



MARCELO ROCHA COSTA

A MEDIDA HARMÔNICA DO CUBO

CAMPINAS
2014



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

MARCELO ROCHA COSTA

A MEDIDA HARMÔNICA DO CUBO

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em estatística.

Orientador: Serguei Popov

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO MARCELO ROCHA COSTA, E ORIENTADA PELO PROF. DR. SERGUEI POPOV.

Assinatura do Orientador

A handwritten signature in cursive script, reading "Serguei Popov", is written over a horizontal line.

CAMPINAS
2014

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

C823m Costa, Marcelo Rocha, 1989-
A medida harmônica do cubo / Marcelo Rocha Costa. – Campinas, SP : [s.n.],
2014.

Orientador: Serguei Popov.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Passeios aleatórios (Matemática). 2. Martingala (Matemática). 3. Teoria do
potencial. I. Popov, Serguei, 1972-. II. Universidade Estadual de Campinas.
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: The harmonic measure of the cube

Palavras-chave em inglês:

Random walks (Mathematics)

Martingales (Mathematics)

Potential theory

Área de concentração: Estatística

Titulação: Mestre em Estatística

Banca examinadora:

Serguei Popov [Orientador]

Élcio Lebensztayn

Fabio Prates Machado

Data de defesa: 26-06-2014

Programa de Pós-Graduação: Estatística

Dissertação de Mestrado defendida em 26 de junho de 2014 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Serguei Popov

Prof(a). Dr(a). SERGUEI POPOV

Elcio Lebensztayn

Prof(a). Dr(a). ELCIO LEBENSZTAYN

Fabio Prates Machado

Prof(a). Dr(a). FABIO PRATES MACHADO

Abstract

It has been considered in this work a problem which play a role of showing the effectiveness of the content covered in the introductory chapters, as well as it has been an unsolved problem across the specialized literature. We introduce a particle performing a simple random walk in space, i.e., a particle that at each step chooses uniformly one of its neighborhood sites to which it then jumps into. Fixed its initial position along the boundary of a cube, we are interested in answering the following question: what is the probability that such particle's trajectory will never reach the cube again? In other words, if T is the first return time to the cube, we aim to analyse the asymptotic behavior of the probability that T is infinite.

Keywords: Random Walk, Martingale, Potential Theory

Resumo

O problema considerado no presente trabalho cumpre o papel de reforçar a eficácia dos métodos apresentados nos capítulos introdutórios, bem como investiga a resposta de um problema até então não publicado na literatura especializada. Introduzimos uma partícula realizando um passeio aleatório simples no espaço, ou seja, uma partícula que a cada passo escolhe uniformemente um de seus vizinhos para onde irá saltar. Fixando sua posição inicial ao longo da fronteira do cubo, pergunta-se: qual é a probabilidade de que a trajetória de tal partícula nunca mais retorne ao cubo? Em outras palavras, se T é o tempo de primeiro retorno ao cubo, estamos interessados em descrever o comportamento assintótico da probabilidade de que T seja infinito.

Palavras-chave: Passeio Aleatório, Martingale, Teoria do Potencial

Sumário

Dedicatória	ix
Agradecimentos	x
1 Cadeias de Markov	3
1.1 Introdução	3
1.2 Definições	3
1.3 Passeio Aleatório	5
2 Martingais	7
2.1 Introdução	7
2.2 Teoria de Martingais	9
2.2.1 Esperança Condicional	9
2.3 Teorema de Parada Opcional	10
2.3.1 Processos previsíveis e estratégias de jogo	10
2.4 Teorema de Convergência	12
3 Teoria do potencial	14
3.1 Introdução histórica	14
3.2 O Laplaciano discreto	17
3.3 Função de Green	18
3.4 Funções Harmônicas	19
3.5 Caso transiente	20
3.6 Capacidade	23
4 A medida harmônica do cubo	25
4.1 Face	26
4.2 Aresta	27
4.3 Vértice	28
A Teoria de Campos Vetoriais	29
A.1 Preliminares motivações físicas	29
A.1.1 O Teorema de Green	32
A.1.2 O Teorema de Stokes	33

A.1.3	Divergência e o Teorema de Gauss	35
A.2	A Equação de Laplace	35
A.2.1	As identidades de Green	36
A.2.2	A fórmula da média e princípio do máximo	37
A.2.3	A Função de Green	39
Referências		41

Aos meus queridos familiares.

Agradecimentos

Agradeço à CAPES pelo imprescindível suporte financeiro concedido.

Introdução

O presente trabalho tem como principal objetivo investigar como ferramentas analíticas clássicas podem ser utilizadas para resolver problemas puramente probabilísticos. A abordagem adotada tem marcada ênfase conceitual, ilustrada através de um modelo probabilístico bem conhecido - o passeio aleatório simples em \mathbb{Z}^3 . O problema apresentado no último capítulo, embora muito particular, oferece a possibilidade de visualizar como os conceitos operam através de um problema realístico e concreto como descrito a seguir:

A Medida Harmônica do Cubo: Considere o passeio aleatório em \mathbb{Z}^3 , onde estará imerso um cubo de lado n . Introduzimos uma partícula realizando um passeio aleatório simples, ou seja, uma partícula que a cada passo escolhe uniformemente um de seus vizinhos para onde irá saltar. Fixando sua posição inicial ao longo da fronteira do cubo, qual é a probabilidade que tal partícula nunca mais retorne ao cubo? Formalmente, observando sucessivamente a localização aleatória X_0, X_1, \dots da partícula ao longo do tempo, se τ é o tempo de primeiro retorno ao cubo e $X_0 = x$ um ponto situado em sua fronteira, estamos interessados em descrever o comportamento assintótico da função a seguir quando $n \rightarrow \infty$

$$\epsilon(x) := \mathbb{P}[\tau = \infty \mid X_0 = x].$$

Os dois primeiros capítulos foram escritos para servir ao leitor como introdução aos conceitos básicos de Cadeias de Markov e Teoria de Martingais. Os resultados que serão utilizados posteriormente são o Teorema 1, que estabelece o critério de recorrência e transiência do passeio aleatório simples em \mathbb{Z}^d , e o Teorema 2, utilizado repetidamente na obtenção de estimativas da medida harmônica do cubo.

O terceiro capítulo apresenta uma contextualização histórica da teoria de potencial [Pon09], e busca entender a incorporação de métodos analíticos na teoria de probabilidade. Essa tema foi abordado extensivamente no trabalho de Doob, J.L. [Doo53; Doo59], principal referência do presente trabalho. O resultado essencial explora o fato de, dado um processo estocástico $\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ e o tempo de parada τ de primeira saída de um subconjunto do espaço de estados, o processo parado $\{f(X_{n \wedge \tau}), n \geq 0\}$ ser um (sub/super) martingal é equivalente à condição de f ser (sub/super) harmônica em tal subconjunto. Ademais, sob certas condições, a função f fica determinada pelo processo X através da fórmula

$$f(x) = \mathbb{E}[f(X_\tau) \mid X_0 = x].$$

Pelos teoremas de convergência e parada de martingais, é possível garantir em muitos casos a existência de quase toda trajetória do processo $f(X)$ e assim obter informação do comportamento

assintótico do processo original X . No contexto de probabilidades de escape (de um objeto B digamos), buscamos uma função harmônica positiva no complementar de B , com condição de fronteira $f|_{\partial B} \equiv 0$, pois dessa forma anulamos das equações os termos irrelevantes para então obter as estimativas procuradas.

Finalmente, o último capítulo se concentra na aplicação da metodologia acima para o caso específico do cubo. São analisadas as probabilidades de escape do passeio com ponto inicial situado na face, cujo comportamento é igual ao da esfera; na aresta é obtida uma cota inferior para tal probabilidade; e no vértice não foi possível aferir informações precisas. A abordagem é baseada no que chamamos de metodologia via funções de Lyapunov, que consiste em apresentar uma transformação do processo em questão e então obter a partir do novo processo informações sobre o processo original. No caso do vértice entretanto, para encontrar a função de Lyapunov apropriada fez-se necessário resolver uma equação diferencial cuja solução não é conhecida com as condições de fronteira desejadas.

Capítulo 1

Cadeias de Markov

1.1 Introdução

Os Processos Markovianos e a teoria de Passeios Aleatórios constituem uma fonte de modelos probabilísticos que apresentam interesse teórico intrínseco, bem como originam um vasto campo de aplicações. De maneira geral, um passeio aleatório é um processo estocástico que modela o comportamento aleatório do movimento de uma partícula no espaço. A trajetória de tal partícula é descrita por uma série de *saltos* ao longo de um período, que neste trabalho serão abordados em tempo discreto.

A teoria de passeios aleatórios foi introduzida primeiramente nas correspondências trocadas entre os matemáticos Blaise Pascal e Pierre de Fermat, interessados em resolver o famoso problema da ruína do jogador. Depois, já no início do século XX os passeios aleatórios multidimensionais foram introduzidos e estudados simultaneamente por muitos cientistas e desde então aplicados em campos diversos da ciência.

A partir de então emergiram surpreendentes conexões com influentes áreas da matemática tais como a *análise harmônica*; e a *teoria do potencial*, interessada nas leis de probabilidade relativas a uma Cadeia de Markov quando essa visita pela primeira vez um subconjunto específico de seu espaço de estados. A curiosa coincidência entre probabilidades e potencial elétrico se dá pelo fato de ambas serem solução do mesmo problema de Dirichlet, através das leis físicas de conservação de energia por um lado, e da perda de memória e consequentes equações diferenciais, por outro lado. E como nesse problema, dadas as condições de fronteira, temos unicidade, ambas soluções (probabilidades de absorção e potencial) coincidem, criando assim um fértil campo de pesquisa.

1.2 Definições

Neste trabalho serão consideradas somente variáveis aleatórias definidas no mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, tomando valores em um espaço de estados (Σ, \mathcal{B}) enumerável; sendo por-

tanto o conjunto das partes a σ -álgebra natural de conjuntos de Borel.

Um processo estocástico em tempo discreto com espaço de estados Σ é uma sequência de variáveis aleatórias $X_n : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\Sigma, \mathcal{B})$ indexado por $n \in \mathbb{Z}_+$

Uma filtração (de \mathcal{F}) é uma sequência de σ -álgebras $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$ tal que $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1} \subseteq \mathcal{F}$ para todo $n \geq 0$. Diremos que o processo estocástico $(X_n, n \geq 0)$ é adaptado à filtração $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$ se cada X_n é \mathcal{F}_n -mensurável. Para qualquer processo $(X_n, n \geq 0)$ podemos definir uma filtração minimal na qual o processo é adaptado, bastando definir $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$, chamada filtração natural.

Definição 1 (Propriedade de Markov). Um processo \mathcal{F}_n -adaptado $(X_n, n \geq 0)$ tomando valores em (Σ, \mathcal{B}) é dito uma Cadeia de Markov se para todo $B \in \mathcal{B}$, todo $n \geq 0$ e todo $m \geq 1$,

$$\mathbb{P}[X_{n+m} \in B \mid \mathcal{F}_m] = \mathbb{P}[X_{n+m} \in B \mid X_m], \quad a.s.$$

Definição 2. A cadeia $(X_n, n \geq 0)$ é dita homogênea no tempo se a distribuição de X_{n+1} dado (X_0, X_1, \dots, X_n) tem dependência unicamente em X_n (e não em n). Além disso, diremos que o processo é homogêneo no espaço se a distribuição dos incrementos $\Delta_n = X_{n+1} - X_n$ não depende da localização atual X_n .

