UNICAMP

Maria Angélica Araujo

Aproximação de funções contínuas e de funções diferenciáveis

CAMPINAS
2014

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

MARIA ANGÉLICA ARAUJO

APROXIMAÇÃO DE FUNÇÕES CONTÍNUAS E DE FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra em matemática.

Orientador: Jorge Tulio Mujica Ascui

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELA ALUNA MARIA ANGÉLICA ARAUJO, E ORIENTADA PELO PROF. DR. JORGE TULIO MUJICA ASCUI .

Assinatura do Orientador

CAMPINAS
2014

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

Araujo, Maria Angélica, 1990-
Ar15a Aproximação de funções contínuas e de funções diferenciáveis / Maria Angélica Araujo. – Campinas, SP : [s.n.], 2014.

Orientador: Jorge Tulio Mujica Ascui.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Funções contínuas. 2. Funções diferenciais. 3. Teoria da aproximação. I. Mujica Ascui, Jorge Tulio,1946-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Approximation of continuous functions and of differentiable functions
Palavras-chave em inglês:
Continuous functions
Differentiable functions
Approximation theory
Área de concentração: Matemática
Titulação: Mestra em Matemática
Banca examinadora:
Jorge Tulio Mujica Ascui [Orientador]
Ary Orozimbo Chiacchio
Vinícius Vieira Fávaro
Data de defesa: 13-06-2014
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 13 de junho de 2014 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof.(a). Dr(a). JORGE TULIO MUJICA ASCUI

Prof.(a). Dr(a). ARY OROZIMBO CHIACCHIO

Prof.(a). Dr(a). VINÍCIUS VIEIRA FÁVARO

Abstract

The aim of this dissertation is to present and prove some theorems of mathematical analysis, that are, the Weierstrass Approximation Theorem, the Kakutani-Stone Theorem, the Stone-Weierstrass Theorems and the Nachbin Theorem. To prove them we recall some basic definitions and results of analysis and topology and we discuss other tools that are necessary for their respective proofs.

Keywords: continuous functions, approximation, dense subalgebras, closure of a lattice, closure of a subalgebra, functions of class C^k.

Resumo

O objetivo desta dissertação é apresentar e demonstrar alguns teoremas da Análise matemática, são eles, O Teorema de Aproximação de Weierstrass, o Teorema de Kakutani-Stone, os Teoremas de Stone-Weierstrass e o Teorema de Nachbin. Para demonstrá-los relembraremos algumas definições e resultados básicos da teoria de Análise e Topologia e abordaremos as demais ferramentas necessárias para suas respectivas demonstrações.

Palavras-chave: funções contínuas, aproximação, subálgebras densas, aderência de um reticulado, aderência de uma subálgebra, funções de classe C^k .

Sumário

Dedico este trabalho às pessoas mais importantes da minha vida, aos meus pais Roberto e Marlene, às minhas irmãs Bruna e Carol e ao meu namorado Daniel, que incondicionalmente me apoiaram e carinhosamente me ajudaram a prosseguir nos meus estudos.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pela vida e por todas as oportunidades a mim concedidas, e a minha família, que mesmo distante me apoiou e me deu forças para continuar.

Agradeço também ao meu namorado Daniel por todo amor, carinho e incetivo em prosseguir nos meus estudos de pós-graduação. Sua paciência e seus ensinamentos foram essenciais para eu chegar até aqui.

Ao meu orientador Prof. Dr. Jorge Túlio Mujica Ascui por toda paciência e apoio ao longo dessa jornada, certamente, um dos grandes responsáveis por esta conquista, agradeço imensamente.

Agradeço aos meus professores do mestrado, especialmente a Ricardo Miranda Martins e Olivaine Santana de Queiroz pela força, paciência e compreensão ao longo do curso.

Aos meus amigos, àqueles que mesmo distantes estiveram comigo, me incentivando e torcendo por mim. E os que estiveram por perto, agradeço pelo companherismo e pelo carinho.

Finalmente, agradeço ao CNPq pelo auxílio financeiro.

Introdução

A Análise Funcional é um ramo relativamente novo da matemática, tendo surgido nas décadas iníciais do século XX e, em essência, é a base teórica que nos permite resolver vários problemas, nas mais variadas áreas, tais como, equações funcionais, problemas da física-matemática e teoria de aproximação. O objetivo deste trabalho é apresentar alguns teoremas centrais da Análise Funcional, a saber: O Teorema de Aproximação de Weierstrass, o Teorema de Kakutani-Stone, os Teoremas de Stone-Weierstrass e o Teorema de Nachbin. Esses Teoremas contribuiram para dar origem a uma nova área da Análise conhecida como Teoria da Aproximação, cuja preocupação é descrever os elementos de um espaço topológico X que podem ser aproximados por elementos de um subconjunto A de X.

No Capítulo 1, relembraremos alguns resultados e definições básicos de Topologia e Análise que utilizaremos nos capítulos posteriores. Como este capítulo tem como finalidade apenas recordar tais conceitos, não provaremos nenhum resultado. Assim, se o leitor julgar necessário, sugerimos consultar a bibliografia que indicaremos em cada seção.

No capítulo 2 apresentaremos e demonstraremos o Teorema de Aproximação de Weierstrass, que nos diz que toda função contínua $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ pode ser uniformemente aproximada por uma sequência de polinômios em $[0,1]$ com coeficientes reais. Este teorema foi provado pela primeira vez por Karl Weierstrass em 1885. Existem algumas formas diferentes de prová-lo, a que faremos utiliza os chamados polinômios de Bernstein. Terminamos o capítulo mostrando um teorema de aproximação de Weierstrass para funções de classe C^k, definidas em um aberto do $\mathbb{R}^n$.

No capítulo 3, passaremos a trabalhar com o espaço $C(X,\mathbb{K})$ formados por todas as funções contínuas de X em $\mathbb{K}$, onde X representa um espaço topológico e $\mathbb{K}$ o corpo dos números reais ou complexos. Nosso objetivo é buscar subálgebras de $C(X,\mathbb{K})$ que sejam densas em $C(X,\mathbb{K})$. Nesse sentido, veremos que quando se trata de uma subálgebra A de $C(X,\mathbb{K})$ que separa pontos de X, contém as funções constantes, e no caso de $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ satisfizer que $\overline{f} \in A$ para toda $f \in A$, então teremos que A será densa em $C(X,\mathbb{K})$. Esse resultado é conhecido como o Teorema de Stone-Weierstrass e foi provado por Marshall Harvey Stone em 1937.

No capítulo 4, apresentaremos um resultado muito importante que será usado no capítulo seguinte, o Teorema de Kakutani-Stone. Este teorema nos dá uma caracterização do fecho de um subreticulado de $C(X,\mathbb{R})$.

De maneira análoga ao capítulo anterior, o objetivo do capítulo 5 é apresentar uma caracterização do fecho de uma subálgebra de $C(X,K)$. Na maioria destes resultados, consideraremos X primeiro como sendo um espaço topológico compacto e depois generalizaremos, considerando X como sendo um espaço topológico qualquer.

Finalizaremos a dissertação apresentando e demonstrando um teorema que pode ser considerado uma versão do Teorema de Stone-Weierstrass para funções diferenciáveis, o Teorema de Nachbin. Para demonstrá-lo, usamos o Teorema da Aplicação Aberta, o Teorema de Aproximação de Weierstrass para funções de classe C^k, além de alguns resultados que serão demonstrados ao longo do capítulo.

Capítulo 1

Definições e resultados preparatórios

Neste capítulo apresentaremos conceitos, notações e resultados básicos que serão utilizados ao longo deste trabalho. Como seu objetivo não é ser um texto introdutório, sempre que acharmos necessário indicaremos uma bibliografia onde se possa obter uma abordagem mais precisa.

1.1 Espaços Topológicos

Nesta seção relembraremos algumas definições e resultados básicos da Topologia Geral. Para uma leitura mais detalhada sugerimos [10], [14] e [25].

Definição 1.1. Uma **topologia** em um conjunto X é uma coleção τ de subconjuntos de X, chamados de subconjuntos abertos, satisfazendo as seguintes condições:

(i) a reunião de uma família qualquer de subconjuntos abertos é um subconjunto aberto.

(ii) a interseção de uma família finita de subconjuntos abertos é um subconjunto aberto.

(iii) X e o conjunto vazio, $\emptyset$, são abertos.

Dizemos que (X, τ) é um **espaço topológico** se X é um conjunto e τ é uma topologia em X. Frequentemente se diz apenas "o espaço topológico X ", mencionando τ somente quando for necessário, para evitar ambiguidades.

Definição 1.2. Se X é um espaço topológico e $x \in X$, uma **vizinhança de** x é um conjunto U que contém um conjunto aberto V, que por sua vez contém x.

Definição 1.3. Seja x um elemento de um espaço topológico X. A coleção de todas as vizinhanças de x em X, denotada por U_x, é denominada **sistema de vizinhanças de** x.

Definição 1.4. Uma **base de vizinhanças** de x em um espaço topológico X é uma coleção $B_x \subseteq U_x$ com a propriedade que cada $U \in U_x$ contém algum $V \in B_x$. Isto é, U_x deve ser determinado por B_x como segue:

$$U_x = \{U \subseteq X \colon V \subseteq U \text{ para algum } V \in B_x\}.$$

Definição 1.5. Seja (X, τ) um espaço topológico. Uma coleção $\mathcal{B} \subseteq \tau$ é uma **base** para τ se dado $U \in \tau$, existe $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ tal que

$$U = \bigcup_{V \in \mathcal{C}} V.$$

Definição 1.6. Seja (X, τ) um espaço topológico. Uma coleção $\mathcal{C} \subseteq \tau$ é uma **sub-base** para τ se as interseções finitas de membros de $\mathcal{C}$ formam uma base para τ.

Seja X um conjunto não vazio, e seja $\mathcal{C}$ uma coleção de subconjuntos de X cuja união é X. Então as interseções finitas de membros de $\mathcal{C}$ formam uma base $\mathcal{B}$ para uma topologia τ em X.

Definição 1.7. Se X é um espaço topológico e $E \subseteq X$, dizemos que E é **fechado** se $X - E$ é aberto.

Definição 1.8. Se X é um espaço topológico e $E \subseteq X$, **o fecho de E em X** é o conjunto

$$\overline{E} = \bigcap \{K \subseteq X \colon K \text{ é fechado e } E \subseteq K\}.$$

Mostra-se que o fecho de um conjunto E é um conjunto fechado e que é o menor fechado que contém E.

Proposição 1.9. Sejam X um espaço topológico e A e B subconjuntos de X. Se $A \subseteq B$, então $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

A seguir apresentamos um resultado que não é válido em espaços topológicos quaisquer, por isso vamos particularizá-lo para espaços métricos:

Proposição 1.10. Sejam X um espaço métrico e E um subconjunto de X. Então $x \in \overline{E}$ se, e somente se, existe uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em E tal que $x_n \to x$.

Definição 1.11. Seja $f \colon X \longrightarrow Y$, sendo X e Y espaços topológicos. Dizemos que f é **contínua em** $a \in X$ se para cada aberto V de Y contendo $f(a)$, existe um aberto U de X contendo a tal que $f(U) \subseteq V$. Dizemos que f é **contínua** se for contínua em cada ponto de X.

Proposição 1.12. Sejam X, Y espaços topológicos e A um subconjunto de X. Se $f \colon X \longrightarrow Y$ é contínua, então a restrição de f a A, definida por $f|_A \colon A \longrightarrow Y$, $f|_A(x) = f(x)$, também é contínua.

Definição 1.13. Um subconjunto A de um espaço topológico X é **denso** em X se $\overline{A} = X$.

