Soluções Positivas para uma Classe de Problemas Elípticos Quasilineares Envolvendo Expoentes Críticos

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Emerson Alves Mendonça de Abreu** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 17 de dezembro de 2001

Djairo G. de Figueiredo

Prof.Dr.: Djairo Guedes de Figueiredo
(Orientador)

Banca Examinadora:

1-Djairo Guedes de Figueiredo (orientador)
2-Orlando Francisco Lopes
3-José Valdo de Abreu Gonçalves
4-Elves Alves de Barros e silva
5-Olimpio Hiroshi Miyagaki

Tese apresentada ao **Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP**, como requisito parcial do Título de **Doutor** em Matemática Pura.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Abreu, Emerson Alves Mendonça de

Ab86s Soluções positivas para uma classe de problemas elípticos quasilineares envolvendo expoentes críticos / Emerson Alves Mendonça de Abreu -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2001.

Orientador : Djairo Guedes de Figueiredo

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Equações diferenciais elípticas. 3. Dirichlet, Problemas de. I. Figueiredo, Djairo Guedes de. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica
Departamento de Matemática

Soluções Positivas para uma Classe de Problemas Elípticos Quasilineares Envolvendo Expoentes Críticos

Emerson Alves Mendonça de Abreu

Tese de Doutorado orientada pelo Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo

17 de dezembro de 2001

Tese de Doutorado defendida em 17 de Dezembro de 2001 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

____
Prof (a). Dr (a). DJAIRO GUEDES DE FIGUEIREDO

____
Prof (a). Dr (a). ORLANDO FRANCISCO LOPES

____
Prof (a). Dr (a). OLIMPIO HIROSHI MIYAGAKI

____
Prof (a). Dr (a). ELVES ALVES DE BARROS E SILVA

____
Prof (a). Dr (a). JOSÉ VALDO ABREU GONÇALVES

Resumo

O nosso trabalho está dividido em duas partes. Na parte I, estudamos existência, multiplicidade e não existência de soluções positivas para uma classe de operadores elípticos envolvendo não linearidades críticas. Trabalhamos com estes problemas na forma radial, o que nos permitiu ter uma melhor visão dos fenômenos que ocorrem.

Nesta classe de operadores estão incluídos os operadores Laplaciano, p-Laplaciano e k-Hessiana entre outros, e as não linearidades estão divididas em críticas e críticas côncavo-convexa. No segundo caso, mostramos a existência de pelo menos duas soluções e, alguns novos resultados de não existência também foram obtidos. Na parte II, demos uma solução variacional para uma conjectura de Brézis-Nirenberg. Algumas extensões dessa conjectura também foram obtidas. Uma outra questão abordada, foi o cálculo da constante ótima para uma desigualdade de Sobolev com resto.

Abstract

Our work is divided in two parts. In the part I, we will study existence, multiplicity and nonexistence of positive solutions for a class of elliptic operators involving critical nonlinearities. We will work with this problems in the radial form, that us permit have a better vision of the phenomenon that occur.

In that class of the operators are included the operators Laplacian, p-Laplacian and k-Hessian among others, and the nonlinearity are divided in critical and critical concave-convex. In the second case, we showed the existence of the at least two solutions and we obtained too some new results of the nonexistence of the positive solutions. In part II, we gave one variational solution for one conjecture of the Brézis-Nirenberg. We obtained some extensions of this conjecture. Another question aboard, was the calculus of the optimal constant for one Sobolev inequality with remainder terms.

Agradecimentos

Agradeço a *Deus* por ter permitido mais este passo; para min, um grande passo.

Ao Conselho Nacional de Pesquisa(CNPq) pelo suporte financeiro.

Com relação ao Prof. Djairo, poderia escrever algumas páginas com agradecimentos, mas sou muito grato pela paciência e humildade que sempre teve para ler os manuscritos desta tese; os quais em sua maioria estavam ilegíveis e, pelo bom humor que sempre o acompanha.

Ao Marco Aurélio, pelas corajosas palavras junto ao Prof. Djairo para que este me orientasse.

Aos Profs. Orlando Lopes; José Valdo; Elves e Olímpio, por gentilmente terem aceito o convite para cômpor a banca examinadora, e ao João Marcos, pelas sugestões no português.

As maiores riquezas de uma pessoa, sem dúvida são as amizades. Agradeço o Everaldo e Leonardo, companheiros de "república"e profíncuas discusões matemáticas. Também, o pessoal do IMECC-futebol pelos "empolgantes"jogos e, do predinho (da pós) por terem propiciado um ambiente "realístico"e favorável a pesquisa.

À Cidinha, Ednaldo, Tânia e Reinaldo por estarem sempre a disposição para ajudar a solucionar as intermináveis e chatas questões burocráticas.

À *S*ilvia, não só pelo apoio a este trabalho, mas também pelo seu amor.

À todos meu muito obrigado

*"Buscarme-eis e me achareis,
quando me buscardes de todo o
Coração. Serei achado de vós,
e farei mudar a vossa sorte"*

Jr:29;13-14

*Dedico esta importante fase da minha vida à minha família.
Obrigado*

Conteúdo

Notações

Nesta tese faremos uso das seguintes notações:

Em um espaço de *Banach* X denotaremos por:
$\longrightarrow$ ou $\rightarrow$, denotam convergência forte.
$\rightharpoonup$ denota convergência fraca.
X_R é o espaço das funções absolutamente contínuas tais que:

$$X_R \equiv \left\{ u \mid u : [0,R] \longrightarrow I\!R \text{ e } \int_0^R r^\alpha |u'|^{\beta+2}\, dr < +\infty \right\}$$

X_R^* denota o espaço dos funcionais lineares e contínuos sobre X_R
$O(a)$ denota ordem grande de a
$o(a)$ denota ordem pequena de a
$\simeq$, ou $\cong$ denotam, ou querem dizer que possuem o mesmo comportamento
$\overset{(Hip)}{\geq}$ quer dizer que estamos usando a hipótese para concluir.
$\mathcal{P}$ denota uma classe de caminhos
Neste trabalho, quando não houver confusão, omitiremos o símbolo da diferencial dr das integrais, isto é, $\int_0^R f(r)$ muitas vezes denotará $\int_0^R f(r)\, dr$
$u_+(r) = \max\limits_{r\in[0,R]} \{u(r), 0\}$

Dizemos que um funcional de classe C^1 $\Phi : X \longrightarrow I\!R$ satisfaz a condição de compacidade de *Palais – Smale* no nível c(denotamos $(PS)_c$) se para cada sequência $(x_n) \subset X$ tal que

$$\Phi(x_n) \longrightarrow c \quad \text{ e } \quad \langle \Phi'(x_n), y\rangle \longrightarrow 0 \quad \forall v \in X,$$

possui uma subsequência (x_{n_j}) que converge fortemente em X.
$B_r(\mathcal{O}) = \{x \in X \mid \|x - \mathcal{O}\|_X < r\}$, denotará a bola de centro $\mathcal{O}$ e raio r.
Para cada $u \in X$, Φ_u denotará o funcional associado a u.

Prólogo

Neste trabalho estudaremos os seguintes problemas:

$$\begin{cases} -(r^\alpha |u'|^\beta u')' = & r^{q(\gamma)} + f(r,u), \text{ em } (0,R), \\ u(r) > & 0 \text{ para } r \in (0,R), \\ u'(0) = 0 & = u(R), \end{cases} \tag{1}$$

onde $0 < R < +\infty$, $q(\gamma) = (\gamma+1)(\beta+2)/(\alpha-\beta-1)$, $f(0,u) = 0 = f(r,0)$ e $f(r,u)$ é uma perturbação de ordem inferior a $u^{q(\gamma)-1}$, no infinito; isto é, $\lim_{u\longrightarrow+\infty} \frac{f(r,u)}{u^{q(\gamma)-1}} = 0$. Por exemplo, $f(r,u) = \lambda r^\alpha |u|^\beta u$, $\lambda \in I\!R$.

Para $\Omega \subset I\!R^N (N \geq 3)$ um domínio limitado,

$$\begin{cases} -\Delta u = & u^{(N+2)/(N-2)} + u^q, \text{ em } \Omega, \\ u > & 0 \text{ em } \Omega, \\ u = & 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

e

$$\|Du\|^2_{L^2(\Omega)} \geq S_N \|u\|^2_{L^{2^*}} + \lambda_q(\Omega)\|u\|^2_{L^q(\Omega)}, \tag{3}$$

onde $1 \leq q \leq \frac{N}{N-2}$, $2^* = \frac{2N}{N-2}$ e S_N é a constante ótima da imersão $H^1_o(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$.

Soluções do problema (1), correspondem a pontos críticos do funcional $\Psi \in C^1(X, I\!R)$, dado por

$$\Psi(u) = \frac{1}{\beta+2}\int_0^R r^\alpha |u'|^{\beta+2}\, dr - \frac{1}{q(\gamma)}\int_0^R r^\gamma |u|^{q(\gamma)}\, dr - \int_0^R F(r,u)\, dr, \tag{4}$$

onde $F(r,u) = \int_0^u f(r,t)\, dt$.

Como veremos na Proposição 2.1, o expoente $q(\gamma)$ é o expoente limite para às imersões $X_R \hookrightarrow L^p_\gamma$ com $p \leq q(\gamma)$. Desde que a imersão não é compacta para $p = q(\gamma)$, o funcional Ψ não satisfaz a condição (PS). Assim, existem muitas dificuldades quando tentamos encontrar pontos críticos do funcional Ψ.

Ainda com relação ao problema (1), adicionando a hipótese $\limsup\limits_{u\longrightarrow 0} \dfrac{f(r,u)}{r^\alpha |u|^{\kappa-1}u} \leq \lambda$, para algum $\lambda > 0$ e $1 < \kappa < \beta + 2$. Por exemplo, $f(r,u) = \lambda r^\alpha |u|^{\kappa-1}u$. Neste caso (o problema (1) é conhecido como Côncavo-Convexo), obteremos resultados de existência, multiplicidade e limitação em alguns casos.

A classe de problemas (1), incluem os operadores

(i) **Laplaciano:** $\alpha = N-1$, $\beta = 0$,

(ii) **p-Laplaciano**$(1 < p < N)$: $\alpha = N-1$, $\beta = p-2$,

(iii) **k-Hessiana**$(1 \leq k < N/2)$: $\alpha = N-k$, $\beta = k-1$.

Estes operadores têm atraído a atenção de uma grande quantidade de matemáticos nas últimas décadas, seja simplesmente pelas dificuldades matemáticas que eles propiciam, ou pelas importantes aplicações. Por exemplo, o caso i) aparece no estudo de partículas catalíticas, problemas em Geometria(problema de Yamabe), etc. No caso ii), existem várias aplicações em fluídos não Newtonianos. Veja [21] para mais aplicações.

O operador $k - Hessiana$ é definido como sendo

$$S_k(D^2u) = \sum \det A_k(D^2u), \tag{5}$$

onde $\sum \det A_k(D^2u)$, representa o somatório dos determinantes principais de ordem k da matriz $(D^2u)(Hessiana)$; ou, simplesmete

$$S_k(\lambda) = \sum_{i_1<\cdots<i_k} \sigma(\lambda_{i_1}, ..., \lambda_{i_k}), \tag{6}$$

onde $\sigma(\lambda_{i_1}, ..., \lambda_{i_k})$ é a $k - ésima$ função simétrica elementar sobre $I\!R^N$, agindo sobre $(\lambda_{i_1}, ..., \lambda_{i_k}) \subset (\lambda_1, ..., \lambda_N)$ os autovalores da matriz (D^2u).

Com relação a $k - Hessiana$, podemos considerar o seguinte problema:

Dada uma coleção disjunta $\Gamma = (\Gamma_1, ..., \Gamma_m)$ de curvas suaves em $I\!R^3$, existe uma superfície de curvatura Gaussiana constante $K > 0$ com bordo Γ ? Mais geralmente, podemos considerar $\Gamma \subset I\!R^{N+1}$, com cada Γ_i sendo uma subavariedade fechada de condimensão 2, e procuramos uma hipersuperfície M de curvatura Gauss-Kronecker $K > 0$, constante. No caso do Problema (1), consideraremos

$$\Gamma = S_R^{N-1}(0)$$

como sendo a fronteira da bola $B_R(0) \subset I\!R^N$. Veja [16] e [33] para os detalhes.

Quando $N = 3$, a existência, não existência e multiplicidade de soluções positivas para o problema (2) foi conjecturado por Brézis-Nirenberg em [14], como

(a) Se $q = 3$, existe um $\lambda_o > 0$ tal que

  (i) para $\lambda > \lambda_o$ existe uma *única* solução de (2),

  (ii) para $\lambda \leq \lambda_o$ não existe solução de (2).

(b) Se $1 < q < 3$, existe um $\lambda_o > 0$ tal que

  (i) para $\lambda > \lambda_o$ existem *duas* soluções de (2),

  (ii) para $\lambda = \lambda_o$ existe uma *única* solução de (2),

  (iii) para $\lambda < \lambda_o$ não existe solução de (2).

Aqui, apresentaremos uma solução variacional para esta conjectura, e também estenderemos alguns destes resultados para $N \geq 4$.

A desigualdade (3), é conhecida como "*Desigualdade de Sobolev com resto*". Foi estudada por Brézis-Nirenberg [14] e Brézis-Lieb [12]. Relacionado a esta desigualdade, responderemos a seguinte pergunta feita em [12]; qual o valor ótimo da constante $\lambda_q(\Omega)$?

Em todos estes problemas a maior dificuldade matemática está relacionada com a não compacidade das imersões correspondentes $X_R \hookrightarrow L_\gamma^{q(\gamma)}$ e $H_o^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}$. Contornar esta dificuldade muitas vezes não é uma tarefa fácil.

No ínicio de cada parte, daremos uma apresentação melhor de cada problema, comentando o que já foi feito, e qual é a nossa contribuição.

Parte I

Problemas Elípticos com Não Linearidades Críticas e do Tipo Côncavo-Convexa

Capítulo 1

Introdução

Seja Ω um domínio limitado no $I\!R^N$ com $N \geq 3$. Considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{2^*-1} + f(x,u) & \text{em } \Omega, \\ u > 0 \text{ em } \Omega, \quad u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $2^* - 1 = (N+2)/(N-2)$, $f(x,0) = 0$ e $f(x,u)$ é uma perturbação de ordem inferior a potência u^{2^*-1}, no infinito, no sentido de que $\lim_{u\longrightarrow+\infty} f(x,u)/u^{2^*-1} = 0$, por exemplo $f(x,u) = \lambda u$, onde λ é um número real e, 2^* é conhecido na literatura como sendo o expoente crítico de Sobolev. Isso decorre do fato de que as imersão contínua $H_0^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$, para $p \leq 2^*$ e Ω limitado, não ser compacta para $p = 2^*$. Foi provado por Brezis e Nirenberg [14] que se $N \geq 4$ o problema (1.1) possui solução e quando $N = 3$, o problema é delicado e seus resultados podem ser divididos em três casos:
1) se $f(x,u) = \lambda u$, então existe um número $\lambda^* \geq 0$ tal que o problema (1.1) possui solução para todo $\lambda \in (\lambda^*, \lambda_1(\Omega))$, onde $\lambda_1(\Omega)$ é denota o primeiro autovalor do operador $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$. Se Ω for estrelado com relação a algum ponto então $\lambda^* > 0$. Existem domínios para os quais existe solução mesmo para $\lambda^* = 0$(veja [5], [54] e [55]). Se $\Omega = B_R(0)$, $R > 0$, uma bola de centro na origem e raio R no $I\!R^N$, então Brezis e Nirenberg [14] provaram que $\lambda^* = \lambda_1(\Omega)/4$.
2) Eles provaram também que, se $\lim_{u\longrightarrow+\infty} f(x,u)/u^3 = +\infty$(por exemplo: $f(x,u) = \mu u^q$, $\mu > 0$ e $3 < q < 5$) então o problema (1.1) possui solução.
3) Se $f(x,u) = a(x)u + \mu g(x,u)$, com $g(x,u) \geq 0$ mas não identicamente nula, que existe um número real $\mu_o \geq 0$ tal que o problema (1.1) possui solução para todo $\mu \geq \mu_o$, desde que $g(x,u) = o(u)$ quando $u \longrightarrow 0$.

Esses resultados tem sido parcialmente estendidos para o operador $p-$Laplaciano, com $1 < p < N$, mas quando $f(x,u)$ é um polinômio. Nesse caso, o problema (1.1) torna-se

$$\begin{cases} -\Delta_p u = u^{p^*-1} + f(x,u) & \text{em } \Omega, \\ u > 0 \text{ em } \Omega, \quad u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

onde $p^* = pN/(N-p)$ é o correspondente expoente crítico nas imersões contínuas de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, para $q \leq p^*$. Para resultados de existência e não existência veja [27], [34], [24], [25] no caso de domínios Ω gerais. No caso $\Omega = B_R(0)$, $R > 0$, veja Knaap e Peletier [39] e [38].

Resultados para uma classe de operadores $p-$Laplaciano com peso foram obtidos por Egnell [23].

Nosso objetivo aqui é estudar a existência de soluções radias e positivas para uma classe de problemas, que engloba entre outros, os problemas (1.1) e (1.2). O interesse é na seguinte classe:

$$\begin{cases} -(r^\alpha |u'|^\beta u')' = r^\gamma u^{q(\gamma)-1} + f(r,u), & r \in (0,R) \\ u(r) > 0, \forall\, r \in (0,R), & u(R) = 0 = u'(0) \end{cases} \tag{1.3}$$

onde $0 < R < \infty$, e $f : (0,R) \times [0,+\infty) \longrightarrow I\!R$ é uma função de Carathéodory; isto é, f é mensurável em r e contínua em u, $\gamma \geq \alpha > \beta + 1 > 0$ e $q(\gamma) = (\gamma+1)(\beta+2)/(\alpha - \beta - 1)$ são números reais. Além disso, vamos supor que $f(r,u)$ seja uma perturbação de ordem inferior a $u^{q(\gamma)-1}$, no infinito, no sentido de que $\lim_{u \longrightarrow +\infty} f(r,u)/u^{q(\gamma)-1} = 0$. Por exemplo, $f(r,u) = \lambda r^{N-1} u^{\beta+1} (q(\gamma) > \beta + 1)$, onde λ é um número real. O expoente $q(\gamma)$ será chamado o expoente crítico para as imersões que apresentaremos na Seção 2. Considerando $f(r,u)$ ser um polinômio e procurando soluções radias para o problema (1.2), é o mesmo como em [23]. Nessa mesma direção Clément, De Figueiredo e Mitidieri [18] estudaram (1.3) e obtiveram resultados de existência e não existência para esse problema quando $f(r,u) = \lambda r^l u^{\beta+1}$, $\alpha \leq l \leq \gamma$ e λ um número real. Considerando que f seja um polinômio, ou seja, da forma $f(r,u) = \lambda r^l u^\delta$, $\beta + 1 \leq \delta < q(\gamma)$, em [22] também foram obtidos resultados de existência e não existência.

Sejam $N \geq 1$ um número natural e $B_R(0) = \{x \in I\!R^N \mid \|x\| < R\}$. Então os seguintes operadores quando considerados agindo sobre funções definidas em $B_R(0)$, estão incluídos na classe de operadores que vamos estudar:

(i) **Laplaciano:** $\alpha = N-1$, $\beta = 0$,

(ii) **p-Laplaciano**$(1 < p < N)$**:** $\alpha = N-1$, $\beta = p-2$,

(iii) **k-Hessiana**$(1 \leq k < N/2)$**:** $\alpha = N-k$, $\beta = k-1$.

Quando $N \geq 3$, os respectivos expoentes críticos são:

$2N/(N-2)$ e $\gamma = N-1$; $pN/(N-p)$ e $\gamma = N-1$; $N(k+1)/(N-2k)$ e $\gamma = N-1$.

Para esse último, veja [69].

Em todo este trabalho, estamos interessados somente quando

$$\alpha - \beta - 1 > 0.$$

Esta restrição é conhecida como o caso Sobolev. Por exemplo, ao estudarmos soluções radiais do problema (1.3) significa que estamos pedindo que a dimensão do espaço seja

$N \geq 3$. Note que a restrição acima é mais geral do que pedir $N \geq 3$. Aqui, embora obteremos resultados relacionados com essa restrição, estamos interessados em soluções radiais para problemas que incluem os operadores Laplaciano, $p-$Laplaciano e $k-$Hessiana. O caso $\alpha - \beta - 1 = 0$ é conhecido como o caso Pokhožaev-Trundiger e corresponde ao caso $(N = 2)$. Como referências veja [45], [49], [50], [56], [68].

Um outro tipo de problemas que abordaremos aqui está relacionado com hipóteses de concavidade e convexidade sobre a função f. Mais precisamente, com o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{2^*-2}u + \lambda|u|^{\kappa-2}u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.4}$$

onde $\Omega \subset I\!\!R^N$ é um domínio limitado, λ um número real e $1 < \kappa < 2$. Curiosamente, esse problema foi primeiramente estudado para o operador $p-$Laplaciano, ou seja

$$\begin{cases} -\Delta_p u = |u|^{p^*-2}u + \Lambda|u|^{\kappa-2}u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.5}$$

por García e Peral em [28]. Eles provaram que no caso $1 < \kappa < p < N$ existe $\Lambda_o(\Omega)$ tal que, para $0 < \Lambda < \Lambda_o(\Omega)$, existe uma sequência ilimitada de soluções do problema (1.5), sendo que pelo menos uma delas é positiva.

Em seguida Ambrosetti, Brezis e Cerami [3] estudaram o problema (1.4) e mostraram que existe uma sequência ilimitada de soluções sendo que pelo menos duas são positivas, desde que $0 < \lambda < \lambda_o$ para algum $\lambda_o > 0$.

Depois, García e Peral em [29], estudaram novamente o problema (1.5) e provaram que existe Λ_o tal que para $0 < \Lambda < \Lambda_o$, o problema (1.5) possui uma segunda solução positiva desde que $2N/(N+2) < p < 3$ e $1 < \kappa < p$, ou $p \geq 3$ e $p > \kappa > p^* - 2/(p-1)$. Observe que esse resultado não cobre algums casos, por exemplo, se tomarmos $p = 3$ e $N = 4$, não temos uma resposta. Eles também estudaram esse mesmo tipo de problema para o operador Biharmônico em [7].

Estamos interessados também em estudar esse tipo de problema, para a classe

$$\begin{cases} -(r^\alpha|u'|^\beta u')' = r^\gamma u^{q(\gamma)-1} + f_\lambda(r,u), & \text{em } (0,R) \\ u(r) > 0, \forall\, r \in (0,R), & u(R) = 0 = u'(0). \end{cases} \tag{1.6}$$

Um exemplo que ilustra bem a situação é: $f_\lambda(r,u) = \lambda r^\sigma u^{\kappa-1}$, com $\alpha \leq \sigma \leq \gamma$ e $1 < \kappa < \beta + 2$.

Algumas das hipóteses que iremos fazer em todo esse trabalho são as seguintes:

$(H1)$ $\beta > -1$ e $\alpha - \beta - 1 > 0$,

$(H2)$ $\gamma \geq l > \alpha - 1$,

$(H3)$ $\gamma + 1 > \alpha - \beta - 1$, $l + 1 \geq \alpha - \beta - 1$,

$(H4)$ $l \geq \alpha$,

$(H5)$ $1 < \kappa < \beta + 2$, $\kappa < q(\sigma) = \dfrac{(\sigma+1)(\beta+2)}{\alpha - \beta - 1}$ e $\alpha \leq \sigma \leq \gamma$,

$(H6)$ $\sigma > \alpha - 1$.

A parte I do trabalho está organizada do seguinte modo: no Capítulo 2 relembraremos algums resultados de imersão para o caso Sobolev, bem como algums Teoremas de regularidade e a desigualdade de Harnack que necessitamos para os operadores $(r^\alpha |u'|^{\beta+2} u')'$. Relembraremos também a noção de solução fraca e solução integral para esses operadores e que cada solução é clássica se valer $(H2)$ e $(H6)$. Como consequência dos Teoremas de imersão, definiremos o expoente crítico associado, por

$$q(\gamma) = \frac{(\gamma+1)(\beta+2)}{\alpha - \beta - 1}.$$

No Capítulo 3 e seção 3.2, obteremos os mesmos resultados obtidos por Brezis e Nirenberg [14], mas para os problemas (1.3), desde que a função $f : [0, R] \times I\!R \longrightarrow I\!R$ satisfaça:

(f_1) f é mensurável em r, contínua em u e $f(r,u)$ é positiva em algum subintervalo $I \subset I\!R$, isto é, $f(r,u) > 0$ $\forall u \in I$ e todo $r \in (0, R]$,

(f_2) Para cada número real $M > 0$,

$$\sup_{\substack{r \in (0,R) \\ 0 \leq u \leq M}} \{|f(r,u)|\} < \infty \;;$$

(f_3) $f(r, 0) = 0$, e que

$$\lim_{u \longrightarrow \infty} \frac{f(r,u)}{u^{q(\gamma)-1}} = 0 \;.$$

Suponha que $f(r,u)$ pode ser escrita como

$$f(r,u) = r^l a(r) |u|^\beta u + g(r,u) \tag{1.7}$$

com

$$a(r) \in L^\infty(0, R), \tag{1.8}$$

$$g(r,u) = o(r^l u^{\beta+1}),\ u \longrightarrow 0^+ \text{ uniformemente em } r \;, \tag{1.9}$$

$$g(r,u) = o(r^\gamma u^{q(\gamma)-1}),\ u \longrightarrow +\infty \text{ uniformemente em } r \;. \tag{1.10}$$

Além disso, admitiremos que o operador $(L-a)(u) = ((-r^\alpha |u'|^\beta u')' - a(r)|u|^\beta u)$, possui o primeiro autovalor positivo, isto é,

$$\int_0^R (r^\alpha |\phi'|^{\beta+2} - r^l a(r) |\phi|^{\beta+2}) \geq \theta \int_0^R r^\alpha |\phi|^{\beta+2} \;, \forall \phi \in X_R \;, \theta > 0, \tag{1.11}$$

ou equivalentemente,

$$\int_0^R (r^\alpha|\phi'|^{\beta+2} - r^l a(r)|\phi|^{\beta+2}) \geq \theta' \int_0^R r^\alpha|\phi'|^{\beta+2} \ , \forall\phi \in X_R \ , \theta' > 0. \tag{1.12}$$

Para o funcional

$$\Psi(u) = \frac{1}{\beta+2}\int_0^R r^\alpha|u'|^{\beta+2}\,dr - \frac{1}{q(\gamma)}\int_0^R r^\gamma|u|^{q(\gamma)}\,dr - \int_0^R F(r,u)\,dr,$$

onde $F(r,u) = \displaystyle\int_0^u f(r,t)dt$, demonstraremos:

Teorema 3.2 *Suponha (1.7)-(1.10) e (1.11) ou (1.12), $(H1)-(H4)$, e além disso, que existe algum $v_0 \in X_R$, $v_0 \geq 0$ sobre $(0,R)$ $v_0 \not\equiv 0$, tal que*

$$\sup_{t\geq 0} \Psi(tv_0) < (\frac{1}{\beta+2} - \frac{1}{q(\gamma)})S^{\frac{\gamma+1}{\beta+\gamma+2-\alpha}} \ . \tag{1.13}$$

Então, o problema (1.3) possui solução.

Um passo crucial para demonstrarmos esse Teorema, é a verificação de (1.13), para isso, designaremos por $m = \frac{\gamma+\beta+2-\alpha}{\alpha-\beta-1}$, $n = \frac{\gamma+\beta+2-\alpha}{\beta+1}$ e $(\beta+2)s = \frac{n}{m}$, então demonstraremos o Teorema:

Teorema 3.8 *Suponha que $f(r,u)$ satisfaz $(f1)-(f3)$, (1.7)-(1.12), que vale $(H1)-(H4)$, e além disso, que exista alguma função $f(u)$ tal que*

$$f(r,u) \geq r^l f(u) \geq 0 \ q.t.p. \ , \quad r \in \omega \subset (0,R), \ \forall u \geq 0$$

(ω é um aberto) e a primitiva $F(u) = \displaystyle\int_0^u f(t)\,dt$ satisfaz

$$\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon^{l+1-s(\beta+2)} \int_0^{\epsilon^{-1}} F[(\frac{\epsilon^{sm-n}}{1+t^n})^{1/m}]t^l\,dt = +\infty.$$

Então a condição (1.13) vale.

Os casos em que os expoentes satisfazem a inequação

$$l - \frac{n}{m}(\beta+2) + 1 \leq 0,$$

obteremos resultados completos, no sentido de que existe solução para o problema (1.3), qualquer que seja f satisfazendo as hipóteses acima. Essa inequação corresponde às dimensões $N \geq 4$.

A exceção fica por conta do caso

$$l-\frac{n}{m}(\beta+2)+1>0.$$

Esta desigualdade, corresponde a de dimensão $N=3$, para o operador Laplaciano. Os resultados nesse caso são:
com as hipóteses

$$f(r,u)\geq 0\ ,\ \text{q.t.p.}\ ,\ r\in\omega\subset(0,R)\ ,\ \forall u\geq 0 \tag{1.14}$$

$$\lim_{u\longrightarrow+\infty}\frac{f(r,u)}{u^{\beta+3}}=+\infty\ ,\ \text{uniformemente}\ ,\ r\in\omega\ , \tag{1.15}$$

é:

Corolário 3.15 *Suponha que* $(f1)-(f3)$, *(1.7)-(1.12), (1.14), (1.15) e* $(H1)-(H4)$ *valem. Além disso, que*

$$l(\beta+1)-(\alpha-\beta-1)(\beta+2)\leq 0,$$

$$(\beta+2)(\beta+1)-(\alpha-\beta-1)(\gamma+\beta+2-\alpha)\leq 0.$$

Então o problema (1.3) possui solução.
Adicionando as hipóteses:

$$\liminf_{u\longrightarrow+\infty}\frac{f(r,u)}{u^{\beta+1}}\geq\mu\ ,\ \text{uniformemente para } r\in\omega. \tag{1.16}$$

onde $\beta+1\leq\tau\leq\beta+3$.

$$\begin{cases} f(r,u)=a(r)r^l|u|^{\beta+1}+g(r,u),\ \text{com}\ \ g(r,u)\geq 0\ \forall u\geq 0, \\ \displaystyle\limsup_{u\longrightarrow 0}\frac{g(r,u)}{u^{\beta+1}}=\mu. \end{cases}, \tag{1.17}$$

obtemos
Corolário 3.16 *Suponha que* $(f1)-(f3)$, *(1.14) e (1.16) ou (1.17) e* $(H1)-(H4)$ *valem. Então, existe* $\mu_o>0$, *tal que para todo* $\mu>\mu_o$ *o problema (1.3) possui solução.*

Como exemplo de funções, temos: $f(|x|,u)=a(|x|)u+g(|x|,u)$, com $g(|x|,u)\geq 0$ e $g(|x|,u)$ comporta-se como (μu) no infinito. Nesse caso provaremos que existe $\mu_o>0$, tal que para todo $\mu>\mu_o$ o problema (1.4) possui solução.

Alguns resultados de não existência poderão ser obtidos para essa classe de operadores. Veja Observação 3.17.

Usaremos também uma versão do Teorema do Passo da Montanha sem a condição (PS), o qual enunciamos no Capítulo 3.

No Capítulo 4 demonstraremos que o problema (1.6) possui uma sequência ilimitada de soluções, sendo que pelo menos uma delas é positiva. Usaremos a teoria de gênero para esse propósito. Esse resultado está contido no Teorema 4.8

Nas Seções 4.1 e 4.2, usando uma combinação dos resultados de Brezis - Nirenberg [14], o Teorema do Passo da Montanha e algumas estimativas, obteremos uma segunda solução positiva para o problema (1.6).

Ainda na Seção 4.2, estendemos os resultados de García-Peral em [29] para o operador p-Laplaciano, na forma radial, como no problema (1.6). O nosso resultado engloba o resultado obtido em [29]. De fato, mostraremos que dados p e N com ($p < N$), existe um intervalo da forma $(a, b) \subset (1, p)$ com $q \in (a, b)$, podendo ser $a = 1$ e $b = p$(veja pag.46). Esse resultado, está contido na Observação 4.12. Ele só foi possível devido a uma estimativa que consta no Apêndice A(veja Observação A.1). Na Subseção 4.2.1 obtivemos alguns novos resultados de não existência de soluções para essa classe de operadores. Por exemplo, o Corolário:

Corolário 4.13 *Suponha que sejam válidas as hipóteses (3.4) e (3.7), ou (3.8),* $(H1)-(H5)$ *e* $f(r, u)$ *satisfaz* $(f1), (f2), (f3)$, *(4.39) e (4.42). Então, se*

$$\sigma + 1 - \frac{n}{m}(\beta + 2) > 0,$$

existe $\mu^* > 0$ *tal que para cada* $0 < \mu \leq \mu^*$, *as soluções do problema (4.1) verificam*

$$\max_{r\in[0,R]}\{u(r)\} \leq 1. \tag{1.18}$$

Assegura a não existência de soluções no caso crítico. Par ser um pouco mais preciso, este Corolário nos diz que, se existir solução u do problema (1.6), então $\max_{r\in[0,R]}\{u(r)\} \leq 1$. Veja Observação 4.4

Na Seção 4.4, estudamos algumas questões relacionadas com o valor máximo que podemos tomar para a constante Λ_o, como mencionamos acima nos problema (1.4) e (1.5). Definimos

$$h(t) = C_1 t^{\beta+2} - \lambda C_2 t^{\kappa} - C_3 t^{q(\gamma)},$$

e

$$\Lambda \equiv \sup\left\{\lambda > 0 \,\middle|\, \sup_{t\in\mathbb{R}} h(t) > 0, \quad \text{e} \quad 0 > \inf_{u\in X_R} \Phi(u) > -\left(\frac{1}{\beta+2} - \frac{1}{q(\gamma)}\right) S^{(\gamma+1)/(\gamma+\beta-\alpha+2)}\right\}$$

Provamos o seguinte resultado:

Teorema 4.15

(*i*) *Temos que* $0 < \Lambda < \infty$, *ou seja, é finita.*

(*ii*) *Existe uma solução fraca para* $\lambda = \Lambda$.

