

*Aspectos Combinatórios de Identidades do
Tipo Rogers-Ramanujan*

Andréia Cristina Ribeiro

Tese de Doutorado

Orientador: **Prof. Dr. José Plínio de Oliveira Santos**

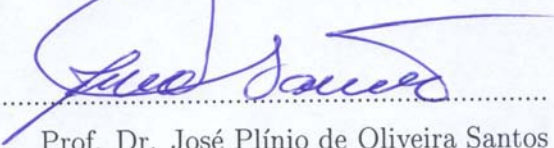
Novembro - 2006

Campinas - SP

Aspectos Combinatórios de Identidades do Tipo Rogers-Ramanujan

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Andréia Cristina Ribeiro e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 24 de Novembro de 2006.



Prof. Dr. José Plínio de Oliveira Santos

Orientador

Banca Examinadora

- 1 Prof. Dr. José Plínio de Oliveira Santos (IMECC/UNICAMP)
- 2 Prof. Dr. Vilmar Trevisan (UFRGS)
- 3 Prof. Dr. Hemar Godinho (UnB)
- 4 Prof. Dr. Marcelo Muniz Silva Alves (UFPR)
- 5 Profa. Dra. Sueli Irene Rodrigues Costa (IMECC/UNICAMP)

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues - CRB8a / 2116

Ribeiro, Andréia Cristina

R354a Aspectos combinatórios de identidades do tipo Rogers-Ramanujan /
Andréia Cristina Ribeiro – Campinas, [S.P.:s.n.], 2006.

Orientador: José Plínio de Oliveira Santos

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Análise combinatória. 2. Partições (Matemática).
3. Teoria dos números. 4. Identidades combinatórias. I. Santos, José
Plínio de Oliveira. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Aspects combinatorics of identities Rogers-Ramanujan type.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Analysis combinatorics. 2. Partities (Mathematics). 3.
Theory of numbers. 4. Identities combinatorics.

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Doutora em matemática

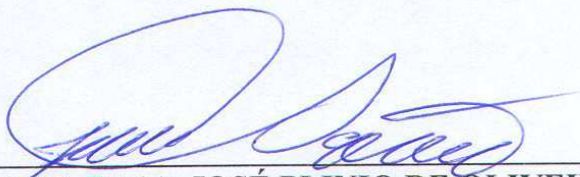
Banca examinadora: 1. Dr. José Plínio de Oliveira Santos (IMECC-UNICAMP))
2. Prof(a). Dr. Vilmar Trevisan (UFRGS)
3. Prof. Dr. Hemar Godinho (UnB)
4. Prof. Marcelo Muniz Silva Alves (UFPR)
5. Prof. Dra. Sueli Irene Rodrigues Costa (IMECC-UNICAMP)

Data da defesa: 24/11/2006

Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática

Tese de Doutorado defendida em 24 de novembro de 2006 e aprovada

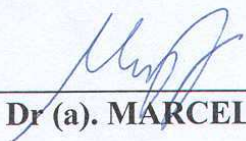
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof. (a). Dr (a). JOSÉ PLÍNIO DE OLIVEIRA SANTOS



Prof. (a). Dr (a). HEMAR TEIXEIRA GODINHO



Prof. (a). Dr (a). MARCELO MUNIZ SILVA ALVES



Prof. (a). Dr (a). VILMAR TREVISAN



Prof. (a) Dr. (a) SUELI IRENE RODRIGUES COSTA

“Existe algo que é mais forte do que o talento:
chama-se determinação.”

Ory Rodrigues

Ao meu esposo
Aparecido C. Ribeiro
e minha filha
Renata C. Ribeiro
dedico.

Agradecimentos

Na certeza de existirem mais pessoas merecedoras de agradecimentos do que costumamos reconhecer, deixo aqui meus agradecimentos. Em especial, agradeço:

A Deus, por tudo.

Ao meu orientador Prof. Dr. José Plínio Oliveira Santos, sem o qual este trabalho não se realizaria, por toda dedicação dispensada durante sua orientação, pelos conhecimentos transmitidos, pela paciência e disponibilidade que sempre teve para solucionar as minhas dúvidas e pela grande amizade.

À Prof. Dra. Sueli I. R. Costa, pela amizade, incentivo, apoio e confiança.

Aos demais professores do Departamento de Matemática, pela formação acadêmica durante o doutorado.

Aos funcionários da secretaria de pós-graduação pela amizade e por todo suporte durante o doutorado.

Aos professores da Universidade Estadual Paulista do Campus de São José do Rio Preto, pela aprendizagem durante a graduação e o mestrado. Em particular, ao Prof. Dr. Antonio Aparecido de Andrade que me orientou no mestrado e que me incentivou a fazer o doutorado.

Ao meu esposo Aparecido Clarete, pelo amor, companherismo, incentivo, confiança e paciência dedicados a mim ao longo deste período.

À minha querida filha Renata, pela compreensão da minha ausência e pelo seu amor.

Aos meus pais e aos meus sogros, minha eterna gratidão, pelo apoio incondicional, pela confiança, por todo amor e incentivo que sempre me deram em tudo que busquei realizar.

À minha querida amiga (irmã) Tatiana, que sempre compartilhou comigo as alegrias e dificuldades, sem a sua amizade tudo teria sido mais difícil.

Aos meus amigos do grupo de pesquisa, em especial ao João pela amizade e agradável convívio. Ao Rogério pela amizade, horas de descontração e pela companhia no “suco”.

Às amigas Flávia e Lidiane, pelo apoio e convívio durante esta caminhada que agora se completa.

A todos que torceram por mim confiando que eu alcançaria meus objetivos, dentre eles meus tios(as), primos(as), amigos(as), minha mais sincera gratidão.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo auxílio financeiro (Processo 02/13818-7) concedido durante o doutorado.

Resumo

Neste trabalho são estudadas várias das identidades do tipo Rogers-Ramanujan dadas por Slater. Em 1985, Andrews, introduziu um método geral para se estender para duas variáveis identidades desse tipo de modo a se obter, como casos especiais, certas importantes funções de Ramanujan. Santos, em 1991, forneceu conjecturas para várias das famílias de polinômios que surgem nestas extensões tendo provado algumas delas. Sills, em sua tese de doutorado, em 2002, implementou procedimentos que permitem a demonstração das conjecturas dadas por Santos. No presente trabalho, de forma diferente daquela dada por Andrews, são introduzidos parâmetros nas somas que aparecem nestas identidades, de modo a se obter, em cada caso, funções geradoras que fornecem interpretações combinatórias para partições onde “números” são vistos como “vetores” e que fornecem, para especiais valores dos parâmetros, interpretações novas para muitas das identidades de Slater.

Palavras-chave: Combinatória, Partições e Identidades de Rogers-Ramanujan.

Abstract

In this work many of the identities of the Rogers-Ramanujan type given by Slater are considered.

In 1985, Andrews, introduced a general method in order to extend to two variables identities of this type in order to get, as special cases, some important functions of Ramanujan. Santos, in 1991, gave conjectures for many of the family of polynomials that appears in those extensions providing the proofs for some of them. Sills, in his Ph.D. thesis in 2002, has implemented procedures allowing the proofs of the conjectures given by Santos. In the present work, in a form different from the one given by Andrews, parameters are introduced in the sums of the identities in such a way to get, in each case, generating functions giving combinatorial interpretations for partitions where "numbers" are represented as "vectors" and that can give, as special cases, combinatorial interpretations for many of the identities given by Slater.

Keywords: Combinatorics, Partitions, Identities of Rogers-Ramanujan type.

CONTEÚDO

Introdução	x
1 Preliminares	1
1.1 Notações e resultados básicos	1
1.2 Partições	5
1.3 Sobrepartições	7
1.3.1 A Função Geradora para Sobrepartições	7
2 Método de Andrews	10
3 Representando Inteiros como “Soma de Vetores”	15
3.1 Vetores bidimensionais como “partes” de uma partição	17
3.2 Vetores tridimensionais como “partes” de uma partição	40
4 Outros Teoremas Relacionados às Identidades de Slater	43
4.1 Novas interpretações para algumas identidades de Slater	43
5 Outra Interpretação para Partições Irrestritas	54
5.1 Conclusões finais	56
5.2 Perspectivas de trabalhos futuros	56
Bibliografia	57

Introdução

Em 1894, L. J. Rogers da Universidade de Leeds descobriu um par de identidades que relaciona uma série e um produto infinito que se tornaram conhecidas, mais tarde, como as identidade de Rogers-Ramanujan.

Durante a primeira metade do século XX, alguns matemáticos, incluindo Rogers, F. H. Jackson e W. N. Bailey descobriram várias identidades de Rogers-Ramanujan.

No início da década de 50 L. J. Slater estendeu resultados clássicos sobre séries do tipo Rogers-Ramanujan fornecendo uma lista de 130 identidades deste tipo. O tema central desta tese é o estudo de várias destas identidades com o objetivo de abordar seus aspectos combinatórios. Em 1985, Andrews introduziu um método geral para estender séries deste tipo para funções de duas variáveis de modo a obter, como casos particulares, importantes funções dadas por Ramanujan. Este método de Andrews, permite inclusive, fornecer provas alternativas para as identidades de Slater.

No capítulo 1 fornecemos notações e resultados básicos utilizados na tese. No capítulo 2 o método introduzido por Andrews e resultados dados por Santos são descritos incluindo uma demonstração alternativa para a segunda identidade de Rogers-Ramanujan. No capítulo 3 demonstramos vários teoremas obtidos pela introdução de parâmetros na soma de identidades de Slater diferentemente do que foi feito no método de Andrews. Para cada um deles fornecemos um corolário que nos dá uma interpretação combinatória para a identidade correspondente de Slater. No capítulo 4 listamos apenas os enunciados e respectivos corolários correspondentes a várias outras identidades de Slater cujas demonstrações são semelhantes às dadas no capítulo 3. No capítulo 5 apresentamos uma interpretação alternativa para partições irrestritas e comentários sobre trabalhos futuros.

CAPÍTULO 1

Preliminares

Neste capítulo faremos uma revisão de teoria dos números, partições, sobrep partições e funções geradoras, necessários para o entendimento do nosso trabalho.

Introduzimos, também, notações e definições, além de vários resultados importantes que serão utilizados e para os quais fornecemos referências.

1.1 Notações e resultados básicos

No que segue q é um número complexo, tal que $|q| < 1$. Sejam $a \in \mathbb{C}; k \in \mathbb{Z}_+^*, n \in \mathbb{Z}_+$.

Nestas condições definimos

$$(a; q^k)_n := \begin{cases} 1, & n = 0 \\ (1-a)(1-aq) \cdots (1-aq^{k(n-1)}), & n > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (a; q^k)_\infty &:= \lim_{n \rightarrow \infty} (a; q^k)_n \quad \text{e} \\ (a)_n &= (a; q)_n \quad \text{no caso em que } k = 1. \end{aligned}$$

Também se define para $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(a; q^k)_\lambda := \frac{(a; q^k)_\infty}{(aq^{k\lambda}; q^k)_\infty}. \tag{1.1}$$

Desta última definição destacamos a seguinte consequência, que vale para todo $n = 1, 2, \dots$

$$\frac{1}{(q^k; q^k)_{-n}} = 0.$$

Os q -análogos dos números binomiais ou polinômios de Gauss são definidos por:

$$\left[\begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right]_k = \begin{cases} \frac{(q^k; q^k)_n}{(q^k; q^k)_m (q^k; q^k)_{n-m}}, & 0 \leq m \leq n \\ 0, & \text{demais casos} \end{cases}$$

e para $k = 1$ escrevemos

$$\left[\begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right] = \begin{cases} \frac{(q)_n}{(q)_m (q)_{n-m}}, & 0 \leq m \leq n \\ 0, & \text{demais casos} \end{cases}.$$

Fixadas as notações, listamos abaixo propriedades fundamentais dos polinômios de Gauss, cujas demonstrações podem ser encontradas em Andrews [1], p. 35

$$\left[\begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right] = 1. \quad (1.2)$$

$$\left[\begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} n \\ n-m \end{matrix} \right]. \quad (1.3)$$

$$\left[\begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} n-1 \\ m \end{matrix} \right] + q^{n-m} \left[\begin{matrix} n-1 \\ m-1 \end{matrix} \right]. \quad (1.4)$$

$$\left[\begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} n-1 \\ m-1 \end{matrix} \right] + q^m \left[\begin{matrix} n-1 \\ m \end{matrix} \right]. \quad (1.5)$$

$$\lim_{q \rightarrow 1} \left[\begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right] = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \binom{n}{m}. \quad (1.6)$$

No que segue apresentaremos um importante conceito. Dadas duas seqüências α_n e β_n de números complexos, diz-se que (α_n, β_n) é um par de Bailey se

$$\beta_n = \sum_{r=0}^n \frac{\alpha_r}{(q)_{n-r} (aq)_{n+r}} \quad (1.7)$$

para todo $n \geq 0$, onde $a \in \mathbb{C}$.

Observação 1.1. Fixado a e dada a seqüência α_n , os β_n dados por (1.7) ficam completamente determinados. A inversa também é válida conforme Andrews [4], p.278, onde encontramos

$$\alpha_n = (1 - aq^{2n}) \sum_{j=0}^n \frac{(aq)_{n+j-1} (-1)^{n-j} q^{\frac{(n-j)(n-j-1)}{2}}}{(q)_{n-j}} \beta_j. \quad (1.8)$$

Acompanhando esta definição apresentamos um resultado devido a Bailey (1949) que tem permitido a obtenção de novas identidades do tipo Rogers-Ramanujan.

Lema 1.2. (Lema de Bailey) Se α_n e β_n são seqüências que formam um par de Bailey, então α'_n e β'_n dadas por

$$\beta'_n = \sum_{j=0}^n \frac{(\rho_1)_j (\rho_2)_j (aq/\rho_1 \rho_2)_{n-j} (aq/\rho_1 \rho_2)^j}{(aq/\rho_1)_n (aq/\rho_2)_n (q)_{n-j}} \quad (1.9)$$

$$\alpha'_n = \frac{(\rho_1)_r (\rho_2)_r (aq/\rho_1 \rho_2)^r}{(aq/\rho_1)^r (aq/\rho_2)^r} \alpha_r \quad (1.10)$$

também formam um par de Bailey, isto é,

$$\beta'_n = \sum_{r=0}^n \frac{\alpha'_n}{(q)_{n-r} (aq)_{n+r}}$$

(ρ_1 e ρ_2 são números complexos para os quais as expressões (1.9) e (1.10) ficam bem definidas.)

Para completar as informações dadas pelo Lema (1.2), acrescentamos que a seqüência que se obtém por iteradas aplicações deste resultado, pode também ser estendida para a esquerda sempre que os valores de ρ_1 e ρ_2 assim permitirem

$$\dots \rightarrow (\alpha_n^{(-2)}, \beta_n^{(-2)}) \rightarrow (\alpha_n^{(-1)}, \beta_n^{(-1)}) \rightarrow (\alpha_n, \beta_n) \rightarrow (\alpha'_n, \beta'_n) \rightarrow \dots$$

pois de (1.10) temos

$$\alpha_n^{(-1)} = \frac{(aq/\rho_1)_r (aq/\rho_2)_r (\rho_1 \rho_2 / aq)^r}{(\rho_1)_r (\rho_2)_r} \alpha'_r$$

e conforme Andrews [5] temos que

$$\beta_n^{(-1)} = \sum_{j=0}^n \frac{(aq/\rho_1)_j (aq/\rho_2)_j (\rho_1 \rho_2 / aq)_{n-j} (\rho_1 \rho_2 / aq)^{2n-j}}{(\rho_1)_n (\rho_2)_n (q)_{n-j}} \beta'_j. \quad (1.11)$$

Completamos nossos dados sobre os pares de Bailey com mais duas relações envolvendo α_n e β_n , que possibilitam a obtenção de novas identidades:

$$\sum_{j=0}^{\infty} a^j q^{j^2} \beta_j = \frac{1}{(aq)_{\infty}} \sum_{j=0}^{\infty} a^j q^{j^2} \alpha_j \quad (1.12)$$

e

$$\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (\rho_1)_j a^j \rho_1^{-j} q^{\frac{j(j+1)}{2}} \beta_j = \frac{(aq/\rho_1)_{\infty}}{(aq)_{\infty}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\rho_1)_j}{(aq/\rho_1)_j} (-1)^j (\rho_1)^{-j} a^j q^{\frac{j(j+1)}{2}} \alpha_j. \quad (1.13)$$

cujas demonstrações podem ser vistas em Santos [10].

