CÁLCULO VARIACIONAL

E APLICAÇÕES

FLÁVIO FERRARI ARAGON

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi

CAMPINAS

1980

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

A G R A D E C I M E N T O S

Apresentamos os nossos agradecimentos a todas as pessoas que contribuiram, de forma direta ou indireta, para a realização deste trabalho, com destaque

ao Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi, que contribuiu de maneira fundamental, com sua segura orientação.

ao amigo Rodney, pelo exemplo de amizade e humildade que é para todos nós.

aos professores José L. Boldrini e Fernando Prado pelas oportunas sugestões.

ao Barba, pelo excelente trabalho de datilografia e confecção dos gráficos.

Flávio Ferrari Aragon.

Campinas, 1980

Para Teka, Lina e Davi.

Í N D I C E

Introdução i

Capítulo I NOÇÕES DE ANÁLISE FUNCIONAL 1

Capítulo II O PROBLEMA VARIACIONAL MAIS SIMPLES - A equação de Euler - O problema da brachistóchrone - Ótica geométrica 10

Capítulo III FUNCIONAIS MAIS GERAIS - Dinâmica de partículas - Problemas isoperimétricos - Problema da corda vibrante - Problema da membrana vibrante - Problema de Plateau não-paramétrico 34

Capítulo IV PROBLEMAS VARIACIONAIS COM FRONTEIRAS MÓVEIS 76

Capítulo V EXTREMAIS ANGULOSOS E PROBLEMAS VARIACIONAIS COM OBSTÁCULOS GROSSOS 92

Capítulo VI CONDIÇÕES SUFICIENTES PARA EXTREMOS 108

Capítulo VII INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA - CONVEXIDADE 122

Bibliografia 146

INTRODUÇÃO

Muitas leis da Física podem se reduzir à afirmação de que uma certa integral deve alcançar seu valor máximo ou mínimo. Essas integrais, tipos particulares de funcionais, são quantidades variáveis, cujos valores ficam determinados mediante a escolha de uma ou mais funções.

Os problemas em que se estuda os valores máximos e/ou mínimos de tais funcionais são chamados problemas variacionais e a parte da matemática que fornece os métodos para esse estudo, é conhecida como cálculo variacional (ou cálculo das variações).

O cálculo variacional começou a ser desenvolvido por volta de 1696, como uma continuação natural da teoria de máximos e mínimos, do cálculo diferencial e integral, quando Johann Bernoulli propôs o problema da brachistochrone (que será resolvido mais adiante).

No entanto, quem desenvolveu grande parte das técnicas do cálculo das variações, foi o matemático L. Euler que, com justiça, é considerado o seu criador.

O objetivo do presente trabalho é fornecer, de uma maneira sistemática, um estudo do cálculo variacional clássico, aplicando-o a problemas relevantes da Física. Seu conteúdo está dividido em sete capítulos, sendo que no primeiro, temos algumas definições e noções elementares sobre funcionais. No segundo estudamos o funcional mais simples, para o qual deduzimos a equação de Euler, aplicando-a a problemas da ótica geométrica e ao problema

da brachistochrone. No capítulo III estudamos alguns funcionais mais gerais, com aplicações à dinâmica de partículas, problema da corda vibrante, da membrana vibrante e problemas isoperimétricos, abordando também, superficialmente, o problema de Sturm-Liouville.

No capítulo IV temos os problemas variacionais com fronteiras móveis para o funcional mais simples e para funcionais que dependem de várias variáveis. No capítulo V estudamos problemas variacionais com extremantes angulosos (por exemplo, de refração ou reflexão da luz), e também os problemas variacionais com obstáculos grossos, com algumas aplicações práticas.

No sexto capítulo, aparecem algumas condições suficientes sobre extremos de funcionais e, finalmente no capítulo VII, temos uma visão mais atual do cálculo das variações envolvendo funções convexas e alguns tópicos de análise funcional.

Tentamos fazer um trabalho auto-suficiente, com demonstrações de resultados simples e muitos exemplos, para que seja possível utilizá-lo num curso regular sobre o assunto.

I - NOÇÕES DE ANÁLISE FUNCIONAL

DEFINIÇÃO - Um FUNCIONAL é uma função com valores reais, cujo domínio é um espaço vetorial.

No nosso caso, vamos dar maior importância aos funcionais definidos em espaços de funções, que serão estabelecidos de acordo com cada problema específico.

DEFINIÇÃO - Uma NORMA num espaço vetorial V, é uma aplicação $\|\ \|: V \to R_+$ satisfazendo as condições:

(a) $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0 \iff x = 0$,

(b) $\|ax\| = |a| \|x\|$,

(c) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

para quaisquer elementos $x, y \in V$ e $a \in R$.

DEFINIÇÃO - Um ESPAÇO VETORIAL NORMADO é um espaço vetorial no qual fixamos uma norma.

EXEMPLO 1 - O espaço Euclidiano R^n, é um espaço vetorial normado com a norma

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}, \quad \text{onde } x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n.$$

EXEMPLO 2 - O espaço $C[a,b]$ das funções reais contínuas, definidas no intervalo $[a,b] \subset R$, é um espaço vetorial normado com a norma

$$\|f\|_0 = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|, \quad \text{onde } f \in C[a,b].$$

EXEMPLO 3 - Seja $C^1[a,b]$ o subespaço de $C[a,b]$ constituído pelas funções com derivada de primeira ordem contínua. Naturalmente, o

espaço $C^1[a,b]$ é um subespaço vetorial de $C[a,b]$ com a norma $\|\ \|_0$ no entanto, podemos definir em $C^1[a,b]$ a norma

$$\|f\|_1 = \max_{a\leq x\leq b} |f(x)| + \max_{a\leq x\leq b} |f'(x)|$$

com a qual, $C^1[a,b]$ se torna um espaço vetorial normado - denotado por $D^1[a,b]$.

Em um espaço vetorial normado V, podemos introduzir a noção de distância entre dois pontos quaisquer x e y, definindo:

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

Desta forma, faz sentido usar para um espaço vetorial normado, todos os conceitos topológicos dos espaços métricos.

DEFINIÇÃO - Seja V um espaço vetorial normado - espaço de funções - e $I:D\subset V\to R$, um funcional. Dizemos que $\bar{y}$ é PONTO DE MÍNIMO (MÁXIMO) LOCAL de I se existe $\varepsilon>0$ tal que $I(\bar{y})\leq I(y)$ $(I(\bar{y})\geq I(y))$ para todo $y\in D$ satisfazendo $\|y-\bar{y}\|<\varepsilon$.

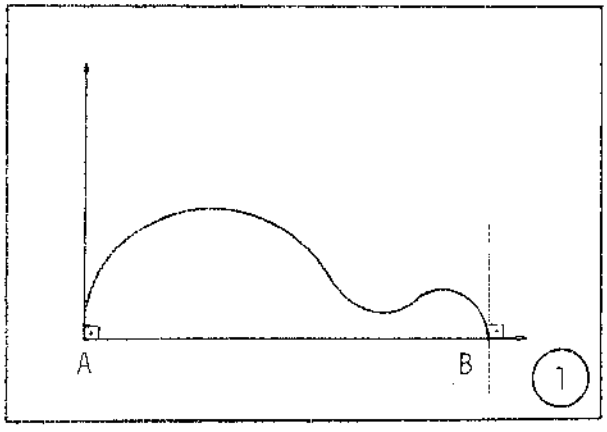
Em geral, a existência de extremos para funções definidas num domínio de R^n, é garantida pelo teorema de WEIERSTRASS "Num subconjunto compacto, uma função contínua possui pontos de máximo e de mínimo".

Portanto, a existência de extremos para funcionais, está relacionada com a conveniência ou não, de se restringir os seus domínios a conjuntos compactos. Na verdade, cada problema deve ser analisado separadamente, quando se investiga a existência de soluções.

Nem sempre, um problema variacional tem solução, como podemos ver no seguinte

EXEMPLO 4 - Determinar a curva de menor comprimento ligando dois

pontos A e B, do plano, normal ao segmento AB em suas extremidades. Notemos que qualquer curva normal ao segmento nos seus extremos, tem comprimento maior que $\overline{AB}$. Por outro lado, existem curvas desse tipo arbitrariamente próximas de AB, e como este não é normal a si mesmo em A e B, concluimos que o problema não tem solução (fig 1).



A continuidade do funcional é outro fato importante o qual está ligado intimamente à topologia que se define no seu domínio - um espaço de funções que chamamos ESPAÇO DAS CURVAS ADMISSÍVEIS.

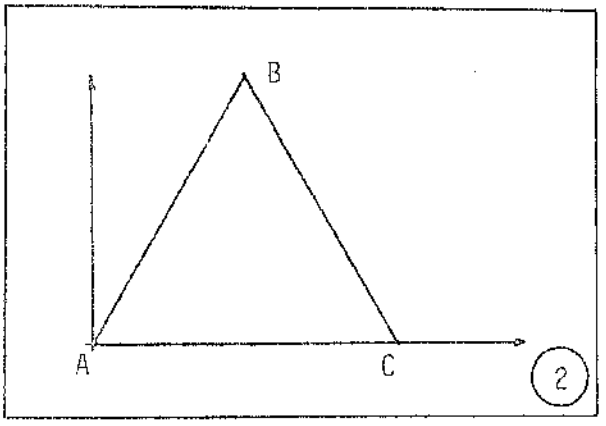
DEFINIÇÃO - Seja V um espaço de funções com a métrica

$$d(y_1,y_2)=\|y_1-y_2\|_0 .$$

Dizemos que o funcional $J:V\to R$ é CONTÍNUO em $y_0\in V$, se para cada $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que $|J(y)-J(y_0)|<\varepsilon$ para todo $y\in V$ que satisfaça $\|y-y_0\|_0<\delta$.

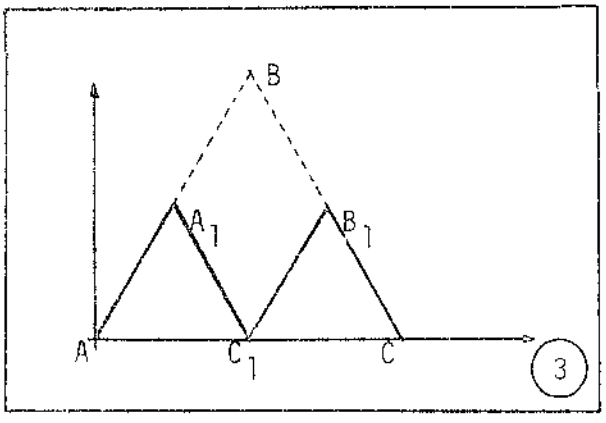
O fato da definição acima depender da topologia do espaço V, pode trazer alguns problemas, como a descontinuidade de funcionais simples como vemos no

EXEMPLO 5 - Consideremos o triângulo equilátero ABC, de lado L, e vamos construir uma sequência de funções $(f_n)_{n\in N}$, como segue: Seja $f_1(x)$ a função cujo gráfico é a poligonal ABC, de comprimento 2L (fig 2). Sejam A_1,B_1, e C_1 respectivamente os pontos médios dos segmentos AB, BC, e AC. Definimos a função $f_2(x)$, como aquela que tem por gráfico a poligonal $AA_1C_1B_1C$, também de com

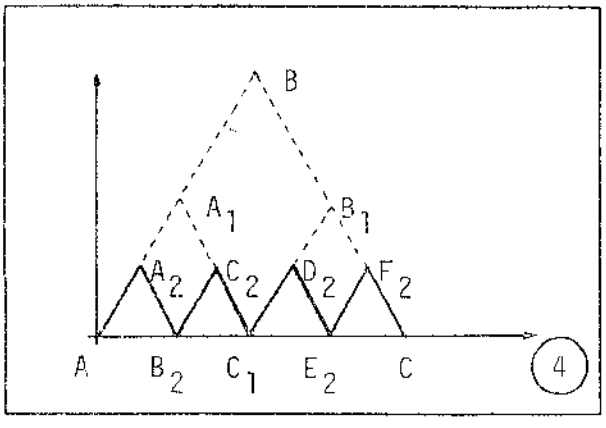


primento igual a 2L (fig 3).

Consideremos agora os pontos A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, e F_2 respectivamente pontos médios dos segmentos AA_1, AC_1, A_1C_1, B_1C_1, CC_1, e B_1C. Definimos a função $f_3(x)$ graficamente pela poligonal $AA_2B_2C_2C_1D_2E_2F_2$, que tem comprimento 2L(fig 4).



Assim, podemos construir uma sequência de funções $(f_n)_{n\in N}$, em que os gráficos têm todos comprimentos iguais a 2L, convergindo para a função idênticamente nula $f(x)\equiv 0$, cujo gráfico tem comprimento L. Notando que a convergência é uniforme, podemos concluir que o funcional "comprimento de arco" não é contínuo em $f(x)\equiv 0$.



DEFINIÇÃO - Dizemos que o funcional $J:V\to R$ é LINEAR se são satisfeitas as condições:

(a) $J(ay)=aJ(y)$ $\forall a\in R$, $\forall y\in V$,

(b) $J(x+y)=J(x)+J(y)$ $\forall x,y\in V$.

DEFINIÇÃO - Para um dado $y\in V$, consideremos a diferença

$$(\Delta J)_y(h)=J(y+h)-J(y)$$

com $h \in V$, e suponhamos que $(\Delta J)_y(h)$ possa ser escrito como soma de dois funcionais, um linear, e outro, um infinitésimo com relação a h da forma $\varepsilon\|h\|$ de modo que ε tende a zero se $\|h\|$ tende a zero. Dizemos então que o funcional J é DIFERENCIÁVEL em $y \in V$, e a parte linear da decomposição é chamada DIFERENCIAL ou VARIAÇÃO PRIMEIRA de J em y - denotada por $(\delta J)_y$. Temos então:

$$(\Delta J)_y(h) = (\delta J)_y(h) + \varepsilon\|h\| .$$

OBSERVAÇÃO - Da igualdade acima, concluímos que J tem extremo em y_0 se $J(y)-J(y_0)$ não muda de sinal se y está numa pequena vizinhança de y_0.

TEOREMA 1 - "Seja $J:V \to R$ um funcional diferenciável. Uma condição necessária para que J tenha um extremo em $y_0 \in V$, é que

$$(\delta J)_{y_0}(h) = 0 \quad \forall h \in V \text{ admissível}"$$

Dem: Suponhamos que y_0 seja ponto de mínimo (para máximo, a demonstração é análoga). Como J é diferenciável, podemos escrever

$$(\delta J)_{y_0}(h) = (\Delta J)_{y_0}(h) - \varepsilon\|h\| \text{ onde } \|h\| \to 0 \Rightarrow \varepsilon \to 0$$

Então, para todo $h \in V$ tal que $\|h\|$ seja suficientemente próximo de zero, $(\delta J)_{y_0}$ e $(\Delta J)_{y_0}$ têm o mesmo sinal. Suponhamos que, para algum $\bar{h} \in V$, tenhamos $(\delta J)_{y_0}(\bar{h}) \neq 0$. Para qualquer $\alpha > 0$, temos

$$(\delta J)_{y_0}(-\alpha\bar{h}) = -(\delta J)_{y_0}(\alpha\bar{h})$$

e, portanto podemos mudar o sinal de $(\delta J)_{y_0}$, o mesmo acontecendo com $(\Delta J)_{y_0}$, o que vai contrariar a observação anterior, pois y_0 é ponto de mínimo de J. Logo, devemos ter

$$(\delta J)_{y_0}(h)=0, \quad \forall h\in V. \qquad \square$$

OBSERVAÇÃO - Podemos usar também o conceito de FRÉCHET para derivada de um funcional: Seja V um espaço vetorial normado e suponhamos que $\bar{y}\in V$, é um ponto de mínimo para o funcional $I:V\to R$. Então existe $\varepsilon>0$ tal que $I(\bar{y})\leq I(y)$ para todo $y\in V$ que satisfaça $\|y-\bar{y}\|<\varepsilon$. Fazendo $h=y-\bar{y}$, podemos escrever $I(\bar{y}+h)-I(\bar{y})\geq 0$, sempre que $\|h\|<\varepsilon$.

Consideremos a função $f(t)=I(\bar{y}+th)$, com $|t|\leq 1$. Logo, $f(t)$ atinge mínimo quanto $t=0$, e supondo que essa função é duas vezes diferenciável, devemos ter:

$$f'(0)=0 \quad e \quad f''(0)>0$$

como condições necessárias para que $\bar{y}$ seja ponto de mínimo de f

Com estas observações, podemos escrever a primeira variação de I no ponto $\bar{y}$:

$$(\delta I)_{\bar{y}}(h)=\frac{d}{dt}f(t)\Big|_{t=0}=\frac{d}{dt}I(\bar{y}+th)\Big|_{t=0}$$

sempre que for definida para todo $h\in V$.

A segunda variação de I em $\bar{y}$ é definida por

$$(\delta^2 I)_{\bar{y}}(h)=\frac{d^2}{dt^2}I(\bar{y}+th)\Big|_{t=0}$$

OBSERVAÇÃO - Considerando $f(t)=I(y+th)$, com $y\in V$, $th\in V$, e $\|h\|$ suficiente pequeno, temos, pela fórmula de Taylor:

$$I(y+h)-I(y)=(\delta I)_y(h)+\frac{1}{2}(\delta^2 I)_y(h)+r(h)\|h\|^2$$

onde $\lim_{\|h\|\to 0} r(h)=0$.

Assim, podemos enunciar o seguinte

TEOREMA 2 - Seja $I:V' \subset V \to R$ um funcional duas vêzes diferenciável. Para que I tenha um mínimo em $\bar{y} \in V'$, são condições necessárias:

$$(\delta I)_{\bar{y}}(h)=0 \quad \text{e} \quad (\delta^2 I)_{\bar{y}}(h) \geq 0$$

para todo $h \in V'$.

Dem: Do teorema anterior, segue que $(\delta I)_{\bar{y}}(h)=0$, e por definição de ponto de mínimo vem

$$I(\bar{y}+h)-I(\bar{y}) \geq 0$$

o que, por Taylor, se escreve como

$$I(\bar{y}+h)-I(\bar{y})=\frac{1}{2}(\delta^2 I)_{\bar{y}}(h)+r(h)\|h\|^2 \geq 0 \quad \forall h \in V$$

o que implica em

$$(\delta^2 I)_{\bar{y}}(h) \geq 0 \qquad \square$$

O conceito de extremo de um funcional deve ser melhor discutido. Quando se fala em máximo ou mínimo relativos, têm-se em vista o maior ou menor valor do funcional sobre curvas "próximas". No entanto, essa idéia de proximidade entre as curvas pode ser entendida de maneiras diferentes, dependendo da norma definida nesse espaço. Portanto, na definição de máximo ou mínimo, é necessário indicar de que modo as curvas podem ser consideradas "próximas".

DEFINIÇÃO - Dizemos que $\bar{y} \in D$, é ponto de MÍNIMO (MÁXIMO) FORTE LOCAL de $I:D \subset V \to R$, se existe $\varepsilon>0$ tal que $I(\bar{y}) \leq I(y)$, $(I(\bar{y}) \geq I(y))$ para todo $y \in D$ satisfazendo $\|y-\bar{y}\|_0 < \varepsilon$.

DEFINIÇÃO - Dizemos que $\bar{y} \in D$, é ponto de MÍNIMO (MÁXIMO) FRACO

LOCAL de $I:DCV\to R$, se existe $\varepsilon>0$ tal que $I(\bar{y})\leqslant I(y)$, $(I(\bar{y})\geqslant I(y)$, para todo $y\varepsilon D$ satisfazendo $\|y-\bar{y}\|_1<\varepsilon$.

OBSERVAÇÃO - Se um funcional tem máximo ou mínimo forte no ponto $y_0(x)$, então assume também nesse ponto o máximo ou mínimo fraco, pois uma curva "próxima"de $y_0(x)$, no sentido da norma $\|\ \|_1$, também o será segundo a norma $\|\ \|_0$. A recíproca não é válida, como mostra o seguinte

EXEMPLO 6 - Consideremos o funcional

$$J(y(x))=\int_0^{\pi} y^2\left[1-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]dx$$

com as condições $y(0)=y(\pi)=0$, onde $y\varepsilon C^1[0,\pi]$.

A função $y(x)=0$ dá para J um mínimo fraco. De fato $J(0)=0$ e, se

$$\|y-0\|_1=\max_{0\leqslant x\leqslant\pi}|y(x)-0|+\max_{0\leqslant x\leqslant\pi}|y'(x)-0|<\delta<1,$$

temos $|y'(x)|<1$, o que implica em $J(y)\geqslant 0$ numa vizinhança V de $y(x)\equiv 0$. Logo $J(y)-J(0)\geqslant 0$ $\forall y\varepsilon V$, no entanto, $y(x)\equiv 0$ não é mínimo forte de J. Para provar isto, tomemos a sequência

$$y_n(x)=\frac{1}{n}\ \text{sen}\ nx \qquad (n\varepsilon N)$$

Para esta sequência, temos:

$$J(y_n(x))=\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\text{sen}^2x(1-n\cos^2nx)dx=\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\text{sen}^2nxdx-\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\text{sen}^2 2nxdx=$$

$$=\frac{\pi}{2n}-\frac{\pi}{8}<0$$

para n suficientemente grande.

Por outro lado, para todo $\delta>0$ e se n é suficientemente grande, temos

$$\|y_n(x)-0\|_0=\max_{0\leq x\leq\pi}\left|\frac{1}{n}\operatorname{sen} nx\right|<\delta$$

isto é, todos os têrmos da sequência, menos um número finito, se encontram numa δ-vizinhança de $y(x)\equiv 0$ no sentido da norma $\|\ \|_0$. Nestas condições, temos $J(y_n)-J(0)\leq 0$ e, portanto J não tem mínimo forte em $y(x)\equiv 0$.

Resumindo, a idéia fundamental para se estabelecer o mínimo (ou máximo) de um funcional J é conseguir sobre o seu domínio DCV uma topologia tal que

(i) D seja compacto (pede-se que a topologia tenha poucos abertos).

(ii) J seja contínuo (pede-se o contrário de (i)).

Observamos, no entanto, que a parte (ii) pode ser enfraquecida, como veremos mais adiante à página 126 e seguintes, definindo-se funcionais semi-contínuos inferiormente, isto é, se $f_n\to f$ então $J(f)\leq \lim\inf J(f_n)$, como no caso do funcional "comprimento de arco".

II - O PROBLEMA VARIACIONAL MAIS SIMPLES

Antes de enunciarmos o problema variacional mais simples, vamos demonstrar o seguinte

LEMA (DU BOIS - REYMOND) - Se para toda função $g(x)$ tivermos

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=0$$

com $f\in C[a,b]$, $g\in C^1[a,b]$ e $g(a)=g(b)=0$, então $f(x)\equiv 0$.

Dem: Suponhamos, por absurdo, que para algum $x_0\in[a,b]$ tenhamos $f(x_0)>0$. Por continuidade de f, teremos então $f(x)>0$ em um intervalo $[x_1,x_2]\subset[a,b]$, contendo x_0. Consideremos a função $g(x)$ definida por:

$$g(x)=\begin{cases}(x-x_1)^2(x-x_2)^2 & \text{se } x\in[x_1,x_2]\\ 0 & \text{se } x\notin[x_1,x_2]\end{cases}$$

Então,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=\int_{x_1}^{x_2} f(x)g(x)dx>0$$

o que contradiz a hipótese, e portanto devemos ter $f(x)\equiv 0$. □

COROLÁRIO - Se para toda função $g(x)$ tivermos

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx=0$$

com $f\in C^1[a,b]$, $g\in C^1[a,b]$ e $g(a)=g(b)=0$ então $f(x)=K$ (constante)

Dem: Usando integração por partes, temos

$$0=\int_a^b f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$$

e portanto

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx=0$$

e, pelo lema anterior

$$f'(x)\equiv 0$$

o que implica em

$$f(x)=K \quad \text{(constante)}$$ □

O problema mais simples do cálculo variacional, consiste na extremização do funcional

$$J(y)=\int_a^b F(x,y,y')dx$$

na classe $C^1[a,b]$ com $y(a)=A$ e $y(b)=B$, A e B números reais dados e F contínua com derivadas de primeira e segunda ordens contínuas. As hipóteses sobre F garantem a existência de $(\delta J)_y(h)$ e $(\delta^2 J)_y(h)$. No que segue, deduziremos fórmulas explícitas para as variações de J.

Suponhamos que $y+h$ seja uma variação admissível de y, isto é, $h\in C^1[a,b]$ e $h(a)=h(b)=0$. Então,

$$(\delta J)_y(h)=J(y+h)-J(y)=\int_a^b \left[F(x,y+h,y'+h')-F(x,y,y')\right]dx=$$

$$=\int_a^b \left[F_y(x,y,y')h+F_{y'}(x,y,y')h'+\text{ termos em } h^2,h'^2,\ldots\right]dx$$

e portanto

$$(\delta J)_y(h)=\int_a^b \left[F_y(x,y,y')h+F_{y'}(x,y,y')h'\right]dx$$

Se J tiver extremo em y, então, devemos ter, para todo h, $(\delta J)_y(h)=0$, isto é,

$$\int_a^b \left[F_y(x,y,y')h+F_{y'}(x,y,y')h'\right]dx=0$$

Integrando por partes, vem

$$\left[\int F_y dx\right]h\Big|_a^b-\int_a^b\left[\int F_y h'dx\right]dx+\int_a^b F_{y'}(x,y,y')h'dx=0$$

ou

$$\int_a^b\left[-\int F_y dx+F_{y'}\right]h'dx=0$$

pois, com as condições $h(a)=h(b)=0$, a primeira parcela de primeiro membro se anula.

Pelo corolário do lema anterior, concluímos que

$$-\int F_y dx+F_{y'}=K \quad \text{(constante)}$$

e, derivando esta igualdade em relação a x obtemos

$$F_y(x,y,y')-\frac{d}{dx}F_{y'}(x,y,y')=0$$

denominada EQUAÇÃO DE EULER, que representa uma condição necessária para que y seja extremante de J. A solução desta equação diferencial vai envolver duas constantes que serão determinadas pelas condições de contorno $y(a)=A$ e $y(b)=B$.

A equação acima desenvolvida fica

$$F_y-F_{xy'}-F_{yy'}y-F_{y'y'}y''=0$$

que foi publicada pela primeira vez em 1744.

Uma questão fundamental é quanto à regularidade das soluções, i ē, o que se pode afirmar sobre a existência das deri

vadas de ordens superiores das soluções? Algumas informações serão dadas pelo

TEOREMA 1 - (regularidade da solução) - Seja $y \in C^1[a,b]$, uma solução da equação de Euler, onde $F(x,y,y')$ tem derivadas de segunda ordem contínuas. Se $F_{y'y'}(x,y,y') \neq 0$, então $y \in C^2[a,b]$.

Dem:

$$\frac{d}{dx}F_{y'} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[F_{y'}(x+\Delta x, y(x+\Delta x), y'(x+\Delta x)) - F_{y'}(x,y,y')\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\Delta x \bar{F}_{y'x} + \Delta y \bar{F}_{y'y} + \Delta y' \bar{F}_{y'y'}\right] \quad \text{(T. valor médio)}$$

onde $\bar{F}_{y'x}$, $\bar{F}_{y'y'}$, e $\bar{F}_{y'y}$ indicam os valores das derivadas calculadas em pontos intermediários. Então,

$$\frac{d}{dx}F_{y'} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\bar{F}_{y'x} + \frac{\Delta y}{\Delta x}\bar{F}_{y'y} + \frac{\Delta y'}{\Delta x}\bar{F}_{y'y'}\right] =$$

$$= \bar{F}_{y'x} + y'\bar{F}_{y'y} + \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y'}{\Delta x}\bar{F}_{y'y'}$$

e, como por hipótese, $\frac{d}{dx}F_{y'}$ existe e é contínua e $\bar{F}_{y'y'} \neq 0$, concluímos que

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y'}{\Delta x} = y''$$

existe e é contínua. □

Dependendo da função $F(x,y,y')$ envolvida em cada problema específico, a equação de Euler pode tomar formas mais simples. Vamos analisar os seguintes casos:

1. F não depende de y' - A equação de Euler fica reduzida a

$$F_y(x,y)=0$$

e, nesse caso geralmente não existe solução para o problema variacional, uma vez que a equação acima não envolve constantes arbitrárias suficientes para que as condições de contorno sejam satisfeitas, como se pode ver no seguinte

EXEMPLO - Determinar a função $y\in C[a,b]$ que extremiza o funcional

$$J(y)=\int_a^b y^2 dx$$

com as condições $y(a)=\alpha$ e $y(b)=\beta$. A equação de Euler nesse caso fica

$$2y=0$$

o que implica em

$$y=0$$

Assim, o extremante $y=0$ é tal que $y(a)=y(b)=0$ e, portanto, o problema só terá solução se $\alpha=\beta=0$.

É importante notar que se não fôsse imposta a continuidade de y teríamos uma solução, a saber,

$$y(x)=\begin{cases} 0 & \text{se } x\in(a,b) \\ \\ y(a)=\alpha \quad \text{e} \quad y(b)=\beta \end{cases}$$

2. F depende linearmente de y' - Supondo que F se escreva como

$$F(x,y,y')=G(x,y)+H(x,y)y'$$

a equação de Euler toma a forma

$$\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial x} = 0$$

No entanto, a curva dada por esta equação não satisfaz, em geral as condições de contorno, e consequentemente, o problema pode não ter solução na classe das funções contínuas. Se, por outro lado,

$$\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial x} \equiv 0 \ ,$$

a expressão $Gdx+Hdy$ é uma forma diferencial exata e, o funcional

$$J(y)=\int_{x_0}^{x_1}(G(x,y)+H(x,y)y')dx=\int_{x_0}^{x_1}Gdx+Hdy$$

independe das curvas que ligam os pontos considerados, e portanto, seu valor é constante sobre todas as curvas admissíveis, o que torna o problema sem sentido.

EXEMPLO - Vamos extremizar o funcional

$$J(y)=\int_0^1(y^2+x^2y')dx$$

com as condições $y\in C[0,1]$, $y(0)=0$ e $y(1)=a$. A equação de Euler nos dá

$$y-x=0$$

que satisfaz $y(0)=0$, mas se $a\neq 1$, o problema não tem solução.

