Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática

Grupos Abelianos-por-Nilpotentes do Tipo Homológico FP_3

Claudenir Freire Rodrigues[†]

Doutorado em Matemática Campinas - SP

Orientadora: Profa. Dra. Dessislava Hristova Kochloukova

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro da Fapeam.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues – CRB8 / 2116

Rodrigues, Claudenir Freire

R618g Grupos abelianos-por-nilpotentes do tipo homológico FP_3 / Claudenir Freire Rodrigues -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2006.

Orientador : Dessislava Hristova Kochloukova

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Grupos nilpotentes. 2. Seqüências spectrais (Matemática). 3. Módulos (Álgebra). I. Kochloukova, Dessislava Hristova. II. Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Abelian-by-nilpotent groups of homological type FP_3

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Nilpotent groups. 2. Spectral sequence (Mathematical). 3. Modules (Algebra).

Área de concentração: Álgebra Homológica

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora : Prof. Dra. Dessislava Hristova Kochloukova (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Alexei Nikolaevich Krassilnikov (UNB)
Profa. Dra. Aline Gomes da Silva Pinto (UNB)
Prof. Dr. Antônio José Engler (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Paulo Roberto Brumatti (IMECC-UNICAMP)

Data da defesa: 04/12/2006

Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática

Grupos Abelianos-por-Nilpotentes do Tipo Homológico FP_3

Banca examinadora:

Prof. Dr. Dessislava Hristova Kochloukova.

Prof. Dr. Paulo Roberto Brumatti.

Prof. Dr. Alexei Nicholaevich Krassilnikov.

Prof. Dr. Antônio José Engler.

Prof. Dra. Aline Gomes da Silva Pinto.

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Claudenir Freire Rodrigues** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 04 de Dezembro de 2006.

Profa. Dra. Dessislava Hristova Kochloukova

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **Doutor em Matemática**.

Tese de Doutorado defendida em 04 de dezembro de 2006 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof. (a). Dr (a). DESSISLAVA HRISTOVA KOCHLOUKOVA

Prof. (a). Dr (a). ALINE GOMES DA SILVA PINTO

Prof. (a). Dr (a). ALEXEI NIKOLAEVICH KRASSILNIKOV

Prof. (a). Dr (a). ANTONIO JOSÉ ENGLER

Prof. (a) Dr. (a) PAULO ROBERTO BRUMATTI

2007052004

AGRADECIMENTOS

- A Deus pela vida;
- À minha querida mãe Conceição por sempre me apoiar;
- À Profa. Dessislava pela orientação. E aproveito a oportunidade para parabenizar a mesma por sua grande humildade.
- Aos amigos que contribuiram e fizeram parte de minha convivência durante o curso; a todos os membros do Departamento de Futebol do IMECC os quais não vou citar aqui por falta de espaço;
- Ao Prof. Lázaro Lira pelo estímulo e incentivo dados desde os tempos de colégio até os dias de hoje; a todos os professores que tive no IMECC e aos membros da Secretaria de Pós-Graduação do IMECC.
- Ao Prof. Antônio José Engler que mesmo não sendo meu orientador provisório e nem ter qualquer vinculo acadêmico comigo, teve muita disposição em me ajudar a elaborar o projeto de pedido de bolsa de doutorado junto à Fapeam, a qual sou grato pelo apoio financeiro.
- Aos irmãos Caio Daniel e Priscila.

Resumo

Grupos Abelianos-por-Nilpotentes Finitamente de Tipo Homológico FP_3

Neste trabalho estudamos grupos abstratos finitamente gerados G que são extensões cindidas de um grupo abeliano A por um grupo Q nilpotente de classe 2. Mostramos que se G tem tipo homológico FP_3, então o quociente G/N também tem tipo homológico FP_3 onde N é o fecho normal do centro de Q em G. Observamos que não existe classificação quando G pode ter tipo FP_3, nem classificação para tipo FP_2 ou ser finitamente apresentável. Por causa disso nós trabalhamos com um quociente especifico de G. Ainda fica em aberto se cada quociente de G tem tipo FP_3 quando G tem tipo FP_3. Observamos que isso vale quando G é grupo metabeliano, nesse caso a teoria de Bieri-Strebel pode ser aplicada.

Abstract

Abelian-by-Nilpotent Groups of Homological Type FP_3

We study abstract finitely generated groups G that are split extensions from A abelian group by Q nilpotent group of class two. We show that if G has homological type FP_3 then the quotient group G/N has homological type FP_3 too, where N is the normal closure of the center of Q in G. Since there is no classification when G is of type FP_3, nor when G is of type FP_2 or finitely presented we work with one specific quotient. It is an open problem whether every quotient of G has type FP_3. This holds if G is a metabelian group and in this case the Bieri-Strebel theory applies.

Sumário

Introdução

Um grupo G tem tipo homológico FP_m sobre um anel R se existir uma resolução projetiva do RG-módulo trivial R com todos os módulos projetivos finitamente gerados em dimensão $\leq m$. O grupo G tem tipo homológico FP_m se tem tipo homológico FP_m sobre $\mathbb{Z}$. A propriedade FP_m foi primeiro definida por R. Bieri e B. Eckmann, ela é a versão homológica de uma propriedade homotópica F_m definida por C.T.C. Wall [23]. Cada grupo G tem tipo homológico FP_0 e G tem tipo FP_1 se e somente se G é finitamente gerado como grupo. É fácil ver que cada grupo finitamente apresentável (em termos de geradores e relações) tem tipo FP_2. Por muito tempo foi um problema em aberto se a inversa é válida, o resultado negativo foi descoberto recentemente em [2], isto é, existe grupo de tipo FP_2 que não é finitamente apresentável.

No caso de um grupo metabeliano finitamente gerado H existe uma conjectura (Conjectura FP_m) que sugere quando H tem tipo homológico FP_m. Esta conjectura liga o tipo FP_m com propriedades do invariante de Bieri-Strebel (a ser definido na seção 6). A conjectura vale para $m = 2$ [7] e a demonstração do caso $m = 2$ implica que cada grupo metabeliano de tipo FP_2 é finitamente apresentável (já discutimos que isso não vale em geral). A conjectura ainda está em aberto embora o caso de extensão cindida de grupos abelianos tenha sido demonstrado para $m = 3$ [6] e para o caso de grupos de posto de Prufer finito [1]. Um grupo G tem posto de Prufer finito se existe um número natural d tal que se um subgrupo de G é finitamente gerado então o mesmo subgrupo pode ser gerado por d elementos. Se a Conjectura FP_m vale, temos que cada quociente de grupo metabeliano de tipo FP_m tem também tipo FP_m. Para m em geral não existe demonstração independente disso (sem usar a Conjectura FP_m). Mais recentemente foi demonstrado [13] que cada quociente de grupo metabeliano de tipo FP_n (que é extensão cindida de grupos abelianos) tem tipo FP_n para $n = 4$ e $n = 3$. O caso $n = 3$ segue também do fato de que a Conjectura FP_3 vale no caso de extensão cindida de grupos abelianos.

Nesta tese vamos estudar grupos finitamente gerados G que são produtos semidiretos $A \rtimes Q$, onde A é grupo abeliano e Q é grupo nilpotente de classe 2. Para tais grupos não existe classificação quando G é finitamente apresentável e não é conhecido se a propriedade FP_2 coincide com ser finitamente apresentável (embora provavelmente as duas propriedades para esse tipo de grupos sejam equivalentes). Alguns resultados sobre a estrutura de A como $\mathbb{Z}[Q]$-módulo no caso em que G for finitamente apresentável foram estudados por C. Brookes e J. Groves [9], [10]. É fácil ver que se G é finitamente gerado então, G satisfaz a condição max-n (cada cadeia crescente de subgrupos normais estabiliza). Isso é equivalente a cada subgrupo normal de G ser o fecho normal de subconjunto finito de G e segue do fato que A é $\mathbb{Z}Q$-módulo finitamente gerado sobre o anel

Noetheriano $\mathbb{Z}Q$. Em particular, se G tem tipo homológico FP_2 cada quociente de G tem tipo FP_2.

O nosso objetivo foi estudar esses grupos em direção diferente e verificar se a propriedade FP_3 passa para quocientes. Conseguimos isso num caso particular. O nosso resultado principal é

Teorema *Sejam $G = A \rtimes Q$ um grupo de tipo FP_3 e N o fecho normal em G do centro $Z(Q)$ de Q, onde A é abeliano e Q é nilpotente de classe 2. Então G/N tem tipo homológico FP_3.*

Um grupo G nas condições do Teorema acima será dito um grupo abeliano-por-nilpotente. De fato, se $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ são classes de grupos dizemos que um grupo H é $\mathcal{X}$-por-$\mathcal{Y}$ se existe um subgrupo normal R de H tal que $R \in \mathcal{X}$ e $H/R \in \mathcal{Y}$.

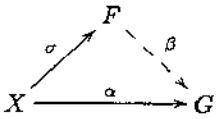
A demonstração do teorema está quebrada em pedaços pequenos nos últimos três capítulos da tese e usa construções algébricas dos artigos [7] e [14], mais uma generalização de um resultado de Bieri-Strebel que envolve métodos de topologia algébrica. Nos primeiros seis capítulos nós discutimos resultados preliminares de teoria de grupos, topologia algébrica e álgebra homológica.

Capítulo 1

Grupos Finitamente Apresentáveis

1.1 Grupos Livres

Definição 1.1.1 *Sejam F um grupo, X um conjunto não vazio e $\sigma : X \to F$ uma função. Diz-se que (F, σ) é livre em X se a cada função α de X para um grupo G qualquer existe um único homomorfismo $\beta : F \to G$ tal que $\alpha = \beta\sigma$ (X é a base de F e geralmente omitimos a função σ). O posto de F é a cardinalidade de X.*



A função σ é necessariamente injetiva e F também é livre em $Im\,\sigma$ com a inclusão $Im\,\sigma \hookrightarrow F$ substituindo σ. Outra consequência da definição, como veremos na construção de grupos livres, é que $Im\,\sigma$ gera F.

Teorema 1.1.2 *Se X é um conjunto não vazio, existe um grupo F e uma função $\sigma : X \to F$ tal que (F, σ) é livre em X e $F = \langle Im\,\sigma \rangle$.*

Demonstração: Escolha um conjunto disjunto de X com a mesma cardinalidade, o denotamos por conveniência de notação $X^{-1} = \{x^{-1} | \, x \in X\}$ onde é claro, x^{-1} é apenas um símbolo. Por uma palavra em X entendemos uma sequência finita de símbolos em $X \cup X^{-1}$, escrita convenientemente

$$w = x_1^{\epsilon_1} \dots x_r^{\epsilon_r},$$

$x_i \in X$, $\epsilon_i = \pm 1$, $r \geq 0$: no caso $r = 0$ a sequência é vazia e w é palavra vazia, a denotamos por 1. Palavras são iguais quando têm os mesmos elementos em posições correspondentes.
O produto de duas palavras $w = x_1^{\epsilon_1} \dots x_r^{\epsilon_r}$ e $v = y_1^{\eta_1} \dots y_t^{\eta_t}$ é formado pela justaposição

$$wv = x_1^{\epsilon_1} \dots x_r^{\epsilon_r} y_1^{\eta_1} \dots y_t^{\eta_t}$$

com a convenção de que $w1 = 1w = w$. A inversa de w é a palavra $w^{-1} = x_r^{-\epsilon_r} \dots x_1^{-\epsilon_1}$ e $1^{-1} = 1$,
Definimos no conjunto S das palavras em X uma relação de equivalência como segue. Duas palavras w e v são equivalentes, $w \sim v$, se é possível passar de uma para a outra por uma sequência finita de operações dos seguintes tipos:

a) inserir xx^{-1} ou $x^{-1}x$ ($x \in X$), em uma palavra

b) deletar xx^{-1} ou $x^{-1}x$.

Seja $F = \{[v] | v \in S\}$ o conjunto das classes de equivalência. Se $w \sim w'$ e $v \sim v'$ é imediato que $wv \sim w'v'$, isto define bem o produto

$$[w][v] = [wv],$$

temos ainda $[w][1] = [w] = [1][w]$ e $[w][w^{-1}] = [ww^{-1}] = [1]$. Como é óbvio que $(wv)u = w(vu)$, este produto é associativo. Segue-se que F é um grupo em relação a esta operação binária.

Considere $\sigma : X \to F$ definida por $\sigma x = [x]$. Veremos que (F, σ) é livre em X. Seja $\alpha : X \to G$ uma função de X a um grupo G.
Defina $\overline{\beta} : S \to G$ por $\overline{\beta}(x_1^{\epsilon_1} \dots x_r^{\epsilon_r}) = g_1^{\epsilon_1} \dots g_r^{\epsilon_r}$ onde $g_i = \alpha x_i$.
Agora $w \sim v$ implica que $\overline{\beta}w = \overline{\beta}v$ porque em G produtos como gg^{-1} ou $g^{-1}g$ são iguais a 1_G. É portanto possível definir

$$\beta : F \to G \text{ por } \beta[w] = \overline{\beta}w.$$

Então $\beta([w][v]) = \beta[wv] = \overline{\beta}(wv) = \overline{\beta}w\overline{\beta}v$ por definição de β. Assim β é um homomorfismo. Além disso, $\beta\sigma x = \beta[x] = \overline{\beta}x = \alpha x$, $x \in X$. Finalmente, se $\gamma : F \to G$ é um homomorfismo com $\gamma\sigma = \alpha$, então $\gamma\sigma = \beta\sigma$ e γ e β coincidem em $Im\,\sigma$, mas claramente $F = \langle Im\,\sigma \rangle$, assim $\gamma = \beta$. □

Daremos uma descrição mais conveniente do grupo livre construído. Uma palavra $w \in X$ é reduzida quando é vazia ou se não contêm símbolos da forma xx^{-1} ou $x^{-1}x$, $x \in X$.
Começando com qualquer palavra w pode-se por um processo canônico descobrir uma palavra w^* em $[w]$, reduzida. Se w é reduzida não há o que fazer. Caso contrário, ela possui pelo menos um par de símbolos consecutivos da forma xx^{-1} ou $x^{-1}x$, deletando tais pares obtemos uma palavra w' de comprimento menor. O mesmo procedimento deve ser aplicado a w'.Após um número finito de repetições deste procedimento alcançamos um palavra reduzida w^* que é equivalente a w. Pode ser mostrado que se $w \sim v$ então $w^* = v^*$ [12]. Isso nos diz que

Lema 1.1.3 *Cada classe de equivalência contem uma única palavra reduzida.*

Por 1.1.3 cada elemento do grupo livre F construído, pode ser escrito unicamente na forma $[w]$ com $w = x_1^{\epsilon_1} \dots x_r^{\epsilon_r}$ palavra reduzida onde $\epsilon_i = \pm 1$, $r \geq 0$ e sem termos da forma xx^{-1} ou $x^{-1}x$. Por definição de multiplicação em F temos que $[w] = [x_1]^{\epsilon_1} \dots [x_r]^{\epsilon_r}$. Multiplicando juntos termos consecutivos envolvendo um mesmo elemento x_i, deduzimos que, depois de renomear os $x_i's$, o elemento $[w]$ pode ser escrito na forma

$$[w] = [x_1]^{l_1} \dots [x_r]^{l_r}$$

onde $s \geq 0$, $l_i \neq 0$ e $x_i \neq x_{i+1}$. Observe que a palavra reduzida pode ser reafirmada a partir disto, assim a expressão é única. Por simplicidade de notação devemos identificar w com $[w]$. Por convenção cada elemento de F pode ser unicamente escrito na forma

$$w = x_1^{l_1} \dots x_r^{l_s}.$$

Esta é a forma normal de w.
A existência de uma forma normal é característica de grupos livres conforme

Teorema 1.1.4 *[21, Cap. 2, 2.1.3] Sejam G um grupo e X um subconjunto de G. Se cada $g \in G$ pode ser escrito unicamente na forma $g = x_1^{l_1} \dots x_r^{l_s}$ onde $x_i \in X$, $s \geq 0$, $l_i \neq 0$ e $x_i \neq x_{i+1}$ então G é livre em X.*

Teorema 1.1.5 *[21, Cap. 2, 2.1.4] Se F_1 é livre em X_1 e F_2 é livre em X_2 com $|X_1| = |X_2|$, então $F_1 \cong F_2$.*

A grande importância de grupos livres na teoria de grupos deve-se ao próximo resultado.

Teorema 1.1.6 *[21, Cap. 2, 2.1.6] Sejam G um grupo gerado por um conjunto X e F um grupo livre em um conjunto Y. Se $\alpha : Y \to X$ é uma aplicação sobrejetora, ela extende-se a um epimorfismo de F para G. Em particular cada grupo é imagem de um grupo livre.*

1.2 Apresentação de Grupos e Grupos Finitamente Apresentáveis

Os fatos básicos sobre apresentação de grupos e grupos finitamente apresentáveis podem ser encontrados em [16] e [12]. Uma descrição de um grupo como imagem de um grupo livre é chamada uma apresentação. Mais exatamente uma apresentação livre de um grupo G é um homomorfismo sobrejetor π de um grupo livre F para G. Se $R = Ker\,\pi$, os elementos de R chamam-se relações da apresentação.
Suponha que $\pi : F \to G$ é uma apresentação livre de um grupo G, Y é um conjunto livre de geradores de F e S é um conjunto de geradores normais de $Ker\,\pi$. Se $\pi Y = X$, então claramente X gera G. Segue que $r \in F$ é uma relação de π se e só se r pode ser escrito na forma $(s_1^{\epsilon_1})^{f_1} \dots (s_k^{\epsilon_k})^{f_k}$ onde $s_i \in S$, $\epsilon_i = \pm 1$ e $f_i \in F$. Neste caso, algumas vezes dizemos que r é uma consequência de S.
A apresentação π, junto com as escolhas de Y e S, determina um conjunto de geradores e relações definidas para G, em símbolos

$$G = \langle Y | S \rangle \tag{1}$$

É mais conveniente listar os geradores de G e as relações definidas $s(x) = 1$ em termos destes geradores X, isto é,

$$G = \langle X |\, s(x) = 1,\, s \in S \rangle \tag{2}$$

Devemos nos referir a (1) ou a (2) como uma apresentação de G.
Reciprocamente é fácil construir, em princípio pelo menos, um grupo tendo uma apresentação com um dado conjunto de geradores e relações. Seja Y qualquer conjunto não vazio e seja S um subconjunto do grupo livre em Y. Defina R o fecho normal de S em F denotado por $\langle S^F \rangle$ e ponha $G = F/R$. Portanto a projeção canônica $\pi : F \to G$ é uma apresentação de G o qual tem o conjunto de geradores e relações definidas $\langle Y|S \rangle$.

Teorema 1.2.1 *(de von Dyck)[21, Cap. 2, 2.2.1] Sejam G e H grupos com apresentações $\epsilon : F \to G$ e $\delta : F \to H$ tais que cada relação de ϵ é também relação de δ. Então, a função $\epsilon(f) \to \delta(f)$ é um homomorfismo sobrejetor de G para H.*

Uma apresentação de um grupo $G = \langle X|R \rangle$ diz-se finita quando X e Y são conjuntos finitos. Isto independe da apresentação escolhida no sentido do seguinte resultado.

Teorema 1.2.2 *[21, Cap. 2, 2.2.3] Se X é qualquer conjunto de geradores de um grupo finitamente apresentável G, o grupo tem uma apresentação finita da forma $\langle X_0 | r_1 = \ldots r_t = 1 \rangle$ onde $X_0 \subset X$.*

Teorema 1.2.3 *[21, Cap. 2, 2.2.4] Seja $N \lhd G$ com N e G/N finitamente apresentáveis. Então G é finitamente apresentável.*

Capítulo 2

Propriedades Homológicas

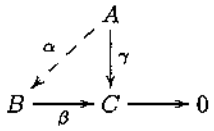
2.1 Propriedades Homológicas Básicas

Vamos começar este capítulo destacando propriedades de funtores especiais. Para ver detalhes e demonstrações desta seção citamos [22] . Seja R um anel. Salvo menção em contrário todos os R-módulos são R-módulos à esquerda.

