



ALEXANDRE WILLIAM CAMARGO

ANÁLISE DE UM ESQUEMA DE DIFERENÇAS FINITAS
COM OPERADOR ESPACIAL ADAPTATIVO

CAMPINAS
2014



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA
E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

ALEXANDRE WILLIAM CAMARGO

ANÁLISE DE UM ESQUEMA DE DIFERENÇAS FINITAS
COM OPERADOR ESPACIAL ADAPTATIVO

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática,
Estatística e Computação Científica da Universidade
Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos
para a obtenção do título de Mestre em matemática aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Lúcio Tunes dos Santos

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO
DEFENDIDA PELO ALUNO ALEXANDRE WILLIAM CAMARGO,
E ORIENTADA PELO PROF. DR. LÚCIO TUNES DOS SANTOS.

Assinatura do Orientador

CAMPINAS
2014

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

C14a Camargo, Alexandre William, 1989-
Análise de um esquema de diferenças finitas com operador espacial adaptativo / Alexandre William Camargo. – Campinas, SP : [s.n.], 2014.

Orientador: Lúcio Tunes dos Santos.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Propagação de onda. 2. Equação de onda. 3. Diferenças finitas. I. Santos, Lúcio Tunes dos, 1962-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Analysis of a finite difference scheme with adaptive spacial operator

Palavras-chave em inglês:

Wave propagations

Wave equation

Finite differences

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Mestre em Matemática Aplicada

Banca examinadora:

Lúcio Tunes dos Santos [Orientador]

Maria Amélia Novais Schleicher

Alessandra Davolio Gomes

Data de defesa: 16-05-2014

Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Dissertação de Mestrado defendida em 16 de maio de 2014 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Lúcio Tunes dos Santos

Prof.(a). Dr(a). LÚCIO TUNES DOS SANTOS

Maria Amélia Novais Schleicher

Prof.(a). Dr(a). MARIA AMÉLIA NOVAIS SCHLEICHER

Alessandra Davolio Gomes

Prof.(a). Dr(a). ALESSANDRA DAVOLIO GOMES

Abstract

The fundamental base of seismic modeling is the acoustic wave equation that for a medium with variable velocity require efficient numerical methods to find the equation solution. The Finite Difference Method (FDM) is widely used to get the solution of the wave equation because the computational implementation is very easy. Ensuring the convergence of the method, the approximate solution is reliable. However, the schemes used by FDM either need a high length to the operator of the spatial derivative or take a sufficiently dense mesh, that is, the grid is small to ensure an accurate solution. But this requires the calculus of many operations in the recursion formula. In this dissertation, we analyzed a scheme of the FDM that use adaptive lengths to the operator of the spatial derivative assuming a fixed grid. The criterion to choose the lengths depend on the velocity of the medium. Thereby, in regions of low velocity a long length is used and in regions of high velocity a short length is enough. The numerical tests show that FDM with the adaptive length scheme obtains a solution with a similar accuracy to the solution of the FDM with the long length scheme, but performs a smaller number of operations in the recursion formula.

Keywords: seismic modeling, acoustic wave equation, finite difference.

Resumo

A base fundamental do modelamento sísmico é a equação da onda acústica, que para meios com velocidade variável exige métodos numéricos eficientes para encontrar a solução da equação. O Método de Diferenças Finitas (MDF) é muito usado para obter a solução da equação da onda, pois é de fácil implementação. Uma vez garantindo a convergência do método a solução aproximada é confiável. Contudo, os esquemas utilizados pelo MDF ou utilizam um comprimento longo para os operadores da derivada espacial ou precisam ter uma malha suficientemente densa, isto é, ter passos pequenos para garantir uma solução precisa, porém, isso requer o cálculo de muitas operações na fórmula recursiva do método. Nesta dissertação, analisamos um esquema do MDF que utiliza comprimentos adaptativos para o operador da derivada espacial assumindo uma malha computacional com o passo fixo. O critério que escolhe esses comprimentos depende da velocidade do meio. Pela relação entre o comprimento e a velocidade, o método escolhe um comprimento longo em regiões de baixa velocidade e um comprimento curto nas regiões de alta velocidade. Os testes numéricos comprovaram que o MDF com o esquema de comprimentos adaptativos obtém uma solução com uma precisão similar à solução do MDF com o esquema que usa somente comprimentos longos, mas o esquema de comprimento adaptativo realiza um número de operações menor na fórmula de recursão.

Palavras-chave: modelagem sísmica, equação da onda acústica, diferenças finitas.

Sumário

Lista de Figuras	xiii
1 Introdução	1
Introdução	1
2 Diferenças Finitas com Operador Espacial de Comprimento Fixo	4
2.1 Equação da Onda Unidimensional	5
2.1.1 Análise de Estabilidade e Dispersão	8
2.2 Equação da Onda Bidimensional	12
2.2.1 Análise de Estabilidade e Dispersão	15
3 Diferenças Finitas com Operador Espacial de Comprimento Adaptativo	19
3.1 MDF Adaptativo: caso 1D	19
3.2 MDF Adaptativo: caso 2D	22
4 Experimentos Numéricos	25
4.1 Termo Fonte	25
4.2 Condições Iniciais e de Fronteira	26
4.3 Modelo 1	27
4.4 Modelo 2	34
4.5 Modelo 3	48
4.6 Modelo 4	59
5 Considerações Finais	70
A Coeficientes Convencionais do Esquema de Diferenças Finitas	72
Referência Bibliográfica	75

*Aos meus pais,
Almir e Elisabete.*

Agradecimentos

Ao meu orientador Lúcio, que desde a graduação tem a paciência de me orientar e pelo seu padrão de excelência no trabalho.

Aos professores Jörg, Biloti e Maria Amélia que em todas as disciplinas ministradas contribuíram para o meu conhecimento na área de geofísica e em especial a Maria Amélia pelas sugestões no exame de qualificação.

Ao professor Maicon pelas sugestões no exame de qualificação.

Ao professor Eduardo de Abreu pelas várias discussões sobre o tema abordado.

Aos meus colegas do Laboratório de Geofísica Computacional (LGC), em especial ao Ortolan que sempre respondia algumas dúvidas.

Aos meus colegas de república César, Valter, Evandro, Eduardo e em especial ao Tiago Machado pela ajuda nos códigos de programação e ao Felipe Bueno que me ajudou muito no início do mestrado.

A Fernanda Peteam que me ajudou bastante e continua ajudando.

A Fátima por facilitar a burocracia nas viagens e nos congressos.

A Unicamp e ao IMECC pela ótima estrutura e excelência acadêmica e ao INCT-GP pelo auxílio no Congresso da SBGf.

A Capes, pelo suporte financeiro.

Lista de Figuras

2.1	Variação de σ com r_j para diferentes comprimentos.	9
2.2	(a) Variação da dispersão com γ para diferentes valores de r_j computados com os coeficientes convencionais. (b) Variação da dispersão com γ para diferentes valores de r_j computados com os coeficientes dados por (2.14) e (2.15). 12	
2.3	(a) Variação da dispersão com γ para diferentes valores de r_j computados com os coeficientes convencionais. (b) Variação da dispersão com γ para diferentes valores de r_j computados com os coeficientes dados por (2.14) e (2.15). 12	
2.4	Variação de σ com $r_{j,k}$ para diferentes comprimentos, com $\theta = \pi/8$	17
2.5	(a) Variação da dispersão com γ para diferentes valores de r_j computados com os coeficientes convencionais. (b) Variação da dispersão com γ para diferentes valores de r_j computados com os coeficientes dados por (2.48) e (2.49). 18	
2.6	(a) Variação da dispersão com γ para diferentes valores de r_j computados com os coeficientes convencionais. (b) Variação da dispersão com γ para diferentes valores de r_j computados com os coeficientes dados por (2.49) e (2.48). 18	
3.1	Variação do comprimento M com a velocidade de propagação c para diferentes valores de η	21
4.1	Pulso de Ricker no tempo (a esquerda) e na frequência (a direita).	26
4.2	Malha computacional.	27
4.3	Modelo de velocidade onde \star indica a posição da fonte.	27
4.4	Solução $U(x, t)$ obtida com o esquema adaptativo utilizando a malha 1: (a) Para $t = 0.1$ s; (b) Para $t = 1.0$ s.	29
4.5	(a) Sismograma da simulação da propagação de ondas. (b) Simograma com traços a cada 100 m. Obtido pelo campo de onda do esquema adaptativo para malha 1.	30
4.6	(a) Comparação da solução exata (linha sólida) com a solução $U(x, t)$ obtida pelo esquema adaptativo para malha 1 (linha tracejada) com $M = 31$. (b) Detalhe do pulso que se propaga a esquerda. (c) Detalhe do pulso que se propaga a direita.	31

4.7	(a) Comparação da solução exata (linha sólida) com a solução $U(x, t)$ obtida pelo esquema adaptativo para malha 2 (linha tracejada) com $M = 3$. (b) Detalhe do pulso que se propaga a esquerda. (c) Detalhe do pulso que se propaga a direita.	32
4.8	Diferença entre as soluções exata e aproximada obtida pelo esquema adaptativo: (a) Para malha 1; (b) Para malha 2.	33
4.9	Modelo de velocidade unidimensional, onde \star representa a posição da fonte.	34
4.10	Solução $U(x, t)$ para $t = 0.2$ s obtida pelos esquemas: (a) Adaptativo; (b) Longo; (c) Curto.	35
4.11	Solução $U(x, t)$ para $t = 0.4$ s obtida pelos esquemas: (a) Adaptativo; (b) Longo; (c) Curto.	36
4.12	Solução $U(x, t)$ para $t = 0.6$ s obtida pelos esquemas: (a) Adaptativo; (b) Longo; (c) Curto.	37
4.13	Solução $U(x, t)$ para $t = 0.8$ s obtida pelos esquemas: (a) Adaptativo; (b) Longo; (c) Curto.	38
4.14	Solução $U(x, t)$ para $t = 1.0$ s obtida pelos esquemas: (a) Adaptativo; (b) Longo; (c) Curto.	39
4.15	Solução $U(x, t)$ para $t = 1.2$ s obtida pelos esquemas: (a) Adaptativo; (b) Longo; (c) Curto.	40
4.16	Sismograma da simulação obtido pelos esquemas: (a) Adaptativo; (b) Longo; (c) Curto.	41
4.17	Sismograma contendo traços sísmicos a cada 250 m obtido pelos esquemas: (a) Adaptativo; (b) Longo; (c) Curto.	42
4.18	(a) Velocidade em função da distância. (b) Variação dos comprimentos em função da distância.	43
4.19	Comparação de $U(x, t = 0.8)$ entre os esquemas: (a) Adaptativo (linha sólida) e longo (linha vermelha tracejada); (b) Adaptativo (linha sólida) e curto (linha azul tracejada); (c) Longo (linha vermelha tracejada) e curto (linha azul tracejada).	45
4.20	Diferença de $U(x, t = 0.8)$ entre os esquemas: (a) Adaptativo e longo; (b) Adaptativo e curto; (c) Longo e curto.	46
4.21	Duração de 2399 iterações de tempo na fórmula recursiva para os esquemas: longo (barra azul), adaptativo (barra verde) e curto (barra vermelha); (a) Para $\eta = 10^{-1}$; (b) Para $\eta = 10^{-3}$; (c) Para $\eta = 10^{-5}$; (d) Para $\eta = 10^{-7}$	47
4.22	Modelo de velocidade, com a fonte representada por \star , onde a cor azul representa uma velocidade de 1.5 km/s e a vermelha uma velocidade de 3 km/s.	48
4.23	Solução de $U(x, z, t)$ obtida pelos esquemas: (a) Adaptativo para $t = 0.1$ s; (b) Adaptativo para $t = 0.2$ s; (c) Longo para $t = 0.1$ s; (d) Longo para $t = 0.2$ s; (e) Curto para $t = 0.1$ s; (f) Curto para $t = 0.2$ s.	49

4.24	Solução de $U(x, z, t)$ obtida pelos esquemas: (a) Adaptativo para $t = 0.3$ s; (b) Adaptativo para $t = 0.4$ s; (c) Longo para $t = 0.3$ s; (d) Longo para $t = 0.4$ s; (e) Curto para $t = 0.3$ s; (f) Curto para $t = 0.4$ s.	50
4.25	Solução de $U(x, z, t)$ obtida pelos esquemas: (a) Adaptativo para $t = 0.5$ s; (b) Adaptativo para $t = 0.6$ s; (c) Longo para $t = 0.5$ s; (d) Longo para $t = 0.6$ s; (e) Curto para $t = 0.5$ s; (f) Curto para $t = 0.6$ s.	51
4.26	Solução de $U(x, z, t)$ obtida pelos esquemas: (a) Adaptativo para $t = 0.7$ s; (b) Adaptativo para $t = 0.8$ s; (c) Longo para $t = 0.7$ s; (d) Longo para $t = 0.8$ s; (e) Curto para $t = 0.7$ s; (f) Curto para $t = 0.8$ s.	52
4.27	Solução de $U(x, z, t)$ obtida pelos esquemas: (a) Adaptativo para $t = 0.9$ s; (b) Adaptativo para $t = 1.0$ s; (c) Longo para $t = 0.9$ s; (d) Longo para $t = 1.0$ s; (e) Curto para $t = 0.9$ s; (f) Curto para $t = 1.0$ s.	53
4.28	(a) Perfil que mostra a variação do modelo de velocidade em função de z . (b) Variação do comprimento em função de z	55
4.29	Comparação de $U(x_S, z, t = 0.5)$ entre os esquemas: (a) Adaptativo (linha sólida) e longo (linha vermelha tracejada); (b) Adaptativo (linha sólida) e curto (linha azul tracejada); (c) Longo (linha vermelha tracejada) e curto (linha azul tracejada).	56
4.30	Diferença de $U(x_S, z, t = 0.5)$ entre os esquemas: (a) Adaptativo e longo; (b) Adaptativo e curto; (c) Longo e curto.	57
4.31	Duração de 1999 iterações de tempo na fórmula recursiva para os esquemas: longo (barra azul), adaptativo (barra verde) e curto (barra vermelha) . . .	58
4.32	Modelo de velocidade, onde \star é a posição da fonte, com $c_{min} = 1.5$ km/s e $c_{max} = 4.4$ km/s.	59
4.33	Solução $U(x, z, t)$ obtida pelos esquemas: (a) Adaptativo para $t = 0.07$ s; (b) Adaptativo para $t = 0.14$ s; (c) Longo para $t = 0.07$ s; (d) Longo para $t = 0.14$ s; (e) Curto para $t = 0.07$ s; (f) Curto para $t = 0.14$ s.	60
4.34	Solução $U(x, z, t)$ obtida pelos esquemas: (a) Adaptativo para $t = 0.21$ s; (b) Adaptativo para $t = 0.28$ s; (c) Longo para $t = 0.21$ s; (d) Longo para $t = 0.28$ s; (e) Curto para $t = 0.21$ s; (f) Curto para $t = 0.28$ s.	61
4.35	Solução $U(x, z, t)$ obtida pelos esquemas: (a) Adaptativo para $t = 0.35$ s; (b) Adaptativo para $t = 0.42$ s; (c) Longo para $t = 0.35$ s; (d) Longo para $t = 0.42$ s; (e) Curto para $t = 0.35$ s; (f) Curto para $t = 0.42$ s.	62
4.36	Solução $U(x, z, t)$ obtida pelos esquemas: (a) Adaptativo para $t = 0.49$ s; (b) Adaptativo para $t = 0.56$ s; (c) Longo para $t = 0.49$ s; (d) Longo para $t = 0.56$ s; (e) Curto para $t = 0.49$ s; (f) Curto para $t = 0.56$ s.	63
4.37	Solução $U(x, z, t)$ obtida pelos esquemas: (a) Adaptativo para $t = 0.63$ s; (b) Adaptativo para $t = 0.7$ s; (c) Longo para $t = 0.63$ s; (d) Longo para $t = 0.7$ s; (e) Curto para $t = 0.63$ s; (f) Curto para $t = 0.7$ s.	64

-
- 4.38 (a) Perfil de velocidade em função de z dado $x = x_S$. (b) Variação do comprimento do operador da derivada espacial em função de z 65
- 4.39 Comparação de $U(x_S, z, t = 0.49)$ entre os esquemas: (a) Adaptativo (linha sólida) e longo (linha vermelha tracejada); (b) Adaptativo (linha sólida) e curto (linha azul tracejada); (c) Longo (linha vermelha tracejada) e curto (linha azul tracejada). 67
- 4.40 Diferença de $U(x_S, z, t = 0.49)$ entre os esquemas: (a) Adaptativo e longo; (b) Adaptativo e curto; (c) Longo e curto. 68
- 4.41 Duração de 1399 iterações de tempo na fórmula recursiva com $\eta = 10^{-7}$, para os esquemas: longo (barra azul), adaptativo (barra verde) e curto (barra vermelha). 69

Capítulo 1

Introdução

Em muitas áreas de pesquisa a modelagem matemática tem um papel fundamental para auxiliar a compreensão de problemas da natureza (física) colocados sob a forma de simulações numéricas e, geralmente, a solução desses problemas é obtida ao resolver uma equação diferencial. Na geofísica computacional, particularmente na modelagem sísmica, procura-se simular a propagação de ondas em subsuperfície onde o objetivo é prever a resposta que um conjunto de sensores obterá, assumindo-se uma estrutura conhecida para a subsuperfície. Esta técnica de simulação é uma poderosa ferramenta para interpretação sísmica e uma parte essencial dos algoritmos de inversão e imageamento.

A base fundamental do modelamento sísmico é a equação da onda acústica que descreve a propagação de ondas em um meio acústico. No entanto, a menos do caso particular de um meio homogêneo (velocidade constante), são necessários métodos eficientes para obter a simulação desejada. Os principais métodos utilizados no modelamento sísmico podem ser classificados em três categorias

1. Métodos Diretos: o modelo geológico é discretizado em um número finito de pontos (malha) e um método numérico é utilizado para encontrar uma aproximação para a solução da equação da onda completa.
2. Métodos Assintóticos: a equação da onda é computada por partes, decompondo em duas outras equações, a iconal e a transporte.
3. Métodos Integrais: utilizam-se as representações integrais para o campo de ondas gerados com a hipótese de fontes pontuais.

Neste trabalho nos restringimos a estudar apenas o caso dos métodos diretos. Mesmo existindo muitos métodos numéricos que resolvem a equação da onda, o Método de Diferenças Finitas (MDF) é o mais preferido do que as abordagens por elementos finitos ou métodos pseudo-espectrais devido ao eficiente uso de memória, baixo custo computacional e fácil implementação. Entretanto, quando comparados com teoria dos raios e feixes gaussianos e métodos integrais, o MDF ainda é mais caro computacionalmente. Muitos esquemas do MDF utilizam operadores de comprimento fixo para aproximar as derivadas

espaciais e temporais da equação da onda. A escolha do comprimento é determinada pelo custo computacional, estabilidade e critérios de dispersão que sejam satisfeitos globalmente garantindo uma boa aproximação da solução da equação da onda acústica.

Um desafio constante dos esquemas do MDF é aumentar sua eficiência sem prejuízo da precisão, aumentar a precisão sem prejuízo da eficiência, ou aumentar ambos. Há muitas variantes de esquemas que aumentam a eficiência sem diminuir a precisão ou que aumentam a precisão mantendo a eficiência. Por exemplo, os esquemas usando malha com passo variável (Falk et al., 1996) que aumentam a eficiência e as malhas intercaladas (Virieux, 1986) que aumentam a precisão. Além do mais, deve-se ter um cuidado com a palavra eficiência, que aqui usamos com o significado de realizar menos operações para gerar a propagação de ondas.

Outra particularidade do esquema estudado neste trabalho é com relação aos coeficientes do operador da derivada espacial, que contribuem para reduzir os problemas de dispersão com a vantagem de aumentar a região de estabilidade comparado aos coeficientes convencionais. A ideia para obter esses coeficientes iniciou-se com o trabalho de Finkelstein e Kastner (2007). E recentemente, Liu e Sen (2009b) desenvolveram um método para computá-los usando a relação de dispersão. Os coeficientes convencionais são geralmente obtidos por expansão em série de Taylor junto com a teoria da onda plana que determina uma série de equações lineares muito semelhante ao que o método dos coeficientes indeterminados obtém (LeVeque, 2007). Outra alternativa para encontrar os coeficientes do MDF é aplicar métodos de otimização (Fornberg, 1998).

O MDF é amplamente usado na geofísica e não fica restrito somente à modelagem sísmica (Kelly et al., 1976; Virieux, 1984; Holberg, 1987; Marfurt, 1984; Dablain, 1986; Liu e Sen, 2009a; Chen, 2007), mas também pode ser aplicados na migração (Claerbout, 1985) e na inversão (Abokhodair, 2009).

O objetivo deste trabalho é analisar o novo esquema do MDF, baseado no recente trabalho apresentado por Liu e Sen (2011). No qual, fixado os passos da malha computacional pode-se escolher adequadamente os comprimentos do operador da derivada espacial de acordo com a velocidade do meio, isto é, em regiões de alta velocidade usa-se comprimentos curtos e em regiões de baixa velocidade usa-se comprimentos longos. Essa adaptação dos comprimentos contribuem para reduzir o número de operações realizado a cada ciclo de tempo na fórmula de recursão do esquema de diferenças.

Esta dissertação foi organizada da seguinte forma: no Capítulo 2 iniciamos o desenvolvimento do esquema de diferenças finitas e analisamos os critérios de estabilidade e dispersão para os domínios unidimensional e bidimensional; no Capítulo 3, mostramos como é feito a escolha dos comprimentos do operador de acordo com a velocidade; no Capítulo 4, mostramos os testes computacionais para exibir os resultados do MDF com o esquema adaptativo (comprimentos variáveis) e comparamos com o esquema do MDF longo (comprimento fixo baseado na menor velocidade) e com o esquema do MDF curto (comprimento fixo em 5 pontos). No entanto, para este último, a ideia não é comparar o custo das operações e sim o custo benefício entre a precisão da solução e o tempo necessário para obtê-la. Pois, o esquema curto tem o menor comprimento que poderá ser

utilizado nas simulações numéricas; por fim, o Capítulo 5 encerra com as considerações finais discutindo as vantagens e desvantagens do esquema adaptativo e possíveis avanços que podem ser feitos; no apêndice desenvolvemos os coeficientes convencionais.

Capítulo 2

Diferenças Finitas com Operador Espacial de Comprimento Fixo

O Método de Diferenças Finitas (MDF) é uma ferramenta poderosa para aproximar soluções de equações diferenciais. Apesar de existir muitos esquemas de diferenças finitas, a idéia básica de todos é substituir as derivadas por uma diferença finita. O esquema que vamos utilizar será do tipo centrado, isto é, a aproximação das derivadas será dada por uma diferença centrada e, mais importante do que definir o tipo do esquema, é saber qual a ordem de aproximação. Em geral, para um esquema centrado, essa ordem está relacionada com o tamanho do comprimento do operador usado, isto é, com a quantidade de pontos vizinhos que a diferença finita é baseada. Assim, quanto maior o comprimento melhor será a aproximação.

É comum, particularmente para a equação da onda, usar esquemas com uma aproximação de segunda ordem no tempo e com uma ordem maior ou igual no espaço. Pois, já se verificou que esquemas desse tipo conseguem uma boa solução (Alford et al., 1974). No entanto, os coeficientes espaciais do esquema são determinados usando somente a informação do domínio espacial da equação da onda através da expansão da série de Taylor junto com a teoria da onda plana. Porém, o cálculo da propagação de ondas sísmicas é feito nos domínios do espaço e do tempo. Os coeficientes baseados somente no domínio espacial serão denominados coeficientes convencionais e desenvolvidos no Apêndice A. Finkelstein e Kastner (2007) mostraram um conjunto de regras que determinam os coeficientes espaciais em ambos os domínios e Liu e Sen (2009b) propuseram um método que determina esses coeficientes. A grande vantagem de usar esses coeficientes no esquema do MDF é que eles contribuem para o aumento da região de estabilidade e reduzem as dispersões numéricas. Com relação aos coeficientes temporais do esquema, onde utilizamos uma aproximação de 2^a-ordem, a computação é feita do mesmo modo que os coeficientes convencionais (Apêndice A).

Neste capítulo vamos analisar um esquema centrado que resolve a equação da onda acústica. Onde o operador da derivada de segunda ordem no espaço terá um comprimento fixo M e o operador da derivada de segunda ordem no tempo tem uma aproximação

de 2ª-ordem. Também mostramos a vantagem que os coeficientes baseados nos dois domínios da equação da onda trazem com relação aos coeficientes convencionais. Além disso, concluímos que, para um caso particular na fórmula dos coeficientes dos domínios da equação consegue-se obter os coeficientes convencionais.

2.1 Equação da Onda Unidimensional

Sejam $x, t \in \mathbb{R}$ as variáveis espacial e temporal, respectivamente. A equação da onda acústica unidimensional (1D) com densidade constante é dada por

$$\frac{1}{c^2(x)}U_{tt} - U_{xx} = F(x, t), \quad (2.1)$$

onde $c(x)$ é a função que descreve a velocidade de propagação da onda, $F(x, t)$ é a função que descreve o termo fonte e $U(x, t)$ é o campo escalar da onda.

A solução da equação (2.1) pode ser interpretada fisicamente como a propagação de ondas sobre uma corda que viaja a uma velocidade $c(x)$. No caso da velocidade ser constante (meio homogêneo), com fonte nula e dada condições iniciais, a solução desta equação é conhecida como solução de d'Alembert. Para os casos com meios não-homogêneos (velocidade variável), só é possível encontrar soluções através de simulações computacionais utilizando métodos numéricos de discretização, nos quais, usamos o MDF.

Para aplicar o MDF aproximamos a derivada de segunda ordem temporal por um esquema centrado de 2ª-ordem e, na derivada de segunda ordem espacial, aplicamos um esquema centrado de $2M$ -ésima ordem (comprimento M , com $2M + 1$ pontos), ou seja

$$U_{tt}(x_j, t_\ell) \approx \frac{1}{\Delta t^2} [-2u_j^\ell + (u_{j-1}^{\ell-1} + u_{j+1}^{\ell+1})], \quad (2.2)$$

$$U_{xx}(x_j, t_\ell) \approx \frac{1}{\Delta x^2} \left[a_{0,j}u_j^\ell + \sum_{m=1}^M a_{m,j}(u_{j-m}^\ell + u_{j+m}^\ell) \right], \quad (2.3)$$

onde $u_j^\ell = U(x_j, t_\ell)$, $x_j = x_0 + j\Delta x$, $t_\ell = \ell\Delta t$, com $j = 0, 1, \dots, J$ e $\ell = 0, \dots, L$ e $a_{m,j}$, com $m = 0, 1, \dots, M$ e $j = 0, 1, \dots, J$ são os coeficientes espaciais do MDF.

Os coeficientes espaciais são determinados usando os domínios da equação da onda. Para conseguir isso, sabe-se que pela teoria da onda plana, o harmônico com uma constante U_0 dado por

$$U(x, t) = U_0 e^{i(\xi x - \omega t)}, \quad (2.4)$$

onde ξ é o número de onda e ω é a frequência angular é solução da equação (2.1) sem o termo fonte tal que

$$\omega^2 - c^2(x)\xi^2 = 0. \quad (2.5)$$

Na literatura, a equação (2.5) é conhecida como a relação de dispersão, e observe que para cada número de onda ξ podemos tomar mais de uma frequência que é dada em função da

velocidade.

A equação discretizada da equação (2.1) sem o termo fonte, obtida substituindo as equações (2.2) e (2.3) nas derivadas temporal e espacial, é dada por

$$a_{0,j}u_j^\ell + \sum_{m=1}^M a_{m,j}(u_{j-m}^\ell + u_{j+m}^\ell) \approx \frac{1}{r_j^2} [-2u_j^\ell + (u_j^{\ell-1} + u_j^{\ell+1})], \quad (2.6)$$

onde $r_j = c(x_j)\Delta t/\Delta x$ são os números de Courant. Desse modo, o harmônico (2.4) discretizado nos pontos (x_j, t_ℓ) satisfaz o esquema (2.6) apenas para uma determinada frequência. Ou seja, substituindo na equação (2.6) e eliminando termos comuns, obtemos

$$a_{0,j} + \sum_{m=1}^M a_{m,j}(e^{i\xi m \Delta x} + e^{-i\xi m \Delta x}) \approx \frac{1}{r_j^2} [-2 + (e^{i\omega \Delta t} + e^{-i\omega \Delta t})], \quad (2.7)$$

ou seja,

$$a_{0,j} + 2 \sum_{m=1}^M a_{m,j} \cos(\xi m \Delta x) \approx \frac{2}{r_j^2} (\cos(\omega \Delta t) - 1). \quad (2.8)$$

A expressão (2.8) pode ser entendida como a aproximação numérica (ou discretizada) da relação de dispersão (2.5) para essa particular frequência. No entanto, pela equação (2.5) a frequência angular pode ser dada por $\omega_j(\xi) = c(x_j)\xi$, ou seja, $\omega_j(\xi)\Delta t = r_j\xi\Delta x$ onde $r_j = c(x_j)\Delta t/\Delta x$. Desse modo, supondo que a equação (2.8) permaneça válida ao substituirmos ω por ω_j a equação pode ser escrita como

$$a_{0,j} + 2 \sum_{m=1}^M a_{m,j} \cos(\xi m \Delta x) \approx \frac{2}{r_j^2} (\cos(\xi r_j \Delta x) - 1). \quad (2.9)$$

Aplicando a expansão em série de Taylor na função cosseno em (2.9), obtemos

$$a_{0,j} + 2 \sum_{m=1}^M a_{m,j} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(m\xi \Delta x)^{2n}}{(2n)!} \right] \approx \frac{2}{r_j^2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(r_j \xi \Delta x)^{2n}}{(2n)!} \right], \quad (2.10)$$

Comparando os coeficientes de ξ^{2n} , para os M primeiros termos, obtemos

$$a_{0,j} + 2 \sum_{m=1}^M a_{m,j} = 0 \quad (2.11)$$

$$\sum_{m=1}^M m^{2n} a_{m,j} = r_j^{2n-2}, \quad \text{para } n = 1, \dots, M. \quad (2.12)$$

Observe que (2.12) é um sistema de equações lineares com Matriz do tipo Vandermonde,

isto é,

$$\begin{pmatrix} 1^0 & 2^0 & \cdots & M^0 \\ 1^2 & 2^2 & \cdots & M^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1^{2M-2} & 2^{2M-2} & \cdots & M^{2M-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^2 a_{1,j} \\ 2^2 a_{2,j} \\ \vdots \\ M^2 a_{M,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ r_j^2 \\ \vdots \\ r_j^{2M-2} \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Resolvendo estas equações pela Regra de Crammer, obtemos

$$a_{m,j} = \frac{(-1)^{m+1}}{m^2} \prod_{n=1, n \neq m}^M \left| \frac{n^2 - r_j^2}{n^2 - m^2} \right|, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (2.14)$$

e

$$a_{0,j} = -2 \sum_{m=1}^M a_{m,j}. \quad (2.15)$$

No caso em que $r_j = 0$ para $j = 0, 1, \dots, J$, a equação (2.14) é equivalente a equação (A.5). Isto é, os coeficientes convencionais são um resultado particular da equação (2.14). Porém, observe que só foi possível representar esses coeficientes supondo inicialmente que a relação de dispersão também é válida para as frequências discretizadas a cada ponto da malha.

Como estamos representando uma equação diferencial parcial por uma diferença de pontos discretos podemos medir a precisão do esquema do MDF pela diferença dos termos da equação (2.9) dada por

$$\varepsilon = \left| \frac{1}{\Delta x^2} \left[a_{0,j} + 2 \sum_{m=1}^M a_{m,j} \cos(m\xi \Delta x) - \frac{2}{r_j^2} (\cos(r_j \xi \Delta x) - 1) \right] \right|. \quad (2.16)$$

Aplicando a expansão em série de Taylor na função cosseno e usando as equações (2.14) e (2.15), obtemos

$$\varepsilon = \left| \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{(2n)!} \left(\sum_{m=1}^M m^{2n} a_{m,j} - r_j^{2n-2} \right) \xi^{2n} \Delta x^{2n-2} \right|. \quad (2.17)$$

como a discretização é dependente apenas da magnitude do passo da malha, podemos ver que a menor potência de Δx na série é $2M$, ou seja, a precisão do MDF alcança uma ordem de $2M$. Além disso, isso mostra que o esquema do MDF é consistente, uma vez que $\varepsilon \rightarrow 0$ quando $\Delta x \rightarrow 0$.

