



JORGE FÉRES JUNIOR

PERMUTAÇÕES QUE EVITAM CERTOS PADRÕES

CAMPINAS  
2014





UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística  
e Computação Científica

JORGE FÉRES JUNIOR

## PERMUTAÇÕES QUE EVITAM CERTOS PADRÕES

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em matemática aplicada.

**Orientador: José Plínio de Oliveira Santos**

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO JORGE FÉRES JUNIOR, E ORIENTADA PELO PROF. DR. JOSÉ PLÍNIO DE OLIVEIRA SANTOS.

Assinatura do Orientador

A handwritten signature in black ink, which appears to be "José Plínio de Oliveira Santos", is written over a horizontal line. The signature is fluid and cursive.

CAMPINAS  
2014

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica  
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

F891p Féres Junior, Jorge, 1961-  
Permutações que evitam certos padrões / Jorge Féres Junior. – Campinas, SP  
: [s.n.], 2014.

Orientador: José Plínio de Oliveira Santos.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de  
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Permutações (Matemática). 2. Permutações evitando padrões (Matemática)  
. 3. Padrões proibidos (Matemática). 4. Permutação restrita. I. Santos, José Plínio  
de Oliveira, 1951-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática,  
Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Permutations avoiding certain patterns

**Palavras-chave em inglês:**

Permutations

Pattern-avoiding permutations

Forbidden patterns

Restricted permutation

**Área de concentração:** Matemática Aplicada

**Titulação:** Mestre em Matemática Aplicada

**Banca examinadora:**

José Plínio de Oliveira Santos [Orientador]

Laércio Luis Vendite

Robson da Silva

**Data de defesa:** 01-07-2014

**Programa de Pós-Graduação:** Matemática Aplicada

**Dissertação de Mestrado defendida em 01 de julho de 2014 e aprovada**

**Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**



---

**Prof.(a). Dr(a). JOSÉ PLÍNIO DE OLIVEIRA SANTOS**



---

**Prof.(a). Dr(a). LAÉRCIO LUIS VENDITE**



---

**Prof.(a). Dr(a). ROBSON DA SILVA**

## Abstract

In this dissertation, we study permutations avoiding certain patterns. More specifically, our focus is on counting such permutations.

Among the many ways to describe a permutation, we adopted the “positional representation in line” presenting a systematic treatment of this area of forbidden pattern, studying operations, symmetries, structures, transformations, and especially counting techniques for this purpose.

**Keywords:** permutations, pattern-avoiding permutations, forbidden patterns, restricted permutation, pattern avoidance.

## Resumo

Nesta dissertação, estudamos permutações que evitam determinados padrões. Mais especificamente, nosso principal objetivo é a contagem de tais permutações.

Dentre as várias formas de descrever uma permutação, adotamos a “representação posicional em linha”, apresentando um tratamento sistemático nesta área de padrão proibido, estudando operações, simetrias, estruturas, transformações, e principalmente, técnicas de contagem para este fim.

**Palavras-chave:** permutações, permutações evitando padrões, padrões proibidos, permutação restrita.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 A Noção de Padrão em Permutações</b>	<b>2</b>
1.1 Conceitos Básicos . . . . .	2
1.2 Padrões e a Classificação de Wilf . . . . .	3
1.3 Simetrias em Permutações . . . . .	4
1.4 Padrões de Tamanho Dois . . . . .	6
<b>2 Padrões de Tamanho Três</b>	<b>7</b>
2.1 Classificações para Permutações . . . . .	7
2.2 Exibindo uma Bijeção . . . . .	8
2.3 Números de Catalan . . . . .	11
2.3.1 Fórmula de Recorrência . . . . .	11
2.3.2 Fórmula Explícita . . . . .	12
2.3.3 Um Limitante Superior . . . . .	13
<b>3 Padrões de Tamanho Quatro</b>	<b>15</b>
3.1 Classificação dos Padrões de Tamanho 4 . . . . .	15
3.2 Evidência Numérica . . . . .	17
3.3 Os Padrões 1234 e 1324 . . . . .	18
3.4 Análise Assintótica . . . . .	19
<b>4 O Padrão 1234</b>	<b>20</b>
4.1 As Conjecturas de Stanley-Wilf . . . . .	20
4.2 Padrões Monótonos . . . . .	21
4.3 A Fórmula Exata . . . . .	22
<b>5 O Padrão 1324</b>	<b>23</b>
5.1 Decomposição em Duas Cores . . . . .	23
5.2 Decomposição em Quatro Letras . . . . .	24
5.3 Um Limitante Superior . . . . .	27

<b>6</b>	<b>O Padrão 1342</b>	<b>29</b>
6.1	Descrição de Árvores tipo Beta . . . . .	29
6.2	Árvores Constituídas por um Único Caminho . . . . .	33
6.3	Árvores Beta com Rótulos Nulos . . . . .	34
6.4	Normalização de Permutações . . . . .	35
6.5	Importância das Árvores Beta . . . . .	37
6.6	A Fórmula . . . . .	42
	<b>Considerações</b>	<b>45</b>
	<b>A Cálculos. Wolfram Mathematica</b>	<b>46</b>
	<b>B Expansão Binomial</b>	<b>48</b>
	B.1 Exemplo . . . . .	48
	B.2 Exemplo . . . . .	49
	<b>C Fórmula de Stirling</b>	<b>51</b>
	<b>Referência Bibliográfica</b>	<b>53</b>
	<b>Índice Remissivo</b>	<b>53</b>



# Agradecimentos

À CAPES e ao CNPq, pelo auxílio financeiro.

Ao professor José Plínio de Oliveira Santos, pela orientação.

Aos colegas que contribuíram para este trabalho:

Renata Rodrigues Marcuz silva,

Nelson Gomes Brasil,

Marcus Vinicius Silva Nascimento,

David Occhioni e

Douglas Mendes.

E também a Miklós Bóna que prontamente respondeu minhas dúvidas.

# Introdução

Neste trabalho apresentamos algumas idéias relacionadas a padrões associados a permutações. Um padrão em uma permutação expressa uma relação de ordem. Por exemplo, o padrão 213 quer dizer que a segunda entrada é menor do que a primeira, que por sua vez é menor do que a terceira, em uma subsequência de uma permutação.

Esta área de padrão em permutação é relativamente nova e uma primeira aplicação foi considerada em programação de computadores por Donald Knuth [11], em 1968, que mostrou que uma permutação pode ser ordenada por uma pilha<sup>1</sup> se, e somente se, ela evita o padrão 231, e que estas permutações que evitam 231 são enumeradas pelos números de Catalan.

Uma outra aplicação é em biologia, mencionada no livro [9], de 2009, onde os autores afirmam que esse problema de permutação ordenada por pilha é um caso particular de problemas de rearranjo de genomas.

A elaboração desta dissertação não foi para tratar de mais uma aplicação, e sim estudar apenas os resultados teóricos que têm como base artigos de Miklós Bóna, que foram compilados no livro [5], e está organizada como segue:

No Capítulo 1, relembramos alguns conceitos básicos: a noção de padrão e operações com permutações. No Capítulo 2, estudamos as permutações que evitam um padrão de tamanho 3 e concluímos que elas são enumeradas pelos números de Catalan. No Capítulo 3, usamos as simetrias das operações sobre permutações e resultados de outros artigos para reduzir à três classes de padrões de tamanho 4, representadas por 1234, 1324 e 1342. No Capítulo 4, vamos abordar alguns resultados para o padrão monótono 1234. No Capítulo 5, deduzimos um limitante superior para as permutações que evitam o padrão 1324. No Capítulo 6, estudamos uma bijeção entre um tipo particular de árvores enraizada e as permutações que evitam o padrão 1342, encontrando uma fórmula para enumerar estas permutações.

---

<sup>1</sup>Pilha é uma estrutura abstrata de dados que, literalmente, empilha as informações, sendo estas resgatadas na ordem reversa de armazenamento, isto é, a primeira informação a ser inserida na pilha é a última a ser resgatada.

# Capítulo 1

## A Noção de Padrão em Permutações

Iniciamos este trabalho, relembrando algumas definições relacionadas a permutações e introduzindo novos conceitos como operação de simetria e as classes de Wilf. Discutiremos o que vem a ser um padrão no contexto deste trabalho, e para isto damos a noção de padrão proibido em uma permutação.

### 1.1 Conceitos Básicos

**Definição 1.1.1.** *Considere a notação  $[n] = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ . Qualquer agrupamento linear e aleatório dos elementos do conjunto  $[n]$  é chamado de uma **permutação**, ou, se quisermos dar ênfase ao fato de que consiste de  $n$  entradas, uma  $n$ -permutação. Em outras palavras, uma permutação dispõe todos os elementos de  $[n]$  de modo que cada elemento seja listado apenas uma vez.*

**Notações.**

$S_n$  : conjunto de todas as  $n$ -permutações.

$|S_n|$  : cardinalidade de  $S_n =$  número de  $n$ -permutações.

Para  $p \in S_n$ , vamos usar a “notação posicional em linha”:

$p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  ou  $p = p_1 p_2 \dots p_n$ , sendo  $p_i$  a  $i$ -ésima entrada de  $p$ .

**Exemplo 1.1.2.** *Seja  $n = 3$ , então  $[3] = \{1, 2, 3\}$ ,  $S_3 = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$  e  $|S_3| = 6$ .*

**Teorema 1.1.3.**  $|S_n| = n!$  .

*Demonstração.* Ao construirmos uma  $n$ -permutação  $p = p_1 p_2 \dots p_n$ , podemos escolher  $n$  entradas para desempenhar o papel de  $p_1$ , assim, restam  $n - 1$  entradas para  $p_2$ , e assim por diante, até que sobre 1 entrada para  $p_n$ . Pelo princípio multiplicativo:  $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 1 = n!$   $\square$

**Definição 1.1.4.** *Considere a permutação  $p = p_1 p_2 \dots p_n \in S_n$ . Dizemos que  $(p_i, p_j)$  é um par de **entradas revertidas** em  $p$  se  $i < j$  mas  $p_i > p_j$ . Ou seja, entradas revertidas são um par de quaisquer entradas de  $p$ , tais que a primeira entrada seja a maior.*

**Exemplo 1.1.5.** *A permutação  $p = 31524$  possui quatro pares de entradas revertidas:  $(3, 1)$ ,  $(3, 2)$ ,  $(5, 2)$  e  $(5, 4)$ .*

## 1.2 Padrões e a Classificação de Wilf

**A noção de padrão.** Considere a permutação  $p = 256413$  e a subsequência  $r = (2, 5, 4)$  de  $p$ , dizemos que  $r$  forma um **padrão** do tipo  $q = 132$ , isto significa que, em  $r$ , a primeira entrada de  $r$  é a menor entre as três, a segunda é a maior, e a terceira é maior do que a primeira e menor do que a segunda; ou seja,  $r_1 < r_3 < r_2$  assim como  $q_1 < q_3 < q_2$ . Note que  $q$  também é uma permutação, mas com outro significado, isto é, um padrão expressa a relação de ordem entre as entradas de uma subsequência da permutação  $p$ . Por outro lado, não existe em  $p$  uma subsequência crescente de tamanho 4 ( $q = 1234$ ), então vamos dizer que  $p$  **contém** o padrão 132, e que  $p$  **evita** o padrão 1234.

Formalizando o conceito de padrão:

**Definição 1.2.1.** Considere as permutações  $p = p_1p_2 \cdots p_n \in S_n$  e  $q = q_1q_2 \cdots q_k \in S_k$ . Dizemos que  $p$  **contém** o **padrão**  $q$  se existir em  $p$  uma subsequência de tamanho  $k$ ,  $p_{i_1}p_{i_2} \cdots p_{i_k}$ , cujas entradas estão na mesma ordem relativa, como aquelas em  $q$ , isto é,  $p_{i_a} < p_{i_b} \Leftrightarrow q_a < q_b$  para todos  $1 \leq a, b \leq k$ . Se  $p$  não contiver  $q$ , então dizemos que  $p$  **evita**  $q$ ; ou,  $q$  é proibido em  $p$ . Em outras palavras,  $p$  contém  $q$  como um padrão, se  $p$  contiver uma subsequência que expresse entre suas entradas o mesmo tipo de “relação” que tem as entradas de  $q$ .

**Notações.**

$$S_n(q) := \{p \in S_n; p \text{ evita } q\}.$$

$$\mathcal{A}_n(q) = |S_n(q)| : \text{número de } n\text{-permutações que evitam } q.$$

**Exemplo 1.2.2.** A permutação 214653 contém 231 (considere as entradas 463), mas evita 4321. E a permutação 3451267 evita o padrão 321, uma vez que não contém uma subsequência decrescente de tamanho 3, mas contém o padrão 2134 representado pelas entradas 4267 ou 3167.

**Consequências da Definição 1.2.1:**

Obviamente, se  $k > n$ , então todo  $p \in S_n$  evita  $q$ . Assim,  $\mathcal{A}_n(q) = |S_n| = n!$ .

**Situação Especial:**  $\mathcal{A}_0(q) = |S_0| = 0! = 1$ .

Se  $k = n$ , então  $q \in S_n$ . Assim, o único  $p \in S_n$  que contém  $q$  é o próprio  $q$ .

Logo,  $\mathcal{A}_n(q) = |S_n| - 1 = n! - 1$ .

Se  $k < n$ , então  $\mathcal{A}_n(q)$  é o objeto do nosso estudo.

**Observação 1.2.3.** Segundo nossa terminologia, um par de entradas revertidas (Definição 1.1.4) forma um padrão 21.

A seguir vamos definir a classificação para padrões, introduzida por Herbert Saul Wilf (1931-2012), matemático e pesquisador nesta área de padrões proibidos.

**Definição 1.2.4.** Sejam  $r$  e  $s$  dois padrões de mesmo tamanho, tais que  $\mathcal{A}_n(r) = \mathcal{A}_n(s)$ , para todo  $n$ , então dizemos que  $r$  e  $s$  pertencem à mesma **W-classe** (ou, **classe de Wilf**). Também nos referimos aos conjuntos  $S_n(r)$  e  $S_n(s)$  como **W-equivalentes**.

**Exemplo 1.2.5.** Por razões óbvias,  $\mathcal{A}_3(123) = 5 = \mathcal{A}_3(231)$ , então 123 e 231 pertencem à mesma W-classe. E os conjuntos  $S_3(123)$  e  $S_3(231)$  são W-equivalentes.

### 1.3 Simetrias em Permutações

**Definição 1.3.1.** Considere a permutação  $p = p_1 p_2 \cdots p_n \in S_n$ . Definimos as operações:

- **reversão** de  $p$  como  $p^r = p_1^r p_2^r \cdots p_n^r$ , com  $p_i^r = p_{n+1-i}$ , ou seja,  $p^r = p_n p_{n-1} \cdots p_1$ ,
- **complementação** de  $p$  como  $p^c = p_1^c p_2^c \cdots p_n^c$ , com  $p_i^c = n + 1 - p_i$  e
- **inversão** de  $p$  como  $p^{-1} = p_1^{-1} p_2^{-1} \cdots p_n^{-1}$ , com  $p_i^{-1} = j \Leftrightarrow p_j = i$ .

**Exemplo 1.3.2.** Seja  $p = 13524$ , então a sua reversa é  $p^r = 42531$ , a sua complementar é  $p^c = 53142$  e a sua inversa é  $p^{-1} = 14253$ . Note também que  $(p^r)^c = 24135 = (p^c)^r$ .

**Observação 1.3.3.** Estas três operações sobre os padrões preservam as  $W$ -classes.

A reversa da complementar é igual à complementar da reversa:

$$\begin{aligned} (p_i^r)^c &= n + 1 - p_i^r = n + 1 - p_{n+1-i} \quad \text{e} \quad (p_i^c)^r = p_{n+1-i}^c = n + 1 - p_{n+1-i} \\ &\implies (p^r)^c = (p^c)^r. \end{aligned}$$

**Representação matricial de uma permutação** (referência [16]).

Uma permutação  $p \in S_n$  pode ser representada por  $P = (\delta_{p_i, j})$ , uma matriz de permutação de ordem  $n$ , sendo  $\delta_{p_i, j}$  o delta de Kronecker,

$$\delta_{p_i, j} = \begin{cases} 1, & \text{se } p_i = j \text{ e} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Por exemplo,

$$p = 13524 \quad \Leftrightarrow \quad P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (1.1)$$

Sendo  $P$  quadrada, podemos enxergar nela, eixos de simetria assim como os eixos do quadrado da figura 1.1, e relacioná-los com as operações. Isto facilita o entendimento das simetrias nas operações.

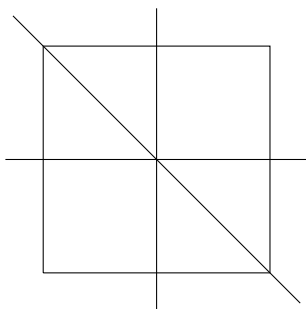


Figura 1.1: Eixos de Simetrias do Quadrado

Assim, as operações definidas em 1.3.1 estão relacionadas com os eixos de simetrias, da seguinte forma:

- a reversão é uma reflexão em torno do eixo horizontal,
- a complementação é uma reflexão em torno do eixo vertical, e
- a inversão é uma reflexão em torno do eixo da diagonal principal (assim como, a inversa de uma matriz de permutação é a sua transposta).

**Exemplo 1.3.4.** A permutação  $p = 13524$  e a permutação reversa  $p^r = 42531$ ,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad P^r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Fica entendido que,  $p$  evita  $q \Leftrightarrow p^r$  evita  $q^r$ .

E, também,  $q$  e  $q^r$  compartilham a mesma W-classe.

**Exemplo 1.3.5.** A permutação  $p = 13524$  e a permutação complementar  $p^c = 53142$ ,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad P^c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Visto que a complementação corresponde à comutação dos símbolos “>” e “<”, isto é, trocamos as entradas: a maior com a menor, a segunda maior com a segunda menor, e assim por diante, efetuando  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  trocas.

Fica fácil ver que,  $p$  evita  $q \Leftrightarrow p^c$  evita  $q^c$ .

E, ainda,  $q$  e  $q^c$  compartilham da mesma W-classe.