Definição 2.1.1 *Sejam A, B e C R-módulos à esquerda.*

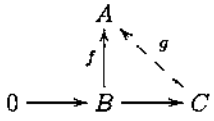
1) *A é livre se existe um conjunto $\{a_i : i \in I\} \subset A$, chamado base de A, tal que cada $a \in A$ tem uma única expressão $a = \sum r_i a_i$, onde $r_i \in R$ e a menos de uma quantidade finita, os r_i são todos nulos.*

2) *Considere o diagrama com β epimorfismo*



onde γ é um homomorfismo qualquer. Se existe um homomorfismo α com $\gamma = \beta\alpha$, diz-se que A é um R-módulo projetivo.

3) *A é injetivo se para cada R-módulo C e cada R-submódulo B de C, cada homomorfismo $f : B \to A$ pode ser extendido a um homomorfismo $g : C \to A$.*



4) *Uma resolução livre (F, δ) (resp. projetiva) de A é uma sequência exata de R-módulos*

$$\ldots \to F_1 \xrightarrow{\delta_1} F_0 \xrightarrow{\delta_0} A \to 0$$

onde cada F_n é livre (resp. projetivo), isto é, para cada i temos $Im(\partial_i) = Ker(\partial_{i-1})$.

5) Uma resolução injetiva (E, l) de A é uma sequência exata de R-módulos

$$0 \to A \xrightarrow{\varepsilon} E_0 \xrightarrow{l_0} E_1 \to \dots$$

onde cada E_n é injetivo.

***Lema 2.1.2** [22, Cap. 3, Teor. 3.14] Seja P um R-módulo à esquerda qualquer.*

a) P é o quociente de um módulo projetivo.

b) P é projetivo se e só P é somando de um módulo livre.

Dado um complexo de R-módulos à esquerda (A, δ), isto é, uma sequência de R-módulos e homomorfismos

$$A = \dots \to A_{n+1} \xrightarrow{\delta_{n+1}} A_n \xrightarrow{\delta_n} A_{n-1} \dots \to,$$

$n \in \mathbb{Z}$ com $\delta_n \delta_{n+1} = 0$, seu *n-ésimo módulo de homologia* é definido por

$$H_n(A) = Ker\, \delta_n / Im\, \delta_{n+1}.$$

denotamos $Ker\, \delta_n = Z_n(A)$ e $Im\, \delta_{n+1} = B_n(A)$.

E se $f : (A, d) \to (A', d')$ é uma aplicação de cadeia, ou seja, uma família de aplicações $\{f_n : A_n \to A'_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, tais que os diagramas a seguir comutam

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & A_n & \xrightarrow{d_n} & A_{n-1} & \longrightarrow \cdots \\
& \downarrow{\scriptstyle f_{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_n} & & \downarrow{\scriptstyle f_{n-1}} & \\
\cdots \longrightarrow & A'_{n+1} & \xrightarrow[d'_{n+1}]{} & A'_n & \xrightarrow[d'_n]{} & A'_{n-1} & \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

então definimos

$$H_n(f) : H_n(A) \to H_n(A')$$

por

$$z_n + B_n(A) \to f_n z_n + B_n(A').$$

Definição 2.1.3 *Uma categoria C diz-se pré-aditiva quando para cada par de objetos A e B em C, $Hom_C(A, B)$ tem estrutura de grupo abeliano (aditivo) e vale a distributividade em relação à composição de C. E um funtor entre categorias aditivas $F : C \to \mathcal{D}$ (contra ou covariante) diz-se aditivo se $F(f + g) = Ff + Fg$ para cada par de morfismos f e g em um mesmo grupo aditivo $Hom_C(A, B)$.*
Um funtor covariante (resp. contravariante) entre categorias de módulos diz-se exato à esquerda quando preserva monomorfismos (resp. transforma epimorfismos em monomorfismos) e diz-se exato à direita quando preserva epimorfismos (resp. converte monomorfismos em epimorfismos).
Finalmente, um funtor covariante ou contravariante entre categorias de módulos diz-se exato se tal funtor é simultaneamente exato à direita e à esquerda.

Considerando a categoria *Comp* formada por todos os complexos de R-módulos e aplicações de cadeia e denotando por R^M a categoria dos $R-$módulos à esquerda (ambas são aditivas) temos

Teorema 2.1.4 *[22, Cap. 6, Teor. 6.1] Para cada n,* $H_n : \text{Comp} \to R^M$ *é um funtor aditivo.*

No que segue vamos considerar funtores aditivos em categoria de módulos.
Dado um funtor aditivo T e um R-módulo á direita A, escolha uma resolução projetiva (P, d) de A

$$\ldots \to P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \to \ldots \to P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} A \to 0,$$

e seja (P_A, d) o complexo correspondente omitindo-se A, ou melhor,

$$\ldots \to P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \to \ldots \to P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \to 0$$

Definição 2.1.5 *Para cada n definimos o* n-ésimo funtor derivado a esquerda *de T por*

$$(L_nT)A = H_n(TP_A) = Ker\,Td_n/Im\,Td_{n+1}.$$

Se $T = \ \otimes_R B$, onde B é um R-módulo à esquerda, definimos $Tor_n^R(\ , B) = L_nT$. Podemos também definir Tor fixando a primeira componente, caso no qual temos $T = A\otimes_R$ e definimos $L_nT = Tor_n^R(A, \ )$, onde A é um R-módulo à direita. Em particular,

$$Tor_n^R(\ , B) = Ker(d_n \otimes 1)/Im(d_{n+1} \otimes 1)$$

Teorema 2.1.6 *[22, Cap. 8, Teor. 8.8] As definições de* $Tor_n^R(A, B)$ *são independentes da escolha da resolução projetiva de A ou da escolha da resolução projetiva de B.*

Em relação às duas definições do funtor Tor temos

Teorema 2.1.7 *[22, Cap. 7, Teor. 7.9] Se*

$$\ldots \to P_1 \to P_0 \to A \to 0$$

e

$$\ldots \to Q_1 \to Q_0 \to B \to 0$$

são resoluções projetivas de R-módulos, onde A é um R-módulo à direita e B é um R-módulo à esquerda, então para todo $n \geq 0$,

$$H_n(P_A \otimes B) \cong H_n(A \otimes Q_B).$$

Portanto as duas definições de Tor coincidem em (A,B).

Sejam T um funtor covariante, uma resolução injetiva (E, d) de um R-módulo à esquerda A

$$0 \to A \xrightarrow{\epsilon} E_0 \xrightarrow{d_0} E_1 \to \ldots \to E_n \xrightarrow{d_n} E_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} \ldots,$$

e (E_A, d) o complexo correspondente deletado de A.

Definição 2.1.8 *O* n-ésimo funtor derivado à direita *de T é dado por*

$$(R^nT)A = H_{-n}(TE_A) = KerTd_{-n}/ImTd_{-n+1}.$$

A definição de $(R^nT)f = H_{-n}(f)$, para $f : A \to B$, é exatamente como a definição de $H_n(f)$

Em particular, para $T = Hom_R(C, \ )$ para um R-módulo à esquerda C, definimos

$$Ext^n_R(C, \ ) = R^nT.$$

Em se tratando de funtores aditivos em categoria de módulos os funtores derivados R^nT e L_nT são bem definidos [22]. Mas nesse sentido vamos nos ocupar a seguir apenas com os funtores Tor e Ext.

Teorema 2.1.9 *[22, Cap. 6, Teor. 6.15] A definição de $Ext^n_R(C, A)$ independe da escolha da resolução injetiva de A.*

E se T é um funtor contravariante, considerando uma resolução projetiva (E, d) de um R-módulo à esquerda C definimos

$$(R^nT)C = H^n(TE_A) = KerTd_{n+1}/ImTd_n,$$

No caso particular em que $T = Hom_R(\ , A)$ definimos

$$R^nT = ext^n_R(\ , A)$$

Teorema 2.1.10 *[22, Cap. 6, Cor. 6.18] A definição de $ext^n_R(C, A)$ independe da escolha da resolução projetiva de C.*

Teorema 2.1.11 *[22, Cap. 6, Teor. 6.18] Sejam*

$$0 \to A \to E^0 \to E^1 \to \dots$$

uma resolução injetiva e

$$\dots \to P_1 \to P_0 \to C \to 0$$

uma resolução projetiva, ambas de R-módulos à esquerda. Temos que para todo $n \geq 0$

$$H^n(Hom(P_C, A)) \cong H^n(Hom(C, E_A)).$$

Portanto os funtores Ext^n_R e ext^n_R coincidem em (C,A). Usualmente adota-se a notação Ext^n_R.

De acordo com os resultados anteriores podemos calcular os grupos Ext via resoluções projetivas no primeiro argumento ou resoluções injetivas no segundo argumento. Também os grupos Tor podem ser calculados usando resoluções projetivas (de módulos à direita) no primeiro argumento ou resoluções projetivas (de módulos à esquerda) no segundo argumento.

Definição 2.1.12 *Sejam G um grupo e $\mathbb{Z}$ o anel dos inteiros considerado como um $\mathbb{Z}G$-módulo trivial. Definimos*

$$H^n(G,A) = Ext^n_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},A)$$

onde $\mathbb{Z}$ e A são $\mathbb{Z}G$-módulos à esquerda e

$$H_n(G,A) = Tor_n^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},A)$$

com $\mathbb{Z}$ sendo $\mathbb{Z}G$-módulo à direita e A um $\mathbb{Z}G$-módulo à esquerda.

Os grupos H^n são chamados de *grupos de cohomologia* de G (com coeficientes em A) e os grupos H_n são os *grupos de homologia* de G.

Lema 2.1.13 *Sejam G um grupo, A um $\mathbb{Z}G$-módulo à esquerda e H um subgrupo normal de G. Então $\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}H} A$ é um $\mathbb{Z}(G/H)-$módulo á esquerda.*

Demonstração: Considere $\Omega = Aug\,\mathbb{Z}H$ onde Aug denota o ideal ampliado, isto é, núcleo do homomorfismo de aneis $\mathbb{Z}H \to \mathbb{Z}$ que envia H em 1 e é identidade em $\mathbb{Z}$. Como $A/\Omega A$ é um $\mathbb{Z}(G/H)-$módulo com G/H ação definida por

$$(gH)(a+\Omega A) = ga + \Omega A.$$

e $\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}H} A \cong A/\Omega A$ via $z\otimes a \to a+\Omega A$, o resultado segue. □

Lema 2.1.14 *Sejam G um grupo e H um subgrupo de G não necessariamente normal. Então cada $\mathbb{Z}G-$módulo projetivo à esquerda P é um $\mathbb{Z}H-$módulo projetivo à esquerda.*

Demonstração: Para cada transversal T de H em G (i.e. $G = \cup_{t\in T} Ht$ e a união é disjunta) temos que $\mathbb{Z}G$ é $\mathbb{Z}H-$módulo livre com base T. Como P é somando de um $\mathbb{Z}G$-módulo livre então P é somando de um $\mathbb{Z}H$-módulo livre e pelo Lema 2.1.2 P é um $\mathbb{Z}H$-módulo projetivo, segue-se o resultado. □

2.2 Resoluções Finitamente Geradas

Vamos destacar alguns critérios sobre a condição FP_n, indicamos [3] como referência às demonstrações. Uma outra referência boa é [11].

Definição 2.2.1 *Dizemos que um $R-$módulo A à esquerda é de tipo FP_n quando existe uma resolução projetiva $\underline{P} \to A$ com P_i finitamente gerado para todo $i \leq n$. Se os módulos P_i são finitamente gerados para todo i então diz-se que A é de tipo FP_∞. De modo geral cada módulo admite resolução projetiva.*

1) Observe que A é de tipo FP_0 se e somente se A é finitamente gerado. E A é de tipo FP_1 se e somente se A é finitamente apresentável.

2) Se A é de tipo FP_n, $0 \leq n \leq \infty$, então pode-se construir uma resolução livre que é finitamente gerada em dimensões menores ou igual a n. De fato, seja

$$\ldots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to A$$

uma resolução projetiva com P_0 finitamente gerado. Então existe um módulo projetivo finitamente gerado Q tal que $P_0 \oplus Q$ é um módulo livre. Portanto substituindo P_0 por $P_0 \oplus Q$ e P_1 por $P_1 \oplus Q$ e estendendo $P_1 \to P_0$ pela identidade fornece uma nova resolução que é finitamente gerada e livre em dimensão 0. O resultado segue iterando este processo.

Definição 2.2.2 *Sejam I um conjunto de índices com quase-ordem $\leq$ e uma categoria ζ. Um sistema direto em ζ com conjunto de índices I é um funtor $F : I \to \zeta$. Mais precisamente é uma coleção de objetos F_i, $i \in I$, tais que sempre que $i \leq j$ em I, existe um morfismo $\varphi_j^i : F_i \to F_j$ satisfazendo:*

1) $\varphi_i^i = I_{F_i}$, para cada $i \in I$.

2) Se $i \leq j \leq k$, $\varphi_k^j \varphi_j^i = \varphi_k^i$.

Denotamos $\{F_i, \varphi_i^j\}$ o sistema direto descrito acima.

E o limite direto deste sistema é um objeto $\varinjlim F_i$ em ζ e uma família de morfismos $\alpha_i : F_i \to \varinjlim F_i$ com $\alpha_i = \alpha_j \varphi_j^i$, sempre que $i \leq j$, satisfazendo a seguinte propriedade universal:

Para cada objeto X em ζ e cada família de morfismos $\{f_i : F_i \to X\}$, $i \in I$, com $f_i = f_j \varphi_j^i$, para todo $i \leq j$, existe um único morfismo $\beta : \varinjlim F_i \to X$ com $\beta \alpha_i = f_i$.

No caso de categoria de módulos o limite direto sempre existe e

$$\varinjlim F_i = (\oplus_{i \in I} F_i)/S,$$

onde S é o submódulo gerado por todos os elementos da forma $\lambda_j \varphi_j^i a_i - \lambda_i a_i$, onde $a_i \in F_i$, $i \leq j$ e $\lambda_i : F_i \to \oplus_{i \in I} F_i$ é a i-ésima injeção.

Definição 2.2.3 *Um sistema inverso em uma categoria ζ com conjunto de índices I munido de uma quase ordem $\geq$ é um funtor contravariante $F : I \to \zeta$.Em detalhes, para cada $i \in I$ existe um objeto F_i e sempre que $i \leq j$ existe um morfismo $\psi_i^j : F_j \to F_i$ com*

1) $\psi_i^i = I_{F_i}$, para cada $i \in I$.

2) Se $i \leq j \leq k$, então $\psi_i^j \psi_j^k = \psi_i^k$.

O limite inverso de um tal sistema é um objeto denotado por $\varprojlim F_i$ e uma família de morfismos $\alpha_i : \varprojlim F_i \to F_i$ com $\alpha_i = \psi_i^j \alpha_j$, $i \leq j$ satisfazendo:

Para cada objeto X em ζ e família de morfismos $f_i : X \to F_i$ com $\psi_i^j f_j = f_i$, $i \leq j$, existe um único morfismo $\beta : X \to \varprojlim F_i$ com $\alpha_i \beta = f_i$.

Em se tratando de uma categoria de módulos temos que

$$\varprojlim F_i = \{(a_i) \in \prod F_i : a_i = \psi_i^j a_j,\ i \leq j\}$$

com $\alpha_i = p_i|_{\varprojlim F_i}$, onde $p_i : \prod F_i \to F_i$ é a i-ésima projeção.

Sejam $\{A_i, \varphi_i^j\}$ um sistema direto (respectivamente um sistema inverso) na categoria de R-módulos ζ e um funtor covariante $F : \zeta \to \{grupos\ abelianos\}$ então $\{FA_i, F\varphi_i^j\}$ é um sistema direto (respectivamente um sistema inverso) e via definição temos homomorfismos

$$\varinjlim FA_i \to F(\varinjlim A_i) \text{ e } F(\varprojlim A_i) \to \varprojlim FA_i.$$

Dizemos que F comuta com limites diretos ou preserva limites diretos (resp. limites inversos) quando o primeiro homomorfismo é isomorfismo (resp. F comuta com limites inversos quando o segundo homomorfismo é isomorfismo).

Fixado um conjunto de índices I temos que $\varinjlim$ e $\varprojlim$ são funtores da categoria dos sistemas diretos *Dir(I)* e da categoria dos sistemas inversos *Inv(I)* em I respectivamente, na categoria de R-módulos [22, cap.2]. De modo geral estes não são funtores exatos.

Proposição 2.2.4 *[3, Cap. 1, Teor. 1.1] Sejam A um R-módulo à esquerda e $k \geq 0$.*

a) O funtor $Tor_k(\ , A)$ comuta com limites diretos exatos.

b) O funtor $Ext^k(A, \ )$ comuta com limites inversos exatos.

Demonstração: $\varinjlim$ comuta com $\otimes_R A$ e $\varprojlim$ comuta com $Hom_R(\ , A)$. Se consideramos $\varinjlim$ e $\varprojlim$ funtores exatos, eles comutam com os funtores $Tor_k(\ , A)$ e $Ext^k(A, \ )$ respectivamente. □

Proposição 2.2.5 *[3, Cap.1, Prop. 1.2] Sejam A um R-módulo a esquerda de tipo FP_n e $0 \leq n \leq \infty$. Então*

a) Para cada $\varprojlim$ exato o homomorfismo natural

$$Tor_k^R(\varprojlim, A) \to \varprojlim Tor_k^R(\ , A)$$

é um isomorfismo para $k \leq n-1$ e um epimorfismo para k=n.

b) Para cada $\varinjlim$ exato o homomorfismo natural

$$\varinjlim Ext_R^k(A, \ ) \to Ext_R^k(A, \varinjlim)$$

é um isomorfismo para $k \leq n-1$ e um monomorfismo para k=n.

Os resultados a seguir mostram que a recíproca da proposição 2.2.5 é válida.

Teorema 2.2.6 *[3, Cap. 1, Teor. 1.3] As seguintes condições são equivalentes para um R-módulo a esquerda A.*

1) A é de tipo FP_n.

2a) Para qualquer $\varprojlim$ limite inverso exato a aplicação natural

$$Tor_k^R(\varprojlim, A) \to \varprojlim Tor_k^R(\ , A)$$

é um isomorfismo para $k \leq n-1$ e um epimorfismo para k=n.

2b) Para cada $\varinjlim$ limite direto exato a aplicação natural

$$\varinjlim Ext_R^k(A, \ ) \to Ext_R^k(A, \varinjlim)$$

é um isomorfismo para $k \leq n-1$ e um monomorfismo para k=n.

3a) Para um produto direto $\prod R$ de uma quantidade arbitrária de cópias de R a aplicação natural $Tor_k^R(\prod R, A) \to \prod Tor_k^R(R, A)$ é um isomorfismo para $k < n$ e um epimorfismo para k=n.

3b) Para o limite direto de qualquer sistema direcionado de R-módulos $\{A_i, \varphi_j^i\}$ com $\varinjlim A_i = 0$, tem-se que $\varinjlim Ext_R^k(A, A_i) = 0$ para todo $k \leq n$.

Cabe aqui algumas observações em relação à condição 3a.
1) Observe que $Tor_k^R(R, A) = 0$ para $k \neq 0$. Assim para $n > 1$, 3a pode ser reescrita do seguinte modo

(3a)' $u : (\prod R) \otimes_R A \to \prod A$ é um isomorfismo e $Tor_k^R(\prod R, A) = 0$ para $1 \leq k \leq n-1$.

2) A condição $u : (\prod R) \otimes_R A \to \prod A$ é um isomorfismo para todos os produtos diretos equivale a dizer que A é de tipo FP_1. O que nos possibilita reescrever a condição (3a)' do seguinte modo equivalente

(3a)" A é finitamente apresentável e $Tor_k^R(\prod R, A) = 0$ para $1 \leq k \leq n-1$.

Podemos fazer a seguinte aplicação.

Proposição 2.2.7 *Considere um anel associativo R e $A' \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A''$ uma seqüência exata curta de R-módulos.*

a) Se A' tem tipo FP_{n-1} e A tem tipo FP_n então A'' tem tipo FP_n.

b) Se A tem tipo FP_{n-1} e A'' tem tipo FP_n então A' tem tipo FP_{n-1}.

c) Se A' tem tipo FP_n e A'' tem tipo FP_n então A tem tipo FP_n.