Portanto, definidos os coeficientes, a fórmula recursiva do esquema do MDF que realiza a simulação de propagação de ondas é dada substituindo (2.2) e (2.3) na equação (2.1), obtendo

$$u_j^{\ell+1} = 2u_j^{\ell} - u_j^{\ell-1} + r_j^2 \left[a_{0,j} u_j^{\ell} + \sum_{m=1}^M a_{m,j} (u_{j-m}^{\ell} + u_{j+m}^{\ell}) \right] + [c(x_j) \Delta t]^2 F(x_j, t_{\ell}), \quad (2.18)$$

onde $x_j = x_0 + j\Delta x$, $t_\ell = \ell\Delta t$, para $j = 0, 1, \dots, J$, $\ell = 0, 1, \dots, L$ e $a_{m,j}$, $a_{0,j}$ são os coeficientes dados pelas equações (2.14) e (2.15).

2.1.1 Análise de Estabilidade e Dispersão

Como o esquema (2.18) é do tipo explícito, devemos impor alguma condição sobre Δt e Δx para que tenha estabilidade numérica e para que problemas de dispersões numéricas sejam evitados. Em geral, um método numérico é estável se quaisquer perturbações que a solução sofra, os erros não sejam amplificados sem controle. Se a amplificação existe, a cada passo de tempo, o erro aumenta fazendo que a solução “exploda”. Para garantir a estabilidade usaremos a análise de Von Neumann (Strikwerda, 1989; LeVeque, 2007). Considerando que o erro mais simples seja dado por

$$u_{j,\ell} = \mathcal{A}(\xi)^\ell e^{ij\xi\Delta x}, \quad (2.19)$$

onde ξ é o número de onda, $\mathcal{A}(\xi)$ é o fator de amplificação e $i = \sqrt{-1}$. Como queremos evitar a amplificação do erro, uma condição necessária e suficiente é ter

$$|\mathcal{A}(\xi)| \leq 1, \quad (2.20)$$

para todo ξ . Sem perda de generalidade, considere $\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}(\xi)$. Fazendo a substituição de (2.19) na fórmula de recursão (2.18) sem o termo fonte e substituindo $a_{0,j}$ pela equação (2.15), obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{\ell+1} e^{ij\xi\Delta x} &= r_j^2 \left[a_{0,j} \mathcal{A}^\ell e^{ij\xi\Delta x} + \sum_{m=1}^M a_{m,j} (\mathcal{A}^\ell e^{i(j-m)\xi\Delta x} + \mathcal{A}^\ell e^{i(j+m)\xi\Delta x}) \right] \\ &+ 2\mathcal{A}^\ell e^{ij\xi\Delta x} - \mathcal{A}^{\ell-1} e^{ij\xi\Delta x}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

cancelando os termos comuns, obtemos

$$\mathcal{A}^2 - \beta_j \mathcal{A} + 1 = 0, \quad (2.22)$$

onde

$$\beta_j = 2 + 2r_j^2 \sum_{m=1}^M a_{m,j} [\cos(m\xi\Delta x) - 1]. \quad (2.23)$$

Pela equação de segundo grau (2.22) temos

$$\mathcal{A} = \frac{\beta_j \pm \sqrt{\beta_j^2 - 4}}{2}, \quad (2.24)$$

Portanto, se $|\beta_j| \leq 2$ teremos $|\mathcal{A}| \leq 1$ que está de acordo com (2.20), ou seja, o esquema é estável. Com efeito, assumindo, em geral, que o erro aumenta com aumento do número

de onda, podemos considerar o número de onda de Nyquist dado por

$$\xi_{Nyq} = \frac{\pi}{\Delta x}, \quad (2.25)$$

como sendo o valor máximo que o número de onda ξ pode assumir. Assim, computando β_j para $\xi = \xi_{Nyq}$ teremos

$$\beta_j = 2 + 2r_j^2 \sum_{m=1}^M a_{m,j} [\cos(m\pi) - 1] = 2 - 4r_j^2 \sum_{m=1}^{\bar{M}} a_{2m-1,j}, \quad (2.26)$$

onde \bar{M} é a parte inteira da metade de M . Uma vez que da equação (2.14) temos $a_{2m-1,j} > 0$. Então o método é estável se

$$r_j \leq \left(\sum_{m=1}^{\bar{M}} a_{2m-1,j} \right)^{-1/2} \equiv \sigma(r_j). \quad (2.27)$$

Portanto, a inequação (implícita) (2.27) garante a existência de uma região de estabilidade. A Figura 2.1 exibe a variação de σ com r_j com diferentes comprimentos. Percebe-se, empiricamente, que a região que satisfaz a inequação é para $r_j \leq 1$ para todo $j = 0, 1, \dots, J$ independente do comprimento utilizado. Outro detalhe é que, a região de estabilidade para $r_j = 0$ é sempre menor que para $r_j \neq 0$ e, sofre uma redução com o aumento do comprimento. Neste caso, $r_j = 0$, a equação dos coeficientes (2.14) é a mesma que dos coeficientes convencionais, ou seja, os coeficientes obtidos usando a relação de dispersão aumentam a região de estabilidade do MDF.

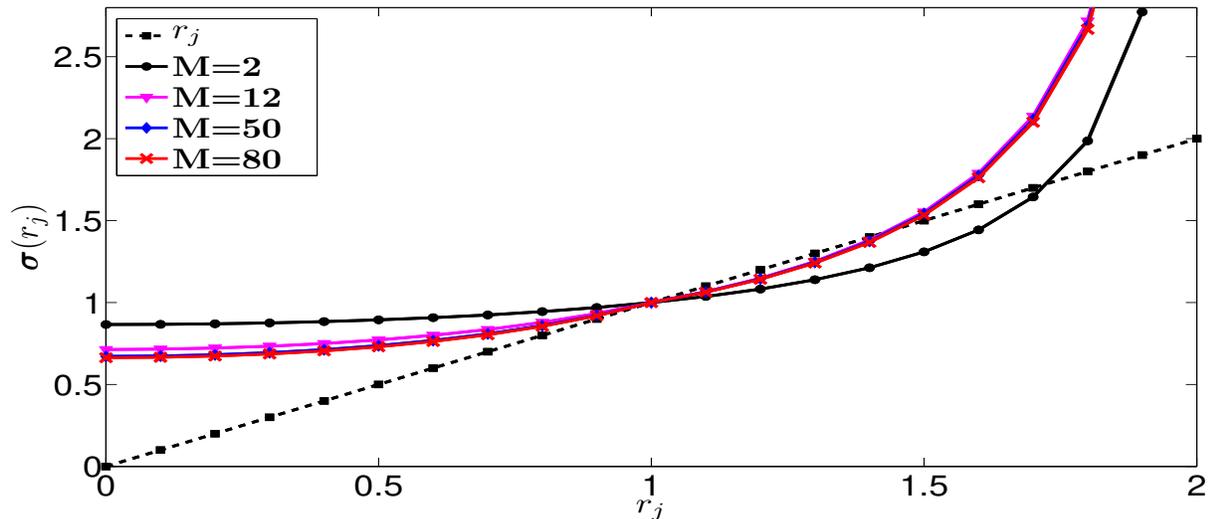


Figura 2.1: Variação de σ com r_j para diferentes comprimentos.

Garantindo a estabilidade e a consistência podemos dizer que o MDF é convergente (LeVeque, 2007). Entretanto, o erro da aproximação não detecta oscilações na solução aproximada, se essas oscilações crescem em magnitude podem prejudicar na interpretação dos resultados. Essas oscilações são chamadas de dispersões numéricas. Uma das atribuições para esse erro acontece porque velocidades de ondas de diferentes frequências são distintas, essas velocidades recebem o nome de velocidade de fase definida por

$$v(\xi, \omega) = \frac{\omega(\xi)}{\xi}, \quad (2.28)$$

ou seja, a relação entre a frequência angular ω e o número de onda ξ é não-linear. Consequentemente, para $\omega(\xi) = c(x)\xi$ para cada $x \in \mathbb{R}$ a relação é linear (em ξ). Ou seja, quando a velocidade de fase é igual à velocidade de propagação, não ocorre dispersão. Entretanto, dificilmente consegue-se essa igualdade. Uma forma de medir a dispersão numérica é considerar a razão entre estas velocidades em cada ponto da malha, isto é

$$\Psi_j = \frac{v}{c(x_j)} = \frac{\omega(\xi)/\xi}{c(x_j)}, \quad \text{para } j = 0, 1, \dots, J. \quad (2.29)$$

Determinamos ω usando a equação (2.8), ou seja

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M a_{m,j} [1 - \cos(\xi m \Delta x)] &\approx \frac{1}{r_j^2} [1 - \cos(\omega \Delta t)] \\ \sum_{m=1}^M a_{m,j} \sin^2 \left(\frac{\xi m \Delta x}{2} \right) &\approx \frac{1}{r_j^2} \sin^2 \left(\frac{\omega \Delta t}{2} \right), \end{aligned} \quad (2.30)$$

portanto,

$$\omega \approx \frac{2}{\Delta t} \arcsin \left(\sqrt{r_j^2 \sum_{m=1}^M a_{m,j} \sin^2 \left(\frac{\xi m \Delta x}{2} \right)} \right), \quad (2.31)$$

onde usou-se a seguinte relação trigonométrica: $2 \sin^2(y/2) = 1 - \cos y$, para todo y inteiro. Portanto, a equação (2.29) pode ser escrita como

$$\Psi_j = \frac{2}{r_j \gamma} \arcsin \left(\sqrt{r_j^2 \sum_{m=1}^M a_{m,j} \sin^2 \left(\frac{m\gamma}{2} \right)} \right), \quad (2.32)$$

onde $\gamma = \xi \Delta x$. Pela equação (2.32) temos $\Psi_j \equiv \Psi(r_j, \gamma)$ e como o máximo número de onda é o número de onda de Nyquist, computamos Ψ_j para $\gamma \in [0, \pi]$.

A Figura 2.2 exhibe o comportamento da dispersão para diferentes valores de r_j , com os coeficientes convencionais e com os coeficientes obtidos pelas equações (2.14) e (2.15), respectivamente, para um comprimento fixo $M = 2$. Pela comparação entre as duas

observamos uma propriedade comum que é, com o aumento de r_j se tem uma melhora na aproximação de $\Psi_j \approx 1$ para altos valores de γ . No entanto, a Figura 2.2(b) permanece mais próxima de $\Psi_j = 1$. A Figura 2.3 mostra o comportamento da dispersão para um comprimento maior, fixado em $M = 8$, e a conclusão é a mesma que foi obtida pela análise da figura anterior. Isso mostra que os coeficientes dados pelas equações (2.14) e (2.15) reduzem a dispersão numérica. E nota-se pelas Figuras 2.2(b) e 2.3(b) um aumento da região próxima de $\Psi_j = 1$ quando aumentamos o valor do comprimento. Também pode ser observado pela Figura 2.3(a), como a condição de estabilidade influencia no cálculo da dispersão, onde a linha rosa ($r_j = 0.7$) não é tão suave quanto as outras, e isso é devido ao fato de estarmos no limite da condição de estabilidade. Além disso, baseando-se nessas figuras, podemos sempre garantir a existência de valores de Γ e r_{max} dado $\epsilon > 0$ e M , tal que

$$|\Psi_j - 1| \leq \epsilon \quad \text{se} \quad \gamma \leq \Gamma \quad \text{e} \quad r_j \leq r_{max}. \quad (2.33)$$

Portanto, podemos encontrar uma condição sobre Δx e Δt , de modo que a condição de estabilidade seja satisfeita e que o erro devido a dispersão permaneça numa faixa aceitável. Para isso, definindo λ como o comprimento de onda e f como a frequência, e utilizando propriedades que relacionam número de onda ξ com o λ e este com a f , podemos escrever

$$\gamma = \xi \Delta x = \frac{2\pi \Delta x}{\lambda} = \frac{2\pi f \Delta x}{c(x)}, \quad (2.34)$$

definindo f_{max} como a frequência máxima e $c_{min} = \min\{c(x_j) \mid j = 0, 1, \dots, J\}$, uma vez que existe Γ e r_{max} podemos escolher Δx pela seguinte condição

$$\gamma \leq \Gamma \quad \text{se} \quad \Delta x \leq \frac{\Gamma c_{min}}{2\pi f_{max}}. \quad (2.35)$$

Uma vez escolhido Δx , Δt pode ser dado por

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x r_{max}}{c_{max}}, \quad (2.36)$$

onde $c_{max} = \max\{c(x_j) \mid j = 0, 1, \dots, J\}$. Por exemplo, tomando $\epsilon = 0.08$ pela Figura 2.2(b) teremos $\Gamma = 2.3$ e $r_{max} = 0.5$, ou seja, para uma $f_{max} = 55 \text{ Hz}$, $c_{min} = 1.5 \text{ km/s}$ e $c_{max} = 4 \text{ km/s}$ temos $\Delta x \approx 10 \text{ m}$ e $\Delta t \approx 1.3 \text{ ms}$ e tomando o mesmo ϵ para $M = 8$ pela Figura 2.3(b), teremos $\Gamma = 2.9$ e $r_{max} = 0.3$ implicando que $\Delta x \approx 12 \text{ m}$ e $\Delta t \approx 0.9 \text{ ms}$. Portanto, para cada comprimento escolhido os valores da malha podem ser diferentes para o mesmo ϵ .

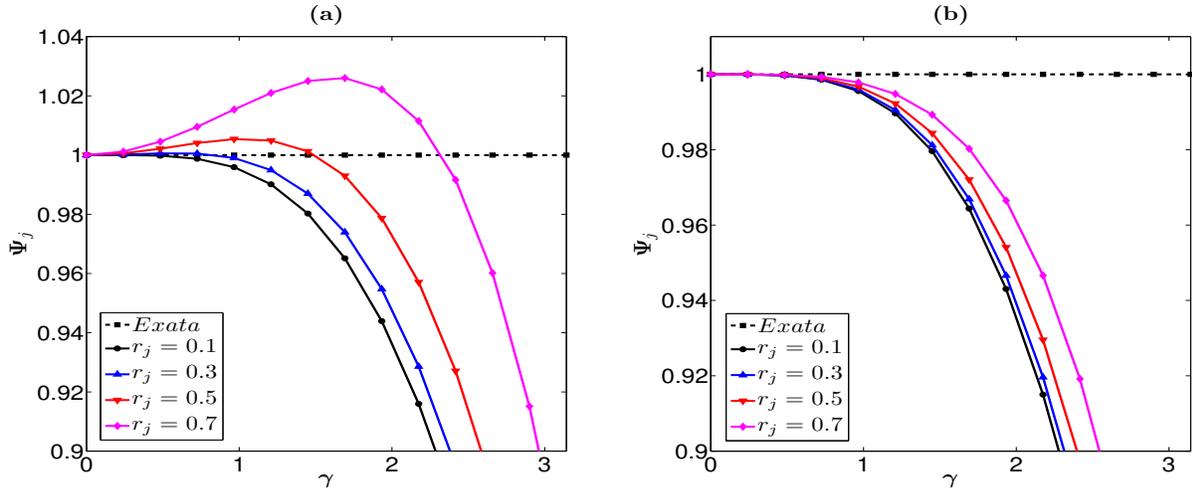


Figura 2.2: (a) Variação da dispersão com γ para diferentes valores de r_j computados com os coeficientes convencionais. (b) Variação da dispersão com γ para diferentes valores de r_j computados com os coeficientes dados por (2.14) e (2.15).

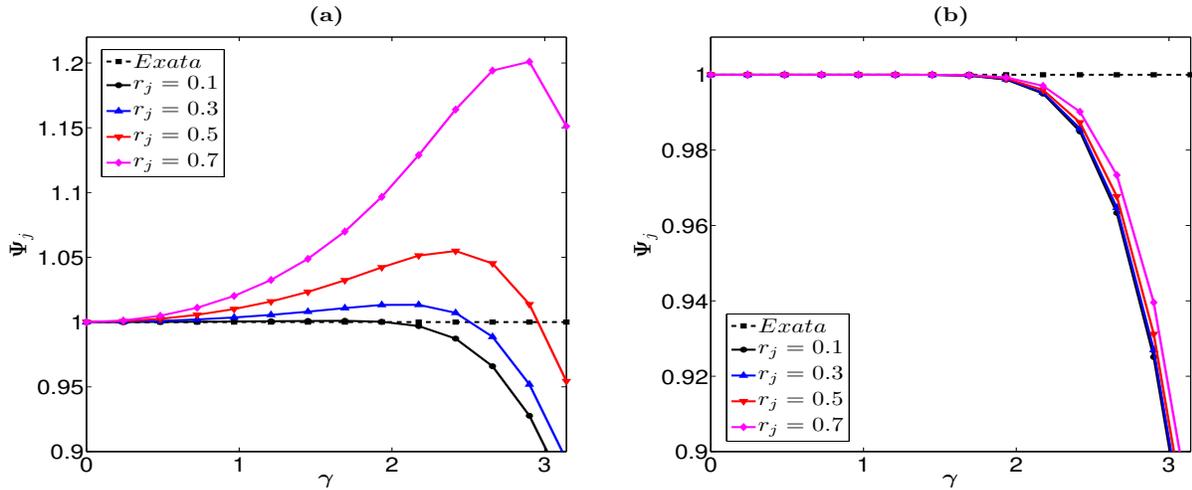


Figura 2.3: (a) Variação da dispersão com γ para diferentes valores de r_j computados com os coeficientes convencionais. (b) Variação da dispersão com γ para diferentes valores de r_j computados com os coeficientes dados por (2.14) e (2.15).

2.2 Equação da Onda Bidimensional

Sejam $(x, z) \in \mathbb{R}^2$ a variável espacial e $t \in \mathbb{R}$ a variável temporal, a equação da onda acústica bidimensional (2D) com densidade constante é dada por

$$\frac{1}{c^2(x, z)} U_{tt} - U_{xx} - U_{zz} = F(x, z, t), \quad (2.37)$$

onde $c(x, z)$ é a função que descreve a velocidade de propagação, $F(x, z, t)$ é o termo fonte e $U(x, z, t)$ é o campo de onda escalar. Aplicando o mesmo esquema do caso 1D para aproximar as segundas derivadas no tempo e no espaço, obtemos

$$U_{tt}(x_j, z_k, t_\ell) \approx \frac{1}{\Delta t^2} [-2u_{j,k}^\ell + (u_{j,k}^{\ell-1} + u_{j,k}^{\ell+1})], \quad (2.38)$$

$$U_{xx}(x_j, z_k, t_\ell) \approx \frac{1}{\Delta x^2} \left[a_{0,j,k} u_{j,k}^\ell + \sum_{m=1}^M a_{m,j,k} (u_{j-m,k}^\ell + u_{j+m,k}^\ell) \right], \quad (2.39)$$

$$U_{zz}(x_j, z_k, t_\ell) \approx \frac{1}{\Delta z^2} \left[a_{0,j,k} u_{j,k}^\ell + \sum_{m=1}^M a_{m,j,k} (u_{j,k-m}^\ell + u_{j,k+m}^\ell) \right], \quad (2.40)$$

onde $a_{m,j,k}$ para $m = 0, 1, \dots, M$ são os coeficientes espaciais do MDF, $u_{j,k}^\ell = U(x_j, z_k, t_\ell)$ e com uma discretização regular, isto é, $\Delta x = \Delta z = \Delta$, onde

$$\begin{aligned} x_j &= x_0 + j\Delta, & j &= 0, \dots, J; \\ z_k &= z_0 + k\Delta, & k &= 0, \dots, K; \\ t_\ell &= \ell\Delta t, & \ell &= 0, \dots, L, \end{aligned} \quad (2.41)$$

Para encontrar os coeficientes do esquema do MDF, para o caso 2D da equação da onda, usando os domínios da equação da onda, fazemos as mesmas suposições realizadas anteriormente no caso 1D, isto é, sabemos que uma solução da equação (2.37) sem o termo fonte pode ser dado pelo harmônico bidimensional com constante U_0

$$U(x, z, t) = U_0 e^{i(\xi_x x + \xi_z z - \omega t)}, \quad (2.42)$$

onde ξ_x e ξ_z são os números de ondas nas respectivas coordenadas x e z , e ω a frequência angular de modo que

$$\omega^2 - c^2(x, z)(\xi_x^2 + \xi_z^2) = 0. \quad (2.43)$$

A equação (2.43) é a relação de dispersão da equação da onda 2D. Assim, substituindo as derivadas aproximadas pelas diferenças finita na equação (2.37) sem o termo fonte, obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta^2} \left[2a_{0,j,k} u_{j,k}^\ell + \sum_{m=1}^M a_{m,j,k} (u_{j-m,k}^\ell + u_{j+m,k}^\ell + u_{j,k-m}^\ell + u_{j,k+m}^\ell) \right] \approx \\ & \frac{1}{c_{j,k}^2 \Delta t^2} [-2u_{j,k}^\ell + (u_{j,k}^{\ell-1} + u_{j,k}^{\ell+1})]. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Novamente, para uma particular frequência na solução (2.42) nos pontos (x_j, z_k, t_ℓ) , a

solução do harmônico pode ser aplicada na equação (2.44) obtendo

$$r_{j,k}^2 \left[a_{0,j,k} + \sum_{m=1}^M a_{m,j,k} (\cos(\xi_x m \Delta) + \cos(\xi_z m \Delta)) \right] \approx [\cos(\omega \Delta t) - 1], \quad (2.45)$$

onde $r_{j,k} = c(x_j, z_k) \Delta t / \Delta$ são os números de Courant. Uma vez que, da equação (2.43), a frequência ω também pode ser discretizada por $\omega_{j,k} \Delta t = r_{j,k} \xi \Delta$. Ou seja, supondo válida a substituição de $\omega \Delta t$ da equação (2.45) por $\omega_{j,k} \Delta t$, a equação pode ser escrita como

$$r_{j,k}^2 \left[a_{0,j,k} + \sum_{m=1}^M a_{m,j,k} (\cos(\xi_x m \Delta) + \cos(\xi_z m \Delta)) \right] \approx [\cos(\xi r_{j,k} \Delta) - 1]. \quad (2.46)$$

Aplicando expansão em série de Taylor na função cosseno em (2.46), obtemos

$$a_{0,j,k} + \sum_{m=1}^M a_{m,j,k} \left(2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} m^{2n} f_n(\theta) \Delta^{2n} \xi^{2n} \right) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} r_{j,k}^{2n-2} \Delta^{2n} \xi^{2n} \quad (2.47)$$

onde $f_n(\theta) = (\cos \theta)^{2n} + (\sin \theta)^{2n}$ para todo n natural, e lembrando que as coordenadas do número de onda são $\xi_x = \xi \cos \theta$ e $\xi_z = \xi \sin \theta$, com θ sendo o ângulo de propagação (direção) da onda plana. Assim, podemos comparar os coeficientes de ξ^{2n} em (2.47) e obter um sistema semelhante ao obtido no caso 1D, ou seja,

$$\sum_{m=1}^M m^{2n} a_{m,j,k} = \frac{r_{j,k}^{2n-2}}{f_n(\theta)}, \text{ para } n = 1, \dots, M \quad (2.48)$$

e

$$a_{0,j,k} = -2 \sum_{m=1}^M a_{m,j,k}, \quad (2.49)$$

com a diferença de não conseguir uma fórmula explícita para a solução do sistema (2.48). Porém, a solução pode ser obtida utilizando um método direto proposto por Björck e Pereyra (1970), que consiste em utilizar interpolação polinomial utilizando a estrutura da matriz de Vandermonde. Notemos, também, que os coeficientes de diferenças finitas (2D) dependem do ângulo de propagação, isto é, $a_{m,j,k} \equiv a_{m,j,k}(r_{j,k}, \theta)$.

O ângulo θ indica a direção da propagação de uma onda plana, porém, quando é feita a modelagem sísmica não temos controle sobre essa direção, por ser uma propriedade física da onda. No entanto, a função $f_n(\theta)$ tem duas propriedades que podemos usar para extrair informações sobre esse ângulo: (i) periodicidade, isto é, $f_n(\theta) = f_n(b\pi/2 \pm \theta)$ para todo b inteiro; (ii) para $\theta = \pi/8$ temos $f_n(\pi/8) = f_n(\pi/8 \pm b\pi/4)$, ou seja, a função $f_n(\theta)$ tem os mesmos valores em oito direções, $\theta = (2b' - 1)\pi/8$ para $b' = 1, \dots, 8$ e não há outro ângulo que alcance mais direções do que este, por causa do período definido em (i). Ou seja, podemos tomar qualquer $\theta \in [0, \pi/2]$.

O erro do esquema do MDF 2D é obtida fazendo a diferença entre os termos da equação 2.46 obtendo

$$\varepsilon = \left| \frac{1}{\Delta^2} \left[a_{0,j,k} + \sum_{m=1}^M a_{m,j,k} (\cos(m\xi_x \Delta) + \cos(m\xi_z \Delta)) - \frac{1}{r_{j,k}^2} (\cos(r_{j,k} \xi \Delta) - 1) \right] \right|. \quad (2.50)$$

Ou seja, aplicando série de Taylor na função cosseno e sabendo das equações (2.48) e (2.49), obtemos

$$\varepsilon = \left| \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\sum_{m=1}^M m^{2n} a_{m,j,k} f_n(\theta) - r_{j,k}^{2n-2} \right) \xi^{2n} \Delta^{2n-2} \right|, \quad (2.51)$$

onde a menor potência de Δ é $2M$. Desse modo, pela propriedade (ii), se $\theta = \pi/8$, o esquema terá precisão da ordem de $2M$ em pelo menos oito direções. Portanto, nesse sentido $\theta = \pi/8$ será o melhor ângulo para computar os coeficientes (2.49) e (2.48). Além disso, pode-se concluir que o esquema 2D também é consistente.

Portanto, a fórmula de recursão do MDF 2D é dada por

$$\begin{aligned} u_{j,k}^\ell &= r_{j,k}^2 \left[2a_{0,j,k} u_{j,k}^\ell + \sum_{m=1}^M a_{m,j,k} (u_{j-m,k}^\ell + u_{j+m,k}^\ell + u_{j,k-m}^\ell + u_{j,k+m}^\ell) \right] \\ &+ 2u_{j,k}^\ell - u_{j,k}^{\ell-1} + [c(x_j, z_k) \Delta t]^2 F(x_j, z_k, t_\ell), \end{aligned} \quad (2.52)$$

onde os coeficientes são obtidos por (2.48) e (2.49) com $j = 0, 1, \dots, J, k = 0, 1, \dots, K, \ell = 0, 1, \dots, L$.

2.2.1 Análise de Estabilidade e Dispersão

Como feito no caso 1D, devemos investigar para quais valores para Δ e Δt devemos usar no esquema explícito (2.52) para garantir a estabilidade e diminuir os efeitos de dispersão. Analogamente, usaremos a análise de Von Neumann, onde a equação (2.19) com a adição de mais uma dimensão é dada por

$$u_{j,k}^\ell = \mathcal{A}(\xi)^\ell e^{ij\xi_x \Delta} e^{ik\xi_z \Delta}, \quad (2.53)$$

onde $\xi_x = \xi \cos \theta, \xi_z = \xi \sin \theta$ e $\mathcal{A}(\xi)$ é o fator de amplificação. Aplicando (2.53) em (2.52) sem o termo fonte, obtemos a mesma equação dada por (2.22), isto é,

$$\mathcal{A}^2 - \beta_{j,k} \mathcal{A} + 1 = 0, \quad (2.54)$$

onde $\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}(\xi)$ e

$$\beta_{j,k} = 2 + 2r_{j,k}^2 \sum_{m=1}^M a_{m,j,k} [\cos(m\xi_x \Delta) + \cos(m\xi_z \Delta) - 2]. \quad (2.55)$$

Ou seja, temos

$$\mathcal{A} = \frac{\beta_{j,k} \pm \sqrt{\beta_{j,k}^2 - 4}}{2}, \quad (2.56)$$

e, no sentido de Von Neumann, queremos $|\mathcal{A}| \leq 1$ para que o esquema (2.52) seja estável, ou seja, devemos mostrar que $|\beta_{j,k}| \leq 2$. Para isso, vamos usar os mesmos argumentos feitos no caso unidimensional, isto é, o erro aumenta com o aumento do número de onda e assumindo que o número de onda de Nyquist nas coordenadas x e z seja o máximo número de onda nas respectivas coordenadas, ou seja,

$$\xi_{xNyq} = \frac{\pi}{\Delta x} = \frac{\pi}{\Delta} \quad \text{e} \quad \xi_{zNyq} = \frac{\pi}{\Delta z} = \frac{\pi}{\Delta}. \quad (2.57)$$

Tomando ξ_{xNyq} e ξ_{zNyq} em $\beta_{j,k}$ obtemos

$$\beta_{j,k} = 2 + 4r_{j,k}^2 \sum_{m=1}^{\overline{M}} a_{m,j,k} [\cos(m\pi) - 1] = 2 - 8r_{j,k}^2 \sum_{m=1}^{\overline{M}} a_{2m-1,j,k}, \quad (2.58)$$

onde \overline{M} é a parte inteira da metade de M . Uma vez que da solução de (2.48) teremos $a_{2m-1,j,k} > 0$, o esquema de diferenças finitas será estável se

$$r_{j,k} \leq \left(2 \sum_{m=1}^{\overline{M}} a_{2m-1,j,k} \right)^{-1/2} \equiv \sigma(r_{j,k}, \theta). \quad (2.59)$$

A estabilidade é garantida satisfazendo inequação implícita (2.59).

A Figura 2.4 mostra a variação da região σ para diferentes comprimentos e observa-se que, com o aumento do comprimento essa região diminui. Além disso, para os pontos $r_{j,k} = 0$ a região de σ é sempre menor do que os pontos $r_{j,k} \neq 0$, mostrando que os coeficientes do MDF, utilizando os domínios da equação da onda, aumentam a região de estabilidade comparado à região de estabilidade dada pelos coeficientes convencionais.

Similarmente ao caso 1D, o esquema é convergente uma vez que garantimos a estabilidade e a consistência. No entanto, ainda há o problema de dispersão numérica que ocorre pelo mesmo motivo que já foi explicado na análise do caso 1D. Assim, definimos

$$\Psi_{j,k} = \frac{v}{c_{j,k}} = \frac{\omega/\xi}{c_{j,k}}, \quad (2.60)$$

onde v é a velocidade de fase, ω é a frequência angular, ξ o número de onda e $c_{j,k} = c(x_j, z_k)$ é a velocidade de propagação da onda.

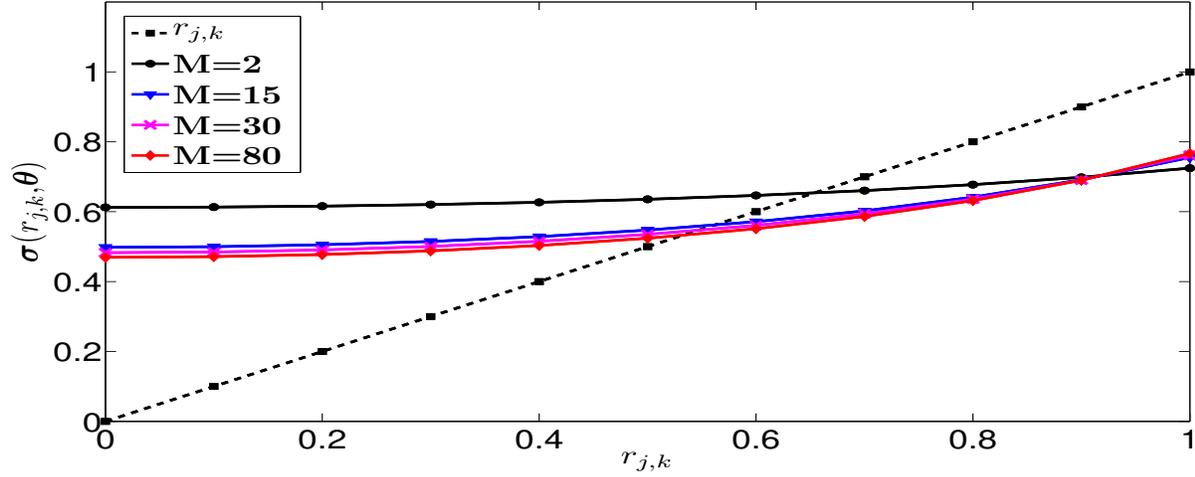


Figura 2.4: Variação de σ com $r_{j,k}$ para diferentes comprimentos, com $\theta = \pi/8$.

