Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

UNICAMP

Tese de Doutorado

CARACTERIZAÇÕES DE DESIGUALDADES ENTRE NORMAS COM PESOS PARA A INTEGRAL DE POISSON SOBRE A ESFERA S^n

Autora: Iara Andréa Alvares Fernandes

Orientador: Prof. Dr. Sergio Antonio Tozoni

CARACTERIZAÇÕES DE DESIGUALDADES ENTRE NORMAS COM PESOS PARA A INTEGRAL DE POISSON SOBRE A ESFERA S^n

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Iara Andréa Alvares Fernandes e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 14 de Setembro de 2001

Prof. Dr. Sergio Antonio Tozoni
Orientador

Banca Examinadora:

1.Sergio Antonio Tozoni

2.Benjamin Bordin

3.Valdir Antonio Menegatto

4.Sérgio Luiz Zani

5.Roberto Oscar Gandulfo

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutora em Matemática.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Fernandes, Iara Andréa Alvares

F391c Caracterizações de desigualdades entre normas com pesos para a integral de Poisson sobre a esfera S^n / Iara Andréa Alvares Fernandes -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2001.

Orientador : Sergio Antonio Tozoni

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Fórmula integral de Poisson. 2. Pesos. 3. Espaços homogêneos. 4. Esfera. I. Tozoni, Sergio Antonio. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Tese de Doutorado defendida em 14 de setembro de 2001 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof (a). Dr (a). SÉRGIO ANTONIO TOZONI

Prof (a). Dr (a). BENJAMIN BORDIN

Prof (a). Dr (a). VALDIR ANTONIO MENEGATTO

Prof (a). Dr (a). SÉRGIO LUIS ZANI

Prof (a). Dr (a). ROBERTO OSCAR GANDULFO

Agradecimentos

Meu profundo reconhecimento

Ao Professor

Doutor Sergio Antonio Tozoni, pela orientação dedicada e competente deste trabalho. Pelo companheirismo e paciência que só os pais tem para com seus filhos;

Aos Professores Doutores

Alexander Kushpel, Benjamin Bordin e Dicesar Lass Fernandez, pelos valiosos momentos de discussão e esclarecimento nos seminários apresentados por mim durante o período que precedeu o 2^o Exame de Qualificação;

Ao CNPq,

pelo apoio financeiro;

À Minha Mãe,

meu eterno espelho;

Ao Meu Pai,

pelas palavras de confiança;

Aos Meus Familiares:

irmão, cunhadas, tios, avô, sogra... pelo constante incentivo;

À Minha Avó,

pelas orações de todos os dias;

A Deus,

pela oportunidade de participar da escola da vida.

Ao Renato,

motivo de minhas alegrias e serenidade nos momentos inquietantes

Resumo

Obtemos, para cada p, q, $1 < p \leq q < \infty$, condições necessárias e suficientes para que a integral de Poisson de funções definidas sobre a esfera unitária $S^n \subset I\!R^{n+1}$ seja limitada de $L^p(S^n, \omega)$ em $L^q(I\!B, \mu)$, onde ω e μ são, respectivamente, medidas de Borel não negativas sobre S^n e sobre a bola unitária $I\!B \subset I\!R^{n+1}$.

Para $p = q$, consideramos $d\omega = W d\sigma$, onde σ é a medida de Lebesgue sobre S^n e W é um peso sobre S^n tal que $W^{1-p'} d\sigma$ é uma medida doubling sobre S^n e $1/p + 1/p' = 1$. Neste caso, o resultado é conseqüência de uma caracterização da limitação de $L^p(X, W d\omega)$ em $L^p(X \times [0, \infty), \mu)$ de um operador maximal definido sobre funções definidas sobre um espaço de tipo homogêneo X, onde ω e μ são, respectivamente, medidas de Borel não negativas sobre X e sobre $X \times [0, \infty)$, e $W^{1-p'} d\omega$ é uma medida doubling sobre X. Para $W \equiv 1$ esta caracterização é a condição de Carleson para espaços de tipo homogêneo.

Para $p \leq q$, consideramos as medidas ω e μ finitas, sem supor ω absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue σ. Neste caso, a caracterização é dada por meio de duas desigualdades. Uma entre a norma no espaço $L^q(I\!B, \mu)$ da integral de Poisson de funções características de elementos de partições diádicas de S^n, análogas às partições diádicas de $I\!R^n$, e a norma em $L^p(S^n, \omega)$ destas mesmas funções características. Outra entre a norma no espaço $L^{p'}(S^n, \omega)$ da integral dual de Poisson de funções características de "cones" e "cones truncados" contidos em $I\!B$, cujas bases são elementos das partições diádicas de S^n, e a norma em $L^{q'}(I\!B, \mu)$ destas mesmas funções características.

Abstract

We obtain, for each p, q, $1 < p \leq q < \infty$, necessary and sufficient conditions for the Poisson integral of functions defined on the unit sphere $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ to be bounded from $L^p(S^n, \omega)$ into $L^q(\mathbb{B}, \mu)$, where ω and μ are, respectively, nonnegative Borel measures on S^n and on the unit ball $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

For $p = q$, we consider $d\omega = W d\sigma$, where σ is the Lebesgue measure on S^n and W is a weight on S^n such that $W^{1-p'}d\sigma$ is a doubling measure on S^n and $1/p + 1/p' = 1$. In this case, the result is a consequence of a characterization of the boundedness from $L^p(X, W d\omega)$ into $L^p(X \times [0, \infty), \mu)$ of a maximal operator defined on functions on a space of homogeneous type X, where ω and μ are, respectively, nonnegative Borel measures on X and on $X \times [0, \infty)$, and $W^{1-p'}d\omega$ is a doubling measure on X. For $W \equiv 1$ this characterization is the Carleson condition for spaces of homogeneous type.

For $p \leq q$, we consider the finite measures ω and μ, but we do not suppose ω absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure σ. In this case, the characterization is given by two inequalities. The first is between the norm in the $L^q(\mathbb{B}, \mu)$ space of the Poisson integral of the characteristic functions of elements of dyadic partitions of S^n, analogous to the dyadic partitions of $\mathbb{R}^n$, and the norm in $L^p(S^n, \omega)$ of the same characteristic functions. The other is between the norm in the $L^{p'}(S^n, \omega)$ space of the dual Poisson integral of the characteristic functions of "cones" and "truncated cones" contained in $\mathbb{B}$, whose bases are elements of the dyadic partitions of S^n, and the norm in $L^{q'}(\mathbb{B}, \mu)$ of the same characteristic functions.

Sumário

Introdução

O objetivo deste trabalho é obter, para cada p, q, $1 < p \leq q < \infty$, condições necessárias e suficientes para que a integral de Poisson de funções definidas sobre a esfera unitária $S^n \subset I\!R^{n+1}$ seja limitada de $L^p(S^n, \omega)$ em $L^q(I\!B, \mu)$, onde ω e μ são, respectivamente, medidas de Borel não negativas sobre S^n e sobre a bola unitária $I\!B \subset I\!R^{n+1}$.

Procuramos fazer uma redação auto-suficiente. Desta forma, algumas seções de capítulos são expositórios e não apresentam resultados originais.

No Capítulo 1 apresentamos partições da esfera unitária S^n, que têm algumas propriedades tão boas quanto as partições diádicas de $I\!R^n$, no sentido de podermos comparar as medidas de elementos da partição de um dado estágio com os elementos da partição de estágio anterior, e também no sentido de podermos comparar elementos das partições com bolas de S^n. Este capítulo traz resultados demonstrados por Bordin-Tozoni em [1], os quais são essenciais para o desenvolvimento do Capítulo 3. Apresentamos, também, as partições de um espaço quase-métrico X dadas em Sawyer-Wheeden [15], que serão utilizadas no Capítulo 2, e as decomposições de um espaço de tipo homogêneo introduzidas em Christ [5], que não serão efetivamente utilizadas neste trabalho, mas apresentamos aqui a título de ilustração. Estas últimas possuem propriedades análogas às partições de S^n citadas acima. No entanto, as partições de Sawyer-Wheeden não possuem elementos arbitrariamente pequenos e as decomposições de Christ não formam uma partição.

No Capítulo 2 apresentamos os resultados contidos no trabalho [2], o qual foi realizado em conjunto com o Prof. Dr. Benjamim Bordin e o Prof. Dr. Sergio Antonio Tozoni, orientador deste trabalho. Dado um espaço homogêneo $X = G/H$, onde G é um grupo topológico localmente compacto e H é um subgrupo compacto de G, definimos os operadores maximais $\mathcal{M}_d$ (de tipo diádico) e $\mathcal{M}$ e obtemos condições necessárias e suficientes sobre um peso W definido sobre X e uma medida de Borel não negativa μ sobre $\widehat{X} = X \times [0, \infty)$, para que o operador $\mathcal{M}$ seja limitado de $L^p(X, Wd\omega)$ em $L^p(\widehat{X}, \mu)$, onde ω é uma medida de Borel não negativa sobre X, induzida por uma medida de Haar sobre G. Se $W \equiv 1$, a condição obtida é a condição de Carleson para espaços homogêneos. Ainda neste capítulo, obtemos uma condição suficiente (que também é necessária para o caso $W \equiv 1$) para que o operador integral de Poisson $f \mapsto u_f$ seja limitado de $L^p(S^n, Wd\sigma)$ em $L^p(\mathbb{B}, \mu)$, onde σ é a medida de Lebesgue normalizada sobre S^n. Este resultado generaliza um resultado para o caso do círculo unitário S^1 apresentado em Carleson [5]. Também consideramos o operador maximal $f \mapsto u_f^*(tx) = \sup_{0 \leq s \leq t} |u_f(sx)|$, $x \in S^n$, $0 \leq t < 1$, e obtemos uma caracterização para sua limitação de $L^p(S^n, Wd\sigma)$ em $L^p(\mathbb{B}, \mu)$. A nossa contribuição original começa neste capítulo, principalmente nas Seções 2.3 e 2.4, onde estendemos resultados inicialmente obtidos para a esfera S^n, para espaços homogêneos. Estes resultados foram apresentados no 51º Seminário Brasileiro de Análise (veja [7]) e generalizam os resultados para o caso do $\mathbb{R}^n$ apresentados em Ruiz-Torrea [12].

No Capítulo 3, a nossa contribuição original se encontra na segunda seção. Definimos o operador u_{f_ω} de funções definidas sobre S^n , que, embora também chamamos de integral de Poisson, não é o mesmo operador estudado no Capítulo 2. Obtemos condições necessárias e suficientes para que este operador seja limitado de $L^p(S^n, \omega)$ em $L^q(\mathbb{B}, \mu)$, onde ω e μ são, respectivamente, medidas de Borel não negativas sobre S^n e a bola unitária $\mathbb{B}$ e $1 < p \leq q < \infty$. Um resultado análogo para a integral de Poisson sobre $\mathbb{R}^n$ é dado em Sawyer [14]. Se $p = q$ e se ω é a medida de Lebesgue sobre S^n, o operador definido neste capítulo coincide com aquele definido no Capítulo 2 e assim é possível comparar estes resultados.

Capítulo 1

Partições diádicas

O objetivo deste capítulo é apresentar partições da esfera unitária S^n e de espaços quase-métricos análogas às partições diádicas do $\mathbb{R}^n$ e também uma decomposição de espaços de tipo homogêneo.

Na primeira seção somente fixamos algumas notações e apresentamos algumas definições e propriedades básicas da esfera S^n.

Na segunda seção apresentamos partições de S^n, análogas às partições diádicas de $\mathbb{R}^n$, as quais também chamamos de partições diádicas. Estas partições foram obtidas por Bordin-Tozoni em [1]. Analogamente às partições diádicas de $\mathbb{R}^n$, os elementos da partição de um dado estágio são obtidos como refinamento dos elementos da partição de um estágio anterior. Além disso, cada um dos elementos de um fixado estágio está contido e contém bolas de raios fixos para este estágio. Os resultados apresentados nesta seção serão utilizados no Capítulo 3.

Na terceira seção apresentamos partições de um espaço quase-métrico X, isto é, de um conjunto X munido de uma quase-distância d, as quais foram introduzidas em Sawyer-Wheeden [15]. Estas partições possuem as mesmas propriedades citadas acima das partições diádicas de S^n. No entanto, elas não contém elementos arbitrariamente "pequenos", isto é, todos os elementos contém bolas de raio maior que um certo $R > 0$. Isto não ocorre com as partições diádicas de S^n expostas na segunda seção, onde seus elementos podem estar contidos em bolas de raio arbitrariamente "pequenos". Utilizaremos os resultados apresentados nesta seção no Capítulo 2.

Na quarta seção apresentamos as decomposições introduzidas em Christ [5] para um espaço X de tipo homogêneo, ou seja, um conjunto munido de uma quase-distância e de uma medida satisfazendo certa propriedade. Embora os elementos destas decomposições possam ser arbitrariamente "pequenos" e possuam propriedades satisfeitas pelos elementos das partições de Sawyer-Wheeden, os elementos de um dado estágio da decomposição não formam uma partição de X.

1.1 Propriedades básicas de S^n

Notação 1.1.1 *Se $x \in \mathbb{R}^n$, escrevemos $|x|_n = (x \cdot x)^{1/2}$, onde $x \cdot y$ é o produto escalar usual entre x e y em $\mathbb{R}^n$. Se não houver perigo de confusão, usaremos $|x|$ para denotar $|x|_n$.*

Seja S^1 o círculo unitário em $\mathbb{R}^2$ e, para $n \geq 2$, seja $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x|_{n+1} = 1\}$ a esfera uniária em $\mathbb{R}^{n+1}$. Se $x \in S^n$ e $\ell \geq 0$ denotamos por $B_n(x, \ell)$ a intersecção de S^n com a bola aberta em $\mathbb{R}^{n+1}$ com centro x e raio ℓ. Se $x \in \mathbb{R}^n$ e $1 - \sqrt{2} \leq r < 1$, denotamos $U_n(x, r) = B_n(x, h(r))$, onde $h : [1 - \sqrt{2}, 1) \longrightarrow (0, 2]$ é definida por $h(r) = \sqrt{2}(1 - r)$.

Definição 1.1.2 *Seja $\mathcal{D}_1 = [0, 2\pi]$ e para $n \geq 2$ seja $\mathcal{D}_n = [0, \pi]^{n-1} \times [0, 2\pi]$. Definimos a aplicação $\xi_n : \mathcal{D}_n \to S^n$ por $\xi_n(\theta_1, \ldots, \theta_n) = (x_1, \ldots, x_{n+1})$ onde*

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos \theta_1, \\ x_i &= \cos \theta_i \prod_{j=1}^{i-1} \operatorname{sen} \theta_j, \quad 2 \leq i \leq n, \\ x_{n+1} &= \prod_{j=1}^{n} \operatorname{sen} \theta_j. \end{aligned}$$

Observação 1.1.3 *Observamos que, se $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ e $\theta' = (\theta_2, \ldots, \theta_n)$, então*

$$\xi_n(\theta) = (\cos \theta_1, \operatorname{sen} \theta_1 \ \xi_{n-1}(\theta')).$$

Notação 1.1.4 *A medida de Lebesgue de um conjunto mensurável $A \subset S^n$ será denotada por $|A|$. Se G é um subconjunto mensurável de $\mathcal{D}_n$ temos que*

$$|\xi_n(G)| = \int_G \operatorname{sen}^{n-1}\theta_1 \ldots \operatorname{sen}\theta_{n-1} d\theta,$$

onde $d\theta = d\theta_1 \ldots d\theta_n$. Escreveremos $\omega_n = |S^n|$.

Observação 1.1.5 *Para $x \in S^n$ e $0 < \ell \leq \pi/2$, temos*

$$|B_n(x,\ell)| = \omega_{n-1} \int_0^{2\operatorname{arcsen}(\ell/2)} \operatorname{sen}^{n-1} s ds$$

e, portanto, a medida de Lebesgue de uma bola $B_n(x,\ell)$, é da ordem de ℓ^n, isto é

$$\frac{\omega_{n-1}2^{n-1}}{n\pi^{n-1}}\ell^n \leq |B_n(x,\ell)| \leq \frac{\omega_{n-1}2^n}{n}\ell^n.$$

Notação 1.1.6 *Se $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ é um espaço de medida qualquer e $A \in \mathcal{F}$, vamos denotar por $|A|_\nu$ a ν-medida do conjunto A.*

Definição 1.1.7 *Seja μ uma medida sobre a σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}_{S^n}$ de S^n. Dizemos que μ é uma medida de Radon sobre S^n se as seguintes condições estão satisfeitas:*

(i) $|K|_\mu < \infty$ para todo conjunto compacto $K \subset S^n$;

(ii) Para qualquer $E \in \mathcal{B}_{S^n}$,

$$|E|_\mu = \sup\{|K|_\mu : K \subset E,\ K \quad compacto\};$$

(iii) Para qualquer $E \in \mathcal{B}_{S^n}$,

$$|E|_\mu = \inf\{|G|_\mu : E \subset G,\ G \quad aberto\}.$$

Definição 1.1.8 *Um grupo G é um grupo topológico se está munido de uma topologia tal que as operações de grupo*

$$(x,y) \in G \times G \mapsto x \cdot y \in G$$

e

$$x \in G \mapsto x^{-1} \in G$$

são contínuas.

Definição 1.1.9 *Uma medida de Haar à esquerda sobre um grupo topológico localmente compacto G é uma medida de Radon μ, não nula sobre G, que satisfaz $|xE|_\mu = |E|_\mu$, para todo $x \in E$ e todo $E \in \mathcal{B}_{S^n}$, onde $xE = \{x \cdot y : y \in E\}$. Esta propriedade é chamada invariância por translação à esquerda de μ.*

Notação 1.1.10 *Denotaremos por $SO(n+1)$ o grupo das rotações próprias de $\mathbb{R}^{n+1}$. O grupo $SO(n+1)$ pode ser identificado com o grupo das matrizes ortogonais de ordem $(n+1)\times(n+1)$ e com determinante 1, que é um grupo topológico com a operação de multiplicação usual de matrizes. Este grupo age transitivamente sobre a esfera S^n, isto é, para quaisquer x, $y \in S^n$, existe $u \in SO(n+1)$ tal que $u(x) = y$.*

1.2 Partições diádicas de Bordin-Tozoni

Nesta seção apresentamos as partições $\mathcal{A}_k^n$, $k \geq 0$, de S^n, análogas às partições diádicas de $\mathbb{R}^n$, introduzidas em Bordin-Tozoni [1] , e apresentamos propriedades destas partições. Estas partições foram construídas utilizando indução sobre n e considerando as partições diádicas usuais de S^1 . Os elementos destas partições foram obtidos utilizando coordenadas esféricas.

A seguir, daremos a idéia geométrica da construção das partições $\mathcal{A}_k^2$ da esfera S^2.

Os elementos de $\mathcal{A}_2^2$ são oito triângulos geodésicos. Todos estes triângulos têm seus lados sobre a linha do equador e sobre meridianos, e todos eles têm um dos polos, $\mathbb{1} = (1, 0, 0)$ ou $-\mathbb{1} = (-1, 0, 0)$, como um vértice. Se Q, $Q' \in \mathcal{A}_2^2$, então existe uma rotação própria u de $\mathbb{R}^3$ tal que $Q' = u(Q)$.

Os elementos de $\mathcal{A}_{k+1}^2$ são obtidos dividindo os elementos de $\mathcal{A}_k^2$. Os elementos de $\mathcal{A}_k^2$, $k \geq 2$, são triângulos geodésicos e retângulos geodésicos. Em cada $\mathcal{A}_k^2$, $k \geq 2$, existem exatamente oito triângulos geodésicos. Agora apresentaremos uma regra para obter os elementos de $\mathcal{A}_{k+1}^2$, dividindo os elementos de $\mathcal{A}_k^2$.

Seja Q um triângulo em $\mathcal{A}_k^2$, $k \geq 2$, sejam B_1 e B_2 os pontos médios dos lados de Q que estão sobre meridianos e seja B_3 o ponto médio do lado que é paralelo ao plano do equador.

Seja $\overline{B_1B_2}$ o segmento geodésico unindo os pontos B_1 e B_2 e seja B_4 o ponto médio deste segmento. Então Q é a união de um triângulo geodésico Q_1 e dois retângulos geodésicos Q_2 e Q_3, todos em $\mathcal{A}^2_{k+1}$, que são obtidos quando dividimos Q usando os segmentos geodésicos $\overline{B_1B_2}$ e $\overline{B_3B_4}$.

Agora, seja Q um retângulo geodésico de $\mathcal{A}^2_k$, $k \geq 3$, e sejam C_1 e C_2 os pontos médios dos lados de Q que estão sobre os meridianos e sejam C_3 e C_4 os pontos médios dos lados de Q que são paralelos ao plano do equador. Então Q é a união de quatro retângulos geodésicos Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 em $\mathcal{A}^2_{k+1}$, que são obtidos quando dividimos Q usando os segmentos geodésicos $\overline{C_1C_2}$ e $\overline{C_3C_4}$.

Sejam k e j inteiros tais que $k \geq 0$ e $1 \leq j \leq 2^k$ e consideremos o intervalo diádico

$$I^k_j = [(j-1)2^{-k+1}\pi, j2^{-k+1}\pi).$$

Dessa forma, o intervalo $[0, 2\pi)$ pode ser dividido em 2^k intervalos I^k_j, cada qual de comprimento 2^{-k+1}.

Definição 1.2.1 *Definimos*

$$\mathcal{G}^1_k = \{I^k_j : 1 \leq j \leq 2^k\};$$

$$\mathcal{G}^n_0 = \{[0,\pi]^{n-1} \times [0, 2\pi)\},\ n \geq 2;$$

$$\mathcal{G}^2_1 = \{[0,\pi/2) \times [0,2\pi),\ [\pi/2,\pi] \times [0,2\pi)\};$$

$$\mathcal{G}^n_1 = \{[0,\pi/2) \times [0,\pi]^{n-2} \times [0,2\pi),\ [\pi/2,\pi] \times [0,\pi]^{n-2} \times [0,2\pi)\},\ n \geq 3.$$

e, para cada n, $k \geq 2$, *definimos a família* $\mathcal{G}^n_k$, *por indução sobre* n, *como a família formada pelos conjuntos*

$$[0, 2^{-k+1}\pi) \times [0,\pi/2)^{n-1},$$

$$[\pi - 2^{-k+1}\pi, \pi] \times [0,\pi/2)^{n-1},$$

$$(0, 2^{-k+1}\pi) \times G,$$

$$[\pi - 2^{-k+1}\pi, \pi) \times G,$$

onde $G \in \mathcal{G}_2^{n-1}$, $G \neq [0, \pi/2)^{n-1}$, *e se* $k \geq 3$, *também formada pelos conjuntos*

$$I_j^k \times G,$$

$$I_{2^{k-1}-j+1}^k \times G,$$

onde $G \in \mathcal{G}_r^{n-1}$, $3 \leq r \leq k$ *e* $2^{r-3} + 1 \leq j \leq 2^{r-2}$.

Agora, para cada $n \geq 1$ *e* $k \geq 0$ *definimos*

$$\mathcal{A}_k^n = \{\xi_n(G) : G \in \mathcal{G}_k^n\}$$

e

$$\mathcal{A}^n = \bigcup_{k \geq 0} \mathcal{A}_k^n.$$

Observação 1.2.2 *Para cada* $k \geq 0$, $\mathcal{A}_k^n$ *é uma partição de* S^n, *e, para todo* $Q \in \mathcal{A}_{k+1}^n$, $k \geq 0$, *existe* $Q' \in \mathcal{A}_k^n$, *tal que* $Q \subset Q'$. *Chamaremos os elementos de* $\mathcal{A}^n$ *de elementos diádicos de* S^n.

Observação 1.2.3 *Sejam* $Q_1 = \xi_n(I_j^k \times G)$ *e* $Q_2 = \xi_n(I_{2^{k-1}-j+1}^k \times G)$ *elementos de* $\mathcal{A}_k^n$, *onde* $G \in \mathcal{G}_r^{n-1}$. *Então existe* $u \in SO(n+1)$ *tal que* $u(Q_1) = Q_2$. *Como conseqüência desta observação será suficiente considerar os elementos do tipo* Q_1 *nas demonstrações e também em alguns enunciados dos resultados desta seção.*

Observação 1.2.4 *Se* $\#F$ *denota o número de elementos de um conjunto finito* F, *então temos que* $\#\mathcal{A}_k^1 = 2^k$ *para todo* $k \geq 0$, $\#\mathcal{A}_0^n = 1$, $\#\mathcal{A}_1^n = 2$, $\#\mathcal{A}_2^n = 2^{n+1}$ *e para* $k \geq 3$,

$$\#\mathcal{A}_k^n = 2(\#\mathcal{A}_2^{n-1} + \sum_{r=3}^{k} 2^{r-3} \#\mathcal{A}_r^{n-1}).$$

Teorema 1.2.5 *(i) Sejam* $n \geq 2$, $k \geq 1$ *e* $Q_1 = \xi_n(G_1) \in \mathcal{A}_k^n$, $Q_2 = \xi_n(G_2) \in \mathcal{A}_{k+1}^n$ *tais que* $Q_2 \subset Q_1$. *Se* $G_1 = I_1^1 \times G_1'$ *com* $G_1' \in \mathcal{G}_1^{n-1}$, *então* $G_2 = I_i^2 \times G_2'$ *com* $i \in \{1, 2\}$ *e* $G_2' \in \mathcal{G}_2^{n-1}$. *Se* $k \geq 2$ *e* $G_1 = I_j^k \times G_1'$ *com* $G_1' \in \mathcal{G}_r^{n-1}$ *e* $2 \leq r \leq k$, *então* $G_2 = I_i^{k+1} \times G_2'$ *onde* $i \in \{2j-1, 2j\}$ *e* $G_2' \in \mathcal{G}_2^{n-1} \cup \mathcal{G}_3^{n-1}$ *se* $j = 1$ *e* $G_2' \in \mathcal{G}_{r+1}^{n-1}$ *se* $2 \leq j \leq 2^{k-2}$.

(ii) Sejam $n \geq 1$, $k \geq 0$ e $Q \in \mathcal{A}_k^n$. Se $k = 0$, então Q é a união de 2 elementos de $\mathcal{A}_1^n$, e se $k = 1$, então Q é a união de 2^n elementos de $\mathcal{A}_2^n$. Para $k \geq 2$, Q é união de, no mínimo $n+1$ e no máximo 2^n, elementos de $\mathcal{A}_{k+1}^n$.

Demonstração. **(i):** O resultado é trivial para $k = 1$. Vamos considerar $k \geq 2$ e sejam i e s tais que $G_2 = I_i^{k+1} \times G_2'$, $G_2' \in \mathcal{G}_s^{n-1}$. Como $I_j^k = I_{2j-1}^{k+1} \cup I_{2j}^{k+1}$ e $G_2 \subset G_1$, então $i \in \{2j-1, 2j\}$ e $G_2' \subset G_1'$. Se $r = 2$, então $i \in \{1, 2\}$ e assim $s \in \{2, 3\}$. Se $r \geq 3$, então $2^{r-2} + 1 \leq i \leq 2^{r-1}$ e portanto $s = r + 1$.

(ii): O resultado é trivial para $k = 0$. Temos que $\#\mathcal{A}_2^n = 2^{n-1}(\#\mathcal{A}_2^1) = 2^{n+1}$ e $\#\mathcal{A}_1^n = 2$, e assim obtemos (ii) para $k = 1$. Vamos demonstrar (ii) para $k \geq 2$ e $n \geq 1$, usando indução sobre n. É óbvio que (ii) é verdadeiro para $n = 1$. Agora, suponhamos que qualquer elemento de $\mathcal{A}_k^{n-1}$ é a união de no mínimo n e no máximo 2^{n-1} elementos de $\mathcal{A}_{k+1}^{n-1}$, para todo $k \geq 2$. Sejam $Q_1 = \xi_n(G_1) \in \mathcal{A}_k^n$, $Q_2 = \xi_n(G_2) \in \mathcal{A}_{k+1}^n$ com $G_1 = I_j^k \times G_1'$, $G_1' \in \mathcal{G}_r^{n-1}$, $2 \leq r \leq k$ e $G_2 = I_i^{k+1} \times G_2'$, $G_2' \in \mathcal{G}_s^{n-1}$, $2 \leq s \leq k+1$ e suponhamos que $Q_2 \subset Q_1$. Se $j = 1$, então segue por (i) que $i \in \{1, 2\}$ e $G_2' = G_1'$ para $i = 1$, $G_2' \in \mathcal{G}_3^{n-1}$ para $i = 2$. Portanto, usando a hipótese de indução, podemos concluir que Q_1 é a união de $q + 1$ elementos de tipo Q_2, onde q é um inteiro, $n \leq q \leq 2^{n-1}$. Se $j \geq 2$, então segue por (i) que $i \in \{2j-1, 2j\}$ e $G_2' \in \mathcal{G}_{r+1}^{n-1}$. Portanto, pela hipótese de indução, podemos concluir que Q_1 é a união de $2q$ elementos de tipo Q_2, onde q é um inteiro como acima.

Observação 1.2.6 *Segue da demonstração acima que os elementos de $\mathcal{A}_k^2$ são união de 3 ou 4 elementos de $\mathcal{A}_{k+1}^2$ se $k \geq 2$, 4 se $k = 1$ e 2 se $k = 0$, e os elementos de $\mathcal{A}_k^3$ são união de 4, 5, 6 ou 8 elementos de $\mathcal{A}_{k+1}^3$ se $k \geq 2$, 8 se $k = 1$ e 2 se $k = 0$.*

Teorema 1.2.7 *Sejam $n \geq 1$, $k \geq 0$, $\gamma_k^1 = 2^{-k}\pi$, $\gamma_k^2 = (1 + 2^{-2}\pi)2^{-k+1}\pi$ e $\gamma_k^n = 2^{n-k}\pi$ para $n \geq 3$. Se $Q \in \mathcal{A}_k^n$, então existe $x \in Q$ tal que $Q \subset B_n(x, \gamma_k^n)$.*

Demonstração. Se $Q \in \mathcal{A}_0^n$, então $Q = S^n = B_n(x, \gamma_0^n)$ para qualquer $x \in S^n$. Se $Q \in \mathcal{A}_1^n$, então Q é uma metade da esfera S^n. Portanto, como $\gamma_1^n > \sqrt{2}$, existe $x \in Q$ tal que $Q \subset B_n(x, \gamma_1^n)$.

Vamos demonstrar o teorema para $k \geq 2$ e $n \geq 1$, usando indução sobre n. A demonstração é trivial para $n = 1$. Agora, suponhamos que o teorema é verdadeiro para $n - 1$.

Seja $Q = \xi_n(G) \in \mathcal{A}_k^n$, onde $G = I_j^k \times G'$, com $G' \in \mathcal{G}_2^{n-1}$ se $j = 1$ e $G' \in \mathcal{G}_r^{n-1}$ se $2^{r-3} + 1 \leq j \leq 2^{r-2}$, $3 \leq r \leq k$. Sejam $\phi = j2^{-k+1}\pi$, $t = 2^{-k+1}\pi$ e $\alpha = 2^{-r+1}\pi$. Se $j = 2^{r-3} + i$ e $1 \leq i \leq 2^{r-3}$, então $\phi = \pi t/4\alpha + it$ e

$$Q = \{(\cos\theta_1, \text{sen } \theta_1 \ \xi_{n-1}(\theta')) : \phi - t \leq \theta_1 \leq \phi, \ \theta' \in G'\}.$$

É suficiente considerar $i = 2^{r-3}$, isto é, $\phi = \pi t/2\alpha$. Seja $Q' = \xi_{n-1}(G')$. Como $Q' \in \mathcal{A}_r^{n-1}$, segue pela hipótese de indução que existe $x' \in Q'$ tal que $Q' \subset B_{n-1}(x', \gamma_r^{n-1})$. Se $\theta = (\theta_1, \theta') \in G$, então $x = (\cos\phi, \ \text{sen } \phi \ x')$, $\xi_n(\phi, \theta') = (\cos\phi, \ \text{sen } \phi \ \xi_{n-1}(\theta'))$ e $\xi_n(\theta) = (\cos\phi_1, \text{sen } \theta_1 \ \xi_{n-1}(\theta'))$ estão em Q e

$$\begin{aligned}
|\xi_n(\theta) - \xi_n(\phi, \theta')|_{n+1} &= ((\cos\theta_1 - \cos\phi)^2 + (\text{sen } \theta_1 - \text{sen } \phi)^2 |\xi_{n-1}(\theta')|_n^2)^{1/2} \\
&= |\xi_1(\theta_1) - \xi_1(\phi)|_2 \\
&\leq t
\end{aligned}$$

e

$$|\xi_n(\phi, \theta') - x|_{n+1} = \text{sen } \phi \ |\xi_{n-1}(\theta') - x'|_n \leq \text{sen } \phi \ \gamma_r^{n-1}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
|\xi_n(\theta) - x|_{n+1} &\leq |\xi_n(\theta) - \xi_n(\phi, \theta')|_{n+1} + |\xi_n(\phi, \theta') - x|_{n+1} \\
&\leq t + \phi\gamma_r^{n-1} \\
&\leq \gamma_k^n.
\end{aligned}$$

Então $\xi_n(\theta) \in B_n(x, \gamma_k^n)$ para todo $\theta \in G$, isto é, $Q \subset B_n(x, \gamma_k^n)$.

Teorema 1.2.8 *Sejam $n \geq 1$, $k \geq 0$ e $\rho_k^n = 2^{-n+\frac{3}{2}}2^{-k}$. Se $Q \in \mathcal{A}_k^n$ então existe $x \in Q$ tal que $B_n(x, \rho_k^n) \subset Q$.*

Demonstração. O resultado é trivial para $k = 0,\ 1$. Vamos demonstrar o teorema para $k \geq 2$ e $n \geq 1$, usando indução sobre n. A demonstração é trivial para $n = 1$. Agora, suponhamos que o teorema é verdadeiro para $n-1$.

Seja $Q = \xi_n(G) \in \mathcal{A}_k^n$, onde $G = I_j^k \times G'$, com $G' \in \mathcal{G}_2^{n-1}$ se $j = 1$ e $G' \in \mathcal{G}_r^{n-1}$ se $2^{r-3}+1 \leq j \leq 2^{r-2}$, $3 \leq r \leq k$. Sejam $\phi = j2^{-k+1}\pi$, $t = 2^{-k+1}\pi$ e $\alpha = 2^{-r+1}\pi$. Se $j = 2^{r-3}+i$ e $1 \leq i \leq 2^{r-3}$, então $\phi = \pi t/4\alpha + it$ e

$$Q = \{(\cos\theta_1, \operatorname{sen}\theta_1\ \xi_{n-1}(\theta')) : \phi - t \leq \theta_1 \leq \phi,\ \theta' \in G'\}.$$

É suficiente considerar $i = 1$, isto é, $\phi - t = \pi t/4\alpha$. Seja $Q' = \xi_{n-1}(G')$. Como $Q' \in \mathcal{A}_r^{n-1}$, segue pela hipótese de indução que existe $x' \in Q'$ tal que $B_{n-1}(x', \rho_r^{n-1}) \subset Q'$.

Sejam $x = (\cos(\phi - t/2),\ \operatorname{sen}(\phi - t/2)\ x')$ e $y = \xi_n(\theta_1, \theta') = (\cos\theta_1,\ \operatorname{sen}\theta_1\xi_{n-1}(\theta'))$, $(\theta_1,\ \theta') \in \mathcal{D}_n$. Suponhamos que $y \notin Q$.

Se $\theta_1 \notin [\phi - t,\ \phi)$, então

$$\begin{aligned}
|y-x|_{n+1} &= ((\cos\theta_1 - \cos(\phi - t/2))^2 + |\operatorname{sen}\theta_1\ \xi_{n-1}(\theta') - \operatorname{sen}(\phi - t/2)\ x'|_n^2)^{1/2} \\
&\geq ((\cos\theta_1 - \cos(\phi - t/2))^2 + (|\operatorname{sen}\theta_1|\ |\xi_{n-1}(\theta')|_n - |\operatorname{sen}(\phi - t/2)|\ |x'|_n)^2)^{1/2} \\
&= |\xi_1(\theta_1) - \xi_1(\phi - t/2)|_2 \\
&\geq \sqrt{2}(1 - \cos 2^{-k}\pi)^{1/2} \\
&\geq \rho_k^1.
\end{aligned}$$

Suponhamos $\phi - t \leq \theta_1 \leq \phi - t/2$ e $\theta' \notin G'$. Como $B_{n-1}(x',\ \rho_r^{n-1}) \subset Q'$ e $\xi_{n-1}(\theta') \notin Q'$, então $|\xi_{n-1}(\theta') - x'|_n \geq \rho_r^{n-1}$. Tomamos

$$v_1 = \operatorname{sen}\theta_1\ \xi_{n-1}(\theta'), \quad v_2 = \operatorname{sen}\theta_1\ x', \quad \beta = (\operatorname{sen}(\phi - t/2) - \operatorname{sen}\theta_1)/\operatorname{sen}\theta_1)$$

e assim temos que $\beta \geq 0$ e $|v_1|_n = |v_2|_n$. Portanto,

$$\begin{aligned}
|y-x|_{n+1} &= ((\cos\theta_1 - \cos(\phi - t/2))^2 + |\operatorname{sen}\theta_1\ \xi_{n-1}(\theta') - \operatorname{sen}(\phi - t/2)\ x'|_n^2)^{1/2} \\
&\geq |\operatorname{sen}\theta_1\ \xi_{n-1}(\theta') - \operatorname{sen}(\phi - t/2)\ x'| \\
&= |\beta v_2 + (v_2 - v_1)|_n
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq |v_2 - v_1|_n \\
&= |\text{sen } \theta_1||\xi_{n-1}(\theta') - x'|_n \\
&\geq \text{sen } (\phi - t)\rho_r^{n-1} \\
&\geq \frac{2}{\pi}\frac{\pi t}{4\alpha}\rho_r^{n-1} \\
&= 2\rho_k^n \\
&> \rho_k^n
\end{aligned}
$$

Suponhamos agora $\phi - t/2 \leq \theta_1 < \phi$ e $\theta' \notin G'$. Escolhendo convenientemente v_1, v_2 e β obtemos $|y - x|_{n+1} > \rho_k^n$. Então mostramos que se $y \notin Q$, então $y \notin B_n(x, \rho_k^n)$, isto é, $B_n(x, \rho_k^n) \subset Q$.

Observação 1.2.9 *Segue do Teorema 1.2.7 e do Teorema 1.2.8 que existe uma constante $C_1 > 0$ tal que, para todo $k \geq 0$ e todo $Q \in \mathcal{A}_k^n$, existe $x_Q \in Q$ tal que*

$$
B_n(x_Q, C_1\delta_k^n) \subset Q \subset B_n(x_Q, \delta_k^n), \tag{1.1}
$$

onde $\delta_k^n = 2\gamma_k^n$ e γ_k^n está dado no Teorema 1.2.7

Corolário 1.2.10 *Para todo $n \geq 1$ existe uma constante D_n, dependendo somente de n, tal que:*

(i) Se $k \geq 0$, $Q_1 \in \mathcal{A}_k^n$ e $Q_2 \in \mathcal{A}_{k+1}^n$ com $Q_2 \subset Q_1$, então

$$
|Q_1| \leq D_n|Q_2|.
$$

(ii) Para todo $Q \in \mathcal{A}_k^n, k \geq 0$, existem $x \in Q$ e $0 \leq \ell \leq 2$, tais que $Q \subset B_n(x, \ell)$ e

$$
|B_n(x, \ell)| \leq D_n|Q|.
$$

(iii) Para todo $x \in S^n$ e todo $0 \leq \ell \leq 2$, existem $k \geq 0, Q \in \mathcal{A}_k^n$ e $u \in SO(n+1)$, tais que $B_n(x, \ell) \subset u(Q)$ e

$$
|Q| \leq D_n|B_n(x, \ell)|.
$$

Demonstração. A demonstração é conseqüência da Observação 1.2.9 e é análoga à demonstração do Lema 2.1.10. Por este motivo a omitiremos aqui.

Observação 1.2.11 *Segue pela Observação 1.2.9 que, para quaisquer dois elementos* $Q_1, Q_2 \in \mathcal{A}_k^n$, *obtemos*

$$D_n^{-1}|Q_1| \leq |Q_2| \leq D_n|Q_1|.$$

A desigualdade acima mostra que as medidas dos elementos de $\mathcal{A}_k^n$ *são proporcionais e a constante de proporcionalidade depende somente de* n.

Observação 1.2.12 *Consideremos* $\mathcal{D}_n$ *com a partição diádica usual, isto é, para* $k \geq 1$ *sejam*

$$\mathcal{G}_k^{n,0} = \{I_{j_1}^k \times \ldots \times I_{j_n}^k : 1 \leq j_1, \ldots, j_{n-1} \leq 2^{k-1}, 1 \leq j_n \leq 2^k\}$$

e

$$\mathcal{A}_k^{n,0} = \{\xi_n(G) : G \in \mathcal{G}_k^{n,0}\}.$$

Então $\mathcal{A}_k^{n,0}$ *é uma partição de* S^n *para cada* $k \geq 1$ *e esta partição satisfaz as propriedades (i) e (iii) do Corolário 1.2.10. A propriedade (ii) do Corolário 1.2.10 não é satisfeita para os elementos* $\mathcal{A}_k^{n,0}$ *em torno de* $\mathbb{1} = (1, 0, \ldots, 0)$ *e* $-\mathbb{1} = (-1, 0, \ldots, 0)$.

Observação 1.2.13 *Fixado* n, *vamos usar as notações simplificadas* $\mathcal{A}_k$ *para denotar* $\mathcal{A}_k^n$, $k \geq 0$, $\mathcal{A}$ *para denotar* $\mathcal{A}^n$ *e* $B(x, \ell)$, $U(x, r)$ *para denotar as bolas* $B_n(x, \ell)$ *e* $U_n(x, r)$ *respectivamente.*

Observação 1.2.14 *Vamos identificar* $S^n \times [0, 1)$ *com a bola* $\mathbb{B} = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : |y| < 1\}$ *usando a aplicação* $(y, r) \longrightarrow ry$.

Definição 1.2.15 *Seja* $\alpha : [1 - \sqrt{2}, 1] \longrightarrow [0, |S^n|]$ *a função decrescente dada por* $\alpha(r) = |U(\mathbb{1}, r)|$, *onde* $\mathbb{1} = (1, 0, ..., 0)$. *Se* $Q \in \mathcal{A}$, $Q \neq S^n$, *definimos o subconjunto* $\widehat{Q}$ *de* $S^n \times [0, 1)$ *por* $\widehat{Q} = Q \times [\alpha^{-1}(|Q|), 1)$. *Se* $Q = S^n$, *então definimos* $\widehat{Q} = S^n \times [0, 1)$.

Notação 1.2.16 *Para* $Q \in \mathcal{A}$, *vamos denotar por* Q^* *a bola* $B(x, \delta_k^n)$ *que contém* Q *dada na Observação 1.2.9.*

Definição 1.2.17 *Vamos definir, para* $U = U(x,r)$, $x \in S^n$, $1-\sqrt{2} \le r < 1$:

$$\widehat{U} = \begin{cases} U \times [0,1), & para \quad 1-\sqrt{2} \le r \le 0 \\ U \times [r,1), & para \quad 0 \le r < 1. \end{cases}$$

Definição 1.2.18 *Se* $R > 0$ *e* $B = B(x,r)$ *é uma bola em* S^n*, vamos definir* $RB = B(x, Rr)$ *como sendo a bola de mesmo centro que* B *e com raio* R *vezes o raio de* B*. Se* $Q^* = U(x,r)$*, com* $1-\sqrt{2} \le r < 1$*, definimos* $R\widehat{Q}^* = \widehat{RQ^*}$*. Então, temos que*

$$R\widehat{Q}^* = \begin{cases} RQ^* \times [0,1), & para \quad 1-\sqrt{2} \le r \le 1-1/R \\ RQ^* \times [1+R(r-1),1), & para \quad 1-1/R \le r < 1. \end{cases}$$

Definição 1.2.19 *Vamos definir, para cada* $k \ge 0$*, uma partição* $\widehat{\mathcal{A}}_k$ *de* $S^n \times [0,1)$*. Definimos*

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{A}}_0 &= \{S^n \times [0,1)\}, \\
\widehat{\mathcal{A}}_1 &= \{\widehat{Q} : Q \in \mathcal{A}_1\} = \{Q \times [0,1) : Q \in \mathcal{A}_1\}, \\
\widehat{\mathcal{A}}_2 &= \{\widehat{Q} : Q \in \mathcal{A}_2\} \bigcup \{Q \times [0,1) \backslash \widehat{Q} : Q \in \mathcal{A}_2\}, \\
\widehat{\mathcal{A}}_3 &= \{\widehat{Q'} : Q' \in \mathcal{A}_3\} \bigcup \{(Q' \times [0,1) \cap \widehat{Q}) \backslash \widehat{Q'} : Q' \in \mathcal{A}_3,\ Q \in \mathcal{A}_2,\ Q' \subset Q\} \\
&\quad \bigcup \{Q' \times [0,1) \backslash \widehat{Q} : Q' \in \mathcal{A}_3,\ Q \in \mathcal{A}_2,\ Q' \subset Q\} \\
&= A_1^3 \bigcup A_2^3 \bigcup A_3^3.
\end{aligned}$$

Para $n \ge 4$*, definimos*

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{A}}_k &= A_1^k \bigcup A_2^k \bigcup A_3^k, \quad onde \\
A_1^k &= \{\widehat{Q'} : Q' \in \mathcal{A}_k\}, \\
A_2^k &= \{(Q' \times [0,1) \cap \widehat{Q}) \backslash \widehat{Q'} : Q' \in \mathcal{A}_k,\ Q \in \mathcal{A}_{k-1},\ Q' \subset Q\} \ e \\
A_3^k &= \{Q' \times [0,1) \cap Q : Q \in A_2^{k-1} \cup A_3^{k-1}\}.
\end{aligned}$$

Observação 1.2.20 *Da maneira como foram construídas, é claro que* $\widehat{\mathcal{A}}_k$ *é uma partição de* $S^n \times [0,1)$ *e, além disso, dado* $Q' \in \widehat{\mathcal{A}}_k$ *existe um único* $Q \in \widehat{\mathcal{A}}_{k-1}$ *tal que* $Q' \subset Q$*. Vamos escrever* $\widehat{\mathcal{A}} = \bigcup_{k \ge 0} \widehat{\mathcal{A}}_k$.

1.3 Partições diádicas de Sawyer-Wheeden

Nesta seção apresentamos as partições diádicas de um espaço quase-métrico X, introduzidas em Sawyer-Wheeden [15].