Nos Apêndices A e B, provamos algumas estimativas e desigualdades que usamos neste trabalho.

Neste trabalho haverá poucas restrições nos expoentes para uma grande classe de operadores que podem ser colocado na forma aqui estudada.

Capítulo 2

Imersões, Regularidade e Algumas Definições

Começaremos construindo os espaços que iremos trabalhar. Para $0 < R < \infty$, $\alpha > 0$ e $\beta > -1$, seja X_R o conjunto das funções absolutamente contínuas $u : (0, R] \longrightarrow I\!R$ tais que $u(R) = 0$ e

$$\int_0^R r^\alpha |u'(r)|^{\beta+2}\, dr < \infty.$$

Agora, vamos definir uma norma sobre o espaço X_R de modo que ele será um espaço de Banach. Designaremos por:

$$||u||_{X_R}^{\beta+2} = \int_0^R r^\alpha |u'(r)|^{\beta+2}\, dr.$$

Seja $q \geq 1$ e $\gamma > 0$. Seja R tal que $0 < R < \infty$. Denotaremos por $L_\gamma^q = L_\gamma^q(0, R)$ o espaço de Banach das funções Lebesgue mensuráveis $u : (0, R] \longrightarrow I\!R$ tais que

$$||u||_{L_\gamma^q}^q = \int_0^R r^\gamma |u(r)|^q\, dr < \infty.$$

Associado com cada espaço X_R e cada peso γ definiremos o expoente crítico

$$q(\gamma) = \frac{(\gamma + 1)(\beta + 2)}{\alpha - \beta - 1}, \tag{2.1}$$

segundo a hipótese que $\alpha - \beta - 1 > 0$. Estas hipóteses estão em conformidade com o seguinte resultado que aparece em Kufner-Opic [40].

Proposição 2.1 *Seja $u : (0, R] \longrightarrow I\!R$ uma função absolutamente contínua. Se $u(R) = 0$ e*

(i) para $1 \leq \beta + 2 \leq q < \infty$ temos:

(1) $\alpha > \beta + 1$, $\gamma \geq \alpha \dfrac{q}{\beta+2} - \dfrac{q(\beta+1)}{\beta+2} - 1$, *ou*

(2) $\alpha \leq \beta + 1$, $\gamma > -1$,

(*ii*) *para* $1 \leq q < \beta + 2 < \infty$ *temos:*

(1) $\alpha > \beta + 1$, $\gamma > \alpha \dfrac{q}{\beta+2} - \dfrac{q(\beta+1)}{\beta+2} - 1$, *ou*

(2) $\alpha \leq \beta + 1$, $\gamma > -1$,

então

$$\left(\int_0^R r^\gamma |u(r)|^q \, dr\right)^{1/q} \leq c \left(\int_0^R r^\alpha |u'(r)|^{\beta+2} \, dr\right)^{1/(\beta+2)}.$$

Observação 2.2 *Os resultados acima mostram que a imersão $X_R \subset L^q_\gamma$ é contínua se $q \leq q(\gamma)$ e $\alpha - \beta - 1 > 0$. Usando um argumento do tipo Arzelá-Ascoli, temos que as imersões são compactas se $q < q^*$.*

Definiremos por

$$S = S(\beta, \gamma, R) = \inf\{\|u\|_{X_R}^{\beta+2} : u \in X_R, \|u\|_{L^{q(\gamma)}_\gamma} = 1\}.$$

a constante ótima das imersões acima mencionadas. Essa constante possui algumas propriedades as quais já são bem conhecidas, para isso, veja [18]. Por exemplo, a igualdade acima é verificada pelas funções

$$\tilde{u}_\epsilon(r) = \hat{c}\epsilon^s(\epsilon^n + r^n)^{-1/m}, \quad s = \tfrac{\alpha-\beta-1}{(\beta+1)(\beta+2)}, \tag{2.2}$$

onde

$$\begin{cases} \hat{c} = [(\frac{\alpha-\beta-1}{\beta+1})^{\beta+1}(\gamma+1)]^{(\alpha-\beta-1)/((\beta+2)(\beta+\gamma+2-\alpha))}, \\ m = \frac{\gamma+\beta+2-\alpha}{\alpha-\beta-1}, \quad n = \frac{\gamma+\beta+2-\alpha}{\beta+1}. \end{cases} \tag{2.3}$$

Uma função $u \in X_R$ é uma solução fraca de (1.3), se e somente se

$$\int_0^R r^\alpha |u'|^\beta u' v' \, dr = \int_0^R \{r^\gamma u^{q(\gamma)-1} v + f(r, u) v\} \, dr \quad \forall v \in X_R.$$

Uma função $u \in X_R$ é uma solução integral de (1.3) se

$$-r^\alpha |u'(r)|^\beta u'(r) = \int_0^r \{s^\gamma u^{q(\gamma)-1}(s) + f(s, u(s))\} \, ds \quad \text{para} \quad r \in [0, R].$$

Para assegurar a desigualdade estrita em (1.3), isto é, $u > 0$, usaremos os seguintes Lemas que foram provados em [18] para a seguinte equação mais geral:

$$\begin{cases} -(r^\alpha |u'(r)|^\beta u'(r) = r^\theta \tilde{f}(r, u) & \text{em} \quad (0, R), \\ u'(0) = u(R) = 0, \end{cases} \tag{2.4}$$

onde $\tilde{f} : [0, +\infty) \times I\!R \longrightarrow I\!R$ é contínua e

$$|\tilde{f}(r, u)| \leq c|u|^{q-1} + c \quad \text{para qualquer} \quad u \in I\!R, \quad 0 \leq r \leq R, \tag{2.5}$$

com q satisfazendo a condição

$$\beta + 2 \leq q \leq q(\theta) = \frac{(\theta + 1)(\beta + 2)}{\alpha - \beta - 1}, \tag{2.6}$$

e $c > 0$.

Lema 2.3 *Suponha que as condições (2.5) e (2.6) sejam válidas. Uma função $u \in X_R$ é uma solução fraca de (2.4), se e somente se ela é uma solução integral.*

Seja $\xi(t) = |t|^{1/(\beta+1)-1}t,\ t \in I\!R$. Essa função é a inversa da função $t \longmapsto |t|^{\beta}t$. Então, pela definição de solução integral obtemos

$$-u'(r) = \xi(\tilde{g}(r))$$

onde

$$\tilde{g}(r) = \frac{1}{r^{\alpha}} \int_0^r \{s^{\theta} \tilde{f}(s, u(s))\, ds.$$

Obviamente, $\tilde{g}$ é contínua e diferenciável em $(0, R]$.

Lema 2.4 *Se $\theta \geq \alpha - 1$, então a função $\tilde{g}$ é diferenciável em $r = 0$. Além disso, se $\theta > \alpha - 1$ então $\tilde{g}(0) = 0$, e se $\theta = \alpha - 1$ então $\tilde{g}(0) = \tilde{f}(0, u(0))/\alpha$. Consequentemente, se $\theta > \alpha - 1$ então u' é contínua em [0,R] e $u'(0) = 0$.*

Esses Lemas nos garantem regularidade da solução fraca em geral até $C^{1,\mu}[0, R]$. O seguinte Lema nos dá um pouco mais, desde que a derivada tenha sinal definido.

Lema 2.5 *Seja u uma solução fraca do problema (2.4). Suponhamos que a função $u'(r) \leq 0$(ou ≥ 0), para cada $r \in [0, R]$. Então $u \in C^2(0, R] \bigcap C^{1,\mu}[0, R]$.*

Prova: Pela definição de solução fraca, temos

$$\int_0^R r^{\alpha}|u'|^{\beta}u'\psi'\, dr = \int_0^R r^{\theta}\tilde{f}(r, u)\psi\, dr \quad \forall \psi \in C_o^{\infty}(0, R).$$

Pondo $w = r^{\alpha}|u'|^{\beta}u'$, temos pela definição de derivada fraca que

$$w' = r^{\theta}\tilde{f}(r, u) \text{ q.t.p em } (0, R].$$

Desde que $u \in C^{1,\mu}[0, R]$ o resultado segue.

∎

Observe que esses Lemas não asseguram a positividade da solução u dos problemas (1.3), ou (1.6). Para isso, usaremos uma desigualdade do tipo *Harnack*, provada primeiramente por Serrin em [63] e, posteriormente Trundiger em [68] generalizou esse resultado. Assim, obteremos que $u > 0$ sobre $[0, R]$. Comentaremos um pouco mais a versão apresentada por Trundiger. Seja u uma solução fraca de

$$(a(r, u, u'))' + b(r, u, u') = 0, \tag{2.7}$$

isto é, se u verifica

$$\int_0^R \{a(r, u, u')v' + b(r, u, u')v\}\, dr = 0, \ \forall v \in X_R, \tag{2.8}$$

onde os operadores a e b satisfazem o seguinte:
Para todo $M < \infty$ e para todo $(r, u, w) \in (0, R) \times (-M, M) \times I\!R$ as condições

$$\begin{aligned}
&|a(r, u, w)| \leq a_o|w|^{c-1} + |a_1(r)u|^{c-1} + (a_3(r))^{c-1},\\
&w \cdot a(r, u, w) \geq |w|^c - |a_2(r)u|^c - (a_4(r))^c,\\
&|b(r, u, w)| \leq b_o|w|^c + b_1(r)|w|^{c-1} + (b_2(r))^c|u|^{c-1} + (b_3(r))^c,
\end{aligned}$$

valem, onde $c > 1$, a_o, b_o são constantes, $a_i(r)$, $b_i(r)$ são funções não-negativa e mensuráveis. Defina para $\rho > 0$, o intervalo

$$I(\rho) = (0, \rho].$$

Então, Trundinger em [68] provou o seguinte:

Lema 2.6 *Seja $u(r)$ uma solução fraca de (2.7) em um intervalo $I = I(3\rho) \subset (0, R)$ com $0 \leq u < M$. Então*

$$\max_{I(\rho)} u(r) \leq C \min_{I(\rho)} u(r),$$

onde $C = C(c, a_o, b_o, M, \rho)$.

Capítulo 3

Problemas Críticos

Este capítulo será dedicado a provar a existência de soluções para o problema

$$\begin{cases} -(r^{\alpha}|u'|^{\beta}u')' = r^{\gamma}u^{q(\gamma)-1} + f(r,u), & r \in (0,R) \\ u(r) > 0, \forall\, r \in (0,R), & u(R) = 0 = u'(0) \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $0 < R < \infty$, e $f : (0,R) \times [0,+\infty) \longrightarrow I\!R$.

Soluções do problema (3.1) correspondem a pontos críticos do funcional

$$\Psi(u) = \int_0^R \{\frac{1}{\beta+2} r^{\alpha}|u'|^{\beta+2} - \frac{1}{q(\gamma)} r^{\gamma}|u|^{q(\gamma)} - F(r,u)\}\ , u \in X_R\ , \tag{3.2}$$

onde $F(r,u) = \int_0^u f(r,t)dt$,para $r \in (0,R)$. Isto será feito do seguinte modo:

Iremos verificar que funcional associado ao problema (3.1) satisfaz a geometria do Teorema do Passo da Montanha sem a condição (PS), e admitindo uma certa estimativa sobre o funcional, mostraremos também que existe solução.

Na seção seguinte iremos verificar em que situações vale esta estimativa.

Comecemos então supondo que a função $f : [0,R] \times I\!R \longrightarrow I\!R$ satisfaça:

(f_1) f é mensurável em r, contínua em u, e $f(r,u)$ é positiva em algum subintervalo $I \subset I\!R$, isto é, $f(r,u) > 0$, $\forall u \in I$ e todo $r \in [0,R]$,

(f_2) Para cada número real $M > 0$,

$$\sup_{\substack{r\in(0,R)\\ 0\le u\le M}} \{|f(r,u)|\} < \infty\ ;$$

(f_3) $f(r,0) = 0$, e que

$$\lim_{u\longrightarrow\infty} \frac{f(r,u)}{u^{q(\gamma)-1}} = 0\ .$$

3.1 Uma ferramenta geral

Suponha que $f(r,u)$ pode ser escrita como

$$f(r,u) = r^l a(r)|u|^\beta u + g(r,u) \tag{3.3}$$

com

$$a(r) \in L^\infty(0,R), \tag{3.4}$$

$$g(r,u) = o(r^l u^{\beta+1}),\ u \longrightarrow 0^+ \text{ uniformemente em } r\ , \tag{3.5}$$

$$g(r,u) = o(r^\gamma u^{q(\gamma)-1}),\ u \longrightarrow +\infty \text{ uniformemente em } r\ . \tag{3.6}$$

Além disso, admitiremos que o operador $(L-a)(u) = (-r^\alpha|u'|^\beta u')' - a(r)|u|^\beta u$, possui o primeiro autovalor positivo, isto é,

$$\int_0^R (r^\alpha|\phi'|^{\beta+2} - r^l a(r)|\phi|^{\beta+2})\,dr \geq \theta \int_0^R r^\alpha|\phi|^{\beta+2}\,dr\ , \forall \phi \in X_R\ , \theta > 0. \tag{3.7}$$

ou equivalentemente,

$$\int_0^R (r^\alpha|\phi'|^{\beta+2} - r^l a(r)|\phi|^{\beta+2})\,dr \geq \theta' \int_0^R r^\alpha|\phi'|^{\beta+2}\,dr\ , \forall \phi \in X_R\ , \theta' > 0. \tag{3.8}$$

A conhecida condição $(PS)_c$, diz que:
Seja $\Phi \in C^1(X_R, \mathbb{R})$ um funcional e, $\{u_n\} \subset X_R$ uma sequência tal que

$$\Phi(u_n) \longrightarrow c \in \mathbb{R} \quad e, \quad \Phi'(u_n) \longrightarrow 0.$$

Então existe uma subsequência $\{u_{n_j}\} \subset \{u_n\}$, que converge fortemente em X_R. Veremos que a hipótese (3.8) nos dá a geometria do passo da montanha, aliás, como em [11], ou [14], usaremos a seguinte versão do Teorema do Passo da Montanha, mas sem a condição $(PS)_c$.

Teorema 3.1 *Seja Φ um funcional C^1 sobre um espaço de Banach E . Suponha que existe uma vizinhança U de 0 em E e uma constante ρ tal que $\Phi(u) \geq \rho$ para cada u no bordo de U,*

$$\Phi(0) < \rho \ e \ \Phi(v) < \rho \text{ para algum } v \notin U.$$

Pondo

$$c = \inf_{P \in \mathcal{P}} \max_{w \in P} \Phi(w) \geq \rho$$

onde $\mathcal{P}$ denota a classe de caminhos contínuos ligando 0. a v.
Então existe uma sequência (u_k) em E tal que

$$\Phi(u_k) \longrightarrow c \ e \ \Phi'(u_k) \longrightarrow 0 \text{ em } E.$$

Para a prova, veja [11], ou, proceda por argumento de contradição e, neste caso a prova segue-se igual a do Teorema do Passo da Montanha de Rabinowitz [60].

Definiremos

$$f(r,u)=0, \text{para } r\in(0,R),\ u\leq 0,$$

e sua primitiva

$$F(r,u)=\int_0^u f(r,t)dt\ , \text{para } r\in(0,R).$$

O principal resultado é:

Teorema 3.2 *Suponha (3.3)-(3.6) e (3.7) ou (3.8), $(H1)-(H4)$, e além disso, que existe algum $v_0\in X_R$, $v_0\geq 0$ sobre $(0,R)$ $v_0\not\equiv 0$, tal que*

$$\sup_{t\geq 0}\Psi(tv_0)<(\frac{1}{\beta+2}-\frac{1}{q(\gamma)})S^{\frac{\gamma+1}{\beta+\gamma+2-\alpha}}\ . \tag{3.9}$$

Então, o problema (3.1) possui solução.

Usando $(f1)-(f3)$, (3.3) e (3.6), podemos fixar uma constante $\mu\geq 0$, suficientemente grande de modo que

$$f(r,u)\leq \mu r^l|u|^\beta u+r^\gamma|u|^{q(\gamma)-2}u\ , \text{q.t.p. } r\in(0,R) \text{ e } \forall u\in X_R,\ u\geq 0. \tag{3.10}$$

Vamos definir

$$\Phi(u)=\int_0^R\{\frac{r^\alpha}{\beta+2}|u'|^{\beta+2}+\frac{r^l}{\beta+2}\mu|u|^{\beta+2}-\frac{r^\gamma}{q(\gamma)}(u_+)^{q(\gamma)}-F(r,u_+)-\frac{r^l}{\beta+2}\mu(u_+)^{\beta+2}\}, \tag{3.11}$$

$u\in X_R$. Claramente, $\Phi\in C^1(X_R;\mathbb{R})$.

Para demonstrarmos o Teorema 3.2, necessitamos primeiramente, verificarmos as hipóteses do Teorema 3.1. Isto será feito em duas afirmações.

Afirmação 3.3 *Existe uma vizinhança U de 0 em X_R e uma constante $\rho>0$, tal que $\Phi(u)\geq\rho$, para cada u no bordo de U.*

Prova: Por (3.5), temos que para cada $\epsilon>0$, existe um $\delta>0$ tal que

$$g(r,u)\leq\epsilon r^l u^{\beta+1}\ , \text{q.t.p. } r\in(0,R), \text{ e } \forall\ 0\leq u\leq\delta$$

assim, por (3.6) obtemos

$$g(r,u)\leq\epsilon r^l u^{\beta+1}+Cr^\gamma u^{q(\gamma)-1}\ , \text{q.t.p. } r\in(0,R), \text{ e } \forall\ u\geq 0$$

e alguma constante C(dependendo somente de ϵ). Portanto, temos

$$F(r,u)\leq\frac{r^l}{\beta+2}a(r)u^{\beta+2}+\frac{r^l}{\beta+2}\epsilon u^{\beta+2}+\frac{Cr^\gamma}{q(\gamma)}u^{q(\gamma)},$$

q.t.p., $r \in (0,R)$, $\forall u \geq 0$. Então, encontramos para toda $u \in X_R$

$$\begin{aligned}
\Phi(u) = & \int_0^R \{\frac{r^\alpha}{\beta+2}|u'|^{\beta+2} + \frac{r^l}{\beta+2}\mu|u|^{\beta+2} - \frac{r^\gamma}{q(\gamma)}(u_+)^{q(\gamma)} - F(r,u_+) - \frac{r^l}{\beta+2}\mu(u_+)^{\beta+2}\}, \\
\geq & \int_0^R \{\frac{r^\alpha}{\beta+2}|u'|^{\beta+2} + \frac{r^l}{\beta+2}\mu(u_-)^{\beta+2} - \frac{r^\gamma}{q(\gamma)}(u_+)^{q(\gamma)} - F(r,u_+)\}, \\
\geq & \int_0^R \{\frac{r^\alpha}{\beta+2}|u'|^{\beta+2} - \frac{r^\gamma}{q(\gamma)}(u_+)^{q(\gamma)} - F(r,u_+)\}, \\
\geq & \int_0^R \{\frac{r^\alpha}{\beta+2}|u'|^{\beta+2} - \frac{r^l}{\beta+2}a(r)(u_+)^{\beta+2} - \frac{r^l}{\beta+2}\epsilon(u_+)^{\beta+2} - \frac{1}{q(\gamma)}(Cr^\gamma + r^\gamma)(u_+)^{q(\gamma)}\}.
\end{aligned}$$

Usando (3.8) e o fato de que $\int_0^R \frac{r^\alpha}{\beta+2}|u'|^{\beta+2} = \frac{1}{\beta+2}\{\int_0^R r^\alpha|u'_+|^{\beta+2} + \int_0^R r^\alpha|u'_-|^{\beta+2}\}$; concluímos que($\epsilon$ pequeno)

$$\begin{aligned}
\Phi(u) \geq & \int_0^R \{\theta'\frac{r^\alpha}{\beta+2}|u'|^{\beta+2} - \frac{r^l}{\beta+2}\epsilon(u_+)^{\beta+2} - \frac{1}{q(\gamma)}(Cr^\gamma + r^\gamma)(u_+)^{q(\gamma)}\} \\
\geq & \int_0^R \{\theta'\frac{r^\alpha}{\beta+2}|u'|^{\beta+2} - \frac{r^{\beta+2}}{\beta+2}\epsilon C(R)|u'|^{\beta+2} - \frac{(Cr^\gamma + r^\gamma)}{q(\gamma)}|u|^{q(\gamma)}\} \\
\geq & C_0\|u\|_{X_R}^{\beta+2} - C_1\|u\|_{L^{q(\gamma)}}^{q(\gamma)} \geq C_0\|u\|_{X_R}^{\beta+2} - C_1\|u\|_{X_R}^{q(\gamma)}, \quad \forall u \in X_R.
\end{aligned}$$

Daí, existem $\rho > 0$ e U uma bola suficientemente pequena em X_R satisfazendo a condição da Afirmação 3.3.

■

Para esse mesmo raio $\rho > 0$, temos:

Afirmação 3.4 *$\Phi(0) < \rho$ e $\Phi(v) < \rho$, para algum $v \notin U$.*

Prova: Por $(f3)$, para qualquer $u \in X_R$, $u \geq 0$, $u \not\equiv 0$, temos

$$F(r,u_+) = o(r^\gamma {u_+}^{q(\gamma)}) = r^\gamma o({u_+}^{q(\gamma)}) \ , u \longrightarrow +\infty \ , \quad \text{uniformemente em } r \in (0,R);$$

isto é,

$$\Phi(u) = \int_0^R \{\frac{r^\alpha}{\beta+2}|u'|^{\beta+2} + \frac{r^l}{\beta+2}\mu|u|^{\beta+2} - \frac{r^\gamma}{q(\gamma)}(u_+)^{q(\gamma)} - \epsilon r^\gamma(u_+)^{q(\gamma)} - \frac{r^l}{\beta+2}\mu(u_+)^{\beta+2}\}$$

(quando $u \longrightarrow +\infty$) então,

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} \Phi(tu) = -\infty \ .$$

Assim, existe v satisfazendo $\Phi(v) < \rho$, tal que $v \notin U$.

■

Lema 3.5 *Sob as hipóteses do Teorema 3.2, toda sequência* $(u_k) \subset X_R$ *tal que* $\Phi(u_k) \longrightarrow c < (\frac{1}{\beta+2} - \frac{1}{q(\gamma)})S^{(\gamma+1)/(\gamma+\beta-2+\alpha)}$, $\Phi'(u_k) \longrightarrow 0$ *em* $(X_R)^*$ *é limitada.*

Prova: Sob as hipótese do Teorema 3.2, temos que existe um $v_0 \in X_R$, $v_0 \geq 0$ $v_0 \not\equiv 0$, tal que

$$\sup_{t\geq 0} \Psi(tv_0) < (\frac{1}{\beta+2} - \frac{1}{q(\gamma)})S^{\frac{\gamma+1}{\beta+\gamma+2-\alpha}} .$$

Observe que, se fixarmos $v = t_0v_0$, $t_0 > 0$ suficientmente grande, de modo que $v \notin U$ e $\Phi(v) \leq 0$. Segue-se de (3.9) e (3.11) que

$$\sup_{t\geq 0} \Phi(tv) < (\frac{1}{\beta+2} - \frac{1}{q(\gamma)})S^{\frac{\gamma+1}{\beta+\gamma-2+\alpha}} . \tag{3.12}$$

Defina

$$c = \inf_{P\in\mathcal{P}} \max_{w\in P} \Phi(w) \geq \rho \qquad \text{em} \quad X_R \tag{3.13}$$

onde $\mathcal{P}$ denota a classe dos caminhos contínuos ligando 0 a v, e portanto temos

$$c < (\frac{1}{\beta+2} - \frac{1}{q(\gamma)})S^{\frac{\gamma+1}{\beta+\gamma-2+\alpha}} . \tag{3.14}$$

Aplicando o Teorema do Passo da Montanha que nos referimos no início, obtemos uma sequência (u_k) em X_R, tal que $\Phi(u_k) \longrightarrow c$ e $\Phi'(u_k) \longrightarrow 0$ em $(X_R)^*$; isto é,

$$\begin{aligned} \Phi(u_k) = \quad & \int_0^R \{\frac{r^\alpha}{\beta+2}|u_k'|^{\beta+2} + \frac{r^l}{\beta+2}\mu|u_k|^{\beta+2} - \\ & -\frac{r^\gamma}{q(\gamma)}(u_{k,+})^{q(\gamma)} - F(r,u_{k,+}) - \frac{r^l}{\beta+2}\mu(u_{k,+})^{\beta+2}\} = c + o(1) \end{aligned} \tag{3.15}$$

e

$$(-r^\alpha|u_k'|^\beta u_k')' + \mu r^l|u_k|^\beta u_k - r^\gamma(u_{k,+})^{q(\gamma)-1} - f(r,u_{k,+}) - \mu r^l(u_{k,+})^{\beta+1} \quad = \zeta_k \tag{3.16}$$

com $\zeta_k \longrightarrow 0$ em $(X_R)^*$(dual de X_R).

Concluiremos que

$$||u_k||_{X_R} \leq C . \tag{3.17}$$

De fato, multiplicando (3.16) por u_k, obtemos

$$\int_0^R \{r^\alpha|u_k'|^{\beta+2} + \mu r^l|u_k|^{\beta+2} - r^\gamma(u_{k,+})^{q(\gamma)} - f(r,u_{k,+})u_{k,+} - \mu r^l(u_{k,+})^{\beta+2}\} \quad = \langle\zeta_k, u_k\rangle \tag{3.18}$$

Tomando (3.15)-$\frac{1}{(\beta+2)}$$\cdot$(3.18), temos

$$\begin{aligned} (\tfrac{1}{\beta+2} - \tfrac{1}{q(\gamma)}) \int_0^R r^\gamma(u_{k,+})^{q(\gamma)} - \int_0^R \{F(r,u_{k,+}) - \frac{1}{\beta+2}f(r,u_{k,+})u_{k,+}\} \\ = c + o(1) - \tfrac{1}{\beta+2}\langle\zeta_k, u_k\rangle \end{aligned}$$

ou,

$$\begin{aligned}(\tfrac{1}{\beta+2}-\tfrac{1}{q(\gamma)})\int_0^R r^\gamma (u_{k,+})^{q(\gamma)} \leq\ & \int_0^R \{F(r,u_{k,+})-\frac{1}{\beta+2}f(r,u_{k,+})u_{k,+}\}+ \\ & +c+o(1)+\tfrac{1}{\beta+2}\|\zeta_k\|_{X_R'}\|u_k\|_{X_R}\end{aligned} \tag{3.19}$$

De (3.4) e de $(f_1)-(f_3)$, obtemos

$$|f(r,u)| \leq r^\gamma \epsilon u^{q(\gamma)-1}+Cr^l \quad, \text{q.t.p. } r\in(0,R)\ , \forall u\geq 0. \tag{3.20}$$

Assim,

$$|F(r,u)| \leq \tfrac{r^\gamma}{q(\gamma)}\epsilon u^{q(\gamma)}+Cr^l u \quad, \text{q.t.p. } r\in(0,R)\ , \forall u\geq 0. \tag{3.21}$$

De (3.19)-(3.21), deduzimos que

$$\begin{aligned}(\tfrac{1}{\beta+2}-\tfrac{1}{q(\gamma)})\int_0^R r^\gamma (u_{k,+})^{q(\gamma)} \leq\ & \int_0^R \{\frac{r^\gamma}{q(\gamma)}\epsilon(u_{k,+})^{q(\gamma)}+\frac{r^\gamma}{\beta+2}\epsilon(u_{k,+})^{q(\gamma)}\} \\ & +\int_0^R \{\frac{r^l}{\beta+2}C(u_{k,+})+Cr^l u_{k,+}\}+c+o(1)+C\|u_k\|_{X_R}\end{aligned}$$

então para $\epsilon>0$ pequeno e $s^{-1}+(\beta+2)^{-1}=1$ e $a=l(\beta+1)/(\beta+2)$.

$$\begin{aligned}\int_0^R r^\gamma(u_{k,+})^{q(\gamma)} \leq\ & C\int_0^R r^l(u_{k,+})\,dr+C+C\|u_k\|_{X_R} \\ \leq\ & C(\int_0^R r^{as})^{1/s}(\int_0^R r^l|u_k|^{\beta+2})^{1/(\beta+2)}+C+C\|u_k\|_{X_R} \\ \leq\ & C+C\|u_k\|_{X_R}.\end{aligned} \tag{3.22}$$

Combinando (3.15), (3.21) e (3.22), temos

$$\begin{aligned}\int_0^R \frac{r^\alpha}{\beta+2}|u_k'|^{\beta+2} =\ & \int_0^R \{-\frac{r^l}{\beta+2}(u_{k,+})^{\beta+2}+\frac{r^\gamma}{q(\gamma)}(u_{k,+})^{q(\gamma)}+F(r,u_{k,+})\}+c+o(1) \\ \leq\ & C+C\|u_k\|_{X_R}\leq C+C(\epsilon)+\epsilon\|u_k\|_{X_R}^{\beta+2}.\end{aligned}$$

Então, para $\epsilon>0$ pequeno

$$\|u_k\|_{X_R}\leq C+C(\epsilon)\ . \tag{3.23}$$

■

Lema 3.6 *A sequência obtida no Lema 3.5 converge para uma solução $u\geq 0$ do problema (3.1).*

Prova: Extraindo uma subsequência a qual denotaremos por u_k(do Lema anterior), de modo que

(i) $u_k \rightharpoonup u$ em X_R,

(ii) $u_k \longrightarrow u$ em $L_l^{\beta+2}(0,R)$,

(iii) $u_k \longrightarrow u$ q.t.p. sobre $(0,R)$,

(iv) $r^\gamma (u_{k,+})^{q(\gamma)-1} \rightharpoonup r^\gamma u^{q(\gamma)-1}$ em $(X_R)^*$,

(v) $f(r,u_{k,+}) \rightharpoonup f(r,u_+)$ em $(X_R)^*$,

(vi) $r^\alpha |u'|^{\beta-2}u' \rightharpoonup r^\alpha |u'|^{\beta-2}u'$ em $X_R{}^*$.

Veja [22], para demonstrações de $(i)-(iv)$. Para o caso (vi), veja [9]. Assim, demonstraremos apenas (v). Vamos admitir pelo momento que vale (v). Passando o limite em (3.16), obtemos

$$-(r^\alpha |u'|^\beta u')' + \mu r^l |u|^\beta u - r^\gamma (u_+)^{q(\gamma)-1} - f(r,u_+) - \mu r^l (u_+)^{\beta+1} = 0 \tag{3.24}$$

em $(X_R)^*$, donde u é solução fraca. De (3.10), temos

$$-(r^\alpha |u'|^\beta u')' + \mu r^l |u|^\beta u \geq 0 \; .$$

Desde que $f(r,0)=0$, então $f(r,u_+)u_- = 0$. Assim,

$$\Phi'(u)u_- = 0 \Longrightarrow -(r^\alpha |u'_-|^\beta u'_-)' + \mu r^l |u_-|^{\beta+1} = 0$$

Portanto,

$$u \geq 0 \text{ sobre } \quad (0,R).$$

■

Verificação de (v)**:** Considere o funcional $\phi_k(v) = \displaystyle\int_0^R f(r,u_{k,+})v$, onde $v \in X_R$. De (3.20), temos que

$$\begin{aligned}
\phi_k(v) &= \int_0^R f(r,u_{k,+})v \leq \int_0^R (\epsilon r^\gamma u_{k,+}^{q(\gamma-1)} + Cr^l)|v| \\
&\leq \epsilon (\int_0^R r^\gamma u_{k,+}^{q(\gamma)})^{(q(\gamma)-1)/q(\gamma)} (\int_0^R r^\gamma |v|^{q(\gamma)})^{1/q(\gamma)} + C(R) \int_0^R r^l |v|^{q(l)})^{1/q(l)} \\
&\leq (\epsilon C + C)\|v\|_{X_R}.
\end{aligned}$$

Assim, ϕ_k é um funcional limitado. Então,

$$\|\phi_k\|_{(X_R)^*} = \sup_{\substack{\|v\|_{X_R}=1 \\ v \in X_R}} |\phi_k(v)|.$$

Assim, tomando $\phi(v) = \int_0^R f(r, u_+)v$ e pondo

$$\tilde{\phi}_k(v) = \phi_k(v) - \phi(v) = \int_0^R (f(r, u_{k,+}) - f(r, u_+))v,$$

temos

$$||\tilde{\phi}_k||_{(X_R)^*} \leq \epsilon C(R) \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \epsilon \longrightarrow 0.$$

De fato, pois

$$|\int_0^R \{f(r, u_{k,+}) - f(r, u_+)\}v| \leq \int_0^R |f(r, u_{k,+}) - f(r, u)||v|. \tag{3.25}$$

Desde que $u_k \longrightarrow u$ q.t.p. sobre $(0, R)$, temos $u_{k,+} \longrightarrow u_+$ q.t.p. sobre $(0, R)$. Assim, dado $\epsilon > 0$ $\exists$ $k_0 \in I\!N$, tal que para cada $k \geq k_0$, $|f(r, u_{k,+}) - f(r, u)| < \epsilon$ uniformemente para $r \in (0, R)$. Tomando $v = r^\gamma w$ para $w \in X_R$ em (3.25), teremos

$$\int_0^R |f(r, u_{k,+}) - f(r, u_+)||v| \leq \epsilon \int_0^R r^\gamma |w| \leq \epsilon C(R)(\int_0^R r^\gamma |w|^{q(\gamma)})^{1/q(\gamma)}$$

■

Lema 3.7 *A solução obtida no Lema 3.6 é estritamente positiva, isto é, $u > 0$ sobre $(0, R)$.*

Prova: Primeiramente verificaremos que u é não trivial. Suponhamos por absurdo que u é identicamente nula. Concluiremos que

$$\int_0^R f(r, u_{k,+})u_{k,+} \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad k \to +\infty, \tag{3.26}$$

$$\int_0^R F(r, u_{k,+}) \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad k \to +\infty, \tag{3.27}$$

De fato, de (3.20) e (3.21) deduzimos que

$$|\int_0^R f(r, u_{k,+})u_{k,+}| \leq \epsilon \int_0^R r^\gamma (u_{k,+})^{q(\gamma)} + C \int_0^R r^l u_{k,+} \tag{3.28}$$

$$|\int_0^R F(r, u_{k,+})| \leq \frac{\epsilon}{q(\gamma)} \int_0^R r^\gamma (u_{k,+})^{q(\gamma)} + C \int_0^R r^l u_{k,+} \tag{3.29}$$

Desde que u_k é limitada em $L_\gamma^{q(\gamma)}(0, R)$ e $u_k \longrightarrow 0$ em $L_l^{\beta+2}(0, R)(\alpha \leq l \leq \gamma - j)(l + j = \gamma)$, obtemos (3.26) e (3.27). Extraindo outra subsequência, podemos supor de (3.15) que

$$\int_0^R r^\alpha |u_k'|^{\beta+2} \longrightarrow s_0 \quad \text{quando} \quad k \longrightarrow +\infty, \tag{3.30}$$

para alguma constante $s_0 \geq 0$. Passando o limite em (3.18), obtemos

$$s_0 - \lim_{k \longrightarrow +\infty} \int_0^R r^\gamma (u_{k,+})^{q(\gamma)} = 0 \tag{3.31}$$

Voltando a (3.15) temos

$$\frac{s_0}{\beta+2} - \frac{s_0}{q(\gamma)} = c\,. \tag{3.32}$$

Se $s_0 \equiv 0$, já obtemos uma contradição com (3.13). Em outras palavras, temos

$$\int_0^R r^\alpha |u_k'|^{\beta+2} \geq S(\int_0^R r^\gamma |u_k|^{q(\gamma)})^{(\beta+2)/q(\gamma)} \geq S(\int_0^R r^\alpha |u_{k,+}|^{q(\gamma)})^{(\beta+2)/q(\gamma)}.$$

Usando (3.30)-(3.32), encontramos

$$s_0 \geq S s_0^{(\beta+2)/q(\gamma)} \tag{3.33}$$

De (3.33) deduzimos que

$$s_0^{1-\frac{\beta+2}{q(\gamma)}} \geq S \ (s_0 > 0),$$

ou,

$$s_0 \geq S^{\frac{\gamma+1}{\gamma+\beta-\alpha+2}}$$

isto é,

$$c \geq (\frac{1}{\beta+2} - \frac{1}{q(\gamma)}) S^{(\gamma+1)/(\gamma+\beta-\alpha+2)}.$$

O que é uma contradição com (3.14). Assim, $u \not\equiv 0$. Pelos Lemas 2.3-2.6 mencionados inicialmente, segue-se que $u > 0$.

