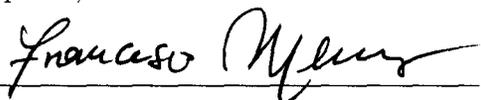

HIPERSUPERFÍCIES DE COHOMOGENEIDADE UM DO ESPAÇO EUCLIDIANO

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. José Adonai Pereira Seixas e aprovado pela Comissão Julgadora.

Campinas, 05 de dezembro de 1996



Prof. Dr. Francesco Mercuri (Orientador)

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas, IMECC, como requisito parcial para obtenção do Título de DOUTOR EM MATEMÁTICA.

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	TI Unicamp
de	45h
V. Es.	
TOMBO BC/	29541
PROC.	281/97
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	08/02/97
N.º CPD	

CM-00097195-0

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA CENTRAL DA UNICAMP

Se45h

Seixas, José Adonai Pereira

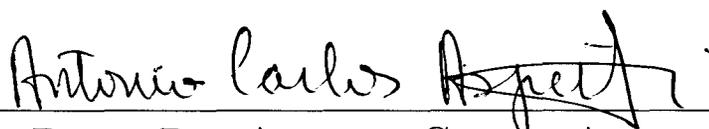
Hipersuperfícies de cohomogeneidade um do espaço euclidiano / José Adonai Pereira Seixas. -- Campinas, SP : [s.n.], 1996.

Orientador : Francesco Mercuri.

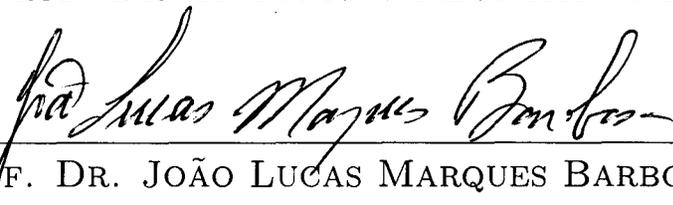
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Hipersuperfícies. 2. Isometria (Matemática).
3. Espaços homogêneos. 4. Espaços de curvatura constante. 5. Geometria riemaniana. 6. Grupos compactos. I. Mercuri, Francesco. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica III. Título.

TESE DE DOUTORADO DEFENDIDA E APROVADA
EM 05 DE DEZEMBRO DE 1996
PELA BANCA EXAMINADORA
COMPOSTA PELOS PROFESSORES DOUTORES



PROF. DR. ANTONIO CARLOS ASPERTI



PROF. DR. JOÃO LUCAS MARQUES BARBOSA



PROF. DR. MANFREDO PERDIGÃO DO CARMO



PROF. DR. RENATO HYUDA DE LUNA PEDROSA



PROF. DR. FRANCESCO MERCURI

AGRADECIMENTOS

Ao professor FRANCESCO MERCURI, meu orientador, pela orientação e por sua amizade.

Ao professor FABIO PODESTÀ e à professora MARIA HELENA NORONHA, por sugestões que tornaram possível a realização deste trabalho.

Ao professor RENATO PEDROSA, pelas lições sobre Ações de Grupos.

Ao professor CHRISTIAM FIGUEROA, pela leitura paciente das primeiras versões deste trabalho.

À CRISTINA, minha mulher, pela incansável busca de erros tipográficos.

À UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS e ao PICD, pelo apoio financeiro.

Ao DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA da UFAL, pelo incentivo. Em especial, ao meu amigo e professor ANTONIO CARLOS MARQUES DA SILVA.

A todos os meus companheiros de curso, por esses agradáveis anos juntos.

À Minha Família

Cristina
Carolinne Christie
Caterinne Christie
Adonai Hilbert
Adonai Riemann
Maria Cristinne

Ao professor EDMILSON PONTES,
Que me colocou nesse caminho...

CONTEÚDO

1 INTRODUÇÃO	1	
2 TERMINOLOGIA E FATOS FUNDAMENTAIS	7	2.1 IMERSÕES ISOMÉTRICAS 8
		2.2 PRODUTOS TORCIDOS 13
		2.3 AÇÕES DE COHOMOGENEIDADE UM 16
3 SOBRE A TOPOLOGIA DAS HIPERSUPERFÍCIES DE COHOMOGENEIDADE UM	24	3.1 MATERIAL BÁSICO 25
		3.2 ÓRBITAS COM CURVATURA POSITIVA 30
		3.3 ÓRBITAS COM CURVATURA NÃO-NEGATIVA 36
		3.4 EXEMPLOS 42
4 HIPERSUPERFÍCIE DE COHOMOGENEIDADE UM ÓRBITAS UMBÍLICAS E HIPERSUPERFÍCIE DE ROTAÇÃO	46	4.1 MATERIAL BÁSICO 48
		4.2 CLASSIFICAÇÃO DOS CASOS DE DIMENSÃO $n \geq 4$ 61
		4.3 O CASO TRIDIMENSIONAL 77
		4.4 EXEMPLOS 82
R REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	85	
I ÍNDICE ALFABÉTICO	88	

RESUMO

Os objetos fundamentais deste trabalho são as hipersuperfícies de G -cohomogeneidade 1 do espaço euclidiano, isto é, as imersões isométricas

$$f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1},$$

onde M é uma variedade riemanniana sobre a qual age um subgrupo $G \subset \text{Iso}(M)$ com órbitas principais de codimensão 1 em M .

Estes objetos são estudados com dois objetivos maiores: o primeiro, dentro do capítulo 3, é determinar a topologia de M , a partir do conhecimento do sinal da curvatura das órbitas principais do grupo G ; o segundo consiste em determinar a forma geométrica sob a qual M pode ser posta no \mathbb{R}^{n+1} , supondo que as órbitas principais de G são subvariedades umbílicas de M , o que compõe o capítulo 4.

1

INTRODUÇÃO

Seja M^n uma variedade riemanniana n -dimensional, conexa e de classe C^∞ . M é dita *homogênea* quando, para pontos p e q , arbitrariamente escolhidos em M , existe uma isometria g de M tal que $g(p) = q$. Equivalentemente, M é homogênea se seu grupo de isometrias, $\text{Iso}(M)$, atua transitivamente sobre M .

Um problema bastante relevante em Geometria Diferencial é aquele que consiste em se obter informações topológicas ou geométricas, sobre uma variedade riemanniana, sob a hipótese de que esta admita uma imersão isométrica, com codimensão baixa, em algum espaço de curvatura constante.

Nessa direção, no que tange às variedades riemannianas homogêneas, destacamos um teorema, descoberto por S. Kobayashi (veja [Koba]), o qual descreve completamente as hipersuperfícies compactas e homogêneas do espaço euclidiano \mathbb{R}^{n+1} . (A notação $M^{n \geq 2}$ é introduzida no capítulo 2 e significa que n , a dimensão de M , é maior do que ou igual a 2.)

KOBAYASHI *Seja $f : M^{n \geq 2} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade compacta e homogênea. Então, $f(M)$ coincide com uma esfera.*

Posteriormente ao teorema de Kobayashi, foram obtidos outros resultados que o generalizaram. O primeiro deles, sem a hipótese da compacidade de M , é devido a T. Nagano e T. Takahashi, ([NaTa]) e seu conteúdo é o seguinte.

NAGANO-TAKAHASHI *Seja $f : M^{n \geq 3} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade homogênea. Se existe $p \in M$, onde o posto da segunda forma fundamental da imersão é maior que 2, então M é isométrica ao produto de uma esfera com um espaço euclidiano.*

Ainda dentro desse contexto, P. Ryan, em [Ryan], atacou o problema das hipersuperfícies homogêneas sob um aspecto mais geral: além de não supor M compacta, o espaço ambiente para a imersão podia ser um forma espacial simplesmente conexa, isto é, o espaço euclidiano, a esfera euclidiana ou o espaço hiperbólico. Nesse trabalho, P. Ryan obtém descrições locais das hipersuperfícies homogêneas da esfera e do espaço hiperbólico, além de re-obter o teorema de Nagano e Takahashi.

No estudo das ações induzidas por subgrupos do grupo de isometrias de uma variedade riemanniana M , uma generalização natural do conceito de homogeneidade é o de G -cohomogeneidade k , onde $G \subset \text{Iso}(M)$: M é dita de G -cohomogeneidade k se a codimensão de uma órbita principal da ação de G sobre M é k . Convém observar que, relativamente a este novo conceito, a homogeneidade de uma variedade M se traduz como G -cohomogeneidade 0.

Assim, as variedades riemannianas de G -cohomogeneidade 1 são os objetos mais próximos das variedades homogêneas e, portanto, todos aqueles problemas já atacados, quando do caso homogêneo, voltam a despertar interesse nesse sentido de generalização.

Estudos sobre as variedades de G -cohomogeneidade 1 têm sido feitos, já há algum tempo. Um dos mais importantes, dentro do aspecto topológico, foi feito por P. Mostert, em [Most] (1956), onde ele descreve algumas relações entre as órbitas principais e a variedade M . Ainda nesse artigo, Mostert descreve as variedades de G -cohomogeneidade 1, em dimensões dois e três. Dentro do capítulo 2, na seção 2.3, fazemos uma breve exposição de alguns desses resultados.

Mais recentemente, mais precisamente a partir de 1989, A. V. Alekseevsk e D. V. Alekseevsk produziram vários artigos tratando das variedades de G -cohomogeneidade 1, dentre os quais destacamos [AlAl] e [Alek], onde tais variedades são classificadas a partir de propriedades das geodésicas normais.

Voltemos ao tema das hipersuperfícies, agora com a atenção voltada para as *hipersuperfícies G -cohomogeneidade 1*, isto é, as imersões isométricas $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, onde M é uma variedade de G -cohomogeneidade 1 e G é um subgrupo compacto e conexo de $\text{Iso}(M)$. O primeiro estudo destes objetos, que tomamos conhecimento, foi feito por F. Podestà e A. Spiro, que obtiveram um teorema, análogo ao de Kobayashi, para as hipersuperfícies de G -cohomogeneidade 1, o qual pode ser enunciado na forma abaixo e se encontra na referência bibliográfica [PoSp].

PODESTÀ-SPIRO *Seja $f : M^{n \geq 4} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta e de G -cohomogeneidade 1. Se as órbitas principais de G são subvariedades umbílicas de M , então f é de rotação.*

TEOREMA

A expressão “ f é de rotação” significa que $f(M)$ é de rotação, no sentido usual, e, além disto, que as órbitas principais de G são enviadas por f nos paralelos de $f(M)$. (O capítulo 4 estabelece com mais precisão este conceito.)

Nessa mesma ordem de idéias, e sob a mesma restrição na dimensão da variedade M , A. C. Asperti, F. Mercuri e M. H. Noronha estudaram as hipersuperfícies de G -cohomogeneidade 1, supondo as órbitas principais com curvatura constante ([AMNo]). O resultado principal, presente nesse trabalho, é o que explicitamos a seguir, o qual, via teorema de Podestà e Spiro, implica que f é de rotação.

ASPERTI-MERCURI-NORONHA *Seja $f : M^{n \geq 4} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta e de G -cohomogeneidade 1. Se as órbitas principais de G têm curvatura seccional constante, então elas são subvariedades umbílicas de M .*

TEOREMA

Há dois objetivos principais neste trabalho: o primeiro, que compõe todo o terceiro capítulo, é estudar os efeitos decorrentes de algumas propriedades geométricas das órbitas principais sobre a topologia de uma variedade de G -cohomogeneidade 1 que imerge, em codimensão 1, no espaço euclidiano; o segundo objetivo consiste em estender os dois teoremas acima para o caso em que a variedade M é completa, compondo assim o capítulo 4.

Com relação ao conteúdo do capítulo 3, ele é dividido em quatro seções: a primeira, a seção 3.1, contém os resultados básicos, inerentes ao capítulo, mas que foram aí postos devido à sua aplicabilidade em outras situações; a seção 3.4, a seção dos exemplos, é voltada especificamente para a exposição dos exemplos (ou contra-exemplos) que completam e fortalecem os resultados centrais obtidos no capítulo; as outras duas seções, a seção 3.2 e a seção 3.3, são a parte principal do capítulo e contém os teoremas centrais. A decomposição do capítulo 4, também feita em quatro seções, obedece estes mesmos critérios.

Na seção 3.2, são consideradas hipersuperfícies $f : M^{n \geq 3} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ de G -cohomogeneidade 1, onde as órbitas principais de G têm curvatura seccional positiva. O teorema principal desta seção, exibido abaixo com a numeração que lá aparece, indica como devem ser as órbitas principais e contribui para a descrição dos grupos de homologia da variedade riemanniana M^n , para $n \geq 4$.

3.2.1 *Seja $f : M^{n \geq 4} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta e de G -cohomogeneidade 1. Se as órbitas principais de G têm curvatura seccional positiva, então elas são difeomorfas a S^{n-1} , e M tem o mesmo tipo de homotopia que um CW-complexo sem células de dimensão k , para $2 \leq k \leq n - 2$.*

TEOREMA

A partir deste teorema, calculamos os grupos de homologia de M e determinamos sua topologia, como mostram os resultados que seguem.

3.2.3 *Seja $f : M^{n \geq 4} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta, simplesmente conexa e de G -cohomogeneidade 1. Se as órbitas principais de G têm curvatura seccional positiva, então M é homeomorfa a S^n .*

COROLÁRIO

Para o caso tridimensional, temos o seguinte teorema, o qual não carece de uma imersão de M no \mathbb{R}^4 .

3.2.4 *Seja M^3 uma variedade riemanniana compacta, de G -cohomogeneidade 1 e tal que $H_1(M, \mathbb{Z}_2) = 0$. Se as órbitas principais de G têm curvatura seccional positiva, então elas são isométricas a esferas euclidianas, e M é homeomorfa a S^3 .*

TEOREMA

O caso em que M não é simplesmente conexa está contido no teorema logo a seguir.

3.2.5 *Seja $f : M^{n \geq 3} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta e de G -cohomogeneidade 1. Se as órbitas principais de G têm curvatura seccional positiva e M não é simplesmente conexa, então M é homeomorfa a $S^1 \times S^{n-1}$.*

TEOREMA

Vejamos, agora, os resultados que se destacam dentro da seção 3.3. Nesta seção,

fazemos um estudo das hipersuperfícies de G -cohomogeneidade 1 com a propriedade adicional de que as órbitas principais tenham curvatura seccional maior do que ou igual a zero. Sob esta hipótese, obtemos uma descrição razoável para essas órbitas, como mostram os resultados abaixo, onde τf denota o número tipo de f .

3.3.1 PROPOSIÇÃO *Seja $f : M^{n \geq 4} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície de G -cohomogeneidade 1. Suponhamos que as órbitas principais de G tenham curvatura seccional não-negativa e que, em algum $p \in M$, $\tau f(p) \geq 3$. Então, essas órbitas satisfazem uma das seguintes alternativas:*

- (a) são difeomorfas a S^{n-1} ;
- (b) são difeomorfas a $S^k \times S^{n-k-1}$, com $2 \leq k \leq n-3$;
- (c) recobrem $S^1 \times S^{n-2}$ e são recobertas por $\mathbb{R} \times S^{n-2}$.

Em particular, se Σ é uma órbita principal de G , então ou $\pi_1(\Sigma) = 0$ ou $\pi_1(\Sigma) = \mathbb{Z}$.

3.3.3 PROPOSIÇÃO *Seja $f : M^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ uma hipersuperfície de G -cohomogeneidade 1. Suponhamos que, em algum $p \in M$, $\tau f(p) = 3$. Então, as órbitas principais de G devem ser isométricas:*

- (a) ou a esferas euclidianas bidimensionais;
- (b) ou ao toro plano $S^1 \times S^1$.

Agora, apresentamos os teoremas que dizem respeito à topologia de M .

3.3.4 TEOREMA *Seja $f : M^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ uma hipersuperfície orientável, compacta e de G -cohomogeneidade 1. Então, M é homeomorfa a algum dos espaços abaixo:*

- (a) S^3 ;
- (b) $S^1 \times S^2$;
- (c) $S^1 \times S^1 \times S^1$;
- (d) um espaço lenticular L (cf. [Rolf]), isto é, uma adjunção de espaços $T_1 \cup_\phi T_2$, onde T_1 e T_2 são duas cópias do toro sólido $S^1 \times D^2$ e ϕ é um difeomorfismo do bordo, $S^1 \times S^1$, deste toro.

Mais ainda: nos casos (c) e (d) o grupo G é isomorfo ao grupo $S^1 \times S^1$.

3.3.5 TEOREMA *Seja $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta e de G -cohomogeneidade 1. Se as órbitas principais de G têm curvatura seccional não-negativa, então M tem no máximo 8 grupos de homologia que não são triviais.*

Neste ponto, retomamos o teorema de Podestà e Spiro. Grande parte do trabalho desenvolvido dentro do capítulo 4 visa estabelecer este teorema para o caso onde a variedade M é suposta completa, no lugar de compacta. A figura da página 64 mostra que sob esta forma, o teorema de Podestà e Spiro não é mais verdadeiro. De fato, tal figura exhibe uma hipersuperfície completa, não-compacta e de $SO(n)$ -cohomogeneidade 1, satisfazendo a condição de umbilicidade exigida no teorema, mas que não é de rotação. Vale notar, entretanto, que isto só acontece em virtude da ilimitação da parte plana (região de curvatura nula) de M . A partir desta observação, foi possível obter a forma final do teorema que generaliza o teorema de Podestà e Spiro, quando M é completa.

4.2.4 TEOREMA *Seja $f : M^{n \geq 3} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície completa, rígida no infinito e de G -cohomogeneidade 1. Suponhamos que as órbitas principais de G sejam subvariedades umbílicas de M . Então, f é de rotação. Além disto, se M é compacta, então M é homeomorfa ou a S^n ou a $S^1 \times S^{n-1}$.*

Deve ser observado aqui que este teorema funciona, também, quando a variedade M tem dimensão 3, caso não estudado ainda, mesmo para M compacta.

Quanto ao conceito *rígida no infinito*, ele é dado no capítulo 4 e significa, essencialmente, que as componentes conexas da parte plana de M são limitadas.

Sobre o teorema de Asperti, Mercuri e Noronha, também já citado aqui, ele também vale a esse nível de generalização e seu enunciado fica sob a forma abaixo.

4.3.6 TEOREMA *Seja $f : M^{n \geq 3} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície completa, rígida no infinito e de G -cohomogeneidade 1. Se as órbitas principais de G têm curvatura seccional constante e positiva, então elas são subvariedades umbílicas de M , e f é de rotação.*

Como observações finais sobre o capítulo 4, vale dizer que obtemos uma informação razoável sobre a variedade M , apenas supondo sua completitude (sem rigidez no infinito), no enunciado do teorema 4.2.4 acima. A conclusão, para este caso, é que M deve ser conformemente plana.

Agora, algumas palavras sobre o capítulo 2 e suas seções, que têm por objetivo estabelecer a notação usada neste trabalho, bem como apresentar os resultados básicos, colhidos de alguns textos e artigos, com a intenção de facilitar o desenvolvimento e a leitura deste trabalho. Na seção 2.1, são postos a terminologia e os resultados, já conhecidos, ligados às imersões isométricas. Na seção 2.2, aqueles resultados, vinculados à estrutura de produto torcido, um produto entre variedades riemannianas, que generaliza o produto riemanniano usual, são apresentados. Já a terceira e última, a seção 2.3, é dedicada às noções de ações de grupos de Lie e às variedades de G -cohomogeneidade k .

2

TERMINOLOGIA E FATOS FUNDAMENTAIS

O objetivo maior deste capítulo é estabelecer a nomenclatura básica que será utilizada em todo este trabalho e, ao mesmo tempo, fazer uma breve apresentação de alguns elementos fundamentais da Geometria das Subvariedades de espaços de curvatura constante, como também daqueles inerentes à estrutura de produtos torcidos. Alguns resultados ligados às variedades riemannianas de G -cohomogeneidade 1, G subgrupo compacto de $\text{Iso}(M)$, também serão observados.

2.1

IMERSÕES ISOMÉTRICAS

Seja M^n uma variedade riemanniana de dimensão n , munida da métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e com conexão de Levi-Civita dada por ∇ .

A terminologia que consiste em usar um índice superior para indicar a dimensão da variedade M será estendida no sentido de que tal índice conterà, também, uma possível restrição à dimensão de M . Por exemplo, $M^{n \geq 4}$ indicará que a dimensão de M é maior do que ou igual a 4.

Adotaremos a seguinte definição para o tensor curvatura R de M :

$$R_{XY}Z = -\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X,Y]}Z, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M),$$

onde $\mathfrak{X}(M)$ denota o espaço dos campos de vetores da variedade M e $[X, Y]$ é o colchete dos campos X e Y .

Seja $f : M^n \rightarrow N^{n+k}$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana de dimensão n em outra de dimensão $n+k$, isto é,

$$\langle X, Y \rangle = \langle df_p(X), df_p(Y) \rangle, \quad \forall p \in M \text{ e } X, Y \in T_p M.$$

(Estamos usando o mesmo símbolo para representar as métricas de M e N .) A nomenclatura que estabelece que o inteiro k é a *codimensão* da imersão f será mantida. No caso em que a codimensão $k = 1$, a imersão isométrica f será chamada de *hipersuperfície*.

Ainda com relação à imersão f , levaremos em conta a terminologia que considera como se fosse de f aqueles atributos topológicos e (ou) geométricos da variedade M . (Por exemplo, a sentença “ $f : M^{n \geq 4} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é uma hipersuperfície completa de curvatura seccional positiva” estará indicando uma imersão isométrica em codimensão 1 de uma variedade M completa, de dimensão superior a 3 e com curvatura seccional positiva, no espaço euclidiano \mathbb{R}^{n+1} .) Vale notar que o uso desta terminologia simplifica bastante os enunciados dos teoremas que usam tais objetos.

Listaremos, agora, alguns conceitos que fazem parte do ambiente das imersões isométricas. Em todos eles, levaremos em consideração a imersão isométrica

$$f : M^n \rightarrow N^{n+k},$$

M e N munidas de suas respectivas conexões riemannianas ∇ e $\tilde{\nabla}$ e seus tensores de curvatura R e \tilde{R} .

DEFINIÇÃO Um *campo de vetores ao longo de f* é uma aplicação diferenciável (C^∞) $\eta : M \rightarrow TN$, TN o fibrado tangente de N , que torna o diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & TN \\ & \nearrow \eta & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

comutativo: $\pi \circ \eta = f$. Se, em adição, $\eta(p)$ é perpendicular a $df_p(T_pM)$, para todo $p \in M$, diremos que η é um *campo normal ao longo de f* . Utilizaremos o símbolo $\mathfrak{X}_f(M)$ para representar o conjunto dos campos de vetores ao longo de f . O conjunto dos campos normais ao longo de f será denotado por $\mathfrak{X}_f^\perp(M)$.

2.1.1 EXEMPLO Sejam $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $U \in \mathfrak{X}(N)$. A partir destes dois campos, construímos dois campos ao longo de f , os quais desempenham papel relevante no contexto dos campos ao longo de f , a saber, $f_*(X)$ e $f^*(U)$, definidos assim: $f_*(X)(p) = df_p(X(p))$ e $f^*(U)(p) = U(f(p))$, $p \in M$.

Fixemos, por um momento, atenção em N e em sua conexão riemanniana $\tilde{\nabla}$. Sejam U e V dois campos em $\mathfrak{X}(N)$. Como sabemos, o vetor $\tilde{\nabla}_U V(p)$ fica completamente determinado pelo conhecimento de V ao longo de uma curva passando por p e tendo o vetor $U(p)$ como tangente. Esta propriedade das conexões permite estender a atuação de $\tilde{\nabla}$ a campos ao longo de f . Manteremos o mesmo símbolo $\tilde{\nabla}$ para esta extensão que, além das propriedades usuais de uma conexão, atuando em campos de N , agora também goza das propriedades que listamos abaixo, onde $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\eta, \xi \in \mathfrak{X}_f(M)$ e $h : N \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável (classe C^∞).

- (i) $\tilde{\nabla}_{(h \circ f)f_*(X) + f_*(Y)} \eta = (h \circ f) \tilde{\nabla}_{f_*(X)} \eta + \tilde{\nabla}_{f_*(Y)} \eta$;
- (ii) $\tilde{\nabla}_{f_*(X)} (\eta + \xi) = \tilde{\nabla}_{f_*(X)} \eta + \tilde{\nabla}_{f_*(X)} \xi$;
- (iii) $\tilde{\nabla}_{f_*(X)} (h \circ f) \eta = X(h \circ f) \tilde{\nabla}_{f_*(X)} \eta + (h \circ f) \tilde{\nabla}_{f_*(X)} \eta$;
- (iv) $X \langle \eta, \xi \rangle = \langle \tilde{\nabla}_{f_*(X)} \eta, \xi \rangle + \langle \eta, \tilde{\nabla}_{f_*(X)} \xi \rangle$.

(Os detalhes para esta construção podem ser encontrados em [Ryan].)

Uma primeira consequência da extensão de $\tilde{\nabla}$ é a construção do tensor bilinear simétrico

$$\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}_f^\perp(M),$$

conhecido como a *segunda forma fundamental* de f , e que é definido da seguinte

forma:

$$\alpha(X, Y) = \widetilde{\nabla}_{f_*(X)} f_*(Y) - f_*(\nabla_X Y).$$

Através deste tensor, construímos os operadores de Weingarten associados a campos normais ao longo de f .

Seja ξ um campo normal ao longo da imersão isométrica f . Fixado $p \in M$, usamos a simetria do tensor α e definimos o *operador de Weingarten* (ou *operador de forma*) de f em p segundo ξ (ou na direção ξ), como sendo a aplicação linear auto-adjunta,

$$A_{\xi(p)} : T_p M \longrightarrow T_p M,$$

dada implicitamente pela relação

$$\langle A_{\xi(p)}(X), Y \rangle = \langle \alpha(X, Y), \xi(p) \rangle.$$

Isto feito globalmente em M produz o que chamamos de *campo de operadores de Weingarten* da imersão f segundo o campo ξ , o qual indicamos por A_ξ . (É conveniente observar o caráter tensorial de

$$\begin{aligned} A : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}_f^\perp(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, \xi) &\longmapsto A(X, \xi) = A_\xi(X). \end{aligned}$$

Ainda usando campos normais ao longo de f , obtemos a *conexão normal* de f , denotada por ∇^\perp , que é definida do seguinte modo:

$$\nabla_X^\perp \xi = \text{ort } \widetilde{\nabla}_{f_*(X)} \xi, \quad X \in \mathfrak{X}(M), \quad \xi \in \mathfrak{X}_f^\perp(M).$$

onde ort é a projeção ortogonal sobre $df(TM)^\perp$. Temos que ∇^\perp goza das seguintes propriedades, onde $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi, \eta \in \mathfrak{X}_f^\perp(M)$ e $h : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^∞ :

- (i) $\nabla_{hX+Y}^\perp \xi = h\nabla_X^\perp \xi + \nabla_Y^\perp \xi$;
- (ii) $\nabla_X^\perp (\xi + \eta) = \nabla_X^\perp \xi + \nabla_X^\perp \eta$;
- (iii) $\nabla_X^\perp h\xi = X(h)\xi + h\nabla_X^\perp \xi$;
- (iv) $X\langle \xi, \eta \rangle = \langle \nabla_X^\perp \xi, \eta \rangle + \langle \xi, \nabla_X^\perp \eta \rangle$.

A partir de ∇^\perp é definido o tensor *curvatura normal* associado à imersão f que será indicado por R^\perp :

$$R_{XY}^\perp \xi = -\nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \xi + \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \xi + \nabla_{[X, Y]}^\perp \xi, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M), \quad \xi \in \mathfrak{X}_f^\perp(M).$$

As seguintes tabelas exibem equações e fórmulas notáveis ligadas às imersões isométricas $f : M^n \longrightarrow N^{n+k}(c)$, nos casos em que $N(c)$ é um espaço de curvatura seccional constante c . Na realidade, só nas que dizem respeito a Ricci e Codazzi, é que interfere o fato de $N(c)$ ter curvatura constante.

A forma sob a qual as equações aparecem em cada tabela é aquela que já se tornou bastante usada por aqueles que trabalham com imersões isométricas, e que contém a identificação do campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ com o campo $f_*(X)$.

EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS DAS IMERSÕES ISOMÉTRICAS EM ESPAÇOS DE CURVATURA CONSTANTE			
FÓRMULA DE GAUSS	$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y)$		$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$
FÓRMULA DE WEINGARTEN	$\tilde{\nabla}_X \xi = \nabla_X^\perp \xi - A_\xi(X)$	$\langle A_\xi(X), Y \rangle = \langle \alpha(X, Y), \xi \rangle$	$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ $\xi \in \mathfrak{X}_f^\perp(M)$
EQUAÇÃO DE GAUSS	$\langle R_{XY}Z, W \rangle = \langle \tilde{R}_{XY}Z, W \rangle + \langle \alpha(X, Z), \alpha(Y, W) \rangle - \langle \alpha(X, W), \alpha(Y, Z) \rangle$		$X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$
EQUAÇÃO DE CODAZZI	$(\nabla_X \alpha)(Y, Z) = (\nabla_Y \alpha)(X, Z)$ $((\nabla_X \alpha)(Y, Z) = \nabla_X^\perp \alpha(Y, Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z))$		$X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$
EQUAÇÃO DE RICCI	$\langle R_{XY}^\perp \xi, \eta \rangle = \langle [A_\eta, A_\xi](X), Y \rangle$ $([A_\eta, A_\xi] = A_\eta \circ A_\xi - A_\xi \circ A_\eta)$		$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ $\xi, \eta \in \mathfrak{X}_f^\perp(M)$

EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS DAS HIPERSUPERFÍCIES DOS ESPAÇOS DE CURVATURA CONSTANTE			
FÓRMULA DE GAUSS	$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y)$		$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$
FÓRMULA DE WEINGARTEN	$\tilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi(X)$	$\alpha(X, Y) = \langle A_\xi(X), Y \rangle \xi$	$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ $\xi \in \mathfrak{X}_f^\perp(M), \ \xi\ = 1$
EQUAÇÃO DE GAUSS	$R_{XY}Z = \tilde{R}_{XY}Z + (A_\xi(X) \wedge A_\xi(Y))(Z)$ $((A_\xi(X) \wedge A_\xi(Y))(Z) = \langle A_\xi(X), Z \rangle Y - \langle A_\xi(Y), Z \rangle X)$		$X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ $\xi \in \mathfrak{X}_f^\perp(M), \ \xi\ = 1$
EQUAÇÃO DE CODAZZI	$(\nabla_X A_\xi)(Y) = (\nabla_Y A_\xi)(X)$ $((\nabla_X A_\xi)(Y) = \nabla_X A_\xi(Y) - A_\xi(\nabla_X Y))$		$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ $\xi \in \mathfrak{X}_f^\perp(M), \ \xi\ = 1$
EQUAÇÃO DE RICCI	$A_\eta \circ A_\xi = A_\xi \circ A_\eta$		$\xi, \eta \in \mathfrak{X}_f^\perp(M)$

Fecharemos esta seção com alguns conceitos derivados da segunda forma fundamental e dos operadores de forma de uma imersão isométrica $f : M^n \longrightarrow N^{n+k}$, que têm presença quase constante neste trabalho. Os teoremas principais, inerentes a esses conceitos, nos casos em que N coincide com o \mathbb{R}^{n+k} ou com a esfera euclidiana unitária S^{n+k} , serão apresentados.

DEFINIÇÃO Sejam $f : M^n \longrightarrow N^{n+k}$ uma imersão isométrica com segunda forma fundamental α e $p \in M$. A imersão f é dita *umbílica* em p se existe $H \in T_p(M)^\perp$, $(T_p(M)^\perp = df_p(T_p M)^\perp \subset T_{f(p)}N)$ tal que:

$$\alpha(X, Y) = \langle X, Y \rangle H, \quad X, Y \in T_p M.$$

Se o vetor $H = 0$, diremos que f é *totalmente geodésica* em p . Agora, se f for umbílica em todo ponto de M , será dito que f é uma *imersão umbílica*. De modo similar, diremos que f é *totalmente geodésica*, quando assim o for em todo $p \in M$.

Com relação ao conceito de umbilicidade, dispomos dos seguintes teoremas que classificam completamente as imersões umbílicas no espaço euclidiano \mathbb{R}^{n+k} e na esfera $S^{n+k} \subset \mathbb{R}^{n+k+1}$ (veja [Dajc] ou [Rodr]).