**Exemplo 1.3.6.** A permutação  $p = 13524$  e a permutação inversa  $p^{-1} = 14253$ ,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Podemos obter a permutação inversa,  $p^{-1}$ , de varias formas. Por exemplo, seja  $p = 1423$ , a inversa de  $p$ :

- usando a *notação de ciclos*, obtemos  $[1423]^{-1} = [(1)(243)]^{-1} = (1)(234) = 1342$ .
- usando a *notação posicional de duas linhas*,  $p = \left( \begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{smallmatrix} \right)$ , também temos  $p^{-1} = 1342$ .
- ou, basta reverter os pares do conjunto  $1423 = \{(1, 1), (2, 4), (3, 2), (4, 3)\}$ .

Assim, fica fácil ver que  $p$  evita  $q \Leftrightarrow p^{-1}$  evita  $q^{-1}$ .

E, mais,  $q$  e  $q^{-1}$  pertencem à mesma W-classe.

Permutações que contenham um dado padrão, podem contê-lo mais de uma vez; assim, existe também o número de ocorrência deste padrão. É extremamente difícil trabalhar com esta questão. Por isso, vamos nos concentrar no caso de permutações que evitam um padrão  $q$ . Ou seja, vamos tentar encontrar o número  $\mathcal{A}_n(q)$ .

## 1.4 Padrões de Tamanho Dois

Considere a permutação  $p = 123 \cdots n \in S_n$ , cujas entradas formam uma sequência crescente. Logo,  $p$  evita o padrão  $q = 21$ , pois  $q$  é decrescente. E ainda,  $p$  é a única permutação que evita 21, pois qualquer outra permutação em  $S_n$  diferente de  $p$  vai conter 21, uma vez que teremos, pelo menos, um par de entradas revertidas.

Assim, para todo  $p' \in S_n \setminus \{p\} \Rightarrow p'$  contém o padrão 21. Ou seja,  $\mathcal{A}_n(21) = 1$ .

De maneira análoga, a permutação  $p^r = n(n-1) \cdots 1$ , cujas entradas formam uma sequência decrescente, é a única permutação que evita o padrão  $q = 12$ .

Logo, para todo  $p' \in S_n \setminus \{p^r\} \Rightarrow p'$  contém o padrão 12. Ou seja,  $\mathcal{A}_n(12) = 1$ .

Portanto,  $\mathcal{A}_n(12) = 1 = \mathcal{A}_n(21)$ . Implicando em uma única W-classe para os padrões de tamanho dois.

Assim, o primeiro caso não trivial é o dos padrões de tamanho três.

# Capítulo 2

## Padrões de Tamanho Três

Como vimos no Capítulo 1, é trivial obter o número de permutações que evitam um padrão de tamanho dois. A tarefa de calcular tal número para padrões de tamanho três não é tão trivial, mas também não é complicada.

Existem seis padrões de tamanho três, mas podemos reduzir este número examinando as simetrias entre eles (Definição 1.3.1).

Se uma permutação evita 123, então a sua reversa evita 321, assim  $\mathcal{A}_n(123) = \mathcal{A}_n(321)$ .

Da mesma forma, se uma permutação evita 132, então a sua reversa evita 231, a sua complementar evita 312, e a reversa da sua complementar evita 213. Por isso, também temos

$$\mathcal{A}_n(132) = \mathcal{A}_n(231) = \mathcal{A}_n(312) = \mathcal{A}_n(213).$$

Até aqui, temos duas W-classes para os padrões de tamanho três. Agora, se existir uma bijeção do conjunto  $S_n(132)$  ao conjunto  $S_n(123)$ , então teremos  $\mathcal{A}_n(123) = \mathcal{A}_n(132)$ . Ou seja, somente uma W-classe para estes padrões, significando que existe apenas um número  $\mathcal{A}_n(q)$ , para  $q$  de tamanho 3.

### 2.1 Classificações para Permutações

Vamos começar com algumas propriedades das entradas em uma permutações em  $S_n$ .

**Definição 2.1.1.** *Seja  $p = p_1 p_2 \cdots p_n \in S_n$ . Dizemos que  $p_k$  é uma (entrada) **mínima da esquerda para a direita** e denotamos por  $\min_{\rightarrow}$  se, para todo  $i < k$ , tivermos  $p_i > p_k$ . Ou seja, uma  $\min_{\rightarrow}$  é uma entrada que é menor do que todas que vêm antes dela.*

*De forma análoga, podemos definir **máxima da esquerda para a direita** e, também, **máxima (ou mínima) da direita para a esquerda** ( $\max_{\rightarrow}$ ,  $\max_{\leftarrow}$ ,  $\min_{\leftarrow}$ ).*

**Consequências da Definição 2.1.1:**

- A entrada  $p_1$  sempre será uma  $\min_{\rightarrow}$ , pois nada existe à sua esquerda.
- A entrada 1 sempre será uma  $\min_{\rightarrow}$ , pois é a menor de todas.



- A sequência das entradas  $\min_{\rightarrow}$  é decrescente.
- Observações análogas valem para as entradas  $p_n$ ,  $n$  e as  $\max_{\leftarrow}$ .

**Exemplo 2.1.2.** *Seja  $p = 6734125$ , então as  $\min_{\rightarrow}$  de  $p$  são 6, 3 e 1. E as  $\max_{\leftarrow}$  de  $p$  são 7 e 5.*

Agora vamos introduzir a classificação para permutações que leva em consideração as  $\min_{\rightarrow}$ , as  $\max_{\leftarrow}$  e também as posições que elas ocupam.

**Definição 2.1.3.** *Sejam  $x$  e  $y$  duas permutações que satisfazem as seguintes regras:*

- as  $\min_{\rightarrow}$  de  $x$  coincidem com as de  $y$ ,
- as posições das  $\min_{\rightarrow}$  de  $x$  coincidem com as de  $y$  e
- condições análogas valem para as  $\max_{\leftarrow}$  de  $x$  e  $y$ .

Então, dizemos  $x$  e  $y$  pertencem à mesma **classe**.

Considerando somente as duas primeiras regras (referentes às  $\min_{\rightarrow}$ ), dizemos que  $x$  e  $y$  pertencerem à mesma **classe fraca**.

**Notação para classe.** Por exemplo, a sequência  $a_1\_a_2\_b_1$  denota a classe de permutações em  $S_6$ , que têm duas  $\min_{\rightarrow}$ ,  $a_1$  e  $a_2$ , que estão na primeira e terceira posições, e uma  $\max_{\leftarrow}$ ,  $b_1$ , que está na última posição e “\_” representa a posição de uma entrada remanescente.

**Exemplo 2.1.4.** *As permutações  $x = 51234$  e  $y = 51324$  pertencem à classe  $C : 51\_4$ , pois satisfazem as condições da Definição 2.1.3. Agora, veja que  $z = 24315$  e  $v = 24135$  possuem as mesmas  $\min_{\rightarrow}$ , no entanto não estão na mesma classe, pois 1 é a quarta entrada em  $z$  e é a terceira entrada em  $v$ .*

**Exemplo 2.1.5.** *As permutações 456312 e 465312 estão na mesma “classe fraca”  $C : 4\_31\_$ . As permutações 31524 e 34152 não estão na mesma classe fraca.*

## 2.2 Exibindo uma Bijecção

O lema a seguir descreve a bijecção procurada.

**Lema 2.2.1.** *Para todo inteiro positivo  $n$ , temos  $\mathcal{A}_n(123) = \mathcal{A}_n(132)$ .*

*Demonstração.* Considere os conjuntos  $S_n(q)$ , para  $q \in \{132, 123\}$ . Vamos

- construir uma função  $f : S_n(132) \rightarrow S_n(123)$ , e
- mostrar que  $f$  é bijetora.

(a) Para  $p \in S_n(132)$ , definimos  $f(p)$  da seguinte forma: identificamos a *classe fraca* à qual  $p$  pertence (isto é, mantemos fixas em suas posições todas as  $\min_{\rightarrow}$  de  $p$ ) e vamos preencher as demais posições de  $f(p)$  com as entradas remanescentes, em ordem decrescente.

Ou seja, a permutação  $f(p)$  pertence à mesma classe fraca de  $p$  e é obtida da intercalação de duas sequências decrescentes: a das  $\min_{\rightarrow}$  e a das entradas remanescentes organizadas em ordem decrescente. Logo,  $f(p)$  sempre evita o padrão 123. Pois, tomamos três entradas de duas sequências que estão em ordem decrescente, então, pelo menos, duas entradas são da mesma sequência, ou seja, estão em ordem decrescente.

**Exemplo 2.2.2.** *Seja  $p = 67341258$ , então  $f(p) = 68371542$ , pois:*

1º *Identificamos a classe fraca  $C : 6 \_ 3 \_ 1 \_ \_ \_$ , à qual  $p$  pertence.*

2º *Organizamos as entradas remanescentes, em ordem decrescente,  $\{8, 7, 5, 4, 2\}$ .*

3º *Preenchemos as lacunas, obtendo  $f(p) = 68371542$ .*

Simplesmente, podemos dizer que  $f$  reorganiza as  $m$  entradas que não são  $\min_{\rightarrow}$ .

Em  $f(p)$ , todas as entradas remanescentes formam uma sequência decrescente, enquanto que em  $p$ , todas as entradas maiores do que uma determinada  $\min_{\rightarrow}$  formam uma sequência crescente.

Um algoritmo que execute tal tarefa, faz comparações duas a duas, e sempre que não estiver em ordem decrescente, ele as troca. Cada passo deste algoritmo move uma entrada menor para a direita e uma maior para a esquerda, fazendo com que *nunca* crie uma nova  $\min_{\rightarrow}$ . Assim sendo, ele acaba em, no máximo,  $\binom{m}{2}$  passos.

Com o conjunto  $S_n(132)$  e as  $\min_{\rightarrow}$  fixadas em suas posições,  $f(p)$  é a única permutação evitando 123. Pois, se existissem duas entradas remanescentes  $x$  e  $y$  que formassem um padrão 12, isto é,  $x < y$ , então a  $\min_{\rightarrow} z$  que está mais próximo de  $x$  pelo lado esquerdo, e as entradas  $x$  e  $y$ , formariam uma sequência crescente  $zxy$ , isto é, um padrão 123.

(b) Para provar que  $f$  é uma bijeção, mostraremos que ela tem uma inversa. Seja  $q \in S_n(123)$ . Identificamos a *classe fraca* à qual  $q$  pertence. E, preenchemos as lacunas, da esquerda para a direita, com as entradas remanescentes, como segue: Em cada etapa, colocamos a menor entrada ainda não colocada que seja maior do que a  $\min_{\rightarrow}$  que está mais próxima à esquerda e completamos, em ordem crescente, até a próxima  $\min_{\rightarrow}$ . Chame a permutação obtida de  $g(q)$ .

**Exemplo 2.2.3.** *Seja  $q = 68371542$ , então  $g(q) = 67341258$ , pois:*

1º *Identificamos a classe fraca  $C : 6 \_ 3 \_ 1 \_ \_ \_$ , à qual  $q$  pertence.*

2º *Organizamos as entradas remanescentes, em subsequências crescentes, a partir de cada  $\min_{\rightarrow}$ ,  $\{7, 8\}$ ,  $\{4, 5\}$  e  $\{2\}$ .*

3º *Colocamos na primeira lacuna a menor das duas entradas que são maiores do que a  $\min_{\rightarrow}$  6. Na lacuna entre 3 e 1, colocamos a menor entrada ainda não utilizada que seja maior do que 3. Imediatamente à direita de 1, colocamos a menor entrada ainda não utilizada que seja maior do que 1, isto é, 2.*

4º Nos espaços restantes, completamos colocando 5 e 8, obtendo  $g(q) = 67341258$ .

A permutação obtida sempre vai evitar 132. De fato, se houvesse um padrão 132 nela, então seria um que começasse com uma  $\min_{\rightarrow}$ , mas isto é impossível, pois as entradas maiores do que qualquer  $\min_{\rightarrow}$  dada são escritas em ordem crescente.

Note, novamente, que  $g(q)$  é a única permutação evitando 132 que pertence à mesma classe fraca que  $q$ . De fato, se, por exemplo, duas entradas  $u < v$  que são maiores do que a  $\min_{\rightarrow} a$ , estivessem em ordem decrescente ( $vu$ ), então a sequência  $avu$  formaria um padrão 132.

Portanto, temos que  $g(f(p)) = p$ , o que implica que  $f$  é uma bijeção, provando o lema.  $\square$

Assim,  $\mathcal{A}_n(q)$  não depende de  $q$ , desde que o seu tamanho seja três.

**Teorema 2.2.4.** *Para todo inteiro positivo  $n$ , temos*

$$\mathcal{A}_n(132) = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

*Demonstração.* Seja  $C_n = \mathcal{A}_n(132)$ . Se tivermos uma  $n$ -permutação evitando 132 na qual a entrada  $n$  se encontra na posição  $i$ , então qualquer entrada à esquerda de  $n$  deve ser maior do que qualquer entrada à direita de  $n$ . De fato, se  $x$  e  $y$  violassem esta condição, então  $xny$  seria um padrão 132. Portanto, o conjunto das entradas à esquerda de  $n$  deve ser  $\{n-i+1, n-i+2, \dots, n-1\}$ , e o conjunto das entradas à direita de  $n$  deve ser  $[n-i]$ . Assim, existem  $C_{i-1}$  possibilidades para ordenar as entradas à esquerda de  $n$  e  $C_{n-i}$  possibilidades para ordenar as entradas à direita de  $n$ . Somando todos os  $i$  teremos a recursão  $C_n = \sum_{i=1}^n C_{i-1} C_{n-i}$ .

Note que, se a entrada  $n$  estiver na posição 1, temos  $C_0$  à esquerda de  $n$  e  $C_{n-1}$  à direita de  $n$ , resultando em  $C_0 \cdot C_{n-1}$  possibilidades.

Temos também que  $C_0 = \mathcal{A}_0(132) = 0! = 1$  (Consequências da Definição 1.2.1).

Assim, a fórmula de recorrência obtida,

$$C_n = \sum_{j=0}^{n-1} C_j C_{n-j-1}, \tag{2.1}$$

juntamente com a condição inicial,  $C_0 = 1$ , é a expressão que gera a **sequência dos números de Catalan**.

Note ainda que, segundo a Definição 1.2.1, os valores:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0(132) &= |S_0| = 0! = 1 \\ \mathcal{A}_1(132) &= |S_1| = 1! = 1 \\ \mathcal{A}_2(132) &= |S_2| = 2! = 2 \\ \mathcal{A}_3(132) &= |S_3| - 1 = 3! - 1 = 5 \end{aligned}$$

coincidem com os primeiros termos ( $C_0, C_1, C_2, C_3, \dots$ ) da *sequência dos números de Catalan*, que é gerada pela equação de recorrência (2.1), com a condição inicial  $C_0 = 1$ . Para estes números existe uma fórmula exata (deduzida na próxima seção), assim,

$$\mathcal{A}_n(132) = C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}, \tag{2.2}$$

provando o teorema. □

Devido às identidades  $\mathcal{A}_n(132) = \mathcal{A}_n(231) = \mathcal{A}_n(312) = \mathcal{A}_n(213)$ , e  $\mathcal{A}_n(123) = \mathcal{A}_n(321)$ , fica provado o seguinte resultado:

**Corolário 2.2.5.** *Seja  $q$  um padrão de tamanho três. Então temos*

$$\mathcal{A}_n(q) = C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

## 2.3 Números de Catalan

A sequência: 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, ... , é conhecida como sequência dos números de Catalan - o nome é devido ao matemático belga Eugène Charles Catalan (1814-1894). Ela aparece em vários problemas de contagem e talvez seja a sequência mais famosa em análise combinatória.

**Exemplo 2.3.1.** *Seja  $C_n$  o número de maneiras de especificar a ordem do produto de  $(n+1)$  parcelas:  $x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdots x_n$ , colocando parênteses, '( ' )'.*

*Se  $n = 3$ , então existem  $C_3 = 5$  maneiras:*

$$\begin{aligned} & ((x_0 \cdot x_1) \cdot x_2) \cdot x_3, & (x_0 \cdot (x_1 \cdot x_2)) \cdot x_3, & (x_0 \cdot x_1) \cdot (x_2 \cdot x_3), \\ & x_0 \cdot ((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3) & e & x_0 \cdot (x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3)) \end{aligned}$$

**Solução.** *Note que a última multiplicação fica fora dos ( ). Suponha que ela esteja entre os números  $x_k$  e  $x_{k+1}$ , assim, existem  $C_k$  maneiras referentes ao produto  $x_0 \cdot x_1 \cdots x_k$  e  $C_{n-k-1}$  maneiras referentes ao produto  $x_{k+1} \cdot x_{k+2} \cdots x_n$ . totalizando  $C_k C_{n-k-1}$  maneiras de inserir os ( ) para um dado  $k$ .*

*Somando todos os  $k$ , temos:  $C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}$ .*

### 2.3.1 Fórmula de Recorrência

Os números de Catalan podem ser descritos recursivamente:

$$\begin{aligned} C_0 &= 1 \leftarrow \text{condição inicial,} \\ C_1 &= C_0 C_0 = 1, \\ C_2 &= C_0 C_1 + C_1 C_0 = 2, \\ C_3 &= C_0 C_2 + C_1 C_1 + C_2 C_0 = 5, \\ &\vdots \\ C_n &= \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}, \text{ para } n \geq 1. \end{aligned}$$

### 2.3.2 Fórmula Explícita

Obteremos uma fórmula fechada para os números de Catalan usando a função geradora

$$f(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} C_i x^i. \quad (2.3)$$

Multiplicando a equação (2.3) por si mesma, teremos

$$(f(x))^2 = C_0C_0 + (C_0C_1 + C_1C_0)x + (C_0C_2 + C_1C_1 + C_2C_0)x^2 \\ + (C_0C_3 + C_1C_2 + C_2C_1 + C_3C_0)x^3 + \dots$$

Assim,

$$(f(x))^2 = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + \dots \quad (2.4)$$

Multiplicando a equação (2.4) por  $x$  e somando  $C_0$ :

$$C_0 + x(f(x))^2 = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + \dots \quad (2.5)$$

Agora, temos uma equação do segundo grau:

$$C_0 + x(f(x))^2 = f(x) \Rightarrow x(f(x))^2 - f(x) + C_0 = 0, \quad (2.6)$$

cujas soluções são:

$$f(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x}}{2x}. \quad (2.7)$$

De (2.3), sabemos que  $f(0) = C_0 = 1$ . E  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sqrt{1 - 4x}}{2x} = \infty$ .