Abaixo apresentamos um importante teorema que permite passarmos de somatórios para produtórios.

Produto Triplo de Jacobi: Para números complexos $z \neq 0, |q| < 1$ vale que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{n^2} = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^{2n+2})(1 + zq^{2n+1})(1 + z^{-1}q^{2n+1}). \quad (1.14)$$

Apresentamos a seguir três úteis identidades e um resultado devido a Abel.

$$\frac{1}{(z; q)_n} = \sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+j-1 \\ j \end{bmatrix} z^j \quad (1.15)$$

e

$$(z)_n = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j z^j q^{\frac{j(j-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}, \quad (1.16)$$

as quais podem ser encontradas em Andrews [1], p. 36,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} 2n+k \\ n+\ell \end{bmatrix} = \frac{1}{(q)_{\infty}}, k, \ell \in \mathbb{Z} \quad (1.17)$$

que pode ser obtida diretamente, pela definição do polinômio de Gauss.

Lema 1.3. (Abel) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$, então $\lim_{t \rightarrow 1^-} (1-t) \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = L$

Demonstração: (Andrews [1], p. 190)

1.2 Partições

A teoria das partições é um assunto que, por um lado, encaixa-se naturalmente no assunto de q -séries, e por outro lado, seus métodos são altamente combinatórios. Esta teoria consiste em representar inteiros positivos como soma de inteiros positivos.

Definição 1.2.1. *Uma partição de um inteiro positivo n é uma representação de n como soma de inteiros positivos, chamados somandos ou partes da partição. A ordem das partes não é levada em consideração.*

Exemplo 1.2.1. *As partições de 4 são: 4, 3 + 1, 2 + 2, 2 + 1 + 1, 1 + 1 + 1 + 1.*

A ordem é considerada irrelevante, no sentido de que $2 + 1 + 1$ é igual a $1 + 1 + 2$ ou $1 + 2 + 1$. Assim, existem cinco partições de 4, e optamos por escrever as partições na ordem não-crescente das partes.

Estabelecemos que 0 tem uma partição, a partição vazia, e que a partição vazia não tem partes.

A função $p(n)$ denotará o número de partições de n , assim $p(4) = 5$ e $p(0) = 1$.

Euler foi o primeiro matemático a descobrir importantes propriedades de $p(n)$. Em 1748 ele apresentou essas propriedades no seu livro *Introductio in Analysin Infinitorum*. A simplicidade com que se apresenta a definição de $p(n)$ pode nos levar a acreditar que o seu cálculo seja fácil, mas podemos nos surpreender. Abaixo apresentamos uma surpreendente fórmula encontrada por G. H. Hardy e S. Ramanujam em 1917 para calcular $p(n)$, como $n \rightarrow \infty$,

$$p(n) \approx \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp \left(\pi \sqrt{\frac{2n}{3}} \right).$$

Como outros exemplos interessantes de funções partições temos $p_m(n)$, número de partições de n em partes $\leq m$ e $p_d(n)$, o número de partições de n em partes distintas, assim temos que $p_d(4) = 2$.

Colocando-se restrições sobre as partes das partições de n obtém-se resultados interessantíssimos com belas interpretações combinatórias.

Seja $\mathcal{O}$ o conjunto dos números ímpares.

Teorema 1.2.1. [Euler] *O número de partições de n em partes ímpares é igual ao número de partições de n em partes distintas, ou seja,*

$$p_{\mathcal{O}}(n) = p_d(n).$$

Demonstração: Temos que:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} p_{\mathcal{O}}(n)q^n &= \frac{1}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\cdots} \\ &= \frac{(1-q^2)(1-q^4)\cdots}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots} \\ &= \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1-q^{2n}}{1-q^n} = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1+q^n)(1-q^n)}{(1-q^n)} \\ &= \prod_{n=0}^{\infty} (1+q^n) = \sum_{n=0}^{\infty} p_d q^n \end{aligned}$$

■

Exemplo 1.2.2. *Seja $n = 4$, temos que $p_{\mathcal{O}}(4) = 2$ são elas: $3 + 1$, $1 + 1 + 1 + 1$ e $p_d(4) = 2$ são elas: 4 , $3 + 1$.*

Apresentaremos abaixo um teorema de Euler conhecido por “O Teorema dos Números Pentagonais de Euler”. Este teorema ficou assim conhecido pelo fato dos números $1, 5, 12, 22, \dots, j(3j-1)/2$ serem os números de pontos do j -ésimo pentágono. O Teorema de Euler, também conhecido por Fórmula de Euler é o seguinte:

Teorema 1.2.2. [1] p. 10 (Fórmula de Euler)

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \left(q^{\frac{j(3j+1)}{2}} + q^{\frac{j(3j-1)}{2}} \right) \quad (1.18)$$

Observação 1.4. *Legendre observou que (1.18) é equivalente à seguinte igualdade,*

$$q^e(n) - q^o(n) = \begin{cases} (-1)^n & \text{se } n = j(3j \pm 1)/2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde $q^e(n)$ é o número de partições de n em um número par de partes distintas e $q^o(n)$ o número de partições de n em um número ímpar de partes distintas.

1.3 Sobrepartições

Nesta seção definiremos sobrepartições de um número inteiro n apresentando alguns exemplos.

Uma sobrepartição de um inteiro n é uma seqüência não crescente de números naturais, cuja soma é n e a primeira ocorrência de uma parte pode ser marcada. Assim, ela corresponde a partição de n em partes tomadas do conjunto

$$\{1, \bar{1}, 2, \bar{2}, 3, \bar{3}, 4, \bar{4}, 5, \bar{5}, 6, \bar{6}, \dots\}$$

onde as partes marcadas são distintas.

Exemplo 1.3.1. *Seja $n = 4$, abaixo listamos as 14 sobrepartições de n .*

4	$\bar{3} + \bar{1}$	$2 + \bar{1} + 1$
$\bar{4}$	$2 + 2$	$\bar{2} + \bar{1} + 1$
$3 + 1$	$\bar{2} + 2$	$1 + 1 + 1 + 1$
$\bar{3} + 1$	$2 + 1 + 1$	$\bar{1} + 1 + 1 + 1$
$3 + \bar{1}$	$\bar{2} + 1 + 1$	

Exemplo 1.3.2. *Considere o inteiro $n = 5$, temos as 24 sobrepartições de n listadas a seguir na tabela:*

5	$3 + \bar{2}$	$\bar{2} + \bar{1} + 1 + 1$
$\bar{5}$	$\bar{3} + \bar{2}$	$2 + 2 + \bar{1}$
$4 + 1$	$3 + 1 + 1$	$\bar{2} + 2 + \bar{1}$
$\bar{4} + 1$	$\bar{3} + \bar{1} + 1$	$2 + 1 + 1 + 1$
$4 + \bar{1}$	$\bar{3} + 1 + 1$	$\bar{2} + 1 + 1 + 1$
$\bar{4} + \bar{1}$	$3 + \bar{1} + 1$	$2 + \bar{1} + 1 + 1$
$3 + 2$	$2 + 2 + 1$	$1 + 1 + 1 + 1 + 1$
$\bar{3} + 2$	$\bar{2} + 2 + 1$	$\bar{1} + 1 + 1 + 1 + 1$

1.3.1 A Função Geradora para Sobrepartições

A função geradora para sobrepartições é dada por:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \bar{p}(n)q^n = \frac{(-q)_{\infty}}{(q)_{\infty}} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1+q^n}{1-q^n} = 1 + 2q + 4q^2 + 8q^3 + 14q^4 + 24q^5 + \dots$$

As identidades de Rogers-Ramanujan em suas formas analíticas são dadas por:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q; q)_n} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^{5n-1})(1 - q^{5n-4})}, \quad (1.19)$$

e

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}}{(q; q)_n} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^{5n-2})(1 - q^{5n-3})}. \quad (1.20)$$

A seguir, temos interpretações combinatórias para as identidades de Rogers-Ramanujan, e em seguida as interpretações correspondentes a estas em termos de sobrepartições.

Para a identidade (1.19) temos;

“ O número de partições de n em partes distintas da forma $y_1 + y_2 + \cdots + y_s$, onde $y_i - y_{i+1} \geq 2$ é igual ao número de partições de n em partes $\equiv \pm 1 \pmod{5}$.”

Para a identidade (1.20) temos;

“ O número de partições de n em partes distintas da forma $z_1 + z_2 + \cdots + z_s$, onde $z_i - z_{i+1} \geq 2$ e $z_s > 1$ é igual ao número de partições de n em partes $\equiv \pm 2 \pmod{5}$.”

Interpretações correspondentes em termos de sobrepartições:

“ O número de sobrepartições de n em partes distintas da forma $y_1 + y_2 + \cdots + y_s$, onde $y_t - y_{t+1} \geq 2$ quando y_{t+1} não é marcada, é igual ao número de sobrepartições de n em partes ímpares.”

Exemplo 1.3.3. *Consideremos neste exemplo $n = 4$:*

<i>Sobrepartições de $n = 4$ em partes distintas, onde $y_t - y_{t+1} \geq 2$ quando y_{t+1} não é marcada</i>	<i>Sobrepartições de $n = 4$ em partes ímpares</i>
4	$3 + 1$
$\bar{4}$	$\bar{3} + 1$
$3 + 1$	$3 + \bar{1}$
$\bar{3} + 1$	$\bar{3} + \bar{1}$
$3 + \bar{1}$	$1 + 1 + 1 + 1 + 1$
$\bar{3} + \bar{1}$	$\bar{1} + 1 + 1 + 1 + 1$

“ O número de sobrepartições de n em partes distintas da forma $z_1 + z_2 + \cdots + z_s$, tal que

1 pode somente ocorrer como parte marcada e onde $z_t - z_{t+1} \geq 2$ se z_{t+1} não é marcada, é igual ao número de sobrep partições de n onde todas as partes não marcadas são $\equiv 2(\text{mod } 4)$.”

Exemplo 1.3.4. *Consideremos novamente $n = 4$:*

<i>Sobrep partições de $n = 4$ em partes distintas, tais que 1 aparece somente como parte marcada e onde $z_t - z_{t+1} \geq 2$ se z_{t+1} não é marcada</i>	<i>Sobrep partições de $n = 4$ onde todas as partes não marcadas são $\equiv 2(\text{mod } 4)$</i>
4	$\bar{4}$
$\bar{4}$	$\bar{3} + \bar{1}$
$3 + \bar{1}$	$2 + 2$
$\bar{3} + \bar{1}$	$\bar{2} + 2$

CAPÍTULO 2

Método de Andrews

Neste capítulo faremos uma descrição de uma idéia introduzida por Andrews em 1985, a qual pode ser também usada para provar muitas identidades do tipo Rogers-Ramanujan.

Consideramos uma identidade do tipo Rogers-Ramanujan que se quer provar,

$$\pi(q) = \phi(q), \tag{2.1}$$

onde $\phi(q)$ é uma série e $\pi(q)$ é um produto infinito.

Consideramos a função de duas variáveis $f(q, t)$ com as seguintes propriedades:

1. $f(q, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(q)t^n$, onde $P_n(q)$ são polinômios;
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(q) = \pi(q)$;
3. $f(q, t)$ satisfaz uma equação não-homogênea da forma:

$$f(q, t) = R_1(q, t) + R_2(q, t)f(q, tq^k),$$

onde R_1 e R_2 são funções racionais de q , e k é um inteiro não negativo.

Na pratica, $f(q, t)$ não é, em geral, difícil de se produzir. Um parâmetro t é inserido em (2.1) de tal maneira que essencialmente se obtém o $(n+1)$ -ésimo termo a partir do n -ésimo termo trocando t por tq .

Vejamos isso para a identidade que segue:

$$1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5n+1})(1-q^{5n+4})}. \quad (2.2)$$

Consideramos a função de duas variáveis associada à identidade (2.2).

$$f(q, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n} q^{n^2}}{(1-t)(1-tq)\cdots(1-tq^n)}.$$

O fator $(1-t)$ no denominador é para garantir (2), vamos verificar as três condições.

Podemos escrever

$$\begin{aligned} f(q, t) &= \frac{1}{1-t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n} q^{n^2}}{(t; q)_{n+1}} \\ &= \frac{1}{1-t} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+2} q^{n^2+2n+1}}{(1-t)(tq; q)_{n+1}} \\ &= \frac{1}{1-t} + \frac{t^2 q}{1-t} f(q, tq) \end{aligned}$$

ou

$$(1-t)f(q, t) = 1 + t^2 q f(q, tq). \quad (2.3)$$

Assim (3) é satisfeita. Agora notamos, por (1.15) que

$$\begin{aligned} f(q, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} t^{2n} q^{n^2} t^m \begin{bmatrix} n+m \\ m \end{bmatrix} \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} t^N \sum_{0 \leq 2n \leq N} q^{n^2} \begin{bmatrix} N-n \\ n \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Assim, temos (1), e por (2.4) temos

$$P_N(q) = \sum_{0 \leq 2n \leq N} q^{n^2} \begin{bmatrix} N-n \\ n \end{bmatrix}.$$

Agora, pelo Lema de Abel 1.3, temos (2), a saber

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(q) &= \lim_{t \rightarrow 1^-} (1-t)f(q, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q; q)_n} \\ &= \frac{1}{(q; q^5)_{\infty} (q^4; q^5)_{\infty}}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Em muitos casos os polinômios $P_n(q)$ são interessantes funções geradoras para partições. Agora, como exemplo, vamos descrever uma prova alternativa para a segunda identidade de Rogers-Ramanujan,

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{5n-1})(1 - q^{5n-4})(1 - q^{5n}) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n+1)}}{(q; q)_n} \quad (2.6)$$

que é a de número 14 na lista de Slater [16] (esta demonstração foi dada por Santos em [10]).

Agora $f(q, t)$ é:

$$\begin{aligned} f(q, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n} q^{n^2+n}}{(t; q)_{n+1}} \\ &= \frac{1}{1-t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n} q^{n^2+n}}{(t; q)_{n+1}} \\ &= \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1-tq} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n} q^{n^2+n}}{(tq; q)_n} \\ &= \frac{1}{1-t} + \frac{t^2 q^2}{1-tq} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tq)^{2n} q^{n^2+n}}{(tq; q)_{n+1}} \\ &= \frac{1}{1-t} + \frac{t^2 q^2}{1-tq} f(q, tq) \end{aligned} \quad (2.7)$$

trocando n por $n+1$ na quarta igualdade.