■

3.2 Verificação da Hipótese Crucial do Teorema (3.2)

Nesta seção, daremos uma ferramenta que nos ajudará a verificar (3.9), a qual está contida no seguinte Teorema.

Teorema 3.8 *Suponhamos que $f(r,u)$ satisfaz $(f1)-(f3)$, (3.3)-(3.8), que vale $(H1)-(H4)$, e além disso, que exista alguma função $f(u)$ tal que*

$$f(r,u) \geq r^l f(u) \geq 0 \ q.t.p. \quad r \in \omega \subset (0,R), \ \forall u \geq 0 \tag{3.34}$$

(ω é um aberto) e a primitiva $F(u) = \int_0^u f(t)\,dt$ satisfaz

$$\lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^{l+1-s(\beta+2)} \int_0^{\epsilon^{-1}} F[(\frac{\epsilon^{sm-n}}{1+t^n})^{1/m}] t^l \, dt = +\infty. \tag{3.35}$$

Então a condição (3.9) vale.

Dividiremos a prova desse Teorema em uma série de Lemas.

Lema 3.9 *Existe uma família de funções* $(v_\epsilon)_{\epsilon>0} \subset X_R$*, tais que*

$$\sup_{t\geq 0} \Phi(tv_\epsilon) = \Phi(t_\epsilon v_\epsilon).$$

Além disso, a família $(t_\epsilon)_{\epsilon>0} \subset I\!R_+$ *é limitada.*

Prova: Seja $\phi \in C^\infty([0,R))$ tal que

$$\phi(r) = \begin{cases} 1, \text{ em } [0,R_0), \\ 0, \text{ em } [2R_0,R). \end{cases}$$

$0 \leq \phi(r) \leq 1$, $0 < r < R$. Defina

$$u_\epsilon(r) = \phi(r)\hat{u}_\epsilon(r) \tag{3.36}$$

onde $\hat{u}_\epsilon(r) = \hat{c}/(\epsilon^n + r^n)^{1/m}$(veja (2.3) para a expressão de $\hat{c}$) e

$$v_\epsilon(r) = \frac{u_\epsilon(r)}{||u_\epsilon||_{L^{q(\gamma)}_\gamma}} \tag{3.37}$$

Concluiremos o Lema para essa família v_ϵ e para $\epsilon > 0$ pequeno. Por estimativas que constam no Apêndice (A), temos que

$$\int_0^R r^\alpha |v_\epsilon'|^{\beta+2}\, dr = S^{\frac{\gamma+1}{\gamma+\beta+2-\alpha}} + 0(\epsilon^{s(\beta+2)}) \tag{3.38}$$

$$\int_0^R r^l |v_\epsilon|^{(\beta+2)}\, dr = \begin{cases} 0(\epsilon^{l+\beta-\alpha+2})\ , & \text{se } \eta < 0, \\ 0(\epsilon^{s(\beta+2)}|\ln\epsilon|)\ , & \text{se } \eta = 0, \\ 0(\epsilon^{s(\beta+2)})\ , & \text{se } \eta > 0. \end{cases} \tag{3.39}$$

onde $\eta = l - \frac{n}{m}(\beta+2)+1$. Observe que por $(H2)$, $l+\beta-\alpha+2>0$, além disso, se $\eta = 0$ temos que $s(\beta+2) > 1$. Pondo $X_\epsilon = \displaystyle\int_0^R r^\alpha |v_\epsilon'|^{\beta+2}\, dr$ temos

$$\Phi(tv_\epsilon) = \tfrac{t^{(\beta+2)}}{\beta+2} X_\epsilon - \tfrac{t^{q(\gamma)}}{q(\gamma)} - \int_0^R F(r,tv_\epsilon)\, dr\ . \tag{3.40}$$

Pela hipótese (3.34), temos

$$\Phi(tv_\epsilon) \leq \tfrac{t^{(\beta+2)}}{\beta+2} X_\epsilon - \tfrac{t^{q(\gamma)}}{q(\gamma)}\ , \tag{3.41}$$

assim, $\lim\limits_{t\longrightarrow+\infty} \Phi(tv_\epsilon) = -\infty$. Portanto, $\sup\limits_{t\geq 0}\Phi(tv_\epsilon)$ é atingido em algum $t_\epsilon > 0$(se $t_\epsilon = 0 \Longrightarrow \sup\limits_{t\geq 0}\Phi(tv_\epsilon) = 0$ não existe nada a provar). Agora, para provar a segunda parte do Lema, basta observar que a derivada da função $t \longmapsto \Phi(tv_\epsilon)$ se anula em $t = t_\epsilon$, isto é,

$$t_\epsilon^{(\beta+1)} X_\epsilon - t_\epsilon^{q(\gamma)-1} - \int_0^R r^l f(r, t_\epsilon v_\epsilon) v_\epsilon = 0 \tag{3.42}$$

Novamente, pela hipótese (3.34)

$$t_\epsilon^{(\beta+1)} X_\epsilon - t_\epsilon^{q(\gamma)-1} \geq 0, \tag{3.43}$$

ou,

$$t_\epsilon \leq X_\epsilon^{1/(q(\gamma)-(\beta+2))} \tag{3.44}$$

∎

Lema 3.10 *A família $(t_\epsilon)_{\epsilon>0}$ do Lema 3.9 satisfaz*

$$t_\epsilon \longrightarrow S^{\frac{q(\gamma)}{q(\gamma)-(\beta+2)}} \tag{3.45}$$

quando $\epsilon \longrightarrow 0$.

Prova: De fato, por (3.42) temos

$$X_\epsilon - t_\epsilon^{q(\gamma)-(\beta+2)} - \int_0^R \frac{f(r, t_\epsilon v_\epsilon)}{t_\epsilon^{(\beta+1)}} v_\epsilon = 0$$

Assim, é suficiente verificar que

$$\int_0^R \frac{f(r, t_\epsilon v_\epsilon)}{t_\epsilon^{(\beta+1)}} v_\epsilon \, dr \longrightarrow 0 \quad (\epsilon \longrightarrow 0) \tag{3.46}$$

Usando (3.3)-(3.6) e $(f2)$, vimos que para todo $\delta > 0$, existe $C > 0$ tal que

$$|f(r, u)| \leq \delta r^\gamma u^{q(\gamma)-1} + C r^l u^{(\beta+1)} \text{ , q.t.p. } r \in (0, R) \; \forall u \geq 0$$

Portanto, temos

$$|\int_0^R \frac{f(r, t_\epsilon v_\epsilon)}{t_\epsilon^{(\beta+1)}} v_\epsilon \, dr| \leq \delta t_\epsilon^{q(\gamma)-(\beta+1)} \int_0^R r^\gamma |v_\epsilon|^{q(\gamma)} + C \int_0^R r^l |v_\epsilon|^{(\beta+2)}$$

Pelas estimativas (3.38) e (3.39)(veja apêndice A), temos o resultado; isto é, (3.46) e portanto (3.45).

∎

Lema 3.11 *Suponha (3.35). Seja $0 < A < +\infty$. Então*

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \epsilon^{-s(\beta+2)} \int_0^{R_0} r^l F(A\frac{\epsilon^s}{(\epsilon^n + r^n)^{1/m}})\, dr = +\infty \tag{3.47}$$

Prova: Fazendo a mudança de variável $t = \frac{r}{\epsilon}$, observamos que

$$\epsilon^{-s(\beta+2)} \int_0^{R_0} r^l F(A\frac{\epsilon^s}{(\epsilon^n + r^n)^{1/m}})\, dr = \epsilon^{-s(\beta+2)} \int_0^{R_0} F(A\frac{\epsilon^{s-n/m}}{(1+(\frac{r}{\epsilon})^n)^{1/m}}) r^l\, dr$$

$$= \epsilon^{-s(\beta+2)} \int_0^{R_0} F(A(\frac{\epsilon^{sm-n}}{(1+(\frac{r}{\epsilon})^n})^{1/m})(\frac{r}{\epsilon})^l \epsilon^l\, dr = \epsilon^{l+1-s(\beta+2)} \int_0^{R_0\epsilon^{-1}} F(A(\frac{\epsilon^{sm-n}}{(1+t^n)})^{1/m}) t^l\, dt\ . \tag{3.48}$$

Note que $A\epsilon^{sm-n} = (\epsilon A^{1/(sm-n)})^{sm-n}$. Tomando $\tilde{\epsilon} = \epsilon A^{1/(sm-n)}$, vemos que (3.48) é equivalente a

$$\lim_{\tilde{\epsilon} \longrightarrow 0} \tilde{\epsilon}^{l+1-s(\beta+2)} \int_0^R F(\frac{\tilde{\epsilon}^{sm-n}}{1+t^n}) t^l\, dt,$$

isto é, (3.48) é o mesmo que (3.35). Assim, prosseguiremos como acima.

Se $R_0 \geq 1$, de (3.48) temos $\int_0^{R_0\epsilon^{-1}} = \int_0^{\epsilon^{-1}} + \int_{\epsilon^{-1}}^{R_0\epsilon^{-1}}$. Assim, (3.48) é equivalente a (3.35). Portanto, (3.47) segue.

Porém, se $R_0 < 1$, pondo

$$Z_\epsilon = \epsilon^{l+1-s(\beta+2)} \int_{R_0\epsilon^{-1}}^{\epsilon^{-1}} F(A(\frac{\epsilon^{sm-n}}{(1+t^n)})^{1/m}) t^l\, dt$$

temos:

$$R_0\epsilon^{-1} < t < \epsilon^{-1} \Rightarrow R_0^n\epsilon^{-n} < t^n < \epsilon^{-n} \Rightarrow (R_0\epsilon^{-1})^n + 1 < 1 + t^n < 1 + \epsilon^{-n},$$

donde

$$\frac{1}{1+\epsilon^{-n}} < \frac{1}{1+t^n} < \frac{1}{(R_0\epsilon^{-1})^n + 1}.$$

Assim,

$$|Z_\epsilon| \leq \epsilon^{l+1-s(\beta+2)} \int_{R_0\epsilon^{-1}}^{\epsilon^{-1}} F(0(\epsilon^s)) t^l\, dt = C\epsilon^{2l+2-s(\beta+2)} F(0(\epsilon^s))\ .$$

Note que

$$\begin{aligned} 2l + 2 - s(\beta+2) = (l+1) + (l+1) - \tfrac{(\alpha-\beta-1)}{\beta+1} &\overset{(H3)}{\geq} (l+1) + (\alpha-\beta-1) - \tfrac{(\alpha-\beta-1)}{\beta+1} \\ &= (l+1) + (\alpha-\beta-1)\tfrac{\beta}{\beta+1} > 0 \end{aligned}$$

Portanto, $|Z_\epsilon|$ é limitada quando $\epsilon \longrightarrow 0$.

Como $(R_0 < 1)$, $\int_0^{R_0\epsilon^{-1}} = \int_0^{\epsilon^{-1}} - \int_{R_0\epsilon^{-1}}^{\epsilon^{-1}}$, e (3.48) é equivalente a (3.35).

■

Com o seguinte Lema, concluiremos a prova do Teorema 3.8.

Lema 3.12 *Para a família* $(v_\epsilon)_{\epsilon>0} \subset X_R$ *do Lema 3.9, temos que*

$$Y_\epsilon = \sup_{t\geq 0} \Phi(tv_\epsilon) = \Phi(t_\epsilon v_\epsilon) < (\frac{1}{\beta+2} - \frac{1}{q(\gamma)})S^{(\gamma+1)/(\beta+\gamma+2-\alpha)}.$$

Prova: Comecemos observando que a função $t \longmapsto (\frac{t^{(\beta+2)}}{\beta+2}X_\epsilon - \frac{t^{q(\gamma)}}{q(\gamma)})$ é crescente sobre o intervalo $[0, X_\epsilon^{1/(q(\gamma)-(\beta+2))}]$. Isso é uma consequência de (3.43). Portanto, temos por (3.44) que

$$\begin{aligned} Y_\epsilon = &\ \tfrac{t_\epsilon^{(\beta+2)}}{\beta+2}X_\epsilon - \tfrac{t_\epsilon^{q(\gamma)}}{q(\gamma)} - \int_0^R F(r, t_\epsilon v_\epsilon) \\ \leq &\ \tfrac{1}{\beta+2}X_\epsilon^{(\beta+2)/(q(\gamma)-(\beta+2))}X_\epsilon - \tfrac{1}{q(\gamma)}X_\epsilon^{q(\gamma)/(q(\gamma)-(\beta+2))} - \int_0^R F(r, t_\epsilon v_\epsilon) \\ = &\ (\tfrac{1}{\beta+2} - \tfrac{1}{q(\gamma)})X_\epsilon^{q(\gamma)/(q(\gamma)-(\beta+2))} - \int_0^R F(r, t_\epsilon v_\epsilon)\ . \end{aligned} \tag{3.49}$$

Usando (3.38), obtemos

$$\begin{aligned} Y_\epsilon \leq &\ (\tfrac{1}{\beta+2} - \tfrac{1}{q(\gamma)})\{S^{\frac{\gamma+1}{\beta+\gamma+2-\alpha}[\frac{q(\gamma)-(\beta+2)}{q(\gamma)}]}\}^{\frac{q(\gamma)}{q(\gamma)-(\beta+2)}} + \\ &+0(\epsilon^{s(\beta+2)}) - \int_0^R F(r, t_\epsilon v_\epsilon) \\ = &\ (\tfrac{1}{\beta+2} - \tfrac{1}{q(\gamma)})S^{\frac{\gamma+1}{\beta+\gamma+2-\alpha}} + 0(\epsilon^{s(\beta+2)}) - \int_0^R F(r, t_\epsilon v_\epsilon) \end{aligned} \tag{3.50}$$

Agora, pela escolha das funções u_ϵ, v_ϵ e das estimativas sobre elas para $\epsilon > 0$ pequeno, resulta

$$\begin{aligned} \int_0^R F(r, t_\epsilon v_\epsilon)\, dr \overset{\textbf{(Hip)}}{\geq} &\ \int_0^R r^l F(t_\epsilon v_\epsilon)\, dr = \int_0^R r^l F(\frac{t_\epsilon u_\epsilon}{\|u_\epsilon\|_{L_\gamma^{q(\gamma)}}}) \\ = &\ \int_0^R r^l F[\frac{t_\epsilon \phi(r)}{(\epsilon^n + r^n)^{1/m}} \cdot \frac{1}{0(\epsilon^{-s}) + 0(\epsilon)}]\, dr \\ = &\ \int_0^R r^l F[\frac{t_\epsilon \phi(r)}{(\epsilon^n + r^n)^{1/m}} \cdot \frac{0(\epsilon^s)}{C + 0(\epsilon^{s+1})}]\, dr \\ \geq &\ \int_0^{R_0} r^l F[\frac{t_\epsilon 0(\epsilon^s)}{(\epsilon^n + r^n)^{1/m}(C + 0(\epsilon^{s+1}))}]\, dr \\ = &\ \int_0^{R_0} r^l F[A\frac{\epsilon^s}{(\epsilon^n + r^n)^{1/m}}]\, dr \end{aligned} \tag{3.51}$$

onde

$$\frac{S^{q(\gamma)/(q(\gamma)-(\beta+2))}}{C} \leq A < +\infty. \tag{3.52}$$

Isso é uma consequência do Lema 3.10. De (3.50)

$$Y_\epsilon \leq (\tfrac{1}{\beta+2} - \tfrac{1}{q(\gamma)})S^{(\gamma+1)/(\beta+\gamma+2-\alpha)} + 0(\epsilon^{s(\beta+2)}) - \int_0^{R_0} r^l F(A\frac{\epsilon^s}{(\epsilon^n + r^n)^{1/m}}). \tag{3.53}$$

Pelo Lema 3.11 e (3.53), resulta que

$$Y_\epsilon < (\tfrac{1}{\beta+2} - \tfrac{1}{q(\gamma)})S^{(\gamma+1)/(\beta+\gamma+2-\alpha)} \tag{3.54}$$

para $\epsilon > 0$ pequeno. De fato, de (3.47) existem constantes $\epsilon_0 > 0$ e $M = M(\epsilon_0) > 0$, tais que

$$\int_0^{R_0} r^l F(A\frac{\epsilon^s}{(\epsilon^n + r^n)^{1/m}})\, dr \geq M\epsilon^{s(\beta+2)}\ , \quad 0 < \epsilon < \epsilon_0\ . \tag{3.55}$$

Podemos escolher $M(\epsilon_0)$ de modo que $0(\epsilon^{s(\beta+2)}) - M\epsilon^{s(\beta+2)} < 0$.

■

3.3 Verificação da Hipótese Crucial do Teorema (3.8)

No Lema 3.10, utilizamos as estimativas (3.39). Observe que elas foram fundamentais na prova do Lema 3.11. De fato, a constante A do Lema 3.11 é a mesma que aparece no Lema 3.12, a qual depende das estimativas (3.39). Então, devemos verificar em que condições existe a constante A do Lema 3.11, ou, o que é o mesmo, verificar quando vale (3.35) para essas estimativas. Assim, vamos considerar separadamente os casos de (3.39).

O caso $l - \frac{n}{m}(\beta+2) + 1 < 0$ $(\eta < 0)$

Para os operadores Laplaciano, p-Laplaciano e k-Hessiana respectivamente, esse caso corresponde a dizer que a dimensão do espaço e maior do que 5, isto é, $N \geq 5$; $N > p^2$; $k > 1$ e $N \geq 3$. Seja

$$f(r,u) \geq 0\ , \text{ q.t.p. } \quad r \in \omega \subset (0,R)\ ,\ \forall u \geq 0\ , \tag{3.56}$$

$$f(r,u) \geq \mu r^l\ , \text{ q.t.p. } \quad r \in \omega\ ,\ \forall u \in I\ , \tag{3.57}$$

onde ω é algum subconjunto aberto e $I \subset (0, +\infty)$ é algum intervalo aberto e $\mu > 0$ uma constante.

Por exemplo, a função $f(r,u) = r^l f(u) = r^l\lambda|u|^\beta u$, $0 < \lambda < \lambda_1$, ou $f(r,u) = r^l f(u)$ tal que $f(0) = 0$, $0 \leq f'(0) < \lambda_1$ e $\displaystyle\lim_{u \longrightarrow +\infty} \frac{f(u)}{u^{q(\gamma)-1}} = 0$.

Corolário 3.13 *Suponha $(f1)-(f3)$, (3.3)-(3.8), (3.56), (3.57), $(H1)-(H4)$. Então o problema (3.1) possui solução.*

Prova: Aplicando (3.56) e (3.57), vemos que

$$f(r,u) \geq \mu r^l \chi_I(u) = r^l f(u) \ , \ \text{q.t.p.} \ \ r \in \omega \ , \ \forall u \geq 0$$

Assim, temos que

$$F(u) \geq \Theta > 0, \ \forall u \geq B$$

para algumas constantes $\Theta > 0$ e $B > 0$.

Verificação de (3.35). Temos

$$r^l F[(\frac{\epsilon^{sm-n}}{1+t^n})^{1/m}] \geq r^l \Theta \ , \forall t, \ \text{desde que} \ \frac{\epsilon^{sm-n}}{1+t^n} \geq B^m$$

em particular, $t^n \leq \frac{\epsilon^{sm-n}}{B^m} - 1 \leq \frac{\epsilon^{sm-n}}{B^m} \Rightarrow t \leq (\frac{\epsilon^{sm-n}}{B^m})^{1/n}$. Assim,

$$\begin{aligned}\epsilon^{l+1-s(\beta+2)} \int_0^{\epsilon^{-1}} F[(\frac{\epsilon^{sm-n}}{1+t^n})^{1/m}] t^l \, dt &\geq \Theta \epsilon^{l-s(\beta+2)} \int_0^{B^{\frac{-m}{n}} \epsilon^{(s\frac{m}{n}-1)}} t^l \, dt \\ &= C \epsilon^{l+1-s(\beta+2)+(s\frac{m}{n}-1)(l+1)} .\end{aligned}$$

Como estamos supondo

$$l - \frac{n}{m}(\beta+2) + 1 < 0 \ ,$$

temos

$$\begin{aligned} l+1-s(\beta+2) + ls\tfrac{m}{n} + s\tfrac{m}{n} - l - 1 &= \\ = s(l\tfrac{m}{n} - (\beta+2) + \tfrac{m}{n}) &< 0 \end{aligned}$$

Portanto, o lado direito acima tende para $+\infty$ quando $\epsilon \longrightarrow 0$.

∎

O caso $l - \frac{n}{m}(\beta+2) + 1 = 0 (\eta = 0)$.

Para os operadores Laplaciano e p-Laplaciano respectivamente, esse caso corresponde a dizer que a dimensão do espaço é igual a 4, isto é, $N = 4$ e $N = p^2$. A k-Hessiana, não pode ser incluída nesse caso.

Suponhamos além disso, que

$$f(r,u) \geq 0 \ , \quad \text{q.t.p.} \quad r \in \omega \subset (0,R) \ , \ \forall u \geq 0 \ . \tag{3.58}$$

juntamente com uma das seguintes condições:

$$f(r,u) \geq \mu r^l u^{(\beta+1)} \ , \quad \text{q.t.p.} \quad r \in \omega \subset (0,R) \ , \ \forall u \in [0,A] \ , \tag{3.59}$$

ou,

$$f(r,u) \geq \mu r^l u^{(\beta+1)} \ , \quad \text{q.t.p.} \ , \quad r \in \omega \subset (0,R) \ , \ \forall u \in [A,+\infty) \ , \tag{3.60}$$

onde $\mu > 0$ e $A > 0$ são constantes.

Por exemplo, $f(r,u) = r^l f(u) = r^l \lambda |u|^\beta u$, $0 < \lambda < \lambda_1$, satisfazem as hipóteses acima.

Corolário 3.14 *Suponha que* $(f1)-(f3)$, *(3.3)-(3.8), (3.58), (3.59) ou (3.60) e* $(H1)-(H4)$ *valem. Então o problema (3.1) possui solução.*

Prova: Temos

$$f(r,u) \geq \mu r^l u^{(\beta+1)} \chi_I(u) \equiv r^l f(u) \text{ ,q.t.p. } r \in \omega \text{ , } \forall u \geq 0 \text{ ,}$$

onde χ_I é a função característica de I, com $I \subset [0, A]$, ou $I \subset [A, +\infty)$. Assim, obtemos

$$F(u) = \tfrac{\mu}{(\beta+2)} u^{(\beta+2)} \chi_I(u) \text{ , para } 0 \leq u \leq A \text{ ,} \tag{3.61}$$

ou,

$$F(u) = \tfrac{\mu}{(\beta+2)} (u^{(\beta+2)} - A^{(\beta+2)}) \chi_I(u) \text{ , para } u \geq A \text{ .} \tag{3.62}$$

Verificação de (3.35)
No caso (3.61), temos para $\epsilon > 0$ pequeno que

$$\frac{\epsilon^{(sm-n)}}{1+t^n} \leq A \quad \Longrightarrow \quad t \geq (A^{-m}\epsilon^{(sm-n)} - 1)^{1/n} \text{ ;}$$

assim,

$$\begin{aligned}
\epsilon^{l+1-s(\beta+2)} \int_0^{\epsilon^{-1}} F[(\frac{\epsilon^{sm-n}}{1+t^n})^{1/m}] t^l \, dt &\geq \mu \frac{\epsilon^{l+1-s(\beta+2)}}{(\beta+2)} \int_{A^{-m/n}\epsilon^{(sm-n)/n}}^{\epsilon^{-1}} (\frac{\epsilon^{sm-n}}{1+t^n})^{(\beta+2)/m} t^l \, dt \\
&= C\epsilon^{l+1-s(\beta+2)+(sm-n)(\beta+2)/m} \int_{A^{-m/n}\epsilon^{(sm-n)/n}}^{\epsilon^{-1}} \frac{t^l}{(1+t^n)^{(\beta+2)/m}} \, dt \\
&\geq C\epsilon^{(l+1-s(\beta+2)+(sm-n)(\beta+2)/m)} 2^{-(\beta+2)/m} \int_{A^{-m/n}\epsilon^{(sm-n)/n}}^{\epsilon^{-1}} \frac{t^l}{1+t^{n(\beta+2)/m}} \, dt \\
&= C\epsilon^{(l+1-s(\beta+2)+(sm-n)(\beta+2)/m)} \, 2^{(-(\beta+2)/m)} \, \tfrac{2^{-(\beta+2)/m}}{l+1} \ln(1+t^{l+1})|_{A^{-m/n}\epsilon^{(sm-n)/n}}^{\epsilon^{-1}} \\
&\cong (1 - \frac{(n-sm)}{n}) \ln(1/\epsilon) \longrightarrow +\infty \text{ .}
\end{aligned}$$

Usamos que $(1+t^n)^{(\beta+2)/m} \leq 2^{(\beta+2)/m}(1+t^{n(\beta+2)/m})$ e a hipótese $\eta = 0$; isto é,
$l - \frac{n}{m}(\beta+2) = -1$, donde

$$l+1-s(\beta+2)+(sm-n)(\beta+2)/m = l+1-n(\beta+2)/m - s(\beta+2) + s(\beta+2) = 0,$$

e também que

$$0 < \frac{n-sm}{n} = 1 - \frac{sm}{n} \leq \frac{1}{2}.$$

Portanto, o lado direito acima é de ordem $O(|\ln \epsilon|) \longrightarrow +\infty$, quando $\epsilon \longrightarrow 0$.
No caso (3.62), se tomarmos $u \geq (\beta+2)^{1/(\beta+2)} A$, então

$$\frac{u^{(\beta+2)}}{\beta+2} - A^{(\beta+2)} \geq 0 \Rightarrow u^{(\beta+2)} - A^{(\beta+2)} \geq \frac{(\beta+1)}{(\beta+2)} u^{(\beta+2)}.$$

Assim, tomando $B = (\frac{\beta+1}{\beta+2})^{1/(\beta+2)}A$, se

$$1 + t^n \leq B^{-1}\epsilon^{sm-n} \Rightarrow t \leq (B^{-1}\epsilon^{sm-n})^{1/n} \Rightarrow \frac{\epsilon^{sm-n}}{1+t^n} \geq B\ .$$

Observe que $sm/n - 1 = -(\beta+1)/(\beta+2)$. Daí,

$$\begin{aligned}\epsilon^{l+1-s(\beta+2)} \int_0^{\epsilon^{-1}} F[(\frac{\epsilon^{sm-n}}{1+t^n})^{1/m} t^l\, dt \geq C\epsilon^{l+1-s(\beta+2)} \int_B^{B^{-1/n}\epsilon^{(sm-n)/n}} (\frac{\epsilon^{sm-n}}{1+t^n})^{(\beta+2)/m} t^l\, dt \\ \geq C\epsilon^{l+1-s(\beta+2)+(\beta+2)(sm-n)/m} (\ln(B^{-1/n}\epsilon^{-(\beta+1)/(\beta+2)}) - \ln(B)) \\ \cong |\ln \epsilon| \longrightarrow +\infty\end{aligned}$$

quando $\epsilon \longrightarrow 0$.

∎

O caso $l - \frac{n}{m}(\beta+2) + 1 > 0 (\eta > 0)$.

Esse, corresponde ao caso quando N=3 para os operadore **Laplaciano**, $N < p^2$ para o **p-Laplaciano** e, $k \geq 1$ e todo $N > 0$ para a **k-Hessiana**. Note que agora podemos incluir o caso $k = 1$. Suponhamos que

$$f(r,u) \geq 0\ ,\ \text{q.t.p. } r \in \omega \subset (0,R)\ ,\ \forall u \geq 0 \tag{3.63}$$

$$\lim_{u \longrightarrow +\infty} \frac{f(r,u)}{u^{\beta+3}} = +\infty\ ,\ \text{uniformemente } r \in \omega\ . \tag{3.64}$$

Por exemplo, $f(u) = u^q + \lambda u^{\beta+1}$, $\beta + 3 < q < q(\gamma)$, satisfaz as hipóteses acima.

Corolário 3.15 *Suponha que* $(f1) - (f3)$, *(3.3)-(3.8), (3.63), (3.64) e* $(H1) - (H4)$ *valem. Além disso, que*

$$l(\beta+1) - (\alpha - \beta - 1)(\beta+2) \leq 0, \tag{3.65}$$

$$(\beta+2)(\beta+1) - (\alpha-\beta-1)(\gamma+\beta+2-\alpha) \leq 0. \tag{3.66}$$

Então o problema (3.1) possui solução.

Prova: Defina $f(u) = \inf_{r\in\omega} f(r,u)$, de modo que $\lim_{u\longrightarrow+\infty} \frac{f(u)}{u^{\beta+3}} = +\infty$. Portanto, temos que $\forall \mu > 0$ existe um $A > 0$ tal que $F(u) \geq \mu u^{\beta+4}$, $\forall u \geq A$. Então, para $\epsilon > 0$ pequeno temos

$$1 + t^n \leq A^{-m}\epsilon^{sm-n} \Rightarrow t^n \leq A^{-m}\epsilon^{sm-n}$$

ou,

$$\frac{\epsilon^{sm-n}}{1+t^n} \geq A^m \quad (B = A^{-m}).$$

Temos:

$$\epsilon^{l+1-s(\beta+2)}\int_0^{\epsilon^{-1}} F[(\frac{\epsilon^{sm-n}}{1+t^n})^{1/m}]t^l\,dt \geq \mu\epsilon^{l+1-s(\beta+2)}\int_0^{B^{-1/n}\epsilon^{(sm-n)/n}} \frac{\epsilon^{(sm-n)(\beta+4)/m}}{(1+t^n)^{(\beta+4)/m}}t^l\,dt.$$

Desde que

$$\begin{aligned} k = l+1-s(\beta+2)+(sm-n)(\beta+4)/m = &\ l+1-s(\beta+2)\\ +s(\beta+2)+2s-n(\beta+4)/m = &\ l+1-n(\beta+4)/m+2s, \end{aligned}$$

de (3.65), $l \leq \frac{(\alpha-\beta-1)}{\beta+1}(\beta+2) = \frac{n}{m}(\beta+2)$ e $n(sm/n-1) = -n(\beta+1)/(\beta+2) < 0$, donde

$$k \leq 1+\frac{n}{m}(\beta+2)-\frac{n}{m}(\beta+2)-2\frac{n}{m}+2s,$$

por (3.66), temos que $k \leq 0$. Daí,

$$\lim_{\epsilon\longrightarrow 0}\int_0^{B^{-1/n}\epsilon^{(sm-n)/n}} \frac{t^l}{(1+t^n)^{(\beta+4)/m}}\,dt = \int_0^{+\infty}\frac{t^l}{(1+t^n)^{(\beta+4)/m}}\,dt \begin{cases} < +\infty,\\ = +\infty. \end{cases}$$

Em qualquer caso, temos

$$\liminf_{\epsilon\longrightarrow 0}\epsilon^{l-s(\beta+2)}\int_0^{\epsilon^{-1}} F[(\frac{\epsilon^{(sm-n)}}{1+t^n})^{1/m}]t^l\,dt \geq \mu\liminf_{\epsilon\longrightarrow 0}\epsilon^k(\int_0^{\epsilon^{-1}}\frac{t^l}{(1+t^n)^{(\beta+4)/m}}\,dt) = +\infty.$$

Se $k=0$ e $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^l}{(1+t^n)^{(\beta+4)/m}}\,dt < +\infty$, então desde que $\mu > 0$ é arbitrário, o resultado segue-se. Assim, temos verificado (3.35). Portanto o problema (3.1) possui solução.