Por isso descartamos a solução com o sinal  $+$ , assim

$$f(x) = \frac{1 - (1 - 4x)^{1/2}}{2x}. \quad (2.8)$$

Expandindo o binômio:

$$(1 - 4x)^{1/2} = 1 + \binom{1}{2} \frac{(-4x)}{1} + \binom{1}{2} \binom{-1}{2} \frac{(-4x)^2}{2 \cdot 1} + \\ + \binom{1}{2} \binom{-1}{2} \binom{-3}{2} \frac{(-4x)^3}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \binom{1}{2} \binom{-1}{2} \binom{-3}{2} \binom{-4}{2} \frac{(-4x)^4}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + \\ + \binom{1}{2} \binom{-1}{2} \binom{-3}{2} \binom{-4}{2} \binom{-5}{2} \frac{(-4x)^5}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + \dots$$

Efetuando as contas:

$$(1 - 4x)^{1/2} = 1 - \frac{1}{1!} 2x - \frac{1}{2!} 4x^2 - \frac{3 \cdot 1}{3!} 8x^3 - \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{4!} 16x^4 - \frac{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{5!} 32x^5 - \dots$$

Subtraindo de 1 esta última expressão:

$$1 - (1 - 4x)^{1/2} = \frac{1}{1!} 2x + \frac{1}{2!} 4x^2 + \frac{3 \cdot 1}{3!} 8x^3 + \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{4!} 16x^4 + \frac{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{5!} 32x^5 + \dots$$

Dividindo por  $2x$ , obtemos a função (2.8) expandida:

$$f(x) = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} 2x + \frac{3 \cdot 1}{3!} 4x^2 + \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{4!} 8x^3 + \frac{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{5!} 16x^4 + \dots \quad (2.9)$$

Reescrevendo o produto  $(2k - 1) \cdot (2k - 3) \cdots 3 \cdot 1$ , com  $k \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} (2k - 1) \cdot (2k - 3) \cdots 3 \cdot 1 &= \frac{(2k - 1) \cdot (2k - 3) \cdots 3 \cdot 1 \cdot (2k) \cdot (2k - 2) \cdots 4 \cdot 2}{(2k) \cdot (2k - 2) \cdots 4 \cdot 2} \\ &= \frac{(2k) \cdot (2k - 1) \cdot (2k - 2) \cdot (2k - 3) \cdots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2^k \cdot k \cdot (k - 1) \cdots 2 \cdot 1} \\ &= \frac{(2k)!}{2^k \cdot k!} \end{aligned}$$

E, substituindo em (2.9):

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \frac{2!}{2! \cdot 1! \cdot 2^1} 2x + \frac{4!}{3! \cdot 2! \cdot 2^2} 4x^2 + \frac{6!}{4! \cdot 3! \cdot 2^3} 8x^3 + \frac{8!}{5! \cdot 4! \cdot 2^4} 16x^4 + \dots \\ f(x) &= 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{2!}{1! \cdot 1!} \right) x + \frac{1}{3} \left( \frac{4!}{2! \cdot 2!} \right) x^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{6!}{3! \cdot 3!} \right) x^3 + \frac{1}{5} \left( \frac{8!}{4! \cdot 4!} \right) x^4 + \dots \end{aligned}$$

Chegamos a expressão da função geradora dos números de Catalan

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1} \binom{2i}{i} x^i. \quad (2.10)$$

Assim, o  $i$ -ésimo número de Catalan é  $\frac{1}{i+1} \binom{2i}{i}$ .

### 2.3.3 Um Limitante Superior

Deduzindo um limitante superior para os números de Catalan.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n}{C_{n-1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!}{(n+1) \cdot n! \cdot n!} \cdot \frac{n \cdot (n-1)! \cdot (n-1)!}{(2n-2)!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n \cdot (2n-1) \cdot (2n-2)! \cdot n! \cdot (n-1)!}{(n+1) \cdot n! \cdot n \cdot (n-1)! \cdot (2n-2)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n \cdot (2n-1)}{(n+1) \cdot n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot (2n-1)}{(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-2}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4-2/n}{1+1/n} = 4 \end{aligned}$$

Segue que,

$$C_n = \frac{C_n}{C_{n-1}} \cdot \frac{C_{n-1}}{C_{n-2}} \cdots \frac{C_2}{C_1} \cdot \frac{C_1}{C_0} < 4 \cdot 4 \cdots 4 \cdot 4 = 4^n, \text{ com } C_0 = 1$$

Assim, o  $n$ -ésimo número de Catalan admite um limitante superior exponencial:

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} < 4^n.$$

# Capítulo 3

## Padrões de Tamanho Quatro

Agora, vamos estudar o número  $\mathcal{A}_n(q)$  para os padrões  $q$  de tamanho quatro. Esta tarefa será mais difícil quando comparada ao estudo do Capítulo 2, onde obtivemos uma única fórmula exata para o número de permutações que evitam um padrão de tamanho três.

### 3.1 Classificação dos Padrões de Tamanho 4

Existem 24 padrões de tamanho quatro, que estão listados na tabela 3.1, e organizados de forma que cada linha da tabela contenha um padrão  $q$  e seus correspondentes simétricos  $q^r$ ,  $q^c$  e  $(q^c)^r$ , ou seja,

$$\mathcal{A}_n(q) = \mathcal{A}_n(q^r) = \mathcal{A}_n(q^c) = \mathcal{A}_n((q^c)^r) .$$

Obviamente, todos os padrões de uma mesma linha pertencem à mesma  $W$ -classe. Com isto, conseguimos agrupá-los em 8  $W$ -classes.

#	$q$	$q^r$	$q^c$	$(q^r)^c = (q^c)^r$
1	1234	4321		
2	1243	3421	4312	2134
3	1324	4231		
4	1342	2431	4213	3124
5	1423	3241	4132	2314
6	1432	2341	4123	3214
7	2143	3412		
8	2413	3142		

Tabela 3.1: Padrões de tamanho 4, agrupados em 8  $W$ -classes

Note ainda que  $p$  evita  $q \Leftrightarrow p^{-1}$  evita  $q^{-1}$  (Capítulo 1). Deste fato temos, na nossa tabela, que os padrões nas linhas #4 e # 5 compartilham da mesma  $W$ -classe, então podemos agrupá-las,



ficando com 7 W-classes. Pois,

$$(1342)^{-1} = 1423 \Rightarrow \mathcal{A}_n(1342) = \mathcal{A}_n(1423).$$

#	$q$	$q^r$	$q^c$	$(q^r)^c = (q^c)^r$	$q^{-1}$	$(q^{-1})^r$	$(q^{-1})^c$	$((q^{-1})^r)^c$
1	1234	4321						
2	1243	3421	4312	2134				
3	1324	4231						
4	1342	2431	4213	3124	1423	3241	4132	2314
6	1432	2341	4123	3214				
7	2143	3412						
8	2413	3142						

Tabela 3.2: Tabela com 7 W-classes. Linhas #4 e #5 agrupadas.

Agora, vamos buscar novas ferramentas para reduzir ainda mais o número de W-classes.

O próximo resultado aparece no artigo [3] como teorema geral, de Backelin, West e Xin:

**Teorema 3.1.1.** *Seja  $k$  um inteiro positivo qualquer e  $q$  uma permutação no conjunto  $\{k+1, k+2, \dots, k+r\}$ . Então, para todo inteiro positivo  $n$ , temos*

$$\mathcal{A}_n(123 \cdots kq) = \mathcal{A}_n(k(k-1) \cdots 1q).$$

Aplicando o Teorema 3.1.1 para  $k=2$  e  $r=2$  temos o conjunto  $\{3, 4\}$ :

Se  $q=43$ , então  $\mathcal{A}_n(1243) = \mathcal{A}_n(2143)$ . Isto implica que os padrões das linhas # 7 e # 2 pertencem à mesma W-classe.

Se  $q=34$ , então  $\mathcal{A}_n(1234) = \mathcal{A}_n(2134)$ . E como  $((2134)^r)^c = 1243$ , logo  $\mathcal{A}_n(1234) = \mathcal{A}_n(2134) = \mathcal{A}_n(1243)$ . Isto implica que os padrões das linhas # 1 e # 2 pertencem à mesma W-classe.

Agora, aplicando o Teorema 3.1.1 para  $k=3$  e  $r=1$  temos  $q=4$ , então  $\mathcal{A}_n(1234) = \mathcal{A}_n(3214)$ . E como  $((3214)^r)^c = 1432$ , temos que os padrões das linhas # 1 e # 6 pertencem à mesma W-classe.

Da aplicação do Teorema 3.1.1 podemos remover, da nossa lista, as linhas # 2, # 7 e # 6, deixando apenas a linha # 1 para representá-las.

Agora, restam apenas 4 W-classes representadas pelos padrões 1234, 1324, 1342, e 2413.

$W_{1234}$	1234	4321	1243	3421	4312	2134	2143	3412	1432	2341	4123	3214
$W_{1324}$	1324	4231										
$W_{1342}$	1342	2431	4213	3124	1423	3241	4132	2314				
$W_{2413}$	2413	3142										

Tabela 3.3: Resultado parcial das W-classes para padrões de tamanho 4

O lema a seguir aparece no artigo [15] de Zvezdelina Stankova, com ele podemos eliminar mais uma linha da tabela (ou seja, agrupar duas W-classes).

**Lema 3.1.2.** *Para todo inteiro positivo  $n$ , temos  $\mathcal{A}_n(4132) = \mathcal{A}_n(3142)$ .*

Este resultado diz que  $\mathcal{A}_n(1342) = \mathcal{A}_n(2413)$ ,

Assim, ficamos com três W-classes para analisar:

$W_{1234}$	1234	4321	1243	3421	4312	2134	2143	3412	1432	2341	4123	3214
$W_{1324}$	1324	4231										
$W_{1342}$	1342	2431	4213	3124	1423	3241	4132	2314	2413	3142		

Tabela 3.4: Tabela das 3 W-classes para padrões de tamanho 4

Portanto, vamos nos concentrar em apenas três W-classes, e para representá-las tomamos os padrões mais simples: 1234, 1342 e 1324.

## 3.2 Evidência Numérica

Julian West apresenta em sua tese de doutorado [18], de 1990, evidências que mostram como  $\mathcal{A}_n(q)$  cresce, partindo de  $n = 1$ , para  $q \in \{1342, 1234, 1324\}$ .

#	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathcal{A}_n(1342)$	1	2	6	23	103	512	2740	15485
$\mathcal{A}_n(1234)$	1	2	6	23	103	513	2761	15767
$\mathcal{A}_n(1324)$	1	2	6	23	103	513	2762	15793

Tabela 3.5: Evidência numérica para padrões de tamanho 4

Estes dados mostram que os números  $\mathcal{A}_n(q)$  não dependem apenas de  $n$ , como o caso dos padrões de tamanho 3, dependerão também do padrão  $q$ . Isto é, existem alguns padrões de tamanho quatro que são mais fáceis de evitar do que outros.

Ainda, com respeito à estes dados, surgem muitas questões, duas delas são imediatas.

**Questão 3.2.1.** *Para todo  $n \geq 7$ , podemos afirmar que  $\mathcal{A}_n(1234) < \mathcal{A}_n(1324)$ ?*

**Questão 3.2.2.** *Para todo  $n \geq 6$ , podemos afirmar que  $\mathcal{A}_n(1342) < \mathcal{A}_n(1234)$ ?*

Na próxima seção, vamos responder sim para a Questão 3.2.1.

A resposta da Questão 3.2.2 também é sim, como veremos no Capítulo 6.

### 3.3 Os Padrões 1234 e 1324

Aqui, a palavra classe se refere à classificação dada na Definição 2.1.3.

**Lema 3.3.1.** *Cada classe não vazia contém exatamente uma permutação evitando 1234.*

*Demonstração.* Vamos escolher, arbitrariamente, uma classe  $C$ , ou seja, conhecemos suas entradas que são  $\min_{\rightarrow}$  e  $\max_{\leftarrow}$  e as posições que ocupam. Se preencheremos as lacunas com as entradas remanescentes, em ordem decrescente, obteremos uma permutação que evita 1234, pois ela é composta por três subsequências decrescentes: a das  $\min_{\rightarrow}$ , a das  $\max_{\leftarrow}$  e a das entradas remanescentes. De outra forma, se a permutação, construída dessa maneira, contivesse um padrão 1234, então, pelo princípio da casa dos pombos, pelo menos, duas das entradas do padrão 1234 seriam de uma mesma subsequência decrescente, o que seria uma contradição. Note que, a classe  $C$  é não vazia se for possível escrever as entradas remanescentes, em ordem decrescente, sem entrar em conflito com as restrições existentes; caso contrário,  $C$  seria vazia. Portanto,  $C$  contém pelo menos uma permutação evitando 1234.

Por outro lado, podemos afirmar que a ordem decrescente das entradas remanescentes é a única que vai resultar em uma permutação evitando 1234. De fato, se colocarmos duas das entradas remanescentes, digamos  $a$  e  $b$ , em ordem crescente, juntamente com a  $\min_{\rightarrow}$  mais próxima de  $a$  pela esquerda e com a  $\max_{\leftarrow}$  mais próxima de  $b$  pela direita, formaria um padrão 1234.  $\square$

**Lema 3.3.2.** *Cada classe não vazia contém pelo menos uma permutação evitando 1324.*

*Demonstração.* Observe que, se uma permutação  $p = p_1p_2 \cdots p_n$  contiver um padrão 1324, representado pela subsequência  $(p_{i_1}, p_{i_2}, p_{i_3}, p_{i_4})$  então podemos escolhê-lo, desde que  $p_{i_1}$  seja uma  $\min_{\rightarrow}$  e  $p_{i_4}$  seja uma  $\max_{\leftarrow}$ . De fato, podemos simplesmente tomar qualquer padrão existente  $p_{i_1}p_{i_2}p_{i_3}p_{i_4}$ ; caso  $p_{i_1}$  não seja uma  $\min_{\rightarrow}$ , podemos substituí-lo pela  $\min_{\rightarrow}$  mais próxima à esquerda  $p_{i_o}$ ; caso  $p_{i_4}$  não seja uma  $\max_{\leftarrow}$ , podemos substituí-lo pela  $\max_{\leftarrow}$  mais próximo à direita  $p_{i_f}$ . Portanto, para mostrar que uma permutação evita 1324, é suficiente mostrar que ela não contém um padrão 1324, tendo uma  $\min_{\rightarrow}$  como primeira entrada e uma  $\max_{\leftarrow}$  como última entrada. Vamos chamá-lo de um *mau padrão*. Observe também que uma  $\min_{\rightarrow}$  ( $\max_{\leftarrow}$ ) só pode ser a primeira (última) entrada no padrão 1324.

Agora pegue qualquer permutação contendo 1324. Pelo argumento acima, temos um mau padrão, representado por  $p_{i_o}p_{i_2}p_{i_3}p_{i_f}$ . (Lembre que  $p_{i_o} < p_{i_3} < p_{i_2} < p_{i_f}$ ). Troque as entradas  $p_{i_2}$  e  $p_{i_3}$ . Observe que nós podemos fazer isso sem violar a classe a qual pertence, isto é, nenhuma entrada  $x$  vai para a esquerda de uma  $\min_{\rightarrow}$ , que seja maior do que  $x$ , e nenhuma entrada  $y$  vai para a direita de uma  $\max_{\leftarrow}$  que seja menor do que  $y$ . A permutação resultante é da mesma classe que a original porque a  $\min_{\rightarrow}$  e a  $\max_{\leftarrow}$  não foram alteradas. Se a permutação resultante ainda contiver um padrão 1324, repita este procedimento tantas vezes quanto possível, ou seja, contanto que padrões 1324 possam ser encontrados. Note que é crucial que, a cada passo do processo, o número de trocas de nossa permutação diminua de pelo menos um. Portanto, vamos ter de parar depois de no máximo  $\binom{n}{2}$  passos. Então, a permutação resultante final será da mesma classe que a original, mas não terá um mau padrão e, portanto, nenhum padrão 1324, como afirmamos.  $\square$

**Definição 3.3.3.** *Uma classe não vazia que contenha “mais do que uma” permutação evitando 1324 é chamada de **classe forte**.*

**Teorema 3.3.4.** *Para todo  $n \geq 7$ , temos  $\mathcal{A}_n(1234) < \mathcal{A}_n(1324)$ .*

*Demonstração.* Nos lemas anteriores, vimos que cada classe não vazia contém *exatamente* uma permutação evitando 1234 e pelo menos uma permutação evitando 1324. Agora, precisamos mostrar que, para  $n \geq 7$ , existem classes que contenham mais do que uma permutação evitando 1324.

Se  $n = 7$ , então a classe  $3\_1\_7\_5$  contém as permutações 3612745 e 3416725 que evitam 1324.

Se  $n > 7$ , então basta colocar as entradas  $n, n - 1, \dots, 8$  na frente de  $3\_1\_7\_5$ , sem  $\_$  adicionais. A classe obtida irá conter novamente duas permutações evitando 1324, vindas das entradas remanescentes, assim ordenadas: (6, 2, 4) e (4, 6, 2).

Então, mostramos que “pelo menos um” significa “mais do que um”, pelo menos uma vez, completando a prova do Teorema e respondendo à Questão 3.2.1.  $\square$

## 3.4 Análise Assintótica

**Definição 3.4.1.** *Dizemos que as sequências  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  e  $\{y_n\}_{n \geq 1}$  são **assintoticamente iguais** se*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 1.$$

**Proposição 3.4.2.** *As sequências*

$$\{\mathcal{A}_n(1234)\}_{n \geq 1} \quad \text{e} \quad \{\mathcal{A}_n(1324)\}_{n \geq 1}$$

*não são assintoticamente iguais.*

*Demonstração.* O número  $\mathcal{A}_n(1234)$  é igual ao número de classes fortes de  $n$ -permutações (Lema 3.3.1). E, numa mesma classe forte, o número  $\mathcal{A}_n(1324)$  é assintoticamente maior do que  $\mathcal{A}_n(1234)$ . Com efeito, para  $n > 7$ , é muito fácil criar, por concatenação, classes fortes que terminam em  $3\_1\_7\_5$ . Essas classes contêm pelo menos duas permutações evitando 1324. Por outro lado, constituem pelo menos um fator constante de cada classe forte, o que implica a afirmação.  $\square$

Existe uma noção ‘mais fraca’ de duas sequências crescendo aproximadamente à mesma taxa.