Definição 1.14. Um espaço topológico X é de **Hausdorff** se para todos $x, y \in X$ tais que $x \neq y$, existem vizinhanças U e V de x e y, respectivamente, tais que $U \cap V = \emptyset$.

1.2 Conjuntos Compactos

Esta seção tem como objetivo relembrar algumas definições relativas a espaços compactos bem como citar alguns resultados envolvendo esse tipo de espaço. Para uma consulta mais profunda indicamos [10].

Definição 1.15. Seja X um espaço topológico e S um subconjunto de X. Uma **cobertura** de S é uma família $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in I}$ de subconjuntos de X tal que

$$S \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i.$$

Dizemos que uma cobertura $\mathcal{A}$ é aberta se os conjuntos A_i são abertos para todo $i \in I$.

Definição 1.16. Dizemos que um espaço topológico X é **compacto** se toda cobertura aberta de X admite subcobertura finita.

Exemplo 1.17. Todo subconjunto fechado e limitado da reta é compacto. Em particular, $[0, 1]$ é compacto.

Teorema 1.18. Toda função contínua $f \colon K \longrightarrow \mathbb{R}$, definida em um espaço compacto K é limitada e atinge os seus extremos nesse compacto.

Teorema 1.19. Seja $K \subseteq \mathbb{R}$ compacto. Toda função contínua $f \colon K \longrightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente contínua.

Definição 1.20. Diremos que um espaço topológico X é **localmente compacto** se cada $x \in X$ admite uma base de vizinhanças compactas.

Proposição 1.21. Um espaço de Hausdorff X é localmente compacto se e somente se, cada $x \in X$ tem pelo menos uma vizinhança compacta.

Definição 1.22. Sejam X um espaço topológico e Y um subconjunto de X. Diremos que Y é um subconjunto **relativamente compacto** de X se $\overline{Y}$ é um subconjunto compacto de X.

Definição 1.23. Seja $f \colon X \longrightarrow V$ uma função definida de um espaço topológico X num espaço vetorial V. Definimos o **suporte de** f por

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in X \colon f(x) \neq 0\}}.$$

Notação 1.24. Considere $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e $V = \mathbb{R}$. Denotamos por $C^k(\Omega, \mathbb{R})$, ou simplesmente $C^k(\Omega)$, o conjunto de todas as funções contínuas definidas de Ω em $\mathbb{R}$ e que admitem derivadas parciais até ordem k contínuas. Denotaremos, também, por $C^k_{00}(\Omega)$ o conjunto de todas as funções $f \in C^k(\Omega)$ tal que $\operatorname{supp}(f)$ é compacto. Dessa forma, $C^\infty(\Omega)$ representa o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis de Ω em $\mathbb{R}$ e $C^\infty_{00}(\Omega)$ o subconjunto de $C^\infty(\Omega)$ cujas funções têm suporte compacto.

1.3 A topologia compacto-aberta

Nesta seção definiremos duas topologias em subespaços do espaço de todas as funções de X em Y, onde X e Y são espaços topológicos, e exibiremos um teorema que utilizaremos no decorrer da dissertação. Para uma leitura mais detalhada indicamos [3], [7] e [18].

Definição 1.25. Lembremos que a topologia da convergência pontual no espaço $C(X,Y)$ de todas as funções contínuas do espaço topológico X no espaço topológico Y, é a topologia que tem como sub-base os conjuntos da forma

$$M(A,U)=\{f\in C(X,Y)\colon f(A)\subseteq U\}$$

para $A\subseteq X$ finito e U aberto em Y, ou seja, essa topologia tem como base todas interseções finitas de conjuntos dessa forma.

A topologia **compacto-aberta** em $C(X,Y)$ é a topologia gerada pela base consistindo de todos os conjuntos

$$\bigcap_{i=1}^{k} M(C_i,U_i)$$

onde C_i é um subconjunto compacto de X e U_i é um subconjunto aberto de Y, para $i=1,\ldots,k$.

Agora definiremos uma outra topologia em $C(X,Y)$, considerado Y como sendo um espaço métrico e veremos uma relação entre essa topologia e a topologia compacto-aberta.

Definição 1.26. Sejam (Y,d) um espaço métrico e X um espaço topológico. Dados um elemento $f\in C(X,Y)$, $\varepsilon>0$ e K compacto em X, seja

$$M(K,f,\varepsilon)=\{g\in C(X,Y)\colon \sup\{d(f(x),g(x))\colon x\in K\}<\varepsilon\}.$$

A topologia em $C(X,Y)$ para a qual os conjuntos $M(K,f,\varepsilon)$ formam uma base é chamada **topologia da convergência compacta** ou **topologia da convergência uniforme nos compactos**.

Proposição 1.27. Uma sequência $f_n\colon X\longrightarrow Y$ converge para f na topologia da convergência compacta se, e somente se, para cada compacto K de X, a sequência $f_n|_K$ converge uniformemente para $f|_K$.

Teorema 1.28. Sejam X um espaço topológico e (Y,d) um espaço métrico. Então em $C(X,Y)$ a topologia compacto-aberta e a topologia da convergência compacta coincidem.

1.4 O espaço $C(X)$

Seja K um espaço topológico compacto. Denotaremos por $C(K,\mathbb{R})$ e por $C(K,\mathbb{C})$, os espaços de Banach das funções $f\colon K\longrightarrow\mathbb{R}$ e $f\colon K\longrightarrow\mathbb{C}$, respectivamente, com a norma

$$\|f\|_\infty=\sup\{|f(x)|\colon x\in K\}.$$

Notemos que $C(K,\mathbb{R})$ é um espaço vetorial real e $C(K,\mathbb{C})$ é um espaço vetorial complexo. Quando não houver perigo de ambiguidades escreveremos apenas $C(K)$ e nesse caso o corpo dos escalares será denotado por $\mathbb{K}$, ou seja, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

Quando $K=[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ escrevemos $C[a,b]$ ao invés de $C([a,b])$.

Agora, seja X um espaço topológico qualquer. De modo análogo ao que fizemos acima, denotaremos por $C(X)$, o espaço de todas as funções contínuas definidas de X em $\mathbb{K}$. Assim, neste caso consideraremos em $C(X)$ a topologia compacto-aberta que, como vimos, coicide com a topologia da convergência compacta.

Agora, se $f\in C^k(\Omega)$ e K é um subconjunto de Ω definimos

$$\|f\|_k^K=\sum_{|\alpha|\leqslant k}\frac{1}{\alpha!}\sup_{x\in K}|D^\alpha f(x)|,$$

onde temos que, se $\alpha\in\mathbb{N}^n, \alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$:

$$|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n,$$

$$\alpha!=\alpha_1!\dots!\,\alpha_n!\,,$$

$$D^\alpha f(x)=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\dots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}f(x)=\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}f(x).$$

Assim, em $C^k(\Omega)$, k finito, consideraremos a topologia da convergência uniforme das funções e suas derivadas parciais até ordem k, sobre os conjuntos compactos de Ω, ou seja, um fundamental sistema de vizinhanças de $g\in C^k(\Omega)$ é dado pelos conjuntos

$$B(K,g,\varepsilon)=\{f\in C^k(\Omega)\colon\|f-g\|_k^K<\varepsilon\}$$

onde ε é um número real positivo e K um subconjunto compacto de Ω.

1.5 Definição de Álgebra

Ao longo desta dissertação trabalharemos com uma estrutura bastante importante, que são as álgebras, portanto, vejamos sua definição:

Definição 1.29. Uma **álgebra** A é um espaço vetorial com uma multiplicação definida que satisfaz as seguintes condições:

(i) $a(bc)=(ab)c$,

(ii) $a(b+c)=ab+ac$,

(iii) $(a+b)c=ac+bc$,

(iv) $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$

para todos a, b e $c \in A$ e para todo escalar λ.

Exemplo 1.30. $C(X)$ é uma álgebra.

Definição 1.31. Um subconjunto A de $C(X)$ é uma **subálgebra** se toda vez que tivermos $f, g \in A$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ implicar que $f + g$, $f.g$ e λf estão todas em A.

Exemplo 1.32. O conjunto de todos os polinômios em $[0, 1]$ com coeficientes reais é uma subálgebra de $C[0, 1]$.

Definição 1.33. Seja A uma subálgebra de $C(X)$. Dizemos que A **separa pontos de** X se para todos $x, y \in X$, $x \neq y$, existe uma função $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

1.6 O Teorema da Aplicação Inversa

O Teorema da Aplicação Inversa é um resultado muito importante que usaremos diretamente na demonstração do Teorema de Nachbin, no capítulo 6. Este Teorema trata da possibilidade de invertermos uma função diferenciável, mesmo que localmente, e nos fala das propriedades de diferenciabilidade da inversa. Como não é o objetivo central deste trabalho, não apresentaremos sua demonstração, mas a mesma pode ser encontrada em [9] ou em [21].

Teorema 1.34. (Teorema da Aplicação Inversa) Suponha $f \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciável em um conjunto aberto contendo a, e $\det f'(a) \neq 0$. Então existe um conjunto aberto V contendo a e um aberto W contendo $f(a)$ tal que $f \colon V \longrightarrow W$ tem uma inversa contínua $f^{-1} \colon W \longrightarrow V$ que é diferenciável e para todo $y \in W$ satisfaz

$$(f^{-1})'(y) = [f'(f^{-1}(y))]^{-1}.$$

1.7 Convolução de duas funções

Nesta seção veremos a definição de convolução de duas funções e algumas de suas propriedades. Utilizaremos estes resultados no capítulo 2, na demonstração do Teorema de Aproximação de Weierstrass para funções diferenciáveis.

Definição 1.35. Seja X um espaço de medida com uma medida positiva μ. Se $0 < p < \infty$ e se f é uma função complexa mensurável em X, defina

$$\|f\|_p = \left\{ \int_X |f|^p d\mu \right\}^{\frac{1}{p}}$$

e seja $L^p(\mu)$ o conjunto de todas f tais que

$$\|f\|< \infty.$$

Chamamos $\|f\|_p$ de **p-norma** de f.

Se μ é a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$, escrevemos $L^p(\mathbb{R}^n)$ ao invés de $L^p(\mu)$.

Definição 1.36. Sejam $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ e defina a seguinte função

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy.$$

Dizemos que a função h, é a **convolução de** f **e** g e escrevemos $h = f * g$.

A definição de convolução de f e g está justificada pelo teorema seguinte, cuja demonstração pode ser encontrada em [19].

Teorema 1.37. Sejam $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Então

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)g(y)|dy < \infty$$

para quase todo x. Se h é a convolução de f e g, ou seja, $h = f * g$, então,

$$h \in L^1(\mathbb{R})$$

e,

$$\|h\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1,$$

onde,

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx.$$

A convolução de f e g goza das seguintes propriedades:

(1) Comutatividade:
$$f(x) * g(x) = g(x) * f(x)$$
ou seja,
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy.$$

(2) Associatividade:
$$f(x)(g(x) * h(x)) = (f(x) * g(x)) * h(x).$$

(3) Distributividade em relação a adição:
$$f(x) * (g(x) + h(x)) = f(x) * g(x) + f(x) * h(x).$$

Observação 1.38. A definição de convolução de duas funções $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ é análoga ao caso que $f, g \in L^1(\mathbb{R}^1)$. Mostra-se também que todas as propriedades acima são satisfeitas.

No capítulo seguinte utilizaremos diretamente a propriedade comutativa para funções definidas em $\mathbb{R}^n$, ou seja, se $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy.$$

Capítulo 2

O Teorema de Aproximação de Weierstrass

Neste capítulo apresentaremos o Teorema de Aproximação de Weierstrass [24], que nos diz que toda função contínua definida no intervalo $[0,1]$ tomando valores reais, pode ser uniformemente aproximada por uma sequência de polinômios definidos em $[0,1]$. Veremos também uma versão desse teorema para funções de classe C^k, definidas em um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$, tomando valores reais.