Demonstração: Vejamos o item a). Por questões de espaço vamos denotar abreviadamente T=Tor. Via Proposição 2.2.6 (3a)" e a sequência exata longa obtida via o funtor Tor, [22, cap.6], temos os epimorfismos e o isomorfismo no diagrama comutativo a seguir, onde as linhas são exatas

$$\begin{array}{ccccccc} T_n^R(\prod R, A) & \longrightarrow & T_n^R(\prod R, A'') & \longrightarrow & T_{n-1}^R(\prod R, A') & \longrightarrow & T_{n-1}^R(\prod R, A) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \wr \\ \prod T_n^R(R, A) & \longrightarrow & \prod T_n^R(R, A'') & \longrightarrow & \prod T_{n-1}^R(R, A') & \longrightarrow & \prod T_{n-1}^R(R, A) \end{array}$$

Segue que $Tor_n^R(\prod R, A'') \to \prod Tor_n^R(R, A'')$ é um epimorfismo. Em dimensões $0 \leq k \leq n-1$ os epimorfismos do diagrama anterior são substituidos via Proposição 2.2.6 (3a)" por isomorfismos, disto vem que temos isomorfismos $Tor_k^R(\prod R, A'') \to \prod Tor_k^R(R, A'')$. Portanto, segundo a Proposição 2.2.6 (3a)", A" é de tipo FP_n. Os demais intens são demonstrados de modo análogo. □

Destacamos que R no contexto a seguir sempre denota um anel comutativo com unidade não trivial.

Definição 2.2.8 *Um grupo G é de tipo FP_n sobre um anel R, $n = \infty$ ou é um inteiro não negativo, se o RG-módulo trivial R é de tipo FP_n como um RG-módulo.*

Quando G é de tipo FP_n sobre $\mathbb{Z}$ então dizemos simplesmente que G é de tipo FP_n.

Proposição 2.2.9 *Se G é de tipo FP_n então G é de tipo FP_n sobre qualquer anel R.*

Demonstração: Seja $\underline{P} = \ldots \xrightarrow{\delta_2} P_1 \xrightarrow{\delta_1} P_0 \xrightarrow{\delta_0} \mathbb{Z} \to 0$ uma $\mathbb{Z}G$-resolução livre de $\mathbb{Z}$, desta obtemos a sequência exata curta de $\mathbb{Z}$-módulos $im\,\delta_1 \hookrightarrow P_0 \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ a qual é $\mathbb{Z}$ cindida pois $\mathbb{Z}$ é $\mathbb{Z}$-módulo livre, em particular projetivo.
Logo, temos a sequência exata curta de RG-módulos $R \otimes_{\mathbb{Z}} im\,\delta_1 \hookrightarrow R \otimes_{\mathbb{Z}} P_0 \twoheadrightarrow R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} = R$ e também que $im\,\delta_1$ é $\mathbb{Z}$-projetiva.
Deste último fato segue que $im\,\delta_2 \hookrightarrow P_1 \twoheadrightarrow im\,\delta_1$ é $\mathbb{Z}$-cindida e assim temos a sequência exata curta de RG-módulos $R \otimes_{\mathbb{Z}} im\,\delta_2 \hookrightarrow R \otimes_{\mathbb{Z}} P_1 \twoheadrightarrow R \otimes_{\mathbb{Z}} im\,\delta_1$.
Prosseguindo indutivamente temos que $R \otimes_{\mathbb{Z}} im\,\delta_{j+1} \hookrightarrow R \otimes_{\mathbb{Z}} P_j \twoheadrightarrow R \otimes_{\mathbb{Z}} im\,\delta_j$ é sequência exata curta de RG-módulos para todo $j \geq 0$. Portanto, $R \otimes_{\mathbb{Z}} \underline{P}$ é uma RG-resoluçao projetiva de R. □

Proposição 2.2.10 *[3, Cap. 1, Prop. 2.1] Um grupo é de tipo FP_1 sobre um anel R se e somente se G é finitamente gerado.*

Corolário 2.2.11 *Um grupo G é de tipo FP_n sobre um anel R, $1 \leq n \leq \infty$, se e somente se G é finitamente gerado e $H_k(G, \prod_\chi RG) = 0$ para todo $1 \leq k \leq n$ e todos os produtos diretos de $\chi = max(|RG|, |R|)$ cópias de RG.*

Demonstração: Via Proposição 2.2.10 e condição (3a)" acima da Proposição 2.2.7. □

Definição 2.2.12 *Um grupo G é* quase finitamente apresentável *sobre um anel R se existe uma sequência exata curta de grupos*

$$K \hookrightarrow F \twoheadrightarrow G$$

onde F é um grupo livre finitamente gerado com $R \otimes_{\mathbb{Z}} (K/[K,K])$ finitamente gerado como RG-módulo à esquerda, onde G age sobre $K/[K,K]$ via conjugação

$$g(k + [K,K]) = gkg^{-1} + [K,K],\ g \in G, k \in K.$$

Proposição 2.2.13 *Um grupo G é de tipo FP_2 sobre um anel R se e somente se G é quase finitamente apresentável sobre R.*

Demonstração: Seja F um grupo livre de posto finito (isto é, finitamente gerado) e $K \hookrightarrow F \twoheadrightarrow G$ uma sequência exata curta de grupos. Conforme [22, Lema 10.6], $f \hookrightarrow RF \twoheadrightarrow R$, onde f é o ideal ampliado de RF, é uma RF-resolução livre. Por isso usando a sequência exata longa em homologia temos a sequência exata de RG-módulos

$$H_1(F; RG) \hookrightarrow RG \otimes_{RF} f \to RG \otimes_{RF} RF \twoheadrightarrow RG \otimes_{RF} R,$$

mas $H_1(F; RG) \cong H_1(F; R \otimes_{RK} RF) \cong H_1(K; R)$ onde o segundo isomorfismo chamado isomorfismo de Shapiro deve-se a [3, Preliminares]. Assim, obtemos a sequência exata de RG-módulos

$$R \otimes K/[K,K] \hookrightarrow RG \otimes_{RF} f \to RG \twoheadrightarrow R;$$

$RG \otimes_{RF} f$ é RG-módulo livre no conjunto $\{1 \otimes (x_i - 1)\}$ onde $x_1, \ldots, x_d$ são os geradores livres de F. Portanto usando Prop. 2.2.7 G é de tipo FP_2 sobre R se e só se $R \otimes K/[K,K]$ é um RG-módulo finitamente gerado. □

No caso em que G é finitamente apresentável o $\mathbb{Z}G$-módulo $K/[K,K]$ é finitamente gerado pelas imagens em $K/[K,K]$ de um subconjunto finito $R \subset K$ de geradores normais de K. Isto nos fornece

Corolário 2.2.14 *Seja G um grupo finitamente apresentável. Então G é de tipo FP_2.*

2.3 Sequências Spectrais

A seguir vamos fazer uma breve exposição sobre sequência spectral tendo como meta a demonstração do nosso próximo resultado sobre grupos de tipo FP_n. Como referência a maiores detalhes sugerimos [22].

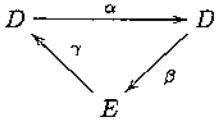
Definição 2.3.1 *Um módulo graduado é uma sequência de módulos $M = \{M_p : p \in \mathbb{Z}\}$. Se M e N são módulos graduados e n é um inteiro fixo, então uma sequência de homomorfismos $f = \{f_p : M_p \to N_{p+n}\}$ é uma aplicação de grau n, denotamos $f : M \to N$.*

Um complexo $C = \ldots \to C_p \to C_{p-1} \to \ldots$, ignorando-se a diferenciação, determina um módulo graduado $\{C_p : p \in \mathbb{Z}\}$. Uma aplicação de cadeia $f : C \to C'$ é uma aplicação de grau 0 e a diferenciação de um complexo é uma aplicação de grau -1.

Definição 2.3.2 *Um módulo bigraduado é uma família de módulos duplamente indexada $\{M_{p,q} : p, q \in \mathbb{Z}\}$. Sejam a e b inteiros fixos, uma família de homomorfismos $f = \{f_{p,q} : M_{p,q} \to N_{p+a,q+b}\}$ é uma aplicação de bigrau (a,b).*

O próximo resultado vai nos fornecer uma grande quantidade de módulos bigraduados.

Definição 2.3.3 *Um par exato é um par de módulos bigraduados D e E, e aplicações α, β e γ cada uma com seus respectivos bigraus tal que existe exatidão em cada vértice do triângulo*



No que segue tratamos de funtores aditivos.

Definição 2.3.4 *Seja $F : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ um funtor aditivo entre duas categorias $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$. Um módulo B em $\mathbf{B}$ é F-acíclico à direita se $(R^pF)B = 0$ para $p \geq 1$ onde R^pF é o p-ésimo funtor derivado a direita de F; um módulo B em $\mathbf{C}$ é F-acíclico à esquerda se $(L_pF)B = 0$, $p \geq 1$, onde L_pF é o p-ésimo funtor derivado à esquerda de F.*

Teorema 2.3.5 *[22, Cap. 11, Teor. 11.1] Sejam $G : \mathbf{U} \to \mathbf{B}$ e $F : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ funtores aditivos tais que F é exato à esquerda e sempre que E é injetivo em $\mathbf{U}$, então GE é F-acíclico à direita. Para cada módulo A em $\mathbf{U}$, escolha uma resolução injetiva $0 \to A \to E^0 \to E^1 \to \ldots$ e defina*

$$Z^q = Ker(GE^q \to GE^{q+1}).$$

Então existe um par exato com

$$E_{p,q} = \begin{cases} (R^pF)(R^qG(A)) & \text{se } p \geq 0,\ q \geq 0, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$D_{p,q} = \begin{cases} (R^pF)Z^{q-1} & \text{se } p \geq 0,\ q \geq 1, \\ R^{p+q}(FG)A & \text{se } p = -1,\ q \geq 1, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

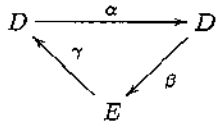
e aplicações $\alpha : D \to D$ de bigrau (-1,1), $\beta : D \to E$ de bigrau (1,-1) e $\gamma : E \to D$ de bigrau (1,0).

Definição 2.3.6 *Sejam $\mathcal{U}$ uma categoria e A um objeto em $\mathcal{U}$. Uma filtração de A é uma família de subobjetos de A, $\{F^pA : p \in \mathbb{Z}\}$, tal que*

$$\ldots \subset F^{p-1}A \subset F^pA \subset F^{p+1}A \subset \ldots$$

Deste modo, uma filtração de um complexo $\mathbf{C}$ é uma família de subcomplexos $\{F^pC : p \in \mathbb{Z}\}$ com $F^{p-1}C \subset F^pC$ para todo p. E no caso de um módulo graduado $H = \{H_n : n \in \mathbb{Z}\}$ é uma família de submódulos graduados $\{F^pH : p \in \mathbb{Z}\}$ com $F^{p-1}H \subset F^pH$ para todo p.

Teorema 2.3.7 *[22, Cap. 11, Cor. 11.12] Toda filtração $\{F^pC : p \in \mathbb{Z}\}$ de um complexo $\mathbf{C}$ determina um par exato.*



onde $\alpha : D \to D$ tem bigrau (1,-1), $\beta : D \to E$ tem bigrau (0,0) e $\gamma : E \to D$ tem bigrau (-1,0).

Consideremos o par exato acima.

Defina $d^1 : E \to E$ por $d^1 = \beta\gamma$. Como $\gamma\beta = 0$ temos que $d^1d^1 = 0$ e E tem grupos de homologia $H = (E, d^1) = Ker\, d^1/Im\, d^1$, denotamos $H(E, d^1) = E^2$ e o consideramos como módulo bigraduado. Em detalhes,

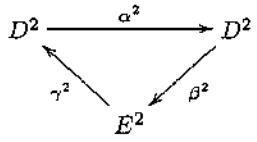
$$d^1_{p,q} : E_{p,q} \to D_{p-1,q} \to E_{p-1,q},$$

assim d^1 tem bigrau (-1,0).

Defina $D^2 = Im\, \alpha$. Como α tem bigrau (1,-1), temos que

$$D^2_{p,q} = \alpha_{p-1,q+1}(D_{p-1,q+1}) = Im\, \alpha_{p-1,q+1} \subset D_{p,q}.$$

Definimos agora



Onde α^2 é a restrição de α a $D^2 = Im\,\alpha \subset D$. Uma vez que a inclusão $i : D^2 = Im\,\alpha \hookrightarrow D$ tem bigrau (0,0), a aplicação $\alpha^2 = \alpha \circ i$ tem o mesmo bigrau de α, isto é, (1,-1). Temos $\beta^2 : D^2 \to E^2$ dada por

$$\beta^2 y = [\beta\alpha^{-1} y],$$

onde os colchetes denotam classes de equivalência e finalmente definimos $\gamma^2 : E^2 \to D^2$ por

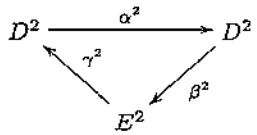
$$\gamma^2[z_{p,q}] = \gamma_{p,q} z_{p,q} \in D_{p-1,q}.$$

que tem bigrau (-1,0). Retornemos a β^2. Tome $y = \alpha_{p-1,q+1}(x_{p-1,q+1}) \in D^2_{p,q}$; definimos

$$\beta^2_{p,q} = \beta_{p-1,q+1}\alpha^{-1}_{p-1,q+1} : y \mapsto [\beta_{p-1,q+1}(x_{p-1,q+1})] \in E^2_{p-1,q+1}.$$

assim, β^2 tem bigrau (-1,1) e é bem definida. Temos agora

Teorema 2.3.8 *[22, Cap. 11, Teor. 11.9] Com as definições acima,*



é uma par exato; α^2 tem bigrau (1,-1), β^2 tem bigrau (-1,1) e γ^2 tem bigrau (-1,0).

Definição 2.3.9 *O par exato $(D^2, E^2, \alpha^2, \beta^2, \gamma^2)$ chama-se* par derivado *de $(D, E, \alpha, \beta, \gamma)$*

Prosseguindo indutivamente obtemos uma sequência de pares exatos

$$(D^r, E^r, \alpha^r, \beta^r, \gamma^r)$$

onde, por definição, o (r+1)-ésimo par exato é o par derivado do r-ésimo, $E^1 = E$ e $D^1 = D$.
A seguir temos uma descrição um pouco mais detalhada desta sequência.

Teorema 2.3.10 *Sejam* $(D, E, \alpha, \beta, \gamma)$ *um par exato com* α, β *e* γ *tendo bigraus (1, -1),(0,0) e (-1,0) respectivamente. Se* $(D^r, E^r, \alpha^r, \beta^r, \gamma^r)$ *é o r-ésimo par derivado então*

1) α^r *tem bigrau (1,-1),* β *tem bigrau (1-r,r-1), e* γ^r *tem bigrau (-1,0);*

2) $d^r = \beta^r\gamma^r$ *tem bigrau (-r,r-1) e é induzida por* $\beta\alpha^{r-1}\gamma$*;*

3) $E_{p,q}^{r+1} = Ker\, d_{p,q}^r / Im\, d_{p+r,q-r+1}^r$

Demonstração: Indução em r. □

Definição 2.3.11 *Uma* sequência spectral *é uma sequência* $\{E^r, d^r : r \geq 1\}$ *de módulos bigraduados e aplicações com* $d^r d^r = 0$ *tal que*

$$E^{r+1} = H(E^r, d^r)$$

como módulos bigraduados.

Corolário 2.3.12 *Cada filtração* $\{F^p\mathbf{C}\}$ *de um complexo* C *determina uma sequência spectral.*

Demonstração: Filtrações determinam pares exatos conforme vimos em 2.3.7; e o Teorema 2.3.10 fornece uma sequência de pares derivados cujos termos $E^2, E^3, \ldots$ formam uma sequência spectral. □

Definição 2.3.13 *Uma filtração* $\{F^pH\}$ *de um módulo bigraduado H é limitada se, para cada n, existem inteiros s=s(n) e t=t(n) tais que*

$$F^sH_n = 0 \text{ e } F^tH_n = H_n.$$

Em uma filtração, $F^{p-1}H \subset F^pH$ *para todo p. Em particular, se* $\{F^pH\}$ *é limitada, então para cada n,* $F^pH_n = 0$ *para todo* $p \leq s$, $F^pH_n = H_n$ *para todo* $p \geq t$*, e existe uma cadeia finita*

$$0 = F^sH_n \subset F^{s+1}H_n \subset \ldots \subset F^tH_n = H_n.$$

Definição 2.3.14 *Um subquociente de um módulo M é um módulo da forma* M'/M''*, onde* $M'' \subset M'$ *são submódulos de M.*

Em uma sequência spectral $\{E^r, d^r : r \geq 1\}$ cada E^r e um subquociente de $E^1 = E$, na verdade de qualquer termo anterior.
Escreva $E^2 = Z^2/B^2$(omitindo os índices). Uma vez que $E^2 = Z^2/B^2$, o terceiro teorema do isomorfismo permite-nos assumir

$$0 \subset B^2 \subset B^3 \subset Z^3 \subset Z^2 \subset E^1 = E.$$

Iterando,

$$0 \subset B^2 \subset \ldots \subset B^r \subset B^{r+1} \subset \ldots \subset Z^{r+1} \subset Z^{r+1} \subset \ldots \subset Z^2 \subset E^2.$$

Definição 2.3.15 $Z_{p,q}^\infty = \cap_r Z_{p,q}^r$; $B_{p,q}^\infty = \cup_r B_{p,q}^r$; $E_{p,q}^\infty = Z_{p,q}^\infty / B_{p,q}^\infty$.

Definição 2.3.16 *Seja H um módulo graduado. Uma sequência spectral $\{E^r\}$ converge para H, denotamos $E^2_{p,q} \Rightarrow_p H_n$, se existe alguma filtração limitada $\{\Phi H\}$ de H tal que*

$$E^\infty_{p,q} = \Phi^p H_n / \Phi^{p-1} H_n$$

para todos p,q com n=p+q.

Teorema 2.3.17 *(Grothendieck)[22, Cap. 11, Teor. 11.39] Sejam $S : \mathbf{U} \to \mathbf{B}$ e $F : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ funtores com F exato à direita e sempre que E é projetivo em $\mathbf{U}$, então SE é F-acíclico à esquerda. Para cada módulo $A \in \mathbf{U}$, existe uma sequência spectral no primeiro quadrante*

$$E^2_{p,q} = L_pF(L_qS(A)) \Rightarrow_p L_n(FS)(A).$$

Teorema 2.3.18 *(Lyndon-Hochshild-Serre (LHS)) Seja um grupo G com subgrupo normal N. Para cada $\mathbb{Z}G$-módulo A, existe uma sequência spectral no primeiro quadrante com*

$$E^2_{p,q} = H_p(G/N, H_q(N, A)) \Rightarrow_p H_n(G, A),$$

onde n=p+q.

Demonstração: Consideremos as categorias de módulos à esquerda $\mathbf{U} = \mathbb{Z}G$-módulos, $\mathbf{B} = \mathbb{Z}(G/N)$-módulos e $\mathbf{C} =$ *grupos abelianos* e os funtores $S : \mathbf{U} \to \mathbf{B}$ definido por $S = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}N}$ e $F : \mathbf{B} \to$ *grupos abelianos* definido por $F = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}(G/N)}$.
Tais funtores cumprem as condições do Teorema 2.3.17, logo existe uma sequência spectral

$$E^2_{p,q} = L_pF(L_qS(A)) \Rightarrow_p L_n(FS)(A)$$

agora basta observar que $L_pF = H_p(G/N, \ )$, $L_qS = H_q(N, \ )$ e $FS = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G}$. □

A seguir usamos a sequência spectral de Lyndon-Hochshild-Serre para deduzir uma propriedade importante de grupos de tipo FP_n.