Ao longo do texto serão consideradas somente cadeias de Markov homogêneas no tempo e no espaço. A definição acima serve portanto somente para elucidar o conceito de homogeneidade, através do qual é possível simplificar consideravelmente as dificuldades técnicas da teoria de cadeias de Markov.

Além disso, as sequências $(X_n, n \geq 0)$ e $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$ serão denotadas simplesmente por X_n e \mathcal{F}_n , sempre que estiver claro pelo contexto a especificação das informações necessárias sobre o processo.

Usaremos a abreviação $\mathbb{P}_x[\cdot] = \mathbb{P}[\cdot \mid X_0 = x]$, e também $\mathbb{E}_x[\cdot] = \mathbb{E}[\cdot \mid X_0 = x]$ respectivamente para a probabilidade de um evento, e esperança com respeito a uma cadeia começando em um estado inicial fixo $x \in \Sigma$.

No caso em que Σ é enumerável, é possível definir as chamadas *probabilidades de transição* $p(x, y) = \mathbb{P}[X_{k+1} = y \mid X_k = x]$. Note que $p(\cdot, \cdot)$ não apresenta dependência em k desde que a cadeia seja homogênea no tempo. Da mesma forma, $p_n(x, y) = \mathbb{P}[X_{k+n} = y \mid X_k = x]$ denota a probabilidade de a cadeia saltar do estado x para o y em exatamente n passos.

Uma cadeia é dita *irredutível* se para todo $x, y \in \Sigma$, existe um inteiro positivo $m = m(x, y)$ para o qual $\mathbb{P}_x[X_m = y] > 0$; ou seja, dado um estado qualquer, é possível atingir qualquer outro estado através de um número finito de passos.

Uma variável aleatória $\tau \in \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$ é um *tempo de parada* com respeito a filtração em questão se $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$ para todo $n \geq 0$. Em outras palavras, a qualquer instante da evolução do processo é necessário que a regra de parada seja conclusiva, fornecendo a cada momento a decisão de parar

ou não parar.

Para um processo adaptado X_n , dado $B \in \mathcal{B}$, definimos

$$\tau_B^+ := \min\{ n \geq 1 : X_n \in B \}$$

o tempo de chegada em B , e

$$\tau_B := \min\{ n \geq 0 : X_n \in B \}$$

o tempo de entrada em B .

Não é difícil mostrar que ambas as variáveis acima satisfazem a propriedade de tempo de parada, o que traduz o fato elementar de ser sempre possível concluirmos se chegamos ou não em um dado subconjunto mensurável do espaço de estados.

Por simplicidade convencionamos $\tau_x^+ := \tau_{\{x\}}^+$, e $\tau_x := \tau_{\{x\}}$

Definição 3. Para uma cadeia de Markov $(X_n, n \geq 0)$, um estado $x \in \Sigma$ é chamado

- recorrente se $\mathbb{P}_x[\tau_x^+ < \infty] = 1$;
- transiente se $\mathbb{P}_x[\tau_x^+ < \infty] < 1$.

Ademais, um estado recorrente x é classificado como

- recorrente positivo se $\mathbb{E}_x[\tau_x^+] < \infty$;
- recorrente nulo se $\mathbb{E}_x[\tau_x^+] = \infty$.

1.3 Passeio Aleatório

O passeio aleatório simples (ou simétrico) foi um dos primeiros processos aleatórios estudados em probabilidade e ainda exerce um papel fundamental na teoria de probabilidade e aplicações. O passeio aleatório simples é uma cadeia de Markov $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^+}$ interpretado como a localização (no espaço de estados $\Sigma = \mathbb{Z}^d$) de uma partícula no tempo t . A evolução estocástica do processo se dá da seguinte forma: dado $X_t \in \mathbb{Z}^d$, a próxima localização X_{t+1} é escolhida uniformemente entre os $2d$ pontos adjacentes à X_t . Em outras palavras, as probabilidades de transição da cadeia de Markov são dadas por

$$\mathbb{P}[X_{t+1} = y \mid X_t = x] = \begin{cases} \frac{1}{2d} & \text{se } x \text{ é adjacente à } y, \\ 0 & \text{se não.} \end{cases}$$

Supondo inicialmente que a partícula inicie o passeio em algum ponto x de \mathbb{Z}^d , $X_0 = x$. Uma questão fundamental atribuída a Pólya diz respeito a conhecida classificação do passeio entre

recorrente ou transitente. Em outras palavras: Qual é a probabilidade de que, em algum momento, o passeio certamente retorne ao ponto inicial? Em termos da probabilidade de retorno τ_x^+ , gostaríamos de estabelecer algum critério pelo qual podemos verificar quando a igualdade $p_d^x := \mathbb{P}_x[\tau_x^+ < \infty] = 1$ é verificada. Podemos provar também que uma vez que o passeio retorna ao ponto inicial, pela propriedade de Markov (ou de forma geral, pela estacionaridade do processo), o passeio irá retornar ao mesmo ponto infinitas vezes. Por outro lado, se $p_d^x < 1$ o passeio irá, com probabilidade 1, visitar o ponto x somente um número finito de vezes antes de escapar para o infinito e nunca mais retornar.

Além disso, é conhecido o fato que se $\mathbb{P}_x[\tau_x^+ < \infty] = 1$, e se é possível a partir de x atingir o estado y em um número finito de passos, então $\mathbb{P}_y[\tau_y^+ < \infty] = 1$. Portanto, no caso em que a cadeia é irredutível podemos denotar a probabilidade acima simplesmente por p_d , já que todos os estados compartilham do mesmo status quanto à classificação apresentada.

O seguinte resultado foi obtido por Pólya.

Teorema 1 (Teorema de Pólya:). O passeio aleatório simples é recorrente em 1 e 2 dimensões, mas transitente em 3 ou mais; i.e., $p_1 = p_2 = 1$, mas $p_d < 1$ para todo $d \geq 3$

O conteúdo de teorema foi muito bem capturado pelo aforisma atribuído a Shizuo Kakutani: “Um homem bêbado irá certamente encontrar o caminho de casa, ao passo que um pássaro pode não ter a mesma sorte arriscando assim se perder para sempre.” [Dur10]

Existem muitas provas do teorema acima disponíveis na literatura, sendo mais popular aquela baseada em argumentos combinatórios (argumento original de Pólya), e aquelas baseadas em teoria do potencial e redes elétricas, introduzida na abordagem apresentada em [DS84]. No que se segue, esse resultado será importante para estabelecer a interpretação apropriada da teoria de potencial no contexto de passeios aleatórios. A interpretação do potencial irá nesse sentido diferir em cada caso, já que a classificação acima revela uma significativa diferença de comportamento do fenômeno em questão. Antes de entrar em tais detalhes, iremos apresentar o conceito de Martingal que desempenhará papel central para o resto do trabalho.

Capítulo 2

Martingais

2.1 Introdução

Assuma que os jogadores A e B tenham juntos uma fortuna de N moedas. A cada rodada eles apostam uma moeda e prosseguem indefinidamente até que um deles esteja arruinado. Denotaremos por $P_A(x)$ a probabilidade de que, tendo começado com x moedas, o jogador A vença o jogo acumulando todas N moedas. A importância de encontrar uma forma explícita para $P_A(x)$ está relacionada ao problema de como dividir as apostas quando um jogo é interrompido antes do fim - o que seria feito na mesma proporção das respectivas probabilidades de vencer o jogo. As primeiras soluções desse problema podem ser encontradas nas famosas correspondências entre Pascal e Fermat, que apresentaram dois métodos distintos e corretos para calcular $P_A(x)$.

No entanto, será apresentada a seguir a solução proposta por DeMoivre em seu clássico *The Doctrine of Chances* [Moi67]. O princípio central utilizado afirma que *se a cada rodada ambos jogadores tem chances iguais de ganhar cada rodada, esse status continua verdadeiro até o fim do jogo*. Apesar de ingênuo, esse princípio tem importantes implicações na teoria de probabilidade e será essencial para o presente trabalho. Após analisado o argumento de DeMoivre em sua forma original, iremos traduzi-lo para a notação moderna e prosseguiremos com os desenvolvimentos posteriores desse conceito.

Considere que os jogadores A e B tenham no início do jogo respectivamente x e $N - x$ moedas, e que a cada rodada tenham respectivamente probabilidade p e q de obter uma moeda um do outro. Vamos considerar inicialmente $p = q$, o chamado jogo *justo*. Nesse caso, ambos jogadores irão em média ganhar (e perder) a mesma quantidade de moedas ao longo do tempo (aleatório) até o término do jogo, e portanto

$$(N - x)P_A(x) = xP_B(N - x),$$

e já que $P_B(N - x) = 1 - P_A(x)$, obtemos $P_A(x) = x/N$, e $P_B(N - x) = (N - x)/N$, ou seja, a probabilidade de vencer é proporcional à fortuna inicial possuída pelo respectivo jogador.

Suponha agora que $p \neq q$. A ideia original introduzida por DeMoivre foi ordenar e dividir as moedas $\{1, 2, \dots, x\}$, $\{x + 1, \dots, N\}$ e atribuir a cada uma um valor diferente através da transfor-

mação $x \rightarrow (q/p)^x$. Ademais, cada aposta é feita de modo que o jogador A sempre aposta sua moeda mais a direita, e o jogador B sempre a sua moeda mais a esquerda. Portanto, os ganhos médios serão respectivamente $p(q/p)^{x+1}$ e $q(q/p)^x$, ou seja, iguais. Finalmente, através da transformação - mudando os valores de cada moeda, obtemos um jogo justo. Em suas próprias palavras, De Moivre afirma que “... *they still play upon equal terms as before: So that, as long as they play together, they play without advantage or disadvantage. Therefore, the probabilities which they have respectively of winning are proportional to the sums they are initially possessed of.*”

Ora, mas a quantidade que cada jogador possui inicialmente é a soma de uma progressão geométrica, que pode ser somada sem dificuldade, e cujos resultados são respectivamente proporcionais a $(1 - (q/p)^x)$ e $((q/p)^x - (q/p)^N)$ - o que representa as chances que os jogadores tem de vencer. Na terminologia moderna, as probabilidades são

$$\frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^x}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}, \quad \text{de o jogador A vencer,}$$

$$\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^x - \left(\frac{q}{p}\right)^N}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}, \quad \text{de o jogador B vencer.}$$

No decorrer dos séculos, o princípio em que ambos jogadores irão em média ganhar (e perder) a mesma quantidade de moedas até o fim do jogo foi transformado em uma formulação mais simples e equivalente: Observando que os incrementos das fortunas de cada jogador são simétricos, é equivalente definir um jogo justo quando a fortuna de cada um deles permanece em média constante até o fim do jogo.

Dessa forma, a fortuna média do jogador A ao final de um jogo justo será

$$0(1 - P_A(x)) + NP_A(x) = NP_A(x),$$

que pelo princípio acima é igual a fortuna inicial, logo $P_A(x) = x/N$.