2.1.2
TEOREMA Seja $f : M^{n \geq 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ uma imersão isométrica completa e conexa (isto é, M é completa e conexa, conforme concordamos há pouco). Se f é uma imersão umbílica, então ou $f(M)$ é um n -plano ou coincide com uma esfera euclidiana em algum $(n+1)$ -plano do \mathbb{R}^{n+k} .

2.1.3
TEOREMA Seja $f : M^{n \geq 2} \longrightarrow S^{n+k} \subset \mathbb{R}^{n+k+1}$ uma imersão isométrica completa e conexa. Se f é uma imersão umbílica, então M é compacta, e $f(M)$ coincide com uma esfera euclidiana em algum $(n+1)$ -plano do \mathbb{R}^{n+k+1} .

OBSERVAÇÃO Vale observar que nos dois teoremas acima, com o auxílio de resultados envolvendo espaços de recobrimento, podemos concluir que $f : M \longrightarrow f(M)$ é uma isometria.

DEFINIÇÃO Sejam $f : M^{n \geq 2} \longrightarrow N^{n+1}$ uma hipersuperfície, p um ponto de M e ξ_p um vetor unitário de $T_p(M)^\perp$. Seja $A_{\xi_0} : T_p M \longrightarrow T_p M$ o operador de Weingarten de f em p . O *número tipo* de f em p , que será indicado por $\tau f(p)$, é definido como sendo o posto do operador A_{ξ_0} ou, de modo equivalente, o número de autovalores diferentes de zero de A_{ξ_0} .

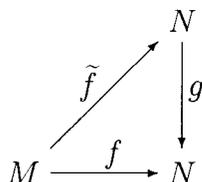
O teorema que segue é devido a Beez e Killing e foi, posteriormente, generalizado por Allendoerfer para imersões em espaços de curvatura constante e com

codimensão arbitrária, caso no qual é levado em consideração uma definição mais abrangente do número tipo de uma imersão (veja [Dajc], teorema 6.7, página 89).

2.1.4 TEOREMA *Seja $f : M^{n \geq 3} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície tal que o seu número tipo $\tau f(p) \geq 3$, para todo $p \in M$. Então, a imersão f é rígida.*

O conceito de rigidez de uma imersão, usado neste teorema, é estabelecido do seguinte modo.

DEFINIÇÃO Uma imersão isométrica $f : M^n \rightarrow N^{n+k}$ é dita *rígida* se, para cada imersão isométrica $\tilde{f} : M^n \rightarrow N^{n+k}$ dada arbitrariamente, existir uma isometria $g : N \rightarrow N$ que torna o diagrama



comutativo, isto é, $g \circ \tilde{f} = f$.

2.2

PRODUTOS TORCIDOS

Esta seção, baseada na referência [Onei], tem por objetivo definir a noção de produto torcido, um produto que generaliza o produto riemanniano de variedades, e, também, apresentar os principais resultados inerentes à conexão riemanniana e ao tensor curvatura desse tipo de produto. Esses resultados são muito úteis dentro da seção 4.1.

Sejam B e F duas variedades riemannianas com métricas $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$, respectivamente. Seja $M = B \times F$ o produto usual das variedades diferenciáveis B e F . Temos, definidas em M , duas aplicações que são bastante naturais, a saber, as projeções

$$\begin{array}{ccc}
 \pi : B \times F & \longrightarrow & B & \quad \quad \quad & \text{e} & \quad \quad \quad & \sigma : B \times F & \longrightarrow & F \\
 (x, y) & \longmapsto & \pi(x, y) = x & & & & (x, y) & \longmapsto & \sigma(x, y) = y.
 \end{array}$$

Dado $p = (a, b) \in M$, usaremos $T_p B$ e $T_p F$ para indicar os subespaços de $T_p M$ que são isomorfos a $T_a B$ e $T_b F$, isto é,

$$T_p B = \{(X, 0); X \in T_a B\} \quad \text{e} \quad T_p F = \{(0, U); U \in T_b F\}.$$

Estes subespaços são somandos diretos de T_pM : $T_pM = T_pB \oplus T_pF$.

DEFINIÇÃO Seja $\phi : B \rightarrow (0, +\infty)$ uma função real de classe C^∞ . A partir das métricas de B e de F , introduzimos em $M = B \times F$ a métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ que, para cada $p = (a, b) \in M$, funciona assim:

$$\langle U, V \rangle = \langle d\pi_p(U), d\pi_p(V) \rangle_B + \phi^2(a) \langle d\sigma_p(U), d\sigma_p(V) \rangle_F, \quad U, V \in T_pM.$$

A variedade M , munida desta métrica, é o que denominamos de *produto torcido* (“warped product”, segundo [Onei]) das variedades B por F , segundo ϕ . Este produto é denotado por $B \times_\phi F$. As variedades B e F são conhecidas, respectivamente, por *base* e *fibra* do produto. A função ϕ é chamada de *coeficiente de torção* do produto.

Decorre desta definição que a decomposição $T_pM = T_pB \oplus T_pF$ é uma decomposição ortogonal. Mais ainda: as cópias de B (também chamadas de *folhas* de M), $B \times \{b\}$, $b \in F$, são isométricas à B ; as cópias de F (*fibras* de M), $\{a\} \times F$, $a \in B$, são homotéticas à variedade F .

Outros termos, também muito utilizados neste contexto, são os *vetores horizontais* e os *vetores verticais* de M , em um ponto $p = (a, b)$. Os primeiros são definidos como sendo os vetores de T_pB , enquanto que os vetores verticais são aqueles de T_pF .

No que tange aos campos de vetores, os campos de vetores de B e de F dão origem a campos de vetores especiais em M , os quais construiremos agora.

DEFINIÇÃO Sejam $X \in \mathfrak{X}(B)$ e $U \in \mathfrak{X}(F)$. O *levantamento horizontal* de X a M é o campo ${}^hX \in \mathfrak{X}(M)$ dado por: ${}^hX(p) = (X(a), 0)$, onde $p = (a, b)$. O *levantamento vertical* de U a M é o campo vU : ${}^vU(p) = (0, U(b))$, onde $p = (a, b)$. Os símbolos $\mathfrak{L}(B)$ e $\mathfrak{L}(F)$ serão usados para indicar os espaços dos levantamentos horizontais e dos levantamentos verticais, respectivamente.

A seguir enunciaremos alguns resultados que dizem respeito às estruturas topológica e geométrica dos produtos torcidos. Suas demonstrações podem ser encontradas, com detalhes, em [Onei]. Outras informações sobre produtos torcidos, notadamente aquelas ligadas ao tensor de Ricci de tais produtos, podem ser colhidas em [Bess].

O primeiro fato que citaremos está ligado à completude de $M = B \times_\phi F$ que, como veremos, é inteiramente determinada por aquelas de B e F .

2.2.1
PROPOSIÇÃO Seja $M = B \times_\phi F$ um produto torcido com base B e fibra F . Então, M é uma variedade riemanniana completa se, e somente se, são completas as variedades B e F .

A próxima proposição indica como se relaciona a conexão riemanniana de um produto torcido com as conexões riemannianas de sua base e de sua fibra.

2.2.2 PROPOSIÇÃO Se ∇^B e ∇^F são as conexões riemannianas das variedades riemannianas B e F , então a conexão riemanniana ∇ do produto torcido $M = B \times_\phi F$ tem as propriedades abaixo:

- (a) $\nabla_{\mathfrak{h}_X} \mathfrak{h}Y = \mathfrak{h}(\nabla_X^B Y)$;
 - (b) $\nabla_{\mathfrak{h}_X} \mathfrak{v}U = \nabla_{\mathfrak{v}_U} \mathfrak{h}X = (X(\phi)/\phi)\mathfrak{v}U$;
 - (c) $\nabla_{\mathfrak{v}_U} \mathfrak{v}V = \mathfrak{v}(\nabla_U^F V) - (\langle \mathfrak{v}U, \mathfrak{v}V \rangle / \phi)\mathfrak{h}(\text{grad } \phi) = \mathfrak{v}(\nabla_U^F V) - \phi\langle U, V \rangle_F(\text{grad } \phi, 0)$;
- onde $X, Y \in \mathfrak{X}(B)$, $U, V \in \mathfrak{X}(F)$ e $\text{grad } \phi \in \mathfrak{X}(B)$ é o gradiente de ϕ .

2.2.3 COROLÁRIO Seja $M = B \times_\phi F$ um produto torcido com base B e fibra F . Então, temos as seguintes informações sobre o comportamento das folhas e das fibras olhadas como subvariedades de M :

- (a) as folhas de M , $B \times \{b\}$, $b \in F$, são subvariedades totalmente geodésicas de M ;
- (b) as fibras de M , $\{a\} \times F$, $a \in B$, são subvariedades umbílicas de M com segundas formas fundamentais α^a dadas por:

$$\alpha^a(U, V) = -\frac{\langle U, V \rangle}{\phi(a)}(\text{grad } \phi(a), 0).$$

O teorema abaixo descreve a relação entre os tensores curvatura das variedades $M = B \times_\phi F$, B e F .

2.2.4 TEOREMA Se R^B e R^F são os tensores curvatura das variedades riemannianas B e F , então o tensor curvatura R do produto torcido $M = B \times_\phi F$ tem as seguintes propriedades:

- (a) $R_{\mathfrak{v}_U \mathfrak{v}_V} \mathfrak{v}W = \mathfrak{v}(R_{UV}^F W) - (\langle \text{grad } \phi, \text{grad } \phi \rangle / \phi^2)(\mathfrak{v}U \wedge \mathfrak{v}V)(\mathfrak{v}W)$;
- (b) $R_{\mathfrak{h}_X \mathfrak{v}_U} \mathfrak{h}Y = -(\text{Hess } \phi(X, Y))/\phi \mathfrak{v}U$;
- (c) $R_{\mathfrak{h}_X \mathfrak{h}_Y} \mathfrak{v}U = R_{\mathfrak{v}_U \mathfrak{v}_V} \mathfrak{h}X = 0$;
- (d) $R_{\mathfrak{h}_X \mathfrak{v}_U} \mathfrak{v}V = (\langle \mathfrak{v}U, \mathfrak{v}V \rangle / \phi) \nabla_{\mathfrak{h}_X} \mathfrak{h}(\text{grad } \phi)$;
- (e) $R_{\mathfrak{h}_X \mathfrak{h}_Y} \mathfrak{h}Z = \mathfrak{h}(R_{XY}^B Z)$;

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(B)$ e $U, V, W \in \mathfrak{X}(F)$. No item (a), $(\mathfrak{v}U \wedge \mathfrak{v}V)(\mathfrak{v}W)$ é o vetor

$$(\mathfrak{v}U \wedge \mathfrak{v}V)(\mathfrak{v}W) = \langle \mathfrak{v}U, \mathfrak{v}W \rangle \mathfrak{v}V - \langle \mathfrak{v}V, \mathfrak{v}W \rangle \mathfrak{v}U,$$

e, no item (b), $\text{Hess } \phi$ é o tensor bilinear simétrico, conhecido por hessiano métrico de ϕ . dado por

$$\text{Hess } \phi(X, Y) = X(Y(\phi)) - (\nabla_X^B Y)(\phi).$$

2.3

AÇÕES DE COHOMOGENEIDADE UM

O conteúdo desta seção é baseado, principalmente, nas referências [Alek], [Brea], [KoNo], [Most], [PaTe] e [Stee].

Em [Alek] e [Most] os autores, D. V. Alekseevsky e P. Mostert, se preocupam, especificamente, com ações de cohomogeneidade 1. [KoNo] é o texto clássico de Geometria Riemanniana, de Kobayashi e Nomizu, e contém os resultados fundamentais sobre o grupo de isometrias de uma variedade riemanniana. As demais tratam os aspectos gerais das ações de grupos topológicos, notadamente o livro de Glen E. Bredon, [Brea], que constitui um verdadeiro compêndio sobre o assunto.

Antes de voltarmos nossa atenção para as ações de grupos, faremos uma breve apresentação de alguns fatos envolvendo grupos de Lie e seus quocientes.

Seja G um grupo de Lie e H um subgrupo fechado de G . Então, H é também um grupo de Lie e há uma única estrutura de variedade em G/H — o conjunto das classes laterais à esquerda de H em G — que torna a projeção canônica $\pi : G \rightarrow G/H$, $\pi(g) = gH$, uma submersão. É conveniente citar que quando H é um subgrupo normal de G , então G/H adquire estrutura de grupo de Lie.

Mais geralmente, e ainda nessa direção, temos o resultado abaixo, o qual pode ser encontrado em [Stee].

2.3.1 *Se H e K são subgrupos fechados do grupo de Lie G , com $H \subset K$,
TEOREMA então a aplicação $\pi : G/H \rightarrow G/K$, definida por $\pi(gH) = gK$, é uma
fibrção localmente trivial com fibra típica K/H . Em particular, se
 K/H é finito, $\pi : G/H \rightarrow G/K$ é uma aplicação de recobrimento.*

A partir deste ponto, voltaremos toda nossa atenção para ações de grupos de Lie. Consideraremos apenas ações sobre variedades diferenciáveis.

Sejam G um grupo de Lie e M uma variedade diferenciável. Lembramos que uma ação (à esquerda) de G na variedade M é uma aplicação C^∞ , denotada por $*$, tendo a forma

$$\begin{aligned} * : G \times M &\longrightarrow M \\ (g, p) &\longmapsto *(g, p) = g * p, \end{aligned}$$

e que goza das seguintes propriedades:

- (i) $(gh) * p = g * (h * p)$, onde $g, h \in G$ e $p \in M$;
- (ii) $e * p = p$, onde $p \in M$ e e é o elemento identidade de G .

A ação $*$ é dita *transitiva* se dados p e q em M , existir $g \in G$ tal que $g * p = q$. Quando $*$ é transitiva, dizemos que G age (atua) transitivamente sobre M .

Com o objetivo de definir alguns objetos que, naturalmente, fazem parte do estudo das ações de grupos, fixaremos um grupo de Lie G e uma variedade M , sobre a qual G atua através da ação $*$.

DEFINIÇÃO Dado $p \in M$, o subconjunto

$$G(p) = \{q \in M; q = g * p, g \in G\}$$

é chamado *órbita de G por p* (ou *órbita de p*). por p . O subgrupo de G dado por

$$G_p = \{g \in G; g * p = p\}$$

é o *subgrupo de isotropia* de G em p . Quando os subgrupos de isotropia de G são todos triviais, diz-se que a ação $*$ é *livre*.

DEFINIÇÃO O conjunto cujos elementos são as órbitas de G será denotado por M/G e o chamaremos de *espaço das órbitas de G* . Assim,

$$M/G = \{G(p); p \in M\}.$$

Indicaremos por π a projeção natural de M sobre M/G : $\pi(p) = G(p)$. Consideraremos em M/G a topologia coinduzida por π .

DEFINIÇÃO Dado um subconjunto $N \subset M$, indicaremos por $G(N)$ a união das órbitas de G passando por N , isto é,

$$G(N) = \{q \in M; q = g * p, \forall g \in G \text{ e } \forall p \in N\}.$$

N é dito *G -invariante* (segundo a ação $*$), ou *invariante sob G* , se $G(N) \subset N$. Uma aplicação definida entre subconjuntos G -invariantes N_1 e N_2 , $f : N_1 \rightarrow N_2$, é dita *G -equivariante* se $f(g * x) = g * f(x)$, para todos $g \in G$ e $x \in N_1$.

Seja M^n uma variedade riemanniana de dimensão n munida da métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e com grupo de isometrias $\text{Iso}(M)$. Vale lembrar que uma isometria de M é um difeomorfismo g de M tal que

$$\langle X, Y \rangle = \langle dg(X), dg(Y) \rangle, \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Um dos resultados mais importantes que tratam deste grupo está contido no teorema abaixo, cuja prova pode ser encontrada em [KoNo], página 239.

2.3.2
TEOREMA *Seja M^n uma variedade riemanniana. Então, o grupo $\text{Iso}(M)$, munido da topologia compacto-aberta, é um grupo de Lie. Além disto, se M é uma variedade compacta, $\text{Iso}(M)$ é um grupo de Lie compacto.*

A partir deste teorema, todos os resultados que se conhece sobre as ações de grupos de Lie sobre uma variedade diferenciável podem ser aplicados ao caso particular no qual se considera a ação natural de subgrupos G , fechados em $\text{Iso}(M)$, sobre a variedade M :

$$\begin{aligned} * : G \times M &\longrightarrow M \\ (g, p) &\longmapsto *(g, p) = g * p = g(p). \end{aligned}$$

Uma característica bastante peculiar deste tipo de ação é que ela já nasce como uma ação efetiva, isto é, se $g * p = p$, para todo $p \in M$, então g coincide com o elemento identidade de G .

Toda a apresentação que faremos, a partir daqui, levará em consideração apenas as ações de subgrupos compactos e conexos G , $G \subset \text{Iso}(M)$, agindo em M sob a forma acima. Todos os fatos, mesmo aqueles sabidamente de maior alcance, serão citados adaptados a esta situação. Sob estas condições, temos mais um teorema envolvendo quocientes de grupos de Lie, este bem mais conhecido.

2.3.3 TEOREMA Se o grupo de Lie G atua transitivamente sobre a variedade M , então a aplicação

$$\begin{aligned} f : G/G_p &\longrightarrow M \\ gG_p &\longmapsto f(gG_p) = g * p \end{aligned}$$

é um difeomorfismo, onde $p \in M$ é um ponto qualquer fixado e G_p é o subgrupo de isotropia de G em p .

Como simples consequência deste teorema, temos que, para cada $p \in M$, a órbita $G(p)$ é difeomorfa ao quociente G/G_p , visto que a restrição de uma ação a uma órbita é sempre transitiva.

Outro fato que merece destaque, diante da compacidade e da conexidade de G , é que as órbitas $G(p)$, $p \in M$, são subvariedades (mergulhadas) compactas e conexas de M .

DEFINIÇÃO Seja $p \in M$. Uma *fatia* (“slice”) em p é uma subvariedade conexa S de M tal que $G(S)$ é um subconjunto aberto de M e existe uma retração G -equivariante, $r : G(S) \longrightarrow G(p)$, com $r^{-1}(p) = S$. (O termo retração, usado aqui, significa que r fixa todos os pontos de $G(p)$.) O aberto $G(S)$ é usualmente chamado de *tubo* G -invariante em torno de $G(p)$.

O teorema subsequente estabelece, em particular, a existência de fatias em uma variedade riemanniana. No seu conteúdo, exp indicará a aplicação exponencial da variedade riemanniana M .

2.3.4 TEOREMA *Sejam M uma variedade riemanniana e G um subgrupo compacto e conexo de $\text{Iso}(M)$. Então, dado $p \in M$, existe $\epsilon > 0$ tal que*

$$S_\epsilon(p) = \{q \in M; q = \exp_p(X), X \in T_p(G(p))^\perp; \|X\| < \epsilon\}$$

é uma fatia, e o tubo $\Gamma = G(S_\epsilon(p))$ tem a estrutura de um fibrado de discos sobre a órbita $G(p)$. Na realidade, $\Gamma = \exp(\nu_\epsilon(G(p)))$, onde $\nu_\epsilon(G(p))$ é o subfibrado do fibrado normal de $G(p)$ dado por

$$\nu_\epsilon(G(p)) = \{(x, V) \in TM; x \in G(p) \text{ e } V \in T_x(G(p))^\perp \text{ com } \|V\| < \epsilon\}.$$

Fixemos atenção em uma órbita $\Sigma_p = G(p)$ da ação de G sobre a variedade M . Seja G_p o subgrupo de isotropia de G no ponto p . Se $q = g(p)$ é outro ponto de Σ_p , não é difícil verificar que os subgrupos G_q e G_p são subgrupos conjugados de G . Mais precisamente, temos que $G_p = g^{-1}G_qg$.

É possível, também, obter algumas informações sobre os subgrupos de isotropia de pontos que estão relativamente próximos em M . Com efeito, a proposição a seguir faz isto.

2.3.5 PROPOSIÇÃO *Sejam M uma variedade riemanniana e G um subgrupo compacto e conexo de $\text{Iso}(M)$. Fixado $p \in M$, seja S uma fatia em p . Então, dado $q = g(s) \in G(S)$, temos que $G_q = gG_s g^{-1} \subset gG_p g^{-1}$. Em particular, se $q \in S$, então $G_q \subset G_p$.*

A proposição anterior mostra que a tendência da dimensão dos subgrupos de isotropia (que são grupos de Lie) é diminuir numa proximidade de p , a saber, no tubo determinado por uma fatia em p . Equivalentemente, nesse tubo, a dimensão das órbitas tende a crescer quando nos afastamos da órbita $G(p)$. Isto motiva a definição central da teoria de Ações de Grupos: as órbitas principais.

DEFINIÇÃO *Sejam M uma variedade riemanniana e G um subgrupo compacto e conexo de $\text{Iso}(M)$. Seja $\Sigma_p = G(p)$ a órbita de G contendo p . Σ_p é dita uma *órbita principal* se o subgrupo de isotropia G_p é conjugado a um subgrupo de qualquer outro subgrupo de isotropia de G .*

Em particular, as órbitas principais são órbitas de dimensão máxima. Um fato que também merece ser observado, e que decorre desta definição combinada com proposição 2.3.5, é que em uma fatia, em um ponto de uma órbita principal, os subgrupos de isotropia permanecem constante.

Aquelas órbitas que têm dimensão máxima, mas que não são principais, serão chamadas *órbitas excepcionais*. As demais, aquelas com dimensão inferior à dimensão das órbitas principais, são conhecidas por *órbitas singulares*.

DEFINIÇÃO Sejam M uma variedade riemanniana e G um subgrupo compacto e conexo de $\text{Iso}(M)$. Um ponto $p \in M$ é dito *regular* se a órbita $G(p)$ é uma órbita principal. O subconjunto de M constituído pelos pontos regulares – ou a união das órbitas principais de G – será chamado a *parte regular* de M , o qual indicaremos por M_{reg} .

Temos, agora, um teorema que mostra que a grande maioria das órbitas do grupo G são principais.

2.3.6
TEOREMA Se M é uma variedade riemanniana e G é um subgrupo compacto e conexo de $\text{Iso}(M)$, então M_{reg} é um aberto conexo e denso de M .

Um outro fato que põe em relevo as órbitas principais é dado pela proposição logo a seguir.

2.3.7
PROPOSIÇÃO Sejam M uma variedade riemanniana e G um subgrupo compacto e conexo de $\text{Iso}(M)$. Sejam $\Sigma_p = G(p)$ uma órbita principal de G e $\Gamma = G(S)$ o tubo, determinado pela fatia S , em torno de Σ_p .

Então,

$$\begin{aligned} \Phi : \Sigma_p \times S &\longrightarrow \Gamma \\ (g(p), s) &\longmapsto \Phi(g(p), s) = g(s) \end{aligned}$$

é um difeomorfismo. Em particular, se M é orientável, Σ_p também é orientável.

2.3.8
COROLÁRIO Sejam M uma variedade riemanniana e G um subgrupo compacto e conexo de $\text{Iso}(M)$. Se G tem apenas órbitas principais, então a projeção $\pi : M \longrightarrow M/G$ define uma fibração localmente trivial.

2.3.9
COROLÁRIO Se M é uma variedade riemanniana e G é um subgrupo compacto e conexo de $\text{Iso}(M)$, então as órbitas principais de G são difeomorfas entre si.

Como vimos, em comentário anterior, os subgrupos de isotropia ao longo de uma órbita $G(p)$ são todos conjugados ao subgrupo $H = G_p$. A classe composta pelos subgrupos de isotropia de G que são conjugados a H , indicada por (H) (cf. [PaTe]), é chamada de *tipo de isotropia* de $G(p)$. Quando $G(p)$ é uma órbita principal, este tipo de isotropia é o que chamados de *isotropia principal*. Convém notar, e isto decorre da definição de órbita principal, que as órbitas principais têm o mesmo tipo de isotropia.

Seja $G(q)$ uma órbita qualquer de G com tipo de isotropia (K) . Logo, $G(q)$ é difeomorfa a G/K , conforme o comentário que vem imediatamente após o teorema 2.3.3. Seja Γ um tubo em torno de $G(q)$. Como M_{reg} é denso em M deve existir, em Γ , alguma órbita principal, digamos $G(p)$, com isotropia principal (H) . Podemos

supor que $H \subset K$, o que nos coloca diante do teorema 2.3.1 e produz o seguinte teorema.

2.3.10 TEOREMA *Sejam M uma variedade riemanniana e G um subgrupo compacto e conexo de $\text{Iso}(M)$. Se $\mathcal{E} = G/K$ e $\Sigma_p = G/H$ são órbitas de G , e Σ_p é principal, então $\pi : \Sigma_p \rightarrow \mathcal{E}$, definida por $\pi(gH) = gK$, é uma fibração localmente trivial com fibra típica difeomorfa ao quociente K/H . Em particular, se \mathcal{E} é excepcional, Σ_p é um recobrimento (finito) de \mathcal{E} .*

DEFINIÇÃO *Seja Σ_p uma órbita principal de uma ação de um subgrupo G compacto e conexo de $\text{Iso}(M)$. A ação é dita de *cohomogeneidade k* se a codimensão de Σ_p , olhada como subvariedade de M , é k . Neste caso, diz-se, também, que M é uma variedade de *G -cohomogeneidade k* . (Notemos que as variedades homogêneas são exatamente aquelas de cohomogeneidade 0.)*

Neste instante, o nosso interesse ficará inteiramente voltado para variedades de G -cohomogeneidade 1. Neste contexto, os teoremas abaixo, devidos a Mostert (veja [Most]), são os mais importantes, sob o ponto de vista topológico.

2.3.11 TEOREMA *Se M é uma variedade de G -cohomogeneidade 1, então M/G é homeomorfo a algum dos espaços listados abaixo:*

- (a) o círculo S^1 ;
- (b) o intervalo aberto $(0, 1)$;
- (c) o intervalo $[0, 1)$;
- (d) o intervalo fechado $[0, 1]$.

Mais ainda, nos itens (a) e (b) só há órbitas principais ($M = M_{\text{reg}}$). No item (c), existe apenas uma órbita que não é principal (excepcional ou singular): $\pi^{-1}(0)$. No item restante, há duas órbitas que não são principais, a saber: $\pi^{-1}(0)$ e $\pi^{-1}(1)$.

2.3.12 TEOREMA *Seja M uma variedade de G -cohomogeneidade 1. Se $M = M_{\text{reg}}$, então M é homeomorfa ao produto $\Sigma_p \times M/G$, onde Σ_p é uma órbita principal fixada.*

Neste ponto, faremos alguns comentários sobre a descrição topológica da variedade M no caso em que $M/G = [0, 1)$. Seja $G(q) = \pi^{-1}(0)$ a órbita não-principal de G . Neste caso, temos, também, que $M_{\text{reg}} = \pi^{-1}(0, 1)$ é uma variedade que se inclui no caso (b) do teorema 2.3.11. Mais geralmente, isto ocorre com o subconjunto aberto e conexo de M_{reg} dado por $M_{\text{reg}}^\epsilon = \pi^{-1}(\epsilon, 1)$, $0 < \epsilon < 1$. Portanto, conforme o teorema 2.3.12 indica, $M_{\text{reg}}^\epsilon \cong \Sigma_p \times (\epsilon, 1)$, $\Sigma_p = \pi^{-1}(\epsilon)$.

Seja $\Gamma = \nu_\epsilon(G(q))$ o fibrado de discos sobre $G(q)$, construído na proposição 2.3.4, tal que o bordo do seu fecho coincide com a órbita principal Σ_p . Portanto, é de se esperar que M seja obtida colando-se Γ ao produto (cilindro) $\Sigma_p \times (\epsilon, 1)$, ao longo de $\partial\bar{\Gamma} = \Sigma_p$ e $\Sigma_p \times \{\epsilon\}$. Estas idéias são formalizadas pelo seguinte teorema, que enunciaremos apenas para M compacta.

2.3.13 *Seja M uma variedade compacta e de G -cohomogeneidade 1. Seja Σ_p uma órbita principal de G . Vale o seguinte:*

- TEOREMA**
- (a) se $M = M_{\text{reg}}$, então M é homeomorfa a $\Sigma_p \times S^1$;
 - (b) se $M \neq M_{\text{reg}}$, então M é homeomorfa a $\bar{\Gamma}_1 \cup_\phi \bar{\Gamma}_2$, onde Γ_1 e Γ_2 são fibrados de discos sobre as duas órbitas não-principais de G , ϕ é um difeomorfismo (G -equivariante) de Σ_p e $\bar{\Gamma}_1 \cup_\phi \bar{\Gamma}_2$ significa a adjunção através de ϕ (veja [Breb]) dos fechos de Γ_1 e Γ_2 .

Uma característica relevante das ações de cohomogeneidade 1 é a estrutura dos quocientes K/H de suas isotropias. O fato notável é que esses quocientes são sempre difeomorfos a esferas. Isto dá uma nova roupagem ao teorema 2.3.10 e estabelece um outro teorema, o qual usaremos intensamente no capítulo 3.

2.3.14 *Seja M uma variedade de G -cohomogeneidade 1. Se $\mathcal{E} = G/K$ e $\Sigma_p = G/H$ são órbitas de G , e Σ_p é principal, então K/H é difeomorfo a uma esfera S^m e $\pi : \Sigma_p \rightarrow \mathcal{E}$, definida por $\pi(gH) = gK$, é uma fibração localmente trivial com fibra típica difeomorfa a esta esfera. Em particular, se \mathcal{E} é excepcional, Σ_p é um recobrimento duplo de \mathcal{E} .*

O próximo resultado, também devido a P. Mostert, indica uma diferença básica entre uma órbita principal e uma órbita excepcional, caso esta última exista, numa variedade orientável e de G -cohomogeneidade 1.

2.3.15 *Seja M uma variedade riemanniana orientável e de G -cohomogeneidade 1. Então, toda órbita excepcional de G é não-orientável.*

O fechamento desta seção será feito trabalhando com o conceito, ubíquo neste trabalho, que é o de geodésica normal em uma variedade de G -cohomogeneidade 1.

DEFINIÇÃO *Seja M uma variedade de G -cohomogeneidade 1. Uma geodésica, parametrizada pelo comprimento de arco, $\lambda : (a, b) \rightarrow M$, é chamada geodésica normal se $\lambda'(t)$ é perpendicular à órbita $G(\lambda(t))$, em $\lambda(t)$, $a < t < b$.*

Um modo de construir geodésicas normais é obtido assim: Sejam $p \in M_{\text{reg}}$ e $V \in T_p(G(p))^\perp$ um vetor unitário. Então a geodésica $\lambda(t) = \exp tV$, $|t| < \epsilon$, ϵ suficientemente pequeno, é uma geodésica normal. Mais do que isto: podemos tomar

ϵ de tal sorte que o traço de λ , $\lambda(-\epsilon, \epsilon)$, determina uma fatia em p . Já no caso em que a variedade M é suposta completa, a geodésica normal, assim construída, está definida em \mathbb{R} , toca toda órbita de G e, portanto, $M = G(\lambda(\mathbb{R}))$ (veja [PaTe]).

Com o teorema abaixo, que contém várias informações envolvendo uma dada geodésica normal, finalizamos o capítulo.

2.3.16 *Sejam M uma variedade de G -cohomogeneidade 1 e $\lambda : (-\delta, \delta) \longrightarrow M$ uma geodésica normal. As seguintes propriedades são verificadas:*

- (a) *dado $g \in G$, $\lambda_g = g \circ \lambda$ é uma geodésica normal;*
- (b) *se $p = \lambda(0) \in M_{\text{reg}}$, então existe ϵ , $0 < \epsilon \leq \delta$, tal que $\lambda(-\epsilon, \epsilon)$ é uma fatia em p ;*
- (c) *se $S = \lambda(-\epsilon, \epsilon)$ é uma fatia no ponto regular $p = \lambda(0)$, então:*
 - (i) *os subgrupos de isotropia $G_{\lambda(t)}$ são constante, isto é, $G_{\lambda(t)} = G_p$, sempre que $-\epsilon < t < \epsilon$;*
 - (ii) *a aplicação $\Phi : (-\epsilon, \epsilon) \times G(p) \longrightarrow \Gamma$, definida por $\Phi(t, g(p)) = g(\lambda(t))$, é um difeomorfismo (proposição 2.3.7);*
 - (iii) *está bem definido o campo $\eta \in \mathfrak{X}(\Gamma)$ dado por*

$$\eta(y) = dg_{\lambda(t)}(\lambda'(t)), \quad y = g(\lambda(t)), \quad -\epsilon < t < \epsilon,$$

e, além disto, η é unitário e sua restrição a cada órbita (principal) contida em Γ é perpendicular a esta órbita;

- (d) *se M é completa, então a extensão de λ a \mathbb{R} é uma geodésica normal cuja imagem toca toda órbita de G e, portanto, $M = G(\lambda(\mathbb{R}))$.*

3

SOBRE A TOPOLOGIA DAS HIPERSUPERFÍCIES DE COHOMOGENEIDADE UM

Seja $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta e de G -cohomogeneidade 1. O nosso principal objetivo neste capítulo é obter informações sobre a topologia da variedade M , a partir do conhecimento do sinal da curvatura das órbitas principais determinadas por G .