Partindo da equação da relação de dispersão (2.45), obtemos

$$\omega = \frac{2}{\Delta t} \arcsin \sqrt{r_{j,k}^2 \sum_{m=1}^M a_{m,j,k} \left[\sin^2 \left(\frac{m \cos(\theta\gamma)}{2} \right) + \sin^2 \left(\frac{m \sin(\theta\gamma)}{2} \right) \right]}, \quad (2.61)$$

onde $\gamma = \xi\Delta$. Portanto, substituindo (2.61) em (2.60), obtemos

$$\Psi_{j,k} = \frac{2}{r_{j,k}\gamma} \arcsin \sqrt{r_{j,k}^2 \sum_{m=1}^M a_{m,j,k} \left[\sin^2 \left(\frac{m \cos(\theta\gamma)}{2} \right) + \sin^2 \left(\frac{m \sin(\theta\gamma)}{2} \right) \right]}, \quad (2.62)$$

e veja que $\Psi_{j,k} \equiv \Psi(\gamma, r_{j,k}, \theta)$. A Figura 2.5 faz a comparação de $\Psi_{j,k}$ computados com os coeficientes convencionais e com os coeficientes dados pela equação (2.48) e (2.49), respectivamente, para um comprimento $M = 2$ e $\theta = \pi/8$. Observa-se que a Figura 2.5(b) mostra que a variação de $\Psi_{j,k} \approx 1$ é menor ao longo de $\gamma \in [0, 2.7]$, pois a dispersão para $r_{j,k} = 0.6$, a linha verde na Figura 2.5(a) a partir de 2.7, fica melhor aproximada do valor 1. A Figura 2.6 faz a mesma comparação, mas com um comprimento $M = 8$ e, nesse caso, as variações de $\Psi_{j,k}$ da Figura 2.6(b) apresentam uma aproximação melhor do que as variações de $\Psi_{j,k}$ da Figura 2.6(a) para $\gamma \in [0, \pi]$. Além disso, observa-se pelas Figuras 2.5(b) e 2.6(b) que, com o aumento do comprimento, a região de $\Psi_{j,k} \approx 1$ é aumentada (estirada). Isso mostra que os coeficientes baseados na relação de dispersão contribuem para a redução de dispersão no esquema. Da mesma forma, baseando-se nestas figuras, particularmente nas Figuras 2.5(b) e 2.6(b), chega-se à mesma conclusão obtida no caso 1D, isto é, existem valores de Γ e r_{max} tal que se verifica (2.33). Portanto, podemos usar (2.35) e (2.36) como condição para os valores de Δ e Δt .

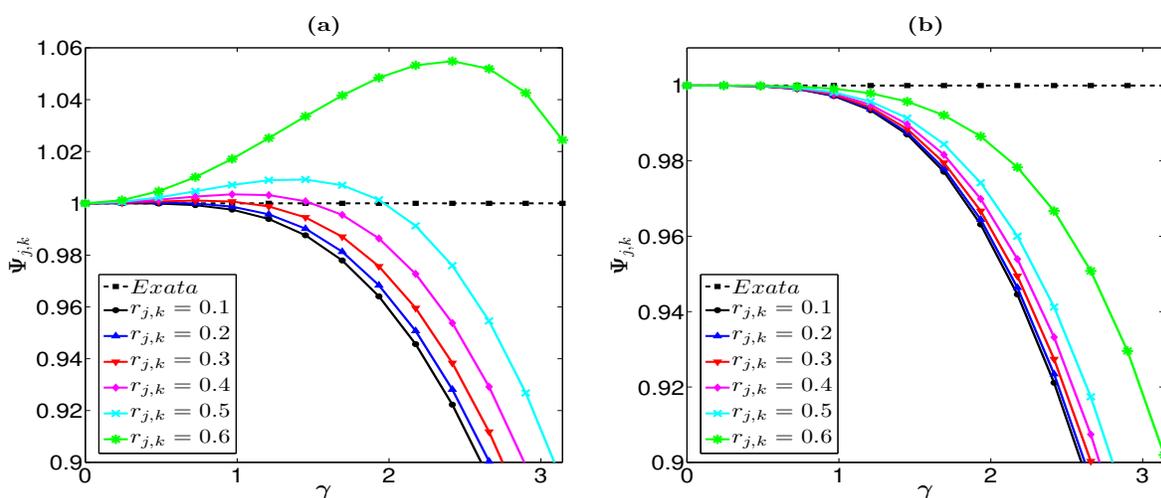


Figura 2.5: (a) Variação da dispersão com γ para diferentes valores de r_j computados com os coeficientes convencionais. (b) Variação da dispersão com γ para diferentes valores de r_j computados com os coeficientes dados por (2.48) e (2.49).

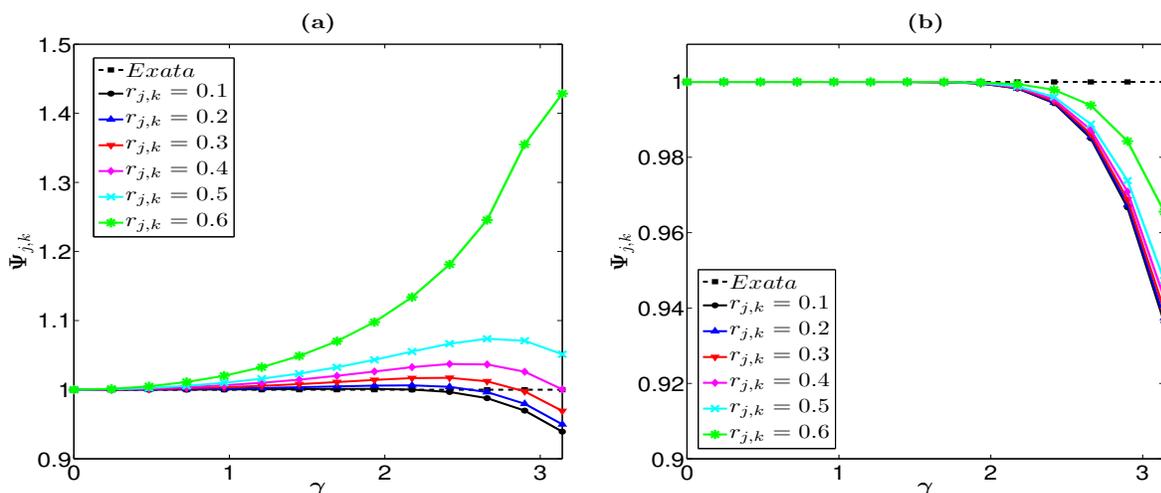


Figura 2.6: (a) Variação da dispersão com γ para diferentes valores de r_j computados com os coeficientes convencionais. (b) Variação da dispersão com γ para diferentes valores de r_j computados com os coeficientes dados por (2.49) e (2.48).

Capítulo 3

Diferenças Finitas com Operador Espacial de Comprimento Adaptativo

A escolha do comprimento do operador da derivada espacial na equação da onda acústica é baseada no custo computacional, estabilidade e no critério de dispersão do MDF. No capítulo anterior discutimos o esquema do MDF com comprimento fixo, e notamos que os parâmetros de passo da malha podem ser escolhidos de acordo com o comprimento. Contudo, ao manter os valores de passos da malha fixos e pelas Figuras 2.2(b), 2.3(b), 2.5(b) e 2.6(b), observa-se que altas velocidades ficam mais aproximadas do valor exato da dispersão, ao contrário, das baixas velocidades. Isto é, comprimentos longos podem ser usados para regiões de baixa velocidade e comprimentos curtos para regiões de alta velocidade. Desse modo, no caso do esquema com comprimento fixo, o comprimento a ser usado é baseado na menor velocidade para que satisfaça globalmente as condições de estabilidade e dispersão. No entanto, isso mostra que o esquema do MDF de comprimento fixo realiza operações desnecessárias na fórmula de recursão e, em consequência, aumenta o custo computacional. Neste capítulo, apresentamos um método que escolhe o comprimento do operador da derivada espacial de acordo com a velocidade mantendo a ordem de precisão tão boa quanto do esquema do MDF com comprimento fixo baseado na menor velocidade.

3.1 MDF Adaptativo: caso 1D

O primeiro passo para construir o esquema do MDF adaptativo é mostrar que podemos fixar o passo da malha computacional sem perder a estabilidade ou precisão do MDF. Definimos M_{min} como o menor comprimento a ser usado pelo esquema adaptativo, isto é, para um comprimento M qualquer, sempre temos $M \geq M_{min} \geq 1$. Pelos resultados da análise de estabilidade e dispersão do capítulo anterior podemos fixar M_{min} e dado $\epsilon > 0$ existem valores de $\bar{\Gamma}$ e \bar{r}_{max} , tal que

$$|\bar{\Psi}_j - 1| \leq \epsilon \quad \text{se} \quad \gamma \leq \bar{\Gamma} \quad \text{e} \quad r_j \leq \bar{r}_{max}, \quad (3.1)$$

onde $\bar{\Psi}_j$ é a equação (2.32) para $M = M_{min}$. Ou seja,

$$\gamma \leq \bar{\Gamma} \quad \text{se} \quad \Delta x \leq \frac{\bar{\Gamma} c_{min}}{2\pi f_{max}}, \quad (3.2)$$

e

$$\Delta t = \frac{\Delta x \bar{T}_{max}}{c_{max}}, \quad (3.3)$$

onde f_{max} é a frequência máxima, c_{min} a menor velocidade e c_{max} a maior velocidade. Portanto, pelo fato de M_{min} ser o “pior” comprimento, essas condições sobre Δx e Δt valem para qualquer comprimento $M \geq M_{min}$.

Uma vez que os passos da malha computacional, Δx e Δt , estão fixos, para um comprimento M , definimos o erro do tempo de propagação de ondas como a diferença dos tempos de propagação de ondas que viajam com a velocidade de fase com os tempos que viajam com a velocidade de propagação da onda (velocidade exata) a cada ponto da malha. Ou seja,

$$\tau_j = \left| \frac{\Delta x}{v} - \frac{\Delta x}{c_j} \right| = \frac{\Delta x}{c_j} \left| \left(\frac{c_j}{v} - 1 \right) \right|, \quad (3.4)$$

substituindo a equação (2.29) em (3.4), obtemos

$$\tau_j \equiv \tau(M, c_j) = \frac{\Delta x}{c_j} \left| \left(\frac{1}{\bar{\Psi}_j} - 1 \right) \right|, \quad (3.5)$$

onde $\bar{\Psi}_j$ é dada por (2.32) computado para valores

$$\gamma_j = \frac{2\pi f_{max} \Delta x}{c_j}, \quad (3.6)$$

para todo $j = 0, 1, \dots, J$.

Portanto, para uma taxa máxima de erro η , podemos escolher M_j como o mínimo $\mathcal{M} \geq M_{min}$, tal que

$$\tau(M_j, c_j) \leq \eta, \quad (3.7)$$

onde $\mathcal{M} = M_{min}, M_{min} + 1, \dots$

Em outras palavras, a desigualdade (3.7) verifica quais valores de \mathcal{M} torna a afirmação verdadeira, por exemplo, para uma velocidade c_1 testamos $\tau(M_{min}, c_1) \leq \eta$, se a desigualdade for verdadeira M_{min} será o comprimento associado a velocidade c_1 , caso contrário, essa verificação é feita para os próximos comprimentos até encontrar o primeiro valor de \mathcal{M} que satisfaça a desigualdade. É evidente, que computacionalmente, daremos um limite máximo para \mathcal{M} evitando que essa verificação seja feita infinitamente.

A Figura 3.1 mostra a aplicação do método que escolhe os comprimentos de acordo com as velocidades, onde a velocidade mínima é $c_{min} = 1.5 \text{ km/s}$ e a velocidade máxima é $c_{max} = 4.5 \text{ km/s}$ e usamos $M_{min} = 2$, $\Delta x = 10 \text{ m}$ e $\Delta t = 1 \text{ ms}$. Como é esperado, temos que o comprimento é inversamente proporcional a velocidade. Além disso, para menores

valores de η , teremos maior necessidade em obter comprimentos longos.

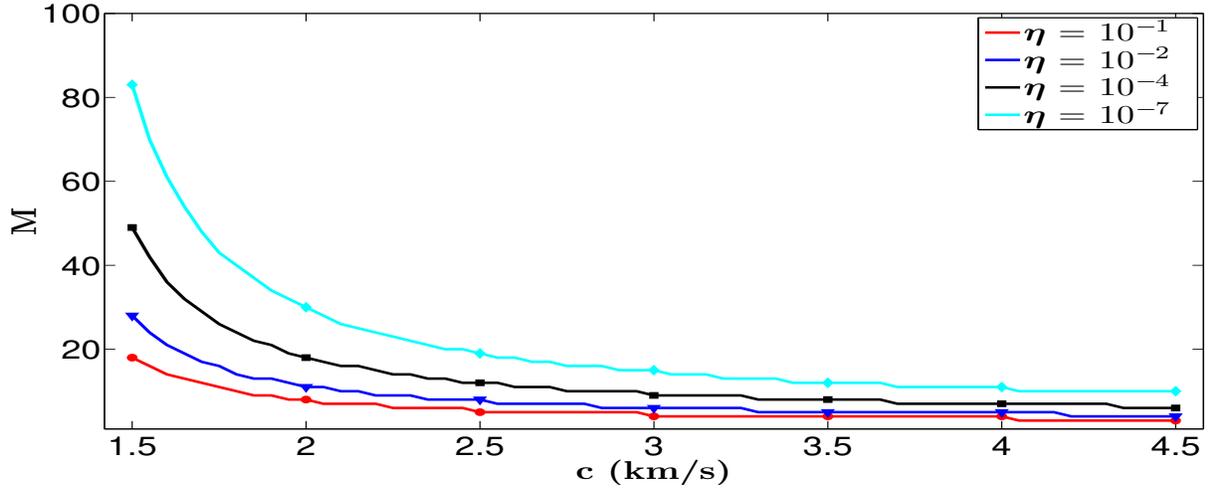


Figura 3.1: Variação do comprimento M com a velocidade de propagação c para diferentes valores de η .

Portanto, o esquema do MDF de comprimento fixo pode ser modificado para um esquema adaptativo dado por

$$u_j^{\ell+1} = 2u_j^\ell - u_j^{\ell-1} + r_j^2 \left[a_{0,j}u_j^\ell + \sum_{m=1}^{M_j} a_{m,j}(u_{j-m}^\ell + u_{j+m}^\ell) \right] + [c(x_j)\Delta t]^2 F(x_j, t_\ell). \quad (3.8)$$

onde M_j é dado por (3.7) e $a_{m,j}$ são os coeficientes de diferenças finitas que de acordo com as equações (2.15) e (2.14) serão dados por

$$a_{m,j} = \frac{(-1)^{m+1}}{m^2} \prod_{n=1, n \neq m}^{M_j} \left| \frac{n^2 - r_j^2}{n^2 - m^2} \right|, \quad (3.9)$$

e

$$a_{0,j} = -2 \sum_{m=1}^{M_j} a_{m,j}, \quad (3.10)$$

para todo $j = 0, 1, \dots, J$ e $m = 1, 2, \dots, M_j$.

Veja que o esquema adaptativo foi construído já garantindo a estabilidade e a dispersão numérica baseando-se no pior caso, que é um esquema de comprimento M_{min} . A vantagem desse esquema é comprovada pelo somatório da fórmula de recursão que faz somente as operações necessárias para manter a precisão do método, diferente do esquema com comprimento fixo que vai escolher o comprimento que vai satisfazer globalmente os critérios de estabilidade e dispersão para não perder precisão da solução.

Um pseudocódigo, apenas da parte recursiva do MDF, pode ajudar a comparar os

números de operações entre o esquema que usa os comprimentos adaptados e do esquema de comprimento fixo baseado na menor velocidade, ou seja, esse comprimento equivale a tomar o máximo de M_j , isto é, $\tilde{M} = \max M_j$ para todo $j = 1, \dots, J$. Desse modo, o formato do pseudocódigo pode ser dado por

```

for  $\ell = 1 : L$  do
  for  $j = 1 : J$  do
     $soma(j, \ell) \leftarrow 0$ 
    for  $m = 1 : M_j$  do
       $soma(j, \ell) \leftarrow soma(j, \ell) + a(j, m) * (u(j - m, \ell) + u(j + m, \ell))$ 
    end for
     $u(j, \ell + 1) \leftarrow 2 * u(j, \ell) - u(j, \ell - 1) + r(j) * (soma(j, \ell) + a(j, 0) * u(j, \ell)) + q(j) * F(j, \ell)$ 
  end for
end for

```

Para contarmos o número de operações (ou “flops”) iniciamos com o laço mais interno, somatório na fórmula recursiva, que será o responsável por fazer o MDF adaptativo ser mais eficiente. Assim, no laço mais interno temos 2 somas e 1 produto, ou seja, no total de 3 “flops”, no entanto, contando com a quantidade de vezes que repetimos o laço. E no laço que computa u fazemos 8 “flops”. Totalizando

$$\sum_{\ell=1}^L \sum_{j=1}^J \left[8 + \left(\sum_{m=1}^{M_j} 3 \right) \right] = 8LJ + 3 \sum_{j=1}^J M_j. \quad (3.11)$$

Para o esquema de comprimento fixo teremos um total de $8LJ + 3J\tilde{M}$. Então, teremos

$$8LJ + 3 \sum_{j=1}^J M_j \leq 8LJ + 3J\tilde{M}. \quad (3.12)$$

Para um modelo de velocidade que exigirá diferentes valores para o comprimento, a desigualdade (3.12) será estritamente menor.

3.2 MDF Adaptativo: caso 2D

O processo para encontrar o método que escolhe os comprimentos para o esquema 2D é idêntico ao caso 1D. Uma vez que a malha é regular, isto é, $\Delta x = \Delta z = \Delta$, podemos fixar esses parâmetros baseando-se no menor comprimento M_{min} e definir o erro do tempo

de propagação semelhante à equação (3.4), ou seja,

$$\tau(M, c_{j,k}) = \frac{\Delta}{c_{j,k}} \left| \left(\frac{1}{\Psi_{j,k}} - 1 \right) \right|, \quad (3.13)$$

onde $\Psi_{j,k}$ é dada por (2.32) com

$$\gamma_{j,k} = \frac{2\pi f_{max}\Delta}{c_{j,k}}, \quad (3.14)$$

para todo $j = 0, 1, \dots, J$ e $k = 0, 1, \dots, K$.

Portanto, dado η , podemos escolher $M_{j,k}$ como o mínimo $\mathcal{M} \geq M_{min}$, tal que

$$\tau(M_{j,k}, c_{j,k}) \leq \eta, \quad (3.15)$$

onde $\mathcal{M} = M_{min}, M_{min} + 1, \dots$

Assim, a fórmula de recursão do esquema do MDF adaptativo pode ser dada por

$$\begin{aligned} u_{j,k}^\ell &= r_{j,k}^2 \left[2a_{0,j,k} u_{j,k}^\ell + \sum_{m=1}^{M_{j,k}} a_{m,j,k} (u_{j-m,k}^\ell + u_{j+m,k}^\ell + u_{j,k-m}^\ell + u_{j,k+m}^\ell) \right] \\ &+ 2u_{j,k}^\ell - u_{j,k}^{\ell-1} + [c(x_j, z_k)\Delta t]^2 F(x_j, z_k, t_\ell), \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde $M_{j,k}$ é dado por (3.15) e os coeficientes $a_{m,j,k}$ são dados por

$$\sum_{m=1}^{M_{j,k}} m^{2n} a_{m,j,k} = \frac{r_{j,k}^{2n-2}}{f_n(\theta)}, \text{ para } n = 1, \dots, M_{j,k} \quad (3.17)$$

e

$$a_{0,j,k} = -2 \sum_{m=1}^{M_{j,k}} a_{m,j,k}. \quad (3.18)$$

No entanto, neste caso, para o esquema não sair da região da estabilidade, a inequação (2.59) deve ser garantida para um comprimento que será tomado como o maior valor a ser utilizado, por exemplo, pela Figura 2.4 temos $r_{j,k} \leq 0.5$ para um comprimento $M = 80$, assim $\mathcal{M} = M_{min}, M_{min} + 1, \dots, 80$. No entanto, o valor máximo já deveria ser empregado para evitar infinitas verificações da inequação (3.15). Não é difícil ver que o número de operações no ciclo recursivo será dado por

$$\sum_{\ell=1}^L \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \left[8 + \binom{M_{j,k}}{m=1} 3 \right] = 8LJK + 3 \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K M_{j,k}. \quad (3.19)$$

Logo, comparado com o esquema de comprimento $\tilde{M} = \max M_{j,k}$ para todo $j = 0, 1, \dots, J$

e $k = 0, 1, \dots, K$, o número total de operações será menor. No pior caso, temos que o número de operações serão iguais.

Capítulo 4

Experimentos Numéricos

Neste capítulo apresentamos simulações numéricas para quatro tipos de modelos de velocidades. Nos dois primeiros modelos a velocidade é uma função unidimensional, sendo um deles com uma velocidade constante, pois, nesse caso, comparamos com a solução exata para validar se o método com o esquema adaptativo consegue uma boa aproximação. Os dois últimos são aplicados em modelos bidimensional de velocidade variável. Definimos, também, o termo fonte utilizado e algumas considerações que se deve tomar para poder realizar as simulações no ponto de vista numérico. Para realizar as simulações, a implementação foi feita usando rotinas do MATLAB em uma máquina 4 x Dell PowerEdge R420 com 2 processadores Intel Xeon E5-2450 (16 núcleos cada) 2.50 GHz e 192 GB de RAM.

4.1 Termo Fonte

Consideramos um termo fonte dado por

$$F(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_S)\mathcal{S}(t), \quad (4.1)$$

onde δ é a “função” delta de Dirac, \mathbf{x}_S é a posição da fonte e \mathcal{S} é o pulso de Ricker com frequência pico f_p dado por,

$$\mathcal{S}(t) = [1 - 2(\pi f_p t)^2] e^{-(\pi f_p t)^2}. \quad (4.2)$$

Pela definição do termo fonte, o pulso de Ricker vai atuar somente na posição \mathbf{x}_S , na modelagem sísmica, isso significa uma simulação de um único tiro. Consideramos $\mathbf{x} = x$ para o caso unidimensional e $\mathbf{x} = (x, z)$ para o caso bidimensional, além disso, nos experimentos vamos sempre utilizar uma $f_p = 20 \text{ Hz}$. A Figura 4.1 mostra a forma do pulso tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência. Como o pulso de Ricker no domínio da frequência não é do tipo banda-limitada, isto é, $|f(\omega)| = 0$ para $|\omega| > \omega_0$, consideramos nos experimentos numéricos uma frequência máxima $f_{max} =$

55 Hz, desse modo, frequências acima desta não são consideradas mesmo com algumas contribuindo para o valor da amplitude.

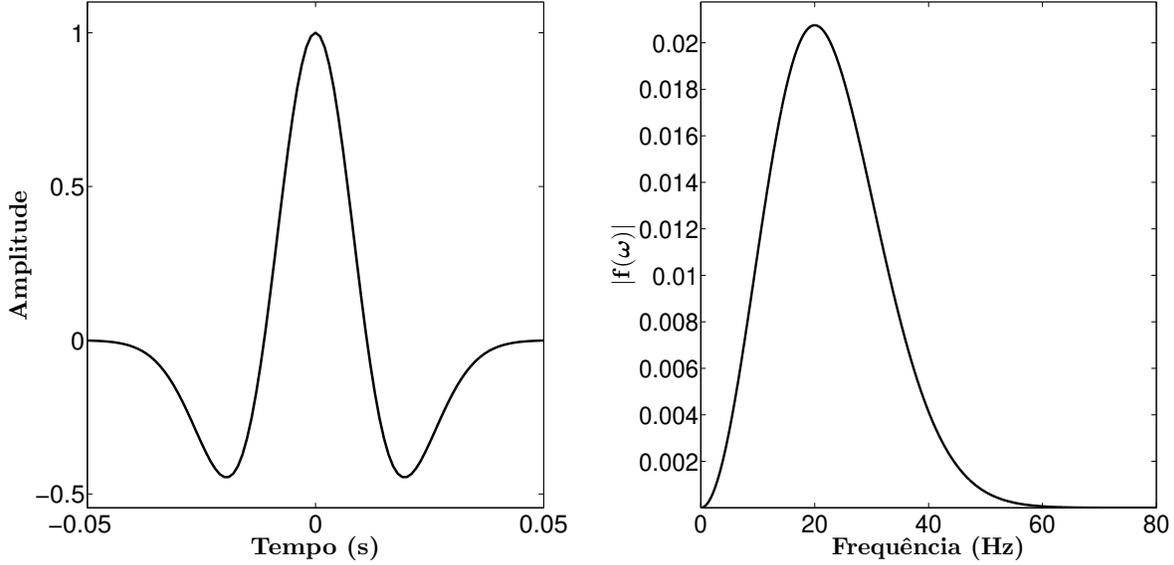


Figura 4.1: Pulso de Ricker no tempo (a esquerda) e na frequência (a direita).

A discretização da fonte dada pela equação (4.1) é dada por

$$F(x_j, t_\ell) = \frac{1}{\Delta x} \delta_{j,j_S} \mathcal{S}(t_\ell) \quad \text{ou} \quad F(x_j, z_k, t_\ell) = \frac{1}{\Delta^2} \delta_{j,j_S} \delta_{k,k_S} \mathcal{S}(t_\ell), \quad (4.3)$$

onde j_S e k_S são os índices da posição da fonte na malha e $\delta_{p,q}$ denota o delta de Kronecker, isto é,

$$\delta_{p,q} = \begin{cases} 1 & \text{se } p = q, \\ 0 & \text{se } p \neq q. \end{cases} \quad (4.4)$$

4.2 Condições Iniciais e de Fronteira

As fórmulas de recursão (3.8) e (3.16) necessitam de valores iniciais para gerar os valores do campo de onda. Por isso, utilizamos a seguinte inicialização

$$u_j^1 = u_j^2 = 0 \quad \text{ou} \quad u_{j,k}^1 = u_{j,k}^2 = 0, \quad (4.5)$$

para todo $j = 0, 1, \dots, J$ e $k = 0, 1, \dots, K$.

As condições de fronteira são tomadas para evitar reflexões indesejadas da borda. Adotamos uma alternativa simples que é considerar uma área de interesse (cor cinza), representada pela Figura 4.2, tal que o tempo de propagação, T , de ida e volta quando a onda reflete na borda preta não chegue na região de interesse. Para o caso bidimensional a ideia é a mesma com uma dimensão a mais.

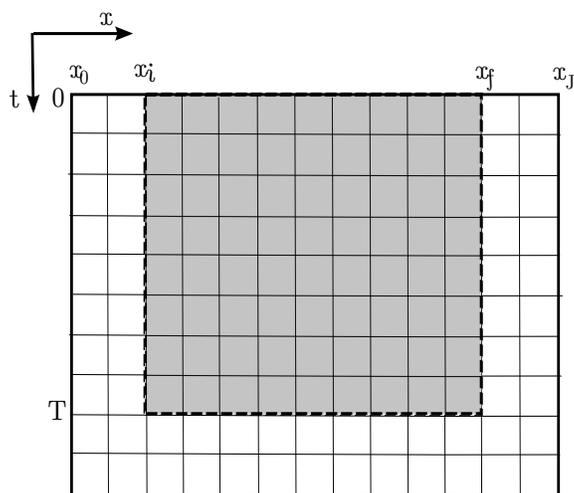


Figura 4.2: Malha computacional.

4.3 Modelo 1

Neste modelo testamos a fórmula recursiva (3.8) para um meio com velocidade constante $c(x) = c_0 = 2.5 \text{ km/s}$, com fonte na posição $x_S = 0$, com um tempo máximo de observação de 1.2 s , com $\Delta x = 16 \text{ m}$, $\Delta t = 3 \text{ ms}$, $\eta = 10^{-3}$ e $M_{min} = 2$. O modelo de velocidade está representado pela Figura 4.3.

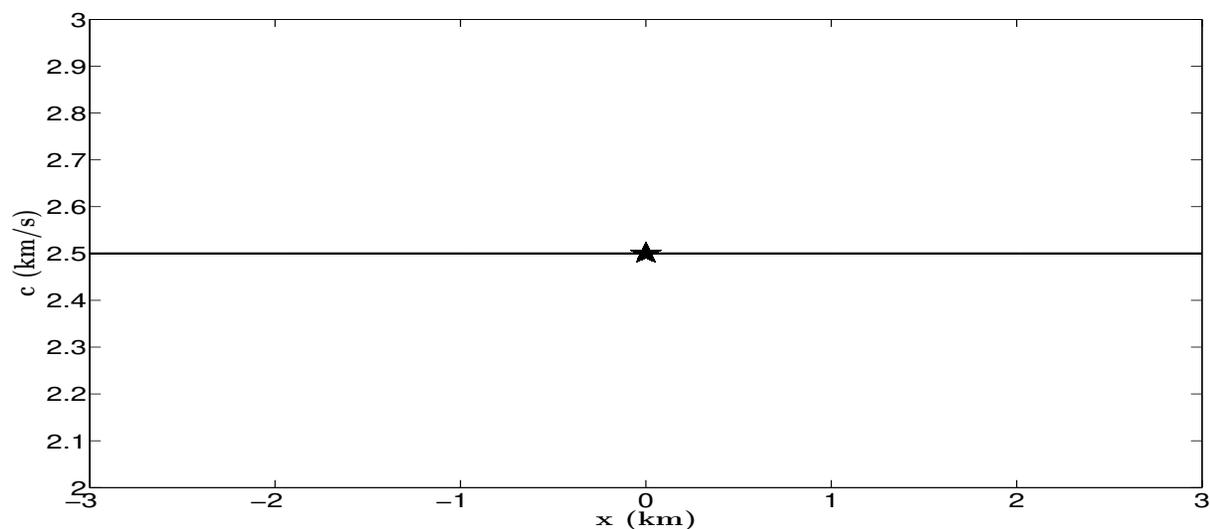


Figura 4.3: Modelo de velocidade onde ★ indica a posição da fonte.

A Figura 4.4 mostra a solução $U(x, t)$ obtida pelo esquema do MDF adaptativo para dois instantes de tempo, onde o comprimento (escolhido de acordo com c_0) foi $M = 31$. A Figura 4.5(a) mostra o sismograma da simulação numérica que contém todos os traços sísmicos, e a Figura 4.5(b) é uma imagem mais detalhada da imagem anterior possuindo alguns traços a cada 100 m , onde observa-se que não há nenhum tipo de reflexão ou transmissão de ondas uma vez que o meio não tem interfaces com velocidades diferentes. Na modelagem sísmica, esse tipo de evento é conhecido como onda direta, que geralmente é caracterizada pelo aspecto linear que aparece no sismograma. Ou seja, os valores das amplitudes devem ser iguais e, com o passar do tempo, elas se propagam em direções opostas com velocidade c_0 . Note que a solução aproximada apresenta essas características. Contudo, a solução exata da equação da onda unidimensional com velocidade constante é dada por

$$U(x, t) = 10\pi(c_0t - |x|)e^{-[20\pi(t-|x|/c_0)]^2}. \quad (4.6)$$

Portanto, podemos comparar a solução (4.6) com a solução obtida pelo esquema do MDF adaptativo com os incrementos de malha já definido anteriormente, que vamos chamar de malha 1. Também comparamos a solução exata com a solução gerada pelo esquema adaptativo para uma malha refinada, que vamos denominar malha 2, que é dada por $\Delta x' = \Delta x/10$ e $\Delta t' = \Delta t/10$. A Figura 4.6(a) mostra que o esquema adaptativo para malha 1 tem uma boa aproximação. Porém, o detalhe mostrado pelas Figuras 4.6(b) e 4.6(c) apresentam uma pequena diferença entre as amplitudes e a fase dos pulsos que se propagam em direções opostas, indicando que a solução tem uma pequena influência da dispersão numérica e da malha, mas que não prejudica na qualidade da solução numérica. A Figura 4.7(a) compara a solução exata com a solução do esquema adaptativo com a malha refinada, onde observa-se que a aproximação é melhor, e pelos detalhes dos pulsos nas Figura 4.7(b) e 4.7(c), podemos ver que as amplitudes e a fase estão melhor aproximadas. Portanto, o MDF adaptativo pode ser muito preciso quando utiliza-se uma malha com passos suficientemente pequeno, de modo que ainda satisfaça os critérios de estabilidade. Veja que, para o esquema adaptativo com a malha refinada, o comprimento do operador da derivada espacial foi menor, $M = 3$, isso ocorre por haver menor influência da dispersão. Ou seja, para um mesmo erro η na fórmula do tempo de propagação, um comprimento menor será exigido. No entanto, a Figura 4.8(a) mostra que o esquema adaptativo com a malha 1 tem um erro de aproximação na ordem de 10^{-3} e a Figura 4.8(b) mostra que o esquema adaptativo com malha refinada tem uma aproximação na ordem de 10^{-4} , ou seja, qualitativamente as duas soluções são muito semelhantes uma vez que a amplitude obtida é de ordem de 10^{-3} . Com isso, podemos afirmar que o esquema do MDF adaptativo consegue representar a propagação de ondas com boa qualidade.