No caso de $p \neq q$, observando que a função $\left(\frac{q}{p}\right)^X$ transforma o processo original em um jogo justo já que a fortuna de tal jogador se mantém constante na média

$$q \left(\frac{q}{p}\right)^{x-1} + p \left(\frac{q}{p}\right)^{x+1} = p \left(\frac{q}{p}\right)^x + q \left(\frac{q}{p}\right)^x = \left(\frac{q}{p}\right)^x.$$

Ao longo do tempo (aleatório) até o fim do jogo obtemos

$$\left(\frac{q}{p}\right)^x = (1 - P_A(x)) \cdot \left(\frac{q}{p}\right)^0 + P_A(x) \cdot \left(\frac{q}{p}\right)^N.$$

Finalmente, obtemos de uma maneira mais simples o mesmo resultado

$$P_A(x) = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^x}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}$$

2.2 Teoria de Martingais

O conceito de martingal está intimamente ligado ao princípio da média de uma variável aleatória quando condicionada sobre a informação disponível (σ -álgebra de eventos) gerada por um conjunto de outras variáveis. Para tanto, foi incluída a primeira seção afim de apresentar a definição e algumas propriedades da esperança condicional. Em seguida, defini-se formalmente quais processos chamamos de martingal, e nas seções posteriores serão enunciados os dois principais teoremas sobre o tema.

2.2.1 Esperança Condicional

Lembre-se que

$$\mathbb{E}[X|Z = z_j] = \sum x_i \mathbb{P}[X = x_i|Z = z_j].$$

A esperança condicional de X dado Z , $\mathbb{E}[X|Z]$, é uma variável Y satisfazendo

$$\text{se } Z(\omega) = z_j, \quad \text{então } Y(\omega) = y_j := \mathbb{E}[X|Z = z_j].$$

Observe que Y é constante nos eventos elementares $\{Z = z_j\}$ da σ -álgebra $\mathcal{G} = \sigma(Z)$. Portanto, somando Y restrita a $\{Z = z_j\}$ temos

$$\begin{aligned} \int_{\{Z=z_j\}} Y dP &= y_j \mathbb{P}[Z = z_j] = \sum_i x_i \mathbb{P}[X = x_i|Z = z_j] \mathbb{P}[Z = z_j] \\ &= \sum_i x_i \mathbb{P}[X = x_i; Z = z_j] = \int_{\{Z=z_j\}} X dP. \end{aligned}$$

Se escrevermos $G_j = \{Z = z_j\}$, vimos que $\mathbb{E}[Y \mathbf{1}_{G_j}] = \mathbb{E}[X \mathbf{1}_{G_j}]$. E como para todo $G \in \mathcal{G}$, $\mathbf{1}_G$ é soma de $\mathbf{1}_{G_j}$'s, concluímos que

$$\int_G Y dP = \int_G X dP, \quad \forall G \in \mathcal{G}.$$

Intuitivamente, considere que a única informação disponível com respeito a qual ponto amostral ω foi escolhido é o conjunto de valores $Z(\omega)$ para toda variável \mathcal{G} -mensurável Z . Então $Y(\omega) = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ é o valor esperado de $X(\omega)$ dada essa informação.

A esperança condicional, além das propriedades básicas herdadas da esperança simples, possui um conjunto de propriedades básicas de simples verificação que podem ser consultadas em qualquer livro texto de probabilidade, como por exemplo [Dur10; Wil91].

Definição 4 (Martingal). Um processo adaptado X é chamado de martingal (com respeito a $(\{\mathcal{F}_n\}, \mathbb{P})$), se

- (i) $\mathbb{E}|X_n| < \infty$ para todo n
- (ii) $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] = X_{n-1}$, *q.c.*, ($n \geq 1$)

Analogamente definimos supermartingais e submartingais trocando a igualdade acima respectivamente por “ \leq ” e “ \geq ”

Um supermartingal decresce em média e um submartingal cresce em média, nomenclatura aparentemente anti intuitiva, mas que no entanto é justificada pela relação com as funções (sub/super) harmônicas. Para um martingal é simples verificar que $\mathbb{E}[X_0] = \mathbb{E}[X_n]$ para todo n fixo e arbitrário. A seção seguinte investiga sob quais condições podemos preservar a igualdade quando o processo para em um instante aleatório.

2.3 Teorema de Parada Opcional

2.3.1 Processos previsíveis e estratégias de jogo

Considere o processo X_n , cujos incrementos $X_n - X_{n-1}$ assumem os valores ± 1 quando a n -ésima rodada resulta em vitória ou derrota. Em outras palavras, X_n representa a quantidade de ganhos se estivesse sendo apostada somente uma moeda a cada rodada. Se as apostas fossem feitas de acordo com uma estratégia de jogo C_n , então o ganho total até o tempo n seria

$$Y_n = (C \cdot X)_n := \sum_{k=1}^n C_k (X_k - X_{k-1}).$$

(A expressão $C \cdot X$ é o análogo discreto da integral estocástica $\int C dX$.)

Formalmente, uma estratégia de jogo é definida por um processo $\{C_n, n \geq 1\}$ não negativo, limitado e previsível, no sentido de que $C_n \in \mathcal{F}_{n-1}$ para todo n . Em outras palavras, C_n é o valor que será apostado na n -ésima rodada, quantia necessariamente não negativa, limitada e decida com base na informação disponível até aquele momento (baseada nas $n - 1$ rodadas precedentes). Esse é o significado intuitivo do caráter ‘previsível’ do processo C .

No entanto, não existe estratégia possível que supere um jogo desfavorável. Matematicamente, dada qualquer estratégia C ; se X é um supermartingal, então $Y = C \cdot X$ é um supermartingal. De fato,

$$\mathbb{E}[Y_n - Y_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}] = C_n \mathbb{E}[X_n - X_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}] \leq 0, \quad \text{ou seja,}$$

$$\mathbb{E}[Y_n | \mathcal{F}_{n-1}] \leq Y_{n-1} \tag{2.3.1}$$

Suponha, por exemplo, que um jogador decida parar, ao invés de continuar a jogar indefinidamente, seja porque ele pensa que já ganhou o bastante, ou por estar desencorajado pela forma como o jogo está caminhando. Observe que uma boa estratégia de jogo é constituída inevitavelmente pela escolha do momento oportuno de parar. Ilustrativamente, considere a estratégia

$$C_n^{(\tau)}(\omega) = \mathbb{1}_{\{n \leq \tau(\omega)\}},$$

onde o jogador aposta sempre uma unidade monetária até o tempo de parada τ . A transformação $X_n(\omega) \rightarrow X_n^\tau(\omega) := X_{\tau(\omega) \wedge n}(\omega)$ é chamada de transformação com respeito a um sistema de parada

opcional, e o ganho total é dado por

$$Y_n = (C^{(\tau)} \cdot X)_n = X_{\tau \wedge n} - X_0.$$

Ademais, observe que $C^{(\tau)}$ é não negativo, limitado assumindo somente os valores 0 e 1, e também previsível já que

$$\{C_n^{(\tau)} = 0\} = \{\tau \leq n - 1\} \in \mathcal{F}_{n-1},$$

e portanto, tendo em vista o resultado (2.3.1) fica provado o seguinte

Teorema 2. Se X é um supermartingal e τ é uma tempo de parada, então o processo parado $X^\tau = (X_{\tau \wedge n}, n \geq 0)$ é um supermartingal, tal que em particular,

$$\mathbb{E}[X_{\tau \wedge n}] \leq \mathbb{E}[X_0].$$

valendo a igualdade quando X é um martingal.

Exemplo: Seja X o passeio aleatório simples em \mathbb{Z}^+ , com $X_0 = 0$. É conhecido o fato que X é um martingal. Considere o tempo de parada

$$\tau = \inf\{n : X_n = 1\}.$$

Ainda que $\mathbb{P}[\tau < \infty] = 1$, temos entretanto

$$\mathbb{E}[X_{\tau \wedge n}] = \mathbb{E}[X_0] \quad \text{para todo } n,$$

$$1 = \mathbb{E}[X_\tau] \neq \mathbb{E}[X_0] = 0.$$

Queremos saber as condições sob as quais vale a igualdade

$$\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_0]$$

para um martingal X .

O seguinte teorema levanta três condições suficientes que garantem a igualdade acima.

Teorema 3 (Parada Opcional de Doob). Seja τ um tempo de parada e X um supermartingal. Sob qualquer das condições (i), (ii), e (iii) podemos concluir que X_τ é integrável e

$$\mathbb{E}[X_\tau] \leq \mathbb{E}[X_0] \tag{2.3.2}$$

- (i) τ é limitado (existe K tal que $\tau(\omega) \leq K$ para todo ω);
- (ii) τ é finito q.c., e X é limitado (existe K tal que $|X_n(\omega)| \leq K$ para todo n e ω);
- (iii) $\mathbb{E}[\tau] < \infty$ e existe K para a qual

$$|X_n(\omega) - X_{n-1}(\omega)| \leq K \quad \text{para todo } n, \omega.$$

Valendo a igualdade se X é um martingal.

2.4 Teorema de Convergência

Uma estratégia muito conhecida pela qual estaremos interessados nesta seção pode ser descrita da seguinte forma: escolha dois números a e b , com $a < b$. Espere até que o processo X assuma um valor inferior à a . Aposte até que esse valor exceda b e então pare de jogar. Em símbolos, essa estratégia pode ser traduzida como

$$C_1 := \mathbb{1}_{\{X_0 < a\}},$$

$$C_n := \mathbb{1}_{\{C_{n-1}=1\}}\mathbb{1}_{\{X_{n-1} \leq b\}} + \mathbb{1}_{\{C_{n-1}=0\}}\mathbb{1}_{\{X_{n-1} < a\}}, \quad n \geq 2.$$

O número $U_N[a, b]$ de cruzamentos em $[a, b]$ feito pela trajetória $n \times X_n(\omega)$ até o tempo N é definido como o maior número inteiro $k \in \mathbb{Z}^+$ para o qual podemos achar

$$0 \leq s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < \dots < s_k < t_k \leq N$$

com

$$X_{s_i}(\omega) < a, \quad X_{t_i}(\omega) > b$$

(figura??)

Dado o ganho total, i.e., o processo $Y := C \cdot X$, não é difícil observar que cada cruzamento em $[a, b]$ aumenta o valor Y em pelo menos $(b - a)$, enquanto $[X_N - a]^-$ representa uma eventual perda ao longo do último cruzamento. Dessa maneira

$$Y_N(\omega) \geq (b - a)U_N[a, b](\omega) - [X_N(\omega) - a]^-.$$

Lembrando que se X é supermartingal, então $Y = C \cdot X$ é supermartingal sempre quando C é limitado, não negativo e previsível. Concluímos nesse caso que $\mathbb{E}[Y_N] \leq 0$, o que juntamente à desigualdade acima prova o seguinte resultado.

Teorema 4. Seja X um supermartingal e $U_N[a, b]$ o número de cruzamentos em $[a, b]$ até o tempo N . Então

$$(b - a)\mathbb{E}[U_N[a, b]] \leq \mathbb{E}[(X_N - a)^-].$$

A desigualdade que pode estendida sem dificuldade para

$$(b - a)\mathbb{E}[U_N[a, b]] \leq |a| + \mathbb{E}|X_N| \leq |a| + \sup_n \mathbb{E}|X_n|.$$

Além disso, se definirmos $U_\infty[a, b] := \lim_N \uparrow U_N[a, b]$, e supondo que

$$\sup_n \mathbb{E}|X_n| < \infty,$$

obtemos $\mathbb{E}[U_\infty[a, b]] < \infty$, ou seja,

$$\mathbb{P}[U_\infty[a, b] = \infty] = 0. \tag{2.4.1}$$

Teorema 5 (Convergência). Seja X um supermartingal tal que $\sup_n \mathbb{E}|X_n| < \infty$. Então, quase certamente, $X_\infty := \lim X_n$ existe e é finito.

