathbf{d}$, onde W é a matriz dos pesos sinápticos e $\mathbf{c}$ e $\mathbf{d}$ são vetores de limiar. A matriz dos pesos sinápticos W e o vetor limar $\mathbf{d}$ são dados pelo armazenamento nebuloso R-implicativo de Gödel. A diferença entre a IFAM de Gödel e a FAM max-min com limiar está no vetor limiar $\mathbf{c}$ que é calculado através da equação (4.7). Entretanto, devido a monotonicidade do produto max-C_M, valem as seguintes equações:

$$\mathbf{y} = [W \circ_M (\mathbf{x} \vee \mathbf{c})] \vee \mathbf{d} = [(W \circ_M \mathbf{x}) \vee (W \circ_M \mathbf{c})] \vee \mathbf{d} = (W \circ_M \mathbf{x}) \vee \mathbf{f}\,, \tag{5.41}$$

onde $\mathbf{f} = (W \circ_M \mathbf{c}) \vee \mathbf{d}$. Essas equações mostram que a ação dos vetores $\mathbf{c}$ e $\mathbf{d}$ podem ser capturadas em um novo vetor $\mathbf{f}$. Além disso, o teorema 5.1 garante que se existe $\mathbf{f}$ tal que todas as memórias fundamentais são armazenadas e recordadas corretamente em uma FAM max-min com limiar, então a IFAM de Gödel também é capaz de armazenar e recordar esse conjunto de memórias fundamentais com um vetor bias $\boldsymbol{\theta} \geq \mathbf{f}$. Em vista desse fato, uma IFAM pode ser vista como uma generalização da FAM max-min com limiar para um produto max-T geral baseado em uma t-norma contínua.

5.5.1 Relação das IFAMs Duais com as FLBAMs

Considere um conjunto de memórias fundamentais $\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi) : \xi = 1, \ldots, k\}$. Denote $X = [\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^k] \in [0,1]^{n \times k}$ e $Y = [\mathbf{y}^1, \ldots, \mathbf{y}^k] \in [0,1]^{m \times k}$. Dado um padrão de entrada $\mathbf{x} \in [0,1]^n$, lembre-se que um passo na direção progressiva da FLBAM é descrita pela equação $\mathbf{y} = W \circledast_T \mathbf{x}$, onde $W = Y \circ_T X^T$ é a matriz dos pesos sinápticos. Aqui, o produto min-I_T e o produto max-T estão baseados em operadores adjuntos (I_T, T).

Os elementos da matriz dos pesos sinápticos W podem ser calculados através das se-

guintes equações obtidas a partir das relações dadas pelas equações (2.40), (3.14) e (2.42), respectivamente.

$$w_{ij} = \bigvee_{\xi=1}^{k} T\left(y_i^\xi, x_j^\xi\right) = \bigvee_{\xi=1}^{k} N\left[S\left(N(y_i^\xi), N(x_j^\xi)\right)\right] = \bigvee_{\xi=1}^{k} N\left[I\left(x_j^\xi, N(y_i^\xi)\right)\right] \tag{5.42}$$

$$= \bigvee_{\xi=1}^{k} J\left(N(x_j^\xi), y_i^\xi\right) = \bigvee_{\xi=1}^{k} J\left(u_j^\xi, y_i^\xi\right) , \tag{5.43}$$

onde $N : [0,1] \to [0,1]$ é uma negação nebulosa e $u_j^\xi = N(x_j^\xi)$ para $j = 1, \ldots, n$ e $\xi = 1, \ldots, k$. Em outras palavras, a matriz dos pesos sinápticos de uma FLBAM pode ser obtida através do armazenamento implicativo dual, i.e., $W = Y \bar{\circledast} U^T$, onde $U = [\mathbf{u}^1, \ldots, \mathbf{u}^k] \in [0,1]^{n \times k}$.

Além disso, da relação entre o produto min-I e o produto min-D dado pela equação (3.20), tem-se que o padrão recordado em um passo da FLBAM satisfaz as seguintes equações:

$$\mathbf{y} = W \circledast_T \mathbf{x} = W \bullet \mathbf{N}(\mathbf{x}) = W \bullet \mathbf{u} , \tag{5.44}$$

onde $\mathbf{u} = [u_1, \ldots, u_n]^T \in [0,1]^n$ é tal que $u_j = N(x_j)$ para $j = 1, \ldots, n$. Logo, o padrão obtido após um passo na direção progressiva da FLBAM corresponde ao padrão recordado por uma FMAM com neurônios min-D e entrada $\mathbf{u}$, a negação de $\mathbf{x}$.

Resumindo, dado um conjunto de memórias fundamentais $\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi) : \xi = 1, \ldots, k\}$ e um padrão de entrada $\mathbf{x} \in [0,1]^n$, defina $\mathbf{u} = \mathbf{N}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{u}^\xi = \mathbf{N}(\mathbf{x}^\xi)$ para $\xi = 1, \ldots, k$. O padrão $\mathbf{y}$ recordado após um passo da FLBAM na direção progressiva é dado pela equação

$$\mathbf{y} = W \bullet \mathbf{u} \quad \text{onde} \quad W = Y \bar{\circledast} U^T . \tag{5.45}$$

Infelizmente, o modelo de memória associativa descrito em (5.45) não corresponde à uma IFAM dual pelos seguintes motivos. Primeiro, a disjunção nebulosa D no produto min-D não é necessariamente uma s-norma contínua. Segundo, a implicação dual empregada no produto max-J em (5.45) não forma necessariamente uma adjunção com D. Essa observação, contudo, serve como estímulo para o desenvolvimento de uma teoria mais geral para modelos de FMAMs.

5.5.2 Relação das IFAMs com as Memórias Associativas Morfológicas

Lembre-se que uma MAM aditiva W^a_{XY} representa uma rede neural progressiva de camada única descrita pela equação

$$\mathbf{y} = W^a_{XY} \boxtimes \mathbf{x}\,, \quad \text{onde} \quad W^a_{XY} = Y \boxtimes X^*\,. \tag{5.46}$$

O modelo dual é dado pela equação $\mathbf{y} = M^a_{XY} \boxtimes \mathbf{x}$, onde $M^a_{XY} = Y \boxtimes X^*$ [90, 115].

O teorema 5.14 abaixo estabelece uma relação entre a IFAM de Lukasiewicz e sua versão dual com as MAMs aditivas. Além disso, o teorema mostra que tanto a fase de armazenamento quanto a fase de recordação da IFAM de Lukasiewicz (IFAM dual de Lukasiewicz) podem ser descritas em termos da fase correspondente da MAM aditiva W^a_{XY} (MAM aditiva M^a_{XY}) com um vetor bias $\boldsymbol{\theta}$ ($\boldsymbol{\vartheta}$, respectivamente).

Teorema 5.14. *Sejam $X = [\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^k] \in [0,1]^{n\times k}$ e $Y = [\mathbf{y}^1, \ldots, \mathbf{y}^k] \in [0,1]^{m\times k}$ as matrizes contendo as memórias fundamentais como coluna, respectivamente. Sejam $\boldsymbol{\theta}$ e $\boldsymbol{\vartheta}$ os vetores bias dados pelas equações $\boldsymbol{\theta} = \bigwedge_{\xi=1}^{k} \mathbf{y}^\xi$ e $\boldsymbol{\vartheta} = \bigvee_{\xi=1}^{p} \mathbf{y}^\xi$. A matriz dos pesos sinápticos e a fase de recordação da IFAM de Lukasiewicz e da MAM aditiva W^a_{XY} estão relacionadas através das seguintes equações para $\mathbf{x} \in [0,1]^n$:*

$$W_L = (W^a_{XY} \wedge 0) + 1 \quad e \quad (W_L \circ_L \mathbf{x}) \vee \boldsymbol{\theta} = [(W^a_{XY} \wedge 0) \boxtimes \mathbf{x}] \vee \boldsymbol{\theta}\,. \tag{5.47}$$

Analogamente, a matriz dos pesos sinápticos e a fase de recordação da IFAM dual de Lukasiewicz e a MAM aditiva M_{XY} estão relaciodadas através das equações

$$M_L = M^a_{XY} \vee 0 \quad e \quad (M_L \bullet_L \mathbf{x}) \wedge \boldsymbol{\vartheta} = [(M^a_{XY} \vee 0) \boxtimes \mathbf{x}] \wedge \boldsymbol{\vartheta}\,, \tag{5.48}$$

válidas para todo $\mathbf{x} \in [0,1]^n$.

Note que a IFAM de Lukasiewicz e a MAM W_{XY} produzem a mesma saída se as operações da MAM W^a_{XY} estiverem restritas ao interior de algum hipercubo. Precisamente, o padrão recordado pela IFAM de Lukasiewicz e o padrão recordado pela MAM aditiva W^a_{XY} coincidem se $W_{XY} \in [-1,0]^{m\times n}$ e o vetor bias $\boldsymbol{\theta}$ for empregado na fase de recordação da MAM W_{XY}. De um modo similar, os padrões recordados pela IFAM dual de Lukasiewicz e pela MAM aditiva M^a_{XY} coincidem se $M_{XY} \in [0,1]^{m\times n}$ e o vetor bias $\boldsymbol{\vartheta}$ for empregado na fase de recordação da MAM M_{XY}. Logo, dado um conjunto de memórias fundamentais nebulosas, se a matriz dos pesos sinápticos W^a_{XY} (M^a_{XY}) está contida no hipercubo $[-1,0]^{m\times n}$ ($[0,1]^{m\times n}$), então pode-se interpretar uma IFAM (IFAM dual) como uma generalização da

MAM aditiva W^a_{XY} (M^a_{XY}). A probabilidade desse evento acontecer aumenta quando mais e mais padrões são armazenados. Por exemplo, os padrões do exemplo 8 foram armazenados numa MAM aditiva W^a_{XY} com vetor bias $\boldsymbol{\theta} = \bigwedge_{\xi=1}^{k} \mathbf{y}^\xi$. Verificou-se que a MAM W^a_{XY} com o vetor bias $\boldsymbol{\theta}$ armazenou e recordou corretamente todos os padrões do conjunto das memórias fundamentais. Em contraste, a MAM W^a_{XY} sem o vetor limiar recordou corretamente somente os pares $(\mathbf{x}^1, \mathbf{y}^1)$, $(\mathbf{x}^2, \mathbf{y}^2)$, $(\mathbf{x}^3, \mathbf{y}^3)$, $(\mathbf{x}^4, \mathbf{y}^4)$, $(\mathbf{x}^5, \mathbf{y}^5)$ e $(\mathbf{x}^8, \mathbf{y}^8)$.

Finalmente, existe uma relação entre a IFAM de Goguen e a MAM multiplicativa W^m_{XY} [90, 123]. Lembre-se que a matriz dos pesos sinápticos e a fase de recordação da MAM multiplicativa W^m_{XY} são descritas pelas seguintes equações

$$W^m_{XY} = Y \mathbin{\textcircled{\wedge}} \bar{X} \quad \text{e} \quad \mathbf{y} = W^m_{XY} \mathbin{\textcircled{\vee}} \mathbf{x}\,, \tag{5.49}$$

onde $\mathbf{x}$ é o padrão de entrada e $\mathbf{y}$ é o padrão recordado.

A fase de recordação da IFAM de Goguen e a fase de recordação da MAM multiplicativa W^m_{XY} são idênticas exceto pela presença do vetor limiar no primeiro modelo. A diferença principal entre a IFAM de Goguen e a MAM multiplicativa W^m_{XY} está na fase de armazenamento. De fato, denotando por $(W_P)_{ij}$ e $(W^m_{XY})_{ij}$ os elementos das matrizes dos pesos sinápticos da IFAM de Goguen e da MAM W^m_{XY}, respectivamente, conclui-se que as seguintes equações valem para todo $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$:

$$(W_P)_{ij} = \bigwedge_{\xi=1}^{k} I_P\left(x_j^\xi, y_i^\xi\right) = \bigwedge_{\xi=1}^{k} \left[\left(\frac{y_i^\xi}{x_j^\xi}\right) \wedge 1\right] = [(W^m_{XY})_{ij}] \wedge 1\,. \tag{5.50}$$

Logo, a matriz dos pesos sinápticos W_P da IFAM de Goguen está em $[0,1]^{m\times n}$ enquanto que a matriz dos pesos sinápticos W^m_{XY} da MAM multiplicativa está em $(R^{\geq 0}_\infty)^{m\times n}$. A IFAM dual de Goguen e a MAM multiplicativa M^m_{XY} diferem em ambas a fase de armazenamento e recordação.

Capítulo 6

Aplicações de Memórias Associativas Morfológicas Nebulosas

Redes nebulosas híbridas, em particular as memórias associativas (morfológicas) nebulosas, podem representar sistemas de regras nebulosas da forma SE-ENTÃO que, por sua vez, podem ser usados para previsão de séries temporais. Esse capítulo apresenta duas aplicações das FMAMs em modelos de previsão de séries temporais.

6.1 Previsão da Mão-de-obra em Indústrias Metalúrgicas

Considere o problema apresentado em [17] que consiste na previsão da mão-de-obra requerida nas indústrias metalúrgicas do estado Bengal do Oeste na Índia. Em termos gerais, o problema de previsão é resolvido da seguinte forma usando uma FMAM.

Primeiro define-se um conjunto de variáveis linguísticas representando conceitos nebulosos como "a mão-de-obra requerida é *grande*". Nesse problema particular, Choudhury *et al.* empregaram 5 variáveis linguísticas. Depois, com base nos valores passados, é definido um conjunto de regras nebulosas da forma "Se a mão-de-obra requerida no ano n é *grande*, então a mão-de-obra requerida no $n + 1$ é *muito grande*". Desse modo, obtem-se um conjunto de pares de entrada e saída, onde as entradas correspondem aos antecedentes e as saídas correspondem aos respectivos conseqüentes. Os pares de entrada e saída usados nesse exemplo estão apresentados na tabela 6.1. Consulte [17] para maiores detalhes sobre o processo de "fuzzificação" dos termos da série temporal e a construção do sistema de regras nebulosas a partir dos valores passados.