EXEMPLO - Analisemos o funcional

$$J(y)=\int_{x_0}^{x_1}(y+xy')dx$$

com as condições $y(x_0)=y_0$ e $y(x_1)=y_1$. A equação de Euler se reduz a

$$1 - 1 = 0$$

o que significa que o integrando é uma forma diferencial exata, ou seja,

$$ydx+xdy=D(xy)$$

e, portanto,

$$J(y)=x_1y_1-x_0y_0$$

independendo pois, do caminho que liga os pontos. Assim, o problema acima não tem sentido.

3. F depende somente de y' - Nesse caso, a equação de Euler tem a forma

$$F_{y'y'}y'' = 0$$

e então, devemos ter

$$y'' = 0 \quad \text{ou} \quad F_{y'y'} = 0$$

Se $y''=0$, vem por integração

$$y(x)=k_1x+k_2$$

Se $F_{y'y'}=0$, esta equação pode ter raízes reais $y'=k_i$, o que implica em

$$y(x)=k_ix+c$$

Logo o segundo caso está analisado no primeiro, e os extremantes para tais funcionais são retas.

EXEMPLO - O funcional "comprimento de arco"

$$J(y)=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

têm para extremantes as retas que satisfazem as condições de contorno.

4. F não depende de y - Nêsse caso, a equação de Euler fica reduzida a

$$\frac{d}{dx}F_{y'}(x,y')=0$$

e, por integração, obtemos

$$F_{y'}(x,y')=k_1 \quad \text{(constante)}$$

EXEMPLO - Consideremos o funcional

$$J(y)=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{x}\,dx$$

para o qual, a equação de Euler será

$$\frac{y'}{x\sqrt{1+y'^2}}=k_1$$

Fazendo a mudança de variável

$$y'=\text{tg } t,$$

temos

$$x=\frac{1}{k_1}\,\text{sen } t$$

e, como $dy=\text{tg } t\,dx=\frac{1}{k_1}\text{tg } t\cos t\,dt=\frac{1}{k_1}\,\text{sen } t\,dt$, vem

$$y = -\frac{1}{k_1}\cos t + k_2 = -\frac{1}{k_1}(\sqrt{1-\text{sen}^2 t}) + k_2$$

e, logo,

$$(y-k_2)^2 = \frac{1}{k_1^2}(1 - k_1^2 x^2)$$

ou,

$$x^2 + (y-k_2)^2 = \frac{1}{k_1^2}$$

o que constitui uma família de circunferências do plano, com centro no eixo-x. Pode-se determinar o centro e o raio pelas condições de contorno.

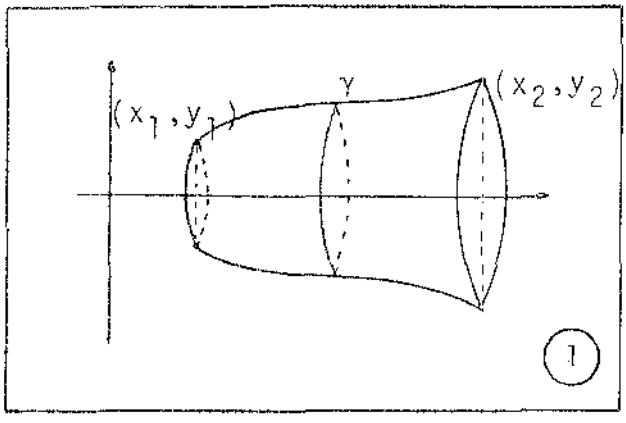
5. F não depende de x - Assim, a equação de Euler tem a forma

$$F_y - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0$$

que, multiplicada por y', se torna

$$F_y y' - F_{yy'}y'^2 - F_{y'y'}y'y'' = \frac{d}{dx}(F - y'F_{y'}) = 0 \iff F - y'F_{y'} = K \ (c\underline{te})$$

EXEMPLO - (Superfície mínima de revolução) - Consideremos uma superfície S, obtida pela rotação em torno do eixo-x, de uma curva regular γ, que liga os pontos de coordenadas (x_1,y_1) e (x_2,y_2) do plano xy. Queremos determinar a curva γ para a qual, a superfície S tem área mínima(fig 1).



Do cálculo diferencial e integral, sabemos que a área total da superfície S é dada por

$$A=2\pi\int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

quando a curva γ é dada por uma equação do tipo $y=y(x)$.

Um extremante para o funcional A, deve satisfazer a equação de Euler, que, no caso em que o integrando não depende de x, fica

$$F-y'F_{y'}=a \iff y\sqrt{1+y'^2} - \frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = a \quad (a \text{ constante})$$

ou

$$\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = a$$

Fazendo a substituição $y'=\operatorname{senh} t$, obtemos $y=a\cosh t$, e então,

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{a\operatorname{senh} t\,dt}{\operatorname{senh} t} = a\,dt \iff x = at + b$$

Logo, obtemos as equações paramétricas

$$x = at + b \quad e \quad y = a\cosh t$$

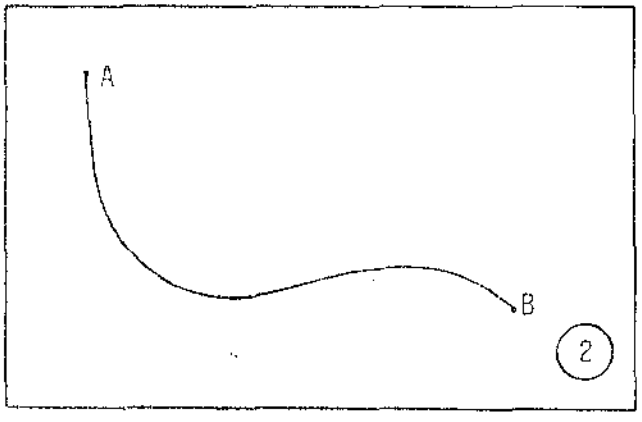
de uma família de catenárias do plano xy. As constantes de integração a e b, podem ser determinadas pelas condições de contorno

$$y(x_1)=y_1 \quad e \quad y(x_2)=y_2$$

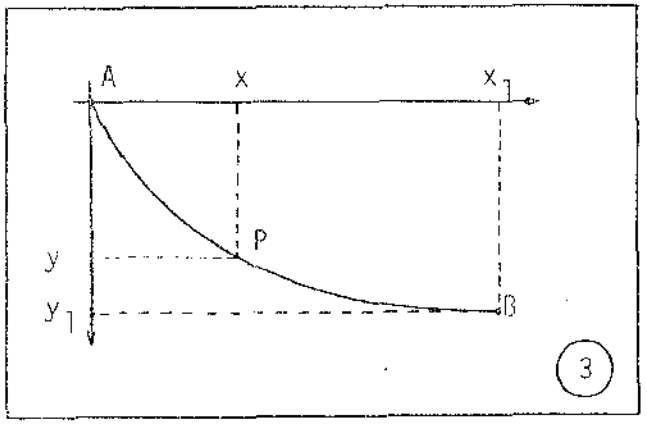
APLICAÇÕES FÍSICAS

1. O PROBLEMA DA BRACHISTOCHRONE

Em 1696, Johann Bernoulli propôs o problema da brachistochrone (do grego, brachistos=menor, chronos=tempo), que consiste em se determinar a curva que une dois pontos A e B, não situados na mesma reta vertical, através da qual, uma partícula se desloca de A até B, somente sob a ação da gravidade, no menor tempo possível(fig 2). Tal curva não é o segmento de reta de extremos A e B, mesmo sendo este o caminho de menor comprimento ligando os dois pontos, pois a aceleração através deste segmento seria relativamente pequena.



A solução deste problema foi dada por J Bernoulli, I. Bernoulli, G. Leibniz, e I. Newton. A curva que dá o tempo mínimo para o movimento da partícula é uma ciclóide(fig 3).



Suponhamos que o ponto A está na origem do sistema de coordenadas, e que aí a energia potencial seja nula. Em um ponto P(x,y), desprezando-se a resistência do ar, temos a energia cinética T, e a energia potencial V dadas por

$$T=\frac{1}{2}\,m\,v^2 \qquad e \qquad V=-mgy$$

Como há conservação de energia devemos ter

$$T+V=0$$

pois, na origem esta soma vale zero. Daí vem então:

$$v=\frac{ds}{dt}=\sqrt{2gy}$$

ou

$$dt=\frac{ds}{\sqrt{2gy}}=\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}\,dx$$

e, integrando,

$$t(y(x))=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}}\,dx$$

com $y(0)=0$ e $y(x_1)=y_1$.

Como a função $F(x,y,y')$, sob a integral não depende de y', a equação de Euler será do tipo

$$F-y'F_{y'}=c \text{ (constante)}$$

o que, para o nosso problema fica:

$$\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}}-\frac{(y')^2}{\sqrt{y(1+(y')^2)}}=c$$

que, simplificada torna-se

$$y(1+y'^2)=c_1 \quad (\text{onde } c_1=\frac{1}{c^2})$$

Vamos introduzir agora o parâmetro τ, fazendo $y'=\cotg\tau$ e, assim obtemos

$$y = \frac{c_1}{1+\cotg^2\tau} = c_1\sen^2\tau = \frac{c_1}{2}(1-\cos 2\tau)$$

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{2c_1\sen\tau\cos\tau\, d\tau}{\cotg\tau} = 2c_1\sen^2\tau\, d\tau = c_1(1-\cos 2\tau)d\tau$$

e, integrando, vem

$$x = c_1(\tau-\frac{\sen 2\tau}{2})+c_2 = \frac{c_1}{2}(2\tau-\sen 2\tau)+c_2$$

e, então as equações paramétricas da curva procurada são

$$x-c_2 = \frac{c_1}{2}(2-\sen 2\tau) \quad \text{e} \quad y = \frac{c_1}{2}(1-\cos 2\tau)$$

Substituindo o parâmetro 2τ por s e, fazendo $c_2=0$ pois $y(0)=0$, obtemos as equações de uma família de ciclóides

$$x = \frac{c_1}{2}(s-\sen s) \quad \text{e} \quad y = \frac{c_1}{2}(1-\cos s)$$

A constante c_1 pode ser determinada impondo-se a condição $y(x_1)=y_1$, fixando-se então uma ciclóide dessa família.

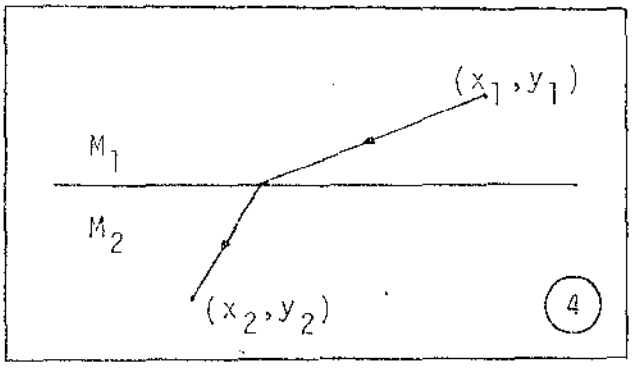
2. ÓTICA GEOMETRICA

O problema da brachistochrone foi resolvido por Johann Bernoulli, com a aplicação das leis da ótica geométrica. Seu método de solução baseia-se no princípio de Fermat: "O tempo de-

corrido na passagem da luz entre dois pontos fixos é um MÍNIMO com respeito aos possíveis caminhos que ligam esses pontos".

(a) Lei da refração da luz (Lei de Snell)

O princípio de Fermat implica em que o caminho que a luz percorre entre dois pontos fixos, num meio oticamente homogêneo, é um segmento de reta ligando esses pontos. Como a velocidade da luz é a mesma em dois pontos do mesmo meio, o tempo mínimo equivale ao comprimento mínimo. Então, no estudo da passagem da luz entre dois meios contíguos M_1 e M_2, consideraremos como possíveis caminhos, apenas as poligonais formadas por um par de segmentos de reta com o ponto de conexão sobre a fronteira dos dois meios (fig 4).



Aplicaremos o princípio de Fermat na passagem da luz do ponto (x_1,y_1), do meio M_1 ao ponto (x_2,y_2), do meio M_2. Suponhamos que os dois meios sejam separados pela reta $y=y_0$, e que as velocidades da luz nos meios M_1 e M_2 sejam respectivamente u_1 e u_2. Sendo (x,y_0), o ponto de intersecção de um caminho qualquer do tipo considerado, com a reta que separa os dois meios, vemos que o tempo decorrido na passagem da luz, é dado por

$$T=\frac{\sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y_0)^2}}{u_1}+\frac{\sqrt{(x-x_2)^2+(y_0-y_2)^2}}{u_2}$$

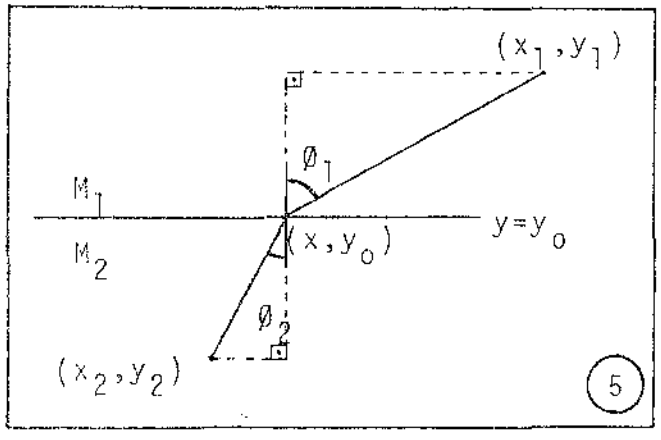
Pelo princípio de Fermat, o caminho real que a luz

percorre dá um mínimo para o tempo T e, portanto, é caracterizado pelo valor de x tal que

$$\frac{dT}{dx} = 0$$

ou,

$$\frac{dT}{dx} = \frac{x_1 - x}{u_1\sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y_0)^2}} - \frac{x-x_2}{u_2\sqrt{(x-x_2)^2+(y_0-y_2)^2}} = 0$$

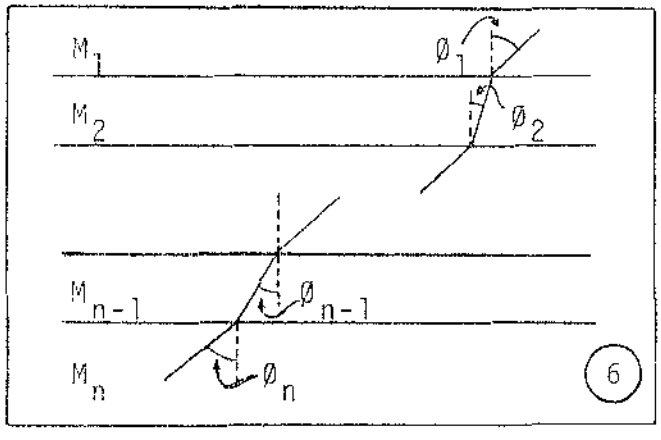


o que de acordo com a figura 5 ao lado , equivale a

(1.) $$\frac{\text{sen } \emptyset_1}{u_1} = \frac{\text{sen } \emptyset_2}{u_2}$$

Esse resultado é conhecido como LEI DE SNELL de refração da luz na interface de dois meios homogêneos.

Consideremos agora, um conjunto de n meios homogêneos $M_1, M_2, \ldots, M_n$, de faces paralelas e suponhamos que a luz tem velocidade u_j no meio M_j, $(j=1,2,\ldots,n)$(fig 6).



Neste caso a Lei de Snell fica:

(2.) $$\frac{\text{sen } \emptyset_1}{u_1} = \frac{\text{sen } \emptyset_2}{u_2} = \ldots = \frac{\text{sen } \emptyset_n}{u_n}$$

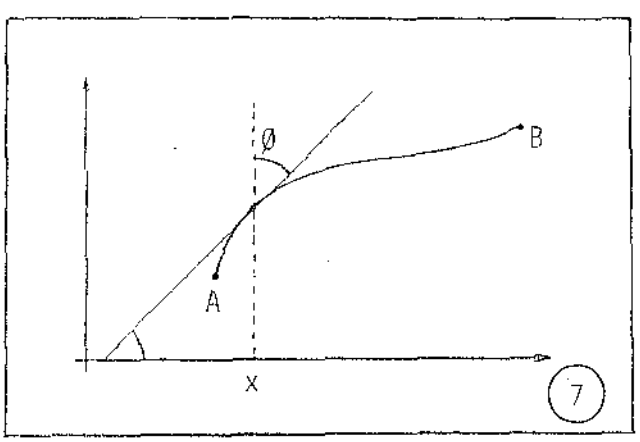
Vamos considerar agora um único meio M, não homogêneo

oticamente, no qual, a velocidade da luz é uma função contínua de y (u=u(y)). Assumimos ainda que o meio M é oticamente isotrópico isto é, a velocidade da luz em cada ponto independe da direção.

Para obtermos a lei que dá a configuração de um raio de luz que liga os pontos A e B, do meio M, aproximamos M por uma sequência de meios homogêneos $M_1, M_2, \ldots, M_n$, como na figura 6. A velocidade da luz em M_j é escolhida como sendo u(y) em algum ponto entre as linhas que limitam esse meio.

O caminho da luz através dessa sequência de meios, será uma poligonal que dá uma aproximação do caminho real do raio.

Fazendo n crescer, a largura de cada faixa se aproxima de zero e a relação (2.) se aplica a cada estágio do processo. No limite, quando a aproximação é perfeita, essa relação descreve em cada ponto, a direção da tangente ao caminho real do raio luminoso em M. Então, podemos escrever



$$(3.) \qquad \frac{\operatorname{sen} \emptyset}{u} = K$$

onde K é uma constante determinada pelas propriedades físicas do meio e as funções Ø e u dependem continuamente de y (fig 7).

Se y=y(x) é a equação de um caminho de luz em M, temos y'(x)=cotg Ø e então

$$(4.) \qquad \operatorname{sen} \emptyset = \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}$$

e, comparando (3.) com (4.) obtemos

(5.) $$\frac{1}{u\sqrt{1+(y')^2}} = K$$

Elevando ao quadrado e simplificando, vem

(6.) $$x = \pm K \int \frac{u\,dy}{\sqrt{1-K^2u^2}}$$

(b) O princípio de Fermat e o cálculo variacional

Podemos chegar aos resultados anteriores com o uso do cálculo variacional. Supondo que y=y(x) seja a equação de um caminho luminoso num meio em que a velocidade da luz - u=u(y) - varia continuamente, sabemos que a trajetória real é aquela que minimiza o funcional

(7.) $$T = \int_{x_1}^{x} 2\frac{\sqrt{1+y'^2}}{u}dx$$

pois,

$$\frac{ds}{dT} = u \quad \Rightarrow \quad dT = \frac{ds}{u} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{u}dx$$

Usando a equação de Euler, temos

$$\frac{y'^2}{u\sqrt{1+y'^2}} - \frac{\sqrt{1+y'^2}}{u} = c_1$$

pois a função

$$F(x,y,y') = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{u}$$

não depende explìcitamente de x. Logo, fazendo $K=-c_1$, vem

$$\frac{1}{u\sqrt{1+y'^2}} = k$$

recaindo em (5.), e a solução será

$$x = \pm k \int \frac{u\,dy}{\sqrt{1-k^2u^2}}$$

OBSERVAÇÃO - No caso particular em que $u(y) = \sqrt{2g(y-y_0)}$, (7.) se transforma na integral que resolve o problema da BRACHISTOCHRONE.

Para caracterizarmos melhor os extremos do funcional mais simples, vamos estudar

A SEGUNDA VARIAÇÃO $(\delta^2 J)_y(h)$ - Consideremos ainda o funcional

$$J(y)=\int_a^b F(x,y,y')dx$$

onde F tenha derivadas parciais contìnuas atê terceira ordem. Seja $h\in C^1[a,b]$ com $h(a)=h(b)=0$. Pela fórmula de Taylor, temos

$$F(x,y+h,y'+h')-F(x,y,y')=$$

$$=hF_y+h'F_{y'}+\frac{1}{2}\,h^2F_{yy}+2hh'F_{yy'}+h'^2F_{y'y'} +$$

$$+ \text{ infinitêsimos de ordem superior}$$

Definimos então

$$(\delta^2 J)_y(h)=\frac{1}{2}\int_a^b \left[h^2F_{yy}+2hh'F_{yy'}+h'^2F_{y'y'}\right]dx \ ,$$

como a segunda variação de J em y com relação a h, e então,

$$(\Delta J)_y(h)=(\delta J)_y(h)+(\delta^2 J)_y(h)+\varepsilon\|h\|^2$$

onde $\varepsilon\to 0$ se $\|h\|\to 0$.

TEOREMA 2 - Se o funcional

$$J(y)=\int_a^b F(x,y,y')dx$$

tem um mínimo em y_0, então

$$(\delta^2 J)_{y_0}(h)\geq 0 \ .$$

Dem: Suponhamos que J tem diferencial de segunda ordem no espaço em que é definido. Logo, podemos escrever

$$(\Delta J)_{y_0}(h)=(\delta J)_{y_0}(h)+(\delta^2 J)_{y_0}(h)+\varepsilon\|h\|^2$$

e, como y_0 é ponto de mínimo, vem

$$(\delta J)_{y_0}(h)=0$$

Suponhamos, por absurdo, que $(\delta^2 J)_{y_0}(h)<0$ para algum h admissível. Então, para ε suficientemente pequeno, devemos ter $(\Delta J)_{y_0}(h)<0$, ou seja,

$$J(y_0+h)>J(y_0),$$

o que contraria a definição de mínimo, e portanto temos

$$(\delta^2 J)_{y_0}(h)\geq 0 \qquad \square$$

Notemos que, até aqui, vimos apenas condições necessá-

rias para a existência de extremos do funcional mais simples. Uma condição suficiente é dada no seguinte

TEOREMA 3 - Suponhamos que o funcional

$$J(y)=\int_a^b F(x,y,y')dx$$

seja diferenciável até segunda ordem, $(\delta J)_{y_0}=0$ ($\forall$ h admissível), e que exista uma constante positiva k tal que

$$(\delta^2 J)_{y_0}(h)\geq k\|h\|^2.$$

Nestas condições, J atinge mínimo em y_0.

Dem: Como

$$(\Delta J)_{y_0}(h)=(\delta J)_{y_0}(h)+(\delta^2 J)_{y_0}(h)+\epsilon\|h\|^2$$

e

$$(\Delta J)_{y_0}(h)\geq k\|h\|^2+\epsilon\|h\|^2 = (k+\epsilon)\|h\|^2\geq 0,$$

vem

$$J(y_0+h)-J(y_0)\geq 0$$

e, então concluímos que y_0 é ponto de mínimo para J. □

OBSERVAÇÃO - Para máximo a demonstração é análoga, bastando mudar os sinais.

Continuemos analisando a segunda variação de J, resolvendo por partes, a integral

$$\int_a^b hh'F_{yy'}dx = \frac{h^2}{2}F_{yy'}\Big|_a^b - \int_a^b \frac{h^2}{2}\frac{d}{dx}F_{yy'}dx$$

com o que podemos transformar a expressão

$$(\delta^2 J)_y(h)=\frac{1}{2}\int_a^b\left[h^2F_{yy}+2hh'F_{yy'}+h'^2F_{y'y'}\right]dx$$

em

$$(\delta^2 J)_y(h)=\frac{1}{2}\int_a^b\left[F_{y'y'}h'^2+(F_{yy}-\frac{d}{dx}F_{yy'})h^2\right]dx$$

e, fazendo

$$P=\frac{1}{2}F_{y'y'} \qquad e \qquad Q=\frac{1}{2}(F_{yy}-\frac{d}{dx}F_{yy'}),$$

vem

$$(\delta^2 J)_y(h)=\int_a^b(Ph'^2+Qh^2)dx$$

LEMA - Se $(\delta^2 J)_y(h)\geq 0$ para todo h admissível, então

$$F_{y'y'}(x,y,y')\geq 0$$

Dem: Segundo a notação acima, temos

$$\int_a^b(Ph'^2+Qh^2)dx\geq 0$$

e, queremos mostrar que $P(x)>0$, para todo x.

Suponhamos, por absurdo, que $P(x_0)<0$, para algum x_0. Então, no intervalo $I=[x_0-\pi/n,\ x_0+\pi/n]$ temos $P(x)<-\alpha$, para n suficiente grande e $\alpha>0$. Seja h(x) definida por

$$h(x)=\begin{cases}\operatorname{sen}^2 n(x-x_0) & \text{se } x\in I\\ 0 & \text{se } x\notin I\end{cases}$$

Então

$$\int_a^b \left[Ph'^2+Qh^2\right]dx < \int_{x_0-\frac{\pi}{n}}^{x_0+\frac{\pi}{n}} \left[-\alpha n^2 \operatorname{sen}^2(2n(x-x_0))+Q\operatorname{sen}^4(n(x-x_0))\right]dx \leq$$

$$\leq -\alpha n^2 \int_{x_0+\frac{\pi}{n}}^{x_0-\frac{\pi}{n}} \operatorname{sen}^2(2n(x-x_0))dx + \frac{2\pi}{n} \max |Q| = -\alpha n\pi + \frac{2K\pi}{n}$$

onde $K=\max|Q|$. Fazendo n suficiente grande, temos

$$\int_a^b \left[Ph'^2+Qh^2\right]dx<0$$

o que contraria a nossa hipótese. Logo, devemos ter $P(x)>0$.

Do lema acima e do teorema 2 decorre o

<u>TEOREMA 4 - (Legendre)</u> Se $y_0=y_0(x)$ é ponto de mínimo para o funcional

$$J(y)=\int_a^b F(x,y,y')dx$$

então, em qualquer ponto da curva y_0 temos

$$F_{y'y'}(x,y_0,y_0')\geq 0.$$

OBSERVAÇÃO - Vimos no teorema 1 que, se $y=y(x)$ é solução da equação de Euler

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$$

onde F tem derivadas parciais contínuas até segunda ordem, então, $y=y(x)$ tem derivada contínua em todos os pontos para os quais

$$F_{y'y'}(x,y,y') \neq 0.$$

Como consequência, o extremal $y=y(x)$ só pode ter pontos angulosos quando $F_{y'y'}(x,y,y')=0$. Notemos também que a equação de Euler para o funcional mais simples é uma equação diferencial de segunda ordem e portanto, suas soluções deveriam ter segunda derivada. Isto não necessariamente acontece como mostra o seguinte

EXEMPLO - Consideremos o seguinte funcional:

$$J(y)=\int_{-1}^{1} y^2(1-y'^2)dx$$

com as condições $y(-1)=0$ e $y(1)=1$. Portanto $J(y)\geq 0$ e, um mínimo para J será alcançado em

$$y_0(x)=\begin{cases} 0 \text{ se } x\in[-1,0] \\ \\ x \text{ se } x\in[0,1] \end{cases}$$

Ainda que $y_0(x)$ não tenha derivada segunda, satisfaz a equação de Euler, que fica:

$$2y_0(1-y_0')^2+\frac{d}{dx}(2y_0^2(1-y_0'))=0$$

Logo, para $y_0(x)$, a equação de Euler é uma identidade, mesmo não existindo $y_0''(x)$. Neste caso, temos

$$F_{y'y'}\Big|_{y=y_0} = 2y_0^2$$

que se anula em todos os pontos do intervalo $[-1,0]$ e o extremante tem ponto anguloso em $x=0$.

O exemplo seguinte mostra que é possível obter um extremante $y_1=y_1(x)$ para um funcional J tal que, apesar de valer

$$F_{y'y'}\Big|_{y=y_1}=0,$$

para alguns pontos, $y_1=y_1(x)$ não tem pontos angulosos.

EXEMPLO - Consideremos o funcional

$$J(y)=\int_{-1}^{1} y^2(2x-y')^2dx$$

com as condições $y(-1)=0$ e $y(1)=1$. Também nesse caso temos $J(y)\geq 0$, e a função

$$y_1(x)=\begin{cases} 0 & \text{se } -1\leq x\leq 0 \\ x^2 & \text{se } 0\leq x\leq 1 \end{cases}$$

é um extremante para J, a equação de Euler é satisfeita

$$2y(2x-y')^2+\frac{d}{dx}(2y^2(2x-y'))=0$$

e, além disso,

$$F_{y'y'}\Big|_{y=y_1}=2y_1^2$$

que se anula no intervalo $[-1,0]$, mas $y_1(x)$ não possui pontos angulosos.

III - FUNCIONAIS MAIS GERAIS

(a) Vamos estudar agora funcionais do tipo

$$J(y_1(x),y_2(x),\ldots,y_n(x))=\int_{x_o}^{x_1} F(x,y_1,y_2,\ldots,y_n,y_1',y_2',\ldots,y_n')dx$$

com as condições de contorno dadas

$$y_1(x_o)=y_{1o},\ y_2(x_o)=y_{2o},\ldots,y_n(x_o)=y_{no}$$

$$y_1(x_1)=y_{11},\ y_2(x_1)=y_{21},\ldots,y_n(x_1)=y_{n1}$$

Fixando-se (n-1) das funções $y_j(x)$, podemos ver o funcional J como dependente de apenas uma função $y_i(x)$. Para esta, temos a equação de Euler

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx}(F_{y_i'}) = 0$$

e, o mesmo é válido para as outras funções $y_j(x)$, o que nos fornece um sistema de equações de Euler

$$F_{y_1} - \frac{d}{dx}(F_{y_1'}) = 0$$

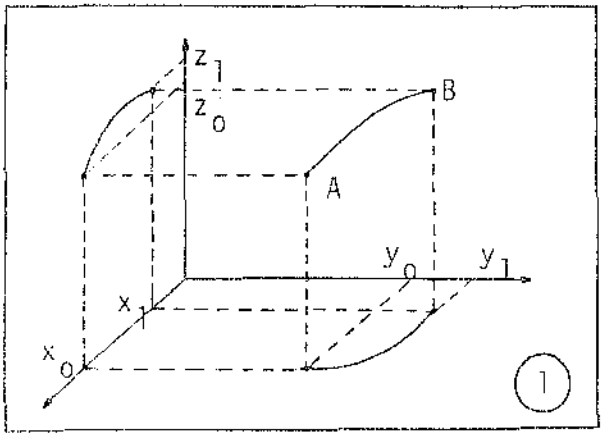
$$F_{y_2} - \frac{d}{dx}(F_{y_2'}) = 0$$

$$\vdots$$

$$F_{y_n} - \frac{d}{dx}(F_{y_n'}) = 0$$

que, em geral, define uma família de curvas integrais no espaço $(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)$, dependentes de 2n parâmetros. Tal família é chamada <u>família de extremais de J.</u>

EXEMPLO 1 - Suponhamos que o funcional J tenha a forma



$$J(y(x),z(x)) = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,z,y',z')dx$$

com as condições

$$y(x_0)=y_0 \qquad z(x_0)=z_0$$

$$y(x_1)=y_1 \qquad z(x_1)=z_1$$

Neste caso, o sistema de equações de Euler será

$$F_y - \frac{d}{dx}(F_{y'}) = 0$$

$$F_z - \frac{d}{dx}(F_{z'}) = 0$$

que, resolvido, nos dá uma curva de R^3 como na figura 1.