De (2.7) temos então a equação funcional,

$$(1-t)f(q, t) = 1 + t^2 q^2 f(t, tq). \quad (2.8)$$

Para obter uma relação de recorrência desta equação funcional, fazemos a seguinte substituição:

$$f(q, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n t^n,$$

temos,

$$(1-t) \sum_{n=0}^{\infty} P_n t^n = 1 + t^2 q^2 \sum_{n=0}^{\infty} P_n t^n q^n, \quad (2.9)$$

o que implica

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} P_n t^{n+1} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} P_n t^{n+2} q^{n+2},$$

ou, equivalentemente,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n t^n - \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1} t^n = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} P_{n-2} t^n q^n,$$

assim, desta última equação segue

$$P_0 = 1; \quad P_1 = 1; \quad P_n = P_{n-1} + q^n P_{n-2}. \quad (2.10)$$

Em [10] Santos conjecturou e provou:

$$\begin{aligned} P_{2n-1} &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{40j^2+6j} \begin{bmatrix} 2n \\ n-1-10j \end{bmatrix} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{40j^2-34j+7} \begin{bmatrix} 2n \\ n-4+10j \end{bmatrix} \\ &\quad - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{40j^2-14j+1} \begin{bmatrix} 2n \\ n-2+10j \end{bmatrix} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{40j^2+26j+4} \begin{bmatrix} 2n \\ n-3-10j \end{bmatrix}. \\ P_{2n} &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{40j^2+6j} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-10j \end{bmatrix} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{40j^2-34j+7} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-4+10j \end{bmatrix} \\ &\quad - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{40j^2-14j+1} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-1+10j \end{bmatrix} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{40j^2+26j+4} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-3-10j \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

E assim temos que,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P_{2n} &= \frac{1}{(q)_{\infty}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\{ q^{40j^2+6j} + q^{40j^2-34j+7} - q^{40j^2-14j+1} - q^{40j^2+26j+4} \right\} \\ &= \frac{1}{(q)_{\infty}} \left(\sum_{n \equiv 0 \pmod{4}} (-1)^n q^{\frac{5n^2+3n}{2}} + \sum_{n \equiv 2 \pmod{4}} (-1)^n q^{\frac{5n^2+3n}{2}} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n \equiv 1 \pmod{4}} (-1)^n q^{\frac{5n^2+3n}{2}} + \sum_{n \equiv -1 \pmod{4}} (-1)^n q^{\frac{5n^2+3n}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{(q)_{\infty}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{\frac{5j^2+3j}{2}}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Segue de (1.14),

$$\frac{1}{(q)_\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{5n^2+3n}{2}} = \frac{1}{(q)_\infty} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{5n})(1 - q^{5n-1})(1 - q^{5n-4}).$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{2n} = \frac{1}{(q)_\infty} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{5n})(1 - q^{5n-1})(1 - q^{5n-4}) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^{5n+2})(1 - q^{5n+3})}.$$

Como

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} (1 - t)f(t, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}}{(q)_n}.$$

Dessa forma segue do Lema de Abel (1.3),

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}}{(q)_n} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^{5n+2})(1 - q^{5n+3})}.$$



CAPÍTULO 3

Representando Inteiros como “Soma de Vetores”

Neste capítulo apresentamos resultados obtidos através da introdução de parâmetros em identidades do tipo Rogers-Ramanujan. No capítulo 2 apresentamos um método introduzido por Andrews em [6], método este que consiste na introdução de uma variável t em certas séries, obtendo assim uma função de duas variáveis onde os coeficientes de t na expansão destas séries são polinômios na variável q e que fornecem, em alguns casos, novas interpretações combinatórias para as identidades de Slater. Santos, em [10], apresentou, para 74 das identidades de Slater, conjecturas de fórmulas explícitas para estes polinômios tendo provado algumas. Em vários casos temos que para certos valores do parâmetro q , obtemos seqüências especiais de números, como por exemplo a seqüência de Fibonacci, [13] e [14]. Sills, fazendo uso de softwares matemáticos, desenvolveu um programa que auxilia a manipulação destes polinômios, facilitando as provas das conjecturas dadas por Santos e encontrando outros resultados. Deste modo, iniciaremos este capítulo descrevendo o nosso método e, em seguida, apresentaremos vários resultados obtidos pela aplicação do mesmo. Para apresentar o método, consideraremos a série da identidade de número (29) de Slater [16], apresentada abaixo,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2} (-q; q^2)_n}{(q; q)_{2n}}.$$

Inicialmente inserimos os parâmetros j e k na série, obtendo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{kn^2}(-q^j; q^{2k})_n}{(q^{2k}; q^{2k})_n (q^j; q^{2k})_n}.$$

Agora, analisando o termo geral desta série, a fim de obtermos a relação de recorrência.

$$h_n(q) = \frac{(1 + q^{2kn-2k+j})q^{k(2n-1)}}{(1 - q^{2kn})(1 - q^{2kn-2k+j})} h(n-1, q).$$

Desenvolvendo a equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} h(n, q) &= q^{2kn} h(n, q) + q^{2kn-2k+j} h(n, q) - q^{4kn-2k+j} h(n, q) \\ &+ q^{2kn-k} h(n-1, q) + q^{4kn-3k+j} h(n-1, q). \end{aligned}$$

Fazendo $F(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) z^n$, temos

$$\begin{aligned} F(z, q) &= \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) (zq^{2k})^n + q^{j-2k} \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) (zq^{2k})^n - q^{j-2k} \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) (zq^{4k})^n \\ &+ zq^k \sum_{n=0}^{\infty} h(n-1, q) (zq^{2k})^{n-1} + zq^{k+j} \sum_{n=0}^{\infty} h(n-1, q) (zq^{4k})^{n-1} \end{aligned}$$

daí

$$\begin{aligned} F(z, q) &= F(zq^{2k}, q) + q^{j-2k} F(zq^{2k}, q) - q^{j-2k} F(zq^{4k}, q) \\ &+ zq^k F(zq^{2k}, q) + zq^{k+j} F(zq^{4k}, q) \end{aligned}$$

Obtemos, assim, uma equação funcional que deve ser minuciosamente estudada a fim de que tenhamos condições de criar um conjunto que tenha como função geradora para seus elementos a equação modificada após a introdução dos parâmetros. Por exemplo, quando analisamos a parcela $F(zq^{2k}, q)$, interpretamos como sendo o subconjunto das partições das quais se pode retirar $2k$ de todas as partes, a parcela $q^{j-2k} F(zq^{2k}, q)$ interpretamos como sendo o subconjunto das partições das quais se pode subtrair j da menor parte e $2k$ de todas as demais partes, e as parcelas $zq^k F(zq^{2k}, q)$ e $q^{k+j} F(zq^{4k}, q)$ nos fornecem outros dois subconjuntos nos quais um tem as partições que têm k como parte e o outro partições que tem $k+j$ como parte. Observemos que estes quatro subconjuntos são disjuntos, e que a união deles nos dá o conjunto de partições que têm $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{kn^2}(-q^j; q^{2k})_n}{(q^{2k}; q^{2k})_n (q^j; q^{2k})_n}$ como função geradora. Listamos, então, algumas possíveis partições a fim de tirarmos informações sobre o comportamento de partes consecutivas destas partições. Uma vez descoberto isto, temos condições de descrever como são as partições geradas por $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{kn^2}(-q^j; q^{2k})_n}{(q^{2k}; q^{2k})_n (q^j; q^{2k})_n}$.

Como as partes destas partições são combinações lineares de k e j , podemos vê-las como “vetores” em dimensão dois. Logo o número particionado n pode passar a ser visto como soma de “vetores bidimensionais”.

3.1 Vetores bidimensionais como “partes” de uma partição

Nesta seção apresentaremos oito resultados acompanhados de suas demonstrações e respectivos corolários, obtidos fazendo uso do nosso método, referentes às equações 8, 9, 27, 28, 29 e 38 em Slater [16] e por (5.4) e (5.5) em Sills [17], listadas abaixo nesta ordem. As duas últimas equações são de interesse por não estarem listadas entre as 130 identidades de Slater e pela equação (5.5) ter sido dada pela primeira vez por Sills [17].

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q; q)_n q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(q; q)_n} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{4n-1})(1 - q^{4n-3})(1 - q^{4n})(1 + q^n)}{(1 - q^n)} \quad (3.1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(2n+1)}}{(q; q)_{2n+1}} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + q^{4n-1})(1 + q^{4n-3})(1 - q^{4n})}{(1 - q^{2n})} \quad (3.2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n(n+1)}(-q; q^2)_n}{(q; q^2)_{n+1}(q^4; q^4)_n} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + q^{6n-1})(1 + q^{6n-5})(1 - q^{6n})}{(1 - q^{2n})} \quad (3.3)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n(n+1)}(-q; q^2)_n}{(q; q^2)_{n+1}(q^4; q^4)_n} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + q^{6n-1})(1 + q^{6n-5})(1 - q^{6n})(1 + q^{2n})}{(1 - q^{2n})} \quad (3.4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}(-q; q^2)_n}{(q; q)_{2n}} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + q^{6n-2})(1 + q^{6n-4})(1 - q^{6n})(1 + q^{2n-1})}{(1 - q^{2n})} \quad (3.5)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n(n+1)}}{(q; q)_{2n+1}} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + q^{8n-1})(1 + q^{8n-7})(1 - q^{8n})}{(1 - q^{2n})} \quad (3.6)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}(-q; q^2)_n}{(q; q)_{2n}} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{12n-6})(1 - q^{12n-6})(1 - q^{12n})}{(1 - q^n)} \quad (3.7)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}(-q^2; q^4)_n}{(q; q)_{2n}(-q^2; q^2)_n} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{16n-8})(1 - q^{16n-8})(1 - q^{16n})(1 + q^{2n-1})}{(1 - q^{2n})} \quad (3.8)$$

Os teoremas relacionados às identidades (3.1), (3.2), (3.3), (3.4), (3.5), (3.6), (3.7) e (3.8), para valores especiais dos parâmetros j e k , nos dão interpretações combinatórias para as mesmas.

Definimos, para inteiros positivos k e j , o seguinte conjunto:

$$A_{k,j} = \{ck + dj \mid c, d \geq 0\}.$$

Teorema 3.1.1. *Seja $f(n)$ o número de partições de n em partes pertencentes a $A_{k,j}$ da forma $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_s$, $\lambda_t = c_t k + d_t j$, $c_s = 1$ ou 2 . Se λ_t e λ_{t+1} são partes consecutivas temos, $c_t = c_{t+1} + d_{t+1} + i$, com $i = 1, 2$.*

Então,

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{1}{2}kn(n+1)}(-q^k; q^k)_n}{(q^j; q^k)_n}. \quad (3.9)$$

Demonstração: Seja $f(m, n)$ o número de partições enumeradas por $f(n)$ com a restrição de terem exatamente m partes. Então a seguinte relação de recorrência é verificada por $f(m, n)$.

$$f(m, n) = f(m, n - km + k - j) + f(m - 1, n - km) + f(m - 1, n - 2km). \quad (3.10)$$

Para provar (3.10) dividiremos as partições enumeradas por $f(m, n)$ em três classes disjuntas:

1. Aquelas em que $d_s \neq 0$,
 2. Aquelas em que k é parte,
 3. Aquelas em que $2k$ é parte.
- Nas partições da classe (1) subtraímos j da menor parte e k das demais partes, ficando com partições de $n - km + k - j$ enumeradas por $f(m, n - km + k - j)$.
 - Nas partições da classe (2), removemos a parte k , e subtraímos k de todas as partes restantes, ficando com partições de $n - km$ em $m - 1$ partes que são enumeradas por $f(m - 1, n - km)$.
 - Finalmente da classe (3), removemos a parte $2k$, e subtraímos $2k$ de todas as partes restantes, ficando com partições de $n - 2km$ em exatamente $m - 1$ partes enumeradas por $f(m - 1, n - 2km)$.

Agora definimos:

$$F(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n) z^m q^n$$

e usando a equação (3.10), temos:

$$\begin{aligned}
 F(z, q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n - km + k - j) z^m q^n + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m - 1, n - km) z^m q^n \\
 &+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m - 1, n - 2km) z^m q^n \\
 &= q^{j-k} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n - km + k - j) (zq^k)^m q^{n-km+k-j} \\
 &+ zq^k \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m - 1, n - km) (zq^k)^{m-1} q^{n-km} \\
 &+ zq^{2k} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m - 1, n - 2km) (zq^{2k})^{m-1} q^{n-2km} \\
 &= q^{j-k} F(zq^k, q) + zq^k F(zq^k, q) + zq^{2k} F(zq^{2k}, q).
 \end{aligned}$$

Assumindo que $F(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) z^n$, temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) z^n = q^{j-k} \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) (zq^k)^n + zq^k \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) (zq^k)^n + zq^{2k} \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) (zq^{2k})^n.$$

Comparando o coeficiente de z^n temos;

$$h(n, q) = q^{kn-k+j}h(n, q) + q^{kn}h(n-1, q) + q^{2kn}h(n-1, q)$$

logo,

$$h(n, q) = \frac{q^{kn}(1 + q^{kn})}{(1 - q^{kn-k+j})}h(n-1, q). \quad (3.11)$$

Observando que $h(0, q) = 1$, e fazendo n iterações em (3.11), temos que:

$$h(n, q) = \frac{q^{\frac{1}{2}kn(n+1)}(-q^k; q^k)_n}{(q^j; q^k)_n}.$$

Daí temos,

$$F(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{1}{2}kn(n+1)}(-q^k; q^k)_n}{(q^j; q^k)_n} z^n,$$

e finalizamos a prova observando que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n)q^n = F(1, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{1}{2}kn(n+1)}(-q^k; q^k)_n}{(q^j; q^k)_n}.$$

■

Como um caso especial do Teorema (3.1.1) apresentamos uma interpretação combinatória para (3.1). Se tomarmos $k = j = 1$ em (3.9) temos o lado esquerdo de (3.1) o qual nos dá o Corolário (3.1.1).

Corolário 3.1.1. *O número de partições de n nas quais as partes pares são distintas é igual ao número $f(n)$.*

O exemplo abaixo, apresenta a tabela com as partições referente ao Corolário (3.1.1), no qual a coluna esquerda tras as partições de n das quais as partes pares são distintas e a coluna do lado direito as partições de n enumeradas por $f(n)$ quando tomamos $k = j = 1$ em (3.9).

Exemplo 3.1.1. A tabela abaixo mostra as 16 partições de $n = 8$.

8	$(k + 7j)$
$7 + 1$	$(2k + 6j)$
$6 + 2$	$(5k) + (2k + j)$
$6 + 1 + 1$	$(5k) + (k + 2j)$
$5 + 3$	$(4k + 2j) + (2k)$
$5 + 2 + 1$	$(4k + 2j) + (k + j)$
$5 + 1 + 1 + 1$	$(4k + j) + (2k + j)$
$4 + 3 + 1$	$(4k + j) + (k + 2j)$
$4 + 2 + 1 + 1$	$(3k + 3j) + (k + j)$
$4 + 1 + 1 + 1 + 1$	$(3k + 4j) + (k)$
$3 + 3 + 2$	$(3k + 3j) + (2k)$
$3 + 3 + 1 + 1$	$(2k + 5j) + (k)$
$3 + 2 + 1 + 1 + 1$	$(4k) + (3k) + (k)$
$3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$	$(4k) + (2k + j) + (k)$
$2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$	$(4k + j) + (2k) + (k)$
$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$	$(3k + 2j) + (2k) + (k)$

Teorema 3.1.2. Seja $f(n)$ o número de partições de n em partes pertencentes a $A_{k,j}$ da forma $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_s$, $\lambda_s \geq 3k$, $\lambda_t = c_t k + d_t j$, onde $c_s \geq 3 + 2d_s$ e se $\lambda_t = c_t k + d_t j$ e $\lambda_{t+1} = c_{t+1} k + d_{t+1} j$ são partes consecutivas temos $c_t \geq 4 + c_{t+1} + 2d_t$. Então

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2kn^2 + kn}}{(q^{2k}; q^{2k})_n (q^{j+2k}; q^{2k})_n}. \quad (3.12)$$

Demonstração: Seja $f(m, n)$ o número de partições enumeradas por $f(n)$ com a restrição de terem exatamente m partes. Então a seguinte relação de recorrência é verificada por $f(m, n)$.

$$f(m, n) = f(m, n - 2km) + f(m, n - 2km - j) - f(m, n - 4km - j) + f(m - 1, n - 4km + k). \quad (3.13)$$

Para provar 3.13 dividiremos as partições enumeradas por $f(m, n)$ em três classes disjuntas:

1. Aquelas em que $c_s > 2d_s + 3$,

2. Aquelas em que $c_s = 2d_s + 3$, $d_s \neq 0$,

3. Aquelas em que $3k$ é parte.

- Nas partições da classe (1) subtraímos $2k$ de todas as partes, e ficamos com um número de partições contadas por $f(m, n - 2km)$.
- Nas partições da classe (2) subtraímos j da menor parte e $2k$ de todas as partes inclusive da menor, ficando com partições enumeradas por $f(m, n - 2km - j)$. Observemos que de $f(m, n - 2km - j)$ temos que subtrair as partições de $n - 2km - j$ nas quais é possível subtrair $2k$ de todas as partes, as quais são contadas por $f(m, n - 4km - j)$. Assim as partições da classe (2) são contadas por $f(m, n - 2km - j) - f(m, n - 4km - j)$.
- Finalmente da classe (3), removemos a parte $3k$, e subtraímos $4k$ de todas as partes restantes, ficando com um número de partições contadas por $f(m - 1, n + k - 4km)$.