Começaremos apresentando o Teorema de aproximação de Weierstrass para funções contínuas. A primeira prova para este teorema foi dada por Karl Weierstrass em 1885, por isso ficou conhecido como Teorema de Aproximação de Weierstrass. Existem várias maneiras de demonstrá-lo; aqui faremos uma demonstração que foi proposta pelo russo Sergey Natanovich Bernstein [1], em 1911. Nesta prova, Bernstein apresenta um algoritmo preciso de como aproximar funções contínuas usando uma classe de polinômios, que ficaram conhecidos mais tarde como polinômios de Bernstein. O que faremos na verdade, será mostrar que os polinômios de Bernstein de uma função f convergem para a própria função f. A prova que daremos é baseada em [4, pags. 229-231], mas também pode ser encontrada em [26]. Uma prova alternativa, usando polinômios trigonométricos pode ser encontrada em [8, seção 4.11] ou em [11, pags. 9-22].

Definição 2.1. O ***n*-ésimo polinômio de Bernstein** da função $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ é definido por

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}. \tag{2.1}$$

Notemos que o n-ésimo polinômio de Bernstein depende apenas dos valores da função f nos $n+1$ pontos $0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n+1}{n}, 1$. Vejamos também que o polinômio B_n se relaciona com o binômio de Newton da seguinte maneira

$$(x+(1-x))^n = 1 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}. \tag{2.2}$$

Assim, podemos dizer que B_n no ponto x é uma média ponderada dos valores de f nos $n+1$ pontos citados acima, cujos respectivos pesos são $\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$.

Teorema 2.2. (**Teorema de Aproximação de Weierstrass para funções contínuas**) Seja $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então existe uma sequência (P_n) de polinômios que converge uniformemente para f em $[0,1]$.

Para demonstrarmos este teorema precisaremos de um lema auxiliar.

Lema 2.3. Para qualquer n inteiro positivo temos

$$\frac{x}{n}(1-x) = \sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}. \tag{2.3}$$

Demonstração. Sabemos que para $x, y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \tag{2.4}$$

Derivando (2.4) em relação a x obtemos

$$n\,(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1} y^{n-k} \tag{2.5}$$

Multiplicando por x, temos que

$$nx\,(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^{k} y^{n-k}. \tag{2.6}$$

Derivando (2.5) novamente em relação a x, obtemos:

$$n(n-1)\,(x+y)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) x^{k-2} y^{n-k}$$

Multiplicando por x^2 em ambos os lados da igualdade ficamos com

$$n(n-1)x^2\,(x+y)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) x^{k} y^{n-k}. \tag{2.7}$$

Agora, fazendo $y = 1-x$ em (2.4), (2.6) e (2.7), temos

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$nx = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^k (1-x)^{n-k}$$

$$n(n-1)x^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k^2-k) x^k (1-x)^{n-k}.$$

Somando estas duas últimas equações, obtemos

$$nx + n(n-1)x^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Desenvolvendo o quadrado que aparece no somatório em (2.3) temos que

$$\sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n} x^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2xk}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= x^2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - \frac{2x}{n} \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= x^2 - \frac{2x}{n} nx + \frac{1}{n^2}(nx + n(n-1)x^2) \\
&= \frac{x(1-x)}{n}.
\end{aligned}$$

□

Demonstraremos agora o Teorema de Aproximação de Weierstrass para funções contínuas definidas em [0,1].

Demonstração. De (2.1) e (2.2) podemos escrever

$$f(x) - B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}. \tag{2.8}$$

Para obtermos uma estimativa da expressão em (2.8), a ideia informal é dividir o somatório em duas partes, uma para os k's tais que $\frac{k}{n}$ esteja "perto" de x, onde exploramos a continuidade da função f. Na outra, para os k's restantes, utilizamos o fato de que a soma dos pesos correspondentes a esses k's é pequena. Escrevendo de uma maneira mais formal, seja $\varepsilon > 0$, pelo Teorema 1.19 segue que existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, se $x, y \in [0,1]$ e $|x - y| < \delta$.

Agora, segue do Teorema 1.18 que toda função contínua definida num compacto assume seu máximo e seu mínimo neste compacto. Então, sejam M o máximo da função $|f|$ em $[0,1]$ e N um inteiro positivo tal que

$$\mathrm{N} > \text{máx}\left\{ \frac{1}{\delta^4}, \frac{M^2}{\varepsilon^2} \right\}.$$

Agora, fixamos $x \in [0,1]$ e para cada $n \geqslant N$, dividimos o conjunto $K = \{0, 1, \ldots, n\}$ em duas partes, a primeira que chamaremos de K_1, constituirá de todos os k's tais que

$$\left|x - \frac{k}{n}\right| < n^{-\frac{1}{4}}$$

e a segunda parte, chamaremos de K_2 e conterá os demais k's.

Suponhamos então que $\left|x - \frac{k}{n}\right| < n^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$. Como

$$n \geqslant N > \text{máx}\left\{\frac{1}{\delta^4}, \frac{M^2}{\varepsilon^2}\right\} \geqslant \frac{1}{\delta^4},$$

segue que

$$n > \frac{1}{\delta^4} \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{n}} < \delta$$

o que implica que

$$\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| < \varepsilon.$$

Então, obtemos a seguinte estimativa:

$$\left|\sum_{k \in K_1}\left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right| < \varepsilon \sum_{k \in K_1}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} < \varepsilon.$$

Para majorarmos a outra parte do somatório em (2.8), notemos que, para $k \in K_2$, tem-se $\left|x - \frac{k}{n}\right|^2 \geqslant n^{-\frac{1}{2}}$, ou seja,

$$1 \leqslant \sqrt{n}\left(x - \frac{k}{n}\right)^2, \text{ para } k \in K_2. \tag{2.9}$$

A seguir, observamos que

$$\left|\sum_{k \in K_2}\left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right| \leqslant 2M \sum_{k \in K_2}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \tag{2.10}$$

e usamos (2.9) para escrever que o segundo membro de (2.10) é menor ou igual que

$$2M\sqrt{n}\sum_{k=0}^{n}\left(x - \frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

que por sua vez é igual a

$$2M\sqrt{n}\frac{1}{n}x(1-x)$$

pelo Lema 2.3. Logo,

$$|f(x) - B_n(x)| < \varepsilon + \frac{M}{2\sqrt{n}}, \tag{2.11}$$

uma vez que $x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$, para $x \in [0,1]$.

Como a desigualdade (2.11) é válida para todo $x \in [0,1]$ e todo $n \geqslant N$, concluímos a demonstração.

□

Agora, apresentaremos o Teorema de Aproximação de Weierstrass para funções diferenciáveis. Mostraremos que toda função de classe C^k, definida em um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$, pode ser aproximada por uma sequência de polinômios de n variáveis reais, com coeficientes reais. A prova que faremos é baseada em [17, pags. 33-34].

Antes de demonstrarmos o Teorema de Aproximação de Weierstrass para funções diferenciáveis, veremos algumas definições e resultados preparatórios. Em seguida, prosseguiremos com sua demonstração que nos será bastante útil no último capítulo.

Definição 2.4. Seja X um espaço topológico. Dizemos que uma família $\{B_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos de X é **localmente finita** se todo ponto $a \in X$ tem uma vizinhança U tal que

$$\{i \in I : B_i \cap U \neq \emptyset\} \text{ é finito.}$$

Uma família $\{B'_j\}_{j\in J}$ é um **refinamento** de uma família $\{B_i\}_{i\in I}$ se existe uma função

$$r\colon J \longrightarrow I,$$

tal que $B'_j \subseteq B_{r(j)}$, para todo $j \in J$.

A seguir, apresentaremos uma proposição devido à Dieudonné, 1944, cuja demonstração pode ser encontrada em [2].

Proposição 2.5. Se X é um espaço de Hausdorff localmente compacto, que é a união enumerável de conjuntos compactos, então X é paracompacto, ou seja, qualquer cobertura aberta tem um refinamento localmente finito, que é também uma cobertura aberta. Além disso, para qualquer cobertura localmente finita $\{U_i\}_{i\in I}$ de X, existe uma cobertura aberta $\{V_i\}_{i\in I}$ de X (com o mesmo conjunto indexador) tal que $\overline{V_i} \subseteq U_i$.

Definição 2.6. Sejam Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ e $\{U_i\}_{i\in I}$ uma cobertura aberta. Uma família $\{\psi_i\}_{i\in I}$ de funções $\psi_i \in C^\infty(\Omega)$ é chamada uma **partição da unidade**, subordinada à cobertura $\{U_i\}_{i\in I}$, se

(i) $0 \leqslant \psi_i \leqslant 1$,

(ii) $\mathrm{supp}(\psi_i) \subseteq U_i$,

(iii) a família $\{\mathrm{supp}(\psi_i)\}$ é localmente finita, e,

(iv) $\sum_{i \in I} \psi_i(x) = 1$, para todo $x \in \Omega$.

Lema 2.7. Existe uma função $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, com $\eta(x) \geqslant 0$ e $\eta(0) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $\operatorname{supp}(\eta) \subseteq \{x \colon \|x\| < 1\}$. (Se $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, estamos considerando que $\|x\| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$).

Demonstração. Sejam $0 < c < 1$ e s uma função C^∞ definida em $\mathbb{R}$ por:

$$s(r) = \begin{cases} exp(\frac{-1}{c-r}) & \text{se} \quad r < c \\ 0 & \text{se} \quad r \geqslant c \end{cases}$$

Defina então, para cada $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ a seguinte função

$$\eta(x) = s(x_1^2 + \cdots + x_n^2).$$

Veja que esta função satisfaz todas as condições do enunciado, ou seja, $\eta \geqslant 0$, $\eta(0) > 0$ e $\operatorname{supp}(\eta) \subseteq \{x \colon \|x\| < 1\}$. $\square$

Lema 2.8. Sejam K um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ e U um conjunto aberto contendo K. Então, existe uma função $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ com $\varphi(x) \geqslant 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) > 0$ para $x \in K$ e $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq U$.

Demonstração. Seja δ a distância de K a $\mathbb{R}^n - U$. Para $a \in K$, defina

$$\varphi_a(x) = \eta\left(\frac{x-a}{\delta}\right),$$

onde η é a função definida no lema anterior. Seja,

$$V_a = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \varphi_a(x) > 0\},$$

segue que $a \in V_a \subseteq U$. Agora note que, como $K \subseteq \bigcup_{a \in K} V_a$ e K é compacto, existem $a_1, \ldots, a_p \in K$ tais que

$$K \subseteq V_{a_1} \cup \ldots \cup V_{a_p}.$$

Portanto, tomando

$$\varphi = \sum_{j=1}^{p} \varphi_{a_j},$$

segue que φ satisfaz todas as condições do enunciado.

$\square$

Teorema 2.9. Sejam Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $\{U_i\}_{i \in I}$ uma cobertura aberta de Ω. Então existe uma partição da unidade subordinada a $\{U_i\}_{i \in I}$.