3.1

MATERIAL BÁSICO

Reservamos esta seção para a apresentação de vários resultados básicos, com o objetivo de tornar mais concisas as demonstrações dos teoremas principais constantes neste capítulo. O primeiro deles é um lema de Álgebra Linear que diz respeito a índice de formas bilineares simétricas.

3.1.1 *Sejam V um espaço vetorial real de dimensão n e $B : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear simétrica. Sejam W um subespaço k -dimensional de V e $\tilde{B} : W \times W \longrightarrow \mathbb{R}$ a restrição de B a $W \times W$. Então,*

$$\text{ind } \tilde{B} \leq \text{ind } B \leq \text{ind } \tilde{B} + n - k,$$

onde $\text{ind } B$ e $\text{ind } \tilde{B}$ são os índices de B e \tilde{B} , respectivamente.

DEMONSTRAÇÃO: Começamos lembrando que $\text{ind } B$ é definido como sendo

$$\text{ind } B = \max\{\dim U; U \subset V \text{ subespaço e } B(u, u) < 0, u \in U - \{0\}\}.$$

Isto posto, obtemos a primeira desigualdade. Para obtermos a segunda, consideremos $U \subset V$, um subespaço de V , onde $\text{ind } B$ é atingido. Assim, o subespaço de W , $U' = W \cap U$, é tal que

$$\tilde{B}(u', u') = B(u', u') < 0, \forall u' \in U' - \{0\}.$$

Donde $\dim U' \leq \text{ind } \tilde{B}$. Mas

$$\begin{aligned} n = \dim V &\geq \dim(W + U) = \dim W + \dim U - \dim U' \\ &= k + \text{ind } B - \dim U' \geq \\ &\geq k + \text{ind } B - \text{ind } \tilde{B}. \end{aligned}$$

Portanto, $\text{ind } B \leq \text{ind } \tilde{B} + n - k$.

◻

A proposição 3.1.2 abaixo faz uso do *fibrado normal unitário*, $\nu^1(M)$, de uma imersão isométrica $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$, $k \geq 1$. Tal fibrado é definido por

$$\nu^1(M) = \{(p, v) \in M \times \mathbb{R}^{n+k}; \|v\| = 1 \text{ e } v \perp df_p(T_pM)\}.$$

São fatos, bastante conhecidos, que a *aplicação normal de Gauss generalizada*

$$\begin{aligned} \phi : \nu^1(M) &\longrightarrow S^{n+k-1} \\ (p, v) &\longmapsto \phi(p, v) = v \end{aligned}$$

é diferenciável,

$$|\det d\phi_{(p,v)}| = |\det A_v| \text{ e } \langle A_v(X), Y \rangle = \text{Hess}_p h_v(X, Y), \quad X, Y \in T_pM,$$

onde $A_v : T_pM \rightarrow T_pM$ é o *operador de Weingarten* de f em p , $h_v : M \rightarrow \mathbb{R}$, $h_v(x) = \langle f(x), v \rangle$, é a *função altura* de M na direção v e $\text{Hess}_p h_v : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ (h_{v**} , em [Milb]) é o *hessiano*, em p , de h_v . Portanto, se v é um valor regular de ϕ e $(p, v) \in \phi^{-1}(v)$, temos que p é um ponto crítico não-degenerado de h_v , e o índice de h_v em p coincide com o número de autovalores negativos do operador de Weingarten A_v em p .

Os detalhes sobre as construções de $\nu^1(M)$, ϕ e h_v podem ser encontrados, por exemplo, em [Rodr] e [ChLa].

3.1.2 PROPOSIÇÃO *Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ uma imersão isométrica de uma variedade compacta e de G -cohomogeneidade 1. Seja ϕ a aplicação normal de Gauss generalizada. Então, ϕ é sobrejetiva e existe um valor regular $\xi_0 \in S^{n+k-1}$ tal que os pontos críticos (não-degenerados) da função altura h_{ξ_0} pertencem a M_{reg} .*

DEMONSTRAÇÃO: Dado $\xi \in S^{n+k-1}$, seja $p \in M$ um ponto onde a função altura na direção de ξ atinge seu mínimo, o qual existe em virtude da compacidade de M . Assim, $(p, \xi) \in \nu^1(M)$ e $\phi(p, \xi) = \xi$, o que estabelece a sobrejetividade de ϕ .

Sabemos que o número de órbitas não-principais de G é no máximo 2. Além disso, essas órbitas têm no máximo dimensão $n-1$ (caso excepcional). Logo, denotando por U a união dessas órbitas, temos que

$$\tilde{U} = \{(p, v) \in \nu^1(M); p \in U\}$$

é um subconjunto compacto e de medida nula de $\nu^1(M)$ e, portanto, $\phi(\tilde{U})$ é um compacto de medida nula em S^{n+k-1} , o que permite-nos escolher, usando o teorema de Sard (veja [Hirs]), $\xi_0 \in \phi(\nu^1(M)) = S^{n+k-1}$, um valor regular de ϕ , tal que $\xi_0 \notin \phi(\tilde{U})$. Resulta daí que a função altura na direção de ξ_0 tem seus pontos críticos (pelo menos dois) distribuídos ao longo de M_{reg} .

□

3.1.3 PROPOSIÇÃO *Seja $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície de G -cohomogeneidade 1. Seja $p \in M_{\text{reg}}$ tal que $\tau f(p)$, o número tipo de f em p , seja maior do que ou igual a 3. Então, existe um tubo Γ , contendo a órbita principal $\Sigma_p = G(p)$, de tal sorte que a restrição de f a Γ é rígida.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow M$ uma geodésica normal tal que $\lambda(0) = p$. Como $\tau f(p) \geq 3$, temos que existe um aberto $U \subset M$, contendo p , onde $\tau f \geq 3$. Agora, tomamos $\epsilon > 0$ de tal modo que $S = \lambda(-\epsilon, \epsilon) \subset U$ seja uma fatia, de acordo com o teorema 2.3.16. Assim, $\Gamma = G(S)$ é um tubo (aberto) conexo, invariante sob a ação de G e, como τf é constante ao longo de cada órbita principal de Γ (proposição 3.2 de [AMNo], ou teorema 5.1 de [Ryan]), ainda vale $\tau f \geq 3$, ao longo de Γ . A rigidez deste tubo é consequência do teorema 2.1.4. □

Sob as mesmas hipóteses da proposição anterior, temos o corolário 3.1.4, resultado de alto grau de relevância dentro deste trabalho.

3.1.4 COROLÁRIO *Existe um homomorfismo C^∞ , $T : G \longrightarrow \text{Iso}(\mathbb{R}^{n+1})$, caracterizado por*

$$f \circ g(x) = T_g \circ f(x), \quad x \in \Gamma,$$

onde Γ é o tubo construído na proposição 3.1.3 e $T_g = T(g)$, $g \in G$. Em particular, $\tilde{G} = T(G)$ é um subgrupo compacto e conexo de $\text{Iso}(\mathbb{R}^{n+1})$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $g \in G$. Como o tubo Γ é invariante sob à ação de G , decorre que $g : \Gamma \longrightarrow \Gamma$ está bem definida. Logo, $f \circ g : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é, também, uma imersão isométrica de Γ . A rigidez de Γ , já obtida na proposição 3.1.3, garante que existe uma única $\tilde{g} \in \text{Iso}(\mathbb{R}^{n+1})$ tal que $f \circ g(x) = \tilde{g} \circ f(x)$, $x \in \Gamma$. Agora, é só pôr $T(g) = \tilde{g}$ e está construído o homomorfismo procurado. □

Podemos, agora, destacar um resultado que contém uma razoável descrição das órbitas principais do grupo G agindo em M .

3.1.5 TEOREMA *Seja $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície de G -cohomogeneidade 1. Suponhamos que, para algum $p \in M_{\text{reg}}$, $\tau f(p) \geq 3$. Então, a órbita principal $\Sigma_p = G(p)$ tem as seguintes propriedades.*

- (a) $f(\Sigma_p)$ é uma subvariedade (mergulhada) de alguma esfera euclidiana n -dimensional, $S^n(p_0, 1/\sqrt{c})$, centrada em p_0 e de raio $1/\sqrt{c}$. Na realidade, $f(\Sigma_p)$ é uma órbita principal da ação de algum subgrupo de isometrias desta esfera;
- (b) as órbitas principais de G são orientáveis e os autovalores do campo de operadores de Weingarten da imersão $f : \Sigma_p \longrightarrow S^n(p_0, 1/\sqrt{c})$ são constantes. (Em particular, $f(\Sigma_p)$ é uma subvariedade isoparmétrica de $S^n(p_0, 1/\sqrt{c})$.)

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $T : G \longrightarrow \text{Iso}(\mathbb{R}^{n+1})$ o homomorfismo construído no corolário anterior e $\tilde{G} = T(G) \subset \text{Iso}(\mathbb{R}^{n+1})$. Temos que \tilde{G} é um subgrupo compacto de $\text{Iso}(\mathbb{R}^{n+1})$. Usando um teorema devido a Cartan (veja [Kobb], teorema 5.10), obtemos um ponto fixo para \tilde{G} , isto é, existe $p_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\tilde{g}(p_0) = p_0$, para todo $\tilde{g} \in \tilde{G}$. Este fato, quando combinado com a equação $f \circ g = \tilde{g} \circ f$, $g \in G$ e $\tilde{g} \in \tilde{G}$, implica que $f(\Sigma_p)$ está contida na esfera centrada em p_0 e de raio $\|f(p) - p_0\|$. Com efeito, dado $g \in G$, temos que

$$\|f(g(p)) - p_0\| = \|\tilde{g}(f(p)) - p_0\| = \|\tilde{g}(f(p)) - \tilde{g}(p_0)\| = \|f(p) - p_0\|.$$

Definindo c de tal modo que $1/\sqrt{c} = \|f(p) - p_0\|$, decorre que a imersão $f : \Sigma_p \longrightarrow S^n(p_0, 1/\sqrt{c})$ está bem definida. Mais ainda: a equação $f \circ g = \tilde{g} \circ f$ implica que $f(\Sigma_p) = \tilde{G}(f(p))$. Logo, $f(\Sigma_p)$ coincide com a órbita, por $f(p)$, da ação de \tilde{G} em $S^n(p_0, 1/\sqrt{c})$ e, daí, resulta que $f(\Sigma_p)$ é uma subvariedade (mergulhada) de dimensão $n - 1$ de $S^n(p_0, 1/\sqrt{c})$. Recorrendo ao fato que estabelece que as hipersuperfícies (mergulhadas) de uma esfera sempre são orientáveis, obtemos que $f(\Sigma_p)$ é orientável. Na verdade, temos um pouco mais: $f(\Sigma_p)$ é uma órbita principal de \tilde{G} , visto que uma excepcional, caso existisse, seria não-orientável (teorema 2.3.15). (Este mesmo argumento implica que uma ação de cohomogeneidade 1, em uma esfera, não possui órbitas excepcionais.) Assim, a restrição de f a Σ_p é uma isometria local entre esta variedade e a variedade orientável $f(\Sigma_p)$. Donde obtemos a orientabilidade de Σ_p e das demais órbitas principais, visto que estas são difeomorfas entre si.

Seja η um campo normal unitário (definido globalmente) ao longo da imersão $f : \Sigma_p \longrightarrow S^n(p_0, 1/\sqrt{c})$. Associado a este campo, está o campo de operadores (auto-adjuntos) de Weingarten:

$$A_{\eta(x)} : T_x(\Sigma_p) \longrightarrow T_x(\Sigma_p), \quad x \in \Sigma_p,$$

com seus respectivos autovalores $\lambda_1(x) \leq \lambda_2(x) \leq \dots \leq \lambda_{n-1}(x)$. É um resultado conhecido que estes autovalores são contínuos (veja, por exemplo, [Ryan]). Na realidade, eles são constantes, como veremos a seguir.

Dados x e y em Σ_p , escolhamos $g \in G$ e $\tilde{g} \in \tilde{G}$ tais que $g(x) = y$ e $f \circ g = \tilde{g} \circ f$. Logo, $\tilde{g}(f(x)) = f(y) \in S^n(p_0, 1/\sqrt{c})$. Como \tilde{g} é uma isometria de $S^n(p_0, 1/\sqrt{c})$, temos que $d\tilde{g}(\eta) = \pm\eta$. Isto implica que

$$A_{\eta(x)}^2 = dg_x^{-1} \circ A_{\eta(y)}^2 \circ dg_x. \quad (1)$$

Donde, fixado $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, vem que $\lambda_i^2(x) = \lambda_j^2(y)$, para algum número inteiro $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

Verificaremos, agora, que a função λ_1 é constante. (O mesmo argumento se aplica aos demais autovalores de A_{η} .) Para isto, fixemos $x \in \Sigma_p$. Temos que uma das seguintes alternativas deve ocorrer:

- (i) $\lambda_1^2(x) = \lambda_1^2(y)$, para todo $y \in \Sigma_p$;

(ii) $\lambda_1^2(x) \neq \lambda_1^2(y_0)$, para algum $y_0 \in \Sigma_p$.

No primeiro caso, obtemos facilmente que a função λ_1 é constante. Estudemos o segundo. Temos que

$$\mathcal{K} = \{k \in \{1, 2, \dots, n-1\}; \lambda_k^2(y_0) \neq \lambda_1^2(x)\} \neq \emptyset$$

e que existe $j_0 \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ tal que $\lambda_{j_0}^2(y_0) = \lambda_1^2(x)$. A existência de j_0 resulta da equação (1), tomada com $y = y_0$. Como λ_1 é contínuo, deve existir um aberto $U \subset \Sigma_p$, contendo x , tal que

$$\lambda_1^2(z) \neq \lambda_k^2(y_0), \text{ sempre que } z \in U \text{ e } k \in \mathcal{K}.$$

Mas $\lambda_1^2(z) = \lambda_i^2(y_0)$, para algum $i \in \{1, 2, \dots, n-1\} - \mathcal{K}$. Logo, $\lambda_1^2(z) = \lambda_1^2(x)$, para todo $z \in U$. Isto significa que λ_1^2 é constante em U . Levando em conta a conexidade de Σ_p e a continuidade de λ_1 , segue-se que λ_1 é constante em Σ_p . □

Como consequência da proposição 3.1.2 e do teorema 3.1.5, temos um corolário que contém uma primeira obstrução às hipersuperfícies compactas e de G -cohomogeneidade 1 do espaço euclidiano \mathbb{R}^{n+1} , $n \geq 3$.

3.1.6 COROLÁRIO *Seja $f : M^{n \geq 3} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta e de G -cohomogeneidade 1. Então, existe $p \in M_{\text{reg}}$ tal que $\tau f(p) = n$, e as órbitas principais de G são orientáveis.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja ξ_0 um valor regular da aplicação normal de Gauss generalizada $\phi : \nu^1(M) \rightarrow S^n$ tal que $\phi^{-1}(\xi_0) \subset M_{\text{reg}} \times \{\xi_0\}$, o qual existe em virtude da proposição 3.1.2. Logo, se $(p, \xi_0) \in \phi^{-1}(\xi_0)$, temos que $A_{\xi_0} : T_p M \rightarrow T_p M$ é invertível, conforme observamos um pouco antes da proposição 3.1.2. Portanto, os autovalores de A_{ξ_0} são todos não-nulos e, em particular, segue-se que $\tau f(p) = n \geq 3$. O item (b) do teorema 3.1.5 completa o corolário. □

O próximo corolário decorre de uma atenciosa observação da demonstração do teorema anterior, no instante em que concluímos que os autovalores do campo de operadores de Weingarten A_η são constantes.

3.1.7 COROLÁRIO *Sejam M uma variedade e Σ uma órbita de codimensão 1. Seja η um campo normal (a Σ) unitário, definido em algum aberto conexo de Σ . Então, os autovalores dos operadores de Weingarten associados a η são constantes nesse aberto.*

3.2

ÓRBITAS COM CURVATURA POSITIVA

O propósito desta seção é o estudo das hipersuperfícies de G -cohomogeneidade 1, $f : M^{n \geq 3} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, tais que as órbitas principais de G , com a métrica induzida de M , possuem curvatura seccional positiva. O seu teorema principal é o seguinte.

3.2.1 **TEOREMA** *Seja $f : M^{n \geq 4} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta e de G -cohomogeneidade 1. Se as órbitas principais de G têm curvatura seccional positiva, então elas são difeomorfas a S^{n-1} , e M tem o mesmo tipo de homotopia que um CW-complexo sem células de dimensão k , para $2 \leq k \leq n - 2$.*

DEMONSTRAÇÃO: A idéia central é construir uma função altura $h_{\xi_0} : M \rightarrow \mathbb{R}$ de Morse de tal sorte que seu índice, em cada um de seus pontos críticos, tenha valor no conjunto $\{0, 1, n - 1, n\}$. A partir daí, usando um teorema básico da Teoria de Morse (veja [Milb], teorema 3.5), concluímos o teorema.

Começamos recorrendo à proposição 3.1.2 e escolhendo um vetor $\xi_0 \in S^n$ tal que a função altura

$$\begin{aligned} h_{\xi_0} : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto h_{\xi_0}(x) = \langle \xi_0, f(x) \rangle \end{aligned}$$

é de Morse e, além disto, seus pontos críticos estão distribuídos sobre M_{reg} . Seja $p \in M$ um desses pontos críticos. Assim, a órbita principal Σ_p é orientável e a imagem desta órbita, via f , é uma subvariedade isoparamétrica de alguma esfera, que podemos supor, sem perda de generalidade, ser S^n , a esfera euclidiana unitária centrada na origem do \mathbb{R}^{n+1} .

Seja η um campo normal unitário ao longo da imersão $f : \Sigma_p \rightarrow S^n$. Sabemos, do teorema 3.1.5, que os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ do campo de operadores de Weingarten A_η são constantes ao longo de Σ_p .

Afirmamos que $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n-1}$. Com efeito, se isto não fosse verdadeiro, teríamos, para algum par de índices, digamos 1 e k , que $\lambda_1 \neq \lambda_k$ e, portanto, poderíamos fazer uso da equação de Cartan para hipersuperfícies isoparamétricas de S^n (veja [Feru]):

$$\sum_{\substack{j \\ \lambda_j \neq \lambda_1}}^{n-1} \frac{1 + \lambda_1 \lambda_j}{\lambda_j - \lambda_1} = 0,$$

ou, usando a equação de Gauss para a imersão $f : \Sigma_p \rightarrow S^n$,

$$\sum_{\substack{j \\ \lambda_j \neq \lambda_1}}^{n-1} \frac{K_{1j}}{\lambda_j - \lambda_1} = 0,$$

onde K_{1j} denota a curvatura seccional de Σ_p com relação ao plano gerado por auto-vetores (unitários) de A_η associados a λ_1 e λ_j . Mas esta última equação é impossível, visto que seus denominadores são positivos e, por hipótese, Σ_p tem curvatura seccional positiva. Logo, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n-1} = \lambda$, como afirmamos. Assim, a imersão $f : \Sigma_p \longrightarrow S^n$ é umbílica. Portanto, sua segunda forma em p , α_p , é dada por

$$\alpha_p(X, Y) = \lambda \langle X, Y \rangle \eta(p), \quad X, Y \in T_p(\Sigma_p)$$

e, como a imersão se dá em uma esfera, $f(\Sigma_p)$ deve coincidir com alguma esfera de dimensão $n - 1$, centro q e raio r (teorema 2.1.3): $S^{n-1}(q, r) \subset S^n$. Agora, via argumentos usuais da teoria dos Espaços de Recobrimento, vem que Σ_p é isométrica a $S^{n-1}(q, r)$. Como as órbitas principais são difeomorfas entre si, segue-se que as referidas órbitas são difeomorfas a $S^{n-1}(q, r)$, e está pronta a primeira afirmação do teorema, a qual vale também quando $n = 3$.

O restante da demonstração será dedicado ao cálculo do índice de h_{ξ_0} em p .

Seja N o campo normal unitário de S^n apontando para fora. Como são umbílicas a imersão $f : \Sigma_p \longrightarrow S^n$ e a inclusão $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, temos que a segunda forma de $f : \Sigma_p \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ em p é dada por

$$\tilde{\alpha}_p(X, Y) = \langle X, Y \rangle v(p), \quad X, Y \in T_p(\Sigma_p),$$

onde $v(p) = \lambda \eta(p) - N(p)$. Logo, se $\tilde{A}_{\xi_0} : T_p(\Sigma_p) \longrightarrow T_p(\Sigma_p)$ é o operador de Weingarten de $f : \Sigma_p \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ na direção ξ_0 , então

$$\langle \tilde{A}_{\xi_0}(X), Y \rangle = \langle \tilde{\alpha}(X, Y), \xi_0 \rangle = \langle v(p), \xi_0 \rangle \langle X, Y \rangle, \quad X, Y \in T_p(\Sigma_p).$$

Donde $\tilde{A}_{\xi_0}(X) = \langle v(p), \xi_0 \rangle X$, $X \in T_p(\Sigma_p)$ e, portanto, o índice da forma bilinear \tilde{B} , dada por

$$\tilde{B}(X, Y) = \langle \tilde{A}_{\xi_0}(X), Y \rangle = \langle v(p), \xi_0 \rangle \langle X, Y \rangle, \quad X, Y \in T_p(\Sigma_p),$$

é 0 ou $n - 1$.

Não é difícil verificar que vale a seguinte relação:

$$\langle \tilde{A}_{\xi_0}(X), Y \rangle = \langle A_{\xi_0}(X), Y \rangle, \quad X, Y \in T_p(\Sigma_p),$$

onde A_{ξ_0} é o operador de Weingarten de $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, segundo a direção ξ_0 . Isto diz que a restrição da forma bilinear B , definida por $B(X, Y) = \langle A_{\xi_0}(X), Y \rangle$, ao subespaço $T_p(\Sigma_p) \times T_p(\Sigma_p)$, coincide com \tilde{B} , cujo índice só pode ser 0 ou $n - 1$. Agora, uma aplicação direta do lema 3.1.1 dá que $\text{ind } B \in \{0, 1, n - 1, n\}$. Mas

$$B(X, Y) = \langle A_{\xi_0}(X), Y \rangle = \text{Hess}_p h_{\xi_0}(X, Y).$$

Logo, o índice de h_{ξ_0} em p é 0, 1, $n - 1$ ou n .

□

3.2.2

COROLÁRIO

Seja $f : M^{n \geq 4} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta e de G -cohomogeneidade 1. Se as órbitas principais de G têm curvatura seccional positiva, então os grupos de homologia (sobre o anel \mathbb{Z}) de M

são tais que

$$H_k(M) = 0, \text{ se } 2 \leq k \leq n - 2.$$

Além disto, $H_1(M)$ é um módulo livre sobre \mathbb{Z} e $\pi_1(M)$ é um grupo livre com um número finito de geradores.

DEMONSTRAÇÃO: O teorema 3.2.1 estabelece que M tem o mesmo tipo de homotopia que um CW -complexo K sem células de dimensão k , $2 \leq k \leq n - 2$. Logo, o complexo cadeia associado a K é

$$0 \xrightarrow{\partial_{n+1}} \mathcal{C}_n(K) \xrightarrow{\partial_n} \mathcal{C}_{n-1}(K) \xrightarrow{\partial_{n-1}} 0 \cdots \longrightarrow 0 \xrightarrow{\partial_2} \mathcal{C}_1(K) \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{C}_0(K) \longrightarrow 0,$$

onde $\mathcal{C}_j(K)$ denota o módulo livre sobre \mathbb{Z} gerado pelas células de dimensão j do CW -complexo K . (Convém notar que na seqüência de módulos acima foi usada a hipótese $n \geq 4$.) Logo,

$$H_k(M) = H_k(K) = \frac{\text{Ker } \partial_k}{\text{Im } \partial_{k+1}} = 0, \text{ se } 2 \leq k \leq n - 2.$$

e $H_1(M) = \text{Ker } \partial_1$, onde $\text{Ker } \partial_k$ indica o núcleo do operador ∂_k e $\text{Im } \partial_{k+1}$, a imagem de ∂_{k+1} . Logo, $H_1(M)$ é isomorfo a um submódulo de $\mathcal{C}_1(M)$, o qual é um módulo livre (com um número finito de geradores) sobre \mathbb{Z} . Portanto, $H_1(M)$ é livre como módulo sobre \mathbb{Z} .

No que diz respeito ao grupo fundamental de M , como K não possui células de dimensão 2 (aqui também usamos que $n \geq 4$), $\pi_1(K)$ coincide com o grupo fundamental do esqueleto 1-dimensional de K (veja [Breb], teorema 11.7 do capítulo VII). Mas esse esqueleto tem o mesmo tipo de homotopia que um buquê de círculos. Logo, $\pi_1(M)$ é livre.

◻

Os próximos resultados mostram que a hipótese de positividade na curvatura das órbitas principais de G , juntamente com uma imersão de M no \mathbb{R}^{n+1} , impõe severa restrição à topologia da variedade M .

3.2.3

COROLÁRIO

Seja $f : M^{n \geq 4} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta, simplesmente conexa e de G -cohomogeneidade 1. Se as órbitas principais de G têm curvatura seccional positiva, então M é homeomorfa a S^n .

DEMONSTRAÇÃO: A hipótese de conexidade simples fornece, via teorema de Hurewicz, que $H_1(M) = 0$, além de garantir que M é orientável. Donde, usando a dualidade de Poincaré, concluímos que $H_{n-1}(M) = 0$. Levando em conta que

$H_k(M) = 0$, $2 \leq k \leq n - 2$, ficamos diante do seguinte quadro: M é simplesmente conexa e possui a homologia inteira de S^n . Portanto, M tem o mesmo tipo de homotopia que S^n . Agora, usamos o teorema de Smale ([Smal] ou [Mila]), para $n \geq 5$, e o teorema de Freedman ([Free]), para $n = 4$. Esses teoremas garantem que M é homeomorfa a S^n .

◻

Apesar de não dispormos de um teorema como o de Smale (ou mesmo aquele de Freedman) para o caso $n = 3$, o corolário anterior ainda vale para esta dimensão. De fato, o teorema abaixo preenche tal lacuna e não precisa de uma imersão para M .

3.2.4 TEOREMA *Seja M^3 uma variedade riemanniana compacta, de G -cohomogeneidade 1 e tal que $H_1(M, \mathbb{Z}_2) = 0$. Se as órbitas principais de G têm curvatura seccional positiva, então elas são isométricas a esferas euclidianas, e M é homeomorfa a S^3 .*

DEMONSTRAÇÃO: Como $H_1(M, \mathbb{Z}_2) = 0$, temos que M e suas hipersuperfícies (mergulhadas) são orientáveis. Em particular, as órbitas principais de G são orientáveis. Mais ainda, como essas órbitas são 2-dimensionais e homogêneas, têm curvatura constante. Mas, por hipótese, tal curvatura é positiva. Logo, as órbitas principais devem ser isométricas a esferas euclidianas.

Como estamos diante de uma ação de cohomogeneidade 1, e M é compacta, vale que o espaço de órbitas M/G coincide ou com o intervalo $[0, 1]$ ou com o círculo S^1 , conforme diz o teorema 2.3.11. Na realidade, $M/G = [0, 1]$. De fato, se $M/G = S^1$, teríamos uma fibração localmente trivial $\pi : M \rightarrow S^1$ com fibra difeomorfa a S^2 . A seqüência exata em homotopia desta fibração dá que

$$0 \longrightarrow \pi_1(S^2) \longrightarrow \pi_1(M) \longrightarrow \pi_1(S^1) \longrightarrow 0$$

ou, uma vez que $\pi_1(S^2) = 0$ e $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$,

$$0 \longrightarrow \pi_1(M) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

o que, por sua vez, implica $\pi_1(M) = \mathbb{Z}$. Assim, $H_1(M) = \mathbb{Z}$. Isto, junto ao teorema dos coeficientes universais, implica que $H_1(M, \mathbb{Z}_2) = H_1(M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2$, fato que contradiz nossa hipótese. Portanto, devemos ter $M/G = [0, 1]$, isto é, a ação tem duas órbitas não-principais.

Ainda de $H_1(M, \mathbb{Z}_2) = 0$, vem que a ação de G não admite órbitas excepcionais, visto que uma tal órbita deve ser não-orientável. Logo, as duas órbitas não-principais devem ser singulares. Portanto, cada uma delas ou coincide com um ponto ou é difeomorfa ao círculo S^1 . Na verdade, esta última alternativa é impossível. Com efeito, suponhamos que $G/K = S^1$ seja uma órbita singular, e seja $G/H = S^2$ uma órbita principal. Em se tratando de uma ação de cohomogeneidade 1, temos que a

projeção natural

$$\begin{aligned} \pi : G/H &\longrightarrow G/K \\ gH &\longmapsto \pi(gH) = gK \end{aligned}$$

define uma fibração localmente trivial com fibra típica difeomorfa a $K/H = S^1$, fato que podemos obter do teorema 2.3.14. Portanto, temos a seguinte seqüência exata:

$$0 \longrightarrow \pi_1(S^1) \longrightarrow \pi_1(S^2) \longrightarrow \pi_1(S^1) \longrightarrow 0,$$

o que constitui uma contradição aos fatos que S^2 é simplesmente conexa e $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. Assim, as órbitas singulares de G são pontos.

O item (b) do teorema 2.3.13 nos diz que $M \cong \overline{\Gamma_1} \cup_{\phi} \overline{\Gamma_2}$, onde Γ_1 e Γ_2 são fibrados de discos sobre as órbitas não-principais de G , e ϕ é um difeomorfismo entre as órbitas principais que são bordos de $\overline{\Gamma_1}$ e $\overline{\Gamma_2}$. Como, no nosso caso, as órbitas principais são difeomorfas à esfera S^2 , e as órbitas não-principais (singulares) são pontos fixos de G , vem que $\overline{\Gamma_1}$ e $\overline{\Gamma_2}$ são cópias do disco tridimensional compacto D^3 . Portanto,

$$M \cong D^3 \cup_{\phi} D^3,$$

onde ϕ é um difeomorfismo de S^2 . Isto significa que M é uma esfera torcida. Assim sendo, M deve ser homeomorfa a S^3 . (Este último fato é relativamente simples e pode ser encontrado em [Mila].)

□

Na mesma ordem de idéias dos dois teoremas anteriores, passaremos a descrever o caso em que M não é simplesmente conexa.

3.2.5
TEOREMA *Seja $f : M^{n \geq 3} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta e de G -cohomogeneidade 1. Se as órbitas principais de G têm curvatura seccional positiva e M não é simplesmente conexa, então M é homeomorfa a $S^1 \times S^{n-1}$.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $p \in M_{\text{reg}}$. Logo, a órbita principal $\Sigma_p = G(p)$ é difeomorfa à esfera S^{n-1} . Portanto, se H denota o subgrupo de isotropia de G em p , temos que $G/H = S^{n-1}$.

Primeiro, suponhamos que $M = M_{\text{reg}}$. Neste caso, $M/G = S^1$ e, portanto, M é difeomorfa a $S^1 \times S^{n-1}$, de acordo com o item (a) do teorema 2.3.13, o que prova o teorema, para o caso em que G tem apenas órbitas principais. Na realidade, como veremos, esta é a única possibilidade.

Seja q um ponto não-regular de M e K o subgrupo de isotropia de G em q . Do teorema 2.3.14, obtemos que $\pi : S^{n-1} \longrightarrow G(q)$ é uma fibração localmente trivial com fibra típica S^m , $m \geq 0$. Se $G(q)$ é singular ($m > 0$), a seqüência exata em homotopia desta fibração implica que esta órbita é simplesmente conexa. Quando $G(q)$ é excepcional, obtemos $\pi_1(G(q)) = \mathbb{Z}_2$.