■

Analisaremos agora um segundo tipo de resultado ainda no caso $l-\dfrac{n}{m}(\beta+2)+1 > 0$. Suponhamos que

$$f(r,u) \geq 0\ , \quad \text{q.t.p.} \quad r\in\omega\subset(0,R)\ ,\ \forall u\geq 0, \tag{3.67}$$

para todo $\mu > 0$, existe $a_\mu : [0,R] \longrightarrow [0,R]$ contínua e crescente como função de μ; isto é, se $\mu_1 < \mu_2 \Longrightarrow a_{\mu_1}(r) \leq a_{\mu_2}(r)$, uniformemente para $r\in\omega\subset(0,R)$, tal que

$$\liminf_{u\longrightarrow+\infty}\frac{f(r,u)}{u^{\beta+1}} \geq a_\mu(r)\ ,\ \text{uniformemente para } r\in\omega. \tag{3.68}$$

onde $\beta+1 \leq \tau \leq \beta+3$.

$$\begin{cases} f(r,u) = a(r)r^l|u|^{\beta+1}+g(r,u),\ \text{com}\ \ g(r,u)\geq 0\ \forall u\geq 0,\\ \displaystyle\limsup_{u\longrightarrow 0}\frac{g(r,u)}{u^{\beta+1}} = \mu. \end{cases} \tag{3.69}$$

Analisemos o seguinte exemplo: $f(r,u) = a(r)r^l u^\beta u + \mu r^l |u|^\beta u$, $\beta + 1 \leq \tau < \beta + 3$, se $a(r) \equiv 0$, e $\tau > \beta + 1$, estamos nas hipótese (3.3)-(3.6) e assim, f satisfaz as hipóteses acima com $a_\mu(r) = \mu$, com $0 < \mu < +\infty$. Porém, se $\tau = \beta + 1$ e $a(r) \equiv 0$, não estamos nas hipótese (3.5)-(3.6), mas estaremos sempre supondo que $a(r)$ satisfaz as hipóteses (3.4), (3.7) ou (3.8). Em qualquer caso, temos:

Corolário 3.16 *Suponha que* $(f1)-(f3)$, *(3.67),(3.68), ou (3.69) e* $(H1)-(H4)$ *valem. Então, existe* $\mu_o > 0$, *tal que para todo* $\mu > \mu_o$ *o problema (3.1) possui solução.*

Prova: Defina $f(u) = \inf_{r\in\omega} f(r,u)$, de modo que $\liminf_{u\longrightarrow+\infty} \frac{f(u)}{u^{(\beta+1)}} \geq a_\mu = \inf_{r\in\omega} a_\mu(r)$. Portanto, existe $A > 0$ tal que $F(u) \geq \frac{a_\mu}{\beta+2} u^{(\beta+2)}$, $\forall u \geq A$.

$$
\begin{aligned}
\epsilon^{l+1-s(\beta+2)} \int_A^{\epsilon^{-1}} F[(\frac{\epsilon^{sm-n}}{1+t^n})^{1/m}]t^l\,dt &\geq \frac{a_\mu \epsilon^{l+1-s(\beta+2)}}{\beta+2} \int_A^{B^{-1/n}\epsilon^{(sm-n)/n}} \frac{\epsilon^{(sm-n)(\beta+2)/m}}{(1+t^n)^{(\beta+2)/m}} t^l\,dt \\
&= \frac{a_\mu}{\beta+2} \epsilon^{l+1-\frac{n}{m}(\beta+2)} \int_A^{B^{-1/m}\epsilon^{(sm-n)/n}} \frac{1}{(1+t^n)^{(\beta+2)/m}} t^l\,dt. \\
&\geq \frac{a_\mu}{\beta+2} \epsilon^{l+1-\frac{n}{m}(\beta+2)} \int_A^{B^{-1/m}\epsilon^{(sm-n)/n}} t^{l-n(\beta+2)/m}\,dt. \\
&= C(const.) \frac{a_\mu}{\beta+2} \epsilon^{l+1-\frac{n}{m}(\beta+2)} \left\{ t^{l+1-n(\beta+2)/m} \Big|_A^{B^{-1/m}\epsilon^{(sm-n)/n}} \right\},
\end{aligned}
$$

onde C é uma constante positiva. Como

$$
\begin{aligned}
\Upsilon = l+1-\frac{n}{m}(\beta+2) + (sm-n)(l+1-n(\beta+2)/m)/n = \\
= s(\tfrac{m}{n}(l+1) - (\beta+2)) > 0,
\end{aligned}
$$

e como estamos supondo $(l+1) > n(\beta+2)/m$, resulta que $\Upsilon > 0$. Assim, a integral acima pode não divergir. Mas se recordarmos de (3.53), veremos que necessitamos apenas mostrar que a seguinte diferença para $\epsilon > 0$ pequeno, é menor do que zero, isto é:

$$
\begin{aligned}
O(\epsilon^{s(\beta+2)}) - \int_A^{\epsilon^{-1}} F[(\frac{\epsilon^{sm-n}}{1+t^n})^{1/m}]t^l\,dt \\
\leq O(\epsilon^{s(\beta+2)}) - \frac{a_\mu}{\beta+2} \epsilon^{l+1-\frac{n}{m}(\beta+2)} \int_A^{B^{-1/m}\epsilon^{(sm-n)/n}} \frac{1}{(1+t^n)^{(\beta+2)/m}} t^l\,dt < 0.
\end{aligned}
$$

A última integral do lado direito, como vimos pelos cálculos acima, é de ordem $O(\epsilon^{s(\beta+2)})$, portanto, fazer $\epsilon \longrightarrow 0$, pode não resultar (< 0). Assim, escolhendo μ suficientemente grande, teremos que o lado direito acima será negativo(< 0). Em outras palavras, temos obtido (3.53); em verdade é o que estamos buscando(veja Lema 3.11). Portando existe $\mu_o > 0$ tal que o problema (3.1) possui solução para todo $\mu > \mu_o$.

∎

Observação 3.17 *Se estivermos na situação da hipótese (3.69), note que* $\mu > 0$ *deverá ser pequeno. Isso é necessário, para compensar (3.5) e assim, podermos obter os mesmos resultados. Usando a identidade de Pokhožaev, para essa classe de operadores(veja [18]), podemos encontrar um* $\tilde{\mu} > 0$*, tal que para cada* $0 < \mu \leq \tilde{\mu}$ *o problema (3.1) não possui solução.*

Capítulo 4

Problemas Côncavo-Convexo

Neste capítulo estudaremos um outro tipo de problema, do qual fizemos alguns comentários na introdução. O nosso objetivo é demonstrar a existência de uma sequência ilimitada de soluções que mudam de sinal, para o problema

$$\begin{cases} -(r^{\alpha}|u'|^{\beta}u')' = r^{\gamma}|u|^{q(\gamma)-2}u + f(r,u), & \text{em } (0,R) \\ u(r) > 0 & u(R) = 0 = u'(0), \end{cases} \tag{4.1}$$

além disso, que existem também pelo menos duas soluções positivas. Vamos supor que a função $f : [0,R] \times I\!R \longrightarrow I\!R$ possa ser decomposta como

$$f(r,u) = r^{l}a(r)|u|^{\beta}u + g(r,u) \ , \ g(r,u) \text{ ímpar na variável } u, \tag{4.2}$$

onde a função $a \in L^{\infty}(0,R)$ verifica (3.4) e (3.7), ou (3.8) e a função f satisfaz

$(f1)$ f é mensurável em r, contínua em u;

$(f2)$ Para cada número real $M > 0$,

$$\sup_{\substack{r\in(0,R) \\ 0\le u\le M}} |f(r,u)| < +\infty,$$

$(f3)$ $f(r,0) = 0$, e que

$$\lim_{u\longrightarrow\infty} \frac{f(r,u)}{u^{q(\gamma)-1}} = 0 \ .$$

Além disso, temos as seguintes hipótese sobre a função $F(r,u) = \displaystyle\int_0^R f(r,t)\,dt$:

$(F1)$ $F(r,u+v) \geq F(r,u) + F(r,v)$, $\forall\ u,v \in\ X_R$, $u \geq 0$, $v \geq 0$,

$(F2)$ $F(r,\rho u) \geq C\rho^{\kappa}r^{\sigma}|u|^{\kappa}$, $\forall\ u \in X_R$, q.t.p. sobre $(0,R)$, $0 < \rho < 1$ e $C > 0$.

Mais ainda,

$$\limsup_{u\longrightarrow 0}\frac{g(r,u)}{r^{\sigma}|u|^{\kappa-2}u}=\lambda\leq\Lambda,\begin{cases}\text{(veja Observação (4.2) abaixo) } \Lambda>0,\\ \text{uniformemente em } r\in(0,R),\end{cases}\tag{4.3}$$

$$g(r,u)=o(r^{\gamma}|u|^{q(\gamma)-2}u)\ ,\ u\longrightarrow+\infty,\text{uniformemente em } r\in(0,R).\tag{4.4}$$

Estas hipóteses são facilmente verificadas por exemplo para

$$f(r,u)=a(r)r^{\alpha}|u|^{\beta}u+\lambda r^{\sigma}|u|^{\kappa-2}u\quad\text{com}\quad 1<\kappa<\beta+2.$$

Faremos também, a seguinte hipótese adicional sobre os expoentes(veja Proposição 2.1):

$(H5)$ $1<\kappa<\beta+2,\ \kappa<q(\sigma)=\dfrac{(\sigma+1)(\beta+2)}{\alpha-\beta-1}\quad \alpha\leq\sigma\leq\gamma,$

Como exemplos desses problemas, temos:

$$\begin{cases}-\Delta_p u=u^{p^*-1}+a(x)u^p+\lambda u^q\ \text{ em }\ \Omega,\\ u>0 \text{ em } \Omega,\quad u=0\ \text{ sobre }\ \partial\Omega,\end{cases}\tag{4.5}$$

com $0<q<p-1$ e $\Omega\subset I\!R^N$ um domínio esfericamente simétrico. Com $(H5)$, temos a seguinte imersão:

$$\left(\int_0^R r^{\sigma}|u(r)|^{\kappa}\,dr\right)^{1/\kappa}\leq C\left(\int_0^R r^{\alpha}|u'|^{\beta+2}\,dr\right)^{1/(\beta+2)},$$

veja prop.(1.0) em [18].

O seguinte Lema nos diz como encontrar uma solução positiva para o problema 4.1 usando a mesma técnica das Seções anteriores. Porém, ele não funciona para obtermos uma segunda solução positiva.

Lema 4.1 *Suponha que sejam válidas as hipóteses* $(f1),(f2),(f3)$, *(3.4) e (3.7) ou (3.8),* $(F1),(F2)$, $(H1)-(H5)$, *(4.2)-(4.4) e, que*

$$\Psi(u)=\frac{1}{\beta+2}\int_0^R r^{\alpha}|u'|^{\beta+2}-\frac{1}{q(\gamma)}\int_0^R r^{\gamma}|u|^{q(\gamma)}-\int_0^R F(r,u).$$

Seja $\{u_k\}\subset X_R$ *uma sequência tal que*

$$\begin{aligned}\Psi(u_k)&\longrightarrow c,\\ \Psi'(u_k)&\longrightarrow 0 \text{ em } {X_R}^*.\end{aligned}$$

Então, se

$$c<\left(\frac{1}{\beta+2}-\frac{1}{q(\gamma)}\right)S^{(\gamma+1)/(\beta+\gamma+2-\alpha)},$$

o problema (4.1) possui uma solução $u\in X_R$.

Prova: Como na demonstração do Teorema 3.2.

∎

Agora faremos algumas observações sobre o funcional associado a equação (4.1)

$$\Psi(u) = \int_0^R \{\frac{r^\alpha}{\beta+2}|u'|^{\beta+2} - \frac{r^\gamma}{q(\gamma)}|u|^{q(\gamma)} - F(r,u)\}\, dr,$$

para podermos utilizar a teoria de gênero. Nesta primeira parte, mostraremos a existência de uma sequência ilimitada de soluções para o problema (4.1), e que esta possui pelo menos uma solução positiva. A existência dessa primeira solução positiva, será garantida, pelo princípio variacional de Ekeland [26]. Sob as hipóteses do Lema 4.1, temos

$$|f(r,u)| \leq r^l a(r) u^{\beta+1} + \lambda r^\sigma u^{\kappa-1} + C(\epsilon) r^\gamma u^{q(\gamma)-1} \text{ para } u \geq 0,$$

$$|F(r,u)| \leq \frac{r^l}{\beta+2} a(r) u^{\beta+2} + \lambda \frac{r^\sigma}{\kappa} u^\kappa + C(\epsilon)\frac{r^\gamma}{q(\gamma)} u^{q(\gamma)} \text{ para } u \geq 0.$$

Daí,

$$\begin{aligned}\Psi(u) &\geq \int_0^R \{\frac{r^\alpha}{\beta+2}|u'|^{\beta+2} - \frac{r^l}{\beta+2}a(r)|u|^{\beta+2} - \lambda\frac{r^\sigma}{\kappa}|u|^\kappa - (C(\epsilon)\frac{r^\gamma}{q(\gamma)} + \frac{r^\gamma}{q(\gamma)})|u|^{q(\gamma)}\} \\ &\geq C_1\|u\|_{X_R}^{\beta+2} - \lambda C_2\|u\|_{X_R}^{\kappa} - C_3\|u\|_{X_R}^{q(\gamma)}\end{aligned}$$

Defina

$$h(t) = C_1 t^{\beta+2} - \lambda C_2 t^\kappa - C_3 t^{q(\gamma)} \tag{4.6}$$

Então

$$\Psi(u) \geq h(\|u\|_{X_R}). \tag{4.7}$$

Observação 4.2 *Essa estimativa será crucial na busca da segunda solução positiva. Vamos escolher $\Lambda > 0$ de modo que h possua um máximo positivo para todo $0 < \lambda < \Lambda$.*

Tome $\xi : I\!R_+ \longrightarrow [0,1]$, não-crescente e C^∞, tal que

$$\xi(t) = \begin{cases} 1 & \text{se, } t \leq R_o, \\ 0 & \text{se, } t \geq R_1. \end{cases} \tag{4.8}$$

onde $0 < R_o(\lambda) < R_1(\lambda)$ são constantes. Na verdade, vamos escolher R_o e R_1 como sendo raízes positivas de $h(t)$, de modo que R_o seja a raíz mais próxima de zero, e R_1 a raiz mais longe de zero. Defina

$$\varphi(u) = \xi(\|u\|_{X_R}). \tag{4.9}$$

Consideraremos o funcional modificado

$$\Phi(u) = \frac{1}{\beta+2}\int_0^R r^\alpha |u'|^{\beta+2} - \frac{1}{q(\gamma)}\int_0^R r^\gamma |u|^{q(\gamma)}\varphi(u) - \int_0^R F_\varphi(r,u), \tag{4.10}$$

sendo que,

$$F_\varphi(r,u) = F(r,\varphi(u)u) = \begin{cases} F(r,u) & , \text{ se } \|u\|_{X_R} \le R_o, \\ 0 & , \text{ se } \|u\|_{X_R} \ge R_1. \end{cases} \tag{4.11}$$

Além disso, a função F_φ satisfaz a seguinte estimativa:

$$|F_\varphi(r,u)| \le \frac{r^l}{\beta+2}a(r)|u|^{\beta+2} + \lambda\frac{r^\sigma}{\kappa}|u|^\kappa + C(\epsilon)\frac{r^\gamma}{q(\gamma)}|u|^{q(\gamma)}\varphi(u). \tag{4.12}$$

Como em (4.7), $\Phi(u) \ge \overline{h}(\|u\|_{X_R})$, onde

$$\overline{h}(t) = C_1 t^{\beta+2} - \lambda C_2 t^\kappa - C_3 t^{q(\gamma)}\xi(t). \tag{4.13}$$

Note que $\overline{h} = h$, se $t \le R_o$ e $\overline{h}(t) = C_1 t^{\beta+2} - \lambda C_2 t^\kappa$, se $t \ge R_1$. Agora, se necessário, escolheremos $\lambda > 0$ de modo que $\overline{h}(t) > -(\frac{1}{\beta+2} - \frac{1}{q(\gamma)})S^{(\gamma+1)/(\gamma+\beta-\alpha+2)}$, isto é,

$$\Phi(u) > -(\tfrac{1}{\beta+2} - \tfrac{1}{q(\gamma)})S^{(\gamma+1)/(\gamma+\beta-\alpha+2)} \ \forall u \in X_R. \tag{4.14}$$

Assim, temos

Lema 4.3 *(1)* $\Phi \in C^1(B(0,R_o) \subset X_R, I\!R)$,

(2) Se $\Phi(u) \le 0$, *então* $\|u\|_{X_R} < R_o$, *e* $\Psi(v) = \Phi(v)$, *para todo* v *em uma vizinhança de* u,

(3) Φ *verifica a condição de Palais-Smale para* $c \in (-(\frac{1}{\beta+2} - \frac{1}{q(\gamma)})S^{(\gamma+1)/(\gamma+\beta-\alpha+2)}, 0)$.

Prova:
(1) Basta observar que $\Phi(u) = \Psi(u)$ e a prova segue-se como em [28].
(2) Veja que $\overline{h}(t) \le 0$ somente se $t < R_o$.
(3) Seja $\{u_j\} \subset X_R$ uma sequência tal que $\Phi(u_j) \longrightarrow c$ e $\Phi'(u_j) \longrightarrow 0$. Pela escolha de c e usando o item (2), temos que $\{u_j\}$ é uma sequência limitada. Daí, temos para uma subsequência que $u_j \rightharpoonup u \in X_R$,

$$\int_0^R f(r,u_j)u_j \longrightarrow \int_0^R f(r,u)u \text{ e } \int_0^R F(r,u_j) \longrightarrow \int_0^R F(r,u). \tag{4.15}$$

pois $f(r,u)$ é de ordem inferior a $u^{q(\gamma)-1}$, $\{u_j\} \subset L^{q(\gamma)}$ é limitada e $u_j \longrightarrow u$ q.t.p sobre $(0,R)$. Isso se segue como em (3.25). Então

$$\Phi(u_j) = \int_0^R \{\frac{r^\alpha}{\beta+2}|u_j'|^{\beta+2} - \frac{r^\gamma}{q(\gamma)}|u_j|^{q(\gamma)} - F(r,u_j)\} \ = c + o(1) \tag{4.16}$$

e

$$(-r^\alpha|u_j'|^\beta u_j')' - r^\gamma|u_j|^{q(\gamma)-2}u_j - f(r,u_j) \ = \zeta_j \tag{4.17}$$

e $\zeta_j \longrightarrow 0$ em $(X_R)^*$. Passando o limite como em (3.24), obtemos

$$(-r^{\alpha}|u'|^{\beta}u')' - r^{\gamma}|u|^{q(\gamma)-2}u - f(r,u) = 0,$$

em $(X_R)^*$. Isto é;

$$\int_0^R \{r^{\alpha}|u'|^{\beta+2} - |u|^{q(\gamma)} - f(r,u)u\} = 0 \tag{4.18}$$

Agora, defina $v_j = u_j - u$. Assim temos

$$\int_0^R r^{\alpha}|u_j'|^{\beta+2} = \int_0^R r^{\alpha}|u'|^{\beta+2} + \int_0^R r^{\alpha}|v_j'|^{\beta+2} + o(1) \tag{4.19}$$

e

$$\int_0^R r^{\gamma}|u_j|^{q(\gamma)} = \int_0^R r^{\gamma}|u|^{q(\gamma)} + \int_0^R r^{\gamma}|v_j|^{q(\gamma)} + o(1). \tag{4.20}$$

Combinando (4.16) e (4.17), com (4.19) e (4.20), obtemos:

$$\Phi(u) + \int_0^R \{\frac{r^{\alpha}}{\beta+2}|v_j'|^{\beta+2} - \frac{r^{\gamma}}{q(\gamma)}|v_j|^{q(\gamma)}\} = c + o(1), \tag{4.21}$$

$$\int_0^R \{r^{\alpha}|u'|^{\beta+2} - r^{\gamma}|u|^{q(\gamma)} - f(r,u)u\} + \int_0^R \{r^{\alpha}|v_j'|^{\beta+2} - r^{\gamma}|v_j|^{q(\gamma)}\} = o(1). \tag{4.22}$$

De (4.18) temos

$$\int_0^R r^{\alpha}|v_j'|^{\beta+2} = \int_0^R r^{\gamma}|v_j|^{q(\gamma)} + o(1).$$

Então, podemos supor que(para uma subsequência)

$$\int_0^R r^{\alpha}|v_j'|^{\beta+2} \longrightarrow k \geq 0 \quad \text{e} \quad \int_0^R r^{\gamma}|v_j|^{q(\gamma)} \longrightarrow k.$$

Pela desigualdade de Sobolev, $k \geq Sk^{(\beta+2)/q(\gamma)}$. Assim, temos $k = 0$, ou $k \geq S^{(\gamma+1)/(\gamma+\beta-\alpha+2)}$; o que juntamente com (4.21), (4.22) e (4.14) prova o resultado. De fato, se $k > 0$ então $c > 0$, pois nesse caso, de (4.21)

$$-(\frac{1}{\beta+2} - \frac{1}{q(\gamma)})S^{(\gamma+1)/(\gamma+\beta-\alpha+2)} \leq \Phi(u) < c - (\frac{1}{\beta+2} - \frac{1}{q(\gamma)})S^{(\gamma+1)/(\gamma+\beta-\alpha+2)}.$$

Então $c > 0$. Mas isso é impossível, uma vez que $c \in (-(\frac{1}{\beta+2} - \frac{1}{q(\gamma)})S^{(\gamma+1)/(\gamma+\beta-\alpha+2)}, 0)$. ∎

Observação 4.4 *Note que a hipótese de que $c < 0$, foi usada somente no final da demonstração do item (3) acima, assim, no caso de $0 < c < (\frac{1}{\beta+2} - \frac{1}{q(\gamma)})S^{(\gamma+1)/(\gamma+\beta-\alpha+2)}$, pelo que foi feito acima, teremos para o funcional Ψ que*

$$\Psi(u) = c \quad ou, \quad \Psi(u) < c - (\tfrac{1}{\beta+2} - \tfrac{1}{q(\gamma)})S^{(\gamma+1)/(\gamma+\beta-\alpha+2)}.$$

No segundo caso, vemos que a sequência $\{u_j\}$ não possui subsequência convergindo fortemente; mas isso não tem problema pois nesse caso, $\Psi(u) < 0$. Desde que Ψ é homogêneo, $u \not\equiv 0$ é uma solução fraca.

Seja E um espaço de Banach e $\mathcal{E}$ a classe de subconjuntos de $E - \{0\}$, fechados e simétricos com respeito a origem de E. Para $A \in \mathcal{E}$, definiremos o gênero $\Gamma(A)$ por

$$\Gamma(A) = \min\{k \in I\!N \ : \ \exists \varphi \in C(A; I\!R^k - \{0\}),\ \varphi(x) = -\varphi(-x)\}.$$

Se o mínimo não existe, então definiremos $\Gamma(A) = +\infty$. As principais propriedades de gênero são:

Proposição 4.5 *Sejam $A, B \in \mathcal{E}$. Então*

(1) Se existir $f \in C(A, B)$, ímpar, então $\Gamma(A) \leq \Gamma(B)$.

(2) Se $A \subset B$, então $\Gamma(A) \leq \Gamma(B)$.

(3) Se existir um homeomorfismo entre A e B, então $\Gamma(A) = \Gamma(B)$.

(4) se S^{N-1} é a esfera no $I\!R^N$, então $\Gamma(S^{N-1}) = N$.

(5) $\Gamma(A \bigcup B) \leq \Gamma(A) + \Gamma(B)$.

(6) Se $\Gamma(B) < +\infty$, então $\Gamma(\overline{A - B}) \geq \Gamma(A) - \Gamma(B)$.

(7) Se A for compacto, então $\Gamma(A) < +\infty$, e existe $\delta > 0$ tal que $\Gamma(A) = \Gamma(N_\delta(A))$ onde $N_\delta(A) = \{x \in E : \ d(x, A) \leq \delta\}$.

(8) Se X_o é um subespaço de E com codimensão k, e $\Gamma(A) > k$, então $A \bigcap X_o \neq \emptyset$.

Prova: Veja [60] para detalhes.

Lema 4.6 *Dado $n \in I\!N$, existe $\delta = \delta(n) > 0$, tal que*

$$\Gamma(\{u \in X_R : \Phi(u) \leq -\delta\}) \geq n,$$

se valer $(F2)$ e $(H5)$.

Prova: Fixe $n \in I\!N$, seja E_n um subespaço n-dimensional de X_R. Tome $w \in E_n$ com norma $\|w\|_{X_R} = 1$. Para $0 < \rho < \min\{R_o, 1\}$, temos

$$\Phi(\rho w) = \Psi(\rho w) = \frac{1}{\beta + 2}\rho^{\beta+2} - \frac{1}{q(\gamma)}\rho^{q(\gamma)} \int_0^R r^\gamma |w|^{q(\gamma)} - \int_0^R F(r, \rho w)\ .$$

Desde que todas as normas são equivalentes em E_n e em vista de (4.2), se definirmos

$$a_n = \inf\left\{\int_0^R r^\gamma |u|^{q(\gamma)} : \ u \in E_n,\ \|u\|_{X_R} = 1\right\} > 0,$$

$$b_n = \inf\left\{\int_0^R F(r,u)\,:\; u\in E_n,\; \|u\|_{X_R}=1\right\} > 0,$$

temos de $(F2)$ e $(H5)$ que

$$\Phi(\rho w) \le \frac{1}{\beta+2}\rho^{\beta+2} - \frac{a_n}{q(\gamma)}\rho^{\gamma} - Cb_n\rho^k,$$

e assim, podemos escolher δ, e $\rho < R_o$, de modo que $\Phi(\rho u) \le -\delta$ se $u \in E_n$, e $\|u\|_{X_R} = 1$. Seja $S_\rho = \{u \in X_R \;:\; \|u\|_{X_R} = \rho\}$. $S_\rho \bigcap E_n \subset \{u \in X_R \;:\; \Phi(u) \le -\delta\}$. Pela proposição 4.5,

$$\Gamma(\{u\in\; X_R \;:\; \Phi(u) \le -\delta\}) \ge \Gamma\left(S_\rho \bigcap E_n\right) = n.$$

■

Lema 4.7 *Seja* $\sum_k = \{C \subset X_R - \{0\},\; C$ *fechado,* $C = -C, \Gamma(C) \ge k\}$. *Seja*

$$c_k = \inf_{C\in\sum_k}\sup_{u\in C}\Phi(u),$$

$K_c = \{u \in X_R :\; \Phi'(u) = 0,\; \Phi(u) = c\}$. *Então, se* $c = c_k = ... = c_{k+r}$, $\Gamma(K_c) \ge r+1$. *(*$c<0$*)*

Prova: Considere o conjunto

$$\Phi^{-\epsilon} = \{u\in\; X_R \;:\; \Phi(u) \le -\epsilon\}.$$

Pelo **Lema 4.3**, para todo $k \in I\!N$, existe $\epsilon(k) > 0$ tal que $\Gamma(\Phi^{-\epsilon}) \ge k$. Desde que Φ é contínuo e par, $\Phi^{-\epsilon} \in \sum_k$. Então, $c_k \le -\epsilon < 0$, para todo k. Por outro lado, Φ é limitado inferiormente; assim, $c_k > -\infty$ para todo k. Suponha que $c = c_k = ... = c_{k+r}$. Como $c < 0$, Φ verifica a condição de Palais-Smale em K_c, decorre disso que K_c é um conjunto compacto. Se $\Gamma(K_c) \le r$, deverá existir um subconjunto U, fechado e simétrico com $K_c \subset U$, tal que $\Gamma(U) \le r$. Pelo lema da deformação(veja [60] ou [71]), temos um homeomorfismo ímpar

$$\phi:\; X_R \longrightarrow X_R,$$

tal que $\phi(\Phi^{c+\delta} - U) \subset \Phi^{c-\delta}$, para algum $\delta > 0$(δ deverá ser escolhido $0 < \delta < -c$). Por definição,

$$c = c_{k+r} = \inf_{c\in\sum_{k+r}}\sup_{u\in C}\Phi(u).$$

Então existe $A \in \sum_{k+r}$, tal que $\sup\limits_{u\in A}\Phi(u) < c+\delta$; isto é, $A \subset \Phi^{c+\delta}$ e

$$\phi(A-U) \subset \phi(\Phi^{c+\delta} - U) \subset \Phi^{c-\delta}. \tag{4.23}$$

Mas $\Gamma(\overline{A-U}) \geq \Gamma(A) - \Gamma(U) \geq k$ e $\Gamma(\phi(\overline{A-U}) \geq (\overline{A-U}) \geq k$. Então,

$$\phi(\overline{A-U}) \in \sum_k .$$

O que é uma contradição com (4.23) e o fato de que

$$\phi(\overline{A-U}) \in \sum_k \quad \text{implicar} \quad \sup_{u \in \phi(\overline{A-U})} \Phi(u) \geq c_k = c.$$

■

Com esse resultado, provamos o

Teorema 4.8 *O problema (4.1) possui uma sequência ilimitada de soluções.*

As soluções que obtemos, devem mudar de sinal exceto com c_o. De fato,

$$c_o = \inf_{u \in X_R} \Phi(u) \tag{4.24}$$

e em vista do Lema 4.3, Φ satisfaz a condição $(PS)_{c_o}$. Assim, para alguma $u_o \in X_R$ temos $c_o = \Phi(u_0)$. Então $c_o = \Phi(|u_0|)$. Isto é, $|u_0|$ é uma solução não negativa. Pela desigualdade de Harnack(veja [63], ou [68]) ela é estritamente positiva sobre $(0, R)$.

4.1 Uma Segunda Solução Positiva via Passo da Montanha

Vamos agora, buscar uma segunda solução positiva para (4.1). Seja

$$c_o = \Phi(u_o) < 0 \tag{4.25}$$

como em (4.24). Considere o funcional

$$\Phi_+(u) = \frac{1}{\beta+2} \int_0^R r^\alpha |u'|^{\beta+2} - \frac{1}{q(\gamma)} \int_0^R r^\gamma (u_+)^{q(\gamma)} - \int_0^R F(r, u_+)$$

Novamente, pelos resultados vistos anteriormente Φ_+ satisfaz a condição de Palais-Smale, ou, o problema (4.1) possui solução não nula(veja Observação 4.4) para todo

$$c < c_o + (\frac{1}{\beta+2} - \frac{1}{q(\gamma)}) S^{(\gamma+1)/(\gamma+\beta+2-\alpha)}.$$

A estimativa

$$\Phi_+(u) \geq h(\|u\|_{X_R}), \tag{4.26}$$

e o fato que $\Phi_+(au) \longrightarrow -\infty$, quando $a \longrightarrow +\infty$ juntamente com o Lema do Passo da montanha sem a condição (PS)(Veja Teorema 3.1) e com uma classe de caminhos $\mathcal{P}$ modificada como abaixo, acarretam a seguinte consequência:
Dado $v \in X_R$ com $\|v\|_{X_R} > R_1$ e $\Phi_+(v) < c_o$, existe uma sequência $\{u_k\} \subset X_R$, tal que

i) $\Phi'_+(u_k) \longrightarrow 0$,

ii) $\Phi_+(u_k) \longrightarrow c = \inf_{g\in\mathcal{P}} \sup_{t\in[0,1]} \Phi_+(g(t))$,

onde $\mathcal{P} = \{g \in C([0,1], X_R) : g(0) = u_o,\ g(1) = v\}$. E nesse caso, obtemos uma segunda solução positiva para (4.1). Observe que a classe $\mathcal{P}$ resolve, pois pela estimativa (4.26), temos que para todo $g \in \mathcal{P}$,

$$\sup_{t\in[0,1]} \Phi_+(g(t)) \geq \sup_{t\in[0,1]} h(\|g(t)\|_{X_R}) \geq \max_{t\in[0,R_1]} h(t) > 0, \tag{4.27}$$

isto é,

$$c = \inf_{g\in\mathcal{P}} \sup_{t\in[0,1]} \Phi_+(g(t)) > 0, \tag{4.28}$$

desde que $v \in X_R$ seja tal que

$$\Phi_+(v) < 0 \quad \text{e} \quad \|v\|_{X_R} > R_1,$$

onde R_1 foi escolhido em (4.8). Portanto, para obter um ponto crítico, devemos encontrar $v \in X_R$ tal que

$$c < c_o + (\frac{1}{\beta+2} - \frac{1}{q(\gamma)})S^{(\gamma+1)/(\gamma+\beta+2-\alpha)}.$$

Vamos mostrar nas Seções 4.2 e 4.3 que

$$\sup_{a>0} \Phi_+(u_o + av_\epsilon) < \Phi_+(u_o) + (\frac{1}{\beta+2} - \frac{1}{q(\gamma)})S^{(\gamma+1)/(\gamma+\beta+2-\alpha)}. \tag{4.29}$$

De fato, o supremo acima será atingido com $a_\epsilon > 0$. Isso decorre de (4.24), (4.27) e (4.28).

Observação 4.9 *Desde que $c > 0$, o funcional Φ_+, pode não satisfazer a condição $(PS)_c$, como foi visto na Observação 4.4. Por outro lado, se a função f satisfaz para $F(r,u) = \int_0^R f(r,u)\,dr$ a estimativa*

$$F(r,u) \leq \left(\frac{1}{\beta+2} - \frac{1}{q(\gamma)}\right) u^{q(\gamma)} + \frac{b}{\beta+2} f(r,u)u, \tag{4.30}$$

para algum $1 \leq b < \beta+2$; a condição $(PS)_c$ será verificada. Para se convencer disso, suponha que u seja ponto crítico para Φ_+, então usando essa estimativa, obtemos

$$\Phi_+(u) \geq 0.$$

O que é suficiente para obtermos $(PS)_c$, para $c > 0$ no caso (4.29). Para ser mais explícito, no caso do operador Laplaciano($N \geq 3$), tome $f(r,u) = \lambda r^{N-1}|u|^{\kappa-2}u$ com $1 > \kappa - 1 > \dfrac{2-b}{b}$ para algum $(2 > b \geq 1)$.