**Definição 3.4.3.** *Dizemos que as sequências  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  e  $\{y_n\}_{n \geq 1}$  são **assintoticamente iguais, no sentido logarítmico**, se*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{x_n}{y_n}} = 1.$$

**Definição 3.4.4.** *O limite de Stanley-Wilf para um padrão  $q$  qualquer é dado por*

$$\mathcal{L}(q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\mathcal{A}_n(q)}.$$

No artigo [1], os autores provaram que o limite  $\mathcal{L}(1324) \geq 9,47$ , enquanto, segue do Teorema 4.2.5, que o limite  $\mathcal{L}(1234) \leq 9$ . Portanto, as sequências  $\{\mathcal{A}_n(1234)\}$  e  $\{\mathcal{A}_n(1324)\}$  não são assintoticamente iguais, mesmo no sentido logarítmico.

Podemos, então, dizer que é mais fácil evitar o padrão 1324 do que evitar o padrão 1234.

# Capítulo 4

## O Padrão 1234

Como o padrão 1234 é monótono, então o número  $\mathcal{A}_n(1234)$  é um caso particular dos números  $\mathcal{A}_n(123\cdots k)$ , com  $k > 2$ . Com relação aos padrões monótonos existe um resultado que fornece uma fórmula assintótica e um limitante superior muito bom para os números  $\mathcal{A}_n(123\cdots k)$ . Não vamos trabalhar com este número, apenas abordar alguns fatos. Para  $k = 4$  existe uma fórmula exata.

### 4.1 As Conjecturas de Stanley-Wilf

As conjecturas a seguir aparecem na tese de doutorado de M. Bóna [4], de 1997, e foram atribuídas a R. P. Stanley e H.S. Wilf.

**Conjectura 4.1.1.** *Seja  $q$  um padrão qualquer. Então, existe uma constante  $c_q$ , tal que para todo inteiro positivo  $n$ ,*

$$\mathcal{A}_n(q) \leq c_q^n. \quad (4.1)$$

Esta conjectura que serve para todos os padrões; afirma que não importa qual o tamanho de  $q$ , o número hipotético  $c_q^n$  é muito pequeno comparado ao número total de permutações  $n!$ .

Note que ela é verdadeira se  $q$  tiver tamanho três. De fato, conforme visto na Seção 2.3.3, para  $q$  de tamanho três,  $\mathcal{A}_n(q) = C_n < 4^n$ , neste caso  $c_q = 4$ .

A segunda conjectura é uma versão “mais forte” da primeira:

**Conjectura 4.1.2.** *Seja  $q$  um padrão qualquer. Então existe o limite*

$$\mathcal{L}(q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\mathcal{A}_n(q)}.$$

No artigo [2], de 1999, R. Arratia provou que as duas versões acima são equivalentes. Posteriormente, em 2003, no artigo [12], os autores A. Marcus e G. Tardos provaram as conjecturas de Stanley-Wilf.

## 4.2 Padrões Monótonos

**Definição 4.2.1.** Dizemos que uma entrada  $x$  de uma permutação tem **grau**  $i$  se ela for a última entrada de uma subsequência crescente de tamanho  $i$ , e se não houver outra subsequência crescente de tamanho  $i + 1$ , que termine em  $x$ . Então, para cada  $i$ , as entradas de grau  $i$  formam uma subsequência decrescente.

**Exemplo 4.2.2.** Na permutação  $p = 325417698$ , as entradas  $x = 9$  ou  $x = 8$  têm grau 4, pois existe pelo menos uma subsequência de tamanho 4 que termina em  $x$ , e.g. 3479 ou 2578. E, ainda, essas entradas de grau 4 formam uma subsequência decrescente, (9, 8).

**Observação 4.2.3.** Uma permutação  $p \in S_n(12 \cdots k)$  pode ser decomposta em  $k - 1$  blocos decrescentes de subsequências, referentes aos graus  $1 < i < k$ .

**Exemplo 4.2.4.** Observe que  $p = 325417698 \in S_9(12345)$ , então  $n = 9$  e  $k = 5$ ; assim  $p$  pode ser decomposto em  $k - 1 = 4$  blocos,  $\{(3, 2, 1), (5, 4), (7, 6), (9, 8)\}$ , referentes, respectivamente, às entradas de graus 1, 2, 3 e 4

**Teorema 4.2.5.** Para todo inteiro positivo  $n$  e  $k > 2$ , temos

$$\mathcal{A}_n(123 \cdots k) \leq (k - 1)^{2n}.$$

*Demonstração.* Considerando a Definição 4.2.1, uma permutação que evita  $q$  pode ser decomposta em uma união de  $k - 1$  subsequências decrescentes.

Isto significa que uma permutação  $p$  evitando  $12 \cdots k$  é completamente determinada pelas seguintes partições ordenadas de  $[n]$  em  $k - 1$  blocos. (Uma partição ordenada é uma partição cujo conjunto de blocos é linearmente ordenado.)

1. A partição  $P_1$  do conjunto das  $n$  entradas de  $p$ , sendo: um bloco contendo as entradas de grau 1, um bloco contendo as de grau 2, e assim por diante.
2. A partição  $P_2$  das posições das entradas de  $p$ : um bloco contendo as posições das entradas de grau 1, um bloco contendo as posições das entradas de grau 2, e assim por diante.

De fato, uma vez que estas partições sejam conhecidas, as entradas de grau  $i$  devem ocupar as posições atribuídas a elas, em ordem decrescente.

Existem, no máximo,  $(k - 1)^n$  possibilidades para cada um dos  $P_1$  e  $P_2$ , provando o teorema.  $\square$

Observe que, para  $k = 3$ , temos que  $\mathcal{A}_n(123) < 4^n$ , concordando com resultados anteriores. A constante  $(k - 1)^2 = 4$ , fornecida pelo Teorema 4.2.5, é realmente a melhor constante possível.

O artigo [13], apresenta uma versão mais forte do Teorema 4.2.5:

**Teorema 4.2.6.** Para todo  $n$ ,  $\mathcal{A}_n(1234 \cdots k)$  é assintoticamente igual a

$$\lambda_k \frac{(k - 1)^{2n}}{n^{(k^2 - 2k)/2}}.$$

Aqui

$$\lambda_k = \gamma_k^2 \iint \cdots \int_{x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_k} \left[ D(x_1, x_2, \dots, x_k) \cdot e^{-(k/2)x^2} \right]^2 dx_1 dx_2 \cdots dx_k,$$

sendo  $D(x_1, x_2, \dots, x_k) = \prod_{i < j} (x_i - x_j)$ , e  $\gamma_k = (1/\sqrt{2\pi})^{k-1} k^{k^2/2}$ .

A integral múltipla na fórmula acima é avaliada como uma constante.

Este resultado é bastante significativo, já que mostra que não importa qual seja  $k$ , a constante  $(k-1)^2$  não pode ser substituída por um número menor.

### 4.3 A Fórmula Exata

No artigo [10], de 1990, Ira Gessel provou uma *fórmula exata* para o número  $\mathcal{A}_n(1234)$ .

$$\mathcal{A}_n(1234) = 2 \cdot \sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{n}{k}^2 \frac{3k^2 + 2k + 1 - n - 2nk}{(k+1)^2(k+2)(n-k+1)}. \quad (4.2)$$

No livro [5], Bóna observa que o somatório do lado direito não é sempre não-negativa, e que isto diminui as esperanças de uma prova combinatória. No entanto, alguns anos mais tarde Gessel encontrou a seguinte forma alternativa para a sua fórmula, conforme [5] na página 176.

$$\mathcal{A}_n(1234) = \frac{1}{(n+1)^2(n+2)} \sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{n+1}{k+1} \binom{n+2}{k+1}. \quad (4.3)$$

Nesta nova fórmula, todos os termos são não-negativos, mas ainda existe uma divisão, sugerindo que uma prova direta combinatória seja, provavelmente, difícil de encontrar.

# Capítulo 5

## O Padrão 1324

Não existe uma fórmula exata conhecida para o número  $\mathcal{A}_n(1324)$ . Então vamos buscar um limitante superior.

No artigo [6], de 2012, Miklós Bóna fornece um limitante superior para os números  $\mathcal{A}_n(1324)$ . Para  $n$  inteiro positivo:

$$\mathcal{A}_n(1324) < (7 + 4\sqrt{3})^n \approx 13,93^n.$$

Para isto, Bóna tomou como base as idéias apresentadas no artigo [7], de 2011, dos autores Anders Claesson, Vít Jelínek e Einar Steingrímsson, que apresentaram o limitante:

$$\mathcal{A}_n(1324) < 16^n.$$

### 5.1 Decomposição em Duas Cores

Os conceitos e resultados nesta seção aparecem no artigo [7]. E, a decomposição em duas cores é o ponto de partida para Bóna, em [6], melhorar o limitante superior.

**Definição 5.1.1.** *Seja  $p'$  uma permutação de tamanho  $k$  e seja  $p''$  uma permutação de tamanho  $m$ , com  $k + m = n$ . Dizemos que a  $n$ -permutação  $p = p_1 p_2 \cdots p_n$  é uma **fusão** de  $p'$  e  $p''$  se existe uma partição do conjunto  $[n]$  em dois blocos,  $I = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$  e  $J = \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$ , de modo que a subsequência  $p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k}$  seja um padrão  $p'$ , e a subsequência  $p_{j_1} p_{j_2} \cdots p_{j_m}$  seja um padrão  $p''$ .*

*Em outras palavras,  $p$  é uma fusão de  $p'$  e  $p''$  se pudermos colorir cada entrada de  $p$  de vermelho ou azul, tal que as entradas vermelhas formem um padrão  $p'$ , e as entradas azuis formem um padrão  $p''$ .*

**Exemplo 5.1.2.** *A permutação  $p = 4751326$  é uma fusão de  $p' = 123$  e  $p'' = 4132$ , como pode ser visto pela escolha  $I = \{1, 3, 7\}$  e  $J = \{2, 4, 5, 6\}$ , que conduz às subsequências 456 e 7132.*

**Definição 5.1.3.** *Seja  $p = p_1 p_2 \cdots p_n \in S_n(1324)$ , vamos colorir cada entrada de  $p$  de vermelho ou azul, indo da esquerda para a direita, de acordo com as seguintes regras:*

1. *Se  $p_i$  for colorido de vermelho e criar um padrão 132 com todas as entradas vermelhas, então colorir  $p_i$  de azul, e*



2. se já existe uma entrada azul menor do que  $p_i$ , então colorir  $p_i$  de azul;
3. caso contrário, colorir  $p_i$  de vermelho.

Vamos chamá-la de **decomposição em duas cores** para  $p \in S_n(1324)$ .

**Exemplo 5.1.4.** Seja  $p = 3612745$ . Então, a subsequência de entradas vermelhas é 36127 e a de entradas azuis é 45.

O próximo lema mostra que cada permutação evitando 1324 é uma fusão de duas permutações evitando padrões mais curtos.

**Lema 5.1.5.** Seja  $p$  uma permutação evitando 1324. Então  $p$  é uma fusão de uma permutação que evita 132 e uma permutação que evita 213.

Por fim, obtiveram o resultado:

“Para todo inteiro positivo  $n$ , vale a desigualdade  $\mathcal{A}_n(1324) \leq 16^n$ .”

## 5.2 Decomposição em Quatro Letras

A partir dos conceitos do artigo [7], Bóna em [6] apresenta um método que codifica injetivamente as permutações em  $S_n(1324)$  por um par de palavras de  $n$  letras ao longo de um alfabeto finito que evita um dado fator, melhorando o limitante superior de  $\mathcal{A}_n(1324)$ , utilizando uma decomposição mais refinada que permite usar um argumento de contagem mais cuidadoso.

**Definição 5.2.1.** Considere o alfabeto  $\alpha = \{A, B, C, D\}$  e a permutação  $p = p_1 p_2 \cdots p_n \in S_n(1324)$  já decomposta em duas cores. Vamos marcar cada entrada de  $p$  com uma das letras de  $\alpha$ , como segue:

1. Marque as  $\min_{\rightarrow}$  vermelhas com a letra  $A$ ,
2. marque as entradas vermelhas que não são  $\min_{\rightarrow}$  com a letra  $B$ ,
3. marque as entradas azuis que não são  $\max_{\leftarrow}$  com a letra  $C$ , e
4. marque as  $\max_{\leftarrow}$  azuis com a letra  $D$ .

Vamos chamá-la de **decomposição em quatro letras** para  $p \in S_n(1324)$ . E uma entrada marcada com a letra  $X$  será chamada de **entrada do tipo  $X$** , sendo  $X \in \alpha$ .

**Definição 5.2.2.** Vamos definir duas palavras,  $w$  e  $z$ , ambas com  $n$  letras sobre o alfabeto  $\alpha$ . Seja  $w = w(p) = w_1 w_2 \cdots w_n$  a palavra resultante da decomposição acima. Isto é,  $w_i$  é do tipo de  $p_i$ , em  $p$ . Seja  $z = z(p) = z_1 z_2 \cdots z_n$  a palavra com  $z_i$  do tipo da entrada  $i$ , em  $p$ . Vamos dizer que uma palavra  $w$  tem um **fator  $CB$**  se em algum lugar de  $w$ , a letra  $C$  for imediatamente seguida pela letra  $B$ .

**Exemplo 5.2.3.** *Seja  $p = 3612745$ . Então, a subsequência de entradas vermelhas é 36127 e a de entradas azuis é 45. Assim,  $w(p) = ABABBCD$  e  $z(p) = ABACDBB$ , e tanto  $w$  quanto  $z$  não têm fator  $CB$ .*

O lema seguinte mostra uma propriedade de  $w(p)$ , que nos permitirá melhorar o limitante superior para  $\mathcal{A}_n(1324)$ .

**Lema 5.2.4.** *Seja  $p \in S_n(1324)$ , então  $w(p)$  não tem fator  $CB$ .*

*Demonstração.* Vamos supor que  $p_i$  e  $p_{i+1}$  formem um fator  $CB$  em  $w(p)$ . Isso significa que  $p_i > p_{i+1}$ , caso contrário, o fato de  $p_i$  ser azul forçaria  $p_{i+1}$  ser azul. Além disso, já que  $p_i$  não é uma  $\max_{\leftarrow}$ , existe uma entrada  $d$  à direita de  $p_i$  (e à direita de  $p_{i+1}$ ) tal que  $p_i < d$ . Do mesmo modo, uma vez que  $p_{i+1}$  não é uma  $\min_{\rightarrow}$ , existe uma entrada  $a$  à sua esquerda tal que  $a < p_{i+1}$ . Contudo,  $ap_i p_{i+1} d$  é um padrão 1324, que é uma contradição.  $\square$

**Lema 5.2.5.** *Seja  $p \in S_n(1324)$ , então não há entrada  $i$  em  $p$  tal que  $i$  seja do tipo  $C$  e  $i + 1$  seja do tipo  $B$ .*

*Demonstração.* Análoga à prova do Lema 5.2.4. Se tal par existisse,  $i$  deveria estar à direita de  $i + 1$ , uma vez que  $i$  é azul e  $i + 1$  é vermelha. Como  $i$  não é uma  $\max_{\leftarrow}$ , haveria uma entrada maior  $d$  à sua direita. Como  $i + 1$  não é uma  $\min_{\rightarrow}$ , haveria uma entrada menor  $a$  à sua esquerda. Contudo,  $a(i + 1)id$  forma um padrão 1324 (contradição).  $\square$

**Lema 5.2.6.** *Seja  $h_n$  o número de palavras de  $n$  letras no alfabeto  $\alpha$ , que não têm fatores  $CB$ . Então temos*

$$H(x) = \sum_{n \geq 0} h_n x^n = \frac{1}{1 - 4x + x^2}.$$

*Isto implica*

$$h_n = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{6} \cdot (2 + \sqrt{3})^n + \frac{3 - 2\sqrt{3}}{6} \cdot (2 - \sqrt{3})^n. \quad (5.1)$$

*Demonstração.* (a) A construção da relação de recorrência para  $h_n$ , referência [14].

Para as palavras com  $n - 1$  letras, temos o número  $h_{n-1}$  de palavras permitidas, que é composto de um número  $x$  de palavras que **não** terminam em  $C$  e um número  $y$  de palavras que terminam em  $C$ . Assim,  $h_{n-1} = x + y \Rightarrow x = h_{n-1} - y$ .

Para obtermos palavras permitidas de  $n$  letras, basta acrescentarmos uma letra no final das  $h_{n-1}$  palavras permitidas, da seguinte forma:

- para aquelas que não terminam em  $C$ , podemos acrescentar qualquer letra do alfabeto  $\alpha$ , ficando com  $4x$  palavras permitidas de  $n$  letras.
- para aquelas que terminam em  $C$ , não podemos acrescentar a letra  $B$ , ficando com  $3y$  palavras permitidas de  $n$  letras.

Isto implica que  $h_n = 4x + 3y = 4(h_{n-1} - y) + 3y = 4h_{n-1} - y$ .

Para achar  $y$ , analisemos o número  $h_{n-2}$  de palavras permitidas de  $n - 2$  letras. Acrescentando a letra  $C$  na posição  $n - 1$ , temos  $h_{n-2}$  palavras permitidas de  $n - 1$  letras que terminam em  $C$ . Logo,  $y = h_{n-2}$ , obtendo

$$h_n = 4h_{n-1} - h_{n-2}. \quad (5.2)$$

Se  $n = 1$ , temos as palavras:  $A, B, C$  e  $D$ , então  $h_1 = 4$

Se  $n = 2$ , temos 16 palavras e uma dela é  $CB$ , então  $h_2 = 15$ .

Extendendo para  $n = 0$ , resulta  $h_0 = 1$

A equação (5.2) com as condições iniciais  $h_0 = 1$  e  $h_1 = 4$ , expressa a relação que gera os números  $h_n$

(b) A Função geradora para  $h_n$ , referência [14].