EXEMPLO 2 - Vamos extremizar o funcional

$$J(y,z) = \int_0^{\pi/2}(y'^2+z'^2+2yz)dx$$

com as condições

$$y(0)=0, \quad y(\pi/2)=1, \quad z(0)=0 \quad e \quad z(\pi/2)=-1$$

Do sistema de equações de Euler, que nesse caso fica

$$y'' - z = 0$$

$$z'' - y = 0$$

obtemos, por substituição, a equação

$$y^{(4)} - y = 0$$

cujo polinômio característico é

$$P(r)=r^4-1$$

de raízes ± 1 e $\pm i$. Portanto, a solução real dessa equação será

$$y(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{x}+c_3\operatorname{sen}x+c_4\cos x$$

Como $z=y''$, vem

$$z(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{x}-c_3\operatorname{sen}x-c_4\cos x$$

e, usando as condições de contorno

$$y(0)=0 \;=\; c_1+c_2+c_4 = 0$$

$$z(0)=0 \;=\; c_1+c_2-c_4 = 0$$

$$y(\pi/2)=1 \;=\; c_1e^{-\pi/2}+c_2e^{\pi/2}+c_3 = 1$$

$$z(\pi/2)=-1 \;=\; c_1e^{-\pi/2}+c_2e^{\pi/2}-c_3 = -1$$

tiramos $c_1=c_2=c_4=0$ e $c_3=1$. Logo, a solução será dada pelas curvas

$$y(x)=\operatorname{sen}x \quad \text{e} \quad z(x)=-\operatorname{sen}x$$

(b) Consideremos agora funcionais que dependem de derivadas de ordem superior, do tipo

$$J(y) = \int_a^b F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)})\,dx$$

onde $F\in C^{n+2}[a,b]$ em relação a todas as variáveis, com as 2n condições de contorno

$$y(a)=y_0, \quad y'(a)=y_0', \quad \ldots \quad , \quad y^{(n-1)}(a)=y_0^{(n-1)}$$

$$y(b)=y_1, \quad y'(b)=y_1', \quad \ldots \quad ,y^{(n-1)}(b)=y_1^{(n-1)}$$

Os extremantes para J são tais que $(\delta J)_y(h)=0$, ie:

$$(\delta J)_y(h) = \int_a^b (F_y h+F_{y'}h'+F_{y''}h''+\ldots+F_{y^{(n)}}h^{(n)})dx = 0$$

onde h é uma curva admissível tal que $h(a)=h(b)=0$, $h'(a)=h'(b)=0$, $\ldots$, $h^{(n-1)}(a)=h^{(n-1)}(b)=0$. Temos ainda

(i) $$\int_a^b F_{y'}h'dx = F_y h\Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}F_{y'}hdx$$

(ii) $$\int_a^b F_{y''}h''dx = F_{y''}h'\Big|_a^b - \frac{d}{dx}F_{y''}h\Big|_a^b + \int_a^b \frac{d^2}{dx^2}F_{y''}hdx$$

e, assim por diante,

(ni) $$\int_a^b F_{y^{(n)}}h^{(n)}dx = F_{y^{(n)}}h^{(n-1)}\Big|_a^b - \frac{d}{dx}F_{y^{(n)}}h^{(n-2)}\Big|_a^b +\ldots+(-1)^n\int_a^b \frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}hdx$$

Observando as condições sobre h, acima vem:

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} - \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}} = 0$$

conhecida como EQUAÇÃO DE EULER-POISSON. As soluções desta equação são os extremais do funcional dado em (b).

EXEMPLO 3 - Determinar os extremais do funcional

$$J(y) = \int_{-\alpha}^{\alpha}\left[\frac{k}{2}(y'')^2+\rho y\right]dx$$

satisfazendo as condições

$$y(-\alpha)=y(\alpha)=y'(-\alpha)=y'(\alpha)=0$$

Neste caso, a equação de Euler-Poisson será

$$\rho + \frac{d^2}{dx^2}(ky'') = 0$$

ou

$$y^{(4)} = -\frac{\rho}{k}$$

do que obtemos

$$y(x) = -\frac{\rho}{24k}x^4 + \frac{c_1}{6}x^3 + \frac{c_2}{2}x^2 + c_3x + c_4$$

Usando as condições de contorno, vem

$$y(x) = -\frac{\rho}{24k}(x^2-\alpha^2)^2$$

(c) Vamos analisar agora funcionais do tipo

$$J(z(x,y)) = \iint_D F(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y})dxdy$$

para os quais o problema proposto consiste em se determinar uma função $z=z(x,y)$ que assume sobre a curva Γ (fronteira de D), os valores dados por $z(x,y)=z_0(x,y)$ e que dá um mínimo para J. Para isto, vamos supor que D é uma região simplesmente conexa, Γ é uma curva retificável, $F\in C^3$, e $z\in C^2[D]$.

Consideremos os conjuntos:

$$E=\left\{z=z(x,y) \text{ com } z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y} \text{ contínuas } \middle|\ z(x,y)=z_0(x,y) \text{ em } \Gamma \middle|\ J(z) \text{ é mínimo}\right\}$$

$$E_t=\left\{z=z(x,y,t) \ \middle|\ z(x,y,0)\in E \text{ e } z(x,y,t) = z_0(x,y) \text{ em } \Gamma\right\}$$

Para as funções de E_t o funcional J se reduz a uma função de t, que assume mínimo para t=0, isto é,

$$\left.\frac{dJ}{dt}\right|_{t=0} = 0$$

o que equivale a $(\delta J)_z(h)=0$ para toda h admissível. Portanto,

$$(\delta J)_z(h) = \left[\frac{d}{dt}\iint_D F(x,y,z(x,y,t),\frac{\partial z}{\partial x}(x,y,t),\frac{\partial z}{\partial y}(x,y,t))dxdy\right]_{t=0} =$$

$$= \iint_D \left[\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial z_x}\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial t})+\frac{\partial F}{\partial z_y}\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial t})\right]dxdy = 0.$$

Fazendo a substituição $\xi=\frac{\partial z}{\partial t}$, vem

(1.) $$\iint_D \left[\frac{\partial F}{\partial z}\xi + \frac{\partial F}{\partial z_x}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z_y}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right]dxdy = 0$$

e, pelo teorema de Green (1), fazendo

$$v = \frac{\partial F}{\partial z_x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial z_y}\vec{j} ,$$

temos

$$\iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(\xi\frac{\partial F}{\partial z_x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\xi\frac{\partial F}{\partial z_y})\right]dxdy = \int_\Gamma \xi(\frac{\partial F}{\partial z_x}dy - \frac{\partial F}{\partial z_y}dx).$$

Observando que

---

(1) [illegible] de Green "Seja D uma região cuja fronteira é formada de um número finito de curvas fechadas, [illegible] partes, e que não se interceptam duas a duas. Se [illegible] função diferenciável definida numa [illegible] que contém D e ∂D, então,

[illegible]

[illegible] integral do segundo membro é [illegible] que compõem ∂D e [illegible]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\xi\frac{\partial F}{\partial z_x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\xi\frac{\partial F}{\partial z_y}\right) = \xi\left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z_x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z_y}\right] + \left[\frac{\partial F}{\partial z_x}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z_y}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right],$$

obtemos

$$(2.) \qquad \iint_D \left[\frac{\partial F}{\partial z_x} - \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z_y}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right] dxdy = -\iint_D \xi\left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z_x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z_y}\right] dxdy +$$

$$+ \int_\Gamma \xi\left[\frac{\partial F}{\partial z_x}dy - \frac{\partial F}{\partial z_y}dx\right].$$

Como $z(x,y,t)=z_o(x,y)$ em Γ, temos

$$\xi(x,y,t) = \frac{\partial z}{\partial t} = 0$$

em Γ pois z não depende de t em Γ. Concluímos então que

$$(3.) \qquad \int_\Gamma \xi\left[\frac{\partial F}{\partial z_x}\,dy - \frac{\partial F}{\partial z_y}\,dx\right] = 0.$$

Substituindo-se (2.) e (3.) em (1.), vem

$$\iint_D \xi\left[\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z_y}\right] dxdy = 0$$

o que é válido para toda $\xi=\xi(x,y)$ contínua, com primeira derivada contínua, e tal que $\xi(x,y)=0$ se $(x,y)\in\Gamma$. Portanto, pelo lema de Du Bois-Reymond para funções de duas variáveis, deve ser satisfeita a equação

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z_y} = 0$$

conhecida como equação de EULER-OSTROGRADSKI (deduzida em 1834).

Demonstramos assim, o seguinte

TEOREMA 1 - Seja $F=F(x,y,z(x,y),\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y})$ contínuas com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em cada variável, e $z=z(x,y)$ contínua, assim como suas derivadas $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, satisfazendo a condição $z(x,y)=z_0(x,y)$ sobre Γ (onde $\Gamma=\partial D$ é uma curva fechada retificável). Se $z=z(x,y)$ é ponto de mínimo para

$$J(z(x,y)) = \iint_D F(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y})dxdy$$

onde D é uma região simplesmente conexa limitada por Γ, então, é necessário que $z=z(x,y)$ satisfaça a equação diferencial

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z_y} = 0$$

EXEMPLO - Extremizar o funcional

$$J(z(x,y)) = \iint_D \left[(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2\right]dxdy$$

com z satisfazendo a condição $z=f(x,y)$ em Γ. A equação de Euler-Ostrogradski toma a forma

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \text{ (Equação de Laplace)}$$

Em outras palavras, queremos encontrar uma função z, satisfazendo

1- $\Delta z=0$

2- $z=f(x,y)$ em $\Gamma=\partial D$

3- z é contínua em D

O problema acima é conhecido como PROBLEMA DE DIRICHLET - um dos problemas básicos da Física-Matemática.

EXEMPLO - Para o funcional

$$J(z(x,y)) = \iint_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 2zf(x,y) \right] dxdy$$

com $z=z(x,y)$ satisfazendo certas condições de contorno em ∂D e $f(x,y)$ dada, a equação de Euler-Ostrogradsky fica

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x,y)$$

ou, mais resumidamente,

$$\Delta z = f(x,y)$$

conhecida como equação de Poisson.

APLICAÇÕES FÍSICAS

1. DINÂMICA DE PARTÍCULAS

O que aparece neste tópico é baseado apenas no conhecimento de conceitos elementares de dinâmica de partículas, sem portanto requerer profundos conhecimentos de física.

(a) Energia potencial - Energia cinética - Coordenadas generalizadas.

Consideremos um sistema de p partículas submetidas a vínculos geométricos dados e sujeitas a forças que são funções apenas das posições das partículas, por exemplo, vínculos geométricos

que não variam com o tempo podem consistir no confinamento de algumas partículas a dadas curvas ou superfícies.

Vamos supor que a força que age sobre a j-ésima partícula, de coordenadas (x_j,y_j,z_j), tem componentes cartesianas

$$F_x^j,\ F_y^j,\ F_z^j$$

funções das 3p coordenadas $x_1,y_1,z_1,\ldots,x_p,y_p,z_p$ das partículas do sistema.

É de nosso interêsse considerar um tipo especial de sistema de forças - sistema conservativo - para o qual existe uma função $V=V(x_1,y_1,z_1,\ldots,x_p,y_p,z_p)$, da qual podemos derivar as 3p componentes das forças

(1.) $$F_x^j = -\frac{\partial V}{\partial x_j}\ ,\quad F_y^j = -\frac{\partial V}{\partial y_j}\ \text{e}\ F_z^j = -\frac{\partial V}{\partial z_j}$$

para $j=1,2,\ldots,p$. A função V é chamada ENERGIA POTENCIAL do sistema, cuja existência não temos interêsse em questionar aqui.

Para o nosso propósito, um problema de dinâmica de partículas envolve três elementos:

(i) O número e as respectivas massas das partículas.

(ii) Os vínculos geométricos sobre as partículas.

(iii) A função energia potencial V.

A ENERGIA CINÉTICA de uma partícula é definida por

$$T = \frac{1}{2}\, m\, \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\, m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$$

onde m é a massa da partícula e $\frac{ds}{dt}$ é o módulo de seu vetor velocidade.

Assim sendo, a energia cinética de um sistema de p partículas será dada pela soma

$$(2.) \qquad T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{p} m_j(\dot{x}_j^2+\dot{y}_j^2+\dot{z}_j^2)$$

e, como as massas nunca são negativas, concluimos que $T>0$ e $T=0$ se e só se o sistema está em repouso.

O efeito dos vínculos sobre um sistema de p partículas é a redução do número de coordenadas independentes para descrever o movimento. Se os vínculos são completamente especificados por k equações independentes e consistentes do tipo

$$(3.) \qquad \phi_i(x_1,y_1,z_1,\ldots,x_p,y_p,z_p)=0$$

para $i=1,2,\ldots,k<3p$, o número de variáveis independentes é $3p-k$ e as equações acima podem ser usadas, pelo menos em princípio, para eliminar as restantes k variáveis do problema. Contudo, é mais conveniente a introdução de um conjunto de $3p-k=N$ variáveis independentes $q_1,q_2,\ldots,q_N$, através do qual são descritas as posições de todas as partículas. Dessa forma, as equações de vínculos são substituídas por um sistema equivalente de 3p equações

$$(4.) \quad x_j=x_j(q_1,\ldots,q_N), \quad y_j=y_j(q_1,\ldots,q_N) \quad z_j=z_j(q_1,\ldots,q_N)$$

$$j=1,\ldots,p$$

As variáveis $q_1,q_2,\ldots,q_N$ são conhecidas como COORDENADAS GENERALIZADAS, e as equações acima estabelecem conjuntamente as posições das partículas e os vínculos geométricos impostos so-

bre elas.

A escolha do conjunto de coordenadas generalizadas para um certo sistema não é feita de modo único, porém, o número de tais coordenadas é perfeitamente determinado; é o menor número de variáveis que descrevam completamente a configuração do sistema, uma vez conhecidos os vínculos geométricos. Por exemplo, uma partícula confinada a uma superfície tem associadas a ela duas coordenadas generalizadas e uma conveniente escolha seria um par de coordenadas de superfície. Se uma partícula é obrigada a se mover ao longo de uma curva, precisamos de uma única coordenada para a descrição do seu movimento; por exempo o comprimento de arco.

Para expressar a energia cinética em termos das coordenadas generalizadas, derivamos cada uma das equações de (4.) em relação ao tempo, obtendo

$$(5.) \qquad \dot{x}_j = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \dot{q}_i, \quad \dot{y}_j = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial y_j}{\partial q_i} \dot{q}_i \text{ e } \dot{z}_j = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial z_j}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

$$j = 1, \ldots, p.$$

Substituindo os resultados acima em (2.), obtemos a importante conclusão: A energia cinética é uma FORMA QUADRÁTICA nas componentes das velocidades generalizadas em que os coeficientes são funções de tais coordenadas.

No que segue, assumimos que a energia potencial V, associada a qualquer problema físico, depende apenas das coordenadas generalizadas, enquanto que a energia cinética é expressa em termos das coordenadas e das velocidades generalizadas.

(b) O princípio da mínima ação de HAMILTON - Equações de EULER - LAGRANGE.

No que segue, por simplicidade, denotaremos por q_i, o conjunto de todas as coordenadas generalizadas $q_1, q_2, \ldots, q_N$ e, analogamente por $\dot{q}_i$, o conjunto das velocidades generalizadas.

A formulação mais geral da lei do movimento dos sistemas mecânicos é dada pelo Princípio da mínima ação de Hamilton. Segundo esse princípio, cada sistema mecânico caracteriza-se por uma função determinada

$$L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$$

de tal forma que o movimento satisfaz a condição:

"Suponhamos que nos instantes t_1 e t_2 o sistema ocupe posições determinadas, caracterizadas por dois grupos de valores das coordenadas $q_i(t_1)$ e $q_i(t_2)$. Então, entre essas posições, o sistema move-se de tal modo que a integral

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L \, dt$$

possua o menor valor possível."

Esta integral representa a ação do sistema mecânico, e o seu integrando denomina-se função de Lagrange - ou Lagrangeana - do sistema dado. Observemos que tal função depende apenas das posições e velocidades das partículas, não contendo derivadas de ordem superior $\ddot{q}_i$, $\dddot{q}_i, \ldots$

Sendo conhecidas as coordenadas e velocidades generalizadas, simultâneamente, determina-se completamente o estado do sistema, o que nos permite, em princípio, predizer o seu futuro. Sob

o ponto de vista matemático, isto significa que, definidas todas as coordenadas q_i e as velocidades $\dot{q}_i$ em um certo instante, determina-se também, de modo único, o valor das acelerações $\ddot{q}_i$ nesse instante.

Vamos agora, obter por meio do princípio de Hamilton, as equações diferenciais que permitem determinar o mínimo da integral dada acima.

Por simplicidade, suponhamos que o sistema possua um grau de liberdade - isto é; N=1 - no que vamos então considerar apenas uma função q(t).

Supondo que q(t) é a função para a qual I tem o valor mínimo, concluímos que para qualquer função do tipo $q(t)+\delta(q(t))$, onde $\delta(q(t))$ é uma variação da função q(t), I tem valor maior.

Desde que para $t=t_1$ e $t=t_2$ todas as funções comparáveis $q(t)+\delta(q(t))$ devem ter os mesmos valores $q(t_1)$ e $q(t_2)$, concluímos que $\delta(q(t_1))=\delta(q(t_2))=0$.

A variação de I, ao substituirmos q por $q+\delta q$, será dada por

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} L(q+\delta q,\dot{q}+\delta\dot{q},t) - L(q,\dot{q},t)\, dt$$

e, se q(t) dá mínimo para I, devemos ter

$$\delta I = I(q+\delta q) - I(q) = 0$$

até a primeira ordem em δq. Usando a definição da ação obtemos

$$I(q+\delta q) = \int_{t_1}^{t_2} L(q+\delta q,\dot{q}+\delta\dot{q},t)dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[L(q,\dot{q},t) + \delta q \frac{\partial L}{\partial q} + \delta\dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] dt =$$

$$= I(q) + \int_{t_1}^{t_2} \left[q \frac{\partial L}{\partial q} + \delta\dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] dt.$$

Observando que $\delta\dot{q}=\frac{d}{dt}(\delta q)$ e usando integração por partes, a variação de I fica:

$$\delta I = \delta q \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \delta q \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} \right] dt$$

e, como $\delta q(t_1)=\delta q(t_2)=0$, o primeiro termo do segundo membro da igualdade acima é nulo. Assim, pela arbitrariedade de $\delta q(t)$, a condição $\delta I=0$ equivale a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

Se o sistema tiver N graus de liberdade, deverão variar independentemente no princípio da mínima ação as diversas funções $q_i(t)$, para $i=1,2,\ldots,N$.

Desse modo, obteremos N equações do tipo:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

$$i=1,2,\ldots,N$$

Estas são as equações de Euler-Lagrange, que descrevem o movimento do sistema.

(c) A lei da inércia e o princípio da relatividade de Galileu

Para a descrição dos processos que ocorrem na natureza, temos que escolher um sistema de referência, pelo que entendemos um sistema de coordenadas que serve para indicar a posição das partículas juntamente com um relógio para medir o tempo.

Em distintos sistemas de referência, as leis da natureza, e, dentre elas as do movimento, têm em geral formas diversas. Assim é que, se escolhemos um sistema de referência qualquer, pode ocorrer que até as leis mais simples tomem em tais sistemas formas bastante complexas. Naturalmente, surge a questão de se encontrar um sistema de referência no qual essas leis tomem sua forma mais simples. Para isso, vamos considerar os sistemas em relação aos quais o espaço é homogêneo e isotrópico, e o tempo uniforme. Estas condições significam que todas as posições de uma partícula livre no espaço são equivalentes e, a isotropia do espaço diz respeito à equivalência de todas as direções, isto é, não existe nenhuma direção "privilegiada". Um sistema de referência nestas condições é dito INERCIAL.

Vamos obter, nas argumentações seguintes, a conclusão de em um sistema de referência inercial, qualquer movimento livre efetua-se com velocidade constante. Esta afirmação constitui o que se denomina LEI DA INÉRCIA ou PRIMEIRA LEI DE NEWTON.

Consideremos então, uma partícula movendo-se livremente, ou seja, sem sofrer nenhuma ação exterior, em um sistema de referência inercial. Como desejamos estudar seu movimento, vamos lançar mão da equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

onde as coordenadas, neste caso, são as cartesianas usuais.

Devido à homogeneidade do espaço e do tempo, vem que a função de Lagrange L não poderá conter explicitamente o tempo t e nem o raio vetor $\vec{r}$ do ponto. Desse modo, L será função apenas da velocidade $\vec{v}$. Da isotropia do espaço resulta que L não poderá depender da direção do vetor $\vec{v}$. Assim,

$$L = L(v^2)$$

onde $v^2 = |v|^2 = \vec{v}.\vec{v}$

Por ser L independente de $\vec{r}$, obtemos

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0$$

e, então, a equação de Euler-Lagrange toma a forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right) = 0$$

do que segue

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = c(\text{constante})$$

Como $L=L(v^2)$, concluimos que $\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}$ é função somente de $\vec{v}$, e, assim vem que v é constante(o símbolo v representa o módulo da velocidade $\vec{v}$).

Passemos agora a outras considerações:

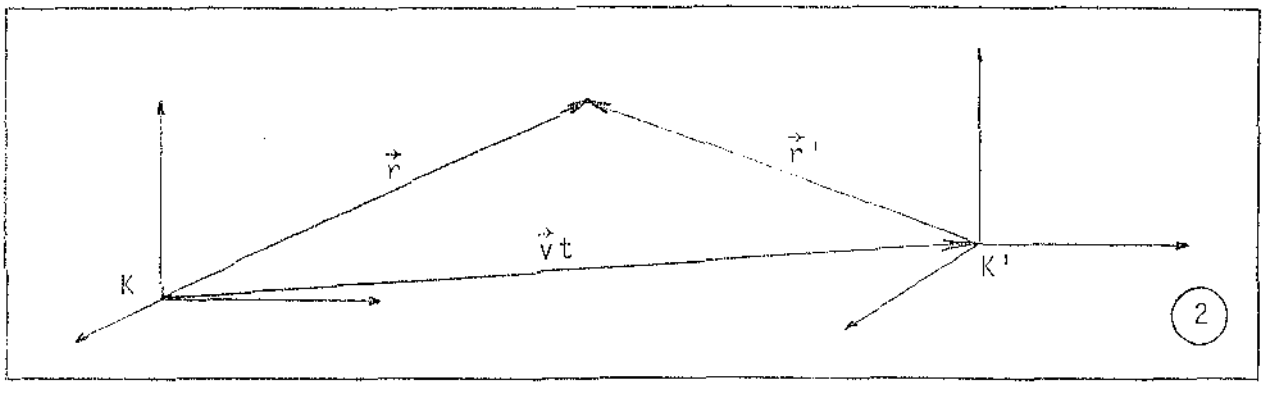
Imaginemos dois sistemas de referência que se movem, um em relação ao outro, retilínea e uniformemente. Se um deles é inercial, o outro também o será, uma vez que, qualquer movimento livre

nesse sistema se realiza com velocidade constante. Desse modo, existem tantos sistemas de referência inerciais quanto se queira, e, a condição para isso é que se movam com velocidade relativa constante.

Mostra-se, experimentalmente, que, nestes sistemas, não apenas as leis do movimento livre são iguais, mas tais sistemas são equivalentes do ponto de vista mecânico. Esta afirmação contém a essência do PRINCÍPIO DA RELATIVIDADE DE GALILEU.

Vamos agora obter as transformações de Galileu e, através dessas transformações, dar uma expressão exata do seu princípio da relatividade.

Sejam K e K', dois sistemas de referência e $\vec{r}$ e $\vec{r}'$, os vetores posição de um mesmo ponto P (fig 2).



Suponhamos que K' se move com velocidade constante $\vec{v}$, em relação a K. Segue então que

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}t$$

no que subentende-se que a contagem do tempo é a mesma para ambos os sistemas, isto é, t=t' (hipótese de que o tempo é absoluto).

As relações

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}t \qquad e \qquad t = t'$$

são chamadas "Transformações de Galileu"

O princípio da Relatividade de Galileu pode ser expresso do seguinte modo: "As leis da mecânica devem ser tais que fiquem invariantes frente a estas transformações".

Se derivarmos a primeira das relações acima em relação ao tempo t, obtemos a lei de composição de velocidades nos dois sistemas:

$$\vec{v}_K = \vec{v}_{K'} + \vec{v}$$

e, derivando mais uma vez, vem

$$\vec{a}_K = \vec{a}_{K'}$$

já que $\vec{v}$ é constante.

Isto nos mostra que a aceleração de uma partícula é idêntica nos dois sistemas; assim, se em K vale a lei $\vec{F}=m\vec{a}$, o mesmo acontece em K'.

(d) A lei fundamental da dinâmica de uma partícula

Suponhamos que uma partícula - em um campo gravitacional, por exemplo - se move livremente de um ponto a outro sem a ação de forças externas. Uma vez lançada para cima, a partícula sobe e desce. Vamos mostrar que a trajetória que tem a mínima ação é aquela que satisfaz a clássica lei de Newton: $\vec{F}=m\vec{a}$.

Por simplicidade, faremos o raciocínio no caso em que o movimento é unidimensional e, se passa num campo conservativo. Assim, as forças atuantes derivam de um potencial.

Como sabemos, a equação de Euler-Lagrange rege o movi-

mento da partícula e, no nosso caso, a função de Lagrange é dada por

$$L(q,\dot{q},t) = \frac{m}{2}\,\dot{q}^2 - V(q,t)$$

da qual tiramos

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial q}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\,\dot{q}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = m\,\ddot{q}$$

e, usado a equação de Euler-Lagrange vem

$$-\frac{\partial V}{\partial q} = m\,\ddot{q}$$

Fazendo

$$F(q) = -\frac{\partial V}{\partial q}$$

obtemos então:

$$F(q) = m\,\ddot{q}$$

EXEMPLO - Consideremos um tubo horizontal que gira em torno de um eixo vertical com velocidade angular constante. Dentro do tubo há uma pequena esfera de massa m. Descrever o movimento da esfera.

Solução: Como o movimento se passa num plano horizontal, podemos

supor que a terceira coordenada da partícula seja nula. Conforme a figura 3, temos:

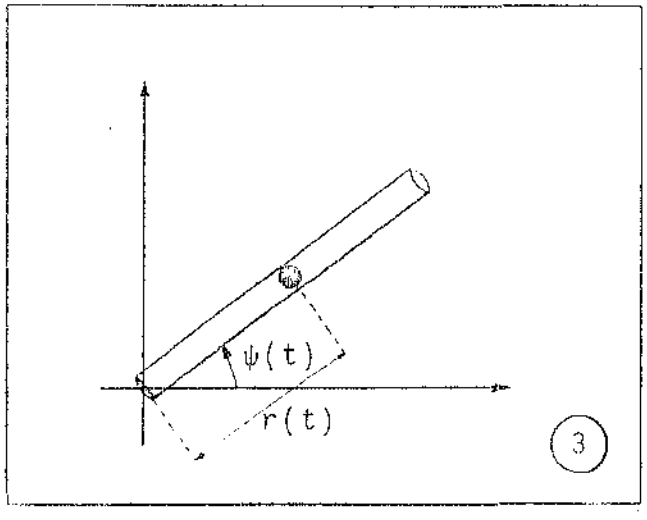
$$x(t) = r(t)\cos\Omega t \qquad e \qquad y(t) = r(t)\,\mathrm{sen}\,\Omega t$$

Derivando em relação ao tempo vem

$$\dot{x}(t) = \dot{r}(t)\cos\Omega t - r(t)\Omega\,\mathrm{sen}\Omega t$$

$$\dot{y}(t) = \dot{r}(t)\,\mathrm{sen}\Omega t + r(t)\Omega\cos\Omega t$$

Daí tiramos o módulo do vetor velocidade que, ao quadrado fica:



$$\dot{x}^2+\dot{y}^2 = \dot{r}^2+ r^2\Omega^2$$

Nestas condições, a energia cinética se escreve como:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2+ r^2\Omega^2)$$

e, supondo que a energia potencial seja nula no plano em que se dá o movimento, temos a lagrangeana

$$L = T-V = \frac{1}{2}\, m\, (\dot{r}^2+ r^2\Omega^2)$$

A equação de Euler

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = 0$$

para esse sistema fica

$$\ddot{r} - \Omega^2 r = 0$$

e, portanto, a solução será da forma

$$r(t) = Ae^{\Omega t} + Be^{-\Omega t}$$

Suponhamos ainda que $r(0)=0$ e $\dot{r}(0)=v_0$ e, assim, temos as constantes

$$A = \frac{v_0}{2\Omega} \quad \text{e} \quad B = -\frac{v_0}{2\Omega}$$

Logo, o movimento da esfera será descrito pelas equações:

$$r(t) = \frac{v_0}{2\Omega}(e^{\Omega t} - e^{-\Omega t}) \quad \text{e} \quad \psi(t) = \Omega t$$

onde $r(t)$ pode ser escrita como

$$r(t) = \frac{v_0}{\Omega} \operatorname{senh} \Omega t$$

2. PROBLEMAS ISOPERIMÉTRICOS

De uma maneira geral, são chamados problemas isoperimétricos os problemas do cálculo das variações em que se propõe a extremização de uma dada integral enquanto outras têm valores dados.