Definição 1.3.1 *Uma quase-distância sobre um conjunto X é uma aplicação $d : X \times X \to [0, \infty)$ satisfazendo:*

(i) $d(x, y) = 0$ se e somente se $x = y$;

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo x, $y \in X$;

(iii) existe uma constante $K \geq 1$ tal que, para todo x, $y \in X$,

$$d(x, y) \leq K[d(x, z) + d(z, y)].$$

Definição 1.3.2 *Definimos a bola aberta de centro $x \in X$ e raio $\ell > 0$ em X , a qual chamaremos simplesmente de bola, por $B(x, \ell) = \{y \in X : d(x, y) < \ell\}$.*

Observação 1.3.3 *Dada uma quase-distancia d sobre X, existe uma distancia ρ sobre X e um número real positivo γ tal que d é equivalente a ρ^γ, isto é, existem constantes C, $C' > 0$ tais que*

$$C' \, d(x, y) \leq \rho^\gamma(x, y) \leq C \, d(x, y), \qquad x \, , y \in X.$$

(veja Macias-Segovia [9]). Portanto, a família de d-bolas é equivalente à família de ρ^γ-bolas e ρ^γ-bolas são conjuntos abertos.

Definição 1.3.4 *O par (X, d) formado por um conjunto X munido de uma quase-distância d é chamado de espaço quase-métrico.*

Teorema 1.3.5 *Seja (X, d) um espaço quase-métrico separável (isto é, X contém um subconjunto enumerável e denso). Então existe $\lambda > 1$ tal que para todo $m \in \mathbb{Z}$ existem pontos $x_j^k \in X$ e uma família $\mathcal{D}_m = \{E_j^k\}$ de conjuntos de Borel, para k, $j \in \mathbb{Z}$, $k \geq m$, $1 \leq j < n_k$, onde $n_k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, tais que* *(i)* $B(x_j^k, \lambda^k) \subset E_j^k \subset B(x_j^k, \lambda^{k+1})$*;*

(ii) Para cada $k \geq m$*, temos que* $X = \bigcup_j E_j^k$ *e* $E_j^k \bigcap E_i^k = \emptyset$ *se* $i \neq j$*;*

(iii) Se $m \leq k < \ell$ *então ou* $E_j^k \subset E_i^\ell$ *ou* $E_i^\ell \bigcap E_j^k = \emptyset$*, para todos* $1 \leq j < n_k$ *e* $1 \leq i < n_\ell$*.*

Demonstração. Seja $\lambda = 8K^5$, onde K é a constante da quase-distância dada na Definição 1.3.1(iii). Para cada $k \in \mathbb{Z}$, seja $\{x_j^k\}_{1 \leq j < n_k}$ um subconjunto de X maximal tal que as bolas $\{B(x_j^k, 3K^2\lambda^k)\}_{1 \leq j < n_k}$ são duas a duas disjuntas (observamos que o fato de X ser separável implica que a cardinalidade de $\{x_j^k\}_j$ é no máximo enumerável). Vamos mostrar que

$$X = \bigcup_j B(x_j^k, 6K^3\lambda^k). \tag{1.2}$$

De fato, seja $x \in X$. Pela maximalidade de $\{x_j^k\}_{1 \leq j < n_k}$, existe $1 \leq i < n_k$ tal que $B(x, 3K^2\lambda^k) \bigcap B(x_i^k, 3K^2\lambda^k) \neq \emptyset$. Seja, então, $w \in B(x, 3K^2\lambda^k) \bigcap B(x_i^k, 3K^2\lambda^k)$. Portanto,

$$d(x, x_i^k) \leq K[d(x,w) + d(w, x_i^k)] < K[3K^2\lambda^k + 3K^2\lambda^k] = 6K^3\lambda^k,$$

e assim, $x \in B(x_i^k, 6K^3\lambda^k)$, o que demonstra (1.2).

Agora, fixemos $m \in \mathbb{Z}$. Definimos

$$\begin{aligned}
E_1^m &= B(x_1^m, 6K^3\lambda^m) - \left(\bigcup_{i \neq 1} B(x_i^m, \lambda^m)\right), \\
E_2^m &= B(x_2^m, 6K^3\lambda^m) - \left(\bigcup_{i \neq 2} B(x_i^m, \lambda^m)\right) - E_1^m, \\
&\vdots \\
E_j^m &= B(x_j^m, 6K^3\lambda^m) - \left(\bigcup_{i \neq j} B(x_i^m, \lambda^m)\right) - \left(\bigcup_{i<j} E_i^m\right), \qquad (1.3) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que (i) vale para $k = m$. Pela escolha de λ, temos que $E_j^m \subset B(x_j^m, \lambda^{m+1})$ pois $6K^3\lambda^m = 6K^3(8K^5)^m < (8K^5)^{m+1} = \lambda^{m+1}$ e, portanto,

$$E_j^m \subset B(x_j^m, 6K^3\lambda^m) \subset B(x_j^m, \lambda^{m+1}).$$

Para ver que $B(x_j^m, \lambda^m) \subset E_j^m$, basta observar que as bolas $\{B(x_j^m, \lambda^m)\}_j$ são duas a duas disjuntas, pois $B(x_j^m, \lambda^m) \subset B(x_j^m, 3K^2\lambda^m)$ e $\{B(x_j^m, 3K^2\lambda^m)\}_j$ são duas a duas disjuntas. Assim,

$$B(x_j^m, \lambda^m) \subset B(x_j^m, 6K^3\lambda^m) - \left(\bigcup_{i \neq j} B(x_i^m, \lambda^m) \right).$$

Além disso, como $B(x_j^m, \lambda^m)$ é uma das bolas subtraídas na definição de E_i^m para $i \neq j$, temos que $B(x_j^m, \lambda^m)$ não intercepta $\bigcup_{i<j} E_m^k$. Assim, $B(x_j^m, \lambda^m) \subset E_j^k$, o que demonstra (i) para $k = m$.

Vamos demonstrar agora que (ii) vale para $k = m$. Da maneira como foram construídos, é claro que os $\{E_j^k\}_j$ são dois a dois disjuntos. Agora, seja $x \in X$. Se $x \in \bigcup_j B(x_j^m, \lambda^m)$, então $x \in \bigcup_j E_j^m$ e não há o que demonstrar. Vamos supor, então, que $x \notin \bigcup_j B(x_j^m, \lambda^m)$. Por (1.2) podemos tomar o primeiro j_0 tal que $x \in B(x_{j_0}^m, 6K^3\lambda^m)$. Então, pela definição dos E_j^m, temos que $x \in E_{j_0}^m$ e, portanto, $x \in \bigcup_j E_j^m$. Logo, $X = \bigcup_j E_j^m$, o que demonstra (ii) para $k = m$.

Agora, vamos construir $\{E_j^k\}$ para $k > m$ por indução sobre k. Suponhamos $\ell > m$ e que a família $\{E_j^k\}_j$ está bem definida e satisfaz às condições (i), (ii) e (iii) para $1 \leq j < n_k$, $m \leq k < \ell$. Para qualquer $R > 0$ e $1 \leq j < n_\ell$, seja

$$\widetilde{B}(x_j^\ell, R) = \bigcup_{i : E_i^{\ell-1} \bigcap B(x_j^\ell, R) \neq \emptyset} E_i^{\ell-1}.$$

Vamos mostrar que, se $R > 0$ e $1 \leq j < n_k$, então

$$B(x_j^\ell, R) \subset \widetilde{B}(x_j^\ell, R) \subset B(x_j^\ell, K^2R + (K^2+1)\lambda^\ell). \tag{1.4}$$

De fato, a primeira inclusão segue de (ii) com $k = \ell - 1$. Se $w \in E_i^{\ell-1}$ e $z \in E_i^{\ell-1} \bigcap B(x_j^\ell, R)$, então por (i), temos

$$\begin{aligned} d(w, x_j^\ell) &\leq K[d(w, x_i^{\ell-1}) + K[d(x_i^{\ell-1}, z) + d(z, x_j^\ell)]] \\ &\leq K[\lambda^\ell + K[\lambda^\ell + R]] \\ &= K^2R + [K^2+1]\lambda^\ell. \end{aligned}$$

Em analogia com (1.3), definimos

$$\begin{aligned}
E_1^\ell &= \widetilde{B}(x_1^\ell, 6K^3\lambda^\ell) - \left(\bigcup_{i\neq 1} \widetilde{B}(x_i^\ell, \lambda^\ell)\right),\\
E_2^\ell &= \widetilde{B}(x_2^\ell, 6K^3\lambda^\ell) - \left(\bigcup_{i\neq 2} \widetilde{B}(x_i^\ell, \lambda^\ell)\right) - E_1^\ell,\\
&\vdots\\
E_j^\ell &= \widetilde{B}(x_j^\ell, 6K^3\lambda^\ell) - \left(\bigcup_{i\neq j} \widetilde{B}(x_i^\ell, \lambda^\ell)\right) - \left(\bigcup_{i<j} E_i^\ell\right).\\
&\vdots
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Tomando $R = 6K^3\lambda^\ell$ em (1.4) e utilizando (1.5) temos que se $1 \leq j < n_\ell$, então

$$E_j^\ell \subset B(x_j^\ell, K^2 6K^3\lambda^\ell + (K^2+1)\lambda^\ell) \subset B(x_j^\ell, \lambda^{\ell+1}), \tag{1.6}$$

pois $6K^5 + K^2 + 1 \leq 8K^5 = \lambda$, já que $K \geq 1$. Por outro lado, fazendo $R = \lambda^\ell$ em (1.4), temos

$$\widetilde{B}(x_i^\ell, \lambda^\ell) \subset B(x_i^\ell, (2K^2+1)\lambda^\ell) \subset B(x_i^\ell, 3K^2\lambda^\ell). \tag{1.7}$$

Agora, se $i \neq j$, então $B(x_i^\ell, 3K^2\lambda^\ell)$ e $B(x_j^\ell, 3K^2\lambda^\ell)$ são disjuntas e segue de (1.4), (1.7) e de (1.5) que

$$B(x_j^\ell, \lambda^\ell) \subset E_j^\ell, \qquad 1 \leq j < n_\ell. \tag{1.8}$$

As inclusões (1.6) e (1.8) juntamente com a hipótese de indução mostram que (i) vale para $1 \leq j < n_k$, $m \leq k \leq \ell$.

Para verificar a propriedade (ii), vamos primeiramente observar que

$$X = \bigcup_j \widetilde{B}(x_j^\ell, 6K^3\lambda^\ell)$$

por (1.2) com $k = \ell$ e pela primeira inclusão em (1.4) com $R = 6K^3\lambda^\ell$. Também

$$\widetilde{B}(x_j^\ell, \lambda^\ell) \subset \widetilde{B}(x_j^\ell, 6K^3\lambda^\ell) - \left(\bigcup_{i\neq j} \widetilde{B}(x_i^\ell, \lambda^\ell)\right)$$

por (1.7) e do fato que as bolas $B(x_i^\ell, 3K^2\lambda^\ell)$ são duas a duas disjuntas em i. Assim,

$$\bigcup_j \widetilde{B}(x_j^\ell, \lambda^\ell) \subset \bigcup_j E_j^\ell.$$

Se $x \in X$, vamos tomar o primeiro j_0 tal que $x \in \widetilde{B}(x_{j_0}^\ell, 6K^3\lambda^\ell)$. Para mostrar que $x \in \bigcup_j E_j^\ell$ podemos assumir que $x \notin \bigcup_j \widetilde{B}(x_j^\ell, \lambda^\ell)$. Então $x \in E_{j_0}^\ell$ por (1.5). Isto demonstra (ii).

Finalmente, para demonstrar (iii), é suficiente pela hipótese de indução mostrar que se $m \leq k < \ell$ e $E_{i_0}^k$ intercepta $E_{j_0}^\ell$, então $E_{i_0}^k \subset E_{j_0}^\ell$. Como cada $\widetilde{B}(x_j^\ell, R)$ é a união de determinados $E_i^{\ell-1}$ e como os $E_i^{\ell-1}$ são dois a dois disjuntos em i, segue que cada E_j^ℓ é também uma união de certos $E_i^{\ell-1}$ e que qualquer $E_i^{\ell-1}$ que intercepta E_j^ℓ deve estar contido em E_j^ℓ. Assim, se $E_{i_0}^k \bigcap E_{j_0}^\ell \neq \emptyset$, então $E_{i_0}^k \bigcap E_i^{\ell-1} \neq \emptyset$ para algum i tal que $E_i^{\ell-1} \subset E_{j_0}^\ell$. Como $m \leq k \leq \ell - 1$, a hipótese de indução implica que $E_{i_0}^k \subset E_i^{\ell-1}$ e, conseqüentemente que $E_{i_0}^k \subset E_{j_0}^\ell$. Isto completa a demonstração de (iii), e encerra a demonstração do teorema.

Observação 1.3.6 *A propriedade (ii) do Teorema 1.3.5 nos diz que, fixado $m \in \mathbb{Z}$, para cada $k \geq m$, a família $\{E_j^k\}$ é uma partição de X.*

Os elementos de $\mathcal{D} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{D}_m$ serão chamados de elementos diádicos.

Definição 1.3.7 *Se $Q = E_j^k \in \mathcal{D}_m$ para algum $m \in \mathbb{Z}$, dizemos que Q está centrado em x_j^k e definimos o comprimento do lado de Q por $\ell(Q) = 2\lambda^k$.*

Notação 1.3.8 *Denotamos por Q^* a bola $B(x_j^k, \lambda^{k+1})$ que, pelo Teorema 1.3.5(i) contém Q.*

Observação 1.3.9 *Embora os elementos em cada $\mathcal{D}_m$ satisfaçam às condições (i), (ii) e (iii) do Teorema 1.3.5, incluindo a condição particular de encaixamento (iii), os elementos de diferentes $\mathcal{D}_m$'s podem não estar encaixados.*

1.4 Decomposições diádicas de Christ

Nesta seção apresentamos as partições diádicas de um espaço de tipo homogêneo X, introduzidas em Christ [5].

Definição 1.4.1 *Dizemos que uma medida de Borel não negativa ω sobre um conjunto X munido de uma quase-distância d é uma medida doubling se existe uma constante $C_\omega \geq 0$ tal que*

$$|B(x, 2r)|_\omega \leq C_\omega \, |B(x, r)|_\omega,$$

para todo $x \in X$ e todo $r > 0$.

Definição 1.4.2 *Um espaço de tipo homogêneo (X, d, ω) será um conjunto X, munido de uma quase-distância d e uma medida doubling ω tal que $|B(x, r)|_\omega < \infty$, para todo $x \in X$ e todo $r > 0$.*

Definição 1.4.3 *Seja (X, d, ω) um espaço de tipo homogêneo. Seja $\delta \in (0, 1)$. Para cada $k \in \mathbb{Z}$, vamos considerar $\{x_\alpha^k\}_{\alpha \in I_k}$ uma família de elementos de X, maximal com respeito à condição*

$$d(x_\alpha^k, x_\beta^k) \geq \delta^k, \tag{1.9}$$

para todo $\alpha \neq \beta$.

Observação 1.4.4 *Se X for separável então a cardinalidade de I_k será no máximo enumerável.*

Observação 1.4.5 *Pela maximalidade da família $\{x_\alpha^k\}_{\alpha \in I_k}$ com respeito à condição (1.9), temos que existe a desigualdade contrária: para cada $k \in \mathbb{Z}$ e cada $x \in X$, existe $\alpha \in I_k$ tal que*

$$d(x, x_\alpha^k) < \delta^k. \tag{1.10}$$

Definição 1.4.6 *Uma árvore sobre o conjunto $\{(k, \alpha) : k \in \mathbb{Z},\ \alpha \in I_k\}$ é uma ordem parcial $\leq$ satisfazendo:*

(i) $(k, \alpha) \leq (\ell, \beta) \Rightarrow k \geq \ell$;

(ii) Para cada (k, α) e $\ell \leq k$ existe um único β tal que $(k, \alpha) \leq (\ell, \beta)$;

(iii) $(k,\alpha) \leq (k-1,\beta) \Rightarrow d(x_\alpha^k, x_\beta^{k-1}) < \delta^{k-1}$;

(iv) $d(x_\alpha^k, x_\beta^{k-1}) < (2K)^{-1}\delta^{k-1} \Rightarrow (k,\alpha) \leq (k-1,\beta)$, *onde K é a constante da quase-distância.*

Lema 1.4.7 *Para cada $k \in \mathbb{Z}$, consideremos uma família $\{x_\alpha^k\}_{\alpha\in I_k}$ como na Definição 1.4.3. Então existe uma árvore sobre conjunto $\{(k,\alpha) : k \in \mathbb{Z},\ \alpha \in I_k\}$.*

Demonstração. Para cada (k,α), existe, por (1.10), pelo menos um β tal que $d(x_\alpha^k, x_\beta^{k-1}) < \delta^{k-1}$. Também, existe no máximo um β tal que $d(x_\alpha^k, x_\beta^{k-1}) < (2K)^{-1}\delta^{k-1}$. De fato, se x_γ^{k-1} é outro elemento de X tal que $d(x_\alpha^k, x_\gamma^{k-1}) < (2K)^{-1}\delta^{k-1}$, então

$$d(x_\beta^{k-1}, x_\gamma^{k-1}) < K[d(x_\beta^{k-1}, x_\alpha^k) + d(x_\alpha^k, x_\gamma^{k-1})] < K[(2K)^{-1}\delta^{k-1} + (2K)^{-1}\delta^{k-1}] = \delta^{k-1},$$

contradizendo (1.9).

Uma ordem parcial sobre $\{(k,\alpha) : k \in \mathbb{Z},\ \alpha \in I_k\}$ pode ser construída da seguinte forma: Para cada (k,α), verificamos se existe β tal que $d(x_\alpha^k, x_\beta^{k-1}) \leq (2K)^{-1}\delta^{k-1}$. Se isto ocorre, definimos que $(k,\alpha) \leq (k-1,\beta)$, e também que (k,α) não está relacionado com qualquer outro $(k-1,\gamma)$. Se tal β não existe, então escolhemos qualquer β tal que $d(x_\alpha^k, x_\beta^{k-1}) \leq \delta^{k-1}$, e definimos que $(k,\alpha) \leq (k-1,\beta)$ e também que (k,α) não está relacionado com qualquer outro $(k-1,\gamma)$.

Finalmente, estendemos $\leq$ por transitividade e obtemos uma ordem parcial, a qual satisfaz (i), (ii), (iii) e (iv) da Definição 1.4.6.

Teorema 1.4.8 *Seja (X,d,ω) um espaço de tipo homogêneo. Seja $\{x_\alpha^k\}_{\alpha\in I_k}$ uma família de elementos de X como na Definição 1.4.3. Existe uma coleção de subconjuntos abertos $\{Q_\alpha^k \subset X : k \in \mathbb{Z},\ \alpha \in I_k\}$, e constantes $\delta \in (0,1)$, $a_0 > 0$ e $C > 0$ tais que*

(i) $B(x_\alpha^k, a_0\delta^k) \subset Q_\alpha^k \subset B(x_\alpha^k, C\delta^k)$;

(ii) Se $k \leq \ell$ então ou $Q_\beta^\ell \subset Q_\alpha^k$ ou $Q_\beta^\ell \bigcap Q_\alpha^k = \emptyset$.

(iii) Para cada (k,α) e cada $\ell < k$ existe um único β tal que $Q_\alpha^k \subset Q_\beta^\ell$;

(iv) $\left|X - \bigcup_\alpha Q_\alpha^k\right|_\omega = 0$, *para todo* $k \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Fixemos uma árvore sobre o conjunto $\{(k,\alpha) : k \in \mathbb{Z},\ \alpha \in I_k\}$, o que é possível pelo Lema 1.4.7, e seja $a_0 \in (0,1)$ tal que $(2K)^{-1}a_0 < 1$. Definimos

$$Q_\alpha^k = \bigcup_{(\ell,\beta)\leq(k,\alpha)} B(x_\beta^\ell, a_0\delta^\ell).$$

Pela Observação 1.3.3, podemos supor que as bolas $B(x,r)$ são conjuntos abertos. É claro que cada Q_α^k é aberto e que vale a primeira inclusão de (i). Para demonstrar a segunda inclusão de (i), vamos primeiro mostrar que

$$(\ell,\beta) \leq (k,\alpha) \ \Rightarrow\ d(x_\beta^\ell, x_\alpha^k) \leq 2K\delta^k. \tag{1.11}$$

De fato, dados $(\ell,\beta) \leq (k,\alpha)$, existe uma cadeia

$$(k,\alpha) = (k,\gamma_0) \geq (k+1,\gamma_1) \geq (k+2,\gamma_2) \geq \cdots \geq (\ell,\beta).$$

Então, escolhendo $\delta < (2K)^{-1}$, temos

$$\begin{aligned}
d(x_\alpha^k, x_\beta^\ell) &\leq Kd(x_\alpha^k, x_{\gamma_1}^{k+1}) + Kd(x_{\gamma_1}^{k+1}, x_\beta^\ell)\\
&\leq K\delta^k + Kd(x_{\gamma_1}^{k+1}, x_\beta^\ell)\\
&\leq K\delta^k + K^2d(x_{\gamma_1}^{k+1}, x_{\gamma_2}^{k+2}) + K^2d(x_{\gamma_2}^{k+2}, x_\beta^\ell)\\
&\leq K\delta^k + K^2\delta^{k+1} + K^2d(x_{\gamma_2}^{k+2}, x_\beta^\ell)\\
&\leq K\delta^k + K^2\delta^{k+1} + K^3\delta^{k+2} + \cdots\\
&= K\,\frac{\delta^k}{1-K\delta}\\
&\leq 2K\,\delta^k.
\end{aligned}$$

Seja, agora, $x \in Q_\alpha^k$. Então existe $(\ell,\beta) \leq (k,\alpha)$ tal que $x \in B(x_\beta^\ell, a_0\delta^\ell)$. Daí, por (1.11), temos

$$\begin{aligned}
d(x, x_\alpha^k) &\leq K[d(x, x_\beta^\ell) + d(x_\beta^\ell, x_\alpha^k)]\\
&\leq K[a_0\delta^\ell + 2K\delta^k]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq K[(2K)^{-1}\delta^k + 2K\delta^k] \\
&= \left[\frac{1}{2} + 2K^2\right]\delta^k \\
&= C\delta^k.
\end{aligned}
$$

Logo, $Q_\alpha^k \subset B(x_\alpha^k, C\delta^k)$, o que demonstra a segunda inclusão em (i).

Vamos, agora, demonstrar (ii). Para isto, vamos primeiro mostrar que, se $Q_\alpha^k \bigcap Q_\beta^k \neq \emptyset$, então $\alpha = \beta$. De fato, vamos supor que $Q_\alpha^k \bigcap Q_\beta^k \neq \emptyset$ e seja x nesta intersecção. Então existem (m, γ) e (n, σ) tais que $(m, \gamma) \leq (k, \alpha)$, $(n, \sigma) \leq (k, \beta)$ e $x \in B(x_\gamma^m, a_0\delta^m) \bigcap B(x_\sigma^n, a_0\delta^n)$. Assim, supondo sem perda de generalidade que $m \geq n$, temos

$$
\begin{aligned}
d(x_\gamma^m, x_\sigma^n) &\leq K[d(x_\gamma^m, x) + d(x, x_\sigma^n)] \\
&\leq K[a_0\delta^m + a_0\delta^n] \\
&\leq 2K\, a_0\delta^n.
\end{aligned}
$$

Agora, vamos considerar dois casos. Se $m = n$, obtemos $d(x_\gamma^m, x_\sigma^n) < \delta^n$, contradizendo (1.9). Por outro lado, se $m > n$, existe um único x_λ^{n+1} tal que $(m, \gamma) \leq (n+1, \lambda)$. Então, por (1.11), temos

$$
\begin{aligned}
d(x_\lambda^{n+1}, x_\sigma^n) &\leq K[d(x_\lambda^{n+1}, x_\gamma^m) + d(x_\gamma^m, x_\sigma^n)] \\
&\leq K[2K\delta^{n+1} + 2Ka_0\delta^n] \\
&= 2K^2(\delta + a_0)\delta^n \\
&< (2K)^{-1}\delta^n,
\end{aligned}
$$

desde que δ e a_0 sejam escolhidos suficientemente pequenos. Pela Definição 1.4.6(iv) isto implica que $(n+1, \lambda) \leq (n, \sigma)$. Então $(m, \gamma) \leq (n+1, \lambda) \leq (n, \sigma) \leq (k, \beta)$. Como $(m, \gamma) \leq (k, \alpha)$, concluímos que $\alpha = \beta$, pela Definição 1.4.6(ii).

Podemos, agora, mostrar (ii). Se $\ell \geq k$ e $Q_\beta^\ell \bigcap Q_\alpha^k \neq \emptyset$, escolhemos γ tal que $(\ell, \beta) \leq (k, \gamma)$, donde $x_\beta^\ell \in Q_\gamma^k$. Então $Q_\gamma^k \bigcap Q_\alpha^k \neq \emptyset$, e assim, $\gamma = \alpha$, pelo que vimos acima. Logo, $Q_\beta^\ell \subset Q_\alpha^k$.

Vamos demonstrar (iv). Fixemos k e seja $E = \bigcup_\alpha Q_\alpha^k$. Dado qualquer $x \in X$ e qualquer n, existe , por (1.10), x_α^n tal que $d(x, x_\alpha^n) < \delta^n$. Se $n \geq k$ então $B(x_\alpha^n, a_0\delta^n) \subset E$. Também, pela desigualdade triangular segue que $B(x_\alpha^n, a_0\delta^n) \subset B(x, K(1+a_0)\delta^n)$, que chamaremos de B. Observamos que, como a medida ω é doubling, $|B(x_\alpha^n, a_0\delta^n)|_\omega \geq c|B|_\omega$, onde a constante $c \in (0,1]$ depende somente de K e da constante doubling C_ω. Em outras palavras, temos que

$$\frac{|E \bigcap B|_\omega}{|B|_\omega} \geq c > 0.$$

Fazendo $n \to \infty$, temos

$$\limsup_{r\to 0} \frac{|E \bigcap B(x,r)|_\omega}{|B(x,r)|_\omega} \geq c > 0,$$

para todo $x \in X$. Pelo Teorema de Diferenciação de Lebesgue, E tem a medida de X e, portanto, $\left|X - \bigcup_\alpha Q_\alpha^k\right|_\omega = 0$, para todo $k \in \mathbb{Z}$, o que demonstra (iv).

Observação 1.4.9 *As partições diádicas de Bordin-Tozoni expostas na Seção 2 serão utilizadas no Capítulo 3 e satisfazem as propriedades das partições diádicas de Sawyer-Wheeden expostas na Seção 3. Poderíamos tentar desenvolver todo o Capítulo 3 com as partições de Sawyer-Wheeden ao invés de utilizar as partições de Bordin-Tozoni. No entanto, escolhemos estas últimas, já que conhecemos exatamente como são seus elementos, ao contrário dos elementos das partições de Sawyer-Wheeden, que são dados por meio de operações entre bolas, o que torna sua interpretação geométrica complicada. Além disso, fixado um inteiro* m, *os elementos da família* $\mathcal{D}_m$ *têm lado maior que* $2\lambda^m$, *isto é, os elementos de* $\mathcal{D}_m$ *não se tornam arbitrariamente "pequenos" como ocorre nas partições diádicas de* S^n. *As partições de Sawyer-Wheeden serão utilizadas no Capítulo 2. Embora os elementos das decomposições de Christ expostas na Seção 4, possam ser arbitrariamente "pequenos" e possuam propriedades satisfeitas pelos elementos das partições de Sawyer-Wheeden, os elementos de um dado estágio da decomposição não formam uma partição de* X, *o que torna a utilização destas decomposições no Capítulo 2 inviável.*

Capítulo 2

Medidas de Carleson e pesos da classe A_∞

O objetivo deste capítulo é expor os resultados contidos no trabalho [2], ue foi realizado com os professores Sergio Antonio Tozoni e Benjamim Bordin.

Na primeira seção definimos os espaços homogêneos $X = G/H$, munidos de uma quase-distância, onde G é um grupo topológico localmente compacto Hausdorff e H é um subgrupo compacto de G e apresentamos algumas propriedades adicionais das partições diádicas de Sawyer-Wheeden expostas na terceira seção do Capítulo 1, quando consideramos espaços homogêneos no lugar de espaços quase métricos.

A segunda seção é uma breve exposição de definições e resultados da Teoria dos Martingais que utilizaremos neste e no próximo capítulo.

Na terceira seção definimos um operador maximal de tipo diádico $\mathcal{M}_d$ usando as partições de $X = G/H$ expostas na primeira seção. Obtemos, então, uma condição suficiente sobre um peso W definido em X e sobre uma medida β definida sobre os borelianos de $\widehat{X} = X \times [0, \infty)$, para que o operador $\mathcal{M}_d$ seja limitado de $L^p(X, Wd\omega)$ em $L^p(\widehat{X}, \beta)$, onde ω é uma medida sobre os borelianos de X induzida por uma medida de Haar sobre G.

Na quarta seção definimos um operador maximal $\mathcal{M}$ utilizando as médias de uma função sobre bolas de X. Aplicamos o resultado principal da seção anterior e obtemos uma condição necessária e suficiente sobre um peso W e sobre uma medida β definida sobre os borelianos de $\widehat{X}$, para que o operador $\mathcal{M}$ seja limitado de $L^p(X, Wd\omega)$ em $L^p(\widehat{X}, \beta)$. Em particular, mostramos que, no caso $W \equiv 1$, a condição obtida é a condição de Carleson para espaços homogêneos. Um resultado análogo para o caso do $I\!R^n$ foi obtido em Ruiz-Torrea [12].

Finalmente, na quinta seção definimos o núcleo de Poisson para a esfera S^n, a integral de Poisson u_f e uma função maximal u_f^* de uma função real e integrável f sobre S^n. Mostramos que $|u_f^*(x)| \leq C\mathcal{M}f(x)$ e assim, aplicando o resultado principal da seção anterior, obtemos uma condição suficiente para que o operador $f \mapsto u_f^*$ seja limitado de $L^p(S^n, Wd\sigma)$ em $L^p(I\!B, \mu)$, onde σ é a medida de Lebesgue normalizada sobre S^n, $I\!B$ é a bola unitária em $I\!R^{n+1}$ e μ é uma medida não negativa sobre $I\!B$. No caso $W \equiv 1$, encontramos uma condição necessária e suficiente para que o operador $f \mapsto u_f$ seja limitado de $L^p(S^n, \sigma)$ em $L^p(I\!B, \mu)$, e esta condição é a condição de Carleson para a medida μ. O caso do S^1 sem pesos foi também estudado por Carleson em [5].

2.1 Espaços homogêneos

Nesta seção daremos algumas definições e resultados básicos e fixaremos algumas notações.

Daremos aqui uma nova definição de quase-distância sobre um conjunto X, que será utilizada em todo o Capítulo 2, diferente da Definição 1.3.1. Também, definiremos o que vem a ser um espaço homogêneo, que não será o mesmo que espaço *de tipo* homogêneo definido em 1.4.2.

Notação 2.1.1 *Seja G um grupo topológico (veja 1.1.8) localmente compacto Hausdorff com elemento unidade e, e seja H um subgrupo compacto de G. Vamos denotar por $\pi : G \mapsto G/H$ a aplicação canônica, isto é, a aplicação tal que $\pi(g) = gH$, para todo $g \in G$.*

Vamos denotar por dg uma medida de Haar à esquerda sobre o grupo topológico G, que vamos assumir normalizada no caso de G ser compacto. Se A é um subconjunto de Borel de

G, vamos denotar por $|A|_g$ *a medida de Haar de* A.

Definição 2.1.2 *Um espaço homogêneo* $X = G/H$ *é o conjunto de todas as classes laterais à esquerda* $\pi(g) = gH$, $g \in G$, *munido da topologia quociente.*

Observação 2.1.3 *A medida de Haar* dg *sobre* G *induz uma medida* ω *sobre a* σ*-álgebra de Borel sobre* X. *Para uma função* f *integrável sobre* X, *temos*

$$\int_X f(x)d\omega(x) = \int_G f \circ \pi(g)dg.$$

O grupo G *age transitivamente sobre* X *pela aplicação* $(g, \pi(h)) \mapsto g\pi(h) = \pi(gh)$, *isto é, para todos* x, $y \in X$, *existe* $g \in G$ *tal que* $gx = y$.

A medida ω *sobre* X *é invariante sobre a ação de* G, *isto é, se* f *é uma função integrável sobre* X, $g \in G$ *e* $R_g f(x) = f(g^{-1}x)$, *então*

$$\int_X f(x)d\omega(x) = \int_X R_g f(x)d\omega(x).$$

Definição 2.1.4 *Uma quase-distância sobre* X *é uma aplicação* $d : X \times X \mapsto [0, \infty)$ *satisfazendo:*

(i) $d(x, y) = 0$ *se e somente se* $x = y$;

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ *para todos* x, $y \in X$;

(iii) $d(gx, gy) = d(x, y)$ *para todos* $g \in G$, x, $y \in X$;

(iv) existe uma constante $K \geq 1$ *tal que, para todos* x, y, $z \in X$,

$$d(x, y) \leq K[d(x, z) + d(z, y)];$$

(v) as bolas $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$, $x \in X$, $r > 0$, *são relativamente compactas e mensuráveis, e as bolas* $B(\mathbb{1}, r)$, $r > 0$, *formam uma base de vizinhanças de* $\mathbb{1} = \pi(e)$;

(vi) existe uma constante $C_\omega \geq 1$ *tal que, para todo* $r > 0$ *e* $x \in X$,

$$|B(x, 2r)|_\omega \leq C_\omega |B(x, r)|_\omega,$$

isto é, a medida ω *é doubling.*

Notação 2.1.5 *Neste capítulo, X denotará um espaço homogêneo munido de uma quase-distância d. Observamos que todo espaço homogêneo X é, em particular, um espaço de tipo homogêneo.*

Observação 2.1.6 *Todo grupo topológico localmente compacto Hausdorff é um espaço homogêneo. Em particular, $\mathbb{R}^n$ é um espaço homogêneo.*

Seja $SO(n+1)$ o grupo das rotações próprias em R^{n+1} (veja 1.1.10). Consideramos $SO(n+1)$ munido da topologia induzida por $\mathbb{R}^{(n+1)^2}$. $SO(n+1)$ é um subespaço compacto do espaço $M(n+1,\ n+1)$ de todas as matrizes de ordem $(n+1)\times(n+1)$. Podemos identificar $SO(n)$ com o subgrupo de $SO(n+1)$ que deixa $\mathbb{1}=(1,0,\ldots,0)\in S^n$ invariante, e assim, considerar $SO(n)$ como um subgrupo de $SO(n+1)$. Então, o espaço topológico $SO(n+1)/SO(n)$ é um espaço métrico homeomorfo a S^n, onde consideramos S^n munida da topologia induzida pela distância euclidiana e onde o homeomorfismo $\varphi : SO(n+1)/SO(n) \mapsto S^n$, que está bem definido, é dado por $\varphi(uSO(n)) = u\mathbb{1}$. Além disso, a medida de Lebesgue sobre S^n é a medida induzida por uma medida de Haar sobre $SO(n+1)$. Portanto, a esfera S^n pode ser considerada um espaço homogêneo.

Observação 2.1.7 *Segue da Definição 2.1.4(iii) que $B(gx,r) = gB(x,r)$ para todos $g \in G$, $x \in X$ e $r > 0$, e assim $|B(gx,r)|_\omega = |B(x,r)|_\omega$. Portanto, dados $x \in X$ e $r > 0$, existe uma seqüência $(g_j)_{j\geq 1}$ de elementos de G tal que $X = \bigcup_{j\geq 1} g_j B(x,r)$. De fato, se $E \subset X$ é um subconjunto limitado de X e se $\{B(x,r(x))\}$ é uma cobertura de E, então existem uma constante $C > 0$ e uma seqüência de bolas disjuntas $B(x_i, r(x_i))$ tal que a família $\{B(x_i, Cr(x_i)\}$ forma uma cobertura de E (veja Coiffman-Weiss [4], Teorema 1.2, pag. 69). Temos que $X = \bigcup_{k\geq 1}(B(\mathbb{1},k) - B(\mathbb{1},k-1))$ e, para cada k, $B(\mathbb{1},k) - B(\mathbb{1},k-1)$ é um conjunto limitado. Para cada $k \geq 1$, consideremos a cobertura $\{B(x,r/C)\}$ de $B(\mathbb{1},k) - B(\mathbb{1},k-1)$, onde C é a constante descrita acima. Então existe uma seqüência de bolas disjuntas $\{B(x_i^k, r/C)\}$ tal que a família $\{B(x_i^k, r)\}$ forma uma cobertura de $B(\mathbb{1},k) - B(\mathbb{1},k-1)$. Dado $x \in X$, se $g_j^k \in G$ é tal que $g_j^k x = x_j^k$, então $B(\mathbb{1},k) - B(\mathbb{1},k-1) \subset \bigcup_j B(x_j^k, r) = \bigcup_j B(g_j^k x, r) = \bigcup_j g_j^k B(x,r)$. Logo, podemos escrever $X = \bigcup_k \bigcup_{j\geq 1} g_j^k B(x,r)$, o que demonstra a afirmação feita.*

Como conseqüência disso, temos que $|B(x,r)|_\omega > 0$ para todo $r > 0$ e para todo $x \in X$ e também que X é separável, isto é, possui um subconjunto enumerável e denso.

Definição 2.1.8 *Um peso é uma função positiva e localmente integrável sobre X.*

Notação 2.1.9 *Dado $1 < p < \infty$ denotamos por p' o conjugado de p, isto é, $1 < p' < \infty$ e $1/p + 1/p' = 1$. Se $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ é um espaço de medida e $1 \leq p < \infty$, denotamos por $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ o conjunto das funções $\mathcal{F}$-mensuráveis a valores reais tais que*

$$\| f \|_{L^p(\Omega,\mathcal{F},\nu)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p d\nu(x) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Se f, $g \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ e $f = g$ q.s., f e g serão considerados um mesmo elemento de $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$. Quando não houver perigo de confusão, escreveremos $L^p(\Omega, \nu)$ ou simplesmente $L^p(\Omega)$ para denotar $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$.

Se W é um peso sobre X, escreveremos $L^p(W)$ para denotar $L^p(X, W(x)d\omega(x))$.

Lema 2.1.10 *Seja X um espaço homogêneo, seja b um inteiro positivo e seja $\lambda = 8K^5$, onde K é a constante da quase-distância dada em 2.1.4(iii). Então para cada inteiro k, $-b \leq k \leq b$, existe uma partição de Borel enumerável $\mathcal{A}_k^b$ de X e uma constante positiva C dependendo somente de X, tal que*

(i) para todo $Q \in \mathcal{A}_k^b$, $-b \leq k \leq b$, existe $x_Q \in Q$ tal que

$$B(x_Q, \lambda^k) \subset Q \subset B(x_Q, \lambda^{k+1})$$

e

$$|B(x_Q, \lambda^{k+1})|_\omega \leq C|Q|_\omega;$$

(ii) se $-b \leq k < b$, $Q_1 \in \mathcal{A}_{k+1}^b$, $Q_2 \in \mathcal{A}_k^b$ e $Q_1 \cap Q_2 \neq \emptyset$, então $Q_2 \subset Q_1$, e

$$0 < |Q_1|_\omega \leq C|Q_2|_\omega;$$

(iii) para todos $x \in X$ e r, $\lambda^{-b-1} \leq r \leq \lambda^b$, existe $Q \in \mathcal{A}_k^b$ para algum $-b \leq k \leq b$ e existe $g \in G$ tal que $d(gx, x) \leq \lambda^{k+1}$, $B(x,r) \subset gQ$ e

$$|Q|_\omega \leq C|B(x,r)|_\omega.$$

Demonstração. Fixado $b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$, pelo Teorema 1.3.5 segue que para cada inteiro k, $-b \leq k \leq b$, existe uma partição de Borel enumerável $\mathcal{A}_k^b$ de X tal que, para todo $Q \in \mathcal{A}_k^b$, existe $x_Q \in Q$ tal que

$$B(x_Q, \lambda^k) \subset Q \subset B(x_Q, \lambda^{k+1}),$$

onde $\lambda = 8K^5$, o que demonstra a primeira parte de (i). Então, se a é um inteiro tal que $2^{a-1} < \lambda \leq 2^a$, pela Definição 2.1.4(vi), temos

$$\begin{aligned}
|B(x_Q, \lambda^{k+1})|_\omega &= |B(x_Q, \lambda\lambda^k)|_\omega \\
&\leq |B(x_Q, 2^a\lambda^k)|_\omega \\
&\leq C_\omega^a \, |B(x_Q, \lambda^k)|_\omega \\
&\leq C_\omega^a \, |Q|_\omega,
\end{aligned}$$

o que demonstra (i) com $C = C_\omega^a$.

Agora, se $-b \leq k \leq b$, $Q_1 \in \mathcal{A}_{k+1}^b$, $Q_2 \in \mathcal{A}_k^b$, com $Q_1 \cap Q_2 \neq \emptyset$ então pelo Teorema 1.3.5 temos que $Q_2 \subset Q_1$ e, como Q_1 contém uma bola, temos que $|Q_1|_\omega > 0$. Por (i), existem $x_{Q_1} \in Q_1$ e $x_{Q_2} \in Q_2$ tais que

$$B(x_{Q_1}, \lambda^{k+1}) \subset Q_1 \subset B(x_{Q_1}, \lambda^{k+2}).$$

e

$$B(x_{Q_2}, \lambda^k) \subset Q_2 \subset B(x_{Q_2}, \lambda^{k+1}).$$

Logo, pela Definição 2.1.4(vi) e do fato que ω é invariante pela ação de G, temos

$$\begin{aligned}
0 &< |Q_1|_\omega \\
&\leq |B(x_{Q_1}, \lambda^{k+2})|_\omega \\
&\leq |B(x_{Q_1}, 2^{2a}\lambda^k)|_\omega \\
&\leq C_\omega^{2a} |B(x_{Q_2}, \lambda^k)|_\omega \\
&\leq C_\omega^{2a} |Q_2|_\omega,
\end{aligned}$$

o que demonstra (ii) com $C = C_\omega^{2a}$.

Vamos demonstrar (iii). Sejam $x \in X$ e $-b \leq k \leq b$ tais que $\lambda^{k-1} \leq r \leq \lambda^k$. Existe um único $Q \in \mathcal{A}_k^b$ tal que $x \in Q$. Consideremos x_Q como em (i) e $g \in G$ tal que $x = gx_Q$. Então por (i) temos

$$B(x,r) \subset B(gx_Q, \lambda^k) \subset gQ \subset B(x, \lambda^{k+1})$$

e assim pela Definição 2.1.4(vi) temos

$$\begin{aligned} |Q|_\omega &\leq |B(x_Q, 2^a\lambda^k)|_\omega \\ &\leq C_\omega^a |B(x_Q, \lambda^k)|_\omega \\ &\leq C_\omega^{2a} |B(x,r)|_\omega. \end{aligned}$$

Temos também que $d(gx, x) = d(x, x_Q) \leq \lambda^{k+1}$.

2.2 Martingais

Nesta seção daremos algumas definições e resultados da Teoria dos Martingais.

Vamos considerar $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ um espaço de medida σ-finita e seja $\mathcal{B}$ uma sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$.

Observação 2.2.1 *Seja $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$. Segue como conseqüência do Teorema de Radon-Nikodym que existe uma única $g \in L^1(\Omega, \mathcal{B}, \nu)$ tal que, para todo $A \in \mathcal{B}$,*

$$\int_A g(x) d\nu(x) = \int_A f(x)\, d\nu(x). \tag{2.1}$$

Definição 2.2.2 *Seja $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$. Definimos a esperança condicional de f com respeito a $\mathcal{B}$ como sendo a única função $g \in L^1(\Omega, \mathcal{B}, \nu)$ que satisfaz (2.1). Denotaremos $g = E[f|\mathcal{B}]$.*

Teorema 2.2.3 *Sejam $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ e $\mathcal{B}'$ uma sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$. Então*

$$E[E[f|\mathcal{B}]\, |\mathcal{B}'] = E[f\,|\mathcal{B}'] \quad q.s.$$

Observação 2.2.4 *Seja* $\{B_k : k \in L\}$, $L \subset \mathbb{N}$, *uma partição de* Ω *tal que* $B_k \in \mathcal{F}$ *e* $\nu(B_k) > 0$, *para todo* $k \in L$. *Se* $\mathcal{B}$ *é a* σ*-álgebra gerada pelos conjuntos* B_k *e* $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$, *então*

$$E[f|\mathcal{B}] = \sum\nolimits_{k\in L} \left(\frac{1}{\nu(B_k)} \int_{B_k} f(x)d\nu(x) \right) \chi_{B_k}. \tag{2.2}$$

De fato, como $E[f|\mathcal{B}]$ *é* $\mathcal{B}$*-mensurável, existem* $a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$E[f|\mathcal{B}] = \sum\nolimits_{k\in L} a_k \chi_{B_k}.$$

Portanto, para todo $k \in L$, *temos*

$$\int_{B_k} f(x)d\nu(x) = \int_{B_k} E[f|\mathcal{B}](x)d\nu(x) = \int_{B_k} a_k d\nu(x) = a_k \nu(B_k)$$

e assim

$$a_k = \frac{1}{\nu(B_k)} \int_{B_k} f(x)d\nu(x).$$

Definição 2.2.5 *Seja* $(\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *uma seqüência crescente de sub-*σ*-álgebras de* $\mathcal{F}$, *e para cada* $k \in \mathbb{Z}$, *consideremos uma função* $f_k \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_k, \nu)$. *Dizemos que a seqüência* $(f_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *é um martingal com respeito à seqüência* $(\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *se, para todo* $k \in \mathbb{Z}$, $f_k = E[f_{k+1}|\mathcal{F}_k]$.

Observação 2.2.6 *Seja* $(\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *uma seqüência crescente de sub-*σ*-álgebras de* $\mathcal{F}$ *e seja* $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$. *Então a seqüência* $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *definida por* $f_n = E[f|\mathcal{F}_n]$ *é um martingal. De fato, por 2.2.3, temos*

$$E[f_{n+1}|\mathcal{F}_n] = E[E[f|\mathcal{F}_{n+1}]|\mathcal{F}_n] = E[f|\mathcal{F}_n] = f_n.$$

Observação 2.2.7 *Seja* $\mathcal{B}_k$, $k \geq 1$, *uma partição de* Ω *por conjuntos mensuráveis, tal que para todo* $Q' \in \mathcal{B}_k$ *existe um único* $Q \in \mathcal{B}_{k-1}$ *tal que* $Q' \subset Q$. *Seja* $\mathcal{F}_k$ *a sub-*σ*-álgebra de* $\mathcal{F}$ *gerada por* $\mathcal{B}_k$. *Então* $(\mathcal{F}_k)_{k\geq1}$ *é uma seqüência crescente de sub-*σ*-álgebras de* $\mathcal{F}$. *Se* $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ *e*

$$f_k(x) = E[f|\mathcal{F}_k](x) = \sum_{Q\in\mathcal{B}_k} \left(\frac{1}{|Q|_\nu} \int_Q f(y)d\nu(y) \right) \chi_Q(x),$$

então $(f_k)_{k\geq 1}$ *é um martingal com respeito à seqüência* $(\mathcal{F}_k)_{k\geq 1}$. *Definimos o operador maximal* M_ν, *para toda* $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$, *por*

$$M_\nu f(x) = \sup_{k\geq 1} E[|f|\ |\mathcal{F}_k](x) = \sup_{\substack{x\in Q\\ Q\in\mathcal{B}}} \frac{1}{|Q|_\nu}\int_Q |f(y)|d\nu(y).$$

onde $\mathcal{B} = \bigcup_{k\geq 1}\mathcal{B}_k$.