Teorema 2.3.19 *[3, Cap. 1, Prop. 2.7] Sejam $N \hookrightarrow G \twoheadrightarrow Q$ uma sequência exata curta de grupos onde N é de tipo FP_∞ sobre um anel comutativo R com unidade não trivial e $1 \leq n \leq \infty$. Então G é tipo FP_n se só se Q é de tipo FP_n.*

Demonstração: Tome a sequência spectral LHS,

$$H_p(Q, H_q(N, \prod RG)) \Rightarrow_p H_n(G, \prod RG)$$

De N ser de tipo FP_∞ obtemos

$$H_q(N, \prod RG) \cong \prod H_q(N, RG) = 0$$

para $q \geq 1$ e

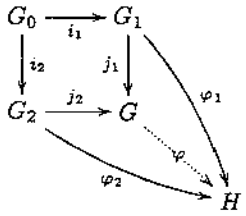
$$(\prod RG)_N \cong H_0(N, \prod RG) \cong \prod H_0(N, RG) \cong \prod RQ$$

para q=0. Portanto a sequência spectral entra em colapso, isto é $E^2_{p,q} = 0$ *se* $q \neq 0$, o que fornece isomorfismos $H_p(Q, \prod RQ) \cong H_p(G, \prod RG)$ para $p \geq 0$. Por 2.2.11 o resultado segue. □

Capítulo 3

Produto Livre Amalgamado e Pushout

Definição 3.0.20 *Sejam $i_1 : G_0 \to G_1$ e $i_2 : G_0 \to G_2$ homomorfismos de grupos. Suponha que existe um grupo G e homomorfismos $j_k : G_k \to G$, $k = 1, 2$ tais que $j_1 i_1 = j_2 i_2$. Se para todo grupo H e homomorfismos $\varphi_k : G_k \to H$ tais que o diagrama é comutativo, isto é, os dois quadrados são comutativos*



existe um único homomorfismo $\varphi : G \to H$ tornando o diagrama comutativo então diz-se que G é o pushout de G_0, G_1, G_2, i_1 e i_2.

Teorema 3.0.21 *[21, Cap. 2] Para quaisquer G_0, G_1, G_2, i_1 e i_2 existe pushout.*

Definição 3.0.22 *Quando i_1 e i_2 são injetivas o pushout G é chamado produto livre amalgamado com amálgama G_0.*

Neste caso, geralmente olhamos G_0 como um subgrupo de G_1 e G_2, i_1 e i_2 como as inclusões. Denotamos $G = G_1 *_{G_0} G_2$.

Definição 3.0.23 *Diz-se que um subconjunto S é transversal à esquerda de um subgrupo H em G se S contêm exatamente um membro de cada classe lateral aH, isto é, $G = \cup_{a \in S} aH$ (união disjunta).*

Teorema 3.0.24 *(Forma Normal)[12, Cap. 1, Teor. 25] Sejam G o produto livre amalgamado de A, B com amálgama C, $i_A : C \to A$ e $i_B : C \to B$ são as inclusões e, S e T transversais à esquerda de C em A e B respectivamente, com $1 \in S \cap T$. Considerando $j_A : A \to G$ e $j_B : B \to G$ homomorfismos da definição do pushout ($G_1 = A$, $G_2 = B$, $j_1 = j_A$, $j_2 = j_B$, $i_1 = i_A$ e $i_2 = i_B$), temos:*

1. *j_A e j_B são monomorfismos.*

2. *$j_A(A) \cap j_B(B) = j_A(C) = j_B(C)$.*

3. *Considerando j_A e j_B inclusões, qualquer elemento de G pode ser unicamente escrito como $u_1 \dots u_n c$, $n \geq 0$, $c \in C$ e $u_1, \dots, u_n$ vêm alternadamente de $S \setminus 1$ e $T \setminus 1$.*

Finalizamos esta seção com o seguinte resultado.

Proposição 3.0.25 *[12, Cap. 1, Prop. 27] Sejam A e B subgrupos de um grupo G e $C = A \cap B$. Então, $G = A *_C B$ se e só se todo elemento de $G \setminus C$ pode ser escrito como um produto $g_1 \dots g_n$ com g_i alternadamente em $A \setminus C$ e $B \setminus C$ e nenhum destes produtos é igual a 1.*

Capítulo 4

Grupos Nilpotentes e Policíclicos

4.1 Grupos Nilpotentes e Policíclicos

As referências básicas para esta seção são [21], [20], [19], [15].

Definição 4.1.1 *Um grupo G diz-se nilpotente se ele contêm uma série de subgrupos*

$$\{1\} = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_n = G$$

tal que cada subgrupo G_i é normal em G e cada quociente G_i/G_{i-1} esta contido no centro de G/G_{i-1}, $1 \leq i \leq n$. Denominamos uma tal série de série central de G.
Um grupo G diz-se solúvel se ele contêm uma série de subgrupos

$$\{1\} = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_n = G$$

tal que cada subgrupo G_{i-1} é normal em G_i e cada quociente G_i/G_{i-1} é abeliano.

Via definição, temos que todo grupo nilpotente é solúvel. E também segue da definição que o centro de um grupo nilpotente é não trivial. Esse fato, nos diz que nem todo grupo solúvel é nilpotente. Pois o grupo de permutações S_3 é um grupo solúvel de centro trivial.

A seguir daremos uma caracterização de nilpotência. Com esse fim, definimos indutivamente novas séries de subgrupos:

$$\gamma_1(G) = G,\ \gamma_2(G) = G' \text{ e } \gamma_i(G) = [\gamma_{i-1}(G), G]$$

e também

$\zeta_0 = \{1\}$, $\zeta_1(G)$ é o centro $Z(G)$, seguindo indutivamente com $\zeta_i(G)$ sendo o único subgrupo de G tal que $\zeta_i(G)/\zeta_{i-1}(G) = Z(G/\zeta_{i-1}(G))$.

O subgrupo $\zeta_i(G)$ chama-se o `i-ésimo centro` de G. No contexto se A e B são subgrupos de G o comutador $[A, B]$ é subgrupo de G gerado pelos elementos da forma $[a, b]$, com $a \in A$ e $b \in B$.

Definição 4.1.2 *As sequências de subgrupos*

$$\{1\} = \zeta_0(G) \subset \zeta_1(G) \subset \ldots \subset \zeta_n(G) \subset \ldots$$

e

$$G = \gamma_1(G) \supset \gamma_2(G) \supset \ldots \supset \gamma_n(G) \supset \ldots$$

chamam-se série central superior e série central inferior de G, respectivamente.

Estas são claramente séries centrais.

Lema 4.1.3 *Seja*

$$\{1\} = A_0 \subset A_1 \subset \ldots$$

uma série central de G. Então $A_i \subset \zeta_i(G)$ para todo i.

Demonstração: Faremos indução em i. Para $i = 1$ é válido. Suponhamos que $A_i \subset \zeta_i(G)$. Dados $x \in A_{i+1}$ e $g \in G$, como $A_{i+1}/A_i \subset Z(G/A_i)$ temos que $x^{-1}g^{-1}xg \in A_i \subset \zeta_i(G)$. Logo, via definição de $\zeta_{i+1}(G)$ temos que $A_{i+1} \subset \zeta_{i+1}(G)$. □

Lema 4.1.4 *Seja*

$$\{1\} = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_n = G$$

uma série central de G. Então $\gamma_i(G) \subset A_{n-i+1}$ para todo i.

Demonstração: É imediato para $i = 1$. Suponhamos por indução que $\gamma_i(G) \subset A_{n-i+1}$. Como A_{n-i+1}/A_{n-i} está no centro de G/A_{n-i}, temos que $[A_{n-i+1}, G] \subset A_{n-i}$. Logo

$$\gamma_{i+1}(G) = [\gamma_i(G), G] \subset [A_{n-i+1}, G] \subset A_{n-i},$$

como queríamos demonstrar. □

Destes resultados segue imediatamente a seguinte caracterização dos grupos nilpotentes.

Lema 4.1.5 *Seja G um grupo. São equivalentes:*

(i) G é nilpotente.

(ii) Existe um inteiro positivo m tal que $\zeta_m(G) = G$.

(iii) Existe um inteiro positivo n tal que $\gamma_n(G) = \{1\}$.

Também segue imediatamente destes lemas que se G é um grupo nilpotente, então as séries centrais superior e inferior de G têm o mesmo comprimento. Este número chama-se `classe de nilpotência` de G. Em particular se G tem classe de nilpotência dois temos que $G' \subset Z(G)$.

Definição 4.1.6 *Seja $\mathfrak{X}$ uma classe de grupos. Um grupo G diz-se* poli $-\mathfrak{X}$ *se G contém uma serie subnormal (isto é, $G_i \lhd G_{i+1}$ com G_i não necessariamente normal em G)*

$$\{1\} = G_0 \lhd G_1 \lhd \ldots \lhd G_n = G$$

tal que cada fator G_i/G_{i-1}, $1 \leq i \leq n$, pertence à classe $\mathfrak{X}$.

Proposição 4.1.7 *[20, Cap. 2, Prop. 2.2.6] Um grupo solúvel finito G contém uma série subnormal cujos fatores são todos cíclicos de ordem prima.*

Conforme o Teorema 4.1.7 os grupos nilpotentes finitos são policíclicos. Quanto a grupos nilpotentes infinitos e no que se refere aos nossos interesses, temos

Proposição 4.1.8 *[20, Cap. 3, Teor. 3.3.5] Um grupo nilpotente finitamente gerado tem uma série central cujos fatores são grupos cíclicos com ordem prima ou infinita.*

Os seguintes resultados foram desenvolvidos em [14]. Eles serão usados na demonstração do resultado principal desta tese. Sejam Q um grupo e A um $\mathbb{Z}Q$-módulo à esquerda. A ação diagonal de Q sobre $A \otimes A$ é dada por

$$q(a_1 \otimes a_2) = (qa_1) \otimes (qa_2)$$

para todos $q \in Q, a_1, a_2 \in A$. O núcleo da aplicação canônica $A \otimes A \to A \wedge A$ é um $\mathbb{Z}Q$-submódulo de $A \otimes A$ (via ação diagonal). Isso induz ação diagonal de Q sobre $A \wedge A$.

Proposição 4.1.9 *[14, Prop. 23] Sejam Q um grupo nilpotente de classe dois finitamente gerado, com um $\mathbb{Z}Q$-módulo A finitamente gerado tal que $A \wedge A$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}Q$-módulo (via ação diagonal). Então $A \otimes_{\mathbb{Z}} A$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}Q$-módulo (via ação diagonal).*

Proposição 4.1.10 *[14, Lema 24] Sejam Q um grupo policíclico, A e B $\mathbb{Z}Q$-módulos à esquerda finitamente gerados. Se A_1 é um $\mathbb{Z}Q$-submódulo de A e $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ é finitamente gerado como um $\mathbb{Z}Q$-módulo (via ação diagonal), então $A_1 \otimes_{\mathbb{Z}} B$ é finitamente gerado como um $\mathbb{Z}Q$-módulo (via ação diagonal).*

Observe que via a Proposição 4.1.8 a Proposição 4.1.10 também se aplica para grupos nilpotentes finitamente gerados.

4.2 Condições de Cadeia

Seja ζ um conjunto parcialmente ordenado por uma relação $\leq$.

Proposição 4.2.1 *As seguintes condições são equivalentes em ζ:*

i) Cada sequência crescente $x_1 \leq x_2 \leq \ldots$ em ζ é estacionária (ou seja, existe n tal que $x_n = x_{n+1} = \ldots$).

ii) Cada subconjunto não vazio de ζ possui um elemento maximal.

Demonstração: i)⇒ii). Se ii) é falso existe um subconjunto T de ζ não vazio sem elemento maximal e podemos construir indutivamente uma sequência estritamente crescente infinita. A recíproca é imediata. □

Definição 4.2.2 *Se ζ é o conjunto dos submódulos de um R-módulo à esquerda (ou à direita) M, ordenado pela relação $\subseteq$. Então i) (de 4.2.1) é chamada* condição de cadeia ascendente *e ii) de (4.2.1) chama-se* condição maximal. *Nós dizemos que M é* noetheriano *se satisfaz uma destas condições equivalentes.*
E se ζ é ordenada pela relação $\supseteq$ então i) é a condição de cadeia descendente *e ii) é a* condição minimal. *M diz-se* artiniano *se satisfaz uma destas condições.*

Proposição 4.2.3 *[15, Cap. 1, p.20] Considere um R-módulo à esquerda ou à direita M. Cada submódulo de M é finitamente gerado se e só se M é noetheriano.*

Um anel R diz-se noetheriano à esquerda (resp. à direita) se R é noetheriano quando visto como R-módulo à esquerda (resp. à direita) via o produto em R. Idem para a noção de anel artiniano. A nomenclatura homenageia Emmy Noether e Emil Artin respectivamente, que iniciaram os estudo em condições de cadeia para ideais e submódulos.
Finalizamos esta subseção com um resultado sobre módulos finitamente gerados sobre anéis satisfazendo condições de cadeia.

Proposição 4.2.4 *[15, Cap. 1, Prop. 1.21] Se M é um R-módulo à esquerda finitamente gerado e R é um anel noetheriano (resp. artiniano), então M é noetheriano (resp. artiniano).*

Teorema 4.2.5 *[19, Cap. 10, Teor. 2.7] Sejam S um anel com 1_S, R um subanel Noetheriano à esquerda com $1_R = 1_S$ e G um grupo de unidades de S sendo poli-{cíclico, finito}. Se $R = R^G := \{grg^{-1} | g \in G, r \in G\}$ e $S = (R, G)$ (isto é, S como anel é gerado por R e G), então S é Noetheriano à esquerda.*

Corolário 4.2.6 *Para cada grupo Q nilpotente finitamente gerado o anel $\mathbb{Z}Q$ é Noetheriano à esquerda.*

Demonstração: Os anéis $S = \mathbb{Z}Q$ e $R = \mathbb{Z}$ preenchem as condições do Teorema 4.2.5. □

Capítulo 5

Topologia Algébrica

5.1 Recobrimento de Espaços Topológicos

Nesta seção vamos ressaltar fatos clássicos relativos ao grupo fundamental de um espaço topológico. As referências básicas são [18] e [17].

Definição 5.1.1 *Sejam $\alpha : I \to X$ e $\beta : I \to X$ caminhos no espaço topológico X, tais que o ponto final de α é o ponto inicial de β, onde $I = [0,1]$. Definimos o produto $\alpha\beta; I \to X$ por*

$$\alpha\beta(t) = \alpha(2t) \text{ se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \text{ e } \alpha\beta(t) = \beta(2t-1) \text{ se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1$$

Se α e β são caminhos fechados com ponto base em $x_0 \in X$ diremos que são homotópicos se existe $h : I \times I \to X$ contínua tal que

$$h(s,0) = \alpha(s),\ h(s,1) = \beta(s) \text{ e } h(0,t) = h(1,t) = x_0 \text{ para todos } s,t \in I.$$

Ser homotópico define uma relação de equivalência na coleção dos caminhos fechados em X com base em x_0 e o conjunto das classes de equivalência $\pi_1(X,x_0)$ munido da operação $[\alpha][\beta] = [\alpha\beta]$ é um grupo chamado o grupo fundamental de X com base em x_0.

Proposição 5.1.2 *[17, Prop. 4] Considere um espaço topológico X conexo por caminhos e x_0 e x_1 pontos quaisquer em X. Então $\pi_1(X,x_0)$ e $\pi_1(X,x_1)$ são isomorfos. Neste caso omitimos o ponto base e escrevemos $\pi_1(X)$.*

Nosso próximo passo é estabelecer a noção de recobrimento de um espaço topológico. E a menos de menção em contrário X, $\widetilde{X}$, Y e Z denotam espaços topológicos e I=[0,1].

Definição 5.1.3 *Sejam $f : X \to Y$ e $g : Z \to Y$ aplicações.*

i) Se cada ponto $x \in X$ tem uma vizinhança U com $f|_U$ injetiva diz-se que f é locamente injetiva.

ii) Com f e g contínuas, um levantamento de g (relativamente a f) é uma aplicação contínua $\widetilde{g} : Z \to Y$ com $f \circ \widetilde{g} = g$.

Lema 5.1.4 *[17, Prop. 4.2] Sejam $f : X \to Y$ uma aplicação contínua, localmente injetiva e X um espaço de Hausdorff. Se Z é conexo e $g : Z \to Y$ é uma aplicação contínua então dois levantamentos quaisquer de g que coincidem num ponto $z_0 \in Z$ são iguais.*

Definição 5.1.5 *Uma aplicação $p : \widetilde{X} \to X$ é uma aplicação de recobrimento ou simplesmente um recobrimento quando cada ponto $x \in X$ pertence a um aberto (vizinhança distinguida) $V \subset X$ tal que $p^{-1}(V) = \cup_\alpha U_\alpha$ é uma união disjunta com cada U_α aplicado por p homeomorficamente sobre V. O espaço $\widetilde{X}$ chama-se um recobrimento de X e, para cada $x \in X$, $p^{-1}\{x\}$ é a fibra de x.*

Quando $p : \widetilde{X} \to X$ é um recobrimento a condição de que $\widetilde{X}$ seja Hausdorff pode ser omitida do Lema 5.1.4. O que nos fornece

Lema 5.1.6 *[17, Prop. 4.2'] Sejam $p : \widetilde{X} \to X$ uma aplicação de recobrimento e Z um espaço conexo. Se $h, s : Z \to \widetilde{X}$ são tais que $p \circ h = p \circ s$, então ou $h(z) \neq s(z)$ para todo $z \in Z$ ou h=s.*

Uma aplicação contínua $h : X \to Y$ induz um homomorfismo

$$h_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0),$$

$y_0 = h(x_0)$, definido por $h_*[\alpha] = [h \circ \alpha]$.

Teorema 5.1.7 *[17, Prop. 5.2] Sejam $p : \widetilde{X} \to X$ um recobrimento, a,b: $I \to X$ caminhos com o mesmo ponto inicial x e mesmo ponto final y e $\widetilde{a}, \widetilde{b} : I \to \widetilde{X}$ seus levantamentos a partir de um ponto $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$, isto é, $\widetilde{a}(0) = \widetilde{x} = \widetilde{b}(0)$. Afim de que $\widetilde{a}(1) = \widetilde{b}(1)$ é necessário e suficiente que $[ab^{-1}] \in p_*(\pi_1(X, \widetilde{x}))$.*

Corolário 5.1.8 *Seja $p : \widetilde{X} \to X$ um recobrimento com $\widetilde{X}$ conexo por caminhos e $x_0 \in X$ um ponto fixo. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *Para algum ponto $\widetilde{x} \in p^{-1}(x_0)$ temos que $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x})) \lhd \pi_1(X, x_0)$;*
2. *Os subgrupos $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}))$, quando $\widetilde{x}$ percorre $p^{-1}(x_0)$ são normais e iguais entre si.*
3. *Dado um caminho fechado $a : I \to X$, com ponto base em x_0, ou todos os levantamentos de a, a partir dos pontos $\widetilde{x} \in p^{-1}(x_0)$, são fechados ou nenhum o é.*

Definição 5.1.9 *Se $\widetilde{X}$ é conexo por caminhos e umas das condições do Corolário 5.1.8 é satisfeita dizemos que $p : \widetilde{X} \to X$ é um recobrimento regular.*

5.2 Ações Propriamente Descontínuas de Grupos

Considere um subgrupo G do grupo dos homeomorfismos de um espaço topológico X, chamamos G de grupo de homeomorfismos de X. O conjunto $Gx = \{g(x) | \, g \in G\}$ é a órbita de $x \in X$ relativamente a G (denotamos gx no lugar de $g(x)$). Gx coincide com a classe de equivalência $[x]$ de $x \in X$ na relação em X dada

por $x \sim y \in X$ se e só se existe $g \in G$ com $g(x) = y$.

Denotamos por X/G o espaço quociente de X por esta relação de equivalência. Tomemos a projeção canônica $p : X \to X/G$, $p(x) = [x]$ e considere em X/G a topologia segundo a qual um conjunto $A \subset X$ é aberto quando $p^{-1}(A)$ é aberto em X (portanto os abertos em X/G são da forma $p(U)$ onde $U \subset X$ é um aberto que é união de órbitas). Temos que a aplicação $p : X \to X/G$ é aberta pois se $V \subset X$ é aberto então $p^{-1}(p(V)) = \cup_{g \in G} gV \subset X$ é aberto.

Se cada $x \in X$ possui uma vizinhança (conveniente de x) $V \subset X$ tal que $gV \cap V = \emptyset$ para todo $g \neq I_X$ em G então, dizemos que G é propriamente descontínuo. Equivalentemente, se $g \neq h$ em G então, $gV \cap hV = \emptyset$. Neste caso, a menos da identidade I_X os homeomorfismos de G não possuem pontos fixos. Indica-se este fato dizendo que G opera livremente em X.