Seja

$$\sum_{m \geq 0} h_m x^m = H(x). \quad (5.3)$$

$$h_0 x^0 + \sum_{m \geq 1} h_m x^m = H(x) \quad \Rightarrow \quad \sum_{m \geq 1} h_m x^m = H(x) - 1. \quad (5.4)$$

$$h_1 x^1 + \sum_{m \geq 2} h_m x^m = H(x) - 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{m \geq 2} h_m x^m = H(x) - 1 - 4x. \quad (5.5)$$

A relação (5.2) implica em

$$\sum_{n \geq 2} h_n x^n = \sum_{n \geq 2} 4h_{n-1} x^n - \sum_{n \geq 2} h_{n-2} x^n. \quad (5.6)$$

Ajustando os índices em cada termo,  $m = n$ ,  $m = n - 1$  e  $m = n - 2$ , respectivamente, temos

$$\begin{aligned} \sum_{m \geq 2} h_m x^m &= \sum_{m \geq 1} 4h_m x^{m+1} - \sum_{m \geq 0} h_m x^{m+2}. \\ \sum_{m \geq 2} h_m x^m &= 4 \sum_{m \geq 1} h_m x^{m+1} - \sum_{m \geq 0} h_m x^{m+2}. \\ \sum_{m \geq 2} h_m x^m &= 4x \sum_{m \geq 1} h_m x^m - x^2 \sum_{m \geq 0} h_m x^m. \end{aligned}$$

Substituindo conforme (5.3), (5.4) e (5.5) temos

$$\begin{aligned} H(x) - 1 - 4x &= 4x(H(x) - 1) - x^2 H(x). \\ H(x) - 4x - 4xH(x) + 4x + x^2 H(x) &= 1. \\ H(x)[1 - 4x - x^2] &= 1. \end{aligned}$$

Expressando  $H(x)$ , obtemos a função geradora procurada,

$$H(x) = \frac{1}{1 - 4x + x^2}. \quad (5.7)$$

(c) A fórmula exata para  $h_n$ , referência [14].

A equação (5.2) é uma equação de diferenças que tem solução do tipo  $h_n = At^n$ , com  $A$ : constante.

Assim,  $At^n - 4At^{n-1} + At^{n-2} = 0 \Rightarrow At^{n-2}(t^2 - 4t + 1) = 0$ . Buscamos solução não trivial, então  $At^n \neq 0$ .

A equação característica,  $t^2 - 4t + 1 = 0$  tem solução:

$$t = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}. \quad (5.8)$$

A solução geral é dada por:

$$h_n = A \cdot (2 + \sqrt{3})^n + B \cdot (2 - \sqrt{3})^n. \quad (5.9)$$

Como conhecemos as condições iniciais, podemos obter os valores das constantes  $A$  e  $B$ ,

$$\begin{cases} 1 = h(0) = A(2 + \sqrt{3})^0 + B(2 - \sqrt{3})^0 = A + B \\ 4 = h(1) = A(2 + \sqrt{3})^1 + B(2 - \sqrt{3})^1 = A(2 + \sqrt{3}) + B(2 - \sqrt{3}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = A + B \\ 4 = 2(A + B) + \sqrt{3}(A - B) = 2 + \sqrt{3}(A - B) \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} = A - B \end{cases}$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A - B = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2A = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ 2B = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{6} \\ B = \frac{3 - 2\sqrt{3}}{6} \end{cases}$$

Assim, a solução para a equação (5.2) é

$$h_n = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{6} \cdot (2 + \sqrt{3})^n + \frac{3 - 2\sqrt{3}}{6} \cdot (2 - \sqrt{3})^n, \quad (5.10)$$

como afirmamos. □

### 5.3 Um Limitante Superior

O lema a seguir, garante que o par de palavras  $(w, z)$ , (Definição 5.2.2), determina completamente a permutação  $p$  evitando 1324.

**Lema 5.3.1.** *Seja  $H_n$  o conjunto das palavras de  $n$  letras ao longo do alfabeto  $\alpha$ , em que nunca ocorra o fator  $CB$  e seja  $S_n(1324)$  o conjunto de todas as  $n$ -permutações evitando 1324. Então, a aplicação  $f : S_n(1324) \rightarrow H_n \times H_n$ , dada por  $f(p) = (w(p), z(p))$  é injetiva.*

*Demonstração.* Temos,  $|H_n| = h_n$ . Vamos assumir que  $w(p) = w$  e  $z(p) = z$ , para algum  $p \in S_n(1324)$ , tal que  $f(p) = (w, z) \in H_n \times H_n$ .

Então  $w$  nos diz para quais índices  $i$  a entrada  $p_i$  será do tipo  $X$ , ou seja, os índices  $i$  para os quais a  $i$ -ésima letra de  $w$  é  $X$ , sendo  $X \in \{A, B, C, D\}$ . Depois disso, utilizamos  $z$  para descobrir quais as entradas de  $p$  são do tipo  $A, B, C$  ou  $D$ .

Resta mostrar que esta informação determina completamente  $p$ , isto é, que existe no máximo uma permutação que evita 1324 e satisfaz todas as exigências impostas por  $w$  e  $z$ .

Observe que as entradas do tipo  $A$  estão em ordem decrescente nas suas posições, assim como as entradas do tipo  $D$ . Uma vez colocadas estas entradas, as entradas do tipo  $B$  devem ser colocadas nas suas posições, da esquerda para a direita, da seguinte maneira, em cada passo, colocar a menor entrada disponível que seja maior do que a entrada tipo  $A$  que está à esquerda. (Caso contrário, um padrão 132 vermelho será formado.) Do mesmo modo, as entradas do tipo  $C$  devem ser colocadas em suas posições, agora da direita para a esquerda, de modo que, em cada passo, seja colocada a maior entrada disponível, desde que seja menor do que a entrada do tipo  $D$  que está à direita. (Caso contrário, um padrão 213 azul será formado.)  $\square$

**Observação 5.3.2.** *A imagem de  $f$  consiste de pares ordenados  $(w(p), z(p))$ . Ambas as palavras,  $w(p)$  e  $z(p)$ , começam com um  $A$ , uma vez que as entradas  $p_1$  e  $1$  sempre são  $\min_{\rightarrow}$  vermelhas em  $p$ . Então podemos restringir o contradomínio de  $f$ , ou seja,*

$$f(p) = (Aw_2 \cdots w_n, Az_2 \cdots z_n) \in (\{A\} \times H_{n-1})^2.$$

Reescrevendo  $f$  da seguinte forma:

$$f : S_n(1324) \longrightarrow (\{A\} \times H_{n-1})^2,$$

que continua injetiva.

**Corolário 5.3.3.** *Para todo inteiro positivo  $n$ , vale a desigualdade*

$$\mathcal{A}_n(1324) < h_{n-1}^2 < (2 + \sqrt{3})^{2n} = (7 + 4\sqrt{3})^n. \quad (5.11)$$

*Demonstração.* A injetividade de  $f$  (Lema 5.3.1) implica que  $\mathcal{A}_n(1324) < h_{n-1}^2$ .

O resto segue da fórmula (5.1):

$$h_n = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{6} \cdot (2 + \sqrt{3})^n + \frac{3 - 2\sqrt{3}}{6} \cdot (2 - \sqrt{3})^n.$$

Dado que, nesta fórmula, a segunda parcela é negativa, temos

$$h_n < \frac{3 + 2\sqrt{3}}{6} \cdot (2 + \sqrt{3})^n.$$

E a primeira parcela em (5.1) tem o coeficiente  $(3 + 2\sqrt{3})/6$  menor do que a base  $(2 + \sqrt{3})$ , então

$$h_n < (2 + \sqrt{3}) \cdot (2 + \sqrt{3})^n = (2 + \sqrt{3})^{n+1}.$$

Fazendo um ajuste no índice, logo

$$h_{n-1} < (2 + \sqrt{3})^n.$$

$\square$

# Capítulo 6

## Fórmula Exata para o Padrão 1342

Neste Capítulo, vamos fornecer uma *fórmula exata* para o número de  $n$ -permutações que evitam o padrão 1342.

$$\mathcal{A}_n(1342) = (-1)^{n-1} \frac{(7n^2 - 3n - 2)}{2} + 3 \sum_{i=2}^n (-1)^{n-i} 2^{i+1} \frac{(2i-4)!}{i!(i-2)!} \binom{n-i+2}{2}$$

A partir desta fórmula fica simples provar que

$$\mathcal{A}_n(1342) < 8^n, \text{ para todo } n, \text{ e que } \mathcal{L}(1342) = 8.$$

O único padrão com tamanho maior do que três para o qual se conhecia uma fórmula é o padrão monótono 1234 (Capítulo 4). O interessante aqui é que permutações evitando 1342 estão em bijeção com um tipo específico de árvores enraizadas.

### 6.1 Descrição de Árvores tipo Beta

Preliminares:

Uma árvore é um grafo conexo que não admite ciclos.

Se a árvore possui  $n$  nós, então, obrigatoriamente, ela deve possuir  $n - 1$  arcos.

A notação  $|T|$  expressa a quantidade de nós que a árvore  $T$  possui.

Dizemos que uma árvore é enraizada, quando ela possui um nó diferenciado (a raiz).

A maneira mais fácil de resgatar a permutação que teve suas entradas associadas aos nós de uma árvore, é através da **leitura pós-ordem**: para cada nó, primeiro escrever as entradas associadas aos seus filhos, da esquerda para a direita, depois a entrada associada ao nó em questão, e fazer isso de forma recursiva para todos os nós.

No artigo [8], de 1997, os autores, Cori, Jacquard e Schaeffer, introduziram um novo conceito de árvore enraizada, elas receberam valores agregados aos seus vértices (nós). (Cada nó  $v$  da árvore recebe um rótulo  $l(v)$ .) Também deduziram uma fórmula que determina a quantidade destas árvores.

**Definição 6.1.1.** Uma **árvore beta com parâmetros**  $a$  e  $b$ ,  $\beta(a, b)$ , é uma árvore com raiz, sendo que cada nó  $v$  recebe um rótulo  $l(v)$ , que é um número inteiro não negativo, satisfazendo as seguintes regras:

1. se  $v$  for uma folha, então  $l(v) = a$  (Isto justifica o parâmetro  $a$  no nome.),
2. se  $v$  for um nó interno e  $v_1, v_2, \dots, v_k$  forem seus filhos, então

$$a \leq l(v) \leq b + \sum_{i=1}^k l(v_i) \quad (\text{Isto justifica o parâmetro } b \text{ no nome.}),$$

3. se  $v$  for o nó raiz e  $v_1, v_2, \dots, v_k$  forem seus filhos, então

$$l(v) = \sum_{i=1}^k l(v_i) \quad (\text{Condição do nó raiz}).$$

**Notações.**

$\mathcal{D}^{\beta(a,b)}$  é o conjunto das árvores  $\beta(a, b)$ .

$\mathcal{D}_n^{\beta(a,b)} = \{T \in \mathcal{D}^{\beta(a,b)} ; |T|=n\}$ , para todo  $n \geq 0$ .

**Nota.** Para nosso estudo, vamos trabalhar com  $a = 0$  e  $b = 1$ , ou seja, árvores  $\beta(0, 1)$ .

**Exemplo 6.1.2.** A Figura 6.1 mostra uma árvore  $\beta(0, 1)$  com 15 nós.

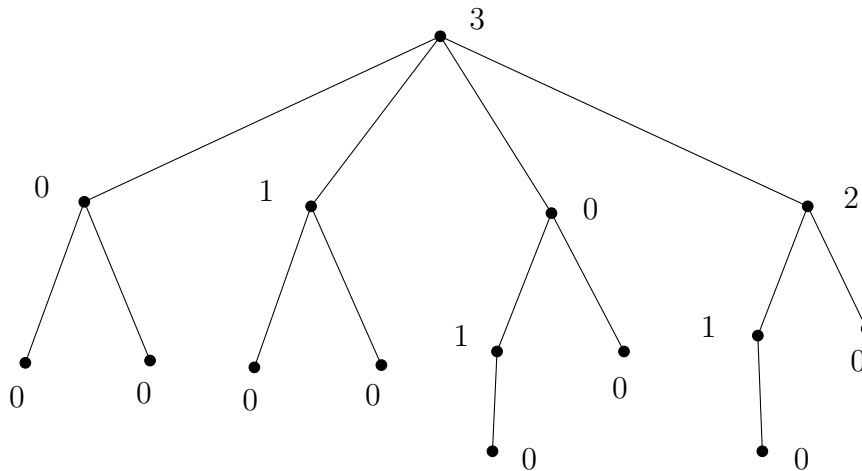


Figura 6.1: Uma árvore  $\beta(0, 1)$ .

Seja  $t_n = |\mathcal{D}_n^{\beta(0,1)}|$  o número de árvores  $\beta(0,1)$  com  $n$  nós. Este número é dado, em [8], pela fórmula

$$t_1 = 1 \text{ e } t_n = 3 \cdot 2^{n-2} \cdot \frac{(2n-2)!}{(n+1)!(n-1)!}, \text{ para } n \geq 2. \quad (6.1)$$

De fato,  $t_2 = 1$ , pois só existe uma árvore  $\beta(0,1)$  com dois nós (ambos com rótulo zero). Para  $n = 3$ , obtemos  $t_3 = 3$ , como mostra a Figura 6.2.

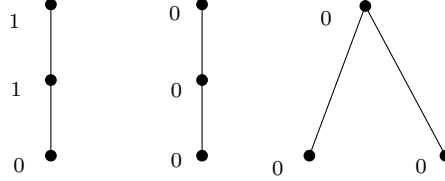


Figura 6.2: As três árvores  $\beta(0,1)$  de três nós.

A partir da equação (6.1) vamos obter a função geradora ordinária  $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x^n$ . Técnicas de obtenção de função geradora podem ser estudadas em [14] ou [19]. Aqui, particularmente, obtivemos  $F$  com o uso do pacote “Wolfram Mathematica 9” (Ver apêndice A).

$$F(x) = t_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} t_n x^n = x + \sum_{n=2}^{\infty} 3 \cdot 2^{n-2} \cdot \frac{(2n-2)!}{(n+1)!(n-1)!} x^n$$

$$F(x) = x + \frac{-24x^2 + 12x - 1 + (1-8x)^{3/2}}{32x} = \frac{8x^2 + 12x - 1 + (1-8x)^{3/2}}{32x}. \quad (6.2)$$

Os números  $t_n$  também podem ser verificados pela relação de recorrência:

$$t_1 = 1, t_2 = 1 \text{ e } t_n = \frac{8n-12}{n+1} t_{n-1}, \text{ para } n \geq 3. \quad (6.3)$$

A partir da relação de recorrência (6.3), obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n}{t_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n-12}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8-12/n}{1+1/n} = 8.$$

Com isso, um limitante superior exponencial para  $t_n$  é dado por

$$t_n = \frac{t_n}{t_{n-1}} \cdot \frac{t_{n-1}}{t_{n-2}} \cdots \frac{t_2}{t_1} < 8 \cdot 8 \cdots 8 = 8^{n-1}, \text{ com } t_1 = 1.$$

Assim sendo,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{t_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{t_n}{t_{n-1}} \cdot \frac{t_{n-1}}{t_{n-2}} \cdots \frac{t_2}{t_1} \right)^{1/n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 8^{n-1} \right)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 8^{1-1/n} = 8. \end{aligned} \quad (6.4)$$



**Definição 6.1.3.** Dizemos que uma permutação  $p = p_1 p_2 \cdots p_n$  é **decomponível** se existir  $k \in [n - 1]$ , tal que para todo  $i \leq k$  e para todo  $j > k$ , tenhamos  $p_i > p_j$ . Em outras palavras,  $p$  é decomponível se for possível fazer um corte, de modo que cada entrada antes do corte seja maior do que cada entrada após o corte. Se  $p$  não for decomponível, então vamos chamá-lo de **indecomponível**.

**Notações.**

$$I_n = \{p \in S_n; p : \text{indecomponível}\}.$$

$$I_n(1342) = \{p \in S_n(1342); p : \text{indecomponível}\}.$$

**Exemplo 6.1.4.** A permutação  $p = 45132$  é decomponível, visto que podemos fazer um corte entre a segunda e a terceira entradas, neste caso  $k = 2$  (note que o corte divide  $p$  em dois blocos, cada um deles é uma permutação indecomponível.). Já a permutação  $31425$  é indecomponível.

Existem em  $S_3$  três permutações indecomponíveis:  $123$ ,  $132$ , e  $213$ , e todas elas evitam  $1342$ . Coincidentemente, existem três árvores  $\beta(0, 1)$  em  $\mathcal{D}_3^{\beta(0,1)}$ , como visto na Figura 6.2.

**Observação 6.1.5.** Toda permutação pode ser decomposta em  $1, 2, \dots, n - 1$  ou  $n$  blocos, sendo que cada bloco é uma permutação indecomponível.

Se  $p$  for decomponível, então a entrada  $n$  deve estar antes do corte; assim como a entrada  $1$  deve estar depois do corte. Consequentemente, se  $p$  termina com a entrada  $n$ , ou inicia com a entrada  $1$ ,  $p$  será indecomponível.

Podemos dizer que a estrutura de uma árvore  $\beta(0, 1)$  é a soma de duas outras: a estrutura de árvore propriamente dita e os rótulos em seus nós. Com isto, vamos tratar, nas próximas seções, de duas estruturas triviais: árvores constituídas por um único caminho e árvores  $\beta(0, 1)$  em que todos os rótulos são zero. Elas vão corresponder, respectivamente, às permutações evitando  $231$  e às permutações evitando  $132$ . E serão as ferramentas para lidar com o caso geral.

Antes, porém, vamos ver uma maneira de determinar os rótulos atribuídos aos nós de uma árvore enraizada dada.

**Definição 6.1.6.** Considere  $p = p_1 p_2 \cdots p_n$ . Dizemos que  $p_i$  **bate**  $p_j$  se existir uma entrada  $p_a$ , com  $a < i < j$ , tais que  $p_a p_i p_j$ , escritas neste ordem, formem um padrão  $132$ .

Além disso, se existir uma subsequência de entradas  $p_i, p_{i+a_1}, \dots, p_{i+a_t}, p_k$ , e cada entrada nesta subsequência bate a próxima, dizemos que  $p_i$  **atinge**  $p_k$ , sendo que os índices estão em ordem  $i < i + a_1 < i + a_2 < \dots < i + a_t < k$ .

Em particular, se  $x$  bate  $y$ , então  $x$  também atinge  $y$ .

**Exemplo 6.1.7.** Seja  $p = 3716254$ . Então  $7$  bate  $6$ , pois  $(3, 7, 6)$  forma um padrão  $132$  e  $6$  bate  $2$ , pois  $(1, 6, 2)$  forma um padrão  $132$ ; portanto  $7$  atinge  $2$ .