O próximo resultado segue da teoria dos martingais e pode ser encontrado em Dellacherie-Meyer [6, n. 40, pag. 37].

Teorema 2.2.8 *Se* $1 < p < \infty$ *e* $f \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$, *então*

$$\|M_\nu f\|_{L^p(\Omega,\mathcal{F},\nu)} \leq p'\|f\|_{L^p(\Omega,\mathcal{F},\nu)}.$$

Observação 2.2.9 *Se* $\mathcal{A}_k$ *e* $\widehat{\mathcal{A}}_k$ *são as partições de* S^n *e* $S^n \times [0,1)$ *respectivamente, dadas na Seção 2 do Capítulo 1, então elas satisfazem as condições para que o Teorema 2.2.8 seja válido. Utilizaremos este resultado para ambas as partições no Capítulo 3.*

Observação 2.2.10 *Consideremos uma medida* σ*-finita* ν *sobre a* σ*-álgebra de Borel de um espaço homogêneo* X *e seja* $\mathcal{F}_k$ *a* σ*-álgebra gerada pela partição* $\mathcal{A}^b_{-k}$, *para* $-b \leq k \leq b$, *por* $\mathcal{A}^b_{-b}$ *para* $k \geq b$ *e por* $\mathcal{A}^b_b$ *para* $k \leq -b$, *onde* $\mathcal{A}^b_k$ *é a partição dada no Lema 2.1.10. Se* $f \in L^1(X, \mathcal{F}, \nu)$,

$$f_k(x) = E[f|\mathcal{F}_k](x) = \sum_{Q\in\mathcal{A}^b_{-k}} \left(\frac{1}{|Q|_\nu}\int_Q f(y)d\nu(y)\right)\chi_Q(x), \quad -b \leq k \leq b$$

e $f_k = f_b$ *para* $k \geq b$, $f_k = f_{-b}$ *para* $k \leq -b$, *então* $(f_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *é um martingal com respeito à seqüência* $(\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$. *Definimos o operador maximal* M^b_ν, *para toda* $f \in L^1(X, \mathcal{F}, \nu)$ *por*

$$M^b_\nu f(x) = \sup_{k\in\mathbb{Z}} E[|f|\ |\mathcal{F}_k](x) = \sup_{\substack{x\in Q\\ Q\in\mathcal{A}^b}} \frac{1}{|Q|_\nu}\int_Q |f(y)|d\nu(y).$$

onde $\mathcal{A}^b = \bigcup_{-b\leq k\leq b}\mathcal{A}^b_k$.

Podemos enunciar, então, o Teorema 2.2.8 da seguinte forma:

Teorema 2.2.11 *Se* $1 < p < \infty$ *e* $f \in L^p(X, \nu)$, *então*

$$\|M^b_\nu f\|_{L^p(X,\nu)} \leq p'\|f\|_{L^p(X,\nu)}.$$

2.3 A limitação de um operador maximal de tipo diádico

Definição 2.3.1 *Seja b um inteiro positivo. Dado $Q \in \mathcal{A}^b = \bigcup_{-b \leq k \leq b} \mathcal{A}_k^b$, onde $\mathcal{A}_k^b$ são as partições de X dadas no Lema 2.1.10, definimos o subconjunto $\widetilde{Q}$ de $\widehat{X} = X \times [0, \infty)$ como $\widetilde{Q} = Q \times [0, \alpha^{-1}(|Q|_\omega)]$, onde $\alpha : [0, \infty) \to [0, \infty)$ é a função definida por $\alpha(r) = |B(\mathbb{1}, r)|_\omega$, $\mathbb{1} = \pi(e)$. Definimos também $\widetilde{B} = B(x, r) \times [0, r]$.*

Definição 2.3.2 *Se f é uma função a valores reais e localmente integrável sobre X, definimos, para cada $(x, r) \in \widehat{X}$,*

$$\mathcal{M}_d^b f(x, r) = \sup_{\substack{x \in Q \in \mathcal{A}^b \\ |Q|_\omega \geq \alpha(r)}} \frac{1}{|Q|_\omega} \int_Q |f(y)| d\omega(y).$$

Se $|Q|_\omega < \alpha(r)$ para todo $Q \in \mathcal{A}^b$ tal que $x \in Q$, definimos $\mathcal{M}_d^b f(x, r) = 0$.

Lema 2.3.3 *Seja W um peso e seja A um subconjunto mensurável de X. Se $1 < p < \infty$ e $W^{-1}\chi_A \notin L^{p'}(W)$, então existe uma função positiva $f \in L^p(W)$ tal que*

$$\int_A f(x) d\omega(x) = \infty.$$

Demonstração. Seja ψ o funcional linear sobre $L^p(W)$ dado por

$$\psi(g) = \int_X (W^{-1}(x)\chi_A(x)) g(x) W(x) d\omega(x) = \int_A g(x) d\omega(x).$$

Como $W^{-1}\chi_A \notin L^{p'}(W)$, segue pelo Teorema de Representação de Riesz que ψ não é contínuo. Portanto, existe $\varepsilon > 0$, tal que, para cada inteiro positivo m, existe $g_m \in L^p(W)$ tal que $||g_m||_{L^p(W)} \leq 2^{-m}$ e $|\psi(g_m)| \geq \varepsilon$. Seja

$$f_m(x) = |g_1(x)| + \cdots + |g_m(x)|.$$

Então, para todos m, $k \geq 1$,

$$\begin{aligned}
||f_{m+k} - f_m||_{L^p(W)} &= |||g_{m+1}| + \cdots |g_{m+k}|||_{L^p(W)} \\
&\leq ||g_{m+1}||_{L^p(W)} + \cdots + ||g_{m+k}||_{L^p(W)} \\
&\leq 2^{-(m+1)} + \cdots + 2^{-(m+k)} \\
&< 2^{-m}.
\end{aligned}$$

Assim (f_m) é uma seqüência de Cauchy $L^p(W)$ e portanto existe $f \in L^p(W)$ tal que $f_m \to f$ em $L^p(W)$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\psi(f_m) &= \int_A f_m(x)d\omega(x) \\
&= \int_A |g_1(x)|d\omega(x) + \cdots + \int_A |g_m(x)|d\omega(x) \\
&\geq |\psi(g_1)| + \cdots + |\psi(g_m)| \\
&\geq m\varepsilon.
\end{aligned}$$

Mas $f_m \uparrow f$ q.s. e assim, pelo Teorema da Convergência Monótona, obtemos

$$\int_A f(x)d\omega(x) = \psi(f) = \lim_{m\to\infty} \psi(f_m) \geq \lim_{m\to\infty} m\varepsilon = \infty.$$

Teorema 2.3.4 *Sejam W um peso sobre X, β uma medida não negativa sobre $\widehat{X}$ e $1 < p < \infty$. Se existe uma constante $C > 0$, tal que, para todo $Q \in \mathcal{A}^b$ e todo inteiro positivo b,*

$$\int_{\widetilde{Q}} [\mathcal{M}_d^b(W^{1-p'}\chi_Q)(x,r)]^p d\beta(x,r) \leq C \int_Q W^{1-p'}(x)d\omega(x) < \infty,$$

então existe uma constante $C > 0$, tal que, para toda $f \in L^p(W)$ e todo inteiro positivo b,

$$\int_{\widehat{X}} [\mathcal{M}_d^b f(x,r)]^p d\beta(x,r) \leq C \int_X |f(x)|^p W(x)d\omega(x).$$

Demonstração. Vamos fixar $f \in L^p(W)$ e para cada $k \in \mathbb{Z}$, seja Ω_k o conjunto

$$\Omega_k = \{(x,r) \in \widehat{X} : \mathcal{M}_d^b f(x,r) > 2^k\}.$$

Para cada $k \in \mathbb{Z}$, vamos denotar por C_k^0 a família formada por todos os $Q \in \mathcal{A}^b$ tais que

$$|f|_Q = \frac{1}{|Q|_\omega} \int_Q |f(y)|d\omega(y) > 2^k.$$

Como para todo $Q \in \mathcal{A}_k^b$, $-b \leq k < b$, existe $Q' \in \mathcal{A}_{k+1}^b$ tal que $Q \subset Q'$, então todo elemento $Q \in C_k^0$ está contido em algum elemento maximal $Q' \in C_k^0$. Denotamos por C_k a família $\{Q_j^k : j \in J_k\}$ formada por todos os elementos maximais $Q \in C_k^0$. Como $\mathcal{A}_k^b$ é uma partição de X e todos os elementos de C_k são maximais, podemos concluir que os conjuntos

Q_j^k, $j \in J_k$, são dois a dois disjuntos. Portanto os conjuntos $\widetilde{Q}_j^k$, $j \in J_k$, são também dois a dois disjuntos , e

$$\Omega_k = \bigcup_{j \in J_k} \widetilde{Q}_j^k.$$

Agora, para cada $k \in \mathbb{Z}$ e cada $j \in J_k$, seja

$$E_j^k = \widetilde{Q}_j^k - \Omega_{k+1}.$$

Então os conjuntos E_j^k e E_i^h são disjuntos para $(k,j) \neq (h,i)$ e

$$\{(x,r) : \mathcal{M}_d^b f(x,r) > 0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (\Omega_k - \Omega_{k+1}) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \bigcup_{j \in J_k} E_j^k.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_{\widehat{X}} [\mathcal{M}_d^b f(x,r)]^p d\beta(x,r) &= \sum_{k,j} \int_{E_j^k} [\mathcal{M}_d^b f(x,r)]^p d\beta(x,r) \\
&\leq \sum_{k,j} \int_{E_j^k} [2^{k+1}]^p d\beta(x,r) \\
&= 2^p \sum_{k,j} |E_j^k|_\beta (2^k)^p \\
&\leq 2^p \sum_{k,j} |E_j^k|_\beta \left(\frac{1}{|Q_j^k|_\omega} \int_{Q_j^k} |f(x)| d\omega(x) \right)^p . \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Agora, introduzimos as seguintes notações:

$$\nu(x) = W^{1-p'}(x),$$

$$|A|_\nu = \int_A \nu(x) d\omega(x),$$

$$\gamma_{k,j} = |E_j^k|_\beta \left(\frac{|Q_j^k|_\nu}{|Q_j^k|_\omega} \right)^p,$$

$$g_{k,j} = \left(\frac{1}{|Q_j^k|_\nu} \int_{Q_j^k} \frac{|f(x)|}{\nu(x)} \nu(x) d\omega(x) \right)^p,$$

$$Y = \{(k,j) : k \in \mathbb{Z},\ j \in J_k\},$$

$$\Gamma(\lambda) = \{(k,j) \in Y : \ g_{k,j} > \lambda\}.$$

Seja γ a medida sobre Y tal que $|\{(k,j)\}|_\gamma = \gamma_{k,j}$ e seja g a função definida sobre Y por $g((k,j)) = g_{k,j}$. Temos que

$$\gamma_{k,j} g_{k,j} = |E_j^k|_\beta \left(\frac{1}{|Q_j^k|_\omega} \int_{Q_j^k} |f(x)| d\omega(x) \right)^p$$

e assim segue por (2.3) que

$$\begin{aligned}
\int_{\widehat{X}} [\mathcal{M}_d^b f(x,r)]^p d\beta(x,r) &\leq 2^p \sum_{k,j} \gamma_{k,j} g_{k,j} \\
&= 2^p \int_Y g(\gamma) d\gamma \\
&= 2^p \int_0^\infty |\{(k,j) \in Y : g((k,j)) > \lambda\}|_\gamma d\lambda \\
&= 2^p \int_0^\infty |\Gamma(\lambda)|_\gamma d\lambda \\
&= 2^p \int_0^\infty (\sum_{(k,j)\in\Gamma(\lambda)} \gamma_{k,j}) d\lambda \\
&= 2^p \int_0^\infty \sum_{(k,j)\in\Gamma(\lambda)} \int_{E_j^k} \left(\frac{|Q_j^k|_\nu}{|Q_j^k|_\omega} \right)^p d\beta(x,r) d\lambda. \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

Para cada $\lambda > 0$, seja $\{Q_i^\lambda : i \in I_\lambda\}$ a família formada por todos os elementos maximais da família

$$\{Q_j^k : (k,j) \in \Gamma(\lambda)\} = \left\{ Q_j^k : \frac{1}{|Q_j^k|_\nu} \int_{Q_j^k} \frac{|f(x)|}{\nu(x)} \nu(x) d\omega(x) > \lambda^{1/p} \right\}.$$

Se $Q_j^k \subset Q_i^\lambda$ e $(x,r) \in E_j^k$, então $x \in Q_j^k$, $|Q_j^k|_\omega \geq \alpha(r)$ e assim

$$\mathcal{M}_d^b(\nu \chi_{Q_i^\lambda})(x,r) = \sup_{\substack{x \in Q \in \mathcal{A}^b \\ |Q|_\omega \geq \alpha(r)}} \frac{|Q \cap Q_i^\lambda|_\nu}{|Q|_\omega} \geq \frac{|Q_j^k|_\nu}{|Q_j^k|_\omega}.$$

Portanto, se $Q_j^k \subset Q_i^\lambda$ obtemos

$$\int_{E_j^k} \left(\frac{|Q_j^k|_\nu}{|Q_j^k|_\omega} \right)^p d\beta(x,r) \leq \int_{E_j^k} [\mathcal{M}_d^b(\nu \chi_{Q_i^\lambda})(x,r)]^p d\beta(x,r). \qquad (2.5)$$

Usando o fato que os conjuntos E_j^k são disjuntos, segue de (2.4), (2.5) e pela hipótese que

$$\int_{\widehat{X}} [\mathcal{M}_d^b f(x,r)]^p d\beta(x,r) \leq 2^p \int_0^\infty \sum_{i \in I_\lambda} \sum_{\substack{(k,j)\in\Gamma(\lambda) \\ Q_j^k \subset Q_i^\lambda}} \int_{E_j^k} [\mathcal{M}_d^b(\nu \chi_{Q_i^\lambda})(x,r)]^p d\beta(x,r)$$

$$
\begin{aligned}
&\leq 2^p \int_0^\infty \sum_{i\in I_\lambda} \int_{\widetilde{Q}_i^\lambda} [\mathcal{M}_d^b(\nu\chi_{Q_i^\lambda})(x,r)]^p d\beta(x,r) \\
&\leq C2^p \int_0^\infty \sum_{i\in I_\lambda} \int_{Q_i^\lambda} \nu(x)d\omega(x) \\
&= C2^p \int_0^\infty \left| \bigcup_{(k,j)\in\Gamma(\lambda)} Q_j^k \right|_\nu d\omega(x). \qquad (2.6)
\end{aligned}
$$

Segue da definição do operador maximal M_ν^b na Observação 2.2.10 e pela definição de $\Gamma(\lambda)$ que

$$
\bigcup_{(k,j)\in\Gamma(\lambda)} Q_j^k \subset \left\{ x \in X : M_\nu^b\left(\frac{|f|}{\nu}\right)(x) > \lambda^{1/p} \right\}. \qquad (2.7)
$$

Então, por (2.6), (2.7) e pelo Teorema 2.2.11,

$$
\begin{aligned}
\int_{\widehat{X}} [\mathcal{M}_d^b f(x,r)]^p d\beta(x,r) &\leq C2^p \int_0^\infty \left| \left\{ x : \left(M_\nu^b\left(\frac{|f|}{\nu}\right)(x)\right)^p > \lambda \right\} \right|_\nu d\lambda \\
&= C2^p \int_X \left(M_\nu^b\left(\frac{|f|}{\nu}\right)(x)\right)^p \nu(x)d\omega(x) \\
&\leq C2^p(p')^p \int_X \frac{|f(x)|^p}{(\nu(x))^p}\nu(x)d\omega(x) \\
&= C2^p(p')^p \int_X |f(x)|^p W(x)d\omega(x).
\end{aligned}
$$

Observação 2.3.5 *Vamos fixar $g \in G$ e sejam $g^{-1}\mathcal{A}_k^b = \{g^{-1}Q : Q \in \mathcal{A}_k^b\}$, $g^{-1}\mathcal{A}^b = \{g^{-1}Q : Q \in \mathcal{A}^b\}$. Então, para cada $-b \leq k \leq b$, $g^{-1}\mathcal{A}_k^b$ é uma partição de X e o Lema 2.1.10 e o Teorema 2.2.11 também são válidos, com as mesmas constantes, quando trocamos $\mathcal{A}_k^b$ por $g^{-1}\mathcal{A}_k^b$. Se f é uma função a valores reais e localmente integrável sobre X, definimos*

$$
\mathcal{M}_d^{b,g} f(x,r) = \sup_{\substack{x\in Q\in g^{-1}\mathcal{A}^b \\ |Q|_\omega \geq \alpha(r)}} \frac{1}{|Q|_\omega} \int_Q |f(y)|d\omega(y).
$$

Então

$$
\mathcal{M}_d^b(R_g f)(gx,r) = \mathcal{M}_d^{b,g} f(x,r)
$$

onde $R_g f(x) = f(g^{-1}x)$. O Teorema 2.3.4 também é válido, com a mesma demonstração, quando trocamos o operador $\mathcal{M}_d^b$ por $\mathcal{M}_d^{b,g}$ e a família $\mathcal{A}^b$ por $g^{-1}\mathcal{A}^b$.

2.4 A limitação de um operador maximal

Definição 2.4.1 *Definimos o operador maximal $\mathcal{M}$ por*

$$\mathcal{M}f(x,r) = \sup_{s \geq r} \frac{1}{|B(x,s)|_\omega} \int_{B(x,s)} |f(y)| d\omega(y)$$

para toda função a valores reais e localmente integrável f sobre X e $(x,r) \in \widehat{X}$. Se $r = 0$ o supremo acima é tomado sobre todo $s > 0$ e $\mathcal{M}f(x,0) = f^*(x)$ é a função maximal de Hardy-Littlewood.

Definição 2.4.2 *Dado um inteiro positivo b e uma função a valores reais e localmente integrável f sobre X, definimos para $(x,r) \in \widehat{X}$,*

$$\mathcal{M}^b f(x,r) = \sup_{\max\{\lambda^{-b-1}, r\} \leq s \leq \lambda^b} \frac{1}{|B(x,s)|_\omega} \int_{B(x,s)} |f(y)| d\omega(y).$$

Definimos $\mathcal{M}^b f(x,r) = 0$ se $r > \lambda^b$ e observamos que $\mathcal{M}^b f(x,r) \uparrow \mathcal{M}f(x,r)$ quando $b \uparrow \infty$ para todo $(x,r) \in \widehat{X}$.

Notação 2.4.3 *Denotaremos*

$$G_b = \{g \in G : \ d(gx, x) \leq \lambda^{b+1} \text{ para todo } x \in X\}.$$

Observação 2.4.4 *Se $d(g\mathbb{1}, \mathbb{1}) = d(gx,x)$ para todo $x \in X$ e para todo $g \in G$, em particular se G é um grupo Abeliano, então*

$$G_b = \{g \in G : \ d(g\mathbb{1}, \mathbb{1}) \leq \lambda^{b+1}\},$$

e assim G_b é relativamente compacto em G e $0 < |G_b|_g < \infty$ (veja Korányi-Vági [8]).

Lema 2.4.5 *Seja b um inteiro positivo, seja $g \in G$, seja $\mathcal{M}_d^{b,g}$ o operador maximal definido na Observação 2.3.5, seja f uma função a valores reais e localmente integrável sobre X e seja $(x,r) \in \widehat{X}$. Então*

$$\mathcal{M}_d^{b,g} f(x,r) \leq C\mathcal{M}f(x,r). \tag{2.8}$$

Se G é um grupo compacto ou Abeliano, então

$$\mathcal{M}^b f(x,r) \leq \frac{C}{|G_b|_g} \int_{G_b} \mathcal{M}_d^{b,g} f(x,r) dg. \tag{2.9}$$

As constantes C em (2.8) e em (2.9) dependem somente de X e se X é compacto podemos trocar G_b por G.

Demonstração. Fixemos $(x,r) \in \widehat{X}$ e $g \in G$. Se $|Q|_\omega < \alpha(r)$ para todo $Q \in \mathcal{A}^b$ tal que $x \in g^{-1}Q$, temos $\mathcal{M}_d^{b,g} f(x,r) = 0$. Para demonstrar (2.8), é suficiente considerar $Q \in \mathcal{A}_k^b$, $-b \leq k \leq b$, tal que $x \in g^{-1}Q$ e $|Q|_\omega \geq \alpha(r)$. Pelo Lema 2.1.10(i) existe $x_Q \in Q$ tal que $Q \subset B(x_Q, \lambda^{k+1})$ e $|B(x_Q, \lambda^{k+1})|_\omega \leq C|Q|_\omega$. Para $t = 2K\lambda^{k+1}$, onde K é a constante da quase-distância, temos $B(g^{-1}x_Q, \lambda^{k+1}) \subset B(x,t)$ e assim

$$\alpha(t) = |B(x,t)|_\omega \geq |B(g^{-1}x_Q, \lambda^{k+1})|_\omega \geq |Q|_\omega \geq \alpha(r).$$

Se a é um inteiro positivo tal que $2^{a-1} < K \leq 2^a$, segue pela Definição 2.1.4(vi) que

$$|B(x,t)|_\omega \leq C_\omega^{a+1}\, |B(x_Q, \lambda^{k+1})|_\omega \leq C_\omega^{a+1}\, C|g^{-1}Q|_\omega.$$

Portanto,

$$\frac{1}{|g^{-1}Q|_\omega} \int_{g^{-1}Q} |f(y)| d\omega(y) \leq \frac{C_\omega^{a+1}\, C}{|B(x,t)|_\omega} \int_{B(x,t)} |f(y)| d\omega(y) \leq C_\omega^{a+1}\, C \mathcal{M} f(x,r)$$

e assim obtemos (2.8).

Fixemos $(x,r) \in \widehat{X}$. Se $r > \lambda^b$ temos $\mathcal{M}^b f(x,r) = 0$ e assim podemos supor $r \leq \lambda^b$. Dado s tal que $\lambda^{-b-1} \leq s \leq \lambda^b$ e $s \geq r$, pelo Lema 2.1.4(iii), existe $Q \in \mathcal{A}_k^b$ para algum $-b \leq k \leq b$ e existe $g \in G_b$, tal que $B(x,s) \subset g^{-1}Q$ e $|Q|_\omega \leq C|B(x,s)|_\omega$. Então

$$\frac{1}{|B(x,s)|_\omega} \int_{B(x,s)} |f(y)| d\omega(y) \leq \frac{C}{|g^{-1}Q|_\omega} \int_{g^{-1}Q} |f(y)| d\omega(y) \leq C \mathcal{M}_d^{b,g} f(x,r)$$

pois $|Q|_\omega \geq |B(x,s)|_\omega \geq \alpha(r)$. Portanto, integrando ambos os membros da desigualdade acima sobre G_b e com respeito à medida de Haar dg, temos que

$$\frac{1}{|B(x,s)|_\omega} \int_{B(x,s)} |f(y)| d\omega(y) \leq \frac{C}{|G_b|_g} \int_{G_b} \mathcal{M}_d^{b,g} f(x,r) dg$$

e assim obtemos (2.9).

Teorema 2.4.6 *Seja G um grupo compacto ou Abeliano. Sejam $1 < p < \infty$, W um peso sobre X tal que $W^{1-p'}d\omega$ é uma medida doubling sobre X e β uma medida não negativa sobre $\widehat{X}$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) Existe uma constante $C > 0$, tal que, para toda $f \in L^p(W)$,

$$\int_{\widehat{X}} [\mathcal{M}f(x,r)]^p d\beta(x,r) \leq C \int_X |f(x)|^p W(x) d\omega(x).$$

(ii) Existe uma constante $C > 0$, tal que, para todas as bolas $B = B(z,t)$, $0 \leq t < \infty$,

$$\int_{\widetilde{B}} [\mathcal{M}(W^{1-p'}\chi_B)(x,r)]^p d\beta(x,r) \leq C \int_B W^{1-p'}(x) d\omega(x) < \infty.$$

Demonstração. Primeiramente vamos demonstrar a implicação $(i) \Rightarrow (ii)$. Suponhamos que existe $B = B(z,t)$, $0 < t < \infty$ tal que

$$\int_B W^{1-p'}(x) d\omega(x) = \infty.$$

Então $W^{-1}\chi_B \notin L^{p'}(W)$ e assim, pelo Lema 2.3.3, existe uma função positiva $f \in L^p(W)$ tal que

$$\int_B f(x) d\omega(x) = \infty.$$

Portanto, dado $(x,r) \in \widehat{X}$, existe $s \geq r$ tal que $B \subset B(x,s)$ e assim $\mathcal{M}f(x,r) = \infty$. Como β é uma medida não negativa, temos uma contradição com a condição (i). Assim

$$\int_B W^{1-p'}(x) d\omega(x) < \infty.$$

Para obter a desigualdade (ii) é suficiente escolher $f(x) = W^{1-p'}(x)\chi_B(x)$ na hipótese.

Vamos demonstrar $(ii) \Rightarrow (i)$. Fixemos um inteiro positivo b, $g \in G$ e $Q \in \mathcal{A}_k^b$, $-b \leq k \leq b$. Então, pelo Lema 2.1.10(i) existe $x_Q \in Q$ tal que $B(x_Q, \lambda^k) \subset Q \subset B(x_Q, \lambda^{k+1})$. Sejam $B = B(g^{-1}x_Q, \lambda^{k+1})$, $Q' = g^{-1}Q$, $\nu = W^{1-p'}$ e seja a um inteiro positivo tal que $2^{a-1} < \lambda \leq 2^a$. Como ν é uma medida doubling, existe uma constante positiva C_ν, tal que

$$|B|_\nu \leq |B(g^{-1}x_Q, 2^a\lambda^k)|_\nu \leq C_\nu^a |B(g^{-1}x_Q, \lambda^k)|_\nu \leq C_1 |Q'|_\nu.$$

Então pela hipótese e por (2.8) obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\widetilde{Q'}} [\mathcal{M}_d^{b,g}(W^{1-p'}\chi_{Q'})(x,r)]^p d\beta(x,r) &\leq C_2 \int_{\widetilde{B}} [\mathcal{M}(\nu\chi_B)(x,r)]^p d\beta(x,r)\\ &\leq C_3|B|_\nu\\ &\leq C_4 \int_{Q'} W^{1-p'}(x) d\omega(x).\end{aligned}$$

Como a constante C_4 depende somente de p, W and β, então pelo Teorema 2.3.4 e pela Observação 2.3.5, existe uma constante C_5 tal que,

$$\int_{\widehat{X}} [\mathcal{M}_d^{b,g} f(x,r)]^p d\beta(x,r) \leq C_5 \int_X |f(x)|^p W(x) d\omega(x) \tag{2.10}$$

para toda $f \in L^p(W)$ e todo $g \in G$. Então, segue por (2.9), (2.10) e pela desigualdade de Jensen que

$$\begin{aligned}\int_{\widehat{X}} [\mathcal{M}^b f(x,r)]^p d\beta(x,r) &\leq \int_{\widehat{X}} \left(\frac{C_6}{|G_b|_g}\int_{G_b} \mathcal{M}_d^{b,g} f(x,r) dg\right)^p d\beta(x,r)\\ &\leq C_6^p \int_{G_b}\int_{\widehat{X}} [\mathcal{M}_d^{b,g} f(x,r)]^p d\beta(x,r)\frac{dg}{|G_b|_g}\\ &\leq C_6^p C_5 \int_X |f(x)|^p W(x) d\omega(x).\end{aligned}$$

O resultado segue agora pelo Teorema da Convergência Monótona.

Observação 2.4.7 **(a)** *Para $W \equiv 1$, a condição (ii) do Teorema 2.4.6 é dada por*

$$\int_{\widetilde{B}} [\mathcal{M}(\chi_B)(x,r)]^p d\beta(x,r) \leq C|B|_\omega \tag{2.11}$$

para toda bola B. Fixemos $B = B(z,t)$, $0 < t < \infty$. Então, segue como na demonstração da desigualdade (2.8) do Lema 2.4.5 que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$C \leq \mathcal{M}(\chi_B)(x,r) \leq 1, \tag{2.12}$$

para todo $(x,r) \in \widetilde{B}$. Portanto, de (2.11) obtemos

$$C^p|\widetilde{B}|_\beta \leq \int_{\widetilde{B}} [\mathcal{M}(\chi_B)(x,r)]^p d\beta(x,r) \leq C|B|_\omega.$$

Então, a condição (2.11) implica a condição:

$$|\widetilde{B}|_\beta \leq C|B|_\omega \tag{2.13}$$

para uma constante $C > 0$ e todas as bolas B. Mas, da condição (2.13) obtemos

$$\int_{\widetilde{B}} [\mathcal{M}(\chi_B)(x,r)]^p d\beta(x,r) \leq |\widetilde{B}|_\beta \leq C|B|_\omega,$$

e portanto as condições (2.11) and (2.13) são equivalentes. A condição (2.13) é a condição de Carleson para espaços homogêneos X (veja Ruiz-Torrea [13]).

(b) *Sejam $B = B(z,t)$, $0 < t < \infty$ e $\nu = W^{1-p'}$. Então*

$$C\frac{|B|_\nu}{|B|_\omega} \leq \mathcal{M}(\nu\chi_B)(x,r)$$

para todo $(x,r) \in \widetilde{B}$. Portanto, da condição (ii) do Teorema 2.4.6 obtemos

$$\begin{aligned}
|\widetilde{B}|_\beta^{1/p} &= \left(\frac{|B|_\omega}{|B|_\nu}\right)\left[\int_{\widetilde{B}}\left(\frac{|B|_\nu}{|B|_\omega}\right)^p d\beta(x,r)\right]^{1/p} \\
&\leq C\left(\frac{|B|_\omega}{|B|_\nu}\right)\left[\int_{\widetilde{B}}[\mathcal{M}(\nu\chi_B)(x,r)]^p d\beta(x,r)\right]^{1/p} \\
&\leq C'\left(\frac{|B|_\omega}{|B|_\nu}\right)|B|_\nu^{1/p}.
\end{aligned}$$

Então, a condição (ii) do Teorema 2.4.6 implica a condição:

$$\frac{|\widetilde{B}|_\beta^{1/p}}{|B|_\omega}\left(\int_B W^{1-p'}(x)d\omega(x)\right)^{1/p'} \leq C \tag{2.14}$$

para uma constante $C > 0$ e todas as bolas B. Foi demonstrado em Ruiz-Torrea [13] que a condição (2.14) é uma condição necessária e suficiente para que o operador $\mathcal{M}$ seja limitado de $L^p(X, W(x)d\omega(x))$ em fraco-$L^p(\widehat{X}, \beta)$.

2.5 A limitação do operador integral de Poisson

Observação 2.5.1 *Identificamos $S^n \times [0,1)$ com a bola $\mathbb{B} = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : |y| < 1\}$ usando a aplicação $(y,r) \mapsto ry$, como foi feito na Observação 1.2.14.*

Vamos considerar a distância d sobre S^n dada por $d(x,y) = |x-y|$, para todos $x,\ y \in S^n$, σ denotará a medida de Lebesgue normalizada sobre S^n e $h : [1-\sqrt{2}, 1) \longrightarrow (0,2]$ será a função definida em 1.1.1.

Fixado n, $\xi : [0,\pi]^{n-1} \times [0, 2\pi] \to S^n$ denotará a aplicação ξ_n dada na Definição 1.1.2.

Definição 2.5.2 *Se f é uma função real e integrável sobre S^n definimos*

$$\overline{\mathcal{M}}f(y) = \mathcal{M}f(y', h(|y|)), \qquad y \in I\!\!R^{n+1},\ 0 < |y| \leq 1,\ y' = y/|y|.$$

Definição 2.5.3 *O núcleo de Poisson sobre a esfera S^n é definido por*

$$P_t(x,y) = P_{ty}(x) = c_n \frac{1-t^2}{|ty-x|^{n+1}},$$

para $0 \leq t < 1$ e $x,\ y \in S^n$.

Observação 2.5.4 *Observamos que $P_t(x,y) = P_t(y,x)$, para $x,\ y \in S^n$ e $0 \leq t < 1$. De fato, temos que*

$$P_t(x,y) = c_n\ \frac{1-t^2}{|ty-x|^{n+1}} = c_n \frac{1-t^2}{((1-t)^2 + t|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}} = P_t(y,x).$$

Definição 2.5.5 *Para uma função real e integrável f denotamos por $u_f(ty)$ a integral de Poisson*

$$u_f(ty) = \int_{S^n} P_{ty}(x) f(x) d\sigma(x), \qquad 0 \leq t < 1,\ y \in S^n,$$

e definimos a função maximal u_f^* por

$$u_f^*(ty) = \sup_{0 \leq s \leq t} |u_f(sy)|, \qquad 0 \leq t < 1,\ y \in S^n.$$

Definição 2.5.6 *Se B é a bola aberta $B(z,t) = \{x \in S^n \ :\ |x-z| < t\},\ \ 0 < t \leq 2$, definimos*

$$\bar{B} = \{sx\ :\ h^{-1}(t) \leq s \leq 1,\ x \in B\} \ \text{ se } \ 0 < t \leq \sqrt{2};$$

$$\bar{B} = \{sx\ :\ 0 \leq s < 1,\ x \in B\} \ \text{ se } \ \sqrt{2} \leq t \leq 2.$$

Observamos que $\bar{B}$ é um cone truncado contido na bola $I\!\!B = \{y \in I\!\!R^{n+1}\ :\ |y| < 1\}$ se $0 < t \leq \sqrt{2}$ e um cone se $\sqrt{2} \leq t \leq 2$.

Lema 2.5.7 *Dados $y \in \mathbb{B}$ e $v \in SO(n+1)$, temos*

$$u_{f\circ v}(v^{-1}y) = u_f(y), \tag{2.15}$$

$$\overline{\mathcal{M}}(f\circ v)(v^{-1}y) = \overline{\mathcal{M}}f(y). \tag{2.16}$$

Demonstração. Dados $y \in \mathbb{B}$ e $v \in SO(n+1)$, temos

$$\begin{aligned} u_{f\circ v}(v^{-1}y) &= \int_{S^n} P_{v^{-1}y}(x)(f\circ v)(x)d\sigma(x) \\ &= \int_{v(S^n)} P_{v^{-1}y}(v^{-1}z)(f\circ v)(v^{-1}z)d\sigma(z) \\ &= \int_{S^n} c_n\,\frac{1-|v^{-1}y|^2}{|v^{-1}y-v^{-1}z|^{n+1}}f(z)d\sigma(z) \\ &= \int_{S^n} c_n\,\frac{1-|y|^2}{|y-z|^{n+1}}f(z)d\sigma(z) \\ &= \int_{S^n} P_y(z)f(z)d\sigma(z) \\ &= u_f(y), \end{aligned}$$

o que demonstra (2.15). Para demonstrar (2.16), basta observar que, se $y = ry' \in \mathbb{B}$, com $0 \le r < 1$ e $y' \in S^n$, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{|B(v^{-1}y',s)|}\int_{B(v^{-1}y',s)} |(f\circ v)(z)|d\sigma(z) &= \frac{1}{|B(y',s)|}\int_{B(y',s)} |(f\circ v)(v^{-1}x)|d\sigma(x) \\ &= \frac{1}{|B(y',s)|}\int_{B(y',s)} |f(x)|d\sigma(x). \end{aligned}$$

Tomando o supremo sobre $s \ge h(r)$, temos (2.16).

Observação 2.5.8 *Para todo $1-\sqrt{2} \le r < 1$, temos que, se $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$, então*

$$B(\mathbb{1}, h(r)) = \{\xi(\theta) : 0 \le \theta_1 < \operatorname{arccos} r(2-r)\}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} B(\mathbb{1}, h(r)) &= B(\mathbb{1}, \sqrt{2}(1-r)) \\ &= \{y \in S^n : |y-\mathbb{1}| < \sqrt{2}(1-r)\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \{y \in S^n : (1-r)^2 > 1 - y \cdot \mathbb{1}\} \\
&= \{(y_1, \ldots, y_{n+1}) \in S^n : (1-r)^2 > 1 - y_1\} \\
&= \{\xi(\theta) : (1-r)^2 > 1 - \cos\theta_1\} \\
&= \{\xi(\theta) : 0 \leq \theta_1 < \arccos r(2-r)\}.
\end{aligned}
$$

Observação 2.5.9 *Para $y \in S^n$ e $f \in L^1(S^n)$ definimos $u_f^*(y) = \sup_{0 \leq t < 1} |u_f(ty)|$. Em Rauch [11] está demonstrado que*

$$u_f^*(y) \leq C_n \overline{\mathcal{M}} f(y), \quad y \in S^n, \ f \in L^1(S^n).$$

A desigualdade do próximo lema generaliza a desigualdade acima.

Lema 2.5.10 *Existe uma constante $C > 0$ tal que, para toda função real e integrável f sobre S^n e todo $y \in \mathbb{B}$, $0 < |y| < 1$, temos*

$$u_f^*(y) \leq C \overline{\mathcal{M}} f(y). \tag{2.17}$$

Demonstração. Podemos assumir $y = r\mathbb{1} = r(1, 0, \ldots, 0)$, $0 < r < 1$. De fato, suponhamos que (2.17) seja válido para toda função real e integrável f e todo $y = r\mathbb{1}$, $0 < r < 1$. Então, dado $y \in \mathbb{B}$, $0 < |y| < 1$, existem $v \in SO(n+1)$ e $0 < r < 1$ tais que $y = v(r\mathbb{1})$. Assim, pelo Lema 2.5.7, temos

$$|u_f(y)| = |u_{f \circ v}(v^{-1}y)| = |u_{f \circ v}(r\mathbb{1})| \leq C\overline{\mathcal{M}}(f \circ v)(r\mathbb{1}) = C\overline{\mathcal{M}}(f \circ v)(v^{-1}y) = C\overline{\mathcal{M}} f(y).$$

Vamos denotar $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$, $\theta' = (\theta_2, \ldots, \theta_n)$, $\omega(\theta') = \operatorname{sen}^{n-2}\theta_2 \ldots \operatorname{sen}\theta_{n-1}$ e

$$p(\theta_1, r) = P_r(\xi(\theta), \mathbb{1}) = c_n \frac{1 - r^2}{(1 - 2r\cos\theta_1 + r^2)^{(n+1)/2}}. \tag{2.18}$$

Então

$$
\begin{aligned}
u_f(r\mathbb{1}) &= \int_{S^n} P_r(x, \mathbb{1}) f(x) d\sigma(x) \\
&= \int_0^{\pi} d\theta_1 \ldots \int_0^{2\pi} p(\theta_1, r) f(\xi(\theta)) \operatorname{sen}^{n-1}\theta_1 \ \omega(\theta') d\theta_n.
\end{aligned}
$$

Se $0 \leq r \leq 1/2$, temos que $p(\theta_1, r) \leq 2^{n+1} c_n$ e assim

$$|u_f(r\mathbb{1})| \leq 2^{n+1} c_n \int_{S^n} |f(x)| d\sigma(x) \leq 2^{n+1} c_n \, \omega_n \overline{\mathcal{M}} f(r\mathbb{1}).$$

Agora, vamos supor $1/2 \leq r < 1$. Se $m(r) = \arccos r(2-r)$ (veja Observação 2.5.8), então, integrando por partes com respeito a θ_1, obtemos

$$\begin{aligned}
I_r &= \left| \int_{S^n - B(\mathbb{1}, h(r))} P_r(x, \mathbb{1}) f(x) d\sigma(x) \right| \\
&= \left| \int_{m(r)}^{\pi} p(\theta_1, r) \mathrm{sen}^{n-1}\, \theta_1 d\theta_1 \cdots \int_0^{2\pi} f(\xi(\theta)) \omega(\theta') d\theta_n \right| \\
&\leq \left| p(\pi, r) \int_0^{\pi} d\theta_1 \dots \int_0^{2\pi} f(\xi(\theta)) \mathrm{sen}^{n-1}\, \theta_1 \; \omega(\theta') d\theta_n \right. \\
&- p(m(r), r) \int_0^{m(r)} d\theta_1 \dots \int_0^{2\pi} f(\xi(\theta)) \mathrm{sen}^{n-1}\, \theta_1 \; \omega(\theta') d\theta_n \\
&- \left. \int_{m(r)}^{\pi} \frac{\partial p(\theta_1, r)}{\partial \theta_1} \left[\int_0^{\theta_1} \left(\int_0^{\pi} d\theta_2 \dots \int_0^{2\pi} f(\xi(t, \theta')) \mathrm{sen}^{n-1}\, t \; \omega(\theta') d\theta_n \right) dt \right] d\theta_1 \right| \\
&\leq p(\pi, r) \int_0^{\pi} d\theta_1 \dots \int_0^{2\pi} |f(\xi(\theta))| \mathrm{sen}^{n-1}\, \theta_1 \; \omega(\theta') d\theta_n \\
&+ p(m(r), r) \int_0^{m(r)} d\theta_1 \int_0^{\pi} d\theta_2 \dots \int_0^{2\pi} |f(\xi(\theta))| \mathrm{sen}^{n-1}\, \theta_1 \; \omega(\theta') d\theta_n \\
&+ \int_{m(r)}^{\pi} \left| \frac{\partial p(\theta_1, r)}{\partial \theta_1} \right| \left[\int_0^{\theta_1} \left(\int_0^{\pi} d\theta_2 \dots \int_0^{2\pi} |f(\xi(t, \theta'))| \mathrm{sen}^{n-1}\, t \; \omega(\theta') d\theta_n \right) dt \right] d\theta_1 \\
&= I_r^1 + I_r^2 + I_r^3.
\end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned}
I_r^1 &= p(\pi, r) \int_0^{\pi} d\theta_1 \dots \int_0^{2\pi} |f(\xi(\theta))| \mathrm{sen}^{n-1}\, \theta_1 \; \omega(\theta') d\theta_n \\
&= c_n \frac{1-r}{(1+r)^n} \int_{S^n} |f(x)| d\sigma(x) \\
&\leq c_n \, \omega_n \, \overline{\mathcal{M}} f(r\mathbb{1}).
\end{aligned}$$

Pela Observação 1.1.5, temos

$$\frac{2^{\frac{3n}{2}-1} \omega_{n-1}}{n \pi^{n-1}} (1-r)^n \leq |B(\mathbb{1}, h(r))| \leq \frac{2^{\frac{3n}{2}} \omega_{n-1}}{n} (1-r)^n.$$

Então para $1/2 \leq r < 1$, segue que

$$I_r^2 = p(m(r), r) \int_0^{m(r)} d\theta_1 \int_0^{\pi} d\theta_2 \dots \int_0^{2\pi} |f(\xi(\theta))| \mathrm{sen}^{n-1}\, \theta_1 \; \omega(\theta') d\theta_n$$

$$\begin{aligned}
&= c_n \frac{1-r^2}{(2r^3-3r^2+1)^{\frac{n+1}{2}}} \int_{B(\mathbb{1},h(r))} \mid f(x) \mid d\sigma(x) \\
&= c_n \frac{(1-r)(1+r)}{((1-r)^2(1+2r))^{\frac{n+1}{2}}} \int_{B(\mathbb{1},h(r))} \mid f(x) \mid d\sigma(x) \\
&= c_n \frac{1+r}{(1-r)^n} \frac{1}{(1+2r)^{\frac{n+1}{2}}} \int_{B(\mathbb{1},h(r))} \mid f(x) \mid d\sigma(x) \\
&\leq c_n \frac{2}{(1-r)^n} \int_{B(\mathbb{1},h(r))} \mid f(x) \mid d\sigma(x) \\
&\leq 2c_n \frac{2^{\frac{3n}{2}}\omega_{n-1}}{n|B(\mathbb{1},h(r))|} \int_{B(\mathbb{1},h(r))} |f(x)| d\sigma(x) \\
&\leq c_n \frac{2^{\frac{3n}{2}+1}\omega_{n-1}}{n} \overline{\mathcal{M}} f(r\mathbb{1}).
\end{aligned}$$

Observamos que para todo $0 < r < 1$ temos (veja Stein-Weiss [17, pag. 43])

$$\begin{aligned}
1 &= \int_{S^n} P_r(x,\mathbb{1}) d\sigma(x) \\
&= \int_0^\pi d\theta_1 \cdots \int_0^{2\pi} p(\theta_1,r) \operatorname{sen}^{n-1}\theta_1 \omega(\theta') d\theta_n \\
&= \left(\int_0^\pi p(\theta_1,r)\operatorname{sen}^{n-1}\theta_1 d\theta_1\right)\left(\int_0^\pi d\theta_2 \cdots \int_0^{2\pi} \omega(\theta')d\theta_n\right) \\
&= \omega_{n-1} \int_0^\pi p(\theta_1,r)\operatorname{sen}^{n-1}\theta_1 d\theta_1,
\end{aligned}$$

por 1.1.4. Portanto,

$$\int_0^\pi p(\theta_1,r)\operatorname{sen}^{n-1}\theta_1 d\theta_1 = \frac{1}{\omega_{n-1}}. \tag{2.19}$$

Usando integração por partes, (2.19) e observando que

$$\frac{\partial p(\theta_1,r)}{\partial\theta_1} \leq 0 \quad \text{se} \quad 0 \leq \theta_1 \leq \pi \quad \text{e} \quad 0 \leq r < 1,$$

temos

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \left|\frac{\partial p(\theta_1,r)}{\partial\theta_1}\right| \left(\int_0^{\theta_1} \operatorname{sen}^{n-1} t\, dt\right) d\theta_1 &= -p(\pi,r)\int_0^\pi \operatorname{sen}^{n-1} t dt + \int_0^\pi p(\theta_1,r)\operatorname{sen}^{n-1}\theta_1 d\theta_1 \\
&= -p(\pi,r)\int_0^\pi \operatorname{sen}^{n-1} t dt + \frac{1}{\omega_{n-1}} \\
&= \frac{1}{\omega_{n-1}} - \frac{1}{\omega_n}\frac{1-r^2}{(1+r)^{n+1}}\frac{\omega_n}{\omega_{n-1}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\omega_{n-1}}\left(1 - \frac{1-r}{(1+r)^n}\right) \\
&\leq \frac{1}{\omega_{n-1}}.
\end{aligned}
$$

Como

$$
|B(\mathbb{1}, h(r))| = \omega_{n-1}\int_0^{m(r)} \operatorname{sen}^{n-1}\theta_1 d\theta_1,
$$

(veja Observação 1.1.5), temos

$$
\begin{aligned}
I_r^3 &= \int_{m(r)}^{\pi}\left|\frac{\partial p(\theta_1, r)}{\partial\theta_1}\right|\left[\int_0^{\theta_1}\left(\int_0^{\pi} d\theta_2 \ldots \int_0^{2\pi}|f(\xi(t,\theta'))|\operatorname{sen}^{n-1} t\ \omega(\theta')d\theta_n\right) dt\right] d\theta_1 \\
&= \int_{m(r)}^{\pi}\left|\frac{\partial p(\theta_1, r)}{\partial\theta_1}\right|\left(\int_0^{\theta_1}\operatorname{sen}^{n-1} t\ dt\right)\left(\int_0^{\theta_1}\operatorname{sen}^{n-1} t\ dt\right)^{-1}\cdot \\
&\quad \left[\int_0^{\theta_1}\left(\int_0^{\pi} d\theta_2 \ldots \int_0^{2\pi}|f(\xi(t,\theta'))|\operatorname{sen}^{n-1} t\ \omega(\theta')d\theta_n\right) dt\right] d\theta_1 \\
&= \omega_{n-1}\int_{m(r)}^{\pi}\left|\frac{\partial p(\theta_1, r)}{\partial\theta_1}\right|\left(\int_0^{\theta_1}\operatorname{sen}^{n-1} t\ dt\right)\cdot \\
&\quad \left(\frac{1}{|B(\mathbb{1}, h(m^{-1}(\theta_1)))|}\int_{B(\mathbb{1}, h(m^{-1}(\theta_1)))}|f(x)|d\sigma(x)\right) d\theta_1 \\
&\leq \omega_{n-1}\int_{m(r)}^{\pi}\left|\frac{\partial p(\theta_1, r)}{\partial\theta_1}\right|\left(\int_0^{\theta_1}\operatorname{sen}^{n-1} t\ dt\right)\overline{\mathcal{M}}f(r\mathbb{1})d\theta_1 \\
&\leq \omega_{n-1}\overline{\mathcal{M}}f(r\mathbb{1})\int_0^{\pi}\left|\frac{\partial p(\theta_1, r)}{\partial\theta_1}\right|\left(\int_0^{\theta_1}\operatorname{sen}^{n-1} t\ dt\right) d\theta_1 \\
&\leq \overline{\mathcal{M}}f(r\mathbb{1}).
\end{aligned}
$$

Portanto, existe uma constante $D > 0$, tal que

$$
I_r \leq I_r^1 + I_r^2 + I_r^3 \leq D\overline{\mathcal{M}}f(r\mathbb{1})
$$

para todo $1/2 \leq r < 1$. Conseqüentemente, como $P_r(\xi(\theta), \mathbb{1}) = p(\theta_1, r) \leq p(0, r)$ para todo $0 \leq \theta_1 \leq \pi$, temos

$$
\begin{aligned}
|u_f(r\mathbb{1})| &= \left|\int_{S^n} P_r(x, \mathbb{1})f(x)d\sigma(x)\right| \\
&\leq \left|\int_{B(\mathbb{1}, h(r))} P_r(x, \mathbb{1})f(x)d\sigma(x)\right| + \left|\int_{S^n - B(\mathbb{1}, h(r))} P_r(x, \mathbb{1})f(x)d\sigma(x)\right| \\
&\leq p(0, r)\int_{B(\mathbb{1}, h(r))}|f(x)|d\sigma(x) + I_r
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq 2c_n \frac{1}{(1-r)^n} \int_{B(\mathbb{1},h(r))} |f(x)| d\sigma(x) + I_r \\
&\leq c_n \frac{2^{\frac{3n}{2}+1}\omega_{n-1}}{n} \frac{1}{|B(\mathbb{1},h(r))|} \int_{B(\mathbb{1},h(r))} |f(x)| d\sigma(x) + D\overline{\mathcal{M}}f(r\mathbb{1}) \\
&\leq c_n \frac{2^{\frac{3n}{2}+1}\omega_{n-1}}{n} \overline{\mathcal{M}}f(r\mathbb{1}) + D\overline{\mathcal{M}}f(r\mathbb{1}) \\
&= C\overline{\mathcal{M}}f(r\mathbb{1}).
\end{aligned}
$$

Lema 2.5.11 *Existe uma constante $C > 0$, dependendo somente de n, tal que*

$$P_{ry'}(x) \geq \frac{C}{|B(y', h(r))|},$$

para todos $0 \leq r < 1$, $y' \in S^n$ e $x \in B(y', h(r))$.