Finalmente, os pares de padrões são armazenados na FMAM. Dado um padrão de entrada, correspondendo a versão nebulosa da mão-de-obra requerida no ano presente, a mão-

ξ	$\mathbf{x}^\xi$	$\mathbf{y}^\xi$
1	$[1.0,\ 0.5,\ 0,\ 0,\ 0]^T$	$[0.5,\ 1.0,\ 0.5,\ 0,\ 0]^T$
2	$[0.5,\ 1.0,\ 0.5,\ 0,\ 0]^T$	$[0.5,\ 1.0,\ 0.5,\ 0,\ 0]^T$
3	$[0.5,\ 1.0,\ 0.5,\ 0,\ 0]^T$	$[0,\ 0.5,\ 1.0,\ 0.5,\ 0]^T$
4	$[0,\ 0.5,\ 1.0,\ 0.5,\ 0]^T$	$[0.5,\ 1.0,\ 0.5,\ 0,\ 0]^T$
5	$[0,\ 0.5,\ 1.0,\ 0.5,\ 0]^T$	$[0,\ 0.5,\ 1.0,\ 0.5,\ 0]^T$
6	$[0,\ 0.5,\ 1.0,\ 0.5,\ 0]^T$	$[0,\ 0,\ 0.5,\ 1.0,\ 0.5]^T$
7	$[0,\ 0,\ 0.5,\ 1.0,\ 0.5]^T$	$[0,\ 0,\ 0.5,\ 1.0,\ 0.5]^T$
8	$[0,\ 0,\ 0.5,\ 1.0,\ 0.5]^T$	$[0,\ 0,\ 0,\ 0.5,\ 1.0]^T$
9	$[0,\ 0,\ 0,\ 0.5,\ 1.0]^T$	$[0,\ 0,\ 0,\ 0.5,\ 1.0]^T$

Tab. 6.1: Conjunto de pares de entrada e saída usados no problema de previsão da mão-de-obra.

de-obra prevista para o ano seguinte é obtida "defuzzificando" o padrão recordado pela FMAM. Por exemplo, considere a IFAM de Lukasiewicz. A matriz dos pesos sinápticos W_L e o vetor limiar $\boldsymbol{\theta}$ obtido após o processo de armazenamento são dados pelas seguintes equações:

$$W_L = Y \circledast_L X^T = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1.0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\theta} = \bigwedge_{\xi=1}^{9} \mathbf{y}^\xi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{6.1}$$

Assim, a estimativa da mão-de-obra requerida no ano $n+1$ é obtida "defuzzificando" o conjunto dado pela equação

$$\tilde{\mathbf{a}}_{n+1} = (W \circ_L \mathbf{a}_n) \vee \boldsymbol{\theta}\,, \tag{6.2}$$

onde $\mathbf{a}_n$ é o padrão que corresponde à mão-de-obra requerida no ano n e $\circ_L$ representa o produto max-C_L. Nesse exemplo foi considerado o método de "defuzzificação" da média do máximo. O resultado final do previsor baseado na IFAM de Lukasiewicz produziu um *Erro Percentual Médio Normalizado* (EPMN) de 2.29%. Todavia, Choudhury *et al.* encontraram um EPMN de 2.669% para a FAM max-min [17]. O erro percentual médio normalizado é calculado através da seguinte equação onde s_n e $\hat{s}_n$ representam, respectivamente, o valor real e o valor estimado para a mão-de-obra do ano n e N representa o número de termos da

Método	EPMN	ρ	Método	EPMN	ρ
FAM max-min	2.67	0.9263	FLBAM de Lukasiewicz	2.56	0.9359
FAM max-prod	2.67	0.9263	FLBAM de Godel	2.56	0.9359
GFAM de Lukasiewicz	2.67	0.9263	FLBAM de Goguen	2.56	0.9359
FAM de Junbo	2.73	0.9175	Max-min FAM com limiar	2.73	0.9175
IFAM Lukasiewicz	**2.29**	**0.9420**	IFAM dual de Lukasiewicz	2.56	0.9359
IFAM de Godel	2.73	0.9175	IFAM dual de Godel	8.08	—
IFAM de Goguen	2.99	0.9099	IFAM dual de Goguen	8.08	—
IFAM adjunta de Lukasiewicz	4.74	0.9012	IFAM dual adjunta de Lukasiewicz	5.64	0.7763
IFAM adjunta de Godel	6.89	0.2666	IFAM dual adjunta de Godel	7.26	—
IFAM adjunta de Goguen	6.89	0.2666	IFAM dual adjunta de Goguen	7.26	—

Tab. 6.2: Erro percentual médio normalizado e coeficiente de correlação na previsão da mão-de-obra.

série. Nessa aplicação, tem-se $N = 12$.

$$\text{EPMN} = \frac{100}{N} \times \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{|s_n - \hat{s}_n|}{s_n} \right), \tag{6.3}$$

A tabela 6.2 apresenta os EPMNs fornecidos por várias FMAMs [116, 121]. Essa tabela também apresenta o coeficiente de correlação ρ que foi calculado usando o comando `corrcoef` do `MATLAB`. O coeficiente de correlação mede o quanto as previsões estão correlacionadas com os valores reais da série temporal. Quanto mais próximo de 1 estiver ρ, mais acurada é a previsão. É importante observar que a IFAM dual de Gödel e a IFAM dual de Goguen produziram uma estimativa de 1500 para todos os termos da série temporal. Desse modo, não foi possível calcular o coeficiente de correlação desses modelos. O mesmo problema ocorreu como as IFAMs duais adjuntas de Gödel e Goguen que forneceram uma estimativa de 1450 para todos os termos.

Note que vários modelos apresentaram o mesmo resultado. De fato, os valores estimados pela FAM max-min, FAM max-prod e GFAM de Lukasiewicz são iguais. Além disso, as previsões fornecidas pelas IFAMs adjuntas de Gödel e Goguen, as IFAMs duais adjuntas de Gödel e Goguen, as FLBAMs e a IFAM dual de Lukasiewicz, e a IFAM de Gödel, FAM de Junbo e FAM max-min com limiar também coincidiram. Finalmente, a figura 6.1 apresenta a mão-de-obra estimada nos anos 1984 até 1995. O valor real é comparado com os valores estimados por alguns dos métodos da tabela 6.2.

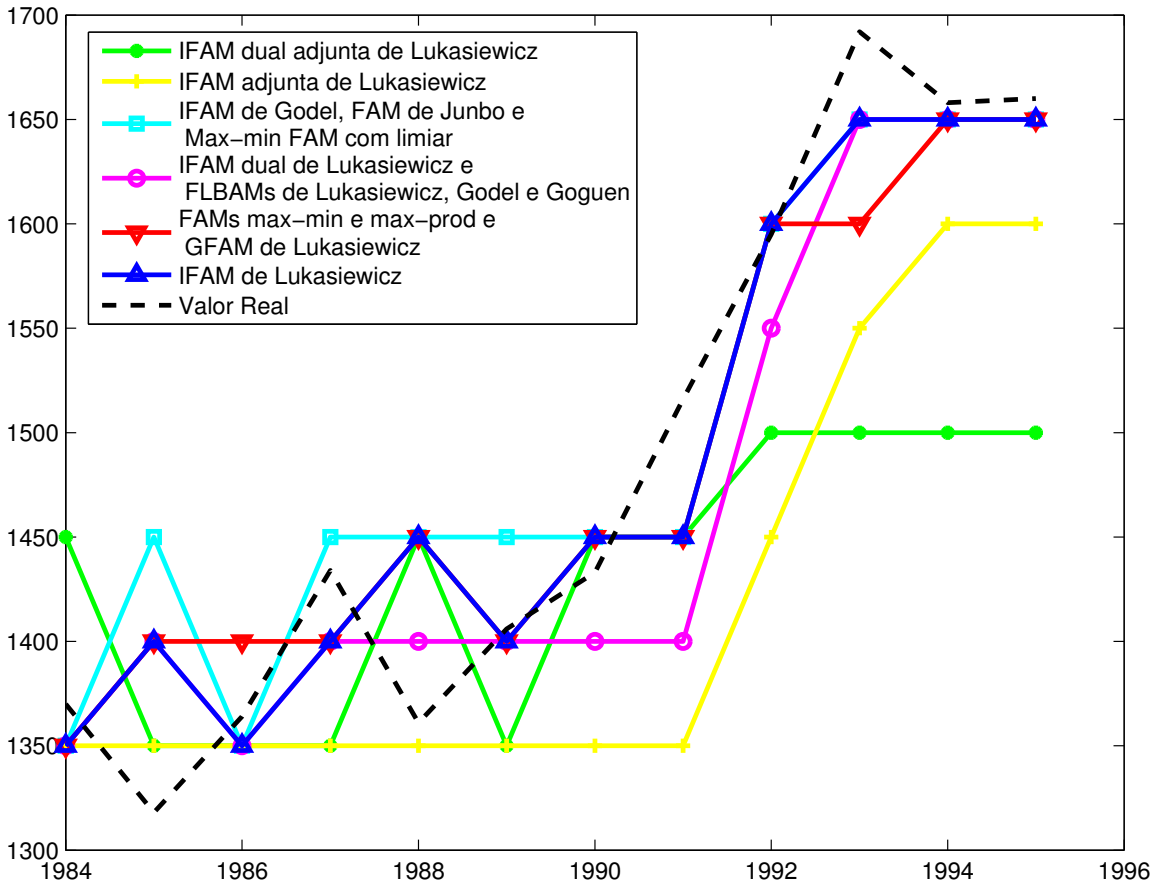

Fig. 6.1: Comparação da previsão de mão-de-obra estimada por diferentes modelos de memória associativa nebulosa.

Observe que a IFAM de Lukasiewicz apresentou o melhor resultado para esse problema de previsão, superando os demais modelos de FMAMs. Em vista desse fato, o próxima aplicação estará baseada apenas a IFAM de Lukasiewicz. É importante deixar claro, entretanto, que não existe ainda nenhum critério para a escolha de um modelo de FMAM. Esse é um campo de pesquisa que precisa ser explorado.

Observação. Esse exemplo mostra uma aplicação das FMAMs como sistemas de regras nebulosas usados para previsão de séries temporais. Entretanto, vários pontos são questionáveis nessa aplicação. Por exemplo, as componentes das memórias fundamentais assumem apenas 3 valores: 0, 0.5 e 1. Além disso, o próprio conjunto de treinamento é usado para teste. Todavia, o trabalho de Chourhury *et al.* foi publicado num periódico internacional com árbitro. Sobretudo, diferente de muitos trabalhos científicos publicados, foi possível reproduzir o experimento realizado pelos autores.

6.2 Previsão da Vazão Mensal de uma Usina Hidrelétrica

Essa seção apresenta uma aplicação da IFAM de Lukasiewicz no problema de previsão da vazão mensal média da usina hidrelétrica de Furnas, localizada na região sudeste do Brasil. Esse problema foi discutido anteriormente em [64, 65], onde foi proposta uma técnica baseada em agrupamentos nebulosos chamada (FPM-PRP) que apresentou resultados melhores que o método estatístico PARMA, a rede neural *Perceptron de Múltiplas Camadas* (MLP, Multilayer Perceptron) e um certo modelo de rede neural nebulosa recorrente (NFN, Neuro-Fuzzy Network).

O previsor baseado na IFAM de Lukasiewicz não apresentou resultados tão bons quanto o FPM-PRP, mas suas estimativas superaram o PARMA, a rede MLP e a NFN. De fato, a tabela 6.3 pode ser usada para comparar os erros produzidos pela IFAM de Lukasiewicz e vários outros modelos para a previsão da vazão média mensal de 1991 à 1998 [64, 65]. O *Erro Quadrático Médio* (EQM) e o *Erro Absoluto Médio* (EAM) são calculados como segue onde s_n e $\hat{s}_n$ representam, respectivamente, os valores reais e estimados, e N corresponde ao número de termos que foram estimados. O EPMN é calculado seguindo a equação (6.3). Nessa aplicação, tem-se $N = 96$.

$$\text{EQM} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(s_n - \hat{s}_n)^2 \quad \text{e} \quad \text{EAM} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}|s_n - \hat{s}_n|\,. \tag{6.4}$$

A figura 6.2 mostra os valores estimados pela IFAM de Lukasiewicz e os valores reais de 1991 à 1998. É importante observar que foram disponibilizados dados históricos de 1931 à 1998. Os primeiros 60 anos foram usados para treinamento (para as redes MLP e NFN), agrupamento (no método FPM-PRP) ou criação das memórias fundamentais (no previsor baseado na IFAM de Lukasiewicz). Os dados histórios dos 8 anos restantes foram usados para teste. Além disso, devido a sazonalidade do problema, recomenda-se o uso de 12 modelos diferentes, um para cada mês do ano [64]. Portanto, foram empregadas 12 IFAMs de Lukasiewicz para a previsão da série temporal apresentada na figura 6.2.

Em contraste com o previsor baseado na IFAM de Lukasiewicz, uma rede MLP, uma rede neural nebulosa (NFN) e o modelo FPM-PRP foram inicializados otimizando, para cada mês, vários parâmetros referentes à topologia da rede, número de antecedentes e/ou variações das amostras da série temporal [64]. Por exemplo, a rede MLP considera 4 antecedentes para prever a vazão média do mês de Janeiro e 3 antecedentes para prever a vazão média do mês de Fevereiro. Além disso, o modelo FPM-PRP considera também informações sobre a variação dos dados usados para a previsão [64]. Experimentos foram

Método	EQM ($\times 10^5$)	EAM (m^3/s)	EPM (%)
IFAM de Lukasiewicz	1.27	229	24
PARMA	1.85	280	28
MLP	1.82	271	30
NFN	1.73	234	20
FPM-PRP	1.20	200	18

Tab. 6.3: Erro Quadrático Médio (EQM), Erro Absoluto Médio (EAM) e Erro Percentual Médio (EPM) produzido pelos modelos de previsão.

conduzidos para determinar o número de antecedentes (incluindo a variação das amostras) do modelo baseado na IFAM de Lukasiewicz. O modelo com diferentes antecedentes, incluindo a variação das amostras para alguns meses, apresentou os seguintes valores para as medidas do erro: $EQM = 0.88 \times 10^5$, $EAM = 157$ e $EPM = 15$. É apresentando a seguir os detalhes do método baseado na IFAM de Lukasiewicz com um número fixo de antecedentes.