**Definição 6.1.8.** Seja  $v_i$  o  $i$ -ésimo nó, na leitura pós-ordem, de uma árvore  $T$  dada, nó este associado à entrada  $p_i$  de  $p$ . Definimos o **rótulo**  $l(v_i)$  do nó não raiz  $v_i$  de  $T$  como sendo o número de descendentes  $v_j$  de  $v_i$  (incluindo o próprio  $v_i$ ), para os quais existe pelo menos um índice  $k > i$  tal que a entrada  $p_j$  atinja a entrada  $p_k$ . E o rótulo  $l(v_n)$  do nó raiz obedece a condição de raiz (terceiro item da Definição 6.1.1).

**Exemplo.** Nos Exemplos 6.2.2, 6.5.4 e 6.5.5 usamos este esquema para rotular árvores que teve seus nós associados às entradas de uma permutação.

## 6.2 Árvores Constituídas por um Único Caminho

**Lema 6.2.1.** *Existe uma bijeção  $f$  do conjunto das  $n$ -permutações evitando 1342 que iniciam com entrada 1 ao conjunto das árvores  $\beta(0, 1)$  com  $n$  nós, constituídas por um único caminho.*

Note também que podemos interpretar o domínio de  $f$  como o conjunto das permutações de tamanho  $n - 1$  que evitam 231 e cujas entradas estão no conjunto  $\{2, 3, 4 \dots, n\}$ .

*Demonstração.* Seja  $p = p_1 p_2 \dots p_n \in S_n(1342)$ , tal que  $p_1 = 1$ . Tome uma árvore com  $n$  nós (sem rótulos), formada por um único caminho, e vamos dar o rótulo  $l(v_i)$  ao  $i$ -ésimo nó, conforme a Definição 6.1.8. E para cumprir a condição de nó raiz,  $l(v_n) = l(v_{n-1})$ .

**Exemplo 6.2.2.** *Seja  $p = 143265$ , então os rótulos dos nós da árvore  $f(p)$  são, da folha para a raiz: 0, 1, 2, 0, 1 e 1, como mostra a Figura 6.3. O  $i$ -ésimo nó do caminho  $f(p)$  está associado à entrada  $p_i$ . (Escrevemos os rótulos dos nós entre  $[ ]$ , para diferenciá-los das entradas de  $p$ .)*

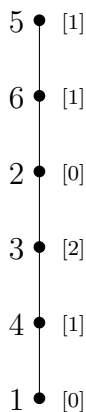


Figura 6.3: A árvore  $\beta(0, 1)$  de  $p = 143265$ .

Neste caso, em que  $p$  tem  $p_1 = 1$  e a árvore é constituída por um único caminho, o rótulo  $l(v_i)$  é o número de entradas à esquerda de  $p_i$  (inclusive  $p_i$ ) que são maiores do que pelo menos uma entrada à direita de  $p_i$ .

Note que, se tivéssemos definido  $f$  sobre o conjunto de todas as  $n$ -permutações iniciadas com a entrada 1,  $f$  não seria uma bijeção, pois, por exemplo, as imagens de 1342 e 1432 seriam idênticas.

É fácil ver que a imagem  $f(p)$  é uma árvore  $\beta(0, 1)$ , pois:  $l(v_{i+1}) \leq l(v_i) + 1$ , para todo  $v_i$ , porque pode haver, no máximo, uma entrada contada por  $l(v_{i+1})$  e não contada por  $l(v_i)$ , a saber, a entrada  $p_{i+1}$ . Todos os rótulos são certamente não negativo e  $l(v_1) = 0$ .

Para provar que  $f$  é uma bijeção, basta mostrar que tem uma inversa, isto é, seja  $T$  uma árvore  $\beta(0, 1)$  constituída por um único caminho, podemos encontrar a única permutação  $p$  tal que

$f(p) = T$ . Afirmamos que dada  $T$ , podemos recuperar a entrada  $n$  da pré-imagem  $p$ . Primeiro, note que  $p$  é uma permutação que evita 1342 e começa com 1, de modo que qualquer entrada à esquerda de  $n$  deve ser menor do que qualquer entrada à direita de  $n$ . Em particular, o nó anterior à  $n$  deve ter rótulo 0. Além disso, como  $n$  é maior do que qualquer outra entrada em  $p$ , então  $n$  é a entrada  $p_i$  mais à esquerda de  $p$  tal que  $l(v_j) > 0$ , para todo  $j \geq i$ , se existirem entradas à direita de  $n$ , se não houver,  $n = p_n$ . Isto é,  $n$  corresponderá ao nó que inicia a sequência ininterrupta de rótulos estritamente positivos que termina no último nó (raiz), se existir tal sequência. De outro modo,  $n$  corresponderá ao último nó.

Uma vez localizada a posição de  $n$  em  $p$ , podemos simplesmente excluir de  $T$  o nó correspondente a ele e depois diminuir 1 de todos os rótulos, a partir dele. (Se isso significa excluir o último nó, nós apenas fazemos  $l(v_{n-1})$  ser igual a  $l(v_{n-2})$  para satisfazer a condição de raiz.) De fato, nós podemos fazer isso porque o nó anterior à  $n$  tinha rótulo 0 e os nós depois de  $n$  tinham rótulos positivos (1 ou 2), segundo nosso algoritmo para localizar  $n$ . Então podemos proceder de forma recursiva, para encontrar a posição das entradas  $n - 1, n - 2, \dots, 1$  em  $p$ . Isso define a inversa de  $f$ , provando que  $f$  é uma bijeção.  $\square$

## 6.3 Árvores Beta com Rótulos Nulos

**Definição 6.3.1.** *Um **ramo** de uma árvore enraizada é uma subárvore cuja raiz será um dos filhos da raiz da árvore original.*

Algumas árvores enraizadas podem ter apenas um ramo, isto não significa, necessariamente, que ela seja constituída por um único caminho.

**Lema 6.3.2.** *Existe uma bijeção  $g$  do conjunto das  $n$ -permutações evitando 132 que terminam em  $n$  ao conjunto das árvores  $\beta(0, 1)$  de  $n$  nós com todos os rótulos iguais a zero.*

Note que podemos descrever o domínio de  $g$  como o conjunto de  $n$ -permutações indecomponíveis evitando 132, ou como um conjunto de  $(n - 1)$ -permutações que evitam 132.

*Demonstração.* Aqui, podemos pensar nas árvores  $\beta(0, 1)$  como árvores enraizadas sem rótulos.

Vamos construir  $g$  indutivamente:

Existe apenas uma árvore  $\beta(0, 1)$  não rotulada com dois nós, que é a imagem da única permutação  $p = 12$ . Usando indução, suponha que nós já construímos  $g$  para todo inteiro positivo  $k < n$ . Seja  $p$  uma  $n$ -permutação evitando 132. Seja  $p' = p_1 p_2 \dots p_{n-1}$ . Então há duas possibilidades:

1<sup>a</sup> Quando  $p'$  é decomponível, isto é, nós podemos cortar  $p'$  em vários (pelo menos dois) blocos  $p_{\langle 1 \rangle}, p_{\langle 2 \rangle}, \dots, p_{\langle h \rangle}$ , tais que todas as entradas de  $p_{\langle i \rangle}$  sejam maiores do que todas as entradas de  $p_{\langle j \rangle}$ , para  $i < j$ . Neste caso,  $g(p)$  irá ter  $h$  ramos, o ramo  $b_i$  satisfazendo  $g(p_{\langle i \rangle}) = b_i$ . Nós, então, obtemos  $g(p)$ , ligando todos os ramos  $b_i$  a uma raiz comum. Tendo em conta que estamos em uma árvore  $\beta(0, 1)$ , o rótulo da raiz é determinado pela soma dos rótulos de seus filhos.

2ª Quando  $p'$  é indecomponível. Como  $p$  evita 132, isso é equivalente a dizer que  $p'$  termina com a sua maior entrada  $n - 1$ . Neste caso,  $g(p)$  terá apenas um ramo  $b_1$ , isto é, a raiz de  $g(p)$  terá apenas um filho. Nós definimos  $b_1 = g(p')$ .

Mais uma vez, para provarmos que  $g$  é uma bijeção, devemos mostrar que tem uma inversa. Seja  $T$  uma árvore com  $n$  nós, sem rótulo, com raiz  $r$ . Se  $r$  tiver  $t$  filhos, digamos que, indo da esquerda para a direita, sejam as raízes dos ramos  $b_1, b_2, \dots, b_t$ , que têm  $n_1, n_2, \dots, n_t$  nós. Então, por indução, para cada  $i$ , o ramo  $b_i$  corresponde a uma  $n_i$ -permutação evitando 132 que termina com  $n_i$ . Agora, adicione  $\sum_{j=i+1}^t n_j$  à todas as entradas da permutação  $p_i$  associada à  $b_i$ , então concatenar todos estes blocos e acrescentar  $n$  no final para obter a permutação  $p$  associada à  $T$ .

Este procedimento recursivo, sempre retorna à permutação original, provando a nossa afirmação.  $\square$

**Exemplo 6.3.3.** A permutação 45631278 corresponde à árvore  $\beta(0, 1)$  com todos os rótulos iguais a 0 mostrada na Figura 6.4. Para uma fácil referência, podemos escrever  $p_n$  para a raiz de  $g(p)$ , e procedendo de forma análoga para as outras entradas nas subárvores recursivamente definidas.

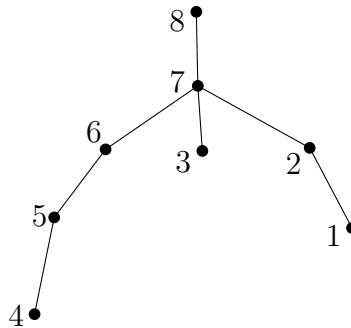


Figura 6.4: A árvore  $\beta(0, 1)$  de  $p = 45631278$ .

## 6.4 Normalização de Permutações

Seria ideal se pudéssemos associar as entradas de uma  $n$ -permutação indecomponível  $p$  evitando 1342 aos nós de uma árvore não rotulada  $T$  e então definir os rótulos desta árvore de modo a torná-la uma árvore  $\beta(0, 1)$ . Contudo, a questão é saber qual  $T$  devemos usar e, se  $T$  for dado, como saber em que ordem escrever as entradas de  $p$  para os nós de  $T$ . No que segue, vamos desenvolver as noções para resolver estas questões.

**Proposição 6.4.1.** Cada classe fraca (Definição 2.1.3) não-vazia  $C$  de  $n$ -permutações contém exatamente uma permutação evitando 132.

*Demonstração.* Dada uma classe fraca  $C$ , preencher as posições vazias entre as  $\min_{\rightarrow}$  com as entradas remanescentes como segue: Em cada passo, coloque a menor entrada que ainda não

tenha sido usada, que seja maior do que a  $\min_{\rightarrow}$  anterior. (Fizemos exatamente isto na prova da bijeção do Lema 2.2.1.)

Por outro lado, a permutação resultante será a única permutação evitando 132 nesta classe fraca, pois se a qualquer momento nos desviarmos deste procedimento, isto é, colocarmos outra entrada, não a menor, criaremos um padrão 132.  $\square$

**Definição 6.4.2.** *Seja  $p \in S_n$ . Chamamos de **normalização** de  $p$ , denotamos por  $N(p)$ , a única permutação evitando 132 na classe fraca  $C$  contendo  $p$ .*

**Observação 6.4.3.** *O fato de  $N(p)$  evitar 132 significa que em  $N(p)$  não existe qualquer entrada que atinja outra (Definição 6.1.6).*

**Exemplo 6.4.4.** *Seja  $p = 356214$  na classe fraca  $C : 3\_21\_$ , então  $N(p) = 345216$ .*

A normalização preserva a indecomposição da permutação, como mostra a proposição.

**Fato.** *Se uma permutação for cortada em duas partes, tal que toda entrada antes do corte seja maior do que toda entrada depois do corte, então o corte deve ser imediatamente à esquerda de uma  $\min_{\rightarrow}$ .*

*Demonstração.* De fato, se o corte estiver imediatamente à esquerda de uma entrada  $b$  que não seja uma  $\min_{\rightarrow}$ , então existe uma entrada  $a$  à esquerda de  $b$ , e consequentemente à esquerda do corte, tal que  $a < b$ . Porém, isto contradiz a posição do corte, porque todas as entradas à esquerda do corte, incluindo  $a$ , são maiores do que  $b$ .  $\square$

**Proposição 6.4.5.** *Uma permutação  $p$  é indecomponível se, e somente se,  $N(p)$  for indecomponível.*

*Demonstração.* Uma permutação  $p$  pertencente à classe fraca  $C$  é decomponível se, e somente se, ela tiver uma  $\min_{\rightarrow} L > 1$ , tal que a próxima  $\min_{\rightarrow} M$ , à direita de  $L$ , esteja na posição  $n - L + 2$ . Isto é equivalente à provar a proposição.

De fato, vamos assumir que  $L$  seja tal  $\min_{\rightarrow}$ . Então, as  $n - L + 1$  posições que precedem  $M$  devem conter as entradas que são maiores do que ou iguais a  $L$ . Mas, há precisamente  $n - (L - 1) = n - L + 1$  entradas que são maiores do que ou iguais à  $L$ , por isso todas devem preceder  $M$ . Assim, depois de  $M$ , todas as entradas são menores do que  $L$ . Portanto, podemos cortar imediatamente à esquerda de  $M$ , e toda permutação nesta classe é decomponível.

Agora, vamos supor que tal  $L$  não exista. Então, para cada  $L$ , a  $\min_{\rightarrow} M$  está, no máximo, na posição  $n - L + 1$ . (É fácil ver que  $M$  não pode estar além da posição  $n - L + 2$ , uma vez que não existiriam suficientes entradas maiores do que  $L$  para preencher à esquerda de  $M$ , contradizendo o fato de que não existe nenhuma  $\min_{\rightarrow}$  entre  $L$  e  $M$ .) No entanto, uma vez que existem  $n - L + 1$  entradas que são maiores do que ou iguais à  $L$ , uma destas deve vir após  $M$ . Portanto, não podemos cortar imediatamente à esquerda de  $M$ . Isso vale para todas as  $\min_{\rightarrow} M$ , provando que todas as permutações em  $C$  são indecomponíveis.  $\square$

**Corolário 6.4.6.** *Se  $p$  é uma  $n$ -permutação indecomponível, então  $N(p)$  sempre termina com a entrada  $n$ .*

*Demonstração.* Note que a única maneira de uma  $n$ -permutação evitando 132 ser indecomponível é ela terminar com a entrada  $n$ . Se  $p$  é uma  $n$ -permutação evitando 132 e  $n$  não é a última entrada, então podemos cortar  $p$  imediatamente após a entrada  $n$ . Então a afirmação segue da Proposição 6.4.5.  $\square$

**Definição 6.4.7.** *Seja  $T$  uma árvore  $\beta(0, 1)$ . A **normalização**  $N(T)$  de  $T$  é a árvore  $\beta(0, 1)$  que é isomorfa a  $T$  como uma árvore com todos os rótulos iguais a zero.*

**Exemplo 6.4.8.** *A Figura 6.5 mostra duas árvores  $\beta(0, 1)$ :  $T$  e  $N(T)$ . Elas são isomorfas, e  $N(T)$  tem seus rótulos todos nulos.*

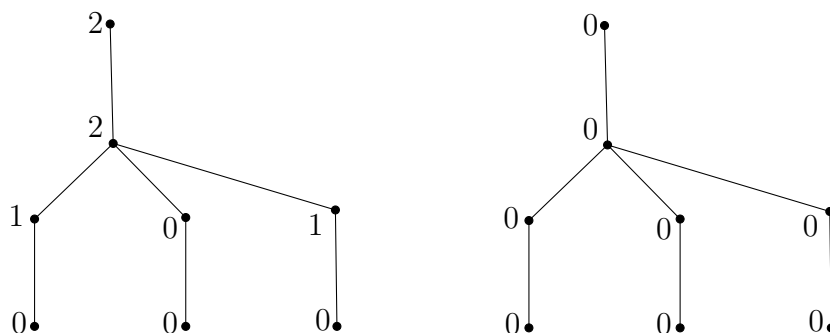


Figura 6.5: Árvore  $\beta(0, 1)$   $T$  isomorfa a  $N(T)$ .

## 6.5 Importância das Árvores Beta

A seguir, vamos ver duas proposições que mostram uma maneira simples para localizar a posição da entrada  $n$  em  $p$ , se for dada a árvore  $\beta(0, 1)$  correspondente à  $p$ .

**Proposição 6.5.1.** *Seja  $p \in I_n(1342)$  e suponha que  $p_n \neq n$ , isto é,  $n$  não está associado ao nó raiz. Então cada antecessor de  $n$ , incluindo o próprio  $n$ , tem um rótulo positivo. Se  $p_n = n$ , então  $l(v_n) = 0$  e, assim, não existe qualquer nó com a propriedade acima.*

*Demonstração.* Se  $p_n = n$ , então não há nada à direita de  $n$  para atingir, assim  $l(v_n)$  enumera um conjunto vazio, produzindo  $l(v_n) = 0$ .

Então, suponha que  $n$  não seja o nó raiz. Para provar a nossa afirmação, é suficiente mostrar que, para qualquer nó  $v_i$  que seja um antecessor de  $p_j = n$ , existe uma entrada  $p_k$ , tal que  $k > i$  e  $n = p_j$  atinja  $p_k$ . Na verdade, isso implicaria que a entrada  $p_j = n$  é contada pelo rótulo  $l(v_i)$ , forçando  $l(v_i) > 0$ .

Agora, considere  $a_m = p_1 > a_{m-1} > \dots > a_2 > a_1 = 1$  as  $\min_{\rightarrow}$  de  $p$ .

Se  $n$  estiver localizado à direita de  $a_1 = 1$ , então  $a_1 n x$  seria, obviamente, um padrão 132 para todo  $x$  localizado à direita de  $n$ .

Suponha, então, que  $n$  esteja localizado entre  $a_r$  e  $a_{r-1}$ , para algum  $1 < r \leq m$ . Desta forma,  $n$  certamente bate cada entrada  $x$  localizada entre  $n$  e  $a_{r-1}$ , uma vez que  $a_r$  pode fazer o papel do 1 no padrão 132, ou seja,  $a_r n x$  forma um padrão 132. Claramente,  $n$  também deve bater, pelo menos, uma entrada  $y_1$  à direita de  $a_{r-1}$ , caso contrário,  $p$  seria decomponível, cortando-o à direita de  $a_{r-1}$ . Se  $y_1$  estiver à direita de  $p_i$ , então fazemos com que  $y_1$  seja escolhido para ser  $p_k$ . Se não, então  $y_1$  deve bater pelo menos uma entrada  $y_2$  que esteja à direita de  $a_{r_1-1}$ , supondo que  $y_1$  esteja localizado entre  $a_{r_1}$  e  $a_{r_1-1}$ , pela mesma razão, e assim por diante. Desta forma, obtemos uma subsequência  $y_1, y_2, \dots$ , tal que  $n$  atinja cada um dos  $y_t$  e esta subsequência eventualmente termina à direita de  $p_i$ , uma vez que, em cada passo, passamos por, pelo menos, uma  $\min_{\rightarrow}$ . Assim, a proposição está provada.  $\square$

O único problema é que pode haver vários nós com a propriedade que todos os seus antecessores tenham um rótulo positivo. Se isso acontecer, recorreremos à seguinte proposição para localizar o nó associado à  $n$ .