Demonstração. Primeiramente observamos que

$$B(y', h(r)) = \{x \in S^n : |y' - x| < \sqrt{2}(1-r)\} = \{x \in S^n : (1-r)^2 > 1 - x \cdot y'\}.$$

Então se $0 \leq r < 1$, $y' \in S^n$ e $x \in B(y', h(r))$ temos que $(1-r)^2 > 1 - x \cdot y'$. Logo

$$
\begin{aligned}
1 - 2rx \cdot y' + r^2 &= (1-r)^2 + 2r(1 - x \cdot y') \\
&\leq (1-r)^2 + 2r(1-r)^2 \\
&< 3(1-r)^2.
\end{aligned}
$$

Portanto, pela Observação 1.1.5, temos

$$
\begin{aligned}
P_{ry'}(x) &= c_n \frac{1-r^2}{(1 - 2rx \cdot y' + r^2)^{\frac{n+1}{2}}} \\
&> c_n \frac{(1-r)(1+r)}{(3(1-r)^2)^{\frac{n+1}{2}}} \\
&= \frac{c_n}{3^{\frac{n+1}{2}}} \frac{(1+r)}{(1-r)^n} \\
&> \frac{c_n}{3^{\frac{n+1}{2}}} \frac{1}{(1-r)^n} \\
&\geq C \frac{1}{|B(y', h(r))|}.
\end{aligned}
$$

Teorema 2.5.12 *Sejam $1 < p < \infty$, W um peso sobre S^n tal que $W^{1-p'}d\sigma$ é uma medida doubling sobre S^n e μ uma medida de Borel não negativa sobre $\mathbb{B}$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) Existe uma constante $C > 0$, tal que, para toda $g \in L^p(W)$,

$$\int_{\mathbb{B}} [u_g^*(y)]^p d\mu(y) \leq C \int_{S^n} |g(x)|^p W(x) d\sigma(x).$$

(ii) Existe uma constante $C > 0$, tal que, para todas as bolas $B = B(z,t)$, $0 < t \leq 2$,

$$\int_{\tilde{B}} [u^*_{W^{1-p'}\chi_B}(y)]^p d\mu(y) \leq C \int_B W^{1-p'}(x) d\sigma(x) < \infty.$$

Demonstração. A demonstração de $(i) \Rightarrow (ii)$ é exatamente como a demonstração de $(i) \Rightarrow (ii)$ no Teorema 2.4.6

Vamos demonstrar $(ii) \Rightarrow (i)$. Seja g uma função a valores reais positiva e localmente integrável sobre S^n. Pelo Lema 2.5.11, existe uma constante $C > 0$, dependendo somente de n, tal que

$$P_{ry'}(x) \geq \frac{C}{|B(y', h(r))|}$$

para todos $0 \leq r < 1$, $y' \in S^n$ e $x \in B(y', h(r))$. Portanto, multiplicando ambos os membros da desiguladade acima por $W^{1-p'}(x)\chi_B(x)$ e integrando sobre $B(y', h(r))$, temos

$$u_{W^{1-p'}\chi_B}(ry') \geq \frac{C}{|B(y', h(r))|} \int_{B(y',h(r))} W^{1-p'}(x)\chi_B(x) d\sigma(x)$$

e assim

$$u^*_{W^{1-p'}\chi_B}(ry') \geq C\overline{\mathcal{M}}(W^{1-p'}\chi_B)(ry') \tag{2.20}$$

Consideremos a função $k : \mathbb{B} \to \widehat{S^n}$ definida por $k(x) = (x/|x|, h(|x|))$, $x \neq 0$, $k(0) = (\mathbb{1}, 0)$, $\mathbb{1} = (1, 0, \ldots, 0)$. Seja β a medida imagem de μ por k, isto é, $|A|_\beta = |k^{-1}(A)|_\mu$. Então, dada uma bola B em S^n, por (2.20) e de (ii), temos

$$\begin{aligned} \int_{\widetilde{B}} [\mathcal{M}(W^{1-p'}\chi_B)(x,r)]^p d\beta(x,r) &= \int_{\tilde{B}} [\overline{\mathcal{M}}(W^{1-p'}\chi_B)(y)]^p d\mu(y) \\ &\leq C' \int_{\tilde{B}} [u^*_{W^{1-p'}\chi_B}(y)]^p d\mu(y) \\ &\leq C'' \int_B W^{1-p'}(x) d\sigma(x), \end{aligned}$$

e, portanto, pelo Lema 2.5.10 e pelo Teorema 2.4.6 aplicado à $X = S^n$, temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{B}}[u_g^*(y)]^p d\mu(y) &\leq C\int_{\mathbb{B}}[\overline{\mathcal{M}}g(y)]^p d\mu(y)\\ &\leq \int_{\widehat{S^n}}[\mathcal{M}g(x,r)]^p d\beta(x,r)\\ &\leq C\int_{S^n}[g(x)]^p W(x)d\sigma(x),\end{aligned}$$

o que demonstra o teorema.

Corolário 2.5.13 *Sejam $1 < p < \infty$, W um peso sobre S^n tal que $W^{1-p'}d\sigma$ é uma medida doubling sobre S^n e μ uma medida de Borel não negativa sobre $\mathbb{B}$. Se existe uma constante $C > 0$ tal que, para todas as bolas $B = B(z,t)$, $0 < t \leq 2$,*

$$\int_{\bar{B}}[u^*_{W^{1-p'}\chi_B}(y)]^p d\mu(y) \leq C\int_B W^{1-p'}(x)d\sigma(x) < \infty, \tag{2.21}$$

então existe uma constante $C > 0$, tal que, para toda $g \in L^p(W)$,

$$\int_{\mathbb{B}}[u_g(y)]^p d\mu(y) \leq C\int_{S^n}|g(x)|^p W(x)d\sigma(x). \tag{2.22}$$

Demonstração. A demonstração segue diretamente de $(ii) \Rightarrow (i)$ no Teorema 2.5.12, observando que para todo $y \in \mathbb{B}$ temos $u_g(y) \leq u_g^*(y)$.

Observação 2.5.14 *Sejam $B = B(y,h(k))$ e $B' = B(y,2h(k))$. Se $x = rx' \in \bar{B}$, então $x' \in B$ e $r \geq k$ e assim temos que $B(x',h(r)) \subset B'$. Portanto, pelo Lema 2.5.11, temos*

$$\begin{aligned}u_{\chi_{B'}}(x) &\geq \frac{C}{|B(x',h(r))|}\int_{B(x',h(r))}\chi_{B'}(y)d\sigma(y)\\ &= \frac{C}{|B(x',h(r))|}|B(x',h(r))\bigcap B'|\\ &\geq C.\end{aligned} \tag{2.23}$$

Observação 2.5.15 *Por (2.20) e pelo Lema 2.5.10, temos que existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que para todo $y \in \mathbb{B}$ e toda bola $B \subset S^n$,*

$$C_1\overline{\mathcal{M}}\chi_B(y) \leq u^*_{\chi_B}(y) \leq C_2\overline{\mathcal{M}}\chi_B(y).$$

Então, por (2.12) segue que, para todo $y \in \mathbb{B}$,

$$C_1 C \leq u^*_{\chi_B}(y) \leq C_2. \tag{2.24}$$

Então, exatamente como foi feito na Observação 2.4.7(a), temos que a condição (2.21) para $W \equiv 1$ é equivalente à condição de Carleson para a medida μ sobre $\mathbb{B}$, isto é,

$$|\bar{B}|_\mu \leq C|B|,$$

para toda bola $B \in S^n$.

Corolário 2.5.16 *Sejam $1 < p < \infty$ e μ uma medida de Borel não negativa sobre $\mathbb{B}$. Então existe uma constante $C > 0$, tal que, para toda $g \in L^p(S^n)$,*

$$\int_{\mathbb{B}} [u_g(y)]^p d\mu(y) \leq C \int_{S^n} |g(x)|^p d\sigma(x), \tag{2.25}$$

se e somente se μ é uma medida de Carleson, isto é, se e somente se

$$|\bar{B}|_\mu \leq C|B|, \tag{2.26}$$

para todas as bolas $B = B(z,t)$, $0 < t < 2$.

Demonstração. Vamos supor que existe uma constante $C > 0$ tal que para toda $g \in L^p(S^n)$ temos (2.25). Sejam B e B' como na Observação 2.5.14. Então, por (2.23), temos que

$$(C)^p \leq [u_{\chi_{B'}}(x)]^p,$$

para todo $x \in \bar{B}$. Integrando ambos os membros da desigualdade acima sobre $\bar{B}$ com respeito à medida μ, por (2.25) e utilizando o fato que a medida de Lebesgue sobre S^n é doubling, temos

$$\begin{aligned}
(C)^p |\bar{B}|_\mu &\leq \int_{\bar{B}} [u_{\chi_{B'}}(x)]^p d\mu(x) \\
&\leq \int_{\mathbb{B}} [u_{\chi_{B'}}(x)]^p d\mu(x) \\
&\leq C' \int_{S^n} [\chi_{B'}(y)]^p d\sigma(y) \\
&= C'|B'| \\
&\leq C''|B|,
\end{aligned}$$

que é (2.26). Agora, vamos supor (2.26). Pela Observação 2.5.15, temos que (2.26) é equivalente a (2.21) para $W \equiv 1$. Então, pelo Corolário 2.5.13, temos (2.25).

Observação 2.5.17 *Seja (X, d, μ) um espaço de tipo homogêneo e seja D um subconjunto aberto de X. Para cada $x \in X$, seja $t(x) = d(x, \partial D)$ e seja $a(x) \in \partial D$ tal que $d(x, a(x)) \leq 3/2\ t(x)$. Seja $\mathcal{B}$ o conjunto de todas as bolas $B = B(z, r) = \{y \in X : d(z, y) < r\}$, com $z \in \partial D$ e $r > 0$. Suponhamos que φ seja uma função não negativa, definida sobre os borelianos de X e satisfazendo as seguintes condições:*

(i) existe $c_0 > 0$ tal que se $B,\ B' \in \mathcal{B}$ e $B' \subset B$ então $\varphi(B') \leq c_0\, \varphi(B)$.

(ii) existe $c_0 > 0$ tal que $\varphi(B(z, 2r)) \leq c_0\, \varphi(B(z, r))$, para todo $z \in \partial D$ e todo $r > 0$.

Se ν é uma medida doubling sobre ∂D, definimos

$$M_\varphi f(x) = \sup_{r > t(x)} \frac{1}{\varphi(B)} \int_{\breve{B}} |f(y)| d\nu(y),$$

onde $B = B(a(x), r) = \{y \in X : d(y, a(x)) < r\}$ e $\breve{B} = B \bigcap \partial D$. O resultado seguinte está demonstrado em Zani [18].

Teorema 2.5.18 *Sejam $1 < p < q < \infty$. Sejam V e W pesos definidos sobre D e ∂D respectivamente. Suponha que $W^{1-p'}(x)d\nu(x)$ seja uma medida doubling. Então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\left(\int_D [M_\varphi f(x)]^q V(x) d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_{\partial D} |f(x)|^p W(x) d\nu(x) \right)^{\frac{1}{p}}$$

para toda função real e mensurável f, se e somente se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\frac{1}{\varphi(B)} \left(\int_{\widehat{B}} V(x) d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\breve{B}} W^{1-p'}(x) d\nu(x) \right)^{\frac{1}{p'}} \leq C,$$

para todas as bolas $B = B(z, r)$ com $z \in \partial D$ e $r > 0$, $\widehat{B} = B \bigcap D$ e $\breve{B} = B \bigcap \partial D$.

Seja, agora, (X, d, ω) um espaço de tipo homogêneo e seja $D = X \times (0, \infty)$. Então $\partial D = X \times \{0\}$, que identificaremos com X. Vamos considerar a quase-distância $\widehat{d}$ sobre $\widehat{X} = X \times [0, \infty)$ por

$$\widehat{d}((x, t), (y, s)) = \max\{d(x, y), |t - s|\},$$

e $\widehat{\omega}$ a medida produto sobre $\widehat{X}$ dada por $d\widehat{\omega}(x,t) = d\omega(x)dt$. Então $(\widehat{X}, \widehat{d}, \widehat{\omega})$ é um espaço de tipo homogêneo. Para cada $(x,s) \in \widehat{X}$, sejam $t(x,s) = d((x,s), X) = s$ e $a(x,s) = (x,0)$. Seja φ a função definida sobre os borelianos de $\widehat{X}$ dada por $\varphi(B) = |B \bigcap X|_\omega$. Então, para cada função f a valores reais localmente integrável sobre X e $(x,r) \in D$, temos

$$M_\varphi f(x,r) = \sup_{s>r} \frac{1}{|B(x,s)|_\omega} \int_{B(x,s)} |f(y)| d\omega(y),$$

onde $B(x,s) = \{y \in X : d(y,x) < s\}$. O resultado seguinte é uma conseqüência do Teorema 2.5.18

Corolário 2.5.19 *Sejam $1 < p < q < \infty$. Sejam V e W pesos definidos sobre $\widehat{X}$ e X respectivamente. Seja β a medida sobre $\widehat{X}$ dada por $d\beta(x,t) = V(x,t)d\widehat{\omega}(x,t)$ e suponha que $W^{1-p'}(x)d\omega(x)$ seja uma medida doubling. Então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\left(\int_{\widehat{X}} [M_\varphi f(x,r)]^q d\beta(x,r)\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_X |f(x)|^p W(x) d\omega(x)\right)^{\frac{1}{p}}$$

para toda função real e mensurável f, se e somente se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\frac{1}{|B|_\omega} |\widetilde{B}|_\beta^{\frac{1}{q}} \left(\int_B W^{1-p'}(x) d\omega(x)\right)^{\frac{1}{p'}} \leq C,$$

para todas as bolas $B = B(z,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$ e onde $\widetilde{B} = B(z,r) \times [0,r]$.

Se X for um espaço homogêneo G/H e, neste caso, a medida ω sobre X é induzida por uma medida de Haar sobre G, observamos que o Teorema 2.4.6 é válido se trocarmos $\mathcal{M}f(x,r)$ por $M_\varphi f(x,r)$, onde $\mathcal{M}f(x,r)$ é dada na Definição 2.4.1. Dessa forma, o Teorema 2.4.6 nos dá uma condição necessária e suficiente para a limitação do operador M_φ de $L^p(X, W(x)d\omega(x))$ em $L^p(\widehat{X}, \beta)$, $1 < p < \infty$, enquanto que o Corolário 2.5.19 nos dá uma condição necessária e suficiente para a limitação do operador M_φ de $L^p(X, W(x)d\omega(x))$ em $L^q(\widehat{X}, \beta)$, com $1 < p < q < \infty$.

Consideremos, agora, o espaço homogêneo (S^n, d, σ), onde d é a distância euclidiana e σ é a medida de Lebesgue sobre S^n. Seja $k : \mathbb{B} \to \widehat{S^n}$ a função definida por $k(x) = (x/|x|, h(|x|))$, $x \neq 0$, $k(0) = (\mathbb{1}, 0)$, $\mathbb{1} = (1, 0, \ldots, 0)$. Dado um peso V sobre $\mathbb{B}$, seja

$\overline{V}$ o peso sobre $\widehat{S^n}$ dado por $\overline{V}(x,t) = V(tx)$, se $t < 1$, e $\overline{V}(x,t) = 0$, se $t \geq 1$. Seja β a medida sobre $\widehat{S^n}$ dada por $d\beta(x,t) = \overline{V}(x,t)d\sigma(x)dt$ e seja μ a medida sobre $I\!B$ dada por $|A|_\mu = |k(A)|_\beta$, para todo boreliano $A \subset I\!B$. Vamos ainda denotar por u^* o operador $u^*_f(tx) = \sup_{0\leq r<t} |u_f(rx)|$, para $0 \leq t < 1$ e $x \in S^n$. Observamos que os resultados deste capítulo continuam válidos se considerarmos u^* definido dessa forma. Segue, então, como conseqüência do Corolário 2.5.19 e do Lema 2.5.10 o seguinte resultado:

Corolário 2.5.20 *Sejam $1 < p < q < \infty$. Seja W um peso definido sobre S^n tal que $W^{1-p'}(x)d\sigma(x)$ seja uma medida doubling sobre S^n. Então, se existe $C > 0$ tal que*

$$\frac{1}{|B|}|\bar{B}|_\mu^{\frac{1}{q}} \left(\int_B W^{1-p'}(x)d\omega(x)\right)^{\frac{1}{p'}} \leq C,$$

para todas as bolas $B = B(z,r) = \{y \in S^n : d(z,t) < r\}$ com $z \in S^n$ e $r > 0$, então

$$\left(\int_{I\!B} [u^*_f(x)]^q d\beta(x)\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_{S^n} |f(x)|^p W(x)d\omega(x)\right)^{\frac{1}{p}}$$

para toda função real e mensurável f.

Vamos considerar, agora, o espaço de tipo homogêneo $(I\!R^{n+1}, d, \mu)$, onde d é a distância euclidiana e μ é qualquer medida doubling sobre $I\!R^{n+1}$. Tomamos $D = I\!B$ e assim $\partial D = S^n$. Vamos considerar a medida de Lebesgue σ sobre S^n. Sejam $\varphi(B) = |B \bigcap S^n|$, para todo boreliano B de $I\!R^{n+1}$, $t(x) = |1 - |x||$, para todo $x \in I\!R^{n+1}$, e seja

$$a(x) = \begin{cases} x/|x| & se\ x \in I\!R^{n+1}\ e\ x \neq 0; \\ 1\!\!1 & se\ x = 0. \end{cases}$$

Então, para cada $x = tx' \in I\!B$, $t \in [0,1)$, $x' \in S^n$, temos

$$M_\varphi f(x) = \sup_{r>1-t} \frac{1}{|B(x',r)|} \int_{B(x',r)} |f(y)|d\sigma(y),$$

onde $B(x',r) = \{y \in S^n : d(x',y) < r\}$. Podemos mostrar que existe $C > 1$ tal que

$$\overline{\mathcal{M}}f(x) \leq M_\varphi f(x) \leq C\overline{\mathcal{M}}f(x),$$

onde usamos a notação $\overline{\mathcal{M}}f$ *para denotar a função* $\overline{\mathcal{M}}f(x) = \mathcal{M}f(x/|x|, h(|x|))$, *e*

$$\mathcal{M}f(x,t) = \sup_{s>r} \frac{1}{|B(x,s)|} \int_{B(x,s)} |f(y)|d\sigma(y).$$

Segue como conseqüência do Lema 2.5.10 e do Teorema 2.5.18 o seguinte resultado:

Corolário 2.5.21 *Sejam* $1 < p < q < \infty$. *Sejam* V *e* W *pesos definidos sobre* $\mathbb{B}$ *e* S^n *respectivamente e* $d\beta(x) = V(x)d\mu(x)$. *Suponha que* $W^{1-p'}(x)d\sigma(x)$ *seja uma medida doubling sobre* S^n. *Se existe uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$\frac{1}{|B|}|\widehat{B}|_{\beta}^{\frac{1}{q}} \left(\int_B W^{1-p'}(x)d\omega(x)\right)^{\frac{1}{p'}} \leq C,$$

para todas as bolas $B = B(z,r) = \{y \in S^n : d(z,t) < r\}$ *e onde* $\widehat{B} = \{y \in \mathbb{B} : d(z,t) < r\}$, *com* $z \in S^n$, $r > 0$, *então*

$$\left(\int_{\mathbb{B}} [u_f^*(x)]^q d\beta(x)\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_{S^n} |f(x)|^p W(x) d\omega(x)\right)^{\frac{1}{p}}$$

para toda função real e mensurável f.

Observamos que o Teorema 2.5.12 nos dá uma condição necessária e suficiente para a limitação do operador u^* *de* $L^p(S^n, W(x)d\sigma(x))$ *em* $L^p(\mathbb{B}, \mu)$, $1 < p < \infty$, *enquanto os Corolários 2.5.20 e 2.5.21 nos dão condições suficientes para a limitação do operador* u^* *de* $L^p(S^n, W(x)d\sigma(x))$ *em* $L^q(\mathbb{B}, \beta)$, *com* $1 < p < q < \infty$. *Observamos que no Corolário 2.5.20 esta condição suficiente é dada em termos dos "cones" ou "cones truncados"* $\bar{B}$, *enquanto no Corolário 2.5.21 esta condição suficiente é dada em termos de* $\widehat{B}$, *que são intersecção de bolas em* $\mathbb{R}^{n+1}$ *centradas em pontos de* S^n *com* $\mathbb{B}$.

Capítulo 3

Uma caracterização da limitação do operador integral de Poisson de $L^p(S^n, \omega)$ em $L^q(I\!B, \mu)$

O objetivo deste capítulo é obter uma caracterização da limitação da integral de Poisson $u_{f\omega}$ de $L^p(S^n, \omega)$ em $L^q(I\!B, \mu)$, onde ω e μ são, respectivamente, medidas de Borel não negativas sobre S^n e $I\!B$ e $1 < p \leq q < \infty$. Observamos que, embora também chamamos de integral de Poisson o operador $u_{f\omega}$, não é o mesmo operador estudado no Capítulo 2. Portanto, neste e no capítulo anterior, obtemos condições necessárias e suficientes para a limitação de operadores distintos. Porém, se $p = q$ e ω é a medida de Lebesgue sobre S^n, podemos comparar os resultados obtidos neste capítulo e no Capítulo 2, o que é feito no final da segunda seção.

Na primeira seção fazemos uma exposição de um resultado apresentado em Sawyer-Wheeden-Zhao [16] que caracteriza a limitação de $L^p(X, \sigma)$ em $L^q(\widehat{X}, \omega)$, de um certo operador, onde X é um espaço de tipo homogêneo, σ é uma medida de Borel sobre X, $\widehat{X} = X \times [0, \infty)$, ω é uma medida de Borel sobre $\widehat{X}$, $1 < p \leq q < \infty$. A limitação da integral de Poisson de $L^p(I\!R^n, \sigma)$ em $L^q(\widehat{I\!R^n}, \omega)$ é obtida como conseqüência deste resultado. Porém, mostramos que a limitação da integral de Poisson de $L^p(S^n, \omega)$ em $L^q(I\!B, \mu)$ não pode ser obtida de forma análoga.

Na segunda seção, demonstramos o resultado que é o objetivo deste capítulo. Um resultado análogo para o caso da integral de Poisson sobre $\mathbb{R}^n$ está demonstrado em Sawyer [14].

3.1 Um resultado de Sawyer-Wheeden-Zhao

Nesta seção faremos uma breve exposição de resultados de Sawyer-Wheeden-Zhao [16].

X denotará um espaço de tipo homogêneo, o qual foi definido em 1.4.2. Consideraremos as decomposições diádicas de X expostas na Seção 3 do Capítulo 1. Todas as medidas que aparecerem nesta seção serão localmente finitas.

Definição 3.1.1 *Seja (X, d, μ) um espaço de tipo homogêneo. Se σ e ω são medidas de Borel sobre X, definimos os operadores T e T^* por*

$$T(f\sigma)(x) = \int_X K(x,y)f(y)d\sigma(y), \qquad x \in X, \tag{3.1}$$

e

$$T^*(g\omega)(y) = \int_X K(x,y)g(x)d\omega(x), \qquad y \in X, \tag{3.2}$$

onde o núcleo $K(x, y)$ é não-negativo e satisfaz as seguintes condições: Existem constantes $C_1 > 1$ e $C_2 > 1$ tais que

$$\begin{aligned} K(x,y) \leq C_1\, K(x',y) \quad &\textit{sempre que} \quad d(x',y) \leq C_2\, d(x,y); \\ K(x,y) \leq C_1\, K(x,y') \quad &\textit{sempre que} \quad d(x,y') \leq C_2\, d(x,y). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Observação 3.1.2 *Em particular, estas condições são válidas quando $K(x,y) = d(x,y)^{-\varepsilon}$. Mas, dada uma quase-distância d sobre X, existe uma distância ρ sobre X e um número positivo γ tal que d é equivalente a ρ^γ, (veja 1.3.3). Portanto, as condições (3.3) são válidas se $K(x,y) = c\rho(x,y)^{-\gamma'}$, $\gamma' > 0$.*

Teorema 3.1.3 *(Sawyer-Wheeden-Zhao [16], Teorema 1.2, pag. 528). Suponha que* $1 < p \leq q < \infty$, *e que* ω *e* σ *são medidas de Borel não negativas sobre um espaço de tipo homogêneo* X. *Sejam* T *e* T^* *definidos por (3.1) e (3.2) com um núcleo* K *satisfazendo (3.3). Suponha que* $T(\chi_B \sigma) \in L^q(W, d\omega)$, *para toda bola* $B \in X$. *Seja* K *a constante da quase-distância* d *de* X *dada na Definição 1.3.1(iii). Sejam* $a_1 = 10^4 K^{18}$ *e* $a_2 \geq 1$. *São equivalentes:*

(i) Existe uma constante $C > 0$ *tal que, para toda função mensurável* $f \geq 0$

$$\left(\int_X [T(f\sigma)(x)]^q \, d\omega(x) \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_X [f(x)]^p \, d\sigma(x) \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.4}$$

(ii) Existe uma constante $C > 0$ *tal que para todo elemento* Q *de uma dada partição diádica* $\mathcal{D}$ *de* X *temos*

$$\left(\int_{a_1 Q^*} [T(\chi_Q \sigma)(x)]^q \, d\omega(x) \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \, |Q|_\sigma^{\frac{1}{p}} \tag{3.5}$$

e

$$\left(\int_{a_1 Q^*} [T^*(\chi_Q \omega)(x)]^{p'} \, d\sigma(x) \right)^{\frac{1}{p'}} \leq C \, |a_2 Q^*|_\omega^{\frac{1}{q'}}. \tag{3.6}$$

Definição 3.1.4 *Dado um espaço de tipo homogêneo* (X, d, μ), *vamos considerar* $\widehat{X} = X \times [0, \infty)$. *Definimos uma quase-distância* $\widehat{d}$ *sobre* $\widehat{X}$ *por*

$$\widehat{d}\,((x,t),(y,s)) = max\{d(x,y), |t-s|\},$$

e definimos uma medida doubling $\widehat{\mu}$ *sobre* $\widehat{X}$ *por*

$$d\widehat{\mu}(x,t) = d\mu(x)dt.$$

Então $(\widehat{X}, \widehat{d}, \widehat{\mu})$ *também é um espaço de tipo homogêneo.*

Definição 3.1.5 *Se* σ *e* ω *são medidas de Borel não negativas sobre* X *e* $\widehat{X}$ *respectivamente, definimos os seguintes operadores integrais:*

$$T(f\sigma)(x,t) = \int_X K_t(x,y) f(y) d\sigma(y), \qquad (x,t) \in \widehat{X} \tag{3.7}$$

e

$$T^*(g\omega)(y)=\int_{\widehat{X}} K_t(x,y)g(x,t)d\omega(x,t), \qquad y\in X, \tag{3.8}$$

onde o núcleo $K_t(x,y)$ é não negativo e satisfaz as seguintes condições: Existem constantes $C_3>1$ e $C_4>1$ tais que

$$\begin{aligned} K_t(x,y) &\le C_3\, K_{t'}(x',y) \quad \text{sempre que} \quad d(x',y)+t' \le C_4\ (d(x,y)+t)\,;\\ K_t(x,y) &\le C_3\, K_{t'}(x,y') \quad \text{sempre que} \quad d(x,y')+t' \le C_4\ (d(x,y)+t)\,. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Teorema 3.1.6 *(Sawyer-Wheeden-Zhao [16], Teorema 1.5, pag. 531). Suponha que $1 < p \le q < \infty$ e que ω e σ são medidas de Borel não negativas sobre os espaços de tipo homogêneo $(\widehat{X},\hat{d},\hat{\mu})$ e (X,d,μ) respectivamente. Sejam T e T^* definidos por (3.7) e (3.8) com um núcleo K_t satisfazendo (3.9). São equivalentes:*

(i) Existe uma constante $C>0$ tal que, para toda função mensurável $f\ge 0$

$$\left(\int_{\widehat{X}} [T(f\sigma)(x,t)]^q\, d\omega(x,t)\right)^{\frac{1}{q}} \le C\left(\int_X [f(x)]^p\, d\sigma(x)\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.10}$$

(ii) Existe uma constante $C>0$ tal que para todo elemento Q de uma dada partição diádica $\mathcal{D}$ de X temos

$$\left(\int_{\widehat{X}} [T(\chi_Q\sigma)(x,t)]^q\, d\omega(x,t)\right)^{\frac{1}{q}} \le C\ |Q|_\sigma^{\frac{1}{p}} \tag{3.11}$$

e

$$\left(\int_X \left[T^*(\chi_{\widehat{Q}}\omega)(x)\right]^{p'} d\sigma(x)\right)^{\frac{1}{p'}} \le C\ |\widehat{Q}|_\omega^{\frac{1}{q'}}, \tag{3.12}$$

onde $\widehat{Q}=Q\times[0,\boldsymbol{\ell}(Q))$ e $\boldsymbol{\ell}(Q)$ é o comprimento do lado de Q.

Demonstração. Fazendo $f=\chi_Q$ em (3.10) obtemos (3.11). Fazendo $g=\chi_{\widehat{Q}}$ na desigualdade dual (no sentido da Observação 3.2.27) de (3.10) que é

$$\left(\int_X [T^*(g\omega)(x)]^{p'} d\sigma(x)\right)^{\frac{1}{p'}} \le C\left(\int_{\widehat{X}} [g(x,t)]^{q'} d\omega(x,t)\right)^{\frac{1}{q'}},$$

obtemos (3.12).

A recíproca deste teorema é conseqüencia do Teorema 3.1.3. Seja $\widehat{K}$ o núcleo sobre $\widehat{X} \times \widehat{X}$ definido por

$$\widehat{K}\left((x,t),(y,s)\right) = K_{|t-s|}(x,y).$$

Vamos mostrar que a condição (3.9) satisfeita por K_t implica que $\widehat{K}$ satisfaz a condição (3.3) com $C_1 = C_3$ e $C_2 = \frac{1}{2}C_4$. De fato, sejam (x,t), (x',t'), $(y,s) \in \widehat{X}$, com $\widehat{d}((x',t'),(y,s)) \leq C_2\widehat{d}((x,t),(y,s))$. Então

$$\begin{aligned} d(x',y) + |t'-s| &\leq 2\, max\{d(x',y), |t'-s|\} \\ &= 2\widehat{d}((x',t'),(y,s)) \\ &\leq 2C_2\, \widehat{d}((x,t),(y,s)) \\ &= 2C_2\, max\{d(x,y), |t-s|\} \\ &\leq C_4(d(x,y) + |t-s|). \end{aligned}$$

Por (3.9) isto implica que

$$K_{|t-s|}(x,y) \leq C_3\, K_{|t'-s|}(x',y),$$

ou seja,

$$\widehat{K}((x,t),(y,s)) \leq C_3\, \widehat{K}((x',t'),(y,s)),$$

o que mostra que $\widehat{K}$ satisfaz a primeira condição de (3.3). Para mostrar que $\widehat{K}$ satisfaz a segunda condição de (3.3) , basta proceder de forma análoga.

Para medidas $\widehat{\sigma}$ e $\widehat{\omega}$ sobre $\widehat{X}$, definimos

$$\begin{aligned} \widehat{T}(f\widehat{\sigma})(x,t) &= \int_{\widehat{X}} \widehat{K}((x,t),(y,s))f(y,s)d\widehat{\sigma}(y,s) \\ &= \int_{\widehat{X}} K_{|t-s|}(x,y)f(y,s)d\widehat{\sigma}(y,s), \end{aligned} \tag{3.13}$$

e

$$\begin{aligned} \widehat{T}^*(g\widehat{\omega})(y,s) &= \int_{\widehat{X}} \widehat{K}((x,t),(y,s))g(x,t)d\widehat{\omega}(x,t) \\ &= \int_{\widehat{X}} K_{|t-s|}(x,y)g(x,t)d\widehat{\omega}(x,t), \end{aligned} \tag{3.14}$$

onde f e g são funções definidas sobre $\widehat{X}$.

Para medidas σ sobre X e ω sobre $\widehat{X}$ satisfazendo as hipóteses do teorema, vamos tomar $d\widehat{\sigma}(x,t) = \delta_0(t)d\sigma(x)dt$ e $\widehat{\omega} = \omega$, onde $\delta_0(t)$ é a função delta de Dirac. Então, se $f(y,s) = f(y)$, por (3.13) temos

$$\begin{aligned} T(f\sigma)(x,t) &= \int_X K_t(x,y)f(y)d\sigma(y) \\ &= \int_{\widehat{X}} K_{|t-s|}(x,y)f(y,s)d\widehat{\sigma}(y,s) \\ &= \widehat{T}(f\widehat{\sigma})(x,t). \end{aligned}$$

Logo, (3.10) é equivalente à desigualdade

$$\left(\int_{\widehat{X}} [\widehat{T}(f\widehat{\sigma})(x,t)]^q d\widehat{\omega}(x,t)\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_{\widehat{X}} [f(x,t)]^p d\widehat{\sigma}(x,t)\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.15}$$

Vamos construir uma decomposição diádica $\widehat{\mathcal{D}}$ de $\widehat{X}$ associada à $\mathcal{D}$. Aumentando, se necessário, a constante K da quase-distância dada na Definição 1.3.1(iii), podemos assumir que λ é um inteiro positivo. Para cada $Q \in \mathcal{D}$, vamos definir $\widehat{Q}_k = Q \times [k\boldsymbol{\ell}(Q),\ (k+1)\boldsymbol{\ell}(Q))$, para $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$, onde $\boldsymbol{\ell}(Q)$ é o comprimento do lado de Q. Então a coleção $\widehat{\mathcal{D}} = \{\widehat{Q}_k :$ $Q \in \mathcal{D}$ e k=0,1, 2,...$\}$ é uma decomposição diádica de $\widehat{X}$. De fato, se $Q_1,\ Q_2 \in \mathcal{D}_m$ e $Q_1 \subset_{\neq} Q_2$ com $Q_1 = U_j^k$ e $Q_2 = E_i^l$, segue da propriedade (iii) de $\mathcal{D}_m$ que $k < l$, e portanto, como $\boldsymbol{\ell}(Q_1) = 2\lambda^k$ e $\boldsymbol{\ell}(Q_2) = 2\lambda^l$, devemos ter $\boldsymbol{\ell}(Q_1) < \boldsymbol{\ell}(Q_2)$. A propriedade (iii) segue do fato que λ é um inteiro.

Então, pelo Teorema 3.1.3 a desigualdade (3.15) para $\widehat{T}$ (e portanto (3.10)) é equivalente a

$$\left(\int_{a_1\widehat{Q}^*} [\widehat{T}(\chi_{\widehat{Q}}\widehat{\sigma})(x,t)]^q d\widehat{\omega}(x,t)\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\ |\widehat{Q}|_{\widehat{\sigma}}^{\frac{1}{p}} \tag{3.16}$$

e

$$\left(\int_{a_1\widehat{Q}^*} [\widehat{T}^*(\chi_{\widehat{Q}}\widehat{\omega})(x,t)]^{p'} d\widehat{\sigma}(x,t)\right)^{\frac{1}{p'}} \leq C\ |a_2\widehat{Q}^*|_{\widehat{\omega}}^{\frac{1}{q'}} \tag{3.17}$$

para todos os elementos $\widehat{Q} = \widehat{Q}_k$, com $Q \in \mathcal{D}$ como acima. Aqui $\widehat{Q}^*$ é a bola que contém $\widehat{Q}$ com respeito à quase-distância $\widehat{d}$ da Definição 3.1.4. Assim, $\widehat{Q}^*$ é o produto cartesiano de Q^* com algum intervalo de comprimento equivalente a $r(Q^*)$, onde $r(Q^*)$ é o raio de Q^*.

Como o suporte de $\widehat{\sigma}$ está contido em $X \times \{0\}$, a desigualdade (3.16) é óbvia, a menos que $\widehat{Q}$ intercepte $X \times \{0\}$. Devido à estrutura dos elementos de $\widehat{\mathcal{D}}$, $\widehat{Q}$ intercepta $X \times \{0\}$ somente quando $\widehat{Q} = Q \times [0, \boldsymbol{\ell}(Q))$. Para tal $\widehat{Q}$, por (3.13), temos

$$\begin{aligned} \widehat{T}(\chi_{\widehat{Q}}\widehat{\sigma})(x,t) &= \int_X K_t(x,y)\chi_Q(y)d\sigma(y) \\ &= T(\chi_Q\sigma)(x,t), \end{aligned}$$

e também $|\widehat{Q}|_{\widehat{\sigma}} = |Q|_{\sigma}$. Assim, para tal $\widehat{Q}$, (3.16) se reduz a

$$\left(\int_{a_1\widehat{Q}^*} [T(\chi_Q\sigma)(x,t)]^q d\omega(x,t)\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\, |Q|_{\sigma}^{\frac{1}{p}},$$

o que segue de (3.11).

Agora, vamos considerar (3.17). A integral do membro esquerdo é zero, e conseqüentemente a desigualdade (3.17) é óbvia, a menos que $a_1\widehat{Q}^*$ intercepte $X\times\{0\}$. Se $a_1\widehat{Q}^*$ intercepta $X \times \{0\}$, então a distância de $\widehat{Q}$ a $X \times \{0\}$ é no máximo um múltiplo de $a_1\boldsymbol{\ell}(Q)$, onde Q é a projeção de $\widehat{Q}$ sobre $X \times \{0\}$. Como Q é um elemento diádico, podemos tomar um elemento diádico J contendo Q tal que $J \times [0, \boldsymbol{\ell}(J))$ contém $\widehat{Q}$, e $\boldsymbol{\ell}(J) \leq ca_1\boldsymbol{\ell}(Q)$. Seja $\widehat{J} = J \times [0, \boldsymbol{\ell}(J))$, e note que $\widehat{J} \in \widehat{\mathcal{D}}$ e que $\widehat{J}$ se apoia na fronteira $X \times \{0\}$ de $\widehat{X}$. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que a_2 é suficientemente grande para que $\widehat{J} \subset a_2\widehat{Q}^*$. Então, para tais $\widehat{Q}$ e $\widehat{J}$, temos que $\widehat{Q} \subset \widehat{J}$ e, além disso, como $\widehat{\omega} = \omega$, por (3.14) e (3.8), temos

$$\widehat{T}^*(\chi_{\widehat{J}}\widehat{\omega})(x,0) = T^*(\chi_{\widehat{J}}\omega)(x).$$

Então, por (3.12) temos

$$\begin{aligned} \left(\int_{a_1\widehat{Q}^*} [\widehat{T}^*(\chi_{\widehat{Q}}\widehat{\omega})(x,t)]^{p'} d\widehat{\sigma}(x,t)\right)^{\frac{1}{p'}} &\leq \left(\int_{\widehat{X}} [\widehat{T}^*(\chi_{\widehat{J}}\widehat{\omega})(x,t)]^{p'} d\widehat{\sigma}(x,t)\right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= \left(\int_X [T^*(\chi_{\widehat{J}}\omega)(x)]^{p'} d\sigma(x)\right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq C\, |\widehat{J}|_{\omega}^{\frac{1}{q'}} \\ &\leq C\, |a_2\widehat{Q}^*|_{\omega}^{\frac{1}{q'}}. \end{aligned}$$

Isto verifica (3.17) e completa a demonstração do teorema.

Observação 3.1.7 *Se* $\widehat{X} = I\!R^n \times [0, \infty)$, *um exemplo típico de um núcleo* $K_t(x, y)$ *definido sobre* $I\!R^n \times I\!R^n$ *satistazendo às condições (3.9) da Definição 3.1.5 é dado por*

$$K_t(x, y) = \frac{1}{t} P(x - y, t), \qquad t \in [0, \infty), \ x, y \in I\!R^n,$$

onde

$$P(x, t) = c_n \, \frac{t}{(t^2 + |x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

é o núcleo de Poisson sobre $I\!R^n$. *De fato, se considerarmos a distância euclidiana* $d(x, y) = |x - y|$ *em* $I\!R^n \times I\!R^n$ *e* μ *qualquer medida doubling sobre a* σ- *álgebra de Borel de* $I\!R^n$ *(por exemplo, a medida de Lebesgue), temos que* $(I\!R^n, d, \mu)$ *é um espaço de tipo homogêneo. Definindo*

$$\widehat{d}((x, t), (y, s)) = max\{|x - y|, |t - s|\},$$

$$d\widehat{\mu}(x, t) = d\mu(x)dt,$$

temos que $(I\!R^n \times [0, \infty), \widehat{d}, \widehat{\mu})$, *também é um espaço de tipo homogêneo. Para aplicarmos o Teorema 3.1.6, devemos mostrar que o núcleo* $K_t(x, y)$ *satisfaz às condições (3.9). Isto de fato ocorre pois, como* $a^2 + b^2 \leq (a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ *para* a, $b \geq 0$, *se* $C_4 > 1$ *é uma constante fixada e* x, x', $y \in I\!R^n$, t, $t' \in [0, \infty)$ *satisfazem*

$$|x' - y| + t' \leq C_4 \ (|x - y| + t),$$

temos que

$$\begin{aligned} K_t(x, y) &= c_n \, \frac{1}{(t^2 + |x - y|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \\ &\leq 2c_n \, \frac{1}{(t + |x - y|)^{n+1}} \\ &\leq 4C_4 \, c_n \, \frac{1}{(t' + |x' - y|)^{n+1}} \\ &\leq 4C_4 \, c_n \, \frac{1}{((t')^2 + |x' - y|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \\ &= 4C_4 \, K_{t'}(x', y), \end{aligned}$$

o que demonstra a primeira desigualdade de (3.9). A segunda desigualdade é demonstrada de forma análoga. Portanto, o Teorema 3.1.6 nos dá condições necessárias e suficientes para que o operador

$$P(f\sigma)(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} K_t(x,y)f(y)d\sigma(y), \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,\infty),$$

seja limitado de $L^p(\mathbb{R}^n,\sigma)$ em $L^q(\mathbb{R}^n \times [0,\infty),\omega)$, onde σ e ω são medidas de Borel não negativas sobre $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ respectivamente, e $1 < p \leq q < \infty$, generalizando o Teorema 3.1.8, demonstrado em Sawyer [14] e enunciado abaixo, que nos dá condições necessárias e suficientes para a limitação do operador integral de Poisson de $L^p(\mathbb{R}^n,\sigma)$ em $L^q(\mathbb{R}^{n+1} \times [0,\infty),\omega)$.