6.2.1 Noção Geral do Previsor Baseado na IFAM de Lukasiewicz

O problema de previsão pode ser formulado da seguinte forma: Conhecidas as amostras da série temporal s_ξ, para $\xi = 1, \ldots, q-1$, o objetivo é estimar o valor s_q considerando-se um subconjunto dos valores passados $s_1, s_2, \ldots, s_{q-1}$. É importante observar que os valores da série temporal foram normalizados mensalmente antes de serem processados, i.e., os dados da vazão de cada mês possuem média 0 e variância 1.

A ideia por trás do modelo baseado em memória associativa é armazenar pares de entrada e saída $(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi)$, onde $\mathbf{x}^\xi$ e $\mathbf{y}^\xi$ são conjuntos nebulosos que capturam informações sobre os valores passados da série temporal[1]. Desse modo, dado um conjunto nebuloso $\mathbf{x}^q$ que captura a informação da vazão média dos últimos meses, o padrão $\mathbf{y}^q$ recordado pela IFAM representa o conjunto nebuloso que corresponde ao valor estimado para a vazão. O valor estimado $\hat{s}_q$ pode ser obtido "defuzzificando" o padrão recordado $\mathbf{y}^q$, i.e., $\hat{s}_q = \texttt{defuzz}(\mathbf{y}^q)$, onde `defuzz` representa uma estratégia de "defuzzificação". Nessa aplicação foi empregado o método do centro de massa para estimar s_q. Precisamente, foi empregada a rotina `defuzz` da toolbox de conjuntos nebulosos do `MATLAB` com a opção `centroid`.

Observação. A figura 6.3 apresenta o gráfico de alguns padrões recordados pela IFAM de Lukasiewicz. Esses padrões representam as funções de pertinência de onde foram extraídas

[1]Nessa aplicação, os padrões $\mathbf{x}^\xi$ e $\mathbf{y}^\xi$ foram gerados com base nos dados históricos de 1931 a 1990.

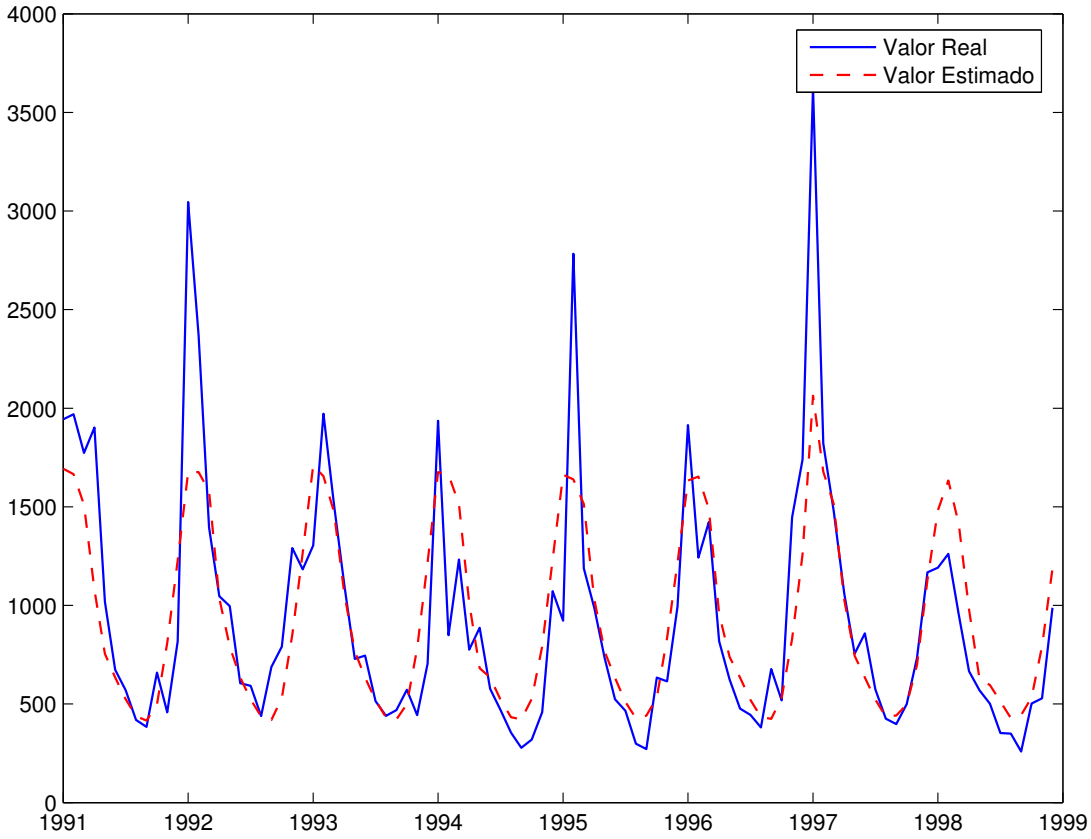

Fig. 6.2: Previsão para a vazão média de Furnas de 1991 a 1998. A linha contínua corresponde aos valores reais e a linha tracejada corresponde aos valores estimados pela IFAM de Lukasiewicz.

a estimativa para a vazão dos meses de Janeiro, Fevereiro, Março, Abril, Maio e Junho de 1998. A linha vertical contínua (azul) e a linha vertical tracejada (vermelho) correspondem, respectivamente, ao valor real e estimado.

É importante observar que outros métodos de "defuzzificação" poderiam ser empregados no previsor baseado em memória associativa. Por exemplo, o método de "defuzzificação" da média do máximo fornece os seguintes valores para as medidas do erro: $EQM = 1.38 \times 10^5$, $EAM = 220$ e $EPM = 21$. Além disso, ao contrário de um método que fornece uma estimativa pontual, poderia ser empregada uma técnica de "defuzzificação" que fornece uma estimativa intervalar. Entretanto, falta conduzir mais pesquisa sobre assunto.

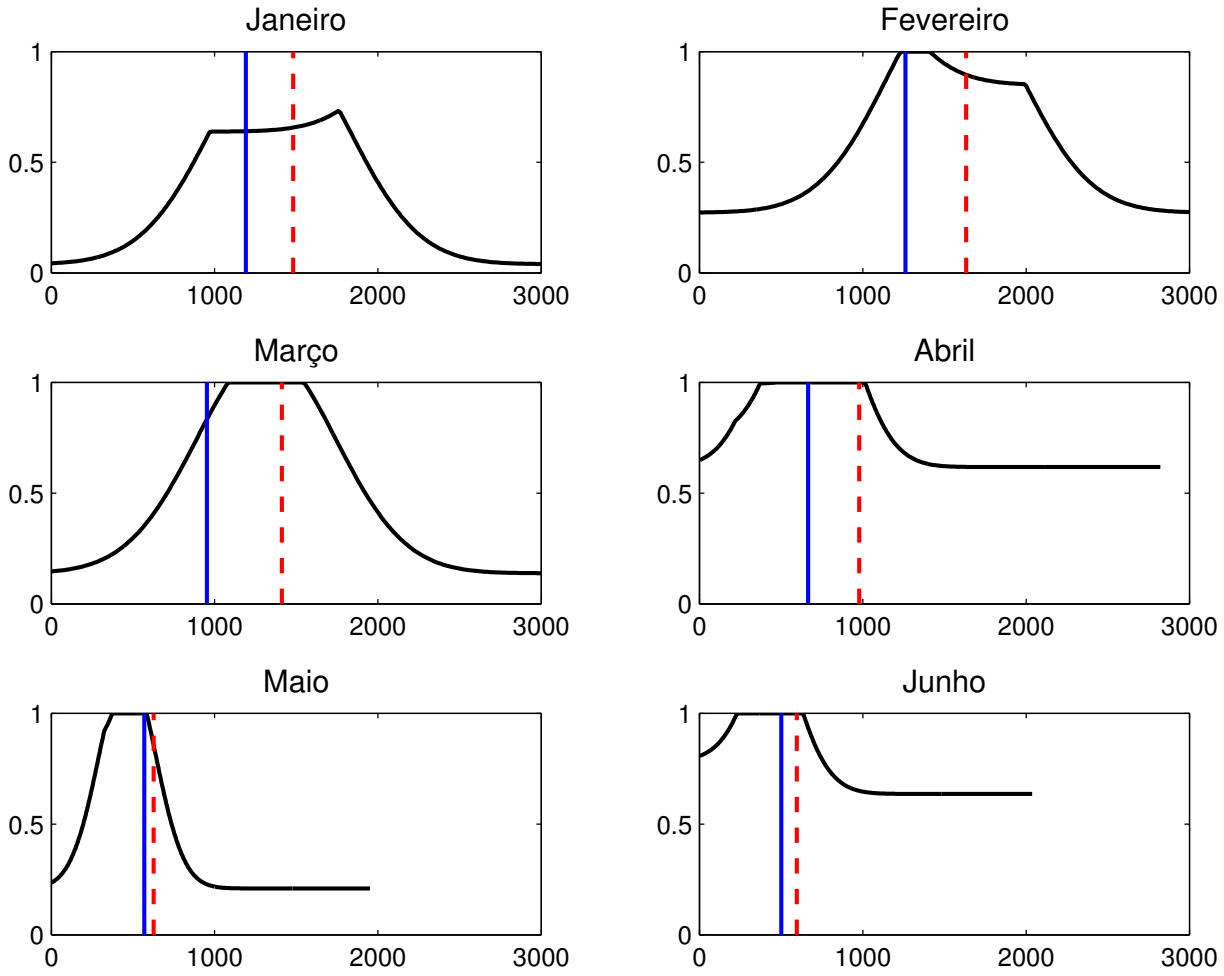

Fig. 6.3: Função de pertinência de onde foram extraídas as estimativas para a vazão dos 6 primeiros meses de 1998. A linha vertical contínua representa o valor real e a linha tracejada corresponde ao valor estimado (centro de massa).

6.2.2 O Previsor Baseado na IFAM de Lukasiewicz

Primeiramente, o conjunto das memórias fundamentais $\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi), \xi = 1, \ldots, k\}$ é armazenado implicitamente no previsor baseado na IFAM de Lukasiewicz. O termo "armazenar implicitamente" refere-se ao fato de não ser necessário construir toda a matriz dos pesos sinápticos, i.e., constrói-se apenas a parte que será usada na fase de recordação. Precisamente, se o padrão de entrada $\mathbf{x}^q = [x_1, \ldots, x_n]^T \in [0,1]^n$ for tal que $x_j = 0$ para $j \geq 1$ e $x_1 = 1$, i.e., se $\mathbf{x}^q = [1, 0, \ldots, 0]^T$, então o padrão recordado $\mathbf{y}^q = [y_1^q, \ldots, y_m^q]^T \in [0,1]^m$ é

determinado pela seguite equação para $i = 1, \ldots, m$:

$$y_i^q = (W \circ_T \mathbf{x})_i = \bigvee_{j=1}^{n} T(w_{ij}, x_j) = w_{i1} = \bigwedge_{\xi=1}^{k} I_T(x_1^\xi, y_i^\xi) = 1 \wedge \left[\bigwedge_{\xi=1}^{k} (1 - x_1^\xi + y_i^\xi) \right] . \qquad (6.5)$$

Logo, nesse caso particular, não é necessário calcular a matriz dos pesos sinápticos, pois o padrão recordado é determinado com base somente nos valores x_1^ξ e nos padrões $\mathbf{y}^\xi$, para $\xi = 1, \ldots, k$. Os próximos parágrafos descrevem como definir $\mathbf{x}^q = [1, 0, \ldots, 0]^T$ e como determinar x_1^ξ e $\mathbf{y}^\xi$ para o problema de previsão considerado.

Primeiramente, são definidos padrões $\mathbf{p}^\gamma$ contendo apenas os termos necessários para estimar s_γ. Esses padrões são vetores da forma

$$\mathbf{p}^\gamma = [s_{\gamma-h}, \ldots, s_{\gamma-1}]^T , \qquad (6.6)$$

onde $h \in \{1, 2, \ldots, q-1\}$ e $\gamma > h$ é tal que $\gamma = q, q-12, q-24, \ldots$. Note que $\mathbf{p}^\gamma$ é formado por h valores consecutivos da série temporal. Portanto, h pode ser interpretado como o número de termos necessários para estimar s_γ. Por exemplo, se $h = 3$ e s_γ corresponder à vazão do mês de Abril, então $\mathbf{p}^\gamma$ é o vetor contendo a vazão de Janeiro, Fevereiro e Março. Além disso, como $\gamma = q, q - 12, \ldots$ então, indiretamente, está sendo informando que as vazões de Maio a Dezembro não são necessárias para estimar a vazão de Abril. Devido a sazonalidade da vazão natural, optamos intuitivamente por $h = 3$. Cabe observar que não foi feita nenhuma busca para os valores ótimos de h.

A incerteza contida nos dados sugere o uso de conjuntos nebulosos para modelar as amostras da vazão. Uma "fuzzificação" de $\mathbf{p}^\xi$ e s_ξ usando funções de pertinência Gaussiana produz, respectivamente, conjuntos nebulosos $\mathbf{x}^\xi : \mathcal{U} \to [0, 1]$ e $\mathbf{y}^\xi : \mathcal{V} \to [0, 1]$, onde $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ representam universos de discursos finitos. No problema de previsão, foram considerados conjuntos $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ e $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_m\}$, onde $\mathbf{u}_1 = \mathbf{p}^q$ e os v_i's são pontos igualmente espaçados no intervalo $[-5, 5]$ e $m = 500$ (Lembre-se que os dados foram normalizados antes de serem processados). Um conjunto $\mathcal{V}$ com 1000 elementos produziu um resultado semelhante ao caso $m = 500$. O vetor $\mathbf{x}^q = [1, 0, \ldots, 0]^T$ foi usado com padrão de entrada nessa aplicação. Note que $\mathbf{x}^q$ é o conjunto clássico ("crisp") que corresponde ao padrão $\mathbf{p}^q$.