Demonstração. Seja $\{V_j\}_{j\in J}$ um refinamento localmente finito de $\{U_i\}_{i\in I}$ por subconjuntos abertos relativamente compactos de Ω (que existem pela Proposição 2.5). Seja $\{W_j\}_{j\in J}$ uma cobertura aberta de Ω tal que $\overline{W_j} \subseteq V_j$, também garantida pela Proposição 2.5. Pelo Lema 2.8 existe uma função $\psi_j \in C^\infty(\Omega)$ com $\psi_j \geqslant 0$, $\psi_j(x) > 0$ para $x \in \overline{W_j}$ e $\operatorname{supp}(\psi_j) \subseteq V_j$. Definamos,

$$\varphi_j' = \frac{\psi_j}{\sum_{j'\in J}\psi_{j'}}.$$

Como $\{V_j\}_{j\in J}$ é localmente finita, segue que $\sum_{j'\in J}\psi_{j'}$ está bem definida. Segue também que $\varphi_j' \in C^\infty(\Omega)$ e φ_j' assume somente valores positivos, pois $\psi_j \in C^\infty(\Omega)$, $\psi_j > 0$ em W_j e $\bigcup_{j\in J} W_j = \Omega$.

Além disso, temos que

$$\varphi_j' \geqslant 0, \qquad \operatorname{supp}(\varphi_j') \subseteq V_j \quad \text{ e } \quad \sum_{j\in J}\varphi_j' = 1.$$

Por outro lado, seja $r\colon J \longrightarrow I$ uma função tal que $V_j \subseteq U_{r(j)}$. Seja também $J_i \subseteq J$ o conjunto $r^{-1}(i)$. Defina então $\varphi_i = \sum_{j\in J_i}\varphi_j'$, onde a soma vazia significa 0. Como os conjuntos J_i são mutualmente disjuntos e cobrem J, segue que

$$\sum_{i\in I}\varphi_i = \sum_{j\in J}\varphi_j' = 1.$$

Além disso, é fácil ver que $\operatorname{supp}(\varphi_i) \subseteq U_i$ e, como a família $\{\operatorname{supp}(\varphi_j')\}$ é localmente finita, segue que $\operatorname{supp}(\varphi_i)$ também o é.

□

Corolário 2.10. Sejam Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, X um subconjunto fechado de Ω e U um subconjunto aberto de Ω que contém X. Então, existe uma função $\psi \in C^\infty(\Omega)$ tal que $\psi(x) = 1$ se $x \in X$, $\psi(x) = 0$ se $x \in \Omega - U$ e $0 \leqslant \psi \leqslant 1$.

Demonstração. Como X é fechado, segue que $\Omega - X$ é aberto e $U \bigcup (\Omega - X)$ é uma cobertura aberta para Ω. Portanto, usando o Teorema 2.9, existem funções C^∞ φ_1 e φ_2 tais que $0 \leqslant \varphi_1, \varphi_2 \leqslant 1$, $\operatorname{supp}(\varphi_1) \subseteq U$, $\operatorname{supp}(\varphi_2) \subseteq \Omega - X$ e $\varphi_1 + \varphi_2 = 1$ em Ω.

Assim, tomemos $\psi = \varphi_1$.

□

Lema 2.11. Seja $f \in C^k_{00}(\mathbb{R}^n)$, com $0 \leqslant k < \infty$. Para $\lambda > 0$ seja

$$\begin{aligned} g_\lambda(x) &= c\lambda^{\frac{1}{2}n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)exp\{-\lambda[(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2]\}dy \\ &= c\lambda^{\frac{1}{2}n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)exp\{-\lambda\|x-y\|^2\}dy, \end{aligned}$$

onde $c = \pi^{\frac{1}{2}n}$, é tal que

$$c\int_{\mathbb{R}^n} exp(-\|x\|^2)dx = 1.$$

Então, temos que

$$\|g_\lambda - f\|_k^{\mathbb{R}^n} \to 0, \text{ quando } \lambda \to \infty.$$

Notemos que a função $g_\lambda(x)$ é a convolução das funções $exp(-\lambda\|x\|)$ e $f(x)$ multiplicada pela constante $c\lambda^{\frac{1}{2}n}$, ou seja,

$$g_\lambda(x) = c\lambda^{\frac{1}{2}n}[exp(-\lambda\|x\|) * f(x)].$$

Além disso, $g_\lambda \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Temos que

$$g_\lambda(x) = c\lambda^{\frac{1}{2}n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)exp\{-\lambda\|y\|^2\}dy,$$

de modo que, para $|\alpha| \leqslant k$, temos

$$\begin{aligned} D^\alpha g_\lambda(x) &= c\lambda^{\frac{1}{2}n} \int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha f)(x-y)exp\{-\lambda\|y\|^2\}dy \\ &= c\lambda^{\frac{1}{2}n} \int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha f)(y)exp\{-\lambda\|x-y\|^2\}dy. \end{aligned}$$

Disso segue que,

$$D^\alpha g_\lambda(x) - D^\alpha f(x) = c\lambda^{\frac{1}{2}n} \int_{\mathbb{R}^n} \{D^\alpha f(y) - D^\alpha f(x)\}exp\{-\lambda\|x-y\|^2\}dy.$$

Agora, como $f \in C_{00}^k(\mathbb{R}^n)$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|D^\alpha f(y) - D^\alpha f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ para } \|x-y\| \leqslant \delta \text{ e } |\alpha| \leqslant k.$$

Além disso, como f tem suporte compacto, então $D^\alpha f$ também tem, daí existe $M > 0$ tal que

$$|D^\alpha f(y)| < M \text{ para todo } y, |\alpha| \leqslant k.$$

Assim,

$$\begin{aligned} |D^\alpha g_\lambda(x) - D^\alpha f(x)| &= c\lambda^{\frac{1}{2}n} \left| \left(\int_{\|x-y\|<\delta} + \int_{\|x-y\|\geqslant\delta} \right) \{D^\alpha f(y) - D^\alpha f(x)\}exp(-\lambda\|x-y\|^2)dy \right| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} c\lambda^{\frac{1}{2}n} \int_{\mathbb{R}^n} exp(-\lambda\|x-y\|^2)dy + 2Mc\lambda^{\frac{1}{2}n} \int_{\|x-y\|\geqslant\delta} exp(-\lambda\|x-y\|^2)dy. \end{aligned}$$

Como,

$$c\lambda^{\frac{1}{2}n} \int_{\mathbb{R}^n} exp(-\lambda\|x-y\|^2)dy = 1$$

e,

$$
\begin{aligned}
c\lambda^{\frac{1}{2}n}\int_{\|x-y\|\geqslant\delta} exp(-\lambda\|x-y\|^2)dy &= c\lambda^{\frac{1}{2}n}\int_{\|x-y\|\geqslant\delta} exp\left(\frac{-\lambda}{2}\|x-y\|^2\right) exp\left(\frac{-\lambda}{2}\|x-y\|^2\right)dy \\
&\leqslant e^{\frac{-\lambda}{2}\delta^2} c\lambda^{\frac{1}{2}n}\int_{\mathbb{R}^n} exp\left(\frac{-\lambda}{2}\|x-y\|^2\right)dy \\
&= 2^{\frac{1}{2}n} exp(\frac{-\lambda}{2}\delta^2),
\end{aligned}
$$

segue que

$$|D^\alpha g_\lambda(x) - D^\alpha f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + M2^{1+\frac{n}{2}} exp(\frac{-1}{2}\lambda\delta^2).$$

Uma vez que, para $\delta > 0$ fixado, podemos escolher λ suficientemente grande tal que o termo da direita seja $< \varepsilon$, segue que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |D^\alpha g_\lambda(x) - D^\alpha f(x)| \to 0 \text{ quando } \lambda \to \infty,$$

como queríamos mostrar. □

Teorema 2.12. (Teorema de Aproximação de Weierstrass para funções diferenciáveis) Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Então, dados qualquer $f \in C^k(\Omega), 0 \leqslant k < \infty, \varepsilon > 0$ e um conjunto compacto $K \subseteq \Omega$, existe um polinômio $P(x)$ em $x_1, \ldots, x_n$ tal que

$$\|f - P\|_k^K < \varepsilon.$$

Demonstração. Trocando f por φf, em que $\varphi \in C_{00}^\infty(\Omega)$, $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq \Omega$ e que é igual a 1 em uma vizinhança de K, (a existência de φ é garantida pelo Corolário 2.10) podemos supor que $f \in C_{00}^k(\mathbb{R}^n)$. Então pelo Lema 2.11, dado $\varepsilon > 0$ podemos escolher λ suficientemente grande tal que, se

$$g_\lambda(x) = c\lambda^{\frac{1}{2}n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y) exp(-\lambda\|x-y\|^2)dy,$$

temos

$$\|g_\lambda - f\|_k^K < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Agora temos que,

$$exp(-\lambda\|x-y\|^2) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!}(-\lambda)^p \|x-y\|^2 p.$$

Defina

$$Q_N(x,y) = \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{p!}(-\lambda)^p \|x-y\|^2 p,$$

então

$$D^\alpha Q_N(x,y) \to D^\alpha exp(-\lambda\|x-y\|^2)$$

uniformemente para x, y em qualquer conjunto compacto. Agora se tomarmos

$$P_N(x) = c\lambda^{\frac{1}{2}n} \int f(y) Q_N(x,y) dy,$$

temos que P_N é um polinômio e $\|g_{\lambda-P_N}\|_k^K \to 0$, quando $N \to \infty$.

$\square$

Capítulo 3

O Teorema de Stone-Weierstrass. Subálgebras densas

O objetivo desse capítulo é apresentar um resultado análogo ao Teorema de Aproximação de Weierstrass para funções contínuas, porém mais geral. No lugar do intervalo $[0, 1]$ consideraremos um espaço topológico compacto, que como veremos mais adiante, também pode ser substituído por um espaço topológico qualquer X e, no lugar da subálgebra dos polinômios trabalharemos com subálgebras quaisquer de $C(X, \mathbb{R})$ ou $C(X, \mathbb{C})$. Este resultado foi provado por Marshall Harvey Stone [22] em 1937 e recebeu o nome de Teorema de Stone-Weierstrass. A demonstração que faremos foi baseada em [3, pags. 143-145]. Uma outra demonstração deste Teorema pode ser encontrada em [5] ou [20]. Citamos também outro artigo de Marshall Stone [23], com numerosas aplicações do teorema de Stone-Weierstrass.

A seguir veremos a demonstração do Teorema de Dini e de alguns lemas que serão essenciais para demonstrarmos o Teorema de Stone-Weierstrass.

Teorema 3.1. (Teorema de Dini) Sejam X um espaço topológico compacto e (f_n) uma sequência crescente em $C(X, \mathbb{R})$, isto é $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$ para todos $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$, que converge pontualmente para uma função $f \in C(X, \mathbb{R})$. Então (f_n) converge a f uniformemente sobre X.

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Definamos uma sequência (U_n) como segue

$$U_n = \{x \in X \colon f(x) - f_n(x) < \varepsilon\}.$$

Notemos que, para cada n, U_n é um conjunto aberto. De fato, se definirmos $g \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$, por $g(x) = f(x) - f_n(x)$, temos que $U_n = g^{-1}((-\infty, \varepsilon))$ é aberto em X, pois $(-\infty, \varepsilon)$ é aberto em $\mathbb{R}$ e g é contínua.

Como a sequência (f_n) é crescente, segue que

$$U_n = \{x \in X \colon f(x) - f_k(x) < \varepsilon, \text{ para todo } k \geqslant n\}.$$

Assim, U_n é uma sequência crescente de abertos. Vejamos que a união dos U_n é X. De fato, é claro que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n \subseteq X$. Seja $x \in X$, sabemos que $f_n(x) \longrightarrow f(x)$, assim, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que

$f(x) - f_N(x) \leqslant |f(x) - f_N(x)| < \varepsilon$, o que implica que $x \in U_N$.

Como X é compacto existem $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ tais que

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} U_{n_i}$$

como (U_n) é uma sequência crescente, segue que existe um natural n tal que $X = U_n$. Portanto, (f_n) converge a f uniformemente sobre X.