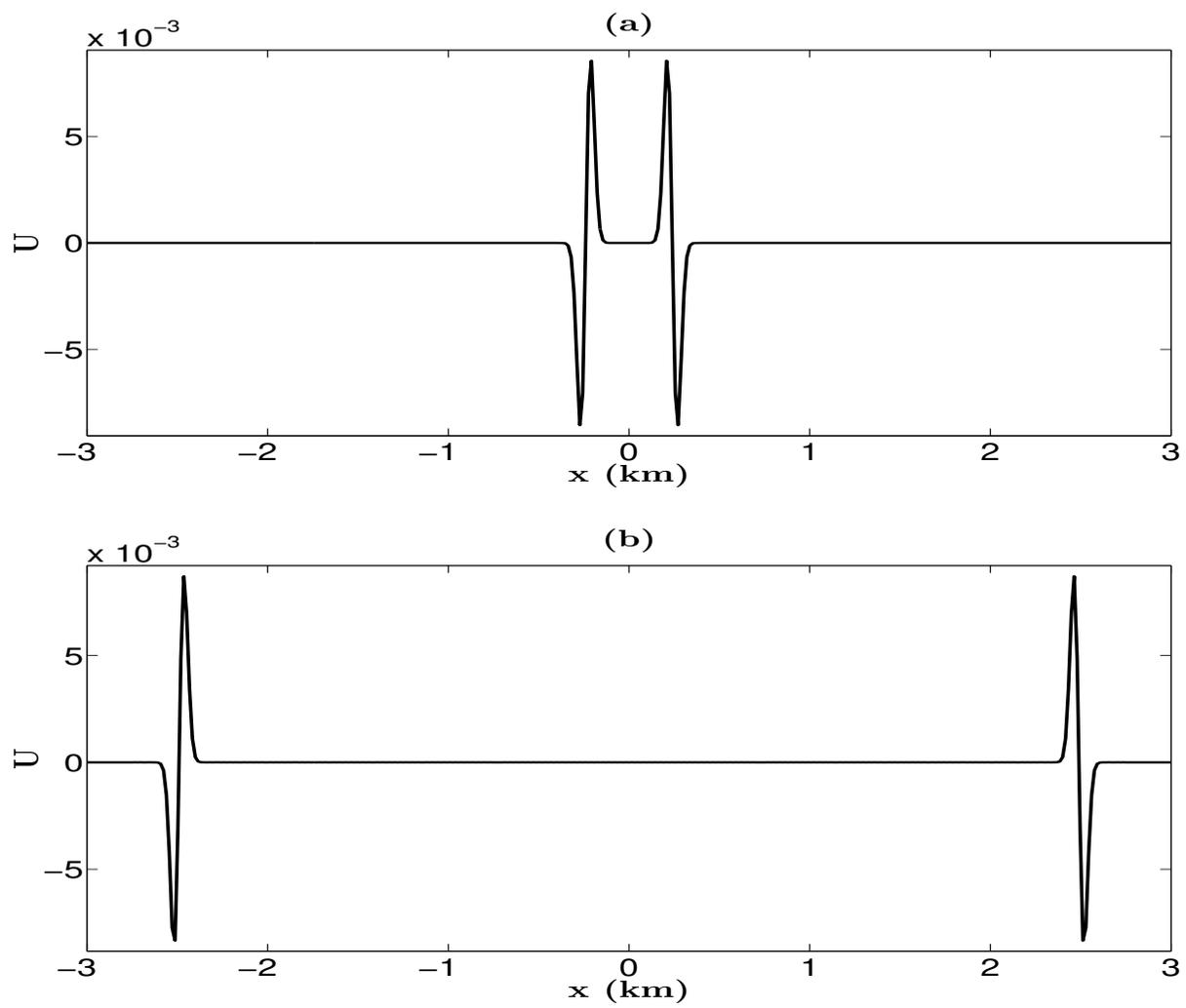


Figura 4.4: Solução $U(x,t)$ obtida com o esquema adaptativo utilizando a malha 1: (a) Para $t = 0.1$ s; (b) Para $t = 1.0$ s.

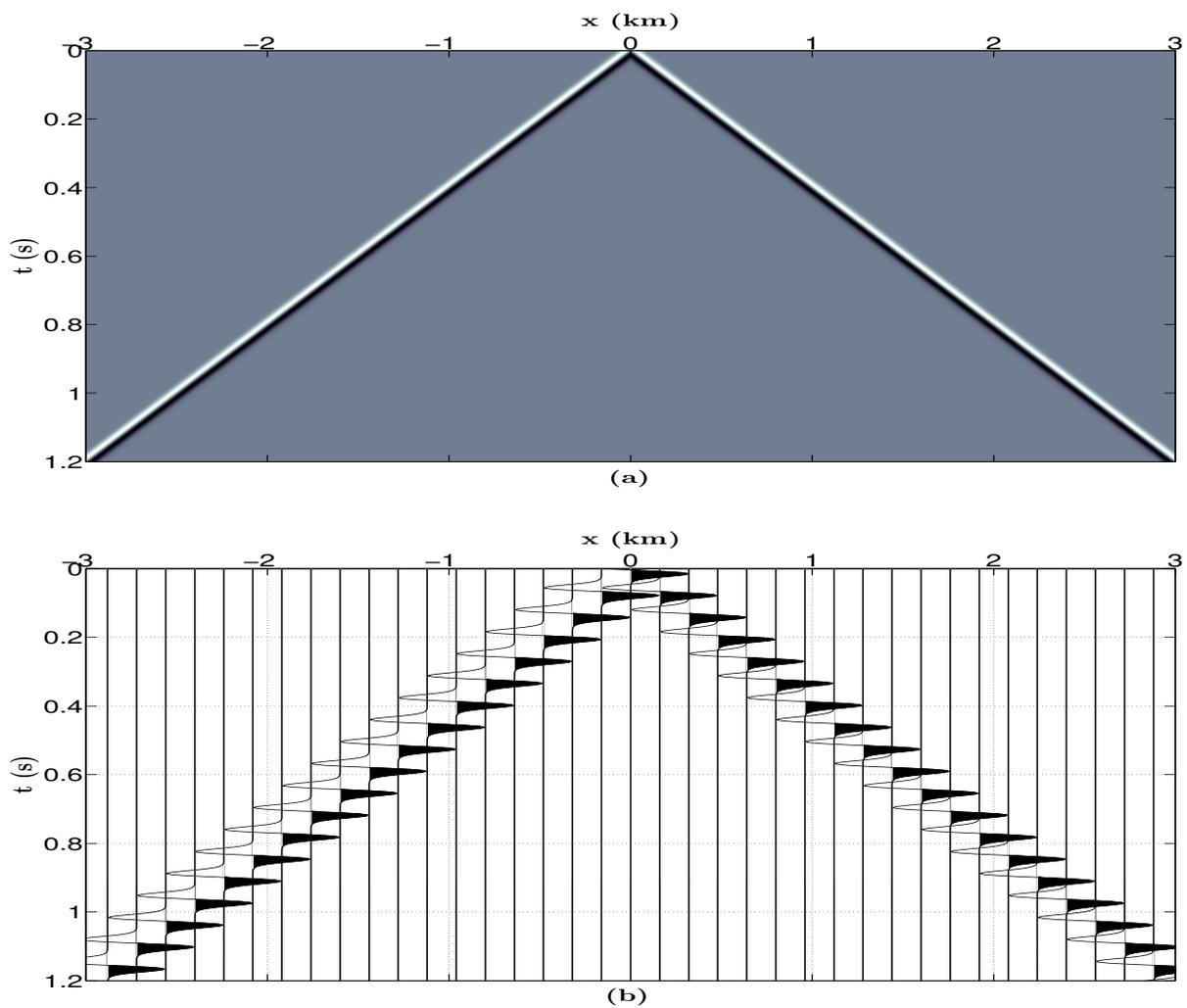


Figura 4.5: (a) Sismograma da simulação da propagação de ondas. (b) Simograma com traços a cada 100 m. Obtido pelo campo de onda do esquema adaptativo para malha 1.

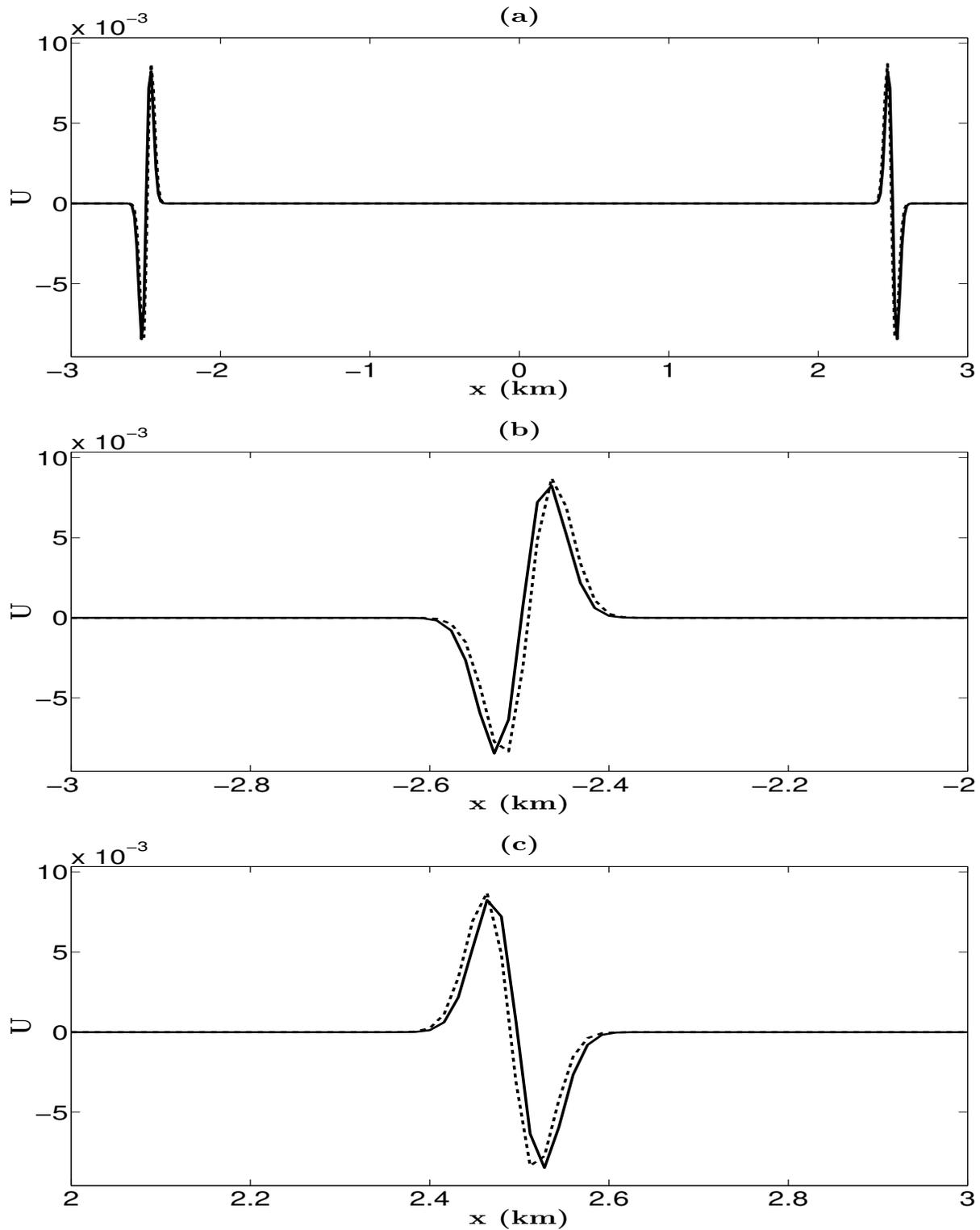


Figura 4.6: (a) Comparação da solução exata (linha sólida) com a solução $U(x, t)$ obtida pelo esquema adaptativo para malha 1 (linha tracejada) com $M = 31$. (b) Detalhe do pulso que se propaga a esquerda. (c) Detalhe do pulso que se propaga a direita.

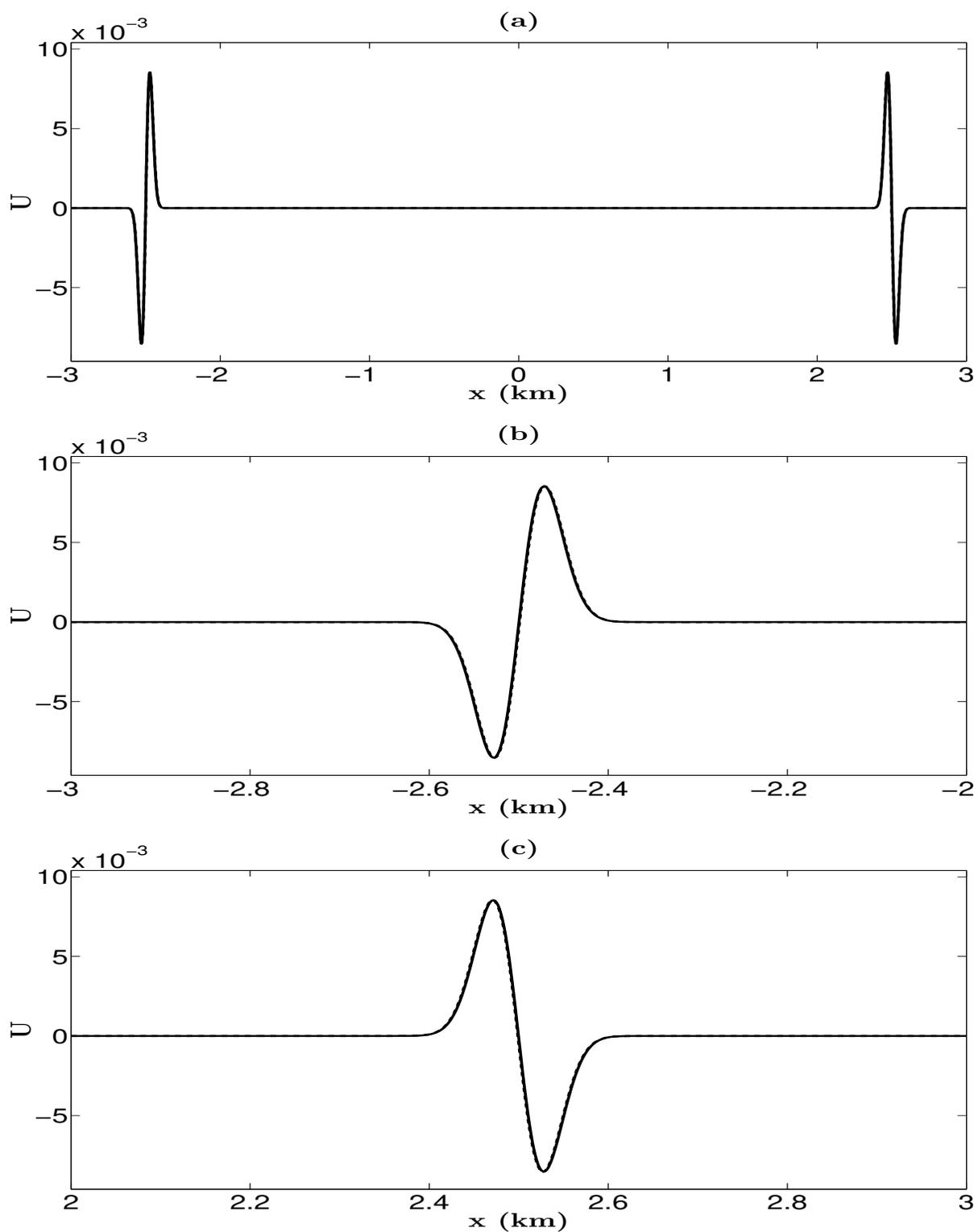


Figura 4.7: (a) Comparação da solução exata (linha sólida) com a solução $U(x,t)$ obtida pelo esquema adaptativo para malha 2 (linha tracejada) com $M = 3$. (b) Detalhe do pulso que se propaga a esquerda. (c) Detalhe do pulso que se propaga a direita.

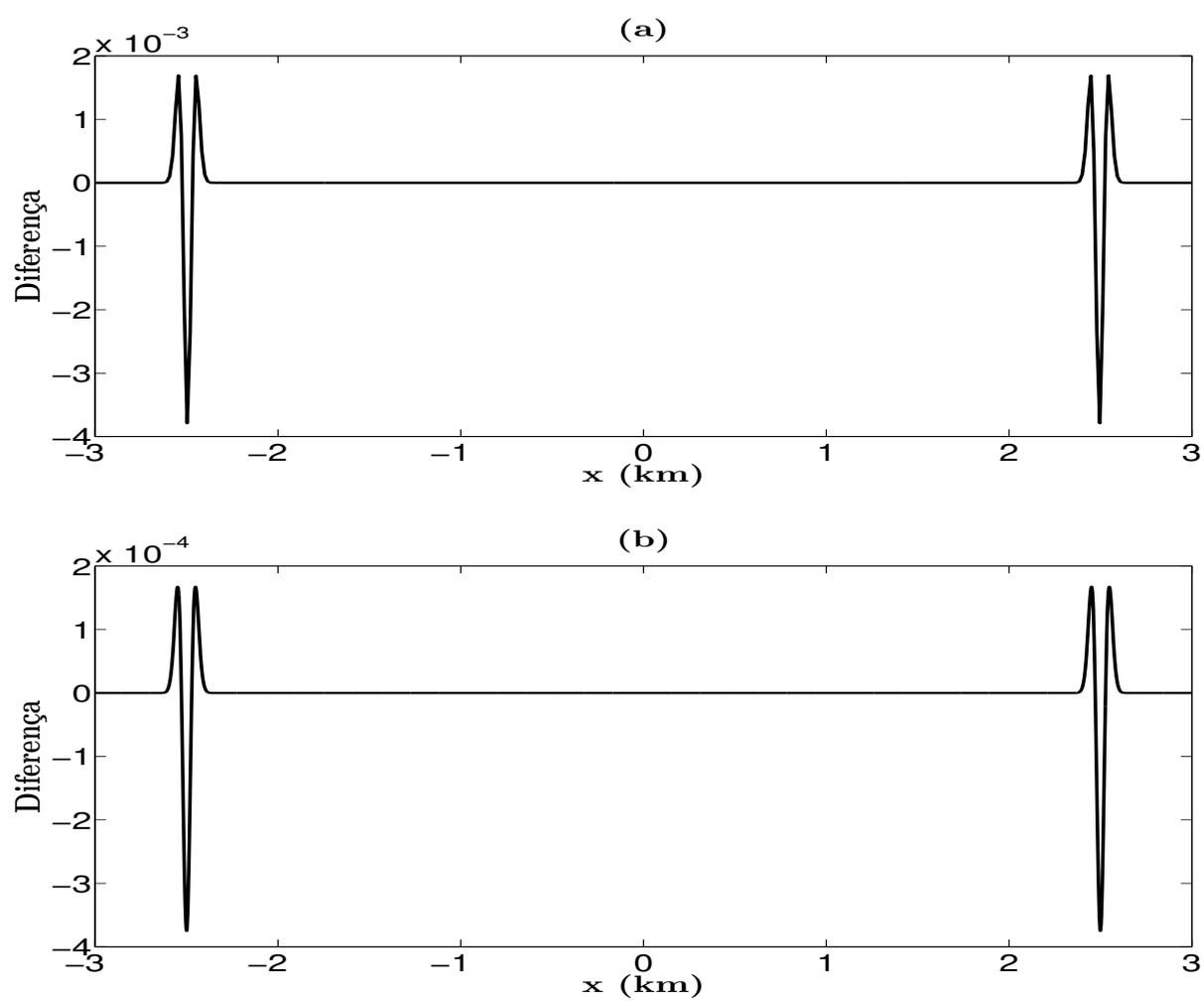


Figura 4.8: Diferença entre as soluções exata e aproximada obtida pelo esquema adaptativo: (a) Para malha 1; (b) Para malha 2.

4.4 Modelo 2

Neste segundo modelo unidimensional, a velocidade será variável, onde a menor velocidade é $c_{min} = 1.5 \text{ km/s}$ e a maior é $c_{max} = 4 \text{ km/s}$, com a fonte na origem. A Figura 4.9 exibe o perfil de velocidade que foi utilizado e mostra um modelo com 5 interfaces. Os parâmetros para iniciar a simulação foram $\Delta x = 10 \text{ m}$, $\Delta t = 1 \text{ ms}$, $M_{min} = 2$ e $\eta = 10^{-3}$. Com uma malha com distância total de 8 km , onde a região de interesse teve uma distância de 6 km . Os testes foram feitos utilizando os esquemas adaptativo, longo e curto. Sendo que, o esquema longo tem o comprimento baseado na menor velocidade e o esquema curto tem o comprimento dado pelo M_{min} . O tempo máximo de propagação foi de 1.2 s , que foi suficiente para não apresentar reflexões da borda na região de interesse da propagação. As Figuras 4.10 à 4.15 exibem os resultados da propagação de ondas para alguns instantâneos (campo de ondas em um tempo fixo) onde, em (a) a solução é obtida pelo esquema adaptativo; em (b) pelo esquema longo e em (c) pelo esquema curto. Podemos observar ao passo do tempo, que as amplitudes do pulso vão se modificando e isso se deve a atuação dos coeficientes de reflexão que é responsável pela menor amplitude da onda refletida em relação à onda transmitida, e pela mudança do comprimento do pulso (e inversão da polaridade) depois que atravessa a interface. Além disso, já podemos ver que as soluções obtidas pelos esquemas adaptativo e longo parecem ser semelhantes, ao contrário do que é observado para a solução obtida pelo esquema curto que, no decorrer do tempo, apresenta muitas oscilações causada pela dispersão numérica. As Figuras 4.16 e 4.17 representam o sismograma da propagação de ondas em que, (a) representa o simograma gerado pelo esquema do MDF adaptativo; em (b) gerado pelo esquema com o MDF longo; e em (c) gerado com o esquema do MDF curto. No qual, a Figura 4.16 contém todos os traços sísmicos e a Figura 4.17 contém traços a cada 250 m .

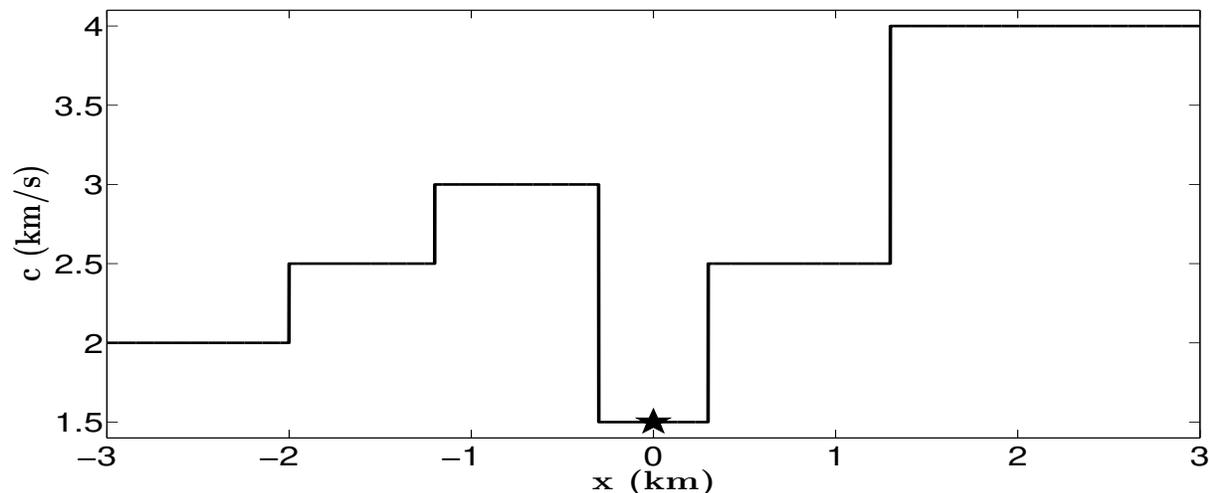


Figura 4.9: Modelo de velocidade unidimensional, onde ★ representa a posição da fonte.

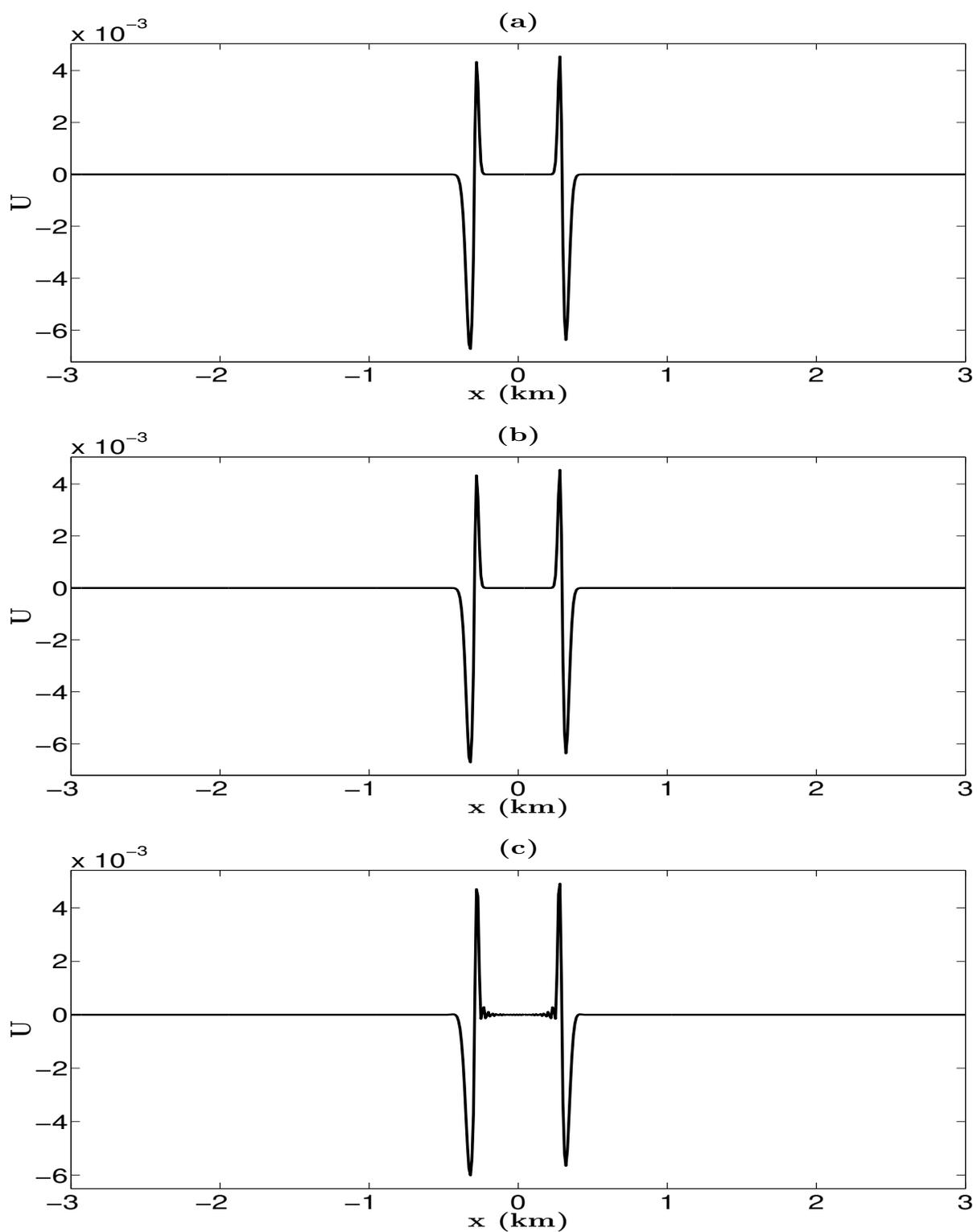


Figura 4.10: Solução $U(x, t)$ para $t = 0.2$ s obtida pelos esquemas: (a) Adaptativo; (b) Longo; (c) Curto.

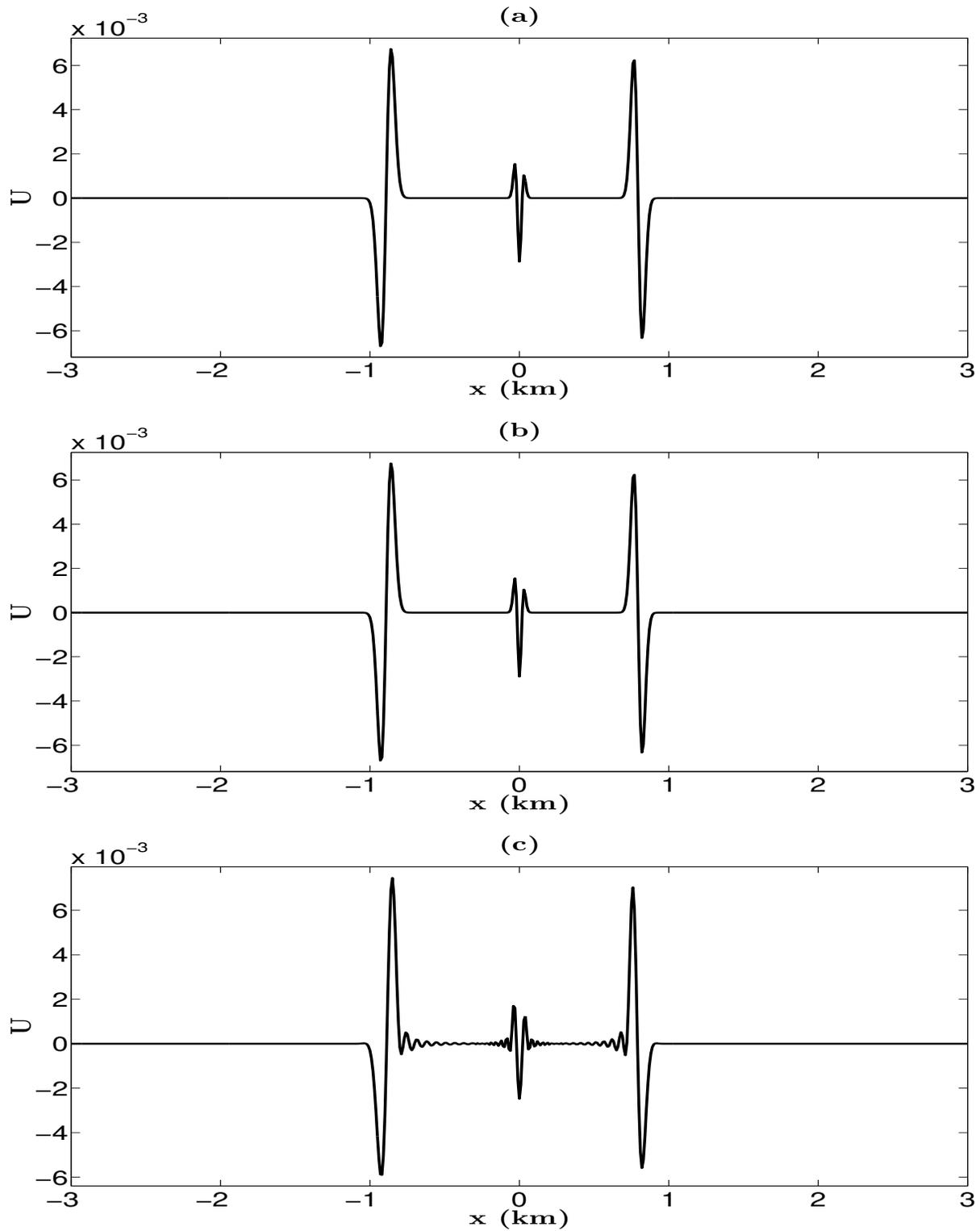


Figura 4.11: Solução $U(x, t)$ para $t = 0.4$ s obtida pelos esquemas: (a) Adaptativo; (b) Longo; (c) Curto.