Os conjuntos nebulosos $\mathbf{x}^\xi$ e $\mathbf{y}^\xi$ foram determinados utilizando o *Subtractive Clustering Method* (SCM) que está disponível na toolbox de conjuntos nebulosos do `MATLAB` [15]. O SCM representa uma extensão do *mountain clustering method* desenvolvido por Yager e Filev [124] e pode ser usado para encontrar agrupamentos baseados na densidade dos dados. Simplificadamente, o SCM implementado no `MATLAB` é chamado através do comando:

$[C, \mathbf{d}] = \texttt{subclust}(S, r)$, onde S contém os dados (de 1931 a 1990) que serão agrupados e $r \in [0, 1]$ determina o raio de influência de um centro de grupo. Valores pequenos de r geralmente produzem poucos agrupamentos grandes. Boas escolhas para r são geralmente valores entre 0.2 e 0.5. Nessa aplicação, foi adotado $r = 0.5$, pois valores menores produziram erros maiores. Por exemplo, $r = 0.3$ forneceu $EQM = 1.44 \times 10^5$, $EAM = 236$ e $EPM = 25$. Cada linha da matriz S foi definida concatenando $\mathbf{p}^\gamma$ e s_γ, i.e., $S(i,:) := [\mathbf{p}^\gamma, s_\gamma]$, para $\gamma = q - 12i$. Conseqüentemente, cada linha da matriz C representa um centro. Para facilitar, denote $\mathbf{c}_\mathbf{x}^\xi$ os primeiros h elementos e $c_\mathbf{y}^\xi$ o último elemento da linha ξ, i.e., $[\mathbf{c}_\mathbf{x}^\xi, c_\mathbf{y}^\xi] := C(\xi,:)$ para $\xi = 1, \ldots, k$. O vetor $\mathbf{d} = [d_1, \ldots, d_{h+1}]^T$ é usado para determinar o espalhamento das funções de pertinência Gaussiana como segue [124]:

$$\sigma_l^2 = \frac{1}{2d_l}\,, \quad \text{para } \; l = 1, \ldots, h+1\,. \tag{6.7}$$

Finalmente, se $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ e $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ são os universos de discurso, então x_1^ξ e $\mathbf{y}^\xi$ são determinados através das seguintes equações para todo $\xi = 1, \ldots, k$ e $i = 1, \ldots, m$:

$$x_1^\xi = \exp\left[\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{h}\left(\frac{(\mathbf{p}^q)_l - (\mathbf{c}_\mathbf{x}^\xi)_l}{\sigma_l}\right)^2\right] \quad \text{e} \quad y_i^\xi = \exp\left[\frac{1}{2}\left(\frac{v_i - c_\mathbf{y}^\xi}{\sigma_{h+1}}\right)^2\right]\,. \tag{6.8}$$

A estimativa da vazão mensal s_q é obtida "defuzzificando" o padrão $\mathbf{y}^q = [y_1^q, \ldots, y_m^q]^T$, onde y_i^q's são determinados por (6.5).

Concluindo, é apresentado a seguir um esquema da aplicação do previsor baseado na IFAM de Lukasiewicz. O código completo de MATLAB encontra-se no apêndice B.

1. Executar os seguintes passos para cada mês do ano (12 modelos diferentes):
   (a) Selecionar os dados que serão agrupados, i.e., definir $S(i,:) := [\mathbf{p}^\gamma, s_\gamma]$;
   (b) Aplicar o algoritmo de agrupamento em S. Tem-se assim uma matriz com os centros dos grupos C e um vetor d. A matriz C é usada para definir $\mathbf{c}_\mathbf{x}^\xi$ e $c_\mathbf{y}^\xi$. O vetor d é usado para calcular o espalhamento das guassianas seguindo (6.7);
   (c) Calcular as memórias fundamentais $\mathbf{y}^\xi$ através da segunda equação em (6.8). Os valores v_i, $i = 1, \ldots, m$, representam pontos igualmente espaçados no conjunto de valores possíveis da série temporal;
   (d) Para cada estimativa futura do mês considerado, fazer:
      i. Calcular o padrão recordado $\mathbf{y}^q$ usando a equação (6.5) com x_1^ξ dado por (6.8);
      ii. Obter a estimativa $\hat{s}_q$ "defuzzificando" $\mathbf{y}^q$.

Capítulo 7

Conclusão

Em termos gerais, essa tese de doutorado mostra que os principais modelos de *Memórias Associativas Nebulosas* (FAMs, Fuzzy Associative Memories) pertencem à classe das *Memórias Associativas Morfológicas Nebulosas* (FMAMs, Fuzzy Morphological Associative Memories). Sobretudo, essa tese introduz as *Memórias Associativas Nebulosas Implicativas* (IFAMs, Implicative Fuzzy Associative Memories) e suas versões duais e adjuntas. As IFAMs representam uma grande subclasse das FMAMs e estão baseadas numa estratégia de armazenamento simples, porém eficiente, chamada *armazenamento nebuloso implicativo*. Finalmente, aplicações das FMAMs em problemas de predição de séries temporais são apresentadas no capítulo 6.

Precisamente, o capítulo 2 apresenta os conceitos básicos dessa tese. Aqui, são apresentadas as definições básicas de memórias associativas, as definições dos operadores elementares da *Morfologia Matemática* (MM) e os principais conceitos da teoria dos conjuntos nebulosos. Em particular, os conceitos de negação, conjunção, disjunção e implicação nebulosa são relacionados através das relações de dualidade com respeito à negação e adjunção. Como conseqüência, um novo operador, chamado *implicação dual*, é introduzido. Além disso, é apresentado o teorema 2.8, que relaciona os operadores de anti-dilatação e anti-erosão com os operadores de dilatação, erosão e negação. Portanto, dá-se maior atenção aos operadores de dilatação, erosão e negação. A MM binária, a abordagem da umbra para a MM em tons de cinza e uma abordagem geral para a MM nebulosa são apresentadas como exemplos.

O capítulo 3 discute as *Redes Neurais Morfológicas Nebulosas* (FMNN, Fuzzy Morphological Neural Networks) e as FMAMs, em particular. Lembre-se que uma rede neural é caracterizada pelo modelo do neurônio, a arquitetura da rede e a regra de aprendizado (ou estratégia de armazenamento num problema de memória associativa). A maior parte dos modelos estudados nessa tese representam redes neurais progressivas de camada única.

Entretanto, outras arquiteturas podem ser estudadas no futuro. Por exemplo, podem ser estudadas arquiteturas envolvendo ambos neurônios que realizam operações de dilatação e neurônios que efetuam erosões. Além disso, novas regras de aprendizado podem ser desenvolvidas para as FMNNs. No final do capítulo são apresentados os principais modelos de neurônios morfológicos-nebulosos: os neurônios max-C, min-D e min-I, sendo que os neurônios min-I podem ser descritos em termos de neurônios min-D.

O capítulo 4 apresenta vários modelos de *Memórias Associativas Nebulosas* (FAMs, Fuzzy Associative Memories). Precisamente, são discutidas as FAMs de Kosko, Chung e Lee, Junbo *et. al*, Liu e Bělohlávek. É mostrado que esses modelos pertencem à classe das FMAMs. Além disso, são apresentadas as *Memórias Associativas Morfológicas* de Sussner e Ritter.

As *Memórias Associativas Nebulosas Implicativas* e suas versões duais e adjuntas são introduzidas no capítulo 5. Vários teoremas referentes a fase de armazenamento e recordação das IFAMs são enunciados. Em particular, é demonstrado que uma AFIM apresenta convergência numa única iteração e mais, pode-se armazenar quantos padrões forem desejados nesse modelo. O conjunto dos pontos fixos, e portanto, a fase de recordação das IFAMs autoassociativas, foi completamente caracterizado no caso binário. Entretanto, falta ainda caracterizar completamente a fase de recordação das IFAMs autoassociativas e heteroassociativas. Por exemplo, com base nos resultados desenvolvidos para as MAMs aditivas (cf. proposição 4.7) e para as IFAMs, espera-se poder caracterizar completamente o conjunto dos pontos fixos das IFAMs autoassociativas. Espera-se poder estender depois o resultado para o caso heteroassociativo. Lembre-se que toda sentença sobre uma IFAM possui um análogo para a IFAM dual obtido substituindo o máximo pelo mínimo, a t-norma pela s-norma dual, a implicação pela implicação dual, etc. e vice-versa. Portanto, resultados para as IFAMs duais podem ser derivados diretamente dos resultados das IFAMs. Entretanto, falta conduzir mais pesquisas sobre as IFAMs adjuntas e as IFAMs duais adjuntas. Finalmente, as IFAMs são comparadas como outros modelos da literatura por meio de exemplos e resultados teóricos.

O capítulo 6 apresenta duas aplicações das FMAMs em problemas de previção de séries temporais. A primeira aplicação consiste em estimar a mão-de-obra requerida nas industrias metalúrgicas do estado Bengal do Oeste na Índia, um problema discutido em [17]. A IFAM de Lukasiewicz apresentou as melhores previsões. A segunda aplicação consiste na previsão da vazão mensal média da usina hidrelétrica de Furnas, um problema discutido previamente em [64, 65]. Em vista dos resultados da primeira aplicação, foi considerado apenas o previsor baseado na IFAM de Lukasiewicz. É importante observar, entretanto, que

falta conduzir mais pesquisas sobre a escolha da melhor IFAM (ou FMAM) para um dado problema. O previsor baseado na IFAM de Lukasiewicz não apresentou resultados tão bons quanto o modelo FPM-PRP introduzido em [65]. Entretanto, suas estimativas superaram o modelo estatístico PARMA, a rede MLP e uma certa rede neural nebulosa. Lembre-se que o previsor baseado numa FMAM emprega um algoritmo de agrupamento: o *Subtractive Clustering Method*. Outro algoritmo de agrupamento poderia ser empregado. Por exemplo, o algoritmo *Fuzzy c-Means* poderia ser adotado, mas nesse caso teríamos que informar o número de grupos antes de cada previsão. Em suma, falta conduzir mais pesquisa sobre o processo de "fuzzificação" e "defuzzificação" empregados nas aplicações das FMAMs. Finalmente, outras aplicações podem ser desenvolvidas no futuro. Por exemplo, as FMAMs podem ser aplicadas em problemas de classificação [115, 128] e controle [58].

Apêndice A

Demonstrações dos Teoremas

A.1 Demonstração dos Teoremas dos Capítulos 2, 3 e 4

Demonstração do Teorema 2.8. Será demonstrado apenas o resultado referente a primeira equação em (2.10). As demais equações podem ser obtidas de um modo análogo.

A primeira equação de (2.10) pode ser deduzida das seguintes equações:

$$\bar{\delta} = (\nu_M \circ \nu_M) \circ \bar{\delta} = \nu_M \circ (\nu \circ \bar{\delta}) = \nu_M \circ \delta \,. \tag{A.1}$$

Falta mostrar que $\delta = \nu_M \circ \bar{\delta}$ é uma dilatação se e somente se $\bar{\delta}$ for uma anti-dilatação.

Se $\bar{\delta}$ for uma anti-dilatação, então valem as seguintes equações para todo $Y \subseteq \mathbb{L}$:

$$\begin{aligned} \delta\left(\bigvee Y\right) &= \left(\nu_M \circ \bar{\delta}\right)\left(\bigvee Y\right) = \nu_M\left(\bar{\delta}\left(\bigvee Y\right)\right) = \nu_M\left(\bigwedge_{y\in Y} \bar{\delta}(y)\right) && \text{(A.2)} \\ &= \bigvee_{y\in Y} \nu_M\left(\bar{\delta}(y)\right) = \bigvee_{y\in Y}\left(\nu_M \circ \bar{\delta}\right)(y) = \bigvee_{y\in Y} \delta(y)\,. && \text{(A.3)} \end{aligned}$$

Logo, δ é uma dilatação. Por outro lado, se δ for uma dilatação, então para todo $Y \subseteq \mathbb{L}$ tem-se:

$$\begin{aligned} \bar{\delta}\left(\bigvee Y\right) &= \left(\nu_M \circ \delta\right)\left(\bigvee Y\right) = \nu_M\left(\delta\left(\bigvee Y\right)\right) = \nu_M\left(\bigvee_{y\in Y} \delta\left(y\right)\right) && \text{(A.4)} \\ &= \bigwedge_{y\in Y} \nu_M\left(\delta\left(y\right)\right) = \bigwedge_{y\in Y}\left(\nu_M \circ \delta\right)(y) = \bigwedge_{y\in Y} \bar{\delta}\left(y\right) && \text{(A.5)} \end{aligned}$$

De onde conclui-se que $\bar{\delta}$ é uma anti-dilatação. □

Demonstração do teorema 3.1. Suponha que o neurônio max-C efetue uma operação de dilatação. Dados $w \in [0,1]$ e $X \subseteq [0,1]$, defina $\mathbf{w} = [w, \ldots, w]^T$ e tome $\theta = 0$. Nesse caso, tem-se

$$C(w, \bigvee X) = \left[\bigvee_{j=1}^{n} C(w, \bigvee X)\right] \vee \theta = \mathcal{W}\left(\begin{bmatrix} \bigvee_{x\in X} \\ \vdots \\ \bigvee_{x\in X} \end{bmatrix}\right) = \mathcal{W}\left(\bigvee_{x\in X} \begin{bmatrix} x \\ \vdots \\ x \end{bmatrix}\right) \tag{A.6}$$

$$= \bigvee_{x\in X} \mathcal{W}\left(\begin{bmatrix} x \\ \vdots \\ x \end{bmatrix}\right) = \bigvee_{x\in X} \left\{\left[\bigvee_{j=1}^{n} C(w,x)\right] \vee \theta\right\} = \bigvee_{x\in X} C(w,x)\,. \tag{A.7}$$

Logo, $C(w,\cdot)$ é uma dilatação.