Demonstração.

$$\begin{aligned} \Lambda &:= \{\omega : X_n(\omega) \text{ não converge para um limite em } [-\infty, \infty]\} \\ &= \{\omega : \liminf X_n(\omega) < \limsup X_n(\omega)\} \\ &= \bigcup_{a,b \in \mathbb{Q}: a < b} \{\omega : \liminf X(\omega) < a < b < \limsup X_n(\omega)\} \\ &=: \bigcup \Lambda_{a,b} \end{aligned}$$

Mas

$$\Lambda_{a,b} \subseteq \{\omega : U_\infty[a, b](\omega) = \infty\}$$

Logo, por (2.4.1), $\mathbb{P}[\Lambda_{a,b}] = 0$, e daí que $\mathbb{P}[\Lambda] = 0$. Portanto

$$X_\infty := \lim X_n \text{ existe q.c. em } [-\infty, \infty].$$

Pelo lema de Fatou

$$\mathbb{E}|X_\infty| = \mathbb{E}[\liminf |X_n|] \leq \liminf \mathbb{E}|X_n| \leq \sup \mathbb{E}|X_n| < \infty.$$

Concluindo que

$$\mathbb{P}[X_\infty = \infty] = 0$$

□

Capítulo 3

Teoria do potencial

3.1 Introdução histórica

A palavra potencial tem origem do latim *potentialis*, e sua utilização no contexto da filosofia representa algo em estado latente mas que não possui efeito real. A utilização do termo foi influenciada pelos filósofos naturais do século XVIII, o que levou George Green e Karl Friedrich Gauss independentemente a utilizarem o termo para se referirem a solução da equação

$$\Delta f = 0.$$

Muitos matemáticos eminentes tentaram sem sucesso descrever a solução através de uma forma geral. Os primeiros avanços realmente reconhecidos no campo da Teoria do Potencial estão ligados à Astronomia, cujo objetivo era aprimorar o trabalho de Isaac Newton sobre o movimento dos corpos celestes.

Segundo A Lei da Gravitação Universal, o campo de forças gerado por uma distribuição de massa $\phi(y)$ com suporte $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, pode ser expresso por

$$F(x) = - \int_{\Omega} \frac{x - y}{\|x - y\|^3} \phi(y) dy, \quad x \notin \bar{\Omega},$$

(note que o campo é definido somente onde $\phi = 0$, i.e., onde não existe massa).

Nessas condições, existe uma função f , chamada de campo *potencial*, satisfazendo $F = \nabla f$, onde

$$f(x) = \int_{\Omega} \frac{1}{\|x - y\|} \phi(y) dy. \tag{3.1.1}$$

Essa observação foi de grande valia pois reduz o estudo de um campo vetorial à análise de uma única função escalar. Laplace verificou que f satisfazia a equação $\Delta f = 0$ no exterior da região $\bar{\Omega}$, em coordenadas polares e cartesianas, servindo de base para posteriores investigações sobre a atração dos corpos.

Curiosamente, a equação de Laplace também se mostrou presente no fenômenos eletromagnéticos e termodinâmicos. Tal fato levou os matemáticos a pensar que existiria algo por trás dessa coincidência - e a resposta encontra-se na ideia de equilíbrio, i.e., que podemos associar a cada um desses fenômenos uma quantidade cujo o fluxo total em cada região seja nulo. Mais explicitamente:

- (i) O campo de forças gerado por uma partícula (ou carga elétrica) pode ser associado por analogia aos raios luminosos produzidos por uma fonte pontual. Nesse caso, todos os raios, que incidem sobre uma região que não contenha tal ponto em seu interior, necessariamente irão sair dela, e o fluxo total será nulo.
- (ii) Num líquido incompressível, a quantidade de matéria que penetra uma região deverá ser compensada pela saída de igual volume, para evitar uma eventual mudança de densidade do líquido.
- (iii) Num sólido homogêneo em equilíbrio térmico, as trocas de calor entre as diversas parte do corpo devem se compensar para que não ocorram variações de temperatura.

Em termos matemáticos, a ideia de equilíbrio pode ser traduzida pela condição

$$\int_{\partial\Omega} \nabla f dS = 0,$$

ou seja, a circulação de fluxo do campo ao longo de uma superfície fechada é zero - que sob o ponto de vista dinâmico, (ii) e (iii), corresponde à impossibilidade de variação de massa, carga ou calor de um sistema conservativo; e sob o ponto de vista estático (i) manifesta a continuidade das linhas do campo de forças, que portanto terão inevitavelmente que atravessar a superfície em ambos sentidos. Dessa forma, se tomarmos uma distribuição de massa com suporte em uma região arbitrária Ω ,

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \Delta f dV = \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \operatorname{div}(\nabla f) dV = \int_{\partial\Omega} \nabla f dS = 0.$$

Como a região foi tomada arbitrariamente, temos portanto

$$\Delta f = 0, \quad x \notin \bar{\Omega}$$

O fato de Δf não ser nulo no interior de Ω foi constatado por Poisson, quem generalizou a definição de potencial, sendo possível defini-lo também nos pontos onde estão distribuídas a massa (carga). Explicitamente,

$$\begin{cases} \Delta f(x) = 0, & x \notin \bar{\Omega} \\ \Delta f(x) = -\phi(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

que posteriormente será chamada de *equação de Poisson*. Essa formulação nos permite estudar o campo f definido agora em todo espaço, fazendo com que Δf coincida com a distribuição ϕ na região onde é positiva. Uma generalização imediata do potencial gravitacional (3.1.1) foi proposta, colocando em termos gerais o núcleo (conhecido como núcleo potencial) da transformação integral

$$f(x) = \int_{\Omega} K(x-y)\phi(y)dy \quad \forall x \in \mathbb{R}^d. \quad (3.1.2)$$

Nesse contexto, George Green apresentou suas três identidades unindo a teoria do potencial Newtoniano junto ao teorema da divergência para apresentar uma forma integral da solução do seguinte problema: Dada uma distribuição de carga ϕ sobre a superfície $\partial\Omega$ de uma região limitada

- qual é o potencial eletrostático resultante no interior de Ω ?

Matematicamente, como obter uma representação do campo f em termos da distribuição ϕ , i.e., obter $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \Delta f = 0 & \text{sobre } \Omega \\ f = \phi & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.1.3)$$

muito conhecido como Problema de Dirichlet, creditado após propôr resolvê-lo através do equivalente problema variacional de minimização funcional - chamado de Princípio de Dirichlet, relacionado com uma grandeza física chamada *capacidade*, que abordaremos no momento apropriado.

A ideia original aplicada por Green foi aplicar sua segunda identidade na solução f , e afim de suprimir qualquer autoreferência em sua representação, usou um artifício para simplificar a equação traduzindo-a em termos do núcleo $K(x, y)$ e $\phi(y)$. Não vamos entrar nesses detalhes (forma explícita da função de Green $G(x, y)$ e sua parte regular), nos importando somente com a forma funcional da representação integral da solução de (3.1.3), a saber,

$$f(x) = - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial y} G(x, y) f(y) dy \quad \forall x \in \Omega, \quad (3.1.4)$$

a qual depende somente de G e de $f = \phi$ somente na fronteira $\partial\Omega$, transformando o problema em explicitar $G(x, y)$ em $\Omega \times \bar{\Omega}$. Essa expressão foi apresentada para evidenciar posteriormente a analogia quando esses mesmos conceitos forem reapresentados no contexto probabilístico em espaço discreto.

Ora, mas o que tem a ver a teoria de probabilidade com as equações diferenciais referentes ao potencial de um campo de forças?

O principal elo se faz através do resultado a seguir que relaciona os conceitos de média e potencial, motivo pelo qual as equações que envolvem tais conceitos encontram o mesmo tipo de solução. Defina

$$\int_{\Omega} f d\mu := \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_{\Omega} f d\mu = \text{média de } f \text{ ao longo do conjunto } \Omega, \text{ desde que } \mu(\Omega) > 0.$$

onde μ é usualmente a medida de Lebesgue (volume) do conjunto Ω .

Teorema 6 (O princípio da média). $f \in \mathcal{C}^2$ é solução da equação $\Delta f = 0$, e somente se,

$$f(x) = \int_{\partial B(x,r)} f dS = \int_{B(x,r)} f dV. \quad (3.1.5)$$

Para cada bola $B(x, r)$ no domínio. [Eva98]

Em outras palavras, o valor da função em cada ponto nada mais é que a média da função avaliada em todos seus vizinhos. Uma função que satisfaça uma das (e portanto as duas) propriedades do teorema acima é chamada de função *harmônica* com respeito a medida μ .

A interpretação do resultado anterior fica ainda mais nítida quando considerado em espaço discreto. Considere um grafo $G = (V, E)$ onde V é o conjunto de vértices e E o conjunto de arestas. Dessa maneira, o resultado anterior pode ser expresso:

Uma função $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ é harmônica quando

$$f(x) = \frac{1}{\mu(\{y : y \sim x\})} \sum_{\{y:y \sim x\}} f(y)$$

E estaremos particularmente interessados quando μ for uma medida de probabilidade. E afim de consolidar a conexão com o ambiente discreto, onde estarão definidas nossas distribuições de probabilidade, dedicaremos a próxima seção para apresentar o operador de Laplace discreto.

3.2 O Laplaciano discreto

O operador Δ_D a seguir pode ser definido sem qualquer dificuldade para grafos quaisquer, no entanto, com a finalidade de ilustrar a analogia entre os operadores discreto e contínuo, vamos defini-lo somente em $h\mathbb{Z}^d$, o reescalonamento do reticulado dos inteiros, fazendo com que as definições coincidam quando $h \searrow 0$.

Considere uma função $f : h\mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos o quociente orientado de diferenças na direção e_i , para frente e para trás, respectivamente pelas expressões

$$\overrightarrow{\Delta}_i f(x) = \frac{1}{h} [f(x + he_i) - f(x)],$$

$$\overleftarrow{\Delta}_i f(x) = \frac{1}{h} [f(x) - f(x - he_i)].$$

Observe que as expressões acima concordam com a intuição do que entendemos por variação direcional local de uma função. Além disso, os quocientes de ordem superior são tais que $\overrightarrow{\Delta}_i(\overleftarrow{\Delta}_i f) = \overleftarrow{\Delta}_i(\overrightarrow{\Delta}_i f)$, e serão denotados simplesmente por $\Delta_i^2 f$. A partir da definição podemos computar sem dificuldade

$$\Delta_i^2 f(x) = \frac{1}{h^2} [f(x + he_i) + f(x - he_i) - 2f(x)],$$

e somando em todas as direções obtemos o Laplaciano discreto Δ_D :

$$\Delta_D f(x) = \Delta_1^2 f(x) + \dots + \Delta_d^2 f(x) = \frac{\sum_{i=1}^d [f(x \pm he_i)] - 2df(x)}{h^2}. \quad (3.2.1)$$

É um fato bem conhecido que para funções suficientemente suaves f definidas no espaço contínuo \mathbb{R}^d , a aproximação infinitesimal do operador clássico

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2}.$$

é obtida tomando o limite

$$\Delta f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \Delta_D f(x).$$

[CFL67]

Nesse contexto, observando o lado direito da equação (3.2.1), tomando $h = 1$, temos que

$$f(x) = \frac{1}{2d} \sum_{i=1}^d f(x \pm e_i) - \frac{1}{2d} \Delta_D f(x).$$

E portanto $\Delta_D = 0$ implica que f é harmônica com respeito a medida de contagem. A aproximação do Laplaciano contínuo através do operador de diferenças de segunda ordem Δ_D nos permite traçar as mesmas conclusões (tais como existência e unicidade de soluções) em ambos contextos, tornando possível a utilização de ferramentas clássicas da teoria de equações diferenciais afim de aplicá-las no estudo de passeios aleatórios

3.3 Função de Green

Algumas ferramentas como a função de Green foram apropriadas pela teoria de probabilidade após a observação de curiosas similaridades entre o passeio aleatório e a teoria de valores de fronteira relativa a equações diferenciais elípticas. Não foi a última ocasião em que dinâmica de fluidos e probabilidade se cruzariam, cujas abordagens, bastante distintas sob o ponto de vista formal, compartilham o mesmo conjunto de equações (o que se deve em grande parte ao princípio da média.)