Teorema 5.2.1 *[17, Prop. 5.4] Seja G um grupo de homeomorfismos operando livremente no espaço X. Se G é propriamente descontínuo então a projeção canônica $p : X \to X/G$ é um recobrimento.*

Isto nos diz que se o espaço X é conexo por caminhos então a projeção $p : X \to X/G$ é um recobrimento regular.

Teorema 5.2.2 *[17, Prop. 5.4] Sejam $p : \widetilde{X} \to X$ um recobrimento com o espaço $\widetilde{X}$ conexo por caminhos, Z um espaço conexo e localmente conexo por caminhos (logo conexo por caminhos) e $f : (Z, z_0) \to (X, x_0)$ contínua. Dado $\widetilde{x} \in p^{-1}(x_0)$, f possui um levantamento $\widetilde{f} : (Z, z_0) \to (\widetilde{X}, \widetilde{x})$ se e só se $f_*(\pi_1(Z, z_0)) \subset p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}))$.*

Corolário 5.2.3 *Sejam X conexo por caminhos, Z simplesmente conexo e $p : \widetilde{X} \to X$ um recobrimento satisfazendo as condições do Teorema 5.2.2. Então toda aplicação contínua $f : (Z, z_0) \to (X, x_0)$ admite um levantamento $\widetilde{f} : (Z, z_0) \to (\widetilde{X}, \widetilde{x})$, onde $\widetilde{x} \in p^{-1}(x_0)$ é arbitrário.*

Via o Corolário 5.2.3 temos que todo caminho pode ser levantado.

5.3 Homomorfismos entre Recobrimentos

Um homomorfismos entre dois recobrimentos $p_1 : \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}$ e $p_2 : \widetilde{X}_2 \to \widetilde{X}$ é uma aplicação contínua $f : \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}_2$ tal que $p_2 \circ f = p_1$. Um tal homomorfismo f é um isomorfismo quando é um homeomorfismo. Assim f^{-1} também é um isomorfismo. Neste caso diz-se que os recobrimentos p_1 e p_2 são isomorfos.

Um endomorfismo de um recobrimento é um homomorfismo f do recobrimento em si mesmo. Quando f é um homeomorfismo de $\widetilde{X}$ sobre si mesmo, dizemos que f é um automorfismo. O conjunto $G(\widetilde{X}|X)$ dos automorfismos de recobrimento $p : \widetilde{X} \to X$ constitue um grupo relativamente à composição usual.

O grupo dos automorfismos do recobrimento $p : X \to X/G$ é exatamente G. De fato, se $g \in G$ e $x \in X$ é arbitrário temos que $p(gx) = Ggx = Gx = p(x)$,

logo $p \circ q = p$ e assim $g \in G(X|X/G)$. Reciprocamente, dados um endomorfismo $f : X \to X$ e $x_0 \in X$ fixo com $f(x_0) = x_1$ temos que x_1 está na mesma fibra que x_0, logo existe $g \in G$ com $gx_0 = x_1$. Portanto f e g são levantamentos de p que coincidem no ponto x_0. Como X é conexo temos que $f = g \in G$.

O próximo resultado estabelece uma condição para que exista um homomorfismo entre dois recobrimentos $p_i : \widetilde{X}_i \to X$ com $p_i(\widetilde{x}_i) = x_0$, $i = 1, 2$.

Teorema 5.3.1 *[17, Prop. 5.8] Sejam $\widetilde{X}_1$ e $\widetilde{X}_2$ conexos e localmente conexos por caminhos. Existe um homomorfismo $f : \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}_2$ com $f(\widetilde{x}_1) = \widetilde{x}_2$ se e somente se $p_{1*}(\pi_1(\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1)) \subset p_{2*}(\pi_1(\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2))$.*

Corolário 5.3.2 *Seja $p : \widetilde{X} \to X$ um recobrimento, cujo domínio $\widetilde{X}$ é simplesmente conexo e localmente conexo por caminhos. Para todo recobrimento $q : \widetilde{Y} \to X$ com $\widetilde{Y}$ conexo, existe um recobrimento $f : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ tal que $q \circ f = p$.*

Corolário 5.3.3 *Sob as hipóteses do Teorema 5.3.1 o homomorfismo $f : \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}_2$ com $f(\widetilde{x}_1) = \widetilde{x}_2$ é um isomorfismo se e somente se $p_{1*}(\pi_1(\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1)) = p_{2*}(\pi_1(\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2))$.*

A seguir, nesta seção, sempre $p : \widetilde{X} \to X$ denota um recobrimento, $\widetilde{X}$ é conexo e $N(H)$ é o normalizador do grupo H.
Sejam $\widetilde{x}_0, \widetilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$. Como vimos, existe um endomorfismo $f : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ tal que $f(\widetilde{x}_0) = \widetilde{x}_1$ se e só se $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)) \subset p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1))$. Sabemos também que $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1)) = \alpha^{-1}(p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))\alpha$, onde $\alpha \in \pi(X, \widetilde{x}_0)$ é a classe de homotopia de $a = p \circ \widetilde{a}$ (onde o caminho $\widetilde{a}$ começa em $\widetilde{x}_0$ e termina em $\widetilde{x}_1$) no espaço X. Então dados dois pontos quaisquer $\widetilde{x}_0, \widetilde{x}_1 \in \widetilde{X}$ situados em $p^{-1}(x_0)$, existe um automorfismo $f : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ tal que $f(\widetilde{x}_0) = \widetilde{x}_1$ se e só se $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)) = p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1))$.

Se o recobrimento $p : \widetilde{X} \to X$ é regular, segue-se que dados dois pontos quaisquer $\widetilde{x}_0, \widetilde{x}_1 \in X$ situados em $p^{-1}(x_0)$, existe um endomorfismo $f : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ tal que $f(\widetilde{x}_0) = \widetilde{x}_1$. Além disso, todo endomorfismo de um recobrimento regular é um automorfismo. Então o grupo $G(\widetilde{X}|X)$ dos automorfismos de um recobrimento regular atua transitivamente nas fibras.

Ainda temos que o grupo fundamental $\pi(X, x_0)$ opera transitivamente à direita na fibra $p^{-1}(x_0)$ e a atuação de $\alpha \in \pi(X, x_0)$ sobre $\widetilde{x} \in p^{-1}(x_0)$ é representado por $\widetilde{x}.\alpha$ e $\widetilde{x}.\alpha = \widetilde{a}(1)$ onde $\widetilde{a} : I \to \widetilde{X}$ é o levantamento, a partir de $\widetilde{x}$, de um caminho $a : I \to X$ tal que $\alpha = [a]$.

Diante destas noções, a existência de um endomorfismo $f : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ com $f(\widetilde{x}_0) = \widetilde{x}_1$ onde $\widetilde{x}_1 = \widetilde{x}_0\alpha$, é equivalente a $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, x_0)) \subset \alpha^{-1}p_*(\pi_1(\widetilde{X}, x_0))\alpha$. Além disso, f é um automorfismo se e só se $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, x_0)) = \alpha^{-1}p_*(\pi_1(\widetilde{X}, x_0))\alpha$, ou seja, se e só se $\alpha \in N(p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$.

Em particular, para cada $\alpha \in N(p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$, existe um único automorfismo $f : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ tal que $f(\widetilde{x}_0) = \widetilde{x}_0.\alpha$.

Lema 5.3.4 *[17, Cap. 5] Seja $f : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ um endomorfismo do recobrimento $p : \widetilde{X} \to X$. Para quaisquer $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ e $\alpha \in \pi_1(X, p(\widetilde{x}))$, vale $f(\widetilde{x}.\alpha) = f(\widetilde{x}).\alpha$.*

Teorema 5.3.5 *[17, Prop. 5.9] Seja $p : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ um recobrimento com $\widetilde{X}$ conexo e localmente conexo por caminhos. Para cada $\widetilde{x}_0 \in \widetilde{X}$ existe um isomorfismo de grupos $G(\widetilde{X}|X) \cong N(p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))/p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$.*

Corolário 5.3.6 *Se $\widetilde{X}$ é conexo e localmente conexo por caminhos e o recobrimento é regular, tem-se um isomorfismo $G(\widetilde{X}|X) \cong \pi_1(X, x_0)/p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$ para cada $\widetilde{x}_0$.*

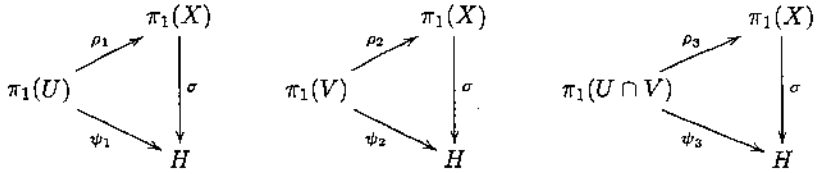
O próximo resultado é o objetivo desta seção.

Corolário 5.3.7 *Se $\widetilde{X}$ é simplesmente conexo então $G(\widetilde{X}|X) \cong \pi_1(X, x_0)$.*

5.4 Teorema de Seifert-Van Kampen

Seja $X = U \cup V$ um espaço com U, V e $U \cap V \neq \emptyset$ abertos em X conexos por caminhos. Escolhemos um ponto básico $x_0 \in U \cap V$ para todo o grupo fundamental que considerarmos.
Aqui ρ_1, ρ_2, ρ_3 denotam homomorfismos induzidos pelas aplicações de inclusão e o ponto x_0 é sistematicamente omitido.

Teorema 5.4.1 *[18, Cap. 4, Teor. 2.1] Sejam H um grupo qualquer, ψ_1, ψ_2 e ψ_3 homomorfismos de grupos. Então existe um único homomorfismo σ que torna o diagrama comutativo*



isto é, $\pi_1(X)$ é o push-out de $\pi_1(U \cap V), \pi_1(U), \pi_1(V)$.

Capítulo 6

Invariante de Bieri-Strebel e uma Generalização

6.1 Propriedades Básicas do Invariante de Bieri-Strebel

Nesta seção Q denota um grupo abeliano finitamente gerado.
Iniciamos estabelecendo algumas definições canônicas antes de tratarmos diretamente do assunto que intitula esta secão.

Definição 6.1.1 *Por um caracter entendemos um homomorfismo de Q no grupo aditivo dos números reais* $\mathbb{R}$, $\nu : Q \to \mathbb{R}$. *Associamos a cada caracter* ν *o monóide*

$$Q_\nu = \{q \in Q | \, \nu(q) \geq 0\}.$$

Observamos que ν *pode ser estendido a uma aplicação de* $\mathbb{Z}Q$ *à* $\mathbb{R} \cup \infty$

$$\nu(\sum_{q \in Q} z_q q) = min_{z_q \neq 0}\{\nu(q)\} \text{ se } \sum_q z_q q \neq 0; \nu(0) = \infty$$

Definição 6.1.2 *Seja A um* $\mathbb{Z}Q-$*módulo à esquerda. O centralizador de* $A \subset \mathbb{Z}Q$ *é o conjunto*

$$C(A) = \{\lambda \in \mathbb{Z}Q | \, \lambda a = a, para\, todo\, a \in A\}.$$

Um $\mathbb{Z}Q$-módulo A finitamente gerado pode ou não ser finitamente gerado sobre $\mathbb{Z}Q_\nu$. O próximo resultado estabelece um critério sobre essa questão. No restante desta seção, salvo menção em contrário, A denota um $\mathbb{Z}Q$-módulo à esquerda.

Proposição 6.1.3 *[7, Prop. 2.1] Seja A um* $\mathbb{Z}Q$*-módulo finitamente gerado e* $\nu : Q \to \mathbb{R}$ *um caracter não-trivial. Então A é finitamente gerado sobre* $\mathbb{Z}Q_\nu$ *se e só se existe* $\lambda \in C(A)$ *com* $\nu(\lambda) > 0$. *Além disso, qualquer conjunto gerando A como* $\mathbb{Z}Q$*-módulo gera A como* $\mathbb{Z}Q_\nu$*-módulo.*

Temos que $Hom(Q, \mathbb{R})$, com a soma e produto por escalar usuais, tem uma estrutura de $\mathbb{R}$-espaço vetorial de dimensão n=posto de Q (isto é, $Q = T(Q) \oplus$

$\mathbb{Z}^n$, onde $T(Q)$ é a parte de torção de Q) e é isomorfo ao espaço $\mathbb{R}^n$ via o isomorfismo $\varphi : Hom(Q, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$ dado por

$$\varphi(\nu) = (\nu(e_1), \ldots, \nu(e_n))$$

onde $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}^n \subseteq Q$.
Observe que para cada $q \in Q$ temos

$$\nu(q) = \langle \chi_q, \varphi(\nu) \rangle$$

onde $\chi_q \in \mathbb{Z}^n$ é definido pelas coordenadas da componente de q em $\mathbb{Z}^n$ e $\langle \ , \ \rangle$ é o produto interno em $\mathbb{R}^n$.
Diremos que dois caracters não-nulos ν e μ em $Hom(Q, \mathbb{R})$ são equivalentes quando existir um número real r positivo com $\nu = r\mu$. Observe que caracteres equivalentes definem um mesmo monóide.
Denotamos a coleção das classes de equivalência $[\nu]$, $\nu \in Hom(Q, \mathbb{R}) \backslash \{0\}$, desta relação por $S(Q)$, denominamos *esfera de caracteres*. E identificamos $S(Q)$ com a esfera unitária $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, onde n é o posto de Q, via

$$[\nu] \to \varphi(\nu)/||\varphi(\nu)||,$$

onde $||\varphi(\nu)||$ é a norma clássica em $\mathbb{R}^n$.

Definição 6.1.4 *Considere A um $\mathbb{Z}Q$-módulo finitamente gerado. O invariante de Bieri-Strebel (associado ao módulo A) é o subconjunto $\Sigma_A(Q)$ da esfera de caracteres S(Q),*

$$\Sigma_A(Q) = \{[\nu] \in S(Q) | \, A \text{ é finitamente gerado sobre } \mathbb{Z}Q_\nu\}.$$

A seguir vamos destacar propriedades do invariante de Bieri-Strebel.
Como consequência da Proposição 6.1.3 temos

$$\Sigma_A(Q) = \cup_{\lambda \in C(A)} \{[\nu] \in Q | \, \nu(\lambda) > 0\},$$

de onde seguem facilmente as seguintes propriedades de $\Sigma_A(Q)$:

Proposição 6.1.5 *[7, Prop. 2.2] Seja A um $\mathbb{Z}Q$-módulo finitamente gerado. Então*

1) $\Sigma_A(Q)$ é aberto em S(Q),

2) $\Sigma_A(Q) = \Sigma_{\mathbb{Z}Q/I}(Q)$, onde I é o ideal anulador de A em $\mathbb{Z}Q$,

3) Se $A' \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A''$ é uma sequência exata curta de $\mathbb{Z}Q$-módulos então,

$$\Sigma_A(Q) = \Sigma_{A'}(Q) \cap \Sigma_{A''}(Q).$$

A seguir vamos dar descrições da esfera de caracteres em termos do invariante de Bieri-Strebel.

Teorema 6.1.6 *[7, Teor.2.4] Seja A um $\mathbb{Z}(Q)$-módulo finitamente gerado. Então, $\Sigma_A(Q) = S(Q)$ se e só se A é finitamente gerado como grupo abeliano.*

Se A é um $\mathbb{Z}Q$-módulo à esquerda (resp. à direita) denotamos A^* para A visto como $\mathbb{Z}Q$-módulo à direita (resp. à esquerda) via a $Q-$ação dada por $aq = q^{-1}a$ (resp. $qa = aq^{-1}$), onde $a \in A$ e $q \in Q$. Os conjuntos $\Sigma_A(Q)$ podem ser considerados para módulos de ambos os lados e $\Sigma_{A^*}(Q) = -\Sigma_A(Q)$.

Definição 6.1.7 *Um $\mathbb{Z}Q$-módulo A finitamente gerado diz-se tame se*

$$S(Q) = \Sigma_A(Q) \cup \Sigma_{A^*}(Q).$$

Proposição 6.1.8 *[7, Prop. 2.5] Seja A um $\mathbb{Z}Q$-módulo tame.*

1) *Os submódulos, as imagens homomórficas e os produtos diretos finitos de cópias de A são Q-tame.*

2) *Seja $\rho : Q' \to Q$ um homomorfismo sobre um subgrupo de índice finito em Q, onde Q' é um grupo abeliano finitamente gerado. Então A é Q-tame se e só se A é Q'-tame.*

Finalizamos essa seção estabelecendo um critério sobre a condição Q-tame. Seja $\lambda \in \mathbb{Z}Q \setminus \{0\}$. Definimos o suporte de λ em Q como $\{q \in Q \mid z_q \neq 0\}$ onde $\lambda = \sum z_q q, z_q \in \mathbb{Z}, q \in Q$.

Lema 6.1.9 *[7, Lema 2.6] Um $\mathbb{Z}Q$-módulo finitamente gerado A é $Q-$tame se e só se uma das duas condições equivalentes está assegurada:*

1) *Para cada caracter não-trivial $\nu : Q \to \mathbb{R}$ existe $\lambda \in C(A) \cup C(A^*)$ com $\nu(\text{suporte de } \lambda \text{ em } Q) > 0$;*

2) *Existe um subconjunto finito $\Lambda \subseteq C(A) \cup C(A^*)$ tal que para cada caracter não trivial $\nu : Q \to \mathbb{R}$ existe $\lambda \in \Lambda$ com $\nu(\text{suporte de } \lambda \text{ em } Q) > 0$.*

6.2 Classificação de Grupos Metabelianos Finitamente Apresentáveis

Nesta seção consideramos módulos à esquerda sendo que podemos considerar de modo análogo módulos à direita.

Definição 6.2.1 *Um grupo G é metabeliano quando existe uma sequência exata curta de grupos*

$$A \hookrightarrow G \twoheadrightarrow Q$$

onde A e Q são abelianos.

Neste caso temos que G é finitamente gerado se e somente se A é $\mathbb{Z}Q$-módulo finitamente gerado via conjugação e Q é grupo abeliano finitamente gerado. Também neste contexto temos que G é finitamente apresentável conforme o

Teorema 6.2.2 *[7, Teor. 3.1] Se Q é um grupo abeliano finitamente gerado e A é um $\mathbb{Z}Q$-módulo tame, então cada extensão de A por Q é finitamente apresentável.*

No Teorema 6.2.2 podemos considerar Q sendo grupo abeliano livre. De fato, seja G uma extensão qualquer de A por Q

$$A \hookrightarrow G \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} Q,$$

o núcleo de π e A identificam-se como $\mathbb{Z}Q$-módulos.
Temos a decomposição $Q = Q_1 \oplus T(Q)$ onde $T(Q)$ é a parte de torção de Q e Q_1 é grupo abeliano livre de posto $n \geq 1$. Como $G_1 = \pi^{-1}(Q_1)$ tem indice finito em G então, G é finitamente apresentável se e somente se G_1 é finitamente apresentável [3]. Além disso, pela Proposição 6.1.8 temos que A é $\mathbb{Z}Q$-módulo tame se e só se A é $\mathbb{Z}Q_1$-módulo tame.

Teorema 6.2.3 *[7, Teor. 4.1] Sejam G um grupo de tipo FP_2 sobre um anel comutativo $R \neq 0$ e N um subgrupo normal de G com G/N abeliano. Então ou N contêm subgrupos livres não-cíclicos ou o $\mathbb{Z}Q$-módulo N/N' é tame, onde N' é o comutador $[N, N]$.*

Teorema 6.2.4 *[7, Teor. 5.1] Sejam G um grupo finitamente gerado, A um subgrupo normal abeliano de G com G/A abeliano. G é finitamente apresentável se e só se A é um $\mathbb{Z}Q$-módulo tame.*

Dentro do contexto de grupos metabelianos a coleção dos grupos finitamente apresentáveis coincide com a coleção dos grupos de tipo FP_2, conforme veremos a seguir.