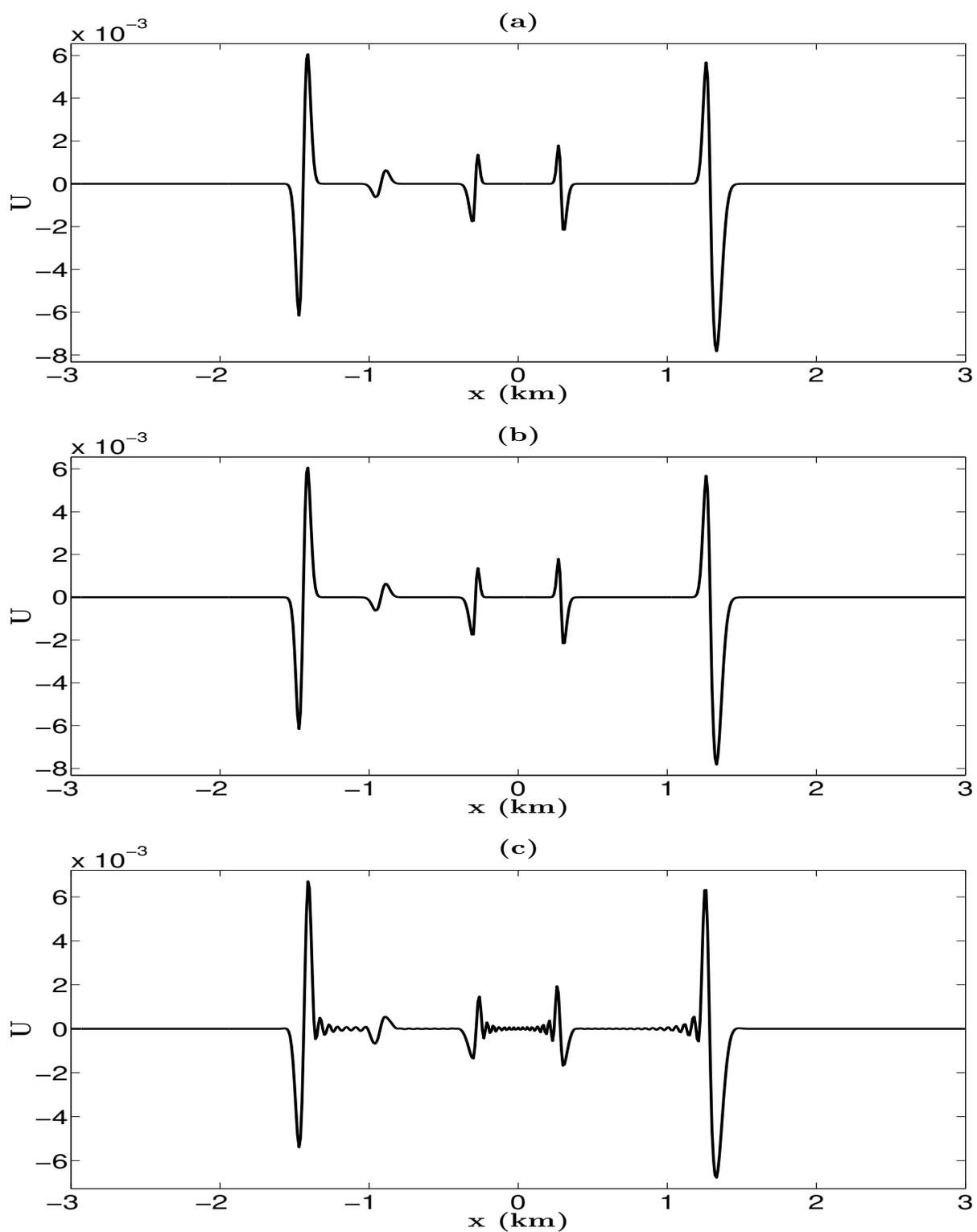


Figura 4.12: Solução $U(x, t)$ para $t = 0.6$ s obtida pelos esquemas: (a) Adaptativo; (b) Longo; (c) Curto.

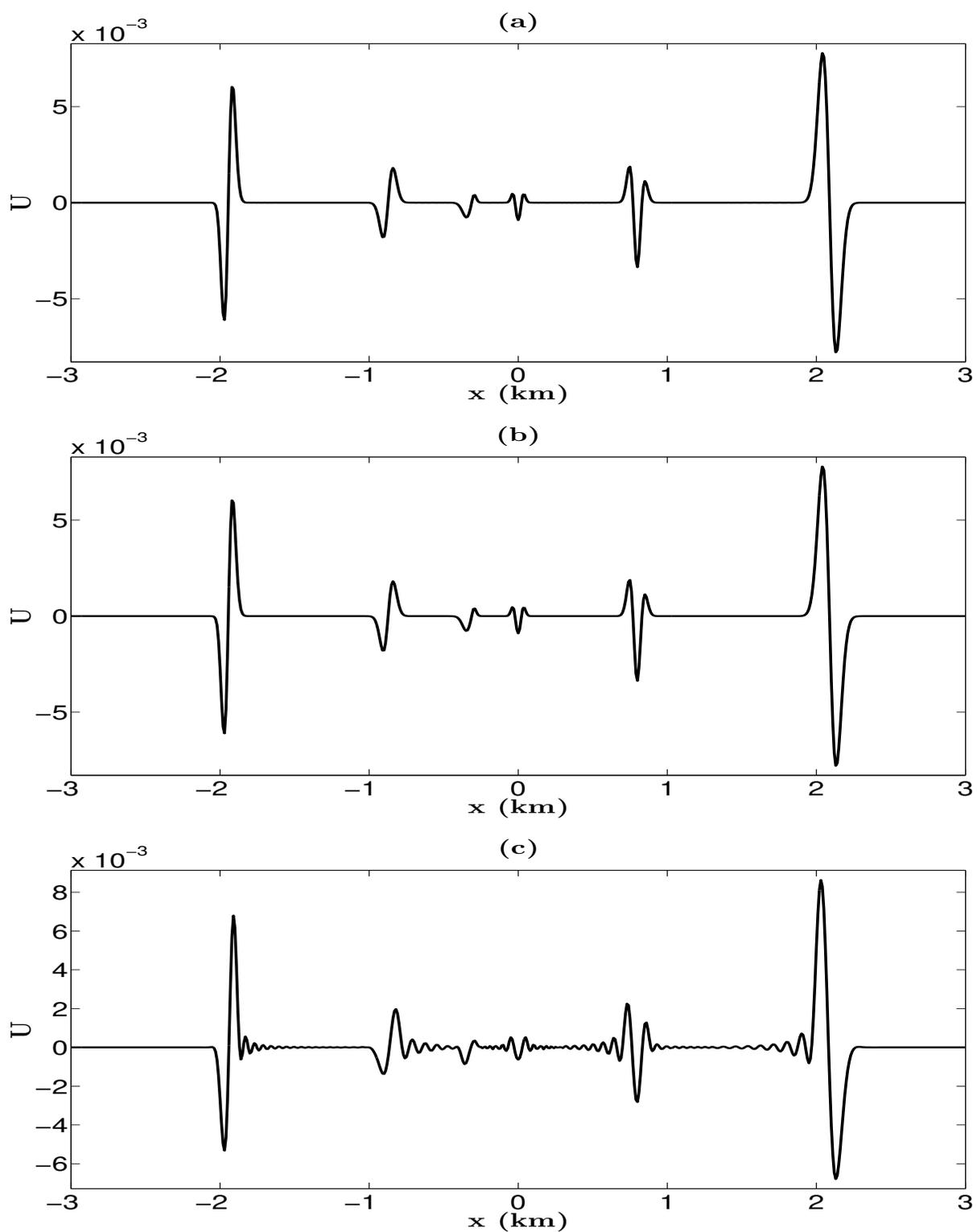


Figura 4.13: Solução $U(x, t)$ para $t = 0.8$ s obtida pelos esquemas: (a) Adaptativo; (b) Longo; (c) Curto.

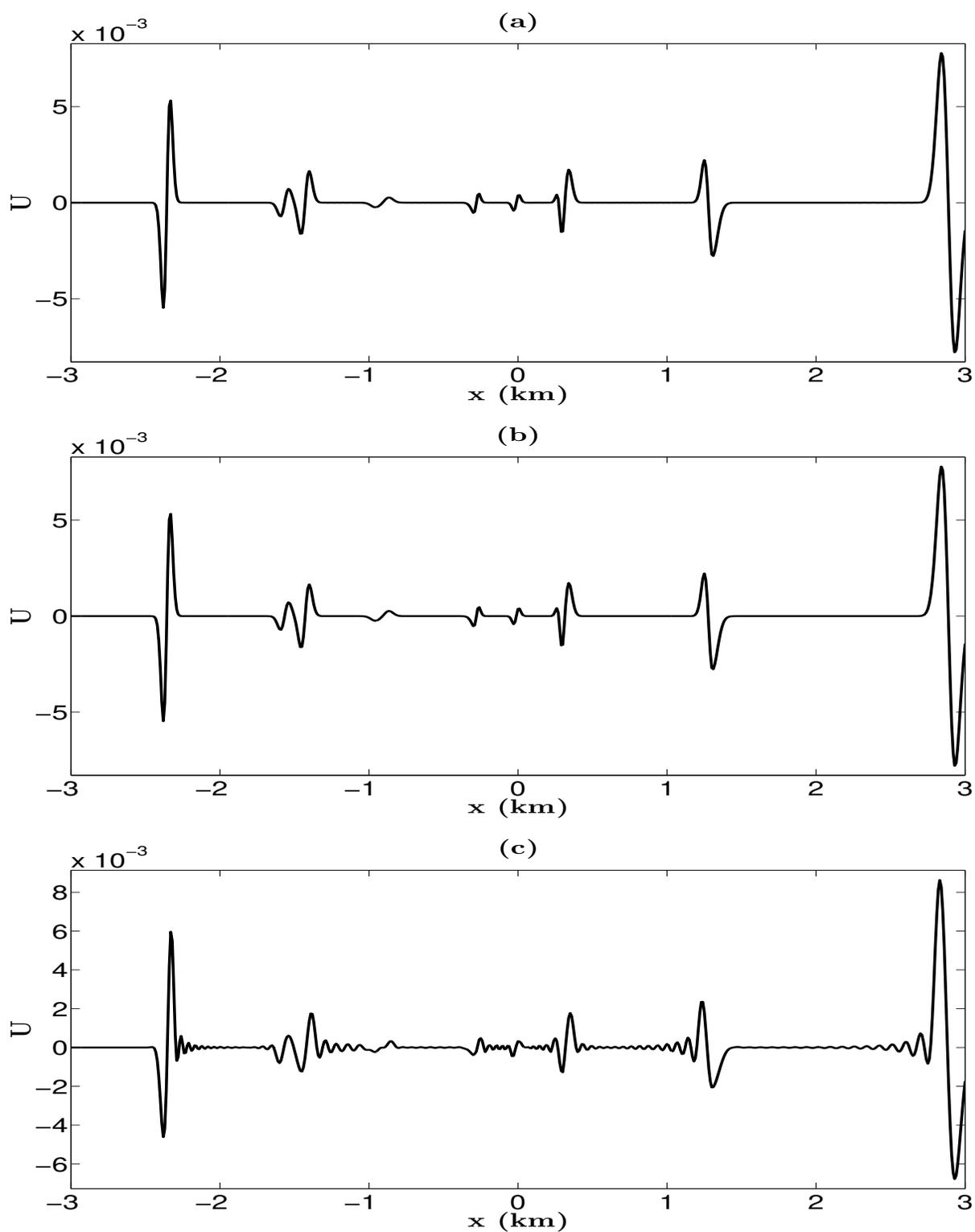


Figura 4.14: Solução $U(x, t)$ para $t = 1.0$ s obtida pelos esquemas: (a) Adaptativo; (b) Longo; (c) Curto.

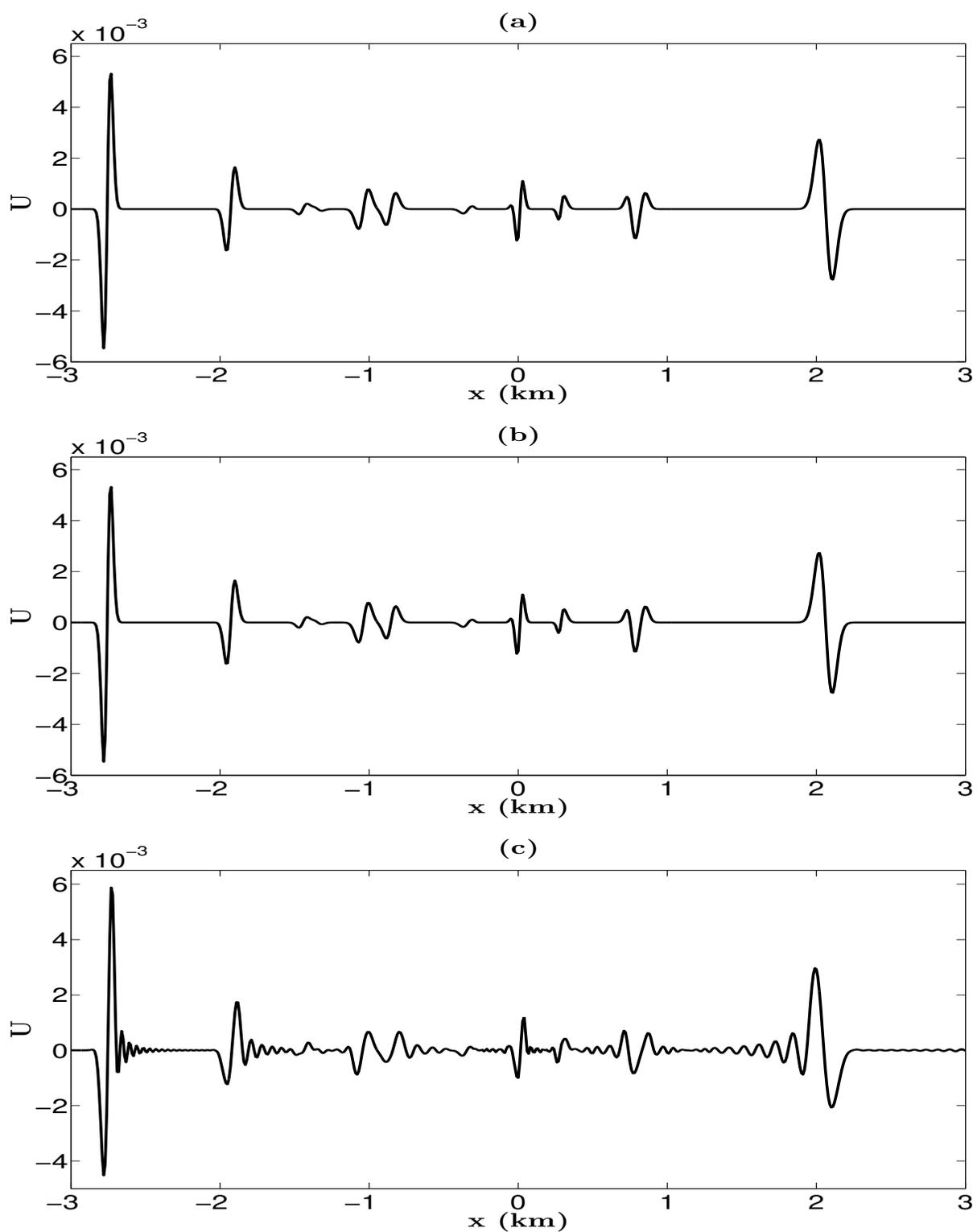


Figura 4.15: Solução $U(x, t)$ para $t = 1.2$ s obtida pelos esquemas: (a) Adaptativo; (b) Longo; (c) Curto.

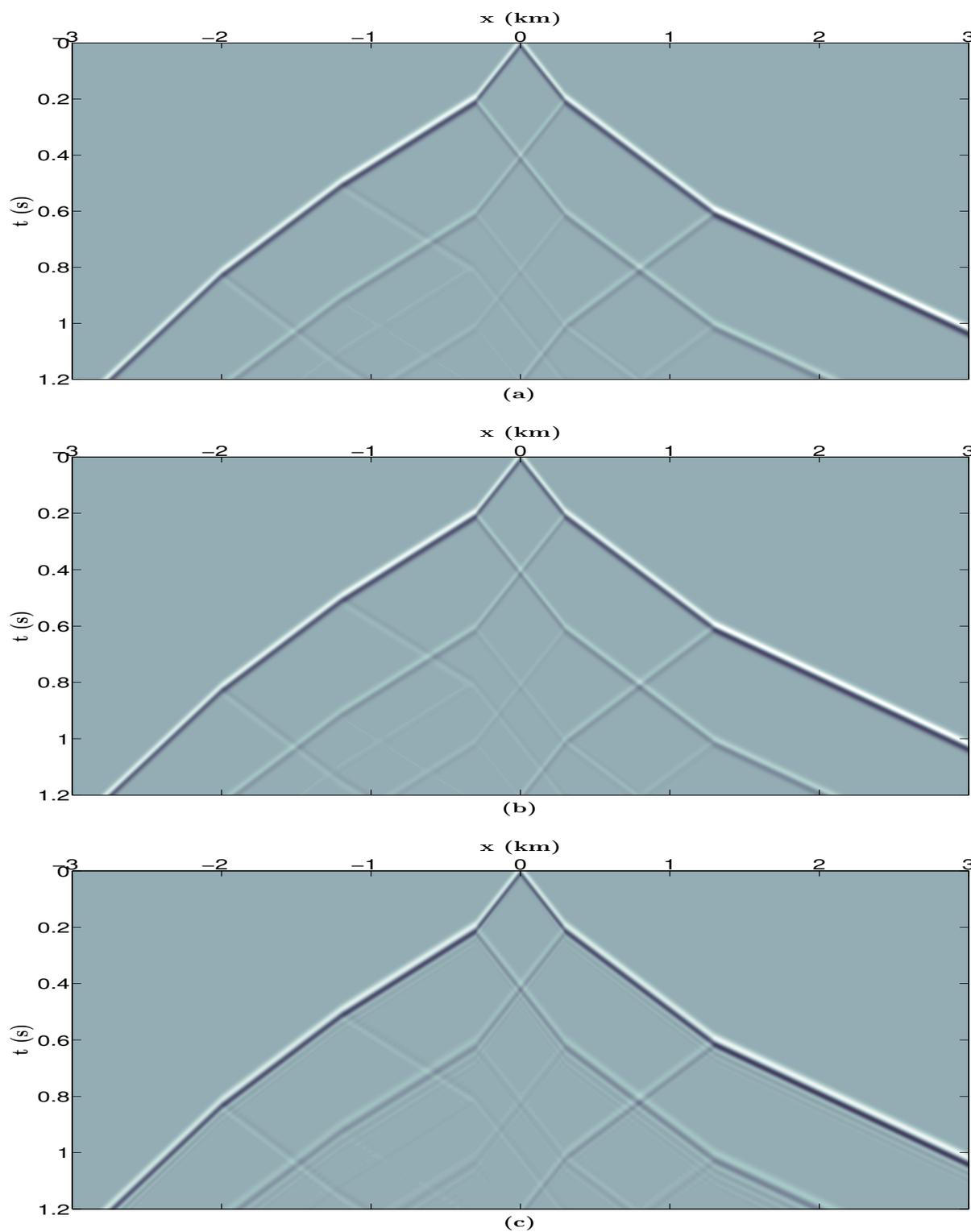


Figura 4.16: Sismograma da simulação obtido pelos esquemas: (a) Adaptativo; (b) Longo; (c) Curto.

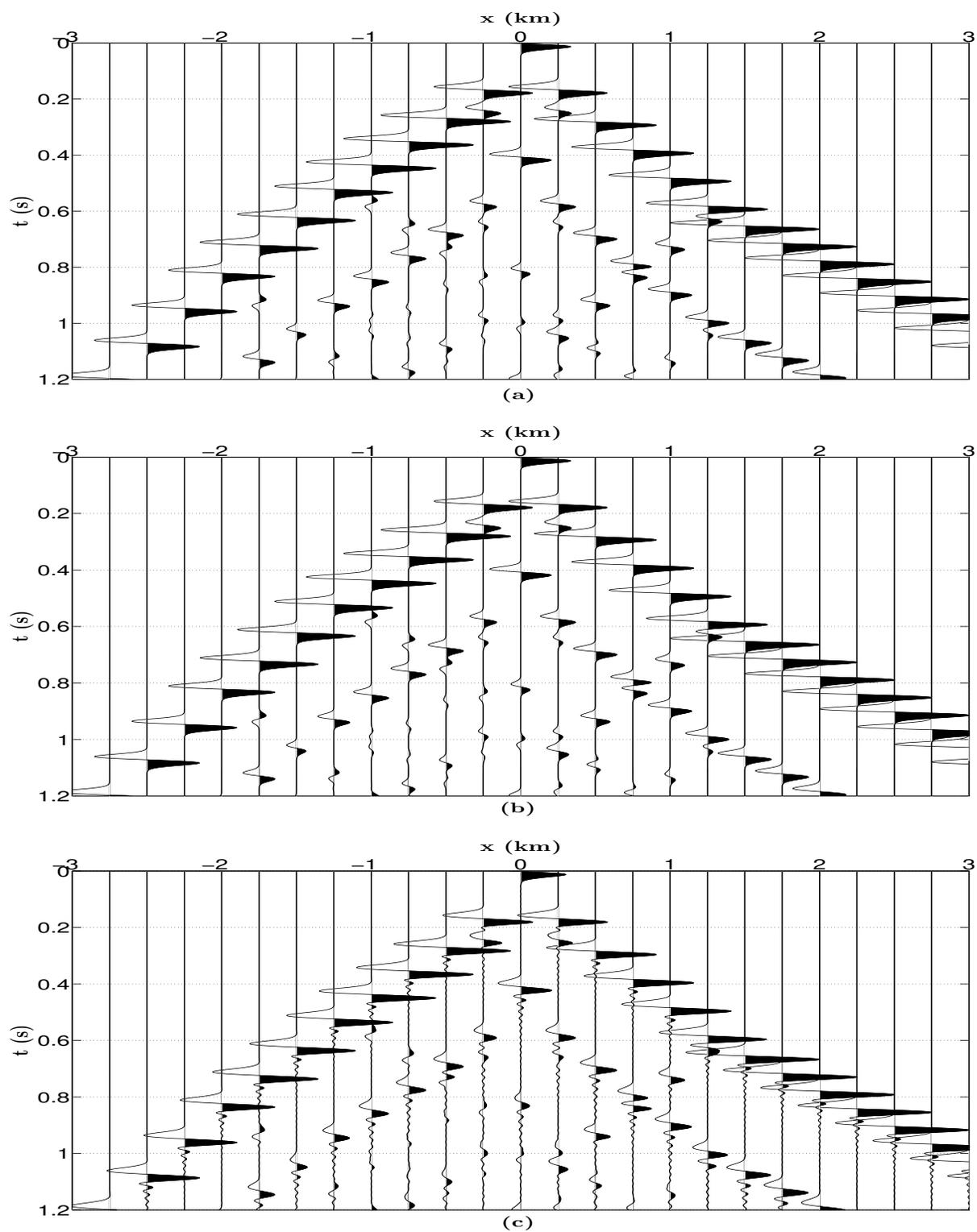


Figura 4.17: Sismograma contendo traços sísmicos a cada 250 m obtido pelos esquemas: (a) Adaptativo; (b) Longo; (c) Curto.

A Figura 4.18 mostra a variação dos comprimentos, escolhidos pelo método, em função da distância. Observa-se que os comprimentos escolhidos são inversamente proporcionais à velocidade, isto é, para as velocidades 1.5 km/s , 2 km/s , 2.5 km/s , 3 km/s e 4 km/s foram encontrados os seguintes operadores $M = 38, 15, 10, 8$ e 6 , respectivamente. Ou seja, o esquema longo teve um comprimento de $M = 38$. Notamos que a menor velocidade contribui para um valor muito alto do comprimento em comparação com uma velocidade mediana, 3 km/s , onde o comprimento foi de $M = 9$. O valor da frequência máxima, também, contribui para ter comprimentos muitos longos. Pois, quanto maior essa frequência, maiores são os valores de γ (números de onda), desse modo, nas regiões de baixa velocidade um maior comprimento vai ser necessário para satisfazer a desigualdade (3.7). Um outro fator que contribui para o aumento do valor dos comprimentos é dado pelo parâmetro η que é o erro associado ao tempo de propagação a cada ponto da malha.

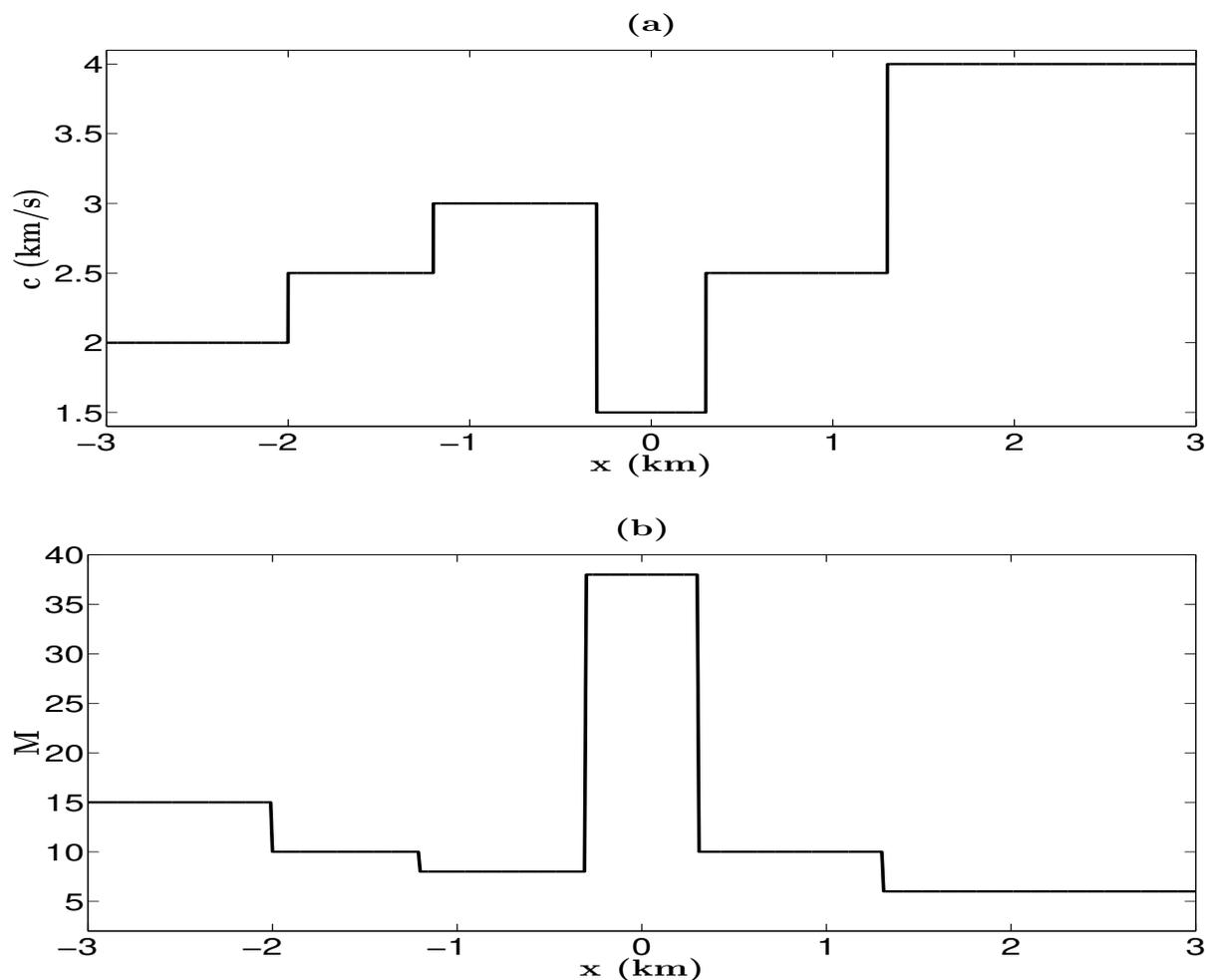


Figura 4.18: (a) Velocidade em função da distância. (b) Variação dos comprimentos em função da distância.

Para analisar com mais detalhe a solução $U(x, t)$ obtida pelo esquema do MDF adaptativo, comparamos as soluções obtidas pelos diferentes esquemas para um tempo de propagação $t = 0.8$ s. Onde tomamos como referência de uma boa solução o esquema do MDF longo, que mantém maior precisão numérica, uma vez que é simulada com um comprimento muito longo. A Figura 4.19(a) compara $U(x, t = 0.8)$ obtida pelos esquemas adaptativo e longo, mostrando que a solução do esquema adaptativo tem uma precisão semelhante à solução do esquema longo, onde não há ocorrência de problemas devido à dispersão. A Figura 4.19(b) compara as soluções dos esquemas adaptativo e curto, onde visivelmente nota-se que a solução obtida pelo esquema curto não apresenta a mesma qualidade da solução do esquema adaptativo, pois existem muitas oscilações do pulso por causa da dispersão numérica. A Figura 4.19(c) compara as soluções dos esquemas longo e curto, onde pode-se afirmar que de fato a solução do esquema curto não apresenta uma boa qualidade. Entretanto, a Figura 4.20(a) mostra que, a diferença entre as soluções dos esquemas adaptativo e longo tem um erro na ordem de 10^{-5} , já a diferença entre as soluções dos esquemas longo e curto e dos esquemas adaptativo e curto apresentam uma diferença na ordem de 10^{-3} como pode ser observado pelas Figuras 4.20(b) e 4.20(c), respectivamente. Ou seja, uma diferença de duas casas decimais que pode parecer não muito significativa. No entanto, pela qualidade da propagação, a solução obtida pelos esquemas adaptativo ou longo interpretam melhor os campos de ondas para o modelo de velocidade proposto.

Portanto, o esquema do MDF adaptativo obtém uma boa solução com uma precisão semelhante ao esquema do MDF longo. Porém, o esquema adaptativo tem a vantagem de calcular menos operações, na parte recursiva do método (3.8), se comparado com o esquema longo. Para notar essa diferença comparamos os métodos em termos do tempo computacional, inclusive com o esquema curto, que mede o tempo para realizar todas as iterações da fórmula recursiva inclusive o tempo necessário para obter os operadores. A Figura 4.21 mostra a comparação desses tempos para diferentes valores de η , com $f_{max} = 55$ Hz. Os resultados que foram analisados nessa seção foram simulados para $\eta = 10^{-3}$, ou seja, o esquema adaptativo teve uma redução de cerca de 51% em relação ao esquema longo. O esquema curto teve uma redução de 80% em relação ao esquema longo. Ou seja, o custo benefício do esquema adaptativo é maior com relação ao do esquema curto, pois mesmo com um “pequeno” tempo excedente a solução obtida é mais precisa.

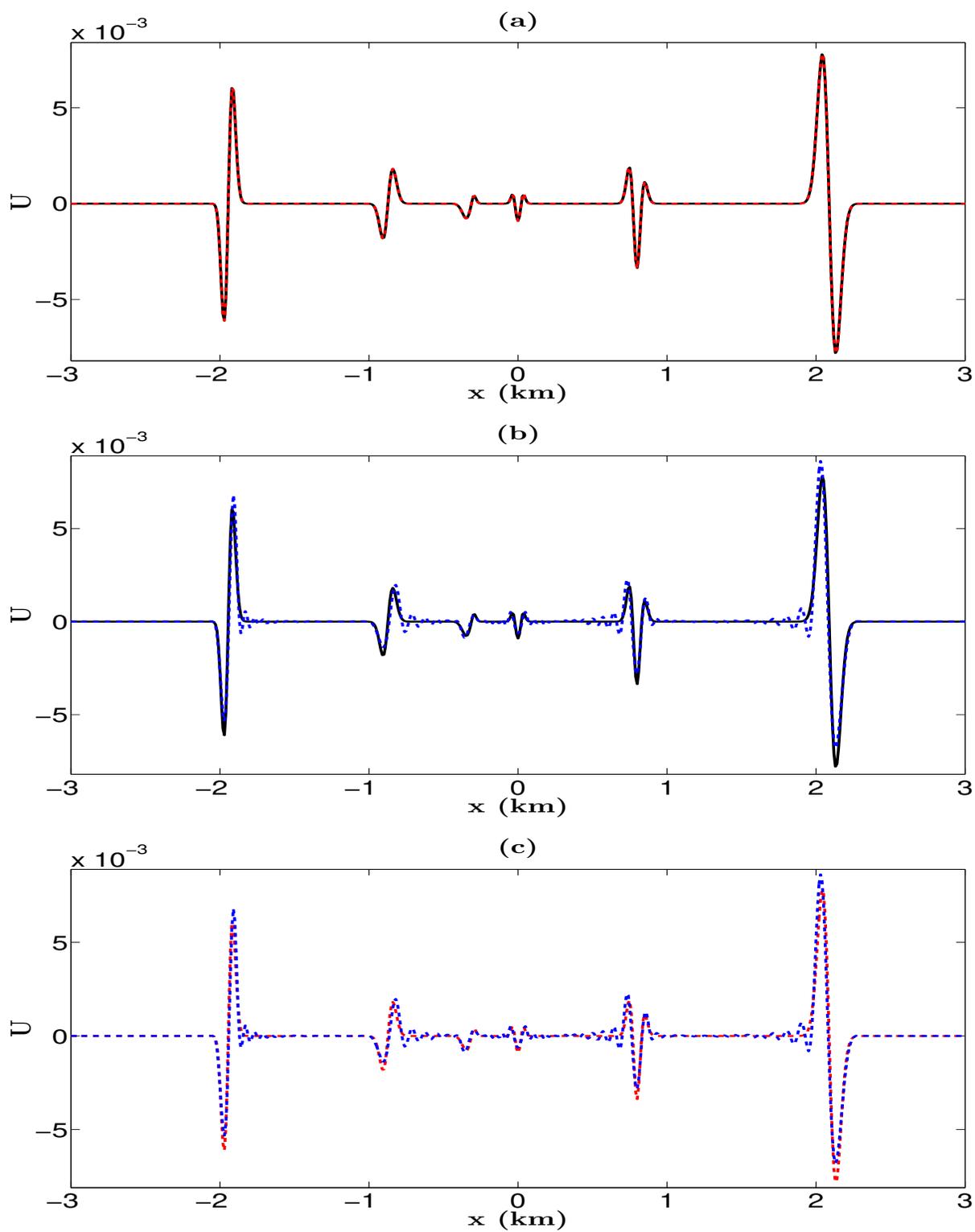


Figura 4.19: Comparação de $U(x, t = 0.8)$ entre os esquemas: (a) Adaptativo (linha sólida) e longo (linha vermelha tracejada); (b) Adaptativo (linha sólida) e curto (linha azul tracejada); (c) Longo (linha vermelha tracejada) e curto (linha azul tracejada).