Teorema 3.1.8 *(Sawyer [14], Teorema 2, pag. 535) Suponha $1 < p \leq q < \infty$, e que ω e σ são medidas de Borel não negativas sobre $\mathbb{R}^{n+1} \times [0,\infty)$ e $\mathbb{R}^n$ respectivamente. Sejam*

$$P(f\sigma)(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} P(x-y,t)f(y)d\sigma(y), \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$$

e

$$P^*(g\omega)(y) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}\times[0,\infty)} P(y-x,t)g(x,t)d\omega(x,t), \qquad y \in \mathbb{R}^n,$$

onde $P(x,t)$ é o núcleo de Poisson sobre $\mathbb{R}^n$. São equivalentes:

(i) Existe uma constante $C > 0$ tal que, para toda função mensurável $f \geq 0$,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^{n+1}\times[0,\infty)} [P(f\sigma)(x,t)]^q d\omega(x,t)\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} [f(x)]^p d\sigma(x)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

(ii) Existe uma constante $C > 0$ tal que, para todo cubo diádico $Q \subset \mathbb{R}^n$, temos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^{n+1}\times[0,\infty)} [P(\chi_Q\sigma)(x,t)]^q d\omega(x,t)\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\,|Q|_\sigma^{\frac{1}{p}} < \infty$$

e

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} [P^*(\chi_{\widehat{Q}} t^{q-1}\omega)(x)]^{p'} d\sigma(x)\right)^{\frac{1}{p'}} \leq C \left(\int_{\widehat{Q}} t^q d\omega(x,t)\right)^{\frac{1}{q'}} < \infty,$$

onde $\widehat{Q}$ denota o cubo em $\mathbb{R}^{n+1} \times [0,\infty)$ que tem Q como face.

Observação 3.1.9 *Seja $X = S^n$, seja d uma quase-distância sobre S^n e seja μ uma medida doubling sobre S^n. Então (S^n, d, μ) é um espaço de tipo homogêneo.*

Seja

$$K_t(x,y) = \frac{1}{1-t^2} P_t(x,y), \qquad t \in [0,1),\ x, y \in S^n, \tag{3.18}$$

onde

$$P_t(x,y) = c_n \frac{1-t^2}{|tx-y|^{n+1}}$$

é o núcleo de Poisson sobre S^n. Se $1 < p \leq q < \infty$ e σ e ω são medidas de Borel não negativas sobre S^n e $S^n \times [0,1)$ respectivamente, gostaríamos de aplicar o Teorema 3.1.6 para obter condições necessárias e suficientes para que o operador

$$P(g\sigma)(x,t) = \int_{S^n} K_t(x,y) g(y) d\sigma(y), \qquad (x,t) \in S^n \times [0,1), \tag{3.19}$$

seja limitado de $L^p(S^n, \sigma)$ em $L^q(S^n \times [0,1), \omega)$. Para isso, vamos ainda denotar por ω a medida de Borel sobre $S^n \times [0,\infty)$ que coincide com ω sobre $S^n \times [0,1)$ e é nula sobre $S^n \times [1,\infty)$ e vamos definir

$$K_t(x,y) = 0, \qquad t \in [1,\infty), \quad x,\ y \in S^n.$$

Seja, também,

$$P^*(g\omega)(y) = \int_{S^n \times [0,1)} K_t(x,y) g(x,t) d\omega(x,t) = \int_{S^n \times [0,\infty)} K_t(x,y) g(x,t) d\omega(x,t).$$

Para aplicarmos o Teorema 3.1.6 e assim obtermos condições necessárias e suficientes para que o operador definido em (3.19) seja limitado de $L^p(S^n, \sigma)$ em $L^q(S^n \times [0,\infty), \omega)$ (e portando de $L^p(S^n, \sigma)$ em $L^q(S^n \times [0,1), \omega)$), devemos mostrar que o núcleo $K_t(x,y)$ definido em (3.18) satisfaz às condições (3.9). Porém, o que mostraremos a seguir, é que o núcleo $K_t(x,y)$ não satisfaz estas condições.

Vamos supor por absurdo que $K_t(x,y)$ satisfaz as condições (3.9). Vamos tomar x, x', $y \in S^n$ e t, $t' \in [0,1)$ tais que $x = x' = y$, $t' = 0$ e t suficientemente próximo de 1, tal que $C_4\, t \geq 1$ e $C_3^{1/(n+1)}\, (1-t) < 1$, o que é possível pois $C_3 > 1$ e $C_4 > 1$. Então

$$d(x',y) + t' = 0 < 1 \leq C_4\, t = C_4\, (d(x,y) + t),$$

e, pela primeira desigualdade de (3.9), isto implica que

$$K_t(x,y) \leq C_3\, K_{t'}(x',y)$$

isto é

$$c_n \, \frac{1}{|tx-y|^{n+1}} \leq C_3 \, c_n \, \frac{1}{|t'x'-y|^{n+1}},$$

ou seja,

$$|t'x'-y| \leq C_3^{\frac{1}{n+1}} |tx-y|,$$

e, pela escolha de x, x', y e t', temos

$$1 \leq C_3^{\frac{1}{n+1}}(1-t),$$

o que é um absurdo pela escolha de t. Portanto, $K_t(x,y)$ não satisfaz às desigualdades (3.9) e assim não podemos aplicar o Teorema 3.1.6 para concluir que o operador definido em (3.19) é limitado de $L^p(S^n,\sigma)$ em $L^q(S^n\times[0,1),\omega)$.

Nos parece que, embora o Teorema 3.1.6 seja um resultado válido para espaços de tipo homogêneo, suas hipóteses sobre o núcleo $K_t(x,y)$ foram estabelecidas tendo em vista obter o Teorema 3.1.8 como conseqüência. Isto justifica o trabalho que apresentamos na seção seguinte, onde demonstramos um resultado análogo ao Teorema 3.1.8 para o caso da esfera S^n.

3.2 A limitação do operador integral de Poisson

Definição 3.2.1 *Se ω e μ são medidas de Borel não negativas sobre S^n e $S^n\times[0,1)$ respectivamente, definimos, para funções reais, mensuráveis e não negativas g e f sobre S^n e $S^n\times[0,1)$ respectivamente,*

$$P(g\omega)(x,t) = \int_{S^n} P_t(x,y)g(y)d\omega(y), \qquad (x,t)\in S^n\times[0,1)$$

e

$$P^*(f\mu)(y) = \int_{S^n\times[0,1)} P_t(x,y)f(x,t)d\mu(x,t), \qquad y\in S^n,$$

onde $P_t(x,y)$ é o núcleo de Poisson sobre a esfera S^n dado na Definição 2.5.3. Seja g uma função mensurável sobre S^n e sejam g_+ e g_- funções mensuráveis e não negativas sobre S^n tais que $g = g_+ - g_-$. Se para todo $(x,t) \in S^n \times [0,1)$ tivermos $P(g_+\omega)(x,t) < \infty$ ou $P(g_-\omega)(x,t) < \infty$, definimos $P(g\omega)(x,t) = P(g_+\omega)(x,t) - P(g_-\omega)(x,t)$. Analogamente definimos $P^*(f\mu)(y)$, $y \in S^n$, para uma função mensurável f qualquer definida sobre $S^n \times [0,1)$.

Observação 3.2.2 *Observamos que*

$$\int_{S^n\times[0,1)} P(g\omega)(x,t)f(x,t)d\mu(x,t) = \int_{S^n} g(y)P^*(f\mu)(y)d\omega(y),$$

isto é, P^* é o operador de Poisson dual de P com respeito ao par $(L^2(S^n\times[0,1),\mu), L^2(S^n,\omega))$. De fato, temos

$$\begin{aligned}\int_{S^n\times[0,1)} P(g\omega)(x,t)f(x,t)d\mu(x,t) &= \int_{S^n\times[0,1)}\left(\int_{S^n} P_t(x,y)g(y)d\omega(y)\right)f(x,t)d\mu(x,t)\\ &= \int_{S^n}\left(\int_{S^n\times[0,1)} P_t(x,y)f(x,t)d\mu(x,t)\right)g(y)d\omega(y)\\ &= \int_{S^n} g(y)P^*(f\mu)(y)d\omega(y).\end{aligned}$$

Observação 3.2.3 *Seja $f \geq 0$ uma função mensurável e limitada definida sobre $S^n \times [0,1)$. Seja μ uma medida de Borel finita e não negativa sobre $S^n \times [0,1)$. Dado $k \in \mathbb{Z}$, seja $\Omega_k = \{x \in S^n : P^*(f\mu)(x) > 2^k\}$. Como $P_t(x,y)$ é uma função contínua em seu domínio, o conjunto Ω_k é aberto. Seja $\eta \geq 2$ uma constante fixada, e seja $R = \frac{3}{2}\eta$. Então podemos escrever $\Omega_k = \dot{\bigcup}_{j\in L_k} Q_j^k$, $L_k \subset \mathbb{N}$, onde Q_j^k são elementos de $\mathcal{A} = \bigcup_{k\geq 0}\mathcal{A}_k$ maximais entre os $Q \in \mathcal{A}$ que satisfazem $RQ^* \subset \Omega_k$, e onde $\dot{\bigcup}$ denota que a união é disjunta. Lembramos que Q^* denota a bola que contém Q dada na Observação 1.2.9. Observamos também que, da maneira como foram construídos, os conjuntos Ω_k satisfazem $\Omega_{k+1} \subset \Omega_k$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Se para algum $k \in \mathbb{Z}$ tivermos $\Omega_k = S^n$, tomamos $k_0 = max\{k \in \mathbb{Z} : \Omega_k = S^n\}$. Então $\Omega_k = S^n$ para todo $k \leq k_0$. Consideraremos, então, apenas os conjuntos Ω_k para os quais $k \geq k_0$.*

No que segue, iremos considerar f, μ, Ω_k, η, R, Q_j^k fixados como acima.

Observação 3.2.4 *No que segue, a letra C denotará várias constantes e não será necessariamente a mesma nas diversas vezes que aparecer. Quando uma constante depender de uma variável, esta variável aparecerá como um índice da constante. Por exemplo, denotaremos por C_η uma constante que depende de η. No entanto, para não carregar a notação, como a dimensão n está fixada, omitiremos a dependência de n.*

Lema 3.2.5 *Sejam Ω_k, Q_j^k, η e R como na Observação 3.2.3. Então existe uma constante $C_\eta > 0$ tal que*

(i) $\Omega_k = \bigcup_j Q_j^k$ e $Q_i^k \bigcap Q_j^k = \emptyset$ para $i \neq j$;

(ii) $RQ_j^{k^*} \subset \Omega_k$ e $4RQ_j^{k^*} \bigcap \Omega_k^c \neq \emptyset$, para todo (k, j), desde que $\Omega_k \neq S^n$;

(iii) $\sum_j \chi_{\eta Q_j^{k^*}}(z) \leq C_\eta \, \chi_{\Omega_k}(z)$, para todo $z \in S^n$ e todo $k \in \mathbb{Z}$;

(iv) O número de elementos Q_s^k que interceptam uma bola fixada $\eta Q_j^{k^*}$ é no máximo C_η.

Demonstração. Da construção de Ω_k e dos Q_j^k temos (i). A primeira inclusão de (ii) segue da definição dos Q_j^k. Vamos mostar agora que $4RQ_j^{k^*} \bigcap \Omega_k^c \neq \emptyset$ para todo (k, j), desde que $\Omega_k \neq S^n$. Pela maximalidade de Q_j^k, se $Q_j^k \in \mathcal{A}_s$ e $\widetilde{Q}$ é o único elemento de $\mathcal{A}_{s-1}$ que contém Q_j^k, então $R\widetilde{Q}^* \bigcap \Omega_k^c \neq \emptyset$. Seja, então, $z \in R\widetilde{Q}^* \bigcap \Omega_k^c$. Se $x_{Q_j^k}$ é um elemento de Q_j^k e $x_{\widetilde{Q}}$ é um elemento de $\widetilde{Q}$ dados na Observação 1.2.9, temos

$$|z - x_{Q_j^k}| \leq |z - x_{\widetilde{Q}}| + |x_{\widetilde{Q}} - x_{Q_j^k}| \leq R\delta_{s-1}^n + \delta_{s-1}^n \leq 2R\delta_{s-1}^n = 4R\delta_s^n.$$

Logo $z \in 4RQ_j^{k^*}$ e assim $4RQ_j^{k^*} \bigcap \Omega_k^c \neq \emptyset$, o que demonstra (ii). Vamos demonstrar (iii). Se $\Omega_k = S^n$ então a propriedade (iii) é trivialmente satisfeita. Vamos supor $\Omega_k \neq S^n$. É claro que, se $z \notin \Omega_k$ a desiguladade (iii) é satisfeita, pois, neste caso, o lado direito da desigualdade é zero. Além disso, como $Q_j^k \subset \Omega_k$, por (ii) temos que $RQ_j^{k^*} \subset \Omega_k$. Temos também que $\eta Q_j^{k^*} \subset RQ_j^{k^*} \subset \Omega_k$ e, portanto, se $z \notin \Omega_k$ temos que $z \notin \eta Q_j^{k^*}$ para todo j, o que implica que o lado esquerdo da desigualdade também é zero. Fixemos agora $z \in \Omega_k$ e suponha $z \in \eta Q_j^{k^*}$. Afirmamos que

$$\frac{1}{2}\eta\delta_l^n \leq d(z, \Omega_k^c) \leq 7\eta\delta_l^n, \tag{3.20}$$

se $Q_j^k \in \mathcal{A}_l$. De fato, da primeira afirmação em (ii) segue que

$$R\delta_l^n \leq d(x_{Q_j^k}, \Omega_k^c) \leq |x_{Q_j^k} - z| + d(z, \Omega_k^c) \leq \eta\delta_l^n + d(z, \Omega_k^c),$$

isto é,

$$\frac{1}{2}\eta\delta_l^n = R\delta_l^n - \eta\delta_l^n \leq d(z, \Omega_k^c),$$

o que demonstra a primeira desigualdade em (3.20). Para demonstrar a segunda desigualdade em (3.20), observamos que a segunda afirmação em (ii) nos diz que $d(x_{Q_j^k}, \Omega_k^c) \leq 4R\delta_l^n$. Então,

$$d(z, \Omega_k^c) \leq |z - x_{Q_j^k}| + d(x_{Q_j^k}, \Omega_k^c) \leq \eta\delta_l^n + 4R\delta_l^n = \eta\delta_l^n + 4 \cdot \frac{3}{2}\eta\delta_l^n = 7\eta\delta_l^n,$$

o que demonstra (3.20). Agora, seja $s = d(z, \Omega_k^c)$. Então

$$Q_j^k \subset B(z, 4s). \tag{3.21}$$

De fato, se $w \in Q_j^k$, temos por (3.20)

$$|z - w| \leq |z - x_{Q_j^k}| + |x_{Q_j^k} - w| \leq \eta\delta_l^n + \delta_l^n < 2\eta\delta_l^n \leq 4d(z, \Omega_k^c) = 4s.$$

Logo, $w \in B(z, 4s)$, o que demonstra (3.21). Também temos

$$B(z, 4s) \subset 29\eta B(x_{Q_j^k}, \delta_l^n). \tag{3.22}$$

De fato, se $w \in B(z, 4s)$ então por (3.20), temos

$$|w - x_{Q_j^k}| \leq |w - z| + |z - x_{Q_j^k}| \leq 4s + \eta\delta_l^n \leq 4 \cdot 7\eta\delta_l^n + \eta\delta_l^n = 29\eta\delta_l^n,$$

o que demonstra (3.22). Como a medida de Lebesgue σ sobre S^n é uma medida doubling, segue da Observação 1.2.9 que existe uma constante C_η dependendo somente da constante doubling para σ e de η tal que

$$|B(z, 4s)| \leq C_\eta\, |B(x_{Q_j^k}, \delta_l^n)| \leq C_\eta\, |B(x_{Q_j^k}, C_1\delta_l^n)| \leq C_\eta\, |Q_j^k|. \tag{3.23}$$

Segue por (3.23) e (3.21) que

$$\begin{aligned}
\sum_j \chi_{\eta Q_j^{k*}}(z) &\leq \frac{C_\eta}{|B(z,4s)|}\sum_j |Q_j^k|\chi_{\eta Q_j^{k*}}(z) \\
&= \frac{C_\eta}{|B(z,4s)|}\left|\bigcup_j \{Q_j^k : z \in \eta Q_j^{k*}\}\right| \\
&\leq C_\eta.
\end{aligned}$$

Isto demonstra (iii). Para demonstrar (iv), observamos que, se $\Omega_k = S^n$, a propriedade (iv) é trivial. Vamos supor $\Omega_k \neq S^n$. Suponha que Q_s^k intercepta uma bola fixada ηQ_j^{k*}e seja z nesta intersecção. Então (3.20) vale da seguinte maneira: se $Q_s^k \in \mathcal{A}_m$ e $Q_j^k \in \mathcal{A}_l$, então, como $z \in Q_s^k \bigcap \eta Q_j^{k*}$, temos

$$\frac{1}{2}\eta\delta_m^n \leq d(z,\Omega_k^c) \leq 7\eta\delta_m^n$$

e

$$\frac{1}{2}\eta\delta_l^n \leq d(z,\Omega_k^c) \leq 7\eta\delta_l^n.$$

Logo, $\delta_m^n \leq 14\delta_l^n$ e $\delta_l^n \leq 14\delta_m^n$. Afirmamos que

$$Q_s^k \subset 29\eta Q_j^{k*} \subset 421\eta Q_s^{k*}. \tag{3.24}$$

De fato, sejam $x_{Q_j^k}$ e $x_{Q_s^k}$ elementos de Q_j^k e Q_s^k respectivamente, dados na Observação 1.2.9. Se $w \in Q_s^k$ então

$$|w-z| \leq |w - x_{Q_s^k}| + |x_{Q_s^k} - z| \leq \delta_m^n + \delta_m^n \leq 28\delta_l^n.$$

Assim,

$$|w - x_{Q_j^k}| \leq |w-z| + |z - x_{Q_j^k}| \leq 28\delta_l^n + \eta\delta_l^n \leq 29\eta\delta_l^n,$$

e, portanto, $w \in 29\eta B(x_{Q_j^k}, \delta_l^n)$, o que demonstra a primeira inclusão em (3.24). Para demonstrar a segunda inclusão, seja $w \in 29\eta Q_j^{k*}$. Então

$$\begin{aligned}
|w - x_{Q_s^k}| &\leq |w - x_{Q_j^k}| + |x_{Q_j^k} - x_{Q_s^k}| \\
&\leq 29\eta\delta_l^n + |x_{Q_j^k} - z| + |z - x_{Q_s^k}| \\
&\leq 29\eta\delta_l^n + \eta\delta_l^n + \delta_m^n
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq 30\eta\delta_l^n + \delta_m^n \\
&\leq 30\eta \cdot 14\delta_m^n + \delta_m^n \\
&\leq 421\eta\delta_m^n,
\end{aligned}
$$

o que demonstra a segunda inclusão em (3.24). Por (3.24), pela Observação 1.2.9 e do fato que a medida de Lebesgue σ é uma medida doubling sobre S^n, segue que existe uma constante C_η que só depende da constante doubling para a medida σ e de η tal que

$$
|29\eta Q_j^{k^*}| \leq |421\eta Q_s^{k^*}| \leq C_\eta \, |Q_s^{k^*}| \leq C_\eta \, |B(x_{Q_s^k}, C_1\delta_m^n)| \leq C_\eta |Q_s^k|. \tag{3.25}
$$

Segue por (3.25) e (3.24) que

$$
\begin{aligned}
\#\{s : Q_s^k \bigcap \eta Q_j^{k^*} \neq \emptyset\} &= \sum_{s\in\{s:Q_s^k \bigcap \eta Q_j^{k^*} \neq \emptyset\}} 1 \\
&\leq \frac{C_\eta}{|29\eta Q_j^{k^*}|} \sum_{s\in\{s:Q_s^k \bigcap \eta Q_j^{k^*} \neq \emptyset\}} |Q_s^k| \\
&\leq \frac{C_\eta}{|29\eta Q_j^{k^*}|} \left| \bigcup_{s\in\{s:Q_s^k \bigcap \eta Q_j^{k^*} \neq \emptyset\}} Q_s^k \right| \\
&\leq \frac{C_\eta}{|29\eta Q_j^{k^*}|} |29\eta Q_j^{k^*}| \\
&= C_\eta,
\end{aligned}
$$

o que completa a demonstração de (iv).

Lema 3.2.6 *Sejam Ω_k, Q_j^k, η e R dados como na Observação 3.2.3. Suponha $\Omega_k \neq S^n$. Então existe uma constante $C_\eta > 0$ tal que para todo (k, j), temos*

$$
P_t(x, y) \leq C_\eta \, P_t(z, y),
$$

para $x \in Q_j^k$, $(y, t) \notin 2\widehat{Q}_j^{k^*}$ e $z \in 4RQ_j^{k^*}$.

Demonstração. Primeiramente lembramos que, se $Q_j^{k^*} = U(x_{Q_j^k}, l)$, então

$$
2\widehat{Q}_j^{k^*} = \begin{cases} 2Q_j^{k^*} \times [0, 1), & \text{para } \ 1 - \sqrt{2} \leq l \leq 1/2 \\ 2Q_j^{k^*} \times [-1 + 2l, 1), & \text{para } \ 1/2 \leq l < 1. \end{cases}
$$

Vamos supor $z \in 4RQ_j^{k^*}$, $x \in Q_j^k$ e $(y,t) \notin 2\widehat{Q}_j^{k^*}$. Como $(y,t) \notin 2\widehat{Q}_j^{k^*}$, temos duas possibilidades:

(a) $y \notin 2Q_j^{k^*}$ ou

(b) $t \notin [-1+2l, 1)$ e $1/2 \leq l < 1$.

Vamos analisar cada um destes casos separadamente. Vamos supor (a), isto é, $y \notin 2Q_j^{k^*}$, e vamos escrever $Q_j^{k^*} = U(x_{Q_j^k}, l) = B(x_{Q_j^k}, s)$. Como $x \in Q_j^k$ e $y \notin 2Q_j^{k^*}$, temos que $|x-y| \geq s$. Por outro lado, como $z \in 4RQ_j^{k^*}$, temos que

$$|z-x| \leq |z - x_{Q_j^k}| + |x_{Q_j^k} - x| \leq 4Rs + s = 4 \cdot \frac{3}{2}\eta s + s \leq 7\eta s.$$

Então,

$$|z-y| \leq |z-x| + |x-y| \leq 7\eta s + |x-y| \leq 7\eta|x-y| + |x-y| \leq 8\eta|x-y|.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
P_t(x,y) &= c_n \frac{1-t^2}{((1-t)^2 + t|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \\
&\leq c_n \frac{1-t^2}{\left((1-t)^2 + \frac{t}{(8\eta)^2}|z-y|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} \\
&= (8\eta)^{n+1} c_n \frac{1-t^2}{((8\eta)^2(1-t)^2 + t|z-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \\
&\leq (8\eta)^{n+1} c_n \frac{1-t^2}{((1-t)^2 + t|z-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}.
\end{aligned}$$

Vamos, agora, supor (b), isto é, $t \notin [-1+2l, 1)$. Vamos escrever $Q_j^{k^*} = U(x_{Q_j^k}, l) = B(x_{Q_j^k}, s)$, onde $s = h(l) = \sqrt{2}(1-l)$. É suficiente supor $y \in 2Q_j^{k^*}$ pois, caso contrário, temos o ítem (a). Então, como $z \in 4RQ_j^{k^*}$ e $y \in 2Q_j^{k^*}$, temos que

$$|z-y| \leq |z - x_{Q_j^k}| + |x_{Q_j^k} - y| \leq 4Rs + 2s \leq 4 \cdot \frac{3}{2}\eta s + 2\eta s = 8\eta s.$$

Ainda, $t < -1 + 2l$ implica $(1-t) > \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}(1-l) = \sqrt{2}s \geq \frac{\sqrt{2}}{8\eta}|z-y|$. Então,

$$\begin{aligned}
P_t(x,y) &= c_n \frac{1-t^2}{((1-t)^2 + t|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \\
&= c_n \frac{1-t^2}{\left(\frac{(1-t)^2}{2} + \frac{(1-t)^2}{2} + t|x-y|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} \\
&\leq c_n \frac{1-t^2}{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{8\eta}\right)^2 |z-y|^2 + \frac{(1-t)^2}{2} + t|x-y|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} \\
&\leq c_n \frac{1-t^2}{\left(\frac{1}{(8\eta)^2}|z-y|^2 + \frac{(1-t)^2}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \\
&= (2 \cdot (8\eta)^2)^{\frac{n+1}{2}}\, c_n \frac{1-t^2}{(2|z-y|^2 + (8\eta)^2(1-t)^2)^{\frac{n+1}{2}}} \\
&\leq (2 \cdot (8\eta)^2)^{\frac{n+1}{2}}\, c_n \frac{1-t^2}{(|z-y|^2 + (1-t)^2)^{\frac{n+1}{2}}} \\
&\leq (2 \cdot (8\eta)^2)^{\frac{n+1}{2}}\, P_t(z,y),
\end{aligned}$$

o que encerra a demonstração do lema.

Lema 3.2.7 *Sejam f, μ, Q_j^k e η dados como na Observação 3.2.3. Então existe uma constante $C_\eta > 0$, tal que para todo (k,j), temos*

$$P^*(\chi_{(2\widehat{Q}_j^{k^*})^c} f\mu)(x) \leq C_\eta\, 2^k \tag{3.26}$$

para $x \in Q_j^k$.

Demonstração. Se $\Omega_k = S^n = Q_j^k \in \mathcal{A}_0$ então $(2\widehat{Q}_j^{k^*}) = S^n \times [0,1)$ e daí $(2\widehat{Q}_j^{k^*})^c = \emptyset$. Logo, vale (3.26). Vamos supor agora $\Omega_k \neq S^n$. Seja $z \in 4RQ_j^{k^*} \bigcap \Omega_k^c$, o que é possível pelo Lema 3.2.5(ii). A desigualdade (3.26) segue da desigualdade

$$P_t(x,y) \leq C_\eta\, P_t(z,y), \qquad x \in Q_j^k, \;\; (y,t) \notin 2\widehat{Q}_j^{k^*}, \tag{3.27}$$

demonstrada no Lema 3.2.6. Multiplicando ambos os membros de (3.27) por $f(y,t)$ e integrando sobre $(2\widehat{Q}_j^{k^*})^c$ com respeito a $d\mu(y,t)$, temos, para $x \in Q_j^k$

$$P^*(\chi_{(2\widehat{Q}_j^{k^*})^c} f\mu)(x) \;=\; \int_{(2\widehat{Q}_j^{k^*})^c} P_t(x,y) f(y,t)\, d\mu(y,t)$$

$$\begin{aligned}
&\le C_\eta \int_{(2\widehat{Q}_j^{k^*})^c} P_t(z,y) f(y,t) d\mu(y,t) \\
&\le C_\eta \int_{S^n \times [0,1)} P_t(z,y) f(y,t) d\mu(y,t) \\
&= C_\eta \, P^*(f\mu)(z) \\
&\le C_\eta \, 2^k,
\end{aligned}$$

o que demonstra (3.26).

Observação 3.2.8 *No que segue, fixaremos* $\eta \ge 30$.

Definição 3.2.9 *Sejam* f, Ω_k, Q_j^k, L_k *e* η *como na Observação 3.2.3. Fixemos um inteiro* $m \ge 2$ *satisfazendo* $2^{m-2} > C_\eta$, *onde a constante* C_η *é a mesma que aparece no Lema 3.2.7 (e, portanto, é a mesma constante* C_η *do Lema 3.2.6) e só depende da dimensão* n *e de* η, *que agora está fixado. Assim,* m *independe de* f. *Vamos definir o conjunto*

$$E_j^k = Q_j^k \cap (\Omega_{k+m-1} - \Omega_{k+m}),$$

para $k \in \mathbb{Z}$ *e* $j \in L_k$.

Observação 3.2.10 *Como* η *está fixado, a partir de agora escreveremos apenas* C *para denotar as "novas constantes"* C_η *que dependerem de* η.

Definição 3.2.11 *Sejam* Ω_k *e* Q_j^k *como na Observação 3.2.3. Definimos* $\widehat{\Omega}_k = \bigcup_j \widehat{Q}_j^k$.

Lema 3.2.12 *Sejam* Ω_k, Q_j^k, L_k *e* μ *como na Observação 3.2.3. Seja* ω *uma medida de Borel finita e não negativa sobre* S^n. *Seja* E_j^k *como na Definição 3.2.9. Se* $k \in \mathbb{Z}$ *e* $j \in L_k$ *temos que*

$$|E_j^k|_\omega \le 2^{-k} \, (\sigma_j^k + \tau_j^k),$$

onde

$$\sigma_j^k = \int_{2\widehat{Q}_j^{k^*} - \widehat{\Omega}_{k+m}} P(\chi_{E_j^k}\omega)(y,t) f(y,t) d\mu(y,t)$$

e

$$\tau_j^k = \int_{2\widehat{Q}_j^{k^*} \cap \widehat{\Omega}_{k+m}} P(\chi_{E_j^k}\omega)(y,t) f(y,t) d\mu(y,t).$$

Demonstração. Para $x \in E_j^k \subset \Omega_{k+m-1}$, segue de (3.26) e da escolha de m na Definição 3.2.9 que

$$
\begin{aligned}
P^*(\chi_{2\widehat{Q}_j^{k*}} f\mu)(x) &= P^*(f\mu)(x) - P^*(\chi_{(2\widehat{Q}_j^{k*})^c} f\mu)(x) \\
&> 2^{k+m-1} - C_\eta\, 2^k \\
&> 2^{k+m-1} - 2^{k+m-2} \\
&\geq 2^k.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
|E_j^k|_\omega &= \int_{E_j^k} d\omega(x) \\
&\leq 2^{-k} \int_{E_j^k} P^*(\chi_{2\widehat{Q}_j^{k*}} f\mu)(x) d\omega(x) \\
&= 2^{-k} \int_{E_j^k} \int_{S^n \times [0,1)} P_t(x,y) f(y,t) \chi_{2\widehat{Q}_j^{k*}}(y,t) d\mu(y,t) d\omega(x) \\
&= 2^{-k} \int_{E_j^k} \int_{2\widehat{Q}_j^{k*}} P_t(x,y) f(y,t) d\mu(y,t) d\omega(x) \\
&= 2^{-k} \int_{2\widehat{Q}_j^{k*}} f(y,t) \int_{E_j^k} P_t(x,y) d\omega(x) d\mu(y,t) \\
&= 2^{-k} \int_{2\widehat{Q}_j^{k*}} f(y,t) \int_{S^n} P_t(x,y) \chi_{E_j^k}(x) d\omega(x) d\mu(y,t) \\
&= 2^{-k} \int_{2\widehat{Q}_j^{k*}} P(\chi_{E_j^k}\omega)(y,t) f(y,t) d\mu(y,t) \\
&= 2^{-k}(\sigma_j^k + \tau_j^k).
\end{aligned}
$$

Definição 3.2.13 *Sejam Q_j^k e L_k dados como na Observação 3.2.3. Seja m o inteiro fixado na Definição 3.2.9. Dados $k \in \mathbb{Z}$ e $j \in L_k$, definimos o conjunto*

$$H_j^k = \{i : Q_i^{k+m} \bigcap 2Q_j^{k^*} \neq \emptyset\}.$$

Lema 3.2.14 *Sejam Q_j^k e L_k dados como na Observação 3.2.3. Seja H_j^k como na Definição 3.2.13. Dados $k \in \mathbb{Z}$ e $j \in L_k$ temos que se $i \in H_j^k$ então $Q_i^{k+m} \subset 30Q_j^{k^*}$.*

Demonstração. Fixemos $k \in \mathbb{Z}$ e $j \in L_k$ e seja $i \in H_j^k$. Então $Q_i^{k+m} \bigcap 2Q_j^{k^*} \neq \emptyset$. Seja $z \in Q_i^{k+m} \bigcap 2Q_j^{k^*}$. Vamos escrever $Q_i^{k+m^*} = B(x_{Q_i^{k+m}}, d_i^{k+m})$ e $Q_j^{k^*} = B(x_{Q_j^k}, d_j^k)$. De (3.20) temos

$$\frac{1}{2}\eta d_j^k \leq d(z, \Omega_k^c) \leq 7\eta d_j^k,$$

e

$$\frac{1}{2}\eta d_i^{k+m} \leq d(z, \Omega_{k+m}^c) \leq 7\eta d_i^{k+m}.$$

Como $\Omega_{k+m} \subset \Omega_k$, temos que $d(z, \Omega_{k+m}^c) \leq d(z, \Omega_k^c)$. Usando este fato e as duas desigualdades acima, temos

$$d_i^{k+m} \leq \frac{2}{\eta} d(z, \Omega_{k+m}^c) \leq \frac{2}{\eta} d(z, \Omega_k^c) \leq \frac{2}{\eta} \cdot 7\eta d_j^k = 14 d_j^k. \tag{3.28}$$

Seja $y \in Q_i^{k+m}$. Então,

$$\begin{aligned}
|y - x_{Q_j^k}| &\leq |y - z| + |z - x_{Q_j^k}| \\
&\leq |y - x_{Q_i^{k+m}}| + |x_{Q_i^{k+m}} - z| + |z - x_{Q_j^k}| \\
&\leq d_i^{k+m} + d_i^{k+m} + 2d_j^k \\
&\leq 14d_j^k + 14d_j^k + 2d_j^k \\
&= 30d_j^k,
\end{aligned}$$

o que encerra a demonstração do lema.

Lema 3.2.15 *Sejam Q_j^k e L_k dados como na Observação 3.2.3. Seja m como na Definição 3.2.9. Dados $k \in \mathbb{Z}$, $i \in L_{k+m}$ e se j_1 e j_2 são tais que $Q_i^{k+m} \bigcap 2{Q_{j_s}^k}^* \neq \emptyset$ para $s = 1, 2$ então*

$$\frac{1}{70} d_{j_2}^k \leq d_{j_1}^k \leq 70 d_{j_2}^k,$$

onde $d_{j_s}^k$ é o raio de ${Q_{j_s}^k}^*$.

Demonstração. Sejam $z_1 \in Q_i^{k+m} \bigcap 2{Q_{j_1}^k}^*$ e $z_2 \in Q_i^{k+m} \bigcap 2{Q_{j_2}^k}^*$. De (3.20) temos

$$\frac{1}{2}\eta d_{j_1}^k \leq d(z_1, \Omega_k^c) \leq 7\eta d_{j_1}^k,$$

e

$$\frac{1}{2}\eta d_{j_2}^k \leq d(z_2, \Omega_k^c) \leq 7\eta d_{j_2}^k.$$

Então se $Q_i^{k+m^*} = B(x_{Q_i^{k+m}}, d_i^{k+m})$ e $Q_{j_s}^{k\ *} = B(x_{Q_{j_s}^k}, d_{j_s}^k)$ para $s = 1, 2$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\eta d_{j_1}^k &\le d(z_1, \Omega_k^c) \\
&\le |z_1 - z_2| + d(z_2, \Omega_k^c) \\
&\le |z_1 - x_{Q_i^{k+m}}| + |x_{Q_i^{k+m}} - z_2| + d(z_2, \Omega_k^c) \\
&\le d_i^{k+m} + d_i^{k+m} + 7\eta d_{j_2}^k.
\end{aligned}$$

Mas como $i \in H_{j_2}^k$, segue de (3.28) que $d_i^{k+m} \le 14 d_{j_2}^k$. Logo,

$$\frac{1}{2}\eta d_{j_1}^k \le 2d_i^{k+m} + 7\eta d_{j_2}^k \le 28 d_{j_2}^k + 7\eta d_{j_2}^k \le 35\eta d_{j_2}^k,$$

isto é, $d_{j_1}^k \le 70 d_{j_2}^k$. De maneira inteiramente análoga é possível mostrar que $d_{j_2}^k \le 70 d_{j_1}^k$.

Lema 3.2.16 *Existe uma constante $C > 0$ tal que para todo $Q \in \mathcal{A}$ temos*

$$\#\{Q' \in \mathcal{A} : Q \bigcap 2Q'^* \neq \emptyset \ \text{ e } \ 1/14\, d \le d' \le 14d\} \le C,$$

onde d e d' denotam os raios de Q^* e Q'^* respectivamente.

Demonstração. Primeiramente vamos lembrar que, pela Observação 1.2.9, se $Q \in \mathcal{A}_k$, então existe $x_Q \in Q$ tal que $Q^* = B(x_Q, \varrho 2^{-k})$, onde ϱ é uma constante que só depende da dimensão n.

Fixemos $Q \in \mathcal{A}$ e suponhamos que $Q \in \mathcal{A}_{k_0}$. Então,

$$\{Q' \in \mathcal{A} : 1/14\, d \le d' \le 14d\} \subset \bigcup_{k=k_0-4}^{k_0+4} \mathcal{A}_k. \tag{3.29}$$

De fato, seja $Q' \in \mathcal{A}_k$, tal que $1/14\ d \le d' \le 14d$. Então $1/14\ \varrho 2^{-k_0} \le \varrho 2^{-k} \le 14\varrho 2^{-k_0}$, e assim $k_0 + \log_2 14 \ge k \ge k_0 - \log_2 14$. Isto demonstra (3.29). Portanto,

$$\#\{Q' \in \mathcal{A} : Q \bigcap 2Q'^* \neq \emptyset \ \text{ e } \ 1/14\, d \le d' \le 14d\} \le \sum_{k=k_0-4}^{k_0+4} \#\{Q' \in \mathcal{A}_k : Q \bigcap 2Q'^* \neq \emptyset\}.$$

Vamos primeiramente estimar $\#\{Q' \in \mathcal{A}_{k_0} : Q \cap 2Q'^* \neq \emptyset\}$. Se $Q' \in \mathcal{A}_{k_0}$, temos que $d' = d$. Se tivermos também $Q \cap 2Q'^* \neq \emptyset$, vamos mostrar que

$$Q' \subset 4Q^*. \tag{3.30}$$

Seja $z \in Q \bigcap 2Q'^*$, sejam x_Q e $x_{Q'}$ os centros das bolas Q^* e Q'^* respectivamente e seja $w \in Q'$. Temos

$$|w - z| \leq |w - x_{Q'}| + |x_{Q'} - z| \leq d' + 2d' = 3d,$$

e assim,

$$|w - x_Q| \leq |w - z| + |z - x_Q| \leq 3d + d = 4d,$$

o que demonstra (3.30). Do fato da medida de Lebesgue sobre S^n ser doubling, pelo Corolário 1.2.10(ii) e por (3.30), existe uma constante $C > 1$ tal que

$$|4Q^*| \leq C|Q^*| = C|Q'^*| \leq C|Q'|. \tag{3.31}$$

Portanto, por (3.31), temos

$$\begin{aligned}
\#\{Q' \in \mathcal{A}_{k_0} : Q \textstyle\bigcap 2Q'^* \neq \emptyset\} &= \sum_{\bar{Q} \in \{Q' \in \mathcal{A}_{k_0} : Q \bigcap 2Q'^* \neq \emptyset\}} 1 \\
&\leq \frac{C}{|4Q^*|} \sum_{\bar{Q} \in \{Q' \in \mathcal{A}_{k_0} : Q \bigcap 2Q'^* \neq \emptyset\}} |\bar{Q}| \\
&= \frac{C}{|4Q^*|} \left| \bigcup_{\bar{Q} \in \{Q' \in \mathcal{A}_{k_0} : Q \bigcap 2Q'^* \neq \emptyset\}} \bar{Q} \right| \\
&\leq \frac{C}{|4Q^*|} |4Q^*| \\
&= C.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Agora, como $Q \in \mathcal{A}_{k_0}$, existe um único $\bar{Q} \in \mathcal{A}_{k_0-i}$, $i = 1, 2, 3, 4$, tal que $Q \subset \bar{Q}$. Então, como a desigualdade (3.32) também é válida se supusermos $Q \in \mathcal{A}_{k_0-i}$, e tomarmos $Q' \in \mathcal{A}_{k_0-i}$, temos

$$\#\{Q' \in \mathcal{A}_{k_0-i} : Q \textstyle\bigcap 2Q'^* \neq \emptyset\} \leq \#\{Q' \in \mathcal{A}_{k_0-i} : \bar{Q} \bigcap 2Q'^* \neq \emptyset\} \leq C. \tag{3.33}$$

Pelo Teorema 1.2.5(ii), temos que para todo $k \geq 0$, se $Q \in \mathcal{A}_k$, então Q é a união de no máximo 2^n elementos de $\mathcal{A}_{k+1}$. Portanto, por (3.32) e por (3.33), temos

$$\#\{Q' \in \mathcal{A} : Q \textstyle\bigcap 2Q'^* \neq \emptyset \text{ e } 1/14\, d \leq d' \leq 14d\} \leq$$

$$
\begin{aligned}
&\le \sum_{k=k_0-4}^{k_0+4} \#\{Q' \in \mathcal{A}_k : Q \bigcap 2Q'^* \neq \emptyset\} \\
&= \sum_{k=k_0-4}^{k_0} \#\{Q' \in \mathcal{A}_k : Q \bigcap 2Q'^* \neq \emptyset\} + \sum_{k=k_0+1}^{k_0+4} \#\{Q' \in \mathcal{A}_k : Q \bigcap 2Q'^* \neq \emptyset\} \\
&\le 5C + 2^{4n} \#\{Q' \in \mathcal{A}_{k_0} : Q \bigcap 2Q'^* \neq \emptyset\} \\
&\le C,
\end{aligned}
$$

o que demonstra o lema.

Lema 3.2.17 *Sejam Q_j^k e L_k como na Observação 3.2.3. Seja m o inteiro da Definição 3.2.9. Existe um inteiro positivo C tal que para todo $Q \in \mathcal{A}$ e todo $0 \le M \le m-1$ existem no máximo C pares de índices (k, j), com $k \in \mathbb{Z}$ e $j \in L_k$, satisfazendo*

(i) $k \equiv M \pmod{m}$;

(ii) Os elementos Q_j^k não estão entre os elementos $\{Q_i^{k+m}\}_i$;

(iii) $Q = Q_i^{k+m}$ *para algum* $i \in L_{k+m}$ *tal que* $Q_i^{k+m} \bigcap 2Q_j^{k^*} \neq \emptyset$.

Demonstração. Fixemos $Q \in \mathcal{A}$ e $0 \le M \le m-1$. Existe uma seqüência de inteiros congruentes a M módulo m consecutivos, $k_1, k_2, \ldots, k_n$, com $n \ge 1$, e uma seqüência $i_1, i_2, \ldots, i_n$, tal que $Q = Q_{i\sigma}^{k\sigma+m}$, para $\sigma = 1, 2, \ldots, n$ e tal que $Q = Q_i^{k+m}$ implica $(k, i) = (k_\sigma, i_\sigma)$ para algum σ, $\sigma = 1, 2, \ldots, n$. Observamos que $n < \infty$, pois $\bigcap_k \Omega_{k+m} \neq \emptyset$.

Vamos primeiramente mostrar que o resultado é válido para $\sigma = 1$, isto é, existem no máximo C pares de índices (k_1, j) satisfazendo (i), (ii) e (iii) simultaneamente. Para isto, é suficiente mostrar que

$$
\#\{j : Q_{i_1}^{k_1+m} \bigcap 2Q_j^{k_1^*} \neq \emptyset\} \le C,
$$

para algum inteiro positivo C. Mas, se $Q_{i_1}^{k_1+m} \bigcap 2Q_j^{k_1^*} \neq \emptyset$, então, pelo Lema 3.2.14 temos que $Q_{i_1}^{k_1+m} \subset 30Q_j^{k_1^*}$. Portanto, se $y \in Q_{i_1}^{k_1+m}$, pelo Lema 3.2.5(iii), temos

$$
\#\{j : Q_{i_1}^{k_1+m} \bigcap 2Q_j^{k_1^*} \neq \emptyset\} = \sum_{j' \in \{j : Q_{i_1}^{k_1+m} \bigcap 2Q_j^{k_1^*} \neq \emptyset\}} 1
$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_j \chi_{H_j^{k_1}}(i_1)\\
&\leq \sum_j \chi_{30Q_j^{k_1*}}(y)\\
&\leq C\chi_{\Omega_{k_1}}(y)\\
&= C.
\end{aligned}$$

Suponhamos, agora, $\sigma > 1$ e seja (k_σ, j) satisfazendo (i), (ii) e (iii). Temos que $Q = Q_{i_\sigma-1}^{k_{\sigma-1}+m} = Q_{i_\sigma-1}^{k_\sigma} = Q_{i_\sigma}^{k_\sigma}$, pois os k_σ são inteiros consecutivos satisfazendo $k_\sigma \equiv M \pmod m$. Portanto, Q está entre os elementos $\{Q_s^{k_\sigma}\}_s$. Por (iii), temos que $Q \bigcap 2Q_j^{k_\sigma *} \neq \emptyset$. Portanto, se $d_j^{k_\sigma}$ é o raio de $Q_j^{k_\sigma *}$ e d é o raio de Q^*, temos que

$$\frac{1}{14}d \leq d_j^{k_\sigma} \leq 14d. \tag{3.34}$$

De fato, seja $z \in Q \bigcap 2Q_j^{k_\sigma *}$. Então, como $z \in Q \subset \Omega_{k_\sigma} = \bigcup_s Q_s^{k_\sigma}$, temos por (3.20)

$$\frac{1}{2}\eta d \leq d(z, \Omega_k^c) \leq 7\eta d,$$

e

$$\frac{1}{2}\eta d_j^{k_\sigma} \leq d(z, \Omega_k^c) \leq 7\eta\ d_j^{k_\sigma},$$

de onde segue (3.34). Mas, pelo Lema 3.2.16, temos que o conjunto $\Lambda_Q = \{Q' \in \mathcal{A} : Q \bigcap 2Q'^* \neq \emptyset \text{ e } 1/14\ d \leq d' \leq 14d\}$ tem no máximo C elementos. Portanto, como $Q_j^{k_\sigma}$ é tal que $Q \bigcap 2Q_j^{k_\sigma *} \neq \emptyset$ e $1/14\ d \leq d_j^{k_\sigma} \leq 14d$, devemos ter que $Q_j^{k_\sigma} \in \Lambda_Q$.