Teorema 6.2.5 *Para grupos metabelianos G, são equivalentes.*

1) *G é finitamente apresentável.*

2) *G é de tipo FP_2.*

3) *Se $A \hookrightarrow G \twoheadrightarrow Q$ é uma sequência exata curta de grupos com A e Q abelianos. Então A é $\mathbb{Z}Q$-módulo tame.*

Demonstração: 1) $\Rightarrow$ 2) Corolário 2.2.14; 2) $\Rightarrow$ 3) Teorema 6.2.3; 3) $\Rightarrow$ 1) Teorema 6.2.4. □

6.3 Uma generalização

Nesta seção vamos demonstrar uma versão mais geral do Teorema 6.2.3.

Definição 6.3.1 *Seja Q um grupo finitamente gerado nilpotente de classe 2. Generalizando o invariante de Bieri-Strebel, definimos*

$$S(Q) = (Hom(Q, \mathbb{R}) \setminus \{0\})/\sim$$

onde $\sim$ denota a relação de equivalência em $Hom(Q, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$ dada por $\chi_1 \sim \chi_2$ se e só se existe $r \in \mathbb{R}$ positivo com $\chi_1 = r\chi_2$.

Como $S(Q) \cong S(Q/Q')$ identificamos $S(Q)$ com a esfera unitária $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ onde n é o posto de Q/Q', de modo análogo ao que foi feito na seção 6.1.

Definição 6.3.2 *Para um $\mathbb{Z}Q$-módulo à esquerda A finitamente gerado definimos*

$$\Sigma_A(Q) = \{[\nu] \in S(Q) | \, A \text{ é finitamente gerado sobre } \mathbb{Z}Q_\nu\}$$

E dizemos que A é Q-tame se

$$\Sigma_A^c(Q) \cap -\Sigma_A^c(Q) = \emptyset,$$

onde $\Sigma_A^c(Q) = S(Q) \setminus \Sigma_A(Q)$.

O seguinte resultado é semelhante ao resultado principal de [8] embora a linguagem e notações de [8] sejam bem diferentes das nossas. Como não achamos referência desse resultado incluímos uma demonstração. A demonstração tem muitas etapas que são demonstradas de forma análoga à versão anterior onde G/N é abeliano, aqui faremos apenas um esboço da demonstração enfatizando as passagens mais importantes.

Teorema 6.3.3 *[7] Sejam G um grupo de tipo FP_2 sobre um anel comutativo $K \neq 0$ e N um subgrupo normal de G com G/N nilpotente de classe 2. Então ou N contêm subgrupos livres não-cíclicos ou o $\mathbb{Z}Q$-módulo N/N' é tame, onde $N' = [N, N]$.*

Demonstração: Por [4, Lema 2.1], existe uma sequência exata curta de grupos $S \hookrightarrow H \overset{\alpha}{\twoheadrightarrow} G$ onde H é finitamente apresentável e $S \otimes_{\mathbb{Z}} K = 0$.

Seja $H = \langle X, R \rangle$ uma apresentação finita de H e consideremos o complexo de Cayley $\widetilde{\Gamma} = \widetilde{\Gamma}(X, R)$ desta apresentação o qual é um 2-complexo tendo H para o conjunto das 0-células, o produto cartesiano $H \times X$ como 1-células sendo que cada $(h, x) \in H \times X$ tem origem h e fim hx ((hx, x^{-1}) tem sentido inverso de (h, x)) e finalmente $H \times R$ constitue o conjunto das 2-células onde o bordo de $(h, r) \in H \times R$ é o caminho de arestas

$$\partial(h, r) = (h, y_1)(hy_1, y_2)...(hy_1y_2...y_{e-1}, y_e),$$

onde $r = y_1y_2...y_e$ com $y_i \in X \cup X^{-1}$. Mais detalhes em [16].
O complexo $\widetilde{\Gamma}$ é dado com uma H-ação natural induzida pela multiplicação à esquerda em H.

Sejam $M = \alpha^{-1}(N) \lhd H$ e $\Gamma = \widetilde{\Gamma}/M$ o complexo quociente de $\widetilde{\Gamma}$ módulo esta ação restrita a M. Γ tem $H/M \cong G/N = Q$ agindo pela esquerda, de fato Γ pode ser identificado com o complexo com vértices, arestas e 2-células $(Q, Q \times X, Q \times R)$. Como a ação de H em $\widetilde{\Gamma}$ é propriamente discontinua os resultados da seção 5.2 implicam que a projeção canônica $\widetilde{\Gamma} \twoheadrightarrow \Gamma$ é uma aplicação de recobrimento. Além disso $\widetilde{\Gamma}$ é conexo e simplesmente conexo, logo via [18, cap. 5] e Corolário 5.3.8 M é isomorfo ao grupo fundamental de Γ isto é, $M = \pi_1(\Gamma)$.

A seguir vamos descrever o 1-skeleto Γ^1 de Γ. Como G/N é finitamente apresentável podemos assumir que X é uma união disjunta de dois subconjuntos $X = \mathcal{M} \cup \mathcal{T}$, onde $\mathcal{M}$ representa um conjunto de geradores normais de M e $\mathcal{T} = \{t_1, \ldots, t_n | 1 \leq i \leq n\}$ representa um conjunto de geradores $\{q_i = t_iM\}$ de $Q \cong H/M$. Então o 1-esqueleto Γ^1 é a união de dois subcomplexos $\Gamma^1 = \Delta \cup \Omega$, onde $\Delta^0 = Q$, $\Delta^1 = Q \times \mathcal{T}$ ($(q, t_i) \in \Delta^1$ tem origem q e fim qt_i) e $\Omega^0 = Q$,

$\Omega^1 = Q \times \mathcal{M}$ ($(q,m) \in \Omega^1$ tem origem e fim simultaneamente em q).
Agora dado um caracter $v \in Hom(Q, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$ definimos a norma de v por

$$||v|| = (\Sigma_{i=1}^{n} v(q_i)^2)^{\frac{1}{2}}$$

Seja Γ_v o subcomplexo de Γ gerado por $Q_v \subset Q = \Gamma^0$, onde Γ^0 é o 0-esqueleto de Γ. Portanto Γ_v é indutivamente definido como segue: $\Gamma_v^0 = Q_v$, e se $r > 0$ então o r-esqueleto Γ_v^r consiste de Γ_v^{r-1} com todas as r-células de Γ com bordo em Γ_v^{r-1}. Seja $\Delta_v = \Delta \cap \Gamma_v$ e $\Omega_v = \Omega \cap \Gamma_v$. Temos

Lema 6.3.4 *Se $q \in Q$ com $v(q)$ número real positivo suficiente grande então $\Gamma_v \cap q\Gamma_{-v}$ é conexo.*

Demonstração: Semelhante à demonstração em [7]. □

Lema 6.3.5 *Seja l o comprimento máximo dos relações em R, sendo que $R \neq \emptyset$, e $l = 1$ em caso contrário. Se $q \in Q$ com $v(q) \geq l||v||$ então $\Gamma = \Gamma_v \cup q\Gamma_{-v}$.*

Demonstração: Temos $Q = Q_v \cup Q_{-v}$, portanto se $v(q) \geq 0$ temos que $Q = Q_v \cup qQ_{-v}$. Então o conjunto dos vértices de $Q = Q_v \cup Q_{-v}$ é a união dos conjuntos dos vértices de Γ_v e $q\Gamma_{-v}$. Resta demonstrar que cada 2-célula de Γ está em Γ_v ou em $q\Gamma_{-v}$.

Seja w um caminho fechado de arestas em Γ^1. Deletando todas as arestas de w em Ω fornece um caminho $\overline{w}$ em Δ com os mesmos vértices.

Seja $\varphi : Q \to \overline{Q} = Q/M_0$ a projeção canônica onde M_0 é o subgrupo normal de Q definido com as seguintes propriedades : $[Q,Q] \subseteq M_0$, $M_0/[Q,Q]$ é finito e Q/M_0 é livre de torção, isto é, $Q/M_0 \simeq \mathbb{Z}^m$ para um $m \geq 1$.

A aplicação φ induz uma aplicação $\overline{\varphi} : \Delta \to \mathbb{R}^m$. Se $\overline{w}$ não pertence Γ_v ou $q\Gamma_{-v}$ então $w_1 := \varphi(\overline{w})$ é um caminho fechado de grade natural $\cup_{1 \leq i \leq m} \mathbb{Z}^{i-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{Z}^{m-i}$ em $\mathbb{R}^m$ tal que o número de arestas em w_1 é maior ou igual a duas vezes a distância entre os hiperplanos s_1 e s_2 em $\mathbb{R}^m$. Os hiperplanos s_1 e s_2 são dados com equações

$$s_1 : \widetilde{v}(t) = 0 \text{ e } s_2 : \widetilde{v}(t) = v(q) \text{ para } t \in \mathbb{R}^m$$

onde $\widetilde{v}$ é a aplicação linear $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ induzida por v,isto é, $\widetilde{v}(\bar{q}) = v(q)$ para cada $q \in Q, \bar{q} = \varphi(q)$. Como

$$dist(s_1, s_2) = \mid v(q) \mid / \mid\mid v \mid\mid = v(q) / \mid\mid v \mid\mid$$

temos que se $\overline{w}$ não pertence a Γ_v ou $q\Gamma_{-v}$

$$l \geq 2dist(s_1, s_2) = 2v(q) / \mid\mid v \mid\mid \geq v(q) / \mid\mid v \mid\mid .$$

□

Agora escolhemos $q \in Q$ com $v(q)$ numero real positivo suficientemente grande tal que podemos usar os últimos dois lemas. Então a decomposição $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, com $\Gamma_1 = \Gamma_v$ e $\Gamma_2 = q\Gamma_{-v}$, satisfaz as hipóteses do teorema de Seifert-van Kampen discutido na seção 5.4. Por isso o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\Gamma_{12}) & \xrightarrow{i_*} & \pi_1(\Gamma_1) \\ \downarrow{\scriptstyle i_*} & & \downarrow{\scriptstyle i_*} \\ \pi_1(\Gamma_2) & \xrightarrow{i_*} & \pi_1(\Gamma) \end{array}$$

é um diagrama pushout onde i sempre denota imersão de subcomplexos, i_* a aplicação induzida, $\Gamma_{12} = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$. É rapidamente visto que o diagrama correspondente com $\pi_1(\Gamma_k)$ substituido pela imagem $M_k = i_*\pi_1(\Gamma_k)$, para $k = 1, 2, 12$, é um diagrama pushout mas nesse caso todas as aplicações sao injetivas. Por isso $M = \pi_1(\Gamma)$ é o produto amalgamado $M = M_1 *_{M_{12}} M_2$.

Lema 6.3.6 *[7, Lema 4.4] Seja $S \hookrightarrow M \stackrel{\alpha}{\twoheadrightarrow} N$ uma sequência exata curta de grupos e assuma que $M = M_1 *_{M_{12}} M_2$. Se existe um anel comutativo K com $(S/[S,S]) \otimes_{\mathbb{Z}} K = 0$ então $N = N_1 *_{N_{12}} N_2$, onde $N_k = \alpha(M_k)$, para $k = 1, 2, 12$.*

Agora impomos a hipótese que N não contêm subgrupos livres de posto maior que 1. Então ou a decomposição em produto amalgamado $N = N_1 *_{N_{12}} N_2$ é trivial (isto é, $N = N_1$ ou $N = N_2$) ou N_{12} tem índice 2 em N_1 e em N_2 simultaneamente. Exatamente como em [7] o segundo caso pode ser reduzido ao primeiro e nesse caso obtemos como em [7] o seguinte resultado

Proposição 6.3.7 *Seja G um grupo de tipo FP_2 (sobre algum anel $K \neq 0$) e $N \lhd G$ com $Q = G/N$ grupo nilpotente de classe 2 sendo cada subgrupo livre de N cíclico. Então, para cada caracter $v : Q \to \mathbb{R}$, existe $j \in \{1, 2\}$, tal que a aplicação composta αi_**

$$\pi_1(\Gamma_j) \stackrel{i_*}{\to} \pi_1(\Gamma) = M \stackrel{\alpha}{\twoheadrightarrow} N,$$

é homomorfismo sobrejetor. Em particular existe homomorfismo sobrejetor

$$H_1(\Gamma_j) \simeq \pi_1(\Gamma_j)/[\pi_1(\Gamma_j), \pi_1(\Gamma_j)] \to N/[N, N].$$

Finalmente observamos que como em [7] temos

Lema 6.3.8 *Para cada caracter não trivial $v : Q \to \mathbb{R}$ o grupo homológico $H_1(\Gamma_v)$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}[Q_v]$-módulo.*

Demonstração: Como em [7] é suficiente demonstrar que o grupo de 1-ciclos $Z_1(\Gamma_v)$ é finitamente gerado sobre $\mathbb{Z}[Q_v]$, então essa propriedade depende somente do 1-esqueleto de $\Gamma = \Delta \cup \Omega$. Então $Z_1(\Gamma_v) = Z_1(\Delta_v) \oplus Z_1(\Omega_v)$. Como Ω_v contem somente arestas fechadas coladas em pontos de Q_v temos que $Z_1(\Omega_v)$ é um $\mathbb{Z}[Q_v]$-modulo livre de posto finito, o posto é o numero de arestas fechadas coladas num ponto de Q_v. Assim resta demonstrar que $Z_1(\Delta_v)$ é finitamente gerado, mas Δ_v é "metade" de uma grade com respeito ao caracter v do complexo de Cayley do grupo finitamente gerado, nilpotente (de classe 2) Q. Para esse grupo é óbvio que $Z_1(\Delta_v)$ é finitamente gerado. □
O que completa a demonstração e encerra esta seção. □

Capítulo 7

Primeira Fase de Redução

7.1 Resultados preliminares

Neste capítulo vamos fazer a primeira redução do teorema principal. Recordamos que temos a sequência exata cindida de grupos

$$A \hookrightarrow G \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} Q$$

onde A é $\mathbb{Z}Q$-módulo (a ação de Q é dada por conjugação á esquerda) e Q é grupo nilpotente de classe 2.

Como G é finitamente gerado (como grupo) existe um homomorfismo sobrejetor $F \xrightarrow{f} G$ onde F é grupo livre de posto finito. Temos que $Ker\,\pi f = f^{-1}(A)$. Agora como Q é finitamente apresentável segue do Teorema 1.2.2 que existe um subconjunto finito $R \subset f^{-1}(A)$ tal que $f^{-1}(A) =<^F R>$. Logo $A =<^G f(R)>$. Assim, temos

Lema 7.1.1 *Para cada sequência exata curta de grupos $A \hookrightarrow G \twoheadrightarrow Q$ onde G é finitamente gerado como grupo e Q é grupo finitamente apresentável temos que A é $\mathbb{Z}Q$-módulo finitamente gerado com ação dada por conjugação.*

Denotamos qaq^{-1} por $q \circ a$ onde $q \in Q$ e $a \in A$. Denotamos com Aug ideal ampliado e $Z(Q)$ denota o centro de Q. Como Q é nilpotente de classe dois o comutador $Q' \subseteq Z(Q)$.

Lema 7.1.2 *Seja $N = \langle Z(Q)^G \rangle$, temos que $A_0 := A \cap N = (Aug\mathbb{Z}(Z(Q))) \circ A$.*

Demonstração: Temos que

$$(Aug\mathbb{Z}(Z(Q))) \circ A = \langle \{(z-1) \circ a \mid a \in A \text{ e } z \in Z(Q)\} \rangle \text{ e}$$

$$(z-1) \circ a = z \circ a - a := (zaz^{-1})a^{-1} = z(az^{-1}a^{-1}) \in N \cap A,$$

isso mostra que vale a inclusão $\supseteq$.

Veremos agora a inclusão oposta. Tome $u =^g z$, onde $z \in Z(Q)$, $g = aq$ com $a \in A$ e $q \in Q$ temos que

$$u = (aq)z(aq)^{-1} = a(qzq^{-1})a^{-1} = aza^{-1} = zz^{-1}aza^{-1} = z((z^{-1}-1) \circ a),$$

temos também que $s := (z^{-1} - 1) \circ a \in (Aug\mathbb{Z}(Z(Q))) \circ A$ e além disso $u = zs$.

De modo geral, tomando $a = ({}^{g_1}z_1)\dots({}^{g_n}z_n)$ em A_0, onde $z_i \in Z(Q)$ e $g_i \in G$.

$$\begin{aligned} a &= z_1 s_1 \dots z_n s_n \\ &= z_1 s_1 z_1^{-1}.z_1 z_2 s_2 z_2 z_3 s_3 \dots z_n s_n \\ &= (z_1 \circ s_1)((z_1 z_2) \circ s_2)((z_1 z_2 z_3) \circ s_3) \dots ((z_1 \dots z_n) \circ s_n).(z_1 \dots z_n) \end{aligned}$$

onde $s_j \in (Aug\mathbb{Z}(Z(Q)) \circ A \subseteq A_0$. Como $(z_1 \dots z_k) \circ s_k \in (Aug\mathbb{Z}(Z(Q)) \circ A \subseteq A$, segue que $z_1 \dots z_n \in Z(Q) \cap A \subset Q \cap A = \{e\}$, e assim $a \in (Aug\mathbb{Z}(Z(Q))) \circ A$. □

Como

$$A/A_0 \hookrightarrow G/A_0 \overset{s}{\twoheadrightarrow} Q$$

onde $s(\overline{g}) = \pi(g)$ é uma extensão cindida de grupos, segue que

$$G/A_0 = (A \rtimes Q)/A_0 \simeq (A/A_0) \rtimes Q.$$

Temos que a projeção canônica

$$\beta : G/A_0 \to G/N$$

dada por $\beta(gA_0) = gN$ é homomorfismo sobrejetor com $Ker(\beta) \cap A/A_0 = \{e\}$. Como a projeção canônica

$$\gamma : G/A_0 \simeq (A/A_0) \rtimes Q \to Q$$

definida por $\gamma(\overline{a}q) = q$ é tal que $Ker(\gamma) = A/A_0$, segue que $Ker(\beta) \cap Ker(\gamma) = \{e\}$. Logo $Ker(\beta) \simeq \gamma(Ker(\beta)) \leq Q$, isto é, $Ker(\beta)$ é grupo finitamente gerado nilpotente de classe ≤ 2 e portanto $Ker(\beta)$ tem tipo FP_∞. Agora usando a seqüência exata de grupos a seguir

$$Ker(\beta) \hookrightarrow G/A_0 \twoheadrightarrow G/N$$

conforme o Teorema 2.3.19 temos o

Corolário 7.1.3 *G/N tem tipo FP_m se e só se G/A_0 tem tipo FP_m.*

De agora em diante supomos que G tem tipo FP_3. Seja

$$F = \dots \to F_3 \to F_2 \to F_1 \to F_0 \to \mathbb{Z} \to 0$$

uma $\mathbb{Z}G-$ resolução livre de $\mathbb{Z}$ com F_0, F_1, F_2 e F_3 finitamente gerados e considere o complexo

$$\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}A_0} F = \dots \to \mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}A_0} F_3 \xrightarrow{\delta_3} \mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}A_0} F_2 \xrightarrow{\delta_2} \mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}A_0} F_1 \xrightarrow{\delta_1} \mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}A_0} F_0 \xrightarrow{\delta_0} \mathbb{Z} \to 0$$

denotamos $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}A_0} F_j = Q_j$.

De acordo com,

Lema 7.1.4 *[11] Seja A um grupo abeliano. Então existe um isomorfismo natural*

$$\wedge^i A \simeq H_i(A;\mathbb{Z})$$

para $i = 1, 2$.

Temos que (ver 2.1.14)

$$H_2(A_0;\mathbb{Z}) = H_2(\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}A_0} F) \simeq A_0 \wedge A_0$$

e

$$H_1(A_0;\mathbb{Z}) = H_1(\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}A_0} F) \simeq A_0$$

A ação de Q sobre A_0 induz ação de Q sobre os grupos homológicos $H_i(A_0;\mathbb{Z})$ e no Lema 7.1.4 o isomorfismo é de $\mathbb{Z}Q-$módulos onde Q age diagonalmente sobre o produto exterior. A ação diagonal foi definida na seção 4.1.

Via o complexo $\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}A_0}F$, existe a sequência exata curta de $\mathbb{Z}(G/A_0)$-módulos

$$Ker(\delta_0) \hookrightarrow Q_0 \twoheadrightarrow \mathbb{Z},$$

como Q_0 tem tipo FP_∞ sobre $\mathbb{Z}(G/A_0)$, pela Proposição 2.2.7

$\mathbb{Z}$ tem tipo FP_3 sobre $\mathbb{Z}(G/A_0)$ se e só se $Ker(\delta_0)$ tem tipo FP_2 sobre $\mathbb{Z}(G/A_0)$.