$\square$

Lema 3.2. Existe uma sequência de polinômios $P_n(t)$, com $P_n(0) = 0$, que converge à função $f(t) = \sqrt{t}$, uniformemente no intervalo $[0, 1]$.

Demonstração. Seja $(P_n(t))$, definida por

$$P_1(t) = 0,$$

$$P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}(t - P_n(t)^2), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

É claro que $P_n(0) = 0$, para todo natural n.
Por indução temos que

$$P_n(t) \leqslant \sqrt{t}, \text{ para todo } t \in [0, 1] \text{ e } n \in \mathbb{N}. \tag{3.2}$$

De fato, para $n = 1$, temos que

$$P_1(t) = 0 \leqslant \sqrt{t}, \text{ para todo } t \in [0, 1].$$

Supondo que (3.2) seja válida para todo n, provaremos que vale também para $n + 1$. Vejamos que

$$\begin{aligned}
\sqrt{t} - P_{n+1}(t) &= \left(\sqrt{t} - P_n(t)\right) - \frac{1}{2}(t - P_n(t)^2) \\
&= \left(\sqrt{t} - P_n(t)\right)\left[1 - \frac{1}{2}(\sqrt{t} + P_n(t))\right] \\
&= \left(\sqrt{t} - P_n(t)\right)\left[1 - \frac{1}{2}\sqrt{t} - \frac{1}{2}P_n(t))\right] \\
&\geqslant \left(\sqrt{t} - P_n(t)\right)\left[1 - \frac{1}{2}\sqrt{t} - \frac{1}{2}\sqrt{t})\right] \\
&= \left(\sqrt{t} - P_n(t)\right)\left(1 - \sqrt{t}\right) \\
&\geqslant 0.
\end{aligned}$$

Logo, $\sqrt{t} \geqslant P_{n+1}(t)$.

Agora, de (3.1) e (3.2), temos que

$$P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}\left(\sqrt{t} + P_n(t)\right)\left(\sqrt{t} - P_n(t)\right) \geqslant P_n(t). \tag{3.3}$$

Assim, para cada $t \in [0,1]$, $(P_n(t))$ é uma sequência crescente e limitada superiormente, sendo portanto convergente. Seja então, $f(t) = \lim_n P_n(t)$, para cada $t \in [0,1]$.

É claro que, $0 \leqslant f(t) \leqslant \sqrt{t}$, para cada t. Fazendo $n \longrightarrow \infty$ em (3.3) segue que

$$f(t) = f(t) + \frac{1}{2}\left(\sqrt{t} + f(t)\right)\left(\sqrt{t} - f(t)\right)$$

o que implica que

$$0 = \frac{1}{2}\left(t - f(t)^2\right)$$

logo,

$$f(t) = \sqrt{t}, \text{ para cada } t \in [0,1],$$

e o Teorema 3.1 nos garante que a convergência é uniforme.

□

Definição 3.3. Seja X um conjunto. Dadas duas funções $f, g\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$, definimos $f \vee g, f \wedge g\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\};$$

$$(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}.$$

Lema 3.4. Sejam X um espaço topológico compacto e A uma subálgebra fechada de $C(X,\mathbb{R})$. Então $f \vee g$ e $f \wedge g$ pertencem a A, para todos $f, g \in A$.

Demonstração. Como,

$$f \vee g = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|) \qquad \text{e} \qquad f \wedge g = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$$

basta provarmos que $|f| \in A$, para toda $f \in A$.

Se $f \in A$, então existe uma constante $C > 0$ tal que $|f(x)| \leqslant C$, para todo $x \in X$. Se definirmos $h(x) = \frac{f(x)}{C}$, para todo $x \in X$, então $h \in A$ e $|h(x)| \leqslant 1$, para cada $x \in X$. Pelo Lema 3.2 existe uma sequência de polinômios $P_n(t)$ que converge à função $\sqrt{t}$ uniformemente no intervalo $[0,1]$. Como $P_n(h^2) \in A$ e A é fechado, segue que

$$|h| = \sqrt{h^2} = \lim_n P_n(h^2) \in A.$$

E, portanto, $|f| = C|h| \in A$, como queríamos.

□

Teorema 3.5. (Teorema de Stone-Weierstrass) Sejam X um espaço topológico compacto e A uma subálgebra de $C(X, \mathbb{R})$ tal que:

(a) A separa os pontos de X,

(b) A contém as funções constantes.

Então, A é densa em $C(X, \mathbb{R})$.

Observação 3.6. Note que o item (a) implica que X é Hausdorff. De fato, dados a e $b \in X$ com $a \neq b$, existe uma função contínua $f \in A$ tal que, $f(a) \neq f(b)$. Tome $\varepsilon = |f(a) - f(b)|$ e defina

$$U = \{x \in X \colon |f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}\};$$

$$V = \{x \in X \colon |f(x) - f(b)| < \frac{\varepsilon}{2}\}.$$

Assim, $a \in U$, $b \in V$, $U \cap V = \emptyset$ e U e V são abertos.

Demonstração. Sejam $f \in C(X, \mathbb{R})$ e $\varepsilon > 0$. Sejam $a, b \in X$, com $a \neq b$. Como A separa pontos de X, segue que existe uma função $\phi \in A$ tal que $\phi(a) \neq \phi(b)$. Defina $\psi \in A$ por

$$\psi(x) = \frac{\phi(x) - \phi(a)}{\phi(b) - \phi(a)}.$$

Então $\psi(a) = 0$ e $\psi(b) = 1$. Defina,

$$g_{ab}(x) = f(a) + (f(b) - f(a))\,\psi(x).$$

Note que $g_{ab} \in A$, pois A contém as funções constantes. Note também que $g_{ab}(a) = f(a)$ e $g_{ab}(b) = f(b)$.

Sejam

$$U_{ab} = \{x \in X \colon g_{ab}(x) > f(x) - \varepsilon\};$$

$$V_{ab} = \{x \in X \colon g_{ab}(x) < f(x) + \varepsilon\}.$$

Então U_{ab} e V_{ab} são abertos, pois as funções g_{ab} e f são contínuas, e contêm a e b. Fixemos $a \in X$. Então $X = \bigcup_{b \in X} U_{ab}$. Agora, como X é compacto, existem $b_1, \ldots, b_n \in X$ tais que

$$X = \bigcup_{k=1}^{n} U_{ab_k}.$$

Defina $g_a = g_{ab_1} \vee \ldots \vee g_{ab_n}$. Pelo Lema 3.4 segue que $g_a \in \overline{A}$ e, além disso, temos que

$$g_a(x) > f(x) - \varepsilon, \text{ para todo } x \in X$$

e,

$$g_a(x) < f(x) + \varepsilon, \text{ para todo } x \in \bigcap_{k=1}^{n} V_{ab_k} := V_a.$$

Notemos que $a \in V_a$. Usando novamente a compacidade de X, como $X = \bigcup_{a \in X} V_a$, segue que existem $a_1, \dots, a_m \in X$ tais que

$$X = \bigcup_{j=1}^{m} V_{a_j}.$$

Defina $g = g_{a_1} \wedge \dots \wedge g_{a_m}$. O Lema 3.4 nos garante que $g \in \overline{A}$, além disso

$$f(x) - \varepsilon < g(x) < f(x) + \varepsilon, \text{ para todo } x \in X.$$

Isso mostra que $f \in \overline{\overline{A}} = \overline{A}$, completando a demonstração.

$\square$

Observação 3.7. Notemos que o Teorema de Aproximação de Weierstrass pode ser obtido a partir do Teorema de Stone-Weierstrass, basta tomarmos $X = [0, 1]$ e A como sendo a subálgebra dos polinômios em $[0, 1]$ com coeficientes reais.

Veremos abaixo que podemos enunciar o Teorema de Stone-Weierstrass de uma maneira mais genérica, ou seja, não precisamos supor que X é um espaço topológico compacto.

Teorema 3.8. Sejam X um espaço topológico qualquer e A uma subálgebra de $C(X, \mathbb{R})$ tal que

(a) A separa pontos de X,

(b) A contém as funções constantes.

Então A é densa em $C(X, \mathbb{R})$ na topologia compacto-aberta, ou seja, dados $K \subseteq X$, $f \in C(X, \mathbb{R})$ e $\varepsilon > 0$ existe uma função $g \in A$ tal que $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$, para todo $x \in K$.

Demonstração. Sejam $K \subseteq X$ um subconjunto compacto, $f \in C(X, \mathbb{R})$ e $\varepsilon > 0$. Defina

$$A_K = \{g|_K : g \in A\}.$$

Assim, A_K é uma subálgebra de $C(K, \mathbb{R})$ e é imediato que

(a) A_K separa pontos de K e,

(b) A_K contém as funções constantes (em K).

Pelo Teorema 3.5 existe uma função $g \in A$ tal que $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$, para todo $x \in K$.

$\square$

Teorema 3.9. (Teorema de Stone-Weierstrass, versão complexa) Sejam X um espaço topológico qualquer e B uma subálgebra de $C(X, \mathbb{C})$ tal que:

(a) B separa os pontos de X,

(b) B contém as funções constantes,

(c) $\overline{f} \in B$, para cada $f \in B$.

Então, B é densa em $C(X, \mathbb{C})$ na topologia compacto-aberta.

Demonstração. Primeiro note que cada $f \in C(X, \mathbb{C})$ pode ser representada de maneira única na forma

$$f = u + iv \text{ com } u, v \in C(X, \mathbb{R}). \tag{3.4}$$

Como $\overline{f} = u - iv$, segue que

$$u = \frac{f + \overline{f}}{2} \text{ e } v = \frac{f - \overline{f}}{2}. \tag{3.5}$$

Seja,

$$A = B \cap C(X, \mathbb{R}). \tag{3.6}$$

Então é claro que $\overline{A} = \overline{B} \cap C(X, \mathbb{R})$. Assim temos de (3.4), (3.5) e (3.6) que

$$f \in B \Longleftrightarrow u, v \in A$$

e, portanto,

$$f \in \overline{B} \Longleftrightarrow u, v \in \overline{A}.$$

Agora é fácil ver que A é uma subálgebra de $C(X, \mathbb{R})$ tal que:

(a) A separa pontos de X,

(b) A contém as funções constantes.

Assim, pelo Teorema 3.8 segue que $\overline{A} = C(X, \mathbb{R})$. Tome $f = u + iv \in C(X, \mathbb{C})$, então $u, v \in C(X, \mathbb{R}) = \overline{A}$ e, portanto, $f \in \overline{B}$. O que mostra que $\overline{B} = C(X, \mathbb{C})$.

□

Capítulo 4

O Teorema de Kakutani-Stone. Aderência de um subreticulado

No capítulo anterior consideramos primeiro X como sendo um espaço topológico compacto e vimos quando uma subálgebra de $C(X, \mathbb{K})$, onde $\mathbb{K}$ denota o corpo dos números reais ou complexos, é densa em $C(X, \mathbb{K})$. Depois vimos que o teorema continua válido se considerarmos X como sendo um espaço topológico qualquer. Neste capítulo veremos uma caracterização do fecho de um subreticulado de $C(X, \mathbb{R})$, onde consideraremos, assim como no capítulo anterior, X primeiro como sendo um espaço topológico compacto e depois, como sendo um espaço topológico qualquer.

Começaremos com a seguinte definição:

Definição 4.1. Um conjunto L de funções de X em $\mathbb{R}$ é chamado de **reticulado** se dadas $f, g \in L$, as funções $f \vee g$ e $f \wedge g$ pertencem a L.

Um **subreticulado** é um subconjunto de um reticulado que é também um reticulado.

Exemplo 4.2. Se X é um espaço topológico qualquer, então $C(X, \mathbb{R})$ é um reticulado.