Conta-se que a primeira pessoa a resolver um problema isoperimétrico foi a rainha Dido, de Cartago, no ano 850 a.C. Intuitivamente ela resolveu o problema que consistia em determinar a curva fechada de perímetro dado, que encerrasse a região de maior

área possível. Esse problema lhe foi apresentado da seguinte maneira: Ela deveria cercar a maior área de terra possível, usando para isso um couro de vaca. Resolveu a questão cortando o couro em tiras muito finas e colocando-as emendadas, formando uma circunferência.

O problema isoperimétrico original pode ser formulado como segue: Consideremos o conjunto P, de todas as curvas planas, fechadas, sem auto-intersecção, e de perímetro fixado L. Dessas curvas, nós procuramos aquela cuja área da região interna seja máxima.

Suponhamos que as equações paramétricas de uma curva admissível γ, do conjunto P, sejam x(t) e y(t), funções continuamente diferenciáveis em relação a t.

A área da região interna limitada por γ é dada por

$$(1.) \qquad I = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}(x\dot{y} - y\dot{x})\,dt \quad (2)$$

enquanto que o comprimento de arco será

$$(2.) \qquad J = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt$$

que vale L para qualquer curva de P.

Queremos então determinar as funções x(t) e y(t), para as quais (1.) atinja seu maior valor satisfazendo (2.). Para isso, vamos usar o <u>Método dos multiplicadores de Lagrange:</u> "Uma condição

---

(2) Pelo teorema de Green tem-se: $\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}(x\dot{y} - y\dot{x})\,dt = \frac{1}{2}\int_{\gamma}(x\,dy - y\,dx) = \iint_{R} dx\,dy$ = (Área de R)

necessária para mínimo (ou máximo) de $F(x,y,\ldots,z)$ com respeito às variáveis $x,y,\ldots,z$ satisfazendo

$$G_i(x,y,\ldots,z)=c_i \quad \text{(constantes dadas)} \qquad i = 1,2,\ldots,N \tag{3.}$$

é que

$$\frac{\partial F^*}{\partial x} = \frac{\partial F^*}{\partial y} = \ldots = \frac{\partial F^*}{\partial z} = 0 \tag{4.}$$

onde $F^* = F + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i G_i$ e $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_N$ são constantes chamadas <u>multiplicadores de Lagrange</u> que podem ser determinadas juntamente com os extremantes $x,y,\ldots,z$.

Vamos supor agora que nos interessa extremizar o funcional

$$I = \int_{t_1}^{t_2} f(t,x,y,\ldots,z,\dot{x},\dot{y},\ldots,\dot{z})dt$$

com respeito às funções continuamente diferenciáveis $x(t),y(t)\ldots,z(t)$, tal que as N integrais

$$J_k = \int_{t_1}^{t_2} g_k(x,y,\ldots,z,\dot{x},\dot{y},\ldots,\dot{z})dt$$

tenham valores prefixados $(k=1,\ldots,N)$.

Fazendo

$$f^* = f + \sum_{i=1}^{N} \lambda_k g_k$$

obtemos

$$\frac{\partial f^*}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f^*}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

$$\frac{\partial f^*}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f^*}{\partial \dot{y}}\right) = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial f^*}{\partial z} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f^*}{\partial \dot{z}}\right) = 0 \quad (3)$$

No nosso caso particular - problema isoperimétrico original - devemos considerar a função

$$f^* = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) + \lambda\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

obtendo o sistema de equações

$$\frac{1}{2}\dot{y} - \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}y + \frac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right) = 0$$

$$-\frac{1}{2}\dot{x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}x + \frac{\lambda\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right) = 0$$

Integrando em relação a t vem:

$$y - \frac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} = c_1$$

$$x + \frac{\lambda\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} = c_2$$

onde c_1 e c_2 são constantes. Das equações acima tiramos

(3) Estas condições são necessárias para extremo, mas não especificam sua natureza, embora no nosso problema particular esse resultado só pode ser máximo pois o mínimo seria zero.

$$y - c_1 = \frac{\lambda \dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}$$

$$x - c_2 = \frac{-\lambda \dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}$$

que, quadradas e somadas membro a membro fornecem:

$$(x-c_2)^2 + (y-c_1)^2 = \frac{\lambda^2(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)} = \lambda^2$$

que representa no plano uma circunferência com centro (c_2,c_1) e raio λ. Portanto, a curva fechada, de perímetro L, sem auto-intersecção que limita uma região de área máxima é uma circunferência de raio $\lambda = \frac{L}{2\pi}$.

OBSERVAÇÃO - Podemos generalizar o problema acima propondo o seguinte: Determinar a superfície fechada, sem auto-intersecção, de área dada A tal que o sólido limitado por ela tenha volume máximo. Por analogia com o problema anterior, vemos que a superfície procurada é uma esfera de raio $\lambda = \frac{A}{4\pi}$.

Um outro problema isoperimétrico vamos ver no seguinte

EXEMPLO - Determinar a curva de comprimento 2L, dado, ligando os pontos (-a,b) e (a,b) de tal forma que seu centro de gravidade tenha ordenada mínima.

Solução : A ordenada y do centro de gravidade da curva procurada é dada por

$$\frac{\int_{-a}^{a} y\,ds}{\int_{-a}^{a} ds} = \frac{1}{2L}\int_{-a}^{a} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

com o vínculo do problema dado por

$$\int_{-a}^{a} ds = 2L$$

O funcional que deve ser minimizado é

$$J(y) = \frac{1}{2L} \int_{-a}^{a} \left[y\sqrt{1+y'^2} + \lambda\sqrt{1+y'^2} \right] dx$$

e, como o integrando não envolve x, a equação de Euler fica:

$$(y+\lambda)\sqrt{1+y'^2} - \frac{(y+\lambda)y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = c \quad (c \underline{te})$$

ou ainda,

$$\frac{y+\lambda}{\sqrt{1+y'^2}} = c$$

Separando as variáveis vem:

$$\frac{dy}{\sqrt{(y+\lambda)^2 - c^2}} = \frac{dx}{c}$$

e, por integração obtemos

$$\text{arc cosh } \frac{y+\lambda}{c} = \frac{x}{c} + k$$

onde k é constante. Da expressão acima tiramos

$$y+\lambda = c \cosh \frac{x}{c}$$

pois a curva é simétrica em relação ao eixo-y, e como o ponto (a,b) deve pertencer à curva vem:

$$\lambda = c \cosh \frac{a}{c} - b$$

Para satisfazer a condição isoperimétrica é necessário que

$$2L = \int_{-a}^{a} ds = \int_{-a}^{a} \sqrt{1+\operatorname{senh}^2\left[\frac{x}{c}\right]}\, dx = \int_{-a}^{a} \cosh\left[\frac{x}{c}\right] dx$$

e, logo

$$c \operatorname{senh}\left[\frac{x}{c}\right]\Big|_{-a}^{a} = 2c \operatorname{senh}\left[\frac{a}{c}\right] = 2L$$

o que nos dá o valor de c. Para se obter o valor explícito de λ, fazemos:

$$\lambda = c \cosh\left[\frac{a}{c}\right] - b = c\sqrt{1+\operatorname{senh}^2\left[\frac{a}{c}\right]} - b = c^2 - L^2 - b$$

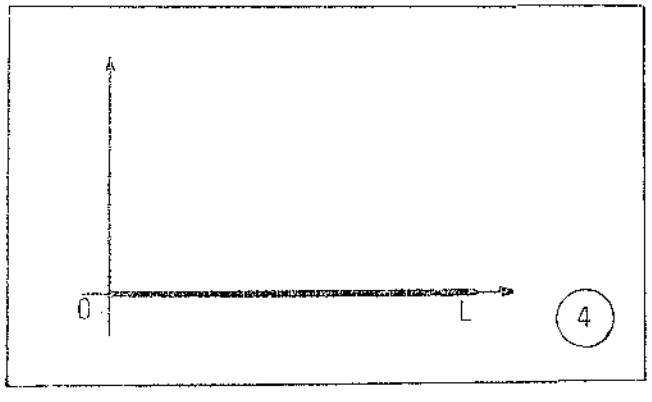
e, finalmente vem

$$y = c \cosh\left[\frac{x}{a}\right] + b - c^2 - L^2$$

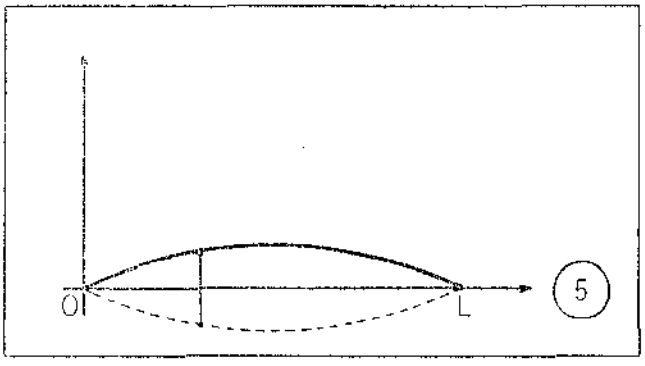
que satisfaz as condições do problema.

3. O PROBLEMA DA CORDA VIBRANTE

Consideremos uma corda elástica, perfeitamente flexível, esticada sob tensão constante τ ao longo do eixo-x, com seus pontos extremos fixos em x=0 e x=L>0. Esse estado inicial será chamado configuração de equilíbrio (fig 4).



Após um certo estímulo apropriado, a corda vibra livremente em um plano que contém o eixo-x, de tal modo que cada partícula da corda descreve um segmento perpendicular a esse eixo (fig 5). Vamos supor ainda que a amplitude de vibração de cada partícula é pequena e não há atrito com o ar.



Considerando que o deslocamento transversal de uma partícula fixada, a um tempo t, seja dado pela função w(x,t), a inclinação da corda nesse instante será

$$\frac{\partial w}{\partial x} = w_x(x,t)$$

como função da posição x e do tempo t. A velocidade de tal partícula no mesmo instante é dada por

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \dot{w}(x,t)$$

e, como as extremidades da corda são fixas, temos as condições de contorno $w(0,t) = w(L,t) = 0$.

Para obtermos a energia potencial V da corda, num instante t qualquer, basta calcular o trabalho necessário para esticá-la do comprimento inicial L ao seu comprimento total no instante considerado. Como a força para esticar a corda é igual à tensão τ, sua energia potencial será

(1.) $$V = \tau\left(\int_0^L \sqrt{1+w_x^2}\, dx - L\right)$$

onde a integral dá o comprimento da corda na sua configuração distorcida.

Assumindo-se que w_x é pequeno, podemos escrever

$$\sqrt{1+w_x^2} = 1 + \frac{1}{2} w_x^2 + \ldots$$

e, desprezando-se os têrmos de potências maiores, obtemos

$$V = \left(\int_0^L \sqrt{1+w_x^2}\, dx - L\right) = \tag{2.}$$

$$= \tau\left(L + \frac{1}{2}\int_0^L w_x^2 dx - L\right) =$$

$$= \frac{\tau}{2} \int_0^L w_x^2 dx .$$

Sendo $\sigma(x)$ uma função contínua e positiva que dá a distribuição de massa ao longo da corda,④ a massa contida num elemento de comprimento dx será $\sigma(x)dx$, cuja energia cinética é

$$dT = \frac{1}{2} \sigma \dot{w}^2 dx$$

Daí concluimos que a energia cinética total é dada pela expressão

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \sigma \dot{w}^2 dx \tag{3.}$$

Com (2.) e (3.) podemos construir a Lagrangeana para a vibração da corda, e aplicar o princípio de Hamilton que, nesse

---

④ *A função $\sigma(x)$ é obtida como segue: Com a corda na posição de equilíbrio, tomemos o intervalo $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Sendo m_ε a massa da corda contida em tal intervalo, temos*

$$\sigma(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{m_\varepsilon}{2\varepsilon}$$

caso afirma: "A função que descreve o movimento real da corda, é aquela que fornece à integral

$$(4.) \qquad I = \int_{t_1}^{t_2} (T-V)\, dt = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_{o}^{L} (\sigma \dot{w}^2 - \tau w_x^2)\, dx\, dt$$

um extremo com respeito às possíveis funções que descrevem a configuração real em $t=t_1$ e $t=t_2$, anulando-se em $x=0$ e $x=L$.

Para extremizar a integral acima, vamos usar a equação de Euler-Ostrogradsky, que fica

$$(5.) \qquad \frac{\partial f}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial w_x} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial \dot{w}} = 0$$

para a função $f(x,t,w,\dot{w},w_x) = \frac{1}{2} (\sigma \dot{w}^2 - \tau w_x^2)$. Temos então,

$$(6.) \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\tau(x)}{\sigma(x)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

que é a equação diferencial parcial que descreve o movimento da corda. No caso em que a massa da corda não varia com o comprimento, a equação diferencial tem a seguinte

Solução de D'Alembert - Vamos introduzir as novas variáveis independentes

$$v = x+ct \quad e \quad z = x-ct$$

onde $c^2=\tau/\sigma$. Então, $v_x=1$ e $z_x=1$, e logo, pela regra da cadeia vem

$$w_x = w_v v_x + w_z z_x = w_v + w_z$$

e, daí,

$$w_{xx} = (w_v+w_z)_x = (w_v+w_z)_v\, v_x+(w_v+w_z)_z\, z_x$$

Como $v_x=z_x=1$, esta expressão se transforma em

$$w_{xx}= w_{vv} +2w_{vz} +w_{zz}.$$

A outra derivada w_{tt} será obtida como segue

$$w_t = w_v v_t+w_z z_t = cw_v - cw_z$$

pois $v_t=c$ e $z_t=-c$. Derivando mais uma vez vem:

$$w_{tt} = c(w_v-w_z)_v\, v_t + c(w_v-w_z)_z\, z_t =$$

$$= c^2(w_{vv}-w_{zv}) - c^2(w_{vz}-w_{zz}) =$$

$$= c^2(w_{vv}-2w_{zv}+w_{zz})$$

Substituindo w_{xx} e w_{tt} em (6.) acima, temos

$$\frac{\partial^2 w}{\partial v \partial z} = 0$$

e, integrando em relação a z resulta

$$\frac{\partial w}{\partial v} = h(v) \quad \text{(função arbitrária de v)}.$$

Integrando novamente, agora em relação a v vem

$$w = \int h(v)dv + \psi(z)$$

onde $\psi(z)$ é uma função arbitrária de z.

Como a integral é uma função $\phi(v)$ de v, a solução toma a forma

$$w = \phi(v) + \psi(z)$$

o que, pelas mudanças de variáveis fica

(7.) $$w(x,t) = \phi(x+ct) + \psi(x-ct)$$

As funções ϕ e ψ são determinadas pelas condições iniciais. Supondo que a velocidade inicial seja nula e a deflexão inicial dada pela função $w(x,0)=f(x)$, podemos derivar (7.) obtendo

(8.) $$\frac{\partial w}{\partial t} = c\phi'(x+ct) - c\psi'(x-ct)$$

e, usando tais condições vem

$$w(x,0) = \phi(x) + \psi(x) = f(x)$$

$$w_t(x,0) = c\phi'(x) - c\psi'(x) = 0$$

Da segunda equação tiramos $\phi'=\psi'$ ou seja, $\phi=\psi+k$ onde k é uma constante. Usando a primeira equação, obtemos $2\phi+k=f$, isto é:

$$\phi(x) = \frac{1}{2}(f(x) - k)$$

e, assim, a solução será

$$w(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right]$$

OBSERVAÇÃO - O problema da extremização do funcional (4.) é um ca-

so particular do PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE que pode ser apresentado do seguinte modo:

Consideremos o caso em que queremos extremizar o seguinte funcional

$$I = \int_{x_1}^{x_2} (\tau\phi'^2 - \mu\phi^2)dx + a_1[\phi(x_1)]^2 + a_2[\phi(x_2)]^2 \tag{10.}$$

com respeito às possíveis funções $\phi(x)$ continuamente diferenciáveis que satisfazem a condição

$$\int_{x_1}^{x_2} \sigma\phi^2 dx = 1 \tag{11.}$$

onde as funções dadas $\tau(x)$ e $\sigma(x)$ são contínuas e positivas, com $\tau(x)$ continuamente diferenciável em $[x_1, x_2]$, x_1 e x_2 pontos arbitrários, $\mu(x)$ uma função contínua dada e a_1, a_2 números reais não negativos.

Num primeiro aspecto do problema não são impostas condições sobre as funções admissíveis nos pontos x_1 e x_2. Num segundo aspecto exigimos que as funções se anulem em um ou ambos os pontos x_1 x_2.

Para facilitar o problema acima, vamos introduzir uma função $a=a(x)$, continuamente diferenciável, arbitrária, satisfazendo $a(x_1)=-a_1$ e $a(x_2)=a_2$, com o que (10.) se torna

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \left[\tau\phi'^2 - \mu\phi^2 + \frac{d}{dx}(a\phi^2)\right]dx \tag{12.}$$

Para usar o método dos multiplicadores de Lagrange, vamos construir a função

(13.) $$f^* = \tau\phi'^2 - \mu\phi^2 + \frac{d}{dx}(a\phi^2) - \lambda\sigma\phi^2$$

com os integrandos de (11.) e (12.). Para f^* vamos usar a equação de Euler

(14.) $$\frac{d}{dx}\frac{\partial f^*}{\partial \phi'} - \frac{\partial f^*}{\partial \phi} = 0$$

resultando então

(15.) $$\frac{d}{dx}(\tau\phi') + (\mu+\lambda\sigma)\phi = 0$$

que é a equação diferencial a ser satisfeita por qualquer solução do problema dado por (10.) e (11.).

No caso em que os dois pontos extremos estão livres, temos uma condição adicional

$$\frac{\partial f^*}{\partial \phi'}_r = 0$$

para $x=x_1$ e $x=x_2$. Isto nos dá

$$\tau\phi' + a\phi = 0$$

em x_1 e x_2. Usando as condições $a(x_1)=-a_1$ e $a(x_2)=a_2$, vem

(16.)
$$(i)\ \tau_1\phi'(x_1) - a_1\phi(x_1) = 0$$
$$(ii)\ \tau_2\phi'(x_2) - a_2\phi(x_2) = 0$$

onde $\tau_1=\tau(x_1)$ e $\tau_2=\tau(x_2)$.

No problema em que os dois pontos extremos são fixos,

substituimos (16.) por

$$(i)\ \phi(x_1) = 0$$

(17.)

$$(ii)\ \phi(x_2) = 0$$

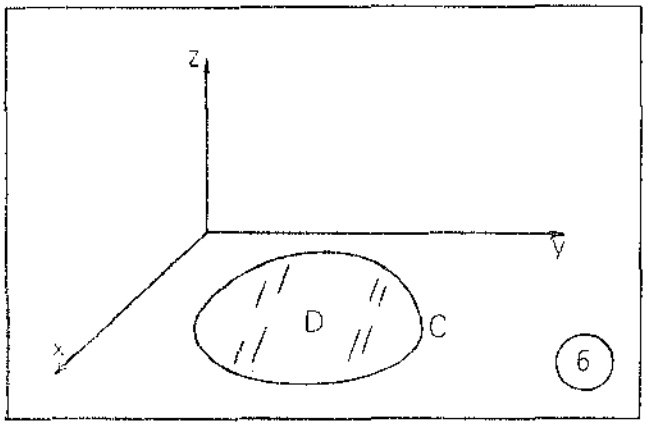
e, se um ponto está livre e o outro fixo, teremos uma condição de (16.) e outra de (17.).

A equação (15.), sendo dadas as funções τ, σ e μ, é chamada EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE STURM-LIOUVILLE. Esta equação, juntamente com as condições de contorno (16.) e (17.) constituem o chamado SISTEMA DE STURM-LIOUVILLE.

4. O PROBLEMA DA MEMBRANA VIBRANTE

Para obtermos a equação diferencial parcial que descreve o movimento de uma membrana vibrante elástica, vamos recorrer uma vez mais ao princípio de Hamilton, aplicando-o agora a um sistema mecânico, no qual a massa é distribuída continuamente.

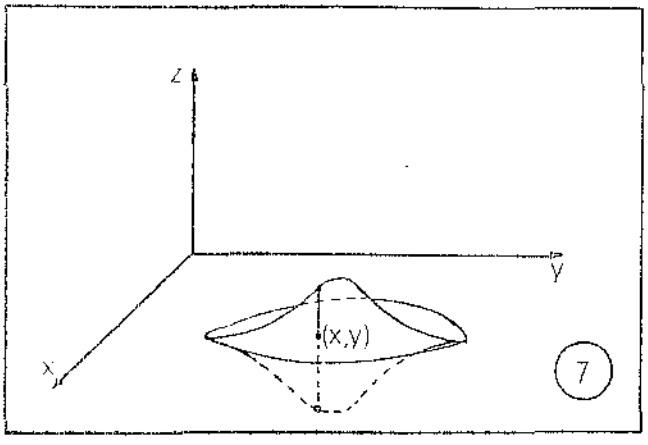
Consideremos uma membrana elástica, de pequena espessura, esticada de modo que a sua fronteira seja uma curva fechada C, do plano xy, sem auto-intersecção, e com curvatura contínua.



6

O domínio D, limitado pela curva C, coincide com a configuração de equilíbrio(fig 6).

Vamos considerar que a vibração da membrana é tal que



a trajetória de cada um de seus pontos constitui um segmento de reta perpendicular ao plano xy e que, além das forças que mantêm o bordo da membrana fixo sobre a curva C, as únicas forças que influenciam o movimento são as de natureza elástica, que provêm da deformação da membrana em relação à sua posição de equilíbrio(fig 7).

Suponhamos que, num instante t, o deslocamento de um ponto dado (x,y) seja denotado por $w(x,y,t)$. Então, a configuração da membrana como um todo, será descrita pela função $w(x,y,t)$, que pode assumir valores positivos ou negativos, com $w(x,y,t)=0$ indicando que o ponto considerado se acha instantaneamente no plano xy. Em particular, para todo ponto de C, e qualquer instante t, temos $w(x,y,t)=0$.

Como a membrana não tem fendas e o movimento se dá continuamente, podemos afirmar que as funções $w(x,y,t)$, $\dot{w}(x,y,t)$, $w_x(x,y,t)$, $w_y(x,y,t)$, $w_{xx}(x,y,t)$, $w_{yy}(x,y,t)$ e $w_{xy}(x,y,t)$ são todas contínuas.

Vamos denotar por $\sigma(x,y)$, a função contínua e positiva que dá a distribuição de massa por unidade de área da membrana. Além disso, se considerarmos que no movimento as amplitudes são pequenas, podemos afirmar que essa função não depende do deslocamen-

to $w(x,y,t)$.(5)

Como a velocidade de uma partícula na posição (x,y) e num instante t é dada por $\dot{w}(x,y,t)$, sua energia cinética será

$$\frac{1}{2}\,\sigma(x,y)\left[\dot{w}(x,y,t)\right]^2$$

e, integrando sobre D, vem

$$T = \frac{1}{2}\iint_D \sigma\dot{w}^2\,dxdy \tag{1.}$$

que é a energia cinética total da membrana como função do tempo.

A energia potencial elástica da membrana, numa dada posição, é igual ao trabalho necessário para deslocá-la da configuração de equilíbrio à posição considerada.

Como assumimos que a membrana é flexível a ponto de não oferecer resistência a se curvar, concluímos que o trabalho de deformação será devido ao aumento da sua área relativamente à área do domínio D.

Através de um arco qualquer da superfície da membrana esticada, a porção da membrana de um lado do arco exerce uma força de resistência elástica sobre a porção que está do outro lado. Se não há movimento lateral de qualquer ponto da membrana e suas pro-

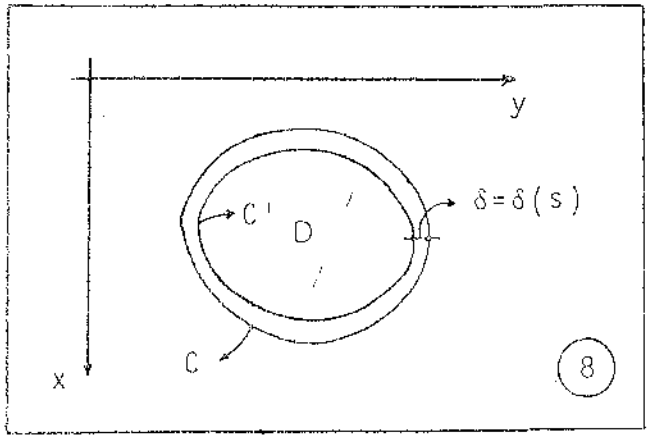
---

(5) A função $\sigma(x,y)$ é obtida como segue: Consideremos a membrana na posição de equilíbrio e R_n [illegible] então

$$\sigma(x,y) = \lim_{n\to\infty} \frac{m_n}{A_n}$$

priedades são isotrópicas (independem da direção), podemos assumir que a força de resistência elástica por unidade de comprimento de arco é constante em relação à posição e, se considerarmos pequenas deformações, ela é constante também com relação ao tempo. Essa força constante e positiva será denotada por τ.

Uma análise física elementar mostra que o trabalho necessário para aumentar a área da membrana de uma pequena quantidade ΔA é $\tau\Delta A$. Na figura 8, suponhamos que a membrana esteja inicialmente plana limitada pela curva C. Depois da deformação, e planificada, ela será limitada pela curva C'.



Tomemos um segmento $\delta=\delta(s)$ normal a C, interceptando C e C', onde s é o comprimento de arco, medido a partir de um ponto fixado em C.

Se δ é pequeno comparado com as dimensões de D, a quantidade de trabalho necessária para deformar a membrana é dada por:

$$\int_0^{L_C} \tau\delta(s)ds = \tau\int_0^{L_C} \delta(s)ds = \tau\Delta A$$

onde L_C é o comprimento total de C.

Numa dada configuração descrita por $w(x,y,t)$, a área total da membrana vale

$$\iint_D \sqrt{1+w_x^2+w_y^2}\, dxdy$$

e a energia potencial de deformação

$$(2.) \qquad V = \tau\left[\iint_D \sqrt{1+w_x^2+w_y^2}\,dxdy - \iint_D dxdy\right]$$

onde a segunda integral fornece a área do domínio D.

Como a deformação é pequena, podemos na expansão

$$\sqrt{1+w_x^2+w_y^2} = 1 + \frac{1}{2}(w_x^2+w_y^2) + \ldots$$

desprezar os têrmos de potências maiores, obtendo então,

$$(3.) \qquad V = \frac{1}{2}\tau \iint_D (w_x^2+w_y^2)dxdy$$

Assim, podemos escrever a função Lagrangeana do sistema

$$L = T-V = \frac{1}{2}\iint_D \left[\sigma\dot{w}^2-\tau(w_x^2+w_y^2)\right]dxdy$$

e, de acordo com o princípio de Hamilton, a integral

$$(4.) \qquad I = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\iint_D \left[\sigma\dot{w}^2-\tau(w_x^2+w_y^2)\right]dxdydt$$

deve ser extremizada pela função w(x,y,t) que descreve o movimento real da membrana. Os limites de integração são arbitrários.

Para determinar a equação diferencial a ser satisfeita por w(x,y,t), usamos a equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial w_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial w_y} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial \dot{w}} = 0$$

para a função

$$F(x,y,t,w,\dot{w},w_x,w_y) = \frac{1}{2}\left[\sigma\dot{w}^2-\tau(w_x^2+w_y^2)\right].$$

Como

$$\frac{\partial F}{\partial w} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial w_x} = -\tau w_{xx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial w_y} = -\tau w_{yy}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial \dot{w}} = \sigma\ddot{w}$$

a equação de Euler-Lagrange para a membrana vibrante fica

$$\tau(w_{xx}+w_{yy}) = \sigma\ddot{w}$$

ou

$$\tau\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = \sigma\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

5. O PROBLEMA DE PLATEAU NÃO PARAMETRICO

Consiste em encontrar uma função real $z=f(x,y)$ definida em $\overline{D}\subset R^2$, D aberto convexo e limitado, tal que

(i) O grāfico de f tem medida mīnima

(ii) Para uma dada função $g:\partial D\to R$, temos $f\Big|_{\partial D} \equiv g$

com g contínua.

Para resolver o problema acima, devemos minimizar o funcional "área"

$$J(z(x,y)) = \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}\, dxdy$$

com o uso da equação de Euler-Ostrogradsky

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z_x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z_y} = 0$$

onde $F(x,y,z,z_x,z_y) = \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$. Notando que

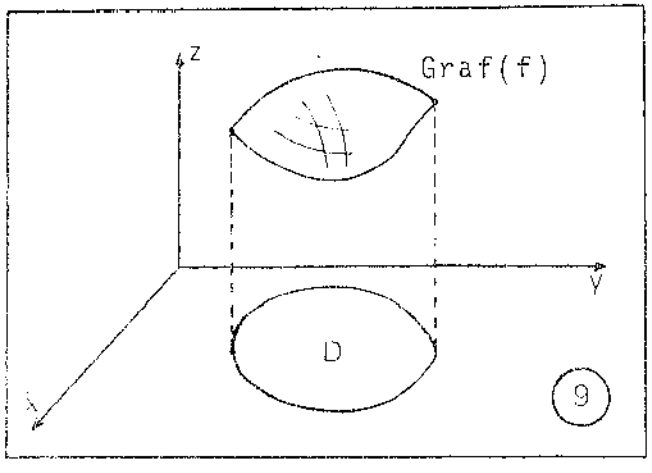
$$\frac{\partial F}{\partial z_x} = \frac{z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} = \frac{z_x}{\sqrt{1+|\text{grad } z|^2}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z_y} = \frac{z_y}{\sqrt{1+|\text{grad } z|^2}}$$

obtemos a equação

$$\text{div}\left[\frac{\text{grad } z}{\sqrt{1+|\text{grad } z|^2}}\right] = 0$$

conhecida como EQUAÇÃO DAS SUPERFÍCIES MÍNIMAS. Tal equação afirma que o problema é satisfeito por uma função z=f(x,y), cujo gráfico é uma superfície de curvatura média H=0 em todos os seus pontos.