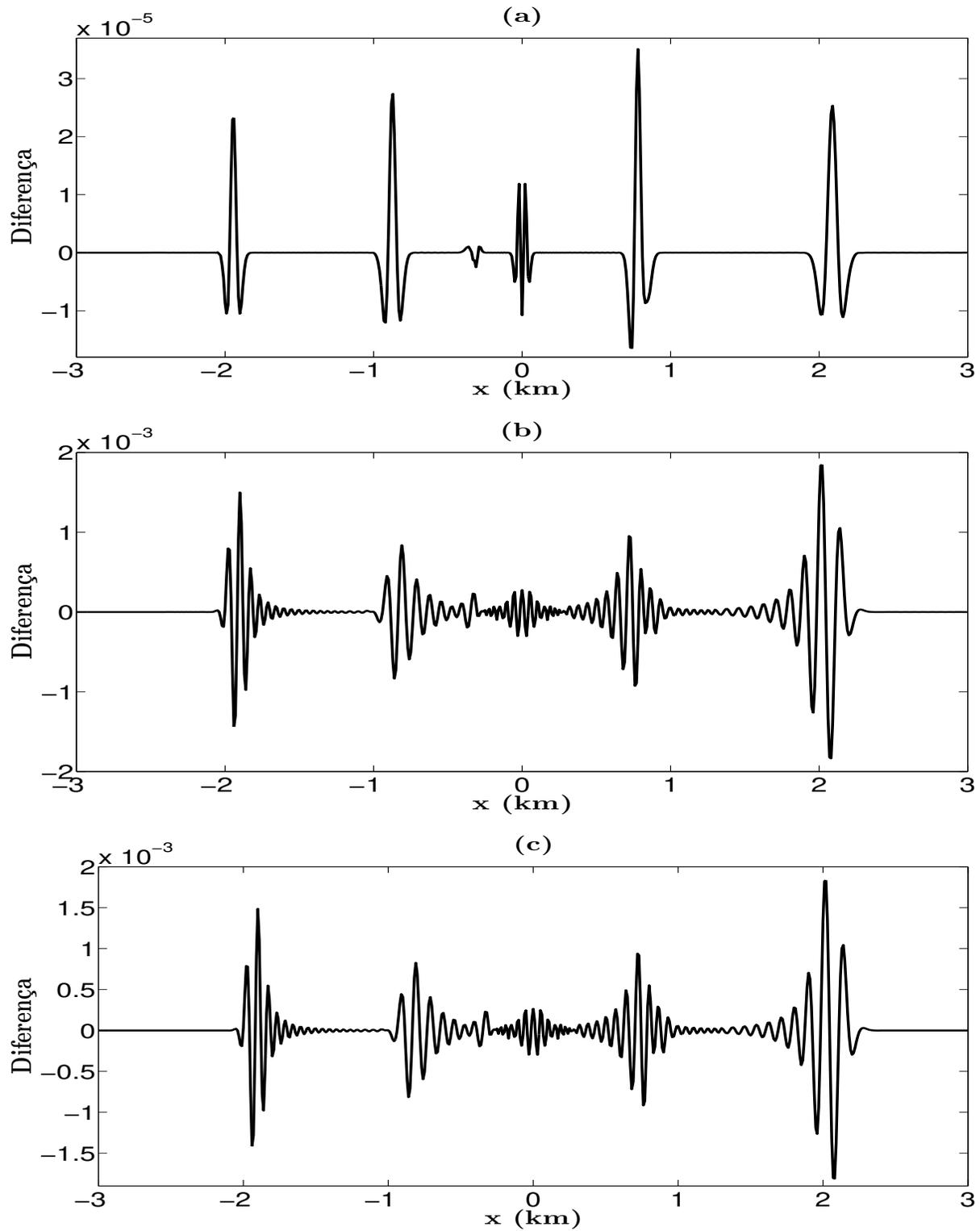


Figura 4.20: Diferença de $U(x, t = 0.8)$ entre os esquemas: (a) Adaptativo e longo; (b) Adaptativo e curto; (c) Longo e curto.

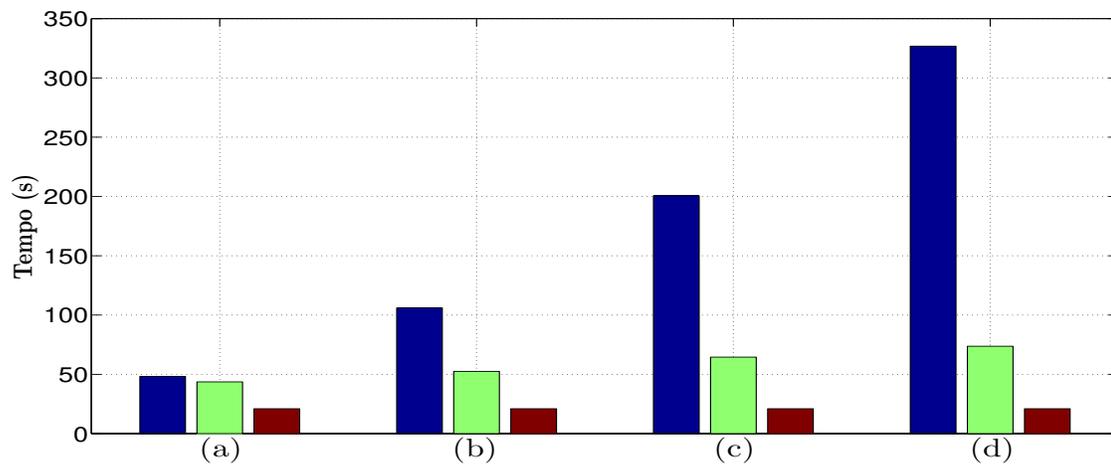


Figura 4.21: Duração de 2399 iterações de tempo na fórmula recursiva para os esquemas: longo (barra azul), adaptativo (barra verde) e curto (barra vermelha); (a) Para $\eta = 10^{-1}$; (b) Para $\eta = 10^{-3}$; (c) Para $\eta = 10^{-5}$; (d) Para $\eta = 10^{-7}$.

4.5 Modelo 3

No Modelo 3 iremos testar o esquema do MDF adaptativo para o caso de velocidade bidimensional, que está representado pela Figura 4.22. O modelo contém dois meios separados por uma interface localizada a 500 m de profundidade. Os parâmetros iniciais para gerar o campo de ondas bidimensional são dados por $\Delta = 10\text{ m}$, $\Delta t = 1\text{ ms}$, $\eta = 10^{-5}$ e $M_{min} = 2$. A fonte foi posicionada em $(0, 0)$. A malha utilizada teve uma distância de 5 km para os dois eixos espaciais, x e z , onde a região de interesse teve uma distância de 4 km para os mesmos eixos. O tempo máximo de observação foi de 1 s . As Figuras 4.23 à 4.27 mostram os instantâneos da solução da equação da onda para os diferentes esquemas utilizados. Podemos observar que as soluções dos esquemas adaptativo e longo são semelhantes. A solução do esquema curto sofre efeitos da dispersão numérica, que modificam os valores da amplitude ao longo da propagação. Observa-se que nos tempos iniciais $t = 0.1\text{ s}$, 0.2 s , Figura 4.23, e $t = 0.3\text{ s}$, Figura 4.24(a),(c) e (e), o campo de onda assume uma geometria de uma circunferência indicando que a simulação está sendo coerente com a teoria de propagação de ondas, onde para uma velocidade constante, sabe-se que as frentes de ondas assumem essa geometria. Fisicamente, isso pode ser visto ao atirar uma pequena pedra (a fonte) num lago onde, para condições ideais, vamos observar o mesmo efeito (geometria). Observam-se, também, os efeitos causados pelo fato do modelo ter uma interface, isto é, amplitudes menores quando há reflexão e transmissão devido ao fator dos coeficientes de reflexão, mudança lateral da amplitude devido a variação dos coeficientes com ângulo de incidência e a mudança do comprimento efetivo do pulso depois que atravessa a interface devido a diferença entre as duas velocidades do modelo.

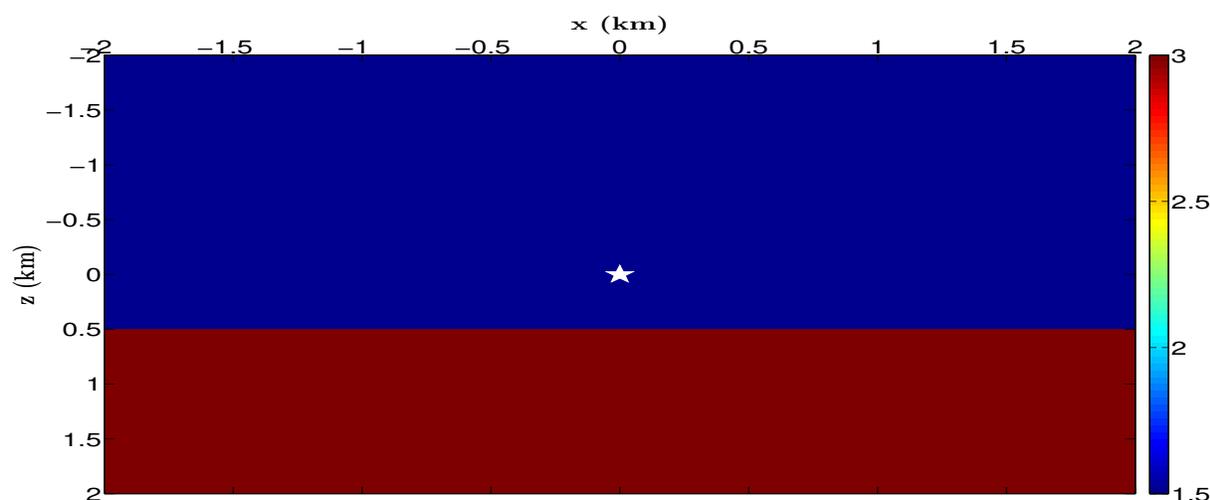


Figura 4.22: Modelo de velocidade, com a fonte representada por ★, onde a cor azul representa uma velocidade de 1.5 km/s e a vermelha uma velocidade de 3 km/s .

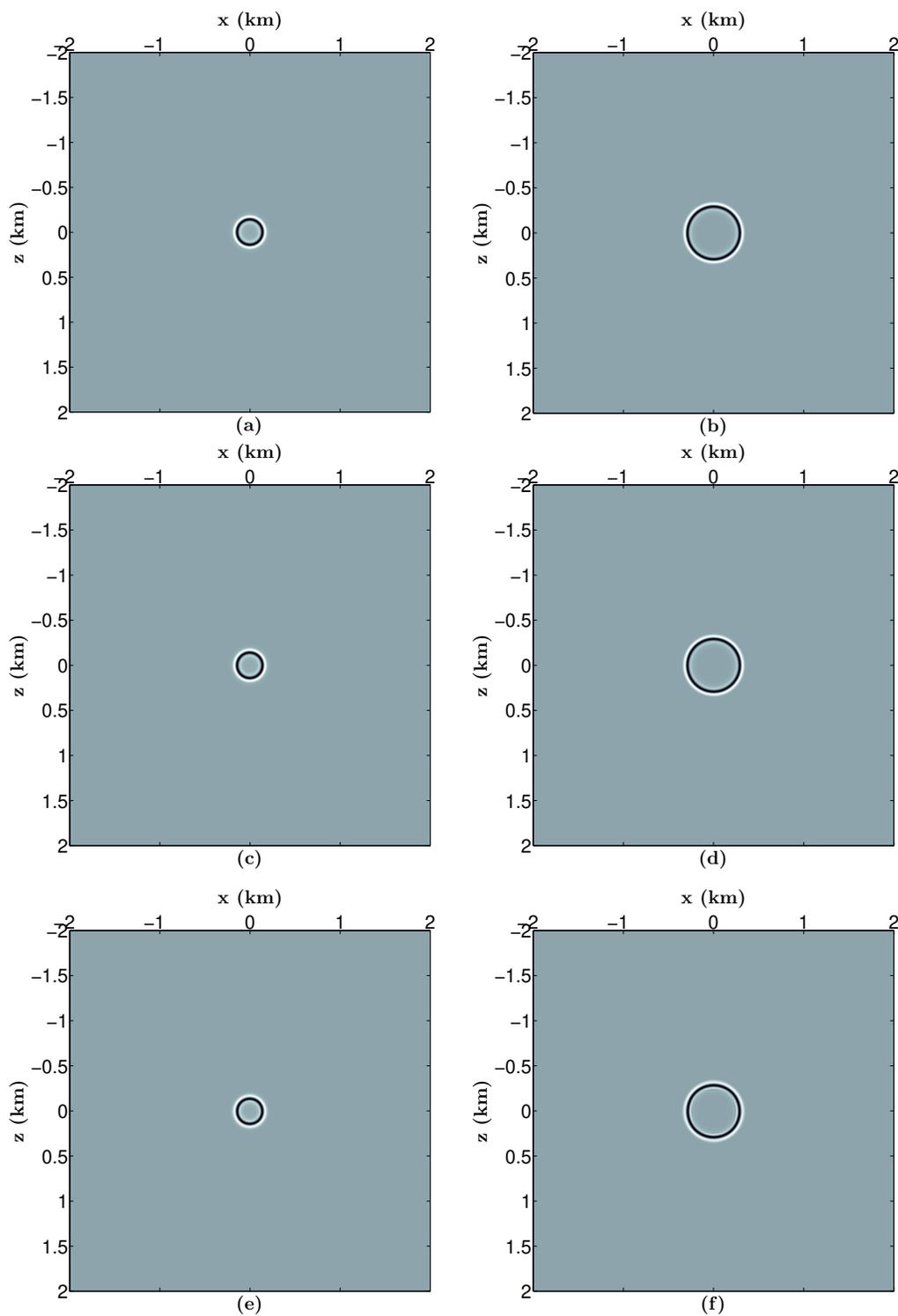


Figura 4.23: Solução de $U(x, z, t)$ obtida pelos esquemas: (a) Adaptativo para $t = 0.1$ s; (b) Adaptativo para $t = 0.2$ s; (c) Longo para $t = 0.1$ s; (d) Longo para $t = 0.2$ s; (e) Curto para $t = 0.1$ s; (f) Curto para $t = 0.2$ s.

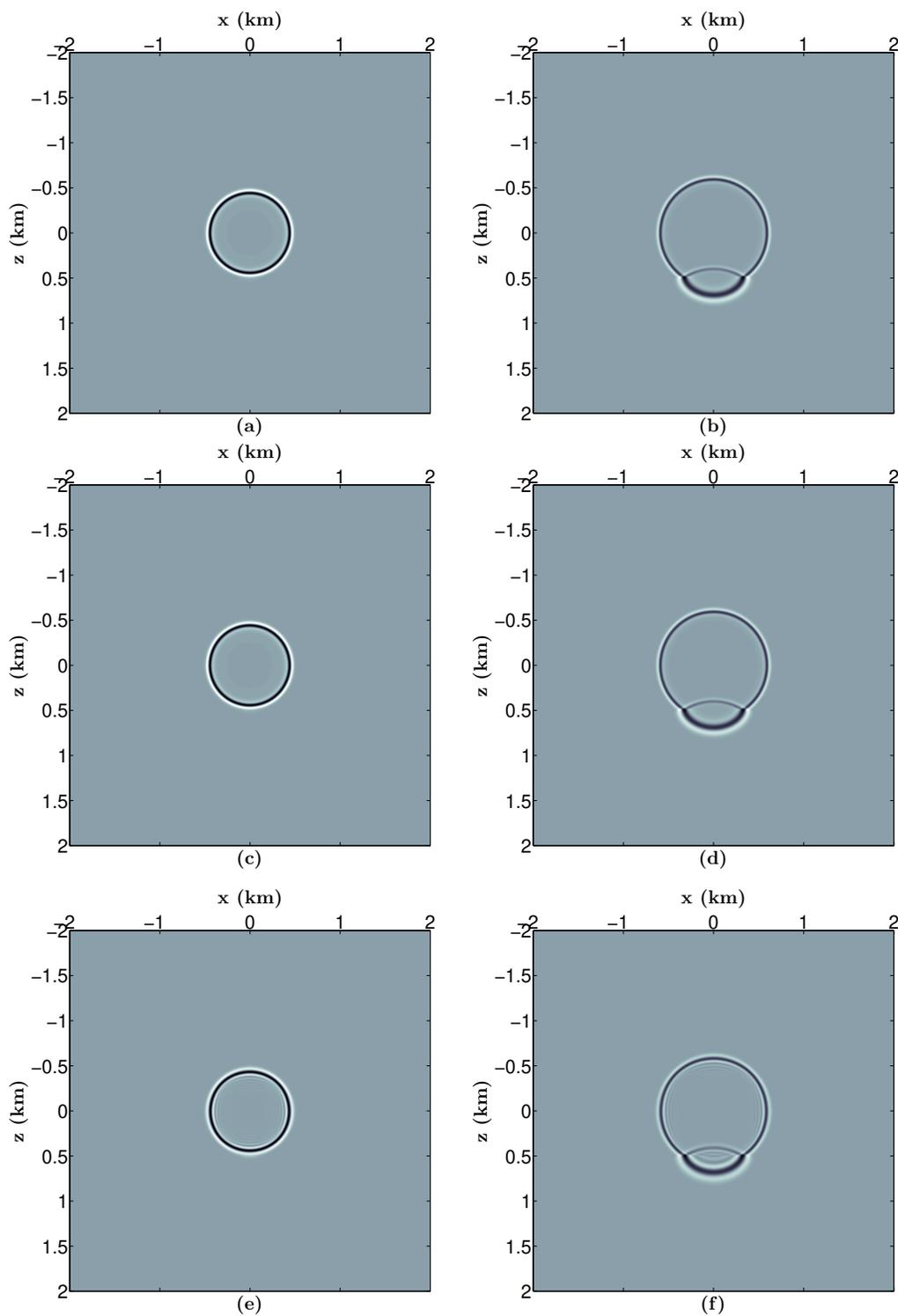


Figura 4.24: Solução de $U(x, z, t)$ obtida pelos esquemas: (a) Adaptativo para $t = 0.3$ s; (b) Adaptativo para $t = 0.4$ s; (c) Longo para $t = 0.3$ s; (d) Longo para $t = 0.4$ s; (e) Curto para $t = 0.3$ s; (f) Curto para $t = 0.4$ s.

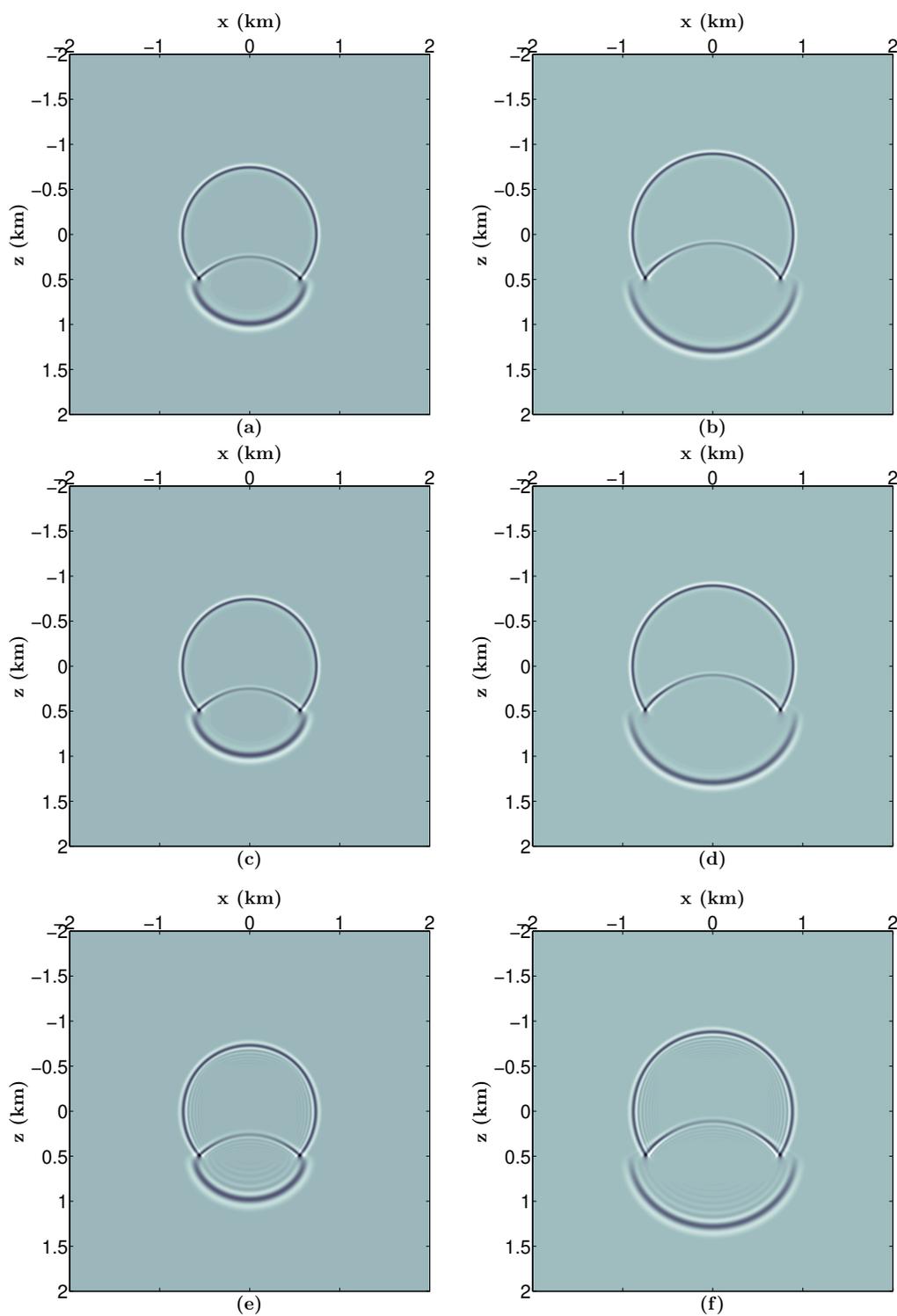


Figura 4.25: Solução de $U(x, z, t)$ obtida pelos esquemas: (a) Adaptativo para $t = 0.5$ s; (b) Adaptativo para $t = 0.6$ s; (c) Longo para $t = 0.5$ s; (d) Longo para $t = 0.6$ s; (e) Curto para $t = 0.5$ s; (f) Curto para $t = 0.6$ s.

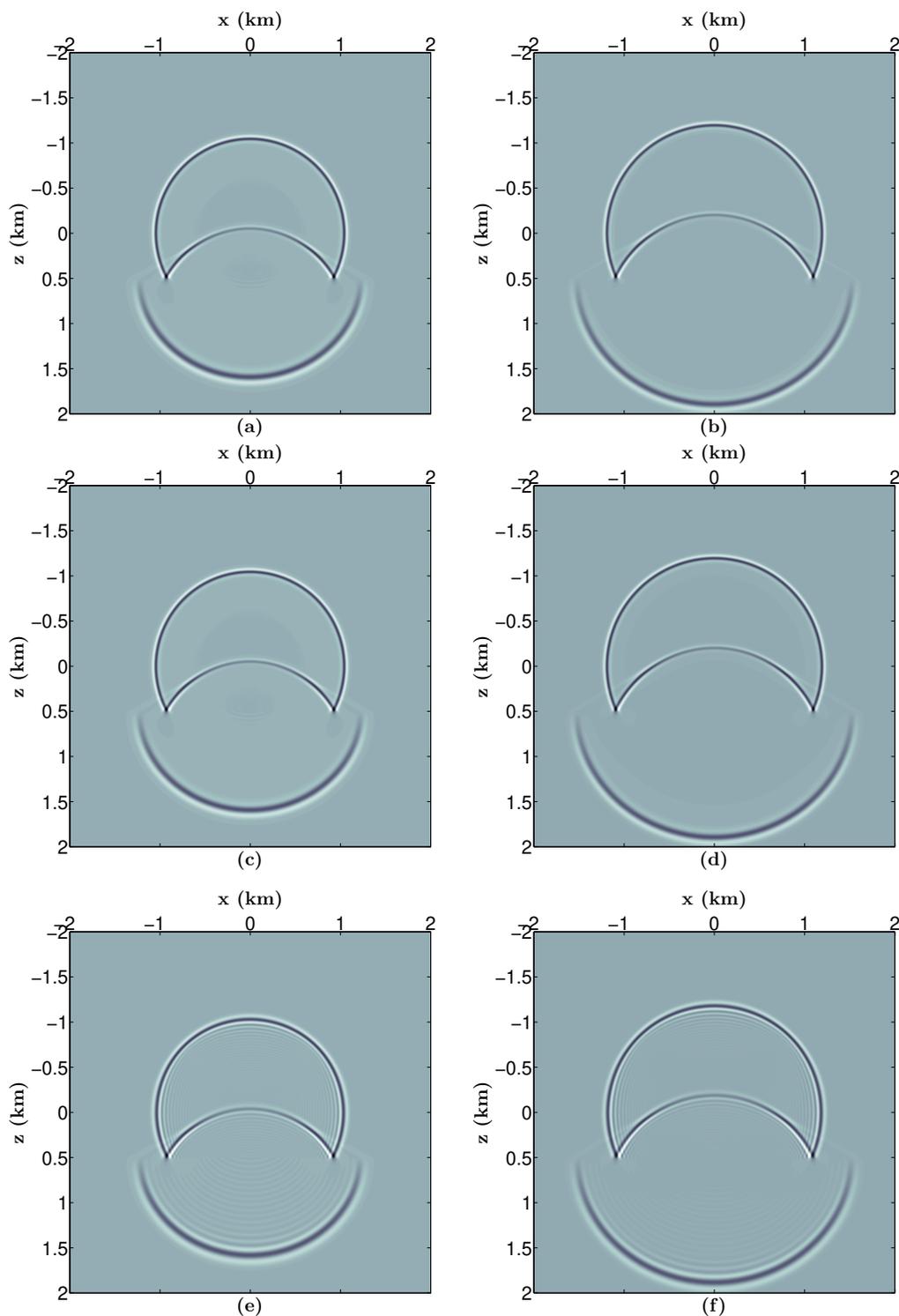


Figura 4.26: Solução de $U(x, z, t)$ obtida pelos esquemas: (a) Adaptativo para $t = 0.7$ s; (b) Adaptativo para $t = 0.8$ s; (c) Longo para $t = 0.7$ s; (d) Longo para $t = 0.8$ s; (e) Curto para $t = 0.7$ s; (f) Curto para $t = 0.8$ s.

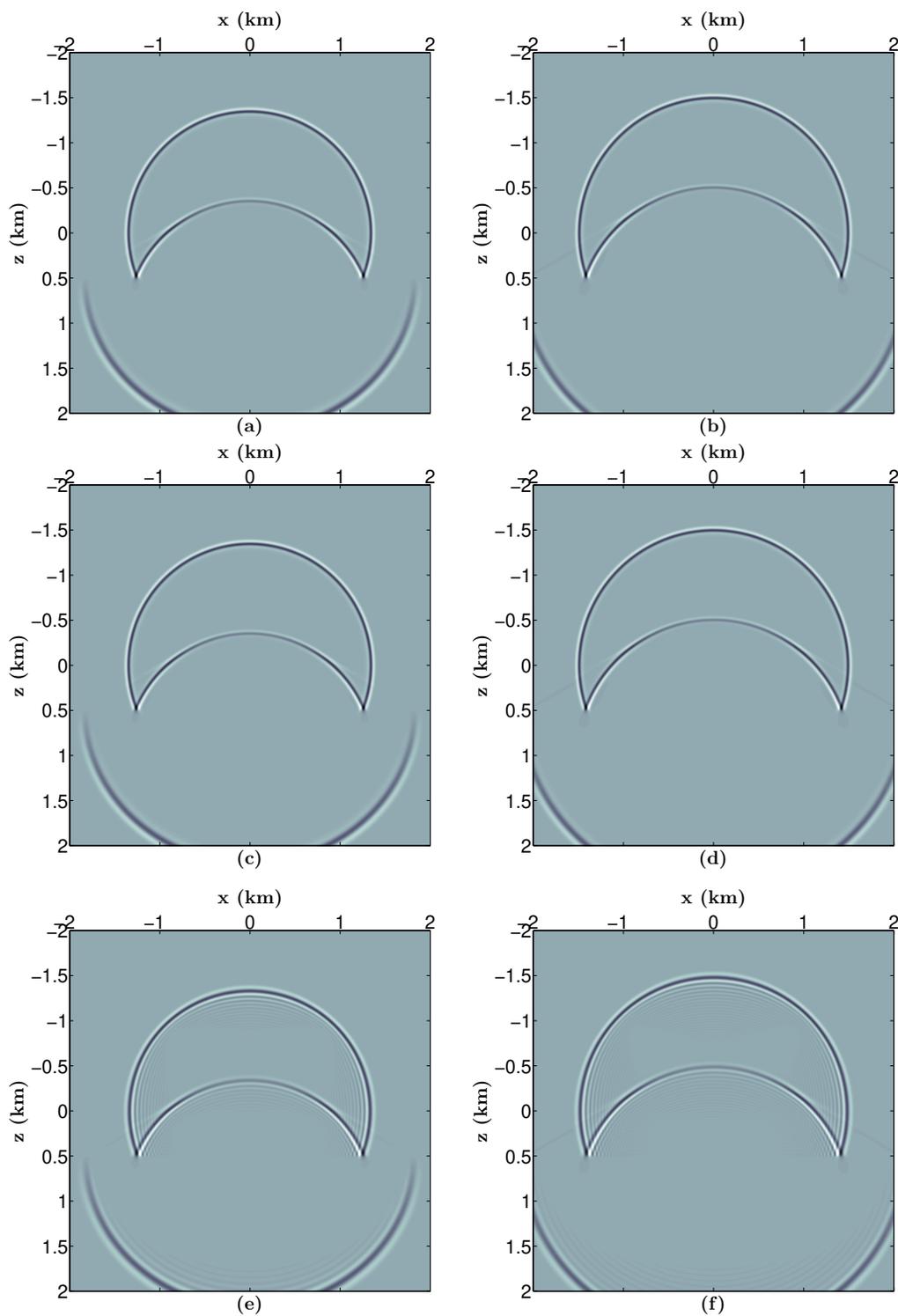


Figura 4.27: Solução de $U(x, z, t)$ obtida pelos esquemas: (a) Adaptativo para $t = 0.9$ s; (b) Adaptativo para $t = 1.0$ s; (c) Longo para $t = 0.9$ s; (d) Longo para $t = 1.0$ s; (e) Curto para $t = 0.9$ s; (f) Curto para $t = 1.0$ s.

Como o modelo tem apenas duas velocidades, extraímos um perfil desse modelo para mostrar a variação do comprimento de acordo com a velocidade. A Figura 4.28(a) mostra o perfil da velocidade em função de z (ou profundidade) e a Figura 4.28(b) mostra os comprimentos escolhidos. Ou seja, o método adapta o esquema do MDF e para a região de alta velocidade usa $M = 3$ e na região de baixa velocidade usa $M = 10$. Ou seja, o esquema longo foi simulado com um comprimento fixo em $M = 10$ para as duas velocidades.