Suponha agora que $C(w,\cdot)$ é uma dilatação para todo $w \in [0,1]$. Dado $\mathbf{X} \in [0,1]^n$, tem-se

$$\mathcal{W}\left(\bigvee \mathbf{X}\right) = \left[\bigvee_{j=1}^{n} C\left(w_j, \bigvee_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} x_j\right)\right] \vee \theta = \left[\bigvee_{j=1}^{n} \left\{\bigvee_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} C\left(w_j, x_j\right)\right\}\right] \vee \theta \tag{A.8}$$

$$= \bigvee_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} \left\{\left[\bigvee_{j=1}^{n} C\left(w_j, x_j\right)\right] \vee \theta\right\} = \bigvee_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} \mathcal{W}(\mathbf{x})\,. \tag{A.9}$$

Portanto, $\mathcal{W} : [0,1]^n \to [\theta, 1]$, i.e., o neurônio max-$C$ efetua uma dilatação. □

Demonstração do teorema 4.5. Por hipótese, I_T e T formam uma adjunção. Logo, I_T pode ser expressa através de (2.36) e, portanto, valem as seguintes equações para todo $X \subseteq [0,1]$ e para todo $y \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} I_T\left(\bigvee X, y\right) &= \bigvee\left\{z \in [0,1] : T\left(\bigvee X, z\right) \leq y\right\} = \bigvee\left\{z \in [0,1] : \bigwedge_{x\in X} T\left(x,z\right) \leq y\right\} \\ &= \bigwedge_{x\in X}\left[\bigvee\left\{z \in [0,1] : T\left(x,z\right) \leq y\right\}\right] = \bigwedge_{x\in X} I_T(x,y)\,. \end{aligned} \tag{A.10}$$

Portanto, $I_T(\cdot, y)$ representa uma anti-dilatação para todo $y \in [0,1]$.

Considere agora $\mathbf{X} = X_1 \times \ldots \times X_n \subseteq [0,1]^n$. Segue que

$$\mathbf{w}^T \circledast_T \left(\bigvee \mathbf{X}\right) = \bigwedge_{j=1}^{n} I_T\left(\bigvee X_j, w_j\right) = \bigwedge_{j=1}^{n}\left[\bigwedge_{x_j\in X_j} I_T\left(x_j, w_j\right)\right] \tag{A.11}$$

$$= \bigwedge_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}}\left[\bigwedge_{j=1}^{n} I_T\left(x_j, w_j\right)\right] = \bigwedge_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}}\left(\mathbf{w}^T \circledast_T \mathbf{x}\right)\,. \tag{A.12}$$

Conseqüentemente, um neurônio min-I_T descrito pela equação $y = \mathbf{w}^T \circledast_T \mathbf{x}$ efetua uma operação de anti-dilatação. □

A.2 Demonstração dos Teoremas do Capítulo 5

Demonstração do Teorema 5.1. A demonstração desse teorema segue das seguintes equivalências obtidas utilizando, entre outras coisas, a comutatividade da t-norma T e a relação de adjunção entre T e I_T:

$$\left(A \circ_T \mathbf{x}^\xi\right) \vee \boldsymbol{\beta} \leq \mathbf{y}^\xi \,,\ \forall \xi = 1 \ldots, k \tag{A.13}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\bigvee_{j=1}^{n} T(a_{ij}, x_j^\xi)\right] \vee \beta_i \leq y_i^\xi \,, \forall \xi = 1, \ldots, k,\ \forall i = 1, \ldots, m \tag{A.14}$$

$$\Leftrightarrow \quad \bigvee_{j=1}^{n} T(a_{ij}, x_j^\xi) \leq y_i^\xi \text{ e } \beta_i \leq y_i^\xi \,, \forall \xi = 1, \ldots, k,\ \forall i = 1, \ldots, m \tag{A.15}$$

$$\Leftrightarrow \quad T(a_{ij}, x_j^\xi) \leq y_i^\xi \text{ e } \beta_i \leq y_i^\xi \,, \forall \xi = 1, \ldots, k,\ \forall i = 1, \ldots, m,\ \forall j = 1, \ldots, n. \tag{A.16}$$

$$\Leftrightarrow \quad a_{ij} \leq I_T(x_j^\xi, y_i^\xi) \text{ e } \beta_i \leq y_i^\xi \,, \forall \xi = 1, \ldots, k,\ \forall i = 1, \ldots, m,\ \forall j = 1, \ldots, n. \tag{A.17}$$

$$\Leftrightarrow \quad a_{ij} \leq \bigwedge_{\xi=1}^{k} I_T(x_j^\xi, y_i^\xi) \text{ e } \beta_i \leq \bigwedge_{\xi=1}^{k} y_i^\xi \,,\ \forall i = 1, \ldots, m,\ \forall j = 1, \ldots, n. \tag{A.18}$$

Para concluir a demonstração, simplesmente compare as equações em (5.4) com as inequações em (A.18). □

Lema A.1. *Se $a^\xi, b^\xi \in [0,1], \xi = 1, \ldots, k$ então a seguinte inequação vale para qualquer t-norma T:*

$$\bigwedge_{\xi=1}^{k} T\left(a^\xi, b^\xi\right) \geq T\left(\bigwedge_{\xi=1}^{k} a^\xi, \bigwedge_{\xi=1}^{k} b^\xi\right) . \tag{A.19}$$

Demonstração do lema A.1. Considere a, b, $c \in [0,1]$ arbitrários. Pela monotonicidade de uma t-norma, $T(a,c)$ e $T(b,c)$ representam ambos cotas superiores de $T\left(a \wedge b, c\right)$. Logo, $T(a \wedge b, c) \leq T(a,c) \wedge T(b,c)$ e, portanto,

$$T(a \wedge b, c \wedge d) \leq T(a, c \wedge d) \wedge T(b, c \wedge d) \leq T\left(a, c\right) \wedge T\left(a, d\right) \wedge T\left(b, c\right) \wedge T\left(b, d\right) \ \leq T\left(a, c\right) \wedge T\left(b, d\right) \,, \tag{A.20}$$

para todo $a, b, c, d \in [0,1]$.

A demonstração do lema A.1 segue por indução. Evidentemente, (A.19) vale para $k = 1$. Suponha que (A.19) valha para $p = k - 1 \geq 1$. Esta hipótese e as inequações em (A.20) levam

as seguintes conclusões:

$$\bigwedge_{\xi=1}^{k} T\left(a^{\xi}, b^{\xi}\right) = \left[\bigwedge_{\xi=1}^{k-1} T\left(a^{\xi}, b^{\xi}\right)\right] \wedge T\left(a^{k}, b^{k}\right) \geq T\left(\bigwedge_{\xi=1}^{k-1} a^{\xi}, \bigwedge_{\xi=1}^{k-1} b^{\xi}\right) \wedge T\left(a^{k}, b^{k}\right) \geq T\left(\bigwedge_{\xi=1}^{k} a^{\xi}, \bigwedge_{xi=1}^{k} b^{\xi}\right). \tag{A.21}$$

□

Lema A.2. *Seja $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ uma t-norma contínua e seja $I_T : [0,1]^2 \to [0,1]$ a R-implicação adjunta de T. Para todo $a, b, c \in [0,1]$, tem-se*

$$T\left(I_T\left(a,b\right), I_T\left(b,c\right)\right) \leq I_T\left(a,c\right). \tag{A.22}$$

Demonstração do lema A.2. Sejam $x^* = I_T\left(a,b\right)$, $y^* = I_T\left(b,c\right)$ e $z^* = I_T\left(a,c\right)$. Considere $z = T(x^*, y^*)$. É suficiente mostrar que $z \leq z^*$.

Lembre-se que $I_T(x,y) = \bigvee\{z \in [0,1] : T(x,z) \leq y\}$ (cf. proposição 2.5). Portanto, $T(x, I_T(x,y)) \leq y$, para todo $x, y \in [0,1]$. Assim, pela comutatividade e monotonicidade da t-norma, tem-se

$$T(a,z) = T\left(a, T\left(x^*, y^*\right)\right) = T\left(T\left(a, x^*\right), y^*\right) \leq T(b, y^*) \leq c\,. \tag{A.23}$$

Logo, vale a inequação $T(a,z) \leq c$. Como $z^* = I_T\left(a,c\right) = \bigvee\{z \in [0,1] : T(a,z) \leq c\}$, conclui-se que $z \leq z^*$ para todo z tal que $T(a,z) \leq c$. Logo, $z \leq z^*$ vale, em particular, para $z = x^* \,\mathrm{t}\, y^*$. □

O lema A.2 representa uma versão fraca do silogismo da lógica clássico onde o símbolo de inequação é substituido por um símbolo de igualdade. Os lemas A.1 e A.2 são usados para demonstrar que a matriz dos pesos sinápticos de uma AFIM é t-transitiva.

Lema A.3. *Seja $X \in [0,1]^{n \times k}$. A matriz $W = X \circledast_T X^T$ é t-transitiva. Em outras palavras, tem-se $W \circ_T W \leq W$, onde $\circ_T$ é o produto max-T com a t-norma contínua T adjunta da implicação nebulosa I_T empregada no armazenamento R-implicativo nebuloso.*

Demonstração. Primeiramente, o lema A.2 aplicado nas componentes de $X \in [0,1]^{n \times k}$ leva à inequação

$$T\left(I_T\left(x_j^{\xi}, x_l^{\xi}\right), I_T\left(x_l^{\xi}, x_i^{\xi}\right)\right) \leq I_T\left(x_j^{\xi}, x_i^{\xi}\right), \tag{A.24}$$

para todo $\xi = 1, 2, \ldots, k$ e para todo $i, j, l = 1, 2, \ldots, n$. Agora, aplicando o princípio de

fechamento da álgebra minimax [20] em (A.24) tem-se:

$$\bigwedge_{\xi=1}^{k} T\left(I_T\left(x_j^\xi, x_l^\xi\right), I_T\left(x_l^\xi, x_i^\xi\right)\right) \leq \bigwedge_{\xi=1}^{k} I_T\left(x_j^\xi, x_i^\xi\right) , \tag{A.25}$$

para todo $\xi = 1, \ldots, k$ e para todo $i, j, l = 1, \ldots, n$. Finalmente, as seguintes inequações seguem da última desigualdade e do lema A.1:

$$\begin{aligned} w_{ij} &= \bigwedge_{\xi=1}^{k} I_T\left(x_j^\xi, x_i^\xi\right) \geq \bigwedge_{\xi=1}^{k} T\left(I_T\left(x_j^\xi, x_l^\xi\right), I_T\left(x_l^\xi, x_i^\xi\right)\right) && \text{(A.26)} \\ &\geq T\left(\bigwedge_{\xi=1}^{k} I_T\left(x_j^\xi, x_l^\xi\right), \bigwedge_{\xi=1}^{k} I_T\left(x_l^\xi, x_i^\xi\right)\right) = T\left(w_{lj}, w_{il}\right) , && \text{(A.27)} \end{aligned}$$

para todo $i, j, l = 1, \ldots, n$. Logo, pela comutatividade da t-norma T, $\bigvee_{l=1}^{n} T\left(w_{il}, w_{lj}\right) \leq w_{ij}$ para todo $i, j = 1, \ldots, n$. Em outras palavras, W é t-transitiva. □

Demonstração do teorema 5.3. Primeiramente, note que

$$w_{ii} = \bigwedge_{\xi=1}^{k} I_T\left(x_i^\xi, x_i^\xi\right) = \bigwedge_{\xi=1}^{k} 1 = 1 . \tag{A.28}$$

Logo, $I \leq W = X \circledast_T X^T$, i.e., W é reflexiva.