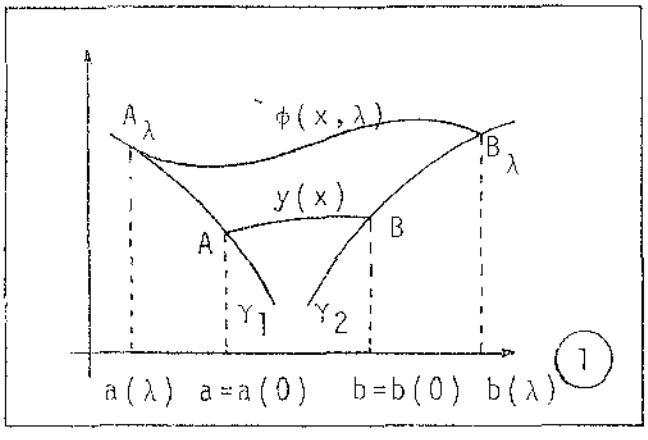
IV - PROBLEMAS VARIACIONAIS COM FRONTEIRAS MÓVEIS

(a) Consideremos ainda o funcional mais simples

$$J(y) = \int_a^b F(x,y,y')dx$$

e procuremos seus extremantes na classe $D^1[a,b]$, das funções reais diferenciáveis, definidas em $[a,b]$, com variações mais gerais que as consideradas anteriormente. Para isso, vamos estudar a família de curvas $y=\phi(x,\lambda)$ com $\lambda\varepsilon[0,1]$ em que $\phi(x,0)=y(x)\varepsilon D^1[a,b]$ e x variando no intervalo $[a(\lambda),b(\lambda)]$. Estamos supondo também que as curvas $\phi(x,\lambda)$ são definidas em $[a-\varepsilon,b+\varepsilon]x[0,1]$, tendo derivadas contínuas até segunda ordem.

Adotando a notação $A_\lambda=(a(\lambda),\phi(a(\lambda),\lambda))$ com $A_\lambda=A$ para $\lambda=0$ e $B_\lambda=(b(\lambda),\phi(b(\lambda),\lambda))$, com $B_\lambda=B$ se $\lambda=0$, vamos assumir que A_λ e B_λ descrevem curvas γ_1 e γ_2 respectivamente, de classe C^1 tal que, para cada λ temos $\phi(x,\lambda)$ e γ_1 transversais em A_λ e $\phi(x,\lambda)$ e γ_2 transversais em B_λ (fig 1).



Sendo m_{A_λ} e m_{B_λ} os coeficientes angulares das retas tangentes a γ_1 e γ_2, respectivamente, temos

$$m_A = \lim_{\lambda\to 0} \frac{\phi(a(\lambda),\lambda) - \phi(a(0),0)}{a(\lambda) - a(0)}$$

Mas $\phi(a(\lambda),\lambda) - \phi(a(0),0) = (a(\lambda) - a(0))\,\phi_x(\bar{a},\bar{\lambda}) + \lambda\phi_\lambda(\bar{a},\bar{\lambda})$, onde

$\bar{a}=a(\bar{\lambda})$, para algum $\bar{\lambda}\in[0,1]$. Temos então

$$(1.)\quad \frac{a(\lambda)-a(0)}{\lambda}\,\frac{\phi(a(\lambda),\lambda)-\phi(a(0),0)}{a(\lambda)-a(0)} = \frac{a(\lambda)-a(0)}{\lambda}\,\phi_x(\bar{a},\bar{\lambda})+\phi_\lambda(\bar{a},\bar{\lambda})$$

Fazendo $\lambda\to 0$, vemos que

$$\frac{d}{d\lambda}(a(\lambda))\Big|_{\lambda=0}$$

existe e

$$(2.)\qquad \frac{d}{d\lambda}(a(\lambda))\Big|_{\lambda=0}\left[\phi_x(a,0)-m_A\right]+\phi_\lambda(a,0) = 0$$

Analogamente,

$$\frac{d}{d\lambda}(b(\lambda))\Big|_{\lambda=0}$$

existe e

$$(3.)\qquad \frac{d}{d\lambda}(b(\lambda))\Big|_{\lambda=0}\left[\phi_x(b,0)-m_B\right]+\phi_\lambda(b,0) = 0$$

Vamos introduzir agora a seguinte notação

$$\phi_\lambda(x,0) = \delta y(x)$$

$$\frac{d\ (a(\lambda),\lambda)}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} = \delta y_A$$

$$\frac{d\ a(\lambda)}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} = \delta x_A$$

ao longo de γ_1 e, analogamente,

$$\left.\frac{d\ (b(\lambda),\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} = \delta y_B$$

$$\left.\frac{d\ b(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} = \delta x_B$$

ao longo de γ_2.

Em (1.), se fazemos $\lambda \to 0$, vem

(4.) $$\delta y_A = \delta x_A\ y'(a) + \delta y(a)$$

e, de modo análogo,

(4.)' $$\delta y_B = \delta x_B\ y'(b) + \delta y(b)$$

Estamos considerando o funcional J definido sobre os elementos da família $\phi(x,\lambda)$, tomando λ como variável, isto é:

$$I(\lambda) = J(\phi(x,\lambda))$$

e, queremos calcular $I'(0)$ onde $F = F(x,\phi(x,\lambda),\phi_x(x,\lambda))$. Temos então:

$$I'(0) \overset{(1)}{=} \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} \left[\frac{dF}{d\lambda}\right]_{\lambda=0} dx + \left.\frac{d\ b(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} . \left.F\right|_{x=b} - \left.\frac{d\ a(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} . \left.F\right|_{x=a} =$$

$$= \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} \left[\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial \lambda} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial \phi_x}{\partial \lambda}\right]_{\lambda=0} dx + \delta x_B\ F(b,y(b),y'(b)) -$$

$$- \delta x_A\ F(a,y(a),y'(a)) \overset{(2)}{=} \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}\ \delta y(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{d}{dx}\ \delta y(x)\right] dx +$$

---

(1) Pelo teorema de Leibniz: Se $f: D \to R$ e f_t são contínuas, [illegible] diferenciáveis em [illegible] e [illegible] definida em [illegible] por $\phi(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)dx$ então

$$\phi'(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f_t(x,t)dx + \frac{d\beta}{dt} f(\beta(t),t) - [illegible]$$

(2) [illegible] $= \frac{d}{dx}\,\delta y(x)$

$$+ \delta x_B \, F(b,y(b),y'(b)) - \delta x_A \, F(a,y(a),y'(a))$$

Integrando por partes a expressão

$$\int_a^b F_{y'} \frac{d}{dx} \delta y(x)dx = F_{y'}\delta y(x)\Big|_a^b - \int_a^b \delta y(x) \frac{d}{dx} F_{y'}dx$$

e substituindo em I'(0) acima vem

$$I'(0) = \int_a^b \left[F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right]\delta y(x)dx + \delta x_B \, F\Big|_{x=b} + \delta y(x) \, F_{y'}\Big|_{x=b} -$$

$$- \delta x_A \, F\Big|_{x=a} - F_{y'}\delta y(x)\Big|_{x=a} =$$

$$= \int_a^b \left[F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}\right]\delta y(x)dx + \delta x_B F\Big|_{x=b} - \delta x_A F\Big|_{x=a} +$$

$$+ \delta y_B F_{y'}\Big|_{x=b} - \delta y_A F_{y'}\Big|_{x=a} + \delta x_A y'(x)F_{y'}\Big|_{x=a} -$$

$$- \delta x_B y'(x)F_{y'}\Big|_{x=b}$$

e, usando as igualdades (4.) e (4.)', vem

$$I'(0) = \int_a^b \left[F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}\right]\delta y(x)dx + \delta x_*(F-y'F_{y'})\Big|_a^b + \delta y_* F_{y'}\Big|_a^b$$

que é chamada PRIMEIRA VARIAÇÃO GERAL DE J.

OBSERVAÇÃO - No caso em que as extremidades são fixas, temos $\delta x_A = \delta x_B = \delta y_A = \delta y_B = 0$ e, então obtemos um resultado já conhecido

$$(\delta J)_y(0) = I'(0) = \int_a^b \left[F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}\right]\delta y(x)dx$$

Se γ_1 e γ_2 são dadas pelas equações

$$\gamma_1 : y = f(x)$$

$$\gamma_2 : y = g(x)$$

então, δy_A e δy_B estarão relacionados com δx_A e δx_B pelas equações

$$\delta y_A = f'(a)\delta x_A$$

$$\delta y_B = g'(b)\delta x_B$$

pois,

$$f'(a) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\phi(a(\lambda),\lambda)-\phi(a(0),0)}{a(\lambda)-a(0)} =$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \frac{[\phi(a(\lambda),\lambda)-\phi(a(0),0)]/\lambda}{[a(\lambda)-a(0)]/\lambda} =$$

$$= \frac{\delta y_A}{\delta x_A}$$

e, analogamente,

$$g'(b) = \frac{\delta y_B}{\delta x_B} .$$

Podemos então escrever a primeira variação geral de J na forma

$$I'(0) = \int_a^b \left[F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right]\delta y(x)dx +$$

$$+ \delta x_B\left[F_{y'}(g'(x)-y'(x))+F\right]_{x=b} + \delta x_A\left[F_{y'}(f'(x)-y'(x))+F\right]_{x=a}$$

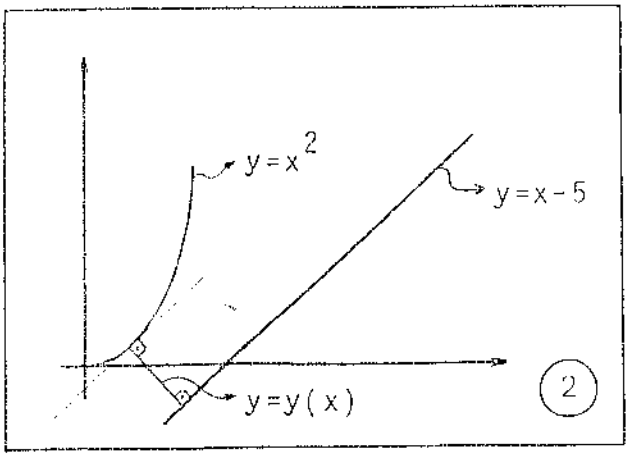
e, supondo que $y=y(x)$ é ponto estacionário para J, devemos ter $I'(0)=0$. Como a equação de Euler deve ser satisfeita e as quantidades δx_A e δx_B são independentes, obtemos as seguintes condições necessárias

$$\left[F_{y'}(g'(x)-y'(x))+F\right]_{x=b}=0$$

$$\left[F_{y'}(f'(x)-y'(x))+F\right]_{x=a}=0$$

chamadas EQUAÇÕES DE TRANSVERSALIDADE.

EXEMPLO - Determinar a distância da parábola $y=x^2$ à reta $y=x-5$. O problema consiste em minimizar o funcional "comprimento de arco"



$$J(y)=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

com a condição de que os pontos extremos estejam sobre as curvas dadas por $f(x)=x^2$ e $g(x)=x-5$. As equações de transversalidade, nesse caso, ficam

(i.)
$$\left[\sqrt{1+y'^2}+(2x-y')\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right]_{x=a}=0$$

$$\left[\sqrt{1+y'^2}+(1-y')\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right]_{x=b}=0$$

Por outro lado, a equação de Euler nos dá extremantes da forma $y(x)=k_1x+k_2$ e, como as condições de transversalidade

$$y(a)=f(a) \quad \text{e} \quad y(b)=g(b)$$

devem ser satisfeitas, vem

$$k_1 a + k_2 = a^2$$

(ii.)

$$k_1 b + k_2 = b-5$$

De (i.) segue:

$$\sqrt{1+k_1^2} + (2a-k_1)\frac{k_1}{\sqrt{1+k_1^2}} = 0$$

(iii.)

$$\sqrt{1+k_1^2} + (1-k_1)\frac{k_1}{\sqrt{1+k_1^2}} = 0$$

Resolvendo o sistema formado pelas equações (ii.) e (iii.), obtemos $k_1=-1$, $k_2=3/4$, $a=1/2$ e $b=23/8$ fornecendo então o extremal $y(x)=-x+3/4$. Assim, a distância será dada por:

$$d = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{23}{8}} \sqrt{1+(-1)^2}\, dx = \sqrt{2}\, x\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{23}{8}} = \frac{19\sqrt{2}}{8}$$

TEOREMA 1 - Se o funcional $J(y)$ tem a forma

$$J(y) = \int_a^b A(x,y)\sqrt{1+y'^2}\, dx$$

onde $A(x,y)\neq 0$ nas extremidades, as condições de transversalidade são do tipo

$$y'(a) = -\frac{1}{f'(a)} \quad e \quad y'(b) = -\frac{1}{g'(b)}$$

isto é; as condições de transversalidade se reduzem a condições de ortogonalidade.

Dem: Consideremos a equação para um dos extremos (para o outro a demonstração é análoga)

$$\left[F + (f'-y')F_{y'}\right]_{x=a} = 0$$

Para $F=A(x,y)\sqrt{1+y'^2}$, temos:

$$\left[A(x,y)\sqrt{1+y'^2} + \frac{A(x,y)y'}{\sqrt{1+y'^2}}(f'-y')\right]_{x=a} = 0$$

ou ainda,

$$\left[\frac{A(x,y)(1+f'y')}{\sqrt{1+y'^2}}\right]_{x=a} = 0$$

Mas, $A(x,y)\neq 0$ para $x=a$, o que implica em

$$\left[1+f'y'\right]_{x=a} = 0$$

ou seja,

$$y'(a) = -\frac{1}{f'(a)}$$ □

EXEMPLO - Voltando ao problema da brachistochrone, vamos considerar novamente o funcional

$$J(y) = \int_0^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\,dx$$

tal que $y_0=y(0)=0$ e (b,y_1) está sobre uma reta vertical $x=b$. Neste caso, na equação

$$\left[\delta x.(F-y'F_{y'})\right]_a^b + \left[\delta y.\ F_{y'}\right]_a^b = 0$$

temos $\delta x=0$, $\delta y_A=0$ e portanto a equação fica

$$\left[\frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}}\right]_{x=b} = 0$$

e, daí

$$y'(b) = 0.$$

Por outro lado, os extremantes são ciclóides dadas pelas equações paramétricas

$$x= \frac{k_1}{2}(2t-\text{sen } 2t) + k_2$$

$$y= \frac{k_1}{2}(1-\cos 2t)$$

Como $y(0)=0$ obtemos $k_2=0$ e fazendo a mudança de parâmetros $2t=\tau$, vem

$$x(\tau)= \frac{k_1}{2}(\tau-\text{sen } \tau)$$

$$y(\tau)= \frac{k_1}{2}(1-\cos \tau)$$

Usando a condição de transversalidade $y'(b)=0$, vem

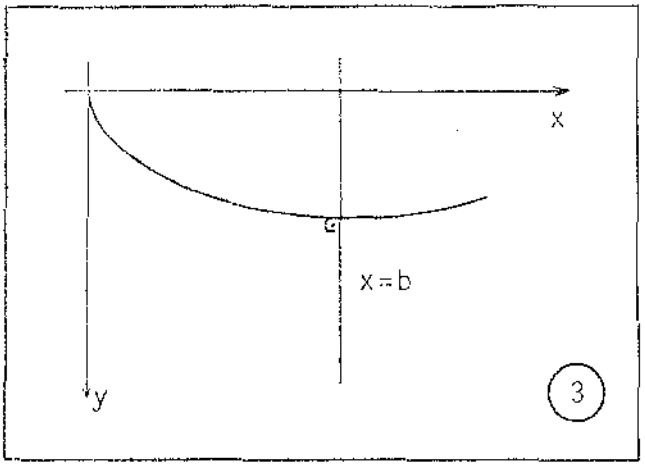
$$y'(b)= \frac{dy}{dx}\Big|_{x=b} = \frac{dy}{d\tau}\,\frac{d\tau}{dx}\Big|_{x=b} = \frac{\frac{k_1}{2}\,\text{sen } \tau}{\frac{k_1}{2}(1-\cos\tau)} = 0$$

o que implica em

$$\frac{k_1}{2}\,\text{sen } \tau = 0$$

com $0\leq\tau\leq 2\pi$ e logo $\tau=\pi$. Se $\tau=\pi$, temos $b=\frac{k_1}{2}\pi$ e $k_1=\frac{2b}{\pi}$.

Assim, um extremo para o funcional J será tomado somente sobre a ciclóide dada pelas equações:



$$x(\tau) = \frac{2b}{\pi}(\tau - \operatorname{sen}\tau)$$

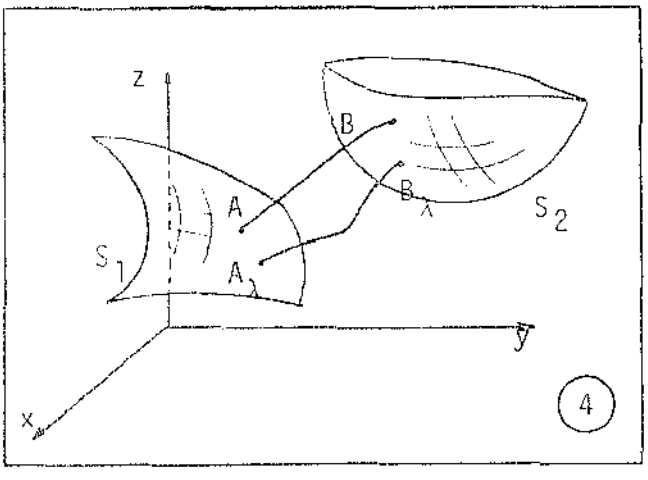
$$y(\tau) = \frac{2b}{\pi}(1 - \cos\tau)$$

com $0 \leq \tau \leq 2\pi$.

(b) Problemas com fronteiras móveis para funcionais do tipo

$$J(y,z) = \int_a^b F(x,y,z,y',z')dx$$

Neste caso, temos interesse em determinar extremantes de J com extremidades móveis, sobre duas superfícies regulares S_1 e S_2. Suponhamos que a curva procurada seja dada por



$$f(x) = (x, y(x), z(x))$$

e consideremos a família de curvas definida por

$$G(x,\lambda) = (x, \phi(x,\lambda), \psi(x,\lambda))$$

com $\lambda \in [0,1]$ e tal que

$$G(x,0) = (x, \phi(x,0), \psi(x,0)) = f(x).$$

Suponhamos ainda que, para cada λ, $G(x,\lambda)$ tenha derivadas de segunda ordem contínuas e adotemos a notação

$$A_\lambda = (a(\lambda), \phi(a(\lambda),\lambda), \psi(a(\lambda),\lambda))$$

$$B_\lambda = (b(\lambda), \phi(b(\lambda),\lambda), \psi(b(\lambda),\lambda))$$

$$A_o = A \quad e \quad B_o = B.$$

Nestas condições, o funcional J, definido sobre os elementos $G(x,\lambda)$ passa a ser função apenas de λ, isto é;

$$I(\lambda) = J(G(x,\lambda)) = \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} F(x,\phi(x,\lambda),\psi(x,\lambda),\phi_x(x,\lambda),\psi_x(x,\lambda))dx$$

para o qual vamos calcular $I'(0)$ usando a notação introduzida em (a) acima.

$$I'(0) = \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} \left[\frac{dF}{d\lambda}dx\right]_{\lambda=0} + \frac{db(\lambda)}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0} F\bigg|_{x=b} - \frac{da(\lambda)}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0} F\bigg|_{x=a} =$$

$$= \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} \left[\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \lambda} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \lambda} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \lambda} + \frac{\partial F}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial \lambda}\right] dx \bigg|_{\lambda=0} +$$

$$+ \delta x_B F(b,y(b),z(b),y'(b),z'(b)) -$$

$$- \delta x_A F(a,y(a),z(a),y'(a),z'(a)) =$$

$$= \int_a^b \left[F_y \delta y(x) + F_{y'}\frac{d}{dx}\delta y(x) + F_z \delta z(x) + F_{z'}\frac{d}{dx}\delta z(x)\right] dx +$$

$$+ \delta x_B F(b,y(b),z(b),y'(b),z'(b)) -$$

$$- \delta x_A F(a,y(a),z(a),y'(a),z'(a)).$$

Usando integração por partes, obtemos:

$$\int_a^b F_{y'}\frac{d}{dx}\delta y(x)dx = F_{y'}\delta y(x)\Big|_a^b - \int_a^b \delta y(x)\frac{d}{dx}F_{y'}dx$$

$$\int_a^b F_{z'}\frac{d}{dx}\delta z(x)dx = F_{z'}\delta z(x)\Big|_a^b - \int_a^b \delta z(x)\frac{d}{dx}F_{z'}dx$$

e, substituindo em I'(0) vem

$$I'(0) = \int_a^b \left[F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right]\delta y(x)dx + \int_a^b \left[F_z - \frac{d}{dx}F_{z'}\right]\delta z(x)dx +$$

$$+ F_{y'}\delta y(x)\Big|_a^b + F_{z'}\delta z(x)\Big|_a^b + \delta x_B F\Big|_{x=b} - \delta x_A F\Big|_{x=a} =$$

$$= \int_a^b \left[F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right]\delta y(x)dx + \int_a^b \left[F_z - \frac{d}{dx}F_{z'}\right]\delta z(x)dx +$$

$$+ F_{y'}\delta y(x)\Big|_{x=b} - F_{y'}\delta y(x)\Big|_{x=a} + F_{z'}\delta z(x)\Big|_{x=b} -$$

$$- F_{z'}\delta z(x)\Big|_{x=a} + \delta x_B F\Big|_{x=b} - \delta x_A F\Big|_{x=a} =$$

$$\overset{(3)}{=} \int_a^b \left[F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right]\delta y(x)dx + \int_a^b \left[F_z - \frac{d}{dx}F_{z'}\right]\delta z(x)dx +$$

$$+ \delta y_B F_{y'}\Big|_{x=b} - \delta x_B y'(x)F_{y'}\Big|_{x=b} - \delta y_A F_{y'}\Big|_{x=a} +$$

$$+ \delta x_A y'(x)F_{y'}\Big|_{x=a} + \delta z_B F_{z'}\Big|_{x=b} - \delta x_B z'(x)F_{z'}\Big|_{x=b} -$$

$$- \delta z_A F_{z'}\Big|_{x=a} + \delta x_A z'(x)F_{z'}\Big|_{x=a} + \delta x_B F\Big|_{x=b} - \delta x_A F\Big|_{x=a} =$$

---

(3) [illegible]

$$= \int_a^b \left[F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right]\delta y(x)dx + \int_a^b \left[F_z - \frac{d}{dx}F_{z'}\right]\delta z(x)dx -$$

$$- \delta x_A(F - y'F_{y'} - z'F_{z'})\Big|_{x=a} + \delta x_B(F - y'F_{y'} - z'F_{z'})\Big|_{x=b} -$$

$$- \delta y_A F_{y'}\Big|_{x=a} + \delta y_B F_{y'}\Big|_{x=b} - \delta z_A F_{z'}\Big|_{x=a} + \delta z_B F_{z'}\Big|_{x=b}$$

Podemos escrever então

$$I'(0) = \int_a^b \left[F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right]\delta y(x)dx + \int_a^b \left[F_z - \frac{d}{dx}F_{z'}\right]\delta z(x)dx +$$

$$+ \delta x_\bullet(F - y'F_{y'} - z'F_{z'})\Big|_a^b + \delta y_\bullet F_{y'}\Big|_a^b + \delta z_\bullet F_{z'}\Big|_a^b$$

que é a PRIMEIRA VARIAÇÃO GERAL DE J.

Considerando que a curva dada pelas equações $y=y(x)$ e $z=z(x)$ é extremante de J, as integrais acima se anulam e então, obtemos a condição geral

$$\delta x_\bullet(F - y'F_{y'} - z'F_{z'})\Big|_a^b + \delta y_\bullet F_{y'}\Big|_a^b + \delta z_\bullet F_{z'}\Big|_a^b = 0$$

OBSERVAÇÃO - Se o ponto $A=(a,y(a),z(a))$ está fixo e B varia sobre uma curva de equações $y=\phi(x)$ e $z=\psi(x)$, temos

$$\delta y_B = \phi'(b)\delta x_B$$

$$\delta z_B = \psi'(b)\delta x_B$$

e, então a condição

$$(*) \qquad \delta x_B(F-y'F_{y'}-z'F_{z'})\Big|_{x=b} + \delta y_B F_{y'}\Big|_{x=b} + \delta z_B F_{z'}\Big|_{x=b} = 0$$

se transforma em

$$\left[F+(\phi'-y')F_{y'}+(\psi'-z')F_{z'}\right]_{x=b}\delta x_B = 0$$

e, pela arbitrariedade de δx_B vem

$$\left|F+(\phi'-y')F_{y'}+(\psi'-z')F_{z'}\right|_{x=b} = 0$$

OBSERVAÇÃO - Suponhamos que A esteja fixo e B move-se sobre uma superfície de equação $z=f(x,y)$. Então $\delta z=f_x\delta x+f_y\delta y$ e a condição (*) se reduz a

$$\left[F-y'F_{y'}-z'F_{z'}+f_xF_{z'}\right]_{x=b}\delta x_B + \left[F_{y'}+F_{z'}f_y\right]_{x=b}\delta y_B = 0$$

e, como δx_B e δy_B são independentes, obtemos

$$\left[F-y'F_{y'}-z'F_{z'}+f_xF_{z'}\right]_{x=b} = 0$$

$$\left[F_{y'}+F_{z'}f_y\right]_{x=b} = 0$$

EXEMPLO - Achar a distância do ponto B=(1,1,1) à esfera unitária de raio 1.

Solução: O problema consiste em minimizar o funcional

$$J(y(x),z(x)) = \int_a^1 \sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx$$

com a condição do ponto A=(a,y(a),z(a)) estar sobre a esfera. Sabe-

mos, pelas equações de Euler, que os extremantes de J são retas do tipo

$$\text{(i)} \qquad \begin{aligned} y &= k_1 x + k_2 \\ z &= k_3 x + k_4 \end{aligned}$$

e, como a reta em questão deve passar por B, temos

$$\text{(ii)} \qquad \begin{aligned} k_1 + k_2 &= 1 \\ k_3 + k_4 &= 1 \end{aligned}$$

Pela observação anterior, as condições de transversalidade têm a forma

$$\left[\sqrt{1+y'^2+z'^2} - \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} + \left[\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} - z'\right]\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2-z'^2}}\right]_{x=a} = 0$$

$$\left[\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} + \frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} \quad \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right]_{x=a} = 0$$

Substituindo (i) em (iii) e notando que $z(a)=\sqrt{1-a^2-y(a)}$ pois A está sobre a esfera, vem

$$\text{(iv)} \qquad \begin{aligned} z(a) - k_3 a &= 0 \\ k_1 z(a) - k_3 y(a) &= 0 \end{aligned}$$

e como

$$\text{(v)} \qquad \begin{aligned} y(a) &= k_1 a + k_2 \\ z(a) &= k_3 a + k_4 \end{aligned}$$

obtemos de (ii), (iv) e (v) os valores $k_1=k_3=1$ e $k_2=k_4=0$ e então, o extremante de J terá as equações

$$y = x$$

$$z = x$$

Como A está sobre a esfera, devemos ter

$$a^2+a^2+a^2=1$$

ou seja, $a = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Se $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$ então $J(y,z) = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} \sqrt{3}\, dx = \sqrt{3} - 1$

Se $a=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ então $J(y,z) = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} \sqrt{3}\, dx = \sqrt{3} + 1$

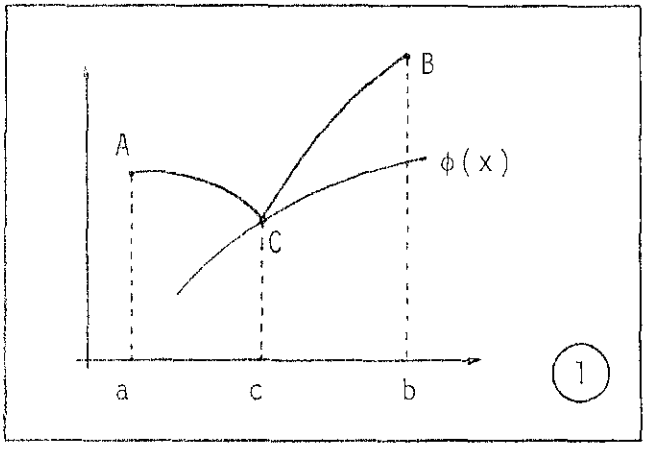
e portanto podemos concluir que a distância de B até a esfera vale $\sqrt{3} - 1$.

V - EXTREMAIS ANGULOSOS - OBSTÁCULOS GROSSOS

(a) Extremais angulosos. Até o momento, temos assumido com poucas exceções, que os extremantes - soluções da equação de Euler - são funções de classe C^1. No entanto, em alguns problemas, essa hipótese de regularidade deixa de ser natural.

Problemas de reflexão Consideremos o problema de se encontrar os extremantes do funcional

$$J(y) = \int_a^b F(x,y,y')dx$$



com as condições $y_0=y(a)$, $y_1=y(b)$, pontos fixos, e sabendo-se que um ponto que parte de $A=(a,y(a))$ através da curva $y=y(x)$, reflete-se na curva $\phi(x)$ antes de chegar em $B=(b,y(b))$(fig. 1).

Nestas condições, é natural esperar que o ponto de reflexão $C=(c,y(c))$, sobre a curva $\phi(x)$ seja um ponto "anguloso", isto é; as derivadas laterais $y'_+(c)$ e $y'_-(c)$ podem não ser iguais. Supondo que $y'(x)$ seja contínua nos intervalos $[a,c)$ e $(c,b]$, torna-se conveniente representar o funcional J na forma

$$J(y) = \int_a^c F(x,y,y')dx + \int_c^b F(x,y,y')dx.$$

A condição básica para extremo $(\delta J)_y(h)=0$ nos leva ao problema de encontrar extremantes para as duas integrais, independentemente, levando-se em conta que o ponto $C=(c,y(c))$ é móvel ao

longo da curva $\phi(x)$. Assim, para calcular a variação do funcional, vamos considerá-lo somente sobre extremais que têm ponto anguloso em C. Temos então,[1]

$$I'(0)=\int_a^b (F_y - \frac{d}{dx}F_{y'})\delta y(x)dx + \delta x_c\left[F+(\phi'-y')F_{y'}\right]_{x=c^-} -$$

$$- \delta x_c\left[F+(\phi'-y')F_{y'}\right]_{x=c^+} = (\delta J)_y(h)$$

Como y é extremante de J, temos

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

e daí segue que a condição $(\delta J)_y(h)=0$ é equivalente a

$$\left[F+(\phi'-y')F_{y'}\right]_{x=c^-} = \left[F+(\phi'-y')F_{y'}\right]_{x=c^+}$$

chamada CONDIÇÃO DE REFLEXÃO.