Para medir a precisão da solução obtida pelos diferentes esquemas, extraímos um pulso nas coordenadas de $x = x_S$ e $t = 0.5$ s do campo de onda $U(x, z, t)$, isto é, comparamos a resposta obtida para um “sensor” localizado em x_S e para um tempo de observação dado por 0.5 s. O pulso obtido pelo esquema longo é fixado como valor de referência, pois tem maior precisão em relação aos outros esquemas. A Figura 4.29(a) exhibe a comparação entre o pulso obtido pelos esquemas adaptativo e longo, onde podemos ver que o esquema adaptativo obtém uma resposta com uma precisão bem próxima da resposta que é obtida pelo esquema longo. A Figura 4.29(b) exhibe a comparação entre o pulso obtido pelos esquemas adaptativo e curto, observa-se que a resposta do esquema curto apresenta pulsos que oscilam fora de fase prejudicando sua precisão. Comparando o esquema curto com o esquema longo, representado pela Figura 4.29(c), nota-se que de fato o esquema curto obtém uma solução de qualidade inferior à solução do esquema longo. No entanto, pela diferença entre os pulsos que podem ser observados na Figura 4.30, onde em (a) mostra que a diferença entre os esquemas adaptativo e longo chega a uma ordem de 10^{-4} ; em (b) essa diferença alcança uma ordem de 10^{-3} entre os esquemas adaptativo e curto; e em (c) obtemos a mesma ordem de 10^{-3} entre os esquemas longo e curto. Ou seja, em valores a diferença é pouca, considerando a ordem de grandeza. Mas, a Figura 4.31 mostra que o esquema adaptativo consegue obter a solução com custo computacional de cerca de 8% menor em relação ao esquema longo e o esquema curto obtém em 31% menor, ou seja, o esquema adaptativo tem um tempo excedente aproximadamente de 33% em relação ao esquema curto. Portanto, no sentido do custo benefício, a solução obtida pelo esquema curto não mostra ter desvantagem com relação à solução obtida pelo esquema adaptativo. No entanto, para modelos onde a camada de menor velocidade tiver uma espessura menor em relação às camadas de velocidades maiores, o esquema adaptativo consegue reduzir esse tempo excedente, mostrando-se vantajoso.

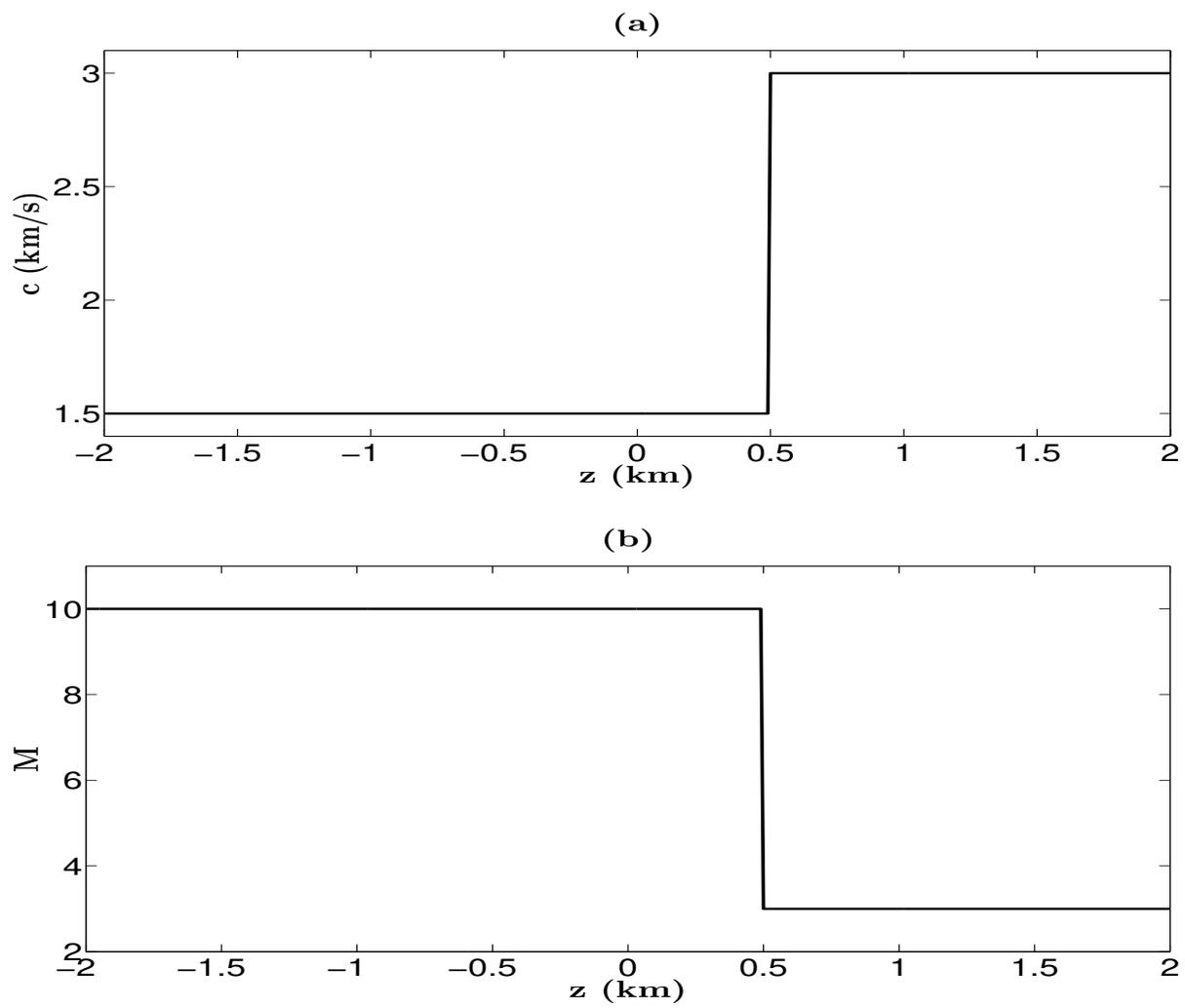


Figura 4.28: (a) Perfil que mostra a variação do modelo de velocidade em função de z . (b) Variação do comprimento em função de z .

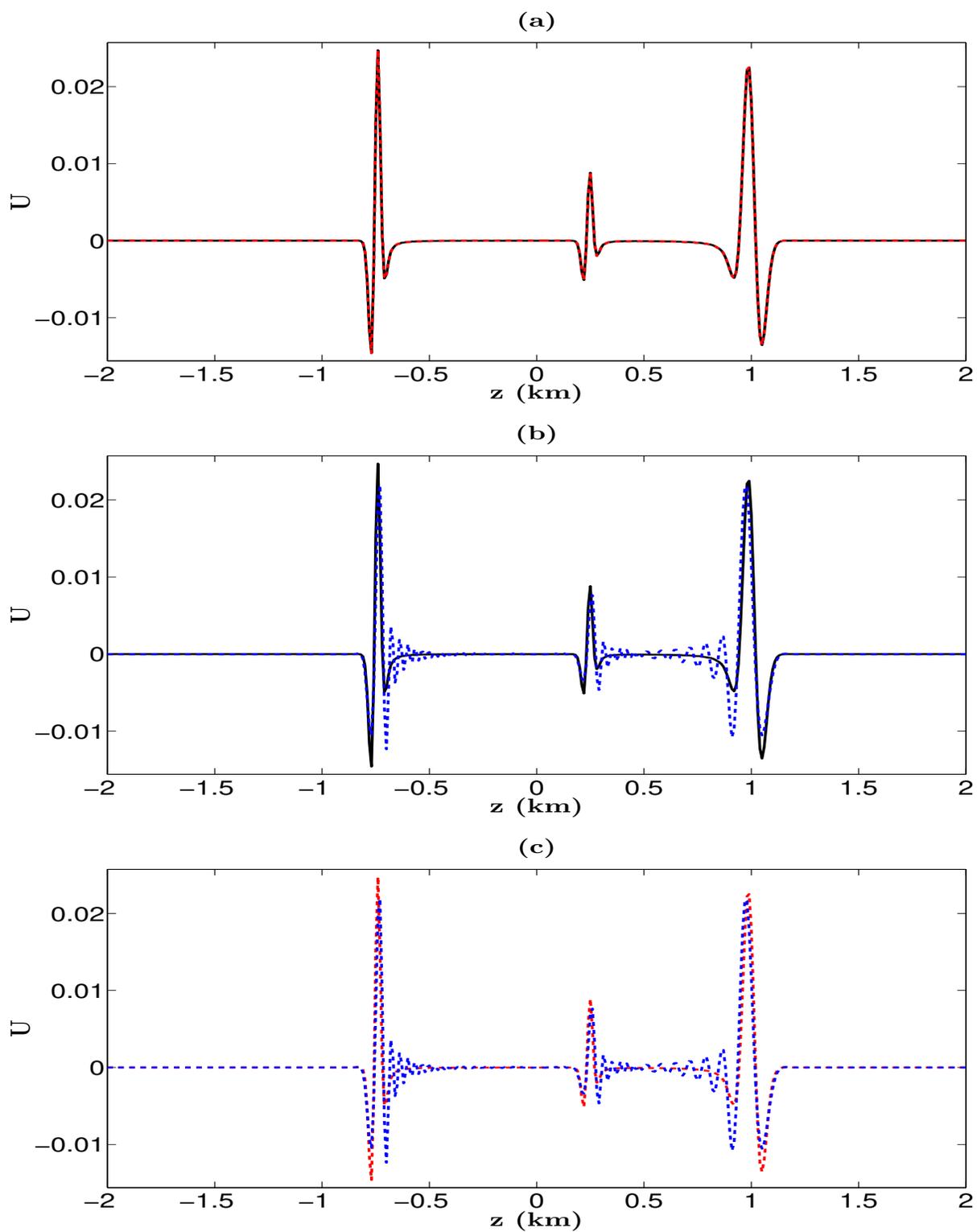


Figura 4.29: Comparação de $U(x_S, z, t = 0.5)$ entre os esquemas: (a) Adaptativo (linha sólida) e longo (linha vermelha tracejada); (b) Adaptativo (linha sólida) e curto (linha azul tracejada); (c) Longo (linha vermelha tracejada) e curto (linha azul tracejada).

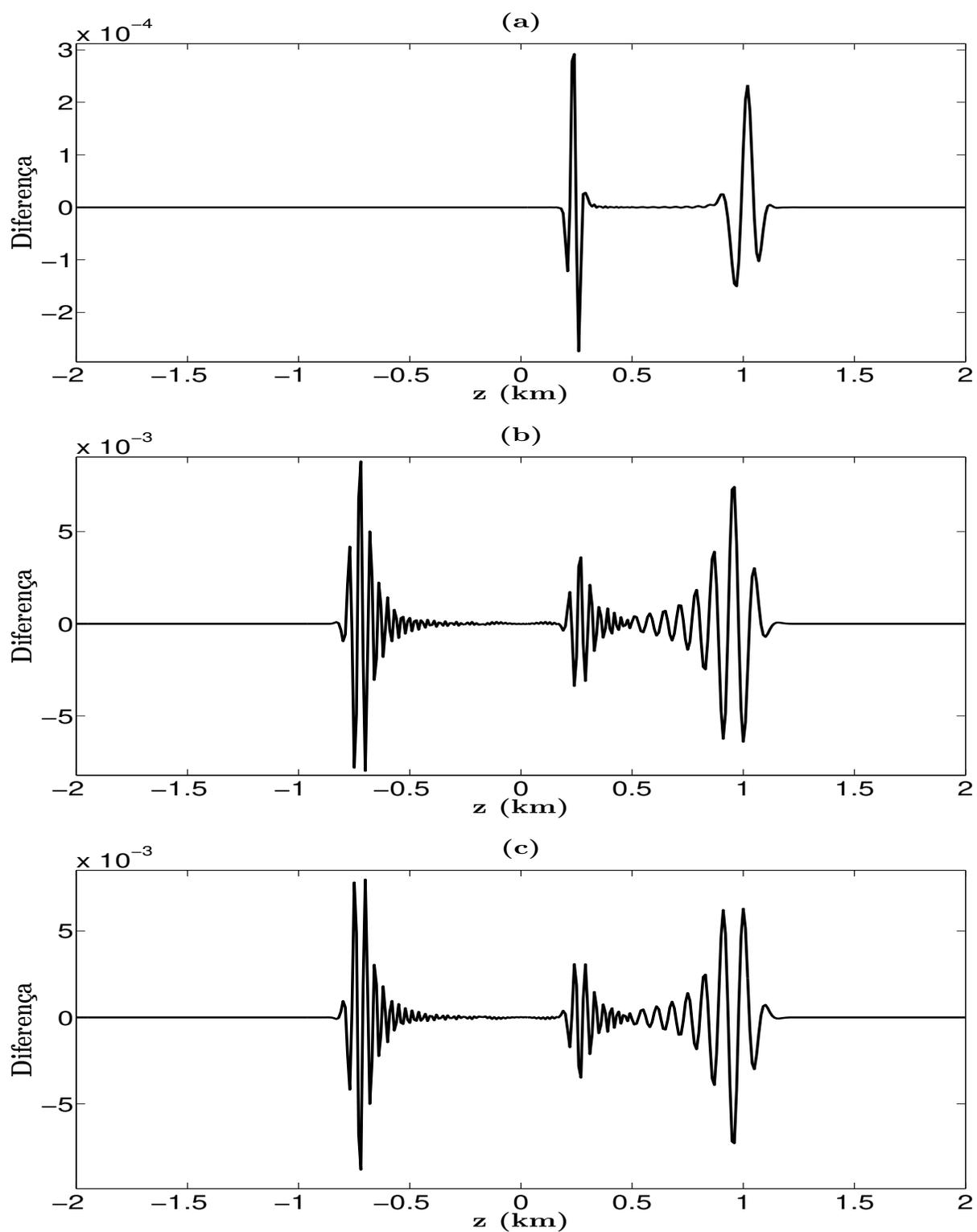


Figura 4.30: Diferença de $U(x_s, z, t = 0.5)$ entre os esquemas: (a) Adaptativo e longo; (b) Adaptativo e curto; (c) Longo e curto.

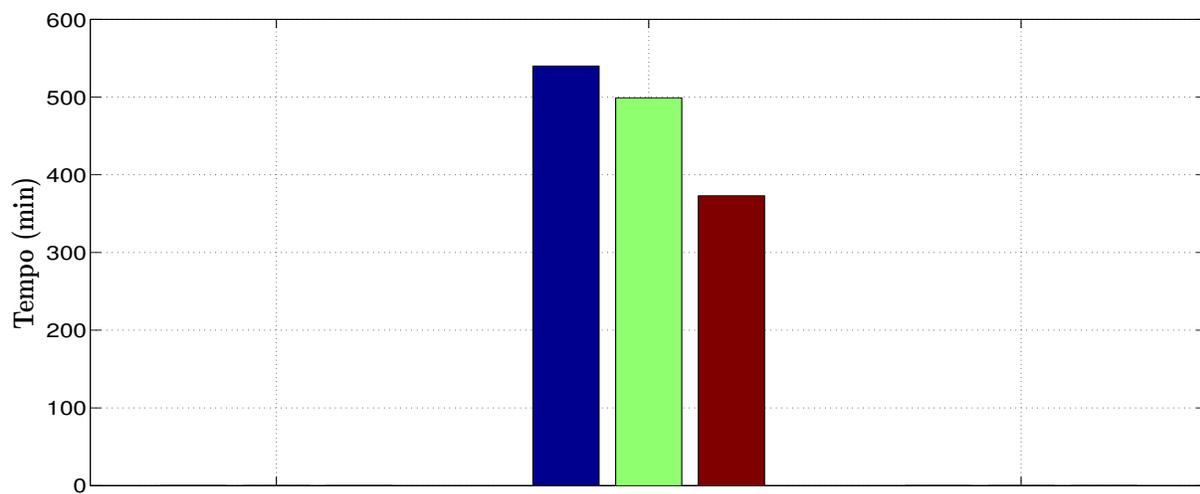


Figura 4.31: Duração de 1999 iterações de tempo na fórmula recursiva para os esquemas: longo (barra azul), adaptativo (barra verde) e curto (barra vermelha)

4.6 Modelo 4

Este último modelo possui mais variações de velocidade e um meio com uma velocidade muito alta comparado ao modelo anterior. A Figura 4.32 exhibe o modelo de velocidade com a fonte localizada em $(0, 0)$. Os parâmetros iniciais da malha Δ e Δt são os mesmos que foram utilizados no modelo anterior e o tempo máximo de observação foi de 0.7 s. Restringimos um pouco mais o método que escolhe os comprimentos calculando-os com um $\eta = 10^{-7}$ devido ao meio ter uma heterogeneidade maior, porém, com uma diferença efetiva menor, comparado ao Modelo 3. As Figuras 4.33 à 4.37 exibem as soluções das propagações obtidas pelos diferentes esquemas do MDF para alguns tempos. Percebe-se que as soluções dos esquemas adaptativo, longo e curto mostram-se bem semelhantes e, diferente dos modelos anteriores a solução obtida pelo esquema curto tem pouca dispersão numérica. Podemos observar os mesmos efeitos descritos no modelo anterior quanto à reflexão e transmissão de ondas.

A Figura 4.38(a) mostra a variação da velocidade em função da profundidade fixando a coordenada $x = x_S$, ou seja, exibimos o perfil de velocidade que contém todas as velocidades envolvidas no modelo, e a Figura 4.36(b) mostra os comprimentos escolhidos para as mesmas coordenadas de (a). Observa-se que tivemos uma variação de quatro tipos de comprimentos, $M = 24, 10, 5, 4$, ou seja, o critério que escolhe os comprimentos assume um comprimento igual para uma região onde as velocidades tem pouca variação entre si. Poderíamos ser mais restritivo com a escolha do comprimento, aumentando o valor da frequência máxima, pois a velocidade está fortemente ligada as frequências devido a sua relação com o comprimento de onda, o qual é limitado pelo número de onda de Nyquist. Se isso fosse feito, poderíamos ter conseguido uma maior adaptação com respeito aos comprimentos de acordo com a velocidade, porém o comprimento associado a menor velocidade seria muito mais longo que $M = 24$.

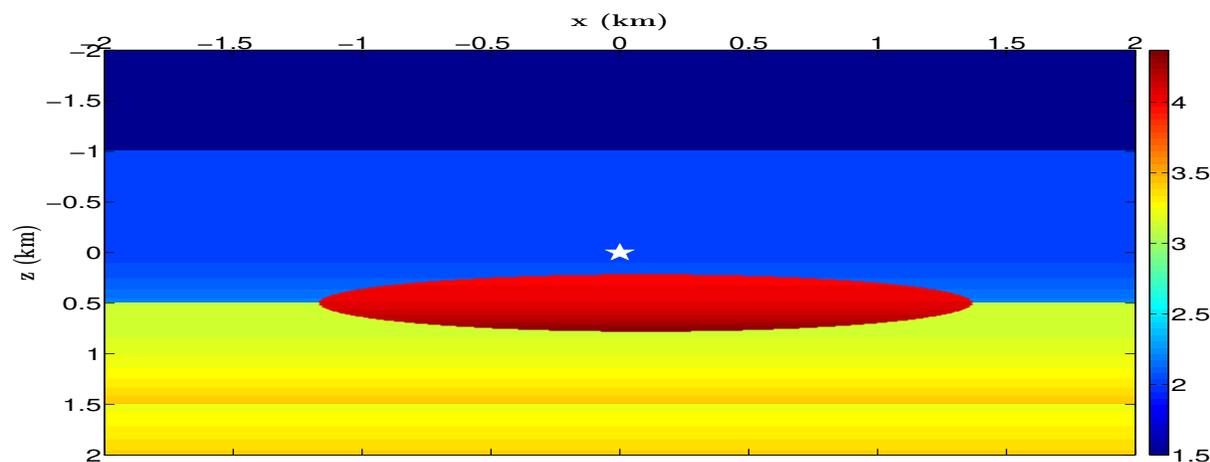


Figura 4.32: Modelo de velocidade, onde \star é a posição da fonte, com $c_{min} = 1.5$ km/s e $c_{max} = 4.4$ km/s.

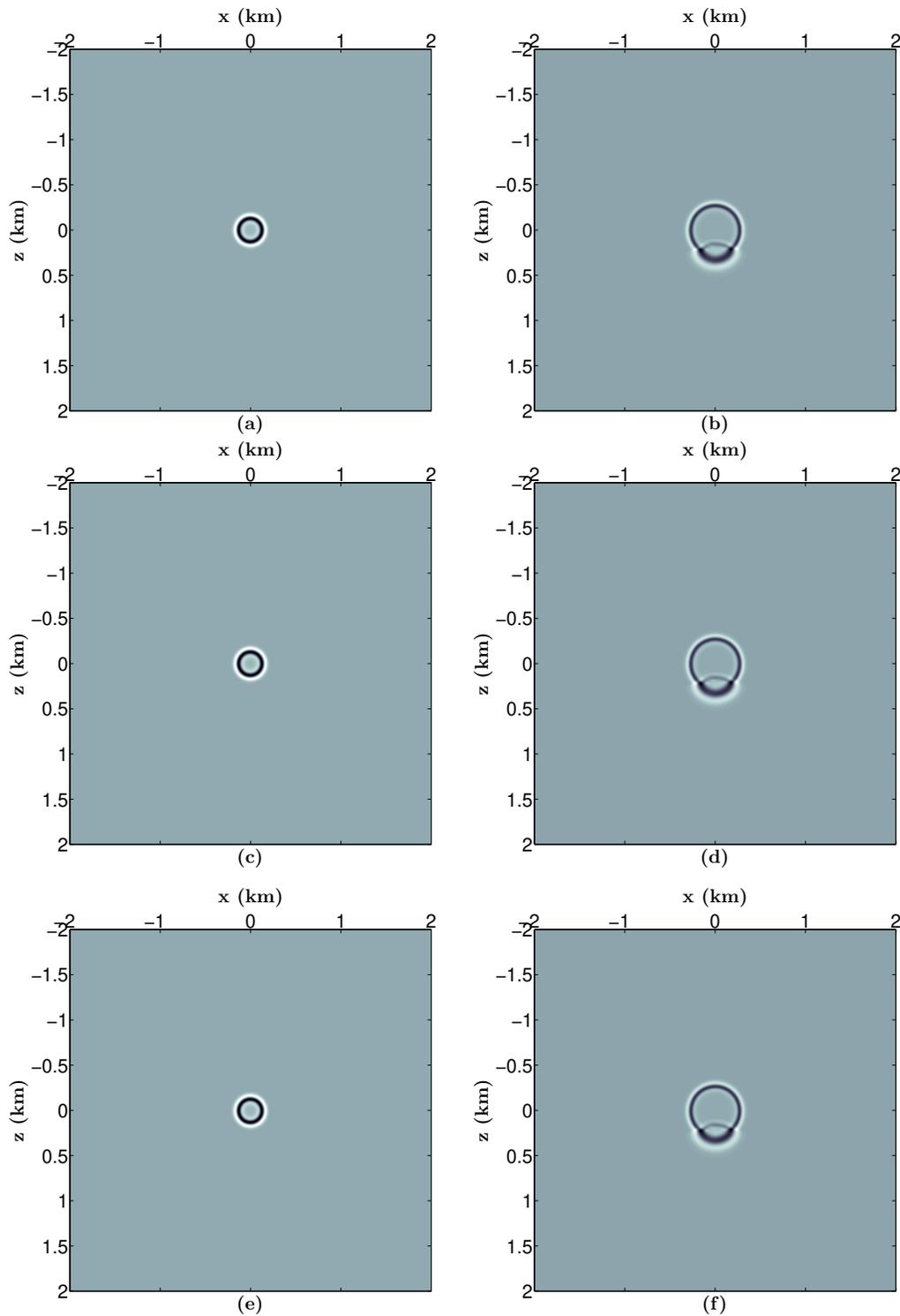


Figura 4.33: Solução $U(x, z, t)$ obtida pelos esquemas: (a) Adaptativo para $t = 0.07$ s; (b) Adaptativo para $t = 0.14$ s; (c) Longo para $t = 0.07$ s; (d) Longo para $t = 0.14$ s; (e) Curto para $t = 0.07$ s; (f) Curto para $t = 0.14$ s.

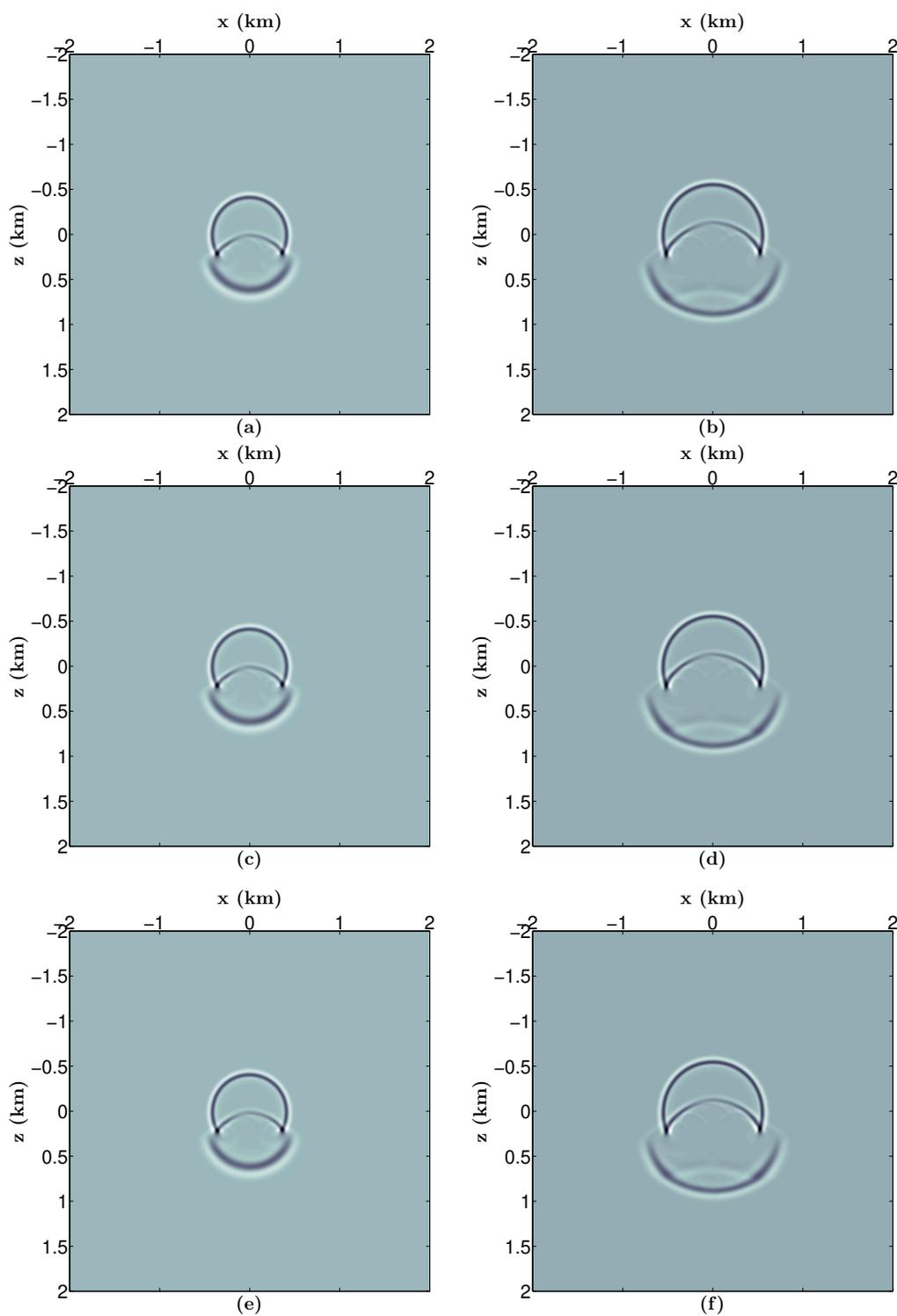


Figura 4.34: Solução $U(x, z, t)$ obtida pelos esquemas: (a) Adaptativo para $t = 0.21$ s; (b) Adaptativo para $t = 0.28$ s; (c) Longo para $t = 0.21$ s; (d) Longo para $t = 0.28$ s; (e) Curto para $t = 0.21$ s; (f) Curto para $t = 0.28$ s.

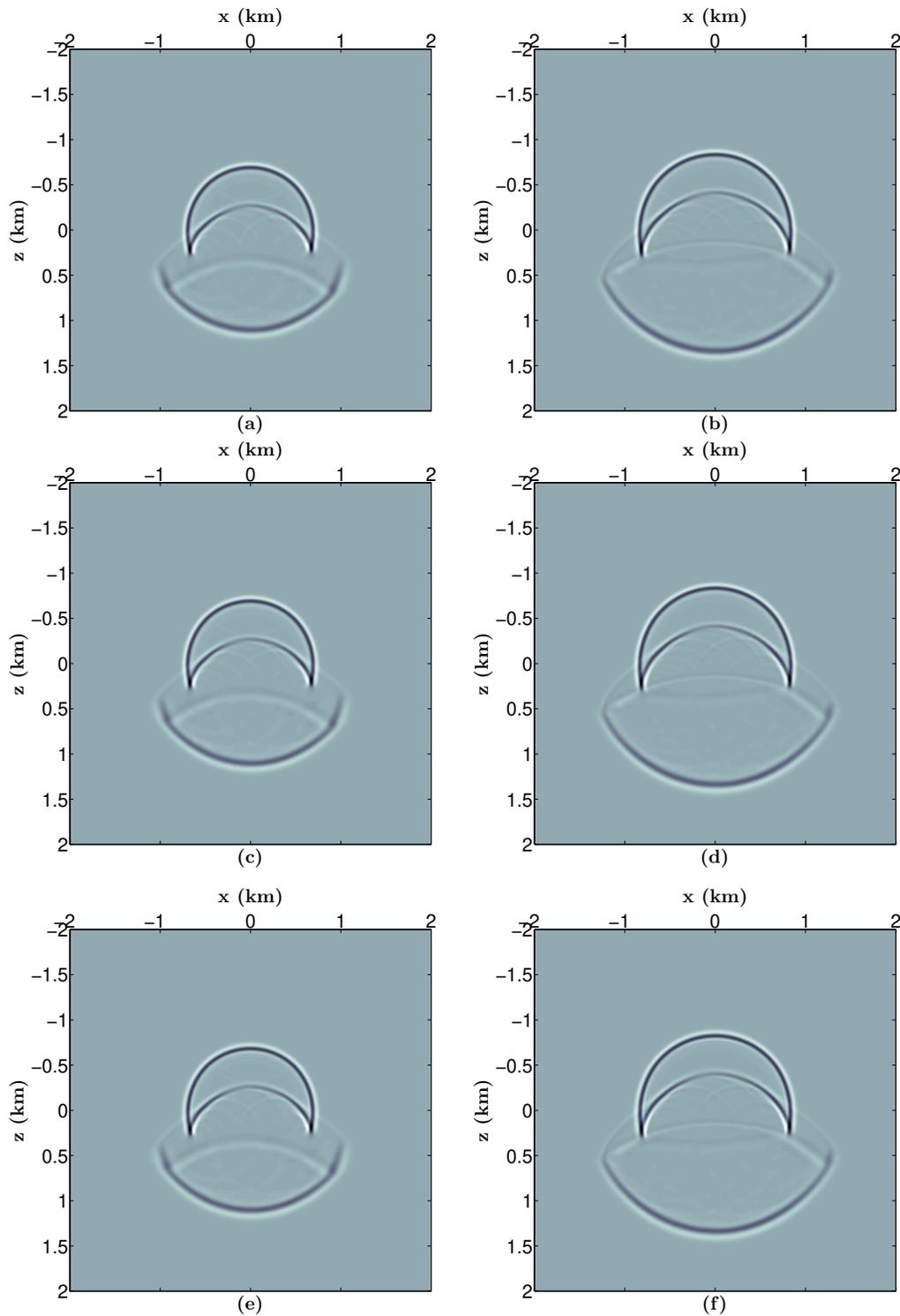


Figura 4.35: Solução $U(x, z, t)$ obtida pelos esquemas: (a) Adaptativo para $t = 0.35$ s; (b) Adaptativo para $t = 0.42$ s; (c) Longo para $t = 0.35$ s; (d) Longo para $t = 0.42$ s; (e) Curto para $t = 0.35$ s; (f) Curto para $t = 0.42$ s.