Esse fato foi observado antes do aparecimento da teoria geral de Processos Markovianos, e uma excelente referência pode ser encontrada em [CFL67], de onde retiramos a citação:

“Thus we see that the mathematical expectation exists and is none other than the Green’s function for the difference equation $\Delta u = 0$, (...), then the Green’s function on the mesh goes over to the Green’s function of the potential equation except for a numerical factor.”

Definição 5 (Função de Green). No contexto probabilístico, dada a posição inicial da partícula $X_0 = x$, a função de Green é definida como o número esperado de visitas ao sítio y , i.e.,

$$g(x, y) := \mathbb{E}_x \left[\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}\{X_n = y\} \right];$$

ou equivalentemente, usando o teorema da convergência monótona,

$$g(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x, y).$$

Observação: A função de Green depende sempre de um conjunto B , e o respectivo tempo de primeira visita τ_B , definida de forma mais geral e precisa pelo número de visitas de x a y antes de ser absorvido pelo conjunto B , dada pela fórmula

$$g_B(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_x[X_n = y ; n < \tau_B]$$

,

3.4 Funções Harmônicas

Seja $f(x)$ uma função real definida em \mathbb{Z}^d . Define-se o operador P da seguinte forma.

$$Pf(x) = \sum_y p(x, y)f(y) = \sum_y f(y)\mathbb{P}_x\{X_1 = y\} = \mathbb{E}_x f(X_1)$$

Em outras palavras, a x -ésima entrada do vetor Pf nos informa o valor esperado da função f após uma unidade de tempo, dado que estávamos no sítio x . Em particular, no caso do passeio aleatório simples, P é dado por

$$Pf(x) = \frac{1}{2d} \sum_i f(x \pm e_i).$$

O operador P é conhecido como operador média da função no ponto x , e a partir dele definimos

$$\mathcal{L} = P - Id,$$

(onde Id é a identidade.)

Definição 6. Uma função $f : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$ é dita harmônica se para todo x , $\mathcal{L}f(x) = 0$ e superharmônica se $\mathcal{L}f(x) \leq 0$. Em outras palavras, a função f é harmônica se $f = Pf$, e superharmônica se $f \geq Pf$.

No que se segue, a análise irá inevitavelmente diferir nos casos em que o passeio aleatório simples é recorrente ($d = 1, 2$) ou transiente ($d \geq 3$). A teoria do potencial Newtoniano é centrada no núcleo potencial (função de Green) $g(x, y) = |x - y|^{-1}$, ao passo que na teoria do potencial no plano tal núcleo é substituído por $K(x, y) = \ln|x - y|^{-1}$. Nesse sentido, a teoria do potencial bidimensional é também conhecida como teoria do potencial logarítmico. No contexto probabilístico, $g(x, y)$ representa o número esperado de visitas ao sítio y , partindo de x . Além disso, a probabilidade $H_B(x)$ de, partindo de x , chegar no conjunto B pode ser expressa em função de g , e é possível capturar a informação essencial do comportamento assintótico de tal probabilidade a partir do comportamento de $g(0, x)$ para $|x|$ suficientemente grande. No entanto, quando o passeio é recorrente $g(x, y) = \infty$ para todo x, y , e $H_B \equiv 1$. Portanto, nesse contexto define-se o núcleo $K(x, y)$ (análogo a $\ln|x - y|^{-1}$) em termos do número de visitas ao sítio y , partindo de x , antes de visitar a origem.

Embora o trabalho não esteja focado no caso recorrente, vamos apresentar resumidamente qual é a construção da medida harmônica quando $d = 1, 2$. No futuro pretende-se abordar a transição de fase da medida do quadrado no plano quando calculada nos pontos da aresta próximos ao vértice. Tal análise pode ajudar no estudo da medida do cubo onde não existem informações precisas sobre a transição do comportamento da probabilidade de escape quando avaliada na face, aresta e vértice.

O primeiro importante resultado concernente ao passeio recorrente garante para todo y a existência do limite

$$H_B(\infty, y) := \lim_{|x| \rightarrow \infty} H_B(x, y),$$

de modo que $H_B(\infty, \cdot)$ é uma distribuição de probabilidade no conjunto B , chamada medida harmônica, que pode ser expressa por

$$H_B(\infty, y) = \frac{\sum K^{-1}(\cdot, y)}{\sum K^{-1}(\cdot, \cdot)},$$

onde K^{-1} é o inverso do núcleo K , definido em termos de $g_{\{0\}}$ restrito ao conjunto B , e cuja fórmula explícita não entraremos em detalhes que podem ser encontrados em profundidade em [Spi76], cap2.

O significado intuitivo da medida $H_B(\infty, \cdot)$ representa a probabilidade de atingir o conjunto B no ponto y , quando o passeio aleatório tem posição inicial “no infinito”. A direção de x será irrelevante uma vez que o passeio percorrerá um caminho que com alta probabilidade irá circular o conjunto B muitas vezes antes de atingi-lo. Quando a partícula por fim atingir o conjunto, ela o fará em uma direção estocasticamente independente da direção inicial do ponto x .

O passeio aleatório construído através das trajetórias reversas do passeio original $p^*(x, y) = p(y, x)$ nos permite de certo modo interpretar a medida harmônica no plano como a probabilidade de escape do passeio reverso, interpretação cujo sentido se faz somente para o caso transiente.

3.5 Caso transiente

Seja $H_B(x)$ a probabilidade de que um caminho começando em x encontre alguma vez o conjunto B , e $\epsilon_B(x)$, para x em B , a probabilidade de que o caminho partindo de x nunca mais retorne ao conjunto B . Então $H_B \equiv 1$ para x em B , e além disso

$$H_B(x) = (PH_B)(x) + \mathbf{1}_{\{x \in B\}} \epsilon_B(x),$$

o que implica que H_B é harmônica no exterior de B e superharmônica em B . Ou seja

$$\mathcal{L}H_B(x) = (P - Id)H_B(x) = \begin{cases} 0 & x \notin B \\ -\epsilon_B(x) & x \in B \end{cases}$$

Temos acima a equação de Poisson. O seguinte desenvolvimento pode ser consultado em partes na referência [DY69]. Considere no contexto discreto o operador G dado por

$$G\phi = \phi + P\phi + P^2\phi + \dots + P^n\phi + \dots,$$

(onde $\phi \geq 0$ é uma distribuição de massa ou carga no espaço).

Seja

$$f = G\phi,$$

e observe que

$$PG\phi = G\phi - \phi$$

implica

$$\mathcal{L}f = \mathcal{L}G\phi = (P - Id)G\phi = G\phi - \phi - G\phi = -\phi.$$

Nesse sentido, iremos nos referir à função $f = G\phi$ como o potencial da função ϕ ; e o operador G (função de Green) será chamado núcleo gerador de potencial no espaço. O potencial discreto tem uma interessante contrapartida probabilística. Com efeito,

$$(P^n\phi)(x) = \sum_y p_n(x, y)\phi(y) = \mathbb{E}_x\phi(X_n),$$

resultando na expressão

$$G\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_x\phi(X_n) = \mathbb{E}_x\left[\sum_{n=0}^{\infty} \phi(X_n)\right]$$

Tal equação sugere a seguinte interpretação: considere que todo ponto $y \in \mathbb{Z}^d$ esteja associado a um ônus de $\phi(y)$ quando o passeio atinge tal ponto. Então $G\phi(x)$ é o ônus médio incorrido ao longo da trajetória do passeio aleatório com ponto inicial x .

Lembrando da definição

$$g(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x, y),$$

podemos escrever explicitamente a expressão para o potencial

$$G\phi(x) = \sum_y g(x, y)\phi(y).$$

Teorema 7. Se $f = G\phi$ é o potencial de ϕ , e τ é o tempo de chegada no conjunto B , então

$$f(x) - \mathbb{E}_x f(X_\tau) = \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau-1} \phi(X_k) \right]. \quad (3.5.1)$$

(e se a partícula nunca visita B , dizemos que $\tau = \infty$ e $f(X_\tau) = 0$.)

Demonstração. De fato, dividindo a trajetória da partícula em duas partes, a parte anterior e posterior à chegada ao conjunto B , podemos escrever

$$f(x) = G\phi(x) = \mathbb{E}_x[\phi(X_0) + \dots + \phi(X_{\tau-1}) + \phi(X_\tau) + \phi(X_{\tau+1}) + \dots],$$

bastando verificar que

$$\mathbb{E}_x[\phi(X_\tau) + \phi(X_{\tau+1}) + \dots] = \mathbb{E}_x f(X_\tau).$$

Seja $H_B^{(n)}(x, y) = \mathbb{P}_x\{\tau = n; X_n = y\}$, denotando a probabilidade do evento no qual o passeio atinge o conjunto B no instante n , através do ponto y .

Observação: A quantidade $H_B(x, y) = \sum_n H_B^{(n)}(x, y) = \mathbb{P}_x\{\tau < \infty, X_\tau = y\}$ é conhecida no contexto analítico como núcleo de Poisson, uma transformação linear que associa os valores de

fronteira as respectivas soluções do problema de Dirichlet.

No caso de cadeias de Markov, podemos escrever

$$\mathbb{E}_x \phi(X_{\tau+k}) = \sum_{n,y} H_B^{(n)}(x,y) \mathbb{E}_y \phi(X_k),$$

somando ambos lados em k e utilizando o teorema de convergência monótona, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}_x \phi(X_{\tau+k}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n,y} H_B^{(n)}(x,y) \mathbb{E}_y \phi(X_k) = \sum_{n,y} H_B^{(n)}(x,y) \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}_y \phi(X_k) \\ &= \sum_{n,y} H_B^{(n)}(x,y) f(y) = \sum_y \mathbb{P}_x \{ \tau < \infty, X_\tau = y \} f(y) = \mathbb{E}_x f(X_\tau). \end{aligned}$$

□

Relembrando que uma função $f(x)$, ($x \in \mathbb{Z}^d$) é chamada superharmônica se $f \geq Pf$. As funções superharmônicas não-negativas apresentam fortes propriedades e serão chamadas funções *excessivas*. Observe que se $f = G\phi$, ($\phi \geq 0$), então

$$f - Pf = -(P - Id)f = -\mathcal{L}f = \phi \geq 0.$$

Portanto, qualquer potencial de função positiva é uma função excessiva.

Um resultado da teoria de equações diferenciais, conhecido como teorema de Riesz, afirma reciprocamente que qualquer função excessiva pode ser representada como soma de uma função harmônica não negativa e o potencial de uma função não negativa. Em outras palavras, seja f uma função excessiva e defina $f - Pf = \phi$, que por definição $\phi \geq 0$. Aplicando iterativamente o operador P no excesso ϕ e somando cada iteração obtém-se para cada n

$$\phi + P\phi + \dots + P^{n-1}\phi = f - P^n f,$$

o que nos permite majorar

$$\phi + P\phi + \dots + P^{n-1}\phi = f - P^n f \leq f.$$

Logo, como n é arbitrário, segue que

$$G\phi = \phi + P\phi + \dots + P\phi^n + \dots < \infty,$$

e também que o limite

$$h = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n f$$

existe e

$$f = G\phi + h. \tag{3.5.2}$$

onde $Ph = h$, i.e., h é harmônica.