De outro modo, ou seja, se f não satisfizer (4.30), o que poderia lançar dúvidas se de fato obtemos uma segunda solução. Mesmo nestas condições adversas obteremos um ponto crítico não trivial de Φ_+. De fato, pelo Teorema do Passo da Montanha sem a condição $(PS)_c$, obtemos uma sequência $(w_n) \subset X_R$, tal que $w_n = u_o + v_n$, $(v_n) \subset X_R$ e

$$\begin{aligned} \Phi_+(w_n) &\longrightarrow c, \\ \Phi'_+(w_n) &\longrightarrow 0 \quad em \quad X_R^*. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Note que por 4.27, (w_n) é limitada. Prosseguindo como nos Lemas 3.6 e 3.7, obtemos uma solução $0 < w \in X_R$. Agora, pelo Lema 4.3 item (3), resulta

$$\Phi_+(w) = c, \tag{4.32}$$

ou,

$$\Phi_+(w) < c - c_o + (\frac{1}{\beta+2} - \frac{1}{q(\gamma)})S^{(\gamma+1)/(\beta+\gamma+2-\alpha)}. \tag{4.33}$$

Se ocorre $\Phi_+(w) \equiv \Phi_+(u_o)$, então teremos

$$c > (\frac{1}{\beta+2} - \frac{1}{q(\gamma)})S^{(\gamma+1)/(\beta+\gamma+2-\alpha)}. \tag{4.34}$$

O que é uma contradição.

O seguinte Teorema nos fornecerá uma ferramenta que será crucial para verificarmos (4.29).

Teorema 4.10 *Suponhamos que valha (3.4) e (3.7) ou (3.8) e $f(r,u)$ satisfaz $(f1),(f2),(f3)$, (4.2)-(4.4), $(F1),(F2)$ e também $(H1)-(H5)$, além disso, que exista alguma função $f(u)$ tal que*

$$f(r,u) \geq r^\sigma f(u) \geq 0 \ q.t.p. \quad r \in \omega \subset (0,R), \ \forall u \geq 0$$

(ω é um aberto) e a primitiva $F(u)$ satisfaz

$$\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon^{\sigma+1-s(\beta+2)} \int_0^{\epsilon^{-1}} F[(\frac{\epsilon^{sm-n}}{1+t^n})^{1/m}]t^\sigma \, dt = +\infty. \tag{4.35}$$

($F(u) = \displaystyle\int_0^u f(t)\,dt$). Então para algum $v_o \in X_R$, $v_o \geq 0$ sobre $(0,R)$, $v_o \not\equiv 0$, temos

$$\sup_{t\geq 0} \Phi_+(tv_0) < (\frac{1}{\beta+2} - \frac{1}{q(\gamma)})S^{\frac{\gamma+1}{\beta+\gamma+2-\alpha}}.$$

Prova : É análoga a demonstração do **Teorema 3.8**, levando-se em conta a hipótese $(H5)$. De fato, a única diferença na demonstração, fica por conta das potências e da estimativa (3.39). Então fazendo os devidos ajustes nessas potências(veja (4.36)), a demonstração segue-se do mesmo modo. Portanto iremos omiti-lá. Na próxima Seção, discutiremos a hipótese crucial desse Teorema, ou seja, (4.35).

∎

4.2 Algumas Verificações

Vamos admitir pelo momento que vale (4.29).

Agora, vamos analisar o **Teorema 4.10** com as respectivas mudanças de expoentes; isto é, devemos levar em conta a função v_ϵ, como em (3.39), mas com a potência $(1 < \kappa < \beta + 2)$. Assim, temos:

$$\int_0^R r^\sigma |v_\epsilon|^\kappa \, dr = \begin{cases} 0(\epsilon^{\sigma+\kappa-\alpha}) \,, & \text{se } \tilde{\eta} < 0, \\ 0(\epsilon^{s\kappa} |\ln \epsilon|) \,, & \text{se } \tilde{\eta} = 0, \\ 0(\epsilon^{s\kappa}) \,, & \text{se } \tilde{\eta} > 0, \end{cases} \tag{4.36}$$

onde $\tilde{\eta} = \sigma + 1 - \dfrac{n}{m}\kappa$. Essas estimativas seguem-se do mesmo modo como em (3.39).

Verificação de (4.35) para o caso $(\sigma + 1 - \dfrac{n}{m}\kappa < 0)$

Procedendo como no Corolário 3.13, obtêm-se:

$$(\sigma + 1) - s(\beta + 2) + (s\frac{m}{n} - 1)(\sigma + 1) = s(\frac{m}{n}(\sigma + 1) - (\beta + 2)).$$

Para verificarmos as hipóteses do Teorema (4.10), deveremos mostrar que o número acima é negativo. Mas, como $m(\sigma + 1)/n - \kappa < 0$ e $\kappa < \beta + 2$, então $m(\sigma + 1) - (\beta + 2) < m(\sigma + 1) - \kappa < 0$. Assim, desde que os expoentes satisfaçam essa condição o problema (4.1) possui solução. Para se ter uma idéia do que representa essa restrição, vamos analisa-lá no caso $\sigma = \alpha = N - 1$, $\beta = p - 2$ e $1 < \kappa < \beta + 2$

$$(\sigma + 1) - \frac{n}{m}\kappa = N - \frac{N - p}{p - 1}\kappa < 0,$$

ou,

$$N(\frac{p-1}{N-p}) < \kappa \; (< p). \tag{4.37}$$

Note que essa última restrição nos diz que $p^2 < N$. Assim, no caso $p = 2$(Laplaciano), so obteremos solução se $N \geq 5$. Os outros casos cobrirão essas restrições como veremos.

Verificação de (4.35) no caso $(\sigma + 1 - \dfrac{n}{m}\kappa = 0)$

Isso é o mesmo que $\sigma + 1 = \dfrac{n}{m}\kappa$, e assim a demonstração seria simplesmente analisar o sinal dos expoentes

$$\sigma + 1 - s(\beta + 2) + s\kappa - \frac{n}{m}\kappa. \tag{4.38}$$

Pelas hipótese sobre s, n e m temos $s(\beta + 2) = \dfrac{n}{m}$. Portanto, de (4.38) e $(H5)$, segue-se que

$$\sigma + 1 - s(\beta + 2) + s\kappa - \frac{n}{m}\kappa \;\; = s(\kappa - (\beta + 2)) < 0.$$

Portanto, concluímos que a soma em (4.38) é negativa. Essa soma é a potência de ϵ que aparecerá quando formos analisar o caso $\sigma + 1 - \dfrac{n}{m}\kappa = 0$. Como a integral correspondente será de ordem $O(|\ln\epsilon|)$, obteremos o mesmo resultado.

Verificação de (4.35) no caso $(\sigma+1-\dfrac{n}{m}\kappa>0)$

Este é o correspondente caso em dimensão $N=3$ e 4, para o operador Laplaciano. Vamos supor que

$$f(r,u)\geq \mu r^{\sigma}u^{\kappa-1}, \begin{cases} \forall u\in[R_o,+\infty) \text{ uniformemente em } \mu>0, \\ \omega\subset(0,R),\ 1<\kappa<\beta+2, \end{cases} \tag{4.39}$$

Corolário 4.11 *Suponha que sejam válidas as hipóteses (3.4) e (3.7), ou (3.8),* $(H1)-(H5)$ *e f(r,u) satisfaz* $(f1)$*,* $(f2)$*,* $(f3)$ *e (4.39). Então vale (4.35).*

Prova: Seja $0<R_o$, então

$$f(r,u)\geq \mu\chi_I(u)r^{\sigma}u^{\kappa-1},$$

onde $\chi_I(r)$ é a função característica do intervalo $I\subset[R_o,+\infty)$. Usando as mesmas idéias como no **Cor. 3.13**, e o fato de que $(1+t^n\leq 2t^n)$ se $(t\geq 1)$, e nesse caso, $(1/(1+t^n)\geq 1/(2t^n))$, temos que

$$\begin{aligned} \epsilon^{\sigma+1-s(\beta+2)}\int_0^{\epsilon^{-1}}F[(\frac{\epsilon^{sm-n}}{1+t^n})^{1/m}]t^{\sigma}\,dt &\geq \mu\epsilon^{\sigma+1-s(\beta+2)}\int_0^{\epsilon^{-1}}\frac{\epsilon^{(sm-n)\kappa/m}}{(1+t^n)^{\kappa/m}}t^{\sigma}\,dt \\ &= \mu\epsilon^{\sigma+1-s(\beta+2)+(sm-n)\kappa/m}\int_0^{\epsilon^{-1}}\frac{t^{\sigma}}{(1+t^n)^{\kappa/m}}\,dt \\ &\geq C\mu\epsilon^{\sigma+1-s(\beta+2)+(sm-n)\kappa/m}\left\{\int_0^1\frac{t^{\sigma}}{(1+t^n)^{\kappa/m}}\,dt+\int_1^{\epsilon^{-1}}t^{\sigma-\frac{n}{m}\kappa}\,dt\right\} \\ &= C\mu\epsilon^{\sigma+1-s(\beta+2)+(sm-n)\kappa/m}\left\{\epsilon^{-(\sigma-\frac{n}{m}\kappa+1)}+\int_0^1\frac{t^{\sigma}}{(1+t^n)^{\kappa/m}}\,dt-\frac{1}{2^{\frac{\kappa}{m}}}\right\}. \end{aligned} \tag{4.40}$$

Agora, note que:

$$\sigma+1-s(\beta+2)+(sm-n)\kappa/m-(\sigma-\tfrac{n}{m}\kappa+1)=s(\kappa-(\beta+2))<0. \tag{4.41}$$

Pela hipótese $(\sigma+1)-\frac{n}{m}\kappa>0$, concluímos que o último membro de (4.40) é positivo. Isso, juntamente com (4.41) prova o resultado. ■

Observação 4.12 *Para compreendermos um pouco o que significa a hipótese sobre o* *sinal de* $(\sigma+1)-\frac{n}{m}\kappa$, *fazendo* $\sigma=\alpha=N-1$ *e* $\beta=p-2$, *temos a seguinte situação:*

$$1)\sigma+1-\frac{n}{m}\kappa<0\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} p^2<N \text{ e } 1<\kappa<p,\\ ou\ N(\frac{p-1}{N-p})<\kappa<p,\end{array}\right.$$

$$2)\sigma+1-\frac{n}{m}\kappa=0\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} \frac{2N}{N+1}<p<p^2<N,\\ e\ \ 1<\kappa=N(\frac{p-1}{N-p})<p,,\end{array}\right.$$

$$3)\sigma+1-\frac{n}{m}\kappa>0\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} N>p>\frac{2N}{N+1} \text{ e } 1<\kappa<p,\\ ou\ 1<\kappa<N(\frac{p-1}{N-p})\end{array}\right.$$

Note que

$$(\frac{2N}{N+1})^2<N\Rightarrow 2N<(N+1)^2,$$

isto é, se

$$p=\frac{2N}{N+1}\Longrightarrow N(\frac{p-1}{N-p})=\kappa,$$

pelo segundo caso, não existe solução.

4.2.1 Uma Limitação a Priori para as Soluções Positivas

Nesta seção, obteremos um limite para as soluções positivas obtidas pelo Corolário 4.11.

Os resultados aqui, estão relacionados com a hipótese $(\sigma+1-\frac{n}{m}\kappa>0)$.

Suponhamos que

$$f(r,u)\leq\left\{\begin{array}{c}\mu r^{\sigma}u^{\beta+1}, \forall\ u\geq 1 \text{ e } \ r\in[R_o,R],\\ C(R_o),\ \ \text{se}\ \ u<1.\end{array}\right. \tag{4.42}$$

com $C(R_o)$ e μ constantes positivas. Por exemplo, a função $f(r,u)=\mu r^{\sigma}|u|^{\kappa-2}u$, satisfaz (4.42).

Corolário 4.13 *Suponha que sejam válidas as hipóteses (3.4) e (3.7), ou (3.8),* $(H1)-(H5)$ *e* $f(r,u)$ *satisfaz* $(f1),(f2),(f3)$, *(4.39) e (4.42). Então, se*

$$\sigma+1-\frac{n}{m}(\beta+2)>0,$$

existe $\mu^*>0$ *tal que para cada* $0<\mu\leq\mu^*$, *as soluções do problema (4.1) verificam*

$$\max_{r\in[0,R]}\{u(r)\}\leq 1. \tag{4.43}$$

Prova: Observemos primeiramente, que por $(H5)$, $\kappa - 1 < \beta + 1$. Pela hipótese (4.42), temos que

$$F(r,u) \leq r^\sigma \tilde{F}(u) = \begin{cases} \mu \frac{r^\sigma}{\beta+2} u^{\beta+2}, \forall\ u \geq 1 \text{ e } r \in [R_o, R], \\ C(R_o), \quad \text{se} \quad u < 1. \end{cases} \tag{4.44}$$

Procedendo como em (3.51), mas com as estimativas (4.36) teremos:

$$\begin{aligned} \int_0^R F(r, t_\epsilon v_\epsilon)\, dr &\leq \int_0^R r^\sigma \tilde{F}(t_\epsilon v_\epsilon)\, dr + C(R_o) \\ &= \mu \epsilon^{\sigma+1} \int_0^{R\epsilon^{-1}} \tilde{F}[(A \frac{\epsilon^{sm-n}}{(1+t^n)})^{1/m}] t^\sigma\, dt + C(R_o). \end{aligned} \tag{4.45}$$

Agora, multiplicando ambos os membros por $\epsilon^{-s(\beta+2)}$; resulta que

$$\begin{aligned} \epsilon^{\sigma+1-s(\beta+2)} \int_0^{\epsilon^{-1}} \tilde{F}[(\frac{\epsilon^{sm-n}}{1+t^n})^{1/m}] t^\sigma\, dt \leq\ & \mu \epsilon^{\sigma+1-n(\beta+2)/m} \int_0^{\epsilon^{(sm-n)/n}} t^{\sigma - \frac{n}{m}(\beta+2)}\, dt. \\ +\ & C(R_o) \\ =\ & \mu C \epsilon^{\sigma+1-n(\beta+2)/m + (\sigma+1-\frac{n}{m}(\beta+2))(sm-n)/n} + C(R_o). \end{aligned}$$

Portanto, supondo que o expoente da última desigualdade acima seja positivo; isto é,

$$\sigma + 1 - \frac{n}{m}(\beta+2) + (\sigma + 1 - \frac{n}{m}(\beta+2))(sm-n)/n = (\sigma + 1 - \frac{n}{m}(\beta+2)) s \frac{m}{n} > 0,$$

o que juntamente com (4.35) da o resultado. ∎

Observação 4.14 *Portanto, para μ suficientemente grande o problema (4.1) terá solução, e novamente haverá duas soluções positivas somente para algum intervalo $(\mu^*, \lambda) \subset (\mu^*, \Lambda)$.*

4.3 Verificação de Algumas Desigualdades

As desigualdade que usaremos aqui bem como algumas estimativas, constam nos apêndices A e B. Estas estimativas são necessárias para podermos aplicar o Teorema do Passo da Montanha. Em verdade, necessitamos delas para comprovar (4.29).

$$
\begin{aligned}
\int_0^R r^\alpha |u_o' + av_\epsilon'|^{\beta+2} &= \int_0^R r^\alpha \left\{ |u_o'|^2 + |av_\epsilon'|^2 + 2au_o' \cdot v_\epsilon' \right\}^{(\beta+2)/2} \leq \\
&\leq \int_0^R r^\alpha |u_o'|^{\beta+2} + a^{\beta+2} \int_0^R r^\alpha |v_\epsilon'|^{\beta+2} + (\beta+2)a \int_0^R r^\alpha |u_o'|^\beta u_o' \cdot v_\epsilon' + \\
&+ C \cdot \begin{cases} \displaystyle\int_0^R r^\alpha a |u_o'|^{\beta+2-k_1} |v_\epsilon'|^{k_1} & , \text{ se } k_1 \in [\beta+1, 2], \\ & \quad 2 \leq \beta + 2 < 3; \\ \displaystyle\int_0^R r^\alpha a (|u_o'|^\beta |v_\epsilon'|^2 + |u_o'||v_\epsilon'|^{\beta+1}) & , \text{ se } 3 \leq \beta + 2; \\ \displaystyle\int_0^R r^\alpha a |u_o'|^{\beta+2-k_2} |v_\epsilon'|^{k_2} & , \text{ se } k_2 \in (1, \beta+2), \\ & \quad 1 < \beta + 2 < 2. \end{cases}
\end{aligned}
$$

De (3.38) temos que

$$
\int_0^R r^\alpha |u_o'|^\beta u_o' \cdot v_\epsilon' \leq C(u_o) \left(\int_0^R r^\alpha |v_\epsilon'|^{\beta+2} \right)^{1/(\beta+2)} = C(u_o) \left(S + O(\epsilon^{s(\beta+2)}) \right)^{1/(\beta+2)},
$$

e também que

$$
\begin{aligned}
\int_0^R r^\alpha |u_o'|^{\beta+2-k_1} |v_\epsilon'|^{k_1} &\leq C(u_o) \left(\int_0^R r^\alpha |v_\epsilon'|^{k_1(\beta+2)/(\beta+1)} \right)^{(\beta+2)/(\beta+1)} \\
&= C(u_o) \left(S + O(\epsilon^{s(\beta+2)}) \right)^{(\beta+2)/(\beta+1)},
\end{aligned}
$$

para $k_1 = \beta + 1$.

$$
\int_0^R r^\alpha (|u_o'|^\beta |v_\epsilon'|^2 + |u_o'|^1 |v_\epsilon'|^{\beta+1}) \leq C(u_o)(S + O(\epsilon^{s(\beta+2)}))^{(\beta+2)/(\beta+1)},
$$

para $3 \leq \beta + 2$.

$$
\begin{aligned}
\int_0^R r^\alpha |u_o'|^{\beta+2-k_2} |v_\epsilon'|^{k_2} &\leq C(u_o) \|v_\epsilon\|_{X_R}{}^{k_2/(\beta+2)} \\
&= C(u_o)(S + O(\epsilon^{s(\beta+2)}))^{k_2/(\beta+2)},
\end{aligned}
$$

para $k_2 \in (1, \beta+2)$, $1 < \beta + 2 < 2$. Finalmente,

$$
\int_0^R r^\gamma (u_o + av_\epsilon)^{q(\gamma)} \geq \int_0^R r^\gamma u_o^{q(\gamma)} + a^{q(\gamma)} \int_0^R r^\gamma v_\epsilon^{q(\gamma)}.
$$

Agora, usando essas desigualdades juntamente com a hipótese $(F1)$ e (3.50, pag.27), temos que

$$\begin{aligned}
\Phi_+(u_o + a_\epsilon v_\epsilon) &\leq \Phi_+(u_o) + \Phi_+(a_\epsilon v_\epsilon) + C(u_o)\left(S + O(\epsilon^{s(\beta+2)})\right)^{1/(\beta+2)} \\
&+ \left\{ \begin{array}{l} C(u_o)(S + O(\epsilon^{s(\beta+2)}))^{(\beta+2)/(\beta+1)} \\ C(u_o)(S + O(\epsilon^{s(\beta+2)}))^{k_2/(\beta+2)} \end{array} \right. \\
&= \Phi_+(u_o) + (\frac{1}{\beta+2} - \frac{1}{q(\gamma)})S - \int_0^R F(r, a_\epsilon v_\epsilon) \\
&+ C(u_o)(S + O(\epsilon^{s(\beta+2)})) + \left\{ \begin{array}{l} C(u_o)(S + O(\epsilon^{s(\beta+2)}))^{(\beta+2)/(\beta+1)} \\ C(u_o)(S + O(\epsilon^{s(\beta+2)}))^{k_2/(\beta+2)}. \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Note que por (4.24), $a_\epsilon > 0$. Pelo **Teorema 4.10** concluímos para ϵ suficientemente pequeno que

$$C(u_o)(S + O(\epsilon^{s(\beta+2)})) + \left\{ \begin{array}{l} C(u_o)(S + O(\epsilon^{s(\beta+2)}))^{(\beta+2)/(\beta+1)} \\ C(u_o)(S + O(\epsilon^{s(\beta+2)}))^{k_2/(\beta+2)} \end{array} \right\} - \int_0^R F(r, a_\epsilon v_\epsilon) < 0.$$

O que prova (4.29)

■

4.4 Algumas Propriedades da Constante Λ

Nesta seção, trataremos algumas questões delicadas que envolvem a constante Λ(veja Observação 4.2).

Foi provado em [58] que o problema (4.1) não possui solução para $\lambda \leq 0$(veja também [18], [34] e [53]). Definimos em (4.6) a função

$$h(t) = C_1 t^{\beta+2} - \lambda C_2 t^\kappa - C_3 t^{q(\gamma)},$$

e pedimos que Λ fosse tal que $h(t)$ possuíse um máximo positivo para cada $0 < \lambda < \Lambda$. Em (4.10) definimos o funcional

$$\Phi(u) = \frac{1}{\beta+2}\int_0^R r^\alpha |u'|^{\beta+2} - \frac{1}{q(\gamma)}\int_0^R r^\gamma |u|^{q(\gamma)} \varphi(u) - \int_0^R F_\varphi(r, u), \tag{4.46}$$

e pedimos que

$$\Phi(u) > -\left(\frac{1}{\beta+2} - \frac{1}{q(\gamma)}\right) S^{(\gamma+1)/(\gamma+\beta-\alpha+2)}.$$

Veja (4.8)-(4.14) para recordar essas definições. Agora, defina a constante

$$\Lambda \equiv \sup\left\{\lambda > 0 \,\middle|\, \sup_{t\in I\!R} h(t) > 0, \quad \text{e} \quad 0 > \inf_{u\in X_R} \Phi(u) > -\left(\frac{1}{\beta+2} - \frac{1}{q(\gamma)}\right) S^{(\gamma+1)/(\gamma+\beta-\alpha+2)}\right\} \tag{4.47}$$

para $u \in X_R$.

Note que para cada $\lambda > 0$, estamos definindo um funcional Φ.

Provaremos o seguinte resultado:

Teorema 4.15 *(i) Temos que $0 < \Lambda < \infty$, ou seja, é finita.*

(ii) Existe uma solução fraca para $\lambda = \Lambda$.

Observação 4.16 *Resultados de regularização no caso de (ii), em geral é uma questão bastante delicada. No caso do Laplaciano, foi provado que para dimensões $N \leq 10$ as soluções são clássicas e, para $N > 10$ pertencem a $W^{2,p}(\Omega) \bigcap W_o^{1,p}(\Omega)$(veja [48]).*

Observação 4.17 *Para o seguinte modelo de função:*

$$f(r,u) = \lambda r^{\sigma}|u|^{\kappa-2}u, \tag{4.48}$$

onde κ e σ estão em acordo com $(H5)$, foi estudado para o operador Laplaciano por Ambrosetti-Brezis-Cerami [3] e para o p-Laplaciano por García-Peral [28] e [29]. No caso do p-Laplaciano, eles encontraram as seguintes restrições sobre os expoentes e a constante Λ:

Para algum $0 < \Lambda_o$ pequeno, o problema (4.1) possui duas soluções positivas desde que $0 < \lambda < \Lambda_o$ e

$$\frac{2N}{N+2} < p < 3 \quad e \quad 1 < q < p, \quad ou \quad p \geq 3 \quad e \quad p > q > p^* - \frac{2}{p-1}.$$

Eles não provaram se a constante Λ_o era ótima, e tampouco, se era atingida.

Prova do Teorema:

(i) Pelos resultados das Seções anteriores, sabemos que $0 < \Lambda$. Assim, resta provar que é finita.

A prova desse fato, será por contradição e, denotaremos Φ por Φ_λ.

Suponha que Λ seja ilimitada. Então, existe uma sequência $\{u_{\lambda_n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X_R$, onde u_{λ_n} é a solução associada a λ_n, isto é,

$$\langle \Phi'_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}), u_{\lambda_n}\rangle = 0 \quad \text{ e } \quad \Phi_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}) < 0. \tag{4.49}$$

Além disso, que $\lambda_n \longrightarrow +\infty$ quando $n \longrightarrow +\infty$. Agora, observe que pelo fato de $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}_+} h(t) > 0$(ou $\Phi_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}) < 0$), temos que a sequência $\{u_{\lambda_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em X_R. Isso segue-se de (4.11)-(4.13). Daí, existe uma constante $R_o > 0$, tal que

$$R_o \geq \|u_{\lambda_n}\|_{X_R}^{\beta+2} = \|u_{\lambda_n}\|_{q(\gamma)}^{q(\gamma)} + \lambda_n \int_0^R f_\varphi(r, u_{\lambda_n})u_{\lambda_n}. \tag{4.50}$$

Então, como estamos supondo que $\lambda_n \longrightarrow +\infty$, pela hipótese que $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} h(t) > 0$ e, lembrando que

$$\overline{h}(\|u_{\lambda_n}\|_{X_R}) = C_1\|u_{\lambda_n}\|_{X_R}^{\beta+2} - \lambda_n C_2\|u_{\lambda_n}\|_{X_R}^{\kappa} - C_3\|u_{\lambda_n}\|_{X_R}^{q(\gamma)}, \tag{4.51}$$

temos que

$$\|u_{\lambda_n}\|_{X_R}^{\kappa} \longrightarrow 0, \tag{4.52}$$

ou,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} h(t) \leq 0 \quad \text{para} \quad \lambda \quad \text{suficientemente grande.} \tag{4.53}$$

Mas (4.53) não pode ocorrer. Portanto, pelos resultados de convergência de Brezis-Lieb [12], veja também [42], obtemos que $u_{\lambda_n} \longrightarrow 0$ em X_R. Pela definição de Λ, e lembrando que neste caso o funcional Φ_{λ_n} satisfaz a condição $(PS)_c$, concluímos

$$0 > \inf_{u\in X_R} \Phi_{\lambda_n}(u) = \Phi_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}) \geq \Phi_{\lambda_{n+p}}(u_{\lambda_{n+p}}) = \inf_{u\in X_R} \Phi_{\lambda_{n+p}}(u), \tag{4.54}$$

para cada p. Portanto, fixando $n_o \in \mathbb{N}$, para cada $n \geq n_o$ teremos de (4.54) que

$$0 > \Phi_{\lambda_{n_o}}(u_{\lambda_{n_o}}) \geq \Phi_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}) \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n \longrightarrow +\infty. \tag{4.55}$$

O que é uma contradição.

Segue-se que a constante Λ é finita.

(ii) Seja $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ uma sequência satisfazendo:

$$\lambda_n \leq \lambda_{n+1} \leq \Lambda \quad \text{e} \quad \lambda_n \longrightarrow \Lambda. \tag{4.56}$$

Pelo Lema 4.3, usando o Princípio Variacional de Ekeland [26], para cada λ_n, podemos encontrar pontos críticos $u_n \in X_R$, tais que

$$\Phi_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}) = \inf_{w\in X_R} \Phi_{\lambda_n}(w), \qquad \Phi_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}) < 0 \quad \text{e} \quad \langle \Phi'_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}), u_{\lambda_n}\rangle = 0. \tag{4.57}$$

Observe que

$$\Phi_{\lambda_n}(w) \geq \Phi_{\lambda_{n+1}}(w) \Longrightarrow \Phi_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}) \geq \Phi_{\lambda_{n+1}}(u_{n+1}) \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.58}$$

Como estamos supondo que $\Phi_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}) < 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, concluímos novamente pelo Lema 4.3, que a sequência $(u_{\lambda_n})_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, isto é,

$$\|u_{\lambda_n}\|_{X_R} \leq R_1 \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}.$$

Daí, podemos extrair uma subsequência a qual vamos denotar por $(u_{\lambda_n})_{n\in\mathbb{N}}$, tal que

$$\begin{gathered} u_{\lambda_n} \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad X_R^*, \\ u_{\lambda_n} \longrightarrow u \quad \text{em} \quad L^{\kappa}([0,R]), \\ u_{\lambda_n}(r) \longrightarrow u(r) \quad \text{q.t.p. sobre} \quad (0,R), \\ \lambda_n \longrightarrow \Lambda. \end{gathered}$$

Então,

$$\langle \Phi'_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}), v\rangle \quad \longrightarrow \quad \langle \Phi'_{\Lambda}(u), v\rangle \quad \forall v \in X_R. \tag{4.59}$$

Isto é, u é solução fraca de (4.1) para $\lambda = \Lambda$. Vamos mostrar agora, que

$$u \not\equiv 0.$$

Fixe $n_o \in I\!N$. Então, de (4.56)-(4.58), temos

$$0 > \Phi_{\lambda_{n_o}}(u_{n_o}) \geq \Phi_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}) \geq \Phi_{\Lambda}(u_{\lambda_n}). \tag{4.60}$$

Usando (4.57), obtemos que

$$\Phi_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}) = (\frac{1}{\beta+2} - \frac{1}{q(\gamma)})\|u_{\lambda_n}\|_{q(\gamma)}^{q(\gamma)} + \lambda_n \int_0^R (\frac{1}{\beta+2} f_\varphi(r, u_{\lambda_n})u_{\lambda_n} - F_\varphi(r, u_{\lambda_n})). \tag{4.61}$$

Como $(\frac{1}{\beta+2} - \frac{1}{q(\gamma)}) > 0$, e $u_{\lambda_n} \rightharpoonup u$ em $L^{q(\gamma)}$, concluímos que Φ_{λ_n} é semicontínuo inferiormente. De (4.60) e (4.61), obtemos:

$$0 > \liminf_{n \longrightarrow +\infty} \Phi_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}) \geq \liminf_{n \longrightarrow +\infty} \Phi_{\Lambda}(u_{\lambda_n}) \geq \Phi_{\Lambda}(u). \tag{4.62}$$

Com isso, provamos que $u \not\equiv 0$.

■

Parte II

Sobre uma conjectura de Brézis&Nirenberg

Capítulo 5

Introdução

Seja Ω um domínio limitado no $\mathbb{R}^N$ com $N \geq 3$. Estamos interessados em resultados de não existência, existência e multiplicidade de soluções para o problema

$$\begin{array}{rcll} -\Delta u &=& u^{\frac{N+2}{N-2}} + \lambda u^q & \text{em} \quad \Omega \quad \text{com } 1 \leq q \leq \frac{N}{N-2}, \\ u &>& 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ u &=& 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{array} \tag{5.1}$$

e $\lambda \in \mathbb{R}$. No celebrado artigo de H. Brézis e L. Nirenberg [14], eles provaram que para $N \geq 4$, o problema (5.1) possui solução para cada $\lambda > 0$ e $1 \leq q \leq \frac{N}{N-2}$ e, $0 < \lambda < \lambda_1(\Omega)$ quando $q = 1$, onde $\lambda_1 = \lambda_1(\Omega)$ denota o primeiro autovalor do operador $\langle -\Delta, H_o^1(\Omega) \rangle$. No caso $N = 3$ e $1 < q \leq 3$, eles provaram a existência de solução somente para $\lambda > \lambda^* > 0$ *grande* e, quando $q = 1$ provaram a existência de solução para $\lambda \in (\frac{\lambda_1}{4}, \lambda_1)$, e não existência caso contrário.

Diante das dificuldades que apareceram em dimensão 3, muitas questões foram pontuadas por Brézis-Nirenberg(veja pag. 471 em [14]). Comecemos, observando que neste caso, o problema (5.1) torna-se :

$$\begin{array}{rcll} -\Delta u &=& u^5 + \lambda u^q & \text{em} \quad \Omega \quad \text{com } 1 \leq q \leq 3, \\ u &>& 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ u &=& 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{array} \tag{5.2}$$

Para domínios Ω estritamente estrelados, além dos resultados mencionados acima, provaram que existe um $\lambda_o = \lambda_o(q, \Omega)$, tal que para $\lambda < \lambda_o$ o problema (5.2) nao possui solução. Nestes resultados, não foi esclarecido se $\lambda_o = \lambda^*$ mesmo quando Ω for estrelado. Quando $q = 1$ e Ω for uma bola, isto é, $\Omega = B_R(0)$, eles mostraram que $\lambda^* = \lambda_o = \frac{1}{4R^2}\pi^2$. Ainda no caso de Ω ser uma bola e em dimensão 3, computacionalmente foi sugerido que:

(a) Se $q = 3$, existe um $\lambda_o > 0$ tal que

  (i) para $\lambda > \lambda_o$ existe uma *única* solução de (5.2),

  (ii) para $\lambda \leq \lambda_o$ não existe solução de (5.2).

(b) Se $1 < q < 3$, existe um $\lambda_o > 0$ tal que

(*i*) para $\lambda > \lambda_o$ existem *duas* soluções de (5.2),

(*ii*) para $\lambda = \lambda_o$ existe uma *única* solução de (5.2),

(*iii*) para $\lambda < \lambda_o$ não existe solução de (5.2).

Em [4] esta conjectura foi demonstrada usando o *shooting method.* A motivação para estudarmos novamente este problema, primeiramente foi o fato de encontrarmos uma solução variacional e segundo, termos obtido algumas características do funcional associado e das soluções do problema, as quais ainda não haviam sido observadas e estão contidas nos Teoremas abaixo. Para a prova destes Teoremas usaremos uma combinação de uma variante do Princípio Variacional de Ekeland, devido a Ghoussoub [31], juntamente com os resultados de Compacidade Global de Struwe [65].

Um outro tópico que estudaremos, será a desigualdade:

$$\|Du\|^2_{L^2(\Omega)} \geq S_N \|u\|^2_{L^{\frac{2N}{(N-2)}}(\Omega)} + \lambda_q(\Omega)\|u\|^2_{L^q(\Omega)}, \quad \forall u \in H^1_o(\Omega), \tag{5.3}$$

para cada $1 \leq q < N/(N-2)$, onde $\lambda_q > 0$ é uma constante dependendo somente de q, $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 3)$ um domínio limitado, e S_N é a constante ótima de Sobolev na imersão crítica. Os fatos mais relevantes sobre λ_q sao:

$\lambda_q 1)$ λ_q é ótima, no sentido de que para qualquer constante $\tilde{\lambda}_q > \lambda_q$ a desigualdade (5.3) não é válida.