Sejam \mathcal{E}_1 e \mathcal{E}_2 as órbitas não-principais de G . Nosso objetivo, agora, é verificar que nenhuma destas órbitas pode ser excepcional. Isto será feito em duas etapas: uma tratará dos casos onde $n \geq 4$ e a outra do caso tridimensional.

Suponhamos que $n \geq 4$. Como $M \cong \overline{\Gamma_1} \cup_{\phi} \overline{\Gamma_2}$, onde Γ_1 e Γ_2 são, respectivamente, fibrados de discos sobre \mathcal{E}_1 e \mathcal{E}_2 e $\phi : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ é um difeomorfismo da órbita principal S^{n-1} , temos, via teorema de Seifert-Van Kampen, que $\pi_1(M)$ é isomorfo ao produto livre de $\pi_1(\Gamma_1)$ por $\pi_1(\Gamma_2)$, isto é, $\pi_1(M) = \pi_1(\Gamma_1) * \pi_1(\Gamma_2)$. Agora, como Γ_1 tem o mesmo tipo de homotopia que \mathcal{E}_1 , e Γ_2 tem o mesmo tipo de homotopia que \mathcal{E}_2 , vem que $\pi_1(M) = \pi_1(\mathcal{E}_1) * \pi_1(\mathcal{E}_2)$. Como $n \geq 4$, esta equação, combinada com o corolário 3.2.2, implica que nenhuma das órbitas, \mathcal{E}_1 ou \mathcal{E}_2 , pode ser excepcional. De fato: do corolário obtemos que o grupo $\pi_1(M)$ é livre; da equação, se \mathcal{E}_1 fosse excepcional, obteríamos que $\pi_1(M) = \mathbb{Z}_2 * \pi_1(\mathcal{E}_2)$, onde $\pi_1(\mathcal{E}_2)$ é ou o grupo trivial (se \mathcal{E}_2 é singular) ou \mathbb{Z}_2 (se \mathcal{E}_2 é excepcional). Uma contradição.

No que segue, lidaremos com o caso tridimensional. Vale notar que os argumentos usados para $n \geq 4$ não se aplicam aqui porque não dispomos, a priori, da informação de $\pi_1(M)$ ser livre.

Suponhamos, por absurdo, que \mathcal{E}_1 seja excepcional. Por ser bidimensional e homogênea, \mathcal{E}_1 tem curvatura constante. Como \mathcal{E}_1 é recoberta por S^2 , vem do teorema de Hadamard, que essa constante deve ser positiva, a qual, sem perda de generalidade, admitiremos ser 1. Logo, \mathcal{E}_1 deve ser isométrica ou a S^2 ou ao plano projetivo \mathbb{RP}^2 . A primeira alternativa é impossível porque a órbita principal S^2 é um recobrimento duplo de \mathcal{E}_1 . Logo, \mathcal{E}_1 deve ser isométrica a \mathbb{RP}^2 .

Seja \mathcal{H} o vetor curvatura média de \mathcal{E}_1 olhada como subvariedade de M . A homogeneidade (com respeito a isometrias de M) de \mathcal{E}_1 garante que $\|\mathcal{H}\|$ é constante. Na realidade, \mathcal{E}_1 é mínima, isto é, $\mathcal{H} = 0$. Com efeito, sejam $p \in M_{\text{reg}}$ e λ uma geodésica normal começando em p . Seja $q = \lambda(t_0)$ um ponto onde λ fura \mathcal{E}_1 . Como \mathcal{E}_1 é uma órbita excepcional de G , deve existir $g \in G - H$, H subgrupo de isotropia de G em p , tal que

$$g(q) = q \text{ e } d_q g(\lambda'(t_0)) = -\lambda'(t_0).$$

Isto decorre do fato que $K/H = \{H, gH\}$, para alguma isometria $g \in G$. Logo, $d_q g(\mathcal{H}(q)) = -\mathcal{H}(q)$. Mas $d_q g(\mathcal{H}(q)) = \mathcal{H}(q)$. Portanto, devemos ter $\mathcal{H}(q) = 0$ e, como \mathcal{H} tem comprimento constante, obtemos a minimalidade de \mathcal{E}_1 em M .

Neste instante, cobrimos \mathcal{E}_1 com um número finito de abertos conexos U_k , $k \in \mathcal{K} \subset \mathbb{N}$, com a seguinte propriedade: em U_k está definido, relativamente a inclusão $U_k \subset M$, um campo normal unitário $\eta^{(k)}$. Uma aplicação direta do resultado obtido no corolário 3.1.7 mostra que os dois autovalores dos operadores de Weingarten associados ao campo $\eta^{(k)}$ são constantes em U_k . Além disto, a soma deles é nula, posto que \mathcal{E}_1 é mínima em M .

Fixemos atenção em um dos abertos U_k , digamos U_1 . Se um dos autovalores dos operadores de Weingarten associado a $\eta^{(1)}$ fosse não-nulo, o outro também seria. Logo, esses autovalores seriam não-nulos, de mesmo valor absoluto e de sinais contrários;

em particular, diferentes. Assim, teríamos, definidos em U_1 , dois campos de linhas (ortogonais) diferenciáveis, a saber, os auto-espacos associados a esses autovalores. Notando que, na interseção de dois abertos da cobertura U_k , os campos normais $\eta^{(k)}$, no pior dos casos, diferem por um sinal, concluímos que é possível definir dois campos de linhas ao longo de toda $\mathcal{E}_1 = \mathbb{R}P^2$. Em particular, temos um campo de linhas contínuo em $\mathbb{R}P^2$, o qual podemos levantar a S^2 , fato absurdo (veja [Stee]). Esse absurdo permite-nos concluir que os autovalores de $A_{\eta^{(k)}}$ devem ser ambos nulos, para todo $k \in \mathcal{K}$. Isto significa que \mathcal{E}_1 é totalmente geodésica em M .

Consideremos, agora, \mathcal{E}_1 imersa, através de f , no \mathbb{R}^4 . Seja η um campo normal unitário, com relação à inclusão de \mathcal{E}_1 em M , definido em algum subconjunto aberto e conexo de \mathcal{E}_1 . Definamos $\tilde{\eta} = df(\eta)$. Temos que $\tilde{\eta}$ é um campo normal unitário ao longo de $f : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathbb{R}^4$. Como $A_\eta = 0$, $A_{\tilde{\eta}}$ também o é. Logo, a segunda forma fundamental de \mathcal{E}_1 , relativa ao \mathbb{R}^4 , indicada por β , é dada por:

$$\beta(X, Y) = \langle A_\xi(X), Y \rangle \xi,$$

onde $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{E}_1)$ e ξ é um campo normal unitário ao longo de $f : M \rightarrow \mathbb{R}^4$. Segue-se que o primeiro espaco normal da imersão $f : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathbb{R}^4$, denotado por N_1 , tem, em cada ponto, dimensão no máximo 1. Como $\mathcal{E}_1 = \mathbb{R}P^2$ tem curvatura constante 1, vem da equação de Gauss que $\dim N_1 = 1$, ao longo de toda \mathcal{E}_1 . Agora, usando do teorema A de [DaRo], obtemos que a codimensão da imersão $f : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathbb{R}^4$ pode ser reduzida a 1, isto é, existe um hiperplano que contém $f(\mathcal{E}_1)$. Portanto, $f(\mathcal{E}_1)$ deve ser uma esfera bidimensional desse hiperplano, contradizendo $\mathcal{E}_1 = \mathbb{R}P^2$.

Diante do exposto, em qualquer caso, concluímos que G não pode ter órbitas excepcionais. Assim, só resta a \mathcal{E}_1 e \mathcal{E}_2 serem singulares e, portanto, simplesmente conexas (se $n = 3$, pontos fixos de G). Logo, M é homeomorfa à adjunção (feita ao longo de S^{n-1}) de dois fibrados de discos sobre \mathcal{E}_1 e \mathcal{E}_2 . Agora, usando outra vez o teorema de Seifert-Van Kampen, segue-se que M é simplesmente conexa, fato contrário à nossa hipótese. Portanto, $M = M_{\text{reg}}$ e $M \cong S^1 \times S^{n-1}$.

□

3.3

ÓRBITAS DE CURVATURA NÃO-NEGATIVA

Na mesma ordem das idéias usadas na seção anterior, estudaremos agora as hipersuperfícies $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ de G -cohomogeneidade 1, $G \subset \text{Iso}(M)$, um subgrupo compacto, conexo e com órbitas principais curvadas não-negativamente.

Como primeiro resultado nessa direção, apresentamos a seguir uma proposição que descreve, a menos de difeomorfismos, as órbitas principais de G .

3.3.1 PROPOSIÇÃO Seja $f : M^{n \geq 4} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície de G -cohomogeneidade 1. Suponhamos que as órbitas principais de G tenham curvatura seccional não-negativa e que, em algum $p \in M$, $\tau f(p) \geq 3$. Então, essas órbitas satisfazem uma das seguintes alternativas:

- (a) são difeomorfas a S^{n-1} ;
- (b) são difeomorfas a $S^k \times S^{n-k-1}$, com $2 \leq k \leq n-3$;
- (c) recobrem $S^1 \times S^{n-2}$ e são recobertas por $\mathbb{R} \times S^{n-2}$.

Em particular, se Σ é uma órbita principal de G , então ou $\pi_1(\Sigma) = 0$ ou $\pi_1(\Sigma) = \mathbb{Z}$.

DEMONSTRAÇÃO: Podemos supor, sem perda de generalidade, que $p \in M_{\text{reg}}$, visto que M_{reg} é denso em M e o número tipo de f tende a crescer perto de p . Assim, $\Sigma_p = G(p)$ é uma órbita principal de G que imerge, via f , de tal modo que $f(\Sigma_p)$ coincide com uma subvariedade isoparamétrica de alguma esfera euclidiana n -dimensional, que admitiremos ser a esfera euclidiana unitária S^n (vide teorema 3.1.5, item (b)). Denotemos por $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{n-1}$ os autovalores (constantes) desta imersão.

Afirmção: Dentre estes autovalores, no máximo dois deles são distintos. De fato, suponhamos que assim não seja. Logo, pelos menos três deles, digamos λ_1, λ_2 e λ_3 , são distintos. Agora, usando na equação de Cartan,

$$\sum_{\substack{j \\ \lambda_j \neq \lambda_1}}^{n-1} \frac{1 + \lambda_1 \lambda_j}{\lambda_j - \lambda_1} = 0,$$

a hipótese de que a curvatura seccional de Σ_p é maior do que ou igual a zero e que $\lambda_j - \lambda_1 > 0$, obtemos que

$$1 + \lambda_1 \lambda_j = 0, \text{ para } j \text{ tal que } \lambda_j \neq \lambda_1.$$

Em particular,

$$1 + \lambda_1 \lambda_2 = 0 \text{ e } 1 + \lambda_1 \lambda_3 = 0,$$

o que implica $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = -1/\lambda_1$, conclusão que contradiz $\lambda_2 \neq \lambda_3$. Portanto, conforme afirmamos, temos no máximo dois autovalores distintos, os quais serão denotados por λ e μ , $\lambda \leq \mu$.

Se $\lambda = \mu$, então a imersão de Σ_p em S^n é umbílica e, portanto, $f(\Sigma_p)$ é uma hipersfera de S^n , donde concluímos o item (a).

Suponhamos, agora, que $\lambda < \mu$. Neste caso, outra vez da equação de Cartan, obtemos que $1 + \lambda\mu = 0$. Donde $\lambda \neq 0$ e $\mu \neq 0$, o que implica que o número tipo da imersão $f : \Sigma_p \longrightarrow S^n$ é $n-1 \geq 3$. Os itens (b) e (c), agora, resultam de uma aplicação cuidadosa de um teorema devido a Ryan (teorema 5.7 de [Ryan]).

Vejamos a afirmação sobre o grupo fundamental da órbita principal Σ . Observando os itens (a), (b) e (c), notamos que a única possibilidade para que $\pi_1(\Sigma)$ não

seja trivial reside no item (c), onde temos que Σ é recoberta por $\mathbb{R} \times S^{n-2}$ e recobre $S^1 \times S^{n-2}$. Logo, se $\pi_1(\Sigma) \neq 0$, devemos ter que este grupo é isomorfo a um subgrupo não-nulo de $\pi_1(S^1 \times S^{n-2}) = \mathbb{Z}$. Portanto, $\pi_1(\Sigma)$ é, também, isomorfo a \mathbb{Z} .

□

3.3.2 COROLÁRIO *Seja $f : M^{n \geq 4} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta e de G -cohomogeneidade 1. Suponhamos que as órbitas principais de G tenham curvatura seccional não-negativa. Então, essas órbitas satisfazem uma das seguintes alternativas:*

- (a) são difeomorfas a S^{n-1} ;
- (b) são difeomorfas a $S^k \times S^{n-k-1}$, com $2 \leq k \leq n-3$;
- (c) recobrem $S^1 \times S^{n-2}$ e são recobertas por $\mathbb{R} \times S^{n-2}$.

Em particular, se Σ é uma órbita principal de G , então ou $\pi_1(\Sigma) = 0$ ou $\pi_1(\Sigma) = \mathbb{Z}$.

DEMONSTRAÇÃO: O corolário 3.1.6 produz um ponto $p \in M_{\text{reg}}$ tal que o número tipo $\tau f(p) = n \geq 4$. Agora, é só aplicar a proposição anterior.

□

Apesar da proposição 3.3.1 ter sido enunciada para $n \geq 4$, ela continua verdadeira para $n = 3$, só que, neste caso, o resultado é um pouco mais forte e não usa nenhuma informação sobre a curvatura das órbitas principais. A proposição 3.3.3 abaixo contém, de modo preciso, esse resultado.

3.3.3 PROPOSIÇÃO *Seja $f : M^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma hipersuperfície de G -cohomogeneidade 1. Suponhamos que, em algum $p \in M$, $\tau f(p) = 3$. Então, as órbitas principais de G devem ser isométricas:*

- (a) ou a esferas euclidianas bidimensionais;
- (b) ou ao toro plano $S^1 \times S^1$.

DEMONSTRAÇÃO: Como na proposição 3.3.1, podemos supor $p \in M_{\text{reg}}$. Já sabemos que as órbitas principais de G são orientáveis e que a órbita principal Σ_p imerge, por f , em uma esfera tridimensional, digamos S^3 (teorema 3.1.5). Além disto, como são homogêneas e bidimensionais, elas devem ter curvatura constante.

O teorema de Hilbert (teorema 41, página 137, de [Spiv]) para superfícies de S^3 impede que tal constante seja negativa. Se essa constante é positiva, temos que Σ_p é isométrica a uma esfera. (O caso Σ_p isométrica a um plano projetivo é descartado em virtude da orientabilidade de Σ_p .) A informação que obtivemos sobre Σ_p se estende às demais órbitas principais do seguinte modo: sabemos que elas são difeomorfas a Σ_p . Portanto, difeomorfas a S^2 . Na realidade, cada uma dessas órbitas deve ter curvatura constante positiva, pois, se essa constante fosse menor do que ou igual a zero, o seu

recobrimento universal seria, pelo teorema de Hadamard, \mathbb{R}^2 . Mas isto é um absurdo, visto que as órbitas principais são difeomorfas a S^2 . Logo, as órbitas principais de G devem ser isométricas a esferas euclidianas, quando Σ_p tem curvatura positiva.

O caso em que a curvatura de Σ_p é nula produz $\Sigma_p = S^1 \times S^1$, segundo o corolário 5.6, capítulo IV, de [KoNo]. A conclusão de que o mesmo ocorre com as outras órbitas principais é obtida via teorema de Gauss-Bonnet. Com efeito, seja Σ uma órbita principal qualquer de G , a qual deve ter curvatura constante, digamos c , e, ao mesmo tempo, deve ser difeomorfa ao toro $S^1 \times S^1$. Em particular, a característica de Euler de Σ é nula. O teorema de Gauss-Bonnet, agora, dá

$$\int_{\Sigma} c \, d\sigma = 2\pi\chi(\Sigma) = 0,$$

onde $d\sigma$ é o elemento de área de Σ e $\chi(\Sigma)$ denota a característica de Euler de Σ . Assim sendo, $c = 0$ e, portanto, $\Sigma = S^1 \times S^1$.

□

Para o caso tridimensional, o teorema que segue descreve as hipersuperfícies compactas, orientáveis e de G -cohomogeneidade 1.

3.3.4 TEOREMA *Seja $f : M^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma hipersuperfície orientável, compacta e de G -cohomogeneidade 1. Então, M é homeomorfa a algum dos espaços abaixo:*

- (a) S^3 ;
- (b) $S^1 \times S^2$;
- (c) $S^1 \times S^1 \times S^1$;
- (d) *um espaço lenticular L (cf. [Rolf]), isto é, uma adjunção de espaços $T_1 \cup_{\phi} T_2$, onde T_1 e T_2 são duas cópias do toro sólido $S^1 \times D^2$ e ϕ é um difeomorfismo do bordo, $S^1 \times S^1$, deste toro.*

Mais ainda: nos casos (c) e (d) o grupo G é isomorfo ao grupo $S^1 \times S^1$.

DEMONSTRAÇÃO: Do corolário 3.1.6, obtemos $p \in M_{\text{reg}}$ tal que $\tau f(p) = 3$. Usando a proposição anterior, concluímos que as órbitas principais são isométricas ou a esferas ou ao toro plano. Quando essas órbitas são esferas, os espaços dos itens (a) e (b) provêm dos teoremas 3.2.4 e 3.2.5. Os itens (c) e (d) estão associados ao caso em que as órbitas principais são toros planos, e passaremos a estudá-los agora.

Suponhamos que $\Sigma_p = S^1 \times S^1$ e seja H o subgrupo de isotropia de G em p . Como Σ_p é principal e G age efetivamente em M , vem que a ação de G em Σ_p é também efetiva. Por um resultado da teoria de Ações de Grupos, que pode ser encontrado em [Brea], temos que G deve coincidir com algum toro, visto que G atua efetivamente no toro Σ_p . Agora, a comutatividade de G , juntamente com a transitividade de sua ação

sobre Σ_p , implica que H é trivial e, portanto, $\Sigma_p = G/H = G$. Logo, $G = S^1 \times S^1$. Portanto, não existem órbitas excepcionais. Com efeito, suponhamos que G possua alguma órbita excepcional \mathcal{E} com subgrupo de isotropia $K \subset G$. Assim, $\mathcal{E} = G/K$. Como K é subgrupo de G , e G é um grupo comutativo, temos que K é um subgrupo normal de G . Assim, $\mathcal{E} = G/H$ é um grupo de Lie. Logo, orientável. Isto é uma contradição ao fato que as órbitas excepcionais não são orientáveis, conforme diz o teorema 2.3.15.

Restam, agora, duas possibilidades: (i) o grupo G tem apenas órbitas principais; (ii) existem duas órbitas singulares, as quais podem ser pontos fixos ou o círculo S^1 .

No que diz respeito à possibilidade (i), utilizamos diretamente um teorema de Mostert, o teorema 2.3.13, no seu item (a), e concluímos que M é homeomorfa ao toro $S^1 \times S^1 \times S^1$, posto que $M/G = S^1$ e $\Sigma_p = S^1 \times S^1$, o que produz (c).

Passemos à possibilidade (ii). Primeiro observamos que não pode existir ponto fixo para G . Este fato decorre do teorema 2.3.14, o qual estabelece que a fibração (natural) definida por uma órbita principal sobre uma não-principal tem fibra difeomorfa a uma esfera, sempre que a ação for de cohomogeneidade 1. Em particular, as órbitas principais de uma tal ação devem ser esferas, à presença de um ponto fixo. Assim sendo, as duas órbitas singulares de G devem ser difeomorfas a S^1 . Portanto, $M \cong \overline{\Gamma}_1 \cup_\phi \overline{\Gamma}_2$, onde Γ_1 e Γ_2 são fibrados de discos bidimensionais (abertos) sobre S^1 . Logo, $\overline{\Gamma}_1$ e $\overline{\Gamma}_2$ são homeomorfos ao toro sólido $S^1 \times D^2$, onde D^2 é o disco compacto bidimensional. Agora, colocando $T_1 = \overline{\Gamma}_1$ e $T_2 = \overline{\Gamma}_2$, obtemos (d).

◻

Voltemos ao caso geral onde as órbitas principais têm curvatura seccional não-negativa. O próximo teorema descreve o comportamento dos grupos de homologia da variedade M . Notamos aqui que para $n \leq 7$ não há o que provar.

3.3.5 TEOREMA *Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta e de G -cohomogeneidade 1. Se as órbitas principais de G têm curvatura seccional não-negativa, então M tem no máximo 8 grupos de homologia que não são triviais.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\xi_0 \in S^n$ um valor regular da aplicação de Gauss generalizada tal que os pontos críticos da função altura h_{ξ_0} estejam distribuídos sobre M_{reg} . Seja $p \in M_{\text{reg}}$ um destes pontos críticos. O nosso objetivo é calcular o índice de h_{ξ_0} em p e, posteriormente, fazer uso da teoria de Morse, como no teorema 3.2.1.

Seja $\Sigma_p = G(p)$ a órbita principal contendo p . Então, como sabemos, a restrição $f : \Sigma_p \rightarrow S^n$ está bem definida e, além disto, os operadores de Weingarten de f têm no máximo dois autovalores distintos, os quais denotaremos por $\lambda_p \leq \mu_p$ (veja a demonstração da proposição 3.3.1). Devemos observar que estes autovalores podem depender da escolha do ponto crítico p ou, de modo equivalente, de Σ_p , posto que eles são constantes aí.

O fato decisivo para a obtenção da informação sobre os grupos de homologia de M , e que deve ser ressaltado aqui, é que as multiplicidades de λ_p e de μ_p independem de p (de Σ_p). De fato, a classificação obtida na proposição 3.3.1 é realizada através do estudo das duas distribuições (globais e paralelas) em Σ_p :

$$\begin{aligned} T_{\lambda_p}(x) &= \{X \in T_x(\Sigma_p); A_{\eta(x)}(X) = \lambda_p X\} \\ T_{\mu_p}(x) &= \{X \in T_x(\Sigma_p); A_{\eta(x)}(X) = \mu_p X\}, \end{aligned}$$

onde $x \in \Sigma_p$ e η é um campo normal unitário ao longo da imersão de Σ_p na esfera S^n (veja [Ryan]). O item (a) da proposição 3.3.1 provém do caso umbílico, $\lambda_p = \mu_p$. O item (b) decorre do caso $2 \leq \dim T_{\lambda_p} \leq n - 3$, e o item (c) está associado ao caso $\dim T_{\lambda_p} = 1$. Fica claro, portanto, que as multiplicidades de λ_p e μ_p independem do ponto p , visto que as órbitas principais são difeomorfas entre si.

Seja \tilde{A}_{ξ_0} o operador de Weingarten de $f : \Sigma_p \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ em p , na direção ξ_0 . Um cálculo direto, envolvendo este operador e aquele da imersão de Σ_p em S^n , que tem autovalores λ_p e μ_p , mostra que

$$\tilde{A}_{\xi_0} = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_p & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \tilde{\lambda}_p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \tilde{\mu}_p & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \tilde{\mu}_p \end{pmatrix},$$

onde $\tilde{\lambda}_p = a\lambda_p + b$ e $\tilde{\mu}_p = a\mu_p + b$, para alguns $a, b \in \mathbb{R}$. Portanto, pondo $k_0 = \dim T_{\lambda_p}$, temos que o índice da forma bilinear \tilde{B} dada por

$$\tilde{B}(X, Y) = \langle \tilde{A}_{\xi_0}(X), Y \rangle, \quad X, Y \in T_p(\Sigma_p),$$

é 0, k_0 , $n - 1 - k_0$ ou $n - 1$. Mas

$$\langle A_{\xi_0}(X), Y \rangle = \langle \tilde{A}_{\xi_0}(X), Y \rangle, \quad X, Y \in T_p(\Sigma_p),$$

onde A_{ξ_0} é o operador de Weingarten de M no \mathbb{R}^{n+1} . Agora, usando o resultado do lema 3.1.1, obtemos que as possibilidades para o índice de h_{ξ_0} em p são:

$$0, 1, k_0, k_0 + 1, n - 1 - k_0, n - k_0, n - 1 \text{ e } n.$$

Escrevendo $n = 7 + k$, estas possibilidades ficam

$$0, 1, k_0, k_0 + 1, 6 + k - k_0, 7 + k - k_0, 6 + k \text{ e } 7 + k.$$

Portanto, são triviais os grupos de homologia (sobre qualquer domínio de ideais principais) $H_i(M)$, sempre que

$$i \in \{2, 3, \dots, k_0 - 1\} \cup \{k_0 + 2, k_0 + 3, \dots, 5 + k - k_0\} \cup \{8 + k - k_0, 9 + k - k_0, \dots, 5 + k\}.$$

Uma contagem direta destes índices dá:

- (i) entre 2 e $k_0 - 1$: $k_0 - 2$ índices;
- (ii) entre $k_0 + 2$ e $5 + k - k_0$: $4 + k - 2k_0$ índices;
- (iii) entre $8 + k - k_0$ e $5 + k$: $-2 + k_0$ índices.

Portanto, temos um total de

$$(k_0 - 2) + (4 + k - 2k_0) + (-2 + k_0) = k$$

grupos de homologia triviais. As demais possibilidades para k_0 , $k_0 = 1$ ou $k_0 = 2$, produzem mais do que k grupos de homologia triviais. Segue-se que o número de índices $i \in \{2, 3, \dots, n - 2\}$ para os quais $H_i(M) = 0$ é pelo menos k . Lembrando que $n = 7 + k$, vem que o número de grupos de homologia de M que não são triviais é no máximo 8 (vale lembrar que $H_0(M) \neq 0$).

□

3.4

EXEMPLOS

Reservamos esta seção para a apresentação de três exemplos que servirão como complemento para alguns teoremas constantes neste capítulo. O primeiro faz uso, para o caso particular do produto de esferas, da noção de *produto bi-torcido*, bastante útil na construção de hipersuperfícies de G -cohomogeneidade 1 do espaço euclidiano. O segundo deles serve de apoio ao teorema 3.3.5, indicando a impossibilidade de se melhorar a cota 8 para o número de grupos de homologia da variedade M que não são triviais. O terceiro, um pouco mais elaborado, completa o teorema 3.3.4, exibindo hipersuperfícies de G -cohomogeneidade 1 do \mathbb{R}^4 , como aquelas do item (d) do referido resultado.

3.4.1 Sejam $\phi, \psi : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $\phi(x, y) = x + 2$ e $\psi(x, y) = y + 2$.
EXEMPLO Temos que $\phi > 0$ e $\psi > 0$. Dados $m, n \in \mathbb{N}$, o *produto bi-torcido*, segundo as aplicações ϕ e ψ , de S^1 pelas esferas S^m e S^n , é construído introduzindo no produto de variedades $M = S^1 \times S^m \times S^n$ a métrica tal que,

$$\langle V, V \rangle_p = \langle v_1, v_1 \rangle_X + \phi^2(X) \langle v_2, v_2 \rangle_Y + \psi^2(X) \langle v_3, v_3 \rangle_Z,$$

onde $p = (X, Y, Z) \in M$, $V = (v_1, v_2, v_3) \in T_p M$ e as métricas do segundo membro são as de S^1 , S^m e S^n . A variedade M munida desta métrica é denotada por

$$S^1 \times_\phi S^m \times_\psi S^n.$$

Sejam $g \in \text{Iso}(S^m)$ e $h \in \text{Iso}(S^n)$. Não é difícil verificar que a aplicação

$$\begin{aligned} 1 \times g \times h : S^1 \times_\phi S^m \times_\psi S^n &\longrightarrow S^1 \times_\phi S^m \times_\psi S^n \\ (X, Y, Z) &\longmapsto 1 \times g \times h(X, Y, Z) = (X, g(Y), h(Z)) \end{aligned}$$

é uma isometria do produto bi-torcido $M = S^1 \times_\phi S^m \times_\psi S^n$.

Assim, o subconjunto

$$G = \{1 \times g \times h; (g, h) \in \text{Iso}(S^m) \times \text{Iso}(S^n)\}$$

é um subgrupo compacto de isometrias de M . Mais ainda, a ação de G em M tem apenas órbitas principais, as quais são isométricas a produtos de esferas. Mais precisamente, se $p = (X, Y, Z) \in M$, então a órbita principal $G(p)$ é isométrica ao produto riemanniano $S^m(\phi(X)) \times S^n(\psi(X))$. Portanto, o produto bi-torcido $S^1 \times_\phi S^m \times_\psi S^n$ é uma variedade de G -cohomogeneidade 1, e G tem órbitas principais com curvatura não-negativa. Na realidade, como veremos no próximo exemplo, este produto mergulha isometricamente no espaço \mathbb{R}^{2+m+n} .

3.4.2 EXEMPLO Dados $m, n \in \mathbb{N}$, seja $M_{(m,n)} = S^1 \times_\phi S^m \times_\psi S^n$ o produto bi-torcido do exemplo anterior. Seja $f : M_{(m,n)} \longrightarrow \mathbb{R}^{2+m+n}$ definida por

$$f(X, Y, Z) = (\phi(X)y_1, \phi(X)y_2, \dots, \phi(X)y_{m+1}, \psi(X)z_1, \psi(X)z_2, \dots, \psi(X)z_{n+1}),$$

onde $Y = (y_1, y_2, \dots, y_{m+1}) \in S^m$ e $Z = (z_1, z_2, \dots, z_{n+1}) \in S^n$. Um cálculo direto mostra que f é um mergulho isométrico de $M_{(m,n)}$ no \mathbb{R}^{2+m+n} . Logo, f é uma hiper-superfície compacta e de G -cohomogeneidade 1, G como no exemplo anterior.

Usando a fórmula de Künneth ([Gree]), obtemos que

$$H_i(M_{(m,n)}) = \mathbb{Z}, \text{ sempre que } i \in \{0, 1, m, n, 1+m, 1+n, m+n, 1+m+n\},$$

e que os demais grupos de homologia de $M_{(m,n)}$ são triviais, se escolhermos m e n de tal modo que $1 < m < n - 1$.

Ainda com respeito à família $M_{(m,n)}$, convém observar que manipulando os valores de m e n , obtemos grupos de homologia que não são triviais, em qualquer posição (entre 1 e $m+n$) preestabelecida. Portanto, no teorema 3.3.5, não é possível indicar com precisão qual o número de Betti não-nulo.

3.4.3

EXEMPLO

Seja $\lambda : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^4$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco e com imagem contida no plano x_1x_3 . Seja $G = SO(2) \times SO(2)$ identificado, de modo canônico, com o subgrupo de $SO(4)$ dado por

$$G = \left\{ g \in SO(4); g = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, A, B \in SO(2) \right\}.$$

A partir de G e λ construímos o espaço

$$M_\lambda = \{ Y \in \mathbb{R}^4; Y = g(\lambda(t)), g \in G \text{ e } t \in [a, b] \},$$

ou, alternativamente,

$$M_\lambda = \{ Y \in \mathbb{R}^4; Y = (\lambda_1(t)z_1, \lambda_3(t)z_2), t \in [a, b] \text{ e } z_1, z_2 \in S^1 \},$$

onde λ_1 e λ_3 são as primeira e terceira funções coordenadas de λ . Decorre desta definição que M_λ é um G -espaço. Além disto, se $\lambda([a, b])$ não é um intervalo em nenhum dos eixos do plano x_1x_3 , a ação de G sobre M_λ é de cohomogeneidade 1 e tem órbitas principais isométricas a toros planos.

A partir daqui, estudaremos M_λ para alguns casos particulares de λ .