TEOREMA 1 - Consideremos o funcional

$$J(y) = \int_a^b G(x,y)\sqrt{1+y'^2}dx$$

com A=(a,y(a)) e B=(b,y(b)) fixos e C=(c,y(c)) um ponto da curva dada pela equação $y=\phi(x)$ tal que $G(c,y(c))\neq 0$. Então os ângulos de incidência e de reflexão são iguais em C quando y é extremante de J.

Dem: Seja y=y(x) um extremante passando por A e B. A condição de reflexão em C nos leva à equação:

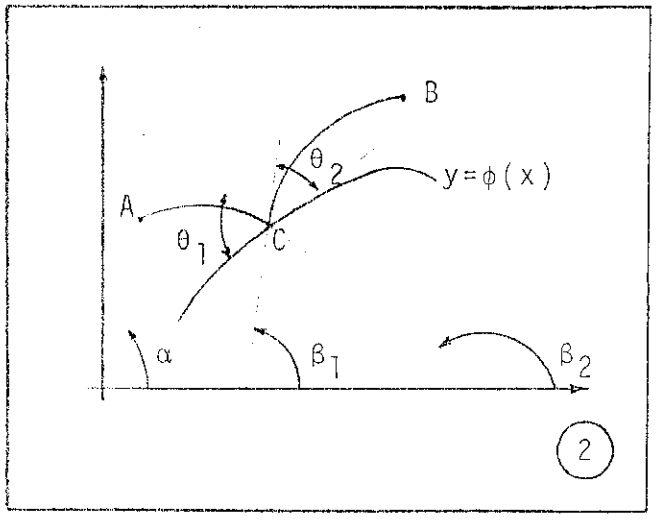
---

[1] [illegible] p. 79

$$G(c,y(c))\left[\sqrt{1+y'^2}+\frac{(\phi'-y')y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right]_{x=c^-} = G(c,y(c))\left[\sqrt{1+y'^2}+\frac{\phi'-y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right]_{x=c^+}$$

que, simplificada fica

$$\left.\frac{1+\phi'y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right|_{x=c^-} = \left.\frac{1+\phi'y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right|_{x=c^+}$$



Sendo

$$\alpha = \text{arc tg}\ (\phi'(c))$$

$$\beta_1 = \text{arc tg}\ (y'_+(c))$$

$$\beta_2 = \text{arc tg}\ (y'_-(c)),$$

temos

$$\frac{1+\text{tg}\alpha\ \text{tg}\beta_1}{-\sec\beta_1} = \frac{1+\text{tg}\alpha\ \text{tg}\beta_2}{\sec\beta_2}$$

ou ainda[2]

$$-\cos(\alpha-\beta_1) = \cos(\alpha-\beta_2)$$

Como $\theta_1-180^0=\alpha-\beta_2$, $\theta_2=\beta_1-\alpha$ e $\cos(\theta_1-180^0)=\cos(\alpha-\beta_2) = -\cos(\alpha-\beta_1)=-\cos(\beta_1-\alpha)=-\cos\theta_2$, vem $\theta_1=\theta_2$ pois ambos são agudos. □

Problemas de refração Suponhamos que na região considerada para a investigação do funcional, exista uma curva $y=\phi(x)$, de descontinuidade para o integrando de J, de modo que os pontos de fronteira

---

(1) $\frac{1+\text{tg}\alpha\,\text{tg}\beta_1}{-\sec\beta_1} = -(1+\text{tg}\alpha\,\text{tg}\beta_1)\cos\beta_1 = -(\cos\beta_1+\text{tg}\alpha\,\text{sen}\beta_1) = -\frac{\cos\beta_1\cos\alpha+\text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta_1}{\cos\alpha} = -\frac{\cos(\alpha-\beta_1)}{\cos\alpha}$

$\frac{1+\text{tg}\alpha\,\text{tg}\beta_2}{\sec\beta_2} = (1+\text{tg}\alpha\,\text{tg}\beta_2)\cos\beta_2 = \cos\beta_2+\text{tg}\alpha\,\text{sen}\beta_2 = \frac{\cos\alpha\cos\beta_2+\text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta_2}{\cos\alpha} = \frac{\cos(\alpha-\beta_2)}{\cos\alpha}$

A=(a,y(a)) e B=(b,y(b)) estejam localizados em lados opostos da curva $y=\phi(x)$ (fig 3). Podemos representar J na forma:

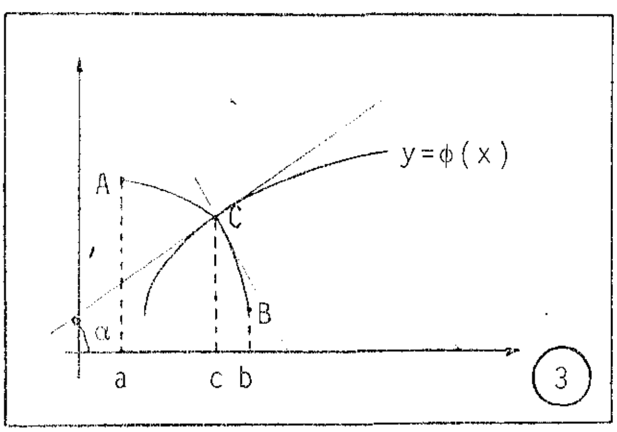
$$J(y) = \int_a^c F_1(x,y,y')dx + \int_c^b F_2(x,y,y')dx$$

onde $F_1(x,y,y')=F(x,y,y')$ na parte AC da curva $y=y(x)$ e na outra parte BC temos $F_2(x,y,y')=F(x,y,y')$. É natural esperar um ponto anguloso em C. Os arcos AC e CB são necessariamente extremais de J.(3) A primeira variação de J pode ser escrita como:

$$(\delta J)_y(h) = \delta\int_a^c F_1(x,y,y')dx + \delta\int_c^b F_2(x,y,y')dx =$$

$$= \int_a^c (F_{1y} - \frac{d}{dx} F_{1y'})\delta y(x)dx + \Big[F_1+(\phi'-y')F_{1y'}\Big]_{x=c^-} \delta x_c +$$

$$= \int_c^b (F_{2y} - \frac{d}{dx} F_{2y'})\delta y(x)dx - \Big[F_2+(\phi'-y')F_{2y'}\Big]_{x=c^+} \delta x_c .$$



Impondo agora, a condição

$$(\delta J)_y(h) = 0,$$

obtemos a chamada CONDIÇÃO DE REFRAÇÃO:

$$\Big[F_1+(\phi'-y')F_{1y'}\Big]_{x=c^-} = \Big[F_2+(\phi'-y')F_{2y'}\Big]_{x=c^+}$$

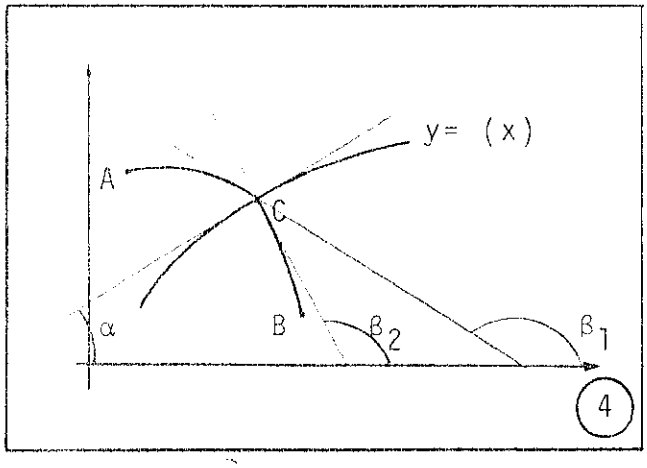
(3) [illegible] podemos ver o problema como sendo um ponto fixo (A [illegible]) (C) sobre ϕ.

TEOREMA 2 - Suponhamos que o funcional dado seja da forma

$$J(y) = \int_a^b G(x,y)\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

com $G(x,y)$ descontínua nos pontos da curva $y=\phi(x)$ que deixa A e B em lados opostos (fig 4). Então, os ângulos de incidência e de refração obedecem a "lei de refração da luz".

Dem: Vamos escrever J na forma



$$J(y)=\int_a^c G_1(x,y)\sqrt{1+y'^2}\,dx + \int_c^b G_2(x,y)\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

com $G_1(x,y)$ regular em $[a,c]$, e $G_2(x,y)$ regular em $[c,b]$.

A condição de refração, neste caso, fica

$$G_1(x,y)\frac{1+\phi'y'}{\sqrt{1+y'^2}}\bigg|_{x=c^-} = G_2(x,y)\frac{1+\phi'y'}{\sqrt{1+y'^2}}\bigg|_{x=c^+}$$

Fazendo $\alpha=\text{arc tg}(\phi'(c))$, $\beta_1=\text{arc tg}(y'_-(c))$, e ainda $\beta_2=\text{arc tg}(y'_+(c))$, podemos escrever:

$$G_1(c,y(c))\frac{1+\text{tg}\alpha\ \text{tg}\beta_1}{\sqrt{1+\text{tg}^2\beta_1}} = G_2(c,y(c))\frac{1+\text{tg}\alpha\ \text{tg}\beta_2}{\sqrt{1+\text{tg}^2\beta_2}}$$

que, simplificada, fica

$$\frac{\cos(\alpha-\beta_1)}{\cos(\alpha-\beta_2)} = \frac{G_2(c,y(c))}{G_1(c,y(c))}$$

No caso em que as funções G_1 e G_2 são dadas por

$$G_1(x,y) = \frac{1}{v_1(x,y)}$$

$$G_2(x,y) = \frac{1}{v_2(x,y)}$$

onde v_1 e v_2 são as velocidades da luz nos meios separados por , obtemos a expressão que dá a lei de refração da luz - ou lei de SNELL:

$$\frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta_1))}{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta_2))} = \frac{v_1(c,y(c))}{v_2(c,y(c))}. \qquad \square$$

OBSERVAÇÃO - Os extremais com pontos angulosos não ocorrem apenas em problemas de reflexão ou refração.(4)

OBSERVAÇÃO - CONDIÇÃO DE ANGULOSIDADE - Nosso objetivo é encontrar condições que devem ser satisfeitas pelas soluções com pontos angulosos para serem extremantes do funcional

$$J(y) = \int_a^b F(x,y,y')\,dx.$$

Supondo que $y=y(x)$ tenha somente um ponto anguloso,(5) por exemplo $C=(c,y(c))$, temos

$$J(y) = \int_a^c F(x,y,y')\,dx + \int_c^b F(x,y,y')\,dx$$

---

(4) Ver exemplo da página [illegible]

(5) [illegible] de ser, o raciocínio é o mesmo.

e a primeira variação será:

$$(\delta J)_y(h) = \left[F - y'F_{y'}\right]_{x=c^-}\delta x_c - \left[F_{y'}\right]_{x=c^-}\delta y_c - \left[F - y'F_{y'}\right]_{x=c^+}\delta x_c -$$

$$- \left[F_{y'}\right]_{x=c^+}\delta y_c + \int_a^b \left[F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right]\delta y(x)dx.$$

Temos então as seguintes condições:

(i) $\left[F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right] = 0$ (pois y é extremante de J)

(ii) $\left[F_{y'}\right]_{x=c^-} = \left[F_{y'}\right]_{x=c^+}$ (pela regularidade de F)

(iii) δx_c e δy_c são independentes

As duas últimas condições são conhecidas como CONDIÇÕES DE WEIERSTRASS-ERDMANN que, juntamente com o fato $(\delta J)_y(h)=0$ implicam em

$$\left[F - y'F_{y'}\right]_{x=c^-} = \left[F - y'F_{y'}\right]_{x=c^+}$$

chamada CONDIÇÃO DE ANGULOSIDADE. Tal condição, mais a continuidade de y(x) nos permite determinar o ponto anguloso C, quando existir.

EXEMPLO - Encontrar extremantes de classe C^0 com pontos angulosos para o funcional

$$J(y) = \int_0^b (y'^2 - y^2)dx$$

Solução: Da condição (ii) acima obtemos

$$2y'_-(c) = 2y'_+(c)$$

o que implica na diferenciabilidade de y(x) em todo ponto C do intervalo [0,b], e portanto, o problema não admite solução.(6)

EXEMPLO - Encontrar extremantes de classe C^0 para o funcional

$$J(y) = \int_0^2 y'^2(1-y')^2 dx.$$

Solução: Sendo y(x) um extremante de J, a equação de Euler

$$y'' F_{y'y'} = 0$$

deve ser satisfeita, o que nos fornece y(x) do tipo

$$y = k_1 x + k_2.$$

Impondo a condição de angulosidade, vem

$$\left[-y'^2(1-y')(1-3y')\right]_{x=c^-} = \left[-y'^2(1-y')(1-3y')\right]_{x=c^+}$$

e de

$$\left[F_{y'}\right]_{x=c^-} = \left[F_{y'}\right]_{x=c^+}$$

vem

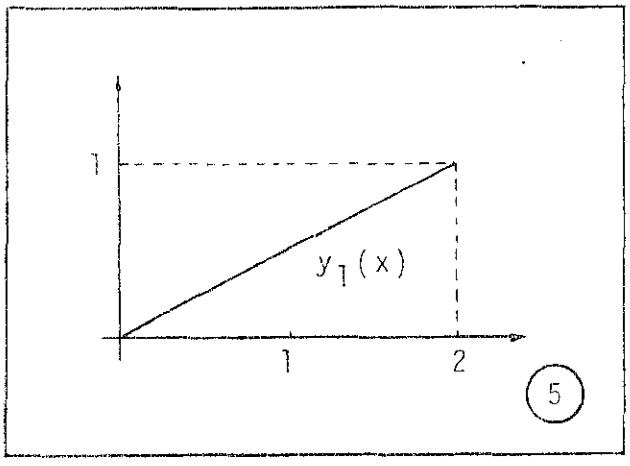
$$\left[y'(1-y')(1-2y')\right]_{x=c^-} = \left[y'(1-y')(1-2y')\right]_{x=c^+}$$

Uma solução trivial é dada por $y'_+(c)=y'_-(c)$ (isto é; y

---

(6) [illegible] $F_{y'y'} = 2 \neq 0$ e, portanto, pelo teorema-1 do capítulo II [illegible] [0,b].

é regular), e como os extremantes são retas passando pelos pontos (0,0) e (2,1), temos $y_1(x)=x/2$ (fig 5).



Se $y'_+(c)\neq y'_-(c)$, podemos ter

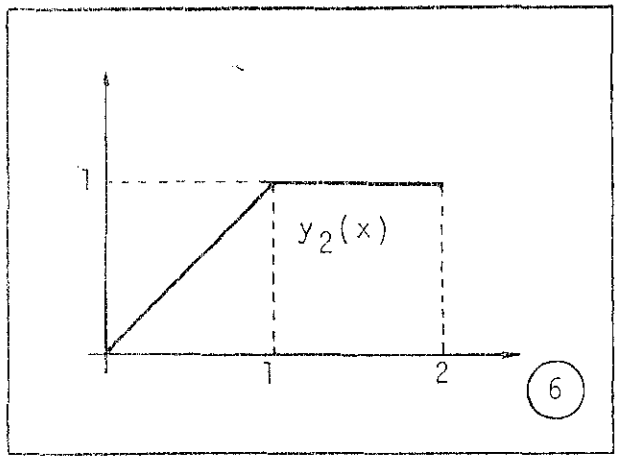
$y'_-(c)=0$ e $y'_+(c)=1$

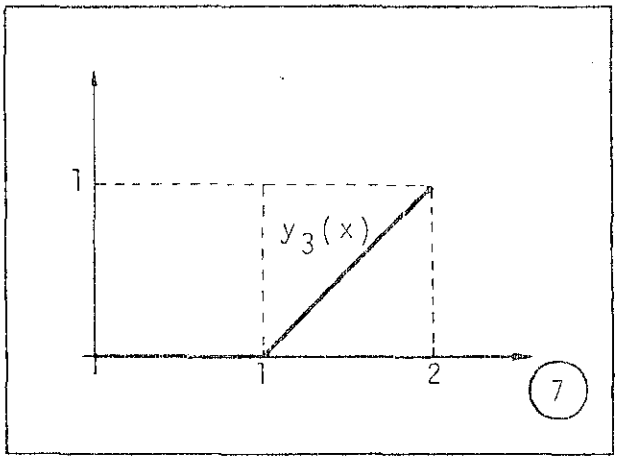
ou

$y'_-(c)=1$ e $y'_+(c)=0$

Concluimos então, que os extremantes de J, com pontos angulosos são funções cujos gráficos são poligonais unindo os pontos A=(0,0) e B=(2,1), compostas por segmentos de retas do tipo $y=k_1$ ou $y=x+k_2$ (com k_1 e k_2 constantes reais).

Nos gráficos abaixo, temos algumas das possibilidades para y(x) com pontos angulosos.





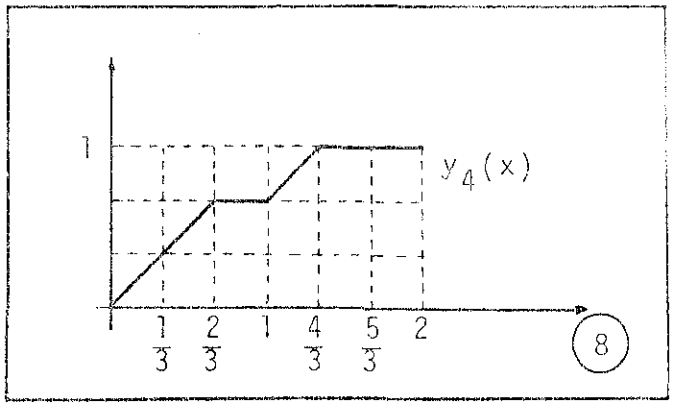
$$y_2(x)=\begin{cases} x & \text{se } 0\leq x\leq 1 \\ 1 & \text{se } 1\leq x\leq 2 \end{cases}$$

com ponto anguloso em x=1.

$$y_3(x)=\begin{cases} 0 & \text{se } 0\leq x\leq 1 \\ x-1 & \text{se } 1\leq x\leq 2 \end{cases}$$

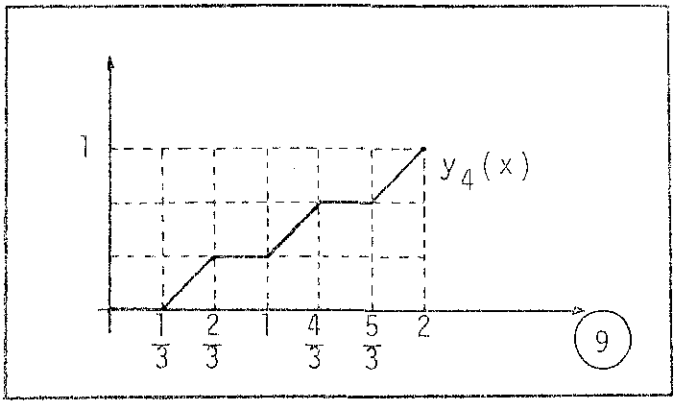
com ponto anguloso em x=1.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL



$$y_4(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad 0 \leq x < 2/3 \\ 2/3 & \text{se} \quad 2/3 \leq x < 1 \\ x-1/3 & \text{se} \quad 1 \leq x < 4/3 \\ 1 & \text{se} \quad 4/3 \leq x < 2 \end{cases}$$

com pontos angulosos 2/3, 1, e 4/3.



$$y_5(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 \leq x < 2/3 \\ x-1/3 & \text{se} \quad 1/3 \leq x < 2/3 \\ 1/3 & \text{se} \quad 2/3 \leq x < 1 \\ x-2/3 & \text{se} \quad 1 \leq x < 4/3 \\ 2/3 & \text{se} \quad 4/3 \leq x < 5/3 \\ x-1 & \text{se} \quad 5/3 \leq x < 2 \end{cases}$$

com pontos angulosos 1/3, 2/3, 1, 4/3, e 5/3.

Assim por diante, podemos construir infinitos extremantes do tipo acima. É importante observar que

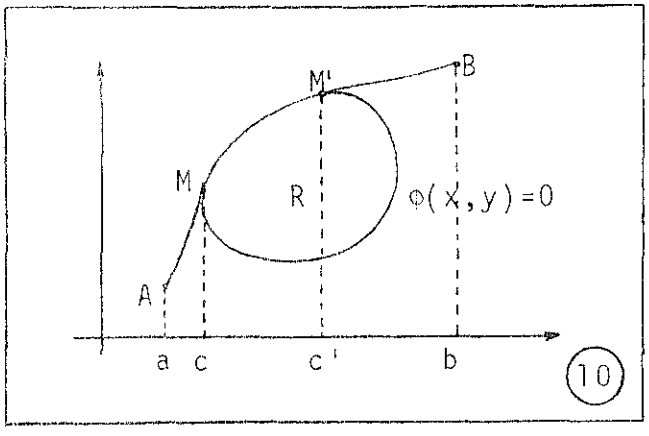
$$J(y_1) = \int_0^2 (1/2)^2 (1-1/2)^2 dx = 1/8$$

enquanto que, para todo i=2,3,4,5 temos

$$J(y_i) = 0$$

pois em cada sub-intervalo de integração, um dos fatores do integrando é nulo. Como $J(y) \geq 0$ para todo $y(x)$, concluimos que as funções y_2, y_3, y_4, e y_5 dadas acima, constituem "pontos" de mínimo para J, porém, ainda não podemos concluir que $y_1(x)$ fornece o valor máximo para J.

(b) Obstáculos grossos. Seja $\mathcal{F}$ a classe das funções contínuas com derivadas contínuas, cujos gráficos não contêm pontos interiores à região plana R, limitada pela curva fechada, simples $\phi(x,y)=0$, onde $\phi \in C^1$ (fig 10).



Dizemos que a região R constitui um obstáculo grosso para as curvas admissíveis y ligando os pontos A=(a,y(a)) e B=(b,y(b)). Vamos, por simplicidade, considerar o problema de se determinar os extremais do funcional J, definido em $\mathcal{F}$, quando R é uma região conexa. Assim, vamos nos restringir a procurar um ponto M da fronteira de R, transversal à curva y=y(x), deixando o arco M'B invariante.

Sendo J um funcional do tipo

$$J(y) = \int_a^b F(x,y,y')dx$$

com as condições A=(a,y(a)) e B=(b,y(b)), estudaremos a variação de J quanto M=(c,y(c)) varia sobre a curva γ, de equação $\phi(x,y)=0$

Podemos escrever J como

$$J(y) = \int_a^c F(x,y,y')dx + \int_c^b F(x,y,y')dx$$

e vamos nos interessar pela primeira integral

$$J_1(y) = \int_a^c F(x,y,y')dx$$

com M=(c,y(c)) e A=(a,y(a)) fixo. Para isso, suponhamos que, numa vizinhança de M, a curva γ possa ser gráfico de uma função $\phi(x)$.

Temos então

$$(\delta J_1)_y(h) = \int_a^c (F_y - \frac{d}{dx} F_{y'})\delta y(x)dx + \left[F+(\phi'-y')F_{y'}\right]_{x=c} \delta x_c$$

conforme pág 79. Como a equação de Euler deve ser satisfeita, podemos afirmar que a integral se anula.

O funcional

$$J_2(y) = \int_c^b F(x,y,y')dx$$

tem também em M um ponto de fronteira móvel e, como a curva $y=\phi(x)$ não varia numa conveniente vizinhança de M, a variação do funcional J_2, quando M se desloca para a posição $(c+\delta x_c, y(c)+\delta y_c)$, reduz-se à mudança dos limites de integração:

$$\Delta J_2 = \int_{c+\delta x_c}^b F(x,y,y')dx - \int_c^b F(x,y,y')dx =$$

$$= -\int_c^{c+\delta x_c} F(x,y,y')dx =$$

$$= -\int_c^{c+\delta x_c} F(x,\phi(x),\phi'(x))dx$$

pois $y=\phi(x)$ em $[c,c+\delta x_c]$. Usando o teorema do valor médio e a continuidade de F, vem:

$$\Delta J_2 = \left[-F(x,\phi(x),\phi'(x))\right]_{x=c} \delta x_c + \beta\delta x_c$$

onde $\beta\to 0$ se $\delta x_c \to 0$. Portanto,

$$(\delta J_2)_y(h) = \left[-F(x,\phi(x),\phi'(x))\right]_{x=c} \delta x_c$$

e

$$(\delta J)_y(h) = \left[F(x,y,y')+(\phi'-y')F_{y'}\right]_{x=c} \delta x_c - \left[F(x,\phi,\phi')\right]_{x=c} \delta x_c =$$

$$= \left[F(x,y,y')-F(x,y,\phi')-(\phi'-y')F_{y'}\right]_{x=c} \delta x_c$$

pois $y(c)=\phi(c)$.

A condição necessária para extremo nos dá então,

$$(*) \qquad \left[F(x,y,y')-F(x,y,\phi')-(y'-\phi')F_{y'}\right]_{x=c} = 0$$

e, pelo teorema do valor médio aplicado à variável y', vem

$$F(x,y,y')-F(x,y,\phi') = (\phi'-y')F_{y'}(x,y,p)$$

para algum $p\in[y'(c),\phi'(c)]$. Daí, podemos escrever (*) na forma:

$$(y'-\phi')\left[F_{y'}(x,y,p)-F_{y'}(x,y,y')\right]_{x=c} = 0$$

Aplicando novamente o teorema do valor médio, vem

$$(y'-\phi')(p-y')F_{y'y'}(x,y,q)\Big|_{x=c} = 0$$

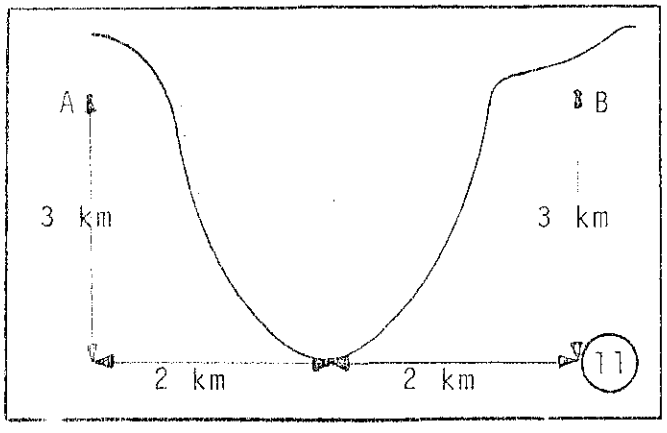
onde $q\in[y'(c),p(c)]$. Esta última igualdade é chamada CONDIÇÃO UNILATERAL DE OBSTÁCULO.

Como p é um valor intermediário, entre y'(c) e $\phi'(c)$, teremos $p(c)=y'(c)$ se e somente se $y'(c)=\phi'(c)$. Daí concluimos que se $F_{y'y'}(x,y,q)\neq 0$, então a condição unilateral de obstáculo fica:

$$y'(c) = \phi'(c)$$

isto é; no ponto M, o extremante AM e a fronteira de R têm a mesma tangente.

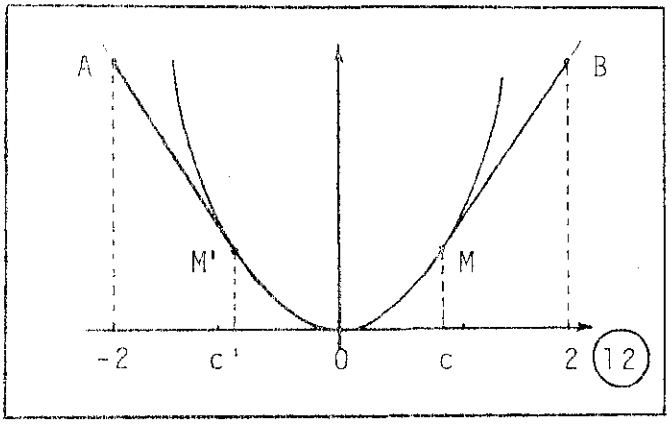
EXEMPLO - A figura abaixo é o mapa de uma região litorânea onde estão situadas duas cidades A e B que devem ser ligadas por uma rodovia. Queremos saber qual a maneira mais econômica de fazê-lo(fig 11).



Solução: O problema consiste em determinar a rodovia de menor comprimento, já que a largura é fixada. Escolhendo um referencial conveniente, podemos, depois de obtidos os dados do problema, formulá-lo em linguagem matemática como segue:

Encontrar os extremantes do funcional:

$$J(y) = \int_{-2}^{2} \sqrt{1+y'^2}\,dx$$



com as condições $y(-2)=y(2) = 3$ e $y \leqslant x^2$ (supondo, por simplicidade que a margem do mar se aproxime da parábola $y=x^2$, numa vizinhança conveniente da origem (fig 12).

Já sabemos que os

extremantes do funcional acima são retas do tipo

$$y = k_1 x + k_2$$

com k_1 e k_2 constantes. A curva procurada $y(x)$ consiste de três partes: os segmentos AM' e MB e o arco de parábola MM'. Do fato:

$$F_{y'y'} = \frac{1}{(1+y'^2)^{3/2}} \neq 0,$$

obtemos a condição unilateral de obstáculo

$$y'(c) = 2c.$$

Vamos determinar a equação da reta r que passa pelos pontos M e B(para a outra, o raciocínio é o mesmo). Temos:

$$r: y(x) = 2cx + k_2$$

e, como M está sobre a parábola e sobre a reta, vem

$$y(c)=2c^2+k_2 \quad \text{e} \quad y(c)=c^2$$

do que obtemos

$$c^2 = 2c^2 + k_2$$

Lembrando que B está sobre a reta r, vale a equação:

$$3 = 4c + k_2$$

que, juntamente com a equação anterior fornece

$$c = 1 \quad \text{ou} \quad c = 3$$

Se c=3, o ponto M está acima de B, não interessando ao problema físico em questão. Se c=1, temos a equação procurada

$$y(x) = 2x-1$$

para o segmento MB. De modo análogo, encontramos

$$y(x) = -2x-1$$

para o segmento AM'. Logo, o extremante de J será definido pelas equações:

$$y(x) = \begin{cases} -2x-1 & \text{se } -2 \leq x < -1 \\ x^2 & \text{se } -1 \leq x < 1 \\ 2x-1 & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

VI - CONDIÇÕES SUFICIENTES PARA EXTREMO DE UM FUNCIONAL

1. Legendre tentou, sem sucesso, provar que uma condição necessária para que o funcional

$$J(y) = \int_a^b F(x,y,y')dx$$

tivesse um mínimo local em y, era que

$$F_{y'y'} > 0$$

fôsse satisfeita ao longo de y. O raciocínio feito foi o seguinte:

A segunda variação de J (1) é dada por

$$(\delta^2 J)_y(h) = \frac{1}{2}\int_a^b (h^2 F_{yy} + 2hh' F_{yy'} + h'^2 F_{y'y'})dx \overset{(2)}{=} \int_a^b (Ph'^2 + Qh^2)dx$$

que se transforma em

$$(\delta^2 J)_y(h) = \int_a^b (Ph'^2 + 2whh' + (Q+w')h^2)dx \quad (3)$$

onde w=w(x) é uma função suficientemente diferenciável definida em [a,b].