É mostrado a seguir que W é max-T idempotente. De um lado $W \circ_T W \leq W$ pelo lema A.3. Por outro lado, para todo $i, j = 1, \ldots, n$ tem-se

$$(W \circ_T W)_{ij} = \bigvee_{l=1}^{n} T(w_{il}, w_{lj}) \geq T(w_{ii}, w_{ij}) = T(1, w_{ij}) = w_{ij} , \tag{A.29}$$

pelo princípio de abertura [20] e a condição $T(1, x) = x$ satisfeita pela t-norma T para todo $x \in [0, 1]$. Logo, $W \circ_T W \geq W$. Combinando esses fatos, concluí-se que $W \circ_T W = W$. □

Demonstração do teorema 5.4. A seguintes equações mostram que $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k)$ para todo $k \geq 1$.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= (W \circ \mathbf{x}(k)) \vee \boldsymbol{\theta} = (W \circ ((W \circ \mathbf{x}(k-1)) \vee \boldsymbol{\theta})) \vee \boldsymbol{\theta} && \text{(A.30)} \\ &= ((W \circ W) \circ \mathbf{x}(k-1)) \vee (W \circ \boldsymbol{\theta}) \vee \boldsymbol{\theta} = (W \circ \mathbf{x}(k-1)) \vee \boldsymbol{\theta} = \mathbf{x}(k). \end{aligned}$$

Foi usada a associatividade e a distributividade sobre o máximo do produto max-T e o fato

de W ser reflexiva, max-T idempotente e $W \circ \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}$. Esse último fato é uma consequência do teorema 5.9 que será apresentado mais adiante. □

Demonstração do Teorema 5.5. A demonstração desse teorema segue diretamente do corolário 5.2 tomando $A = I$ (matriz identidade) e $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ (vetor de zeros). Note que $(A \circ_T \mathbf{x}^\xi) \vee \boldsymbol{\beta} = (I \circ_T \mathbf{x}^\xi) \vee \mathbf{0} = \mathbf{x}^\xi$, para todo $\xi = 1, \ldots, k$. □

Demonstração do teorema 5.8. Considere $\mathbf{x} \in [0,1]^n$. Por um lado, o padrão $\mathbf{y} = (W \circ_T \mathbf{x}) \vee \boldsymbol{\theta}$ representa uma cota superior de $\mathbf{x}$ e $\boldsymbol{\theta}$, pois $\mathbf{y} = (W \circ_T \mathbf{x}) \vee \boldsymbol{\theta} \geq (I \circ_T \mathbf{x}) \vee \boldsymbol{\theta} \geq \mathbf{x} \vee \boldsymbol{\theta}$ pelo teorema 5.3 e pela monotonicidade do produto max-T. Por outro lado, segundo o teorema 5.5, o padrão $\mathbf{y} = (W \circ_T \mathbf{x}) \vee \boldsymbol{\theta}$ é um ponto fixo de W com respeito ao produto max-T. Além disso, para todo ponto fixo $\mathbf{z} \geq \mathbf{x}$, tem-se $\mathbf{z} = (W \circ_T \mathbf{z}) \vee \boldsymbol{\theta} \geq (W \circ_T \mathbf{x}) \vee \boldsymbol{\theta} = \mathbf{y}$ devido a monotonicidade das operações "$\circ_T$" e "$\vee$". Logo, $\mathbf{y}$ é também a menor cota superior no conjunto dos pontos fixos da AFIM. □

Demonstração do Teorema 5.9. Seja $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ o conjunto de índices de $\mathbf{x}$. A monotonicidade das normas triangulares, a distributividade de $\vee$ e $\wedge$ e o teorema 5.8 fornece as seguintes equações:

$$(W \circ \mathbf{y})_i = \bigvee_{j=1}^{n} T\left(w_{ij}, y_j\right) = \bigvee_{j=1}^{n} T\left[w_{ij}, \left(\bigvee_{l=1}^{k} \bigwedge_{\xi \in L_l} x_j^\xi\right)\right] = \bigvee_{j=1}^{n} \left[\bigvee_{l=1}^{k} \bigwedge_{\xi \in L_l} T\left(w_{ij}, x_j^\xi\right)\right] \quad \text{(A.31)}$$

$$= \bigvee_{l=1}^{k} \bigwedge_{\xi \in L_l} \left[\bigvee_{j=1}^{n} T\left(w_{ij}, x_j^\xi\right)\right] = \bigvee_{l=1}^{k} \bigwedge_{\xi \in L_l} x_i^\xi = y_i \,. \quad \text{(A.32)}$$

Sendo os elementos da diagonal de W todos iguais a 1, um padrão constante $\mathbf{c} = [c, c, \ldots, c]^T$ permanece um ponto fixo para toda aplicação de W devido aos seguintes fatos:

$$(W \circ \mathbf{c})_i = \bigvee_{j=1}^{n} T\left(w_{ij}, c\right) = T\left(c, \bigvee_{j=1}^{n} w_{ij}\right) = c \,. \quad \text{(A.33)}$$

□

A demonstração do teorema 5.10 requer o lema A.4 abaixo e a seguinte notação: Dado um conjunto $\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^k\}$ e um índice $l \in \{1, 2, \ldots, n\}$, o símbolo L_l representa o subconjunto de $\{1, 2, \ldots, k\}$ tal que $x_l^\xi = 1$ para todo $\xi \in L_l$. Em outras palavras, o conjunto L_l contém o índice dos padrões cuja l-ésima componente é 1.

Lema A.4. *Se* $\mathbf{e}^l$ *é a* l*-ésima coluna da matriz identidade, então*

$$W \circ_T \mathbf{e}^l = \bigwedge_{\xi \in L_l} \mathbf{x}^\xi \,. \tag{A.34}$$

Demonstração do Teorema 5.10. Pelo teorema 5.9, os padrões constantes $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{y} = \mathbf{1}$, e todo polinômio reticulado em $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^k$ são pontos fixo de W com respeito à composição max-T.

Suponha que $\mathbf{y}$ seja um ponto fixo tal que $\mathbf{y} \neq \mathbf{1}$ e $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. Evidentemente, o padrão $\mathbf{y}$ pode ser escrito na forma $\mathbf{y} = \bigvee_{l=1}^{p} \mathbf{e}_l$, onde p é o número de elementos não nulos de $\mathbf{y}$. Desse modo, as seguintes equações valem para o i-ésimo elemento de $\mathbf{y} = W \circ \mathbf{y}$, onde $i = 1, \ldots, n$.

$$y_i = (W \circ_T \mathbf{y})_i = \bigvee_{j=1}^{n} (w_{ij} \wedge y_j) = \bigvee_{j=1}^{n} \left(w_{ij} \wedge \bigvee_{l=1}^{k} \delta_{lj} \right) = \bigvee_{l=1}^{k} \left[\bigvee_{j=1}^{n} (w_{ij} \wedge \delta_{lj}) \right] \tag{A.35}$$

$$= \bigvee_{l=1}^{k} (W \circ_T \mathbf{e}_l)_i = \bigvee_{l=1}^{k} \left(\bigwedge_{\xi \in L_l} \mathbf{x}^\xi \right)_i \,. \tag{A.36}$$

Logo, $\mathbf{y} = \bigwedge_{l=1}^{p} \bigvee_{\xi \in L_l} \mathbf{x}^\xi$. □

Demonstração do teorema 5.11. A i-ésima componente de $\mathcal{M}(\mathbf{x})$ satisfaz as seguintes equações para todo $i = 1, \ldots, m$:

$$[\mathcal{M}(\mathbf{x})]_i = N_S \left([\mathcal{W} \left(\mathbf{N}_S^n (\mathbf{x}) \right)]_i \right) = N_S \left(\left[\mathbf{w}_i^T \circ_T \mathbf{N}_S^n (\mathbf{x}) \right] \vee \theta_i \right) \tag{A.37}$$

$$= N_S \left[\mathbf{w}_i^T \circ_T \mathbf{N}_S^n (\mathbf{x}) \right] \wedge N_S (\theta_i) = N_S \left[\bigvee_{j=1}^{n} T \left(w_{ij}, N_S(x_j) \right) \right] \wedge N_S (\theta_i) \,. \tag{A.38}$$

Entretanto, aplicando a relação de dualidade dada pela equação (2.40) em (A.38) com $N = N_S$, $C = T$, $D = S$, tem-se

$$[\mathcal{M}(\mathbf{x})]_i = \left[\bigwedge_{j=1}^{n} N_S \left(T \left(w_{ij}, N_S(x_j) \right) \right) \right] \wedge N_S (\theta_i) = \left[\bigwedge_{j=1}^{n} S \left(N_S(w_{ij}), x_j \right) \right] \wedge N_S (\theta_i) \tag{A.39}$$

$$= \left[\bigwedge_{j=1}^{n} S \left(m_{ij}, x_j \right) \right] \wedge \vartheta_i = \left(\mathbf{m}_i^T \bullet_S \mathbf{x} \right) \wedge \vartheta_i \,, \tag{A.40}$$

onde $m_{ij} = N_S(w_{ij})$ e $\vartheta_i = N_S(\theta_i)$, para todo $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. Além disso, os operadores S e T são duais com respeito à negação usual N_S. Em outras palavras, a

s-norma S é formada pela composição de N_S e T, que são operadores contínuos. Logo, a s-norma S também é um operador contínuo. □

Demonstração do teorema 5.13. Sejam $W \in [0,1]^{m\times n}$, $\boldsymbol{\theta} \in [0,1]^m$, $\mathbf{x} \in [0,1]^n$ e $\mathbf{y} \in [\boldsymbol{\theta}, \mathbf{1}_m]$. Denotando $I = \{1,\ldots,m\}$ e $J = \{1,\ldots,n\}$, tem-se

$$\mathcal{W}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{y} \Leftrightarrow (W \circ_T \mathbf{x}) \vee \boldsymbol{\theta} \leq \mathbf{y} \tag{A.41}$$

$$\Leftrightarrow \quad W \circ_T \mathbf{x} \leq \mathbf{y} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\theta} \leq \mathbf{y} \tag{A.42}$$

$$\Leftrightarrow \quad \bigvee_{j=1}^{n} T(w_{ij}, x_j) \leq y_i \quad \text{e} \quad \theta_i \leq y_i\,, \quad \forall\, i \in I \tag{A.43}$$

$$\Leftrightarrow \quad T(w_{ij}, x_j) \leq y_i \quad \text{e} \quad \theta_i \leq y_i\,, \quad \forall\, i \in I\ j \in J \tag{A.44}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_j \leq I_T(w_{ij}, y_i) \quad \text{e} \quad \theta_i \leq y_i\,, \quad \forall\, i \in I\ j \in J \tag{A.45}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_j \leq \bigwedge_{i=1}^{m} I_T(w_{ij}, y_i) \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\theta} \leq \mathbf{y}\,, \quad \forall\, j \in J \tag{A.46}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{x}^T \leq \mathbf{y}^T \circledast_T W \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\theta} \leq \mathbf{y} \tag{A.47}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{y}) &= \bigvee \{\mathbf{x} \in [0,1]^n : \mathcal{W}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{y}\} = \bigvee \left\{\mathbf{x} \in [0,1]^n : \mathbf{x}^T \leq \mathbf{y}^T \circledast_T W \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\theta} \leq \mathbf{y}\right\} \\ &= \left(\mathbf{y}^T \circledast_T W\right)^T\,, \end{aligned} \tag{A.48}$$

pois $\mathbf{y} \in [\boldsymbol{\theta}, \mathbf{1}_m]$ implica $\boldsymbol{\theta} \leq \mathbf{y}$. Note que $\mathcal{A}(\mathbf{y})$ é um vetor coluna enquanto que $(\mathbf{y}^T \circledast_T W)$ é um vetor linha.

A demonstração da segunda parte do teorema é obtida de um modo similar. □

Demonstração do Teorema 5.14. Considere a IFAM de Lukasiewicz baseada na t-norma C_L e na implicação nebulosa I_L definidas em (2.23) e (2.31), respectivamente. Usando esses operadores, verifica-se que os elementos da matriz dos pesos sinápticos $W_L = (w_{ij}) \in [0,1]^{m\times n}$ obtida através do armazenamento nebuloso R-implicativo satisfazem as seguintes equações

para todo $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$:

$$w_{ij} = \bigwedge_{\xi=1}^{k} I_L\left(x_j^\xi, y_i^\xi\right) = \bigwedge_{\xi=1}^{k}\left[1 \wedge \left(1 - x_j^\xi + y_i^\xi\right)\right] \tag{A.49}$$

$$= \left(1 \wedge \left[1 + \bigwedge_{\xi=1}^{k}\left(y_i^\xi - x_j^\xi\right)\right]\right) - 1 + 1 = \left((1-1) \wedge \left[\bigwedge_{\xi=1}^{k}\left(y_i^\xi - x_j^\xi\right)\right]\right) + 1 \tag{A.50}$$

$$= \left(\left[\bigwedge_{\xi=1}^{k}\left(y_i^\xi - x_j^\xi\right)\right] \wedge 0\right) + 1\,. \tag{A.51}$$

Logo, a matriz dos pesos sinápticos da IFAM de Lukasiewicz e a MAM aditiva estão relacionadas através da equação $W_L = (W_{XY}^a \wedge 0) + 1$, onde W_L e W_{XY}^a são as matrizes dos pesos sinápticos da IFAM de Lukasiewicz e da MAM aditiva, respectivamente.

Considere agora um padrão de entrada $\mathbf{x} \in [0,1]^n$. O padrão $\mathbf{y} = [y_1, \ldots, y_m]^T \in [0,1]^m$ recordado pela IFAM de Lukasiewicz satisfaz as seguintes equações para todo $i = 1, \ldots, m$:

$$y_i = (W_L \circ_L \mathbf{x})_i \vee \theta_i = \left(\bigvee_{j=1}^{n} T\left(w_{ij}, x_j\right)\right) \vee \theta_i \tag{A.52}$$

$$= \left(\bigvee_{j=1}^{n}\left[0 \vee (w_{ij} + x_j - 1)\right]\right) \vee \theta_i = \left[0 \vee \left(\bigvee_{j=1}^{p}\left[(w_{ij} - 1) + x_j\right]\right)\right] \vee \theta_i \tag{A.53}$$

$$= \left(\bigvee_{j=1}^{n}\left[\left((W_{XY}^a)_{ij} \wedge 0\right) + x_j\right]\right) \vee \theta_i\,, \tag{A.54}$$

pois $\boldsymbol{\theta} \geq \mathbf{0}_m$. Portanto, a seguinte equação vale para todo $\mathbf{x} \in [0,1]^n$:

$$(W_L \circ \mathbf{x}) \vee \boldsymbol{\theta} = [(W_{XY}^a \wedge 0) \boxtriangledown \mathbf{x}] \vee \boldsymbol{\theta}\,. \tag{A.55}$$

A relação entre a IFAM dual de Lukasiewicz e a MAM aditiva M_{XY}^a é obtida de um modo similar. Os elementos da matriz dos pesos sinápticos $M_L = (m_{ij}) \in [0,1]^{m \times n}$ da IFAM dual de Lukasiewicz satisfazem as seguintes equações para todo $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$:

$$m_{ij} = \bigvee_{\xi=1}^{k} J_L\left(x_j^\xi, y_i\right) = \bigvee_{\xi=1}^{k}\left[0 \vee \left(y_i^\xi - x_j^\xi\right)\right] = 0 \vee \left[\bigvee_{\xi=1}^{p}\left(y_i^\xi - x_j^\xi\right)\right]\,. \tag{A.56}$$

Portanto, $M_L = M_{XY}^a \vee 0$.