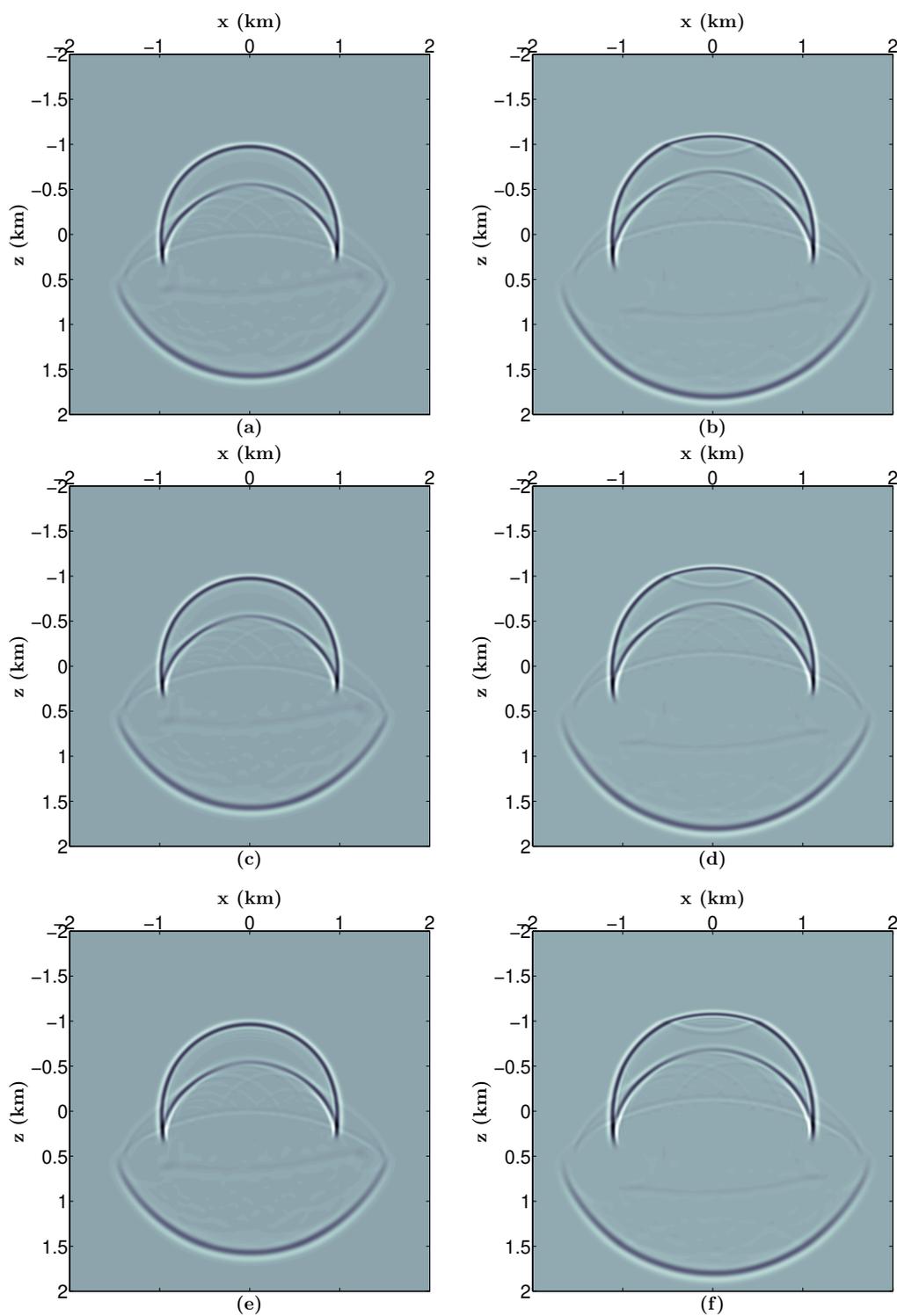


Figura 4.36: Solução $U(x, z, t)$ obtida pelos esquemas: (a) Adaptativo para $t = 0.49$ s; (b) Adaptativo para $t = 0.56$ s; (c) Longo para $t = 0.49$ s; (d) Longo para $t = 0.56$ s; (e) Curto para $t = 0.49$ s; (f) Curto para $t = 0.56$ s.

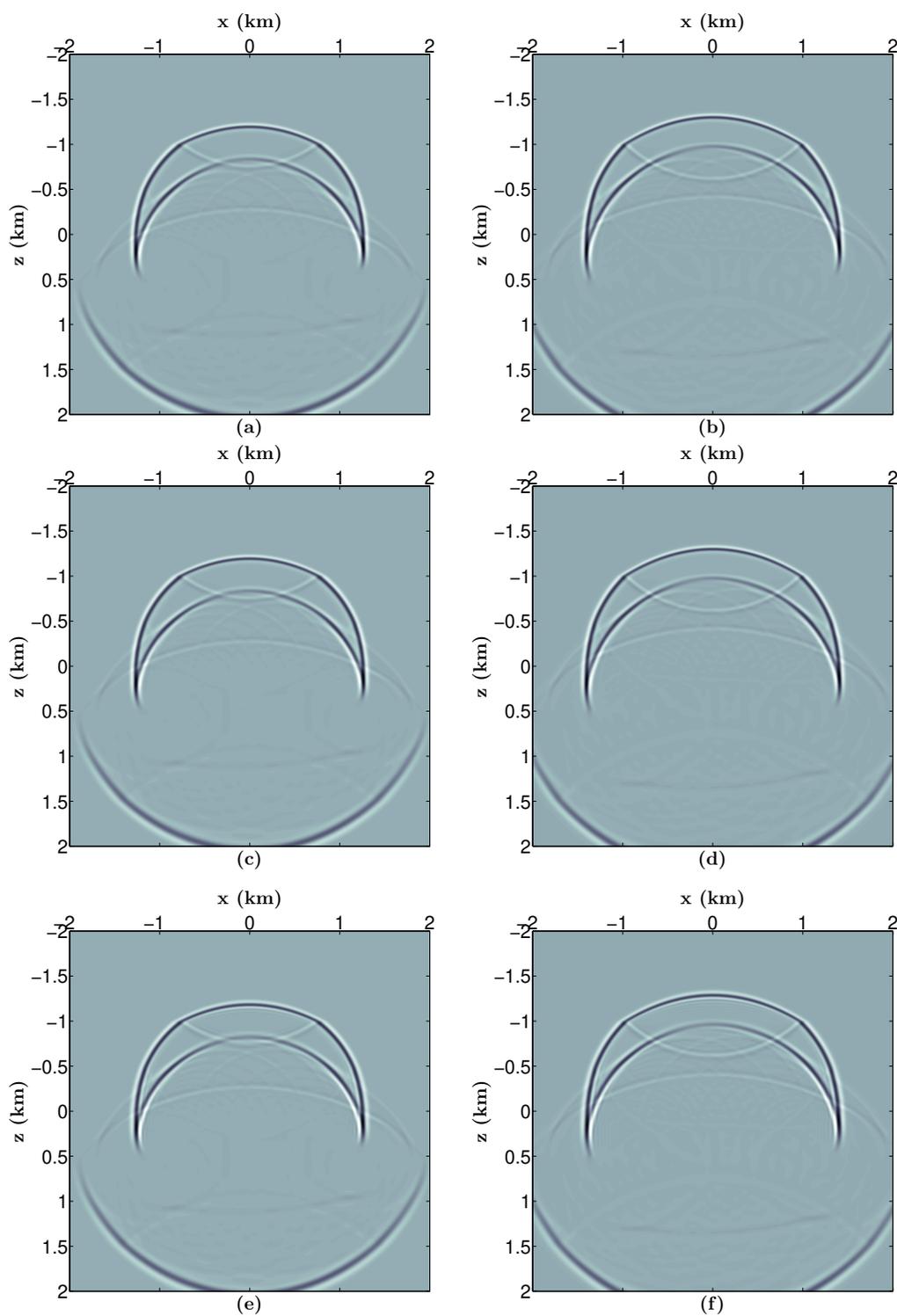


Figura 4.37: Solução $U(x, z, t)$ obtida pelos esquemas: (a) Adaptativo para $t = 0.63$ s; (b) Adaptativo para $t = 0.7$ s; (c) Longo para $t = 0.63$ s; (d) Longo para $t = 0.7$ s; (e) Curto para $t = 0.63$ s; (f) Curto para $t = 0.7$ s.

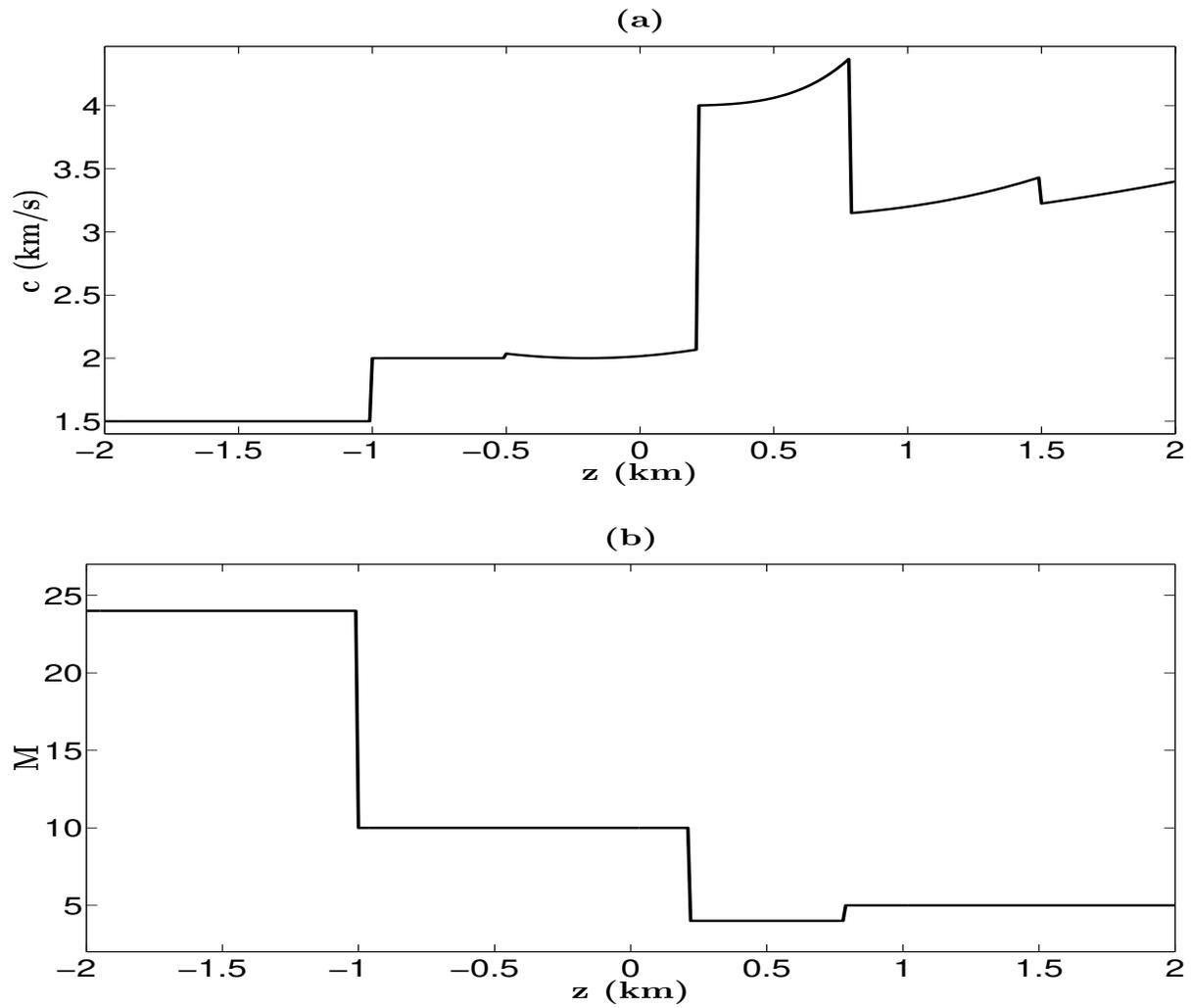


Figura 4.38: (a) Perfil de velocidade em função de z dado $x = x_S$. (b) Variação do comprimento do operador da derivada espacial em função de z .

Para efeito de comparação entre as soluções obtidas pelos esquemas adaptativo, longo e curto em ordem de grandeza, tomamos, $U(x, z, t)$ nas coordenadas $x = x_S$ e $t = 0.49$ s e, como referência, a solução do esquema do MDF longo, pois tem maior precisão.

A Figura 4.39(a) mostra que o esquema adaptativo se aproxima muito bem da solução obtida pelo esquema longo. A Figura 4.39(b) mostra que as soluções dos esquemas adaptativo e curto também são bem próximas, com pequenas diferenças nas amplitudes. No entanto, os picos das amplitudes são praticamente iguais. Do mesmo modo, a comparação entre o esquema longo e o curto representado pela Figura 4.39(c) confirma que o esquema curto possui uma boa aproximação. Em valores, os erros entre as soluções ($U(x_S, z, t = 0.49)$) obtidas pelos diferentes esquemas são mostrados na Figura 4.40, onde em (a), exibe-se o erro entre as respostas obtidas pelos esquemas adaptativo e longo que é da ordem de 10^{-5} ; em (b), o erro, entre os esquemas adaptativo e curto, foi de 10^{-3} , e esse mesmo valor é observado em (c), para o erro entre os esquemas longo e curto. Ou seja, o esquema adaptativo tem uma diferença de duas casas decimais na ordem de grandeza se comparado ao esquema curto. E, neste caso, o tempo computacional de 1399 iterações de tempo que pode ser observado na Figura 4.41 na fórmula recursiva, para o esquema adaptativo, teve uma redução aproximadamente de 34% se comparado ao tempo obtido pelo esquema longo. Para o esquema curto, a redução foi de cerca de 56%. Portanto, levando-se em conta a diferença na ordem de grandeza, o esquema do MDF adaptativo mostrou-se mais vantajoso. Porém, a solução do esquema curto não é imprecisa e tem dispersões numéricas que não prejudicam os valores da amplitude uma vez que os picos das amplitudes e a fase da onda estão bem aproximados.

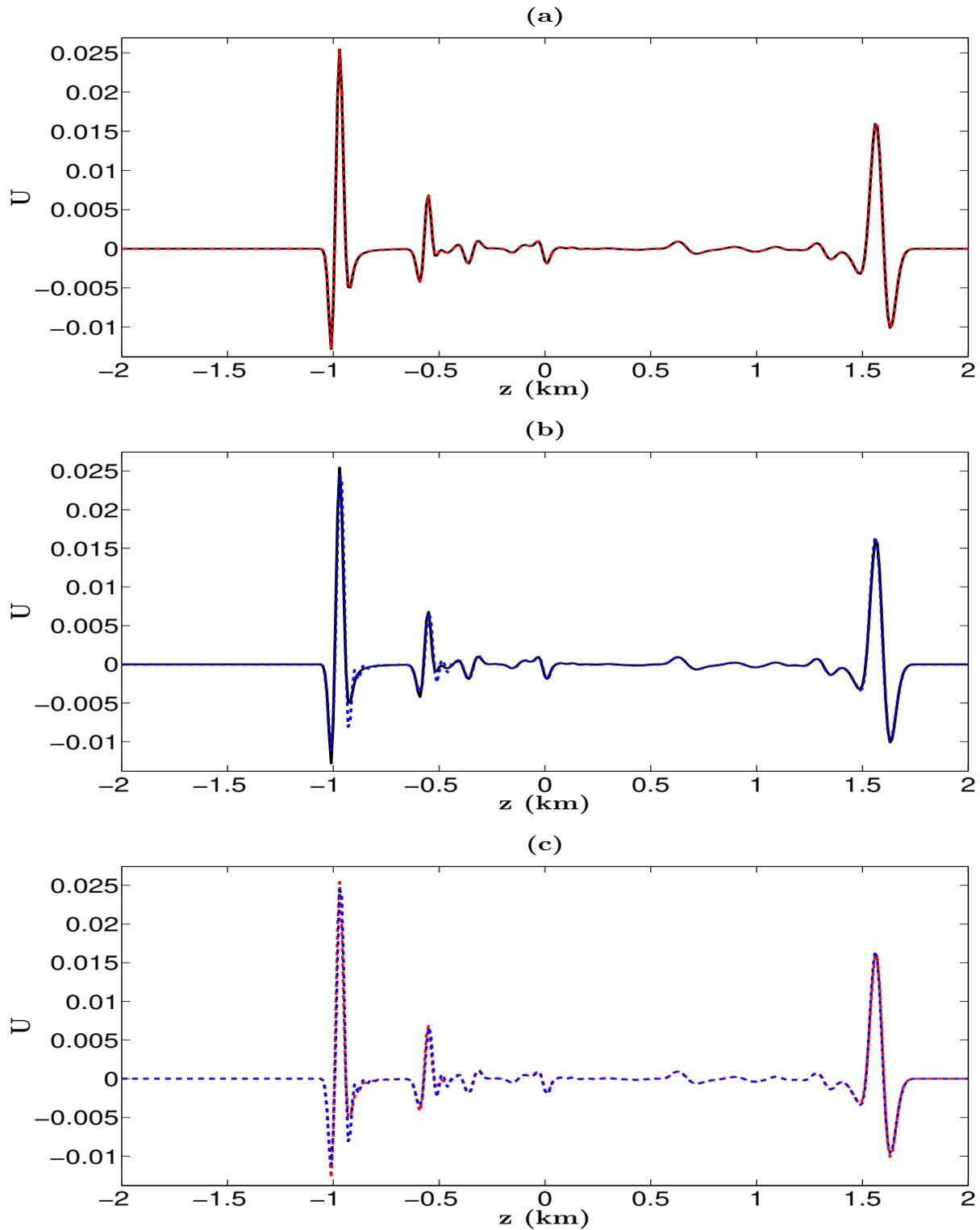


Figura 4.39: Comparação de $U(x_S, z, t = 0.49)$ entre os esquemas: (a) Adaptativo (linha sólida) e longo (linha vermelha tracejada); (b) Adaptativo (linha sólida) e curto (linha azul tracejada); (c) Longo (linha vermelha tracejada) e curto (linha azul tracejada).

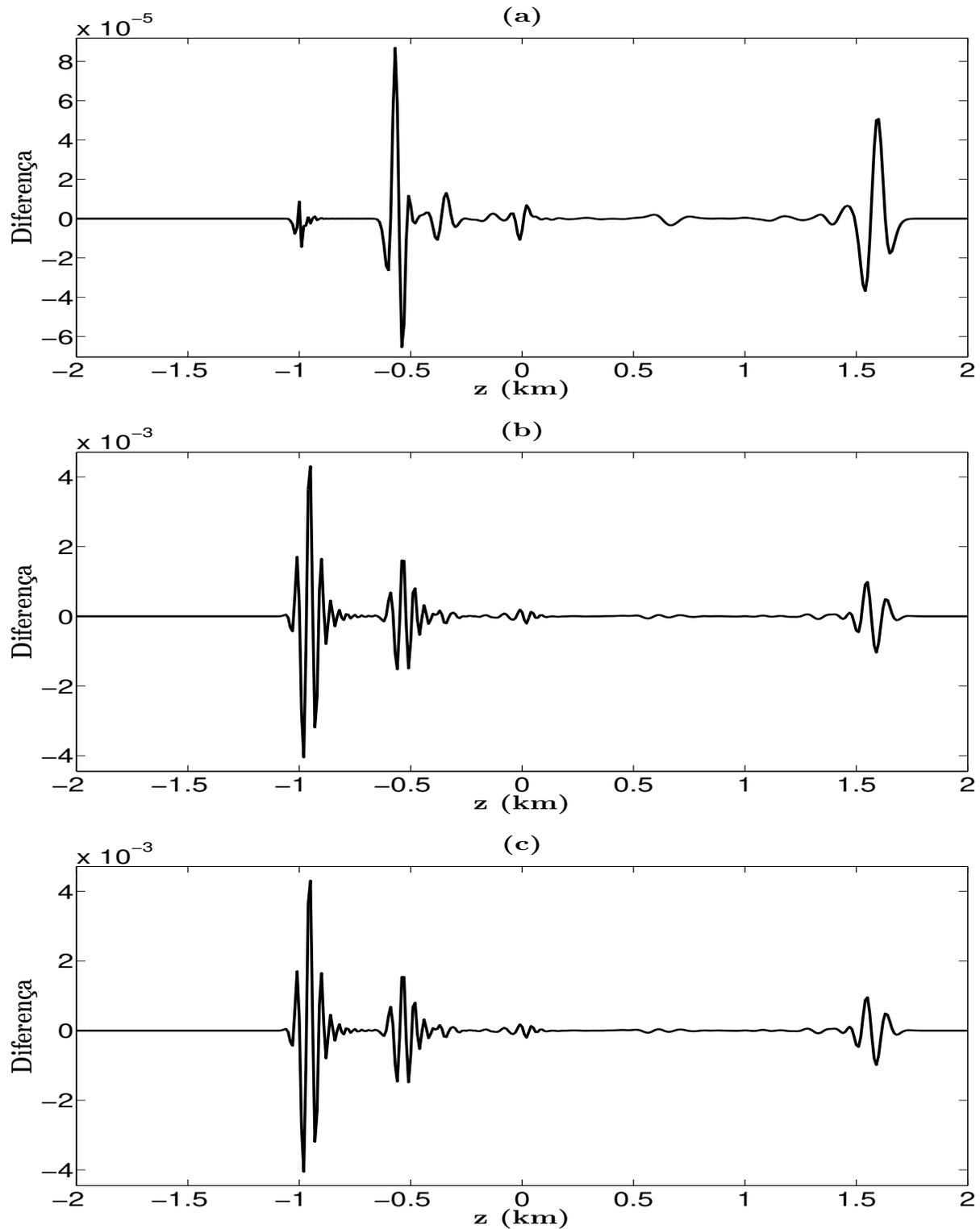


Figura 4.40: Diferença de $U(x_S, z, t = 0.49)$ entre os esquemas: (a) Adaptativo e longo; (b) Adaptativo e curto; (c) Longo e curto.

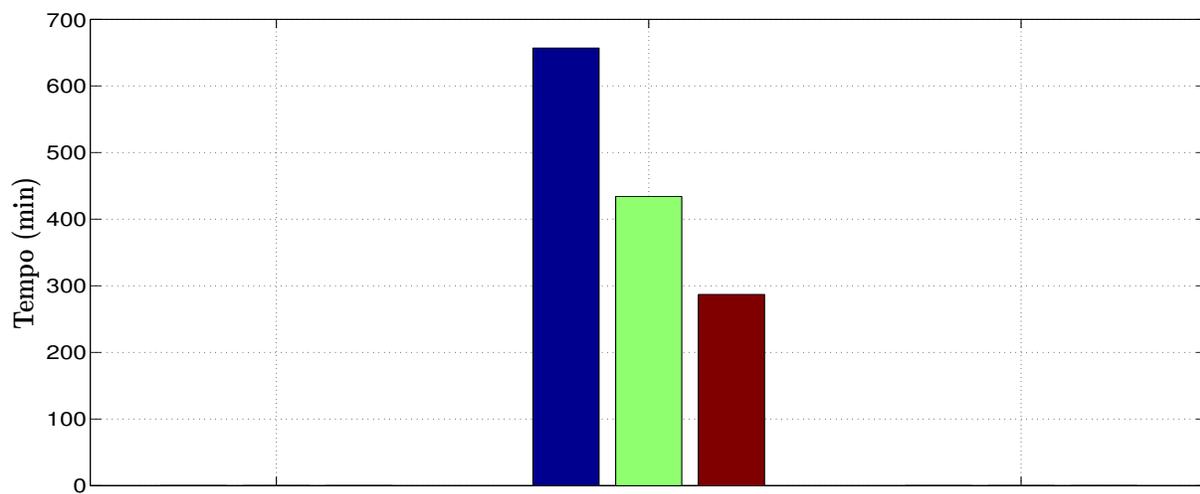


Figura 4.41: Duração de 1399 iterações de tempo na fórmula recursiva com $\eta = 10^{-7}$, para os esquemas: longo (barra azul), adaptativo (barra verde) e curto (barra vermelha).

Capítulo 5

Considerações Finais

A modelagem sísmica tem um papel fundamental na geofísica computacional, pois ela simula a propagação de ondas assumindo uma subsuperfície conhecida, obtendo suas respostas sísmicas, que por sua vez, usamos para reproduzir a subsuperfície através de processamentos sísmicos. Se a reprodução é próxima da subsuperfície (conhecida), há um indicativo que os processos utilizados para obtê-la são bons. Uma vez que conseguimos recriar a subsuperfície apenas tendo a informação do evento sísmico podemos aplicar os mesmos processos em uma aquisição real de dados sísmicos, isto é, fazemos um processo inverso. Por isso, é extremamente importante entender como sintetizar respostas sísmicas que aproximam-se o melhor possível dos eventos observados em dados reais.

Nesta dissertação resolvemos a equação da onda acústica, base fundamental do modelamento sísmico, através do MDF onde analisamos o esquema de diferenças que usam comprimentos adaptativos para o operador da derivada espacial. A adaptação dos comprimentos foi possível através do uso de coeficientes do MDF que tem a vantagem de reduzir a dispersão e aumentar a região de estabilidade. A maior contribuição que os comprimentos adaptativos trazem para o esquema é com relação a redução do número de operações na fórmula recursiva. Pois, em geral, o MDF precisa escolher ou um comprimento longo que reduzirá a dispersão numérica e terá uma aproximação mais precisa; ou um comprimento curto, para o qual, é necessário utilizar uma malha com passo suficientemente pequeno para conseguir uma solução de boa qualidade. No entanto, esses esquemas possuem um custo muito alto por conta do número de operações que são realizadas na fórmula recursiva.

Os experimentos numéricos comprovaram que o esquema adaptativo atua como um bom esquema para reduzir o número de operações se comparado ao esquema de comprimento longo e, em alguns casos no qual podemos citar os Modelos 2 e 4, tem um custo benefício melhor do que o esquema que usa comprimento curto, que faz menos operações, mas a solução não é tão precisa quanto a solução do esquema adaptativo. Vale lembrar que o comprimento curto é uma aproximação de 4ª-ordem, sendo de certa forma muito boa para resolver a equação da onda. Se usássemos o pior comprimento possível, isto é, uma aproximação de 2ª ordem, certamente, as soluções seriam mais imprecisas.

Baseado no objetivo do modelamento sísmico e nos testes numéricos o esquema adaptativo contribui para obter uma boa aproximação da solução da equação da onda acústica, para os casos 1D e 2D, mostrando-se ser eficiente computacionalmente se comparado ao esquema longo. Destacamos dois trabalhos futuros possíveis:

1. Obter os coeficientes espaciais do MDF para uma ordem maior na derivada do tempo, levando a crer que a solução ficaria melhor aproximada.
2. Obter um método híbrido que mediria, por algum critério, se valeria a pena adaptar o comprimento ou se seria melhor manter um baixo comprimento e refinar a malha.

Apêndice A

Coeficientes Convencionais do Esquema de Diferenças Finitas

Neste apêndice vamos desenvolver os coeficientes do MDF apenas utilizando a expansão da série de Taylor. Um esquema centrado de diferenças finitas que aproxima a $2N$ -ésima derivada de uma função $p(x)$, assumindo que essas derivadas existam, pode ser definida por

$$\frac{\partial^{2N} p(x_j)}{\partial x^{2N}} \approx \frac{1}{\Delta x^{2N}} \sum_{m=1}^M [b_0 p(x_j) + b_m (p(x_{j-m}) + p(x_{j+m}))], \quad (\text{A.1})$$

onde $x_j = x_0 + j\Delta x$, para $j = 0, 1, \dots, J$ com $M \geq N$ sendo a quantidade de pontos que a aproximação utiliza. Pela teoria de onda plana, substituindo $p(x) = p_0 e^{i\xi x}$ na equação (A.1), onde p_0 é uma constante, obtemos

$$\begin{aligned} (-1)^N (\xi)^{2N} &\approx \frac{1}{\Delta x^{2N}} \sum_{m=1}^M [b_0 + b_m (e^{-i\xi\Delta x m} + e^{i\xi\Delta x m})] \\ &\approx \frac{1}{\Delta x^{2N}} \sum_{m=1}^M [b_0 + 2b_m \cos(\xi\Delta x m)]. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Utilizando a expansão em série de Taylor na função cosseno em (A.2) ficamos com

$$(-1)^N (\xi)^{2N} \approx \frac{1}{\Delta x^{2N}} \sum_{m=1}^M \left[b_0 + 2b_m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} m^{2n} \xi^{2n} \Delta x^{2n} \right], \quad (\text{A.3})$$

comparando os coeficientes de ξ para os M primeiros termos, obtemos as seguintes equações

$$b_0 + 2 \sum_{m=1}^M b_m = 0, \quad (\text{A.4})$$

$$\sum_{m=1}^M m^{2n} b_m = \begin{cases} (2N)!/2, & (n = N) \\ 0, & (n \neq N). \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

O sistema de equação (A.5) pode ser reescrito em forma matricial como

$$\begin{pmatrix} 1^0 & 2^0 & \dots & M^0 \\ 1^2 & 2^2 & \dots & M^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1^{2N-2} & 2^{2N-2} & \dots & M^{2N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1^{2M-2} & 2^{2M-2} & \dots & M^{2M-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^2 b_1 \\ 2^2 b_2 \\ \vdots \\ M^2 b_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (2N)!/2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

A matriz deste sistema de equações lineares também é conhecida como matriz de Vandermonde. Portanto, os coeficientes b_m , para $m = 1, \dots, M$ são obtidos resolvendo estas equações.

Como comparamos apenas para os M primeiros termos, podemos definir o erro de truncamento por

$$\varepsilon = \left| 2 \sum_{n=M+1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{(2n)!} \sum_{m=1}^M (m^{2n} b_m) \xi^{2n} \Delta x^{2n-2N} \right] \right|, \quad (\text{A.7})$$

onde observa-se que a menor potência do incremento de malha é $2M - 2N - 2$, ou seja, o esquema de diferenças tem uma ordem de aproximação de $2M - 2N - 2$.

Quando $N = 1$, para as segundas derivadas, obtemos uma fórmula explícita para os coeficientes b_m , para $m = 1, \dots, M$, dada por

$$b_m = \frac{(-1)^{m+1}}{m^2} \prod_{n=1, n \neq m}^M \left| \frac{n^2}{n^2 - m^2} \right| \quad (\text{A.8})$$

onde b_0 é calculado pela equação A.4. Na Tabela A.1 listamos os valores dos coeficientes para $M = 1, 2, 3, 4$.

M	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4
1	-2	1			
2	-5/2	4/3	-1/12		
3	-49/18	3/2	-3/20	1/90	
4	-205/72	8/5	-1/5	8/315	-1/560

Tabela A.1: Coeficientes do esquema de diferenças finitas para a segunda derivada.

Referências Bibliográficas

- Abokhodair, A. A. (2009). Complex differentiation tools for geophysical inversion. *Geophysics*, 74(2):H1–H11.
- Alford, R. M., Kelly, K. R., and Boore, D. M. (1974). Accuracy of finite difference modeling of the acoustic wave equation. *Geophysics*, 39(6):834–842.
- Björck, A. e Pereyra, V. (1970). Solution of vandermonde systems of equations. *Mathematics of Computation*, 24(112):893–903.
- Chen, J. B. (2007). High-order time discretization in seismic modeling. *Geophysics*, 72(5):SM115–SM122.
- Claerbout, J. F. (1985). *Imaging the earth's interior*. Blackwell scientific publication.
- Dablain, M. A. (1986). The application of high-order differencing to the scalar wave equation. *Geophysics*, 51(1):54–56.
- Falk, J., Tessmer, E., and Gajewski, D. (1996). Tube wave modeling by the finite difference method with varying grid spacing. *PAGEOPH*, 148(1–2):77–93.
- Finkelstein, B. e Kastner, R. (2007). Finite difference time domain dispersion reduction schemes. *Computational Physics*, 221(1):422–438.
- Fornberg, B. (1998). Calculation of weights in finite difference formulas. *SIAM*, 40(3):685–691.
- Holberg, O. (1987). Computational aspects of the choice of operator and sampling interval for numerical differentiation in large-scale simulation of wave phenomena. *Geophysical Prospecting*, 35(6):629–655.
- Kelly, K. R., Ward, R. W., Treitel, S. W., and Alford, R. M. (1976). Synthetic seismogram: a finite difference approach. *Geophysics*, 41(1):2–27.
- LeVeque, R. J. (2007). *Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems*. SIAM.
- Liu, Y. e Sen, M. K. (2009a). Advanced finite difference methods for seismic modeling. *Geohorizons*, 14(2):5–16.

- Liu, Y. e Sen, M. K. (2009b). A new time-space domain high-order finite-difference method for the acoustic wave equation. *Computational Physics*, 228(23):8779–8806.
- Liu, Y. e Sen, M. K. (2011). Finite-difference modeling with adaptive variable-length spatial operators. *Geophysics*, 76(4):T79–T89.
- Marfurt, K. J. (1984). Accuracy of finite difference and finite element modeling of the scalar and elastic wave equations. *Geophysics*, 49(5):533–549.
- Strikwerda, J. C. (1989). *Finite difference schemes and partial differential equations*. Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series.
- Virieux, J. (1984). Sh wave propagation in heterogeneous media: velocity-stress finite difference method. *Geophysics*, 49(11):1933–1957.
- Virieux, J. (1986). P-sv wave propagation in heterogeneous media: velocity-stress finite difference method. *Geophysics*, 51(4):889–991.