Em 1941, Kakutani [6] provou o resultado abaixo, que ficou conhecido como Teorema de Kakutani-Stone. Veremos agora sua demonstração, que pode ser encontrada em [16, pags. 39 e 40].

Teorema 4.3. (Teorema de Kakutani-Stone) Sejam X um espaço topológico compacto, L um subreticulado de $C(X, \mathbb{R})$ e $f \in C(X, \mathbb{R})$. Então $f \in \overline{L}$ em $C(X, \mathbb{R})$ se, e somente se, para quaisquer par de pontos $x, y \in X$ e $\varepsilon > 0$, existe $g \in L$ tal que

$$|g(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \text{e} \qquad |g(y) - f(y)| < \varepsilon.$$

Demonstração. Provemos primeiro a necessidade. Sejam $x, y \in X$ e $\varepsilon > 0$. Consideremos o subconjunto compacto $K \subseteq X$ formado por x, y. Como $f \in \overline{L}$, segue que existe $g \in L$ tal que $\|g - f\|_K < \varepsilon$, o que é equivalente a dizer que

$$|g(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \text{e} \qquad |g(y) - f(y)| < \varepsilon.$$

Reciprocamente, seja f satisfazendo as condições do teorema e fixemos $\varepsilon > 0$. Primeiro mostraremos que, dado $t \in X$ existe $g \in L$ tal que $g(u) > f(u) - \varepsilon$, para todo $u \in X$, e $g(t) < f(t) + \varepsilon$. De fato, para todo $x \in X$, segue da hipótese para t e x que existe $g_x \in L$ tal que

$$|g_x(t) - f(t)| < \varepsilon \qquad \text{e} \qquad |g_x(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Seja $V_x = \{u \in X \colon g_x(u) > f(u) - \varepsilon\}$, então V_x é um conjunto aberto que contém x. Pela compacidade de X, existem $x_1, \ldots, x_n \in X$ tais que $X = \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$. Seja $g = g_{x_1} \vee \ldots \vee g_{x_n} \in L$. Assim, se $u \in X$, existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $u \in V_{x_i}$, então $g(u) \geqslant g_{x_i}(u) > f(u) - \varepsilon$. Além disso, como $g_{x_i}(t) < f(t) + \varepsilon$, para $i = 1, \ldots, n$, temos que $g(t) < f(t) + \varepsilon$.

Assim, correspondente a cada $t \in X$ escolha $g_t \in L$ tal que $g_t(u) > f(u) - \varepsilon$, para todo $u \in X$, e $g_t(t) < f(t) + \varepsilon$, pelo que observamos anteriormente. Defina $V_t = \{u \in X \colon g_t(u) < f(u) + \varepsilon\}$, então V_t é um conjunto aberto que contém t. Novamente pela compacidade de X existem $t_1, \ldots, t_n \in X$ tais que $X = \bigcup_{i=1}^n V_{t_i}$.

Como estamos supondo L reticulado, segue que $g = g_{t_1} \wedge \ldots \wedge g_{t_n} \in L$. Agora, se $u \in X$, existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $u \in V_{t_i}$, isso implica que $g(u) \leqslant g_{t_i}(u) < f(u) + \varepsilon$. Além disso, como $g_{t_i}(u) > f(u) - \varepsilon$ para todo $i = 1, \ldots, n$, segue que $g(u) > f(u) - \varepsilon$, para todo $u \in X$. Assim, provamos que $\|g - f\|_X < \varepsilon$, uma vez que $g \in L$ e ε é arbitrário, implicando que $f \in \overline{L}$.

□

Generalizando, obtemos:

Teorema 4.4. (Teorema de Kakutani-Stone) Sejam X um espaço topológico qualquer, L um subreticulado de $C(X, \mathbb{R})$ e $f \in C(X, \mathbb{R})$. Então $f \in \overline{L}$ em $C(X, \mathbb{R})$ se, e somente se, para quaisquer par de pontos $x, y \in X$ e $\varepsilon > 0$, existe $g \in L$ tal que

$$|g(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \text{e} \qquad |g(y) - f(y)| < \varepsilon.$$

Demonstração. A necessidade é análoga a do Teorema 4.3. Agora, para provarmos a suficiência, tome $K \subseteq X$ compacto e defina

$$L_K = \{g|_K \colon g \in L\}.$$

Daí, segue que L_K é um subreticulado de $C(K, \mathbb{R})$. Agora, seja f_K a restrição de f ao subconjunto K. Sejam $x, y \in K \subseteq X$ e $\varepsilon > 0$. Por hipótese segue que existe $g \in L$ tal que $|g(x) - f(x)| < \varepsilon$ e $|g(y) - f(y)| < \varepsilon$, logo $|g(x) - f_K(x)| < \varepsilon$ e $|g(y) - f_K(y)| < \varepsilon$. Se tomarmos g_K como sendo a restrição de g ao subconjunto K, temos que $g_K \in L_K$ e, portanto, segue do Teorema 4.3 que $f_K \in \overline{L_K}$. Isso, por sua vez, implica que existe $h \in L_K$ tal que $|f(x) - h(x)| < \varepsilon$, para todo $x \in K$, que é equivalente a dizer que $f \in \overline{L}$. □

Capítulo 5

O Teorema de Stone-Weiertrass. Aderência de uma subálgebra

De maneira análoga com o capítulo anterior, o objetivo deste é apresentar uma caracterização do fecho de uma subálgebra de $C(X, \mathbb{K})$. Baseamos este capítulo em [16].

Antes de apresentarmos o Teorema de Stone-Weierstrass, que nos dá tal caracterização, vejamos alguns resultados auxiliares.

Lema 5.1. Considere a álgebra $\mathbb{R}^2$, o produto cartesiano da álgebra $\mathbb{R}$. Então as subálgebras de $\mathbb{R}^2$ e suas relações de inclusão são dadas pelo seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R}^2 & \\
0 \times \mathbb{R} \arrow[ur] & \triangle \arrow[u] & \mathbb{R} \times 0 \arrow[ul] \\
 & 0 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Notemos que estamos considerando $\mathbb{R}^2$ dotado da adição e multiplicação coordenada a coordenada e $\triangle = \{(x, x) \colon x \in \mathbb{R}\}$.

Demonstração. É fácil ver que os subconjuntos $\mathbb{R}^2, 0, \triangle, 0 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \times 0$ são subálgebras de $\mathbb{R}^2$ e satisfazem as relações de inclusão acima.

Seja A uma subálgebra de $\mathbb{R}^2$ distinta de $\mathbb{R}^2, 0, 0 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \times 0$. Uma vez que A é um subespaço vetorial de dimensão 1 (pois $A \neq \mathbb{R}^2, 0$), A é dada por uma equação da forma $y = \lambda x$, com $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\lambda \neq 0$ (pois se $\lambda = 0$, teríamos $A = 0$ ou $A = \mathbb{R} \times 0$).

Como o par $(1, \lambda)$ satisfaz a equação, temos que $(1, \lambda) \in A$. De, $(1, \lambda^2) = (1, \lambda)^2 \in A$, concluímos que $(1, \lambda^2)$ precisa satisfazer a equação, o que nos dá que $\lambda = \lambda^2$. Portanto, $\lambda = 1$, o que prova que $A = \triangle$.

$\square$

Corolário 5.2. Seja $A \subseteq \mathbb{R}^2$ uma subálgebra e $b \in \mathbb{R}^2$. Então $b \notin A$ se, e somente se, pelo menos uma das seguintes condições é satisfeita

(1) $b \notin \mathbb{R} \times 0$ e $A \subseteq \mathbb{R} \times 0$,

(2) $b \notin 0 \times \mathbb{R}$ e $A \subseteq 0 \times \mathbb{R}$,

(3) $b \notin \triangle$ e $A \subseteq \triangle$.

Demonstração. Suponha que $b \notin A$. Então segue que $A \neq \mathbb{R}^2$ e $b \neq 0$. Seja X qualquer uma das subálgebras intermediárias: $\mathbb{R} \times 0, 0 \times \mathbb{R}$ ou $\triangle$.

Se $A = 0$, escolha X tal que $b \notin X$. Veja que existem, pelo menos duas escolhas para X tal que $b \neq 0$ e a interseção de duas subálgebras intermediárias é 0.

Se $A \neq 0$, então A é uma das subálgebras intermediárias, já que $A \neq \mathbb{R}^2$, então, escolha $X = A$. Em qualquer caso acima, uma das condições $(1), (2)$ ou (3) será satisfeita, que corresponde a escolha de X.

A recíproca é imediata, visto que cada item $(1), (2)$ e (3) implica que $b \notin A$.

□

Agora, notemos que o Lema 3.4 pode ser enunciado da seguinte maneira:

Lema 5.3. Seja X um espaço topológico compacto. Então cada subálgebra fechada de $C(X, \mathbb{R})$ é um subreticulado de $C(X, \mathbb{R}.)$

Como consequência imediata do Lema acima, temos o seguinte resultado:

Corolário 5.4. Sejam X um espaço topológico compacto e A uma subálgebra de $C(X, \mathbb{R})$. Então $\overline{A}$ é um subreticulado de $C(X, \mathbb{R})$.

Teorema 5.5. (Teorema de Stone-Weierstrass) Sejam X um espaço topológico compacto, A uma subálgebra de $C(X, \mathbb{R})$ e $f \in C(X, \mathbb{R})$. Então, $f \in \overline{A}$ se, e somente se, f verifica as seguintes condições:

(a) dados $x, y \in X$ tais que $f(x) \neq f(y)$, existe $g \in A$ tal que $g(x) \neq g(y)$,

(b) dado $x \in X$ tal que $f(x) \neq 0$, existe $g \in A$ tal que $g(x) \neq 0$.

Demonstração. Suponha que $f \in \overline{A}$. Sejam $x, y \in X$ tal que $f(x) \neq f(y)$ e K o subconjunto compacto de X formado por x e y. Tome $\varepsilon = |f(y) - f(x)| > 0$. Assim, existe $g \in A$ tal que $|g(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $x \in K$, ou seja, $|g(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $|g(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$, daí segue que $g(x) \neq g(y)$, o que mostra (a).

Seja $x \in X$ com $f(x) \neq 0$ e seja $\varepsilon = |f(x)| > 0$. Assim, existe uma $g \in A$ tal que $|g(x) - f(x)| < \varepsilon$. Daí temos que $g(x) \neq 0$, o que prova (b).

Reciprocamente, assuma (a) e (b). Se $x, y \in X$, a função $\phi \colon C(X, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$\phi(g) = (g(x), g(y))$$

é um homomorfismo de álgebras. Em particular, $\phi(A)$ é uma subálgebra de $\mathbb{R}^2$.

Usando (b) vemos que se $\phi(f) \notin \mathbb{R} \times 0$, então $\phi(A) \nsubseteq \mathbb{R} \times 0$ e que, se $\phi(f) \notin 0 \times \mathbb{R}$, então $\phi(A) \nsubseteq 0 \times \mathbb{R}$. Agora, usando (a), vemos que, se $\phi(f) \notin \triangle$, então $\phi(A) \nsubseteq \triangle$. Pelo Corolário 5.2 concluímos que $\phi(f) \in \phi(A)$, ou seja, existe $g \in A$ tal que $f(x) = g(x)$ e $f(y) = g(y)$. Como $g \in A \subseteq \overline{A}$ e $\overline{A}$ é reticulado, o que nos garante o Corolário 5.4, segue do Teorema 4.3 que $f \in \overline{A}$.