Temos que $Im(\delta_1) = Ker(\delta_0)$, pois $\otimes$ é funtor exato à direita. E como temos a seqüência exata curta de $\mathbb{Z}(G/A_0)$-módulos

$$Ker(\delta_1) \hookrightarrow Q_1 \twoheadrightarrow Im(\delta_1),$$

onde Q_1 tem tipo FP_∞ sobre $\mathbb{Z}(G/A_0)$ então, via Proposição 2.2.7

$Ker(\delta_0) = Im(\delta_1)$ tem tipo FP_2 sobre $\mathbb{Z}(G/A_0)$ se e só se $Ker(\delta_1)$ tem tipo FP_1 sobre $\mathbb{Z}(G/A_0)$

Usando a seqüência exata curta de $\mathbb{Z}(G/A_0)$-módulos

$$Im(\delta_2) \hookrightarrow Ker(\delta_1) \twoheadrightarrow Ker(\delta_1)/Im(\delta_2) \simeq H_1(\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}A_0} F) \simeq A_0$$

se $Im(\delta_2)$ tem tipo FP_1 sobre $\mathbb{Z}(G/A_0)$ e A_0 tem tipo FP_1 sobre $\mathbb{Z}(G/A_0)$ então $Ker(\delta_1)$ tem tipo FP_1 sobre $\mathbb{Z}(G/A_0)$.

Observe que da seqüência exata curta de $\mathbb{Z}(G/A_0)$-módulos

$$Ker(\delta_2) \hookrightarrow Q_2 \twoheadrightarrow Im(\delta_2)$$

onde Q_2 tem tipo FP_∞ sobre $\mathbb{Z}(G/A_0)$ segue que

$Im(\delta_2)$ tem tipo FP_1 sobre $\mathbb{Z}(G/A_0)$ se e só se $Ker(\delta_2)$ tem tipo FP_0 sobre $\mathbb{Z}(G/A_0)$.

Usando a seqüência exata curta de $\mathbb{Z}(G/A_0)$-módulos

$$Im(\delta_3) \hookrightarrow Ker(\delta_2) \twoheadrightarrow H_2(\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}A_0} F) \simeq A_0 \wedge A_0$$

aliado ao fato de que $Im(\delta_3)$ tem tipo FP_0 sobre $\mathbb{Z}(G/A_0)$ temos que

$Ker(\delta_2)$ tem tipo FP_0 sobre $\mathbb{Z}(G/A_0)$ se e só se $A_0 \wedge A_0$ tem tipo FP_0 sobre $\mathbb{Z}(G/A_0)$.

Assim, demonstramos o seguinte resultado

Proposição 7.1.5 *Suponha que G tem tipo FP_3. Se $A_0 \wedge A_0$ é finitamente gerado sobre $\mathbb{Z}(G/A_0)$, isto é, tem tipo FP_0 sobre $\mathbb{Z}(G/A_0)$ via ação diagonal de G/A_0, e A_0 é finitamente apresentável, isto é, FP_1 sobre $\mathbb{Z}(G/A_0)$ via conjugação, então G/A_0 tem tipo FP_3. Em particular G/N tem tipo FP_3.*

Lema 7.1.6 *Suponha que G tem tipo FP_3. Então $A_0 \wedge A_0$ é finitamente gerado sobre $\mathbb{Z}(G/A_0)$ via ação diagonal de G/A_0.*

Demonstração: $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}A} F$ é complexo (de $\mathbb{Z}Q-$módulos livres) com grupos homológicos $H_i(\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}A} F) = H_i(A, \mathbb{Z})$. Como $\mathbb{Z}Q$ é anel Noetheriano (à esquerda) cada $H_i(A, \mathbb{Z})$ é finitamente gerado sobre $\mathbb{Z}Q$ para $i \leq 3$. E em particular $A \wedge A \simeq H_2(A, \mathbb{Z})$ é finitamente gerado sobre $\mathbb{Z}Q$ e a ação de Q no produto exterior é ação diagonal [5]. Aplicando a Proposição 4.1.9, $A \otimes_{\mathbb{Z}} A$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}Q$-módulo via ação diagonal de Q. Disto, via 4.1.10 vem que $A_0 \otimes_{\mathbb{Z}} A$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}Q$-módulo. Aplicando mais uma vez 4.1.10 o fato que $A_0 \otimes_{\mathbb{Z}} A$ é finitamente gerado sobre $\mathbb{Z}Q$ implica que $A_0 \otimes_{\mathbb{Z}} A_0$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}Q$-módulo. □

Capítulo 8

Segunda Fase de Redução

8.1 Classificação de A_0 de tipo FP_1

No que segue iniciamos um estudo preliminar para verificar que ocorre a segunda condição da Proposição 7.1.5. Recordemos que A_0 é $\mathbb{Z}G$-módulo via conjugação, temos também A e A_0 agindo trivialmente sobre A_0, disto vem que A_0 é módulo sobre $\mathbb{Z}(G/A)$ e $\mathbb{Z}(G/A_0)$. Agora denotemos $\overline{G} = G/A_0$ e $\overline{A} = A/A_0$. Como A_0 é $\mathbb{Z}\overline{G}-$módulo via conjugação finitamente gerado, existe um epimorfismo de $\mathbb{Z}\overline{G}$-módulos

$$u : T \longmapsto A_0$$

onde T é $\mathbb{Z}\overline{G}$-módulo livre com base $e_1, \ldots, e_s$, $T = \oplus_{i=1}^{s} \mathbb{Z}\overline{G}e_i$. Logo, pelo Lema 2.2.7

A_0 é finitamente apresentável se e só se $Ker(u)$ tem tipo FP_0 sobre $\mathbb{Z}\overline{G}$.

Considere o diagrama

$$\begin{array}{ccc} T & & \\ \downarrow{\scriptstyle \widetilde{\varphi}} & \searrow^{u} & \\ \oplus_{i=1}^{s} \mathbb{Z}Qe_i & \xrightarrow[\varphi]{} & A_0 \end{array}$$

com

$$\varphi : \oplus_{i=1}^{s} \mathbb{Z}Qe_i \to A_0 \text{ dada por } \varphi(\textstyle\sum_i r_i e_i) = \sum_i r_i \circ u(e_i)$$

e

$$\widetilde{\varphi} : \oplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\overline{G}e_i = T \to \oplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}Qe_i \text{ dada por } \widetilde{\varphi}(\textstyle\sum_i r_i e_i) = \sum_i \overline{\pi}(r_i)e_i$$

onde

$$\overline{\pi} : \mathbb{Z}\overline{G} \to \mathbb{Z}Q \text{ é definida por } \overline{\pi}(\textstyle\sum_g n_g \overline{g}) = \sum_g n_g \pi(g).$$

Como, $\varphi\widetilde{\varphi}(\sum_i r_i e_i) = \varphi(\sum_i \overline{\pi}(r_i)e_i) = \sum_i \overline{\pi}(r_i) \circ u(e_i) = u(\sum_i r_i e_i)$, isto é, $\varphi\widetilde{\varphi} = u$ segue que $Ker(\widetilde{\varphi}) \subseteq Ker(u)$. Disto, temos que

$$Ker(u)/Ker(\widetilde{\varphi}) \simeq \widetilde{\varphi}(Ker(u)),$$

isto é, $\widetilde{\varphi}(Ker(u))$ é um $\mathbb{Z}Q$-submódulo de $\oplus_{i=1}^{s}\mathbb{Z}Qe_i$ finitamente gerado, pois $\mathbb{Z}Q$ é Noetheriano (4.2.6). E também temos que

$$\widetilde{\varphi}^{-1}(Ker(\varphi)) \subseteq Ker(u) = \widetilde{\varphi}^{-1}\widetilde{\varphi}Ker(u) \Rightarrow Ker(\varphi) \subseteq \widetilde{\varphi}(Ker(u))$$

o que nos fornece $\widetilde{\varphi}(Ker(u)) = Ker(\varphi)$, pois $\widetilde{\varphi}(Ker(u)) \subseteq Ker(\varphi)$ segue do fato que $\varphi\widetilde{\varphi}(Ker(u)) = u(Ker\, u) = 0$.

Agora, dado um conjunto gerador $\{(a_{i_1}e_1 + \ldots + a_{i_s}e_s)\}_{i=1}^{m}$ de $\widetilde{\varphi}(Ker(u)) = Ker(\varphi)$ sobre $\mathbb{Z}Q$, como temos $a_{i_j} \in \mathbb{Z}Q$, segue que

$$Ker(u) = Ker(\widetilde{\varphi}) + \sum_{i=1}^{m} \mathbb{Z}\overline{G}(a_{i_1}e_1 + \ldots + a_{i_s}e_s)$$

Definimos

$$\begin{aligned} V: &= \sum_{i=1}^{m} \mathbb{Z}\overline{G}(a_{i_1}e_1 + \ldots + a_{i_s}e_s) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \mathbb{Z}\overline{A}.\mathbb{Z}Q(a_{i_1}e_1 + \ldots + a_{i_s}e_s) = \mathbb{Z}\overline{A}.Ker(\varphi) \subseteq T. \end{aligned}$$

Onde na última inclusão pensamos em $\oplus_{i=1}^{s}\mathbb{Z}Qe_i$ como subconjunto de T. Observe que para $r_i = \sum_{g_i} n_{g_i}\overline{g_i}, \overline{g_i} \in \overline{G}, n_{g_i} \in \mathbb{Z}$

$$\widetilde{\varphi}(\sum_i r_i e_i) = \widetilde{\varphi}(\sum_i (\sum_{g_i} n_{g_i}\overline{g_i})e_i) = \sum_i \overline{\pi}(\sum_{g_i} n_{g_i}\overline{g_i})e_i = 0$$

se e só se

$$\sum_i n_{g_i}\overline{g_i} \in Ker\overline{\pi} = \mathbb{Z}\overline{G}Aug(\mathbb{Z}\overline{A})$$

logo, denotando $\Omega := Aug(\mathbb{Z}\overline{A})$, vem que

$$Ker(\widetilde{\varphi}) = \sum_i \mathbb{Z}\overline{G}\Omega e_i = \sum_i \mathbb{Z}(Q\overline{A})\Omega e_i = \sum_i \mathbb{Z}Q\Omega e_i = \Omega(\sum_i \mathbb{Z}Qe_i)$$

Temos então, $V \cap Ker(\widetilde{\varphi}) = \Omega Ker(\varphi)$ e portanto,

$$\begin{aligned} Ker(u)/V = &\ (Ker(\widetilde{\varphi}) + V)/V \simeq Ker(\widetilde{\varphi})/(Ker(\widetilde{\varphi}) \cap V) \\ \simeq &\ (\Omega(\oplus_{i=1}^{s}\mathbb{Z}Qe_i))/(\Omega Ker(\varphi)) \\ \simeq &\ (\Omega \otimes_{\mathbb{Z}} (\oplus_{i=1}^{s}\mathbb{Z}Qe_i))/(\Omega \otimes_{\mathbb{Z}} Ker(\varphi)) \\ \simeq &\ \Omega \otimes_{\mathbb{Z}} (\oplus_{i=1}^{s}\mathbb{Z}Qe_i/Ker(\varphi)) \simeq \Omega \otimes_{\mathbb{Z}} A_0, \end{aligned}$$

onde o penúltimo isomorfismo é induzido pelo isomorfismo de $\mathbb{Z}-$módulos

$$T \simeq \mathbb{Z}\overline{A} \otimes_{\mathbb{Z}} (\oplus_{i=1}^{s} \mathbb{Z}Qe_i)$$

o qual identifica $\overline{g}e_i$ com $\overline{a} \otimes qe_i$ onde $\overline{g} = \overline{a}q \in \overline{G} \simeq \overline{A} \rtimes Q$, $\overline{a} \in A$, $q \in Q$. Esse isomorfismo induz também os isomorfismos

$$\Omega(\oplus_{i=1}^{s} \mathbb{Z}Qe_i) \simeq \Omega \otimes_{\mathbb{Z}} (\oplus_{i=1}^{s} \mathbb{Z}Qe_i)$$

e

$$\Omega Ker(\varphi) \simeq \Omega \otimes_{\mathbb{Z}} Ker(\varphi)$$

Assim, temos

Proposição 8.1.1 *A_0 tem tipo FP_1 sobre $\mathbb{Z}\overline{G}$ (ou seja, é finitamente apresentável) se e só se $\Omega \otimes_{\mathbb{Z}} A_0$ é finitamente gerado sobre $\mathbb{Z}\overline{G}$, onde $\overline{G} = \overline{A} \rtimes Q$ age sobre $\Omega \otimes_{\mathbb{Z}} A_0$ do seguinte modo, $\overline{A}$ age no primeiro fator via o produto da álgebra de grupo $\mathbb{Z}\overline{A}$ e Q age diagonalmente via ação por conjugação e $\Omega = Aug(\mathbb{Z}\overline{A})$.*

Demonstração: Como já discutido A_0 é finitamente apresentável sobre $\mathbb{Z}\overline{G}$ se e só se $Ker(u)$ é finitamente gerado sobre $\mathbb{Z}\overline{G}$. Como V é finitamente gerado sobre $\mathbb{Z}\overline{G}$, $Ker(u)$ é finitamente gerado sobre $\mathbb{Z}\overline{G}$ se e só se $Ker(u)/V \simeq \Omega \otimes_{\mathbb{Z}} A_0$ é finitamente gerado sobre $\mathbb{Z}\overline{G}$. $\square$

Capítulo 9

Terceira Fase de Redução

9.1 Solução do Problema

Neste capítulo provamos a 2ª condição da Proposição 8.1.1. O seguinte resultado segue do Teorema 6.3.3.

Teorema 9.1.1 *Seja uma extensão $G = A \rtimes Q$ com tipo FP_2 onde A é grupo abeliano e Q é nilpotente de classe 2. Então,*

$$\Sigma^c_A(Q) \cap -\Sigma^c_A(Q) = \emptyset.$$

Denotamos

$$S(Q) = Hom(Q, \mathbb{R}) \setminus \{0\}/\sim, \widetilde{S}(Q) = \{[\chi] \in S(Q) \mid \chi(Z(Q)) = 0\}.$$

Definimos

$$\begin{aligned} \widetilde{\Sigma}_A(Q): &= \{[\chi] \in \widetilde{S}(Q) \mid A \text{ é finitamente gerado sobre } \mathbb{Z}Q_\chi\} \\ &= \widetilde{S}(Q) \cap \Sigma_A(Q) \\ \widetilde{\Sigma}^c_A(Q): &= \widetilde{S}(Q) \setminus \widetilde{\Sigma}_A(Q) = \widetilde{S}(Q) \cap \Sigma^c_A(Q). \end{aligned}$$

Lema 9.1.2 $\widetilde{\Sigma}^c_A(Q) \cap -\widetilde{\Sigma}^c_{A_0}(Q) = \emptyset$.

Demonstração: Suponha que existe $[\chi] \in \widetilde{\Sigma}^c_A(Q) \cap -\widetilde{\Sigma}^c_{A_0}(Q)$ então $[\chi] \in \widetilde{S}(Q) \cap \Sigma^c_A(Q)$, segue que $[\chi] \in \Sigma^c_A(Q)$, usando o Teorema 9.1.1 segue que $[\chi] \notin -\Sigma^c_A(Q)$, isto é, A é finitamente gerado sobre $\mathbb{Z}Q_{-\chi}$, definimos $v = -\chi$ e $\Omega_0 = Aug\mathbb{Z}(Z(Q))$. Então $A = (\mathbb{Z}Q_v) \circ a_1 + \ldots + (\mathbb{Z}Q_v) \circ a_s$ para alguns $a_1, \ldots, a_s \in A$.
Temos pelo Lema 7.1.2 que $A_0 = \Omega_0 \circ A$. Então

1) $A_0 = (\Omega_0\mathbb{Z}Q_v) \circ a_1 + \ldots + (\Omega_0\mathbb{Z}Q_v) \circ a_s = (\mathbb{Z}Q_v\Omega_0) \circ a_1 + \ldots + (\mathbb{Z}Q_v\Omega_0) \circ a_s$ pois

2) $\Omega_0 \subseteq$ centro de $\mathbb{Z}Q_v$.

Como o centro $Z(Q) = \langle h_1, \ldots, h_k \rangle$ vem que

$$\Omega_0 = \mathbb{Z}(Z(Q)).(h_1 - 1) + \ldots + \mathbb{Z}(Z(Q)).(h_k - 1)$$

disto e de 1) e 2) segue que

3) $A_0 = \sum_{i,j} \mathbb{Z}(Z(Q))\mathbb{Z}Q_v(h_i - 1) \circ a_j$.

Como $Z(Q) \subseteq Ker(v) \subseteq Q_v$ segue de 3) que

$$A_0 \subseteq \sum_{i,j} \mathbb{Z}Q_v(h_i - 1) \circ a_j \subseteq \Omega_0 \circ A = A_0.$$

Portanto, $A_0 = \sum_{i,j} \mathbb{Z}Q_v(h_i - 1) \circ a_j$, isto é, A_0 é finitamente gerado sobre $\mathbb{Z}Q_v$. Logo, $[-\chi] \in \widetilde{\Sigma}_{A_0}(Q)$ segue que $[\chi] \in -\widetilde{\Sigma}_{A_0}(Q)$, contradição. □

Lema 9.1.3 *Seja V um $\mathbb{Z}Q$-módulo finitamente gerado por $\{v_1, \ldots, v_m\}$ e $\chi \in Hom(Q, \mathbb{R})\backslash\{0\}$. Então $[\chi] \in \Sigma_V(Q)$ se e só se para cada $1 \leq i \leq m$ existe uma m-upla $(g_{ij})_{j=1}^m$ de elementos em $\mathbb{Z}Q$ com*

$$min_{1 \leq j \leq m}(\chi(supp\ g_{ij})) > 0$$

e $v_i = \sum_j g_{ij} v_j$, onde o supp g_{ij} é o suporte de g_{ij} em Q.

Demonstração:

Suponhamos primeiro que $[\chi] \in \Sigma_V(Q)$. Seja $\{w_1, \ldots, w_s\}$ um conjunto gerador de V como $\mathbb{Z}Q_\chi$-módulo , temos para cada $i = 1, \ldots s$,

$$w_i = \sum_k r_{ik} v_k$$

com $r_{ik} \in \mathbb{Z}Q$. Tome

$$\chi(q_0) = min_{1 \leq i,j \leq s}(\chi(supp\ r_{ij}))$$

onde q_0 é elemento de Q. Logo, se $q \in \cup_{ij} supp\ r_{ij}$ então, $\chi(q) \geq \chi(q_0)$, isto é, $qq_0^{-1} \in Q_\chi$ e disto $q \in q_0 Q_\chi = Q_\chi q_0$. Portanto,

$$w_i \in q_0 \sum_k \mathbb{Z}Q_\chi v_k,$$

para cada i. Segue que $V = \sum_i \mathbb{Z}Q_\chi w_i \subseteq q_0 \sum_k \mathbb{Z}Q_\chi v_k \subseteq V$, ou seja,

$$V = q_0 \sum_k \mathbb{Z}Q_\chi v_k.$$

Tome $q \in Q$ com $\chi(q) < \chi(q_0)$, isto é, $\chi(q^{-1}q_0) > 0$. Segue que $qv_i = q_0(\sum_k t_k v_k), t_k \in \mathbb{Z}Q_\chi$ logo,

$$v_i = \sum_k (q^{-1}q_0 t_k) v_k \text{ com } min_k \chi(supp\ q^{-1}q_0 t_k) > 0.$$

Definimos $g_{ik} = q^{-1}q_0 t_k$

Reciprocamente, suponha que para cada $1 \leq i \leq m$ existe a m-upla $(g_{ij})_{i=1}^{m}$ conforme o Lema 9.1.3. Seja

$$v = \sum_i u_i v_i \in V = \sum_i \mathbb{Z}Q v_i,$$

segue que

$$v = \sum_i u_i (\sum_j g_{ij}\ v_j) = \sum_j (\sum_i u_i g_{ij}\ ) v_j.$$

Sejam $\delta := \{min_i \chi(supp\ u_i)\}$ e $\epsilon := \{min_{ij} \chi(supp\ g_{ij})\}$.
Portanto,

$$min_j \chi(supp \sum_i u_i g_{ij}) \geq min_{i,j} \chi(supp\ u_i g_{ij}) \geq$$

$$min_i \chi(supp\ u_i) + min_{i,j} \chi(supp\ g_{i,j}) = \delta + \epsilon.$$

Repetindo o processo na última expressão de v acima obtemos $v = \sum_i l_i v_i$ onde $l_i \in \mathbb{Z}Q$, $min\ \chi(supp\ l_i) \geq \delta + 2\epsilon$. Após $k \geq -\delta/\epsilon$ etapas temos uma expressão $v = \sum_i s_i v_i$ onde $s_i \in \mathbb{Z}Q$, $min_i\ \chi(supp\ s_i) \geq 0$. O que mostra que $v \in \sum_i \mathbb{Z}Q_\chi v_i$. □

Seja $\{v_1, \ldots, v_m\}$ um conjunto que gera V como $\mathbb{Z}Q$-módulo.

$$\Delta_V := \{(g_{ij}) \in M_{m\times m}(\mathbb{Z}Q) \mid \text{ para todo } i, v_i = \textstyle\sum_j g_{ij} v_j\}.$$

Corolário 9.1.4 $[\chi] \in \Sigma_V(Q)$ *se e só se* $\exists\ \delta = (g_{ij}) \in \Delta_V$ *e* $min_{ij} \chi(supp\ g_{ij}) > 0$, *isto é,*

$$\Sigma_V(Q) = \cup_{\delta \in \Delta_V} \{[\chi] \in S(Q) \mid \chi(supp\ \delta) > 0\}.$$

Finalmente demonstraremos o objetivo desta seção.