Agora, para cada $Q' \in \Lambda_Q$ existe no máximo um par (k, j) satisfazendo (i), (ii) e (iii) tal que $Q_j^k = Q'$. De fato, fixemos $Q' \in \Lambda_Q$ e vamos supor por absurdo que $(k_{\sigma_1}, j_1) \neq (k_{\sigma_2}, j_2)$, com $Q_{j_1}^{k_{\sigma_1}} = Q_{j_2}^{k_{\sigma_2}} = Q'$. Se $k_{\sigma_1} = k_{\sigma_2}$ então $j_1 \neq j_2$, o que é um absurdo, pois, neste caso temos $Q_{j_1}^{k_{\sigma_1}} \bigcap Q_{j_2}^{k_{\sigma_1}} = \emptyset$. Portanto, só podemos ter $k_{\sigma_1} \neq k_{\sigma_2}$. Sem perda de generalidade podemos assumir $k_{\sigma_1} > k_{\sigma_2}$. Então $k_{\sigma_1} \geq k_{\sigma_2} + m$. Assim $\Omega_{k_{\sigma_1}} \subset \Omega_{k_{\sigma_2}+m}$. Por (ii) temos que $Q_{j_1}^{k_{\sigma_1}} = Q_{j_2}^{k_{\sigma_2}}$ não está entre os elementos $\{Q_i^{k_{\sigma_2}+m}\}_i$. Portanto, $Q_{j_1}^{k_{\sigma_1}} \neq Q_i^{k_{\sigma_2}+m}$, para todo i. Mas, como $k_{\sigma_1} \geq k_{\sigma_2} + m$, temos então que $Q_{j_2}^{k_{\sigma_2}} = Q_{j_1}^{k_{\sigma_1}} \subset_{\neq} Q_i^{k_{\sigma_2}+m}$ para algum i. Mas isto é um absurdo, pois, por construção dos Q_j^k (veja Observação 3.2.3), temos que

$$RQ_{j_2}^{k_{\sigma_2}*} \subset_{\neq} RQ_i^{k_{\sigma_2}+m*} \subset \Omega_{k_{\sigma_2}+m} \subset \Omega_{k_{\sigma_2}},$$

e portanto $Q_{j_2}^{k_{\sigma_2}}$ não é maximal satisfazendo $RQ^* \subset \Omega_{k_{\sigma_2}}$. Logo, não podemos ter $(k_{\sigma_1}, j_1) \neq (k_{\sigma_2}, j_2)$, com $Q_{j_1}^{k_{\sigma_1}} = Q_{j_2}^{k_{\sigma_2}} = Q'$, o que implica que existe no máximo um par (k,j) tal que (k,j) satisfaz (i), (ii), e (iii) e $Q_j^k = Q'$. Isto demonstra o lema.

Lema 3.2.18 *Sejam Ω_k e Q_j^k dados como na Observação 3.2.3. Seja ω uma medida de Borel finita e não negativa sobre S^n. Fixemos $0 < \beta < 1$, seja m o inteiro fixado na Definição 3.2.9 e fixemos um inteiro M, $0 \leq M \leq m-1$. Para todo $(x,t) \in S^n \times [0,1)$, temos*

$$\sum_{\substack{(k,j)\in F \\ k\equiv M \pmod m}} \chi_{2\widehat{Q}_j^{k*}}(x,t)\chi_{(\widehat{\Omega}_{k+m})^c}(x,t) \leq C_m, \tag{3.35}$$

onde

$$F = \{(k,j) : |E_j^k|_\omega > \beta |Q_j^k|_\omega \quad e \quad \sigma_j^k > \tau_j^k\},$$

E_j^k é o conjunto da Definição 3.2.9 e σ_j^k, τ_j^k estão definidos no Lema 3.2.12.

Demonstração. Primeiramente vamos observar que, se $Q_j^{k*} = B(x_{Q_j^k}, d_j^k)$, então temos

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{(k,j)\in F \\ k\equiv M \pmod m}} \chi_{2\widehat{Q}_j^{k*}}(x,t)\chi_{(\widehat{\Omega}_{k+m})^c}(x,t) = \\
&= \sum_{\substack{(k,j)\in F \\ k\equiv M \pmod m \\ 2d_j^k > \sqrt{2}}} \chi_{2\widehat{Q}_j^{k*}}(x,t)\chi_{(\widehat{\Omega}_{k+m})^c}(x,t) + \sum_{\substack{(k,j)\in F \\ k\equiv M \pmod m \\ 2d_j^k \leq \sqrt{2}}} \chi_{2\widehat{Q}_j^{k*}}(x,t)\chi_{(\widehat{\Omega}_{k+m})^c}(x,t) \\
&= I + II.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Vamos estimar I e II separadamente. Para estimar I, vamos observar que se $Q_j^k \in \mathcal{A}_s$ então, pela Observação 1.2.9, temos que $d_j^k = \delta_s^n = 2\gamma_s^n$, onde γ_s^n é dado no Teorema 1.2.7. Portanto, existe $s_n > 0$ tal que se $s > s_n$ então $2\delta_s^n \leq \sqrt{2}$. Logo, pela Observação 1.2.4, temos

$$\begin{aligned}
I &= \sum_{\substack{(k,j)\in F \\ k\equiv M \pmod m \\ 2d_j^k > \sqrt{2}}} \chi_{2\widehat{Q}_j^{k*}}(x,t)\chi_{(\widehat{\Omega}_{k+m})^c}(x,t) \\
&\leq \sum_{\substack{(k,j)\in F \\ k\equiv M \pmod m \\ 2d_j^k > \sqrt{2}}} \chi_{2\widehat{Q}_j^{k*}}(x,t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{\substack{(k,j)\in F\\ k\equiv M \pmod m\\ 2d_j^k>\sqrt{2}}} \chi_{2Q_j^{k^*}}(x)\\
&\leq \#\{(k,j): 2d_j^k>\sqrt{2}\}\\
&\leq \sum_{s=0}^{s_n} \#\mathcal{A}_s\\
&= C_n. \qquad (3.37)
\end{aligned}$$

Agora, vamos estimar II. Temos

$$Q_j^{k^*} = B(x_{Q_j^k}, d_j^k) = U(x_{Q_j^k}, 1-\frac{\sqrt{2}}{2}d_j^k)$$

e assim

$$2Q_j^{k^*} = B(x_{Q_j^k}, 2d_j^k) = U(x_{Q_j^k}, 1-\sqrt{2}d_j^k).$$

Portanto, como $2d_j^k \leq \sqrt{2}$, temos

$$2\widehat{Q}_j^{k^*} = 2Q_j^{k^*} \times [1-\sqrt{2}d_j^k, 1).$$

Também, como

$$\widehat{\Omega}_{k+m} = \dot{\bigcup}_i \widehat{Q}_i^{k+m} = \dot{\bigcup}_i \left(Q_i^{k+m} \times \left[\alpha^{-1}(|Q_i^{k+m}|), 1\right)\right),$$

temos que

$$(\widehat{\Omega}_{k+m})^c = \left(\dot{\bigcup}_i Q_i^{k+m} \times \left[0, \alpha^{-1}(|Q_i^{k+m}|)\right)\right) \dot{\bigcup} (\Omega_{k+m})^c \times [0,1).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
II &= \sum_{\substack{(k,j)\in F\\ k\equiv M \pmod m\\ 2d_j^k\leq\sqrt{2}}} \chi_{2\widehat{Q}_j^{k^*}}(x,t)\chi_{(\widehat{\Omega}_{k+m})^c}(x,t)\\
&= \sum_{\substack{(k,j)\in F\\ k\equiv M \pmod m\\ 2d_j^k\leq\sqrt{2}}} \chi_{2\widehat{Q}_j^{k^*}}(x,t)\chi_{\cup_i Q_i^{k+m}\times\left[0,\alpha^{-1}(|Q_i^{k+m}|)\right)}(x,t) +\\
&+ \sum_{\substack{(k,j)\in F\\ k\equiv M \pmod m\\ 2d_j^k\leq\sqrt{2}}} \chi_{2\widehat{Q}_j^{k^*}}(x,t)\chi_{(\Omega_{k+m})^c\times[0,1)}(x,t)\\
&= III + IV. \qquad (3.38)
\end{aligned}$$

Vamos estimar III e IV separadamente. Para estimar III, fixemos $(x,t) \in S^n \times [0,1)$. Se $x \in \Omega_{k+m}$, existe um único $i_k = i_k(x)$ tal que $x \in Q_{i_k}^{k+m}$. Seja

$$k_1 = k_1(x) = max\{k \in \mathbb{Z} : x \in \Omega_{k+m}\},$$

e seja

$$F_M = \{(k,j) \in F : \ k \equiv \ M \ (mod \ \ m), \ \ 2d_j^k \leq \sqrt{2}, \ \ k \leq k_1\}.$$

Então,

$$\begin{aligned} III &= \sum_{(k,j)\in F_M} \chi_{2\widehat{Q}_j^{k*}}(x,t)\ \chi_{\cup_i Q_i^{k+m}\times\left[0,\alpha^{-1}(|Q_i^{k+m}|)\right)}(x,t) \\ &= \sum_{(k,j)\in F_M} \chi_{2Q_j^{k*}}(x)\ \chi_{\left[1-\sqrt{2}d_j^k,1\right)}(t)\ \chi_{Q_{i_k}^{k+m}}(x)\ \chi_{\left[0,\alpha^{-1}(|Q_{i_k}^{k+m}|)\right)}(t). \end{aligned}$$

Mas se $\chi_{2Q_j^{k*}}(x)\ \chi_{Q_{i_k}^{k+m}}(x) = 1$ então $x \in Q_{i_k}^{k+m} \bigcap 2Q_j^{k*}$ e, portanto, $i_k \in H_j^k$, o que nos dá $\chi_{H_j^k}(i_k) = 1$. Logo,

$$\begin{aligned} III &= \sum_{(k,j)\in F_M} \chi_{2Q_j^{k*}}(x)\ \chi_{\left[1-\sqrt{2}d_j^k,1\right)}(t)\ \chi_{Q_{i_k}^{k+m}}(x)\ \chi_{\left[0,\alpha^{-1}(|Q_{i_k}^{k+m}|)\right)}(t) \\ &\leq \sum_{(k,j)\in F_M} \chi_{H_j^k}(i_k)\ \chi_{\left[1-\sqrt{2}d_j^k,1\right)}(t)\ \chi_{\left[0,\alpha^{-1}(|Q_{i_k}^{k+m}|)\right)}(t). \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que se $\chi_{\left[1-\sqrt{2}d_j^k,1\right)}(t)\ \chi_{\left[0,\alpha^{-1}(|Q_{i_k}^{k+m}|)\right)}(t) = 1$ então $1 - \sqrt{2}d_j^k \leq t < \alpha^{-1}(|Q_{i_k}^{k+m}|)$ e portanto $\alpha(1-\sqrt{2}d_j^k) \geq \alpha(t) > |Q_{i_k}^{k+m}|$. Pela Observação 1.1.5, temos

$$\alpha(1-\sqrt{2}d_j^k) \ = \ |U(\mathbb{1}, 1-\sqrt{2}d_j^k)| \ = \ |B(\mathbb{1}, 2d_j^k)| \ \leq \ \frac{\omega_{n-1}2^n}{n} 2^n (d_j^k)^n \ = \ K_n^1 (d_j^k)^n,$$

com $K_n^1 = 2^{2n}\ \omega_{n-1}/n$. Agora, pela Observação 1.1.5 e pela Observação 1.2.9 temos

$$|Q_{i_k}^{k+m}| \ \geq \ |B(x_{Q_{i_k}^{k+m}}, C_1 d_{i_k}^{k+m})| \ \geq \ \frac{\omega_{n-1}2^{n-1}}{n\pi^{n-1}} C_1^n (d_{i_k}^{k+m})^n \ = \ K_n^2 (d_{i_k}^{k+m})^n,$$

com $K_n^2 = 2^{n-1}C_1^n\ \omega_{n-1}/n\pi^{n-1}$. Portanto, se $\chi_{\left[1-\sqrt{2}d_j^k,1\right)}(t)\ \chi_{\left[0,\alpha^{-1}(|Q_{i_k}^{k+m}|)\right)}(t) = 1$ então $K_n^1(d_j^k)^n \geq \alpha(t) > K_n^2(d_{i_k}^{k+m})^n$. Logo,

$$\begin{aligned} III &\leq \sum_{(k,j)\in F_M} \chi_{H_j^k}(i_k)\ \chi_{\left[1-\sqrt{2}d_j^k,1\right)}(t)\ \chi_{\left[0,\alpha^{-1}(|Q_{i_k}^{k+m}|)\right)}(t) \\ &\leq \sum_{(k,j)\in F_M} \chi_{H_j^k}(i_k)\ \chi_{\left(K_n^2(d_{i_k}^{k+m})^n,\ K_n^1(d_j^k)^n\right]}(\alpha(t)). \end{aligned}$$

Agora, seja

$$I_k = \{j : Q_{i_k}^{k+m} \bigcap 2Q_j^{k^*} \neq \emptyset\}.$$

Para cada $Q_{i_k}^{k+m}$ existe um único $j_k \in I_k$ tal que $Q_{i_k}^{k+m} \subset Q_{j_k}^k$. De fato, pela definição dos Q_i^{k+m} temos que $RQ_{i_k}^{k+m^*} \subset \Omega_{k+m} \subset \Omega_k = \dot{\bigcup} Q_j^k$. Logo, pela maximalidade dos Q_j^k, devemos ter que existe um único $Q_{j_k}^k$ tal que $Q_{i_k}^{k+m} \subset Q_{j_k}^k$. Observamos que, da maneira como os i_k foram escolhidos (de forma que $x \in Q_{i_k}^{k+m}$), temos que $Q_{j_k}^k = Q_{i_{k-m}}^k$. Pelo Lema 3.2.15, temos que se $j \in I_k$ então $d_j^k \leq 70 d_{i_{k-m}}^k$, onde $d_{i_{k-m}}^k$ é o raio de $Q_{i_{k-m}}^{k*}$. Então

$$\begin{aligned} III &\leq \sum_{(k,j)\in F_M} \chi_{H_j^k}(i_k)\, \chi_{\left(K_n^2 (d_{i_k}^{k+m})^n,\, K_n^1 (d_j^k)^n\right]}(\alpha(t)) \\ &\leq \sum_{(k,j)\in F_M} \chi_{H_j^k}(i_k)\, \chi_{\left(K_n^2 (d_{i_k}^{k+m})^n,\, K_n^1 70^n (d_{i_{k-m}}^k)^n\right]}(\alpha(t)). \end{aligned}$$

Sejam, agora, $n_1,\ n_2 \in \mathbb{Z}$ tais que $2^{n_1-1} < 70^n K_n^1 \leq 2^{n_1}$ e $2^{n_2} \leq K_n^2 < 2^{n_2+1}$. Como $K_n^2 < K_n^1$, temos que $n_2 < n_1$ e portanto existe um inteiro positivo r tal que $n_1 = n_2 + r$. Portanto,

$$\begin{aligned} III &\leq \sum_{(k,j)\in F_M} \chi_{H_j^k}(i_k)\, \chi_{\left(K_n^2 (d_{i_k}^{k+m})^n,\, K_n^1 70^n (d_{i_{k-m}}^k)^n\right]}(\alpha(t)) \\ &\leq \sum_{(k,j)\in F_M} \chi_{H_j^k}(i_k)\, \chi_{\left(2^{n_2} (d_{i_k}^{k+m})^n,\, 2^{n_1} (d_{i_{k-m}}^k)^n\right]}(\alpha(t)) \\ &= \sum_{(k,j)\in F_M} \chi_{H_j^k}(i_k)\, \chi_{\left(2^{n_2} (d_{i_k}^{k+m})^n,\, 2^r\, 2^{n_2} (d_{i_{k-m}}^k)^n\right]}(\alpha(t)). \end{aligned} \tag{3.39}$$

Pelo Lema 3.2.17, para um fixado $Q = Q_{i_{k_0}}^{k_0+m}$ existem no máximo C pares de índices (k, j) satisfazendo

(i) $k \equiv M \pmod m$;

(ii) Os elementos Q_j^k não estão entre os elementos $\{Q_i^{k+m}\}_i$;

(iii) $Q = Q_{i_{k_0}}^{k_0+m} = Q_{i_k}^{k+m}$ para algum i_k tal que $Q_{i_k}^{k+m} \bigcap 2Q_j^{k^*} \neq \emptyset$.

Agora, se $(k, j) \in F$, então o elemento Q_j^k não está entre os elementos $\{Q_i^{k+m}\}_i$. De fato, seja $(k, j) \in F$. Lembramos que $E_j^k = Q_j^k \bigcap (\Omega_{k+m-1} - \Omega_{k+m})$. Se Q_j^k estivesse entre os elementos $\{Q_i^{k+m}\}_i$, então $Q_j^k \subset \Omega_{k+m}$ e daí teríamos $E_j^k = \emptyset$, o que implica $|E_j^k|_\omega = 0$, o que é um absurdo para $(k,j) \in F$.

Como $d_{i_k}^{k+m}$ é o raio de $Q_{i_k}^{k+m^*}$ e nas parcelas da soma de (3.39) temos as condições (i), (ii), (iii) acima, então o raio $d_{i_{k_0}}^{k_0+m}$ se repete no máximo C vezes na soma em (3.39). Como $Q_{i_k}^{k+m} \subset Q_{i_{k-1}}^{k-1+m}$, podemos extrair uma subseqüência $\{d_{i_{k_s}}^{k_s+m}\}_s$ de $\{d_{i_k}^{k+m}\}_k$, estritamente decrescente, onde cada um de seus termos são extraídos de intervalos disjuntos de C termos da seqüência original. Pelo Lema 3.2.14 temos que se $i_k \in H_j^k$, então $Q_{i_k}^{k+m} \subset 30Q_j^{k^*}$. Lembrando que $x \in Q_{i_k}^{k+m}$ e utilizando o Lema 3.2.5(iii), temos

$$
\begin{aligned}
III &\leq \sum_{(k,j)\in F_M} \chi_{H_j^k}(i_k)\, \chi_{\left(2^{n_2}(d_{i_k}^{k+m})^n,\, 2^r\, 2^{n_2}(d_{i_{k-m}}^k)^n\right]}(\alpha(t)) \\
&= \sum_{(k,j)\in F_M} \chi_{H_j^k}(i_k)\, \chi_{\left(2^{n_2}(d_{i_k}^{k+m})^n,\, 2^{n_2}(d_{i_{k-m}}^k)^n\right]}(\alpha(t)) + \\
&+ \sum_{(k,j)\in F_M} \chi_{H_j^k}(i_k)\, \chi_{\left(2^{n_2}(d_{i_{k-m}}^k)^n,\, 2^r\, 2^{n_2}(d_{i_{k-m}}^k)^n\right]}(\alpha(t)) \\
&\leq \sum_k \left(\sum_j \chi_{H_j^k}(i_k)\right) \chi_{\left(2^{n_2}(d_{i_k}^{k+m})^n,\, 2^{n_2}(d_{i_{k-m}}^k)^n\right]}(\alpha(t)) + \\
&+ C\sum_{k_s} \left(\sum_j \chi_{H_j^{k_s}}(i_{k_s})\right) \chi_{\left(2^{n_2}(d_{i_{k_s-m}}^{k_s})^n,\, 2^r\, 2^{n_2}(d_{i_{k_s-m}}^{k_s})^n\right]}(\alpha(t)) \\
&\leq \sum_k \left(\sum_j \chi_{30Q_j^{k^*}}(x)\right) \chi_{\left(2^{n_2}(d_{i_k}^{k+m})^n,\, 2^{n_2}(d_{i_{k-m}}^k)^n\right]}(\alpha(t)) + \\
&+ C\sum_{k_s} \left(\sum_j \chi_{30Q_j^{k_s^*}}(x)\right) \chi_{\left(2^{n_2}(d_{i_{k_s-m}}^{k_s})^n,\, 2^r\, 2^{n_2}(d_{i_{k_s-m}}^{k_s})^n\right]}(\alpha(t)) \\
&\leq C\sum_k \chi_{\Omega_k}(x)\chi_{\left(2^{n_2}(d_{i_k}^{k+m})^n,\, 2^{n_2}(d_{i_{k-m}}^k)^n\right]}(\alpha(t)) + \\
&+ C\sum_{k_s} \chi_{\Omega_{k_s}}(x)\chi_{\left(2^{n_2}(d_{i_{k_s-m}}^{k_s})^n,\, 2^r\, 2^{n_2}(d_{i_{k_s-m}}^{k_s})^n\right]}(\alpha(t))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= C\sum_k \chi_{\left(2^{n_2}(d_{i_k}^{k+m})^n,\, 2^{n_2}(d_{i_{k-m}}^k)^n\right]}(\alpha(t)) + \\
&+ C\sum_{k_s} \chi_{\left(2^{n_2}(d_{i_{k_s-m}}^{k_s})^n,\, 2^r\, 2^{n_2}(d_{i_{k_s-m}}^{k_s})^n\right]}(\alpha(t)) \\
&\le C_m, \qquad (3.40)
\end{aligned}
$$

pois $d_{i_{k_s-m}}^{k_s} \le 2d_{i_{k_{s+1}-m}}^{k_{s+1}}$.

Agora vamos estimar IV. Pelo Lema 3.2.5(iii), segue que

$$
\begin{aligned}
IV &= \sum_{\substack{(k,j)\in F \\ k\equiv M \pmod m \\ 2d_j^k \le \sqrt{2}}} \chi_{2\widehat{Q}_j^{k*}}(x,t)\ \chi_{(\Omega_{k+m})^c\times[0,1)}(x,t) \\
&\le \sum_k \left(\sum_j \chi_{2Q_j^{k*}}(x)\right) \chi_{(\Omega_{k+m})^c}(x) \\
&\le C\ \sum_k \chi_{\Omega_k}(x)\ \chi_{(\Omega_{k+m})^c}(x) \\
&= C\ \sum_k \chi_{\Omega_k-\Omega_{k+m}}(x) \\
&\le C_m. \qquad (3.41)
\end{aligned}
$$

Substituindo (3.40) e (3.41) em (3.38), temos

$$
B \le C_m. \qquad (3.42)
$$

De (3.36), (3.37) e (3.42), temos

$$
\sum_{\substack{(k,j)\in F \\ k\equiv M \pmod m}} \chi_{2\widehat{Q}_j^{k*}}(x,t)\chi_{(\widehat{\Omega}_{k+m})^c}(x,t) \le C_m,
$$

o que demonstra o lema.

Lema 3.2.19 *Sejam Q_j^k e L_k dados como na Observação 3.2.3 e seja E_j^k como na Definição 3.2.9 . Sejam $k \in \mathbb{Z}$ e $j \in L_k$. Seja ω uma medida de Borel finita e não negativa sobre S^n.*

Seja $i \in H_j^k$, onde H_j^k é o conjunto dado na Definição 3.2.13. Vamos denotar por x_i^{k+m} o centro de $Q_i^{k+m^*}$ e por d_i^{k+m} o raio de $Q_i^{k+m^*}$. Então, para $(x,t) \in \widehat{Q}_i^{k+m*}$, temos

$$\begin{aligned} P(\chi_{E_j^k}\omega)(x,t) &\approx P(\chi_{E_j^k}\omega)(x_i^{k+m},t) \\ &\approx \frac{1-t^2}{1-\left|1-\frac{\sqrt{2}}{2}d_i^{k+m}\right|^2} P(\chi_{E_j^k}\omega)\left(x_i^{k+m}, \left|1-\frac{\sqrt{2}}{2}d_i^{k+m}\right|\right), \end{aligned} \tag{3.43}$$

onde a notação $A \approx B$ significa que existem constantes C_n^1, $C_n^2 > 0$, dependendo somente de n, tais que $C_n^1 A \leq B \leq C_n^2 A$.

Demonstração. Temos que $2Q_i^{k+m^*} \bigcap E_j^k = \emptyset$, já que se $y \in E_j^k = Q_j^k \bigcap(\Omega_{k+m-1} - \Omega_{k+m})$ temos que $y \notin \Omega_{k+m}$ e logo $y \notin 2Q_i^{k+m^*}$ pois $2Q_i^{k+m^*} \subset RQ_i^{k+m^*} \subset \Omega_{k+m}$.

Para demonstrar (3.43) é sufuciente demonstrar a equivalência entre os núcleos

$$P_t(x,y) \approx P_t(x_i^{k+m},y) \approx \frac{1-t^2}{1-\left|1-\frac{\sqrt{2}}{2}d_i^{k+m}\right|^2} P_{\left|1-\frac{\sqrt{2}}{2}d_i^{k+m}\right|}(x_i^{k+m},y), \tag{3.44}$$

para $(x,t) \in \widehat{Q}_i^{k+m*}$ e $y \in E_j^k$. De fato, multiplicando cada um dos membros de (3.44) por $\chi_{E_j^k}$ e integrando sobre S^n com respeito à medida $d\omega$, temos (3.43). Vamos mostrar cada uma das equivalências de (3.44) separadamente.

Se $(x,t) \in \widehat{Q}_i^{k+m*}$, então $x \in Q_i^{k+m^*}$ e, portanto, $|x - x_i^{k+m}| \leq d_i^{k+m}$. Por outro lado, se $y \in E_j^k$ e como $2Q_i^{k+m^*} \bigcap E_j^k = \emptyset$, então $|x-y| \geq d_i^{k+m}$ e $|y - x_i^{k+m}| \geq 2d_i^{k+m}$. Assim,

$$|x_i^{k+m} - y| \leq |x_i^{k+m} - x| + |x-y| \leq d_i^{k+m} + |x-y| \leq |x-y| + |x-y| = 2|x-y|$$

e

$$|x-y| \leq |x - x_i^{k+m}| + |x_i^{k+m} - y| \leq \frac{1}{2}|x_i^{k+m} - y| + |x_i^{k+m} - y| = \frac{3}{2}|x_i^{k+m} - y|.$$

Então

$$\begin{aligned} P_t(x,y) &= c_n \frac{1-t^2}{((1-t)^2 + t|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \\ &\leq c_n \frac{1-t^2}{\left((1-t)^2 + t\left(\frac{1}{2}\right)^2 |x_i^{k+m} - y|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} \\ &= 2^{n+1}\, c_n \frac{1-t^2}{\left(4(1-t)^2 + t|x_i^{k+m} - y|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} \\ &\leq 2^{n+1}\, P_t(x_i^{k+m}, y). \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
P_t(x_i^{k+m}, y) &= c_n \frac{1-t^2}{\left((1-t)^2 + t|x_i^{k+m} - y|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} \\
&\leq c_n \frac{1-t^2}{\left((1-t)^2 + t\left(\frac{2}{3}\right)^2 |x-y|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} \\
&\leq 3^{n+1}\, c_n \frac{1-t^2}{(9(1-t)^2 + 4t|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \\
&= 3^{n+1}\, P_t(x,y).
\end{aligned}$$

Isto demonstra a primeira equivalência em (3.44). Vamos agora demonstrar a segunda equivalência em (3.44). Observamos que para demonstrar (3.43) é suficiente supor $0 \leq d_i^{k+m} < 1$. De fato, se $1 \leq d_i^{k+m} \leq 2$, então $2Q_i^{k+m^*}$ tem raio ≥ 2 e portanto, $2Q_i^{k+m^*} = S^n$. Assim, para que $2Q_i^{k+m^*} \bigcap E_j^k = \emptyset$, devemos ter $E_j^k = \emptyset$ e a segunda equivalência em (3.43) é trivialmente satisfeita. Então, a partir de agora, vamos supor $0 \leq d_i^{k+m} < 1$. Temos assim

$$\left|1 - \frac{\sqrt{2}}{2} d_i^{k+m}\right| = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} d_i^{k+m}$$

e portanto

$$\left(1 - \left|1 - \frac{\sqrt{2}}{2} d_i^{k+m}\right|\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} d_i^{k+m}\right)^2.$$

Observamos também que

$$Q_i^{k+m^*} = B(x_i^{k+m}, d_i^{k+m}) = U(x_i^{k+m}, h^{-1}(d_i^{k+m})) = U\left(x_i^{k+m}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} d_i^{k+m}\right).$$

Logo temos que $\widehat{Q}_i^{k+m*} = Q_i^{k+m^*} \times \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2} d_i^{k+m}, 1\right)$. Se $(x,t) \in \widehat{Q}_i^{k+m*}$ e $y \in E_j^k$, temos que $|x_i^{k+m} - y| \geq d_i^{k+m}$. Daí

$$\begin{aligned}
P_t(x_i^{k+m}, y) &= c_n \frac{1-t^2}{\left((1-t)^2 + t|x_i^{k+m} - y|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} \\
&\leq c_n \frac{1-t^2}{\left(\frac{t}{2}|x_i^{k+m} - y|^2 + \frac{t}{2}|x_i^{k+m} - y|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} \\
&\leq 2^{\frac{n+1}{2}}\, c_n \frac{1-t^2}{\left(t(d_i^{k+m})^2 + t|x_i^{k+m} - y|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2^{\frac{n+1}{2}} \frac{c_n}{t^{\frac{n+1}{2}}} \frac{1-t^2}{\left((d_i^{k+m})^2 + |x_i^{k+m} - y|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} \\
&\leq 2^{\frac{n+1}{2}} \frac{c_n}{t^{\frac{n+1}{2}}} \frac{1-t^2}{\left((d_i^{k+m})^2 + \left|1 - \frac{\sqrt{2}}{2} d_i^{k+m}\right| |x_i^{k+m} - y|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} \\
&= 2^{\frac{n+1}{2}} \frac{c_n}{t^{\frac{n+1}{2}}} \frac{1-t^2}{\left(2\left(1 - \left|1 - \frac{\sqrt{2}}{2} d_i^{k+m}\right|\right)^2 + \left|1 - \frac{\sqrt{2}}{2} d_i^{k+m}\right| |x_i^{k+m} - y|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} \\
&\leq 2^{\frac{n+1}{2}} \frac{c_n}{t^{\frac{n+1}{2}}} \frac{1-t^2}{\left(\left(1 - \left|1 - \frac{\sqrt{2}}{2} d_i^{k+m}\right|\right)^2 + \left|1 - \frac{\sqrt{2}}{2} d_i^{k+m}\right| |x_i^{k+m} - y|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} \\
&= 2^{\frac{n+1}{2}} \frac{1-t^2}{t^{\frac{n+1}{2}}} \frac{1}{1 - \left|1 - \frac{\sqrt{2}}{2} d_i^{k+m}\right|^2} \cdot \\
&\qquad c_n \frac{1 - \left|1 - \frac{\sqrt{2}}{2} d_i^{k+m}\right|^2}{\left(\left(1 - \left|1 - \frac{\sqrt{2}}{2} d_i^{k+m}\right|\right)^2 + \left|1 - \frac{\sqrt{2}}{2} d_i^{k+m}\right| |x_i^{k+m} - y|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} \\
&= 2^{\frac{n+1}{2}} \frac{1-t^2}{t^{\frac{n+1}{2}}} \frac{1}{1 - \left|1 - \frac{\sqrt{2}}{2} d_i^{k+m}\right|^2} P_{\left|1 - \frac{\sqrt{2}}{2} d_i^{k+m}\right|}(x_i^{k+m}, y).
\end{aligned}
$$

Como $\widehat{Q}_i^{k+m*} = Q_i^{k+m^*} \times \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2} d_i^{k+m}, 1\right)$ e como $(x,t) \in \widehat{Q}_i^{k+m*}$, temos que $1 - \frac{\sqrt{2}}{2} d_i^{k+m} \leq t < 1$. Logo, do fato que $0 \leq d_i^{k+m} < 1$, segue que $1 - \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} d_i^{k+m} \leq t < 1$. Assim,

$$
\begin{aligned}
P_t(x_i^{k+m}, y) &\leq 2^{\frac{n+1}{2}} \frac{1-t^2}{t^{\frac{n+1}{2}}} \frac{1}{1 - \left|1 - \frac{\sqrt{2}}{2} d_i^{k+m}\right|^2} P_{\left|1 - \frac{\sqrt{2}}{2} d_i^{k+m}\right|}(x_i^{k+m}, y) \\
&\leq 2^{\frac{n+1}{2}} \frac{1-t^2}{\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}} \frac{1}{1 - \left|1 - \frac{\sqrt{2}}{2} d_i^{k+m}\right|^2} P_{\left|1 - \frac{\sqrt{2}}{2} d_i^{k+m}\right|}(x_i^{k+m}, y),
\end{aligned}
$$

e assim demonstramos uma das desigualdades da segunda equivalência de (3.44). Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1-t^2}{1 - \left|1 - \frac{\sqrt{2}}{2} d_i^{k+m}\right|^2} P_{\left|1 - \frac{\sqrt{2}}{2} d_i^{k+m}\right|}(x_i^{k+m}, y) = \\
&= \frac{1-t^2}{1 - \left|1 - \frac{\sqrt{2}}{2} d_i^{k+m}\right|^2} c_n \frac{1 - \left|1 - \frac{\sqrt{2}}{2} d_i^{k+m}\right|^2}{\left[\left(1 - \left|1 - \frac{\sqrt{2}}{2} d_i^{k+m}\right|\right)^2 + \left|1 - \frac{\sqrt{2}}{2} d_i^{k+m}\right| \left|x_i^{k+m} - y\right|^2\right]^{\frac{n+1}{2}}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= c_n \frac{1-t^2}{\left[\left(1-\left|1-\frac{\sqrt{2}}{2}d_i^{k+m}\right|\right)^2+\left|1-\frac{\sqrt{2}}{2}d_i^{k+m}\right|\left|x_i^{k+m}-y\right|^2\right]^{\frac{n+1}{2}}}\\
&= c_n \frac{1-t^2}{\left[\frac{1}{2}\left(d_i^{k+m}\right)^2+\left|1-\frac{\sqrt{2}}{2}d_i^{k+m}\right|\left|x_i^{k+m}-y\right|^2\right]^{\frac{n+1}{2}}}\\
&\leq c_n \frac{1-t^2}{\left[(1-t)^2+\left|1-\frac{\sqrt{2}}{2}d_i^{k+m}\right|\left|x_i^{k+m}-y\right|^2\right]^{\frac{n+1}{2}}}\\
&\leq c_n \frac{1-t^2}{\left[(1-t)^2+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left|x_i^{k+m}-y\right|^2\right]^{\frac{n+1}{2}}}\\
&\leq C_n\, c_n \frac{1-t^2}{\left[(1-t)^2+\left|x_i^{k+m}-y\right|^2\right]^{\frac{n+1}{2}}}\\
&\leq C_n\, c_n \frac{1-t^2}{\left[(1-t)^2+t\left|x_i^{k+m}-y\right|^2\right]^{\frac{n+1}{2}}}\\
&= C_n\, P_t(x_i^{k+m},y).
\end{aligned}
$$

Isto encerra a demonstração de (3.44).

Lema 3.2.20 *Sejam Q_j^k, L_k e μ como na Observação 3.2.3 e seja E_j^k como na Definição 3.2.9. Seja H_j^k o conjunto dado na Definição 3.2.13. Seja ω uma medida de Borel finita e não negativa sobre S^n. Sejam $k \in \mathbb{Z}$ e $j \in L_k$. Então, para $q > 1$, temos*

$$
\begin{aligned}
\tau_j^k \;\leq\; & C_q \sum_{i\in H_j^k}\left(\int_{\widehat{Q}_i^{k+m}} P(\chi_{E_j^k}\omega)(x,t)(1-t)^{-1}d\widetilde{\mu}(x,t)\right)\cdot\\
&\left(\frac{1}{|\widehat{Q}_i^{k+m}|_{\widetilde{\mu}}}\int_{\widehat{Q}_i^{k+m}} f(x,t)(1-t)^{1-q}d\widetilde{\mu}(x,t)\right),
\end{aligned}
\tag{3.45}
$$

onde $d\widetilde{\mu}(x,t) = (1-t)^q d\mu(x,t)$ e onde τ_j^k está definido no Lema 3.2.12.

Demonstração. Primeiramente, vamos observar que

$$
2Q_j^{k^*} \bigcap \Omega_{k+m} \subset \bigcup_{i\in H_j^k} Q_i^{k+m},
$$

onde H_j^k é o conjunto dado na Definição 3.2.13. Então $2\widehat{Q}_j^{k^*} \bigcap \widehat{\Omega}_{k+m} \subset \bigcup_{i \in H_j^k} \widehat{Q}_i^{k+m}$, e, portanto,

$$\begin{aligned}
\tau_j^k &= \int_{2\widehat{Q}_j^{k^*} \cap \widehat{\Omega}_{k+m}} f(x,t) P(\chi_{E_j^k} \omega)(x,t) d\mu(x,t) \\
&\leq \sum_{i \in H_j^k} \int_{\widehat{Q}_i^{k+m}} f(x,t) P(\chi_{E_j^k} \omega)(x,t) d\mu(x,t)
\end{aligned}$$

Do Lema 3.2.19, temos

$$\int_{\widehat{Q}_i^{k+m}} f(x,t) P(\chi_{E_j^k} \omega)(x,t) d\mu(x,t) \approx$$

$$\approx \quad \frac{1}{1 - \left|1 - \frac{\sqrt{2}}{2} d_i^{k+m}\right|^2} P(\chi_{E_j^k}\omega) \left(x_i^{k+m}, \left|1 - \frac{\sqrt{2}}{2} d_i^{k+m}\right|\right) \int_{\widehat{Q}_i^{k+m}} f(x,t)(1-t^2) d\mu(x,t)$$

$$= \left(\frac{\int_{\widehat{Q}_i^{k+m}} \frac{1-t^2}{1-\left|1-\frac{\sqrt{2}}{2} d_i^{k+m}\right|^2} P(\chi_{E_j^k}\omega)\left(x_i^{k+m}, \left|1 - \frac{\sqrt{2}}{2} d_i^{k+m}\right|\right)(1-t^2)^{q-1} d\mu(x,t)}{\int_{\widehat{Q}_i^{k+m}} (1-t^2)^q d\mu(x,t)} \right) \cdot$$

$$\int_{\widehat{Q}_i^{k+m}} f(x,t)(1-t^2)^{1-q}(1-t^2)^q d\mu(x,t)$$

$$\leq C_q \left(\frac{\int_{\widehat{Q}_i^{k+m}} \frac{1-t^2}{1-\left|1-\frac{\sqrt{2}}{2} d_i^{k+m}\right|^2} P(\chi_{E_j^k}\omega)\left(x_i^{k+m}, \left|1 - \frac{\sqrt{2}}{2} d_i^{k+m}\right|\right)(1-t)^{q-1} d\mu(x,t)}{\int_{\widehat{Q}_i^{k+m}} (1-t)^q d\mu(x,t)} \right) \cdot$$

$$\int_{\widehat{Q}_i^{k+m}} f(x,t)(1-t)^{1-q}(1-t)^q d\mu(x,t)$$

$$\approx \left(\int_{\widehat{Q}_i^{k+m}} P(\chi_{E_j^k}\omega)(x,t)(1-t)^{-1} d\widetilde{\mu}(x,t) \right) \frac{1}{\left|\widehat{Q}_i^{k+m}\right|_{\widetilde{\mu}}} \int_{\widehat{Q}_i^{k+m}} f(x,t)(1-t)^{1-q} d\widetilde{\mu}(x,t),$$

onde $d\widetilde{\mu}(x,t) = (1-t)^q d\mu(x,t)$. Somando sobre $i \in H_j^k$, temos (3.45).

Definição 3.2.21 *Sejam Q_j^k, L_k e μ dados como na Observação 3.2.3 e seja $q > 1$. Para $k \in \mathbb{Z}$ e $j \in L_k$, definimos*

$$A_j^k = \frac{1}{\left|\widehat{Q}_j^k\right|_{\widetilde{\mu}}} \int_{\widehat{Q}_j^k} f(x,t)(1-t)^{1-q} d\widetilde{\mu}(x,t)$$

e

$$L_j^k = \{s : Q_s^k \bigcap 2Q_j^{k^*} \neq \emptyset\},$$

onde $d\widetilde{\mu}(x,t) = (1-t)^q d\mu(x,t)$.

Observação 3.2.22 *Da Definição 3.2.21 e de (3.45), temos*

$$\begin{aligned}
\tau_j^k &\leq C_q \sum_{i\in H_j^k} \left(\int_{\widehat{Q}_i^{k+m}} P(\chi_{E_j^k}\omega)(x,t)(1-t)^{-1} d\widetilde{\mu}(x,t)\right) A_i^{k+m} \\
&\leq C_q \sum_{s\in L_j^k} \left(\sum_{\substack{\{i:\widehat{Q}_i^{k+m}\subset \widehat{Q}_s^k\} \\ i\in H_j^k}} \left(\int_{\widehat{Q}_i^{k+m}} P(\chi_{E_j^k}\omega)(x,t)(1-t)^{-1} d\widetilde{\mu}(x,t)\right) A_i^{k+m} \right). \quad (3.46)
\end{aligned}$$

A última desigualdade de (3.46) segue do fato que

$$\bigcup_{i\in H_j^k} Q_i^{k+m} = \bigcup_{s\in L_j^k} \bigcup_{\substack{\{i:Q_i^{k+m}\subset Q_s^k\} \\ i\in H_j^k}} Q_i^{k+m}$$

e portanto,

$$\bigcup_{i\in H_j^k} \widehat{Q}_i^{k+m} = \bigcup_{s\in L_j^k} \bigcup_{\substack{\{i:\widehat{Q}_i^{k+m}\subset \widehat{Q}_s^k\} \\ i\in H_j^k}} \widehat{Q}_i^{k+m},$$

onde H_j^k *é o conjunto da Definição 3.2.13.*

Definição 3.2.23 *Sejam* Q_j^k *como na Observação 3.2.3,* E_j^k *como na Definição 3.2.9 e* ω *uma medida de Borel finita e não negativa sobre* S^n*. Fixemos* $0 < \beta < 1$*. Definimos o conjunto*

$$G = \{(k,j) : |E_j^k|_\omega > \beta |Q_j^k|_\omega \quad e \quad \sigma_j^k \leq \tau_j^k\},$$

onde σ_j^k *e* τ_j^k *estão definidos no Lema 3.2.12.*

Definição 3.2.24 *Sejam* Q_j^k *como na Observação 3.2.3 e* A_j^k *como na Definição 3.2.21. Sejam* N *e* M *inteiros com* $0 \leq M \leq m-1$*, onde* m *é o inteiro fixado na Definição 3.2.9. Seja* $\Gamma_{N,M}^{(0)}$ *o conjunto consistindo de todos os índices* $(k,j) \in G$*, com* $k \geq N$ *e* $k \equiv M \pmod{m}$*, para os quais os elementos* Q_j^k *são maximais. Se* $\Gamma_{N,M}^{(n)}$ *está bem definido,* *seja* $\Gamma^{(n+1)}_{N,M}$ *consistindo daqueles* $(k,j) \in G$ *com* $k \geq N$ *e* $k \equiv M \pmod{m}$ *para os quais existe* $(t,u) \in \Gamma^{(n)}_{N,M}$, *com* $Q^k_j \subset Q^t_u$ *e tal que*

(a) $A^k_j > 2A^t_u$,

(b) $A^l_i \leq 2A^t_u$, *sempre que* $Q^k_j \subset_{\neq} Q^l_i \subset Q^t_u$.

Definimos $\Gamma_{N,M} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Gamma^{(n)}_{N,M}$ *e, para cada* $(k,j) \in G$, *com* $k \geq N$ *e* $k \equiv M \pmod{m}$, *definimos* $P(Q^k_j)$ *como o menor elemento* Q^t_u *contendo* Q^k_j *com* $(t,u) \in \Gamma_{N,M}$.

A idéia de introduzir o conjunto $\Gamma_{N,M}$ foi utilizada em Muckenhoupt-Wheeden [10, pag. 804], Sawyer [14, pag. 540] e Sawyer-Wheeden-Zhao [16, pag. 538].

Lema 3.2.25 *Sejam* $P(Q^k_j)$ *e* $\Gamma_{N,M}$ *como na Definição 3.2.24. Então*

(i) $P(Q^k_j) = Q^t_u \;\Rightarrow\; A^k_j \leq 2A^t_u$;

(ii) $Q^k_j \subset_{\neq} Q^t_u$ *e* $(k,j), (t,u) \in \Gamma_{N,M} \;\Rightarrow\; A^k_j > 2A^t_u$.

Demonstração. Vamos demonstrar (i). Se $P(Q^k_j) = Q^t_u$, então Q^t_u é o menor elemento contendo Q^k_j, com $(t,u) \in \Gamma_{N,M}$. Se $Q^k_j = Q^t_u$, temos que $\widehat{Q}^k_j = \widehat{Q}^t_u$ e assim $A^k_j \leq 2A^t_u$, de onde segue (i). Se $Q^k_j \subset_{\neq} Q^t_u$, como $P(Q^k_j) = Q^t_u$, temos que $(k,j) \notin \Gamma_{N,M}$ e $(t,u) \in \Gamma_{N,M}$. Como $(k,j) \notin \Gamma_{N,M}$, temos que $(k,j) \notin \Gamma^{(n)}_{N,M}$, para todo n. Então, pela definição dos $\Gamma^{(n)}_{N,M}$, não existe $(v,s) \in \Gamma_{N,M}$ tal que $Q^k_j \subset Q^v_s$ e valem (a) e (b) simultaneamente, isto é, tal que $A^k_j > 2A^v_s$ e $A^l_i \leq 2A^v_s$, sempre que $Q^k_j \subset_{\neq} Q^l_i \subset Q^v_s$. (Observamos que (a) e (b) dizem que não existe $(v,s) \in \Gamma_{N,M}$ tal que Q^k_j seja maximal em Q^v_s satisfazendo $A^k_j > 2A^v_s$). Em particular, para $(v,s) = (t,u) \in \Gamma_{N,M}$, temos que não valem (a) e (b) simultaneamente (senão, (k,j) pertenceria a $\Gamma_{N,M}$). Se não vale (a), temos que $A^k_j \leq 2A^v_s = 2A^t_u$, e encerramos a demontração de (i). Se não vale (b), então existe Q^l_i tal que $Q^k_j \subset_{\neq} Q^l_i \subset Q^t_u$ e $A^l_i > 2A^t_u$. Neste caso, devemos ter $(l,i) \notin \Gamma_{N,M}$, pois, se $(l,i) \in \Gamma_{N,M}$, teríamos $P(Q^k_j) = Q^l_i = Q^t_u$ e assim, $A^l_i = A^t_u$, o que é um absurdo, pois estamos supondo $A^l_i > 2A^t_u$. Portanto, $(l,i) \notin \Gamma_{N,M}$. Repetindo o raciocínio acima, temos que (a) e (b) da definição dos $\Gamma^{(n)}_{N,M}$ não podem valer simultaneamente para o par (l,i). Então, ou não vale (a), isto é, $A^l_i \leq 2A^t_u$, o que é um absudo pois estamos supondo $A_i^l > 2A_u^t$, ou não vale (b), ou seja, existe (l_1, i_1) tal que $Q_i^l \subset_{\neq} Q_{i_1}^{l_1} \subset Q_u^t$ e $A_{i_1}^{l_1} > 2A_u^t$. Neste caso, repetindo o argumento anterior, temos que $(l_1, i_1) \notin \Gamma_{N,M}$, pois, se $(l_1, i_1) \in \Gamma_{N,M}$, teríamos que $P(Q_j^k) = Q_{i_1}^{l_1} = Q_u^t$ e assim, $A_{i_1}^{l_1} = A_u^t$, o que é um absurdo, pois estamos supondo $A_{i_1}^{l_1} > 2A_u^t$. Então, repetindo o mesmo raciocínio, encontraremos uma cadeia infinita

$$Q_j^k \subset_{\neq} Q_i^l \subset_{\neq} Q_{i_1}^{l_1} \subset_{\neq} Q_{i_2}^{l_2} \subset_{\neq} \cdots \subset Q_u^t$$

de elementos de $\mathcal{A}$ tais que $(l_r, i_r) \notin \Gamma_{N,M}$. Portanto supor que não vale (b) é um absurdo, pois como todos os elementos estão em $\mathcal{A}$, esta seqüência deve ser finita. Logo, só podemos ter que não vale (a), isto é, $A_j^k \leq 2A_u^t$. Isto encerra a demonstração de (i).