Supondo que P(x)>0, temos

$$Ph'^2 + 2whh' + (Q+w')h^2 = (\sqrt{P}\,h' + \sqrt{Q+w'}\,h)^2$$

se, e somente se,

---

(1) Ver página 27.

(2) Fazendo $P=P(x)=\frac{1}{2}F_{y'y'}$ e $Q=Q(x)=\frac{1}{2}[F_{yy} - \frac{d}{dx}F_{yy'}]$.

(3) Notando que $\int_a^b (w'h^2 + 2whh')dx = \int_a^b \frac{d}{dx}(wh^2)dx = wh^2\Big|_a^b = 0$.

$$\sqrt{P}\,h'\sqrt{Q+w'}\,h = whh'$$

ou

$$P(Q+w')-w^2 = 0$$

conhecida como EQUAÇÃO DE RICCATI, e que implica em

$$(\delta^2 J)_y(h) \geqslant 0$$

Embora seja sempre possível resolver essa equação localmente, não há nenhuma garantia de que possamos resolvê-la globalmente em $[a,b]$, como mostra o seguinte

EXEMPLO - Na equação de Riccati, se fizermos $P=1$ e $Q=-1$, temos:

$$w'-(1+w^2) = 0$$

que admite a solução

$$w(x) = tg(a-x).$$

No entanto, se $b-a>\pi$, não há solução $w(x)$ definida em todo o intervalo $[a,b]$. Na verdade, a condição

$$F_{y'y'}>0$$

em cada ponto da curva $y(x)$, não é uma condição suficiente para mínimo de J pelo fato de ser uma condição local.

Suponhamos, entretanto, que $P>0$ e admitamos que $w(x)$ seja solução da equação de Riccati em $[a,b]$. Então, a segunda variação de J pode ser escrita como

$$(\delta^2 J)_y(h) = \int_a^b P(h' + \frac{w}{p}h)^2 dx \quad (4)$$

que assume apenas valores não negativos e se, para algum h, tivermos $(\delta^2 J)_y(h)=0$, então, como $P>0$, vem

$$h'(x) + \frac{w}{p} h(x) = 0$$

e como $h(a)=0$, pelo teorema da unicidade de soluções de equações diferenciais, vem

$$h(x) \equiv 0.$$

Logo, temos

$$(\delta^2 J)_y(h) \geq 0$$

e

$$(\delta^2 J)_y(h)=0 \iff h \equiv 0,$$

o que afirma que J é DEFINIDO POSITIVO, e então existe uma constante $k>0$ tal que

$$(\delta^2 J)_y(h) \geq k\|h\|^2 .$$

OBSERVAÇÃO - A equação de Riccati pode ser reduzida a uma equação diferencial linear de segunda ordem fazendo

$$w = \frac{u'}{u}P \qquad (\text{com } u \neq 0 \text{ em } [a,b])$$

e daí obtemos

---

(4) Basta observar que $\frac{u^2}{P} = Q+u'$

$$P(Q+w')-w^2 = -\frac{d}{dx}(Pu')+Qu = 0$$

chamada EQUAÇÃO DE JACOBI.

OBSERVAÇÃO - Para obtermos uma solução global da equação de Riccati, a partir de uma solução $u=u(x)$ da equação de Jacobi, devemos ter $u\neq 0$ em $[a,b]$, o que nem sempre acontece.

2. Campos de extremantes -

DEFINIÇÃO - Seja Ω um subconjunto aberto e simplesmente conexo de R^2. Um CAMPO DE EXTREMANTES para o funcional

$$J(y) = \int_a^b F(x,y,y')dx$$

(onde F tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas), é uma família de curvas $y=\phi(x,\alpha)$ satisfazendo:

(a) Cada $y=\phi(x,\alpha)$ é um extremante de J, isto é, satisfaz a equação de Euler para J.

(b) Se $P\in\Omega$, existe uma única curva da família que passa por P.

(c) Se $p(x,y)$(definida em Ω) é o coeficiente angular da reta tangente à curva y no ponto $P=(x,y)\in\Omega$, então, $p(x,y)$ tem derivadas parciais de primeira ordem contínuas em (x,y).

OBSERVAÇÃO - O campo de extremantes é denotado por $(\Omega,p(x,y))$ e a função $p(x,y)$ é chamada FUNÇÃO DO CAMPO (ou FUNÇÃO INCLINAÇÃO DO CAMPO).

LEMA DE HILBERT - "Seja $(\Omega,p(x,y))$ um campo de extremantes para o

funcional

$$J(y) = \int_a^b F(x,y,y')dx$$

e γ uma curva fechada, retificável e inteiramente contida em Ω. Então,

$$\int_\gamma \{[F(x,y,p(x,y))-pF_{y'}(x,y,p)]dx + F_{y'}(x,y,p)dy\} = 0"$$

Dem : Basta verificar que a forma diferencial da integral de linha é exata; isto é

$$\frac{\partial}{\partial y}[F(x,y,p)-pF_{y'}(x,y,p)] = \frac{\partial}{\partial x} F_{y'}(x,y,p)$$

De fato,

$$\frac{\partial}{\partial y}[F-pF_{y'}] = F_y+F_p p_y-p(F_{y'y}+F_{y'p}p_y)-p_y F_{y'} =$$

$$=F_y-y'F_{y'y}-y'F_{y'y'}p_y$$

pois $y'(x)=p(x,y)$ em Ω. Logo,

$$\frac{\partial}{\partial y}[F-pF_{y'}]+[-F_{y'x}-p_x F_{y'p}] = F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \text{ (5)}$$

pois y é extremante de J, e daí,

$$\frac{\partial}{\partial y}[F-pF_{y'}] = F_{y'x}+p_x F_{y'p} = \frac{\partial}{\partial x} F_{y'}(x,y,p(x,y)). \qquad \square$$

---

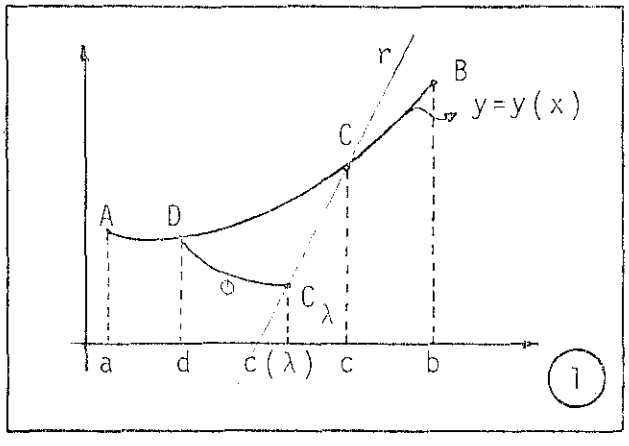
(5) Notar que $F_y - \frac{d}{dx} F_y(x,y,p(x,y)) = F_y - F_{y'x} - y'F_{y'y} - p_x F_{y'p} - y'p_y F_{y'p}$.

3. Condição de WEIERSTRASS

Seja $y=y(x)$ uma curva extremante do funcional

$$J(y) = \int_a^b F(x,y,y')dx$$

ligando os pontos A e B do plano e passando por C e D(pontos quaisquer de y). Vamos considerar as curvas $\tilde{y}=\tilde{y}(x)$, variações de $y(x)$ que passam pelos pontos A, D, C, C e B, tal que em $[a,d]$ e $[c,b]$, $\tilde{y}(x)$ coincide com $y(x)$, em $[d,c_\lambda]$ é uma parte de uma curva $\phi(x,\lambda)$ e em $[c_\lambda,c]$ é um segmento de uma reta r dada por



$$r(x)-y(c)=m_r(x-c) \quad \text{(fig 1)}$$

No intervalo $[d,c]$ temos

$$J(\tilde{y}) = \int_d^{c(\lambda)} F(x,\phi(x,\lambda),\phi_x(x,\lambda))dx + \int_{c(\lambda)}^{c} F(x,r,m_r)dx = I(\lambda)$$

Suponhamos que, para cada λ, a curva $\phi(x,\lambda)$ seja do tipo

$$\phi(x,\lambda)=y(x)+\varepsilon\lambda(x-d)$$

onde $\varepsilon>0$ se $m_r>y'(c)$ ou $\varepsilon<0$ se $m_r<y'(c)$.

Fazendo

$$\eta(\lambda)=\int_d^{c(\lambda)} F(x,\phi,\phi_x)dx$$

$$\psi(\lambda)=\int_{c(\lambda)}^{c} F(x,r,m_r)dx,$$

temos

$$I(\lambda) = \eta(\lambda) + \psi(\lambda)$$

e, então,

$$\eta'(0) = \left[F+(m_r-y')F_{y'}\right]_{x=c} \text{⑥}$$

pois y é extremante de J. Temos também ⑦

$$\psi'(0)=\int_{c(0)}^{c}\frac{d}{d\lambda}F(x,r,m_r)dx - \frac{dc(\lambda)}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} F(x,r,m_r)\Big|_{x=c} =$$

$$=-\delta x_c\left[F(x,r,m_r)\right]_{x=c}$$

Portanto, temos

$$I'(0)=-\delta x_c\left[-F(x,y(x),y'(x))\Big|_{x=c}+F(x,y(x),m_r)\Big|_{x=c}-\right.$$

$$\left.-(m_r-y'(x))\Big|_{x=c}F_{y'}(x,y(x),y'(x))\Big|_{x=c}\right]$$

DEFINIÇÃO - A FUNÇÃO EXCESSO de WEIERSTRASS é definida por

$$E(x,y,y';\xi)=F(x,y,\xi)-F(x,y,y')-(\xi-y')F_{y'}(x,y,y') \quad (\text{com } \xi\in R)$$

Com essa notação, a variação efetuada acima fica:

$$I'(0) = -\delta x_c\ E(x,y,y',m_r)\Big|_{x=c}$$

---

⑥ *O ponto D é fixo e C_λ varia sobre a reta r tal que $C_\lambda=C$ quando $\lambda=0$.*

⑦ *Pela fórmula de Leibniz.*

TEOREMA 1 - "Se $y=y(x)$ dá mínimo para o funcional

$$J(y) = \int_a^b F(x,y,y')dx,$$

então, temos

$$E(x,y,y',\xi)\Big|_{x=c} \geq 0$$

para todo $\xi \in R$ e $\forall c \in [a,b]$"

Dem: Suponhamos que existam $\xi \in R$ e $c \in [a,b]$ tal que

$$E(x,y,y',\xi)\Big|_{x=c} < 0.$$

Fazendo $\xi = m_r$, vem (8)

$$\phi(c(\lambda),\lambda) = y(c(\lambda)) + \varepsilon\lambda(c(\lambda)-d)$$

$$r(c(\lambda)) = \phi(c(\lambda),\lambda) = y(c) + m_r(c(\lambda)-d)$$

e, portanto,

$$y(c(\lambda)) + \varepsilon\lambda(c(\lambda)-d) = y(c) + m_r(c(\lambda)-c)$$

o que implica em

$$\lambda = \frac{y(c)+m_r(c(\lambda)-c)-y(c(\lambda))}{\varepsilon(c(\lambda)-d)},$$

e daí,

$$\frac{d\lambda}{dc(\lambda)}\Big|_{\lambda=0} = \frac{(c(\lambda)-d)[m_r-y'(c(\lambda))]-[y(c)+m_r(c(\lambda)-c)-y(c(\lambda))]}{\varepsilon(c(\lambda)-d)^2}\Big|_{\lambda=0} =$$

---

(8) *Considerando que* $m_r = \frac{y(c)-y(c(\lambda))+\varepsilon\lambda(c(\lambda)-d)}{c-c(\lambda)}$, $\phi(x,\lambda)=y(x)+\varepsilon\lambda(x-d)$ *e* $r(x)-y(c)=m_r(x-c)$

$$= \frac{m_r - y'(c)}{(c-d)}.$$

Mas, por outro lado,

$$\left.\frac{dc(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} = \delta x_c$$

e então,

$$\frac{1}{\delta x_c} = \frac{m_r - y'(c)}{\varepsilon(c-d)}.$$

Como ε e $m_r - y'(c)$ têm sempre sinais opostos, vem

$$\delta x_c < 0.$$

Portanto,

$$I'(0) = -\delta x_c \left. E(x,y,y',\xi)\right|_{x=c} < 0$$

e, para λ suficientemente pequeno,

$$J(\tilde{y}) = I(\lambda) < I(0) = J(y),$$

o que contradiz o fato de y ser "ponto de mínimo" para J. Logo, devemos ter

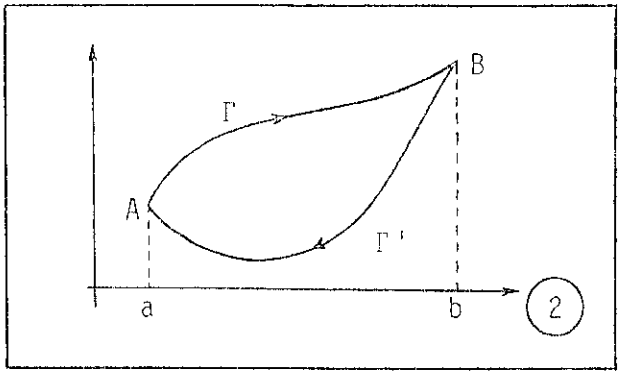
$$\left. E(x,y,y',\xi)\right|_{x=c} \geq 0$$

para todo $\xi \in R$ e qualquer $c \in [a,b]$. □

TEOREMA 2 (Condição suficiente de WEIERSTRASS)- "Seja Γ, dada por $y_0=y_0(x)$, uma curva com extremidades A e B no campo de extremantes $(\Omega,p(x,y))$. Então, se $E(x,y,p(x,y),\xi)\geq 0$ para todo $\xi\in R$ e (x,y) em Ω com y "próximo" de y_0, $J(y_0)$ é um mínimo do funcional

$$J(y) = \int_a^b F(x,y,y')dx"$$

Dem: Seja Γ', uma curva de extremidades A e B, tal que $\gamma=\Gamma\cup\Gamma'$ esteja nas condições do lema de Hilbert, isto é; para todo y admissível, vale:



$$\int_\gamma \{[F(x,y,p(x,y))-pF_{y'}(x,y,p(x,y))]dx+F_{y'}(x,y,p)dy\} = 0 \quad \text{(fig 2)}$$

A integral acima pode ser desmembrada em duas integrais ao longo de Γ e Γ'. Temos então,

$$\int_\Gamma [(F(x,y,p)-pF_{y'})dx+F_{y'}dy] = \int_\Gamma F(x,y,p)dx \quad (9)$$

e

$$Y = \int_\Gamma F(x,y,p)dx+\int_{\Gamma'}\{[F(x,y,p)-pF_{y'}(x,y,p)]dx+F_{y'}(x,y,p)dy\} = 0$$

Por outro lado, se

$$X = \int_{-\Gamma} F(x,y,y')dx - \int_\Gamma F(x,y,y')dx,$$

como $Y=0$, podemos escrever:

---

(9) *Levando-se em conta que* $dy_0=pdx$ *sobre o extremante* Γ.

$$X = X+Y = \int_{-\Gamma'} \{[F(x,y,y')-F(x,y,p)+pF_{y'}(x,y,p)]dx-F_{y'}(x,y,p)dy\} =$$

$$= \int_{-\Gamma'} \{F(x,y,y')-F(x,y,p)-(y'-p)F_{y'}(x,y,p)\}dx =$$

$$= \int_{-\Gamma'} E(x,y,p(x,y),y')dx \geqslant 0.$$

Daí concluimos que

$$\int_{-\Gamma'} F(x,y,y')dx \geqslant \int_{\Gamma} F(x,y,y')dx$$

ou seja; a curva Γ, de equação $y_0=y_0(x)$ minimiza o funcional J. □

OBSERVAÇÃO - (Resumo da condição suficiente de Weierstrass) Consideremos a função de Weierstrass

$$E(x,y,p,y') = F(x,y,y')-F(x,y,p)-(y'-p)F_p(x,y,p)$$

onde $p=p(x,y)$ é a inclinação, no ponto (x,y), do campo de extremantes do problema variacional para

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx$$

com as condições $y(x_0)=y_0$ e $y(x_1)=y_1$. Para que a curva $\Gamma: y_0=y_0(x)$ seja "ponto" de <u>extremo fraco</u> para J, são condições suficientes:

(1.) A curva $\Gamma: y_0=y_0(x)$ é extremante de J, isto é; satisfaz a equação de Euler juntamente com as condições de fronteira.

(2.) O extremante y_0 pode ser incluído em um campo de extremantes $(\Omega,p(x,y))$, com $y_0'(x)=p(x,y_0)$.

(3.) A função $E(x,y,p,y')$ conserva seu sinal em todos os pontos

(x,y) suficientemente próximos de Γ, para valores de y' próximos de $p(x,y_0)$.

Nestas condições, o funcional J terá MÁXIMO FRACO em $y=y_0(x)$ se $E\leq 0$; e MÍNIMO FRACO se $E\geq 0$.

Para extremo forte, as condições suficientes são (1.) e (2.), acima, e ainda

(3.)' $E(x,y,p,y')$ conserva seu sinal em todos os pontos (x,y) próximos de y_0, para quaisquer valores de $y'(x)$. Assim, teremos MÁXIMO FORTE se $E\leq 0$ e MÍNIMO FORTE se $E\geq 0$.

EXEMPLO - Analisar os extremos do funcional

$$J(y) = \int_0^1 (x+2y+\frac{1}{2}y'^2)dx$$

com as condições $y(0)=y(1)=0$.

Solução: (1.) A equação de Euler para J nos dá

$$2-y''=0$$

que fornece extremantes do tipo

$$y(x) = x^2+k_1x+k_2.$$

O extremante que satisfaz as condições de fronteira é

$$y_0(x) = x^2-x$$

definido em $[0,1]$.

(2.) O extremante y_0 pode ser incluído no campo de extremantes

$$y = x^2+cx$$

com a função do campo

$$p(x,y) = y_0'(x) = 2x-1.$$

(3.) A função de Weierstrass, nesse caso, fica

$$E(x,y,p,y') = x+2y+\frac{1}{2}y'^2-x-2y-\frac{1}{2}p^2-(y'-p)p =$$

$$= \frac{1}{2}y'^2-y'p+\frac{1}{2}p^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(y'-p)^2 \geq 0$$

para qualquer valor de y'. Portanto, o funcional J tem mínimo forte em $y_0(x)=x^2-x$, e vale

$$J(y_0) = \frac{1}{3}.$$

EXEMPLO - Analisar os extremos do funcional

$$J(y) = \int_0^1 (y'^3+y')dx$$

com as condições $y(0)=0$ e $y(1)=2$.

Solução: (1.) A equação de Euler para J fica

$$yy'' = 0$$

e daí obtemos os extremantes do tipo

$$y(x) = k_1x+k_2$$

que, com as condições de fronteira nos fornece

$$y_0(x) = 2x.$$

A inclinação do campo é dada pela função

$$p(x,y) = 2.$$

(2.) Podemos incluir y_0 no campo (central) de extremantes

$$y = cx$$

com centro na origem.

(3.) A função de Weierstrass será

$$E(x,y,p,y') = y'^3+y'-p^3-p-(y'-p)(3p^2+1) =$$

$$= (y'-p)^2(y'+2p).$$

Como $(y'-p)^2>0$, segue que

$$E>0 \Leftrightarrow y'+2p>0$$

isto é;

$$y'>-2p = -4.$$

Assim, se os valores de y' estiverem próximos de 2, teremos $E>0$ e portanto, $y_0=2x$ satisfaz as condições de mínimo fraco para J. Se $y'<-4$ temos $E<0$ e então $y_0(x)=2x$ não é extremo forte para J.[10]

---

[10] *Para extremo forte exige-se que E conserve o sinal para quaisquer valores de y'.*

VII - INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA - CONVEXIDADE

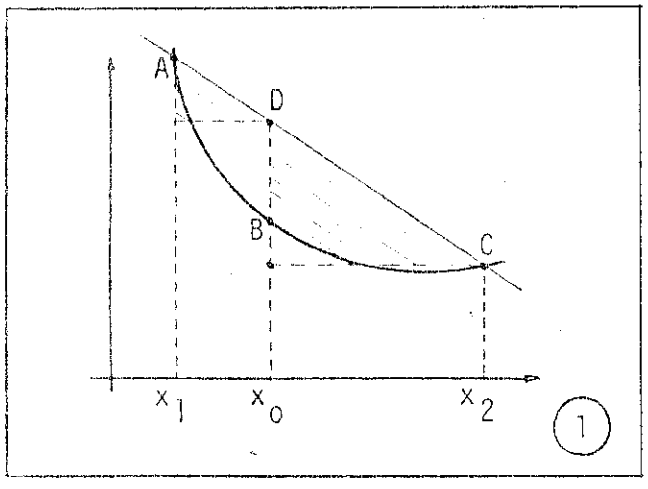
Nesta parte, estudaremos a relação entre as condições suficientes para que uma curva $y=y(x)$ dê mínimo para o funcional

$$J(y) = \int_a^b F(x,y,y')dx$$

e a convexidade da função $F(x,y,y')$ na variável y'.

DEFINIÇÃO - Uma função $f(x)$ é CONVEXA em x_0 se $f\in C[a,b]$ e, para quaisquer k_1,k_2 positivos satisfazendo as condições $k_1+k_2=1$ e $k_1x_1+k_2x_2=x_0$, com $x_1,x_2\in[a,b]$ e $x_1<x_0<x_2$, vale

$$-\infty < f(x_0) \leq k_1 f(x_1)+k_2 f(x_2).$$



Geometricamente, f é convexa em x_0 se o gráfico de $f(x)$, entre x_1 e x_2, está abaixo de qualquer corda que passa pelos pontos $A=(x_1,f(x_1))$ e $C=(x_2,f(x_2))$ (fig 1), com $x_1,x_2\in[a,b]$.

De fato,

$$\frac{x_0-x_1}{x_2-x_1} = \frac{k_1x_1+k_2x_2-x_1}{x_2-k_1x_1-k_2x_2} = \frac{x_1(k_1-1)+k_2x_2}{x_2(1-k_2)-k_1x_1} = \frac{-k_2x_1+k_2x_1}{k_1x_2-k_1x_1} = \frac{k_2}{k_1}$$

e, por outro lado, sendo $D=(x,y)$, temos, por semelhança de triângulos:

$$\frac{y-f(x_1)}{f(x_2)-y} = \frac{k_2}{k_1}$$

o que implica em

$$y = k_1 f(x_1) + k_2 f(x_2)$$

e, portanto,

$$k_1 f(x_1) + k_2 f(x_2) \geq f(x_0).$$

(a) Condição de YOUNG - Vamos agora agrupar as condições de EULER e de WEIERSTRASS em uma única - chamada condição de Young - onde fica mais evidente a relação com convexidade.

Consideremos o funcional

$$J(y) = \int_a^b F(x,y,y')dx$$

com $F \in C^2$ e $y \in C^1[a,b]$, tal que $y(a)=y_0$ e $y(b)=y_1$. Se $y=y(x)$ minimiza J, então, devem ser satisfeitas:

(i) A equação de Euler

(E) $$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

que é equivalente a

$$F_{y'}(x,y,y') - \int_a^x F_y(t,y(t),y'(t))dt = c \quad (c \underline{te})$$

com $x \in [a,b]$.

(ii) A condição de Weierstrass

(W) $$E(x,y,y',\xi) \geq 0 \quad (\forall \xi \in R \quad e \quad x \in [a,b])$$

que equivale a

$$F(x,y,y'+\xi) - F(x,y,y') - \xi F_{y'}(x,y,y') \geq 0$$

Substituindo $F_{y'}$ de (E) em (W), obtemos

$$(Y)\quad F(x,y(x),y'(x)+\xi)-F(x,y(x),y'(x))-\xi\left[c+\int_a^x F_y(t,y(t),y'(t))dt\right] \geq 0.$$

para qualquer $\xi \in R$, $x \in [a,b]$, e c constante, conhecida como CONDIÇÃO DE YOUNG.

Temos então, que as condições (E) e (W) implicam em (Y), e, como mostra o teorema abaixo, vale também a recíproca.

TEOREMA 1 - "Se a condição de Young, para mínimo do funcional

$$J(y) = \int_a^b F(x,y,y')dx$$

fôr satisfeita, então, valem também a equação de Euler e a condição de Weierstrass".

Dem: Temos

$$F_{y'}(x,y,y') = \frac{1}{\xi}\{F(x,y,y'+\xi) - F(x,y,y')\}$$

que, substituido em (Y), fica

$$(E)\quad F_{y'}(x,y,y') = c + \int_a^x F_y(t,y(t),y'(t))dt \qquad (\forall x \in [a,b])$$

e, ainda,

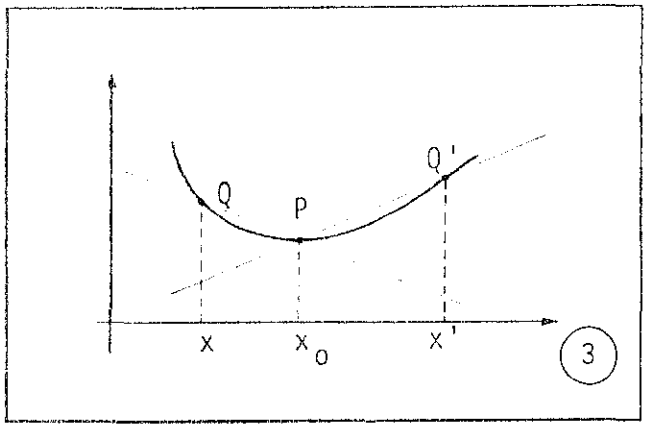
$$(W)\quad F(x,y,y'+\xi) - F(x,y,y') - \xi F_{y'}(x,y,y') \geq 0 \quad \forall \xi \in R. \qquad \square$$

OBSERVAÇÃO - A condição de Young corresponde a uma relação de convexidade.

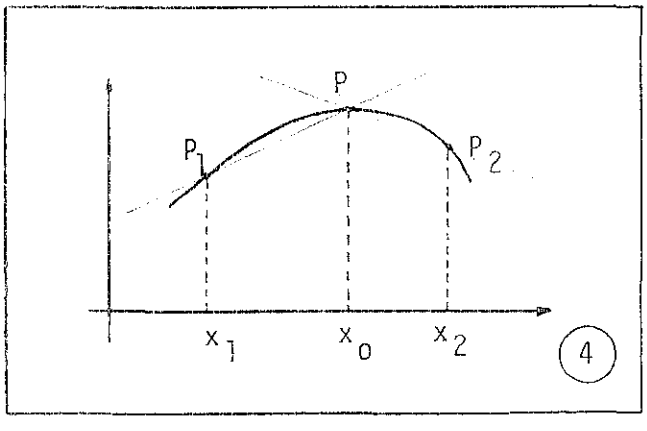
DEFINIÇÃO - Uma função L(x), linear, tal que $L(x)<f(x)$ $\forall x$, satisfazendo $L(x_0)=f(x_0)$, é chamada SUPORTE LINEAR DE f EM x_0.

TEOREMA 2 - (Minkowsky) Uma função real f(x), contínua em x_0, é convexa nesse ponto se e somente se admite um suporte linear em x_0.

Dem: ($\Rightarrow$) Consideremos o ponto fixo $P=(x_0,f(x_0))$ e os pontos variáveis $Q=(x,f(x))$ e $Q'=(x',f(x'))$ com $x<x_0<x'$ (fig 2). Se $x\to x_0^-$ então, $Q\to P$, e o coeficiente angular da reta definida pelos pontos P e Q tende crescentemente a um número real m, pois f é convexa. Se $x'\to x_0^+$, então, $Q'\to P$ e o coeficiente angular da reta Q'P decresce tendendo a um número $n\in R$.



Supondo que $m>n$, poderíamos escolher x_1 e x_2 próximos de x_0, com $x_1<x_0<x_2$, para os quais, teríamos uma situação como na figura 3, ao lado, o que iria contrariar a convexidade de f. Logo, devemos ter $m\leq n$, e então, podemos escolher $r\in R$ com $m\leq r\leq n$, e o suporte procurado L(x), para f no ponto x_0, pode ser a reta $y-f(x_0)=r(x-x_0)$.



($\Leftarrow$) Suponhamos agora, que f(x) é contínua e admite um suporte linear L(x) em x_0, isto é, existe uma reta r passando pelo

ponto $P=(x_0,f(x_0))$, tal que o gráfico de f esteja acima de r. Consideremos agora os pontos $P_1=(x_1,f(x_1))$ e $P_2=(x_2,f(x_2))$, onde x_1 é um número real qualquer e $x_2=2x_0-x_1$ (x_0 é o ponto médio do segmento $\overline{x_1x_2}$). Nestas condições, P_1 e P_2 estão acima de r e o ponto médio do segmento P_1P_2 está acima de P. Logo f é convexa em x_0. □

OBSERVAÇÃO - Voltando à desigualdade de Young, podemos escrever:

$$(Y)\quad f(\xi)=F(x,y,y'+\xi)\geq F(x,y,y')+\xi\left[c+\int_a^x F_y(t,y(t),y'(t))dt\right]$$

que só será satisfeita quando a função $f(\xi)$ tiver o suporte linear

$$L(\xi) = F(x,y,y') + \xi\left[c + \int_a^x F_y(t,y(t),y'(t))dt\right]$$

ou ainda, diremos que (Y) é satisfeita se e só se $f(\xi)$ é convexa em $\xi=0$. Assim, devemos ter, nas generalizações dos métodos do cálculo das variações, uma certa necessidade de generalizar o conceito de convexidade.