Proposição 9.1.5 $V := Aug(\mathbb{Z}\overline{A}) \otimes_{\mathbb{Z}} A_0$ *é finitamente gerado sobre* $\mathbb{Z}\overline{G}$.

Demonstração: Observamos que como $\overline{G} = \overline{A} \rtimes Q$ então V é um $\mathbb{Z}Q$-módulo onde a ação de Q sobre V é a ação diagonal, isto é, para $q \in Q$, $\overline{a} \in \overline{A}$ e $a_0 \in A_0$ temos

$$q((\overline{a} - 1_{\overline{A}}) \otimes a_0) := (q \circ \overline{a} - 1_{\overline{A}}) \otimes (q \circ a_0)$$

onde $\circ$ é a ação via conjugação de Q sobre A_0 e $\overline{A}$. Seguiremos usando 1 para $1_{\overline{A}}$. A ação de $\overline{A}$ sobre V é via multiplicação a esquerda em $Aug(\mathbb{Z}\overline{A}) \subseteq \mathbb{Z}\overline{A}$.
Seja $\{a_i\}_{i=1}^{s}$ um conjunto gerador de A como $\mathbb{Z}Q$-módulo. Como $Z(Q)$ age trivialmente em $\overline{A}$ (7.1.2), $\overline{A}$ é $\mathbb{Z}\overline{Q}$-módulo finitamente gerado com

$$\overline{A} = \sum_{i=1}^{s} \mathbb{Z}\overline{Q} \circ \overline{a}_i = \sum_{i=1}^{s} \mathbb{Z}Q \circ \overline{a}_i$$

onde $\overline{Q} = Q/Z(Q)$. Definimos $B = A_0$. Temos que

$$Aug(\mathbb{Z}\overline{A}) = \sum_{a \in A} \mathbb{Z}(\overline{a} - 1)$$

logo, $\{(\overline{a}-1)\otimes b,\ \overline{a}\in\overline{A}\ e\ b\in B\}$ gera V como $\mathbb{Z}$ módulo.

Usando notação multiplicativa em $\overline{A}$, considere $\overline{a}=x_1\dots x_n$ com $x_1,\dots,x_n\in\overline{A}$. Então, usando indução em n, $\overline{a}-1\in\sum_{i=1}^{n}\mathbb{Z}\overline{A}(x_i-1)$, isto é, $\overline{a}-1=\sum u_{iq}(q\circ\overline{a}_i-1)$ onde a soma é sobre $q\in Q, u_{iq}\in\mathbb{Z}\overline{A}$. Portanto, como $\overline{A}$, via notação multiplicativa, se escreve como produtos da forma $q\circ\overline{a}_i, i=1,\dots,s$ e $q\in Q$, temos que $Aug(\mathbb{Z}\overline{A})$ é gerado como $\mathbb{Z}\overline{A}$-módulo por $\{q\circ\overline{a}_i-1, q\in Q, i=1,\dots,s\}$.

Seja $\{b_j\}_{j=1}^{m}$ um conjunto que gera $B=A_0$ como $\mathbb{Z}Q$-módulo. Tomando

$$b=\sum_{j=1}^{m}s_j\circ b_j=\sum_{j=1}^{m}(\sum_{q'}z_{q'j}q')\circ b_j\in B$$

onde $s_j=\sum_{q'}z_{q'j}q'$, $z_{q'j}\in\mathbb{Z}$ e $q'\in Q$, temos

$$(\overline{a}-1)\otimes b=\sum_{i,j,q,q'}z_{q'j}(u_{iq}(q\circ\overline{a}_i-1)\otimes q'_j\circ b_j)=\sum_{i,j,q,q'}z_{q'j}u_{iq}((q\circ\overline{a}_i-1)\otimes q'_j\circ b_j)$$

Portanto, V é gerado como $\mathbb{Z}\overline{A}$-módulo pelo conjunto

$$V_0=\{(q\circ\overline{a}_i-1)\otimes q'\circ b_j\mid q,\ q'\in Q,\ 1\le i\le s,\ 1\le j\le m\}.$$

Defina para cada número real positivo ρ,

$$W_\rho=\mathbb{Z}Q\text{-módulo gerado por }\{(q\circ\overline{a}_i-1)\otimes b_j\mid\|\phi(q)\|<\rho\},$$

onde ϕ é a projeção de Q em $\overline{Q}=Q/Z(Q)$ e observamos que W_ρ é $\mathbb{Z}Q$-submódulo de V. Sendo que para cada elemento $v=a+b$ do grupo abeliano finitamente gerado $\overline{Q}\simeq\mathbb{Z}^n\oplus t(\overline{Q})$ definimos $\|v\|=\|a\|$.
Observamos que $(q\circ\overline{a}_i-1)\otimes b_j=q((\overline{a}_i-1)\otimes(q^{-1}\circ b_j))$ onde Q age diagonalmente em $Aug(\mathbb{Z}\overline{A})\otimes B$.
Seja $W:=\cup_\rho W_\rho$ então W é $\mathbb{Z}Q-$módulo gerado por

$$\{(\overline{a}_i-1)\otimes q'\circ b_j\mid q'\in Q\ \ 1\le i\le s\ ,\ 1\le j\le m\}.$$

Como $V_0\subseteq W$, $\mathbb{Z}Q.W=W$ pois cada W_ρ é $\mathbb{Z}Q$-módulo e $\mathbb{Z}Q.W_\rho=W_\rho$, temos $V=\mathbb{Z}\overline{A}.V_0\subseteq\mathbb{Z}\overline{A}.W\subseteq V$, isto é,

$$V=\mathbb{Z}\overline{A}.W$$

I) Se $\rho_1<\rho_2$ então $W_{\rho_1}\subseteq W_{\rho_2}$. Além disso, para cada inteiro k se $\sqrt{k}<\rho\le\sqrt{k+1}$. Segue que

$$W_\rho=W_{\sqrt{k+1}}$$

Sejam $\Delta_{\overline{A}}$ e Δ_B como no Corolário 9.1.4 relativos aos conjuntos geradores $\{\overline{a}_i\}$ de $\overline{A}$ e $\{b_j\}$ de B respectivamente.
Via o Corolário 9.1.4.

$$\widetilde{\Sigma}_{\overline{A}}(Q)=\Sigma_{\overline{A}}(Q)\cap\widetilde{S}(Q)=\cup_{\delta\in\Delta_{\overline{A}}}\{[\chi]\in\widetilde{S}(Q)\mid\ \chi(supp\ \delta)>0\}$$

e

$$\widetilde{\Sigma}_B(Q) = \Sigma_B(Q) \cap \widetilde{S}(Q)) = \cup_{\delta \in \Delta_B} \{[\chi] \in \widetilde{S}(Q) \mid \ \chi(supp\ \delta) > 0\}.$$

Pelo Lema 9.1.2

$$\begin{aligned} \widetilde{S}(Q) &= \widetilde{\Sigma}_{\overline{A}}(Q) \cup -\widetilde{\Sigma}_B(Q) \\ &= (\Sigma_{\overline{A}}(Q) \cap \widetilde{S}(Q)) \cup (-\Sigma_B(Q) \cap \widetilde{S}(Q)) \\ &= \cup_{\delta \in \Delta_{\overline{A}}} \{[\chi] \in \widetilde{S}(Q) \mid \chi(supp\ \delta) > 0\} \cup \\ &\quad \cup_{\delta \in \Delta_B} \{[-\chi] \in \widetilde{S}(Q) \mid \chi(supp\ \delta) > 0\}. \end{aligned}$$

Pela compacidade de $\widetilde{S}(Q)$ existem subconjuntos finitos $\Delta_1 \subseteq \Delta_{\overline{A}}$ e $\Delta_2 \subseteq \Delta_B$ com

$$\begin{aligned} \widetilde{S}(Q) &= \cup_{\delta \in \Delta_1} \{[\chi] \in \widetilde{S}(Q) \mid \ \chi(supp\ \delta) > 0\} \cup \\ &\quad \cup_{\delta \in \Delta_2} \{-[\chi] \in \widetilde{S}(Q) \mid \chi(supp\ \delta) > 0\}. \end{aligned}$$

Lema 9.1.6 *[7] Seja $\mathfrak{F}$ uma coleção finita de conjuntos finitos $L \subset \mathbb{R}^n$. Se para cada $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ existe $L \in \mathfrak{F}$ tal que o produto interno $\langle x, y \rangle > 0$ para cada $y \in L$. Então existem $\rho_0 \in \mathbb{R}^+$ e uma função $\epsilon : \{\rho > \rho_0\} \longmapsto \mathbb{R}^+$ com a propriedade de que para $\rho > \rho_0$ se $x \in \mathbf{B}_{\rho+\epsilon(\rho)} \dot{\setminus} \mathbf{B}_\rho$ então exite $L \in \mathfrak{F}$ com $x + L \subset \mathbf{B}_\rho$, onde $\mathbf{B}_\rho = \{t \in \mathbb{R}^n \mid \| t \| < \rho\}$ é a bola aberta em $\mathbb{R}^n$ com raio ρ e centro a origem.*

Usando o último lema para a coleção

$$\mathfrak{F} = \{\ \phi(supp\ \delta) \mid \delta \in \Delta_1\} \cup \{\phi(-supp\ \delta) \mid \delta \in \Delta_2\}$$

existem

$$\rho_0 > 0 \text{ e } \epsilon : (\rho_0, \infty) \to \mathbb{R}^+$$

tal que se $z \in B_{\rho+\epsilon(\rho)} \dot{\setminus} B_\rho$ então $\exists\ L \in \mathfrak{F}$ com $z + L \subseteq B_\rho$.

Lema 9.1.7 *a) W_ρ é $\mathbb{Z}Q$-submódulo de V gerado por*

$$\{(q' \circ \overline{a}_i - 1) \otimes b_j \mid \|\phi(q')\| < \rho\}$$

e também é o $\mathbb{Z}Q$-submódulo de V gerado por

$$\{(\overline{a}_i - 1) \otimes q' \circ b_j \mid \|\phi(q')\| < \rho\}.$$

b) W_ρ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}Q$-módulo.

Demonstração: Observe que $(\overline{a}_i - 1) \otimes (q' \circ b_j) = q'[(q'^{-1} \circ \overline{a}_i - 1) \otimes b_j]$ e $\|\phi(q')\| = \|\phi(q'^{-1})\|$. Disto segue a parte a).
Vejamos a parte b). Seja

$$Q_\rho := \{q \in Q \mid \|\phi(q)\| < \rho\}.$$

Como $Q/Z(Q)$ é grupo abeliano finitamente gerado temos que $\phi(Q_\rho)$ é finito, digamos

$$\phi(Q_\rho) = \{\overline{r}_1, \ldots, \overline{r}_u\}.$$

Logo, para cada $q \in Q_\rho$, $q = q'r_t$ onde $q' \in Z(Q)$. Como $Z(Q)$ age em $\overline{A}$ trivialmente, segue que para todo

$$(\overline{a}_i - 1) \otimes (q \circ b_j) = (\overline{a}_i - 1) \otimes ((q'r_t) \circ b_j) = q'[(q'^{-1} \circ \overline{a}_i - 1) \otimes (r_t \circ b_j)] = q'[(\overline{a}_i - 1) \otimes r_t \circ b_j].$$

Em particular W_ρ como $\mathbb{Z}(Q)$-módulo é gerado por $\{(\overline{a}_i - 1) \otimes r_t \circ b_j\}$ onde $1 \leqslant i \leqslant s, 1 \leqslant j \leqslant m, 1 \leqslant t \leqslant u$. Assim, concluimos b). $\square$

II) Veremos que se $\rho > \rho_0$ então $W_\rho = W_{\rho+\epsilon(\rho)}$.

Seja $(q' \circ \overline{a}_i - 1) \otimes b_v$ com $\rho \leq \|\phi(q')\| < \rho + \epsilon(\rho)$.
Tem-se que existe

$$L = \phi(supp\ \delta) \text{ com } \delta \in \Delta_1 \text{ e } \phi(q') + \phi(supp\ \delta) \subseteq B_\rho$$

ou existe

$$L = \phi(-supp\ \delta) \text{ com } \delta \in \Delta_2 \text{ e } \phi(q') + \phi(-supp\ \delta) \subseteq B_\rho$$

Observe que $\delta = (g_{ij})$ e $supp\ \delta = \cup_{ij} supp\ g_{ij}$. Consideramos separadamente os dois casos

1) Se $\delta \in \Delta_1$ pode-se escrever

$$\overline{a}_i = \sum_j g_{ij} \circ \overline{a}_j \Rightarrow q' \circ \overline{a}_i = \sum_j (q' g_{ij}) \circ \overline{a}_j$$

mudando para notação multiplicativa pois nós fazemos cálculos em $\mathbb{Z}A$, temos

$$q' \circ \overline{a}_i - 1 = \prod_j ((q' g_{ij}) \circ \overline{a}_j) - 1 = \sum_j u_j ((q' g_{ij}) \circ \overline{a}_j - 1), \text{ para alguns } u_j \in \mathbb{Z}\overline{A}.$$

Então

$$(q' \circ \overline{a}_i - 1) \otimes b_v = \sum_j u_j ((q' g_{ij}) \circ \overline{a}_j - 1) \otimes b_v$$

onde

$$max\{\|\phi(q'h)\|\} = max\{\|\phi(q') + \phi(h)\|\} < \rho \text{ com } h \in \cup_{ij} supp\ g_{ij},$$

isto é,

$$(q' \circ \overline{a}_i - 1) \otimes b_v \in W_\rho.$$

2) Se $\delta \in \Delta_2$, tem se que $(q' \circ \overline{a}_v - 1) \otimes b_j = q'((\overline{a}_v - 1) \otimes (q'^{-1} \circ b_j))$.
Observamos que

$$q'^{-1} \circ b_j = \sum_i (q'^{-1} g_{ij}) \circ b_j$$

e para cada $h \in supp\ g_{ij}$ temos

$$\|\phi(q'^{-1}h)\| = \|\phi(q'h^{-1})\| = \|\phi(q') - \phi(h)\| < \rho$$

Portanto, $(\overline{a}_v - 1) \otimes (q'^{-1} \circ b_j) \in W_\rho$.

De I) e II) segue que existe ρ_1 com $W_{\rho_1} = W_\rho$ para cada $\rho > \rho_1$.
Por Lema 9.1.7 W_{ρ_1} é finitamente gerado como $\mathbb{Z}Q$-módulo, segue que $W_{\rho_1} = \cup W_\rho = W$ é finitamente gerado sobre $\mathbb{Z}Q$, isto é, $V = \mathbb{Z}\overline{A}.W$ é finitamente gerado sobre $\mathbb{Z}\overline{G}$. □

Finalmente estamos prontos para demonstrar nosso resultado principal.

Teorema 9.1.8 *Sejam $G = A \rtimes Q$ um grupo de tipo FP_3 e N o fecho normal em G do centro $Z(Q)$ de Q, onde A é abeliano e Q é nilpotente de classe 2. Então G/N tem tipo homológico FP_3.*

Demonstração: Pela Proposição 9.1.5 e Proposição 8.1.1, A_0 tem tipo FP_1 sobre $\mathbb{Z}\overline{G}$. Com isto, via Proposição 7.1.5 e Lema 7.1.6, o resultado segue. □

Referências Bibliográficas

[1] H. Aberg, *Bieri-Strebel valuations (of finite rank)*, Proc. London Math. Soc. (3) 52 (1986), 269-304.

[2] M. Bestvina, N. Brady, *Morse theory and finiteness properties of groups*, Invent. Math. 129, 3 (1997), 445-470.

[3] R. Bieri, *Homological Dimension of Discrete Groups*, QMW Math. Notes, 1981.

[4] R. Bieri, R. Strebel, *Almost finitely presented soluble groups*, Comment. Math. Helv. 53 (1978)258-78.

[5] R. Bieri, J.R.J. Groves, *Metabelian groups of type FP_∞ are virtually of type FP*, Proc. London Math. Soc. (3) 45, (1982), 365–384.

[6] R. Bieri, J. Harlander, *On the FP_3-Conjecture for metabelian groups*, J. London Math. Soc. (2) 64 (2001), 595-610.

[7] R. Bieri, R. Strebel *Valuations and Finitely Presented Metabelian Groups*, Proc. London Math.Soc.(3)41(1980)439-464.

[8] C. J. B. Brookes, *Finite Presentability and Heisenberg Representations Groups*, St. Andrews 1989, Vol 1,52-56. London Mathematic Soc. Lecture Note Ser.,159. Cambridge University Press, 99.

[9] C. J. B. Brookes, Finitely presented groups and the finite generation of exterior powers. Combinatorial and geometric group theory (Edinburgh, 1993), 16–28, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 204, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[10] C. J. B. Brookes, J. R. J. Groves, *Modules over crossed products of a division ring by a free abelian group*. I. J. Algebra 229 (2000), no. 1, 25–54.

[11] K. S. Brown, *Cohomology of Groups*, Springer-Verlag, 1994.

[12] D. E. Cohen, *Combinatorial Group Theory: a topological approach.*, London Mathematical Society Student Texts, 14. Cambrindge University Press, Cambridge, 1989.

[13] J. R. J. Groves, D. H. Kochloukova, *Embedding properties of metabelian Lie algebras and metabelian discrete groups*, J. London math. Soc. (2), 73 (2006), no. 2, 475–492.

[14] D. H. Kochloukova, *A New Characterisation of m-Tame Groups Over Finitely Generated Abelian Groups*, J. London Math. Soc. (2) 60 (1999), n°3 802-816.

[15] T. Y. Lam, *A First Course in Noncommutative Rings* , Springer-Verlag New York, Inc. 1991.

[16] R. C. Lindon, P. E. Schup, *Combinatorial group theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 89 (Springer, Berlin, 1977).

[17] E. L. Lima, *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*, Segunda Edição. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1998.

[18] W. S. Massey, *Algebraic Topology: An Introduction*, Springer-Verlag, 1977.

[19] D. S. Passman, *The Algebraic Structure of Group Rings*, Robert E. Krieger Publishing Company, 1985.

[20] C. Polcino Milies, *Grupos Nilpotentes: Uma Introdução*, 2003.

[21] D. J. S. Robson, *A Course in the Theory of Groups*, Springer-Verlag, 1980.

[22] J. J. Rotman *An Introduction to Homological Algebra*, Academic Press New York San Francisco London, 1979.

[23] C. T. C. Wall, *Finiteness conditions for CW-complexes*, Ann. of Math. (2) 81 1965, 56-69.