**Proposição 6.5.2.** *Seja  $p \in I_n(1342)$  e suponha que  $p_n \neq n$ . Então  $n$  é a entrada mais à esquerda de  $p$  que tem a propriedade que cada um dos seus antecessores (incluindo ele próprio) tem um rótulo positivo.*

*Demonstração.* Suponha que  $p_k$  esteja à esquerda de  $n$  e que ambos tenham esta propriedade. (Se houver vários candidatos para o papel de  $p_k$ , escolha o mais à direita). Se  $p_k$  bate uma entrada  $y$  à direita de  $n$  participando do padrão 132, representado por  $x p_k y$ , então  $x p_k n y$  é um padrão 1342, que é uma contradição. Então  $p_k$  não bate tal entrada  $y$ . Em outras palavras, todas as entradas depois de  $n$  são menores do que todas as entradas antes de  $p_k$ . Entretanto,  $p_k$  deve atingir entradas à direita de  $n$ , assim, ele bate alguma entrada  $v$  entre  $p_k$  e  $n$ . Esta entrada  $v$ , por sua vez, bate alguma entrada  $w$  à direita de  $n$  participando do padrão 132  $t v w$ . No entanto, isto implicaria que  $t v n w$  é um padrão 1342, uma contradição, o que prova a nossa afirmação.  $\square$

A importância das árvores  $\beta(0, 1)$  pode ser explicada pelo teorema a seguir.

**Teorema 6.5.3.** *Para todo inteiro positivo  $n$ , existe uma bijeção  $F$  do conjunto de  $n$ -permutações indecomponíveis evitando 1342 ao conjunto  $\mathcal{D}_n^{\beta(0,1)}$  de árvores  $\beta(0, 1)$  em  $n$  nós.*

*Demonstração.* Seja  $p \in I_n(1342)$  e faça  $N(p) = r = r_1 r_2 \dots r_n$ . Pelo Corolário 6.4.6,  $r_n = n$ . Como  $r \in S_n(132)$  e  $r_n = n$ , podemos aplicar o Lema 6.3.2 e obter a árvore  $S = g(r)$ . Isto é, as entradas de  $r$  estão em bijeção natural com os nós de  $S$ . Então, defina  $F(r) = S$ , isto é,  $g$  é a restrição de  $F$  para o conjunto  $I_n(132)$ .

Vamos trabalhar sobre a estrutura desta árvore  $S$  (sem as entradas de  $r$  e sem os rótulos), para obter uma nova árvore  $T \in \mathcal{D}_n^{\beta(0,1)}$ , ou seja,  $T$  será isomorfo à  $S$ , mas os rótulos serão diferentes. Estamos construindo  $T = F(p)$ , a partir de  $S$ .

Vamos relacionar as entradas de  $p$  com os nós de  $S$  (obedecendo o procedimento pós-ordem). Note que as  $\min_{\rightarrow}$  (as folhas) são mantidas fixas.

**Exemplo 6.5.4.** *Seja  $p = 4621357$ , então  $N(p) = 4521367$ , e seja  $S$  a árvore sem rótulo associada a estas permutações, mostradas na Figura 6.6, juntamente com a ordem em que as entradas de  $p$  são escritas para os nós. Note que  $p$  e  $N(p)$  diferem apenas na transposição  $(5,6)$ . (Isto é, em  $N(p)$  as posições destas duas entradas foram trocadas.)*

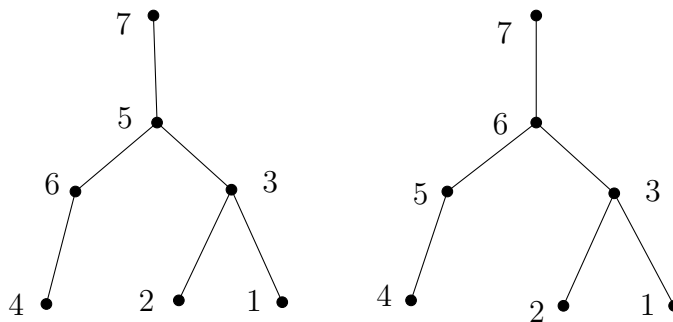


Figura 6.6: As árvores sem rótulos de  $p = 4621357$  e  $N(p) = 4521367$ .

Agora vamos definir o rótulo  $l(v)$  de cada nó  $v$  para a esta nova árvore  $\beta(0,1)$ . Seja  $v_i$  o  $i$ -ésimo nó de  $T$ , que está associado a  $p_i$ , e o rótulo  $l(v_i)$  é dado pela Definição 6.1.8.

Seja  $F(p)$  a árvore  $\beta(0,1)$  definida por estes rótulos. Note que um descendente de  $v_i$  é uma entrada da subárvore enraizada em  $v_i$ .

Primeiro, é fácil de ver que  $F$ , de fato, age no conjunto  $\mathcal{D}_n^{\beta(0,1)}$ . Com efeito, seja  $v$  um nó interno e sejam  $v_1, v_2, \dots, v_k$  seus filhos. Então  $l(v) \leq 1 + \sum_{i=1}^k l(v_i)$ , porque pode haver, no máximo, uma entrada contada por  $l(v)$  e não contada por qualquer rótulo de seus filhos, a saber o próprio  $v$ . Em segundo lugar, todos os rótulos são certamente não-negativos e todas as folhas, ou seja, as  $\min_{\rightarrow}$ , têm rótulo 0.

**Exemplo 6.5.5.** *No Exemplo 6.5.4 criamos a árvore sem rótulo  $S$  para  $p = 4621357$ . A aplicação da regra dada pela Definição 6.1.8 mostra que  $F(p)$  é a árvore  $\beta(0,1)$  mostrada na Figura 6.7. De fato, o único padrão 132 de  $p$  é 465 que é contado apenas uma vez, na entrada 6.*



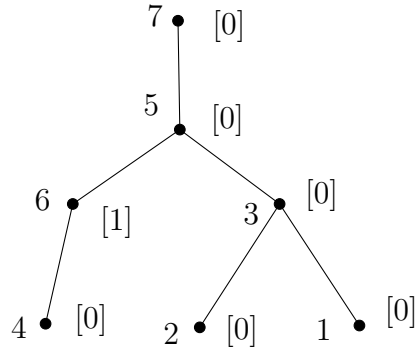


Figura 6.7: A imagem  $F(p)$  de  $p = 4621357$ .

**Exemplo 6.5.6.** *Seja  $p = 58371624$ , então temos  $N(p) = 56341278$ , dando origem à árvore sem rótulo mostrada à esquerda na Figura 6.8. Então calculamos os rótulos de  $F(p)$  para se obter a árvore mostrada à direita na Figura 6.8.*

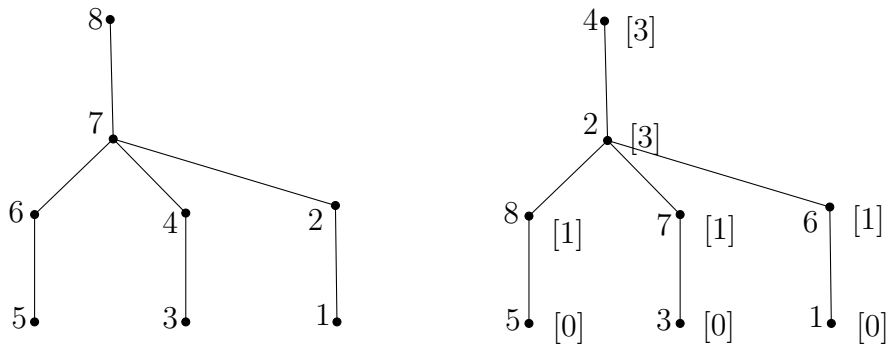


Figura 6.8: A árvore  $S$  e  $F(p)$  para  $p = 58371624$ .

Para provar que  $F$  é uma bijeção, basta mostrar que existe uma inversa. Ou seja, é suficiente mostrar que para qualquer árvore  $T \in \mathcal{D}_n^{\beta(0,1)}$ , podemos encontrar a única permutação  $p$  tal que  $F(p) = T$ .

Vamos provar a afirmação por indução em  $n$ , no caso de  $n = 1$  é óbvio. Vamos assumir que já provamos a afirmação para todo inteiro positivo menor do que  $n$ . Com um ligeiro abuso de notação, denotamos as bijeções pertencentes a estes números inteiros menores também por  $F$ . Seja  $T$  uma árvore  $\beta(0,1)$  com  $n$  nós. Note que  $T$ , mesmo sem seus rótulos, especifica a classe fraca de qualquer permutação suposta  $p$  para a qual  $F(p) = T$ .  $p_1$  é a entrada mais à esquerda (e, portanto, a  $\min_{\rightarrow}$  mais à esquerda) de  $p$ , obtido de  $T$ . Seja  $v_1$  a folha mais à esquerda de  $T$ . Consideramos os seguintes quatro casos:

1º Vamos supor que  $v_1$  não seja o único filho de seu pai  $x$ . Neste caso, podemos simplesmente remover  $v_1$  de  $T$ . A árvore restante  $T'$  é uma árvore  $\beta(0,1)$  válida e que é menor do que  $T$ ,

por isso, a nossa hipótese de indução, tem uma única pré-imagem  $F^{-1}(T') = p'$ . Agora,  $p'$  será precedido pela entrada  $p_1$  (e adicionar 1 a todas as entradas em  $p'$  que são maiores do que ou iguais a  $p_1$ ) para obter a única pré-imagem  $F^{-1}(T) = p$ . Note que a junção de  $p_1$  à frente de  $p'$  não cria um padrão 1342 uma vez que  $p_1$  é maior do que a primeira entrada de  $p'$ , neste caso.

2º Vamos supor que  $v_1$  seja o único filho de seu pai  $x$ , mas  $l(x) = 0$ . Neste caso, podemos ainda remover  $v_1$  de  $T$  e proceder como no caso anterior. Note que, neste caso, a entrada associada à  $x$  será  $p_1 + 1$ .

3º Vamos supor que  $v_1$  seja o único filho de  $x$ , e ao mesmo tempo,  $l(x) \neq 0$  e existe um antecessor de  $x$  que tem rótulo 0. Seja  $v$  o mais próximo antecessor de  $x$ , tal que  $l(v) = 0$ . Isto significa que  $v$  não é a raiz de  $T$ , uma vez que a única maneira da raiz ter rótulo 0 é se todos os seus filhos tiverem rótulo 0.

Agora remova temporariamente a subárvore  $T_v$  com raiz em  $v$  de  $T$ , exceto a raiz  $v$ . Em outras palavras, encolher  $T_v$  para sua raiz  $v$ . Seja  $T'$  a árvore restante. Uma vez que  $l(v) = 0$ , note que a árvore  $T'$  é uma árvore  $\beta(0, 1)$  válida. Como  $T'$  é menor do que  $T$ , ela tem uma única pré-imagem  $p'$  sob  $F$ , pela nossa hipótese de indução. Afirmamos que há exatamente uma possibilidade para o conjunto de entradas de  $p$  que estão associados aos nós de  $T_v$ , e há exatamente uma possibilidade para a permutação parcial  $p_v$  dessas entradas.

Para a primeira afirmação, note que o conjunto  $S$  de entradas associadas aos nós de  $T_v$  é igual ao conjunto  $Z$  de entradas associadas aos nós de  $T_v$  por  $N(p)$ . Lembre-se da prova da Proposição 6.4.1 que o procedimento de normalização mantém fixas as  $\min_{\rightarrow}$  de uma permutação, e então colocar a menor entrada elegível em cada fresta disponível, procedendo da esquerda para a direita. (Esta é a única forma de obter uma permutação evitando 132 na classe fraca dada.) Se  $S \neq Z$ , então isso significa que este procedimento não foi seguido e, portanto, um padrão 132 partindo de  $T_v$  mas terminando fora de  $T_v$  foi formado, contrariando a suposição  $l(v) = 0$ .

Para a segunda afirmação, note que  $T_v$  torna-se uma árvore  $\beta(0, 1)$  se mudarmos o rótulo de sua raiz  $v$  de 0 para a soma do rótulo de seus filhos (que não muda nada, já que nem o rótulo 0 nem o novo rótulo traz nenhuma informação nova para  $T_v$ ). Como  $T_v$  é menor do que  $T$ , ele tem uma única pré-imagem  $p_v$  em  $F$  pela nossa hipótese de indução.

As permutações parciais  $p_v$  e  $p'$ , e o conjunto  $S$  no qual  $p_v$  é tomado, juntos, determinam a única permutação  $F^{-1}(p)$ .

4º Finalmente, vamos supor que  $v_1$  seja o único filho de  $x$ , e nenhum antecessor de  $x$  tem rótulo zero, isto é, todos os nós no caminho de  $x$  até a raiz têm rótulos positivos. Pela Proposição 6.5.2, isso significa que  $x$  é o nó ao qual a entrada  $n$  está associada. Em outras palavras,  $n$  é a segunda entrada da nossa suposta permutação  $p$ . Agora remova  $x$  de  $T$  (ou seja, conecte  $v_1$  diretamente ao pai de  $x$ , e diminua os rótulos de cada antecessor de  $x$  de 1). Isto pode ser feito uma vez que todos os rótulos eram positivos. Seja  $T'$  a árvore obtida. Construa a única permutação  $p' = F^{-1}(T')$ , cuja existência é garantida pela nossa hipótese de indução. Insira  $n$  na sua segunda posição para obter  $F^{-1} = p$ . Isto certamente não cria um padrão 1342, uma vez que  $n$  pode apenas desempenhar o papel do 4 em tal padrão, mas existe apenas uma entrada anterior à  $n$  em  $p$ .

Isto prova que  $F$  é uma bijeção, completando a prova do Teorema 6.5.3.  $\square$

## 6.6 A Fórmula

**Corolário 6.6.1.** *O número de  $n$ -permutações indecomponíveis evitando 1342 é*

$$|I_1(1342)| = 1 \quad e \quad |I_n(1342)| = 3 \cdot 2^{n-2} \cdot \frac{(2n-2)!}{(n+1)!(n-1)!}, \quad \text{para } n \geq 2. \quad (6.5)$$

*Demonstração.* Segue da bijeção  $F$ , no Teorema 6.5.3, que  $|I_n(1342)| = t_n$ , e  $t_n$  é dado pela equação (6.1).  $\square$

**Lema 6.6.2.** *Considere  $s_n = \mathcal{A}_n(1342)$  e  $H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$ . Além disso,  $F(x)$  é a função geradora dos números  $t_n$ . Então*

$$H(x) = \sum_{i \geq 0} (F(x))^i = \frac{1}{1 - F(x)} = \frac{32x}{-8x^2 + 20x + 1 - (1 - 8x)^{3/2}}. \quad (6.6)$$

*Demonstração.* Conhecemos a função geradora ordinária dos números  $t_n$  (equação (6.2)), dada por:

$$F(x) = \frac{8x^2 + 12x - 1 + (1 - 8x)^{3/2}}{32x}. \quad (6.7)$$

Os coeficientes de  $F(x)$  são os números de  $n$ -permutações indecomponíveis evitando 1342. Qualquer permutação evitando 1342 tem uma decomposição única em permutações indecomponíveis. Esta decomposição pode consistir de  $1, 2, \dots, n$  blocos, o que implica que  $s_n = \sum_{i=1}^n t_i s_{n-i}$ . Pois, suponha que  $p = p_1 p_2 \dots p_n \in S_n(1342)$  seja decomposto (com um único corte) em dois blocos, tal que o primeiro bloco tenha tamanho  $i$  e seja indecomponível:  $p_1 \dots p_i | p_{i+1} \dots p_n$ ; implicando em  $t_i s_{n-i}$  possibilidades para  $i$ .

Note que,

$$\begin{aligned} F \cdot H &= \sum_{n=1}^{\infty} t_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n \\ &= (t_1 x + t_2 x^2 + t_3 x^3 + t_4 x^4 + \dots) \cdot (s_0 + s_1 x + s_2 x^2 + s_3 x^3 + s_4 x^4 + \dots) \\ &= t_1 s_0 x + (t_1 s_1 + t_2 s_0) x^2 + (t_1 s_2 + t_2 s_1 + t_3 s_0) x^3 + (t_1 s_3 + t_2 s_2 + t_3 s_1 + t_4 s_0) x^4 + \dots \\ &= s_1 x + s_2 x^2 + s_3 x^3 + s_4 x^4 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} s_n x^n. \end{aligned}$$

Obtemos:

$$F \cdot H = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n t_i s_{n-i} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} s_n x^n = H - s_0. \quad (6.8)$$

Portanto,

$$(F - 1)H = -s_0 \Rightarrow H = \frac{-s_0}{F - 1} \Rightarrow H(x) = \frac{1}{1 - F(x)}, \quad (6.9)$$

como afirmamos.  $\square$

Agora que temos a função geradora dos números  $\mathcal{A}_n(1342)$ , estamos em condições de obter uma fórmula explícita para estes números. Essa fórmula vai provar o Teorema a seguir.