De fato, a existência de mínimo para o funcional

$$J(y) = \int_a^b F(x,y,y')dx$$

depende da convexidade da função $F(x,y,y')$ na variável y'. Por outro lado, pelo teorema de Weierstrass, a existência de mínimo para J será garantida se a classe das curvas admissíveis fôr compacta ou tiver suficientes partes compactas, e o funcional fôr contínuo.

(b) Semi-continuidade e o teorema de BAIRE-WEIERSTRASS - Continuidade de funcionais é mais do que se pode esperar, a não ser que se

restrinja consideravelmente a classe das funções admissíveis, o que nem sempre é conveniente. Assim, tem sentido a seguinte

DEFINIÇÃO - Seja J(y) um funcional definido na classe A de curvas $y=y(x)$, com $x\in[a,b]$. Dizemos que J é SEMI-CONTÍNUO INFERIORMENTE em $y_0\in A$ se, para cada $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que se $y\in A$ $V_\delta(y_0)$ (1), então

$$J(y) > J(y_0)-\varepsilon.$$

Em outras palavras,

$$J(y_0) \leq \lim_{n\to\infty} \inf J(y_n)$$

onde $(y_n)_{n\in N}$ é uma sequência de curvas de A que converge uniformemente para y_0.

TEOREMA 3 - (Baire-Weierstrass) - "Toda função f semi-contínua inferiormente, definida em um espaço métrico compacto S, admite um mínimo em S!"

Dem: Seja $(x_n)_{n\in N}$ uma sequência em S tal que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \inf\{f(x):x\in S\} = L \quad (2)$$

e consideremos uma subsequência (x_{n_j}) de (x_n) tal que $x_{n_j}\to x^*\in S$. Então,

---

(1) *A vizinhança de raio δ e centro em y_0 é definida por $V_\delta(y_0) = \{\bar{y}\in A:\|\bar{y}-y_0\|<\delta\}$, onde $\|y\|=\sup\{|y(x)| \text{ com } x\in[a,b]\}$*

(2) *Tal sequência é denominada SEQUÊNCIA MINIMIZANTE.*

$$\lim_{j\to\infty} f(x_{n_j}) = \inf\{f(x):x\in S\} = L.$$

Por outro lado,

$$f(x^*) \leq \lim_{j\to\infty} \inf f(x_{n_j}) = \lim_{j\to\infty} f(x_{n_j}) = L$$

e, portanto,

$$f(x^*) \leq \inf_{X}\{f(x):x\in S\}$$

e, como $x^*\in S$, vem

$$f(x^*) = L$$

isto é,

$$f(x^*) = \min\{f(x):x\in S\}$$ □

(c) Teoremas de existência.

DEFINIÇÃO - Seja H um espaço de Hilbert③ sobre R e consideremos um subconjunto $X\subset H$. Se $x_0\in H$, definimos a distância de x_0 a X por

$$d(x_0,X) = \inf\{d(x_0,x):x\in X\} = \inf\{\|x-x_0\|:x\in X\}.$$

TEOREMA 4 - Seja H um espaço de Hilbert e $X\subset H$, X fechado e convexo. Então, para cada $x_0\in H$ existe um único $\bar{x}_0\in X$ tal que

$$d(x_0,\bar{x}_0) = d(x_0,X).$$

Dem: Seja $(x_n)_{n\in N}$ uma sequência em X tal que

---

③ *Um espaço de Hilbert é um espaço vetorial normado e completo, cuja norma provém de um produto escalar.*

$$\lim_{n\to\infty} ||x_n - x_o|| = d = d(x_o, X).$$

Sendo conhecido que num espaço de Hilbert H, vale

$$||a-b||^2 + ||a+b||^2 = 2(||a||^2 + ||b||^2)$$

para quaisquer $a,b\in H$, fazemos $a = x_n - x_o$ e $b = x_m - x_o$ e obtemos

$$||x_n - x_m||^2 + ||x_n + x_m - 2x_o||^2 = 2(||x_n - x_o||^2 + ||x_m - x_o||^2)$$

ou seja,

$$||x_n - x_m||^2 = 2(||x_n - x_o||^2 + ||x_m - x_o||^2 - 2\left\|\frac{x_n + x_m}{2} - x_o\right\|^2).$$

Da convexidade de X, sabemos que

$$\frac{x_n + x_m}{2} \in X$$

e, portanto,

$$\left\|\frac{x_n + x_m}{2} - x_o\right\| \geq d.$$

Logo, obtemos

$$0 \leq ||x_n - x_m||^2 \leq 2(||x_n - x_o||^2 + ||x_m - x_o||^2 - 2d^2)$$

e, fazendo $n,m\to\infty$, vem

$$||x_n - x_m|| \to 0,$$

isto é, $(x_n)_{n\in N}$ é de Cauchy e converge para algum $\overline{x}_o \in X$, pois X é fechado. Além disso, temos

$$\|\overline{x}_0 - x_0\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = d$$

e então x_0 dá o mínimo. Para provar a unicidade, suponhamos que x' é um elemento de X satisfazendo a condição de distância mínima, isto é,

$$\|\overline{x}_0 - x_0\| = \|x' - x_0\| = d.$$

Então, $(\overline{x}_0, x', \overline{x}_0, x', \overline{x}_0, x' \ldots)$ é uma sequência minimizante, portanto, de Cauchy. Daí resulta que $\overline{x}_0 = x'$. □

TEOREMA 5 - Seja V um espaço vetorial com duas normas $\| \ \|$ e $\| \ \|^*$ tais que $\| \ \|^*$ provêm de um produto escalar e existe uma constante $k>0$, tal que $\|x\| \leq k\|x\|^*$ para todo $x \in V$. Se C é um subconjunto convexo de V, então, para todo $x_0 \in V$ existe um único $\overline{x}_0 \in \overline{C}$ (4) tal que

$$\|\overline{x}_0 - x_0\|^* = \inf\{\|x - x_0\|^* : x \in C\}.$$ (5)

Dem: Seja H o espaço de Hilbert obtido pelo completamento de V em relação à norma $\| \ \|^*$. Sendo $\overline{C}^*$ a aderência de C em H, temos $\overline{C}^*$ fechado, convexo e $\overline{C}^* \subset H$. Pelo teorema anterior, segue que, dado $x_0 \in V$, existe um único $\overline{x}_0 \in \overline{C}^*$ tal que

$$d(\overline{x}_0, x_0) = \|\overline{x}_0 - x_0\|^* = \inf\{\|x_0 - x\|^* : x \in \overline{C}^*\} =$$

$$= d(x_0, \overline{C}^*) = \inf\{\|x_0 - x\|^* : x \in C\} = d(x_0, C).$$

Mas, a condição

---

(4) $\overline{C}$ é o completamento de C em relação à norma $\| \ \|$.

(5) Onde $\|\overline{x}_0 - x_0\|^* = \lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\|^*$ e $(x_n)_{n\in N}$ é de Cauchy na norma $\| \ \|^*$.

$$k\|x\|^* > \|x\|$$

implica em

$$\overline{C}^* \subset \overline{C}$$

e, portanto,

$$\overline{x}_0 \in \overline{C}.$$

DEFINIÇÃO - Uma função $f:[a,b]\to R$ é ABSOLUTAMENTE CONTÍNUA[6] se, dado $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que se $\{(\alpha_i,\beta_i)\}_{i\in I}$ é uma família finita de sub-intervalos disjuntos de $[a,b]$ com

$$\sum_{i\in I}(\beta_i-\alpha_i)<\delta,$$

então,

$$\sum_{i\in I}|f(\beta_i)-f(\alpha_i)|<\varepsilon.$$

DEFINIÇÃO - Uma função $f:[a,b]\to R$ é de VARIAÇÃO LIMITADA[7] se

$$V(f)=\sup_{P}\{\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|:a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\}<+\infty$$

para qualquer partição P do intervalo $[a,b]$.

Consideremos agora, o funcional

$$(*)\qquad J(y)=\int_a^b\{A(x)y'^2+2B(x)yy'+C(x)y^2\}dx,$$

---

(6) *Notação:* $f\in AC$.

(7) *Notação:* $f\in BV$.

onde A, B e C são funções definidas em $[a,b]$ tais que A é limitada, $B \in L_2[a,b]$ (8) e $C \in L_1[a,b]$, com a classe de funções admissíveis $H^1[a,b]$ - das funções absolutamente contínuas definidas em $[a,b]$ com derivada em $L_2[a,b]$.

OBSERVAÇÃO - $H^1[a,b]$ é o completamento de $C^1[a,b]$ segundo a norma definida por

$$\|f\|^* = \max\{|f(x)| : x \in [a,b]\} + \|f'\|_{L_2}$$

ou por sua equivalente

$$\|f\|_{H^1} = \|f\|_{L_2} + \|f'\|_{L_2}$$

TEOREMA 6 - Seja J, o funcional definido em (*) acima. Então, se

$$\text{(i)}\quad A(x) \geq m > 0 \qquad (m \text{ constante})$$

$$\text{(ii)}\quad C(x) - \frac{B^2(x)}{m} \geq \delta > 0 \qquad (\delta \text{ constante})$$

existe uma constante $k>0$ tal que, para qualquer $y \in H^1[a,b]$, temos

$$J(y) \geq k\{\|y\|^2_{L_2} + \|y'\|^2_{L_2}\}.$$

Dem: Consideremos a expressão

$$2B(x)yy'.$$

Para todo $\varepsilon > 0$, temos

$$2B(x)yy' = \frac{2B(x)y}{\varepsilon}\varepsilon.y' \geq -2\left|\frac{B(x)y}{\varepsilon}\right||\varepsilon y'|$$

---

(8) $f \in L_p[a,b]$ se e só se $\left[\int_a^b |f(x)|^p dx\right]^{1/p} < +\infty$.

e, por outro lado,

$$2\left|\frac{B(x)y}{\varepsilon}\right||\varepsilon y'| \leq \frac{B^2(x)y^2}{\varepsilon^2} + \varepsilon^2 y'^2 .$$

Logo,

$$2B(x)yy' \geq -\frac{B^2(x)}{\varepsilon^2} y^2 - \varepsilon^2 y'^2$$

e, então

$$J(y) \geq \int_a^b \{A(x)y'^2 - \frac{B^2(x)y^2}{\varepsilon^2} - \varepsilon^2 y'^2 + C(x)y^2\}dx =$$

$$= \int_a^b \{(A(x)-\varepsilon^2)y'^2 + (C(x) - \frac{B^2(x)}{\varepsilon})y^2\}dx .$$

Fixando-se ε^2 próximo de m tal que $\varepsilon^2 < m$, temos por (i)

$$A(x) - \varepsilon^2 \geq k > 0$$

e, por (ii),

$$C(x) - \frac{B^2(x)}{\varepsilon^2} \geq k > 0$$

e daí,

$$J(y) \geq k\int_a^b (y'^2 + y^2)dx = k\{\|y\|_{L_2}^2 + \|y'\|_{L_2}^2\}$$ ∎

COROLÁRIO - Nas condições do teorema anterior, existe $k^* > 0$ tal que

$$J(y) \geq k^* \|y\|_{H^1}^2$$

para todo $y \in H^1$.

Dem: De fato,

$$J(y) \geq k\{\|y\|^2_{L_2} + \|y'\|^2_{L_2}\} \geq \frac{k}{2}\{\|y\|_{L_2} + \|y'\|_{L_2}\} =$$

$$= \frac{k}{2}\|y\|^2_{H^1}$$

e, portanto, basta tomar $k^* = \frac{k}{2}$ e segue o resultado. ∎

OBSERVAÇÃO - As condições (i) e (ii) implicam em $J(y) \geq 0$ e então, $\{J(y)\}^{1/2}$ é uma norma em H^1, proveniente do produto escalar

$$I(y,z) = \int_a^b \{A(x)y'z' + B(x)(yz'+y'z) + C(x)yz\}dx$$

Esta norma será indicada por $\|\ \|^*$ e, os resultados acima mostram que existe $k>0$ para o qual

$$k\|y\|^* > \|y\|_{H^1}$$

para todo $y \in H^1$!

TEOREMA 7 - Consideremos o funcional

$$J(y) = \int_a^b \{A(x)y'^2 + 2B(x)yy' + C(x)y^2\}dx$$

e seja Y a classe das funções $y \in H^1[a,b]$ tais que $y(a)=A$ e $y(b)=B$. Se $A(x)$ é limitada, $B(x) \in L_2[a,b]$, $C(x) \in L_1[a,b]$ e são satisfeitas as condições (i) e (ii), do teorema anterior, então, existe um único $y_0 \in Y$ tal que

$$J(y_0) = \inf\{J(y) : y \in Y\}$$

Dem: Basta aplicar o teorema 5, fazendo $V=H^1$, $\|\ \|=\|\ \|_{H^1}$ e ainda, $\|y\|^* = \{J(y)\}^{1/2}$. Notando que Y é convexo e pondo C=Y, temos $\bar{C}=\bar{C}^*=C$, pois H^1 é completo na norma $\|\ \|_{H^1}$ e portanto na norma $\|\ \|$. No teorema 5 fazemos a hipótese

$$\|\bar{x}-x_0\|^* = \lim_{n\to\infty} \|x_n-x_0\|^*$$

onde $(x_n)_{n\in N}$ é de Cauchy na norma $\|\ \|^*$. Tomando $x_0=0$, a demonstração se reduz a mostrar que

$$(\|y_n\|_{H^1}\to 0) \Rightarrow (J(y_n)\to 0)$$

Mas, $y_n\to 0$ em H^1 é equivalente a $y_n\to 0$ em L_2 e $y_n'\to 0$ em L_2 e, daí vem

$$J(y_n)\to 0. \qquad \blacksquare$$

DEFINIÇÃO - Dizemos que $y\in H^{1,1+\alpha}[a,b]$ se $y\in AC$ em $[a,b]$ e sua derivada $y'\in L_{1+\alpha}[a,b]$, onde α é um número real positivo.

OBSERVAÇÃO - Estas funções são caracterizadas pela existência de uma constante k tal que, para uma família qualquer disjunta, de sub-intervalos (α_i,β_i) de $[a,b]$, tem-se

$$\sum_i \frac{|y(\beta_i)-y(\alpha_i)|^{1+\alpha}}{(\beta_i-\alpha_i)^{\alpha}} \le k$$

O conjunto $H^{1,1+\alpha}[a,b]$ é o completamento de $C^1[a,b]$ segundo a norma

$$\|y\|^*_{H^{1,1+\alpha}} = \max\{|y(x)| : x\in[a,b]\}+\|y'\|_{L_{1+\alpha}}$$

ou, sua equivalente.

$$\|y\|_{H^{1,1+\alpha}} = \|y\|_{L_{1+\alpha}} + \|y'\|_{L_{1+\alpha}}.$$

TEOREMA 8 - Se $(y_n)_{n\in N}$ é uma sequência em $H^{1,1+\alpha}[a,b]$ tal que y_n converge uniformemente para y e $\|y_n\|_{H^{1,1+\alpha}} \leq M$ (M constante), então, $y\in H^{1,1+\alpha}$.

Dem: O fato

$$\|y_n\|_{H^{1,1+\alpha}} \leq M$$

implica em

$$\|y_n'\|_{L_{1+\alpha}} \leq M$$

e então, para todo $n\in N$ temos

$$\sum \frac{|y_n(\beta_i)-y_n(\alpha_i)|^{1+\alpha}}{(\beta_i-\alpha_i)^{\alpha}} \leq M^{1+\alpha}.$$

Fazendo $n\to\infty$ e notando que a convergência é uniforme, temos

$$\sum \frac{|y(\beta_i)-y(\alpha_i)|^{1+\alpha}}{(\beta_i-\alpha_i)^{\alpha}} \leq M^{1+\alpha}$$

e portanto $y\in H^{1,1+\alpha}$. □

TEOREMA 9 - Seja $(y_n)_{n\in N}$ uma sequência de funções em $H^{1,1+\alpha}$ tal que existe uma constante M, para a qual $\|y\|_{H^{1,1+\alpha}} \leq M$ para todo n em N. Então, é possível extrair de $(y_n)_{n\in N}$ uma subsequência uniformemente convergente para um elemento de $H^{1,1+\alpha}$.

Dem: Se $y_n \to \bar{y}$ uniformemente, onde $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é a subsequência em questão, já sabemos que $\bar{y} \in H^{1,1+\alpha}$; pela proposição anterior. Falta provar a sua existência. Como

$$\|y\|_{H^{1,1+\alpha}} = \max \{|y(x)| : x \in [a,b]\} + \|y'\|$$

e

$$\|y_n\|_{H^{1,1+\alpha}} \leq M,$$

segue que as funções y_n são equilimitadas(9), e sendo $x_1, x_2 \in [a,b]$, vem

$$|y_n(x_1) - y_n(x_2)| = \int_{x_1}^{x_2} y_n'(t)\,dt \leq \left[\int_{x_1}^{x_2} |y_n'(t)|^{1+\alpha} dt\right]^{\frac{1}{1+\alpha}} |x_1 - x_2|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \leq$$

$$\leq \left[\int_{x_1}^{x_2} |y_n'(t)|^{1+\alpha} dt\right]^{\frac{1}{1+\alpha}} |x_1 - x_2|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} =$$

$$= \|y_n'\|_{L_{1+\alpha}} |x_1 - x_2|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \leq$$

$$\leq M \, |x_1 - x_2|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}$$

do que concluimos que as funções y_n são equicontínuas(10) e então, pelo teorema de Ascoli(11), existe uma subsequência uniformemente convergente.

---

(9) O conjunto $F(X)$ de funções definidas em X, é equilimitado [illegible] número real positivo [illegible] tal que $|f(x)| \leq$ [illegible], $\forall x \in X$ e $\forall f \in F$.

(10) O conjunto F de funções é equicontínuo se para cada [illegible] tal que, para todo x, x' com $d(x,x') < \delta$, vale $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

(11) Teorema de Ascoli - Se X é um espaço métrico compacto, então [illegible] subconjunto fechado de $C(X,\mathbb{R})$ é compacto se e só se é equilimitado e equicontínuo. ([illegible] conjunto das funções reais definidas em X, contínuas e limitadas).

TEOREMA 10 - Consideremos o funcional

$$J(y) = \int_a^b f(x)y'(x)dx$$

definido em $H^{1,1+\alpha}$, com $f(x)\in L_{1+\frac{1}{\alpha}}[a,b]$. Se $(y_n)_{n\in N}$ é uma sequência em $H^{1,1+\alpha}$ tal que $\|y_n\|_{H^{1,1+\alpha}} \leq M$ e $y_n \overset{U}{\to} y$, então, $J(y_n)\to J(y)$.

Dem: Pela linearidade de J, basta provar que

$$(y_n \overset{U}{\to} 0) \Rightarrow (J(y_n)\to J(0)).$$

Observemos que se $f\in C^1[a,b]$ com $f(a)=f(b)=0$, vale

$$\int_a^b f(x)y'(x)dx = f(x)y(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)y(x)dx = \int_a^b f'(x)y(x)dx$$

e então $(y_n \overset{U}{\to} 0)$ implica em $J(y_n)\to 0$.

Suponhamos agora que $f\in L_{1+\frac{1}{\alpha}}$. Então podemos aproximá-la, na norma de $L_{1+\frac{1}{\alpha}}$, por uma sequência $(f_i)_{i\in N}$, tal que cada f_i tenha suporte[12] compacto e derivada contínua em (a,b). Temos então $f_i(a)=f_i(b)=0$ para cada $i\in N$ e

$$J(y_n) = \int_a^b f(x)y_n'(x)dx = \int_a^b (f-f_i)y_n'dx + \int_a^b f_i y_n'dx$$

onde a integral

$$\int_a^b f_i y_n'dx \to 0$$

para todo i, pela observação inicial. Então,

$$|J(y_n)| = \left|\int_a^b (f-f_i)y_n'dx\right| \leq \|f-f_i\|_{L_{1+\frac{1}{\alpha}}} \|y_n'\|_{L_{1+\alpha}} \leq$$

---

(12) *O suporte de f é a aderência do conjunto* $\{x\in[a,b]: f(x)\neq 0\}$.

$$\leq M \| f-f_i \|_{L^{1+\frac{1}{\alpha}}} .$$

que converge para zero se $i \to \infty$, o que demonstra o teorema.

Consideremos agora, o funcional

$$J(y) = \int_a^b f(x,y,y')dx,$$

onde f tem derivada contínua em relação a y'.

DEFINIÇÃO - Dizemos que J é INFERIORMENTE LIMITADO se existe $N \in R^+$ tal que $f(x,y,y') \geq -N$, quaisquer que sejam $x \in [a,b]$, y e y'. Assim, o conjunto

$$\{J(y): y \text{ é admissível}\}$$

é inferiormente limitado e

$$J(y) \geq -N(b-a)$$

para todo y admissível.

DEFINIÇÃO - Dizemos que J é CONVEXO se $E(x,y,y';\xi) \geq 0$ para quaisquer $x \in [a,b]$, y, y', ξ ou, em outras palavras, se $f(x,y,y')$ é convexa em relação a y'. No que segue, vamos considerar $H^{1,1+\alpha}$ como classe admissível para J.

TEOREMA 11 - Seja J, um funcional inferiormente limitado e convexo Então J é semi-contínuo inferiormente, com relação à convergência uniforme, em qualquer parte limitada de $H^{1,1+\alpha}$.

Dem: Consideremos o conjunto

$$S = \{y \in H^{1,1+\alpha} : \|y\|_{H^{1,1+\alpha}} \leq k \ (k \text{ constante})\}$$

no qual usaremos a métrica da convergência uniforme

$$d(y_1,y_2) = \max \{|y_1(x)-y_2(x)| : x\in[a,b]\}.$$

Seja $(y_n)_{n\in N}$ uma sequência em S, tal que $y_n \overset{u}{\to} y\in S$, com $J(y_n)<+\infty$, para todo $n\in N$. Nestas condições, podemos ter $J(y)<+\infty$ ou $J(y)=+\infty$.

Suponhamos que $J(y)<+\infty$ e mostremos que, para todo $\varepsilon>0$ existe λ tal que

$$J(y_n)-J(y)>-\varepsilon$$

para todo $n>\lambda$. Consideremos agora, o conjunto

$$E_R = \{x\in[a,b] : |y'(x)|>R\}$$

para o qual vale

$$\mu(E_R).R \leq \int_{E_R} |y'(x)|\,dx < \int_a^b |y'(x)|\,dx \leq$$
$$\leq \left[\int_a^b |y'(x)|^{1+\alpha}dx\right]^{\frac{1}{1+\alpha}} (b-a)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \text{ (13)}$$

e, portanto,

$$\mu(E_R) \leq \frac{1}{R}\, k\, (b-a)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}$$

que pode tornar-se arbitrariamente pequena, para o que, basta fazer R suficientemente grande. Temos então,

---

(13) $\mu(E_R)$=*medida de Lebesgue do conjunto* E_R.

$$J(y_n)-J(y) = \int_a^b \left[f(x,y_n,y_n')-f(x,y,y')\right]dx =$$

$$= \int_{E_R} [f(x,y_n,y_n')-f(x,y,y')]\,dx + \int_{[a,b]-E_R} [f(x,y_n,y_n')-f(x,y,y')]\,dx \geq$$

$$\geq -\mu(E_R)M + \int_{[a,b]-E_R} [f(x,y_n,y_n')-f(x,y,y')]\,dx \geq$$

$$\geq -\varepsilon + \int_{[a,b]-E_R} [f(x,y_n,y_n')-f(x,y,y')]\,dx.$$

Vamos calcular esta última integral como segue:

$$\int_{[a,b]-E_R} [f(x,y_n,y_n')-f(x,y,y')]\,dx =$$

$$= \int_{[a,b]-E_R} [f(x,y_n,y_n')-f(x,y_n,y')]\,dx +$$

$$+ \int_{[a,b]-E_R} [f(x,y_n,y')-f(x,y,y')]\,dx$$

onde a segunda integral do segundo membro tende a zero pois, a sequência $(y_n)_{n\in N}$ converge uniformemente para y. Para a primeira integral, temos

$$\int_{[a,b]-E_R} [f(x,y_n,y_n')-f(x,y_n,y')]\,dx \geq \int_{[a,b]-E_R} f_{y'}(x,y_n,y')(y_n'-y')\,dx$$

pois $E\geq 0$, pela convexidade de f. Mas,

$$\int_{[a,b]-E_R} f_{y'}(x,y_n,y')(y_n'-y')\,dx =$$

$$= \int_{[a,b]-E_R} [f_{y'}(x,y_n,y')-f_{y'}(x,y,y')](y_n'-y')\,dx + \int_{[a,b]-E_R} f_{y'}(x,y,y')(y_n'-y')\,dx$$

onde a segunda integral do segundo membro tende a zero.[14] Para a primeira integral, temos

$$\left|\int_{[a,b]-E_R}[f_{y'}(x,y_n,y')-f_{y'}(x,y,y')](y_n'-y')dx\right| \leq$$

$$\leq \sup_{a\leq x\leq b}\{|f_{y'}(x,y_n,y')-f_{y'}(x,y,y')|\}\int_a^b|y_n'-y'|dx \leq^{(15)}$$

$$\leq \sup_{a\leq x\leq b}\{|f_{y'}(x,y_n,y')-f_{y'}(x,y,y')|\}\|y_n'-y'\|_{L_{1+\alpha}}(b-a)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \leq$$

$$\leq 2k(b-a)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}\cdot\sup_{a\leq x\leq b}\{|f_{y'}(x,y_n,y')-f_{y'}(x,y,y')|\}$$

e este último fator tende a zero pela convergência uniforme da seqüência $(y_n)_{n\in N}$. Para n suficientemente grande, obtemos então,

$$J(y_n)-J(y) > -\varepsilon,$$

isto é, J é semi-contínuo inferiormente.

No caso em que $J(y)=+\infty$, devemos mostrar que $J(y_n)\to +\infty$ quando $n\to\infty$, e para isso, observemos em primeiro lugar que

$$\int_{[a,b]-E_R}f(x,y,y')dx \to +\infty$$

se $R\to+\infty$.

De fato,

$$J(y) = \int_a^b f(x,y,y')dx = \int_{[a,b]-E_R}f(x,y,y')dx + \int_{E_R}f(x,y,y')dx$$

---

(14) Vide Teorema 10, página 131.
(15) [illegible] desigualdade de Hölder: $\int|fg| \leq \|f\|_{L_p}\|g\|_{L_q}$ [illegible] satisfazem a condição $1/p + 1/q = 1$. [illegible]

e, como $J(y)=+\infty$ e $\mu(E_R)\to 0$ se $R\to+\infty$, a afirmação se verifica. Por outro lado, o mesmo raciocínio feito anteriormente mostra que

$$\min \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]-E_R} f(x,y_n,y_n')\,dx \geq \int_{[a,b]-E_R} f(x,y,y')\,dx$$

e, como

$$\int_a^b f(x,y_n,y_n')\,dx \geq \int_{[a,b]-E_R} f(x,y_n,y_n')\,dx - N\mu(E_R),$$

temos

$$\min \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x,y_n,y_n')\,dx \geq \min \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]-E_R} f(x,y_n,y_n')\,dx - N\mu(E_R).$$

Portanto, vale

$$\min \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x,y_n,y_n')\,dx \geq \int_{[a,b]-E_R} f(x,y,y')\,dx - N\mu(E_R).$$

Do fato

$$\int_{[a,b]-E_R} f(x,y,y')\,dx \to \infty$$

quando $R\to+\infty$, obtemos

$$\min \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x,y_n,y_n')\,dx = +\infty$$

ou, em outras palavras,

$$\min \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x,y_n,y_n')\,dx = \int_a^b f(x,y,y')\,dx,$$

isto é, J é semi-contínuo inferiormente.

Estamos agora em condições de enunciar o seguinte

TEOREMA 12 - Consideremos o funcional

$$J(y) = \int_a^b f(x,y,y')dx$$

com f convexa na terceira variável, e tal que

$$f(x,y,y') \geq |y'|^{1+\alpha} - N$$

para quaisquer $x\in[a,b]$, y,y' e $N\in R$. Nestas condições, J admite mínimo em qualquer classe $Y\subset H^{1,1+\alpha}$ fechada em relação à topologia da convergência uniforme.

Dem: Observemos em princípio que se

$$\inf\{J(y):y\in Y\} = +\infty,$$

o mínimo é atingido em qualquer $y\in Y$.

Vamos então, considerar

$$i = \inf\{J(y):y\in Y\} < +\infty$$

e, seja Y_o definido por

$$Y_o = \{y\in Y: J(y)\leq i+1\}.$$

Se $y\in Y_o$, então,

$$|y'|^{1+\alpha} \leq \frac{f(x,y,y')+N}{\mu}$$

que, por integração fornece

$$\|y'\|^{1+\alpha}_{L_{1+\alpha}} \leq \int_a^b \frac{f(x,y,y')}{\mu}\,dx + N\int_a^b \frac{dx}{\mu} \leq$$

$$\leq \frac{i+1}{\mu} + \frac{N}{\mu}(b-a)$$

Logo, temos

$$\|y'\|_{L_{1+\alpha}} \leq k \quad (k \text{ constante})$$

e então, pelo teorema anterior, J é semi-contínuo inferiormente. Como Y_o é compacto, o mínimo existe. □

B I B L I O G R A F I A

[1] Barbosa, J.L.M. - "Geometria Diferencial e Cálculo das Variações", IMPA, Rio de Janeiro, 1975.

[2] D'Ambrósio, Ubiratan - "Notas de Cálculo das Variações", U.S.P., 1969.

[3] Elsgoltz, L. - Equaciones diferenciales y Cálculo Variacional", MIR, Moscou, 1970.

[4] Feynman, R./Leighton, R. B./Sands, M. - "Lectures on Phisics", Addison-Wesley, 1965.

[5] Goldstein, H. - "Classical Mechanics", Addison-Wesley , 1969.

[6] Krasnov, M. L./Makarenko, G. I./Kiseliov, A. I. - "Cálculo Variacional", MIR, Moscou, 1976.

[7] Landau, L./Lifchitz, M. - "Mecanique" - MIR, Moscou, 1966

[8] Weinstock, R. - "Calculus of variations with applications to Phisics and Engineering", McGraw-Hill Book Company, N. York, 1952.