Agora definimos:

$$F(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n) z^m q^n$$

e usando a equação (3.13), temos:

$$\begin{aligned} F(z, q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n - 2km) z^m q^n + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n - 2km - j) z^m q^n \\ &\quad - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n - 4km - j) z^m q^n + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m - 1, n - 4km + k) z^m q^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n - 2km) (zq^{2k})^m q^{n-2km} \\ &\quad + q^j \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n - 2km - j) (zq^{2k})^m q^{n-2km-j} \\ &\quad - q^j \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n - 4km - j) (zq^{4k})^m q^{n-4km-j} \\ &\quad + zq^{3k} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m - 1, n - 4km + k) (zq^{4k})^{m-1} q^{n-4km+k} \\ &= F(zq^{2k}, q) + q^j F(zq^{2k}, q) - q^j F(zq^{4k}, q) + zq^{3k} F(zq^{4k}, q). \end{aligned}$$

Assumindo que $F(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) z^n$, temos:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) (z q^{2k})^n + q^j \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) (z q^{2k})^n \\ &- q^j \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) (z q^{4k})^n + z q^{3k} \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) (z q^{4k})^n. \end{aligned}$$

Comparando o coeficiente de z^n temos;

$$h(n, q) = q^{2kn} h(n, q) + q^{2kn+j} h(n, q) - q^{4kn+j} h(n, q) + q^{4kn-k} h(n-1, q)$$

logo,

$$h(n, q) = \frac{q^{4kn-k}}{(1 - q^{2kn})(1 - q^{2kn+j})} h(n-1, q). \quad (3.14)$$

Observando que $h(0, q) = 1$, e fazendo n iterações em (3.14), temos que:

$$h(n, q) = \frac{q^{2kn^2+kn}}{(q^{2k}; q^{2k})_n (q^{j+2k}; q^{2k})_n}.$$

Daí temos,

$$F(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2kn^2+kn}}{(q^{2k}; q^{2k})_n (q^{j+2k}; q^{2k})_n} z^n,$$

e finalizamos a prova observando que

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n) q^n = F(1, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2kn^2+kn}}{(q^{2k}; q^{2k})_n (q^{j+2k}; q^{2k})_n}.$$

■

Como um caso especial do Teorema (3.1.2) apresentamos uma interpretação combinatória para a identidade apresentada em (3.2). Se tomarmos $k = j = 1$ em (3.12) multiplicada por $\frac{1}{1-q}$ temos o lado esquerdo de (3.2) o qual nos dá o Corolário (3.1.2).

Corolário 3.1.2. *O número de partições de N em partes ímpares distintas e partes pares $\equiv 2 \pmod{4}$ é igual ao número $\sum_{n=0}^N f(n)$.*

Demonstração: Considerando $k = j = 1$ na equação (3.12), temos $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(2n+1)}}{(q^2; q^2)_n (q^3; q^2)_n}$, multiplicando esta expressão por $\frac{1}{1-q}$, temos o que corresponde à identidade de Slater de número (9), $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(2n+1)}}{(q; q)_{2n+1}} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + q^{4n-1})(1 + q^{4n-3})(1 - q^{4n})}{(1 - q^{2n})}$. Desenvolvendo o lado direito desta identidade temos,

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+q^{4n-1})(1+q^{4n-3})(1-q^{4n})}{(1-q^{2n})} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+q^{4n-1})(1+q^{4n-3})(1-q^{4n})}{(1-q^{4n})(1-q^{4n-2})}$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+q^{4n-1})(1+q^{4n-3})}{(1-q^{4n-2})},$$
 o que nos fornece a função geradora para partições onde as partes ímpares são distintas e as partes pares $\equiv 2 \pmod{4}$. Concluindo assim a demonstração. $\blacksquare$

Teorema 3.1.3. *Seja $f(n)$ o número de partições de n em partes pertencentes a $A_{k,j}$ da forma $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s$, $\lambda_s \geq 4k$, $\lambda_t = c_t k + d_t j$, onde $c_s \geq 4 + 2d_s$ e se $\lambda_t = c_t k + d_t j$ e $\lambda_{t+1} = c_{t+1} k + d_{t+1} j$ são partes consecutivas temos:*

- Se $c_{t+1} \equiv \ell \pmod{4}$ então $\begin{cases} c_t \equiv i \pmod{4} & \text{se } d_t \equiv \ell \pmod{2} \\ c_t \equiv 2 + i \pmod{4} & \text{se } d_t \equiv 1 + \ell \pmod{2} \end{cases}$
 - Se $c_{t+1} \equiv 2 + \ell \pmod{4}$ então $\begin{cases} c_t \equiv i \pmod{4} & \text{se } d_t \equiv 1 + \ell \pmod{2} \\ c_t \equiv 2 + i \pmod{4} & \text{se } d_t \equiv \ell \pmod{2} \end{cases}$
- onde $c_t \geq 4 + 2d_t + c_{t+1} + i + \ell$, para $i = 0, 1$ e $\ell = 0, 1$.

Então,

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q^k; q^{2k})_n q^{2kn(n+1)}}{(q^{j+2k}; q^{2k})_n (q^{4k}; q^{4k})_n}. \quad (3.15)$$

Demonstração: Seja $f(m, n)$ o número de partições enumeradas por $f(n)$ com a restrição de terem exatamente m partes. Então a seguinte relação de recorrência é verificada por $f(m, n)$.

$$\begin{aligned} f(m, n) &= f(m, n - 4km) + f(m, n - 2km - j) - f(m, n - 6km - j) \\ &+ f(m - 1, n - 4km) + f(m - 1, n - 6km + k). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Para provar 3.16 dividiremos as partições enumeradas por $f(m, n)$ em quatro classes disjuntas:

1. Aquelas em que $c_s > 2d_s + 5$,
2. Aquela em que $c_s = 2d_s + 4$ ou $c_s = 2d_s + 5$, $d_s \neq 0$,
3. Aquelas em que $4k$ é parte,
4. Aquelas em que $5k$ é parte.

- Nas partições da classe (1) subtraímos $4k$ de todas as partes, e ficamos com partições de $n - 4km$ em m partes enumeradas por $f(m, n - 4km)$.
- Nas partições da classe (2) subtraímos j da menor parte e $2k$ de todas as partes inclusive da menor, ficando com partições de $n - 2km - j$ em m partes enumeradas por $f(m, n - 2km - j)$. Observemos que das partições enumeradas por $f(m, n - 2km - j)$ temos que subtrair as partições de $n - 2km - j$ nas quais é possível subtrair $4k$ de todas as partes, e estas são contadas por $f(m, n - 6km - j)$. Assim as partições da classe (2) são contadas por $f(m, n - 2km - j) - f(m, n - 6km - j)$.
- Nas partições da classe (3), removemos a parte $4k$, e subtraímos $4k$ de todas as partes restantes, ficando com um número de partições enumeradas por $f(m - 1, n - 4km)$.
- Finalmente da classe (4), removemos a parte $5k$, e subtraímos $6k$ de todas as partes restantes, ficando com um número de partições enumeradas por $f(m - 1, n - 6km + k)$.

Agora definimos:

$$F(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n) z^m q^n$$

e usando a equação (3.16), temos:

$$\begin{aligned}
 F(z, q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n - 4km) z^m q^n + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n - 2km - j) z^m q^n \\
 &\quad - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n - 6km - j) z^m q^n + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m - 1, n - 4km) z^m q^n \\
 &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m - 1, n - 6km + k) z^m q^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n - 4km) (zq^{4k})^m q^{n-4km} \\
 &\quad + q^j \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n - 2km - j) (zq^{2k})^m q^{n-2km-j} \\
 &\quad - q^j \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n - 6km - j) (zq^{6k})^m q^{n-6km-j} \\
 &\quad + zq^{4k} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m - 1, n - 4km) (zq^{4k})^{m-1} q^{n-4km} \\
 &\quad + zq^{5k} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m - 1, n - 6km + k) (zq^{6k})^{m-1} q^{n-6km+k} \\
 &= F(zq^{4k}, q) + q^j F(zq^{2k}, q) - q^j F(zq^{6k}, q) + zq^{4k} F(zq^{4k}, q) + zq^{5k} F(zq^{6k}, q).
 \end{aligned}$$

Assumindo que $F(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q)z^n$, temos:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q)z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q)(zq^{4k})^n + q^j \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q)(zq^{2k})^n - q^j \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q)(zq^{6k})^n + \\ &+ zq^{4k} \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q)(zq^{4k})^n + zq^{5k} \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q)(zq^{6k})^n. \end{aligned}$$

Comparando o coeficiente de z^n temos;

$$h(n, q) = q^{4kn}h(n, q) + q^{2kn+j}h(n, q) - q^{6kn+j}h(n, q) + q^{4kn}h(n-1, q) + q^{6kn-k}h(n-1, q)$$

logo,

$$h(n, q) = \frac{q^{4kn}(1 + q^{2kn-k})}{(1 - q^{4kn})(1 - q^{2kn+j})}h(n-1, q). \quad (3.17)$$

Observando que $h(0, q) = 1$, e fazendo n iterações em (3.17), temos que:

$$h(n, q) = \frac{q^{2kn(n+1)}(-q^k; q^{2k})_n}{(q^{4k}; q^{4k})_n(q^{j+2k}; q^{2k})_n}.$$

Daí temos,

$$F(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2kn(n+1)}(-q^k; q^{2k})_n}{(q^{4k}; q^{4k})_n(q^{j+2k}; q^{2k})_n} z^n,$$

e finalizamos a prova observando que

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n)q^n = F(1, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2kn(n+1)}(-q^k; q^{2k})_n}{(q^{4k}; q^{4k})_n(q^{j+2k}; q^{2k})_n}.$$

■

Como um caso especial do Teorema (3.1.3) apresentamos uma interpretação combinatória para (3.3). Se tomarmos $k = j = 1$ em (3.15) multiplicada por $\frac{1}{1-q}$ temos o lado esquerdo de (3.3) o qual nos dá o Corolário (3.1.3).

Corolário 3.1.3. *O número de partições de N em partes ímpares distintas $\equiv \pm 1 \pmod{6}$ e partes pares $\not\equiv 0 \pmod{6}$ é igual ao número $\sum_{n=0}^N f(n)$.*

Teorema 3.1.4. *Seja $f(n)$ o número de partições de n em partes pertencentes a $A_{k,j}$ da forma $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s$, $\lambda_s \geq 2k$, com $\lambda_t = c_t k + d_t j$, onde $c_s \geq 2 + 2d_s$ e se $\lambda_t = c_t k + d_t j$ e $\lambda_{t+1} = c_{t+1} k + d_{t+1} j$ são partes consecutivas temos $c_t \equiv 1$ e $c_t \geq 2 + c_{t+1} + 2d_t$.*

Então

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q^{2k}; q^{2k})_n q^{kn(n+1)}}{(q^{2k}; q^{2k})_n (q^{j+2k}; q^{2k})_n}. \quad (3.18)$$

Demonstração: Seja $f(m, n)$ o número de partições enumeradas por $f(n)$ com a restrição de terem exatamente m partes. Então a seguinte relação de recorrência é verificada por $f(m, n)$.

$$\begin{aligned} f(m, n) &= f(m, n - 2km) + f(m, n - 2km - j) - f(m, n - 4km - j) \\ &+ f(m - 1, n - 2km) + f(m - 1, n - 4km + k). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Para provar 3.19 dividiremos as partições enumeradas por $f(m, n)$ em quatro classes disjuntas:

1. Aquelas em que $c_s > 2d_s + 2$,
 2. Aquela em que $c_s = 2d_s + 2$, $d_s \neq 0$,
 3. Aquelas em que $2k$ é parte,
 4. Aquelas em que $4k$ é parte.
- Nas partições da classe (1) subtraímos $2k$ de todas as partes, e ficamos com partições de $n - 2km$ em m partes enumeradas por $f(m, n - 2km)$.
 - Nas partições da classe (2) subtraímos j da menor parte e $2k$ de todas as partes inclusive da menor, ficando com partições de $n - 2km - j$ em m partes enumeradas por $f(m, n - 2km - j)$. Observemos que das partições enumeradas por $f(m, n - 2km - j)$ temos que subtrair as partições de $n - 2km - j$ nas quais é possível subtrair $2k$ de todas as partes, e estas são contadas por $f(m, n - 4km - j)$. Assim as partições da classe (2) são contadas por $f(m, n - 2km - j) - f(m, n - 4km - j)$.
 - Nas partições da classe (3), removemos a parte $2k$, e subtraímos $2k$ de todas as partes restantes, ficando com um número de partições enumeradas por $f(m - 1, n - 2km)$.
 - Finalmente da classe (4), removemos a parte $4k$, e subtraímos $4k$ de todas as partes restantes, ficando com um número de partições enumeradas por $f(m - 1, n - 4km)$.

Agora definimos:

$$F(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n) z^m q^n$$

e usando a equação (3.19), temos:

$$\begin{aligned} F(z, q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n - 2km) z^m q^n + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n - 2km - j) z^m q^n \\ &\quad - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n - 4km - j) z^m q^n + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m - 1, n - 2km) z^m q^n \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m - 1, n - 4km) z^m q^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n - 2km) (zq^{2k})^m q^{n-2km} \\ &\quad + q^j \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n - 2km - j) (zq^{2k})^m q^{n-2km-j} \\ &\quad - q^j \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n - 4km - j) (zq^{4k})^m q^{n-4km-j} \\ &\quad + zq^{2k} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m - 1, n - 2km) (zq^{2k})^{m-1} q^{n-2km} \\ &\quad + zq^{4k} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m - 1, n - 4km) (zq^{4k})^{m-1} q^{n-4km} \\ &= F(zq^{2k}, q) + q^j F(zq^{2k}, q) - q^j F(zq^{4k}, q) + zq^{2k} F(zq^{2k}, q) + zq^{4k} F(zq^{4k}, q). \end{aligned}$$

Assumindo que $F(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) z^n$, temos:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) (zq^{2k})^n + q^j \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) (zq^{2k})^n - q^j \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) (zq^{4k})^n + \\ &\quad + zq^{2k} \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) (zq^{2k})^n + zq^{4k} \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) (zq^{4k})^n. \end{aligned}$$

Comparando o coeficiente de z^n temos;

$$h(n, q) = q^{2kn} h(n, q) + q^{2kn+j} h(n, q) - q^{4kn+j} h(n, q) + q^{2kn} h(n-1, q) + q^{4kn-k} h(n-1, q)$$

logo,

$$h(n, q) = \frac{q^{2kn}(1 + q^{2kn-k})}{(1 - q^{2kn})(1 - q^{2kn+j})} h(n-1, q). \quad (3.20)$$

Observando que $h(0, q) = 1$, e fazendo n iterações em (3.20), temos que:

$$h(n, q) = \frac{q^{kn(n+1)} (-q^{2k}; q^{2k})_n}{(q^{2k}; q^{2k})_n (q^{j+2k}; q^{2k})_n}.$$

Daí temos,

$$F(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{kn(n+1)}(-q^{2k}; q^{2k})_n}{(q^{2k}; q^{2k})_n(q^{j+2k}; q^{2k})_n} z^n,$$

e finalizamos a prova observando que

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n)q^n = F(1, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{kn(n+1)}(-q^{2k}; q^{2k})_n}{(q^{2k}; q^{2k})_n(q^{j+2k}; q^{2k})_n}.$$

■

Como um caso especial do Teorema (3.1.4) apresentamos uma interpretação combinatória para (3.4). Se tomarmos $k = j = 1$ em (3.18) multiplicada por $\frac{1}{1-q}$ temos o lado esquerdo de (3.4) o qual nos dá o Corolário (3.1.4).