$\lambda_q 2)$ λ_q não é conhecida em geral, isto é, não é conhecida sua expressão em termos de q e Ω.

$\lambda_q 3)$ Não é conhecido se existe $u \in H^1_o(\Omega)$ realizando a igualdade em (5.3); isto é, não sabemos se λ_q é atingida.

No caso $N = 3$, a prova de (5.3) foi dada em [14], além disso, foi observado que, quando $\Omega = B_R(0)$ e $q = 2$, $\lambda_2 = \frac{\lambda_1(B_R(0))}{4R^2}$. Veja [13] para a prova do caso geral e generalizações. O item $\lambda_q 2)$ na verdade é uma pergunta de Brézis-Lieb feita em [13].

Seja $N \geq 3$. Defina os funcionais

$$\Phi_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |Du|^2 - \frac{1}{2^*}\int_\Omega |u|^{2^*} - \frac{\lambda}{q+1}\int_\Omega |u|^{q+1}, \tag{5.4}$$

$$\varphi_\lambda(u) = \|Du\|^2_{L^2(\Omega)} - S\|u\|^2_{L^{2^*}(\Omega)} - \lambda\|u\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)}, \tag{5.5}$$

e as variedades

$$\mathcal{N} \equiv \left\{u \in H^1_o(\Omega) \mid \langle \Phi'_\lambda(u), u\rangle = 0\right\}, \tag{5.6}$$

$$\mathcal{M} \equiv \left\{ u \in \mathcal{N} \,\middle|\, \begin{array}{l} \varphi_\lambda(u) \leq 0, \\ \psi(u) = \displaystyle\int_\Omega |u|^{q+1}\,dx \geq \Theta \end{array} \right\}, \tag{5.7}$$

onde $\Theta > 0$ é um número *pequeno* independente de λ. A escolha de Θ, será feita nos Lemas 6.1 e 6.4.

Esta parte do trabalho está organizada da seguinte forma:

No Capítulo 6 faremos um estudo do funcional Φ_λ em relação ao nível crítico $\frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}$.

No Capítulo 6 fizemos algumas estimativas e comentários sobre resultados de não existência para o problema (5.2).

No Capítulo 8 calcularemos o valor da constante λ_q quando $\Omega = B_R(0)$. Precisamente, provaremos que:

Teorema 7.1 *Seja $\Omega \subset I\!R^N (N \geq 3)$ um domínio limitado. Então a constante $\lambda_q(\Omega)$ da desigualdade (5.3) possui o seguinte limite inferior:*

$$\lambda_q(\Omega) \geq \lambda_q(B_R(0)) = \frac{C_q \pi^2}{4R^2 \omega_{N,R}^{\frac{2-q}{q}}}, \quad para \quad 1 \leq q < \frac{N}{N-2},$$

$$onde\, C_q = \frac{\displaystyle\int_0^R \cos^2(\frac{1}{2R}\pi r)\, dr}{\left(\displaystyle\int_0^R \cos^q(\frac{1}{2R}\pi r)\, dr\right)^{2/q}}, \text{ para algum } R > 0 \text{ tal que } volume(\Omega) = volume(B_R(0))$$

e, $\omega_{N,R}$ = medida da $\partial(B_R(0))$.

Este Teorema responde em parte a pergunta $\lambda_q 2)$, no caso de $\Omega = B_R(0)$.

No Capítulo 9 provaremos o seguinte resultado:

Teorema 9.1 *Seja $\Omega \subset I\!R^N (N \geq 3)$ um domínio limitado. Seja $\Phi_\lambda : H_o^1(\Omega) \longrightarrow I\!R$ o funcional definido em (5.4), para $1 \leq q < \dfrac{N}{N-2}$. Então existe $\lambda^* > 0$, dependendo somente de Ω, tal que para todo $\lambda > \lambda^*$, temos que Φ_λ é limitado superiormente sobre $\mathcal{M}$.*

Ainda neste Capítulo calcularemos a constante λ^* do Teorema 9.1, quando $\Omega = B_R(0)$.

No Capítulo 10 obteremos os seguintes resultados:

Teorema 10.5 *Seja $\Omega \subset I\!R^N (N \geq 4)$ um domínio limitado. Para $1 < q < \frac{N}{N-2}$ existe um $\lambda^* > 0$, tal que o problema (5.1) possui pelo menos duas soluções para todo $0 < \lambda^* < \lambda$. Se denotarmos por u_λ e v_λ estas soluções, teremos que*

$$\Phi_\lambda(u_\lambda) < \frac{1}{N} S^{N/2} \leq \Phi_\lambda(v_\lambda).$$

Observe que o Teorema 10.5 vale para qualquer tipo de domínio limitado. Em domínios contráteis, resultados de multiplicidade para este tipo de problema não são conhecidos. Por outro lado, quando o domínio Ω não for contrátil, O. Rey em [61] provou para dimensões $N \geq 5$, que existe um $\tilde{\lambda} > 0$ tal que para cada $0 < \lambda < \tilde{\lambda}$ o problema (5.2) possui uma Categoria de soluções; isto é, a quantidade de soluções está relacionada com a quantidade mínima de partes contráteis que o domínio possa ser decomposto. Por exemplo, se o domínio for um anel então podemos decompô-lo em duas partes. No caso

$N = 4$, o mesmo resultado foi obtido por M. Lazzo em [41]. Com o Teorema 10.10, completaremos o resultado de multiplicidade de soluções para o problema (5.2) em domínios $\Omega \subset I\!R^N (N \geq 3)$ contráteis ou não. Note porém, que o nosso resultado difere dos resultados obtidos em [61] e [41].

Brézis-Nirenberg [14] mostraram a existência de uma solução do problema (5.1), desde que

$$\sup_{t \geq 0} \Phi_\lambda(tv_o) < \frac{1}{N} S^{N/2} \tag{5.8}$$

para algum $v_o \in H_o^1(\Omega)$, $v_o \not\equiv 0$ e $v_o \geq 0$. Entretanto, em dimensão 3 no caso $1 < q < 3$, este resultado ficou incompleto, no sentido de que não ficou claro quando valia (5.8). Mostraremos que existe um $\lambda_o > 0$, tal que para $\lambda_o < \lambda < \lambda_1(\Omega)$ existe v_o nestas condições quando $\Omega = B_R(0)$.

Para $N \geq 4$, (5.8) é sempre válida.

Teorema 10.10 *Seja $\Omega \subset I\!R^3$ um domínio limitado. Para $1 < q < 3$*

i) existe $\lambda^* > 0$, tal que para cada $\lambda^* < \lambda$, o problema (5.2) possui pelo menos uma solução $u \in H_o^1(\Omega)$, com $\Phi_\lambda(u) \geq \frac{1}{3} S^{3/2}$,

ii) existe $\lambda^{**} = \lambda^{**}(\lambda^*)$, tal que o problema (5.2) possui pelo menos duas soluções para cada $\lambda^{**} < \lambda$.

No caso de Ω ser uma bola, podemos dar uma descrição melhor de λ^* e λ^{**}.

Teoream 10.11 *Seja $\Omega = B_R(0) \subset I\!R^3$ a bola de centro na origem e raio R. Então o seguinte vale:*

(a) Se $q = 3$,

  (i) para $\lambda > \frac{\pi^2}{R^2}$ existe **pelo menos** *uma solução de (5.2),*

(b) Se $1 < q < 3$, existe $0 < \lambda_o = \lambda_o(q, R) < \frac{\pi^2}{R^2}$ tal que

  (i) para $\lambda > \lambda_o$ existem **pelo menos** *duas soluções de (5.2),*

  (ii) para $\lambda = \lambda_o$ existe **pelo menos** *uma solução de (5.2),*

Resultados de unicidade de solução para o problema (5.2) quando $q = 1$, foram obtidos por W-M. Ni [51] para $N = 3$. Para $N > 3$ veja Z. Liqun [44] e P. N. Srikanth [64]. Para um resumo completo e generalizações sobre questões de unicidade no caso $q = 1$, veja Adimurthi-Yadava [1].

Capítulo 6

Comportamento com Relação ao Nível Crítico

Considere a família $U_\epsilon : \Omega \longrightarrow I\!R^N$, dada por

$$U_\epsilon(x) = \frac{\phi(x)}{(\epsilon + |x|^2)^{\frac{N-2}{2}}},$$

onde $\phi \in C_o^\infty(\Omega)$, é tal que $0 \leq \phi(x) \leq 1$ e $\phi(x) \equiv 1$ em uma vizinhança da origem. Foi provado por Brézis e Nirenberg em [14] que, para

$$u_\epsilon(x) = \frac{U_\epsilon(x)}{||U_\epsilon||_{2^*}}$$

temos

$$\begin{array}{lrcl} 1) & ||D(u_\epsilon)||_2^2 & = & S + O(\epsilon^{\frac{N-2}{2}}), \\ 2) & ||u_\epsilon||_6^6 & = & 1. \end{array} \tag{6.1}$$

Lema 6.1 *Para a função u_ϵ definida acima, $N \geq 3$ e $1 \leq q \leq \dfrac{N}{N-2}$, temos a seguinte estimativa sobre a bola de centro zero e raio R:*

$$||\beta^{1/2} u_\epsilon||_{q+1}^{q+1} = \beta^{(q+1)/2} \cdot \{O(\epsilon^{(N-2)(q+1)/4}) + O(\epsilon^{\{N - \frac{(q+1)(N-2)}{4}\}})\},$$

para cada $\beta > 0$.

Prova: Ainda pelas estimativas feitas por Brézis e Nirenberg em [14], temos que

$$||U_\epsilon||_{2^*} = O(\epsilon^{-(N-2)/4}) + O(\epsilon).$$

Assim, fazendo a mudança de variáveis para coordenadas polares resulta

$$\begin{aligned} I = ||U_\epsilon||_{2^*}^{q+1} \cdot ||u_\epsilon||_{q+1}^{q+1} &= \omega \int_0^R \frac{|\phi|^{q+1}}{(\epsilon + r^2)^{\frac{N-2}{2}(q+1)}} r^{N-1}\, dr = \omega \int_0^R \frac{(|\phi|^{q+1} - 1)}{(\epsilon + r^2)^{\frac{N-2}{2}(q+1)}} r^{N-1}\, dr + \\ &+ \omega \int_0^R \frac{r^{N-1}}{(\epsilon + r^2)^{\frac{N-2}{2}(q+1)}}\, dr. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Observe que a primeira das duas últimas integrais acima e limitada, devido a escolha da função ϕ, isto é,

$$\omega \int_0^R \frac{(|\phi|^{q+1} - 1)}{(\epsilon + r^2)^{\frac{N-2}{2}(q+1)}} r^{N-1}\, dr = O(1). \tag{6.3}$$

Assim, dividiremos a segunda integral em duas para facilitar os cálculos. Usando as hipóteses sobre o expoente q e o fato de que $\epsilon < \epsilon + r^2 < 2\epsilon$, temos

$$\begin{aligned} I_1 = \int_0^\epsilon (\epsilon + r^2)^{-(N-2)(q+1)/2} r^{(N-1)}\, dr \leq\ & C_1 \int_0^\epsilon \epsilon^{-(N-2)(q+1)/2} r^{N-1}\, dr \\ =\ & C_1 \epsilon^{N-(N-2)(q+1)/2}. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Para calcular a segunda integral, escolha uma constante $C(R)$ de modo que $r^2 > C(R)r - \epsilon$, para $r \in (\epsilon, R)$. Daí, $\epsilon + r^2 > C(R)r$. Segue-se que:

$$\begin{aligned} I_2 = \int_\epsilon^R (\epsilon + r^2)^{-(N-2)(q+1)/2} r^{N-1}\, dr \leq\ & \tilde{C}(R) \int_\epsilon^R r^{N-1-(N-2)(q+1)/2}\, dr \\ =\ & \tilde{C}(R)(R^{N-(N-2)(q+1)/2} - \epsilon^{N-(N-2)(q+1)/2}). \end{aligned} \tag{6.5}$$

Agora, juntando (6.3)-(6.5), obtemos que

$$\frac{I}{||U_\epsilon||_{2^*}^{q+1}} = O\left(\epsilon^{(N-2)(q+1)/4}\right) + O\left(\epsilon^{N-(N-2)(q+1)/4}\right).$$

Portanto, multiplicando $\beta^{1/2}$ por u_ϵ obtemos o desejado. ■

Observação 6.2 *Com a estimativa obtida no Lema 6.1, podemos facilmente obter uma estimativa da função $\beta^{1/2}u_\epsilon$ para um domínio Ω, qualquer, limitado. De fato, desde que Ω é limitado, deve existir $R > 0$, tal que $\Omega \subset B_R(0)$. Portanto,*

$$\int_\Omega |\beta^{1/2}u_\epsilon|^{q+1}\, dx = \int_{B_R(0)} |\beta^{1/2}u_\epsilon|^{q+1}\, dx - \int_{B_R(0)\setminus\Omega} |\beta^{1/2}u_\epsilon|^{q+1}\, dx.$$

A última integral do lado direito acima, é de ordem $O(\epsilon^{(N-2)(q+1)/4})$.

Observação 6.3 *O lema seguinte possui uma diferença fundamental com o anterior. A estimativa que encontraremos, não vale para $q = 1$ e $q = \frac{N}{N-2}$. Por este motivo, não conseguiremos mostrar a existência de uma segunda solução para o problema (5.2) nestes casos. Em vista dos resultados de unicidade [44], [64] e [51], podemos dizer que esta estimativa é ótima para $q = 1$.*

Lema 6.4 *Seja $g_\epsilon : [0, +\infty) \longrightarrow I\!R$ dada por*

$$g_\epsilon(t) \equiv \Phi_\lambda[(\beta^{1/2}u_\epsilon)t], \tag{6.6}$$

com $1 < q < \dfrac{N}{(N-2)}$. *Então, para* $\epsilon > 0$ *suficientemente pequeno existe* $t_{\epsilon,\beta} = t_\beta > 0$ *tal que*

$$g_\epsilon(t_\beta) > \frac{1}{N} S^{N/2}. \tag{6.7}$$

Prova: Desenvolvendo (6.6), obtemos:

$$\begin{aligned} g_\epsilon(t) &= (\beta S + O(\epsilon^{(N-2)/2}))\tfrac{t^2}{2} - \beta^{\frac{N}{N-2}} \tfrac{1}{2^*} t^{2^*} \\ &- \tfrac{\lambda \beta^{(q+1)/2}}{q+1} \{O(\epsilon^{(N-2)(q+1)/4}) + O(\epsilon^{\{N-(q+1)(N-2)/4\}})\} t^{q+1}. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Como $g_\epsilon(t) \longrightarrow -\infty$, quando $t \longrightarrow +\infty$, é razoável pensar que $t_\beta > 0$ deve ser pequeno. Por outro lado, $(\beta^{1/2} u_\epsilon)$ deve ser "grande"em norma. Assim, avaliando (6.8) em $t = \beta^{-1}$, tentaremos resolver a desigualdade $(O_\beta = O(\frac{\beta^{-\frac{(q+1)}{2}}}{q+1}\{(\epsilon^{(N-2)(q+1)/4}) + O(\epsilon^{\{N-(q+1)(N-2)/4\}})\})$

$$\begin{aligned} (\beta S + O(\epsilon^{(N-2)/2}))\tfrac{1}{2}\beta^{-2} - \tfrac{1}{2^*}\beta^{-N/(N-2)} - \lambda \cdot O_\beta\{(\epsilon^{(N-2)(q+1)/4}) + O(\epsilon^{\{N-(q+1)(N-2)/4\}})\} \\ > \tfrac{1}{N} S^{N/2}, \end{aligned} \tag{6.9}$$

ou, multiplicando ambos os membros da desigualdade acima por $\beta^{N/(N-2)}$ e subtraindo, teremos

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{N} S^{N/2} \beta^{N/(N-2)} - \tfrac{S}{2}\beta^{2/(N-2)} + \tfrac{1}{2^*} + \lambda \cdot O_\beta\{(\epsilon^{(N-2)(q+1)/4}) + O(\epsilon^{\{N-(q+1)(N-2)/4\}})\} \\ -O(\beta^{\frac{4-N}{N-2}} \epsilon^{(N-2)/2}) < 0. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Agora, considere o polinômio $f : (0, +\infty) \longrightarrow I\!R$ dado por

$$f(\beta) = \frac{S^{N/2}}{N} \beta^{N/(N-2)} - \frac{S}{2} \beta^{2/(N-2)} + \frac{1}{2^*}.$$

Resolvendo $f'(\beta) = 0$, encontramos

$$\beta = 0, \quad \text{ou} \quad \beta = S^{-(N-2)/2}.$$

As raízes reais de f, se existirem podem ser obtidas, como $\gamma S^{-(N-2)/2}$, para algum $\gamma \in I\!R$. Defina

$$h(\gamma) = f(\gamma S^{-(N-2)/2}) = \frac{1}{N} \gamma^{N/(N-2)} - \frac{1}{2} \gamma^{2/(N-2)} + \frac{1}{2^*}.$$

Agora é fácil ver que pelo menos uma raíz de h é: $\gamma = 1$. (No caso $N = 3$, obtemos que as raízes são: $\gamma = 1$(raíz dupla) e $\gamma = -1/2$). Voltando a (6.10), e fazendo $\beta = S^{-(N-2)/2}$, basta verificar que

$$\lambda \cdot O_\beta\{(\epsilon^{(N-2)(q+1)/4}) + (\epsilon^{\{N-(q+1)(N-2)/4\}})\} - O(\epsilon^{(N-2)/2}) < 0, \tag{6.11}$$

para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Mas isso é imediato, uma vez que estamos supondo $1 < q < \dfrac{N}{(N-2)}$, isto é,

$$\frac{(N-2)}{2} < \frac{(N-2)(q+1)}{4} < \frac{(N-1)}{2} \tag{6.12}$$

e para a segunda potência de ϵ com coeficiente positivo, temos

$$\frac{(N+1)}{2} < N - \frac{(N-2)(q+1)}{4} < \frac{(N+2)}{2}. \tag{6.13}$$

O que prova o resultado. ∎

Capítulo 7

Sobre Resultados de Não Existência(N=3)

Neste Capítulo restringiremos o nosso estudo a dimensão $3(N = 3)$ e, $\Omega = B_1(0)$.

Começaremos com o seguinte Lema:

Lema 7.1 *Seja u_ϵ como no Lema 6.1. Então temos as seguintes estimativas para o funcional Φ_λ:*

i) para $q = 1$, temos

$$\Phi_\lambda(S^{1/4}u_\epsilon) = \frac{S^{3/2}}{3} + \left(\frac{\pi^2}{4} - \lambda\right) S^{\frac{1}{2}} \|U_1\|_{L^{2^*}}^{-2} \frac{\epsilon^{\frac{1}{2}}}{2} \left(\omega \int_0^1 \phi^{q+1}(r)\, dr\right) + O(\epsilon), \tag{7.1}$$

ii) para $1 < q < 3$, temos

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda(S^{1/4}u_\epsilon) = & \frac{S^{3/2}}{3} + \left(\frac{C_{q+1}\pi^2}{8} - \frac{\lambda}{q+1}\right) S^{\frac{1}{2}} \|U_1\|_{L^{2^*}}^{-2} \epsilon^{\frac{q+1}{4} - \frac{1}{2}} \left(\omega \int_0^1 \phi^{q+1}(r)\, dr\right) + \\ + & O(\epsilon) - O(\epsilon^{\frac{(q+1)}{4} - \frac{1}{2}} + \epsilon^{1 - \frac{(q+1)}{4}}), \end{aligned} \tag{7.2}$$

iii) para $q = 3$, temos

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda(S^{1/4}u_\epsilon) = & \frac{S^{3/2}}{3} + \left(\frac{C_4\pi^2}{2} - \lambda\right) S^{\frac{1}{2}} \|U_1\|_{L^{2^*}}^{-2} \frac{\epsilon^{\frac{q+1}{4}}}{4} \left(\omega \int_0^1 \phi^4(r)\, dr\right) + \\ + & O(\epsilon) - O(\epsilon^2) \end{aligned} \tag{7.3}$$

onde $C_{q+1} \equiv \dfrac{\displaystyle\int_0^1 \phi^2(r)\, dr}{\displaystyle\int_0^1 \phi^{q+1}(r)\, dr}$, *para* $\phi(r) = \cos(\frac{1}{2}\pi r)$ *e* $\omega =$*volume da esfera.*

Prova: Pelas estimativas de Brézis-Nirenberg em [14] temos:

$$
\begin{aligned}
&\|Du_\epsilon\|_2^2 = S + \|U_1\|_{L^{2^*}}^{-2}\epsilon^{1/2}\left(\omega\int_0^1 |\phi'|^2\,dr\right) + O(\epsilon)\\
&\|u_\epsilon\|_{2^*} = 1\\
&\|U_\epsilon\|_{2^*} = \|U_1\|_{L^{2^*}}\epsilon^{-1/4} + O(\epsilon^{1/4}) = \epsilon^{-\frac{1}{4}}(O(1) + O(\epsilon^{\frac{1}{2}})).
\end{aligned} \tag{7.4}
$$

Para o nosso objetivo necessitaremos de uma estimativa mais fina do que a obtida no Lema 6.1. Assim, mostraremos que

$$
\|U_\epsilon\|_{L^{2^*}}^{-(q+1)} \le \begin{cases} \|U_1\|_{L^{2^*}}^{-2}(\epsilon^{\frac{1}{2}}) & \text{se } q = 1,\\ \|U_1\|_{L^{2^*}}^{-2} S^{\frac{1-q}{4}}(\epsilon^{\frac{(q+1)}{4}-\frac{1}{2}}) & \text{se } 1 < q < 3,\\ \|U_1\|_{L^{2^*}}^{-2} S^{-\frac{1}{2}}(\epsilon) & \text{se } q = 3, \end{cases} \tag{7.5}
$$

Para demonstrarmos (7.5), basta observar de (7.4), que

$$
\epsilon^{-\frac{q+1}{4}}\left(O(1) + O(\epsilon^{\frac{1}{2}})\right)^2 \le \epsilon^{-\frac{q+1}{4}}\left(O(1) + O(\epsilon^{\frac{1}{2}})\right)^{q+1} \le \epsilon^{-\frac{q+1}{4}}\left(O(1) + O(\epsilon^{\frac{1}{2}})\right)^4, \tag{7.6}
$$

ou, desenvolvendo obtemos:

$$
\begin{aligned}
&O(\epsilon^{-\frac{q+1}{4}}) + O(\epsilon^{\frac{1}{2}-\frac{q+1}{4}}) + O(\epsilon^{1-\frac{q+1}{4}}) \le \epsilon^{-\frac{q+1}{4}}\left(O(1) + O(\epsilon^{\frac{1}{2}})\right)^{q+1} \le\\
&\le O(\epsilon^{-\frac{q+1}{4}}) + O(\epsilon^{\frac{1}{2}-\frac{q+1}{4}}) + O(\epsilon^{1-\frac{q+1}{4}}) + O(\epsilon^{\frac{3}{2}-\frac{q+1}{4}}) + O(\epsilon^{2-\frac{q+1}{4}}).
\end{aligned} \tag{7.7}
$$

Agora, note que

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{O(\epsilon^{-\frac{q+1}{4}}) + O(\epsilon^{\frac{1}{2}-\frac{q+1}{4}}) + O(\epsilon^{1-\frac{q+1}{4}})} \ge \frac{1}{\epsilon^{-\frac{q+1}{4}}\left(O(1)+O(\epsilon^{\frac{1}{2}})\right)^{q+1}}\\
&\ge \frac{1}{O(\epsilon^{-\frac{q+1}{4}}) + O(\epsilon^{\frac{1}{2}-\frac{q+1}{4}}) + O(\epsilon^{1-\frac{q+1}{4}}) + O(\epsilon^{\frac{3}{2}-\frac{q+1}{4}}) + O(\epsilon^{2-\frac{q+1}{4}})}.
\end{aligned} \tag{7.8}
$$

De (7.4) e observando que dadas constantes positivas A, B e C, tais que

$$
A + B + C \ge B + C \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{A+B+C} \le \frac{1}{B+C},
$$

após homogenizar as constantes, obtemos (7.5), isto é, note que

$$
\|U_1\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}^{2^*} = \|DU_1\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 = S\|U_1\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}^2 \quad \Longrightarrow \quad \|U_1\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}^{-(q+1)} = S^{\frac{1-q}{4}}\|U_1\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}^{-2}. \tag{7.9}
$$

Prosseguiremos agora, estimando a função u_ϵ na norma de L^{q+1}. Assim, temos:

$$
\|U_\epsilon\|_{L^{2^*}}^{-(q+1)}\int_0^1 \frac{\phi^{q+1}(r)}{(\epsilon + r^2)^{\frac{q+1}{2}}} r^2\,dr = \|U_\epsilon\|_{L^{2^*}}^{-(q+1)}\left(\int_0^1 \phi^{q+1}(r)\,dr + \int_0^1 \frac{r^2 - (\epsilon + r^2)^{\frac{q+1}{2}}}{(\epsilon + r^2)^{\frac{q+1}{2}}}\phi^{q+1}\,dr\right). \tag{7.10}
$$

De (6.4) e (6.5), temos

$$\int_0^1 \frac{r^2-(\epsilon+r^2)^{\frac{q+1}{2}}}{(\epsilon+r^2)^{\frac{q+1}{2}}}\phi^{q+1}\,dr = O\left(\int_0^1 \frac{r^2}{(\epsilon+r^2)^{\frac{q+1}{2}}}\,dr\right) = O\left(\epsilon^{3-\frac{(q+1)}{2}}+1\right). \tag{7.11}$$

Agora, usando a estimativa (7.5) concluímos que

$$\int_{B_1(0)} u_\epsilon^{q+1}(x)\,dx = \begin{cases} \|U_1\|_{L^{2^*}}^{-2}\epsilon^{\frac{1}{2}}\left(\omega\int_0^1 \phi^2(r)\,dr\right)+O(\epsilon) \\ \text{se } q=1, \\ \|U_1\|_{L^{2^*}}^{-2}S^{\frac{1-q}{4}}\left(\epsilon^{\frac{q+1}{4}-\frac{1}{2}}\right)\left(\omega\int_0^1 \phi^{q+1}(r)\,dr\right)+O\left(\epsilon^{\frac{q+1}{4}-\frac{1}{2}}+\epsilon^{1-\frac{q+1}{4}}\right) \\ \text{se } 1<q<3, \\ \|U_1\|_{L^{2^*}}^{-2}S^{-\frac{1}{2}}\epsilon\left(\omega\int_0^1 \phi^4(r)\,dr\right)+O\left(\epsilon^{3-\frac{q+1}{4}}\right) \\ \text{se } q=3. \end{cases} \tag{7.12}$$

De (7.4) e (7.12), avaliando $\Phi_\lambda(S^{1/4}u_\epsilon)$ obtemos $i)$, $ii)$ e $iii)$, tomando $\phi(r)=\cos(\frac{1}{2}\pi r)$ e fazendo

$$\int_0^1 |\phi'(r)|^2\,dr = \frac{\pi^2}{4}\int_0^1 \phi^2(r)\,dr = \frac{\pi^2 C_{q+1}}{4}\int_0^1 \phi^{q+1}(r)\,dr, \tag{7.13}$$

onde $C_{q+1} = \dfrac{\displaystyle\int_0^1 \phi^2(r)\,dr}{\displaystyle\int_0^1 \phi^{q+1}(r)\,dr}$.

∎

Observação 7.2 *De (7.1)-(7.3) resulta que tomando*

$$\lambda_o = \frac{\pi^2}{8}(q+1)C_{q+1},$$

temos que:

$$\begin{aligned} &se\ q=1\ \ e\ \lambda\le\lambda_o, && \Rightarrow \Phi_\lambda(S^{1/4}u_\epsilon)\ge\frac{S^{3/2}}{3}, \\ &se\ 1<q<3\ \ e\ \lambda<\lambda_o, && \Rightarrow \Phi_\lambda(S^{1/4}u_\epsilon)\ge\frac{S^{3/2}}{3}, \\ &se\ q=3\ \ e\ \lambda\le\lambda_o, && \Rightarrow \Phi_\lambda(S^{1/4}u_\epsilon)\ge\frac{S^{3/2}}{3}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{array}{ll} se\ q = 1\ e\ \lambda > \lambda_o, & \Rightarrow \Phi_\lambda(S^{1/4}u_\epsilon) < \dfrac{S^{3/2}}{3}, \\ se\ 1 < q < 3\ e\ \lambda \geq \lambda_o, & \Rightarrow \Phi_\lambda(S^{1/4}u_\epsilon) < \dfrac{S^{3/2}}{3}, \\ se\ q = 3\ e\ \lambda > \lambda_o, & \Rightarrow \Phi_\lambda(S^{1/4}u_\epsilon) < \dfrac{S^{3/2}}{3}. \end{array}$$

Brézis-Nirenberg [14] provaram a existência de pelo menos uma solução para o problema (5.2), desde que exista uma função $v_o \in H_o^1(\Omega)$, $v_o \geq 0$, $v_o \not\equiv 0$ *e*

$$\Phi_\lambda(v_o) < \frac{S^{3/2}}{3}.$$

O nosso objetivo sera mostrar a existência de uma solução u, *com*

$$\Phi_\lambda(u) \geq \frac{S^{3/2}}{3}.$$

Portanto, uma segunda solução de (5.2).

Em [14] foi provado um resultado de não existência de solução para o problema (5.2) mas somente para $q = 1$ *e* $\lambda \leq \lambda_o$. *Posteriormente, foi provado em [4], que existe um* $\lambda_o > 0$ *tal que para cada* $\lambda < \lambda_o$ *e* $1 < q < 3$ *o problema (5.2) não possui solução e, quando* $q = 3$ *temos* $\lambda \leq \lambda_o$. *Os Nossos resultados sugerem que* $\lambda_o = \frac{\pi^2(q+1)}{8} C_{q+1}$.

Capítulo 8

Constante Ótima

Este Capítulo será devotado ao cálculo da constante ótima λ_q da desigualdade

$$\|Du\|_{L^2}^2 \geq S_N\|u\|_{L^{2^*}}^2 + \lambda_q(\Omega)\|u\|_{L^q}^2, \tag{8.1}$$

para cada $u \in H_o^1(\Omega)$ e $1 \leq q < \frac{N}{N-2}$(S_N é a constante ótima de Sobolev relativa à dimensão). Faremos também uma estimativa para a constante λ^* do Teorema 9.1.

Provaremos o seguinte resultado:

Teorema 8.1 *Seja $\Omega \subset I\!R^N (N \geq 3)$ um domínio limitado. Então a constante $\lambda_q(\Omega)$ da desigualdade (8.1) possui o seguinte limite inferior:*

$$\lambda_q(\Omega) \geq \lambda_q(B_R(0)) = \frac{C_q\pi^2}{4R^2\omega_{N,R}^{\frac{2-q}{q}}}\ , \quad para \quad 1 \leq q < \frac{N}{N-2},$$

onde $C_q = \dfrac{\displaystyle\int_0^R \cos^2(\frac{1}{2R}\pi r)\,dr}{\left(\displaystyle\int_0^R \cos^q(\frac{1}{2R}\pi r)\,dr\right)^{2/q}}$, *para algum $R > 0$ tal que $volume(\Omega) = volume(B_R(0))$*

e, $\omega_{N,R}$ = medida da $\partial(B_R(0))$.