Considere agora a probabilidade de chegada em B ,

$$H_B(x) = \sum_{y \in B} H_B(x, y) = \mathbb{P}_x\{\tau_B < \infty\}.$$

Vamos mostrar que H_B é uma função excessiva. Considere a sequência de eventos

$$A_n = \{\text{A partícula visita o conjunto } B \text{ depois do } n\text{-ésimo passo}\}$$

Dessa forma, $A_0 \supseteq A_1 \dots \supseteq A_n \supseteq \dots$. Note que $\mathbb{P}_x\{A_0\} = H_B(x)$, e por definição que

$$\mathbb{P}_x\{A_n\} = \sum_y p_n(x, y) H_B(y) = P^n H_B(x). \quad (3.5.3)$$

Em particular, $PH_B(x) = \mathbb{P}_x\{A_1\} \leq \mathbb{P}_x\{A_0\} = H_B(x)$, ou seja, $H_B(x)$ é uma função excessiva, o que nos permite expressá-la na forma (3.5.2). Explicitamente, denotando o excesso $\epsilon_B = H_B - PH_B$, podemos representar

$$H_B(x) = G\epsilon_B(x) + \bar{h}_B(x) = \sum_{y \in B} g(x, y)\epsilon_B(y) + \bar{h}_B(x), \quad (3.5.4)$$

onde

$$\bar{h}_B(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n H_B(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{y \in B} p_n(x, y) H_B(y)$$

é a parte harmônica não negativa.

De acordo com (3.5.3), $\bar{h}_B(x) = \lim \mathbb{P}_x\{A_n\} = \mathbb{P}_x\{\cap A_n\}$. Consequentemente, $\bar{h}_B(x)$ é a probabilidade de que a partícula irá visitar o conjunto B infinitas vezes. No caso em que o passeio é transiente e o conjunto B é finito, temos que $\bar{h}_B(x) = 0$. Portanto (3.5.4) se reduz a

$$H_B(x) = G\epsilon_B(x), \quad \text{para todo } x.$$

i.e., a probabilidade de chegada no conjunto B é o potencial de uma função não negativa ϵ_B , na qual estaremos particularmente interessados neste trabalho. Observe que

$$\epsilon_B(x) = H_B(x) - PH_B(x) = \mathbb{P}_x\{A_0\} - \mathbb{P}_x\{A_1\} = \mathbb{P}_x\{A_0 \setminus A_1\} = \mathbb{P}_x[\tau_B^+ = \infty]$$

chamada de *probabilidade de escape*, é a probabilidade, estando em B , de deixar o conjunto no instante inicial e nunca mais retornar. É claro que a função ϵ_B tem como suporte o conjunto B , sendo estritamente positiva somente na fronteira interna do conjunto - sítios onde é possível sair do conjunto em apenas um passo.

3.6 Capacidade

O potencial Newtoniano está estritamente ligado com a noção de capacidade. A capacidade eletrostática de um corpo B é definido da seguinte maneira: considere todas possíveis distribuições de carga em B cujos potenciais em cada ponto do espaço não exceda 1. É conhecido que dentre tais

potenciais existe um que assume valor máximo - chamado potencial de equilíbrio, e a distribuição de carga ϕ correspondente é também chamada de distribuição de equilíbrio. A carga total

$$\text{cap}(B) = \int_B \phi(y) dy$$

da distribuição ϕ é chamada capacidade do corpo B .

Traduzindo o conceito para o ponto de vista probabilístico, lembrando, onde os potenciais são da forma $f = G\phi$, procuraremos desenvolver formulações análogas para funções definidas em \mathbb{Z}^d . Fixado um subconjunto B , considere a classe de funções

$$\mathcal{C}_B = \{\phi \geq 0 : G\phi \leq 1 \text{ em } B, \text{ e nula no exterior de } B\},$$

cujos potenciais $f = G\phi$, representados como na equação (3.5.1), tomam o forma

$$f(x) = \mathbb{E}_x f(X_\tau).$$

Ora, mas como $f \leq 1$, segue que $\mathbb{E}_x f(X_\tau) \leq \mathbb{P}_x\{\tau < \infty\} = H_B(x)$. Sendo portanto H_B o potencial de equilíbrio, já que para cada f verificamos que $f(x) \leq H_B(x)$.

No caso em que o conjunto B é transiente, vimos na seção anterior que $H_B = G\epsilon_B$. Consequentemente, ϵ_B é analogamente chamada de distribuição de equilíbrio, e a capacidade é definida pela fórmula

$$\text{cap}(B) = \sum_{x \in B} \epsilon_B(x)$$

E por fim, define-se a medida harmônica de B por

$$hm_B(x) = \frac{\epsilon_B(x)}{\text{cap}(B)}.$$

Capítulo 4

A medida harmônica do cubo

Seja C_n o cubo de lado n e $B_n = B(0, n)$ a bola de raio n . Considere também o passeio aleatório simples $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^+}$ em \mathbb{Z}^3 , e o tempo de parada $\tau_{C_n}^+ := \min\{t \geq 1 : X_t \in C_n\}$. Neste capítulo iremos analisar o comportamento assintótico da probabilidade de escape $\epsilon_{C_n}(x) = \mathbb{P}_x[\tau_{C_n}^+ = \infty]$ para n suficientemente grande. A principal técnica utilizada consiste em construir uma função harmônica positiva e aplicá-la no passeio multidimensional.

O objetivo é investigar o comportamento limite da função $\epsilon_{C_n}(x)$ de acordo com o seu crescimento quando $n \rightarrow \infty$. Para tanto, dadas duas funções f e g , dizemos que elas tem a mesma ordem de magnitude, escrevendo simbolicamente

$$f(n, x) \asymp g(n, x), \quad n \rightarrow \infty,$$

se existirem constantes K_1, K_2 (independentes de x) tal que para todo n, x

$$K_1 g(n, x) \leq f(n, x) \leq K_2 g(n, x).$$

Por simplicidade, iremos denotar por $\bar{\tau}_{kn}$ o tempo de saída da bola B_{kn} , ($k > 0$), i.e., $\bar{\tau}_{kn} = \min\{t > 0 : X_t \notin B_{kn}\}$. Fixe a posição inicial da partícula em algum sítio $y \in B_n$ e considere o tempo de parada $\tau = \tau_{C_n} \wedge \bar{\tau}_{kn}$ para $k > 1$. Através da aplicação $f(x) = 1/||x||$ podemos transformar o passeio em um martingal e então aplicar o teorema de parada opcional:

$$\mathbb{E}[f(X_0)] = \mathbb{E}[f(X_\tau)],$$

então

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{kn} \mathbb{P}_y[\bar{\tau}_{kn} < \tau_{C_n}] + \frac{1}{cn} \mathbb{P}_y[\tau_{C_n} < \bar{\tau}_{kn}],$$

dado que o passeio atinge o cubo no ponto x , digamos, tal que $||x|| = cn$.

Fazendo $k \rightarrow \infty$, obtemos $\mathbb{P}_y[\tau_{C_n} < \infty] = c$, e portanto $\mathbb{P}_y[\tau_{C_n} = \infty] \asymp c$, uniformemente em y quando $n \rightarrow \infty$. Intuitivamente, essa relação quer dizer que quando n é grande, uma vez estando afastado a uma distancia de ordem n do cubo, a partir de então a probabilidade de

escape se comporta como uma constante. Utilizando a decomposição de probabilidade total, e a propriedade markoviana, obtemos para n suficientemente grande

$$\begin{aligned}\epsilon_{C_n}(x) &= \mathbb{P}_x[\tau_{C_n} = \infty] = \sum_{y \in B_n} \mathbb{P}_x[\bar{\tau}_n < \tau_{C_n} | X_{\bar{\tau}_n} = y] \mathbb{P}_y[\tau_{C_n} = \infty] \\ &\asymp c \sum_{y \in B_n} \mathbb{P}_x[\bar{\tau}_n < \tau_{C_n} | X_{\bar{\tau}_n} = y] = \mathbb{P}_x[\bar{\tau}_n < \tau_{C_n}],\end{aligned}$$

ou seja

$$\epsilon_{C_n}(x) \asymp \mathbb{P}_x[\bar{\tau}_n < \tau_{C_n}].$$

Portanto, a partir de agora, transformando o problema em analisar o termo da esquerda, simplificamos significativamente o estudo do comportamento limite das probabilidades de escape do cubo (ou qualquer região de diâmetro de ordem n .)

É conhecido da esfera que $\epsilon_{B_n} \asymp \frac{1}{n}$. A partir desse fato somos levados a conjecturar que a probabilidade de escape do cubo é da forma $\epsilon_{C_n}(x) \asymp \frac{1}{n^\gamma}$, $0 < \gamma \leq 1$, dependendo se x está na face, aresta ou vértice. No caso da face, obtivemos a descrição precisa (ambas cotas inferior e superior); para a aresta obtivemos uma cota inferior; e para o vértice, apesar de inúmeras tentativas, não foi possível obter informações sobre γ .

Para tanto, utilizamos a aproximação do passeio aleatório multidimensional através do movimento Browniano, já que as funções apresentadas estarão definidas em domínio contínuo. Isso nos possibilita estender os resultados concernentes ao movimento Browniano para o caso discreto para então estudar o comportamento assintótico dos passeio aleatórios. A aproximação é feita pelo acoplamento diádico, ou KMT, que é um acoplamento (X_n, B_n) de um passeio aleatório e um movimento Browniano construído por subdivisões binárias do tempo. O acoplamento é construído de forma que com alta probabilidade a distância $|X_{2^m} - B_{2^m}|$ seja de ordem 1, tornado possível majorar o erro da aproximação pelo número de subdivisões m realizadas. [LL10] cap7.

4.1 Face

Seja $X_0 = x$ um ponto na face do cubo, e considere a projeção do passeio ao longo da reta perpendicular a mesma face, passando por x . Observe que tal projeção $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ é um passeio aleatório unidimensional cujos incrementos tem média zero. Sem perda de generalidade podemos fixar o primeiro passo na direção do exterior do cubo, e assim $Z_0 = 1$. Se τ_0 e τ_n são os tempos de chegada com respeito ao passeio Z , pelo teorema de parada opcional temos

$$1 = n \mathbb{P}_x[\tau_n < \tau_0].$$

Obtendo assim uma cota inferior, observando que

$$\mathbb{P}_x[\bar{\tau}_n < \tau_{C_n}] \geq \mathbb{P}_x[\tau_n < \tau_0] = 1/n$$

Por outro lado, considerando o ponto x suficientemente centralizado na face, é possível inscrever no cubo uma esfera de raio de ordem n que contem o ponto x . Pela monotonicidade da capacidade obtemos a cota superior desejada já que $\epsilon_{C_n}(x) \leq \epsilon_{B_n}(x)$. Conclui-se então que o expoente apropriado é $\gamma = 1$, e portanto,

$$\epsilon_{C_n}(x) \asymp 1/n$$

4.2 Aresta

A ideia é utilizada para obter uma cota inferior para a probabilidade de escape partindo da aresta do cubo.