Corolário 3.1.4. *O número de partições de N cujas partes ímpares distintas congruentes a ± 1 módulo 6 e as partes verdes são pares distintas e as partes amarelas são pares $\not\equiv 0 \pmod{6}$ é igual ao número $\sum_{n=0}^N f(n)$.*

Teorema 3.1.5. *Seja $f(n)$ o número de partições de n em partes pertencentes a $A_{k,j}$ da forma $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s$, $\lambda_t = c_t k + d_t j$, onde $c_s \neq 0$, e se $\lambda_t = c_t k + d_t j$ e $\lambda_{t+1} = c_{t+1} k + d_{t+1} j$ são partes consecutivas temos:*

- se $c_t \equiv 1 \pmod{2}$ e $c_{t+1} \equiv 1 \pmod{2}$, então $c_t \geq 2 + c_{t+1} + 2d_{t+1}$,
- se $c_t \equiv 0 \pmod{2}$ e $c_{t+1} \equiv 1 \pmod{2}$, então $c_t \geq 3 + c_{t+1} + 2d_{t+1}$,
- se $c_t \equiv 1 \pmod{2}$ e $c_{t+1} \equiv 0 \pmod{2}$, então $c_t \geq 4 + c_{t+1} + 2d_{t+1}$,
- se $c_t \equiv 0 \pmod{2}$ e $c_{t+1} \equiv 0 \pmod{2}$, então $c_t \geq 5 + c_{t+1} + 2d_{t+1}$,

Então

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q^k; q^{2k})_n q^{kn^2}}{(q^{2k}; q^{2k})_n (q^j; q^{2k})_n}. \quad (3.21)$$

Demonstração: Seja $f(m, n)$ o número de partições enumeradas por $f(n)$ com a restrição de terem exatamente m partes. Então a seguinte relação de recorrência é verificada por $f(m, n)$.

$$\begin{aligned} f(m, n) &= f(m, n - 2km) + f(m, n - 2km + 2k - j) - f(m, n - 4km + 2k - j) \\ &+ f(m - 1, n - 2km + k) + f(m - 1, n - 4km + 2k). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Para provar (3.22) dividiremos as partições enumeradas por $f(m, n)$ em quatro classes disjuntas:

1. Aquelas em que $c_s > 1$,
2. Aquela em que $c_s = 1$, $d_s \neq 0$,
3. Aquelas em que k é parte,
4. Aquelas em que $2k$ é parte.

- Nas partições da classe (1) subtraímos $2k$ de todas as partes, e ficamos com partições de $n - 2km$ em m partes enumeradas por $f(m, n - 2km)$.
- Nas partições da classe (2) subtraímos j da menor parte e $2k$ das demais partes, ficando com partições de $n - 2km + 2k - j$ em m partes enumeradas por $f(m, n - 2km + 2k - j)$. Observemos que das partições enumeradas por $f(m, n - 2km + 2k - j)$ temos que subtrair as partições de $n - 2km + 2k - j$ nas quais é possível subtrair $2k$ de todas as partes, e estas são contadas por $f(m, n - 4km + 2k - j)$. Assim as partições da classe (2) são contadas por $f(m, n - 2km - j) - f(m, n - 4km + 2k - j)$.
- Nas partições da classe (3), removemos a parte k , e subtraímos $2k$ de todas as partes restantes, ficando com um número de partições enumeradas por $f(m - 1, n - 2km + k)$.
- Finalmente da classe (4), removemos a parte $2k$, e subtraímos $4k$ de todas as partes restantes, ficando com um número de partições enumeradas por $f(m - 1, n - 4km + 2k)$.

Agora definimos:

$$F(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n) z^m q^n$$

e usando a equação (3.22), temos:

$$\begin{aligned}
 F(z, q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n - 2km) z^m q^n + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n - 2km + 2k - j) z^m q^n \\
 &- \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n - 4km + 2k - j) z^m q^n + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m - 1, n - 2km + k) z^m q^n \\
 &+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m - 1, n - 4km + 2k) z^m q^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n - 2km) (zq^{2k})^m q^{n-2km} \\
 &+ q^{j-2k} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n - 2km + 2k - j) (zq^{2k})^m q^{n-2km+2k-j} \\
 &- q^{j-2k} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n - 4km + 2k - j) (zq^{4k})^m q^{n-4km+2k-j} \\
 &+ zq^k \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m - 1, n - 2km + k) (zq^{2k})^{m-1} q^{n-2km+k} \\
 &+ zq^{2k} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m - 1, n - 4km + 2k) (zq^{4k})^{m-1} q^{n-4km+2k} \\
 &= F(zq^{2k}, q) + q^{j-2k} F(zq^{2k}, q) - q^{j-2k} F(zq^{4k}, q) + zq^k F(zq^{2k}, q) \\
 &+ zq^{2k} F(zq^{4k}, q).
 \end{aligned}$$

Assumindo que $F(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) z^n$, temos:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) (zq^{2k})^n + q^{j-2k} \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) (zq^{2k})^n - q^{j-2k} \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) (zq^{4k})^n + \\
 &+ zq^k \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) (zq^{2k})^n + zq^{2k} \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) (zq^{4k})^n.
 \end{aligned}$$

Comparando o coeficiente de z^n temos;

$$\begin{aligned}
 h(n, q) &= q^{2kn} h(n, q) + q^{2kn-2k+j} h(n, q) - q^{4kn-2k+j} h(n, q) + q^{2kn-k} h(n-1, q) \\
 &+ q^{4kn-2k} h(n-1, q)
 \end{aligned}$$

logo,

$$h(q, n) = \frac{q^{2kn-k}(1 + q^{2k(n-1)+k})}{(1 - q^{2kn})(1 - q^{2kn-2k+j})} h(n-1, q). \quad (3.23)$$

Observando que $h(0, q) = 1$, e fazendo n iterações em (3.23), temos que:

$$h(n, q) = \frac{q^{kn^2} (-q^k; q^{2k})_n}{(q^{2k}; q^{2k})_n (q^j; q^{2k})_n}.$$

Daí temos,

$$F(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{kn^2}(-q^k; q^{2k})_n}{(q^{2k}; q^{2k})_n(q^j; q^{2k})_n} z^n,$$

e finalizamos a prova observando que

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n)q^n = F(1, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{kn^2}(-q^k; q^{2k})_n}{(q^{2k}; q^{2k})_n(q^j; q^{2k})_n}.$$

■

Como um caso especial do Teorema (3.1.5) apresentamos uma interpretação combinatória para (3.5). Se tomarmos $k = j = 1$ em (3.21) temos o lado esquerdo de (3.5) o qual nos dá o Corolário (3.1.5).

Corolário 3.1.5. *O número de partições de n cujas partes ímpares são distintas, as partes verdes são pares distintas $\equiv \pm 2 \pmod{6}$ e as partes amarelas são pares $\not\equiv 0 \pmod{6}$ é igual ao número $f(n)$.*

Teorema 3.1.6. *Seja $f(n)$ o número de partições de n em partes pertencentes a $A_{k,j}$ da forma $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_s$, $\lambda_s \geq 4k$, com $\lambda_t = c_t k + d_t j$, onde $c_s \equiv 0 \pmod{2}$ e $c_s \geq 4 + 2d_s$, e se λ_t e λ_{t+1} são partes consecutivas temos, $c_t \geq 4 + c_{t+1} + 2d_t$. Então*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2kn(n+1)}}{(q^{2k}; q^{2k})_n(q^{j+2k}; q^{2k})_n}. \quad (3.24)$$

Demonstração: Seja $f(m, n)$ o número de partições enumeradas por $f(n)$ com a restrição de terem exatamente m partes. Então a seguinte relação de recorrência é verificada por $f(m, n)$.

$$f(m, n) = f(m, n - 2km) + f(m, n - 2km - j) - f(m, n - 4km - j) + f(m - 1, n - 4km). \quad (3.25)$$

Para provar (3.25) dividiremos as partições enumeradas por $f(m, n)$ em três classes disjuntas:

1. Aquelas em que $c_s > 4 + 2d_s$,
 2. Aquelas em que $c_s = 4 + 2d_s$ e $d_s \neq 0$,
 3. Aquelas em que $4k$ é parte.
- Nas partições da classe (1) subtraímos $2k$ de todas as partes, ficando com partições de $n - 2km$ em m partes enumeradas por $f(m, n - 2km)$.

- Nas partições da classe (2) subtraímos j da menor parte e $2k$ de todas as partes inclusive da menor, ficando com partições em m partes enumeradas por $f(m, n - 2km - j)$. Observemos que de $f(m, n - 2km - j)$ temos que subtrair as partições de $n - 2km - j$ nas quais é possível subtrair $2k$ de todas as partes, as quais são contadas por $f(m, n - 4km - j)$. Assim as partições da classe (2) são contadas por $f(m, n - 2km - j) - f(m, n - 4km - j)$.
- Finalmente da classe (3), removemos a parte $4k$, e subtraímos $4k$ de todas as partes restantes, ficando com partições de $n - 4km$ em exatamente $m - 1$ partes enumeradas por $f(m - 1, n - 4km)$.

Agora definimos:

$$F(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n) z^m q^n$$

e usando a equação (3.25), temos:

$$\begin{aligned} F(z, q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n - 2km) z^m q^n + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n - 2km - j) z^m q^n \\ &\quad - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n - 4km - j) z^m q^n + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m - 1, n - 4km) z^m q^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n - 2km) (zq^{2k})^m q^{n-2km} \\ &\quad + q^j \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n - 2km - j) (zq^{2k})^m q^{n-2km-j} \\ &\quad - q^j \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n - 4km - j) (zq^{4k})^m q^{n-4km-j} \\ &\quad + zq^{4k} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m - 1, n - 4km) (zq^{4k})^{m-1} q^{n-4km} \\ &= F(zq^{2k}, q) + q^j F(zq^{2k}, q) - q^j F(zq^{4k}, q) + zq^{4k} F(zq^{4k}, q). \end{aligned}$$

Assumindo que $F(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) z^n$, temos:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) (zq^{2k})^n + q^j \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) (zq^{2k})^n \\ &\quad - q^j \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) (zq^{4k})^n + zq^{4k} \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) (zq^{4k})^n. \end{aligned}$$

Comparando o coeficiente de z^n temos;

$$h(q, n) = q^{2kn}h(n, q) + q^{2kn+j}h(n, q) - q^{4kn+j}h(n, q) + q^{4kn}h(n-1, q).$$

logo,

$$h(n, q) = \frac{q^{4kn}}{(1 - q^{2kn})(1 - q^{2kn+j})}h(n-1, q). \quad (3.26)$$

Observando que $h(0, q) = 1$, e fazendo n iterações em (3.26), temos que:

$$h(n, q) = \frac{q^{2kn(n+1)}}{(q^{2k}; q^{2k})_n (q^{2k+j}; q^{2k})_n}.$$

Daí temos,

$$F(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2kn(n+1)}}{(q^{2k}; q^{2k})_n (q^{2k+j}; q^{2k})_n} z^n,$$

e finalizamos a prova observando que

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n)q^n = F(1, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2kn(n+1)}}{(q^{2k}; q^{2k})_n (q^{2k+j}; q^{2k})_n}.$$

■

Como um caso especial do Teorema (3.1.6) apresentamos uma interpretação combinatória para (3.6). Se tomarmos $k = j = 1$ em (3.24) multiplicada por $\frac{1}{1-q}$ temos o lado esquerdo de (3.6) o qual nos dá o Corolário (3.1.6).

Corolário 3.1.6. *O número de partições de N em partes ímpares distintas $\equiv \pm 1 \pmod{8}$ e partes pares $\not\equiv 0 \pmod{8}$ é igual ao número $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$.*

Teorema 3.1.7. *Seja $f(n)$ o número de partições de n em partes pertencentes a $A_{k,j}$ da forma $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s$, $\lambda_t = c_t k + d_t j$, onde $c_s \equiv 1 \pmod{2}$, e se $\lambda_t = c_t k + d_t j$ e $\lambda_{t+1} = c_{t+1} k + d_{t+1} j$ são partes consecutivas temos $c_t \geq 2 + c_{t+1} + 2d_{t+1}$. Então,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{kn^2}(-q^j; q^{2k})_n}{(q^{2k}; q^{2k})_n (q^j; q^{2k})_n}. \quad (3.27)$$

Demonstração: Seja $f(m, n)$ o número de partições enumeradas por $f(n)$ com a restrição de terem exatamente m partes. Então a seguinte relação de recorrência é verificada por $f(m, n)$.

$$\begin{aligned} f(m, n) &= f(m, n - 2km) + f(m, n - 2km + 2k - j) - f(m, n - 4km + 2k - j) \\ &\quad + f(m - 1, n - 2km + k) + f(m - 1, n - 4km + 3k - j). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Para provar (3.28) dividiremos as partições enumeradas por $f(m, n)$ em quatro classes disjuntas:

1. Aquelas em que $c_s > 1$,
 2. Aquela em que $c_s = 1$, $d_s \neq 0$,
 3. Aquelas em que k é parte,
 4. Aquelas em que $k + j$ é parte.
- Nas partições da classe (1) subtraímos $2k$ de todas as partes, e ficamos com partições de $n - 2km$ em m partes contadas por $f(m, n - 2km)$.
 - Nas partições da classe (2) subtraímos j da menor parte e $2k$ das demais partes, ficando com partições de $n - 2km + 2k - j$ em m partes enumeradas por $f(m, n - 2km + 2k - j)$. Observemos que das partições enumeradas por $f(m, n - 2km + 2k - j)$ temos que subtrair as partições de $n - 2km + 2k - j$ nas quais é possível subtrair $2k$ de todas as partes, e estas são contadas por $f(m, n - 4km + 2k - j)$. Assim as partições da classe (2) são contadas por $f(m, n - 2km - j) - f(m, n - 4km + 2k - j)$.
 - Nas partições da classe (3), removemos a parte k , e subtraímos $2k$ de todas as partes restantes, ficando com um número de partições enumeradas por $f(m - 1, n - 2km + k)$.
 - Finalmente da classe (4), removemos a parte $k + 1$, e subtraímos $4k$ de todas as partes restantes, ficando com um número de partições enumeradas por $f(m - 1, n - 4km + 3k - j)$.

Agora definimos:

$$F(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n) z^m q^n$$

e usando a equação (3.28), temos:

$$\begin{aligned}
F(z, q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n - 2km) z^m q^n + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n - 2km + 2k - j) z^m q^n \\
&- \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n - 4km + 2k - j) z^m q^n + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m - 1, n - 2km + k) z^m q^n \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m - 1, n - 4km + 3k - j) z^m q^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n - 2km) (zq^{2k})^m q^{n-2km} \\
&+ q^{j-2k} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n - 2km + 2k - j) (zq^{2k})^m q^{n-2km+2k-j} \\
&- q^{j-2k} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n - 4km + 2k - j) (zq^{4k})^m q^{n-4km+2k-j} \\
&+ zq^k \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m - 1, n - 2km + k) (zq^{2k})^{m-1} q^{n-2km+k} \\
&+ zq^{k+j} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m - 1, n - 4km + 3k + j) (zq^{4k})^{m-1} q^{n-4km+3k+j} \\
&= F(zq^{2k}, q) + q^{j-2k} F(zq^{2k}, q) - q^{j-2k} F(zq^{4k}, q) + zq^k F(zq^{2k}, q) \\
&+ zq^{k+j} F(zq^{4k}, q).
\end{aligned}$$

Assumindo que $F(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) z^n$, temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) (zq^{2k})^n + q^{j-2k} \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) (zq^{2k})^n - q^{j-2k} \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) (zq^{4k})^n + \\
&+ zq^k \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) (zq^{2k})^n + zq^{k+j} \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) (zq^{4k})^n.
\end{aligned}$$

Comparando o coeficiente de z^n temos;

$$\begin{aligned}
h(n, q) &= q^{2kn} h(n, q) + q^{2kn-2k+j} h(n, q) - q^{4kn-2k+j} h(n, q) + q^{2kn-k} h(n-1, q) \\
&+ q^{4kn-3k+j} h(n-1, q)
\end{aligned}$$

logo,

$$h(n, q) = \frac{q^{2kn-k}(1 + q^{2k(n-1)+j})}{(1 - q^{2kn})(1 - q^{2kn-2k+j})} h(n-1, q). \quad (3.29)$$

Observando que $h(0, q) = 1$, e fazendo n iterações em (3.29), temos que:

$$h(n, q) = \frac{q^{kn^2} (-q^j; q^{2k})_n}{(q^{2k}; q^{2k})_n (q^j; q^{2k})_n}.$$

Daí temos,

$$F(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{kn^2} (-q^j; q^{2k})_n}{(q^{2k}; q^{2k})_n (q^j; q^{2k})_n} z^n,$$

e finalizamos a prova observando que

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n) q^n = F(1, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{kn^2} (-q^j; q^{2k})_n}{(q^{2k}; q^{2k})_n (q^j; q^{2k})_n}.$$

■

Como um caso especial do Teorema (3.1.7) apresentamos uma interpretação combinatória para (3.7). Se tomarmos $k = j = 1$ em (3.27) temos o lado esquerdo de (3.7) o qual nos dá o Corolário (3.1.7).