(1) Seja λ definida por

$$\lambda(t) = (2 + \cos t, 0, 2 + \sin t, 0), t \in [0, 2\pi].$$

Neste caso, M_λ é difeomorfa ao produto $S^1 \times S^1 \times S^1$. Na realidade, M_λ é isométrica ao produto bi-torcido $S^1 \times_\phi S^1 \times_\psi S^1$, onde ϕ e ψ estão definidas no exemplo 3.4.1. A isometria é esta:

$$\begin{aligned} F : S^1 \times_\phi S^1 \times_\psi S^1 &\longrightarrow M_\lambda \\ (z_1, z_2, z_3) &\longmapsto F(z_1, z_2, z_3) = (\phi(z_1)z_2, \psi(z_1)z_3). \end{aligned}$$

(2) Tomemos a curva

$$\lambda(t) = (\cos t, 0, \sin t, 0), t \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Temos, para esta λ , que

$$M_\lambda = \{ Y \in \mathbb{R}^4; Y = ((\cos t)z_1, (\sin t)z_2), z_1, z_2 \in S^1 \}.$$

Logo, pondo $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$, obtemos que $M_\lambda = P^{-1}(0)$, onde P é o polinômio

$$P(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 - 1.$$

Isto é, $M_\lambda = S^3$. Temos, também, que as órbitas principais de G são toros e as duas não-principais são os círculos $G(\lambda(-\pi/2)) = G(\lambda(\pi/2))$ e $G(\lambda(0))$. Portanto, temos um caso bastante simples, onde ocorre o item (d) do teorema 3.3.4:

uma variedade tridimensional e de G -cohomogeneidade 1, G tendo suas órbitas principais isométricas a toros e suas duas órbitas singulares iguais a S^1 .

(3) Seja λ definida do seguinte modo:

$$\lambda(t) = (\cos t, 0, 2 + \sin t, 0), \quad t \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Aqui M_λ admite a seguinte descrição implícita: $M_\lambda = P^{-1}(0)$, onde

$$P(y_1, y_2, y_3, y_4) = (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 - 5)^2 + 16(y_1^2 + y_2^2 - 1).$$

Procedimentos usuais usando o grad P mostram que M_λ é uma variedade diferenciável. Mais ainda: a descrição (paramétrica) de M_λ

$$M_\lambda = \{Y \in \mathbb{R}^4; Y = ((\cos t)z_1, (2 + \sin t)z_2), \quad z_1, z_2 \in S^1\},$$

a qual pode ser reescrita como

$$M_\lambda = \{Y \in \mathbb{R}^4; Y = ((\cos t)z_{11}e_1 + (\cos t)z_{12}e_2 + (\sin t)v + 2v)\},$$

onde $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, $z_1 = (z_{11}, z_{12}) \in S^1$, $z_2 \in S^1$, $v = (0, 0, z_2)$, e e_1 e e_2 são os dois primeiros elementos da base canônica do \mathbb{R}^4 , indica que, para cada z_2 fixado, temos em M_λ a esfera bidimensional, de raio 1 e centro $2v$, do espaço gerado pela base ortonormal e_1 , e_2 e v . Esse modo de olhar M_λ sugere a seguinte aplicação entre as variedades $S^1 \times S^2$ e $M_\lambda = P^{-1}(0)$:

$$\begin{aligned} F : S^1 \times S^2 &\longrightarrow M_\lambda \\ X &\longmapsto F(X) = (x_3, x_4, x_1(2 + x_5), x_2(2 + x_5)), \end{aligned}$$

onde $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$. Não é difícil verificar que F é, de fato, um difeomorfismo. (Convém notar que M_λ não pode ser isométrica a $S^1 \times S^2$. De fato, se isto ocorresse, $S^1 \times S^2$ teria um ponto de curvatura positiva.) Assim, M_λ é difeomorfa a $S^1 \times S^2$ e sua inclusão no \mathbb{R}^4 define uma hipersuperfície compacta de $S^1 \times S^1$ -cohomogeneidade 1, onde a ação tem toros planos como órbitas principais, e círculos como órbitas singulares.

4

HIPERSUPERFÍCIES
DE COHOMOGENEIDADE UM
ÓRBITAS UMBÍLICAS
E HIPERSUPERFÍCIES
DE ROTAÇÃO

Este capítulo será dedicado ao estudo das hipersuperfícies $f : M^{n \geq 3} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ completas, e de G -cohomogeneidade 1, G tendo suas órbitas principais umbílicas na variedade M .

O estudo desses objetos, no caso compacto, foi introduzido por F. Podestà e A. Spiro, no artigo intitulado *Cohomogeneity one Manifolds and Hypersurfaces of Euclidean Space* ([PoSp]). Nesse artigo, eles conseguem descrever completamente a forma como a variedade M deve imergir no \mathbb{R}^{n+1} , para $n \geq 4$. Mais precisamente, eles provam o seguinte teorema, ao qual nos referiremos como teorema PO.SP.

PO.SP
TEOREMA *Seja $f : M^{n \geq 4} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta e de G -cohomogeneidade 1. Se as órbitas principais de G são subvariedades umbílicas de M , então f é de rotação.*

A expressão “ f é de rotação”, usada neste teorema, é estabelecida do seguinte modo.

Dada uma reta l do espaço euclidiano \mathbb{R}^{n+1} , usaremos o símbolo SO_l para designar o subgrupo (isomorfo a $SO(n)$) de $\text{Iso}(\mathbb{R}^{n+1})$ que deixa l fixa, isto é,

$$SO_l = \{T \in \text{Iso}(\mathbb{R}^{n+1}); T(x) = x, \forall x \in l\}.$$

É conveniente observar que as órbitas de SO_l atuando no \mathbb{R}^{n+1} são de dois tipos: ou são pontos, obtidos quando SO_l atua em l ; ou são esferas de dimensão $n - 1$ situadas em hiperplanos do \mathbb{R}^{n+1} .

Agora, podemos estabelecer o significado de “ f é de rotação”, usada no enunciado do teorema PO.SP.

DEFINIÇÃO Uma hipersuperfície de G -cohomogeneidade 1, $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, é dita de rotação se existe uma reta $l \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $f(M)$ é invariante sob SO_l e, além disto, as órbitas principais de G são transformadas por f nas esferas $(n - 1)$ -dimensionais geradas por SO_l atuando em \mathbb{R}^{n+1} .

Ainda nessa direção, recentemente, A. C. Asperti, F. Mercuri e M. H. Noronha estudaram as hipersuperfícies de G -cohomogeneidade 1, G tendo suas órbitas principais com curvatura seccional constante, também no caso compacto e de dimensão maior que três ([AMNo]). O principal resultado, obtido nesse trabalho, é o teorema AS.ME.NO, enunciado logo abaixo, o qual, via teorema PO.SP, implica que a hipersuperfície f é de rotação.

AS.ME.NO
TEOREMA *Seja $f : M^{n \geq 4} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta e de G -cohomogeneidade 1. Se as órbitas principais de G têm curvatura constante, então elas são subvariedades umbílicas de M .*

O objetivo principal deste capítulo é estender estes dois teoremas para o caso em que a hipersuperfície $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é completa, ao invés de compacta.

4.1

MATERIAL BÁSICO

Dentro do mesmo espírito do capítulo anterior, nesta seção serão apresentados alguns resultados que, além da importância em si mesmo de cada um deles, terão grande utilidade dentro das demonstrações dos teoremas obtidos nas seções seguintes.

Inicialmente, temos um lema, de Geometria Analítica, que constitui uma peça simples, porém importante, na construção das hipersuperfícies de rotação.

4.1.1 *Seja \tilde{G} um subgrupo compacto e conexo de $\text{Iso}(\mathbb{R}^{n+1})$. Seja \mathcal{H} um hiperplano contendo a esfera $n - 1$ dimensional $S^{n-1}(q, r)$ centrada em q e de raio r . Suponhamos que \tilde{G} atua, sem ponto fixo, sobre esta esfera. Então, valem os seguintes fatos:*

- (a) q é o único ponto fixo de \tilde{G} em \mathcal{H} ;
- (b) \mathcal{H} é invariante sob \tilde{G} ;
- (c) $\text{Fix } \tilde{G} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; T(x) = x, \forall T \in \tilde{G}\}$ coincide com a reta l que passa por q e é perpendicular a \mathcal{H} ;
- (d) $\tilde{G} \subset SO_l$.

DEMONSTRAÇÃO:

- (a) Seja $T \in \tilde{G}$. Logo, $T(x) = A(x) + k$, onde $A \in O(n+1)$ e k é um vetor constante. Como $S^{n-1}(q, r)$ é invariante sob \tilde{G} , temos que $T(S^{n-1}(q, r)) = S^{n-1}(q, r)$ e, portanto, $T(q) = q$. Assim, $q \in \text{Fix } \tilde{G}$.

Suponhamos que \mathcal{H} contenha outro ponto fixo de \tilde{G} , digamos y . Isto implicaria que a reta passando por q e y seria fixada por \tilde{G} . Em particular, o ponto onde essa reta tocava $S^{n-1}(q, r)$ seria, também, fixado por \tilde{G} , uma contradição à nossa hipótese sobre \tilde{G} . Logo, $\mathcal{H} \cap \text{Fix } \tilde{G} = \{q\}$.

- (b) Este item advém diretamente dos fatos que $S^{n-1}(q, r)$ é invariante sob a ação de \tilde{G} e que q é mantido fixo por este grupo.
- (c) Seja v um vetor unitário perpendicular a \mathcal{H} . Assim,

$$l = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; x = q + tv, t \in \mathbb{R}\}$$

é a reta perpendicular a \mathcal{H} e passando por q . Como \mathcal{H} é invariante sob \tilde{G} , vem que l também o é. Isto implica que A , a parte ortogonal de $T \in \tilde{G}$, é tal que $A(v) = \pm v$. Logo, $\langle A(v), v \rangle = \pm 1$, quando A percorre as partes ortogonais dos elementos de \tilde{G} . Como \tilde{G} é conexo e contém a identidade de $\text{Iso}(\mathbb{R}^{n+1})$, devemos ter $\langle A(v), v \rangle = 1$, o que implica $A(v) = v$, para toda $T \in \tilde{G}$. Donde, $l \subset \text{Fix } \tilde{G}$.

Se existisse $y \in \text{Fix } \tilde{G} - l$, então o ponto

$$z = y - \langle y - q, v \rangle v \in \mathcal{H}$$

seria fixado por \tilde{G} e $z \neq q$, fato que contrariaria o resultado obtido no item (a). Logo, deve ser $l = \text{Fix } \tilde{G}$.

(d) Decorre facilmente da definição de SO_l .

□

4.1.2 COROLÁRIO *Seja \tilde{G} um subgrupo compacto e conexo de $\text{Iso}(\mathbb{R}^{n+1})$. Sejam \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 dois hiperplanos do \mathbb{R}^{n+1} contendo as esferas $S^{n-1}(q_1, r_1)$ e $S^{n-1}(q_2, r_2)$, respectivamente. Se \tilde{G} age transitivamente sobre estas duas esferas, então \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 são paralelos, e $l = \text{Fix } \tilde{G}$ é uma reta que contém q_1 e q_2 e é perpendicular a estes hiperplanos.*

DEMONSTRAÇÃO: Temos que \tilde{G} age sem ponto fixo sobre as duas esferas $S^{n-1}(q_1, r_1)$ e $S^{n-1}(q_2, r_2)$. O lema anterior garante que $l = \text{Fix } \tilde{G}$ é uma reta perpendicular aos hiperplanos \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 , e os pontos q_1 e q_2 pertencem a l .

□

Diante deste corolário, e das idéias já utilizadas no capítulo anterior, obtemos uma proposição, a qual estabelece uma primeira relação entre as hipersuperfícies de G -cohomogeneidade 1 e aquelas de rotação.

4.1.3 PROPOSIÇÃO *Seja $f : M^{n \geq 3} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície rígida e de G -cohomogeneidade 1. Se as órbitas de G são todas principais e têm curvatura positiva, então f é de rotação.*

DEMONSTRAÇÃO: Seguindo os passos dados durante a demonstração do corolário 3.1.4, obtemos que a rigidez de f garante a construção de um subgrupo \tilde{G} , $\tilde{G} \subset \text{Iso}(\mathbb{R}^{n+1})$, que é compacto, conexo e tem a seguinte propriedade: $f \circ g = \tilde{g} \circ f$, $g \in G$ e $\tilde{g} = T(g) \in \tilde{G}$, onde $T : G \rightarrow \text{Iso}(\mathbb{R}^{n+1})$ é um homomorfismo de grupos. Portanto, se Σ é uma órbita de G , então $f(\Sigma)$ é uma órbita de \tilde{G} . Mais ainda, $f(\Sigma_p)$ é uma subvariedade isoparamétrica e de curvatura positiva de alguma esfera n -dimensional, o que decorre dos argumentos usados na prova do teorema 3.1.5. Agora, usando a equação de Cartan (para subvariedades isoparamétricas da esfera), exatamente como fizemos no teorema 3.2.1, concluímos que $f(\Sigma)$ é uma esfera de dimensão $n - 1$ em um hiperplano do \mathbb{R}^{n+1} . Visto que Σ foi tomada arbitrariamente, resulta que as órbitas de G imergem, por f , como esferas em hiperplanos do \mathbb{R}^{n+1} . Como \tilde{G} age transitivamente sobre essas esferas (elas são órbitas de \tilde{G}), o corolário 4.1.2 estabelece que f é de rotação.

□

OBSERVAÇÃO De posse da proposição 4.1.3, obtemos um modo alternativo para o cálculo do índice de h_{ξ_0} no ponto crítico p no teorema 3.2.1. Com efeito, o tubo $\Gamma \supset \Sigma_p$, lá construído, tem órbitas com curvatura positiva, fato que, via proposição 4.1.3, implica que Γ imerge como uma hipersuperfície de rotação do espaço \mathbb{R}^{n+1} . Mas, como é sabido, o operador de Weingarten de uma hipersuperfície desse tipo tem um autovalor de (pelo menos) multiplicidade $n - 1$. Logo, o índice de h_{ξ_0} em p deve ser 0, 1, $n - 1$ ou n . (Vale notar, entretanto, que esse argumento não se aplica ao mesmo cálculo no teorema 3.3.5.)

No estudo das variedades de G -cohomogeneidade 1, G tendo órbitas principais umbílicas, é bastante natural o aparecimento de produtos torcidos. O lema elaborado a seguir diz respeito ao número tipo de imersões isométricas desses produtos em espaços de curvatura constante. Ele generaliza um resultado obtido em [PoSp], para imersões de produtos torcidos do tipo $I \times_{\phi} F^{n-1}(c)$ no espaço \mathbb{R}^{n+1} , onde $I \subset \mathbb{R}$.

4.1.4 *Seja $M^n = B^l \times_{\phi} F^k(c)$ um produto torcido de uma variedade de dimensão l , **LEMA** B , por uma de dimensão k e curvatura constante c , $F(c)$. Suponhamos que $l < k$. Seja $f : M \rightarrow N^{n+1}(\tilde{c})$ uma imersão isométrica de M numa variedade de curvatura constante \tilde{c} . Então, dado $p = (a, b) \in M$, o número tipo de f em p , $\tau f(p)$, é tal que ou $\tau f(p) \leq l$ ou $\tau f(p) \geq k$.*

DEMONSTRAÇÃO: Sabemos que o espaço tangente a M em p , $T_p M$, se decompõe ortogonalmente como $T_p M = T_p B \oplus T_p F$, onde $T_p B$ é isomorfo a $T_a B$ e $T_p F$ é isomorfo a $T_b F$.

Denotemos por R o tensor curvatura de M . As seguintes propriedades de R correspondem aos itens (a), (b) e (c) do teorema 2.2.4, a primeira adaptada ao fato de F ter curvatura constante.

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad R_{UVW} = h(a)(U \wedge V)(W), \quad U, V, W \in T_p F; \\ (2) \quad R_{XUY} = - \left(\frac{\text{Hess}_p \phi(X, Y)}{\phi(a)} \right) U, \quad X, Y \in T_p B \text{ e } U \in T_p F; \\ (3) \quad R_{UVX} = R_{XYU} = 0, \quad X, Y \in T_p B \text{ e } U, V \in T_p F; \end{array} \right.$$

onde

$$h(a) = \frac{1}{\phi^2(a)}(c - \|\text{grad } \phi(a)\|^2),$$

$$(U \wedge V)(W) = \langle U, W \rangle V - \langle V, W \rangle U,$$

$\text{Hess}_p \phi$, o hessiano (métrico) de ϕ em p , é dado por

$$\text{Hess}_p \phi(X, Y) = XY\phi - d\phi_p(\nabla_X Y),$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a métrica de M e c é a curvatura da fibra F .

Seja A o operador de Weingarten da imersão f . A partir daqui, decompostemos esta demonstração em três etapas:

- (i) o caso em que $A(T_p B) = 0$;
- (ii) o caso em que $A(T_p B) \neq 0$ e $A(T_p B) \subset T_p B$;
- (iii) o caso em que $A(T_p B) \not\subset T_p B$.

ETAPA (i): Como $A(T_p B) = 0$ e A é auto-adjunta, vem que a aplicação $A : T_p F \rightarrow T_p F$ está bem definida e o posto de A coincide com o posto desta restrição.

Dados U, V e W vetores em $T_p F$, a equação de Gauss para a imersão f dá que

$$R_{UV}W = \tilde{c}(U \wedge V)(W) + (A(U) \wedge A(V))(W),$$

onde \tilde{c} é a curvatura de N . Esta equação, combinada com a propriedade (1) do tensor R , produz

$$(A(U) \wedge A(V))(W) = (h(a) - \tilde{c})(U \wedge V)(W).$$

Agora, se U_1, U_2, \dots, U_k são autovetores ortonormais de A com respectivos autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, a equação anterior, tomada com $U = W = U_i$ e $V = U_j$, $i \neq j$, implica que

$$\lambda_i \lambda_j U_j = (h(a) - \tilde{c})U_j.$$

Assim, se $h(a) = \tilde{c}$, pelo menos $k - 1$ dos λ_i , $1 \leq i \leq k$, são nulos e, portanto, posto $A = \tau f(p) \leq 1 \leq l$. Na outra situação, $h(a) \neq \tilde{c}$, devemos ter $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k \neq 0$, fato que significa posto $A = \tau f(p) = k$.

ETAPA (ii): Como no caso anterior, $A : T_p F \rightarrow T_p F$ está bem definida. Verificaremos, nesta situação, que esta restrição é um múltiplo da aplicação identidade de $T_p F$.

Seja $X \in T_p B$ um autovetor unitário de A com autovalor $\beta \neq 0$. Seja $U \in T_p F$. Então, da propriedade (2) e da equação de Gauss, vem que

$$\begin{aligned} R_{XU}X &= - \left(\frac{\text{Hess}_p \phi(X, X)}{\phi(a)} \right) U = \tilde{c}(X \wedge U)(X) + (A(X) \wedge A(U))(X) \\ &= \tilde{c}U + \beta A(U) + \langle A(U), X \rangle A(X) \\ &= \tilde{c}U + \beta A(U), \end{aligned}$$

visto que $\langle A(U), X \rangle = \langle U, A(X) \rangle = \beta \langle U, X \rangle = 0$. Logo,

$$A(U) = -\frac{1}{\beta} \left(\tilde{c} + \frac{\text{Hess}_p \phi(X, X)}{\phi(a)} \right) U,$$

como afirmamos. Portanto, o posto da restrição de A a $T_p F$ ou é nulo ou é k . Logo, se m é o posto de A quando restrita a $T_p B$, devemos ter ou $1 \leq \tau f(p) = m \leq l$ ou $\tau f(p) = m + k \geq k + 1$.

ETAPA (iii): Seja $\{X_1, X_2, \dots, X_l\}$ uma base ortonormal de $T_p B$. Temos que existe um inteiro m , $1 \leq m \leq l$, tal que se $1 \leq j \leq l$, então

$$A(X_j) = V_j + \sum_{i=1}^l a_{ij} X_i,$$

onde $V_j \neq 0$, $V_j \in T_p F$ e $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Sejam S_1 o subespaço gerado pelos vetores V_j , $1 \leq j \leq m$, e S_2 o complemento ortogonal de S_1 relativo a $T_p F$. Como estamos supondo $k > l$ e $\dim S_1 \leq m \leq l$, temos que $S_2 \neq 0$. Agora, dado $V \in S_2$ e combinando a equação de Gauss com a propriedade (3), obtemos que

$$\begin{aligned} 0 &= R_{V V_1} X_1 = \tilde{c}(V \wedge V_1)(X_1) + (A(V) \wedge A(V_1))(X_1) \\ &= (A(V) \wedge A(V_1))(X_1) \\ &= \langle V, A(X_1) \rangle A(V_1) - \langle V_1, A(X_1) \rangle A(V) \\ &= \langle V, V_1 + \sum_{i=1}^l a_{1i} X_i \rangle A(V_1) - \langle V_1, V_1 + \sum_{i=1}^l a_{1i} X_i \rangle A(V) \\ &= -\|V_1\|^2 A(V). \end{aligned}$$

Como $V_1 \neq 0$, segue-se que $A(V) = 0$, para todo $V \in S_2$. Em particular, $A(V_0) = 0$, onde V_0 é um vetor não-nulo de S_2 . Levando em consideração os pares de vetores V_0 e X_i , $1 \leq i \leq m$, temos, outra vez usando a propriedade (2) e a equação de Gauss,

$$R_{X_i V_0} X_i = - \left(\frac{\text{Hess}_p \phi(X_i, X_i)}{\phi(a)} \right) V_0 = \tilde{c} V_0.$$

Donde

$$\frac{\text{Hess}_p \phi(X_i, X_i)}{\phi(a)} = -\tilde{c}, \quad 1 \leq i \leq m,$$

o que implica

$$R_{X_i V_i} X_i = - \left(\frac{\text{Hess}_p \phi(X_i, X_i)}{\phi(a)} \right) V_i = \tilde{c} V_i, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} R_{X_i V_i} X_i &= \tilde{c}(X_i \wedge V_i)(X_i) + (A(X_i) \wedge A(V_i))(X_i) \\ &= \tilde{c} V_i + (A(X_i) \wedge A(V_i))(X_i). \end{aligned}$$

Logo, $(A(X_i) \wedge A(V_i))(X_i) = 0$ e, daí,

$$A(X_i) = \frac{a_{ii}}{\|V_i\|^2} A(V_i), \quad 1 \leq i \leq m.$$

Retomando o fato que a restrição de A ao subespaço S_2 é nula, notamos que o posto de A fica completamente determinado pelos vetores $A(X_j)$, $1 \leq j \leq l$, e $A(V_i)$, $1 \leq i \leq m$. Assim sendo, e tendo em conta a última equação acima, vem que

$$\begin{aligned} 1 \leq \tau f(p) &= \dim(\text{ger}\{A(X_j), A(V_i), 1 \leq j \leq l, 1 \leq i \leq m\}) \\ &= \dim(\text{ger}\{A(X_1), \dots, A(X_l), A(V_1), \dots, A(V_m)\}) \\ &= \dim(\text{ger}\{A(V_1), \dots, A(V_m), A(X_{m+1}), \dots, A(X_l)\}) \leq l. \end{aligned}$$

(Aqui $\text{ger } W$ denota o subespaço gerado pelo conjunto W .)

□

OBSERVAÇÃO É conveniente notar que apenas na etapa (i), da demonstração anterior, foi usada a hipótese da fibra F ter curvatura seccional constante. Diante desta observação, temos alguns corolários do lema 4.1.4 e de sua demonstração.

4.1.5 **COROLÁRIO** *Seja $M^n = B^l \times_\phi F^k$ com base B e a fibra F sendo uma variedade riemanniana qualquer. Seja $f : M \rightarrow N^{n+1}(\tilde{c})$ uma hipersuperfície com operador de Weingarten A . Dado $p = (a, b) \in M$, temos:*

- (a) se $\tau f(p) > l$, então $A(T_p B) \subset T_p B$;
- (b) se $\tau f(p) = l + 1$, então $A(T_p B) = 0$;
- (c) se $k > l + 1$ e F tem curvatura constante, então $\tau f(p) \neq l + 1$.

DEMONSTRAÇÃO:

- (a) Suponhamos que $A(T_p B) \not\subset T_p B$. Então, usando os argumentos aplicados na etapa (iii) da prova do lema 4.1.4, concluímos que $\tau f(p) \leq l$, o que contraria a hipótese $\tau f(p) > l$. Assim, devemos ter $A(T_p B) \subset T_p B$.
- (b) Se $A(T_p B) \neq 0$, então ou $A(T_p B) \subset T_p B$ ou $A(T_p B) \not\subset T_p B$. Se ocorre a inclusão $A(T_p B) \subset T_p B$, somos levados, via etapa (ii), à seguinte conclusão: ou $\tau f(p) \leq l$ ou $\tau f(p) \geq k + 1 > l + 1$. Já se ocorre $A(T_p B) \not\subset T_p B$, obtemos $\tau f(p) \leq l$. Logo, $A(T_p B) \neq 0$ implica $\tau f(p) \neq l + 1$. Portanto, $A(T_p B) = 0$, como queríamos.
- (c) Decorre diretamente do enunciado do lema 4.1.4.

□

Os corolários 4.1.6 e 4.1.7, postos adiante, são, respectivamente, simples adaptações do lema 4.1.4 e do corolário 4.1.5 ao caso em que $M = I \times_\phi F^{n-1}$, onde I é um intervalo de \mathbb{R} .

O corolário 4.1.7 merece destaque especial, notadamente no caso $N = \mathbb{R}^{n+1}$, em virtude do seu intenso uso dentro das seções 4.2 e 4.3.

4.1.6 COROLÁRIO *Seja $M^{n \geq 3} = I \times_{\phi} F^{n-1}(c)$ um produto torcido de um intervalo por uma variedade de dimensão $n-1$ e curvatura constante c , $F(c)$. Seja $f : M \rightarrow N^{n+1}(\tilde{c})$ uma imersão isométrica de M numa variedade de curvatura constante \tilde{c} . Então, dado $p = (t, b) \in M$, o número tipo de f em p , $\tau f(p)$, é tal que ou $\tau f(p) \leq 1$ ou $\tau f(p) \geq n-1$.*

4.1.7 COROLÁRIO *Seja $M^{n \geq 3} = I \times_{\phi} F^{n-1}$ com base $I \subset \mathbb{R}$ e a fibra F sendo uma variedade riemanniana qualquer. Seja $f : M \rightarrow N^{n+1}(\tilde{c})$ uma hipersuperfície com operador de Weingarten A . Seja $p = (t, b) \in M$ e $\eta \in \mathfrak{X}(M)$ o levantamento horizontal do referencial canônico de I , $\frac{\partial}{\partial t}$. Temos que:*

- (a) se $\tau f(p) \geq 2$, então $A(\eta) = \mu\eta$, $\mu \in \mathbb{R}$;
- (b) se $\tau f(p) = 2$, então $A(\eta) = 0$;
- (c) se $n \geq 4$ e F tem curvatura constante, então $\tau f(p) \neq 2$.

Existe uma relação muito estreita entre as variedade de G -cohomogeneidade 1, G com órbitas principais umbílicas, e a noção de produto torcido. A seguinte proposição estabelece essa relação descrevendo a parte regular de uma variedade com estas propriedades. Tal proposição aparece em [PoSp] e lá sua prova faz uso de um teorema devido a S. Hiepko que caracteriza produtos torcidos ([Hiep]). A demonstração que apresentaremos independe desse teorema.

4.1.8 PROPOSIÇÃO *Seja M^n uma variedade de G -cohomogeneidade 1. Suponhamos que as órbitas principais de G sejam subvariedades umbílicas de M . Seja Γ o tubo invariante sob G , contendo $\Sigma_p = G(p)$, construído na proposição 3.1.3, onde $p \in M_{\text{reg}}$. Então, o tubo Γ é isométrico ao produto torcido $(-\epsilon, \epsilon) \times_{\phi} \Sigma_p$, onde*

$$\phi(t) = e^{-\int_0^t k(u) du}, \quad -\epsilon < t < \epsilon,$$

$k(t)$ é o autovalor do operador de Weingarten da aplicação de inclusão da órbita principal $\Sigma_{\lambda(t)} = G(\lambda(t))$ em M , que é constante ao longo de $\Sigma_{\lambda(t)}$, e λ é uma geodésica normal com $\lambda(0) = p$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\eta \in \mathfrak{X}(\Gamma)$ o campo dado pelo teorema 2.3.16, isto é, dado $y = g(\lambda(t)) \in \Sigma_{\lambda(t)} \subset \Gamma$,

$$\eta(y) = dg_{\lambda(t)}(\lambda'(t)), \quad -\epsilon < t < \epsilon.$$

Temos que η é um campo tangente unitário globalmente (bem) definido em Γ . Além disto, como G age por isometrias, $\eta(y)$ é perpendicular a $\Sigma_{\lambda(t)}$ em y . Mais ainda, se $A_{\eta(y)} : T_y(\Sigma_{\lambda(t)}) \longrightarrow T_y(\Sigma_{\lambda(t)})$ é o operador de Weingarten da inclusão $\Sigma_{\lambda(t)} \subset M$, a umbilicidade das órbitas principais, como subvariedades de M , se traduz por:

$$A_{\eta(y)} = k(t)\text{Id},$$

onde Id é a identidade de $T_y(\Sigma_{\lambda(t)})$ e $k : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^∞ . Ainda do teorema 2.3.16, vem que a aplicação

$$\begin{aligned} \Phi : (-\epsilon, \epsilon) \times_\phi \Sigma_p &\longrightarrow \Gamma \\ (t, g(p)) &\longmapsto \Phi(t, g(p)) = g(\lambda(t)) \end{aligned}$$

é um difeomorfismo. Verificaremos, adiante, que Φ é, de fato, uma isometria.

Sejam $x = g(\lambda(0)) = g(p) \in \Sigma_p$ e $v \in T_x(\Sigma_p)$ um vetor tangente unitário. O levantamento vertical de v , $V = (0, v)$, ao ponto (t, x) , é tal que $\|V\|^2 = \phi^2(t)$.

Definamos $X \in \mathfrak{X}(M)$ por

$$X(q) = \left. \frac{d}{ds}(\exp(s\xi)(q)) \right|_{s=0}, \quad q \in M,$$

onde \exp é aplicação exponencial do grupo de Lie G e $\xi \in \mathfrak{g}$ (\mathfrak{g} a álgebra de Lie de G), um campo de Killing em Γ tal que $X(x) = v$. Como $\exp(s\xi) \in G$, vem que $X(q)$ é um vetor tangente à órbita que passa por q .

Temos que

$$d\Phi_{(t,x)}(V) = (\Phi \circ \beta)'(0),$$

onde $\beta(s) = (t, \exp(s\xi)(x))$, posto que $\beta(0) = (t, x)$ e $\beta'(0) = V$. Logo,

$$d\Phi_{(t,x)}(V) = \left. \frac{d}{ds}(\exp(s\xi)(g(\lambda(t)))) \right|_{s=0} = X(g(\lambda(t))).$$

Pondo $\psi(t) = \langle X(y), X(y) \rangle$, $y = g(\lambda(t))$, o cálculo anterior dá que

$$\psi(t) = \|d\Phi_{(t,x)}(V)\|^2$$

e, além disto,

$$\begin{aligned} k(t)\psi(t) &= \langle k(t)X(y), X(y) \rangle = \langle A_{\eta(y)}(X(y)), X(y) \rangle \\ &= -\langle \nabla_X \eta, X \rangle(y) = \langle \eta, \nabla_X X \rangle(y), \end{aligned}$$

onde, na última igualdade, foi usado o fato que $\langle \eta, X \rangle = 0$. Como X é um campo de Killing, vale $\nabla_X X = -\text{grad } h$, onde

$$h(x) = \frac{1}{2} \langle X, X \rangle(x), \quad x \in M.$$



Logo,

$$\begin{aligned} k(t)\psi(t) &= -\langle \eta, \text{grad } h \rangle = -dh_y(\eta(y)) \\ &= -(h(g(\lambda(t))))' = -\frac{1}{2}\langle X(g(\lambda(t))), X(g(\lambda(t))) \rangle' \\ &= -\frac{1}{2}\psi'(t). \end{aligned}$$

Portanto, ψ é a solução da equação diferencial

$$\psi'(t) + 2k(t)\psi(t) = 0,$$

com a condição inicial $\psi(0) = \|v\|^2 = 1$. Onde

$$\psi(t) = e^{-2\int_0^t k(u) du} = \phi^2(t).$$

Isto posto, temos que

$$\|d\Phi_{(t,x)}(V)\|^2 = \|X(g(\lambda(t)))\|^2 = \psi(t) = \phi^2(t) = \|V\|^2.$$

Por outro lado, se $\widetilde{\frac{\partial}{\partial t}} = (\frac{\partial}{\partial t}, 0)$ é o levantamento horizontal de $\frac{\partial}{\partial t}$, então

$$d\Phi_{(t,x)}(\widetilde{\frac{\partial}{\partial t}}) = dg_{\lambda(t)}(\lambda'(t)) = \eta(\Phi(t, x))$$

que é unitário e ortogonal a $d\Phi_{(t,x)}(V)$. Portanto,

$$\|d\Phi_{(t,x)}(\frac{\partial}{\partial t}, v)\|^2 = 1 + \phi^2(t) = \|(\frac{\partial}{\partial t}, v)\|^2,$$

o que prova a proposição. ◻

Uma consequência útil desta proposição é que é possível transferir a todas órbitas principais, do grupo G com órbitas principais umbílicas em uma variedade de G -cohomogeneidade 1, aquelas propriedades geométricas, invariantes por homotetias, que alguma delas possui (o sinal da curvatura, por exemplo). O próximo corolário torna precisa esta observação.