Prova: Seja $R > 0$ tal que o $volume(B_R(0)) = volume(\Omega)$. Seja u^* denotando o rearranjamento decrescente de u. É conhecido em Poya-Szegö [57], ou [72], que, se $u \in H_o^1(\Omega)$, então $u^* \in H_o^1(B_R(0))$ e vale

$$\|Du^*\|_{L^2(B_R(0))}^2 \leq \|Du\|_{L^2(\Omega)}^2 \ \text{ e } \ \|u^*\|_{L^p(B_R(0))} = \|u\|_{L^p(\Omega)}, \text{ para } 1 \leq p < \infty. \tag{8.2}$$

A desigualdade (8.1) para u^* e $B_R(0)$ é:

$$\|Du^*\|_{L^2}^2 \geq S_N\|u^*\|_{L^{2^*}}^2 + \lambda_q(B_R(0))\|u^*\|_{L^q}^2. \tag{8.3}$$

De (8.2) e (8.3), concluímos que

$$\lambda_q(\Omega) \geq \lambda_q(B_R(0)). \tag{8.4}$$

Daqui por diante, nosso objetivo será calcular o valor da constante $\lambda_q(B_R(0))$. Para isso, teremos como objetivo mostrar que para $\lambda \geq \lambda_q(B_R(0))$ a desigualdade (8.1) não é válida. Para facilitar os nossos cálculos, a menos de uma mudança de variáveis, consideraremos $R = 1$. Como nas seções anteriores, usaremos a família de funções U_ϵ, para estimar λ_q. Comecemos observando que

$$\|DU_\epsilon\|_2^2 = \omega_{N,1}\int_0^1 \left(\frac{|\phi'(r)|^2}{(\epsilon+r^2)^{N-2}} - 2r\frac{(N-2)\phi(r)\phi'(r)}{(\epsilon+r^2)^{N-1}} + \frac{(N-2)^2r^2\phi^2(r)}{(\epsilon+r^2)^N}\right) r^{N-1}\,dr. \tag{8.5}$$

Para estimar (8.5) no caso $N = 3$ procede-se itengrando por partes o termo intermediário(veja [14]); no entanto, para $N \geq 4$ este caminho parece não funcionar muito bem. Assim, omitiremos o caso $N = 3$. Para $N \geq 4$ em uma vizinhança da origem, temos que $\phi'(r) \leq Cr$. Isso juntamente com o fato que $\phi(0) = 1$, resulta

$$\begin{aligned}
-\int_0^1 2r\frac{(N-2)\phi(r)\phi'(r)}{(\epsilon+r^2)^{N-1}}r^{N-1}\,dr &\leq C\int_0^1 \frac{r^{N+1}}{(\epsilon+r^2)^{N-1}}\,dr = C\int_0^1 \frac{r^2r^{N-1}}{(\epsilon+r^2)^{N-1}}\,dr \\
&\leq C\int_0^1 \frac{(\epsilon+r^2)r^{N-1}}{(\epsilon+r^2)^{N-1}}\,dr = C\int_0^1 \frac{r^{N-1}}{(\epsilon+r^2)^{N-2}}\,dr \\
&= O(\epsilon^{-\frac{N-4}{2}})
\end{aligned} \tag{8.6}$$

Portanto,

$$\|DU_\epsilon\|_2^2 = \begin{cases} \omega_{N,1}\left(\int_0^1 \frac{|\phi'(r)|^2}{(\epsilon+r^2)^{N-2}}r^{N-1}\,dr + \int_0^1 \frac{(N-2)^2\phi^2(r)}{(\epsilon+r^2)^N}r^{N+1}\,dr + (\epsilon^{-\frac{N-4}{2}})\right) \\ \text{se } N \geq 4 \end{cases} \tag{8.7}$$

Usando o fato que $\phi(0) = 1$ e $\phi'(0) = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{|\phi'(r)|^2}{(\epsilon+r^2)^{N-2}}r^{N-1}\,dr &= \int_0^1 |\phi'(r)|^2\,dr + \int_0^1 |\phi'(r)|^2\frac{(r^{N-1}-(\epsilon+r^2)^{N-2})}{(\epsilon+r^2)^{N-2}}\,dr \\
&= \int_0^1 |\phi'(r)|^2\,dr + \begin{cases} O(\epsilon^{\frac{1}{2}}) + O(\epsilon^{-\frac{N-4}{2}}) & \text{se } N \geq 4 \\ O(\epsilon) & \text{se } N = 3, \end{cases}
\end{aligned} \tag{8.8}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{(N-2)^2\phi^2(r)}{(\epsilon+r^2)^N}r^{N+1}\,dr &= (N-2)^2\int_0^1 \frac{r^{N+1}}{(\epsilon+r^2)^N}\,dr + (N-2)^2\int_0^1 \frac{(\phi^2(r)-1)r^{N+1}}{(\epsilon+r^2)^N}\,dr \\
&= \epsilon^{-\frac{N-2}{2}}(N-2)^2\int_0^{\epsilon^{-\frac{1}{2}}} \frac{t^{N+1}}{(\epsilon+t^2)^N}\,dt + O(\epsilon^{-\frac{N-4}{2}})
\end{aligned} \tag{8.9}$$

Observando que $\|DU_1\|_2^2 = (N-2)^2\omega_{N,1}\int_0^{+\infty} \frac{t^{N+1}}{(1+t^2)^N}\,dt$, combinando (8.7)-(8.9), obtemos

$$\|DU_\epsilon\|_{L^2}^2 = \begin{cases} \|DU_1\|_{L^2}^2 \epsilon^{-\frac{N-2}{2}} + \omega_{N,1}\displaystyle\int_0^1 |\phi'(r)|^2\,dr + O(\epsilon^{-\frac{N-4}{2}}) + O(\epsilon^{\frac{1}{2}}) \\ \text{se } N \geq 4, \\ \|DU_1\|_{L^2}^2 \epsilon^{-\frac{N-2}{2}} + \omega_{N,1}\displaystyle\int_0^1 |\phi'(r)|^2\,dr + O(\epsilon^{\frac{1}{2}}), \ \text{se } N = 3. \end{cases} \tag{8.10}$$

Veja [14] para a estimativa $N = 3$. Prosseguindo, temos

$$\begin{aligned} \|U_\epsilon\|_{L^{2^*}}^{2^*} &= \omega_{N,1}\int_0^1 \frac{\phi^{2^*}}{(\epsilon + r^2)^N} r^{N-1}\,dr = \omega_{N,1}\int_0^1 \frac{(\phi^{2^*}-1)}{(\epsilon + r^2)^N} r^{N-1}\,dr + \omega_{N,1}\int_0^1 \frac{r^{N-1}}{(\epsilon + r^2)^N}\,dr \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned} \tag{8.11}$$

Novamente pelo fato que $\phi(0) = 1$ e $\phi'(0) = 0$, obtemos

$$|I_1| \leq C\int_0^1 \frac{r^{N+1}}{(\epsilon + r^2)^N}\,dr = O(\epsilon^{-\frac{N-2}{2}}), \tag{8.12}$$

$$I_2 = \frac{\omega_{N,1}}{\epsilon^{\frac{N}{2}}}\int_0^{\epsilon^{-\frac{1}{2}}} \frac{t^{N-1}}{(1+t^2)^N}\,dt = \frac{\omega_{N,1}}{\epsilon^{\frac{N}{2}}}\int_0^{+\infty} \frac{t^{N-1}}{(1+t^2)^N}\,dt + O(1). \tag{8.13}$$

Então temos:

$$\begin{aligned} \|U_\epsilon\|_{L^{2^*}}^{2^*} &= O(\epsilon^{-\frac{N-2}{2}}) + O(\epsilon^{-\frac{N}{2}}) + O(1) \\ &= O(\epsilon^{-\frac{N-2}{2}}) + O(\epsilon^{-\frac{N}{2}}) \\ &= \epsilon^{-\frac{N}{2}}\left(O(1) + O(\epsilon)\right). \end{aligned} \tag{8.14}$$

Tomando $f(t) = (1+t)^{\frac{N-2}{N}}$ e fazendo sua expansão próximo da origem, em particular, para $t = \epsilon$ temos

$$f(\epsilon) = f(0) + f'(0)\epsilon + \rho(\epsilon), \tag{8.15}$$

onde $\rho(\epsilon) \leq \epsilon$. Usando esta expressão teremos

$$\begin{aligned} \|U_\epsilon\|_{L^{2^*}}^2 &= \left[\epsilon^{-\frac{N}{2}}\left(O(1) + O(\epsilon)\right)\right]^{\frac{N-2}{N}} \\ &= \epsilon^{-\frac{N-2}{2}}\left(O(1) + O(\epsilon)\right), \end{aligned} \tag{8.16}$$

onde $O(1) = \|U_1\|_{L^{2^*}}^2 = \left(\omega_{N,1}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{N-1}}{(1+t^2)^N}\,dt\right)^{\frac{N-2}{N}}$. Pelas estimativas (8.10) e (8.16), obtemos para a função u_ϵ que

$$\|Du_\epsilon\|_{L^2}^2 = \begin{cases} \|DU_1\|_{L^2}^2 + \epsilon^{\frac{N-2}{2}}\omega_{N,1}\displaystyle\int_0^1 |\phi'(r)|^2\,dr + O(\epsilon), \ \text{se } N \geq 4, \\ \|DU_1\|_{L^2}^2 + \epsilon^{\frac{1}{2}}\omega_{N,1}\displaystyle\int_0^1 |\phi'(r)|^2\,dr + O(\epsilon), \ \text{se } N = 3. \end{cases} \tag{8.17}$$

Agora, procedendo de modo análogo como acima, pela estimativa (8.16), obtemos que

$$\begin{aligned}\|u_\epsilon\|_{L^q}^2 &= \frac{\|U_\epsilon\|_{L^q}^2}{\|U_\epsilon\|_{L^{2^*}}^2} = \|U_\epsilon\|_{L^{2^*}}^{-2}\left(O(\epsilon^{\frac{N-(N-2)q}{2}}) + \omega_{N,1}\int_0^1 |\phi(r)|^q\,dr\right)^{\frac{2}{q}} \\ &= \|U_1\|_{L^{2^*}}^{-2}\epsilon^{\frac{N-2}{2}}\left(O(\epsilon^{\frac{N}{q}-(N-2)}) + \omega_{N,1}^{\frac{2}{q}}\left(\int_0^1 |\phi(r)|^q\,dr\right)^{\frac{2}{q}}\right) \\ &= O(\epsilon^{\frac{N}{q}-\frac{N-2}{2}}) + \epsilon^{\frac{N-2}{2}}\|U_1\|_{L^{2^*}}^{-2}\omega_{N,1}^{\frac{2}{q}}\left(\int_0^1 |\phi(r)|^q\,dr\right)^{\frac{2}{q}}\end{aligned} \tag{8.18}$$

Por fim, note que tomando $\phi(r) = \cos(\frac{\pi}{2}r)$, temos

$$\int_0^1 |\phi'(r)|^2\,dr = \frac{\pi^2}{4}\left(\int_0^1 |\phi(r)|^q\,dr\right)^{\frac{2}{q}} \frac{\displaystyle\int_0^1 |\phi(r)|^2\,dr}{\left(\displaystyle\int_0^1 |\phi(r)|^q\,dr\right)^{\frac{2}{q}}} = C_q\frac{\pi^2}{4}\left(\int_0^1 |\phi(r)|^q\,dr\right)^{\frac{2}{q}} \tag{8.19}$$

Pelas estimativas (8.17)-(8.19), avaliando (8.3) com a função u_ϵ, teremos para λ suficientemente próximo de $\frac{C_q\pi^2}{4\omega_{N,1}^{\frac{2}{q}-1}}$

$$\epsilon^{\frac{N-2}{2}}\frac{C_q\pi^2}{4}\left(\int_0^1 |\phi(r)|^q\,dr\right)^{\frac{2}{q}} > \epsilon^{\frac{N-2}{2}}\lambda\omega_{N,1}^{\frac{2}{q}-1}\left(\int_0^1 |\phi(r)|^q\,dr\right)^{\frac{2}{q}} + O(\epsilon^{\frac{N}{q}-\frac{N-2}{2}}) - O(\epsilon). \tag{8.20}$$

Supondo que $\frac{C_q\pi^2}{4\omega_{N,1}^{\frac{2}{q}-1}}$ não seja o valor máximo para λ em (8.1), ou seja, em (8.20). Então, agora para $\lambda > \frac{C_q\pi^2}{4\omega_{N,1}^{\frac{2}{q}-1}}$, mas suficientemente próximo, obtemos

$$\epsilon^{\frac{1}{2}}\frac{C_q\pi^2}{4}\left(\int_0^1 |\phi(r)|^q\,dr\right)^{\frac{2}{q}} \geq \epsilon^{\frac{1}{2}}\lambda\omega_{N,1}^{\frac{2}{q}-1}\left(\int_0^1 |\phi(r)|^q\,dr\right)^{\frac{2}{q}} + O(\epsilon^{\frac{N}{q}-\frac{N-2}{2}}) - O(\epsilon), \tag{8.21}$$

ou,

$$\left(\frac{C_q\pi^2}{4} - \lambda\omega_{N,1}^{\frac{2}{q}-1}\right)\epsilon^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1 |\phi(r)|^q\,dr\right)^{\frac{2}{q}} \geq O(\epsilon^{\frac{N}{q}-\frac{N-2}{2}}) - O(\epsilon). \tag{8.22}$$

Donde para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno obtemos uma contradição. Portanto, vemos que o valor máximo para λ na desigualdade (8.22) é

$$\lambda_q = \frac{C_q\pi^2}{4\omega_{N,1}^{\frac{2}{q}-1}}. \tag{8.23}$$

∎

O proximo Lema será crucial na obtenção de uma segunda solução para o problema (5.1).

Lema 8.2 *Seja Ω um domínio limitado do $I\!R^N (N \geq 3)$. Então existe uma constante $\lambda^* > 0$ tal que para $\lambda > \lambda^*$ a família u_ϵ satisfaz*

$$\varphi_\lambda(u_\epsilon) < 0 \quad para \quad 1 < q < \frac{N}{N-2}. \tag{8.24}$$

Quando $\Omega = B_R(0)$, temos que $\lambda^* = \frac{\pi^2}{8}(q+1)C_{q+1}$, onde C_{q+1} é a mesma como no Lema 7.1.

Prova: Observe, que para $\lambda \geq \lambda^*$ devemos ter para a família u_ϵ, que $\varphi_\lambda(u_\epsilon) \geq 0$; isto é,

$$||Du_\epsilon||_{L^2}^2 \geq S||u_\epsilon||_{L^{2^*}}^2 + \lambda ||u_\epsilon||_{L^{q+1}}^{q+1}. \tag{8.25}$$

Como iremos trabalhar sobre a variedade de Nehari $\mathcal{N}$, vamos mostrar que a menos de um parâmetro limitado, podemos supor que a família $u_\epsilon \in \mathcal{N}$. Para esse fim, defina a função $g : [0, +\infty) \longrightarrow I\!R$ por

$$g(t) = \langle \Phi'_\lambda(tu_\epsilon), (tu_\epsilon) \rangle, \tag{8.26}$$

onde U_ϵ é a mesma como nas seções anteriores. Note que

$$g(0) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \longrightarrow +\infty} g(t) = -\infty, \tag{8.27}$$

e $g(t) > 0$ numa vizinhança de 0. Portanto, existe $t_\epsilon > 0$ tal que $g(t_\epsilon) = 0$. Observe que a família t_ϵ é limitada. De fato, de (8.26) e estimativas sobre a família u_ϵ, temos

$$t_\epsilon < (S_N + O(\epsilon^{\frac{N-2}{2}}))^{\frac{1}{2^*-2}}. \tag{8.28}$$

Além disso, a família u_ϵ satisfaz

$$\Phi_\lambda(u_\epsilon) \leq \Phi_\lambda(t_\epsilon u_\epsilon), \tag{8.29}$$

então, a menos de um parâmetro, podemos supor que a família U_ϵ pertence a variedade de Nehari $\mathcal{N}$. Note que, de (8.28) esse parâmetro é limitado. As estimativas para um domínio Ω geral, são:

$$\begin{aligned} ||Du_\epsilon||_{L^2}^2 &= S + K_1\epsilon^{\frac{N-2}{2}} \leq S + K_1\epsilon^{(N-2)(\frac{q+1}{4}-\frac{1}{2})}, \\ ||u_\epsilon||_{L^{q+1}}^{q+1} &= K_2\epsilon^{(N-2)(\frac{(q+1)}{4}-\frac{1}{2})} + O(\epsilon), \end{aligned} \tag{8.30}$$

onde K_1 e K_2 são constantes. A última estimativa, pode ser deduzida do mesmo modo como foi feito no caso $N = 3$ na demonstração do Lema 7.1. Daí, teremos

$$S + K_1\epsilon^{(N-2)(\frac{q+1}{4}-\frac{1}{2})} \geq S + \lambda(K_2\epsilon^{(N-2)(\frac{(q+1)}{4}-\frac{1}{2})} + O(\epsilon)), \tag{8.31}$$

ou ainda,

$$(K_1 - \lambda K_2)\epsilon^{(N-2)(\frac{q+1}{4}-\frac{1}{2})} \geq O(\epsilon). \tag{8.32}$$

Como queríamos.

Para estimar-mos λ^* no caso de $\Omega = B_R(0)$, é suficiente recordar as estimativas (7.12), (8.17) e avaliar o funcional φ_λ com a função $(S_N^{1/4}u_\epsilon)$(onde S_N é a constante ótima de Sobolev em relação a dimensão); isto é,

$$\begin{aligned}
\varphi_\lambda(S_N^{1/4}u_\epsilon) &= \epsilon^{\frac{N-2}{2}}\|U_1\|_{L^{2^*}}^{-2}S_N^{\frac{1}{2}}\frac{\pi^2 C_{q+1}}{8}\omega_{N,1}\int_0^1 \phi^{q+1}\,dr + O(\epsilon)\\
&-\epsilon^{(N-2)(\frac{q+1}{4}-\frac{1}{2})}\|U_1\|_{L^{2^*}}^{-2}S_N^{\frac{1}{2}}\frac{\lambda}{q+1}\omega_{N,1}\int_0^1 \phi^{q+1}\,dr - O(\epsilon^{(N-2)(\frac{q+1}{4}-\frac{1}{2})})\\
&\leq \epsilon^{(N-2)(\frac{q+1}{4}-\frac{1}{2})}\|U_1\|_{L^{2^*}}^{-2}S_N^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi^2 C_{q+1}}{8}-\frac{\lambda}{q+1}\right)\omega_{N,1}\int_0^1 \phi^{q+1}\,dr\\
&+O(\epsilon) - O(\epsilon^{(N-2)(\frac{q+1}{4}-\frac{1}{2})}).
\end{aligned} \tag{8.33}$$

Daí é fácil ver que para $\lambda \geq \frac{\pi^2(q+1)C_{q+1}}{8}$ temos que $\varphi_\lambda(S_N^{1/4}u_\epsilon) < 0$ para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. ■

Capítulo 9

Limitação de Φ_λ

Este Capítulo será devotado a prova de um limite para o parâmetro λ. Como conclusão imediata do Teorema que iremos provar, obtemos que o conjunto $\mathcal{M}$ é limitado. Provaremos o seguinte resultado.

Teorema 9.1 *Seja $\Omega \subset I\!R^N (N \geq 3)$ um domínio limitado. Seja $\Phi_\lambda : H_o^1(\Omega) \longrightarrow I\!R$ o funcional definido em (5.4), para $1 \leq q < \dfrac{N}{N-2}$. Então existe $\lambda^* > 0$, dependendo somente de Ω, tal que para todo $\lambda > \lambda^*$ Φ_λ é limitado sobre $\mathcal{M}$.*

Prova: O argumento será por contradição. Primeiro, dos Lemas 6.4 e 8.2, concluímos que $\mathcal{M} \not\equiv \emptyset$; isto é, existem funções $u \in \mathcal{N}$ tais que $\varphi_\lambda(u) \leq 0$. Suponha que o funcional Φ_λ definido em (5.4) é ilimitado superiormente sobre $\mathcal{M}$. Portanto, deve existir uma sequência $(u_n)_{n\in I\!N} \subset \mathcal{M}$, com $u_n \stackrel{\|\cdot\|_{H_o^1}}{\longrightarrow} +\infty$, tal que $\Phi_\lambda(u_n) \longrightarrow +\infty$. Observemos que

$$\|u_n\|_{2^*}^{2^*} \longrightarrow +\infty \quad \forall \ n \in I\!N. \tag{9.1}$$

De fato, suponha que não. Então devem existir constantes $C_1 > 0$ e $C_2 > 0$, tais que

$$\|u_n\|_{2^*}^{2^*} \leq C_1 \ , \quad \|u_n\|_{q+1}^{q+1} \leq C_2 \ \ \forall n \in I\!N. \tag{9.2}$$

Como $\langle \Phi_\lambda'(u_n), u_n \rangle = 0$, isto é,

$$\int_\Omega |Du_n|^2 - \int_\Omega |u_n|^{2^*} - \lambda \int_\Omega |u_n|^{q+1} = 0. \tag{9.3}$$

De (9.2) e (9.3) concluímos que (u_n) é limitada. Contradição!

Novamente, por (9.3) e a hipótese sobre o funcional φ_λ, temos:

$$0 \geq \varphi_\lambda(u_n) = \|u_n\|_{L^{2^*}}^{2^*} - S\|u_n\|_{L^{2^*}}^2. \tag{9.4}$$

Note que para $n \in I\!N$ suficientemente grande, o lado direito em (9.4) é positivo. Contradição! A conclusão da prova, segue-se. ∎

Observação 9.2 *No caso de domínios estrelados é bem conhecido que existe um* $\lambda^* > 0$, *tal que para* $\lambda < \lambda^*$, *o problema* (5.1) *não possui solução. E nesse caso, de fato existe um parâmetro de limitação. Em domínios gerais, pode não existir tal parâmetro, pois nesse caso recorremos somente ao Lema 8.2. E não sabemos se existe uma desigualdade do tipo* $\varphi_\lambda(u) \geq 0$, *para toda* $u \in H_o^1(\Omega)$.

Capítulo 10

Uma Segunda Solução Positiva

Neste Capítulo, mostraremos a existência de uma segunda solução para o problema (5.2) na classe

$$\mathcal{M} \equiv \left\{ u \in H_o^1(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{l} \psi_1(u) = \langle \Phi'_{\lambda,+}(u), u \rangle = 0 \;\;,\;\; \varphi_{\lambda,+}(u) \leq 0 \\ \text{e, } \psi_2(u) = \dfrac{\lambda(1-q)}{q+1} \displaystyle\int_\Omega (u^+)^{q+1} \leq -\Theta < 0 \end{array} \right\} \tag{10.1}$$

para algum Θ pequeno, e

$$\Phi_{\lambda,+}(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|Du|^2 - \frac{1}{2^*}(u^+)^{2^*} - \frac{\lambda}{q+1}(u^+)^{q+1} \right), \tag{10.2}$$

$$\varphi_{\lambda,+}(u) = \|Du\|_{L^2}^2 - S\|u^+\|_{L^{2^*}}^2 - \lambda\|u^+\|_{L^{q+1}}^{q+1}, \tag{10.3}$$

onde $u^+ = \max\{u, 0\}$.

Observação 10.1 *A constante Θ acima, pode ser escolhida independentemente de λ. De fato, pelos Lemas 6.1, 8.2 e estimativa (6.11) vemos que existe $u \in \mathcal{M}$. Além disso, pelo Capítulo anterior temos que $\mathcal{M}$ é limitada.*

Usaremos nesse Capítulo, uma versão da condição (PS), introduzida por Ghoussoub em [31].

Definição 10.2 *Diremos que o funcional Φ_λ verifica a condição de Palais-Smale no nível c e próximo ao conjunto $F \subset X$ (abreviadamente, $(PS)_{F,c}$), se qualquer sequência $(x_n)_n$ em X (esp. Banach) verificando $\lim\limits_{n\to+\infty} \Phi_\lambda(x_n) = c$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\Phi'_\lambda(x_n)\|_{X^*} = 0$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} dist(x_n, F) = 0$, possui uma subsequência convergente.*

Iremos verificar uma série de condições sobre os funcionais ψ_1, $\varphi_{\lambda,+}$ e ψ_2 definidos acima. Essas condições estão contidas no resultado abstrato que será provado adiante.

Teorema 10.3 *Seja Φ_λ um funcional coercivo e limitado inferiormente no conjunto $\mathcal{M}$. Suponha que $\langle \psi_1'(u), u\rangle + \langle \varphi_{\lambda,+}'(u), u\rangle + \langle \psi_2'(u), u\rangle \neq 0$ para qualquer $u \in \mathcal{M}$ e que para qualquer sequência $(u_n)_{n\in I\!N} \subset \mathcal{M}$ que seja minimizante para Φ_λ sobre $\mathcal{M}$, temos que $(\psi_1'(u_n))_{n\in I\!N}$, $(\varphi_{\lambda,+}'(u_n))_{n\in I\!N}$ e $(\psi_2'(u_n))_{n\in I\!N}$ são limitadas em $H^{-1}(\Omega)$ e*

$$\liminf_{n\longrightarrow+\infty} |\langle \psi_1'(u_n), u_n\rangle + \langle \varphi_{\lambda,+}'(u_n), u_n\rangle + \langle \psi_2'(u_n), u_n\rangle| > 0.$$

Então, para qualquer sequência minimizante $(v_n)_{n\in I\!N}$ para Φ_λ sobre $\mathcal{M}$, existe uma sequência $(u_n)_{n\in I\!N} \subset \mathcal{M}$ tal que:

(i) $\Phi_\lambda(u_n) \leq \Phi_\lambda(v_n)$,

(ii) $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \|u_n - v_n\|_{H_o^1(\Omega)} = 0$,

(iii) $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \|\Phi_\lambda'(u_n)\|_{H^{-1}(\Omega)} = 0$.

Em particular, se Φ_λ verifica $(PS)_{\mathcal{M},c}$ onde $c = \inf \Phi_\lambda(\mathcal{M})$, então

$$K_c = \{u \in H_o^1(\Omega) \mid \Phi_\lambda(u) = c \ \ e \ \ \Phi_\lambda'(u) = 0\} \neq \emptyset.$$

Para provar esse Teorema, necessitamos do Lema seguinte.

Lema 10.4 *Seja $\Phi_\lambda \in C^1(H, I\!R)$ definido em um espaço de Hilbert H e seja F um subconjunto de H verificando a seguinte propriedade:*

P) *Para cada $u \in F$ com $\Phi_\lambda'(u) \neq 0$, existe, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, uma função $s_u : B_\epsilon(0) \longrightarrow I\!R$ diferenciável no sentido de Fréchet tal que, pondo $t_u(\delta) = s_u\left(\delta \dfrac{\Phi_\lambda'(u)}{\|\Phi_\lambda'(u)\|}\right)$ para $0 \leq \delta \leq \epsilon$, temos*

$$t_u(0) = 1 \quad e \quad t_u(\delta)\left(u - \delta\frac{\Phi_\lambda'(u)}{\|\Phi_\lambda'(u)\|}\right) \in F.$$

Se Φ_λ é limitado inferiormente sobre F, então para cada sequência minimizante $(v_n)_{n\in I\!N} \subset F$ para Φ_λ, existe $(u_n)_{n\in I\!N} \subset F$ tal que

$$\Phi_\lambda(u_n) \leq \Phi_\lambda(v_n)\ , \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} \|u_n - v_n\| = 0 \quad e$$

$$\|\Phi_\lambda'(u_n)\| \leq \frac{1}{n}(1 + \|u_n\||t_{u_n}'(0)|) + |t_{u_n}'(0)||\langle \Phi_\lambda'(u_n), u_n\rangle|. \tag{10.4}$$

Para a prova desse Lema, veja [[31], pag. 6].

Prova do Teorema 10.3: A prova consiste em verificar as hipóteses do Lema 10.4 para a variedade $\mathcal{M} \equiv F$. Então, fixe $u \in \mathcal{M}$ e defina

$$\begin{aligned} G \ &: I\!R \times H_o^1(\Omega) && \longrightarrow I\!R^3 \\ &(s,w) && \longrightarrow G(s,w) \equiv (\psi_1(s(u-w)),\ \varphi_{\lambda,+}(s(u-w)),\ \psi_2(s(u-w))) \,. \end{aligned} \tag{10.5}$$

Observe que

$$G(1,0) = (0,\ \varphi_{\lambda,+}(u),\ \psi_2(u)\ ) \text{ e } \ G_s(1,0) \neq 0.$$

Aplicando o Teorema da função Implícita no ponto $(1,0)$, obtemos para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, que existe uma função diferenciável

$$s_u : B_\epsilon(0) \subset H_o^1(\Omega) \longrightarrow I\!R_+,$$

tal que

(*i*) $s_u(0) = 1,\ s_u(w)(u-w) \in \mathcal{M}$, para $w \in B_\epsilon(0)$,

(*ii*) $\displaystyle \langle s_u'(0), w\rangle = \frac{\langle \psi_1'(u), w\rangle + \langle \varphi_{\lambda,+}'(u), w\rangle + \langle \psi_2'(u), w\rangle}{\langle \psi_1'(u), u\rangle + \langle \varphi_{\lambda,+}'(u), u\rangle + \langle \psi_2'(u), u\rangle}.$

Para a verificação de (i), basta observar que pelo Teorema da Função Implícita $G(s_u(w), w) = (0,\ \varphi_{\lambda,+}(u),\ \psi_2(u)\ )$ para $w \in B_\epsilon(0)$. Para verificar (ii), note que a diferencial de G no ponto $(s_u(v), v)$, com $v \in B_\epsilon(0)$ é:

$$(0,0,0) \equiv \langle G'(s(v), v), (w,w,w)\rangle = (a_u(v,w), b_u(v,w), d_u(v,w)) \in I\!R^3,$$

onde

$$\begin{aligned} a_u(v,w) =&\ \ \langle \psi_1'(s_u(v)(u-v)), w\rangle \langle s_u'(v), w\rangle - \langle \psi_1'(s_u(v)(u-v)), w\rangle \\ b_u(v,w) =&\ \ \langle \varphi_{\lambda,+}'(s_u(v)(u-v)), w\rangle \langle s_u'(v), w\rangle - \langle \varphi_{\lambda,+}'(s_u(v)(u-v)), w\rangle \\ d_u(v,w) =&\ \ \langle \psi_2'(s_u(v)(u-v)), w\rangle \langle s_u'(v), w\rangle - \langle \psi_2'(s_u(v)(u-v)), w\rangle \end{aligned}$$

para cada $w \in B_\epsilon(0)$. Desde que $\langle G'(s(v), v), (w,w)\rangle \equiv 0$ para cada $v,\ w \in B_\epsilon(0)$, em particular para $v \equiv 0$. Assim, a e b tornam-se:

$$\begin{aligned} a_u(0,w) =&\ \ \langle \psi_1'(u), u\rangle \langle s_u'(0), w\rangle - \langle \psi_1'(u), w\rangle \\ b_u(0,w) =&\ \ \langle \varphi_{\lambda,+}'(u), u\rangle \langle s_u'(0), w\rangle - \langle \varphi_{\lambda,+}(u), w\rangle \\ d_u(0,w) =&\ \ \langle \psi_2'(u), u\rangle \langle s_u'(0), w\rangle - \langle \psi_2'(u), w\rangle, \end{aligned}$$

podemos então, somar as coordenadas e um cálculo simples obtemos (ii). Assim, temos verificado as hipóteses do Lema 10.4. Então, para concluirmos a demonstração, aplicando a conclusão do Lema 10.4, falta apenas verificar que a sequência $(t_n'(0))_{n\in I\!N}$ é limitada. Mas isso é uma consequência de $\mathcal{M}$ ser limitada. De fato, desde que a sequência $(u_n)_{n\in I\!N}$ é limitada, pela definição de $t_n(\delta)$, temos que

$$t_n'(0) = \ \ \langle s_{u_n}'(0), \frac{\Phi_\lambda'(u_n)}{\|\Phi_\lambda'(u_n)\|_{H^{-1}(\Omega)}}\rangle = \frac{\langle \psi_1'(u_n) + \varphi_{\lambda,+}'(u_n) + \psi_2'(u_n)\ ,\ \dfrac{\Phi_\lambda'(u_n)}{\|\Phi_\lambda'(u_n)\|_{H^{-1}(\Omega)}}\rangle}{\langle \psi_1'(u_n), u_n\rangle + \langle \varphi_{\lambda,+}'(u_n), u_n\rangle + \langle \psi_2'(u_n), u_n\rangle}.$$

Pelas nossas hipóteses sobre os funcionais Φ_λ, ψ_1, $\varphi_{\lambda,+}$, ψ_2 e a variedade $\mathcal{M}$, concluímos de (10.4) que $||\Phi'_\lambda(u_n)||_{H^{-1}(\Omega)} \longrightarrow 0$ ∎

Brézis e Nirenberg em [14] mostraram a existência de um número $\tilde{\lambda} > 0$, tal que para cada $\lambda > \tilde{\lambda} > 0$ existe uma solução u_λ para o problema (5.2), com energia $\Phi_\lambda(u_\lambda) < \frac{1}{N}S^{N/2}$. Pelas nossas estimativas, podemos tomar $\tilde{\lambda} = \lambda_o$, desde que $\Omega = B_R(0)$. Obteremos uma solução v_λ para $\lambda > \lambda^* \geq \lambda_o > 0$, com energia $\Phi_\lambda(v_\lambda) > \frac{1}{N}S^{N/2}$. Portanto, uma segunda solução. Mais precisamente, temos:

Teorema 10.5 *Seja $\Omega \subset I\!R^N (N \geq 4)$ um domínio limitado. Para*

$$1 < q < \frac{N}{N-2}$$

existe um $\lambda^* > 0$, tal que o problema (5.2) possui pelo menos duas soluções para todo $0 < \lambda^* < \lambda$. Com as mesmas hipóteses, quando $N = 3$, para cada $\lambda > \lambda^*$ existe uma solução u do problema (5.2), com $\Phi_\lambda(u) \geq \frac{1}{3}S^{3/2}$.

Prova: A existência do λ^* é assegurada pelo Teorema 9.1, o qual foi demonstrado no Capítulo 9. Note porém, que o λ^* obtido pelo Teorema 9.1 pode não ser ótimo. Por outro lado, se $\Omega = B_1(0)$, o Lema 8.2 nos diz que nesse caso será ótima. Para a existência de uma solução, veja a Observação 7.2 e comentários acima. Agora, note que pelo Lema 6.4, existem funções $w \in H^1_o(\Omega)$, tais que $\Phi_{\lambda,+}(w) > \frac{1}{N}S^{N/2}$. Para provar o Teorema 10.5, necessitamos apenas verificar as hipótese do Teorema 10.3. Porém, em algumas situações não poderemos concluir que o subconjunto $K_c \neq \emptyset$, mas concluíremos que o funcional $\Phi_{\lambda,+}$ possui um ponto crítico u, com energia $\Phi_{\lambda,+}(u) \geq \frac{1}{N}S^{N/2}$. Portanto, uma solução diferente da obtida pelo Passo da Montanha.

Desde que $\mathcal{M}$ é limitada, para obtermos a segunda solução poderíamos maximizar o funcional $\Phi_{\lambda,+}$ sobre a variedade $\mathcal{M}$, mas, por comodidade iremos minimizar o funcional $(-\Phi_{\lambda,+})$ sobre $\mathcal{M}$.
Daqui por diante, dividiremos a prova em Afirmações.

Afirmação 10.6 *$-\Phi_{\lambda,+}$ é limitado sobre $\mathcal{M}$.*

A limitação segue-se do Teorema 9.1. Mas, daremos outra prova aqui. Suponha que $-\Phi_{\lambda,+}$ seja ilimitado superiormente sobre $\mathcal{M}$. Então, deve existir uma sequência $(u_n) \subset \mathcal{M}$, tal que

$$-\Phi_{\lambda,+}(u_n) \longrightarrow +\infty \quad \text{e} \quad ||Du_n||^2_{L^2} \longrightarrow +\infty \quad \text{quando} \quad n \longrightarrow +\infty.$$

Mas nesse caso, temos

$$\varphi_{\lambda,+}(u_n) = ||u_{n,+}||^{2^*}_{L^{2^*}} - S||u_{n,+}||^2_{L^{2^*}} > 0,$$

para n suficientemente grande. O que é uma contradição.