Corolário 3.1.7. *O número de partições de n nas quais as partes pares são $\equiv \pm 2, \pm 4 \pmod{12}$ e as partes ímpares $\equiv 3 \pmod{6}$ são distintas é igual a $f(n)$.*

Teorema 3.1.8. *Seja $f(n)$ o número de partições de n em partes pertencentes a $A_{k,j}$ da forma $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s$, com $\lambda_t = c_t k + d_t j$, onde $c_s \equiv 1 \pmod{2}$, e se $\lambda_t = c_t k + d_t j$ e $\lambda_{t+1} = c_{t+1} k + d_{t+1} j$ são partes consecutivas temos:*

- Se $c_{t+1} \equiv 1 \pmod{4}$ então $\begin{cases} c_t \equiv 3 \pmod{4} & \text{se } d_{t+1} \equiv 0 \pmod{2} \\ c_t \equiv 1 \pmod{4} & \text{se } d_{t+1} \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$
- Se $c_{t+1} \equiv 3 \pmod{4}$ então $\begin{cases} c_t \equiv 1 \pmod{4} & \text{se } d_{t+1} \equiv 0 \pmod{2} \\ c_t \equiv 3 \pmod{4} & \text{se } d_{t+1} \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$
onde $c_t \geq 2 + 2d_{t+1} + c_{t+1}$.
- Se $c_{t+1} \equiv 1 \pmod{4}$ então $\begin{cases} c_t \equiv 1 \pmod{4} & \text{se } d_{t+1} \equiv 0 \pmod{2} \\ c_t \equiv 3 \pmod{4} & \text{se } d_{t+1} \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$
- Se $c_{t+1} \equiv 3 \pmod{4}$ então $\begin{cases} c_t \equiv 3 \pmod{4} & \text{se } d_{t+1} \equiv 0 \pmod{2} \\ c_t \equiv 1 \pmod{4} & \text{se } d_{t+1} \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$
onde $c_t \geq 4 + 2d_{t+1} + c_{t+1}$.
- Se $c_{t+1} \equiv 1 \pmod{4}$ então $\begin{cases} c_t \equiv 3 \pmod{4} & \text{se } d_{t+1} \equiv 0 \pmod{2} \\ c_t \equiv 1 \pmod{4} & \text{se } d_{t+1} \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$
- Se $c_{t+1} \equiv 3 \pmod{4}$ então $\begin{cases} c_t \equiv 1 \pmod{4} & \text{se } d_{t+1} \equiv 0 \pmod{2} \\ c_t \equiv 3 \pmod{4} & \text{se } d_{t+1} \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$
onde $c_t \geq 6 + 2d_{t+1} + c_{t+1}$.

Então

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q^{2k}; q^{4k})_n q^{kn^2}}{(q^{2k}; q^{2k})_n (q^j; q^{2k})_n (-q^{2k}; q^{2k})_n}. \quad (3.30)$$

Demonstração: Seja $f(m, n)$ o número de partições enumeradas por $f(n)$ com a restrição de terem exatamente m partes. Então a seguinte relação de recorrência é verificada por $f(m, n)$.

$$\begin{aligned} f(m, n) &= f(m, n - 4km) + f(m, n - 2km + 2k - j) - f(m, n - 6km + 2k - j) \\ &\quad + f(m - 1, n - 2km + k) + f(m - 1, n - 6km + 3k). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Para provar (3.31) dividiremos as partições enumeradas por $f(m, n)$ em quatro classes disjuntas:

1. Aquelas em que $c_s > 1$,
 2. Aquela em que $c_s = 1$, $d_s \neq 0$,
 3. Aquelas em que k é parte,
 4. Aquelas em que $3k$ é parte.
- Nas partições da classe (1) subtraímos $4k$ de todas as partes, e ficamos com partições de $n - 4km$ em m partes enumeradas por $f(m, n - 4km)$.
 - Nas partições da classe (2) subtraímos j da menor parte e $2k$ das demais partes, ficando com partições de $n - 2km + 2k - j$ em m partes enumeradas por $f(m, n - 2km + 2k - j)$. Observemos que das partições enumeradas por $f(m, n - 2km + 2k - j)$ temos que subtrair as partições de $n - 2km + 2k - j$ nas quais é possível subtrair $4k$ de todas as partes, e estas são contadas por $f(m, n - 6km + 2k - j)$. Assim as partições da classe (2) são contadas por $f(m, n - 2km - j) - f(m, n - 6km + 2k - j)$.
 - Nas partições da classe (3), removemos a parte k , e subtraímos $2k$ de todas as partes restantes, ficando com um número de partições enumeradas por $f(m - 1, n - 2km + k)$.
 - Finalmente da classe (4), removemos a parte $3k$, e subtraímos $6k$ de todas as partes restantes, ficando com um número de partições enumeradas por $f(m - 1, n - 6km + 3k)$.

Agora definimos:

$$F(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n) z^m q^n$$

e usando a equação (3.31), temos:

$$\begin{aligned} F(z, q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n - 4km) z^m q^n + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n - 2km + 2k - j) z^m q^n \\ &\quad - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n - 6km + 2k - j) z^m q^n + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m - 1, n - 2km + k) z^m q^n \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m - 1, n - 6km + 3k) z^m q^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n - 4km) (zq^{4k})^m q^{n-4km} \\ &\quad + q^{j-2k} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n - 2km + 2k - j) (zq^{2k})^m q^{n-2km+2k-j} \\ &\quad - q^{j-2k} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n - 6km + 2k - j) (zq^{6k})^m q^{n-6km+2k-j} \\ &\quad + zq^k \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m - 1, n - 2km + k) (zq^{2k})^{m-1} q^{n-2km+k} \\ &\quad + zq^{3k} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m - 1, n - 6km + 3k) (zq^{6k})^{m-1} q^{n-6km+3k} \\ &= F(zq^{4k}, q) + q^{j-2k} F(zq^{2k}, q) - q^{j-2k} F(zq^{6k}, q) + zq^k F(zq^{2k}, q) \\ &\quad + zq^{3k} F(zq^{6k}, q). \end{aligned}$$

Assumindo que $F(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) z^n$, temos:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) (zq^{4k})^n + q^{j-2k} \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) (zq^{2k})^n - q^{j-2k} \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) (zq^{6k})^n + \\ &\quad + zq^k \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) (zq^{2k})^n + zq^{3k} \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) (zq^{6k})^n. \end{aligned}$$

Comparando o coeficiente de z^n temos;

$$\begin{aligned} h(n, q) &= q^{4kn} h(n, q) + q^{2kn-2k+j} h(n, q) - q^{6kn-2k+j} h(n, q) + q^{2kn-k} h(n-1, q) \\ &\quad + q^{6kn-3k} h(n-1, q) \end{aligned}$$

logo,

$$h(n, q) = \frac{q^{2kn-k}(1 + q^{4k(n-1)+2k})}{(1 - q^{4kn})(1 - q^{2kn-2k+j})} h(n-1, q). \quad (3.32)$$

Observando que $h(0, q) = 1$, e fazendo n iterações em (3.32), temos que:

$$h(n, q) = \frac{q^{kn^2}(-q^{2k}; q^{4k})_n}{(q^{2k}; q^{2k})_n(q^j; q^{2k})_n(-q^{2k}; q^{2k})_n}.$$

Daí temos,

$$F(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{kn^2}(-q^{2k}; q^{4k})_n}{(q^{2k}; q^{2k})_n(q^j; q^{2k})_n(-q^{2k}; q^{2k})_n} z^n,$$

e finalizamos a prova observando que

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n)q^n = F(1, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{kn^2}(-q^{2k}; q^{4k})_n}{(q^{2k}; q^{2k})_n(q^j; q^{2k})_n(-q^{2k}; q^{2k})_n}.$$

■

Como um caso especial do Teorema (3.1.8) apresentamos uma interpretação combinatória para (3.8). Se tomarmos $k = j = 1$ em (3.30) multiplicada por $\frac{1}{1-q}$ temos que o lado esquerdo de (3.8) nos dá o Corolário (3.1.8).

Para isto definimos o conjunto $\mathcal{A}$ como sendo o conjunto das partições em partes verdes e/ou amarelas onde as amarelas são distintas e congruentes a 8 módulo 16 e as partes verdes ímpares são distintas e as pares verdes são $\equiv \pm 2, \pm 4, \pm 6 \pmod{16}$.

Corolário 3.1.8. *O total de partições de N com partes em $\mathcal{A}$ tendo um número par de partes amarelas menos o total de partições de N com um número ímpar de partes amarelas é igual*

$$a \sum_{n=0}^N f(n).$$

3.2 Vetores tridimensionais como “partes” de uma partição

Nesta seção apresentamos um resultado referente a identidade de Slater (10), como pode ser visto em [16], apresentada a seguir.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}(-1; q)_{2n}}{(q^2; q^2)_n^2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + q^{4n-1})(1 + q^{4n-3})(1 - q^{4n})(1 + q^{2n-1})}{(1 - q^{2n})} \quad (3.33)$$

Definimos para inteiros positivos j , $\bar{k}$ e k o seguinte conjunto:

$$A_{k, \bar{k}, j} = \{bk + c\bar{k} + dj \mid b, c, d \geq 0\}.$$

Teorema 3.2.1. *Seja $f(n)$ o número de partições de n em partes pertencentes a $A_{j,\bar{k},k}$ da forma $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s$, $\lambda_t = b_t k + c_t \bar{k} + d_t j$, $b_s - c_s \neq 0$, se $c_s \neq 0$ então $c_s = 1$ ou $c_s = 2$ e $b_s \equiv 0 \pmod{2}$, e $d_s \equiv 0 \pmod{2}$, e se λ_t e λ_{t+1} são partes consecutivas temos:*

- Se $c_t - c_{t+1} = 0$ então

$$\begin{cases} \text{Se } b_{t+1} \equiv 1 \pmod{2} \text{ e } b_t \equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow b_t \geq 2 + b_{t+1} + d_{t+1} \\ \text{Se } b_{t+1} \equiv 1 \pmod{2} \text{ e } b_t \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow b_t \geq 3 + b_{t+1} + d_{t+1} \\ \text{Se } b_{t+1} \equiv 0 \pmod{2} \text{ e } b_t \equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow b_t \geq 5 + b_{t+1} + d_{t+1} \\ \text{Se } b_{t+1} \equiv 0 \pmod{2} \text{ e } b_t \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow b_t \geq 6 + b_{t+1} + d_{t+1} \end{cases}$$
- Se $c_t - c_{t+1} = 1$ então

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Se } b_{t+1} \equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow b_t \equiv 0 \pmod{2} \text{ e } b_t \geq 1 + b_{t+1} + d_{t+1} \end{array} \right.$$
- Se $c_t - c_{t+1} = 2$ então

$$\begin{cases} \text{Se } b_{t+1} \equiv 0 \pmod{2} & \Rightarrow b_t \equiv 1 \pmod{2} \text{ e } b_t \geq 1 + b_{t+1} + d_{t+1} \\ \text{Se } b_{t+1} \equiv 1 \pmod{2} & \Rightarrow b_t \equiv 0 \pmod{2} \text{ e } b_t \geq 1 + b_{t+1} + d_{t+1} \\ \text{Se } b_{t+1} \equiv 0 \pmod{2} \text{ e } c_{t+1} \equiv 2 \pmod{4} & \Rightarrow b_t \equiv 0 \pmod{2} \text{ e } b_t \geq 2 + b_{t+1} + d_{t+1} \\ \text{Se } b_{t+1} \equiv 0 \pmod{2} \text{ e } c_{t+1} \equiv 0 \pmod{4} & \Rightarrow b_t \equiv 0 \pmod{2} \text{ e } b_t \geq 4 + b_{t+1} + d_{t+1} \end{cases}$$
- Se $c_t - c_{t+1} = 3$ então

$$\begin{cases} \text{Se } b_{t+1} \equiv 0 \pmod{2} \text{ e } b_t \equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow b_t \geq 1 + b_{t+1} + d_{t+1} \\ \text{Se } b_{t+1} \equiv 0 \pmod{2} \text{ e } b_t \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow b_t \geq 2 + b_{t+1} + d_{t+1} \\ \text{Se } b_{t+1} \equiv 0 \pmod{2} \text{ e } b_t \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow b_t \geq b_{t+1} + d_{t+1} \end{cases}$$
- Se $c_t - c_{t+1} = 4$ ou $c_t - c_{t+1} = 5$ então

$$\left\{ b_t \geq b_{t+1} + d_{t+1} \right.$$

Então

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1; q^{2k})_n (q^k; q^{2k})_n q^{n^2}}{(q^{2k}; q^{2k})_n (q^{2j}; q^{2k})_n}. \quad (3.34)$$

Como as partes destas partições são combinações lineares de k , $\bar{k}$ e j , podemos vê-las como “vetores” em dimensão três, logo o número particionado n pode passar a ser visto como soma de “vetores tridimensionais”.

Como um caso especial do Teorema (3.2.1) apresentamos uma interpretação combinatória para (3.33). Se tomarmos $k = j = 1$ em (3.34) temos que o lado esquerdo de (3.33) o qual nos dá o Corolário (3.2.1).

Corolário 3.2.1. *O número de sobrep partições de n em partes ímpares é igual a $f(n)$.*

Demonstração:

A tabela abaixo, apresenta na primeira coluna as 12 sobrep partições em partes ímpares e na segunda coluna as 12 partições de $n = 6$, geradas pela função (3.34)

Sobrep partições em partes ímpares	Partições como descritas no Teorema (3.2.1)
$5+1$	$(6k)$
$5+ \bar{1}$	$(4k+ 2\bar{k})$
$\bar{5}+1$	$(2k+4j)$
$\bar{5}+ \bar{1}$	$(2\bar{k}+4j)$
$3+3$	$(2k+2\bar{k}+2j)$
$\bar{3}+3$	$(4k+2j)$
$3+1+1+1$	$(5k)+(k)$
$3+ \bar{1}+1+1$	$(5\bar{k})+(\bar{k})$
$\bar{3}+1+1+1$	$(4k+\bar{k})+(k)$
$\bar{3}+ \bar{1}+1+1$	$(3k+2j)+(k)$
$1+1+1+1+1+1$	$(2k+\bar{k}+2j)+(k)$
$\bar{1}+1+1+1+1+1$	$(k+4\bar{k})+(\bar{k})$



CAPÍTULO 4

Outros Teoremas Relacionados às Identidades de Slater

Neste capítulo apresentamos vários teoremas com seus respectivos corolários, porém omitiremos suas demonstrações por serem semelhantes às dadas no capítulo três.

4.1 Novas interpretações para algumas identidades de Slater

As identidades de Slater [16], que motivaram os próximos resultados, são as de número 2, 6, 7, 12, 14, 16, 39, 80, 81, 82, 83, 84, 86, 94, 96, 98, 99 e 117, segundo a referência [16].