□

Generalizando, obtemos:

Teorema 5.6. (Teorema de Stone-Weirstrass) Sejam X um espaço topológico qualquer, A uma subálgebra de $C(X, \mathbb{R})$ e $f \in C(X, \mathbb{R})$. Então, $f \in \overline{A}$ se, e somente se, f verifica as seguintes condições:

(a) dados $x, y \in X$ tais que $f(x) \neq f(y)$, existe $g \in A$ tal que $g(x) \neq g(y)$,

(b) dado $x \in X$ tal que $f(x) \neq 0$, existe $g \in A$ tal que $g(x) \neq 0$.

Demonstração. A necessidade é idêntica à do Teorema 5.5. Provemos então a suficiência e para isso, suponha (a) e (b). Seja K um subconjunto compacto de X e denote por f_K a restrição de f ao subconjunto K, assim, $f_K \in C(K, \mathbb{R})$. Agora, segue de (a) que, dados $x, y \in K \subseteq X$ tais que $f_K(x) \neq f_K(y)$, existe $g_K \in A \cap C(K, \mathbb{R}) = A_K$ tal que $g_K(x) \neq g_K(y)$.

De (b) seque que, dado $x \in X$ tal que $f_K(x) \neq 0$, existe $g_K \in A_K$ tal que $g_K(x) \neq 0$. Daí segue do Teorema 5.5 que $f_K \in \overline{A_K} \subseteq \overline{A}$, como K é arbitrário temos que $f \in \overline{A}$.

□

Definição 5.7. Seja X um espaço topológico. Um subconjunto $Y \subseteq C(X, \mathbb{C})$ é **auto-adjunto** se $\overline{f} \in Y$, sempre que $f \in Y$, onde $\overline{f}$ denota o conjugado complexo de f.

Teorema 5.8. Sejam X um espaço topológico qualquer, B uma subálgebra auto-adjunta de $C(X, \mathbb{C})$ e $f \in C(X, \mathbb{C})$. Então, $f \in \overline{B}$ se, e somente se, f verifica as seguintes condições:

(a) dados $x, y \in X$ tais que $f(x) \neq f(y)$, existe $g \in B$ tal que $g(x) \neq g(y)$,

(b) dado $x \in X$ tal que $f(x) \neq 0$, existe $g \in B$ tal que $g(x) \neq 0$.

Demonstração. Lembremos que cada $f \in C(X, \mathbb{C})$ pode ser representada de maneira única na forma

$$f = u + iv, \text{ com } u, v \in C(X, \mathbb{R})$$

e que,

$$u = \frac{f + \overline{f}}{2} \quad \text{e} \quad v = \frac{f - \overline{f}}{2},$$

onde $\overline{f} = u - iv$. Defina, $A = B \cap C(X, \mathbb{R})$, daí segue que $\overline{A} = \overline{B} \cap C(X, \mathbb{R})$. Como já observamos anteriormente,

$$f \in B \Longleftrightarrow u, v \in A$$

e portanto,

$$f \in \overline{B} \Longleftrightarrow u, v \in \overline{A}.$$

Agora, é fácil ver que A é uma subálgebra de $C(X, \mathbb{R})$. Suponha que $f \in \overline{B}$, daí segue que $u, v \in \overline{A}$. Sejam então $x, y \in X$ tais que $f(x) \neq f(y)$, isso implica que $u(x) \neq u(y)$ ou $v(x) \neq v(y)$. Suponha, sem perda de generalidade, que $u(x) \neq u(y)$. Assim, pelo Teorema 5.6, existe $g \in A \subseteq B$ tal que $g(x) \neq g(y)$, provando (a).

De maneira análoga, seja $x \in X$ tal que $f(x) \neq 0$, daí temos que $u(x) \neq 0$ ou $v(x) \neq 0$. Supondo $u(x) \neq 0$, segue do Teorema 5.6 que existe $g \in A \subseteq B$ tal que $g(x) \neq$, mostrando (b).

Reciprocamente, suponha (a) e (b). Sejam $x, y \in X$ tais que $u(x) \neq u(y)$, isso implica que $f(x) \neq f(y)$ e por hipótese segue que existe $g \in B$ tal que $g(x) \neq g(y)$. Escrevendo $g = g_1 + ig_2$, com $g_1, g_2 \in C(X, \mathbb{R})$, segue que $g_1(x) \neq g_1(y)$ ou $g_2(x) \neq g_2(y)$.

Agora, seja $x \in X$ tal que $u(x) \neq 0$, isso implica que $f(x) \neq 0$. Assim segue da hipótese que existe $g \in B$, tal que $g(x) \neq 0$, escrevendo $g = g_1 + ig_2$, com $g_1, g_2 \in C(X, \mathbb{R})$, temos que $g_1(x) \neq 0$ ou $g_2(x) \neq 0$. Consequentemente, pelo Teorema 5.6 $u \in \overline{A}$. Analogamente, mostramos que $v \in \overline{A}$. Portanto, pelo que já observamos, segue que $f \in \overline{B}$, como queríamos demonstrar.

$\square$

Capítulo 6

O Teorema de Nachbin

O Teorema de Nachbin pode ser considerado uma versão do Teorema de Stone-Weierstrass para funções diferenciáveis. Ele foi provado pelo matemático brasileiro Leopoldo Nachbin [15], em 1949, veja também [12]. A demonstração que faremos aqui foi baseada em [13].

Notação 6.1. Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Lembremos que $C^k(\Omega)$ é a álgebra de todas as funções de classe C^k em Ω tomando valores reais, ou seja, as funções $f\colon\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ que admitem derivadas parciais contínuas até ordem k. E, sempre consideraremos $C^k(\Omega)$ com a topologia compacto-aberta de ordem k, isto é, a topologia da convergência uniforme das funções e suas derivadas parciais até ordem k, sobre os conjuntos compactos de Ω.

Teorema 6.2. (Teorema de Nachbin) Sejam Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e A uma subálgebra de $C^k(\Omega)$. Então A é densa em $C^k(\Omega)$ se, e somente se, as seguintes condições forem satisfeitas:

(a) dados $x, y \in \Omega$ com $x \neq y$, existe $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$,

(b) dado $x \in \Omega$, existe $f \in A$ tal que $f(x) \neq 0$,

(c) dados $x \in \Omega$ e $t \in \mathbb{R}^n$, com $t \neq 0$, existe $f \in A$ tal que $\frac{\partial f}{\partial t}(x) \neq 0$.

Para demonstrarmos o Teorema de Nachbin precisaremos provar alguns lemas auxiliares e o próximo resultado, que é um corolário do Teorema 2.12.

Corolário 6.3. O fecho em $C^k(\mathbb{R}^n)$ da subálgebra de todos os polinômios de n variáveis reais, com coeficientes reais e sem termo constante é a subálgebra de todas as funções $g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ tal que $g(0) = 0$.

Demonstração. Defina:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(n) &:= \{\text{ subálgebra dos polinômios de } n \text{ variáveis reais com coeficientes reais}\} \\ \mathcal{A} &:= \{p \in \mathcal{P}(n)\colon p \text{ não tem termo constante }\} \\ \mathcal{C} &:= \{g \in C^k(\mathbb{R}^n)\colon g(0) = 0.\} \end{aligned}$$

Queremos mostrar que $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{C}$. Seja $g \in \mathcal{C}$, então segue que $g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ e $g(0) = 0$. O Teorema 2.12 nos garante que, existe uma sequência de polinômios $P_j \in \mathcal{P}(n)$ tal que $P_j \to g$ em $C^k(\mathbb{R}^n)$.

Procuramos uma sequência de polinômios Q_j, tal que $Q_j(0) = 0$ (pois isso garante que $Q_j \in \mathcal{A}$) e $Q_j \to g$ em $C^k(\mathbb{R}^n)$. Para isso, basta tomar $Q_j = P_j - P_j(0)$, pois $Q_j = P_j - P_j(0) \longrightarrow g - g(0) = g$. Logo $g \in \overline{A}$ e daí $\mathcal{C} \subseteq \overline{\mathcal{A}}$. Como $\overline{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{C}$ é óbvio, segue o resultado.

$\square$

Lema 6.4. Sejam Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $N \geqslant n$. Suponhamos que as funções $f_1, \ldots, f_N \in C^k(\Omega)$ satisfaçam as seguintes condições:

(a) A aplicação $F = (f_1, \ldots, f_N)\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$ é um homeomorfismo entre Ω e sua imagem em R^N,

(b) A matriz jacobiana

$$\left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\right)_{1 \leqslant i \leqslant N, 1 \leqslant j \leqslant n}$$

tem posto n para cada $x \in \Omega$.

Então, para cada função $g \in C^k(\Omega)$ e cada ponto $a \in \Omega$, existem um subconjunto aberto W de $F(a)$ em $\mathbb{R}^n$ e uma função $\tilde{g} \in C^k(W)$ tais que

$$g(x) = \tilde{g}(f_1(x), \ldots, f_N(x))$$

para cada $x \in F^{-1}(W)$.

Demonstração. Fixemos $g \in C^k(\Omega)$ e $a \in \Omega$. Como vale (b) podemos reordenar as funções f_i de tal forma que a matriz quadrada

$$\left(\frac{\partial f_i(a)}{\partial x_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

seja invertível. Agora usando o Teorema da Aplicação Inversa obtemos uma vizinhança aberta U de a em Ω e um subconjunto aberto V de $\mathbb{R}^n$ tais que a aplicação $(f_1, \ldots, f_n)\colon U \longrightarrow V$ é uma bijeção, cuja inversa $\psi\colon V \longrightarrow U$ também é uma aplicação de classe C^k.

Defina $W = V \times \mathbb{R}^{N-n}$ e $\tilde{g} \in C^k(W)$ por

$$\tilde{g}(y_1, \ldots, y_N) = g \circ \psi(y_1 \ldots, y_n)$$

para cada $(y_1, \ldots, y_N) \in W$. Assim,

$$\tilde{g}(f_1(x), \ldots, f_N(x)) = g \circ \psi(f_1(x) \ldots, f_n(x)) = g(x),$$

para cada $x \in U$. Note que o lema ainda não está provado, pois não sabemos se $U = F^{-1}(W)$. Mas, usando (a) temos que $F(U)$ é um conjunto aberto de $F(\Omega)$ e assim, existe um subconjunto aberto W_1 de $\mathbb{R}^N$ tal que $F(U) = W_1 \cap F(\Omega)$. Como $F(U) \subseteq W$, temos que $F(U) = W \cap W_1 \cap F(\Omega)$. Agora, como F é injetora segue que

$$U = F^{-1}(F(U)) = F^{-1}(W \cap W_1 \cap F(\Omega)) = F^{-1}(W \cap W_1).$$

Logo temos que $W \cap W_1$ é uma vizinhança aberta de $F(a)$ em $\mathbb{R}^N$ e,

$$g(x) = \tilde{g}(f_1(x), \ldots, f_N(x))$$

para cada $x \in U = F^{-1}(W \cap W_1)$.

$\square$

Lema 6.5. Sejam Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $N \geqslant n$. Suponhamos que as funções $f_1, \ldots, f_N \in C^k(\Omega)$ satisfaçam as seguintes condições:

(a) A aplicação $F = (f_1, \ldots, f_N) \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$ é injetora,

(b) A matriz jacobiana

$$\left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right)_{1 \leqslant i \leqslant N, 1 \leqslant j \leqslant n}$$

tem posto n para cada $x \in \Omega$.

Então, para cada função $g \in C^k(\Omega)$ e para cada subconjunto compacto K de Ω, existe uma função $\tilde{g} \in C^k(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$g(x) = \tilde{g}(f_1, \ldots, f_N(x))$$

para cada $x \in K$.