Considere $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ em coordenadas polares (r, φ) , onde $r = \|\mathbf{x}\|$ é a distância até a origem e $\varphi \in (-\pi, \pi]$ o ângulo, medido no sentido anti-horário com relação à primeira direção coordenada.

Define-se a cunha pelo conjunto $\mathcal{W}(\alpha) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : r > 0, -\alpha < \varphi < \alpha\}$. Queremos uma solução do seguinte problema de contorno:

$$\Delta f(x) = 0, \quad x \in \mathcal{W}(\alpha) \quad \text{com condição de fronteira } u|_{\partial\mathcal{W}(\alpha)} = 0. \quad (4.2.1)$$

Nesse contexto, observe a função $f_\omega : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_\omega(\mathbf{x}) = r^\omega \cos(\omega\varphi)$$

Utilizando a regra da cadeia, ou aplicando o Laplaciano Esférico, verifica-se que f é harmônica em \mathbb{R}^2 .

Estamos interessados no caso em que $\omega > 1/2$, para o qual f_ω é positiva no interior de $\mathcal{W}(\pi/(2\omega))$, e 0 na fronteira $\partial\mathcal{W}(\pi/(2\omega))$. Em particular, fazendo com que o exterior da cunha encerre um ângulo reto (para que se encaixe no problema exterior de Dirichlet no cubo) é preciso que $\pi/(2\omega) = 3\pi/4$, i.e., que $\omega = 2/3$. Desse modo, obtêm-se uma função $f_{2/3} : \overline{\mathcal{W}}(3\pi/4) \rightarrow [0, \infty)$ satisfazendo (4.2.1).

Defina os tempo de parada

$$\bar{\tau}_\alpha = \min\{t \geq 0 : \varphi \notin (-\alpha, \alpha)\}$$

$$\tau_n = \min\{t \geq 0 : r = n\}$$

Com respeito ao tempo de parada $\tau = \bar{\tau}_\alpha \wedge \tau_n$, e à posição inicial $x = (r_0, \varphi_0) = (1, 0)$. Dado isso, e que $M_t = f(X_t)$ é um martingal, pelo teorema de parada,

$$1 = \mathbb{E}[f(X_0)] = \mathbb{E}[f(X_\tau)] = Kn^{2/3}\mathbb{P}_x[\tau_n < \bar{\tau}_\alpha].$$

Observando a inclusão dos eventos,

$$\mathbb{P}_x[\tau_n < \bar{\tau}_\alpha] \leq \mathbb{P}_x[\bar{\tau}_n < \tau_{C_n}],$$

e portanto

$$\epsilon_{C_n}(x) \geq 1/n^{2/3}.$$

4.3 Vértice

Observação: Foram feitas tentativas de encontrar a solução f do problema Exterior de Dirichlet em \mathbb{R}^3 , harmônica no exterior de um octante, e nula em sua fronteira. Foram exploradas técnicas para encontrar a solução f , dentre elas determinar o espectro do Laplaciano Esférico Δ_S (ou operador de Lapalce-Beltrami), cujo menor auto valor λ_1 (conhecido como constante de Raleigh) pode ser utilizado para construir a função procurada. Existem muitas maneiras teóricas de obter λ_1 , e no entanto ele é conhecido apenas em casos muito específicos, como na superfície da esfera e do toro. Esse tipo de equação é estudado na teoria acústica de vibrações e apresenta um árido desafio até penetrar na teoria de EDP'S pra encontrar novos resultados.

Apêndice A

Teoria de Campos Vetoriais

A.1 Preliminares motivações físicas

Um campo vetorial f para o qual existe um campo potencial, é chamado um campo conservativo. Tal resultado está para a teoria matemática de campos, assim como está o princípio de conservação de energia para a mecânica de partículas.

Considere um exemplo físico onde uma partícula de massa m movendo ao longo de uma curva sobre a ação de um campo de forças f . Se a velocidade da partícula no tempo t é $v(t)$, sua energia cinética é definida por $1/2mv^2(t)$. Vamos denotar por $r(t)$ a posição da partícula no tempo t . O trabalho realizado por f durante uma intervalo de tempo $[a, b]$ é $\int_{r(a)}^{r(b)} f \cdot dr$. Pela segunda Lei de Newton temos

$$f[r(t)] = mr''(t) = mv'(t),$$

onde $v(t)$ denota a velocidade no tempo t . Portanto

$$f[r(t)] \cdot r'(t) = f[r(t)] \cdot v(t) = mv'(t) \cdot v(t) = \frac{1}{2}m \frac{d}{dt}(v(t) \cdot v(t)) = \frac{1}{2}m \frac{d}{dt}(v^2(t))$$

Integrando ambos lados de a a b , temos

$$\int_{r(a)}^{r(b)} f \cdot dr = \int_a^b f[r(t)]r'(t) dt = \frac{1}{2}mv\check{s}(t)|_a^b = \frac{1}{2}mv\check{s}(b) - \frac{1}{2}mv\check{s}(a)$$

famoso resultado que afirma que o trabalho realizado pelo campo é igual a variação de energia cinética da partícula.

O potencial gravitacional Newtoniano formula que a força f que uma partícula de massa M , na origem, exerce em outra partícula de massa m é um vetor de magnitude GmM/R^2 , onde G é uma constante e $r = (x, y, z)$ a localização da partícula de massa m . Pela Lei de Newton

$$f = -GmM||r||^{-3}\hat{r}$$

Observe que f é o gradiente do potencial ϕ dado por

$$\phi(x, y, z) = GmM\|r\|^{-1}$$

chamado potencial Newtoniano.

Observação: Se $r = (x, y, z)$, observe que $\nabla(\|r\|^n) = n\|r\|^{n-2}\hat{r}$

Portanto o trabalho realizado pelo campo ao mover a partícula do ponto a ao ponto x , pode ser calculado por

$$\phi(a) - \phi(x) = GmM \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_x} \right)$$

Por outro lado vimos que o trabalho também pode ser calculado pela variação de energia cinética $\Delta k(t)$ da partícula ao longo de sua trajetória, e assim

$$k(x) - k(a) = \phi(x) - \phi(a) \quad \text{ou ainda}$$

$$k(x) - \phi(x) = k(a) - \phi(a)$$

onde a quantidade $-\phi(x)$ é chamada *energia potencial* da partícula. Se a é mantido fixo e x varia na região em questão, a equação acima nos permite concluir que a quantidade $k(x) - \phi(x)$ se mantém constante. Em outras palavras, *se o campo de forças é gradiente de algum campo potencial, a soma da energia cinética e energia potencial de uma partícula movendo nesse campo é uma constante.*

Nesse contexto, precisamos saber quais condições garantem a existência de um campo potencial, i.e., uma função ϕ tal que $\nabla\phi = f$.

Teorema 8 (Condições necessárias e suficientes). Seja f um campo vetorial contínuo definido em uma região aberta e conexa $S \subset \mathbb{R}^n$. Então são equivalentes:

- i) f é gradiente de algum potencial em S .
- ii) A integral de linha de f é independente da escolha de caminho.
- iii) A integral de linha de f é zero avaliada em curvas fechadas.

Uma condição simples muito útil é a seguinte

Teorema 9. Seja $f = (f_1, \dots, f_n)$ um campo vetorial continuamente diferenciável em uma região aberta $S \subset \mathbb{R}^n$. Existe um potencial associado se, e somente se, as derivadas parciais são relacionadas através das equações

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

$i, j = 1, \dots, n$

Demonstração. Quando existir o potencial ϕ , temos que

$$f_j = \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \quad \text{para cada } j = 1, \dots, n.$$

Diferenciando ambos lados na direção i ,

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial \phi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial \phi}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

lembrando que podemos comutar a ordem das direções de diferenciação já que ϕ deve ser contínua. A recíproca é uma simples consequência do Teorema de Green. □

Antes dos detalhes técnicos, trataremos da motivação física adjacente à quantidade (A.1.1) abaixo. Pois bem, considere o campo vetorial $f = (P, Q)$ somado tangencialmente ao longo de uma volta completa em um retângulo qualquer, como na figura A.1. Essa soma foi como definimos a integral de linha $\oint f \cdot d\alpha$, que pode ser interpretado como a *circulação* de fluxo ao longo do retângulo. Considere no caso limite, onde o tamanho dos lados tende a zero, que o campo f não muda muito quando avaliado ao longo de cada lado. Começando no ponto (x, y) e tomando a orientação anti-horária, vejamos o que acontece com a aproximação infinitesimal da circulação do fluxo. No primeiro lado, de tamanho Δx , considerando o campo constante, a primeira parte da integral é $P^1 \Delta x$. Analogamente, nos lados seguintes obtemos respectivamente $Q^2 \Delta y$, $-P^3 \Delta x$ e $-Q^4 \Delta y$. E portanto a integral pode ser expressa como

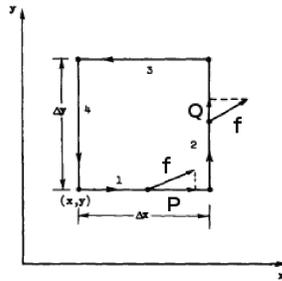


Figura A.1: circulação no retângulo

$$\oint f \cdot d\alpha = P^1 \Delta x + Q^2 \Delta y - P^3 \Delta x - Q^4 \Delta y = (P^1 - P^3) \Delta x + (Q^2 - Q^4) \Delta y,$$

Aproximando através de um translado vertical do campo, podemos escrever

$$P^3 = P^1 + \frac{\partial P}{\partial y} \Delta y,$$

e portanto

$$(P^1 - P^3) \Delta x = -\frac{\partial P}{\partial y} \Delta x \Delta y$$

Analogamente,

$$(Q^2 - Q^4) \Delta y = \frac{\partial Q}{\partial x} \Delta x \Delta y$$

Finalmente, somando as duas últimas equações obtemos a circulação total ao longo do nosso retângulo.

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \Delta x \Delta y \tag{A.1.1}$$

Considere agora um retângulo subdividido em subretângulos como os da figura A.1. Queremos mostrar que a circulação ao longo desse novo retângulo (ou qualquer curva) é a soma das circulações ao longo de seus subretângulos (ou de suas curvas parciais). Em outras palavras, se dividirmos uma curva como na figura abaixo, juntando os pontos (1) e (2) acrescentando dois novos circuitos fechados $\Gamma_1 = \Gamma_a + \Gamma_{ab}$ e $\Gamma_2 = \Gamma_b + \Gamma_{ab}$, temos que a circulação em Γ é igual a circulação em $\Gamma_1 + \Gamma_2$, já que as integrais ao longo de Γ_{ab} terão sinais opostos quando percorridas pelas curvas Γ_1 e Γ_2

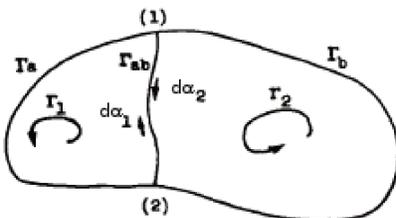


Figura A.2: Decomposição da circulação

Portanto se somarmos a circulação (A.1.1) nos subretângulos infinitesimais em uma região S , com respeito a sua área, obtemos a circulação do fluxo ao longo de sua fronteira ∂S , i.e.,

$$\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy = \text{circulação ao longo de } \partial S$$

A.1.1 O Teorema de Green

Lema A.1.1. Assuma que a integral dupla $\int_R f(x, y) dx dy$ exista quando somada no retângulo $S = [a, b] \times [c, d]$. Suponha a existência de funções Q e P , contínuas em S tal que $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = f(x, y)$. Então

$$\int_S f(x, y) dx dy = \int_c^d [Q(b, y) - Q(a, y)] dy = \int_a^b [P(x, d) - P(x, c)] dx$$