Para demonstrar (ii), primeiramente vamos observar que do fato de $\Gamma_{N,M}^{(0)}$ ter sido escolhido como o conjunto dos índices (k, j) com $k \geq N$ e $k \equiv M \pmod{m}$ para os quais os elementos Q_j^k são maximais, temos que os elementos Q_j^k tais que $(k, j) \in \Gamma_{N,M}^{(0)}$ são disjuntos. Além disso, como $\Gamma_{N,M}^{(1)}$ é o conjunto de índices (k, j) tais que existe $(t, u) \in \Gamma_{N,M}^{(0)}$ com $Q_j^k \subset Q_u^t$ e Q_j^k é maximal entre todos os elementos de $\mathcal{A}$ contidos em Q_u^t e satisfazendo $A_j^k > 2A_u^t$, temos que os Q_j^k tais que $(k, j) \in \Gamma_{N,M}^{(1)}$ também são disjuntos. De maneira geral, os elementos Q_j^k tais que $(k, j) \in \Gamma_{N,M}^{(n)}$ são disjuntos. Sejam, agora, $Q_j^k \subset_{\neq} Q_u^t$, com (k, j), $(t, u) \in \Gamma_{N,M}$. Então, $(k, j) \in \Gamma_{N,M}^{(n_1)}$, $(t, u) \in \Gamma_{N,M}^{(n_2)}$, com $n_2 < n_1$, pela construção dos $\Gamma_{N,M}^{(n)}$. Como $(k, j) \in \Gamma_{N,M}^{(n_1)}$, existe um único $(k_1, j_1) \in \Gamma_{N,M}^{(n_1-1)}$ tal que $Q_j^k \subset Q_{j_1}^{k_1}$, satisfazendo (a) e (b). Prosseguindo com o mesmo raciocínio, encontraremos uma seqüência $(k_i, j_i) \in \Gamma_{N,M}^{(n_1-i)}$, com $i = 1, \ldots, n_1 - n_2$ e $(k_{n_1-n_2}, j_{n_1-n_2}) = (t, u)$ tal que

$$Q_j^k \subset Q_{j_1}^{k_1} \subset Q_{j_2}^{k_2} \subset \cdots \subset Q_{j_{n_1-n_2}}^{k_{n_1-n_2}} = Q_u^t,$$

e tal que $A_{j_i}^{ki} > 2A_{j_{i+1}}^{ki+1}$ e $A_s^l \leq 2A_{j_{i+1}}^{ki+1}$, sempre que $Q_{j_i}^{k_i} \subset_{\neq} Q_s^l \subset Q_{j_i+1}^{k_i+1}$. Logo,

$$A_j^k > 2A_{j_1}^{k_1} > 2^2 A_{j_2}^{k_2} > \cdots > 2^{n_1-n_2} A_t^u \geq 2A_t^u,$$

o que demonstra (ii).

Teorema 3.2.26 *Suponha $1 < p \leq q < \infty$ e sejam ω e μ medidas de Borel não negativas e finitas sobre S^n e $S^n \times [0,1)$ respectivamente tais que $P^*(\chi_{S^n\times[0,1)}\mu) \in L^{p'}(S^n, \omega)$. São equivalentes:*

(i) Existe uma constante $C > 0$ tal que, para toda função mensurável $g \geq 0$,

$$\left(\int_{S^n\times[0,1)} [P(g\omega)(x,t)]^q d\mu(x,t)\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int_{S^n} [g(x)]^p d\omega(x)\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.47}$$

(ii) Existe uma constante $C > 0$ tal que para todo $Q \in \mathcal{A}$ temos

$$\left(\int_{S^n\times[0,1)} [P(\chi_Q\omega)(x,t)]^q d\mu(x,t)\right)^{\frac{1}{q}} \leq C|Q|_\omega^{\frac{1}{p}} \tag{3.48}$$

e

$$\left(\int_{S^n} [P^*(\chi_{\widehat{Q}}(1-t)^{q-1}\mu)(x)]^{p'} d\omega(x)\right)^{\frac{1}{p'}} \leq C\left(\int_{\widehat{Q}} (1-t)^q d\mu(x,t)\right)^{\frac{1}{q'}}. \tag{3.49}$$

Observação 3.2.27 *Antes de iniciarmos a demonstração do Teorema 3.2.26, vamos observar que a desigualdade (3.47) vale para toda função mensurável $g \geq 0$ se e somente se vale sua desigualdade dual*

$$\left(\int_{S^n} [P^*(f\mu)(x)]^{p'} d\omega(x)\right)^{\frac{1}{p'}} \leq C\left(\int_{S^n\times[0,1)} [f(x,t)]^{q'} d\mu(x,t)\right)^{\frac{1}{q'}}, \tag{3.50}$$

para toda função mensurável $f \geq 0$. De fato, supondo válida a desigualdade (3.50), utilizando a Observação 3.2.2 e a desigualdade de Hölder, temos

$$\left(\int_{S^n\times[0,1)} [P(g\omega)(x,t)]^q d\mu(x,t)\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \| P(g\omega) \|_{L^q(S^n\times[0,1),\mu)}$$

$$= \sup_{\substack{f\in L^{q'}(S^n\times[0,1),\mu) \\ \|f\|_{L^{q'}(S^n\times[0,1),\mu)}\leq 1}} \left|\int_{S^n\times[0,1)} P(g\omega)(x,t)f(x,t)d\mu(x,t)\right|$$

$$= \sup_{\substack{f\in L^{q'}(S^n\times[0,1),\mu)\\ \|f\|_{L^{q'}(S^n\times[0,1),\mu)}\le 1}} \left|\int_{S^n} g(y)P^*(f\mu)(y)d\omega(y)\right|$$

$$\le \sup_{\substack{f\in L^{q'}(S^n\times[0,1),\mu)\\ \|f\|_{L^{q'}(S^n\times[0,1),\mu)}\le 1}} \| g \|_{L^p(S^n,\omega)}\| P^*(f\mu) \|_{L^{p'}(S^n,\omega)}$$

$$\le \sup_{\substack{f\in L^{q'}(S^n\times[0,1),\mu)\\ \|f\|_{L^{q'}(S^n\times[0,1),\mu)}\le 1}} \| g \|_{L^p(S^n,\omega)}\| P^*(|f|\mu) \|_{L^{p'}(S^n,\omega)}$$

$$= \sup_{\substack{f\in L^{q'}(S^n\times[0,1),\mu)\\ \|f\|_{L^{q'}(S^n\times[0,1),\mu)}\le 1}} \left(\int_{S^n}[g(x)]^p d\omega(x)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{S^n}[P^*(|f|\mu)(x)]^{p'} d\omega(x)\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$\le C \sup_{\substack{f\in L^{q'}(S^n\times[0,1),\mu)\\ \|f\|_{L^{q'}(S^n\times[0,1),\mu)}\le 1}} \left(\int_{S^n}[g(x)]^p d\omega(x)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{S^n}|f(x,t)|^{q'} d\mu(x,t)\right)^{\frac{1}{q'}}$$

$$\le C \left(\int_{S^n}[g(x)]^p d\omega(x)\right)^{\frac{1}{p}},$$

que é (3.47). Analogamente demonstramos que a desigualdade (3.50) é válida, supondo a validade da desigualdade (3.47).

Demonstração do Teorema 3.2.26 . Vamos primeiro mostrar que (3.47) implica (3.48) e (3.49). Seja $Q \in \mathcal{A}$. Fazendo $g(x) = \chi_Q(x)$ em (3.47), obtemos (3.48). Mas (3.47) é equivalente a (3.50). Fazendo $f(x,t) = \chi_{\widehat{Q}}(x,t)(1-t)^{q-1}$ em (3.50) obtemos (3.49). Observamos que a constante C que obtemos em (3.48) e (3.49) é a mesma constante de (3.47).

Reciprocamente, vamos assumir que existe uma constante $C > 0$ tal que as desigualdades (3.48) e (3.49) sejam válidas para todo $Q \in \mathcal{A}$. Vamos mostrar que existe uma constante $C_{p,q} > 0$, tal que a desigualdade (3.50) é válida e, portanto, a desigualdade (3.47) é válida . Seja $f \geq 0$ uma função limitada definida sobre $S^n \times [0,1)$. Se Ω_k e Q_j^k são dados como na Observação 3.2.3 e E_j^k é o conjunto dado na Definição 3.2.9, temos

$$\dot{\bigcup_j} E_j^k = \dot{\bigcup_j} Q_j^k \bigcap (\Omega_{k+m-1} - \Omega_{k+m}) = \Omega_k \bigcap (\Omega_{k+m-1} - \Omega_{k+m}) = \Omega_{k+m-1} - \Omega_{k+m},$$

pois $\Omega_{k+m} \subset \Omega_{k+m-1}$ e $\Omega_{k+m-1} \subset \Omega_k$. Logo,

$$|\Omega_{k+m-1} - \Omega_{k+m}|_\omega = |\dot{\bigcup_j} E_j^k|_\omega.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_{S^n} [P^*(f\mu)(x)]^{p'} d\omega(x) &= \sum_k \int_{\Omega_{k+m-1}-\Omega_{k+m}} [P^*(f\mu)(x)]^{p'} d\omega(x) \\
&\leq \sum_k \int_{\Omega_{k+m-1}-\Omega_{k+m}} (2^{k+m})^{p'} d\omega(x) \\
&\leq 2^{mp'} \sum_k 2^{kp'} |\Omega_{k+m-1} - \Omega_{k+m}|_\omega \\
&= C_{m,p} \sum_k 2^{kp'} \sum_j |E_j^k|_\omega \\
&= C_{m,p} \sum_{k,j} 2^{kp'} |E_j^k|_\omega \\
&= C_{m,p} \left(\sum_{(k,j)\in E} 2^{kp'} |E_j^k|_\omega + \sum_{(k,j)\in F} 2^{kp'} |E_j^k|_\omega + \sum_{(k,j)\in G} 2^{kp'} |E_j^k|_\omega \right) \\
&= C_{m,p} \left(I + II + III \right), \qquad (3.51)
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
E &= \{(k,j) : |E_j^k|_\omega \leq \beta |Q_j^k|_\omega\} \\
F &= \{(k,j) : |E_j^k|_\omega > \beta |Q_j^k|_\omega \quad \text{e} \quad \sigma_j^k > \tau_j^k\} \\
G &= \{(k,j) : |E_j^k|_\omega > \beta |Q_j^k|_\omega \quad \text{e} \quad \sigma_j^k \leq \tau_j^k\},
\end{aligned}$$

onde σ_j^k e τ_j^k estão definidos no Lema 3.2.12 e onde $0 < \beta < 1$ será escolhido depois. Podemos claramente assumir nas somas acima que $|E_j^k|_\omega \neq 0$ e, conseqüentemente $|Q_j^k|_\omega \neq 0$, pois $E_j^k \subset Q_j^k$. Vamos estimar I, II e III separadamente.

1^a **Parte.** Vamos estimar I. Temos

$$
\begin{aligned}
I &= \sum_{(k,j)\in E} 2^{kp'}|E_j^k|_\omega \\
&\leq \beta \sum_{k,j} 2^{kp'}|Q_j^k|_\omega \\
&= \beta \sum_k 2^{kp'} \left(\sum_j |Q_j^k|_\omega \right) \\
&= \beta \sum_k 2^{kp'}|\Omega_k|_\omega \\
&= \beta \sum_k 2^{kp'}|\{x : P^*(f\mu)(x) > 2^k\}|_\omega \\
&= \beta \sum_k 2^{kp'} \left(\int_{S^n} \chi_{\{x:P^*(f\mu)(x)>2^k\}}(x) d\omega(x) \right) \\
&= \beta \int_{S^n} \left(\sum_k 2^{kp'} \chi_{\{x:P^*(f\mu)(x)>2^k\}}(x) \right) d\omega(x) \\
&\leq C_p\, \beta \int_{S^n} [P^*(f\mu)(x)]^{p'} d\omega(x), \qquad (3.52)
\end{aligned}
$$

pois

$$
\begin{aligned}
\int_{S^n} [P^*(f\mu)(x)]^{p'} d\omega(x) &= \int_0^\infty p' t^{p'-1} |\{x : P^*(f\mu)(x) > t\}|_\omega dt \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{2^{k-1}}^{2^k} \frac{1}{t} p' t^{p'} |\{x : P^*(f\mu)(x) > t\}|_\omega dt \\
&\geq \sum_{k=-\infty}^{\infty} p' \int_{2^{k-1}}^{2^k} \frac{1}{t} (2^{k-1})^{p'} |\{x : P^*(f\mu)(x) > 2^k\}|_\omega dt \\
&= p' 2^{-p'} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{kp'} |\{x : P^*(f\mu)(x) > 2^k\}|_\omega \int_{2^{k-1}}^{2^k} \frac{dt}{t} \\
&= C_p \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{kp'} \int_{S^n} \chi_{\{x:P^*(f\mu)(x)>2^k\}}(x) d\omega(x) \\
&= C_p \int_{S^n} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{kp'} \chi_{\{x:P^*(f\mu)(x)>2^k\}}(x) \right) d\omega(x).
\end{aligned}
$$

2^a **Parte.** Vamos estimar II. Para isto, observamos que

$$II = \sum_{(k,j)\in F} 2^{kp'}|E_j^k|_\omega = \sum_{M=0}^{m-1} \sum_{\substack{(k,j)\in F \\ k\equiv M \pmod m}} 2^{kp'}|E_j^k|_\omega, \tag{3.53}$$

onde m é o inteiro fixado na Definição 3.2.9. Fixemos $0 \leq M \leq m-1$. Do Lema 3.2.12, do fato de estarmos somando sobre $(k,j) \in F$, da desigualdade de Hölder, de (3.48), do fato que $p \leq q$ e do Lema 3.2.18 segue que

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{(k,j)\in F \\ k\equiv M \pmod m}} |E_j^k|_\omega 2^{kp'} &\leq \sum_{\substack{(k,j)\in F \\ k\equiv M \pmod m}} |E_j^k|_\omega \left(\frac{\sigma_j^k + \tau_j^k}{|E_j^k|_\omega}\right)^{p'} \\
&\leq \sum_{\substack{(k,j)\in F \\ k\equiv M \pmod m}} |E_j^k|_\omega \left(\frac{2\sigma_j^k}{|E_j^k|_\omega}\right)^{p'} \\
&= \sum_{\substack{(k,j)\in F \\ k\equiv M \pmod m}} |E_j^k|_\omega \left(\frac{2}{|E_j^k|_\omega} \int_{2\widehat{Q}_j^{k*}-\widehat{\Omega}_{k+m}} f(x,t) P(\chi_{E_j^k}\omega)(x,t)\, d\mu(x,t)\right)^{p'} \\
&\leq \sum_{\substack{(k,j)\in F \\ k\equiv M \pmod m}} |E_j^k|_\omega \left(\frac{2}{\beta|Q_j^k|_\omega} \int_{2\widehat{Q}_j^{k*}-\widehat{\Omega}_{k+m}} f(x,t) P(\chi_{E_j^k}\omega)(x,t)\, d\mu(x,t)\right)^{p'} \\
&= C_p\, \beta^{-p'} \sum_{\substack{(k,j)\in F \\ k\equiv M \pmod m}} \frac{|E_j^k|_\omega}{|Q_j^k|_\omega^{p'}} \left(\int_{2\widehat{Q}_j^{k*}-\widehat{\Omega}_{k+m}} f(x,t) P(\chi_{E_j^k}\omega)(x,t)\, d\mu(x,t)\right)^{p'} \\
&\leq C_p\, \beta^{-p'} \sum_{\substack{(k,j)\in F \\ k\equiv M \pmod m}} \frac{|E_j^k|_\omega}{|Q_j^k|_\omega^{p'}} \left(\int_{2\widehat{Q}_j^{k*}} [P(\chi_{Q_j^k}\omega)]^q(x,t)\, d\mu(x,t)\right)^{\frac{p'}{q}} \cdot \\
&\qquad \left(\int_{2\widehat{Q}_j^{k*}-\widehat{\Omega}_{k+m}} [f(x,t)]^{q'}\, d\mu(x,t)\right)^{\frac{p'}{q'}} \\
&\leq C_p\, \beta^{-p'} \sum_{\substack{(k,j)\in F \\ k\equiv M \pmod m}} \frac{|E_j^k|_\omega}{|Q_j^k|_\omega^{p'}} \left(\int_{S^n\times[0,1)} [P(\chi_{Q_j^k}\omega)]^q(x,t)\, d\mu(x,t)\right)^{\frac{p'}{q}} \cdot \\
&\qquad \left(\int_{2\widehat{Q}_j^{k*}-\widehat{\Omega}_{k+m}} [f(x,t)]^{q'}\, d\mu(x,t)\right)^{\frac{p'}{q'}} \\
&\leq C_p\, \beta^{-p'} \sum_{\substack{(k,j)\in F \\ k\equiv M \pmod m}} \frac{|E_j^k|_\omega}{|Q_j^k|_\omega^{p'}} |Q_j^k|_\omega^{\frac{p'}{p}} \left(\int_{2\widehat{Q}_j^{k*}-\widehat{\Omega}_{k+m}} [f(x,t)]^{q'}\, d\mu(x,t)\right)^{\frac{p'}{q'}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= C_p\ \beta^{-p'} \sum_{\substack{(k,j)\in F\\ k\equiv M\ (mod\ m)}} \frac{|E_j^k|_\omega}{|Q_j^k|_\omega}\left(\int_{2\widehat{Q}_j^{k^*}-\widehat{\Omega}_{k+m}}[f(x,t)]^{q'}d\mu(x,t)\right)^{\frac{p'}{q'}}\\
&\le C_p\ \beta^{-p'} \sum_{\substack{(k,j)\in F\\ k\equiv M\ (mod\ m)}} \left(\int_{2\widehat{Q}_j^{k^*}-\widehat{\Omega}_{k+m}}[f(x,t)]^{q'}d\mu(x,t)\right)^{\frac{p'}{q'}}\\
&\le C_p\ \beta^{-p'} \left(\sum_{\substack{(k,j)\in F\\ k\equiv M\ (mod\ m)}} \int_{2\widehat{Q}_j^{k^*}-\widehat{\Omega}_{k+m}}[f(x,t)]^{q'}d\mu(x,t)\right)^{\frac{p'}{q'}}\\
&= C_p\ \beta^{-p'} \left(\sum_{\substack{(k,j)\in F\\ k\equiv M\ (mod\ m)}} \int_{S^n\times[0,1)}[f(x,t)]^{q'}\chi_{2\widehat{Q}_j^{k^*}-\widehat{\Omega}_{k+m}}(x,t)d\mu(x,t)\right)^{\frac{p'}{q'}}\\
&= C_p\ \beta^{-p'} \left(\int_{S^n\times[0,1)}\sum_{\substack{(k,j)\in F\\ k\equiv M\ (mod\ m)}} [f(x,t)]^{q'}\chi_{2\widehat{Q}_j^{k^*}-\widehat{\Omega}_{k+m}}(x,t)d\mu(x,t)\right)^{\frac{p'}{q'}}\\
&= C_p\ \beta^{-p'} \left(\int_{S^n\times[0,1)}[f(x,t)]^{q'}\sum_{\substack{(k,j)\in F\\ k\equiv M\ (mod\ m)}} \chi_{2\widehat{Q}_j^{k^*}\cap(\widehat{\Omega}_{k+m})^c}(x,t)d\mu(x,t)\right)^{\frac{p'}{q'}}\\
&= C_p\ \beta^{-p'} \left(\int_{S^n\times[0,1)}[f(x,t)]^{q'}\sum_{\substack{(k,j)\in F\\ k\equiv M\ (mod\ m)}} \chi_{2\widehat{Q}_j^{k^*}}(x,t)\chi_{(\widehat{\Omega}_{k+m})^c}(x,t)d\mu(x,t)\right)^{\frac{p'}{q'}}\\
&\le C_{m,p,q}\ \beta^{-p'}\left(\int_{S^n\times[0,1)}[f(x,t)]^{q'}d\mu(x,t)\right)^{\frac{p'}{q'}}, \qquad (3.54)
\end{aligned}
$$

e, portanto,

$$
II \le C_{m,p,q}\ \beta^{-p'}\left(\int_{S^n\times[0,1)}[f(x,t)]^{q'}d\mu(x,t)\right)^{\frac{p'}{q'}}. \qquad (3.55)
$$

3^a **Parte.** Vamos, agora, estimar III em (3.51). Sejam N e M inteiros com $0\le M\le m-1$. Seja

$$
G_{N,M} = \{(k,j)\in G : k\ge N \ \text{ e } \ k\equiv M \ \ (mod\ \ m)\}.
$$

Vamos mostrar que

$$\sum_{(k,j)\in G_{N,M}} \left|E_j^k\right|_\omega 2^{kp'} \leq C_{p,q} \left(\int_{S^n\times[0,1)} [f(x,t)]^{q'} d\mu(x,t)\right)^{\frac{p'}{q'}}, \tag{3.56}$$

onde $C_{p,q}$ depende de p e q, mas é independente dos inteiros N e M. Fixemos inteiros N e M como acima. Usando o Lema 3.2.12, o fato de estarmos somando sobre $(k,j) \in G$, pela Observação 3.2.22 e o fato que a cardinalidade de L_j^k é no máximo C (o que segue do Lema 3.2.5(iv))(L_j^k é o conjunto dado na Definição 3.2.21), obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{(k,j)\in G_{N,M}} |E_j^k|_\omega 2^{kp'} &\leq \sum_{(k,j)\in G_{N,M}} |E_j^k|_\omega \left(\frac{\sigma_j^k+\tau_j^k}{|E_j^k|_\omega}\right)^{p'} \\
&\leq \sum_{(k,j)\in G_{N,M}} |E_j^k|_\omega \left(\frac{2\tau_j^k}{|E_j^k|_\omega}\right)^{p'} \\
&\leq 2^{p'}\beta^{-p'} \sum_{(k,j)\in G_{N,M}} \frac{|E_j^k|_\omega}{|Q_j^k|_\omega^{p'}} (\tau_j^k)^{p'} \\
&\leq C_{p,q}\beta^{-p'} \sum_{(k,j)\in G_{N,M}} \frac{|E_j^k|_\omega}{|Q_j^k|_\omega^{p'}} \cdot \\
&\quad \left(\sum_{s\in L_j^k}\left(\sum_{\substack{\{i:\widehat{Q}_i^{k+m}\subset\widehat{Q}_s^k\}\\ i\in H_j^k}} \left(\int_{\widehat{Q}_i^{k+m}} P(\chi_{E_j^k}\omega)(x,t)(1-t)^{-1}d\widetilde{\mu}(x,t)\right) A_i^{k+m}\right)\right)^{p'} \\
&\leq C_{p,q}\beta^{-p'} \sum_{(k,j)\in G_{N,M}} \frac{|E_j^k|_\omega}{|Q_j^k|_\omega^{p'}} \cdot \\
&\quad \left(\sum_{s\in L_j^k}\sum_{\substack{\{i:\widehat{Q}_i^{k+m}\subset\widehat{Q}_s^k\}\\ i\in H_j^k\\ (k+m,i)\notin\Gamma_{N,M}}} \left(\int_{\widehat{Q}_i^{k+m}} P(\chi_{Q_j^k}\omega)(x,t)(1-t)^{-1}d\widetilde{\mu}(x,t)\right) \mathcal{A}_i^{k+m}\right)^{p'} + \\
&+ C_{p,q}\beta^{-p'} \sum_{(k,j)\in G_{N,M}} \frac{|E_j^k|_\omega}{|Q_j^k|_\omega^{p'}} \cdot
\end{aligned}$$

$$\left(\sum_{s\in L_j^k}\sum_{\substack{\{i:\widehat{Q}_i^{k+m}\subset\widehat{Q}_s^k\}\\ i\in H_j^k\\ (k+m,i)\in\Gamma_{N,M}}}\left(\int_{\widehat{Q}_i^{k+m}}P(\chi_{Q_j^k}\omega)(x,t)(1-t)^{-1}d\widetilde{\mu}(x,t)\right)\mathcal{A}_i^{k+m}\right)^{p'}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_{p,q}\beta^{-p'}\sum_{(k,j)\in G_{N,M}}\sum_{s\in L_j^k}\frac{|E_j^k|_\omega}{|Q_j^k|_\omega^{p'}}\cdot \\
&\left(\sum_{\substack{i:P(Q_i^{k+m})=P(Q_s^k)\\ Q_i^{k+m}\subset Q_s^k}}\left(\int_{\widehat{Q}_i^{k+m}}P(\chi_{Q_j^k}\omega)(x,t)(1-t)^{-1}d\widetilde{\mu}(x,t)\right)\mathcal{A}_i^{k+m}\right)^{p'}+ \\
&+ C_{p,q}\beta^{-p'}\sum_{(k,j)\in G_{N,M}}\frac{|E_j^k|_\omega}{|Q_j^k|_\omega^{p'}}\cdot \\
&\left(\sum_{i\in H_j^k:(k+m,i)\in\Gamma_{N,M}}\left(\int_{\widehat{Q}_i^{k+m}}P(\chi_{Q_j^k}\omega)(x,t)(1-t)^{-1}d\widetilde{\mu}(x,t)\right)\mathcal{A}_i^{k+m}\right)^{p'} \\
&= IV+V. \qquad (3.57)
\end{aligned}$$

pois, se $Q_i^{k+m}\subset Q_s^k$ e $(k+m,i)\notin\Gamma_{N,M}$, então $P(Q_i^{k+m})=P(Q_s^k)$. Vamos usar as condições (3.49) e (3.48) para estimar IV e V respectivamente. Primeiro, notemos que para um $(t,u)\in\Gamma_{N,M}$ fixado, segue pelo Lema 3.2.25(i), pela Observação 3.2.2, pelo fato que a cardinalidade de L_j^k é no máximo C, pelo Teorema 2.2.8 aplicado à partição $\mathcal{A}_k$ e por (3.49) que

$$\begin{aligned}
&\sum_{(k,j)\in G_{N,M}}\sum_{s\in L_j^k:P(Q_s^k)=Q_u^t}\frac{|E_j^k|_\omega}{|Q_j^k|_\omega^{p'}}\cdot \\
&\left(\sum_{\substack{i:P(Q_i^{k+m})=P(Q_s^k)\\ Q_i^{k+m}\subset Q_s^k}}\left(\int_{\widehat{Q}_i^{k+m}}P(\chi_{Q_j^k}\omega)(x,t)(1-t)^{-1}d\widetilde{\mu}(x,t)\right)\mathcal{A}_i^{k+m}\right)^{p'}\leq \\
&\leq \sum_{(k,j)\in G_{N,M}}\sum_{s\in L_j^k:P(Q_s^k)=Q_u^t}|E_j^k|_\omega\cdot
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{|Q_j^k|_\omega}\left(\int_{\widehat{Q}_s^k} P(\chi_{Q_j^k}\omega)(x,t)(1-t)^{-1}d\widetilde{\mu}(x,t)\right)2A_u^t\right)^{p'}$$

$$\leq C_p \left(A_u^t\right)^{p'} \sum_{(k,j)\in G_{N,M}} \sum_{s\in L_j^k:P(Q_s^k)=Q_u^t} |E_j^k|_\omega \cdot$$

$$\left(\frac{1}{|Q_j^k|_\omega}\int_{\widehat{Q}_u^t} P(\chi_{Q_j^k}\omega)(x,t)(1-t)^{-1}d\widetilde{\mu}(x,t)\right)^{p'}$$

$$= C_p \left(A_u^t\right)^{p'} \sum_{(k,j)\in G_{N,M}} \sum_{s\in L_j^k:P(Q_s^k)=Q_u^t} |E_j^k|_\omega \cdot$$

$$\left(\frac{1}{|Q_j^k|_\omega}\int_{S^n\times[0,1)} P(\chi_{Q_j^k}\omega)(x,t)(1-t)^{-1}\chi_{\widehat{Q}_u^t}(1-t)^q d\mu(x,t)\right)^{p'}$$

$$= C_p \left(A_u^t\right)^{p'} \sum_{(k,j)\in G_{N,M}} \sum_{s\in L_j^k:P(Q_s^k)=Q_u^t} |E_j^k|_\omega \cdot$$

$$\left(\frac{1}{|Q_j^k|_\omega}\int_{S^n} \chi_{Q_j^k}(y)P^*(\chi_{\widehat{Q}_u^t}(1-t)^{q-1}\mu)(y)d\omega(y)\right)^{p'}$$

$$= C_p \left(A_u^t\right)^{p'} \sum_{(k,j)\in G_{N,M}} \sum_{s\in L_j^k:P(Q_s^k)=Q_u^t} |E_j^k|_\omega \left(\frac{1}{|Q_j^k|_\omega}\int_{Q_j^k} P^*(\chi_{\widehat{Q}_u^t}(1-t)^{q-1}\mu)(y)d\omega(y)\right)^{p'}$$

$$\leq C_p \left(A_u^t\right)^{p'} \sum_{(k,j)\in G_{N,M}} |E_j^k|_\omega \left(\frac{1}{|Q_j^k|_\omega}\int_{Q_j^k} P^*(\chi_{\widehat{Q}_u^t}(1-t)^{q-1}\mu)(y)d\omega(y)\right)^{p'}$$

$$= C_p \left(A_u^t\right)^{p'} \sum_{(k,j)\in G_{N,M}} \int_{E_j^k} \left(\frac{1}{|Q_j^k|_\omega}\int_{Q_j^k} P^*(\chi_{\widehat{Q}_u^t}(1-t)^{q-1}\mu)(y)d\omega(y)\right)^{p'} d\omega(z)$$

$$\leq C_p \left(A_u^t\right)^{p'} \sum_{k,j} \int_{E_j^k} \left[M_\omega\left(P^*(\chi_{\widehat{Q}_u^t}(1-t)^{q-1}\mu)\right)(z)\right]^{p'} d\omega(z)$$

$$\leq C_p \left(A_u^t\right)^{p'} \int_{S^n} \left[M_\omega\left(P^*(\chi_{\widehat{Q}_u^t}(1-t)^{q-1}\mu)\right)(z)\right]^{p'} d\omega(z)$$

$$\leq \; C_p \, \left(A_u^t\right)^{p'} \int_{S^n} \left[P^*(\chi_{\widehat{Q}_u^t}(1-t)^{q-1}\mu)(z)\right]^{p'} d\omega(z)$$

$$\leq \; C_p \, \left(A_u^t\right)^{p'} \left(\int_{\widehat{Q}_u^t} (1-t)^q d\mu(x,t)\right)^{\frac{p'}{q'}}$$

$$= \; C_p \left(A_u^t\right)^{p'} \left(\int_{\widehat{Q}_u^t} d\widetilde{\mu}(x,t)\right)^{\frac{p'}{q'}}$$

$$= \; C_p \, \left(A_u^t\right)^{p'} |\widehat{Q}_u^t|_{\widetilde{\mu}}^{\frac{p'}{q'}}. \tag{3.58}$$

Somando (3.58) sobre $(t,u) \in \Gamma_{N,M}$ e usando o fato que $p \leq q$, temos

$$\begin{aligned} IV \; &\leq \; C_p \, \beta^{-p'} \sum_{(t,u)\in\Gamma_{N,M}} |\widehat{Q}_u^t|_{\widetilde{\mu}}^{\frac{p'}{q'}} \left(A_u^t\right)^{p'} \\ &\leq \; C_p \, \beta^{-p'} \left(\sum_{(t,u)\in\Gamma_{N,M}} |\widehat{Q}_u^t|_{\widetilde{\mu}} \left(A_u^t\right)^{q'}\right)^{\frac{p'}{q'}}. \end{aligned} \tag{3.59}$$

Para obter a correspondente estimativa para V, notamos que, para um fixado (k,j), pela desigualdade de Hölder, pelo Teorema 2.2.8 aplicado à partição $\widehat{\mathcal{A}}_k$ e por (3.48), temos

$$\frac{|E_j^k|_\omega}{|Q_j^k|_\omega^{p'}} \left(\sum_{i\in H_j^k:(k+m,i)\in\Gamma_{N,M}} \left(\int_{\widehat{Q}_i^{k+m}} P(\chi_{Q_j^k}\omega)(x,t)(1-t)^{-1} d\widetilde{\mu}(x,t)\right) A_i^{k+m}\right)^{p'} \leq$$

$$\leq \; \frac{|E_j^k|_\omega}{|Q_j^k|_\omega^{p'}} \left(\sum_{i\in H_j^k} |\widehat{Q}_i^{k+m}|_{\widetilde{\mu}}^{\frac{-q}{q'}} \left(\int_{\widehat{Q}_i^{k+m}} P(\chi_{Q_j^k}\omega)(x,t)(1-t)^{-1} d\widetilde{\mu}(x,t)\right)^q\right)^{\frac{p'}{q}} \cdot$$

$$\left(\sum_{i\in H_j^k:(k+m,i)\in\Gamma_{N,M}} |\widehat{Q}_i^{k+m}|_{\widetilde{\mu}} \left(A_i^{k+m}\right)^{q'}\right)^{\frac{p'}{q'}}$$

$$= \; \frac{|E_j^k|_\omega}{|Q_j^k|_\omega^{p'}} \left(\sum_{i\in H_j^k} |\widehat{Q}_i^{k+m}|_{\widetilde{\mu}} \left(\frac{1}{|\widehat{Q}_i^{k+m}|_{\widetilde{\mu}}} \int_{\widehat{Q}_i^{k+m}} P(\chi_{Q_j^k}\omega)(x,t)(1-t)^{-1} d\widetilde{\mu}(x,t)\right)^q\right)^{\frac{p'}{q}} \cdot$$

$$\left(\sum_{i\in H_j^k:(k+m,i)\in\Gamma_{N,M}} |\widehat{Q}_i^{k+m}|_{\widetilde{\mu}} \left(A_i^{k+m}\right)^{q'}\right)^{\frac{p'}{q'}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{|E_j^k|_\omega}{|Q_j^k|_\omega{}^{p'}} \left(\sum_{i \in H_j^k} \int_{\widehat{Q}_i^{k+m}} \left(\frac{1}{|\widehat{Q}_i^{k+m}|_{\widetilde{\mu}}} \int_{\widehat{Q}_i^{k+m}} P(\chi_{Q_j^k}\omega)(x,t)(1-t)^{-1} d\widetilde{\mu}(x,t) \right)^q d\widetilde{\mu}(y,t) \right)^{\frac{p'}{q}} \cdot \\
&\quad \left(\sum_{i \in H_j^k : (k+m,i) \in \Gamma_{N,M}} |\widehat{Q}_i^{k+m}|_{\widetilde{\mu}} \left(A_i^{k+m} \right)^{q'} \right)^{\frac{p'}{q'}} \\
&\leq \frac{|E_j^k|_\omega}{|Q_j^k|_\omega{}^{p'}} \left(\sum_{i \in H_j^k} \int_{\widehat{Q}_i^{k+m}} \left[M_{\widetilde{\mu}} \left(P(\chi_{Q_j^k}\omega)(1-t)^{-1} \chi_{\widehat{Q}_i^{k+m}} \right)(y,t) \right]^q d\widetilde{\mu}(y,t) \right)^{\frac{p'}{q}} \cdot \\
&\quad \left(\sum_{i \in H_j^k : (k+m,i) \in \Gamma_{N,M}} |\widehat{Q}_i^{k+m}|_{\widetilde{\mu}} \left(A_i^{k+m} \right)^{q'} \right)^{\frac{p'}{q'}} \\
&\leq \frac{|E_j^k|_\omega}{|Q_j^k|_\omega{}^{p'}} \left(\sum_{i \in H_j^k} \int_{S^n \times [0,1)} \left[M_{\widetilde{\mu}} \left(P(\chi_{Q_j^k}\omega)(1-t)^{-1} \chi_{\widehat{Q}_i^{k+m}} \right)(y,t) \right]^q d\widetilde{\mu}(y,t) \right)^{\frac{p'}{q}} \cdot \\
&\quad \left(\sum_{i \in H_j^k : (k+m,i) \in \Gamma_{N,M}} |\widehat{Q}_i^{k+m}|_{\widetilde{\mu}} \left(A_i^{k+m} \right)^{q'} \right)^{\frac{p'}{q'}} \\
&\leq C_{p,q} \frac{|E_j^k|_\omega}{|Q_j^k|_\omega{}^{p'}} \left(\sum_{i \in H_j^k} \int_{S^n \times [0,1)} \left[P(\chi_{Q_j^k}\omega)(y,t)(1-t)^{-1} \chi_{\widehat{Q}_i^{k+m}}(y,t) \right]^q d\widetilde{\mu}(y,t) \right)^{\frac{p'}{q}} \cdot \\
&\quad \left(\sum_{i \in H_j^k : (k+m,i) \in \Gamma_{N,M}} |\widehat{Q}_i^{k+m}|_{\widetilde{\mu}} \left(A_i^{k+m} \right)^{q'} \right)^{\frac{p'}{q'}} \\
&= C_{p,q} \frac{|E_j^k|_\omega}{|Q_j^k|_\omega{}^{p'}} \left(\sum_{i \in H_j^k} \int_{\widehat{Q}_i^{k+m}} \left[P(\chi_{Q_j^k}\omega) \right]^q (y,t)(1-t)^{-q}(1-t)^q d\mu(y,t) \right)^{\frac{p'}{q}} \cdot \\
&\quad \left(\sum_{i \in H_j^k : (k+m,i) \in \Gamma_{N,M}} |\widehat{Q}_i^{k+m}|_{\widetilde{\mu}} \left(A_i^{k+m} \right)^{q'} \right)^{\frac{p'}{q'}} \\
&\leq C_{p,q} \frac{|E_j^k|_\omega}{|Q_j^k|_\omega{}^{p'}} |Q_j^k|_\omega^{\frac{p'}{p}} \left(\sum_{i \in H_j^k : (k+m,i) \in \Gamma_{N,M}} |\widehat{Q}_i^{k+m}|_{\widetilde{\mu}} \left(A_i^{k+m} \right)^{q'} \right)^{\frac{p'}{q'}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= C_{p,q}\,\frac{|E_j^k|_\omega}{|Q_j^k|_\omega}\left(\sum_{i\in H_j^k:(k+m,i)\in\Gamma_{N,M}} |\widehat{Q}_i^{k+m}|_{\widetilde{\mu}}\left(A_i^{k+m}\right)^{q'}\right)^{\frac{p'}{q'}}\\
&\le C_{p,q}\left(\sum_{i\in H_j^k:(k+m,i)\in\Gamma_{N,M}} |\widehat{Q}_i^{k+m}|_{\widetilde{\mu}}\left(A_i^{k+m}\right)^{q'}\right)^{\frac{p'}{q'}}.
\end{aligned}
\tag{3.60}
$$

Somando sobre $(k,j)\in G_{N,M}$ e usando o fato que $p\le q$, temos

$$
\begin{aligned}
V &\le C_{p,q}\,\beta^{-p'}\sum_{(k,j)\in G_{N,M}}\left(\sum_{i\in H_j^k:(k+m,i)\in\Gamma_{N,M}} |\widehat{Q}_i^{k+m}|_{\widetilde{\mu}}\left(A_i^{k+m}\right)^{q'}\right)^{\frac{p'}{q'}}\\
&\le C_{p,q}\,\beta^{-p'}\left(\sum_{(k,j)\in G_{N,M}}\ \sum_{i\in H_j^k:(k+m,i)\in\Gamma_{N,M}} |\widehat{Q}_i^{k+m}|_{\widetilde{\mu}}\left(A_i^{k+m}\right)^{q'}\right)^{\frac{p'}{q'}}\\
&\le C_{p,q}\,\beta^{-p'}\left(\sum_{i,j,k}\chi_{H_j^k}(i)\chi_{\Gamma_{N,M}}(k+m,i)|\widehat{Q}_i^{k+m}|_{\widetilde{\mu}}\left(A_i^{k+m}\right)^{q'}\right)^{\frac{p'}{q'}}\\
&= C_{p,q}\,\beta^{-p'}\left(\sum_{t,j,u}\chi_{H_j^{t-m}}(u)\chi_{\Gamma_{N,M}}(t,u)|\widehat{Q}_u^{t}|_{\widetilde{\mu}}\left(A_u^{t}\right)^{q'}\right)^{\frac{p'}{q'}}\\
&\le C_{p,q}\,\beta^{-p'}\left(\sum_{(t,u)\in\Gamma_{N,M}}\left(\sum_j\chi_{H_j^{t-m}}(u)\right)|\widehat{Q}_u^{t}|_{\widetilde{\mu}}\left(A_u^{t}\right)^{q'}\right)^{\frac{p'}{q'}}.
\end{aligned}
\tag{3.61}
$$

Mas, pelo Lema 3.2.14 temos que, se $u\in H_j^{t-m}$ então $Q_u^t\subset 30Q_j^{t-m*}$. Logo se $x\in Q_u^t$, temos

$$
\sum_j\chi_{H_j^{t-m}}(u)\le\sum_j\chi_{30Q_j^{t-m*}}(x)\le C\chi_{\Omega_{t-m}}(x)=C,
$$

pelo Lema 3.2.5(iii), pois na Observação 3.2.22 fixamos $\eta\ge 30$. Portanto, de (3.61) e da desigualdade acima, temos

$$
\begin{aligned}
V &\le C_{p,q}\,\beta^{-p'}\left(\sum_{(t,u)\in\Gamma_{N,M}}\left(\sum_j\chi_{H_j^{t-m}}(u)\right)|\widehat{Q}_u^{t}|_{\widetilde{\mu}}\left(A_u^{t}\right)^{q'}\right)^{\frac{p'}{q'}}\\
&\le C_{p,q}\,\beta^{-p'}\left(\sum_{(t,u)\in\Gamma_{N,M}}|\widehat{Q}_u^{t}|_{\widetilde{\mu}}\left(A_u^{t}\right)^{q'}\right)^{\frac{p'}{q'}}.
\end{aligned}
\tag{3.62}
$$

Combinando (3.57), (3.59) e (3.62), temos que o lado esquerdo de (3.56) é limitado por

$$\begin{aligned}
\sum_{(k,j)\in G_{N,M}} |E_j^k|_\omega 2^{kp'} &\leq IV + V \\
&\leq C_{p,q}\,\beta^{-p'}\left(\sum_{(t,u)\in\Gamma_{N,M}} |\widehat{Q}_u^t|_{\widetilde{\mu}}\left(A_u^t\right)^{q'}\right)^{\frac{p'}{q'}} \\
&= C_{p,q}\,\beta^{-p'}\left(\sum_{(t,u)\in\Gamma_{N,M}} \int_{S^n\times[0,1)} \chi_{\widehat{Q}_u^t}(x,t)d\widetilde{\mu}(x,t)\left(A_u^t\right)^{q'}\right)^{\frac{p'}{q'}} \\
&= C_{p,q}\,\beta^{-p'}\left(\int_{S^n\times[0,1)} \sum_{(t,u)\in\Gamma_{N,M}} \left(A_u^t\right)^{q'}\chi_{\widehat{Q}_u^t}(x,t)d\widetilde{\mu}(x,t)\right)^{\frac{p'}{q'}}.\quad(3.63)
\end{aligned}$$

Mas, fixado $(x,t)\in S^n\times[0,1)$, temos que se $(x,t)\in\widehat{Q}_u^t\cap\widehat{Q}_s^v$ com (t,u), $(v,s)\in\Gamma_{N,M}$ então $\widehat{Q}_u^t\subset_{\neq}\widehat{Q}_s^v$ ou $\widehat{Q}_s^v\subset_{\neq}\widehat{Q}_u^t$. Então, se $(t_i,u_i)\in\Gamma_{N,M}$, $i=1,2,3,\ldots$, são tais que $(x,t)\in\widehat{Q}_{u_i}^{t_i}$ e $\widehat{Q}_{u_1}^{t_1}\supset_{\neq}\widehat{Q}_{u_2}^{t_2}\supset_{\neq}\widehat{Q}_{u_3}^{t_3}\supset_{\neq}\cdots$, temos, pelo Lema 3.2.25(ii) que

$$2A_{u_1}^{t_1} < A_{u_2}^{t_2} < \frac{1}{2}A_{u_3}^{t_3} < \frac{1}{2^2}A_{u_4}^{t_4} < \cdots < \frac{1}{2^{r-2}}A_{u_r}^{t_r} < \cdots$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\sum_{(t,u)\in\Gamma_{N,M}} \left(A_u^t\right)^{q'}\chi_{\widehat{Q}_u^t}(x,t) &\leq (A_{u_1}^{t_1})^{q'} + (A_{u_2}^{t_2})^{q'} + (A_{u_3}^{t_3})^{q'} + \cdots \\
&= \lim_{r\to\infty}\left((A_{u_1}^{t_1})^{q'} + (A_{u_2}^{t_2})^{q'} + \cdots + (A_{u_r}^{t_r})^{q'}\right) \\
&\leq \lim_{r\to\infty}\left(\left(\frac{1}{2^{r-1}}A_{u_r}^{t_r}\right)^{q'} + \left(\frac{1}{2^{r-2}}A_{u_r}^{t_r}\right)^{q'} + \cdots + \left(A_{u_r}^{t_r}\right)^{q'}\right) \\
&= \lim_{r\to\infty}\left(\left(\frac{1}{2^{r-1}}\right)^{q'} + \left(\frac{1}{2^{r-2}}\right)^{q'} + \cdots + 1\right)\left(A_{u_r}^{t_r}\right)^{q'} \\
&\leq \lim_{r\to\infty}\left(\frac{1}{2^{r-1}} + \frac{1}{2^{r-2}} + \cdots + 1\right)^{q'}\left(A_{u_r}^{t_r}\right)^{q'} \\
&\leq 2^{q'}\sup_{(x,t)\in\widehat{Q}_u^t}\left(A_u^t\right)^{q'} \\
&= 2^{q'}\sup_{(x,t)\in\widehat{Q}_u^t}\left(\frac{1}{|\widehat{Q}_u^t|_{\widetilde{\mu}}}\int_{\widehat{Q}_u^t} f(y,s)(1-s)^{1-q}d\widetilde{\mu}(y,s)\right)^{q'} \\
&\leq 2^{q'}\sup_{\substack{(x,t)\in\widehat{Q}\\ \widehat{Q}\in\widehat{\mathcal{A}}}}\left(\frac{1}{|\widehat{Q}|_{\widetilde{\mu}}}\int_{\widehat{Q}} f(y,s)(1-s)^{1-q}d\widetilde{\mu}(y,s)\right)^{q'}
\end{aligned}$$

$$= \quad 2^{q'}\left(M_{\widetilde{\mu}}g(x,t)\right)^{q'}, \tag{3.64}$$

onde $g(y,s) = (1-s)^{1-q}f(y,s)$ e

$$M_{\widetilde{\mu}}g(x,t) = \sup_{\substack{(x,t)\in\widehat{Q} \\ \widehat{Q}\in\widehat{\mathcal{A}}}} \left(\frac{1}{|\widehat{Q}|_{\widetilde{\mu}}} \int_{\widehat{Q}} g(y,s)\,d\widetilde{\mu}(y,s) \right).$$

De (3.63), (3.64) e do Teorema 2.2.8 aplicado à partição $\widehat{\mathcal{A}}_k$ (veja Definição 1.2.19), obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{(k,j)\in G_{N,M}} |E_j^k|_\omega 2^{kp'} &\leq C_{p,q}\,\beta^{-p'}\left(\int_{S^n\times[0,1)} \sum_{(t,u)\in\Gamma_{N,M}} \left(A_u^t\right)^{q'} \chi_{\widehat{Q}_u^t}(x,t)\,d\widetilde{\mu}(x,t)\right)^{\frac{p'}{q'}} \\
&\leq C_{p,q}\,\beta^{-p'}\left(\int_{S^n\times[0,1)} \left[M_{\widetilde{\mu}}g(x,t)\right]^{q'} d\widetilde{\mu}(x,t)\right)^{\frac{p'}{q'}} \\
&\leq C_{p,q}\,\beta^{-p'}\left(\int_{S^n\times[0,1)} [g(x,t)]^{q'}\,d\widetilde{\mu}(x,t)\right)^{\frac{p'}{q'}} \\
&= C_{p,q}\,\beta^{-p'}\left(\int_{S^n\times[0,1)} \left[f(x,t)(1-t)^{1-q}\right]^{q'} (1-t)^q\,d\mu(x,t)\right)^{\frac{p'}{q'}} \\
&= C_{p,q}\,\beta^{-p'}\left(\int_{S^n\times[0,1)} [f(x,t)]^{q'}\,d\mu(x,t)\right)^{\frac{p'}{q'}}, \qquad (3.65)
\end{aligned}$$

que é (3.56). Agora, por (3.65), temos

$$\begin{aligned}
III &= \sum_{(k,j)\in G} |E_j^k|_\omega 2^{kp'} \\
&= \lim_{N\to-\infty} \sum_{M=0}^{m-1} \sum_{(k,j)\in G_{N,M}} |E_j^k|_\omega 2^{kp'} \\
&\leq C_{m,p,q}\,\beta^{-p'}\left(\int_{S^n\times[0,1)} [f(x,t)]^{q'}\,d\mu(x,t)\right)^{\frac{p'}{q'}}, \qquad (3.66)
\end{aligned}$$

o que encerra a estimativa de III.