4.1.9
COROLÁRIO *Seja M uma variedade de G -cohomogeneidade 1. Se as órbitas principais de G são subvariedades umbílicas de M , então elas são homotéticas entre si.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\mathcal{A} \subset M_{\text{reg}}$ definido por

$$\mathcal{A} = \{x \in M_{\text{reg}}; \Sigma_x = G(x) \text{ é homotética a } \Sigma_p = G(p)\},$$

onde $p \in M_{\text{reg}}$ está fixado. Temos que $\mathcal{A} \neq \emptyset$, posto que $p \in \mathcal{A}$. Dado $x \in \mathcal{A}$, seja Γ_x o tubo invariante sob G contendo Σ_x , como na proposição anterior. Logo, $\Gamma_x = (-\epsilon, \epsilon) \times_{\phi} \Sigma_x$ e, portanto, as demais órbitas em Γ_x são homotéticas a Σ_x . Assim, $\Gamma_x \subset \mathcal{A}$, o que mostra que \mathcal{A} é aberto em M_{reg} . Também, se (q_n) é uma seqüência em \mathcal{A} tal que $q_n \longrightarrow q \in M_{\text{reg}}$, devemos ter $q \in \mathcal{A}$. De fato, como $q \in M_{\text{reg}}$, existe um tubo $\Gamma_q = (-\epsilon, \epsilon) \times_{\phi} G(q)$ em torno da órbita $G(q)$ e, como $q_n \longrightarrow q$, deve existir $n_0 \in \mathbb{N}$ de tal modo que $q_{n_0} \in \Gamma_q$. Mas $q_{n_0} \in \mathcal{A}$, isto é, $G(q_{n_0})$ é homotética a Σ_p . Logo, por ser homotética a $G(q_{n_0})$, $G(q)$ é homotética a Σ_p . Assim, \mathcal{A} é também fechado em M_{reg} . Como este último é um espaço conexo (pois M e Σ_p são conexos), vem que $\mathcal{A} = M_{\text{reg}}$.

□

Ainda com a atenção voltada para os produtos torcidos, encerraremos esta seção com um lema que diz respeito à planaridade conforme de alguns desses objetos.

Convém lembrar que uma variedade riemanniana M^n é dita *conformemente plana* se, para cada $p \in M$, existem uma vizinhança de p e um difeomorfismo conforme entre essa vizinhança e algum aberto do espaço euclidiano \mathbb{R}^n . Como referências para este conceito, citamos [Dajc] e [Merc].

4.1.10 *Seja $M^{n \geq 3} = I \times_{\phi} F^{n-1}(c)$ um produto torcido com base $I \subset \mathbb{R}$ e fibra F*
LEMA *com curvatura constante c . Então, M é conformemente plana.*

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos, inicialmente, que $n \geq 4$. Nosso objetivo é usar a equação de Kulkarni que caracteriza as variedades conformemente planas com dimensão superior a 3 (veja [Kulk]). Mais precisamente, $M^{n \geq 4}$ é *conformemente plana* se, e somente se, dado $p \in M$, vale a equação de Kulkarni:

$$K(V_1, V_2) + K(V_3, V_4) = K(V_1, V_4) + K(V_2, V_3),$$

para toda quádrupla de vetores ortonormais V_1, V_2, V_3 , e V_4 em $T_p M$, onde $K(V_i, V_j)$ é a curvatura seccional de M em p , segundo o plano gerado por V_i e V_j .

Seja $p = (t, x) \in M$. Seja $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ uma base ortonormal de $T_p M$ tal que $E_1 = (\frac{\partial}{\partial t}, 0)$ e os demais vetores desta base são tangentes à fibra $\{t\} \times F$.

Denotemos por R o tensor curvatura de M . A seguir listamos algumas propriedades básicas de R que, na realidade, são aplicações dos quatro primeiros itens do teorema 2.2.4 a um produto torcido com base $B = I \subset \mathbb{R}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad R_{UV}W = h_1(t)(U \wedge V)(W), \quad U, V, W \in T_p F; \\ (2) \quad R_{E_1 U}E_1 = -h_2(t)U, \quad U \in T_p F; \\ (3) \quad R_{UV}X = R_{XY}U = 0, \quad X, Y \in T_p I \text{ e } U, V \in T_p F; \\ (4) \quad R_{E_1 U}V = h_2(t)\langle U, V \rangle E_1, \quad U, V \in T_p F; \end{array} \right.$$

onde

$$h_1(t) = \frac{1}{\phi^2(t)}(c - \phi'^2(t)),$$

$$h_2(t) = \frac{\phi''(t)}{\phi(t)}$$

e c é a curvatura de F .

Sejam V_1, V_2, V_3 e V_4 vetores ortonormais de T_pM . Então, existem escalares v_{ij} , $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq 4$, tais que

$$V_j = \sum_{i=1}^n v_{ij} E_i.$$

Se $K_{ij} = \langle R_{V_i V_j} V_i, V_j \rangle$ a curvatura seccional de M segundo o plano gerado pelo par V_i e V_j , então

$$\begin{aligned} K_{12} &= \sum_{i,j,k,l \geq 1}^n v_{i1} v_{j2} v_{k1} v_{l2} \langle R_{E_i E_j} E_k, E_l \rangle \\ &= \sum_{j \geq 2; k, l \geq 1}^n v_{11} v_{j2} v_{k1} v_{l2} \langle R_{E_1 E_j} E_k, E_l \rangle + \sum_{i \geq 2; j, k, l \geq 1}^n v_{i1} v_{j2} v_{k1} v_{l2} \langle R_{E_i E_j} E_k, E_l \rangle \\ &= \sum_{i \geq 2; k, l \geq 1}^n (v_{11} v_{i2} - v_{i1} v_{12}) v_{k1} v_{l2} \langle R_{E_1 E_i} E_k, E_l \rangle + \sum_{i, j \geq 2; k, l \geq 1}^n v_{i1} v_{j2} v_{k1} v_{l2} \langle R_{E_i E_j} E_k, E_l \rangle \\ &= P_1 + P_2, \end{aligned}$$

onde P_1 e P_2 são os primeiro e segundo somatórios presentes na penúltima igualdade acima, respectivamente. Levando em conta as propriedades (2) e (4) de R , acima expostas, obtemos que

$$\begin{aligned} P_1 &= \sum_{i \geq 2; l \geq 1}^n (v_{11} v_{i2} - v_{i1} v_{12}) v_{11} v_{l2} \langle R_{E_1 E_i} E_1, E_l \rangle + \\ &\quad \sum_{i, k \geq 2; l \geq 1}^n (v_{11} v_{i2} - v_{i1} v_{12}) v_{k1} v_{l2} \langle R_{E_1 E_i} E_k, E_l \rangle \\ &= - \sum_{i \geq 2}^n (v_{11} v_{i2} - v_{i1} v_{12}) v_{11} v_{i2} h_2(t) + \sum_{i \geq 2}^n (v_{11} v_{i2} - v_{i1} v_{12}) v_{i1} v_{12} h_2(t) \\ &= -h_2(t) v_{11}^2 (1 - v_{12}^2) - h_2(t) v_{11}^2 v_{12}^2 - h_2(t) v_{11}^2 v_{12}^2 - h_2(t) v_{12}^2 (1 - v_{11}^2) \\ &= -h_2(t) (v_{11}^2 + v_{12}^2). \end{aligned}$$

Com respeito à parcela P_2 , temos, agora usando (1) e (3), que:

$$\begin{aligned}
P_2 &= \sum_{i,j,k,l \geq 2}^n v_{i1} v_{j2} v_{k1} v_{l2} \langle R_{E_i E_j} E_k, E_l \rangle \\
&= h_1(t) \left(\sum_{i,j,k,l \geq 2}^n v_{i1} v_{j2} v_{k1} v_{l2} \langle E_i, E_k \rangle \langle E_j, E_l \rangle - \sum_{i,j,k,l \geq 2}^n v_{i1} v_{j2} v_{k1} v_{l2} \langle E_j, E_k \rangle \langle E_i, E_l \rangle \right) \\
&= h_1(t) \left(\sum_{i \geq 2}^n v_{i1}^2 \sum_{j \geq 2}^n v_{j2}^2 - \left(\sum_{i \geq 2}^n v_{i1} v_{i2} \right)^2 \right) = h_1(t) \left((1 - v_{11}^2)(1 - v_{12}^2) - v_{11}^2 v_{12}^2 \right) \\
&= h_1(t) \left(1 - (v_{11}^2 + v_{12}^2) \right).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
K_{12} &= h_1(t) - (h_1(t) + h_2(t))(v_{11}^2 + v_{12}^2) \\
K_{34} &= h_1(t) - (h_1(t) + h_2(t))(v_{13}^2 + v_{14}^2) \\
K_{14} &= h_1(t) - (h_1(t) + h_2(t))(v_{11}^2 + v_{14}^2) \\
K_{23} &= h_1(t) - (h_1(t) + h_2(t))(v_{12}^2 + v_{13}^2)
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$K_{12} + K_{34} = K_{14} + K_{23},$$

que é a equação de Kulkarni que buscávamos. Assim, M é conformemente plana, nos casos $n \geq 4$.

Para caso tridimensional, faremos uma breve apresentação de um critério bastante útil de planaridade conforme. (os detalhes podem ser encontrados em [Dajc] ou em [Merc]).

Seja Ric o tensor de Ricci de M . Então, dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\text{Ric}(X, Y) = \sum_{i=1}^n \langle R_{X E_i} Y, E_i \rangle,$$

onde $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ é um referencial ortonormal de M . Seja, agora, Q o tensor auto-adjunto associado a Ric, isto é,

$$Q(X) = \sum_{i=1}^n R_{E_i X} E_i, \quad X \in \mathfrak{X}(M).$$

A partir de Q e da curvatura escalar S de M ($S(p) = 2 \sum_{i < j}^n K_{ij}(p)$, onde $K_{ij}(p)$ são as curvaturas seccionais segundo o par $E_i(p)$ e $E_j(p)$), construímos o tensor γ que se expressa por

$$\gamma(X) = \frac{1}{n-2} \left(Q(X) - \frac{S}{2(n-1)} X \right), \quad X \in \mathfrak{X}(M).$$

O critério ao qual fizemos referência é posto assim: M é conformemente plana se, e somente se,

$$\nabla_X \gamma(Y) - \gamma(\nabla_X Y) = \nabla_Y \gamma(X) - \gamma(\nabla_Y X), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Nosso objetivo, agora, é aplicar este critério ao produto torcido M^3 . Para isto, sejam $\{e_2, e_3\}$ um referencial ortonormal de F e $\frac{\partial}{\partial t}$ o referencial canônico do intervalo I . Assim, $\{E_1, E_2, E_3\}$, onde $E_1 = (\frac{\partial}{\partial t}, 0)$ e $E_2 = (0, e_2)$ e $E_3 = (0, e_3)$, define um referencial ortogonal para M . Um cálculo direto, usando o referencial ortonormal $\{E_1, E_2/\phi, E_3/\phi\}$, mostra que a curvatura escalar S de M é tal que

$$-\frac{S}{4} = \frac{\phi''}{\phi} - \frac{c - \phi'^2}{2\phi^2},$$

onde c é a curvatura de F . Também valem:

$$\begin{aligned} Q(E_1) &= -2\frac{\phi''}{\phi}E_1; \\ Q(E_i) &= \left(-\frac{\phi''}{\phi} + \frac{c - \phi'^2}{2\phi^2}\right)E_i, \quad i = 2, 3. \end{aligned}$$

Estes resultados implicam que

$$\begin{aligned} \gamma(E_1) &= -\left(\frac{\phi''}{\phi} + \frac{c - \phi'^2}{2\phi^2}\right)E_1; \\ \gamma(E_i) &= -\frac{c - \phi'^2}{2\phi^2}E_i, \quad i = 2, 3. \end{aligned}$$

O critério que citamos acima, quando aplicado ao par $X = E_1$ e $Y = E_i$, $i = 2, 3$, é equivalente à condição

$$\nabla_{E_1} \gamma(E_i) = \nabla_{E_i} \gamma(E_1),$$

visto que $\nabla_{E_1} E_i = \nabla_{E_i} E_1 = (\phi'/\phi)E_i$, se $i = 2, 3$, fato que pode ser colhido do item (b) da proposição 2.2.2. Mas

$$\begin{aligned} \nabla_{E_1} \gamma(E_i) &= \frac{1}{2} \nabla_{E_1} \frac{c - \phi'^2}{\phi^2} E_i \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{c - \phi'^2}{\phi^2}\right)' E_i + \frac{1}{2} \frac{\phi'(c - \phi'^2)}{\phi^3} E_i \\ &= -\frac{\phi'}{\phi} \left(\frac{\phi''}{\phi} + \frac{c - \phi'^2}{2\phi^2}\right) E_i \\ &= \nabla_{E_i} \gamma(E_1), \end{aligned}$$

para $i = 2, 3$.

Falta verificar que o par E_2 e E_3 também satisfaz o critério que ora usamos, isto é,

$$\nabla_{E_2}\gamma(E_3) - \gamma(\nabla_{E_2}E_3) = \nabla_{E_3}\gamma(E_2) - \gamma(\nabla_{E_3}E_2). \quad (1)$$

Como as subvariedades $\{t\} \times F$, $t \in I$, são umbílicas em M e E_2 e E_3 são ortogonais, vem que $\nabla_{E_2}E_3$ é, em cada ponto $(t, x) \in M$, tangente à subvariedade $\{t\} \times F$. Logo, $\nabla_{E_2}E_3$ é combinação linear de E_2 e E_3 . Donde,

$$\gamma(\nabla_{E_2}E_3) = \nabla_{E_2}\gamma(E_3)$$

e, portanto, o lado esquerdo da equação (1) é nulo. Analogamente, o mesmo ocorre com o seu lado direito, e M é conformemente plana, também no caso $n = 3$.

□

4.2

CLASSIFICAÇÃO DOS CASOS DE DIMENSÃO $n \geq 4$

Dentro do nosso objetivo de estudar as hipersuperfícies $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ completas, de G -cohomogeneidade 1 e com a propriedade de que as órbitas principais de G são umbílicas em M , retomemos o teorema PO.SP, enunciado na introdução deste capítulo, o qual descreve a forma como M pode ser posta, isometricamente, dentro do espaço \mathbb{R}^{n+1} , quando M é compacta e $n \geq 4$.

A motivação para o teorema PO.SP surge quando já temos em mãos uma hipersuperfície $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ de G -cohomogeneidade 1 que é de rotação. Para fixar idéias, vamos supor que essa rotação está sendo feita em torno do eixo x_{n+1} do \mathbb{R}^{n+1} , isto é, em torno da reta $l = \{(0, 0, \dots, t); t \in \mathbb{R}\}$. Logo, $SO_l = SO(n)$ com as identificações usuais:

$$SO_l = \{B \in SO(n+1); B = \left(\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 \dots 0 & 1 \end{array} \right), A \in SO(n)\}.$$

Assim, $f(M)$ pode ser descrita, localmente, como o produto torcido $(-\epsilon, \epsilon) \times_{\lambda_1} S^{n-1}$, onde

$$\begin{aligned} \lambda : (-\epsilon, \epsilon) &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ t &\longmapsto \lambda(t) = (\lambda_1(t), 0, \dots, 0, \lambda_{n+1}(t)) \end{aligned}$$

é uma parametrização pelo comprimento de arco da curva perfil de $f(M)$, contida no

plano x_1x_{n+1} . Esta porção de $f(M)$ pode ser parametrizada por

$$\begin{aligned} \Psi : (-\epsilon, \epsilon) \times_{\lambda_1} S^{n-1} &\longrightarrow f(M) \\ (t, X) &\longmapsto \Psi(t, X) = (\lambda_1(t)X, \lambda_{n+1}(t)). \end{aligned}$$

Diante disto, segue-se que as cópias de S^{n-1} em $(-\epsilon, \epsilon) \times_{\lambda_1} S^{n-1}$ são enviadas por Ψ nos paralelos de $f(M)$, os quais, por sua vez, provêm (por definição), via f , das órbitas principais. Como as cópias de S^{n-1} em $(-\epsilon, \epsilon) \times_{\lambda_1} S^{n-1}$ são subvariedades umbílicas deste produto –isto ocorre com toda fibra de um produto torcido (corolário 2.2.3, item (b))– e são homotéticas à esfera S^{n-1} , vem que essas órbitas são subvariedades umbílicas de M e são isométricas a esferas. Portanto, uma condição necessária para que uma hipersuperfície de G -cohomogeneidade 1 seja de rotação é que as órbitas principais de G sejam subvariedades umbílicas de M e, além disto, que sejam isométricas a esferas euclidianas.

Neste ponto, surge uma questão bastante natural: Uma hipersuperfície de G -cohomogeneidade 1, $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, G com suas órbitas principais umbílicas em M e isométricas a esferas, é de rotação?

No caso em que M^n é compacta e $n \geq 4$, a resposta é afirmativa e é dada pelo teorema PO.SP, o qual não supõe que as órbitas principais sejam isométricas a esferas. Na realidade, tal condição é consequência da compacidade de M junto com a umbilicidade das órbitas principais.

Elucidado o caso compacto, passaremos a estudar a questão proposta, no caso em que M é completa e não-compacta.

Começamos observando que nesta circunstância nem sempre f é de rotação (mesmo supondo que as órbitas principais são esféricas). De fato, vejamos um primeiro exemplo.

4.2.1 EXEMPLO Seja $M^{n \geq 3} = \mathbb{R}^n$ olhado como uma variedade de G -cohomogeneidade 1 segundo o subgrupo $G = SO(n)$. Neste exemplo, as órbitas principais são esferas (concêntricas) de dimensão $n - 1$. Logo, subvariedades umbílicas de M . A órbita não-principal é a origem do \mathbb{R}^n .

Seja

$$\begin{aligned} f : M &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ X &\longmapsto f(X) = (\cos t, \sin t, x_2, \dots, x_n), \end{aligned}$$

onde $X = (t, x_2, \dots, x_n)$. Temos que f é uma hipersuperfície que mapeia M em um cilindro sobre S^1 . (Convém observar que f é localmente substancial: a restrição de f a qualquer aberto de M é substancial.) Esta imersão não pode ser de rotação. Com efeito, suponhamos que f seja de rotação. Segue-se, então, que $f(M)$ contém um aberto isométrico a $(-\epsilon, \epsilon) \times_{\lambda_1} S^{n-1}$, onde λ_1 é a primeira função coordenada de alguma curva plana, λ , parametrizada pelo comprimento de arco. A substancialidade local de f garante que $(\lambda'_1(t_0))^2 < 1$, para algum $t_0 \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Fixemos atenção no ponto $(t_0, x) \in (-\epsilon, \epsilon) \times_{\lambda_1} S^{n-1}$ e tomemos $u, v \in T_x S^{n-1}$ dois vetores ortogonais. Da propriedade (1) do operador de curvatura de um produto torcido, exibida na demonstração do lema 4.1.4, obtemos que a curvatura seccional, $K(U, V)$, de $(-\epsilon, \epsilon) \times_{\lambda_1} S^{n-1}$ no plano gerado pelos levantamentos verticais $U = (0, u)$ e $V = (0, v)$ é dada por

$$K(U, V) = \frac{1}{\lambda_1^2(t_0)}(1 - (\lambda_1'(t_0))^2) > 0,$$

fato absurdo, diante da planaridade de $M = \mathbb{R}^n$. Logo, f não pode ser de rotação, em torno de nenhum eixo, como dissemos.

Diante do exemplo anterior, poderia se esperar a seguinte classificação para os objetos que ora estudamos: ou f é de rotação ou $f(M)$ coincide com um cilindro sobre uma curva plana. Entretanto, em geral, esta afirmação ainda não é verdadeira, como mostra o próximo exemplo.

4.2.2 Seja $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real par e de classe C^∞ tal que
EXEMPLO

$$\begin{cases} h(x) = 0, & x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ h(x) > 0, & x \in (-1, 1). \end{cases}$$

Seja $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ o subconjunto gerado pela rotação da curva regular

$$C = \{X \in \mathbb{R}^{n+1}; X = (t, 0, \dots, h(t)), t \in \mathbb{R}\}$$

em torno do eixo x_{n+1} . Temos que M é uma variedade riemanniana e, além disto, a ação de $G = SO(n)$ sobre M induz em M uma estrutura de G -cohomogeneidade 1 com órbitas principais umbílicas em M e, claro, isométricas a esferas. A seguir, exibiremos um mergulho isométrico de M no \mathbb{R}^{n+1} .

Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ definida por

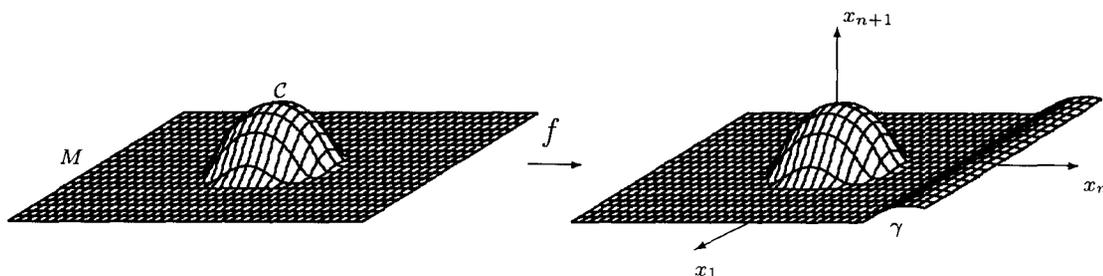
$$f(X) = \begin{cases} X, & \text{se } x_n \leq 2 \\ \gamma(x_n) + \sum_{i=1}^{n-1} x_i e_i, & \text{se } x_n > 2, \end{cases}$$

onde $X = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$, e_i é o i -ésimo elemento da base canônica do \mathbb{R}^{n+1} e

$$\begin{array}{ccc} \gamma : [2, +\infty) & \longrightarrow & \text{ger}\{e_n, e_{n+1}\} \\ t & \longmapsto & \gamma(t) = (0, 0, \dots, \gamma_n(t), \gamma_{n+1}(t)) \end{array}$$

é uma parametrização pelo comprimento de arco, de alguma curva simples com imagem contida no plano $x_n x_{n+1}$, com as seguintes propriedades: $\gamma(2) = (0, \dots, 2, 0)$,

$\gamma_{n+1} > 0$ em $(2, +\infty)$ e $\gamma_{n+1}^{(p)}(2) = 0$, $p \in \mathbb{N}$. Temos que f é uma hipersuperfície de $SO(n)$ -cohomogeneidade 1, as órbitas principais são umbílicas em M e isométricas a esferas. Entretanto, f não é de rotação, tampouco $f(M)$ coincide com um cilindro sobre uma curva plana, conforme ilustra a figura que segue.



UMA HIPERSUPERFÍCIE DE $SO(n)$ -COHOMOGENEIDADE 1.

Cabe aqui um breve comentário com relação a este exemplo: a imersão isométrica $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ só é possível porque a parte plana de M é conexa e ilimitada. É exatamente esta porção de M que admite uma deformação (isométrica) em um pedaço de cilindro sobre a curva plana γ . Esta situação motivou a seguinte definição e permitiu a obtenção do que consideramos ser o principal teorema deste capítulo.

DEFINIÇÃO Seja M uma variedade riemanniana com tensor de curvatura R . Seja \mathcal{P} a parte plana de M , isto é,

$$\mathcal{P} = \{p \in M; R_{XY}Z = 0, X, Y, Z \in T_pM\}.$$

A variedade M é dita *rígida no infinito* se $M \neq \mathcal{P}$ e as componentes conexas do interior de \mathcal{P} são relativamente compactas.

OBSERVAÇÃO Conforme adotamos no capítulo 2 –relativamente a conceitos como compacidade, completude, G -cohomogeneidade, etc.–, o conceito *rígida no infinito* será usado também para as hipersuperfícies do espaço euclidiano: uma hipersuperfície $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é dita *rígida no infinito* se M o for.

4.2.3 EXEMPLO Toda hipersuperfície $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ compacta é rígida no infinito, pois deve existir em M um ponto de curvatura positiva. Não são rígidadas no infinito as variedades M dos exemplos 4.2.1 e 4.2.2.

Agora podemos enunciar o teorema principal deste capítulo, cuja demonstração, nesta seção, tratará apenas dos casos $n \geq 4$. Para $n = 3$, reservamos a seção 4.3.

4.2.4 TEOREMA Seja $f : M^{n \geq 3} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície completa, rígida no infinito e de G -cohomogeneidade 1. Suponhamos que as órbitas principais de G sejam subvariedades umbílicas de M . Então, f é de rotação. Além disto, se M é compacta, então M é homeomorfa ou a S^n ou a $S^1 \times S^{n-1}$.

Com o fito de simplificar a composição deste teorema, apresentaremos antes alguns resultados que culminarão em sua demonstração.

4.2.5 LEMA Seja $f : M^{n \geq 3} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície de G -cohomogeneidade 1. Seja (q_n) uma seqüência em M_{reg} convergindo para $q \in M_{\text{reg}}$. Se as órbitas principais $\Sigma_{q_n} = G(q_n)$ imergem, via f , como esferas de dimensão $n-1$ em hiperplanos do \mathbb{R}^{n+1} , então o mesmo ocorre com $\Sigma_q = G(q)$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja \mathcal{H}_n o hiperplano que contém a esfera $f(\Sigma_{q_n})$, isto é,

$$\mathcal{H}_n = \{X \in \mathbb{R}^{n+1}; \langle X - f(q_n), v_n \rangle = 0\},$$

para algum $v_n \in S^n$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que a seqüência v_n é convergente, digamos $v_n \longrightarrow v_0 \in S^n$.

Fixemos $p \in \Sigma_q$. Logo, $p = g(q)$, $g \in G$. Temos que $f(g(q_n)) \longrightarrow f(p)$ e, também, $f(g(q_n)) \in \mathcal{H}_n$. Logo, $\langle f(g(q_n)) - f(q_n), v_n \rangle = 0$, fato que, passado ao limite, produz $\langle f(p) - f(q), v_0 \rangle = 0$. Isto implica que $f(\Sigma_q)$ está contida no hiperplano \mathcal{H}_0 que contém $f(q)$ e é perpendicular a v_0 . Como Σ_q é compacta e homogênea, resulta do teorema de Kobayashi que $f(\Sigma_q)$ é uma esfera em \mathcal{H}_0 . ◻

4.2.6 LEMA Seja $f : M^{n \geq 4} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície rígida no infinito e de G -cohomogeneidade 1. Se as órbitas principais de G são umbílicas em M e alguma delas (e portanto todas, devido ao corolário 4.1.9) é isométrica a uma esfera, então o subconjunto

$$\mathcal{R} = \{x \in M_{\text{reg}}; \exists \Gamma_x, \Sigma_x = G(x) \subset \Gamma_x \text{ e } f : \Gamma_x \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \text{ é de rotação}\},$$

é aberto e denso em M_{reg} . (Γ_x denota um tubo invariante sob G .) Além disto, as órbitas principais de G imergem, por f , como esferas em hiperplanos.

DEMONSTRAÇÃO: Notamos, de início, que f não pode ter número tipo 2. Com efeito, toda órbita principal $\Sigma_p = G(p)$ admite um tubo invariante sob G do tipo $\Gamma = (-\epsilon, \epsilon) \times_{\phi} \Sigma_p$, de acordo com a proposição 4.1.8. Como Σ_p tem curvatura constante, obtemos, via corolário 4.1.7, que $\tau f(q) \neq 2$, para todo $q \in \Gamma$. Logo, $\tau f(x) \neq 2$, para todo $x \in M_{\text{reg}}$. Isto implica que $M_{\text{reg}} = \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$, onde

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \{p \in M_{\text{reg}}; \tau f(p) \leq 1\} \\ \mathcal{Q} &= \{q \in M_{\text{reg}}; \tau f(q) \geq 3\}. \end{aligned}$$

Uma aplicação direta da proposição 4.1.3 dá que a restrição de f ao tubo Γ_q (suficientemente pequeno) em torno da órbita Σ_q , $q \in \mathcal{Q}$, é de rotação. Logo, $\mathcal{Q} \subset \mathcal{R}$. Em particular, toda vizinhança de pontos de \mathcal{Q} contém pontos de \mathcal{R} .

Analisaremos, agora, as vizinhanças de pontos de \mathcal{P} . Para isto, seja $p \in \mathcal{P}$. Há duas alternativas possíveis: (i) todo tubo em torno da órbita Σ_p contém pontos de \mathcal{Q} ; (ii) existe um tubo Γ_p em torno de Σ_p tal que $\Gamma_p \subset \mathcal{P}$.

Na primeira alternativa, temos exatamente o que buscamos: toda vizinhança de p contém pontos de \mathcal{R} .

Vejam a segunda alternativa. É exatamente neste ponto que usamos a rigidez no infinito de f (de M). Seja Γ_p um tubo G -invariante contendo Σ_p e contido em \mathcal{P} . Como M é rígida no infinito, o tubo G -invariante, conexo e maximal, Γ_p^{\max} , tal que $\Sigma_p \subset \Gamma_p \subset \Gamma_p^{\max} \subset \mathcal{P}$ tem fecho compacto. Decorre dos lemas 3.11, 3.12, 3.13 e do corolário 3.14 de [PoSp] –que funcionam também no caso tridimensional– que Γ_p^{\max} imerge, através de f , como uma região anular em algum hiperplano do \mathbb{R}^{n+1} , com as órbitas principais de G , nele contidas, sendo enviadas em esferas concêntricas. Em particular, a restrição de f a Γ_p é de rotação. Logo, também na alternativa (ii), toda vizinhança de p contém pontos de \mathcal{R} .

Falta verificar a última afirmação do lema: as órbitas principais imergem, por f , como esferas em hiperplanos. Já temos que isso ocorre com aquelas órbitas principais Σ_x com $x \in \mathcal{Q}$, ou $x \in \mathcal{P}$ com a condição adicional de que exista um tubo Γ_x tal que $\mathcal{P} \supset \Gamma_x \supset \Sigma_x$. Os demais casos são aqueles onde as órbitas principais Σ_p têm a seguinte propriedade: $p \in \mathcal{P}$ e existe uma seqüência (q_n) em \mathcal{Q} tal que $q_n \longrightarrow p$. O lema anterior dá conta destes casos.

□

A conclusão obtida no lema anterior, de que as órbitas principais de G imergem como esferas em hiperplanos, permite-nos olhar os vetores normais a esses hiperplanos e os centros dessas esferas como aplicações (bem) definidas em M_{reg} . O objetivo do lema 4.2.7 é formalizar essas aplicações.

4.2.7 *Seja $f : M^{n \geq 4} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície rígida no infinito e de G -cohomogeneidade 1. Se as órbitas principais de G são subvariedades umbílicas de M e são isométricas a esferas, então as funções $\text{nor} : M_{\text{reg}} \longrightarrow \mathbb{R}P^n$ e $\text{cen} : M_{\text{reg}} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, definidas por*

$$\text{nor}(x) = [\text{vetor normal unitário do hiperplano que contém } f(\Sigma_x)]$$

$$\text{cen}(x) = \text{centro da esfera } f(\Sigma_x),$$

são de classe C^∞ .

DEMONSTRAÇÃO: Como diferenciabilidade é uma noção local, podemos supor que $M_{\text{reg}} = (-\epsilon, \epsilon) \times_\phi \Sigma$, onde Σ é uma órbita principal fixada.