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{1}{2}n(n+1)}}{(q; q)_n} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^n) \quad (4.1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}(-1; q)_n}{(q; q)_n(q; q)_n} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + q^{3n-1})(1 + q^{3n-2})(1 - q^{3n})}{(1 - q^n)} \quad (4.2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n+1)}}{(q^2; q^2)_{2n}} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{4n-1})(1 - q^{4n-3})(1 - q^{4n})}{(1 - q^n)} \quad (4.3)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{1}{2}n(n+1)}(-1; q)_n}{(q; q)_n} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{4n-2})(1 - q^{4n-2})(1 - q^{4n})(1 + q^n)}{(1 - q^n)} \quad (4.4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n+1)}}{(q; q)_n} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{5n-1})(1 - q^{5n-4})(1 - q^{5n})}{(1 - q^n)} \quad (4.5)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n+2)}}{(q^4; q^4)_n} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{5n-1})(1 - q^{5n-4})(1 - q^{5n})(1 + q^{2n-1})}{(1 - q^{2n})} \quad (4.6)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n^2}}{(q; q)_{2n}} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{8n-3})(1 - q^{8n-5})(1 - q^{8n})}{(1 - q^{2n})} \quad (4.7)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q; q)_n q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(q; q)_{2n+1}} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{7n-2})(1 - q^{7n-5})(1 - q^{14n-11})(1 - q^{14n-3})(1 - q^{7n})(1 + q^n)}{(1 - q^n)} \quad (4.8)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q; q)_n q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(q; q)_{2n}} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{7n-1})(1 - q^{7n-6})(1 - q^{14n-9})(1 - q^{14n-5})(1 - q^{7n})(1 + q^n)}{(1 - q^n)} \quad (4.9)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q; q)_n q^{\frac{n(n+3)}{2}}}{(q; q)_{2n+1}} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{7n-3})(1 - q^{7n-4})(1 - q^{14n-13})(1 - q^{14n-1})(1 - q^{7n})(1 + q^n)}{(1 - q^n)} \quad (4.10)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n^2}}{(q; q)_{2n}} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{8n-1})(1 - q^{8n-7})(1 - q^{16n-10})(1 - q^{16n-6})(1 - q^{8n})}{(1 - q^n)} \quad (4.11)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(2n+1)}}{(q; q)_{2n+1}} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{8n-2})(1 - q^{8n-6})(1 - q^{16n-12})(1 - q^{16n-4})(1 - q^{8n})}{(1 - q^n)} \quad (4.12)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n(n+1)}}{(q; q)_{2n+1}} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{8n-3})(1 - q^{8n-5})(1 - q^{16n-14})(1 - q^{16n-2})(1 - q^{8n})}{(1 - q^n)} \quad (4.13)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n+1)}}{(q; q)_{2n+1}} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{10n-3})(1 - q^{10n-7})(1 - q^{20n-16})(1 - q^{20n-4})(1 - q^{10n})}{(1 - q^n)} \quad (4.14)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n+2)}}{(q; q)_{2n+1}} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{10n-4})(1 - q^{10n-6})(1 - q^{20n-18})(1 - q^{20n-2})(1 - q^{10n})}{(1 - q^n)} \quad (4.15)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q; q)_{2n}} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{10n-2})(1 - q^{10n-8})(1 - q^{20n-14})(1 - q^{20n-6})(1 - q^{10n})}{(1 - q^n)} \quad (4.16)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n+1)}}{(q; q)_{2n}} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{10n-1})(1 - q^{10n-9})(1 - q^{20n-8})(1 - q^{20n-12})(1 - q^{10n})}{(1 - q^n)} \quad (4.17)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q; q^2)_n q^{n^2}}{(q^2; q^2)_{2n}} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{14n-3})(1 - q^{14n-11})(1 - q^{28n-20})(1 - q^{28n-8})(1 - q^{14n})(1 + q^{2n-1})}{(1 - q^{2n})} \quad (4.18)$$

Teorema 4.1.1. *Seja $f(n)$ o número de partições de n em partes pertencentes a $A_{k,j}$ da forma $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s$, onde $\lambda_t = c_t k + d_t j$, com $c_s = 1$, e se λ_t e λ_{t+1} são partes consecutivas temos, $c_t = 1 + c_{t+1} + d_{t+1}$. Então*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{1}{2}kn(n+1)}}{(q^j; q^k)_n}. \quad (4.19)$$

Como um caso especial do Teorema (4.1.1) apresentamos uma interpretação combinatória para (4.1). Se tomarmos $k = j = 1$ em (4.19) temos o lado esquerdo de (4.1) o qual nos dá o Corolário (4.1.1).

Corolário 4.1.1. *O número de partições de n em partes distintas é igual a $f(n)$.*

Na Tabela abaixo descrevemos, para alguns valores de n , os conjuntos das partições descritas pelo corolário.

n	Partições de n em partes distintas	Partições para $j=k=1$ em (4.19)
0	$\emptyset$	$\emptyset$
1	1	(k)
2	2	(k+j)
3	3 2+1	(k+2j) (2k)+(k)
4	4 3+1	(k+3j) (2k+j)+ (k)
5	5 4+1 3+2	(k+4j) (2k+j)+(k) (3k)+(k+j)
6	6 5+1 4+2 3+2+1	(k+5j) (2k+3j)+(k) (3k+j)+(k+j) (3k)+(2k)+(k)
7	7 6+1 5+2 4+3 4+2+1	(k+6j) (2k+4j)+(k) (3k+2j)+(k+j) (4k)+(k+2j) (3k+j)+(2k)+(k)
8	8 7+1 6+2 5+3 5+2+1 4+3+1	(k+7j) (2k+5j)+(k) (3k+3j)+(k+j) (4k+j)+(k+2j) (3k+2j)+(2k)+(k) (4k)+(2k+j)+(k)

Teorema 4.1.2. *Seja $f(n)$ o número de partições de n em partes pertencentes a $A_{k,\bar{k},j}$ da forma $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_s$, onde $\lambda_t = b_t k + c_t \bar{k} + d_t j$, com $b_s - c_s \neq 0$, onde se $c_s \neq 0$ então $c_s = 1$, e se λ_t e λ_{t+1} são partes consecutivas temos,*

- *Se $c_t - c_{t+1} = 0$ então $b_t \geq 2 + b_{t+1} + d_{t+1}$.*

- Se $c_t - c_{t+1} = 1$ ou $c_t - c_{t+1} = 2$ então $b_t \geq 1 + b_{t+1} + d_{t+1}$.
- Se $c_t - c_{t+1} = 3$ então $b_t \geq b_{t+1} + d_{t+1}$.

Então

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{kn^2}(-1; q^k)_n}{(q^j; q^k)_n (q^k; q^k)_n}. \quad (4.20)$$

Como um caso especial do Teorema (4.1.2) apresentamos uma interpretação combinatória para (4.2). Se tomarmos $k = j = 1$ em (4.20) temos o lado esquerdo de (4.2) o qual nos dá o Corolário (4.1.2).

Corolário 4.1.2. *O número de sobrepartição de n em partes $\equiv \pm 1 \pmod{3}$ onde as partes não marcadas são $\equiv \pm 1 \pmod{3}$ é igual a $f(n)$.*

Teorema 4.1.3. *Seja $f(n)$ o número de partições de n em partes pertencentes a $A_{j,k}$ da forma $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s$, $\lambda_s \geq 2k$, onde $\lambda_t = c_t k + d_t j$, com $c_s = 2$ e $d_s \equiv 0 \pmod{2}$, e se λ_t e λ_{t+1} são partes consecutivas temos, $c_t = 2 + c_{t+1} + d_{t+1}$. Então*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{kn(n+1)}}{(q^{2j}; q^{2k})_n}. \quad (4.21)$$

Como um caso especial do Teorema (4.1.3) apresentamos uma interpretação combinatória para (4.3). Se tomarmos $k = j = 1$ em (4.21) temos o lado esquerdo de (4.3) o qual nos dá o Corolário (4.1.3).

Corolário 4.1.3. *O número de partição de n em partes pares $\equiv 2 \pmod{4}$ é igual a $f(n)$.*

Teorema 4.1.4. *Seja $f(n)$ o número de partições de n em partes pertencentes a $A_{k,\bar{k},j}$ da forma $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s$, $\lambda_t = b_t k + c_t \bar{k} + d_t j$, com $b_s + c_s = 1$, e se λ_t e λ_{t+1} são partes consecutivas temos:*

- Se c_t é par, então $b_t = b_{t+1} + d_{t+1} + 1$ e $c_t = c_{t+1} + i$, com $i = 0, 1$.
- Se c_t é ímpar, então $b_t = b_{t+1} + d_{t+1} + 1$ e $c_t = c_{t+1} + \ell$, com $\ell = 1, 2$.

Então

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{1}{2}kn(n+1)}(-1; q^k)_n}{(q^j; q^k)_n}. \quad (4.22)$$

Como um caso especial do Teorema (4.1.4) apresentamos uma interpretação combinatória para (4.4). Se tomarmos $k = j = 1$ em (4.22) temos o lado esquerdo de (4.4) o qual nos dá o Corolário (4.1.4).

Corolário 4.1.4. *O número de partições de n em partes distintas verdes e/ou amarelas nas quais as partes verdes são ímpares é igual a $f(n)$.*

Teorema 4.1.5. *Seja $f(n)$ o número de partições de n em partes pertencentes a $A_{k,j}$ da forma $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_s$, $\lambda_s \geq 2k$, $\lambda_t = c_t k + d_t j$, com $c_s = 2$, e se λ_t e λ_{t+1} são partes consecutivas temos, $c_t = 2 + c_{t+1} + d_{t+1}$. Então*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{kn(n+1)}}{(q^j; q^k)_n}. \quad (4.23)$$

Como um caso especial do Teorema (4.1.5) apresentamos uma interpretação combinatória para (4.5). Se tomarmos $k = j = 1$ em (4.23) temos o lado esquerdo de (4.5) o qual nos dá o Corolário (4.1.5).

Corolário 4.1.5. *O número de partições de n em partes $\equiv \pm 2 \pmod{5}$ é igual a $f(n)$.*

Teorema 4.1.6. *Seja $f(n)$ o número de partições de n em partes pertencentes a $A_{k,j}$ da forma $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_s$, $\lambda_s \geq 3k$, $\lambda_t = c_t k + d_t j$, com $c_s = 3$ e $d_s \equiv 0 \pmod{4}$, e se λ_t e λ_{t+1} são partes consecutivas temos, $c_t = 2 + c_{t+1} + d_{t+1}$. Então*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{kn(n+2)}}{(q^{4j}; q^{4k})_n}. \quad (4.24)$$

Como um caso especial do Teorema (4.1.6) apresentamos uma interpretação combinatória para (4.6). Se tomarmos $k = j = 1$ em (4.24) temos o lado esquerdo de (4.6) o qual nos dá o Corolário (3.1.3). Seja $\mathcal{B}$ o conjunto das partições com partes azuis, verdes e amarelas, sendo as azuis pares, as verdes ímpares distintas e as amarelas distintas e $\equiv 0, \pm 1 \pmod{5}$.

Corolário 4.1.6. *O total de partições de n com partes em $\mathcal{B}$ tendo um número par de partes amarelas menos o total daquelas com um número ímpar de partes amarelas é igual a $f(n)$.*

Teorema 4.1.7. *Seja $f(n)$ o número de partições de n em partes pertencentes a $A_{k,j}$ da forma $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_s$, $\lambda_s \geq 2k$, onde $\lambda_t = c_t k + d_t j$, com $c_s \equiv 0 \pmod{2}$, e se λ_t e λ_{t+1} são partes consecutivas temos, $c_t \geq 4 + c_{t+1} + 2d_t$. Então*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2kn^2}}{(q^{2k}; q^{2k})_n (q^j; q^{2k})_n}. \quad (4.25)$$

Como um caso especial do Teorema (4.1.7) apresentamos uma interpretação combinatória para (4.7). Se tomarmos $k = j = 1$ em (4.25) temos o lado esquerdo de (4.7) o qual nos dá o Corolário (4.1.7).

Corolário 4.1.7. *O número de partições de n em partes ímpares distintas $\equiv \pm 3 \pmod{8}$ e partes pares $\not\equiv 0 \pmod{8}$ é igual a $f(n)$.*

Teorema 4.1.8. *Seja $f(n)$ o número de partições de n em partes pertencentes a $A_{k,j}$ da forma $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_s$, $\lambda_t = c_t k + d_t j$, com $c_s \geq 1 + 2d_s$, e se λ_t e λ_{t+1} são partes consecutivas temos, $c_t \geq 1 + c_{t+1} + 2d_t$. Então*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{kn(n+1)}{2}} (-q^k; q^k)_n}{(q^{2k}; q^{2k})_n (q^{j+2k}; q^{2k})_n}. \quad (4.26)$$

Como um caso especial do Teorema (4.1.8) apresentamos uma interpretação combinatória para (4.8). Se tomarmos $k = j = 1$ em (4.26) multiplicada por $\frac{1}{1-q}$ temos o lado esquerdo de (4.8) o qual nos dá o Corolário (4.1.8).

Corolário 4.1.8. *O número de partições de N em que as partes verdes são distintas e as partes azuis são $\equiv \pm 1, \pm 4, \pm 6 \pmod{14}$ é igual ao número $\sum_{n=0}^N f(n)$.*

Teorema 4.1.9. *Seja $f(n)$ o número de partições de n em partes pertencentes a $A_{k,j}$ da forma $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_s$, $\lambda_t = c_t k + d_t j$, onde $c_s \neq 0$, e se λ_t e λ_{t+1} são partes consecutivas temos, $c_t \geq 1 + c_{t+1} + 2d_{t+1}$. Então*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{1}{2}kn(n+1)} (-q^k; q^k)_n}{(q^{2k}; q^{2k})_n (q^j; q^{2k})_n}. \quad (4.27)$$

Como um caso especial do Teorema (4.1.9) apresentamos uma interpretação combinatória para (4.9). Se tomarmos $k = j = 1$ em (4.27) temos o lado esquerdo de (4.9) o qual nos dá o Corolário (4.1.9).

Corolário 4.1.9. *O número de partições de n em que as partes verdes são distintas e as partes azuis são $\equiv \pm 2, \pm 3, \pm 4 \pmod{14}$ é igual ao número $f(n)$.*

Teorema 4.1.10. *Seja $f(n)$ o número de partições de n em partes pertencentes a $A_{k,j}$ da forma $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_s$, $\lambda_s \geq 2k$, $\lambda_t = c_t k + d_t j$, com $c_s \geq 2 + 2d_s$, e se λ_t e λ_{t+1} são partes consecutivas temos, $c_t \geq 1 + c_{t+1} + 2d_t$. Então*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{kn(n+3)}{2}} (-q^k; q^k)_n}{(q^{2k}; q^{2k})_n (q^{j+2k}; q^{2k})_n}. \quad (4.28)$$

Como um caso especial do Teorema (4.1.10) apresentamos uma interpretação combinatória para (4.10). Se tomarmos $k = j = 1$ em (4.28) multiplicada por $\frac{1}{1-q}$ temos o lado esquerdo de (4.10) o qual nos dá o Corolário (4.1.10).

Corolário 4.1.10. *O número de partições de N em que as partes verdes são distintas e as partes azuis são pares $\equiv \pm 2, \pm 6 \pmod{14}$ e as partes amarelas são ímpares $\equiv \pm 5 \pmod{14}$ é igual ao número $f(n)$.*

Teorema 4.1.11. *Seja $f(n)$ o número de partições de n em partes pertencentes a $A_{k,j}$ da forma $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_s$, $\lambda_s \geq 2k$, onde $\lambda_t = c_t k + d_t j$, com $c_s \equiv 0 \pmod{2}$ e $c_s \geq 2$, e se λ_t e λ_{t+1} são partes consecutivas temos, $c_t \geq 4 + c_{t+1} + 2d_{t+1}$. Então*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2kn^2}}{(q^{2k}; q^{2k})_n (q^j; q^{2k})_n}. \quad (4.29)$$

Como um caso especial do Teorema (4.1.11) apresentamos uma interpretação combinatória para (4.11). Se tomarmos $k = j = 1$ em (4.29) temos o lado esquerdo de (4.11) o qual nos dá o Corolário (4.1.11).

Corolário 4.1.11. *O número de partições de n em partes ímpares distintas $\equiv \pm 3 \pmod{8}$ e partes pares $\equiv \pm 2, 6 \pmod{8}$ é igual ao número $f(n)$.*

Teorema 4.1.12. *Seja $f(n)$ o número de partições de n em partes pertencentes a $A_{k,j}$ da forma $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_s$, $\lambda_s \geq 3k$, onde $\lambda_t = c_t k + d_t j$, com $c_s \equiv 1 \pmod{2}$ e $c_s \geq 3 + 2d_s$, e se λ_t e λ_{t+1} são partes consecutivas temos, $c_t \geq 4 + c_{t+1} + 2d_t$. Então*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2kn^2+kn}}{(q^{2k}; q^{2k})_n (q^{j+2k}; q^{2k})_n}. \quad (4.30)$$

Como um caso especial do Teorema (4.1.12) apresentamos uma interpretação combinatória para (4.12). Se tomarmos $k = j = 1$ em (4.30) multiplicada por $\frac{1}{1-q}$ temos o lado esquerdo de (4.12) o qual nos dá o Corolário (4.1.12).