Combinando (3.51), (3.52), (3.55) e (3.66), temos

$$\begin{aligned}
\int_{S^n} [P^*(f\mu)(x)]^{p'}\,d\omega(x) &\leq C_p\,\beta \int_{S^n} [P^*(f\mu)(x)]^{p'}\,d\omega(x) + \\
&+ C_{m,p,q}\,\beta^{-p'}\left(\int_{S^n} [f(x,t)]^{q'}\,d\mu(x,t)\right)^{\frac{p'}{q'}}. \qquad (3.67)
\end{aligned}$$

Agora, escolhendo β pequeno tal que $C_p\beta < \frac{1}{2}$ e subtraindo o primeiro termo do lado direito de (3.67) em ambos os membros desta desigualdade, já que ele é finito por pois $P^*(f\mu) \leq CP^*(\chi_{S^n\times[0,1)}\mu) \in L^{p'}(S^n, \omega)$, obtemos (3.50) para $f \geq 0$ limitada. Para $f \geq 0$ arbitrária, basta aplicar o Teorema da Convergência Monótona. Isto completa a demonstração do teorema.

Observação 3.2.28 *O Teorema 3.2.26 é a versão para a esfera S^n do Teorema 3.1.8 para o caso do $I\!R^n$. Para demonstrá-lo foi essencial estudar com detalhes Sawyer [14], especialmente o Teorema 3.1.8, em cuja demonstração Sawyer utiliza as idéias da demonstração do seguinte teorema:*

Teorema 3.2.29 *(Sawyer [14], Teorema 1, pag. 535) Suponha $1 < p \leq q < \infty$ e que ω e μ são medidas de Borel não negativas sobre $I\!R^n$. Seja $Tf = K * f$, onde $K(x)$ é uma função radial semicontínua inferiormente, decrescente em $|x|$ e satisfazendo a seguinte condição de crescimento: $K(x) < CK(2x)$, $x \in R^n$. São equivalentes:*

(i) Existe uma constante $C > 0$ tal que, para toda função mensurável $f \geq 0$,

$$\left(\int_{I\!R^n} [T(f\mu)(x)]^q d\omega(x)\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int_{I\!R^n} [f(x)]^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

(ii) Existe uma constante $C > 0$ tal que, para todo cubo diádico $Q \subset I\!R^n$, temos

$$\left(\int_{I\!R^n} [T(\chi_Q\mu)(x)]^q d\omega(x)\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\,|Q|_\mu^{\frac{1}{p}} < \infty$$

e

$$\left(\int_{I\!R^n} [T(\chi_Q\omega)(x)]^{p'} d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p'}} \leq C\,|Q|_\omega^{\frac{1}{q'}} < \infty.$$

Porém, encontramos algumas dificuldades na leitura deste trabalho. Para demonstrar o Teorema 3.1.8 de modo análogo à demonstração do Teorema 3.2.29, Sawyer inicia da seguinte forma: Dada uma função mensurável, não negativa e com suporte compacto f definida sobre $I\!R^n \times [0,\infty)$, e uma medida μ sobre a σ-álgebra de Borel de $I\!R^n \times [0,\infty)$, considere o conjunto

$$\Omega_k = \{x \in I\!R^n \times [0,\infty) : P^*(f\mu)(x) > 2^k\},$$

onde $k \in \mathbb{Z}$,

$$P^*(f\mu)(x) = \int_{\mathbb{R}^n \times [0,\infty)} P(x-y,t) f(y,t) d\mu(y,t),$$

e $P(x,t)$ *é o núcleo de Poisson sobre* $\mathbb{R}^n$. *Este conjunto é aberto e pode ser escrito como* $\bigcup_j Q_j^k$, *onde* Q_j^k *são cubos diádicos (usuais) em* $\mathbb{R}^n$ *maximais entre os cubos diádicos* Q *que satisfazem* $RQ \subset \Omega_k$, *onde* $R \geq 3$ *é uma constante que só depende da dimensão* n *e* RQ *é o cubo em* $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ *que tem o mesmo centro de* Q *e lado* R *vezes o lado de* Q. *Para estes conjuntos vale a seguinte propriedade: (Sawyer [14], (2.2)(iii)): Existe uma constante* C *tal que*

$$\sum_j \chi_{3Q_j^k}(x) \leq C\, \chi_{\Omega_k}(x), \tag{3.68}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ *e para todo* $k \in \mathbb{Z}$ *(conseguimos uma desigualdade análoga a esta no Lema 3.2.5(iii)).*

Para demonstrar uma desigualdade importante para a obtenção do Teorema 3.1.8, Sawyer faz uso do argumento que, para obtê-la, basta seguir "literalmente" *os passos da demonstração do Teorema 3.2.29 no contexto do espaço de medida* $(R^{n+1} \times [0,\infty), d\omega)$, *trocando os cubos diádicos* Q_j^k *de* $\mathbb{R}^n$ *pelos cubos* $\widehat{Q}_j^k$ *de* $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$, *onde* $\widehat{Q}$ *denota o cubo de* $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ *que tem* Q *como face, e trocando* Ω_k *por* $\widehat{\Omega}_k = \bigcup_j \widehat{Q}_j^k$. *Isto significa que, em determinado momento, necessitamos de uma desigualdade análoga à (3.68) com as respectivas modificações, isto é, deveríamos utilizar a desigualdade*

$$\sum_j \chi_{3\widehat{Q}_j^k}(x,t) \leq C\, \chi_{\widehat{\Omega}_k}(x,t), \tag{3.69}$$

para todo $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ *e para todo* $k \in \mathbb{Z}$. *Porém, ela não é verdadeira. De fato, se* $(x,t) \notin \widehat{\Omega}_k$, *temos que* $(x,t) \notin \bigcup_j \widehat{Q}_j^k$. *Se* $x \in Q_{j_0}^k$ *para algum* j_0, *para que* $(x,t) \notin \bigcup_j \widehat{Q}_j^k$, *devemos ter* $t \geq \ell(Q_{j_0}^k)$, *onde* $\ell(Q_{j_0}^k)$ *é o comprimento do lado de* $Q_{j_0}^k$. *Porém, podemos ter* $\ell(Q_{j_0}^k) \leq t < 3\ell(Q_{j_0}^k)$, *e assim,* $(x,t) \in Q_{j_0}^k \times [0, 3\ell(Q_{j_0}^k)) = 3\widehat{Q}_{j_0}^k$, *e portanto, para este* (x,t), *temos que o membro direito de (3.69) é zero mas o membro esquerdo de (3.69) é positivo, o que mostra que a desigualdade (3.69) não é válida.*

Isto não invalida o resultado de Sawyer, principalmente porque este resultado é generalizado em um trabalho posterior (veja Teorema 3.1.6 da Seção anterior). Além disso, *conseguimos contornar este problema demonstrando a desigualdade desejada sem fazer uso de (3.69). Esta foi uma das maiores dificuldades que encontramos no estudo de Sawyer [14], já que, para conseguir o Teorema 3.2.26 foi essencial entender com detalhes a demonstração do Teorema 3.1.8.*

Uma outra dificuldade que encontramos no estudo de Sawyer [14], é um erro que o autor comete na argumentação da demonstração de outra desigualdade do Teorema 3.1.8 e retifica em um trabalho seguinte (veja Sawyer-Wheeden [15, pag.861]). Porém, a correção se dá para espaços de tipo homogêneo e não para $\mathbb{R}^n$. Esta correção está confusa e isto é observado em Sawyer-Wheeden-Zhao [16, pag. 545]. Além disso, por conter poucos detalhes, tem difícil compreensão.

Para demonstrar o Teorema 3.2.26, uma das maiores dificuldades que encontramos foi a estimativa de II (veja desigualdade (3.51)), dada no 2^a Parte da demonstração. Para obtê-la fizemos uso do Lema 3.2.18, cuja demonstração foi muito trabalhosa e dispensamos um bom tempo para consegui-la.

Observação 3.2.30 *Vamos mostrar que podemos encontrar condições suficientes para que (3.47) ocorra, mais fracas que (3.48) e (3.49). Isto será demonstrado a seguir, no Teorema 3.2.32.*

Seja C_1 a constante da Observação 1.2.9 e sejam $a_1 = 43(4/C_1 + 1)$ e $a_2 \geq 1$. Vamos, a partir de agora, tomar $\eta \geq max\{a_1, a_2\}$, que permanecerá fixo até o final do Capítulo. Sejam

$$\begin{aligned} E' &= \{(k,j) : |E_j^k|_\omega \leq \beta |\eta Q_j^{k^*}|_\omega\} \\ F' &= \{(k,j) : |E_j^k|_\omega > \beta |\eta Q_j^{k^*}|_\omega \quad e \quad \sigma_j^k > \tau_j^k\} \\ G' &= \{(k,j) : |E_j^k|_\omega > \beta |\eta Q_j^{k^*}|_\omega \quad e \quad \sigma_j^k \leq \tau_j^k\}, \end{aligned}$$

onde σ_j^k e τ_j^k estão definidos no Lema 3.2.12 e onde $0 < \beta < 1$ será escolhido depois. Observamos que o Lema 3.2.18 continua válido se, no lugar do conjunto F tivermos o conjunto F', com demonstração idêntica. Da mesma forma, se definirmos os conjuntos $\Gamma_{N,M}$ (veja

Definição 3.2.24) utilizando o conjunto G' no lugar do conjunto G, o Lema 3.2.25 também é válido, com a mesma demonstração.

Lema 3.2.31 *Sejam Q_j^k e L_k como na Observação 3.2.3, E_j^k como na Definição 3.2.9 e L_j^k como na Definição 3.2.21. Se $k,\ t \in \mathbb{Z}$, $u \in L_t$ e $j \in L_k$, seja $s \in L_j^k$ tal que $Q_s^k \subset Q_u^t$. Então $E_j^k \subset a_1 {Q_u^t}^*$, onde a_1 está definido na Observação 3.2.30.*

Demonstração. Fixemos k, t, u, j, s, Q_s^k e Q_u^t nas condições do enunciado. Vamos escrever ${Q_j^k}^* = B(x_{Q_j^k}, d_j^k)$, ${Q_s^k}^* = B(x_{Q_s^k}, d_s^k)$ e ${Q_u^t}^* = B(x_{Q_u^t}, d_u^t)$. Vamos primeiramente mostrar que, para todo $\alpha \geq 1$, temos

$$\alpha {Q_s^k}^* \subset \left(\frac{4}{C_1} + 1\right) \alpha {Q_u^t}^*. \tag{3.70}$$

De fato, mostrar (3.70) é equivalente a mostrar que

$$B(x_{Q_s^k}, \alpha d_s^k) \subset B(x_{Q_u^t}, (4/C_1 + 1)\alpha d_u^t).$$

Pela Observação 1.2.9, temos que $B(x_{Q_s^k}, C_1 d_s^k) \subset Q_s^k$ e, como $Q_s^k \subset Q_u^t$, temos que

$$B(x_{Q_s^k}, C_1 d_s^k) \subset Q_u^t \subset {Q_u^t}^* = B(x_{Q_u^t}, d_u^t).$$

Seja $z_0 \in B(x_{Q_s^k}, C_1 d_s^k)$ tal que $|z_0 - x_{Q_s^k}| > 1/2\, C_1 d_s^k$. Como $x_{Q_s^k}$, $z_0 \in B(x_{Q_u^t}, d_u^t)$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} C_1 d_s^k &< |z_0 - x_{Q_s^k}| \\
&\leq |z_0 - x_{Q_u^t}| + |x_{Q_u^t} - x_{Q_s^k}| \\
&\leq d_u^t + d_u^t \\
&= 2 d_u^t,
\end{aligned}$$

e, portanto, $d_s^k < 4/C_1\, d_u^t$. Agora, seja $z \in B(x_{Q_s^k}, \alpha d_s^k)$. Então

$$\begin{aligned}
|z - x_{Q_u^t}| &\leq |z - x_{Q_s^k}| + |x_{Q_u^t} - x_{Q_s^k}| \\
&\leq \alpha d_s^k + d_u^t \\
&\leq \alpha \frac{4}{C_1} d_u^t + d_u^t \\
&\leq \left(\frac{4}{C_1} + 1\right) \alpha d_u^t,
\end{aligned}$$

o que demonstra (3.70).

Vamos mostrar agora que, se $Q_s^k \bigcap 2Q_j^{k^*} \neq \emptyset$, então

$$Q_j^{k^*} \subset 43Q_s^{k^*}. \tag{3.71}$$

Seja $z \in Q_s^k \bigcap 2Q_j^{k^*}$. Então $|z - x_{Q_s^k}| \leq d_s^k$ e $|z - x_{Q_j^k}| \leq 2d_j^k$, e segue de (3.20) que

$$\frac{1}{2}\eta d_s^k \leq d(z, \Omega_k^c) \leq 7\eta d_s^k$$

e

$$\frac{1}{2}\eta d_j^k \leq d(z, \Omega_k^c) \leq 7\eta d_j^k.$$

Portanto,

$$d_j^k \leq \frac{2}{\eta} d(z, \Omega_k^c) \leq \frac{2}{\eta} 7\eta d_s^k = 14 d_s^k.$$

Então, se $y \in Q_j^{k^*}$, temos

$$\begin{aligned}
|y - x_{Q_s^k}| &\leq |y - x_{Q_j^k}| + |x_{Q_j^k} - x_{Q_s^k}| \\
&\leq d_j^k + |x_{Q_j^k} - z| + |z - x_{Q_s^k}| \\
&\leq d_j^k + 2d_j^k + d_s^k \\
&\leq 3 \cdot 14 d_s^k + d_s^k \\
&= 43 d_s^k,
\end{aligned}$$

o que demonstra (3.71).

Finalmente, como $Q_j^k \subset Q_j^{k^*}$, temos de (3.71) que $Q_j^k \subset 43Q_s^{k^*}$ se $Q_s^k \bigcap 2Q_j^{k^*} \neq \emptyset$. Usando este fato e utilizando (3.70) com $\alpha = 43$, temos

$$E_j^k \subset Q_j^k \subset Q_j^{k^*} \subset 43Q_s^{k^*} \subset 43\left(\frac{4}{C_1} + 1\right) Q_u^{t\,*} = a_1 Q_u^{t\,*},$$

o que demonstra o lema.

Teorema 3.2.32 *Suponha $1 < p \leq q < \infty$ e sejam ω e μ medidas de Borel não negativas e finitas sobre S^n e $S^n \times [0,1)$ respectivamente. Suponha que $P^*(\chi_{S^n \times [0,1)}\mu) \in L^{p'}(S^n, \omega)$.*

Sejam a_1 e a_2, como na Observação 3.2.30. Se existe uma constante $C > 0$ tal que para todo $Q \in \mathcal{A}$ temos

$$\left(\int_{a_1\widehat{Q}^*}[P(\chi_Q\omega)(x,t)]^q d\mu(x,t)\right)^{\frac{1}{q}} \leq C|a_2Q^*|_\omega^{\frac{1}{p}} \tag{3.72}$$

e

$$\left(\int_{a_1Q^*}[P^*(\chi_{\widehat{Q}}(1-t)^{q-1}\mu)(x)]^{p'} d\omega(x)\right)^{\frac{1}{p'}} \leq C\left(\int_{\widehat{Q}}(1-t)^q d\mu(x,t)\right)^{\frac{1}{q'}}, \tag{3.73}$$

então existe uma constante $C > 0$ tal que, para toda função mensurável $g \geq 0$,

$$\left(\int_{S^n\times[0,1)}[P(g\omega)(x,t)]^q d\mu(x,t)\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int_{S^n}[g(x)]^p d\omega(x)\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.74}$$

Demonstração. A demonstração deste teorema segue exatamente as mesmas idéias da demonstração do Teorema 3.2.26 e por isso daremos detalhes apenas nos lugares onde as modificações forem relevantes.

Seja $f \geq 0$ uma função limitada definida sobre $S^n \times [0,1)$. Se Ω_k e Q_j^k são dados como na Observação 3.2.3 e E_j^k é o conjunto dado na Definição 3.2.9, temos, exatamente como em (3.51),

$$\begin{aligned}\int_{S^n}[P^*(f\mu)(x)]^{p'} d\omega(x) &\leq C_{m,p}\left(\sum_{(k,j)\in E'} 2^{kp'}|E_j^k|_\omega + \sum_{(k,j)\in F'} 2^{kp'}|E_j^k|_\omega + \sum_{(k,j)\in G'} 2^{kp'}|E_j^k|_\omega\right)\\ &= C_{m,p}\ (I + II + III),\end{aligned} \tag{3.75}$$

onde E', F' e G' estão definidos na Observação 3.2.30.

1^a **Parte.** Vamos estimar I. Pelo Lema 3.2.5(iii) e por (3.52), temos

$$\begin{aligned} I &= \sum_{(k,j)\in E'} 2^{kp'}|E_j^k|_\omega\\ &\leq \beta\sum_{k,j} 2^{kp'}|\eta Q_j^{k^*}|_\omega\\ &\leq \beta\sum_k 2^{kp'}\left(\sum_j\int_{S^n}\chi_{\eta Q_j^{k^*}}(x)d\omega(x)\right)\\ &= \beta\sum_k 2^{kp'}\int_{S^n}\left(\sum_j\chi_{\eta Q_j^{k^*}}(x)\right)d\omega(x)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C\beta\sum_k 2^{kp'}\int_{S^n}\chi_{\Omega_k}(x)d\omega(x) \\
&= \beta\sum_k 2^{kp'}|\Omega_k|_\omega \\
&\leq C_p\,\beta\int_{S^n}[P^*(f\mu)(x)]^{p'}d\omega(x).
\end{aligned}
\tag{3.76}
$$

2^a **Parte.** Vamos estimar II. Para isto, vamos observar que

$$
II=\sum_{(k,j)\in F'}2^{kp'}|E_j^k|_\omega=\sum_{M=0}^{m-1}\sum_{\substack{(k,j)\in F'\\ k\equiv M\ (mod\ m)}}2^{kp'}|E_j^k|_\omega. \tag{3.77}
$$

Fixemos $0\leq M\leq m-1$. Do Lema 3.2.12, do fato de estarmos somando sobre $(k,j)\in F'$, da desigualdade de Hölder, de (3.72), do fato que $\eta\geq a_2$ (veja Observação 3.2.30), usando o fato que vale o Lema 3.2.18 para F' no lugar de F e procedendo exatamente como (3.54), segue que

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{(k,j)\in F'\\ k\equiv M\ (mod\ m)}}|E_j^k|_\omega 2^{kp'} &\leq \sum_{\substack{(k,j)\in F'\\ k\equiv M\ (mod\ m)}}|E_j^k|_\omega\left(\frac{2}{|E_j^k|_\omega}\int_{2\widehat{Q}_j^{k^*}-\widehat{\Omega}_{k+m}}f(x,t)P(\chi_{E_j^k}\omega)(x,t)d\mu(x,t)\right)^{p'} \\
&\leq \sum_{\substack{(k,j)\in F'\\ k\equiv M\ (mod\ m)}}|E_j^k|_\omega\left(\frac{2}{\beta|\eta Q_j^{k^*}|_\omega}\int_{2\widehat{Q}_j^{k^*}-\widehat{\Omega}_{k+m}}f(x,t)P(\chi_{E_j^k}\omega)(x,t)d\mu(x,t)\right)^{p'} \\
&\leq C_p\,\beta^{-p'}\sum_{\substack{(k,j)\in F'\\ k\equiv M\ (mod\ m)}}\frac{|E_j^k|_\omega}{|\eta Q_j^{k^*}|_\omega^{p'}}\left(\int_{2\widehat{Q}_j^{k^*}}[P(\chi_{Q_j^k}\omega)]^q(x,t)d\mu(x,t)\right)^{\frac{p'}{q}}\cdot \\
&\quad\left(\int_{2\widehat{Q}_j^{k^*}-\widehat{\Omega}_{k+m}}[f(x,t)]^{q'}d\mu(x,t)\right)^{\frac{p'}{q'}} \\
&\leq C_p\,\beta^{-p'}\sum_{\substack{(k,j)\in F'\\ k\equiv M\ (mod\ m)}}\frac{|E_j^k|_\omega}{|\eta Q_j^{k^*}|_\omega^{p'}}|a_2Q_j^{k^*}|_\omega^{\frac{p'}{p}}\left(\int_{2\widehat{Q}_j^{k^*}-\widehat{\Omega}_{k+m}}[f(x,t)]^{q'}d\mu(x,t)\right)^{\frac{p'}{q'}} \\
&= C_p\,\beta^{-p'}\sum_{\substack{(k,j)\in F'\\ k\equiv M\ (mod\ m)}}\frac{|E_j^k|_\omega}{|\eta Q_j^{k^*}|_\omega}\left(\int_{2\widehat{Q}_j^{k^*}-\widehat{\Omega}_{k+m}}[f(x,t)]^{q'}d\mu(x,t)\right)^{\frac{p'}{q'}} \\
&\leq C_p\,\beta^{-p'}\sum_{\substack{(k,j)\in F'\\ k\equiv M\ (mod\ m)}}\left(\int_{2\widehat{Q}_j^{k^*}-\widehat{\Omega}_{k+m}}[f(x,t)]^{q'}d\mu(x,t)\right)^{\frac{p'}{q'}} \\
&\leq C_{m,p,q}\,\beta^{-p'}\left(\int_{S^n\times[0,1)}[f(x,t)]^{q'}d\mu(x,t)\right)^{\frac{p'}{q'}},
\end{aligned}
\tag{3.78}
$$

e, portanto,

$$II \leq C_{m,p,q}\, \beta^{-p'} \left(\int_{S^n \times [0,1)} [f(x,t)]^{q'} d\mu(x,t) \right)^{\frac{p'}{q'}}. \tag{3.79}$$

3^a **Parte.** Vamos, agora, estimar III em (3.75). Sejam N e M inteiros com $0 \leq M \leq m-1$. Vamos ainda denotar por $G_{N,M}$ o conjunto

$$G_{N,M} = \{(k,j) \in G' : k \geq N \ \text{ e } \ k \equiv M \ \ (mod \ \ m)\}.$$

Vamos mostrar que

$$\sum_{(k,j)\in G_{N,M}} \left|E_j^k\right|_\omega 2^{kp'} \leq C_{p,q} \left(\int_{S^n \times [0,1)} [f(x,t)]^{q'} d\mu(x,t) \right)^{\frac{p'}{q'}}. \tag{3.80}$$

Usando o Lema 3.2.12, o fato de estarmos somando sobre $(k,j) \in G'$, pela Observação 3.2.22 e procedendo como em (3.57) obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{(k,j)\in G_{N,M}} |E_j^k|_\omega 2^{kp'} &\leq \sum_{(k,j)\in G_{N,M}} |E_j^k|_\omega \left(\frac{2\tau_j^k}{|E_j^k|_\omega} \right)^{p'} \\
&\leq C_p \beta^{-p'} \sum_{(k,j)\in G_{N,M}} \frac{|E_j^k|_\omega}{|\eta Q_j^{k^*}|_\omega^{p'}} (\tau_j^k)^{p'} \\
&\leq C_{p,q} \beta^{-p'} \sum_{(k,j)\in G_{N,M}} \sum_{s \in L_j^k} \frac{|E_j^k|_\omega}{|\eta Q_j^{k^*}|_\omega^{p'}} \cdot \\
&\quad \left(\sum_{\substack{i: P(Q_i^{k+m}) = P(Q_s^k) \\ Q_i^{k+m} \subset Q_s^k}} \left(\int_{\widehat{Q}_i^{k+m}} P(\chi_{E_j^k}\omega)(x,t)(1-t)^{-1} d\tilde{\mu}(x,t) \right) \mathcal{A}_i^{k+m} \right)^{p'} + \\
&+ C_{p,q} \beta^{-p'} \sum_{(k,j)\in G_{N,M}} \frac{|E_j^k|_\omega}{|\eta Q_j^{k^*}|_\omega^{p'}} \cdot \\
&\quad \left(\sum_{i \in H_j^k : (k+m,i) \in \Gamma_{N,M}} \left(\int_{\widehat{Q}_i^{k+m}} P(\chi_{E_j^k}\omega)(x,t)(1-t)^{-1} d\tilde{\mu}(x,t) \right) \mathcal{A}_i^{k+m} \right)^{p'} \\
&= IV + V.
\end{aligned} \tag{3.81}$$

Vamos usar as condições (3.73) e (3.72) para estimar IV e V respectivamente.

Primeiro, notemos que para um $(t,u) \in \Gamma_{N,M}$ fixado, se $Q_s^k \subset Q_u^t$, então $\widehat{Q}_s^k \subset \widehat{Q}_u^t$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{\widehat{Q}_s^k} P(\chi_{E_j^k}\omega)(x,t)(1-t)^{-1} d\widetilde{\mu}(x,t) &= \int_{S^n\times[0,1)} P(\chi_{E_j^k}\omega)(x,t)(1-t)^{-1}\chi_{\widehat{Q}_s^k}(1-t)^q d\mu(x,t) \\
&= \int_{S^n\times[0,1)} P(\chi_{E_j^k}\omega)(x,t)(1-t)^{q-1}\chi_{\widehat{Q}_u^t} d\mu(x,t) \\
&= \int_{S^n} P^*(\chi_{\widehat{Q}_u^t}(1-t)^{q-1}\mu)(y)\chi_{E_j^k}(y)d\omega(y) \\
&= \int_{E_j^k} P^*(\chi_{\widehat{Q}_u^t}(1-t)^{q-1}\mu)(y)d\omega(y).
\end{aligned}$$

Para um $(t,u) \in \Gamma_{N,M}$ fixado, seja

$$G(t,u) = \{(k,j) : \text{ existe } s \in L_j^k \text{ tal que } Q_s^k \subset Q_u^t\}.$$

Portanto, temos pela igualdade acima, pelo Lema 3.2.25(i), pelo Lema 3.2.5(i), pelo fato que a cardinalidade de L_j^k é no máximo C, pela desigualdade de Hölder, pelo Lema 3.2.31 e por por (3.73), temos que

$$\begin{aligned}
&\sum_{(k,j)\in G_{N,M}} \sum_{s\in L_j^k : P(Q_s^k)=Q_u^t} \frac{|E_j^k|_\omega}{|\eta Q_j^{k*}|_\omega^{p'}} \cdot \\
&\left(\sum_{\substack{i:P(Q_i^{k+m})=P(Q_s^k) \\ Q_i^{k+m}\subset Q_s^k}} \left(\int_{\widehat{Q}_i^{k+m}} P(\chi_{E_j^k}\omega)(x,t)(1-t)^{-1} d\widetilde{\mu}(x,t) \right) A_i^{k+m} \right)^{p'} \\
\leq\ & \sum_{(k,j)\in G_{N,M}} \sum_{s\in L_j^k : P(Q_s^k)=Q_u^t} \frac{|E_j^k|_\omega}{|Q_j^k|_\omega^{p'}} \left(\left(\int_{\widehat{Q}_s^k} P(\chi_{E_j^k}\omega)(x,t)(1-t)^{-1} d\widetilde{\mu}(x,t) \right) 2A_u^t \right)^{p'} \\
\leq\ & C_p \left(A_u^t\right)^{p'} \sum_{(k,j)\in G_{N,M}} \sum_{s\in L_j^k : P(Q_s^k)=Q_u^t} \frac{|E_j^k|_\omega}{|Q_j^k|_\omega^{p'}} \left(\int_{E_j^k} P^*(\chi_{\widehat{Q}_u^t}(1-t)^{q-1}\mu)(y)d\omega(y) \right)^{p'} \\
\leq\ & C_p \left(A_u^t\right)^{p'} \sum_{(k,j)\in G(t,u)} \frac{|E_j^k|_\omega}{|Q_j^k|_\omega^{p'}} \left(\int_{E_j^k} P^*(\chi_{\widehat{Q}_u^t}(1-t)^{q-1}\mu)(y)d\omega(y) \right)^{p'}
\end{aligned}$$

$$\leq \; C_p \; \left(A_u^t\right)^{p'} \sum_{(k,j)\in G(t,u)} \frac{|E_j^k|_\omega}{|Q_j^k|_\omega^{p'}} |Q_j^k|_\omega^{p'-1} \int_{E_j^k} [P^*(\chi_{\widehat{Q}_u^t}(1-t)^{q-1}\mu)]^{p'}(y)d\omega(y)$$

$$\leq \; C_p \; \left(A_u^t\right)^{p'} \sum_{(k,j)\in G(t,u)} \int_{E_j^k} [P^*(\chi_{\widehat{Q}_u^t}(1-t)^{q-1}\mu)]^{p'}(y)d\omega(y)$$

$$\leq \; C_p \; \left(A_u^t\right)^{p'} \int_{a_1 Q_u^{t\,*}} [P^*(\chi_{\widehat{Q}_u^t}(1-t)^{q-1}\mu)]^{p'}(y)d\omega(y)$$

$$\leq \; C_p \; \left(A_u^t\right)^{p'} \left(\int_{\widehat{Q}_u^t} (1-t)^q d\mu(x,t)\right)^{\frac{p'}{q'}}$$

$$= \; C_p \left(A_u^t\right)^{p'} \left(\int_{\widehat{Q}_u^t} d\widetilde{\mu}(x,t)\right)^{\frac{p'}{q'}}$$

$$= \; C_p \; \left(A_u^t\right)^{p'} |\widehat{Q}_u^t|_{\widetilde{\mu}}^{\frac{p'}{q'}}. \tag{3.82}$$

Somando (3.82) sobre $(t,u)\in\Gamma_{N,M}$ e usando o fato que $p\leq q$, temos (veja 3.59)

$$IV \;\; \leq \;\; C_p \, \beta^{-p'} \left(\sum_{(t,u)\in\Gamma_{N,M}} |\widehat{Q}_u^t|_{\widetilde{\mu}} \left(A_u^t\right)^{q'}\right)^{\frac{p'}{q'}}. \tag{3.83}$$

Para obter a correspondente estimativa para V, fixemos (k,j). Procedendo como em (3.60), utilizando o Lema 3.2.14, o Lema 3.2.5(i), o fato que $a_1\geq 30$, $\eta\geq a_2$ e (3.72) temos

$$\frac{|E_j^k|_\omega}{|\eta Q_j^{k*}|_\omega^{p'}} \left(\sum_{i\in H_j^k:(k+m,i)\in\Gamma_{N,M}} \left(\int_{\widehat{Q}_i^{k+m}} P(\chi_{E_j^k}\omega)(x,t)(1-t)^{-1}d\widetilde{\mu}(x,t)\right) A_i^{k+m}\right)^{p'} \leq$$

$$\leq \; C_{p,q} \, \frac{|E_j^k|_\omega}{|\eta Q_j^{k*}|_\omega^{p'}} \left(\sum_{i\in H_j^k:(k+m,i)\in\Gamma_{N,M}} \int_{\widehat{Q}_i^{k+m}} \left[P(\chi_{Q_j^k}\omega)\right]^q (y,t)d\mu(y,t)\right)^{\frac{p'}{q}} \cdot$$

$$\left(\sum_{i\in H_j^k:(k+m,i)\in\Gamma_{N,M}} |\widehat{Q}_i^{k+m}|_{\widetilde{\mu}} \left(A_i^{k+m}\right)^{q'}\right)^{\frac{p'}{q'}}$$

$$\leq \; C_{p,q} \, \frac{|E_j^k|_\omega}{|\eta Q_j^{k*}|_\omega^{p'}} \left(\int_{30\widehat{Q}_j^{k*}} \left[P(\chi_{Q_j^k}\omega)\right]^q (y,t)d\mu(y,t)\right)^{\frac{p'}{q}}.$$

$$\left(\sum_{i\in H_j^k:(k+m,i)\in\Gamma_{N,M}} |\widehat{Q}_i^{k+m}|_{\widetilde{\mu}}\left(A_i^{k+m}\right)^{q'}\right)^{\frac{p'}{q'}}$$

$$\leq C_{p,q}\frac{|E_j^k|_\omega}{|\eta Q_j^{k^*}|_\omega^{p'}}\left(\int_{a_1\widehat{Q}_j^{k^*}}\left[P(\chi_{Q_j^k}\omega)\right]^q(y,t)d\mu(y,t)\right)^{\frac{p'}{q}}\cdot$$

$$\left(\sum_{i\in H_j^k:(k+m,i)\in\Gamma_{N,M}} |\widehat{Q}_i^{k+m}|_{\widetilde{\mu}}\left(A_i^{k+m}\right)^{q'}\right)^{\frac{p'}{q'}}$$

$$\leq C_{p,q}\frac{|E_j^k|_\omega}{|\eta Q_j^{k^*}|_\omega^{p'}}|a_2Q_j^{k^*}|_\omega^{\frac{p'}{p}}\left(\sum_{i\in H_j^k:(k+m,i)\in\Gamma_{N,M}} |\widehat{Q}_i^{k+m}|_{\widetilde{\mu}}\left(A_i^{k+m}\right)^{q'}\right)^{\frac{p'}{q'}}$$

$$\leq C_{p,q}\left(\sum_{i\in H_j^k:(k+m,i)\in\Gamma_{N,M}} |\widehat{Q}_i^{k+m}|_{\widetilde{\mu}}\left(A_i^{k+m}\right)^{q'}\right)^{\frac{p'}{q'}}.$$

Portanto, somando sobre $(k,j)\in G_{N,M}$ exatamente como foi feito em (3.61) e (3.62), temos

$$V\leq\ C_{p,q}\left(\textstyle\sum_{(t,u)\in\Gamma_{N,M}}|\widehat{Q}_u^t|_{\widetilde{\mu}}\,(A_u^t)^{q'}\right)^{\frac{p'}{q'}}. \tag{3.84}$$

Combinando (3.81), (3.83) e (3.84), temos que o lado esquerdo de (3.80) é limitado por

$$\sum_{(k,j)\in G_{N,M}}|E_j^k|_\omega 2^{kp'}\ \leq\ IV+V$$

$$=\ C_{p,q}\,\beta^{-p'}\left(\int_{S^n\times[0,1)}\sum_{(t,u)\in\Gamma_{N,M}}\left(A_u^t\right)^{q'}\chi_{\widehat{Q}_u^t}(x,t)d\widetilde{\mu}(x,t)\right)^{\frac{p'}{q'}}. \tag{3.85}$$

A partir de agora a demonstração prossegue exatamente como a demonstração do Teorema 3.2.26.

Observação 3.2.33 *Da maneira como foi feito na Observação 1.2.14, podemos identificar* S^n *com a bola* $\mathbb{B}=\{y\in\mathbb{R}^{n+1}:|y|<1\}$, *usando a aplicação* $(y,r)\longrightarrow ry$. *Se* $Q\in\mathcal{A}=\bigcup_{k\geq 0}\mathcal{A}_k$, *sejam* $\bar{Q}=\mathbb{B}$, *se* $Q=S^n$ *e*

$$\bar{Q}=\{sx:\alpha^{-1}(|Q|)\leq t<1,\ x\in Q\}\quad se\quad Q\neq S^n.$$

Observamos que, se $Q \neq S^n$ e se $Q \notin \mathcal{A}_1$ (isto é, se Q não é metade da esfera S^n), então $\bar{Q}$ é um "cone truncado" contido na bola $\mathbb{B}$, cuja base em S^n é o elemento diádico Q.

Se ω é uma medida de Borel não negativa sobre S^n e se g é uma função real mensurável e não negativa, vamos utilizar a notação

$$u_{g\omega}(x) = P(g\omega)(x', t),$$

para $x = tx' \in \mathbb{B}$, $0 \leq t < 1$ e $x' \in S^n$.

Quando ω for a medida de Lebesgue sobre S^n, denotada por σ, escrevemos $u_{g\sigma}(x) = u_g(x)$, como na Definição 2.5.5. Então podemos enunciar os Teoremas 3.2.26 e 3.2.32 da seguinte forma:

Teorema 3.2.26 *Suponha $1 < p \leq q < \infty$ e sejam ω e μ medidas de Borel não negativas e finitas sobre S^n e $\mathbb{B}$ respectivamente tais que $P^*(\chi_{\mathbb{B}}\mu) \in L^{p'}(S^n, \omega)$. São equivalentes:*

(i) Existe uma constante $C > 0$ tal que, para toda função mensurável $g \geq 0$,

$$\left(\int_{\mathbb{B}} [u_{g\omega}(y)]^q d\mu(y)\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_{S^n} [g(x)]^p d\omega(x)\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.86}$$

(ii) Existe uma constante $C > 0$ tal que para todo $Q \in \mathcal{A}$ temos

$$\left(\int_{\mathbb{B}} [u_{\chi_Q\omega}(y)]^q d\mu(y)\right)^{\frac{1}{q}} \leq C|Q|_{\omega}^{\frac{1}{p}} \tag{3.87}$$

e

$$\left(\int_{S^n} [P^*(\chi_{\bar{Q}}(y)(1-|y|)^{q-1}\mu)(x)]^{p'} d\omega(x)\right)^{\frac{1}{p'}} \leq C \left(\int_{\bar{Q}} (1-|y|)^q d\mu(y)\right)^{\frac{1}{q'}}. \tag{3.88}$$

Teorema 3.2.32 *Suponha $1 < p \leq q < \infty$ e sejam ω e μ medidas de Borel não negativas e finitas sobre S^n e $\mathbb{B}$ respectivamente tais que $P^*(\chi_{\mathbb{B}}\mu) \in L^{p'}(S^n, \omega)$. Sejam a_1 e a_2 como na Observação 3.2.30. Se existe uma constante $C > 0$ tal que para todo $Q \in \mathcal{A}$ temos*

$$\left(\int_{\overline{a_1 Q^*}} [u_{\chi_Q\omega}(y)]^q d\mu(y)\right)^{\frac{1}{q}} \leq C|a_2 Q^*|_{\omega}^{\frac{1}{p}} \tag{3.89}$$

e

$$\left(\int_{a_1 Q^*} [P^*(\chi_{\bar{Q}}(y)(1-|y|)^{q-1}\mu)(x)]^{p'} d\omega(x)\right)^{\frac{1}{p'}} \leq C \left(\int_{\bar{Q}} (1-|y|)^q d\mu(y)\right)^{\frac{1}{q'}}, \tag{3.90}$$

então existe uma constante $C > 0$ tal que, para toda função mensurável $g \geq 0$,

$$\left(\int_{\mathbb{B}} [u_{g\omega}(y)]^q d\mu(y)\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int_{S^n} [g(x)]^p d\omega(x)\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.91}$$

Observação 3.2.34 *Como no Capítulo 2 (veja Corolário 2.5.13) encontramos condições suficientes para a limitação da integral de Poisson de $L^p(S^n, Wd\sigma)$ em $L^p(\mathbb{B}, \mu)$, é natural pensarmos em comparar este resultado com os resultados obtidos neste capítulo. Vamos, então, considerar os Teoremas 3.2.26 e 3.2.32 com $p = q$ e $d\omega = Wd\sigma$, onde W é um peso sobre S^n. Neste caso, (3.86) e (3.91) se tornam*

$$\int_{\mathbb{B}} [u_{gW}(y)]^p d\mu(y) \leq C \int_{S^n} [g(x)]^p W(x) d\sigma(x),$$

enquanto que (2.22) no Corolário 2.5.13 temos

$$\int_{\mathbb{B}} [u_g(y)]^p d\mu(y) \leq C \int_{S^n} [g(x)]^p W(x) d\sigma(x).$$

Portanto, se $W \neq 1$, o Corolário 2.5.13 e os Teoremas 3.2.26 e 3.2.32 dão condições suficientes para a limitação de operadores distintos. Portanto, só faz sentido pensarmos em comparar estes resultados para $W = 1$ e, portanto, para $\omega = \sigma$. Neste caso, o Teorema 3.2.26 e o Corolário 2.5.16 dão caracterizações da limitação da integral de Poisson de $L^p(S^n, \sigma)$ em $L^p(\mathbb{B}, \mu)$. Logo, podemos enunciar o seguinte resultado, que nos dá uma caracterização de uma medida de Carleson sobre $\mathbb{B}$:

Corolário 3.2.35 *Seja μ uma medida não negativa e finita sobre $\mathbb{B}$ tal que $P^*(\chi_{\mathbb{B}}\mu) \in L^{p'}(S^n)$. São equivalentes:*

(i) μ é uma medida de Carleson.

(ii) Existe uma constante $C > 0$ tal que para todo $Q \in \mathcal{A}$,

$$\int_{\mathbb{B}} [u_{\chi_Q}(y)]^p d\mu(y) \leq C|Q| \tag{3.92}$$

e

$$\int_{S^n} [P^*(\chi_{\bar{Q}}(y)(1-|y|)^{p-1}\mu)(x)]^{p'} d\sigma(x) \leq C \int_{\bar{Q}} (1-|y|)^p d\mu(y). \tag{3.93}$$

O corolário seguinte segue do Teorema 3.2.32 e do Corolário 2.5.16, e nos diz que podemos encontrar condições suficientes para que uma medida μ sobre $\mathbb{B}$ seja uma medida de Carleson, melhores que (3.92) e (3.93).

Corolário 3.2.36 *Seja μ uma medida não negativa e finita sobre $\mathbb{B}$ tal que $P^*(\chi_{\mathbb{B}}\mu) \in L^{p'}(S^n)$. Se existe uma constante $C > 0$ tal que para todo $Q \in \mathcal{A}$ temos*

$$\int_{\overline{a_1 Q^*}} [u_{\chi_Q}(y)]^p d\mu(y) \leq C|a_2 Q^*|_\omega \tag{3.94}$$

e

$$\int_{a_1 Q^*} [P^*(\chi_{\bar{Q}}(y)(1-|y|)^{p-1}\mu)(x)]^{p'} d\sigma(x) \leq C \int_{\bar{Q}} (1-|y|)^p d\mu(y), \tag{3.95}$$

onde a_1 e a_2 são dados na Observação 3.2.30, então μ é uma medida de Carleson.

Referências Bibliográficas

[1] B. Bordin e S. A. Tozoni, An inequality on weighted Orlicz spaces for a vector-valued extension of the Hardy-Littlewood maximal operator on S^n and $P^n(\mathbb{R})$, *Math. Inequal. Appl.* (aceito para publicação).

[2] B. Bordin , I. A. A. Fernandes e S. A. Tozoni, Weighted norm inequality for the Poisson integral on the sphere, *Port. Math.* (aceito para publicação).

[3] L. Carleson, Interpolations by bounded analytic functions and the corona problem, *Ann. of Math.* **76** (1962), 547–559.

[4] R. R. Coifman e G. Weiss, "Analyse Harmonique Non-Commutative sur Certains Espaces Homogenès", *Lecture Notes in Math.* **242**, 1971.

[5] M. Christ, A T(b) theorem with remarks on analytic capacity and the Cauchy integral, *Colloq. Math.* **60/61** (1990), 601-628.

[6] C. Dellacherie e P. A. Meyer, "Probabilités et Potentiel. Théorie des Martingales", Hermann, Paris, 1980.

[7] I. A. A. Fernandes, Carleson measures and A_∞-weights on homogeneous spaces, *Atas do 51º SBA*, 2000.

[8] A. Korányi e S. Vági, Singular integrals on homogeneous spaces and some problems of classical analysis, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **25** (1971), 575-648.

[9] R. Macias e C. Segovia, A well-behaved quasi-distance for spaces of homogeneous type, *Trabajos de Matemática* **32**, Inst. Argentino Mat., 1981, 1-18.

[10] B. Muckenhoupt e R. L. Wheeden, Some weighted weak-type inequalities for the Hardy-Littlewood maximal function and the Hilbert transform, *Indiana Univ. Math. J.* **26** (1977), 801-816.

[11] H. E. Rauch, Harmonic and analytic functions of several variables and the maximal theorem of Hardy and Littlewood, *Canad. J. Math.* **8** (1956), 171-183.

[12] J. Ruiz e J.L. Torrea, A unified approach to Carleson measures and A_p weights II, *Pacific J. Math.* **120** (1985), 189-197.

[13] F. J. Ruiz e J. L. Torrea, Vector-valued Calderón-Zygmund theory and Carleson measures on spaces of homogeneous nature, *Studia Math.* **88** (1988), 221-243.

[14] E. Sawyer, A characterization of two weight norm inequalities for fractional and Poisson integrals, *Trans. Amer. Math. Soc.* **308** (1988), 533-545.

[15] E. Sawyer e R. L. Wheeden, Weighted inequalities for fractional integrals on Euclidean and homogeneous spaces, *Amer. J. Math.* **114** (1992), 813-874.

[16] E. Sawyer, R. L. Wheeden e S. Zhao, Weighted norm inequalities for operators of potential type and fractional maximal functions, *Potential Anal.* **5** (1996), 523-580.

[17] E. M. Stein e G. Weiss, "Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces", Princeton Univ. Press, Princeton N. J., 1971.

[18] S. L. Zani, Two-weight norm inequalities for maximal functions on homogeneous spaces and boundary estimates, *Studia Math.* **126** (1) (1997), 67-94.