Dado um padrão de entrada $\mathbf{x} \in [0,1]^n$, o padrão $\mathbf{y} \in [0,1]^m$ recordado pela IFAM dual

de Lukasiewicz satisfaz as seguintes equações, pois $\vartheta_i \leq 1$ para todo $i = 1, \ldots, m$:

$$y_i = (M_L \bullet_L \mathbf{x})_i \wedge \vartheta_i = \left[\bigwedge_{j=1}^{n} S\left(m_{ij}, x_j\right)\right] \wedge \vartheta_i = \left(\bigwedge_{j=1}^{n} \left[1 \wedge \left(m_{ij} + x_j\right)\right]\right) \wedge \vartheta_i \quad \text{(A.57)}$$

$$= \left[\bigwedge_{j=1}^{n} \left(m_{ij} + x_j\right)\right] \wedge \vartheta_i \,, \quad \text{(A.58)}$$

Logo, as seguintes equações valem para todo $\mathbf{x} \in [0, 1]^m$:

$$(M_L \bullet_L \mathbf{x}) \wedge \boldsymbol{\vartheta} = (M_L \boxslash \mathbf{x}) \wedge \boldsymbol{\vartheta} = [(M_{YX}^a \vee 0) \boxslash \mathbf{x}] \wedge \boldsymbol{\vartheta} \,. \quad \text{(A.59)}$$

□

Apêndice B

Código de MATLAB para o Previsor Baseado na IFAM de Lukasiewicz

```
clear;
nty=500;

% Ler e organizar os dados. Xr é usado para treinamento e Xt é usado para teste!
[Xr,Xt]=furnas;
ycor=reshape(Xt',1,12*8);

% Normalizar os dados!
for mes=1:12
    mu(mes)=mean(Xr(:,mes));
    sigma(mes)=std(Xr(:,mes));
    Xr(:,mes)=(Xr(:,mes)-mu(mes))/sigma(mes);
    Xt(:,mes)=(Xt(:,mes)-mu(mes))/sigma(mes);
end

% Criar matrizes com 24 colunas para facilitar a manipulação dos dados:
% As 12 primeiras colunas correspondem aos dados do ano n, as demais correspondem aos dados do ano n+1;
nr=size(Xr,1); Xr=[[zeros(1,12);Xr(1:nr-1,:)],Xr];
nt=size(Xt,1); Xt=[[Xr(nr,13:24);Xt(1:nt-1,:)],Xt];

for mes=1:12
   % Gerar os dados para o agrupamento - Data
   clear Data;
   Data=Xr(2:nr,mes+12-3:mes+12);
   nD=size(Data,2)-1;

   % Agrupar os dados (criação das regras);
   clear C;
   [C,S]=subclust(Data,0.5);
   nc=size(C,1);

   % Imprimir o número de regras de cada mês!
   disp(sprintf('Mes: %2d,Numero de Regras: %2d',mes,nc));
```

```
   % Calcular o espalhamento das gaussianas;
   vx=sqrt(1./2*S(1:nD));vy=sqrt(1./2*S(nD+1));

   % Gerando as saídas fundamentais;
   ty=linspace(-5,5,nty);
   clear Y;
   for xi=1:nc
        clear y;
          y=gaussbf(ty,C(xi,nD+1),vy)';
          Y(:,xi)=y;
   end

   % Recordar os padrões;
   for i=1:nt
      clear input;
         input=Xt(i,mes+12-3:mes+12-1);
      clear fsIFAM;
      fsIFAM=ones(nty,1);
      for xi=1:nc
         fsIFAM=min(fsIFAM,Y(:,xi)+1-gaussbf(input',C(xi,1:nD)',vx'));
   end

      % Defuzzificação
   yIFAM(i,mes)=sigma(mes)*defuzz(ty,fsIFAM,'centroid')+mu(mes);
   end
end

% Calculo dos erros
yIFAM=reshape(yIFAM',1,12*nt);

ErroIFAM=[mean((ycor-yIFAM).^2),mean(abs(ycor-yIFAM)),...
               100*mean(abs(ycor-yIFAM)./ycor),100*max(abs(ycor-yIFAM)./ycor)];
% Imprimendo os erros na tela
disp(sprintf('IFAM -- EQM %2.3g, EAM %5.2f, EPM %5.2f, EPmax %5.2f.',...
                                        ErroIFAM(1),ErroIFAM(2),ErroIFAM(3),ErroIFAM(4)));

% Gerando o gráfico
figure(1); clf;
x=([1:12*8]-1)/12+1991;
plot(x,ycor,'b',x,yIFAM,'--r','Linewidth',1);
legend('Valor Real','Valor Estimado');
```

Referências Bibliográficas

[1] The Database of Faces of AT&T Laboratories Cambridge. Avaliable at: http://www.uk.research.att.com/facedatabase.html.

[2] ARAÚJO, R. A., MADEIRO, F., SOUSA, R. P., PESSOA, L. F. C., AND FERREIRA, T. A. E. An evolutionary morphological approach for financial time series forecasting. In *Proceedings of the IEEE Congress on Evolutionary Computation* (Vancouver, Canada, 2006).

[3] BALLINI, R., FIGUEIREDO, M., SOARES, S., ANDRADE, M., AND GOMIDE, F. A seasonal streamflow forecasting model using neurofuzzy network. In *Information, Uncertainty, Fusion*, B. Bouchon-Meunier, R. Yager, and L. Zadeh, Eds., vol. 1. Kluwer Publishers, 2000, pp. 257–276.

[4] BANDLER, W., AND KOHOUT, L. Fuzzy power sets and fuzzy implication operators. *Fuzzy Sets and Systems 4*, 1 (July 1980), 13–30.

[5] BANON, G. J. F. Characterization of translation-invariant elementary morphological operators between gray-level images. Tech. rep., INPE, São José dos Campos, 1995. Avaliable at: http://iris.sid.inpe.br:1912/rep-/dpi.inpe.br/banon/1995/10.20.17.45.

[6] BANON, G. J. F., AND BARRERA, J. Minimal representation for translation invariant set mappings by mathematical morphology. *SIAM J. Appl. Math. 51*, 6 (1991), 1782–1798.

[7] BANON, G. J. F., AND BARRERA, J. Decomposition of mappings between complete lattices by mathematical morphology: Part I - General lattices. *Signal Processing 30* (Feb. 1993), 299–327.

[8] BELOHLÁVEK, R. Fuzzy logical bidirectional associative memory. *Information Sciences 128*, 1-2 (2000), 91–103.

[9] BIRKHOFF, G. *Lattice Theory*, 3 ed. American Mathematical Society, Providence, 1993.

[10] BLOCH, I., AND MAITRE, H. Fuzzy mathematical morphologies - a comparative-study. *Pattern Recognition 28*, 9 (1995), 1341–1387.

[11] BLYTH, T., AND JANOWITZ, M. *Residuation Theory*. Pergamon press, 1972.

[12] BRAGA-NETO, U., AND GOUTSIAS, J. Supremal multiscale signal analysis. *SIAM Journal of Mathematical Analysis 36*, 1 (2004), 94–120.

[13] BUCKLEY, J. J., AND HAYASHI, Y. Can fuzzy neural nets approximate continuous fuzzy functions? *Fuzzy Sets and Systems 61*, 1 (1994), 43–51.

[14] BUCKLEY, J. J., AND HAYASHI, Y. Fuzzy neural networks: A survey. *Fuzzy Sets and Systems 66* (1994), 1–13.

[15] CHIU, S. Fuzzy model identification based on cluster estimation. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems 2*, 3 (Sept 1994).

[16] CHIUEH, T., AND GOODMAN, R. Recurrent correlation associative memories. *IEEE Trans. on Neural Networks 2*, 2 (Mar. 1991), 275–284.

[17] CHOUDHURY, J., SARKAR, B., AND MUKHERJEE, S. Forecasting of engineering manpower through fuzzy associative memory neural network with arima: a comparative study. *Neurocomputing 47*, 1-2 (Jan. 2002), 241–257.

[18] CHUNG, F., AND LEE, T. On fuzzy associative memory with multiple-rule storage capacity. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems 4*, 3 (August 1996), 375–384.

[19] CRESTANI, P., VON-ZUBEN, F., AND FIGUEIREDO, M. A hierarchical neuro-fuzzy approach to autonomous navigation. In *Proceedings of the 2002 International Joint Conference on Neural Networks, 2002. IJCNN '02* (May 2002), vol. 3, pp. 2339 – 2344.

[20] CUNINGHAME-GREEN, R. *Minimax Algebra: Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 166*. Springer-Verlag, New York, 1979.

[21] CUNINGHAME-GREEN, R. Minimax algebra and applications. In *Advances in Imaging and Electron Physics*, P. Hawkes, Ed., vol. 90. Academic Press, New York, NY, 1995, pp. 1–121.

[22] DAVIDSON, J. Foundation and applications of lattice transforms in image processing. In *Advances in Electronics and Electron Physics*, P. Hawkes, Ed., vol. 84. Academic Press, New York, NY, 1992, pp. 61–130.

[23] DAVIDSON, J., AND HUMMER, F. Morphology neural networks: An introduction with applications. *Circuits, Systems, and Signal Processing 12*, 2 (1993), 177–210.

[24] DAVIDSON, J., AND RITTER, G. A theory of morphological neural networks. In *Digital Optical Computing II* (July 1990), vol. 1215 of *Proceedings of SPIE*, pp. 378–388.

[25] DE BAETS, B. Fuzzy morphology: A logical approach. In *Uncertainty Analysis in Engineering and Science: Fuzzy Logic, Statistics, and Neural Network Approach*, B. M. Ayyub and M. M. Gupta, Eds. Kluwer Academic Publishers, Norwell, 1997, pp. 53–67.

[26] DEDEKIND, R. Über Zerlegungen von Zahlen durch ihre grössten gemeinsamen Teiler. In *Richard Dedekind. Gesammelte mathematische Werke*, R. Fricke, E. Noether, and Ö. Ore, Eds., vol. II. Chelsea Publishing Corporation, 1969, pp. 103–148. Appeared in 1897.

[27] DENG, T., AND HEIJMANS, H. Grey-scale morphology based on fuzzy logic. *Journal of Mathematical Imaging and Vision 16*, 2 (Mar. 2002), 155–171.

[28] DOUGHERTY, E. R., AND LOTUFO, R. A. *Hands-on Morphological Image Processing*, vol. TT59. SPIE PRESS, 2003.

[29] FAN, J., JIN, F., AND YUAN, X. An efficient learning algorithm for fuzzy associative memories. *Acta Electr. Sinica 24* (1996), 112–114.

[30] FIGUEIREDO, M., BALLINI, R., SOARES, S., ANDRADE, M., AND GOMIDE, F. Learning algorithms for a class of neurofuzzy network and application. *IEEE Transactions onSystems, Man and Cybernetics, Part C 34*, 3 (Aug. 2004), 293–301.

[31] FULLER, R. *Introduction to Neuro-Fuzzy Systems*. Springer-Verlag New York, Mar. 2000.

[32] GADER, P. D., KHABOU, M., AND KOLDOBSKY, A. Morphological regularization neural networks. *Pattern Recognition, Special Issue on Mathematical Morphology and Its Applications 33*, 6 (June 2000), 935–945.

[33] GOETCHERIAN, V. From binary to grey tone image processing using fuzzy logic concepts. *Pattern Recognition 12* (1980), 7–15.

[34] GOGUEN, J. A. The logic of inexact concepts. *Synthese 19* (1969), 325–373.

[35] GRAÑA, M., GALLEGO, J., TORREALDEA, F. J., AND D'ANJOU, A. On the application of associative morphological memories to hyperspectral image analysis. *Lecture Notes in Computer Science 2687* (2003), 567–574.

[36] GRAÑA, M., SUSSNER, P., AND RITTER, G. Innovative applications of associative morphological memories. *Mathware and Softcomputing 10*, 3 (2003), 155–168.

[37] HADWIGER, H. *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*. Springer-Verlag, Berlin, 1957.

[38] HÁJEK, P. *Metamathematics of Fuzzy Logic*, vol. 4 of *Trends in Logic: Studia Logica Library*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.

[39] HANSON, S., AND KEGL, J. Parnip: a connectionist network that learns natural language grammar from exposure to natural language sentences. In *Proc. 9th Annu. Conf. Cognitive Science* (1987), pp. 106–119.

[40] HASSOUN, M. H. Dynamic associative neural memories. In *Associative Neural Memories: Theory and Implemantation*, M. H. Hassoun, Ed. Oxford University Press, Oxford, U.K., 1993.

[41] HASSOUN, M. H. *Fundamentals of Artificial Neural Networks*. MIT Press, Cambridge, MA, 1995.

[42] HAYKIN, S. *Neural Networks: A Comprehensive Foundation*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1999.

[43] HEBB, D. *The Organization of Behavior*. John Wiley & Sons, New York, 1949.

[44] HEIJMANS, H. *Morphological Image Operators*. Academic Press, New York, NY, 1994.

[45] HOPFIELD, J. Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons. *Proceedings of the National Academy of Sciences 81* (May 1984), 3088–3092.

[46] HOPFIELD, J., AND TANK, D. Neural computation of decisions in optimization problems. *Biological Cybernetics* (1985).

[47] HOPFIELD, J. J. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. *Proceedings of the National Academy of Sciences 79* (Apr. 1982), 2554–2558.

[48] ISHIBUCHI, H., FUJIOKA, R., AND TANAKA, H. Neural networks that learn from fuzzy if-then rules. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems 1* (May 1993), 85–97.

[49] JUNBO, F., FAN, J., AND YAN, S. A learning rule for fuzzy associative memories. In *Proceedings of the IEEE International Joint Conference on Neural Networks* (June 1994), vol. 7, pp. 4273 – 4277.

[50] KABURLASOS, V., AND PAPADAKIS, S. Fuzzy lattice neurocomputing (fln) models. *Neural Networks 13*, 10 (Dec. 2000), 1145–1169.

[51] KHABOU, M., AND GADER, P. Automatic target detection using entropy optimized shared-weight neural networks. *IEEE Transactions on Neural Networks 11*, 1 (Jan. 2000), 186–193.

[52] KHABOU, M., GADER, P. D., AND KELLER, J. M. LADAR target detection using morphological shared-weight neural networks. *Machine Vision and Applications 11*, 6 (May 2000), 300–305.