Afirmação 10.7 $\langle\psi_1'(u),u\rangle + \langle\varphi_{\lambda,+}'(u),u\rangle + \langle\psi_2'(u),u\rangle < 0$ *para todo* $u\in\mathcal{M}$.

De fato, temos

$$\langle\psi_1'(u),u\rangle = 2\|Du\|_2^2 - 2^*\|u\|_{2^*}^{2^*} - \lambda(q+1)\|u\|_{q+1}^{q+1}.$$

Como $\psi_1(u)=0$, obtemos

$$\langle\psi_1'(u),u\rangle = -\frac{4}{N-2}\|u\|_{2^*}^{2^*} + (1-q)\lambda\|u\|_{q+1}^{q+1} < 0. \tag{10.6}$$

Lembrando que $q>1$, temos

$$\langle\varphi_{\lambda,+}'(u),u\rangle = \varphi_{\lambda,+}(u) + \|Du\|_2^2 - S\|u\|_{2^*}^2 - q\lambda\|u\|_{q+1}^{q+1} \le 0 \tag{10.7}$$

Para $u\in\mathcal{M}$, temos

$$\langle\psi_2'(u),u\rangle = (1-q)\lambda\|u\|_{q+1}^{q+1} \le -\Theta < 0. \tag{10.8}$$

Agora, juntando (10.6)-(10.8) provamos a afirmação.

Afirmação 10.8 *Se* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência minimizante para* $-\Phi_{\lambda,+}$ *em* $\mathcal{M}$, *então*

$$\liminf_{n\longrightarrow+\infty} |\langle\psi_1'(u_n),u_n\rangle + \langle\varphi_{\lambda,+}'(u),u\rangle + \langle\psi_2'(u_n),u_n\rangle| > 0.$$

Foi observado inicialmente que existem funções $w\in H_o^1(\Omega)$ tais que $\Phi_{\lambda,+}(w) > \frac{1}{N}S^{N/2}$. Então, para algum $\Theta>0$ existem funções w tais que $\psi_2(w)\le -\Theta$, isto é, $\mathcal{M}\neq\emptyset$. Em particular, existem $w\in\mathcal{M}$ tais que $-\Phi_{\lambda,+}(w) < -\frac{1}{N}S^{N/2} < 0$. Agora, desde que $\mathcal{M}$ é limitada, podemos supor que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uniformemente limitada. Além disso, deve satisfazer também, para alguma subsequência e $u\in H_o^1(\Omega)$,

$$u_n \overset{H_o^1}{\rightharpoonup} u \quad \text{e} \quad u_n \overset{L^{q+1}}{\longrightarrow} u.$$

Daí, temos

$$\psi_2(u_n) \longrightarrow \psi_2(u) \le -\Theta < 0.$$

Agora, usando que $\langle\Phi_{\lambda,+}'(u_n),u_n\rangle = 0$, (10.6)-(10.8), teremos

$$\langle\psi_1'(u_n),u_n\rangle + \langle\varphi_{\lambda,+}'(u),u\rangle + \langle\psi_2'(u_n),u_n\rangle \le -\frac{4}{N-2}\|u_n^+\|_{2^*}^{2^*} + 2\lambda(1-q)\|u_n^+\|_{q+1}^{q+1} \le -2\Theta < 0.$$

Afirmação 10.9 *Seja* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência minimizante para* $-\Phi_{\lambda,+}$ *sobre a variedade* $\mathcal{M}$. *Então, existe* $u\in\mathcal{M}$ *ponto crítico para* $-\Phi_{\lambda,+}$, *tal que* $u_n\rightharpoonup u$. *Além disso,* $-\Phi_{\lambda,+}(u) \le -\frac{1}{N}S^{N/2}$.

Defina

$$-c = \inf_{w\in\mathcal{M}}\{-\Phi_{\lambda,+}(w)\}.$$

Já sabemos que $-c$ é finito. Em vista das Afirmações anteriores, podemos usar o Teorema 10.3, para concluirmos que $(u_n)_{n\in I\!N} \subset \mathcal{M}$ é tal que

$$\begin{aligned} -\Phi_{\lambda,+}(u_n) &\longrightarrow -c, \\ -\Phi'_{\lambda,+}(u_n) &\longrightarrow 0 \text{ em } \quad H^{-1}(\Omega). \end{aligned}$$

Como $(u_n)_{n\in I\!N}$ é limitada, existe $u \in H_o^1(\Omega)$, tal que $u_n \overset{H_o^1}{\rightharpoonup} u$. Assim,

$$\begin{aligned} \langle(-\Phi_{\lambda,+})'(u_n), v\rangle &= \int_\Omega \left((u_n^+)^{2^*-2}u_n^+v + \lambda(u_n^+)^{q-1}u_n^+v - Du_n\cdot Dv\right) \\ &\downarrow \\ 0 = \quad \langle(-\Phi_{\lambda,+})'(u), v\rangle &= \int_\Omega \left((u^+)^{2^*-2}u^+v + \lambda(u^+)^{q-1}u^+v - Du\cdot Dv\right). \end{aligned}$$

Desde que esta última igualdade vale para toda $v \in H_o^1(\Omega)$, temos que $u \in \mathcal{M}$, e $-\Phi_{\lambda,+}(u) \geq -c$. Note que $\psi_2(u) \leq -\Theta < 0$, isto é, $u_+ \not\equiv 0$. Agora, pelo princípio do máximo de Hopf concluímos que $u > 0$ sobre Ω. Então a sequência $(u_n)_{n\in I\!N}$ é positiva, isto é, $u_n \geq 0$ sobre Ω.

Por um resultado de Struwe [65](veja também Willem[[71], pag.129]), temos

$$\Phi_{\lambda,+}(u_n) \longrightarrow \Phi_{\lambda,+}(u) + \sum_{j=1}^{m}\Phi_\infty(U_j) = c\ , \tag{10.9}$$

com $U_j > 0$ sobre $I\!R^N$, pontos críticos do funcional Φ_∞ associado a equação $-\Delta U_j = U_j^{2^*-1}$ no $I\!R^N$. Daí, é imediato que

$$\Phi_\infty(U_j) = \frac{1}{N}S^{N/2}.$$

Suponhamos que $c = k\frac{1}{N}S^{N/2}$ para algum inteiro $1 < k \leq m$(a desigualdade é estrita devido ao Lema 6.4). Por (10.9) e $\Phi_\infty(U_j) = \frac{1}{N}S^{N/2}$, mais o fato de que $u > 0$, concluímos que

$$\Phi_{\lambda,+}(u) = k_o\frac{1}{N}S^{N/2}\ , \quad k_o \geq 1 \text{ inteiro.}$$

Agora, suponha que $c \in (\frac{k}{N}S^{N/2}, \frac{k+1}{N}S^{N/2})$, para algum inteiro $k > 1$. Temos pelo Lema de Brézis-Lieb [13] que

$$\begin{aligned} \Phi_{\lambda,+}(u_n) &= \Phi_{\lambda,+}(u) + \Phi_{\lambda,+}(u_n - u) + o(1), \\ \Phi'_{\lambda,+}(u_n) &= \Phi'_{\lambda,+}(u) + \Phi'_{\lambda,+}(u_n - u) + \phi_n \text{ sobre } \quad H^{-1}(\Omega), \end{aligned} \tag{10.10}$$

onde $\phi_n(v) \longrightarrow 0$ para cada $v \in H_o^1(\Omega)$. Como $\Phi'_{\lambda,+}(u) \equiv 0$, temos

$$\Phi'_{\lambda,+}(u_n) = \Phi'_{\lambda,+}(u_n - u) + \phi_n \quad \text{sobre} \quad H^{-1}(\Omega).$$

Resulta, novamente de (10.9) e das observações acima que

$$\begin{aligned}
\Phi_{\lambda,+}(u_n - u) &\longrightarrow c - \frac{k}{N}S^{N/2} < \frac{m+1-k}{N}S^{N/2}, \\
\Phi'_{\lambda,+}(u_n - u) &\longrightarrow 0,
\end{aligned} \tag{10.11}$$

onde $k \leq m$. Note que $k > 0$, pois $\Phi_{\lambda,+}(u) > 0$. Basta observar que sobre $\mathcal{M}$, temos

$$\Phi_{\lambda,+}(u) = \frac{1}{N}\|u\|_{2^*}^{2^*} + \lambda\frac{q-1}{2(q+1)}\|u\|_{q+1}^{q+1} > 0. \tag{10.12}$$

Se ocorrer a igualdade, isto é, $k = m$. Por um resultado de Brézis-Nirenberg [14], sabemos que $\Phi_{\lambda,+}$ verifica a condição $(PS)_c$(clássica), para cada $c \in (0, \frac{1}{N}S^{N/2})$. Assim, de (10.11), deve existir $w \in H_o^1(\Omega)$, tal que

$$u_n - u \longrightarrow w.$$

Como $u_n - u \rightharpoonup 0$, concluímos que $w \equiv 0$, e nesse caso, $u_n \longrightarrow u$ em $H_o^1(\Omega)$, ou seja, $u \in \mathcal{M}$ com $\Phi_{\lambda,+}(u) = c$ e $\Phi'_{\lambda,+}(u) = 0$. Porém, se $k < m$ temos que $\Phi_{\lambda,+}(u) > \frac{1}{N}S^{N/2}$. Portanto, temos provado que

$$\Phi_{\lambda,+}(u) \geq \frac{1}{N}S^{N/2} \quad \text{e} \quad \Phi'_{\lambda,+}(u) = 0.$$

Isso conclui a prova do Teorema 10.5.

■

Teorema 10.10 *Seja $\Omega \subset I\!R^3$ um domínio limitado. Para $1 < q < 3$*

i) existe $\lambda^* > 0$, tal que para cada $\lambda^* < \lambda$, o problema (5.2) possui pelo menos uma solução $u \in H_o^1(\Omega)$, com $\Phi_\lambda(u) \geq \frac{1}{3}S^{3/2}$,

ii) existe $\lambda^{**} = \lambda^{**}(\lambda^*)$, tal que o problema (5.2) possui pelo menos duas soluções para cada $\lambda^{**} < \lambda$.

Prova:

i) Segue-se do Teorema 10.5.

ii) Brézis-Nirenberg provaram que existe um $\tilde{\lambda} > 0$, tal que para cada $\lambda > \tilde{\lambda}$, existe uma solução u do problema (5.2), com

$$\Phi_\lambda(u) < \frac{1}{3}S^{3/2}.$$

Tomando

$$\lambda^{**} \equiv \max\{\lambda^*, \tilde{\lambda}\},$$

o resultado segue-se como no item *i)*.

■

Teorema 10.11 *Seja $\Omega = B_R(0) \subset I\!R^3$ a bola de centro na origem e raio R. Então o seguinte vale:*

(a) Se $q = 3$, existe um $\lambda_o > 0$ tal que

(i) para $\lambda > \lambda_o$ existe **pelo menos** *uma solução de (5.2),*

(b) Se $1 < q < 3$, existe $0 < \lambda_o = \lambda_o(q)$ tal que

(i) para $\lambda > \lambda_o$ existem **pelo menos** *duas soluções de (5.2),*

(ii) para $\lambda = \lambda_o$ existe **pelo menos** *uma solução de (5.2),*

Prova:
a) Se $q = 3$, pelo Lema 7.1 o resultado segue.

Observação 10.12 *Neste caso, não poderemos assegurar a existência de pelo menos duas soluções, devido a estimativa (6.7) e a desigualdade*

$$||Du||^2_{H^1_o} \geq S||u||^2_{L^{2^*}} + \lambda_q||u||^2_{L^q},$$

para $u \in H^1_o(\Omega)$, não valerem para $q = 3$.

b) Se $1 < q < 3$, o mesmo como no item a), mas agora vale a estimativa (6.7). Em virtude do Teorema 10.5 e Lema 8.2,
i) teremos pelo menos duas soluções se $0 < \lambda_o < \lambda$.
ii) Para $\lambda_o = \lambda$, existe pelo menos uma solução.

■

Apêndice A

Vamos provar as estimativas (3.38) e (3.39), com v_ϵ definida em (3.37). Os valores de m, n e s foram definidos em (2.2) e (2.3). Como em (3.36), estimando a função u_ϵ teremos:

$$I_1 = \int_0^R r^\alpha |u'_\epsilon|^{\beta+2}\, dr = \epsilon^a S^{(\gamma+1)/(\beta+\gamma+2-\alpha)} + 0(1) \tag{A.1}$$

onde $a = \alpha - (\beta+2)(m+n)/m + 1$;

$$I_2 = \int_0^R r^\gamma |u_\epsilon|^{q(\gamma)}\, dr = \epsilon^b S^{(\gamma+1)/(\beta+\gamma+2-\alpha)} + 0(1) \tag{A.2}$$

onde $b = \gamma - \frac{n}{m} q(\gamma) + 1$;

$$I_\eta = \int_0^R r^l |u_\epsilon|^{\beta+2}\, dr = \begin{cases} 0(\epsilon^\eta) + 0(1)\ , & \eta < 0 \\ 0(|ln\epsilon|) + 0(1)\ , & \eta = 0 \\ 0(1)\ , & \eta > 0 \end{cases} \tag{A.3}$$

onde $\eta = l - \frac{n}{m}(\beta+2) + 1$, e

$$\frac{I_1}{(I_2)^{(\beta+2)/(q(\gamma))}} = \int_0^R r^\alpha |v'_\epsilon|^{\beta+2}\, dr = S^{(\gamma+1)/(\beta+\gamma+2-\alpha)} + 0(\epsilon^{s(\beta+2)}) \tag{A.4}$$

De fato,

$$I_1 = \int_0^R r^\alpha |u'_\epsilon|^{\beta+2}\, dr = \int_0^{R_0} |\hat{c}\frac{n}{m}|^{\beta+2} r^{\alpha+(n-1)(\beta+2)} (\epsilon^n + r^n)^{-(m+1)(\beta+2)/m}\, dr + \int_{R_0}^{2R_0} r^\alpha |u'_\epsilon(r)|^{\beta+2}\, dr$$

De (2.2) e (2.3) temos que

$$|\hat{c}\frac{n}{m}|^{\beta+2} \int_0^\infty r^{\alpha+(n-1)(\beta+2)} (\epsilon^n + r^n)^{-(m+1)(\beta+2)/m}\, dr = \epsilon^a S^{(\gamma+1)/(\beta+\gamma+2-\alpha)}$$

obtemos,

$$\begin{aligned} I_1 = &\ \epsilon^a S^{(\gamma+1)/(\beta+\gamma+2-\alpha)} + \int_{R_0}^{2R_0} r^\alpha |u'_\epsilon|^{\beta+2}\, dr \\ &-|\hat{c}\tfrac{n}{m}|^{\beta+2} \int_{R_0}^{\infty} r^{\alpha+(n-1)(\beta+2)}(\epsilon^n + r^n)^{-(m+1)(\beta+2)/m}\, dr \\ = &\ \epsilon^a S^{(\gamma+1)/(\beta+\gamma+2-\alpha)} + O(1) \end{aligned}$$

onde $a = \alpha - (\beta+2)(m+n)/m + 1$. Observe que as integrais

$$\int_{R_0}^{2R_0} r^\alpha |u'_\epsilon|^{\beta+2}\, dr \quad , \quad \int_{R_0}^{\infty} r^{\alpha+(n-1)(\beta+2)}(\epsilon^n + r^n)^{-(m+1)(\beta+2)/m}\, dr,$$

são finitas. De fato, a primeira delas, se trata de uma integração sobre um intervalo limitado; a segunda é um pouco mais delicada. Vejamos:

$$\int_{R_0}^{\infty} r^{\alpha+(n-1)(\beta+2)}(\epsilon^n + r^n)^{-(m+1)(\beta+2)/m}\, dr \simeq \int_{R_0}^{\infty} r^{-\alpha/(\beta+1)}\, dr.$$

Para obter o expoente na última integral, note que

$$\begin{aligned} \alpha + (n-1)(\beta+2) - \frac{n}{m}(m+1)(\beta+2) = &\ \alpha - \frac{1}{m}(m+n)(\beta+2) = \alpha - \frac{\alpha}{\beta+1}(\beta+2) \\ = &\ \alpha(\beta+1-\beta-2)\frac{1}{\beta+1} = -\alpha(\frac{1}{\beta+1}) < -1, \end{aligned}$$

pois $\alpha - \beta - 1 > 0$. Donde resulta que a integral é limitada.

Observação A.1 *Essa limitação que comentamos acima, so é válida no caso radial, e ela é fundamental nos resultados aqui obtidos. Por esse motivo, García e Peral em [29] não obtiveram um resultado completo para o p-Laplaciano.*

Agora, como

$$\begin{aligned} |\hat{c}|^{q(\gamma)} \int_0^\infty r^\gamma (\epsilon^n + r^n)^{-q(\gamma)/m}\, dr = &\ |\hat{c}|^{q(\gamma)} \int_0^\infty (\frac{r}{\epsilon})^\gamma \epsilon^{\gamma - q(\gamma)n/m} (1 + (\frac{r}{\epsilon})^n)^{-q(\gamma)/m}\, dr \\ = &\ |\hat{c}|^{q(\gamma)} \int_0^\infty \epsilon^{\gamma - q(\gamma)n/m+1} t^\gamma (1+t^n)^{-q(\gamma)/m}\, dt = \epsilon^b S^{(\gamma+1)/(\beta+\gamma+2} \end{aligned}$$

onde $b = \gamma - q(\gamma)n/m + 1$. Assim, temos que

$$(I_2)^{(\beta+2)/q(\gamma)} = \epsilon^{b(\beta+2)/q(\gamma)} S^{((\beta+2)/q(\gamma))(\gamma+1)/(\beta+\gamma+2-\alpha)} + O(\epsilon). \tag{A.5}$$

$$I_\eta = |\hat{c}|^{\beta+2} \int_0^{R_0} r^l (\epsilon^n + r^n)^{-(\beta+2)/m}\, dr + O(1).$$

se $\eta < 0$, temos $l + 1 < \frac{n}{m}(\beta+2)$ e nesse caso,

$$\begin{aligned} I_\eta = &\ |\hat{c}|^{\beta+2} \int_0^\infty \frac{(\frac{r}{\epsilon})^l \epsilon^{l-n(\beta+2)/m}}{(1+(\frac{r}{\epsilon})^n)^{(\beta+2)/m}}\, dr + O(1) = \epsilon^{l-n(\beta+2)/m+1} |\hat{c}|^{\beta+2} \int_0^\infty t^l (1+t^n)^{-(\beta+2)/m}\, dt \\ &+O(1) = \epsilon^{l-n(\beta+2)/m+1} |\hat{c}|^{\beta+2} \int_0^\infty t^{l-(\beta+2)/m}\, dt = O(\epsilon^\eta) + O(1) \end{aligned}$$

se $\eta = 0$,

$$\begin{aligned}
I_\eta = &\ |\hat{c}|^{\beta+2}\int_0^{R_0}\frac{r^l}{(\epsilon^n+r^n)^{(\beta+2)/m}}\,dr + O(1) = |\hat{c}|^{\beta+2}\int_0^{R_0}\frac{r^{n(\beta+2)/m-1}}{(\epsilon^n+r^n)^{(\beta+2)/m}}\,dr + O(1)\\
= &\ |\hat{c}|^{\beta+2}\tfrac{(\beta+2)}{n(\beta+2-m)}\ln(\epsilon^n+r^n)|_0^{R_0} + O(1)\\
= &\ |\hat{c}|^{\beta+2}\tfrac{(\beta+2)}{n(\beta+2-m)}(\ln(\epsilon^n+R_0^n)-\ln(\epsilon^n)) + O(1) = |\hat{c}|^{\beta+2}\tfrac{(\beta+2)}{(\beta+2-m)}\ln|\epsilon| + O(1).
\end{aligned}$$

se $\eta > 0$, temos

$$\begin{aligned}
I_\eta = &\ |\hat{c}|^{\beta+2}\int_0^{R_0}\frac{r^l}{(\epsilon^n+r^n)^{(\beta+2)/m}}\,dr + O(1)\\
= &\ C\epsilon^{l-n(\beta+2)/m+1}\int_0^{R_0/\epsilon}\frac{t^l}{(1+t^n)^{(\beta+2)/m}}\,dt + O(1)\\
\leq &\ C\epsilon^{l-n(\beta+2)/m+1}\int_0^{R_0/\epsilon} t^{l-n(\beta+2)/m}\,dt + O(1) = C\frac{R_0^{l-n(\beta+2)/m+1}}{l-n(\beta+2)/m+1} + O(1).
\end{aligned}$$

Estimando a função v_ϵ dada em (3.37), obtemos

$$\frac{I_1}{(I_2)^{(\beta+2)/q(\gamma)}} = \epsilon^{(a-b(\beta+2)/q(\gamma))}S^{(1-(\beta+2)/q(\gamma))((\gamma+1)/(\beta+\gamma+2-\alpha))} + O(\epsilon^{-b(\beta+2)/q(\gamma)}) = S + O(\epsilon^{s(\beta+2)}).$$

onde s foi definido em (2.2). De $(A.5)$ e das estimativas sobre I_η, temos:

$$\frac{I_\eta}{(I_2)^{(\beta+2)/q(\gamma)}} = O(\epsilon^{l+\beta-\alpha+2})\ , \quad \text{se} \quad \eta < 0 \quad (\text{quando} \quad N \geq 5),$$

$$\frac{I_\eta}{(I_2)^{(\beta+2)/q(\gamma)}} = O(\epsilon^{s(\beta+2)}|\ln\epsilon|)\ , \quad \text{se} \quad \eta = 0 \quad (\text{quando} \quad N = 4),$$

$$\frac{I_\eta}{(I_2)^{(\beta+2)/q(\gamma)}} = O(\epsilon^{s(\beta+2)})\ , \quad \text{se} \quad \eta > 0 \quad (\text{quando} \quad N = 3).$$

Assim, obtemos as estimativas (3.38) e (3.39).

Apêndice B

No Capítulo 4.3, usamos as seguintes desigualdades numéricas:

$(B1)$ Se $2 \leq \beta + 2 < 3$, então dado $k_1 \in [\beta+1, 2]$, existe uma constante C tal que

$$(1+t^2+2t\cos\theta)^{(\beta+2)/2} \leq 1 + t^{\beta+2} + (\beta+2)t\cos\theta + Ct^{k_1}$$

para $t \geq 0$, uniformemente em θ.

$(B2)$ Se $3 \leq \beta + 2$, então existe uma constante C tal que

$$(1+t^2+2t\cos\theta)^{(\beta+2)/2} \leq 1 + t^{\beta+2} + (\beta+2)t\cos\theta + C(t^2 + t^{(\beta+1)})$$

para $t \geq 0$, uniformemente em θ.

$(B3)$ Se $1 < \beta + 2 < 2$ e $k_2 \in (1, \beta+2)$, existe uma constante C tal que

$$(1+t^2+2t\cos\theta)^{(\beta+2)/2} \leq 1 + t^{\beta+2} + (\beta+2)t\cos\theta + Ct^{k_2}$$

para $t \geq 0$, uniformemente em θ.

Bibliografia

[1] Adimurthi e S. L. Yadava, *An elementary proof of the uniqueness of positive solutions of a quasilinear Dirichlet problem.* Arch. Rat. Mech. Anal. 127(3)(1994),219-229.

[2] A. Ambrosetti e P. Rabinowitz, *Dual variational method in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal. 14(1973),349-381.

[3] A. Ambrosetti, H. Brézis e G. Cerami, *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some Elliptic problems **, J. Funct. Anal. 122(1994),519-543.

[4] F. V. Atkinson e L. A. Peletier, *Emden-Fowler equations involving critical exponents*, Nonlin. Anal. T.M.A. 10(1986), 755-776.

[5] A. Bahri e J. Coron, *On a nonlinear elliptic equations involving the critical Sobolev exponent. The effect of the topology of the domain*, Comm. Pure Appl. Math., XLI(1988),253-294.

[6] R. D. Benguria, J. Dolbeaut e M. J. Esteban, *Classification of the solutions of semilinear elliptic problems in a ball.* J. Diff. Eq. 167(2000),438-466.

[7] F. Bernis, J. Garcia-García e I. García, *Existence and multiplicity of nontrivial solutions in semilinear critical problems of fourth order*, Adv. Differential Equations. 1(1996),219-240.

[8] G. Bliss, *An integral inequality,* J. London Math. Soc. 5(1930),40-46.

[9] L. Boccardo e F. Murat, *Almost everywhere convergence of the gradients of solutions to elliptic and parabolic equations*, Proc. Amer. Math. soc. 88(1983),486-490.

[10] L. Boccardo, M. Escobedo e I. García, *A Dirichlet problem involving critical exponents.* Non. Anal. TMA. 24(11)(1995),1639-1648.

[11] H. Brézis, J. M. Coron e L. Nirenberg, *Free vibrations for a nonlinear wave equation and a theorem of P. Rabinowitz*, Comm. Pure Appl. Math. 33(1980),667-689.

[12] H. Brézis e E. H. Lieb, *A relation between pointwise convergence of functions and convergence functional*, Proc. Amer. Math. Soc. 88(1983),486-490.

[13] _____, *Sobolev inequalities with remainder terms*, J. Funct. Anal. 62(1985) 73-86.

[14] H. Brezis e L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math. 36(1983),437-477.

[15] L. Caffarelli, L. Nirenberg e J. Spruck, *The Dirichlet problem for nonlinear second order elliptic equations, III: Functions of the Hessian,* Acta Math. 155(1985),261-301.

[16] L. Caffarelli, L. Nirenberg e J. Spruck, *Nonlinear second-order elliptic equations V. The Dirichlet problem for Weingarten Hypersurfaces.* Comm. Pure Appl. Math., 41(1988), 47-70.

[17] K-S. Chou e Di Geng, On the critical dimension of a semilinear degenerate elliptic equation involving critical Sobolev-Hardy exponent. Non. Anal. TMA. 26(12)(1996),1965-1984.

[18] P. Clément, D. G. de Figueiredo e E. Mitidieri, *Quasilinear elliptic equations with critical exponents*, Top. Meth. Nonl. Anal. 7(1996),133-170.

[19] J. Chabrowski, *Variational methods for pontetial operator equations, with applications to nonlinear elliptic equations*, Walter de Gruyter-Berlin-New York-1997.

[20] L. Damascelli, *A remark on the uniqueness of the positive solution for a semilinear elliptic equation.* Non. Anal. TMA. 26(2)1996),211-216.

[21] J. I. Díaz, *Nonlinear partial differential equations and free boundaries.* Vol.1. Elliptic Equations. Research Notes in Mathematics, 106. Pitman 1985.

[22] D. G. de Figueiredo, J. V. Gonçalves e O. H. Miyagaki, *On a class of quasilinear Elliptic problems involving critical exponents*, Comm. Contemp. Math. 2(2000), 47-59.

[23] H. Egnell, *Elliptic boundary value problems with singular coefficientes and critical nonlinearities*, Indiana Univ. Math. J. 38(1989), 235-251.

[24] _____, *Semilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Arch. Rational Mech. Anal. 104(1988),27-56.

[25] _____, *Existence and nonexistence results for m-Lapalce equations involving critical Sobolev exponents,* Arch. Rational Mech. Anal. 104(1988),57-77.

[26] I. Ekeland, *On the variational principle*, J. Math. Anal. Appl. 47(1874),324-453.

[27] J. P. García Azorero e I. Peral Alonso, *Existence an nonuniqueness for the p-Laplacian: Nonlinear eigenvalues*, Comm. Partial Differential Equations 12(1987),1389-1430.

[28] _____, *Multiplicity of solutions for elliptic problems with critical exponent or with a nonsymmetric term*, Trans. Amer. Math. Soc. 323(1991),877-895.

[29] _____, *Some results about the existence of a second positive solution in a quasilinear critical problem*, Indiana Univ. Math. J. 43(1994), 941-957.

[30] I. M. Gelfand, *Some problems in the theory of quasi-linear equations*, Amer. Math. Soc. Transl. 29(1963),295-381.

[31] N. Ghoussoub, *Duality and pertubation methods in critical point theory*, University Press, Cambridge, Great Britain 1993.

[32] B. Gidas, W. M. Ni e L. Nirenberg, *Symmetry and related properties via the maximum principle*, Comm. Math. Phys. 68(1979),209-243.

[33] B. Guan e J. Spruck *Boundary-value problems on S^N for surfaces of constant Gauss curvature*, Annals of Math., 138(1993),601-624.

[34] M. Guedda e L. Véron, *Quasilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Non. Anal. TMA 13(1989),879-902.

[35] G. H. Hardy, J. E. Littlewood e G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge University Press, 1952.

[36] D. Joseph e T. Lundgren, *Quasilinear Dirichlet problems driven by positive sources*, Arch. Rational Mech. Anal. 49(1973),241-269.

[37] S. Kesavan e F. Pacella, *Symmetry of positive solutions of a quasilinear elliptic equations via isoperimetric inequalities.* Appl. Anal. 54(1994),27-38.

[38] M. C. Knaap, *Nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, PhD. Thesis, University of Leiden. 1991.

[39] M. C. Knaap e L. A. Peletier, *Quasilinear elliptic equations with nearly critical growth*, Comm. Partial Differential Equations, 14(1989), 1351-1383.

[40] A. Kufner e B. Opic, *Hardy-type inequalities*, Pitman Res. Notes in Math., vol219, Longman Scientific and Techinical, Harlow, 1990.

[41] M. Lazzo, *Solutions positives multiples pour une équation elliptique non lineaire avec l'exposant critique de Sobolev*, C. R. Acad. sci. Pais 314(1992)I61-I64.

[42] E. H. Lieb e M. Loss *Analysis*, AMS, Graduate Studies in Math., vol.14(1997)

[43] E. H. Lieb, *Existence and uniqueness of the minimizing solution of Choquard's nonlinear equation*, Studies in Appl. Math. 57(1977) 93-105.

[44] Z. Liqun, *Uniqueness of positive solutions of $\Delta + u + u^p = 0$ in a finite ball*, Comm. Part. Diff. Eqns. 17(1992), 1141-1164.

[45] J. McLeod e L. Peletier, *Elliptic equations with critical growth and Moser's inequality*, Variational methods, Progress in Nonlinear Differential Equations, vol. 4, Birkhäuser, 1990,185-196.

[46] F. Mignot, F. Murat e J-P. Puel, *Variation d'un point de retournement par rapport au domaine*. Comm. Partial Differential Equations 4(11)(1979), 1263-1297.

[47] F. Mignot, F. Murat e J-P. Puel, *Bifurcation and nonlinear eigenvalue problems*. Lectures Notes in Math. Springer, Berlin, 782(1980), 222-254.

[48] F. Mignot e J-P. Puel, *Sur une classe de problèmes non lineáres avec non linéarité positive croissante, convexe*. Comm. Partial Differential Equations, 8(5)(1980), 791-836.

[49] J. Moser, *On a nonlinear problem in differential geometry*, Dynamical Systems, Academic Press. New York. 1973,273-280.

[50] _____, *A sharp form of an inequality by N. Trundiger*, Indiana Unv. Math. J. 20(1971),1077-1092.

[51] W-M. Ni, *Uniqueness of solutions of nonlinear Dirichlet problems*, J. Diff. Eqns. 50(1983), 289-304.

[52] W-M. Ni e R. D. Nussbaum, *Uniqueness and nonuniqueness for positive radial solutions of* $-\Delta u + f(r,u) = 0$. Comm. Pure Appl. Math., 38(1)(1985),7-108.

[53] M. Otani, *Existence and nonexistence of nontrivial solutions of some nonlinear degenerate equations*, J. Funct. Anal. 76(1988),140-159.

[54] D. Passaseo, *The effect of the domain shape on the existence of positive solutions of the equation* $\Delta u + u^{2^*-1} = 0$, Topol. Meth. Nonl. Anal. 3(1)(1994),27-54.

[55] _____ , *Relative category and multiplicity of positive solutions for the equation* $\Delta u + u^{2^*-1} = 0$, Nonl. Anal. TMA 33(1998),509-517.

[56] S. L. Pokhozhaev, *On the Sobolev imbedding theorem for pl=n*, Proc. Conf. Section Math., Moscow Power Inst., 1965, 158-170.

[57] G. Polya e G. Szegö, *Isoperimetric inequalities in mathematical physics*, Princeton University Press, Princeton, 1951.

[58] P. Pucci e J. Serrin, *A general variational identity*, Indiana Univ. Math. J. 35(1986),681-703.

[59] _____, *Critical exponents and critical dimensions for polyharmonic operator*, J. Math. Pures Appl. 69(1990),55-83.

[60] P. H. Rabinowitz, *Minimax methodes in critical point theory with applications to differential equations*, CBMS/65-AMS(1986).

[61] O. Rey, *A multiplicity result for a variational problem with lack of compactness*, Nonlinear Analysis, TMA 13(1989)1241-1249.

[62] E. Rodemich, *The Sobolev inequality with best possible constants*, Analysis Seminar at California Institute of Technology, 1996.

[63] J. Serrin, *Local behaviour of solutions of quasilinear equations*, Acta Math., 113(1965),219-240.

[64] P. N. Srikanth, *Uniqueness of solutions of nonlinear Dirichlet problems*, Differential and Integral Equations 6(1993), 663-670.

[65] M. Struwe, *A global existence result for elliptic boundary value problems involving limiting nonlinearities*, Forschunginstitut für Mathematik eth Zürich(1984),1-26-Math. Z. 187(1984), 511-517.

[66] G. Talenti, *Best constants in Sobolev inequality*, Ann. Mat. Pura Appl. 110(1976),353-372.

[67] P. Tolksdorff, *Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations*, J. Diff. Eq., 51(1984),126-150.

[68] N. S. Trundiger, *On Harnack type inequalities and their applications to Quasilinear Elliptic equations*, Comm. on Pure and Appl. Math., XX(1967),721-747.

[69] K. Tso, *Remarks on the critical exponents for Hessian operators*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 7(1990),113-122.

[70] _____, *On symmetrizations and Hessian operators*, J. Analyse Math. 52(1989),94-106.

[71] M. Willem, *Minimax Theorems*, PNDLE 24, Birkäuser,1996.

[72] W. P. Ziemer, *Weakly differentiable functions*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1989.