Demonstração. Fixemos $g \in C^k(\Omega)$ e $K \subseteq \Omega$ compacto. Seja Ω_0 uma vizinhança aberta e relativamente compacta de K em Ω. Assim, a restrição de $F|_{\overline{\Omega_0}}$ é um homeomorfismo entre $\overline{\Omega_0}$ e sua imagem em $\mathbb{R}^N$.

Usando o Lema 6.4 e a compacidade de $F(K)$, encontramos subconjuntos abertos $W_1, \ldots, W_p$ de $\mathbb{R}^N$ e funções $g_1 \in C^k(W_1), \ldots, g_p \in C^k(W_p)$ tais que

$$F(K) \subseteq \bigcup_{j=1}^{p} W_j \text{ e },$$

$$g(x) = g_j \circ F(x)$$

para todo $x \in F^{-1}(W_j) \cap \Omega_0$ e $j = 1, \ldots, p$.

Seja $\{\phi_j\}_{j=1,\ldots,p}$ uma partição da unidade subordinada a cobertura $\{W_j\}_{j=1,\ldots,p}$, ou seja, $\phi_j \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\operatorname{supp}(\phi_j) \subseteq W_j$ e

$$\sum_{j=1}^{p} \phi_j(y) = 1$$

para cada $y \in F(K)$. Agora, definamos $\tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_p \in C^k(\mathbb{R}^N)$ por

$$\tilde{g}_j(y) = \begin{cases} \phi_j(y) g_j(y) \text{ se } y \in W_j \\ 0 \text{ se } y \notin W_j \end{cases}.$$

Definamos, então, $\tilde{g} \in C^k(\mathbb{R}^N)$ por

$$\tilde{g} = \sum_{j=1}^{p} \tilde{g}_j.$$

Então,

$$\tilde{g} \circ F(x) = \sum_{j=1}^{p} \tilde{g}_j(F(x)) = \sum_{j=1}^{p} \phi_j(F(x))g_j(F(x)) = \sum_{j=1}^{p} \phi_j(F(x))g(x) = g(x)$$

para cada $x \in K$.

$\square$

Demonstração. (Teorema de Nachbin)

Necessidade. Suponha que A seja densa em $C^k(\Omega)$ e sejam $x, y \in \Omega$, com $x \neq y$. Daí, segue que

$$A \nsubseteq B = \{f \in C^k(\mathbb{R}^n)\colon f(x) = f(y)\}$$

pois A é uma subálgebra densa de $C^k(\mathbb{R}^n)$ e B é uma subálgebra fechada própria de $C^k(\mathbb{R}^n)$. Então existe uma função $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$, o que mostra (a). De maneira análoga, seja $x \in \Omega$, então

$$A \nsubseteq C = \{f \in C^k(\mathbb{R}^n)\colon f(x) = 0\}$$

pois C também é uma subálgebra fechada e própria de $C^k(\mathbb{R}^n)$. Assim, existe uma função $f \in A$ tal qte $f(x) \neq 0$, o que mostra (b). Finalmente, para mostramos (c), note que se $x \in \Omega$ e $t \in \mathbb{R}^n$,

$$A \nsubseteq \{f \in C^k(\mathbb{R}^n)\colon \frac{\partial f(x)}{\partial t} = 0\}.$$

Suficiência. Suponha que as condições $(a), (b)$ e (c) sejam satisfeitas. Sejam K um subconjunto compacto de Ω e Ω_0 uma vizinhança aberta e relativamente compacta de K em Ω.

Usando o item (b) e a compacidade de $\overline{\Omega_0}$, encontramos funções $f_1, \ldots, f_p \in A$ tais que

$$(f_1(x), \ldots, f_p(x)) \neq (0, \ldots, 0), \text{ para cada } x \in \overline{\Omega_0}. \tag{6.1}$$

Agora, dados $x \in \Omega$ e $t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n, t \neq 0$ segue de (c) que existe uma função $g \in A$ tal que

$$\frac{\partial g(x)}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g(x)}{\partial x_j} t_j \neq 0.$$

Isso mostra que, dado $x \in \Omega$, nenhum funcional linear não nulo em $\mathbb{R}^n$ se anula sobre todos os vetores da forma

$$\left(\frac{\partial g(x)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial g(x)}{\partial x_n} \right), \text{ com } g \in A.$$

Daí, segue que, estes valores geram $\mathbb{R}^n$. Assim, para cada $x \in \Omega$ podemos encontrar funções $g_1, \ldots, g_n \in A$ tais que os vetores

$$\left(\frac{\partial g_i(x)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_n}\right), i = 1, \ldots, n$$

sejam linearmente independentes e, portanto

$$\det\left(\frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \neq 0.$$

Usando o Teorema da Aplicação Inversa e a compacidade de $\overline{\Omega_0}$, podemos encontrar subconjuntos abertos $V_1, \ldots, V_q$ de Ω e n-úplas $(g_{k_1}, \ldots, g_{k_n}) \in A^n, k = 1, \ldots, q$, tais que

$$\overline{\Omega_0} \subseteq \bigcup_{k=1}^{q} V_k, \tag{6.2}$$

$$\det\left(\frac{\partial g_{k_i}(x)}{\partial x_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \neq 0, \tag{6.3}$$

sempre que $x \in V_k$ e $k = 1, \ldots, q$ e a aplicação

$$x \in V_k \longmapsto (g_{k_1}(x), \ldots, g_{k_n}(x)) \in \mathbb{R}^n \tag{6.4}$$

é injetiva, para cada $k = 1, \ldots, q$.

Agora, considere o seguinte conjunto compacto

$$\mathcal{C} = (\overline{\Omega_0} \times \overline{\Omega_0}) \setminus \bigcup_{k=1}^{q} (V_k \times V_k).$$

Usando (a) e a compacidade de $\mathcal{C}$, podemos encontrar funções $h_1, \ldots, h_r \in A$ tais que

$$(h_1(x), \ldots, h_r(x)) \neq (h_1(y), \ldots, h_r(y)) \tag{6.5}$$

para cada $(x, y) \in \mathcal{C}$. Agora, reordenemos as funções $f_i (1 \leqslant i \leqslant p), g_{k_i} (1 \leqslant k \leqslant q, 1 \leqslant i \leqslant n)$ e $h_i (1 \leqslant i \leqslant n)$. Escreva

$$\begin{aligned} g_{k_i} &= f_{p+(k-1)n+i}, 1 \leqslant k \leqslant q, 1 \leqslant i \leqslant n \\ h_i &= f_{p+qn+i}, 1 \leqslant i \leqslant r. \end{aligned}$$

Seja $N = p + qn + r$. Usando, (6.1),(6.2),(6.3),(6.4) e (6.5) concluímos que as funções $f_1, \ldots, f_N \in A$ satisfazem as seguintes condições:

(I) para cada $x \in \overline{\Omega_0}$, existe i tal que $f_i(x) \neq 0$,

(II) a matriz jacobiana

$$\left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\right)_{1 \leqslant i \leqslant N, 1 \leqslant j \leqslant n}$$

tem posto n para cada $x \in \overline{\Omega_0}$,

(III) dados $x, y \in \overline{\Omega_0}$, com $x \neq y$, existe i tal que $f_i(x) \neq f_i(y)$.

Em consequência de (II) e (III), o Lema 6.5 se aplica para Ω_0. Assim, existe $\tilde{g} \in C^k(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$g(x) = \tilde{g}(f_1(x), \ldots, f_N(x)), \text{ para cada } x \in K. \tag{6.6}$$

Agora, segue de (I) que a imagem de K pela aplicação

$$F = (f_1, \ldots, f_N) \colon \Omega_0 \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

não contém a origem. Por outro lado, sem perda de generalidade, podemos supor que $\tilde{g}(0) = 0$. Aplicando o Corolário 6.3 temos que, dado $\delta > 0$, podemos encontrar um polinômio P de N variáveis reais, com coeficientes reais e sem termo constante, tal que

$$\left|\frac{\partial^{l_1 + \cdots + l_N}}{\partial y_1^{l_1} \ldots \partial y_N^{l_N}}(\tilde{g} - P)(y)\right| < \delta \tag{6.7}$$

sempre que $y \in F(K)$ e $l_1 + \cdots + l_N \leqslant k$. Aplicando a regra da cadeia um número finito de vezes vemos que, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que (6.6) e (6.7) implicam que

$$\left|\frac{\partial^{k_1 + \cdots + k_n}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}(g(x) - P(f_1(x), \ldots, f_N(x)))\right| < \varepsilon$$

sempre que $x \in K$ e $k_1 + \cdots + k_n \leqslant k$, o que completa a prova, uma vez que $P \circ (f_1, \ldots, f_N) \in A$. $\square$

Bibliografia

[1] Bernstein, S. N., *Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités*, Communications of the Kharkov Mathematical Society **13**(1912), 1-2.

[2] Bourbaki, N., *Topologie Générale*, Ch.I, Structures Topologiques, 4ª edição, Hermann, Paris, 1965.

[3] Engelking, R., *General Topology*, Heldermann Verlag Berlin, 1989.

[4] Figueiredo, D. G., *Análise I*, LTC, 2ª edição, 1996.

[5] Hönig, C. S., *Aplicações da Topologia à Análise*, IMPA, 1976.

[6] Kakutani, S., *Concrete representation of abstract(M)-Spaces*, Annals of Mathematics **42**(1941), 994-1024.

[7] Kelley J. L., *General Topology*, Von Nostrand Reinhold Company, 1970.

[8] Kreyszig E., *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, 1978.

[9] Lima E. L., *Curso de Análise*, Projeto Euclides, Volume 2, Décima edição, Rio de Janeiro, 2008.

[10] Lima E. L., *Elementos de Topologia Geral*, SBM, Textos Universitários, Rio de Janeiro, 2009.

[11] Lopes W. A., *O Teorema de Stone-Weierstrass e Aplicações*, Tese de Mestrado em Matemática, FAMAT-UFU, 2009.

[12] Mujica J., *Os trabalhos de Leopoldo Nachbin*, Matemática Universitária, 16(1994), 22-36.

[13] Mujica J., *Subálgebras densas de funciones diferenciables*, Cubo Matemática Educacional **3**(2001), 121-128.

[14] Mujica J., *Notas de Topologia Geral*, Notas de Aula, IMECC-UNICAMP, 2005.

[15] Nachbin, L., *Sur les algèbres denses de fonctions differéntiables sur une varieté*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris **228**(1949), 1549-1551.

[16] Nachbin, L., *Elements of Approximation Theory*, Notas de Matemática Nº 33, IMPA, 1965.

[17] Narasimhan, R., *Analysis on Real and Complex Manifolds*, North-Holland Publishing Company Amsterdam, 1968.

[18] Pellegrino, D., *Topologia Geral*, Notas de Aula, 2009.

[19] Rudin, W., *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1970.

[20] Saxe, K., *Beginning Functional Analysis*, Springer, New York, 2002.

[21] Spivak, M., *Calculus on Manifolds*, Addison-Wesley Publishing Company, 1995.

[22] Stone, M., *Applications of the theory of boolean rings to general topology*, Transactions of the American Mathematical Society **41**(1937), 375-481.

[23] Stone, M., *The generalized Weierstrass approximation theorem*, Mathematical Magazine **21**(1948), 167-184, 237-254.

[24] Weierstrass, K., *Über die Analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen reeler Argumente*, Sitzungsberichte der Königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlim (1885) 663-639, 789-805. Também em: Karl Weierstrass, Mathematische Worke III, primera reimpressão, Olms e Johnson, Hildesheim e Nova York, 1967, pags. 1-37.

[25] Willard, S., *General Topology*, Dover Publications, Inc., New York, 2004.

[26] Young, M., *The Stone-Weierstrass Theorem*, Queen's University at Kingston, 2006.