Sejam $p = (t_0, x_0) \in M_{\text{reg}}$ e $\{E_1, \dots, E_{n-1}, \frac{\partial}{\partial t}\}$ ($\frac{\partial}{\partial t}$ é o levantamento horizontal de $\frac{\partial}{\partial t}$) um referencial ortonormal definido em uma vizinhança V de p e adaptado às fibras $\Sigma_t = \{t\} \times \Sigma$, isto é, dado $(t, x) \in V$, os vetores $E_1(t, x), E_2(t, x), \dots, E_{n-1}(t, x)$ são tangentes à fibra Σ_t . Para cada $(t, x) \in V$, os vetores $\tilde{E}_i(t, x) = df_{(t,x)}(E_i)$, $1 \leq i \leq n-1$, são tangentes à esfera $f(\Sigma_t)$ contida no hiperplano \mathcal{H}_t . Desta forma, o produto vetorial (calculado em $T(\mathcal{H}_t)$)

$$\tilde{E}_n = \tilde{E}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{E}_{n-1}$$

é normal à esfera $f(\Sigma_t)$ e tangente ao hiperplano \mathcal{H}_t . Agora, tomando o produto vetorial (em \mathbb{R}^{n+1}) dos vetores $\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \dots, \tilde{E}_n$, obtemos o vetor unitário, que só depende de t ,

$$N(t) = \tilde{E}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{E}_n,$$

o qual é perpendicular ao hiperplano \mathcal{H}_t . Temos que $N : M_{\text{reg}} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é de classe C^∞ . Portanto, N é de classe C^∞ , visto que ela coincide com $\pi \circ N$ em V , onde $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ é a projeção canônica.

Quanto à aplicação cen , fixemos dois pontos em M_{reg} , digamos $p_1 = (0, x_0)$ e $p_2 = (0, y_0)$, de tal modo que $f(p_1)$ e $f(p_2)$ sejam pontos antípodos da esfera $f(\Sigma_0)$, $\Sigma_0 = \{0\} \times \Sigma$. Logo, $f(t, x_0)$ e $f(t, y_0)$ são pontos antípodos da esfera $f(\Sigma_t)$ e

$$\text{cen}(t, x) = \frac{1}{2}(f(t, x_0) + f(t, y_0))$$

que, claramente, é C^∞ .

□

4.2.8 *As funções nor e cen recém-construídas gozam das seguintes propriedades:*

- COROLÁRIO**
- (a) nor é constante;
 - (b) a imagem de cen é um segmento de reta.

DEMONSTRAÇÃO: Seja \mathcal{R} como no lema 4.2.6. Do modo como foi definido \mathcal{R} , vem que a função nor é localmente constante aí. Isto, junto aos fatos que nor é de classe C^∞ , \mathcal{R} é denso em M_{reg} e M_{reg} é um espaço conexo, implica que nor é constante.

Seja $n_0 \in S^n$ tal que $\text{nor}(p) = [n_0]$, para todo $p \in M_{\text{reg}}$. Assim, os hiperplanos que contêm as esferas, imagens das órbitas principais, são paralelos entre si e perpendiculares a n_0 . Isto significa que a restrição de cen a \mathcal{R} tem imagem constituída de segmentos de reta todos eles paralelos ao vetor n_0 . Outra vez usando a densidade de \mathcal{R} em M_{reg} , a conexidade deste último e a suavidade de cen , concluímos que $\text{cen}(M_{\text{reg}})$ é um segmento de reta paralelo a n_0 .

□

A partir destes resultados, colhemos um teorema, sobre o qual está firmemente apoiado o nosso teorema principal (4.2.4).

4.2.9 TEOREMA *Seja $f : M^{n \geq 4} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície rígida no infinito e de G -cohomogeneidade 1. Se as órbitas principais de G são umbílicas em M e alguma delas é isométrica a uma esfera, então f é de rotação.*

DEMONSTRAÇÃO: O lema 4.2.6 garante que as órbitas principais imergem como esferas $(n - 1)$ -dimensionais em hiperplanos do \mathbb{R}^{n+1} . O corolário 4.2.8 diz que esses hiperplanos são paralelos e que os centros das esferas são colineares. Logo, a restrição de f a M_{reg} é de rotação.

Seja l o eixo de rotação de $f(M_{\text{reg}})$ e SO_l o subgrupo de $\text{Iso}(\mathbb{R}^{n+1})$ que deixa l fixada. Verificaremos, logo a seguir, que $f(M)$ é invariante sob SO_l . (Convém notar que isto já ocorre com $f(M_{\text{reg}})$.)

Seja q um ponto não-regular de M , isto é, a órbita $\Sigma_q = G(q)$ não é principal. Seja K uma vizinhança tubular compacta e invariante sob G de Σ_q . Como M_{reg} é denso em M , temos que existe uma seqüência (q_n) em $M_{\text{reg}} \cap K$ tal que $q_n \rightarrow q$. Assim, para cada n , $f(G(q_n))$ é uma esfera, invariante sob SO_l , contida no compacto $f(K)$. Logo, se $T \in SO_l$,

$$T(f(G(q_n))) \subset f(G(q_n)) \subset f(K) \subset f(M).$$

Em particular, $T(f(q_n)) \in f(K)$. Passando ao limite, $T(f(p)) \in f(K) \subset f(M)$ e, como T foi escolhida arbitrariamente, concluimos que $f(M)$ é invariante sob SO_l , o que completa a prova. □

Estabeleceremos a seguir, algumas notações que serão usadas durante todo o restante deste capítulo.

Dado $p \in M_{\text{reg}}$, Σ_p denotará a órbita principal $G(p)$ e Γ representará o tubo invariante sob G (isométrico a $(-\epsilon, \epsilon) \times_{\phi} \Sigma_p$) contendo Σ_p , conforme a proposição 4.1.8. O campo $\eta \in \mathfrak{X}(\Gamma)$ é o campo unitário, perpendicular a cada órbita principal de G , $\Sigma_{\lambda(t)} = G(\lambda(t))$, $-\epsilon < t < \epsilon$, contida no tubo Γ , exatamente como definimos na demonstração da proposição 4.1.8.

Usaremos, também como na proposição 4.1.8, $k(t)$ para designar o autovalor do campo de operadores de Weingarten, A_{η} , da inclusão $\Sigma_{\lambda(t)} \subset M$. Em particular, $k(0)$ representará o autovalor dos campos A_{η} ao longo de Σ_p .

Sejam ξ um campo normal unitário, definido numa vizinhança de p , ao longo de $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ e A_{ξ} o campo de operadores de Weingarten associado a ξ .

Agora, temos dois campos unitários e ortonormais definidos ao longo da imersão isométrica $f : \Sigma_p \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, a saber: $\tilde{\eta} = df(\eta)$ e $\tilde{\xi}$ a restrição de ξ à órbita Σ_p , o

primeiro definido globalmente. Associados a estes campos temos, respectivamente, os campos de operadores de Weingarten $A_{\tilde{\eta}}$ e $A_{\tilde{\xi}}$.

Encerramos, esta pequena seção de notações, denotando por ∇ e $\tilde{\nabla}$ as conexões riemannianas de M e \mathbb{R}^{n+1} , respectivamente.

Nos casos onde o número tipo da imersão f em p é maior que 1, há uma relação muito simples entre os operadores A_{η} e $A_{\tilde{\eta}}$, e entre os operadores A_{ξ} e $A_{\tilde{\xi}}$, como mostra o seguinte lema.

4.2.10 *Seja $f : M^{n \geq 3} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hypersuperfície de G -cohomogeneidade 1, G LEMA com suas órbitas principais sendo umbílicas em M . Seja $p \in M_{\text{reg}}$ tal que $\tau f(p) \geq 2$. Temos que valem as seguintes propriedades:*

- (a) $A_{\tilde{\eta}} = A_{\eta}$ ao longo de Σ_p ;
- (b) $\tilde{\eta}$ é paralelo na conexão normal de $f : \Sigma_p \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$: $\nabla_X^\perp \tilde{\eta} = 0$, $X \in \mathfrak{X}(\Sigma_p)$;
- (c) $A_{\tilde{\xi}}$ coincide com a restrição de A_{ξ} a $T(\Sigma_p)$;
- (d) se $k(0) = 0$, então $f(\Sigma_p)$ coincide com uma esfera em algum hiperplano do \mathbb{R}^{n+1} ;
- (e) se $k(0) \neq 0$, então existe uma esfera $S^n(p_0, r)$, de centro p_0 e raio $r = 1/|k(0)|$, tal que a restrição $f : \Sigma_p \rightarrow S^n(p_0, r)$ está bem definida e tem $A_{\tilde{\xi}}$ por operador de Weingarten.

DEMONSTRAÇÃO: Dado $X \in \mathfrak{X}(\Sigma_p)$, a fórmula de Weingarten para a imersão $f : \Sigma_p \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, aplicada aos campos X e $\tilde{\eta}$, se escreve como

$$\tilde{\nabla}_X \tilde{\eta} = \nabla_X^\perp \tilde{\eta} - A_{\tilde{\eta}}(X).$$

Por outro lado, a fórmula de Gauss, relativa à imersão $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, dá que

$$\tilde{\nabla}_X \tilde{\eta} = \nabla_X \eta + \langle A_{\xi}(\eta), X \rangle \xi.$$

Como o número tipo de f é maior ou igual a 2 ao longo de toda Σ_p , obtemos com o auxílio do corolário 4.1.7, item (a), que η é autovetor de A_{ξ} . Assim, da equação anterior, vem que $\tilde{\nabla}_X \tilde{\eta} = \nabla_X \eta$. Mas $\nabla_X \eta = -A_{\eta}(X)$, pela equação de Weingarten da inclusão $\Sigma_p \subset M$. Logo,

$$\nabla_X^\perp \tilde{\eta} - A_{\tilde{\eta}}(X) = -A_{\eta}(X) = -k(0)X$$

e, portanto, $\nabla_X^\perp \tilde{\eta} = 0$ e $A_{\tilde{\eta}} = A_{\eta} = k(0)\text{Id}$, onde Id é a aplicação identidade de $T(\Sigma_p)$, o que prova (a) e (b).

De $\langle A_{\tilde{\xi}}(X), Y \rangle = \langle A_{\xi}(X), Y \rangle$, $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma_p)$, obtemos que $A_{\tilde{\xi}}$ coincide com a parte tangente a Σ_p de A_{ξ} . Outra vez usando o corolário 4.1.7, obtemos que $T(\Sigma_p)$ é invariante sob A_{ξ} . Logo, devemos ter que

$$A_{\tilde{\xi}}(X) = A_{\xi}(X), \quad X \in \mathfrak{X}(\Sigma_p),$$

e segue-se (c).

Suponhamos, agora, que $k(0) = 0$. Usando o item (a), obtemos que $A_{\tilde{\eta}} = 0$, o que, junto ao paralelismo de $\tilde{\eta}$, implica que $\tilde{\eta}$ é um vetor constante no \mathbb{R}^{n+1} . Logo, $f(\Sigma_p)$ está contido em um hiperplano \mathcal{H} perpendicular a esse vetor. Agora, usando o teorema de Kobayashi, vem que $f(\Sigma_p)$ é uma esfera contida em \mathcal{H} .

Para o item (e), definamos $h : \Sigma_p \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ por

$$h(x) = f(x) + \frac{1}{k(0)} \tilde{\eta}(x).$$

Se X é um campo de vetores em Σ_p , então

$$\begin{aligned} dh(X) &= df(X) + \frac{1}{k(0)} \tilde{\nabla}_X \tilde{\eta} = df(X) - \frac{1}{k(0)} df(A_{\tilde{\eta}}(X)) \\ &= df(X) - \frac{1}{k(0)} df(k(0)X) = 0. \end{aligned}$$

Logo, h é constante. Pondo $h(x) = p_0$, $x \in \Sigma_p$, obtemos que

$$f(x) - p_0 = -\frac{1}{k(0)} \tilde{\eta}(x), \quad x \in \Sigma_p,$$

fato que dá duas informações:

- (i) $f(\Sigma_p) \subset S^n(p_0, r)$, $r = 1/|k(0)|$;
- (ii) o vetor $\tilde{\eta}(x)$ é perpendicular a $S^n(p_0, r)$ em $f(x)$, $x \in \Sigma_p$.

Lembrando que $\tilde{\eta}$ e $\tilde{\xi}$ são ortonormais, e levando em consideração a segunda informação obtida acima, concluímos que $\tilde{\xi}$ é tangente a $S^n(p_0, r)$ e, portanto, $\tilde{\xi}$ é um campo normal ao longo da imersão $f : \Sigma_p \longrightarrow S^n(p_0, r)$. Da umbilicidade de $S^n(p_0, r)$ no \mathbb{R}^{n+1} , segue-se que $A_{\tilde{\xi}}$ é o operador de Weingarten de $f : \Sigma_p \longrightarrow S^n(p_0, r)$.

□

4.2.11 *Seja $f : M^{n \geq 4} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície de G -cohomogeneidade 1. Se*
LEMA *as órbitas principais de G são umbílicas em M e existe $p \in M_{\text{reg}}$ tal que $\tau f(p) = 2$, então:*

- (a) o autovalor $k(0) \neq 0$;
- (b) existe uma esfera $S^n(p_0, r)$, de centro p_0 e raio $r = 1/|k(0)|$, tal que a restrição $f : \Sigma_p \longrightarrow S^n(p_0, r)$ está bem definida, tem $A_{\tilde{\xi}}$ por operador de Weingarten e tem número tipo constante e igual a 2.

DEMONSTRAÇÃO: Se $k(0) = 0$, então o item (d) do lema 4.2.10 implica que as órbitas principais de G são isométricas a esferas euclidianas. Mas isto é impossível,

diante do que diz o item (c) do corolário 4.1.7, posto que $\tau f(p) = 2$ e $n \geq 4$. Assim sendo, devemos ter $k(0) \neq 0$, resultando o item (a).

Seja $S^n(p_0, r)$ como no item (e) do lema anterior. Como $\tau f(p) = 2$, concluímos, via corolário 4.1.7, que $A_\xi(\eta) = 0$. Logo, o posto de A_ξ é atingido no espaço tangente da órbita Σ_p . Como já sabemos que A_ξ coincide com a restrição de A_ξ a esse espaço, segue-se que o número tipo de $f : \Sigma_p \rightarrow S^n(p_0, r)$ é constante e igual a 2. □

O lema 4.2.11 contém uma drástica obstrução à dimensão de uma hipersuperfície $f : M^{n \geq 4} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ de G -cohomogeneidade 1 com as órbitas principais de G umbílicas em M , diante da existência de um número tipo 2 assumido em M_{reg} . Mais precisamente, temos o seguinte corolário.

4.2.12
COROLÁRIO *Seja $f : M^{n \geq 4} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície de G -cohomogeneidade 1. Se as órbitas principais de G são umbílicas em M e existe $p \in M_{\text{reg}}$ tal que $\tau f(p) = 2$, então $n = 4$.*

DEMONSTRAÇÃO: Iniciaremos esta demonstração enunciando um fato, o qual pode ser encontrado, juntamente com sua prova, como o lema 6.16, em [Dajc].

FATO *Seja $f : \Sigma^{m \geq 4} \rightarrow S_c^{m+1}$ uma imersão isométrica, onde S_c^{m+1} é a esfera de dimensão $m + 1$ e curvatura seccional c . Seja $U \subset \Sigma$ um aberto onde o índice de nulidade relativa ν é igual a $m - 1$ (ou $m - 2$). Então, nenhuma folha da correspondente distribuição de nulidade relativa pode ser completa.*

Voltemos à nossa demonstração.

Temos, usando o lema 4.2.11, item (b), que Σ_p imerge, via f , com número tipo 2 em alguma esfera de dimensão n , digamos S^n . Portanto, a distribuição de nulidade relativa mínima de $f : \Sigma_p^m \rightarrow S^{m+1}$, $m = n - 1$, está globalmente definida e tem índice de nulidade relativa mínima $\nu_{\min} = m - 2$. Mas as folhas de uma distribuição de nulidade relativa mínima são sempre completas. Isto é uma contradição ao fato exposto acima, se $m = n - 1 \geq 4$, ou seja, $n \geq 5$. Logo, devemos ter $n = 4$. □

Já com a atenção voltada para a demonstração do teorema (principal) 4.2.4, obtemos, como primeira aplicação do teorema 4.2.9, o corolário abaixo.

4.2.13
COROLÁRIO *Seja $f : M^{n \geq 4} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície rígida no infinito e de G -cohomogeneidade 1. Se as órbitas principais de G são umbílicas em M e existe $p \in M_{\text{reg}}$ tal que $\tau f(p) \leq 1$, então f é de rotação.*

DEMONSTRAÇÃO: A idéia central é encontrar uma órbita principal isométrica a uma esfera e fazer uso do teorema 4.2.9.

Temos que $\tau f \leq 1$ ao longo de toda Σ_p . Assim, o tensor curvatura de M é trivial quando restrito a pontos de Σ_p . Em particular, as curvaturas seccionais de M , calculadas ao longo desta órbita, são nulas. Este fato, combinado com a umbilicidade de Σ_p em M , implica, via equação de Gauss para a inclusão $\Sigma_p \subset M$, que Σ_p tem curvatura seccional constante $k^2(0) \geq 0$. O teorema de Tompkins, ou o de Chern-Kuiper (veja [Dajc], [DoCa] ou [Rodr]), aplicado à imersão $f : \Sigma_p^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, indica que $k^2(0)$ não pode ser nulo, visto que $n \geq 4$. Logo, $k^2(0) > 0$ e Σ_p tem curvatura constante positiva, propriedade que se transfere às demais órbitas principais, através do corolário 4.1.9. Segue-se, agora do corolário 4.1.7, item (c), que a imersão f não pode ter número tipo 2.

Como M é rígida no infinito, temos, em particular, que ela não é plana. Logo, deve existir $q \in M_{\text{reg}}$ tal que $\tau f(q) \geq 3$. Portanto, a restrição de f a um pequeno tubo (onde $\tau f \geq 3$) em torno de Σ_q é de rotação, segundo a proposição 4.1.3. Resulta daí que Σ_p é isométrica a uma esfera, como queríamos. ◻

O nosso objetivo, a partir daqui, é a demonstração do teorema 4.2.4, o qual, por razões didáticas, re-enunciaremos, agora adaptado à restrição $n \geq 4$.

4.2.14 TEOREMA *Seja $f : M^{n \geq 4} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície completa, rígida no infinito e de G -cohomogeneidade 1. Suponhamos que as órbitas principais de G sejam subvariedades umbílicas de M . Então, f é de rotação. Além disto, se M é compacta, então M é homeomorfa ou a S^n ou a $S^1 \times S^{n-1}$.*

DEMONSTRAÇÃO: O resultado obtido no corolário 4.2.12 compõe uma diferença significativa entre o estudo dos casos com dimensão $n \geq 5$ e aqueles com dimensão $n = 4$. Devido a isso, decomporomos esta demonstração em dois casos: (i) $n \geq 5$; (ii) $n = 4$. Em qualquer caso, no que tange à conclusão de que f é de rotação, podemos sempre supor que $\tau f \geq 2$ em toda M_{reg} , de acordo com o corolário 4.2.13.

CASO (i): De $n \geq 5$, obtemos que $\tau f(x) \geq 3$, para todo $x \in M_{\text{reg}}$, visto que não pode haver número tipo 2 para f em M_{reg} , conforme estabelece o corolário 4.2.12. Logo, $f : M_{\text{reg}} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é rígida. Esta rigidez, diante dos argumentos usados na demonstração do teorema 3.1.5, garante a existência de um ponto $p_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ com a seguinte propriedade: Dado $p \in M_{\text{reg}}$,

$$f(\Sigma_p) \subset S^n(p_0, r(p)), \quad r(p) = \|f(p) - p_0\|,$$

e $f(\Sigma_p)$ é uma subvariedade (isoparamétrica) desta esfera. Por simplicidade, mas sem perda de generalidade, podemos supor que p_0 coincide com a origem do \mathbb{R}^{n+1} . Assim, $f(\Sigma_p) \subset S^n(\|f(p)\|)$.

Seja N o campo radial unitário definido em $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$: $N(X) = X/\|X\|$. Temos que a restrição de N a cada esfera $S^n(\|f(p)\|)$, $p \in M_{\text{reg}}$, define o campo normal unitário apontando para fora desta esfera. Portanto, sua restrição a $f(\Sigma_p)$

dá um campo normal unitário ao longo de $f : \Sigma_p \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Mais ainda: N é uma direção umbílica e paralela na conexão normal desta imersão. Posto isto, e lembrando que $\tilde{\eta}$ também é paralelo segundo ∇^\perp , não fica difícil verificar que a função real θ , definida por

$$\theta(x) = \langle \tilde{\eta}, N \rangle(x), \quad x \in \Gamma,$$

é constante em Σ_p . Com relação a esta função, temos que uma das seguintes alternativas deve ocorrer:

(i.1) existe $p \in M_{\text{reg}}$ tal que $\theta^2 \neq 1$ em Σ_p ;

(i.2) $\theta^2 = 1$ em toda M_{reg} .

A alternativa (i.1) significa que as direções umbílicas $\tilde{\eta}$ (veja o lema 4.2.10, item (a)) e N são linearmente independentes ao longo de Σ_p . Como a codimensão da imersão $f : \Sigma_p \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é 2, obtemos que esta imersão é umbílica e, portanto, $f(\Sigma_p)$ deve coincidir com uma esfera em algum hiperplano do \mathbb{R}^{n+1} . Em particular, Σ_p é isométrica a uma esfera. (Um modo alternativo de se obter este mesmo resultado, com as informações obtidas aqui, é notar que $\theta^2 \neq 1$ e $k(0) \neq 0$ significa que $f(\Sigma_p)$ está contida em duas esferas distintas. Logo, se $\theta^2 \neq 1$ e $k(0) \neq 0$, $f(\Sigma_p)$ é uma esfera. Se $k(0) = 0$, o resultado vem diretamente do item (d), lema 4.2.10.) Aplicando o teorema 4.2.9, obtemos que f é de rotação.

Vejamos a que nos leva a alternativa (i.2). Para isto, seja $\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow M$ uma geodésica normal de M (M é completa). Seja $J \ni 0$ um intervalo de \mathbb{R} ao longo do qual λ atravessa toda M_{reg} . A alternativa (i.2), quando olhada nos pontos $p = \lambda(t)$, $t \in J$, se traduz como:

$$\langle \beta'(t), \frac{\beta(t)}{\|\beta(t)\|} \rangle^2 = 1, \quad t \in J,$$

onde $\beta(t) = f(\lambda(t))$. Donde

$$\beta'(t) = \pm \frac{\beta(t)}{\|\beta(t)\|}, \quad t \in J.$$

Logo, $\beta(t) = h(t)V$, onde V é um vetor constante em \mathbb{R}^{n+1} e

$$h(t) = e^{\pm \int_0^t \frac{1}{\|\beta(u)\|} du}.$$

Como $\beta'(t)$ é um vetor unitário, temos que $h(t) = a_0 t + b_0$, para alguns $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\beta(t) = (a_0 t + b_0)V, \quad t \in J,$$

cujo traço é um segmento da reta l passando pela origem e paralela a V . Como f e λ são aplicações de classe C^∞ e regulares e M_{reg} é denso em M , temos que $\beta(\mathbb{R}) = f(\lambda(\mathbb{R}))$ coincide com l . Estendendo estes argumentos às cópias de λ , $g \circ \lambda$,

$g \in G$, chegamos à conclusão de que M imerge, segundo f , como um cone (sobre uma subvariedade de uma esfera) com vértice $(0, 0, \dots, 0)$. Isto é uma contradição à regularidade de f , a menos que esse cone se degenere em um hiperplano, o que também não pode ocorrer, pois M é rígida no infinito. Portanto, a alternativa (i.2) não pode ocorrer, e só resta à hipersuperfície f ser de rotação.

CASO (ii): Como já notamos no início desta demonstração, podemos supor que $\tau f \geq 2$ em toda parte regular de M^4 . Mais ainda, também podemos supor que a imersão $f : M^4 \rightarrow \mathbb{R}^5$ goza da seguinte propriedade:

(ii.1) se $p \in M_{\text{reg}}$ é tal que $\tau f(p) \geq 3$, então $\theta^2 = 1$.

De fato, a simples presença de um ponto $p \in M_{\text{reg}}$ com $\tau f(p) \geq 3$ e $\theta^2 \neq 1$ garante que Σ_p é isométrica a uma esfera e f é de rotação, como mostram os argumentos usados no caso (i). Resta-nos, portanto, estudar as hipersuperfícies $f : M^4 \rightarrow \mathbb{R}^5$ que cumprem a condição (ii.1) e $\tau f \geq 2$ em M_{reg} .

Exatamente como no caso (i), a propriedade (ii.1) nos leva a concluir que se Γ é um tubo em torno de Σ_p , onde $\tau f \geq 3$, então Γ é transformado por f no tronco de cone dado por

$$\mathcal{T} = \{X \in \mathbb{R}^5; X = \beta(t), t \in (-\epsilon, \epsilon), g \in G\},$$

onde $\beta(t) = f(g(\lambda(t)))$ é um segmento de reta. Assim, os segmentos de geodésicas normais que cruzam Γ são transformados em segmentos de reta cujas retas suportes são concorrentes no vértice do cone que contém \mathcal{T} . Veremos adiante que este fato se repete, também, para tubos onde τf é constante e igual a 2.

Seja $p \in M_{\text{reg}}$ tal que $\tau f(q) = 2, \forall q \in \Gamma$, onde Γ é o tubo isométrico a $(-\epsilon, \epsilon) \times_{\phi} \Sigma_p$, contendo Σ_p . Como já vimos utilizando, $A_{\xi}(\eta) = 0$ em todo o tubo Γ (corolário 4.1.7, item (b)). Esta informação e a equação de Gauss da imersão $f : M \rightarrow \mathbb{R}^5$ implicam que

$$R_{\eta X} \eta = (A_{\xi}(\eta) \wedge A_{\xi}(X))(\eta) = 0, \forall X \in \mathfrak{X}(\Gamma).$$

Em particular, $R_{\eta X} \eta = 0, X \in \mathfrak{X}(\Sigma_{\lambda(t)})$. De posse deste resultado, levando em consideração a expressão de Γ como produto torcido e usando a propriedade (2) do tensor de curvatura de um produto torcido, dada na prova do lema 4.1.4, obtemos que

$$\phi''(t) = 0, -\epsilon < t < \epsilon,$$

implicando que existem $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\phi(t) = a_1 t + b_1, -\epsilon < t < \epsilon.$$

Retornando, por um momento, à proposição 4.1.8, vemos que

$$\phi(t) = a_1 t + b_1 = e^{-\int_0^t k(u) du}, -\epsilon < t < \epsilon.$$

Donde $a_1 = -(a_1 t + b_1)k(t)$. Como $\tau f = 2$ ao longo de Γ , obtemos, via lema 4.2.11, item (a), que $k(t) \neq 0$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Logo, $a_1 \neq 0$ e

$$\left(\frac{1}{k}\right)'(t) = -1, \quad -\epsilon < t < \epsilon,$$

fato que usaremos oportunamente.

A função vetorial

$$h(x) = f(x) + \frac{1}{k(t)} \tilde{\eta}(x), \quad x \in \Gamma,$$

é constante ao longo de cada órbita $\Sigma_{\lambda(t)}$, conforme vimos no caso (i). Isto é, fixado $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, $h(\lambda(t)) = h(g(\lambda(t)))$, $\forall g \in G$. Logo, dado $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, $f(\Sigma_{\lambda(t)})$ está contido na esfera de centro $C(t)$ dado por

$$C(t) = h(\lambda(t)) = f(x) + \frac{1}{k(t)} \tilde{\eta}(x), \quad x \in \Sigma_{\lambda(t)}.$$

Fazendo $x = \lambda(t)$, vem que

$$C(t) = \beta(t) + \frac{1}{k(t)} \beta'(t), \quad -\epsilon < t < \epsilon,$$

onde $\beta(t) = f(\lambda(t))$. Mas

$$\beta''(t) = \tilde{\nabla}_{\beta'} \beta' = \nabla_{\lambda'} \lambda' + \langle A_{\xi}(\lambda'), \lambda' \rangle \xi = 0,$$

já que λ é uma geodésica e $A_{\xi}(\lambda') = 0$ (corolário 4.1.7, item (b)). Logo, β' é um vetor constante, digamos V_{λ} , e

$$C'(t) = \beta'(t) + \left(\frac{1}{k}\right)'(t) \beta'(t) = \beta'(t) - \beta'(t) = 0,$$

visto que $(1/k)'(t) = -1$, do que vimos há pouco. Portanto, $C(t) = C$ é constante e

$$\beta(t) = C - \left(t + \frac{b_1}{a_1}\right) V_{\lambda}, \quad -\epsilon < t < \epsilon.$$

Isto implica que os segmentos de geodésicas normais, que compõem Γ , são levados em segmentos de reta cujas retas suportes concorrem em C . Sendo assim, o subconjunto de M , definido por

$$\mathcal{TC} = \{x \in M_{\text{reg}}; \Sigma_x \subset \Gamma_x \text{ e } \Gamma_x \text{ imerge como um tronco de cone}\},$$

é aberto e denso em M_{reg} . Além disto, os segmentos de geodésicas normais que o atravessam são levados por f em segmentos de reta com retas suportes concorrentes.

Portanto, a geodésica normal $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow M$, restrita ao subconjunto aberto e denso de \mathbb{R} , $\lambda^{-1}(\mathcal{TC})$, tem sua imagem composta de pequenos segmentos de reta. Como λ é de classe C^∞ e regular, devemos ter que $f \circ \lambda$ é uma reta, o que se verifica, também, com as curvas $f \circ g \circ \lambda$, $g \in G$. Como essas retas coincidem, em pequenos intervalos, com retas concorrentes, elas devem ser concorrentes. Neste momento, tudo se passa como no final do caso (i), e obtemos uma contradição: uma variedade completa e rígida no infinito imergindo como um cone do \mathbb{R}^5 . Esta contradição implica que a condição (ii.1) não pode ocorrer e, portanto, f deve ser de rotação, também em (ii).

Provado que f de rotação, obtemos, em particular, que as órbitas principais são isométricas a esferas. Logo, se M é compacta, a informação de que M deve ser homeomorfa ou a S^n ou ao produto $S^1 \times S^{n-1}$ é obtida dos teoremas 3.2.3 e 3.2.5.

□

Portanto, fica respondida afirmativamente a questão que propusemos no início desta seção, desde que adicionemos à hipersuperfície f a condição de ser rígida no infinito.

Ainda dentro desse contexto, é possível obter algumas informações sobre a variedade M , mesmo sem a hipótese de rigidez no infinito. O seguinte teorema, que decorre de uma atenta observação do que fizemos durante a demonstração do teorema 4.2.14, faz isso.

4.2.15 TEOREMA *Seja $f : M^{n \geq 4} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície completa e de G -cohomogeneidade 1. Se as órbitas principais de G são subvariedades umbílicas de M , então M é conformemente plana.*

DEMONSTRAÇÃO: A idéia é mostrar que as órbitas principais têm curvatura constante (e positiva), fato que implicará a planaridade conforme de M .

Primeiro, se existe $p \in M_{\text{reg}}$ tal que $\tau f(p) \leq 1$, então Σ_p tem curvatura constante e positiva (veja demonstração do corolário 4.2.13).

Nos casos restantes, temos que $\tau f \geq 2$ em M_{reg} . Aqui, de acordo com o que fizemos na parte (ii) da demonstração do teorema 4.2.14, se não obtemos uma órbita principal isométrica a uma esfera, é porque $f(M)$ é um cone do \mathbb{R}^{n+1} , cone esse que deve coincidir com um hiperplano. Logo, ou G tem uma órbita principal isométrica a uma esfera ou M é isométrica ao \mathbb{R}^n . De qualquer modo, se $\tau f \geq 2$ em M_{reg} , as órbitas principais são isométricas a esferas.

Da proposição 4.1.8, obtemos que M_{reg} é localmente isométrica ao produto torcido $I \times_\phi \Sigma$, onde I é um intervalo de \mathbb{R} e Σ é uma órbita principal. Como Σ tem curvatura constante, o lema 4.1.10 pode ser aplicado para garantir que M_{reg} é conformemente plana. Agora, como M_{reg} é um subconjunto denso de M , segue-se que M é conformemente plana.

□

4.3 O CASO TRIDIMENSIONAL

Esta seção será dedicada, quase que inteiramente, à prova do teorema 4.2.4, para $n = 3$.