Corolário 4.1.12. *O número de partições de N em partes ímpares distintas e partes pares $\not\equiv 0, \pm 4, 8 \pmod{16}$ é igual ao número $\sum_{n=0}^N f(n)$.*

Teorema 4.1.13. *Seja $f(n)$ o número de partições de n em partes pertencentes a $A_{k,j}$ da forma $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s$, $\lambda_s \geq 4k$, onde $\lambda_t = c_t k + d_t j$, com $c_s \equiv 0 \pmod{2}$ e $c_s \geq 4 + 2d_s$, e se λ_t e λ_{t+1} são partes consecutivas temos, $c_t \geq 4 + c_{t+1} + 2d_t$. Então*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2kn(n+1)}}{(q^{2k}; q^{2k})_n (q^{j+2k}; q^{2k})_n}. \quad (4.31)$$

Como um caso especial do Teorema (4.1.13) apresentamos uma interpretação combinatoria para (4.31). Se tomarmos $k = j = 1$ em (4.31) multiplicada por $\frac{1}{1-q}$ temos o lado esquerdo de (4.31) o qual nos dá o Corolário (4.1.13).

Corolário 4.1.13. *O número de partições de n em partes ímpares distintas $\equiv \pm 1 \pmod{8}$ e partes pares $\equiv \pm 2, 4 \pmod{8}$ é igual ao número $\sum_{n=0}^N f(n)$.*

Teorema 4.1.14. *Seja $f(n)$ o número de partições de n em partes pertencentes a $A_{k,j}$ da forma $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s$, $\lambda_s \geq 2k$, onde $\lambda_t = c_t k + d_t j$, com $c_s \equiv 0 \pmod{2}$ e $c_s \geq 2 + 2d_s$, e se λ_t e λ_{t+1} são partes consecutivas temos, $c_t \geq 2 + c_{t+1} + 2d_t$. Então*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{k(n^2+n)}}{(q^{2k}; q^{2k})_n (q^{j+2k}; q^{2k})_n}. \quad (4.32)$$

Como um caso especial do Teorema (4.1.14) apresentamos uma interpretação combinatoria para (4.32). Se tomarmos $k = j = 1$ em (4.32) temos multiplicada por $\frac{1}{1-q}$ o lado esquerdo de (4.32) o qual nos dá o Corolário (4.1.14).

Corolário 4.1.14. *O número de partições de N em partes ímpares $\equiv \pm 1, 5 \pmod{10}$ e partes pares $\equiv \pm 2, \pm 4 \pmod{10}$ onde as partes $\equiv \pm 2 \pmod{10}$ são distintas é igual ao número $\sum_{n=0}^N f(n)$.*

Teorema 4.1.15. *Seja $f(n)$ o número de partições de n em partes pertencentes a $A_{k,j}$ da forma $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s$, $\lambda_s \geq 3k$, onde $\lambda_t = c_t k + d_t j$, com $c_s \equiv 1 \pmod{2}$ e $c_s \geq 3 + 2d_s$, e se λ_t e λ_{t+1} são partes consecutivas temos, $c_t \geq 2 + c_{t+1} + 2d_t$. Então*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{k(n^2+n)+kn}}{(q^{2k}; q^{2k})_n (q^{j+2k}; q^{2k})_n}. \quad (4.33)$$

Como um caso especial do Teorema (4.1.15) apresentamos uma interpretação combinatoria para (4.33). Se tomarmos $k = j = 1$ em (4.33) multiplicada por $\frac{1}{1-q}$ temos o lado esquerdo de (4.33) o qual nos dá o Corolário (4.1.15).

Corolário 4.1.15. *O número de partições de N em partes ímpares $\equiv \pm 1, \pm 3, 5 \pmod{10}$ onde as partes $\equiv \pm 1 \pmod{10}$ são distintas e partes pares $\equiv \pm 2 \pmod{10}$ é igual ao número $\sum_{n=0}^N f(n)$.*

Teorema 4.1.16. *Seja $f(n)$ o número de partições de n em partes pertencentes a $A_{k,j}$ da forma $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_s$, $\lambda_t = c_t k + d_t j$, com $c_s \equiv 1 \pmod{2}$, e se λ_t e λ_{t+1} são partes consecutivas temos, $c_t \geq 2 + c_{t+1} + 2d_{t+1}$. Então*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{kn^2}}{(q^{2k}; q^{2k})_n (q^j; q^{2k})_n}. \quad (4.34)$$

Como um caso especial do Teorema (4.1.16) apresentamos uma interpretação combinatoria para (4.16). Se tomarmos $k = j = 1$ em (4.34) temos o lado esquerdo de (4.16) o qual nos dá o Corolário (4.1.16).

Corolário 4.1.16. *O número de partições de n em partes ímpares $\equiv \pm 1, \pm 3, \pm 4, 5 \pmod{10}$ onde as partes $\equiv \pm 3 \pmod{10}$ são distintas é igual ao número $f(n)$.*

Teorema 4.1.17. *Seja $f(n)$ o número de partições de n em partes pertencentes a $A_{k,j}$ da forma $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_s$, $\lambda_s \geq 2k$, $\lambda_t = c_t k + d_t j$, com $c_s \geq 2$ e $c_s \equiv 0 \pmod{2}$, e se λ_t e λ_{t+1} são partes consecutivas temos, $c_t \geq 2 + c_{t+1} + 2d_{t+1}$. Então*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{kn(n+1)}}{(q^{2k}; q^{2k})_n (q^j; q^{2k})_n}. \quad (4.35)$$

Como um caso especial do Teorema (4.1.17) apresentamos uma interpretação combinatoria para (4.17). Se tomarmos $k = j = 1$ em (4.35) temos o lado esquerdo de (4.17) o qual nos dá o Corolário (4.1.17).

Corolário 4.1.17. *O número de partições de n em partes $\equiv \pm 2, \pm 3, \pm 4, 5 \pmod{10}$ onde as partes $\equiv \pm 4 \pmod{10}$ são distintas é igual ao número $f(n)$.*

Teorema 4.1.18. *Seja $f(n)$ o número de partições de n em partes pertencentes a $A_{k,j}$ da forma $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_s$, $\lambda_t = c_t k + d_t j$, com $c_s \equiv 1, 2 \pmod{4}$ e $d_s \equiv 0 \pmod{2}$, e se λ_t e λ_{t+1} são partes consecutivas temos,*

$$\bullet \text{ Se } \begin{cases} c_{t+1} \equiv 0 \pmod{4} & \text{então} & c_t \equiv 3 + \ell \pmod{4} \\ c_{t+1} \equiv 2 \pmod{4} & \text{então} & c_t \equiv 1 + \ell \pmod{4} \end{cases}$$

onde $c_t \geq 1 + c_{t+1} + 2d_{t+1} + 2 + \ell$, com $\ell = 0, 1$

- Se $\begin{cases} c_{t+1} \equiv 1 \pmod{4} & \text{então} & c_t \equiv 3+i \pmod{4} \\ c_{t+1} \equiv 3 \pmod{4} & \text{então} & c_t \equiv 1+i \pmod{4} \end{cases}$
onde $c_t \geq 1 + c_{t+1} + 2d_{t+1} + 2 + i$, com $i = 0, 1$

Então

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{kn^2}(-q^k; q^{2k})_n}{(q^{4k}; q^{4k})_n(q^{2j}; q^{4k})_n}. \quad (4.36)$$

Como um caso especial do Teorema (4.1.18) apresentamos uma interpretação combinatoria para (4.18). Se tomarmos $k = j = 1$ em (4.36) temos o lado esquerdo de (4.18) o qual nos dá o Corolário (4.1.18).

Corolário 4.1.18. *O número de partições de n em partes ímpares distintas $\not\equiv \pm 3 \pmod{14}$ e partes pares $\not\equiv 0, \pm 6, \pm 8 \pmod{28}$ é igual ao número $f(n)$.*

CAPÍTULO 5

Outra Interpretação para Partições Irrestritas

Neste capítulo destacamos o fato de que o que foi feito para muitas das identidades de Slater também pode ser aplicado para outras somas onde são introduzidos mais do que dois parâmetros. No que segue apresentamos um resultado de Santos e Mondek, dado em [12], que fornece, dentre várias especializações, uma interpretação alternativa para partições irrestritas. Posteriormente mostramos que o nosso método permite interpretações de natureza distinta fornecendo, como um corolário, outra interpretação para partições irrestritas. Definindo

$$M_0 = \{1_1, 2_1, 2_2, 3_1, 3_2, 3_3, 4_1, 4_2, 4_3, 4_4, \dots\}$$

e para $j, k, \ell \geq 1$, $2\ell \equiv 0 \pmod{k}$ e $i \leq 2(\ell - 1)$,

$$A_{i,j,k,\ell} = \{(a_k + r_j + 2\ell - i - 1)_{r_j+2\ell-i-1} \in M_0 \mid a, r, \geq 0\}.$$

Santos e Mondek provaram o seguinte:

Teorema 5.1. [12] *Seja $f(n)$ o número de partições de n em partes distintas pertencentes a $A_{i,j,k,\ell}$ tais que quando $\alpha = (a_k + r_j + 2\ell - i - 1)_{r_j+2\ell-i-1}$ e $\beta = (b_k + s_j + 2\ell - i - 1)_{s_j+2\ell-i-1}$ são partes consecutivas, $\alpha > \beta$, $ak \geq (b + s)k + 2\ell$. Então*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\ell n^2 + (\ell-i-1)n}}{(q^j; q^k)_n (q^k; q^k)_n}. \quad (5.1)$$

No caso $\ell = k$ e $i = 2k - j - 1$ se obtem o seguinte corolário quando fazemos $j = k = 1$, Teorema 8 em [12].

“O número de partições de n , $p(n)$, é igual ao número de partições de n com partes em M_0 tais que se A_r e B_s são partes consecutivas, $A > B$, então $A > B + r$ ”.

Aplicando, na soma (5.1), o mesmo procedimento que nos levou à obtenção dos teoremas anteriores obtemos, neste caso, o seguinte resultado:

Considerando o seguinte conjunto $A_{k,j,\ell} = \{bk + cj + d\ell\}$.

Teorema 5.2. *Seja $f(n)$ o número de partições de n em partes pertencentes a $A_{k,j,\ell}$ da forma $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s$, onde $\lambda_t = b_t k + c_t j + d_t \ell$, com $\lambda_s = \mathcal{M} + b_s + kc_j$ com $\mathcal{M} = 2\ell - i - 1$, se λ_t e λ_{t+1} são partes consecutivas, temos $b_{t+1} \geq c_{t+1} + b_{t+1}$ e $d_t = d_{t+1} + 2$. Então*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\ell n^2 + (\ell - i - 1)n}}{(q^j; q^k)_n (q^k; q^k)_n}. \quad (5.2)$$

Este Teorema nos fornece para o caso $l = k$ e $i = 2k - j - 1$ a mesma equação (4.1) de [12] dada abaixo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{kn^2 + (j-k)n}}{(q^j; q^k)_n (q^k; q^k)_n} = \frac{1}{(q^j; q^k)_{\infty}}.$$

Da qual, agora, se tem a seguinte leitura no caso $j=k=1$.

Teorema 5.3. *O número de partições irrestritas de n é igual ao número de partições da forma $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s$ onde $\lambda_t = n_t k + m_t j + r_t \ell$, onde $r_{s-i} = 1 + 2i$ e se λ_t e λ_{t+1} são partes consecutivas então $n_t \geq n_{t+1} + m_{t+1}$.*

A Tabela abaixo ilustra na primeira coluna as partições irrestritas de $n = 6$, na segunda coluna, as partições de $n = 6$ obtidas pelo trabalho de Santos e Mondek em [12] e na terceira coluna as partições de $n = 6$ dadas pelo nosso método.

$p(6)$	$c(6)$	$D(6)$
6	6_1	$6j$
5+1	6_2	$(k+5j)$
4+2	6_3	$(2k+4j)$
4+1+1	6_4	$(3k+3j)$
3+3	6_5	$(4k+2j)$
3+2+1	6_6	$(5k+j)$
3+1+1+1	$5_3 + 1_1$	$(2k+3j)+(j)$
2+2+2	$5_2 + 1_1$	$(k+4j)+(j)$
2+2+1+1	$5_1 + 1_1$	$(5j)+(j)$
2+1+1+1+1	$4_1 + 2_1$	$(k+3j)+(k+j)$
1+1+1+1+1+1	$4_1 + 2_2$	$(k+3j)+(2j)$

5.1 Conclusões finais

Neste trabalho, ora encerrado, apresentamos um método para obtermos famílias de funções geradoras, que para certos valores particulares dos parâmetros nos fornecem interpretações combinatórias para identidades de Slater [16], ou mesmo outras identidades que não são apresentadas em [16]. Este método pode, em princípio, ser aplicado a qualquer identidade do tipo Rogers-Ramanujan, isto é, uma identidade que apresenta de um lado uma série e do outro um produto infinito.

5.2 Perspectivas de trabalhos futuros

- Dentro destas famílias de funções geradoras, para especializações dos parâmetros, fornecer bijeções entre o conjunto de partições fornecido pelo nosso método e as interpretações combinatórias já conhecidas.
- Fazer ligações entre as partições obtidas pelo nosso método e partições planas.
- Aplicar este método a outras identidades importantes, a fim de obtermos outras interpretações combinatórias para as mesmas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Andrews, G.E., *The theory of partitions* - Encyclopedia of Mathematics and Its Applications (Rota, Editor), Vol. 2, G.-C., Addison-Wesley, Reading, 1976.
- [2] Andrews, G.E., *Applications of basic hypergeometric functions* - SIAM Review 16 (4), 1974.
- [3] Andrews, G.E., *Partitions: yesterday and today* - New Zealand Math. Soc., Wellington, 1979.
- [4] Andrews, G.E., *Multiple series Rogers-Ramanujan type identities* - Pacific J. Math. 114 (1984), 267-283.
- [5] Andrews, G.E., *q-series: their development and application in Analysis, Number Theory, Combinatorics, Physics and Computer Algebra*, CBMS Regional Conference Series in Math., Am. Math. Soc., Providence R. I., nº 66, p. 87-93, 1986.
- [6] Andrews, G.E., *Combinatorics and Ramanujan's "lost" notebook*, London Math. Soc. Lecture Note Series, nº 103, p. 1-23, Cambridge University Press, London, 1985.
- [7] Bressound, D. M., *A New Family of Partitions Identities*, Pacific Journal of Mathematics, vol. 77, nº1, 1978.
- [8] Bressound, D. M., Santos, J.P.O., Mondek, P., *A family of Partition Identities Proved Combinatorialy*, The Ramanujan Journal 4, p. 311-315, 2000.

-
- [9] MacMahon, A.P., *Combinatory Analysis*, vol. 2, Cambridge University Press, London, 1918.
- [10] Santos, J.P.O., *Computer Algebra and identities of the Rogers-Ramanujan type*, Ph. D. Thesis, Pennsylvania State University, 1991.
- [11] Santos, J.P.O., Mondek, P., *Extending Theorems of Gollnitz, A New family of Partitions Identities*, The Ramanujan Journal 3, p. 359-365, 1999.
- [12] Santos, J.P.O., Mondek, P., *A family of partitions with attached parts and “N copies of N”*, Discrete Mathematics 222, p. 213-222, 2000.
- [13] Santos, J.P.O., *On the combinatorics of polynomial generalizations of Rogers-Ramanujan-type identities*, Discrete Mathematics 254, p. 497-511, 2002.
- [14] Santos, J.P.O., Ivkovic, M., *Fibonacci Numbers and Partitions*, The Fibonacci Quartely 41, p. 263-278, 2003.
- [15] Santos, J.P.O., Sills, A. V., *q-Pell sequences and two identities of V.A. Lebesgue*, Discrete Mathematics 257, p. 125-142, 2002.
- [16] Slater, L.J., *Further identities of the Rogers-Ramanujan type*, Proc. London Math. Soc. (2) 54(1952), pp. 147-167.
- [17] Sills, A. V., *Identities of the Rogers-Ramanujan-Slater type*, International Journal of Number Theory, to appear.