[53] KIM, C. Segmenting a low-depth-of-field image using morphological filters and region merging. *IEEE Transactions on Image Processing 14*, 10 (2005), 1503–1511.

[54] KITAINIK, L. *Fuzzy Decision Procedures with Binary Relations*. Kluwer Academic Publishers, 1993.

[55] KLIR, G. J., AND YUAN, B. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic; Theory and Applications*. Prentice Hall, Upper Saddle River, N. Y., 1995.

[56] KOHONEN, T. *Self-Organization and Associative Memory*. Springer Verlag, 1984.

[57] KOHONEN, T., AND RUOHONEN, M. Representation of associated data by computers. *IEEE Transactions on Computers C-22* (1973), 701–702.

[58] KONG, S.-G., AND KOSKO, B. Adaptive fuzzy systems for backing up a truck-and-trailer. *IEEE Transactions on Neural Networks 3*, 2 (Mar. 1992), 211–223.

[59] KOSKO, B. Adaptive bidirectional associative memories. *Applied Optics 26*, 23 (Dec. 1987), 4947–4960.

[60] KOSKO, B. Bidirectional associative memories. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics 18* (1988), 49–60.

[61] KOSKO, B. *Fuzzy Engineering*. Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 1992.

[62] KOSKO, B. *Neural Networks and Fuzzy Systems: A Dynamical Systems Approach to Machine Intelligence*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1992.

[63] LIU, P. The fuzzy associative memory of max-min fuzzy neural networks with threshold. *Fuzzy Sets and Systems 107*, 2 (Oct. 1999), 147–157.

[64] MAGALHÃES, M. Redes neurais, metodologias de agrupamento e combinação de previsores aplicados a previsão de vazões naturais. Master's thesis, State University of Campinas, 2004.

[65] MAGALHÃES, M., BALLINI, R., GONÇALVES, R., AND GOMIDE, F. Predictive fuzzy clustering model for natural streamflow forecasting. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Fuzzy Systems* (Budapest, Hungary, 2004), pp. 390–394.

[66] MARAGOS, P. Lattice image processing: A unification of morphological and fuzzy algebraic systems. *Journal of Mathematical Imaging and Vision 22*, 2-3 (May 2005), 333–353.

[67] MARCANTONIO, A., DARKEN, C., KUHN, G. M., SANTOSO, I., HANSON, S. J., AND PETSCHE, T. A neural network autoassociator for induction motor failure prediction. In *Adv. Neural Inf. Process. Syst.* (1996), vol. 8, pp. 924–930.

[68] MATHERON, G. *Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux*. Masson, Paris, 1967.

[69] MATHERON, G. *Théorie des Ensembles Aléatoires*. Ecole des Mines, Paris, 1967.

[70] MATHERON, G. *Random Sets and Integral Geometry*. Wiley, New York, 1975.

[71] MCELIECE, R. J., POSNER, E. C., RODEMICH, E. R., AND VENKATESH, S. The capacity of the Hopfield associative memory. *IEEE Transactions on Information Theory 1* (1987), 33–45.

[72] MINKOWSKI, H. *Gesammelte Abhandlungen*. Teubner Verlag, Leipzig-Berlin, 1911.

[73] NACHTEGAEL, M., AND KERRE, E. Connections between binary, gray-scale and fuzzy mathematical morphologies. *Fuzzy Sets and Systems 124*, 1 (Nov. 2001), 73–85.

[74] NDOUSSE, T. D. Fuzzy neural control of voice cells in ATM networks. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications SAC-12, 9* (1994), 1488–1494.

[75] NGUYEN, H. T., AND WALKER, E. A. *A first Course in Fuzzy Logic*. Chapman & Hall/Crc, 2000.

[76] PEDRYCZ, W. Fuzzy neural networks and neurocomputations. *Fuzzy Sets and Systems 56*, 1 (1993), 1–28.

[77] PEDRYCZ, W., AND GOMIDE, F. *An Introduction to Fuzzy Sets: Analysis and Design*. MIT Press Complex Adaptive Systems, 1998.

[78] PESSOA, L., AND MARAGOS, P. Neural networks with hybrid morphological/rank/linear nodes: a unifying framework with applications to handwritten character recognition. *Pattern Recognition 33*, 6 (June 2000), 945–960.

[79] PETRIDIS, V., AND KABURLASOS, V. Fuzzy lattice neural network (FLNN): a hybrid model for learning. *IEEE Transactions on Neural Networks 9*, 5 (Sept. 1998), 877–890.

[80] POGGIO, T., AND GIROSI, F. Network for approximation and learning. *Proc. IEEE 78*, 9 (Sept. 1990), 1481–1497.

[81] POGGIO, T., AND GIROSI, F. Regularization algorithms for learning that are equivalent to multilayer networks. *Science 247* (Feb. 23 1990), 978–982.

[82] RADUCANU, B., GRAÑA, M., AND ALBIZURI, X. F. Morphological scale spaces and associative morphological memories: Results on robustness and practical applications. *Journal of Mathematical Imaging and Vision 19*, 2 (2003), 113–131.

[83] RITTER, G., AND SCHMALZ, M. Learning in lattice neural networks that employ dendritic computing. In *IEEE International Conference on Fuzzy Systems* (Vancouver, Canada, July 16-21 2006), pp. 7 – 13.

[84] RITTER, G. X. Image algebra with applications. Unpublished manuscript, available via anonymous ftp from ftp://ftp.cis.ufl.edu/pub/src/ia/documents, 1997.

[85] RITTER, G. X., AND DAVIDSON, J. L. Recursion and feedback in image algebra. In *SPIE's 19th AIPR Workshop on Image Understanding in the 90's* (McLean, Va., Oct. 1990), Proceedings of SPIE.

[86] RITTER, G. X., DE LEON, J. L. D., AND SUSSNER, P. Morphological bidirectional associative memories. *Neural Networks 6*, 12 (1999), 851–867.

[87] RITTER, G. X., AND GADER, P. Fixed points of lattice transforms and lattice associative memories. Unpublished chapter book, pp. 1-84, Center for Vision and Visualization, CISE Department, Gainesville, FL: University of Florida, July 2005.

[88] RITTER, G. X., LI, D., AND WILSON, J. N. Image algebra and its relationship to neural networks. In *Technical Symposium Southeast on Optics, Electro-Optics, and Sensors* (Orlando, FL, Mar. 1989), Proceedings of SPIE.

[89] RITTER, G. X., AND SUSSNER, P. An introduction to morphological neural networks. In *Proceedings of the 13th International Conference on Pattern Recognition* (Vienna, Austria, 1996), pp. 709–717.

[90] RITTER, G. X., SUSSNER, P., AND DE LEON, J. L. D. Morphological associative memories. *IEEE Transactions on Neural Networks 9*, 2 (Mar. 1998), 281–293.

[91] RITTER, G. X., AND URCID, G. Lattice algebra approach to single-neuron computation. *IEEE Transactions on Neural Networks 14*, 2 (March 2003), 282–295.

[92] RITTER, G. X., AND WILSON, J. N. *Handbook of Computer Vision Algorithms in Image Algebra*, 2 ed. CRC Press, Boca Raton, 2001.

[93] RITTER, G. X., WILSON, J. N., AND DAVIDSON, J. L. Image algebra: An overview. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing 49*, 3 (Mar. 1990), 297–331.

[94] RONSE, C. Why mathematical morphology needs complete lattices. *Signal Processing 21*, 2 (Oct. 1990), 129–154.

[95] RUMELHART, D., HINTON, G., AND WILLIAMS, R. *Learning internal representation by error propagation*. Parallel Distributed Processing. MIT Press, Cambridge, MA, 1988.

[96] RUMELHART, D., AND MCCLELLAND, J. *Parallel Distributed Processing: Explorations in the Microstrutures of Cognition*, vol. 1. MIT Press, Cambridge, MA, 1986.

[97] SERRA, J. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, London, 1982.

[98] SERRA, J. *Image Analysis and Mathematical Morphology, Volume 2: Theoretical Advances*. Academic Press, New York, 1988.

[99] SIMPSON, P. Fuzzy min-max neural networks – part 1: Classification. *IEEE Transactions on Neural Networks 3*, 5 (Sept. 1992), 776–786.

[100] SINHA, D., AND DOUGHERTY, R. Fuzzification of set inclusion: theory and applications. *Fuzzy Sets and Systems 55*, 1 (April 1993), 15–42.

[101] SINHA, S., AND DOUGHERTY, E. R. A general axiomatic theory of intrinsically fuzzy mathematical morphologies. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems 3*, 4 (November 1995), 389–403.

[102] SOBANIA, A., AND EVANS, J. P. O. Morphological corner detector using paired triangular structuring elements. *Pattern Recognition 38*, 7 (2005), 1087–1098.

[103] SOILLE, P. *Morphological Image Analysis*. Springer Verlag, Berlin, 1999.

[104] STEINBRUCH, K. Die lernmatrix. *Kybernetik 1* (1961), 36–45.

[105] STERNBERG, S. Parallel architecture for image processing. In *Proceedings of the Third International IEEE Compsac* (Chicago), pp. 712 – 717.

[106] STERNBERG, S. Grayscale morphology. *Computer Vision, Graphics and Image Processing 35* (1986), 333–355.

[107] SUSSNER, P. Fixed points of autoassociative morphological memories. In *Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks* (Como, Italy, July 2000), pp. 611–616.

[108] SUSSNER, P. Generalizing operations of binary morphological autoassociative memories using fuzzy set theory. *Journal of Mathematical Imaging and Vision 9*, 2 (Sept. 2003), 81–93. Special Issue on Morphological Neural Networks.

[109] SUSSNER, P. Seminar on: *Redes Neurais Artificiais Baseados em Morfologia Matemática e Álgebra de Reticulados*, August 2005. Notas de Aula, IMECC, Unicamp, Campinas, Brasil.

[110] SUSSNER, P. *Perceptrons Morfológicos (Nebulosos): Fundamentos Matemáticos e Aplicações*, January 2007. Research Project for Clodoaldo A. de Moraes Lima, submitted to FAPESP.

[111] SUSSNER, P., AND VALLE, M. Fuzzy associative memories and their relationship to mathematical morphology. In *Handbook of Granular Computing*, W. Pedrycz, A. Skowron, and V. Kreinovich, Eds. John Wiley and Sons, Inc., New York, 2007. Invited contribution, to appear.

[112] SUSSNER, P., AND VALLE, M. Morphological and certain fuzzy morphological associative memories for classification and prediction. In *Computational Intelligence Based on Lattice Theory*, V. Kaburlasos and G. Ritter, Eds. Springer-Verlag, Heidelberg,Germany, 2007. Invited contribution, to appear.

[113] SUSSNER, P., AND VALLE, M. E. A brief account of the relations between gray-scale mathematical morphologies. In *Proceedings of the Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Processing (SIBGRAPI)* (Natal, Brazil, October 2005), pp. 79 – 86.

[114] SUSSNER, P., AND VALLE, M. E. Classification of fuzzy mathematical morphologies based on concepts of inclusion measure and duality. Submitted for publication in Pattern Recognition, May 2006.

[115] SUSSNER, P., AND VALLE, M. E. Grayscale morphological associative memories. *IEEE Transactions on Neural Networks 17*, 3 (May 2006), 559–570.

[116] SUSSNER, P., AND VALLE, M. E. Implicative fuzzy associative memories. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems 14*, 6 (Dec. 2006), 793–807.

[117] SUSSNER, P., AND VALLE, M. E. Recall of patterns using morphological and certain fuzzy morphological associative memories with applications in classification and prediction. In *Proceedings of the IEEE World Congress on Computational Intelligence* (July 2006).

[118] TAYLOR, W. Eletrical simulation of some nervous system functional activities. *Information Theory 3* (1956), 314–328.

[119] TEROL-VILLALOBOS, I., AND MENDIOLA-SANTIBAÑEZ, J. Transformations with reconstruction criteria: Image segmentation and filtering. vol. 30 of *Computational Imaging and Vision*. Springer-Verlag, Dordrecht, 2005, pp. 75–84.

[120] VALLE, M., AND SUSSNER, P. IFAMs - memórias associativas baseadas no aprendizado nebuloso implicativo. In *Anais do VII Congresso Brasileiro de Redes Neurais* (Natal, October 2005).

[121] VALLE, M., SUSSNER, P., AND GOMIDE, F. Introduction to implicative fuzzy associative memories. In *Proceedings of the IEEE International Joint Conference on Neural Networks* (Hungary, July 2004), pp. 925 – 931.

[122] VARGAS-VÁZQUEZ, D., CRESPO, J., AND MAOJO, V. Morphological image reconstruction with criterion from labelled markers. In *Discrete Geometry for Computer Imagery*, I. Nyström, G. Sanniti di Baja, and S. Svensson, Eds., vol. 2886 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003, pp. 475–484.

[123] WANG, S., AND LU, H. On new fuzzy morphological associative memories. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems 12*, 3 (June 2004), 316–323.

[124] YAGER, R. R., AND FILEV, D. P. *Essentials of Fuzzy Modeling and Control*. John Wiley and Sons, New York, 1994.

[125] YEUNG, D., AND CHOW, C. Parzen window network intrusion detectors. In *Int. Conf. Pattern Recognit.* (2002), pp. 385–388.

[126] ZADEH, L. A. Fuzzy sets. *Information and Control 8*, 3 (1965), 338–353.

[127] ZHANG, B.-L., ZHANG, H., AND GE, S. S. Face recognition by applying wavelet subband representation and kernel associative memory. *IEEE Transactions on Neural Networks 15*, 1 (Jan. 2004), 166–177.

[128] ZHANG, H., HUANG, W., HUANG, Z., AND ZHANG, B. A kernel autoassociator approach to pattern classification. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B 35*, 3 (June 2005), 593– 606.

[129] ZIMMERMANN, U. *Linear and Combinatorial Optimization of Ordered Algebraic Structures*. North-Holland, Amsterdam, 1981.