**Teorema 6.6.3.** *Para todo inteiro positivo  $n$ , temos*

$$\mathcal{A}_n(1342) = (-1)^{n-1} \frac{(7n^2 - 3n - 2)}{2} + 3 \sum_{i=2}^n (-1)^{n-i} 2^{i+1} \frac{(2i-4)!}{i!(i-2)!} \binom{n-i+2}{2}$$

*Demonstração.* Multiplique o numerador e o denominador de  $H(x)$  por  $(-8x^2 + 20x + 1) + (1 - 8x)^{3/2}$ . Depois, simplificando, obtemos

$$H(x) = \frac{(1 - 8x)^{3/2} - 8x^2 + 20x + 1}{2(x + 1)^3}. \quad (6.10)$$

Expandido os binômios da fórmula acima (veja Apêndice B), temos

$$(1 - 8x)^{3/2} = 1 - 12x + \sum_{n \geq 2} 3 \cdot 2^{n+2} x^n \frac{(2n-4)!}{n!(n-2)!}, \quad (6.11)$$

e

$$(1 + x)^{-3} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \binom{n+2}{n} x^n, \quad (6.12)$$

que substituindo em (6.10), reescrevemos a função geradora como

$$H(x) = \left( 1 + 4x - 4x^2 + \sum_{n \geq 2} 3 \cdot 2^{n+1} \frac{(2n-4)!}{n!(n-2)!} x^n \right) \cdot \left( \sum_{n \geq 0} (-1)^n \binom{n+2}{2} x^n \right),$$

cujos coeficientes de  $x^n$  é a fórmula para  $\mathcal{A}_n(1342)$ . □

Assim, os primeiros valores da sequência dos números  $\mathcal{A}_n(1342)$  são:

$$1, 2, 6, 23, 103, 512, 2740, 15485, 91245, 555662, \dots$$

**Corolário 6.6.4.** *Para todo  $n$ , temos  $\mathcal{A}_n(1342) < 8^n$ .*

*Demonstração.* Na fórmula para  $\mathcal{A}_n(1342)$ , dada pelo Teorema 6.6.3, a última parcela do somatório é positiva,  $(-1)^0$ , e é maior do que cada uma das parcelas anteriores que alternam o sinal, logo, esta última parcela é maior do que toda a expressão do lado direito, se  $n \geq 8$ .

Conforme Bóna [5] na página 175,  $\frac{(2n-4)!}{n!(n-2)!} < \frac{8^{n-2}}{n^{2.5}}$ , pela fórmula de Stirling, provando o limite superior exponencial para  $\mathcal{A}_n(1342)$ . □

**Corolário 6.6.5.** *Temos*

$$\mathcal{L}(1342) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\mathcal{A}_n(1342)} = 8.$$

*Demonstração.* Pelas Conjecturas de Stanley-Wilf 4.1.1 e 4.1.2, o fato de  $\mathcal{A}_n(1342) < 8^n$  implica que o limite  $\sqrt[n]{\mathcal{A}_n(1342)}$  existe.

Lembremos que os números  $t_n$  satisfazem a relação de recorrência (6.3) e o resultado (6.4), e também temos que  $t_n \leq s_n < 8^n \Rightarrow \sqrt[n]{t_n} \leq \sqrt[n]{s_n} < \sqrt[n]{8^n}$ . Portanto, pelo teorema do confronto, obtemos o resultado.  $\square$

Quanto à Questão 3.2.2, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\mathcal{A}_n(1342)} = 8 \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\mathcal{A}_n(1234)} = 9.$$

Isto é, as sequências  $\{\mathcal{A}_n(1342)\}_{n \geq 1}$  e  $\{\mathcal{A}_n(1234)\}_{n \geq 1}$  não são assintoticamente iguais, mesmo no sentido logarítmico.

# Considerações

Como mencionado na introdução, esta idéia de padrão em permutação teve um grande impulso depois das considerações feitas por Donald Knuth, na aplicação em computação. No entanto, este trabalho, simplesmente, abordou os resultados teóricos baseados na obra de Miklós Bóna.

Os números de Catalan,  $C_n$ , aparecem em vários problemas de contagem e aqui não podiam faltar; no Capítulo 2, eles aparecem na contagem das permutações em  $S_n$  que evitam qualquer padrão de tamanho três, ou seja, o número  $\mathcal{A}_n(q) = C_n$  para  $q$  de tamanho três.

Os números  $\mathcal{A}_n(q)$  para padrões  $q$  de tamanho quatro dependem de  $q$ , estes padrões estão agrupados em três  $W$ -classes, portanto obtemos três resultados: fórmulas exatas para os números  $\mathcal{A}_n(1234)$  e  $\mathcal{A}_n(1342)$ , e uma cota superior para  $\mathcal{A}_n(1324)$ .

Um outro número mencionado no texto é o limite de Stanley-Wilf para um padrão  $q$ , que, até agora, temos calculado:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\mathcal{A}_n(q)} = \begin{cases} 4, & \text{se } q \text{ é de tamanho } 3, \\ (k-1)^2, & \text{se } q = 123 \cdots k, \\ 8, & \text{se } q = 1342, \end{cases}$$

Os trabalhos de Bóna foram surpreendentes, tanto na idéia da decomposição em quatro letras usada para melhorar a cota superior para os números  $\mathcal{A}_n(1324)$ , quanto na bijeção entre o conjunto das árvores beta e o conjunto  $I_n(1342)$ , na dedução de  $\mathcal{A}_n(1342)$ .

Um outro objeto também contado pelos números  $|I_n(1342)| = t_n$  aparece no artigo [17], de 1963, agora, relacionados com os *mapas bicúbicos enraizados*<sup>1</sup>. Tutte foi enumerando estes mapas (de acordo com o número  $2(n-1)$  de vértices,  $n \geq 2$ ) quando ele obteve a função geradora ordinária  $F(x)$ :

$$F(x) = \frac{-24x^2 + 12x - 1 + (1-8x)^{3/2}}{32x^2}, \quad (6.13)$$

cujos primeiros valores são: 1, 3, 12, 56, 288, 1584, 9152, ... .

Note que esta sequência dos números de mapas difere da sequência dos números  $t_n$  apenas no deslocamento de uma posição: 1, 1, 3, 12, 56, 288, 1584, 9152, ... .

---

<sup>1</sup>Mapas planares em que cada vértice tem grau três e há um lado diferenciado, a raiz.

# Apêndice A

## Cálculos. Wolfram Mathematica

A fórmula, dada em [8], para os números  $t_n$ , de árvores  $\beta(0, 1)$ , e a sequência de valores a partir de  $n = 2$ .

$$T = 3 * 2^{(n - 2)} * (2n - 2)! / ((n + 1)! * (n - 1)!)$$

$$T = \frac{3 \times 2^{-2+n} (-2 + 2n)!}{(-1 + n)! (1 + n)!}$$

```
Table[T, {n, 2, 11}]
```

```
{1, 3, 12, 56, 288, 1584, 9152, 54912, 339456, 2149888}
```

Lembrando que  $t_1 = 1$ . A mesma sequência, com a fórmula de recorrência:

$$R = \{t[n] == ((8n - 12) / (n + 1)) * t[n - 1], t[2] == 1\}$$

```
RecurrenceTable[R, t, {n, 2, 10}]
```

$$\left\{t[n] == \frac{(-12 + 8n) t[-1 + n]}{1 + n}, t[2] == 1\right\}$$

```
{1, 3, 12, 56, 288, 1584, 9152, 54912, 339456}
```

A função geradora fornecida pelo “Mathematica”:

$$F = x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3 \times 2^{-2+n} (-2 + 2n)!}{(-1 + n)! (1 + n)!} x^n$$

$$F = x + \frac{-1 + \sqrt{1 - 8x} + 12x - 8\sqrt{1 - 8x}x - 24x^2}{32x}$$

Efetuada a soma e colocando em evidência  $\sqrt{1 - 8x}$ , reescrevemos  $F(x)$ , e mais uma vez a sequência se repete, agora começando com  $t_1$ :

$$F = \frac{-1 + (\sqrt{1 - 8x})(1 - 8x) + 12x + 8x^2}{32x}$$

$$F = \frac{-1 + (1 - 8x)^{3/2} + 12x + 8x^2}{32x}$$

`Series[F, {x, 0, 9}]`

$$F = x + x^2 + 3x^3 + 12x^4 + 56x^5 + 288x^6 + 1584x^7 + 9152x^8 + 54912x^9 + O[x]^{10}$$

1, 1, 3, 12, 56, 288, 1584, 9152, 54912, ...



# Apêndice B

## Expansão Binomial

$$(1 + ax)^u = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{u}{r} (ax)^r.$$

$$\binom{u}{r} = \begin{cases} \frac{1}{r!} [u(u-1)(u-2)\cdots(u-r+1)], & \text{se } r > 0, \\ 1, & \text{se } r = 0. \end{cases}$$

### B.1 Exemplo

Expandindo o binômio  $(1 - 8x)^{3/2}$ :

$$\begin{aligned} (1 - 8x)^{3/2} &= 1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{(-8x)}{1!} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{(-8x)^2}{2!} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{(-8x)^3}{3!} + \\ &+ \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{-3}{2} \cdot \frac{(-8x)^4}{4!} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{-3}{2} \cdot \frac{-5}{2} \cdot \frac{(-8x)^5}{5!} + \dots \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} (1 - 8x)^{3/2} &= 1 - 12x + 3 \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{(2^3x)^2}{2!} + 3 \cdot \frac{1}{2^3} \cdot \frac{(2^3x)^3}{3!} + \\ &+ 3 \cdot \frac{1 \cdot 3}{2^4} \cdot \frac{(2^3x)^4}{4!} + 3 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^5} \cdot \frac{(2^3x)^5}{5!} + \dots \end{aligned}$$

Reescrevendo o produto  $1 \cdot 3 \cdots (2k - 3) \cdot (2k - 1)$ , com  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} 1 \cdot 3 \cdots (2k - 3) \cdot (2k - 1) &= \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k - 3) \cdot (2k - 1) \cdot 2 \cdot 4 \cdots (2k - 2) \cdot (2k)}{2 \cdot 4 \cdots (2k - 2) \cdot (2k)} \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (2k - 3) \cdot (2k - 2) \cdot (2k - 1) \cdot (2k)}{2^k \cdot 1 \cdot 2 \cdots (k - 1) \cdot k} \\ &= \frac{(2k)!}{2^k \cdot k!} \end{aligned}$$

Substituindo na expressão expandida:

$$\begin{aligned} (1 - 8x)^{3/2} &= 1 - 12x + 3 \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{2^6 x^2}{2!} + 3 \cdot \frac{2!}{2^3 \cdot 2 \cdot 1!} \cdot \frac{2^9 x^3}{3!} + \\ &\quad + 3 \cdot \frac{4!}{2^4 \cdot 2^2 \cdot 2!} \cdot \frac{2^{12} x^4}{4!} + 3 \cdot \frac{6!}{2^5 \cdot 2^3 \cdot 3!} \cdot \frac{2^{15} x^5}{5!} + \dots \end{aligned}$$

Obtemos:

$$\begin{aligned} (1 - 8x)^{3/2} &= 1 - 12x + 3 \cdot 2^4 \cdot \frac{x^2}{2!} + 3 \cdot 2^5 \cdot \frac{2!}{1!} \cdot \frac{x^3}{3!} + 3 \cdot 2^6 \cdot \frac{4!}{2!} \cdot \frac{x^4}{4!} + \\ &\quad + 3 \cdot 2^7 \cdot \frac{6!}{3!} \cdot \frac{x^5}{5!} + \dots + 3 \cdot 2^{i+2} \cdot \frac{(2i - 4)!}{(i - 2)!} \cdot \frac{x^i}{i!} + \dots \end{aligned}$$

Assim,

$$(1 - 8x)^{3/2} = 1 - 12x + \sum_{n \geq 2} 3 \cdot 2^{n+2} \cdot \frac{(2n - 4)!}{n! (n - 2)!} \cdot x^n \quad (\text{B.1})$$

## B.2 Exemplo

Expandindo o binômio  $(1 + x)^{-3}$ :

$$\begin{aligned} (1 + x)^{-3} &= 1 + (-3) \cdot \frac{x}{1!} + (-3)(-4) \cdot \frac{x^2}{2!} + (-3)(-4)(-5) \cdot \frac{x^3}{3!} + \\ &\quad + (-3)(-4)(-5)(-6) \cdot \frac{x^4}{4!} + (-3)(-4)(-5)(-6)(-7) \cdot \frac{x^5}{5!} + \dots \end{aligned}$$

Logo:

$$(1 + x)^{-3} = 1 - \frac{3!}{2!} \cdot \frac{x}{1!} + \frac{4!}{2!} \cdot \frac{x^2}{2!} - \frac{5!}{2!} \cdot \frac{x^3}{3!} + \frac{6!}{2!} \cdot \frac{x^4}{4!} - \frac{7!}{2!} \cdot \frac{x^5}{5!} + \dots$$

Assim:

$$(1+x)^{-3} = 1 + (-1)^1 \frac{3!}{2!1!} \cdot x + (-1)^2 \frac{4!}{2!2!} \cdot x^2 + (-1)^3 \frac{5!}{2!3!} \cdot x^3 + \\ + (-1)^4 \frac{6!}{2!4!} \cdot x^4 + (-1)^5 \frac{7!}{2!5!} \cdot x^5 + \dots$$

Reescrevendo:

$$(1+x)^{-3} = 1 + (-1)^1 \frac{(2+1)!}{2!1!} \cdot x + (-1)^2 \frac{(2+2)!}{2!2!} \cdot x^2 + (-1)^3 \frac{(2+3)!}{2!3!} \cdot x^3 + \\ + (-1)^4 \frac{(2+4)!}{2!4!} \cdot x^4 + (-1)^5 \frac{(2+5)!}{2!5!} \cdot x^5 + \dots$$

Obtemos:

$$(1+x)^{-3} = 1 + (-1)^1 \binom{1+2}{1} x + (-1)^2 \binom{2+2}{2} x^2 + (-1)^3 \binom{3+2}{3} x^3 + \\ + (-1)^4 \binom{4+2}{4} x^4 + (-1)^5 \binom{5+2}{5} x^5 + \dots$$

Ou seja,

$$(1+x)^{-3} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \binom{n+2}{n} x^n. \quad (\text{B.2})$$

# Apêndice C

## Fórmula de Stirling

A fórmula de Stirling estabelece uma aproximação assintótica para o fatorial de um número.

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

A desigualdade de Stirling.

$$\frac{\sqrt{2\pi n} n^{n+1/2}}{e^n} \leq n! \leq \frac{n^{n+1/2}}{e^{n-1}}$$

Assim, para todo  $n \geq 1$ , a razão  $\frac{n!}{n^{n+1/2}e^{-n}}$  está sempre entre

$$\sqrt{2\pi} = 2,5066\dots \quad e \quad e = 2,71828\dots$$

# Referências Bibliográficas

- [1] Michael H Albert, Murray Elder, Andrew Rechnitzer, P Westcott, and Michael Zabrocki, *On the stanley-wilf limit of 4231-avoiding permutations and a conjecture of arratia*, Advances in Applied Mathematics **36** (2006), no. 2, 96–105.
- [2] Richard Arratia, *On the stanley-wilf conjecture for the number of permutations avoiding a given pattern*, Electron. J. Combin **6** (1999), no. 1, 1–4.
- [3] Jörgen Backelin, Julian West, and Guoce Xin, *Wilf-equivalence for singleton classes*, Advances in Applied Mathematics **38** (2007), no. 2, 133–148.
- [4] Miklós Bóna, *Exact and asymptotic enumeration of permutations with subsequence conditions*, Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1997.
- [5] ———, *Combinatorics of permutations*, vol. 72, CRC Press, 2012.
- [6] ———, *A new upper bound for 1324-avoiding permutations*, arXiv preprint arXiv:1207.2379 (2012).
- [7] Anders Claesson, Vít Jelínek, and Einar Steingrímsson, *Upper bounds for the stanley-wilf limit of 1324 and other layered patterns*, arXiv preprint arXiv:1111.5736 (2011).
- [8] Robert Cori, Benjamin Jacquard, and Gilles Schaeffer, *Description trees for some families of planar maps*, Proceedings of the 9th Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, Citeseer, 1997, pp. 196–208.
- [9] Guillaume Fertin, Antony Labarre, Irena Rusu, Éric Tannier, and Stéphane Vialette, *Combinatorics of genome rearrangements*, MIT press, 2009.
- [10] Ira M Gessel, *Symmetric functions and p-recursiveness*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **53** (1990), no. 2, 257–285.
- [11] Donald E Knuth, *The art of computer programming: Fundamental algorithms, vol. i*, 1968.
- [12] Adam Marcus and Gábor Tardos, *Excluded permutation matrices and the stanley-wilf conjecture*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **107** (2004), no. 1, 153–160.
- [13] Amitai Regev, *Asymptotic values for degrees associated with strips of young diagrams*, Advances in Mathematics **41** (1981), no. 2, 115–136.

- [14] José Plínio de Oliveira Santos, Margarida Pinheiro Mello, and Idani Theresinha Calzolari Murari, *Introdução à análise combinatória*, Ed. Ciencia Moderna, 2007.
- [15] Zvezdelina E Stankova, *Forbidden subsequences*, Discrete Mathematics **132** (1994), no. 1, 291–316.
- [16] Richard P Stanley, *Enumerative combinatorics: Volume 1*, Cambridge University Press, 2011.
- [17] WT Tutte, *A census of planar maps*, Canad. J. Math **15** (1963), no. 2, 249–271.
- [18] Julian West, *Permutations with forbidden subsequences, and, stack-sortable permutations*, Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1990.
- [19] Herbert S Wilf, *generatingfunctionology*, Citeseer, 1990.

# Índice Remissivo

- árvore
  - beta, 29
  - definição, 28
  - enraizada, 28
  - leitura pós-ordem, 28
- atingir, 31
- bater, 31
- Catalan
  - fórmula fechada, 11
  - limitante superior, 12
  - números de, 10
  - relação de recorrência, 10
- classe
  - de Wilf, 2
  - definição, 7
  - forte, 17
  - fraca, 7
- decomposição
  - em duas cores, 22
  - em quatro letras, 23
- entradas revertidas, 1
- fator  $CB$ , 23
- grau, 20
- mínima da esquerda para a direita, 6
- normalização, 35
- notações
  - $I_n$ , 31
  - $S_n(q)$ , 2
  - $\beta(a, b)$ , 29
  - $\mathcal{A}_n(q)$ , 2
  - $\mathcal{D}^{\beta(a,b)}$ , 29
  - $\min_{\rightarrow}$ , 6
  - $n$ -permutação, 1
  - W-classe, 2
- padrão
  - de tamanho dois, 5
  - de tamanho quatro, 14
    - evidência numérica, 16
  - de tamanho três, 6
  - evitar, 2
  - noção, 2
- permutação
  - complementar, 3
  - decomponível, 31
  - definição, 1
  - fusão, 22
  - indecomponível, 31
  - inversa, 3
  - representação matricial, 3
  - reversa, 3
- rótulo, 31
- Stanley-Wilf
  - conjecturas de, 19
  - limite de, 18