Um ponto essencial, usado repetidas vezes, no estudo dos casos $n \geq 4$, é o item (c) do corolário 4.1.7:

Se $n \geq 4$, então o número tipo de uma imersão

$$f : (-\epsilon, \epsilon) \times_{\phi} F^{n-1}(c) \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

sempre é diferente de 2.

Portanto, devemos levar em consideração – e isso, de fato, pode ocorrer – a presença de números tipo 2 para hipersuperfícies $f : M^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ de G -cohomogeneidade 1, G tendo suas órbitas principais como subvariedades umbílicas de M .

Como primeiro resultado nessa direção, apresentamos um lema, elemento básico para a compreensão do caso tridimensional.

4.3.1 *Seja $f : M^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ uma hipersuperfície de G -cohomogeneidade 1, G com*
LEMA *órbitas principais umbílicas em M . Se $p \in M_{\text{reg}}$ é tal que $\tau f(p) = 2$ e a órbita $\Sigma_p = G(p)$ é isométrica a uma esfera, então:*

- (a) $f(\Sigma_p)$ é uma esfera em algum hiperplano do \mathbb{R}^4 ;
- (b) o operador de Weingarten de f , ao longo de Σ_p , em uma base ortonormal contendo η , tem matriz dada por

$$A_{\xi} = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde μ é constante em Σ_p .

DEMONSTRAÇÃO: De $\tau f(p) = 2$, vem que $A_{\xi}(\eta) = 0$. Logo, o posto de A_{ξ} é atingido no espaço tangente à órbita Σ_p .

Se $k(0)$, o autovalor de A_{η} , é nulo, obtemos, usando o item (d) do lema 4.2.10, que $f(\Sigma_p)$ coincide com uma esfera em um hiperplano \mathcal{H} perpendicular ao vetor (constante) $\tilde{\eta}$. Portanto, $\tilde{\xi}$ é tangente a \mathcal{H} e normal à esfera $f(\Sigma_p)$. Isto garante que $\tilde{\xi}$ é uma direção umbílica de $f : \Sigma_p \longrightarrow \mathcal{H}$. Como $A_{\tilde{\xi}}$ coincide com a restrição de A_{ξ} ao espaço tangente a Σ_p , vem que a matriz de $A_{\tilde{\xi}}$ tem a forma proposta no lema.

Suponhamos que $k(0) \neq 0$. Neste caso, fazemos uso do item (e) do lema 4.2.10 para obter uma esfera tridimensional $S^3(p_0, r)$, $r = 1/|k(0)|$, tal que

$$f : \Sigma_p \longrightarrow S^3(p_0, r)$$

está bem definida e tem $A_{\tilde{\xi}}$ por operador de Weingarten. Mais ainda, $A_{\tilde{\xi}}$ tem posto 2 globalmente em Σ_p , visto que isto ocorre com A_{ξ} e, como já observamos, $A_{\xi}(\eta) = 0$. Assim, a matriz de $A_{\tilde{\xi}}$ toma a forma

$$A_{\tilde{\xi}} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix},$$

onde μ_1 e μ_2 são contínuos ao longo de Σ_p e $\mu_1\mu_2 \neq 0$. Levando em consideração que Σ_p é isométrica a uma esfera, e usando a equação de Gauss para a imersão de Σ_p em $S^3(p_0, r)$, obtemos que o produto $\mu_1\mu_2$ é constante, a qual é deve ser positiva. Com efeito, se $\mu_1\mu_2 < 0$, resulta que $\mu_1 \neq \mu_2$ ao longo de Σ_p . Este fato implica na existência de dois campos de linhas diferenciáveis em Σ_p , a saber: os auto-espacos associados aos autovalores μ_1 e μ_2 . Mas isto é impossível, pois Σ_p é isométrica a uma esfera bidimensional. Portanto, $\mu_1\mu_2$ é uma constante positiva. Agora, recorrendo ao teorema 39, página 136, de [Spiv] colhemos que $\mu_1 = \mu_2$ e, como $\mu_1\mu_2$ é constante, $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ é, também, constante. Logo, a imersão $f : \Sigma_p \rightarrow S^3(p_0, r)$ é umbílica. Resulta daí que $f(\Sigma_p)$ é uma esfera em um hiperplano, e A_{ξ} é como no item (b). \square

O corolário abaixo contribui com a informação que faltava para completar o quadro do caso tridimensional.

4.3.2 *Seja $f : M^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma hipersuperfície de G -cohomogeneidade 1, COROLÁRIO G com órbitas principais umbílicas em M . Seja $p \in M_{\text{reg}}$ tal que Σ_p é isométrica a uma esfera. Se $\Gamma \subset M_{\text{reg}}$ é um tubo conexo, invariante sob a ação de G , ao longo do qual se tem $\tau f = 2$, então a restrição de f a Γ é de rotação.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja ξ um campo normal ao longo de $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^4$. Aplicando o lema 4.3.1 a cada uma das órbitas principais em Γ , concluímos que A_{ξ} tem a forma exibida no item (b) do referido lema, só que, agora, ao longo de Γ . Como, naquela matriz, $\mu \neq 0$, podemos fazer uso de um teorema devido a M. P. do Carmo e M. Dajczer (veja [DoDa], teorema 4.2) para concluir o corolário. (Na realidade, neste caso particular, onde o terceiro autovalor de A_{ξ} sempre é nulo, obtemos ou um tronco de cone ou um tronco de cilindro.) \square

O teorema 4.2.9, sobre o qual apoiamos o teorema principal, na seção anterior, agora pode ser estendido para $n = 3$.

4.3.3 *Seja $f : M^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma hipersuperfície rígida no infinito e de G -co-*
TEOREMA *homogeneidade 1. Se as órbitas principais de G são umbílicas em M e alguma delas é isométrica a uma esfera, então f é de rotação.*

DEMONSTRAÇÃO: Definamos, como antes, $\mathcal{R} \subset M_{\text{reg}}$ por:

$$\mathcal{R} = \{x \in M_{\text{reg}}; \exists \Gamma_x, \Sigma_x = G(x) \subset \Gamma_x \text{ e } f : \Gamma_x \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \text{ é de rotação}\},$$

onde Γ_x é um tubo invariante sob G . Procedendo como no lema 4.2.6, só que levando em conta a presença de número tipo 2, caso coberto pelos dois resultados anteriores, obtemos que \mathcal{R} é um aberto denso de M_{reg} e, além disto, as órbitas principais imergem como esferas bidimensionais em hiperplanos do \mathbb{R}^4 . Neste instante, tudo se passa exatamente como no teorema 4.2.9, e concluímos que f é de rotação. □

O teorema abaixo completa o teorema principal do capítulo.

4.3.4 TEOREMA *Seja $f : M^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ uma hipersuperfície completa, rígida no infinito e de G -cohomogeneidade 1. Suponhamos que as órbitas principais de G sejam subvariedades umbílicas de M . Então, f é de rotação. Além disto, se M é compacta, então M é homeomorfa ou a S^3 ou a $S^1 \times S^2$.*

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos, inicialmente, que exista algum ponto $p \in M_{\text{reg}}$ onde $\tau f(p) = 3$. (Convém notar que isto é automático quando M é compacta.) Seja Γ um tubo isométrico a $(-\epsilon, \epsilon) \times_{\phi} \Sigma_p$, contendo Σ_p , onde τf continua sendo 3. Podemos supor que se $q \in \Gamma$, então $f(\Sigma_q) \subset S^3(\|f(q)\|)$, devido a rigidez de Γ .

Retomando a notação usada na seção anterior, se em Γ a função $\theta^2 = \langle \tilde{\eta}, N \rangle^2$ fosse constante e igual a 1, teríamos que $\beta = f \circ \lambda$, restrita a $(-\epsilon, \epsilon)$, coincidiria com um segmento de reta. Logo, neste intervalo, $\beta'' = 0$. Mas

$$\beta'' = \tilde{\nabla}_{\beta'} \beta' = \nabla_{\eta} \eta + \langle A_{\xi}(\eta), \eta \rangle \xi.$$

Em particular, $\langle A_{\xi}(\eta), \eta \rangle = 0$. Como η é autovetor de A_{ξ} (corolário 4.1.7, item (a)), esta última equação implica que $A_{\xi}(\eta) = 0$. Isto contradiz o fato que $\tau f = 3$. Assim, devemos ter $\theta^2 \neq 1$ em alguma órbita principal Σ contida em Γ . Esta órbita, é isométrica a uma esfera, resultado que, via teorema 4.3.3, implica que a imersão f é de rotação.

Resta ver o que ocorre quando $\tau f \leq 2$ em toda parte regular de M . Lembrando que M não é plana, devemos ter $\tau f(p) = 2$ em algum $p \in M_{\text{reg}}$. Na realidade, τf deve ser constante e igual a 2, ao longo de M_{reg} . Com efeito, como τf tende a crescer perto de p e estamos diante de um caso onde não há número tipo 3, existe um tubo Γ em torno de Σ_p onde τf vale 2. Seja $\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow M$ uma geodésica normal com $\lambda(0) = p$. Temos que

$$\Gamma = \{g(\lambda(t)); g \in G, -\epsilon < t < \epsilon\}$$

e, sobre este tubo, o operador de Weingarten é tal que $A_{\xi}(\lambda') = 0$ (corolário 4.1.7 (b)). Portanto, $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \Gamma$ é uma geodésica em uma folha (ela mesma é a folha) da

distribuição de nulidade relativa com índice de nulidade relativa 1 em Γ . Usando o lema de Chern-Lashof (veja [ChLa] ou [Dajc]), obtemos que $\tau f(\lambda(-\epsilon)) = \tau f(\lambda(\epsilon)) = 2$. Como M_{reg} é conexo, temos que τf é constante e igual a 2, ao longo de M_{reg} , conforme dissemos.

Voltemos a nossa atenção para os autovalores k do campo de operadores de Weingarten (das inclusões das órbitas principais em M) A_η . Se algum deles é nulo, o resultado do item (d), lema 4.2.10, garante que a respectiva órbita é isométrica a uma esfera e, outra vez usando o teorema 4.3.3, f é de rotação.

Se, do contrário, k sempre é não-nulo, concluimos, através dos mesmos argumentos adotados no caso (ii), dentro da demonstração do teorema 4.2.14, que M imerge como um cone, o que, já sabemos, não pode ocorrer.

Quanto à parte do teorema que diz respeito à topologia de M , ela decorre dos teoremas 3.2.4 e 3.2.5.

□

O próximo teorema, que em particular estende o teorema 4.2.15 ao caso tridimensional, estabelece a planaridade conforme das variedades tridimensionais M de G -cohomogeneidade 1, G tendo suas órbitas principais umbílicas em M , e não carece de uma imersão de M no \mathbb{R}^4 .

4.3.5 TEOREMA *Seja M uma variedade tridimensional e de G -cohomogeneidade 1. Se as órbitas principais de G são subvariedades umbílicas de M , então M é conformemente plana.*

DEMONSTRAÇÃO: Como as órbitas principais de G são variedades homogêneas e têm dimensão 2, segue-se que elas devem ter curvatura seccional constante. Portanto, a forma de produto torcido, que descreve localmente M_{reg} , garante que M_{reg} é conformemente plana. Logo, M é conformemente plana.

□

Estabeleceremos, agora, um resultado que estende o teorema AS.ME.NO, que foi enunciado na introdução deste capítulo, para o caso rígido no infinito e $n \geq 3$.

4.3.6 TEOREMA *Seja $f : M^{n \geq 3} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície completa, rígida no infinito e de G -cohomogeneidade 1. Se as órbitas principais de G têm curvatura seccional constante e positiva, então elas são subvariedades umbílicas de M , e f é de rotação.*

DEMONSTRAÇÃO: Começamos observando que, quando $n \geq 4$, a restrição de positividade sobre a curvatura é uma condição necessária, de acordo com o teorema de Chern-Kuiper (veja [Dajc] ou [Rodr]). Portanto, só fazemos uso desta hipótese, para $n = 3$.

A umbilicidade das órbitas principais, nos casos $n \geq 4$, é exatamente o conteúdo do teorema AS.ME.NO, o qual admitiremos. Abaixo, verificaremos que esta propriedade também se dá quando a variedade M tem dimensão 3 e, na realidade, independe de sua imersão no \mathbb{R}^4 .

Seja Σ uma órbita principal de G . Então, ou Σ é isométrica a uma esfera, digamos S^2 , ou a um plano projetivo, o qual podemos supor ser \mathbb{RP}^2 .

Suponhamos que $\Sigma = S^2$. Sejam η um campo normal unitário ao longo da inclusão $\Sigma \subset M$ e A_η o seu respectivo campo de operadores de Weingarten. Decorre do corolário 3.1.7 que os autovalores de A_η são constantes ao longo de Σ . Se essas constantes fossem distintas, construiríamos em $\Sigma = S^2$ um campo de linhas diferenciável, o que sabemos ser impossível. Logo, os autovalores de A_η coincidem e, portanto, Σ é uma subvariedade umbílica de M . Quando $\Sigma = \mathbb{RP}^2$, o problema é reduzido ao anterior, porque, se dispomos de um campo de linhas em \mathbb{RP}^2 , esse campo pode ser levantado à esfera S^2 , visto que esta última é um recobrimento de \mathbb{RP}^2 .

□

Encerraremos esta seção com dois corolários do teorema anterior, os quais nos foram sugeridos por F. Podestà.

4.3.7 *Seja $f : M^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma hipersuperfície compacta e de G -cohomogeneidade 1. Se G não é abeliano, então f é de rotação.*
COROLÁRIO

DEMONSTRAÇÃO: Combinando o corolário 3.1.6 com a proposição 3.3.3, colhemos que órbitas principais do grupo G são isométricas ou a esferas ou a toros planos. A isometria a toros planos não é permitida, porque G não é abeliano (e atua efetivamente sobre as órbitas principais). Logo, as órbitas principais devem ser isométricas a esferas, e o corolário resulta do teorema 4.3.6.

□

4.3.8 *Seja $f : M^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma hipersuperfície compacta. Seja G a componente conexa do grupo $\text{Iso}(M)$. Se o subgrupo G não é abeliano e sua ação em M não é trivial, então ou $f(M)$ é uma esfera ou f é uma hipersuperfície de G -cohomogeneidade 1 de rotação.*
COROLÁRIO

DEMONSTRAÇÃO: Como estamos supondo que a ação de G não é trivial, devemos ter que sua cohomogeneidade é 0, 1 ou 2. Se ela é 0, então M é homogênea, fato que, pelo teorema de Kobayashi, implica que $f(M)$ é uma esfera tridimensional. O valor 2 não pode ocorrer, em virtude de G ser não-comutativo. De fato, cohomogeneidade 2 dá que as órbitas principais são iguais a S^1 , o que, por sua vez, implica que G é comutativo. Portanto, se M não é homogênea, a ação é de cohomogeneidade 1 e f deve ser de rotação, de acordo com o corolário anterior.

□

4.4

EXEMPLOS

Nesta seção, construiremos outros exemplos de hipersuperfícies de G -cohomogeneidade 1. O primeiro deles foi motivado pelo surgimento de alguns cones na demonstração do teorema 4.2.14. Já o terceiro mostra que a preocupação com a existência de número tipo 2, no caso $n = 4$, é procedente.

4.4.1 EXEMPLO Seja Σ^{n-1} , $n \geq 3$, uma variedade riemanniana compacta, homogênea e que admite uma imersão isométrica $F : \Sigma \rightarrow S_c^n$, onde S_c^n é a esfera euclidiana de curvatura c .

Seja $M^n = (0, +\infty) \times_\phi \Sigma$, onde $\phi(t) = \sqrt{ct}$, $t \in (0, +\infty)$. De modo similar àquele do exemplo 3.4.1, temos que o conjunto $G = \{1 \times g, g \in \text{Iso}(\Sigma)\}$, onde $1 \times g : M \rightarrow M$ é definida por $1 \times g(t, X) = (t, g(X))$, é um subgrupo compacto do grupo $\text{Iso}(M)$. Além disto, a ação de G em M é de cohomogeneidade 1 e tem órbitas principais homotéticas a Σ .

Definindo $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ por $f(t, X) = \sqrt{ct}F(X)$ vemos, sem muita dificuldade, que f é uma imersão isométrica. $f(M)$ é o que chamamos cone sobre $F(\Sigma)$. Uma propriedade útil desta imersão é que se $\tilde{\xi}$ é um campo normal unitário ao longo de F , então o campo ξ , definido por $\xi(t, X) = \tilde{\xi}(X)$, é um campo normal unitário ao longo de f . Decorre daí que o número tipo de f em (t, X) coincide com o número tipo de F em X .

4.4.2 EXEMPLO Como caso particular da construção feita no exemplo anterior, se escolhermos $\Sigma = S^p \times S^q$ munida com a imersão $F : \Sigma \rightarrow S^{p+q+1}(\sqrt{2})$, $F(X, Y) = (X, Y)$, então F tem número tipo constante e igual a $p + q$ e isto também ocorre com a imersão de $M = (0, +\infty) \times_\phi (S^p \times S^q)$ no \mathbb{R}^{p+q+2} , via

$$f(t, X, Y) = \frac{\sqrt{2}}{2} t(X, Y),$$

onde $\phi(t) = \sqrt{2}t/2$. Assim sendo, f é uma hipersuperfície de G -cohomogeneidade 1 e rígida no infinito (a parte plana de M é vazia), e as órbitas principais de G são umbílicas em M . Mais ainda, f não é de rotação, fato que mostra a importância de M ser completa no teorema 4.2.4.

4.4.3 EXEMPLO Seja \mathbb{V} o espaço vetorial das matrizes simétricas reais de ordem 3×3 e de traço nulo, munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \text{tr } A^t B = \text{tr } AB,$$

onde tr denota funcional traço e tB é a transposta de B .

Seja $F : SO(3) \longrightarrow S^4(\sqrt{2}) \subset \mathbb{V}$ a imersão dada por

$$F(X) = XA_0{}^tX, \quad A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Não é difícil verificar que as translações à esquerda em $SO(3)$, munido com a métrica induzida por F , são isometrias. Assim, $SO(3)$ munido da métrica induzida por F é uma variedade riemanniana compacta e homogênea que imerge, via F , na esfera de raio $\sqrt{2}$ do espaço \mathbb{V} .

Um cálculo direto via definição de F mostra que

$$dF_I(T_I SO(3)) = \{[W, A_0] = WA_0 - A_0W, W \in T_I SO(3)\},$$

onde I é a matriz identidade de $SO(3)$. (Convém lembrar, que $T_I SO(3)$ coincide com o espaço das matrizes anti-simétricas.) Portanto,

$$dF_I(T_I SO(3)) = \text{ger} \{[W_i, A_0], i = 1, 2, 3\},$$

onde

$$W_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad W_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } W_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Seja $\xi_0 \in \mathbb{V}$ a matriz diagonal dada por

$$\xi_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{6}/6 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6}/6 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{6}/3 \end{pmatrix}.$$

Uma simples computação mostra que $\langle \xi_0, \xi_0 \rangle = 1$, $\langle A_0, \xi_0 \rangle = 0$ e $\langle \xi_0, [W_i, A_0] \rangle = 0$, $i = 1, 2, 3$. Assim, ξ_0 é um vetor normal da imersão F em I . Portanto,

$$\xi(X) = X\xi_0{}^tX$$

é um campo normal unitário ao longo de F tal que $\xi(I) = \xi_0$. Além disto, temos também que o operador de Weingarten A_{ξ_0} se escreve, na base $\{W_1, W_2, W_3\}$, como

$$A_{\xi_0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{6}/2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6}/2 \end{pmatrix},$$

o que, por sua vez, implica que $\tau F(I) = 2$. Agora, como $SO(3)$ é homogêneo, vem que τF é constante e igual a 2.

Com relação à matriz de A_{ξ_0} , na base $\{W_1, W_2, W_3\}$, indicada acima, verificaremos que ela é correta, relativamente ao vetor W_3 , isto é: $A_{\xi_0}(W_3) = (\sqrt{6}/2)W_3$. Os outros dois casos são verificados de modo similar. Claramente, $W_3 = \beta'(0)$, onde

$$\beta(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Trabalhando diretamente com as definições de F e ξ , obtemos que

$$(\bar{\nabla}_{F_*(W_3)}\xi)(I) = (\tilde{\nabla}_{F_*(W_3)}\xi)(I) = (\xi \circ \beta)'(0) = -\frac{\sqrt{6}}{2} F_*(W_3),$$

onde $\bar{\nabla}$ e $\tilde{\nabla}$ são as conexões riemannianas da esfera $S^4(\sqrt{2})$ e do espaço \mathbb{V} , respectivamente. Como $\bar{\nabla}_{F_*(W_3)}\xi = -F_*(A_{\xi_0}(W_3))$ pela fórmula de Weingarten, decorre que $A_{\xi_0}(W_3) = (\sqrt{6}/2)W_3$.

Do exemplo 4.4.1, vem que a imersão

$$\begin{aligned} f : (0, +\infty) \times_{\phi} SO(3) &\longrightarrow \mathbb{V} \\ (s, X) &\longmapsto f(s, X) = \frac{s}{\sqrt{2}} X A_0^t X \end{aligned}$$

é uma hipersuperfície de cohomogeneidade 1, a qual não é completa, com número tipo constante e igual a 2.

Para finalizar, o exemplo abaixo complementa o teorema 4.3.6, no sentido que ele mostra que a hipótese das órbitas principais terem curvatura constante positiva é essencial para a conclusão de sua umbilicidade na variedade M , no caso $n = 3$.

4.4.4 EXEMPLO Seja $M_{(1,1)} = S^1 \times_{\phi} S^1 \times_{\psi} S^1$ o produto bi-torcido imergindo no \mathbb{R}^4 por f , como no exemplo 3.4.2. Temos que f é uma hipersuperfície de G -cohomogeneidade 1, com as órbitas principais de G tendo curvatura constante (nula), mas que não são umbílicas em M .

R

REFERÊNCIAS
BIBLIOGRÁFICAS

- [AlAl] ALEKSEEVSKY, A. V. AND ALEKSEEVSKY, D. V., *Riemannian G -manifolds with one dimensional orbit space*, Annals Global Analysis and Geometry **11** (1993), 197-211.
- [Alek] ALEKSEEVSKY, D. V., *Riemannian manifolds of cohomogeneity one*, Colloq. Math. Soc. J. Bolyai **56** (1989), 9-22.
- [AMNo] ASPERTI, A. C. AND MERCURI, F. AND NORONHA, M. H., *Cohomogeneity one manifolds and hypersurfaces of revolution*, Preprint, Unicamp, 1995.
- [Bess] BESSE, A., *Einstein Manifolds*, Springer-Verlag, New York, 1987.
- [Brea] BREDON, G., *Introduction to Compact Transformation Groups*, Academic Press, New York-London, 1972.
- [Breb] BREDON, G., *Topology and Geometry*, Graduate Texts in Mathematics **139**, Springer-Verlag, 1993.
- [ChLa] CHERN, S. S. AND LASHOF, R., *On the total curvature of immersed manifolds*, Amer. J. of Math. **79** (1957), 306-318.
- [DaDo] DAJCZER, M. AND DO CARMO, M. P., *Rotation hypersurfaces in spaces of constant curvature*, Trans. Am. Math. Soc. **277** (1983), 685-709.
- [Dajc] DAJCZER, M., *Rigidity of Submanifolds*, Mathematics Lecture Series **13**, Publish or Perish Inc., Houston-Texas, 1990.
- [DaRo] DAJCZER, M. AND RODRÍGUEZ, L., *Substantial codimension of submanifold: global results*, Bull. London Math. Soc. **19** (1987), 467-473.
- [DoCa] DO CARMO, MANFREDO P., *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1988.
- [Feru] FERUS D., *Notes on Isoparametric Hypersurfaces*, Escola de Geometria Diferencial, Unicamp, 1980.
- [Free] FREEDMAN, M. H., *The topology of four-dimensional manifolds*, J. Diff. Geom. **17** (3) (1982), 357-453.
- [Hiep] HIEPKO, S., *Eine innere kennzeichnung der verzerrten produkte*, Math. Ann. **241** (1979), 209-215.
- [Hirs] HIRSCH, M. W., *Differential Topology*, Graduate Text in Mathematics **33**, Springer-Verlag, New York Inc., 1982.
- [Koba] KOBAYASHI, S., *Compact homogeneous hypersurfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **88** (1958), 137-143.
- [Kobb] KOBAYASHI, S., *Transformation Groups in Differential Geometry*, Springer-Verlag, 1972.
- [KoNo] KOBAYASHI, S. AND NOMIZU, K., *Foundations of Differential Geometry*, volume I, Interscience Publishers, New York-London, 1969.

- [Kulk] KULKARNI, R. S., *Curvature structure and conformal transformations*, J. Diff. Geom. **4** (1970), 425-451.
- [Merc] MERCURI, F., *Conformally flat immersions*, Note di Matematica **IX**-Suppl. (1989), 85-99.
- [Mila] MILNOR, J., *Lectures on the h -cobordism Theorem*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1965.
- [Milb] MILNOR, J., *Morse Theory*, Ann. of Math. Studies **51**, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1963.
- [Most] MOSTERT, P., *On a compact Lie group action on manifolds*, Ann. of Math. **65** (1957), 447-455.
- [NaTa] NAGANO, T. AND TAKAHASHI, T., *Homogeneous hypersurfaces in Euclidean space*, J. Math. Soc. Japan **12** (1960), 1-7.
- [Onei] O'NEILL, B., *Semi-Riemannian Geometry (with applications to relativity)*, Academic Press, New York, 1983.
- [PaTe] PALAIS, R. S. AND TERNG C., *Critical Point Theory and Submanifold Geometry*, Lectures Notes in Mathematics **1353**, Springer-Verlag, 1988.
- [PoSp] PODESTÀ, F. AND SPIRO A., *Cohomogeneity one Manifolds and Hypersurfaces of Euclidean Space*, Annals Global Analysis and Geometry **13** (1995), 169-184.
- [Rodr] RODRÍGUEZ, L., *Geometria das Subvariedades*, Monografia de Matemática **26**, IMPA, Rio de Janeiro, 1976.
- [Rolf] ROLFSEN, D., *Knots and Links*, Math. Lectures Series **7**, Publish or Perish Inc., 1990.
- [Ryan] RYAN, P., *Homogeneity and some curvature conditions for hypersurfaces*, Tohoko Math. J. **21** (1969), 363-388.
- [Smal] SMALE, S., *Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than 4*, Ann. of Math. **64** (1956), 399-405.
- [Spiv] SPIVAK, M., *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, volume IV, Publish or Perish Inc., Houston, (1979).
- [Stee] STEENROD, N., *Topology of Fibre Bundles*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1951.

I

ÍNDICE
ALFABÉTICO

ação, 16
 de cohomogeneidade k , 21
 efetiva, 18
 livre, 17
 transitiva, 16
 aplicação G -equivariante, 17
 aplicação normal de Gauss generalizada, 26

 campo de operadores de Weingarten, 10
 cone, 82
 conexão
 normal, 10
 riemanniana, 8, 9
 curvatura
 escalar, 59
 seccional, 57, 58

 equação
 de Codazzi, 11
 de Gauss, 11
 de Kulkarni, 57
 de Ricci, 11
 esfera torcida, 34
 espaço das órbitas, 17
 espaço lenticular, 5, 39

 fórmula
 de Gauss, 11
 de Weingarten, 11
 fatia ("slice"), 18, 19
 fibrado
 (s) de discos, 34, 35, 40
 de discos, 19
 normal unitário, 26
 figura: Uma Hipersuperfície de $SO(n)$ -cohomogeneidade 1, 64
 função altura, 26

 geodésica normal, 22, 54
 construção, 22
 propriedades, 23

 hessiano, 15, 26, 50
 da função altura, 26
 hipersuperfície, 8
 completa, 8
 de curvatura seccional positiva, 8
 (s) de G -cohomogeneidade 1, 3
 de rotação, 3, 47
 isoparamétrica de S^n , 30
 equação de Cartan para, 30, 37
 rígida no infinito, 64

 imersão isométrica, 8
 campo de vetores ao longo de uma, 9
 campo normal ao longo de uma, 9
 codimensão de uma, 8
 número tipo de uma, 12
 rígida, 13
 totalmente geodésica, 12
 umbílica, 12
 classificação (em \mathbb{R}^{n+k} e S^{n+k}), 12
 índice
 de h_ν em p , 26
 de uma forma bilinear, 25
 da restrição, 25
 isometria, 17
 isotropia principal, 20

 levantamento
 horizontal, 14
 vertical, 14

 operador de Weingarten, 10
 órbitas principais umbílicas, 54, 61, 62, 64 66, 68 72, 76-80
 órbita, 17
 excepcional, 19
 principal, 19
 singular, 19

 parte plana de M , 6, 64
 parte regular (M_{reg}), 20
 ponto regular, 20

- produto bi-torcido, 42-44, 84
 - métrica de um, 42
- produto torcido, 14, 54
 - base de um, 14
 - coeficiente de torção de um, 14
 - com base $I \subset \mathbb{R}$, 50
 - conexão de um, 14
 - fibras de um, 14
 - folhas de um, 14
 - imersão isométrica de um, 50
 - número tipo de uma, 50, 53
 - métrica de um, 14
 - tensor curvatura de um, 15, 50, 57
- símbolos
 - $*$ (ação de um grupo), 16
 - α (segunda forma fundamental), 10
 - A_ξ (operador de Weingarten segundo ξ), 10
 - $B \times_\phi F$ (produto torcido), 14
 - cen, 66
 - $f^*(U)$ (restrição do campo U a $f(M)$), 9
 - $f_*(X)$ (campo induzido pelo campo X), 9
 - $\text{Fix } \tilde{G}$ (pontos fixos de \tilde{G}), 48, 49
 - $G(p)$ (órbita de G), 17
 - G_p (subgrupo de isotropia), 17
 - Hess (hessiano), 15, 26
 - h_v (função altura), 26
 - hX (levantamento horizontal de X), 14
 - I (intervalo aberto de \mathbb{R}), 50
 - $\text{Iso}(M)$ (isometrias de M), 17
 - \mathcal{L} (espaço dos levantamentos (horizontais ou verticais)), 14
 - λ (geodésica normal), 22
 - M/G (espaço das órbitas), 17
 - M_{reg} (parte regular), 20
 - ∇ (conexão riemanniana), 8, 9
 - ∇^\perp (conexão normal), 10
 - $\tilde{\nabla}$ (conexão riemanniana), 9
 - nor, 66
 - \langle , \rangle (métrica), 13, 14
 - R (tensor curvatura), 8
 - Ric (tensor de Ricci), 59
 - \mathbb{R}^n (espaço euclidiano),
 - R^\perp (tensor curvatura normal), 10
 - \tilde{R} (tensor de curvatura), 9
 - Σ_p (órbita principal por p),
 - S^n (esfera unitária),
 - $S^n(p, r)$ (esfera de centro p e raio r),
 - SO_l (subgrupo que fixa a l), 47, 61
 - $SO(n)$ (grupo ortogonal especial), 47, 61
 - τf (número tipo de f), 12
 - $T_p M$ (espaço tangente a M em p),
 - Γ (tubo),
 - $\nu^1(M)$ (fibrado normal unitário), 26
 - vU (levantamento vertical de U), 14
 - \mathfrak{X}_f (campos ao longo de f), 9
 - $\mathfrak{X}(M)$ (campos de vetores de M), 8
 - \mathfrak{X}_f^\perp (campos normais ao longo de f), 9
 - segunda forma fundamental, 9
 - subconjunto G -invariante, 17
 - subgrupo de isotropia, 17
 - subvariedade isoparamétrica, 27
 - tensor curvatura, 8
 - de Ricci, 59
 - de um produto torcido, 15
 - normal, 10
 - teorema
 - de Asperti, Mercuri e Noronha, 3, 47
 - de Beez e Killing, 13
 - de Kobayashi, 2
 - (s) de Mostert, 21, 22
 - de Nagano e Takahashi, 2
 - de Podestà e Spiro, 3, 47
 - tipo de isotropia, 20
 - tubo, 18
 - variedade riemanniana
 - conformemente plana, 6, 57, 76, 80
 - critério tridimensional, 60
 - equação de Kulkarni, 57
 - de G -cohomogeneidade k , 2, 21
 - homogênea, 2, 21
 - rígida no infinito, 6, 64
 - vetores
 - horizontais, 14
 - verticais, 14