Demonstração. (em sala: usa o teorema do valor médio e o limite das somas de Riemann.) □

Teorema 10 (Teorema de Green para retângulos). Sejam P e Q funções reais definidas em $S = [a, b] \times [c, d]$. Assuma que as derivadas parciais $\frac{\partial Q}{\partial x}$ e $\frac{\partial P}{\partial y}$ existem e são limitadas no interior de S , e que além disso ambas integrais $\int_S \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy$, $\int_S \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$ existem. Denotaremos por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ a parametrização da fronteira ∂S do retângulo S . Então

$$\oint_{\partial S} P dx + Q dy$$

existe, e também temos que

$$\int \int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial S} P dx + Q dy \quad (\text{A.1.2})$$

Demonstração. Pelo Lema anterior, vimos que

$$\int \int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_c^d [Q(b, y) - Q(a, y)] dy - \left(\int_a^b [P(x, d) - P(x, c)] dx \right)$$

Por outro lado, representando a fronteira do retângulo $\partial S = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$, como união de seus lados, e usando a propriedade $\oint_{\partial S} = \sum_{i=1}^4 \oint_{\Gamma_i}$, vejamos o que acontece em cada um dos lados Γ_i :

Em Γ_1 , temos a parametrização $\alpha(t) = (t, c)$, $a \leq t \leq b$ e o Teorema 2 estabelece que

$$\oint_{\Gamma_1} P dx + Q dy = \int_{\Gamma_1} P dx = \int_a^b P(\alpha(t)) dt = \int_a^b P(t, c) dt$$

Analogamente,

$$\oint_{\Gamma_2} P dx + Q dy = \int_c^d Q(b, t) dt$$

$$\oint_{\Gamma_3} P dx + Q dy = - \int_a^b P(t, d) dt$$

$$\oint_{\Gamma_4} P dx + Q dy = - \int_c^d Q(a, t) dt$$

Somando as últimas quatro equações obtemos

$$\int \int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial S} P dx + Q dy$$

□

A partir do retângulo é possível estender o resultado acima para domínios mais gerais, a saber, para *curvas de Jordan*, que são traços Γ de parametrizações $\alpha(t)$ definidas em $[a, b]$ satisfazendo $\alpha(a) = \alpha(b)$, e sem auto-interseções, i.e., $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$ sempre que $t_1 \neq t_2$ em $(a, b]$. Tais curvas dividem o plano em duas regiões disjuntas, o *interior* (parte limitada), e o *exterior*, sendo a fronteira comum a curva Γ . Apesar da trivialidade da afirmação anterior, sua demonstração ficou aberta até o desenvolvimento de técnicas da topologia algébrica encerradas no que chamamos *homologia*.

A.1.2 O Teorema de Stokes

Para generalizar o resultado acima para regiões tridimensionais basta perceber que podemos aproximar a área de uma superfície parametrizada por retângulos infinitesimais, cuja circulação de fluxo ao longo de seu bordo será igual à integral do *rotacional* sobre a área de toda superfície, como afirma o

Teorema 11 (Teorema de Stokes). Considere uma aplicação r do plano uv para o espaço xyz , bijetora quando restrita a região aberta T cuja fronteira denotaremos por Γ . Assuma também a existência de suas segundas derivadas parciais e denote a superfície parametrizada $S = r(T)$ cujo bordo denotaremos por $\partial S = r(\Gamma)$. Se P, Q e R são campos escalares continuamente diferenciáveis em S , então

$$\int \int_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy = \oint_{\partial S} P dx + Q dy + R dz, \quad (\text{A.1.3})$$

ou simplesmente

$$\int \int_S (\text{rot } f) \cdot n \, dS = \oint_{\partial S} f \cdot d\alpha$$

onde,

$$\text{rot } f = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad (\text{A.1.4})$$

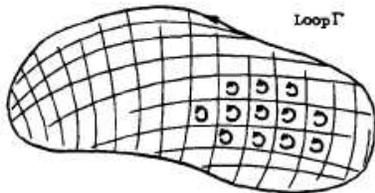


Figura A.3: circulação no bordo

Por simplicidade denotaremos o rotacional de um campo $f = (P, Q, R)$ por $\nabla \times f$, somente uma maneira notacional para computá-lo a partir do determinante simbólico

$$\text{rot } f = \nabla \times f = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

que representa a mesma ideia de circulação como em (A.1.1), agora circulando ao longo do bordo da superfície S (fig. A.3), e projetada nos planos yz , zx e xy . Observe que se $\text{rot } f = 0$ para todo $x \in S$ temos novamente que a integral de linha ao redor de qualquer circuito fechado ao longo da superfície é igual a zero, o que garante a existência de um campo potencial. Portanto, para *qualquer* campo escalar ϕ

$$\oint_{\Gamma} \nabla \phi \cdot d\alpha = 0$$

Usando o Teorema de Stokes, e imaginando Γ como o bordo ∂S de uma superfície S , obtemos

$$\int \int_S \nabla \times (\nabla \phi) \, dS = 0.$$

Como S é uma superfície arbitrária, temos que

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0. \quad (\text{A.1.5})$$

A.1.3 Divergência e o Teorema de Gauss

Até agora nos restringimos a somar uma integral de linha de um campo vetorial ao longo de uma curva plana (Green) e de uma curva no espaço (Stokes), relacionando tais somas com uma integral múltipla sobre a região (plana e espacial respectivamente) encerrada pela curva. Agora estamos interessados em integrar um campo vetorial sobre um volume infinitesimal V no espaço. De forma exatamente análoga como chegamos a (A.1.1) e (A.1.4), obtemos que o *fluxo* total do campo $f = (P, Q, R)$ que atravessa um cubo infinitesimal, chamado *divergente*, pode ser calculado pela expressão

$$\operatorname{div} f = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Como sempre, o teorema mais geral que sintetiza todos os anteriores é atribuído a Gauss, conhecido como

Teorema 12 (Teorema da divergência). Seja V um sólido tridimensional limitado por uma superfície fechada e orientável S , e seja \mathbf{n} o vetor unitário normal a S . Se f é um campo vetorial continuamente diferenciável em V , temos

$$\int \int \int_V (\operatorname{div} f) \, dx \, dy \, dz = \int \int_S f \cdot \mathbf{n} \, dS$$

Interpretando o gradiente como um operador,

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Podemos representar o divergente como

$$\operatorname{div} f = \nabla \cdot f.$$

Portanto

$$\operatorname{div} (\nabla \phi) = \nabla \cdot \nabla \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}.$$

A.2 A Equação de Laplace

O operador acima é chamado Laplaciano de uma função, e será denotado por

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Utilizando o Teorema da divergência

$$\int_V \Delta u \, dV = \int_V \operatorname{div} (\nabla u) \, dV = \int_{\partial V} \nabla u \cdot \mathbf{n} \, dS,$$

o que motiva procurar solução para o *Problema de Dirichlet*:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } R \\ u = f & \text{em } \partial R \end{cases}$$

A.2.1 As identidades de Green

No trabalho intitulado *An essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theory of Electricity and Magnetism*, escrito por Green em 1828, foram apresentadas suas três identidades, obtidas a partir do Teorema do Divergente, usadas para definir a função de Green para regiões limitadas. Seu objetivo era estudar as relações entre densidade superficial de cargas sobre ∂V e o potencial eletrostático resultante

Definição 7. O campo vetorial normal unitário, apontando para o exterior da fronteira de uma superfície regular em cada ponto x será denotado por

$$\mathbf{n}(x) = (n_1(x), \dots, n_n(x))$$

e derivamos na direção do vetor normal através da expressão

$$\frac{\partial u}{\partial n} := \nabla u \cdot \mathbf{n}$$

Teorema 13. (Integração por partes) Sejam u e $v \in \mathcal{C}^1$ no fecho da região $R \subset \mathbb{R}^n$. Então

$$\int_R u_{x_i} v dV = - \int_R u v_{x_i} dV + \int_{\partial R} u v n_i dS \quad (\text{A.2.1})$$

Demonstração.

$$\int_R (uv)_{x_i} dV = \int_R u_{x_i} v dV + \int_R u v_{x_i} dV$$

Aplicando o teorema da divergência no lado esquerdo, temos

$$\int_R u_{x_i} v dV = - \int_R u v_{x_i} dV + \int_{\partial R} u v n_i dS \quad i = 1, \dots, n$$

□

Teorema 14. (Identidades de Green)

- (i) $\int_R \Delta u dV = \int_{\partial R} \frac{\partial u}{\partial n} dS$,
- (ii) $\int_R (\nabla u \cdot \nabla v) dV = - \int_R u \Delta v dV + \int_{\partial R} \frac{\partial v}{\partial n} u dS$,
- (iii) $\int_R u \Delta v - v \Delta u dV = \int_{\partial R} u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} dS$.

Demonstração. Usando (A.2.1) com u substituído por u_{x_i} e $v = 1$, temos

$$\int_U u_{x_i x_i} dV = \int_{\partial R} u_{x_i} n_i dS$$

Somando em $i = 1, \dots, n$ obtemos (i)

Para obter (ii), basta substituir v por sua derivada v_{x_i} . Escrevendo novamente (ii) intercambiando u e v e então subtraindo ambas obtemos (iii) □

A.2.2 A fórmula da média e princípio do máximo

Notação:

$$\int_E f d\mu := \frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu = \text{média de } f \text{ ao longo do conjunto } E, \text{ desde que } \mu(E) > 0.$$

$$\alpha(n) = \text{volume da bola unitária em } \mathbb{R}^n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}$$

Teorema 15 (O princípio da média). $u \in \mathcal{C}^2$ é harmônica se, e somente se,

$$u(x) = \int_{\partial B(x,r)} u dS = \int_{B(x,r)} u dV. \quad (\text{A.2.2})$$

Para cada bola $B(x, r)$ no domínio.

Demonstração. Defina

$$\phi(r) := \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y) = \int_{\partial B(0,1)} u(x + rz) dS(z),$$

$$\phi'(r) = \int_{\partial B(0,1)} \nabla u(x + rz) \cdot z dS(z)$$

E fazendo uma mudança de coordenadas $y = x + rz$,

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= \int_{\partial B(x,r)} \nabla u(y) \cdot \frac{y - x}{r} dS(y) = \int_{\partial B(x,r)} \nabla u(y) \cdot \mathbf{n} dS(y) \\ &= \frac{r}{n} \int_{B(x,r)} \Delta u(y) dV = 0 \end{aligned}$$

E portanto ϕ é constante, implicando

$$\phi(r) = \lim_{t \rightarrow 0} \phi(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\partial B(x,t)} u(y) dS(y) = u(x)$$

Reciprocamente, suponha que $\Delta u \neq 0$, logo existe alguma bola $B(x, r)$ na qual $\Delta u > 0$ em seu interior. Mas

$$0 = \phi'(r) = \frac{r}{n} \int_{B(x,y)} \Delta u(y) dV > 0,$$

um absurdo. □

Teorema 16 (Princípio do máximo). Suponha $u \in \mathcal{C}^2$ harmônica em R . Então

(i)

$$\max_{\bar{R}} u = \max_{\partial R} u.$$

(ii) Além disso, se R é conexo e existe um ponto $x_0 \in R$ tal que

$$u(x_0) = \max_{\bar{R}} u,$$

então

u é constante dentro de R .

O mesmo vale para o mínimo trocando u por $-u$.

Demonstração. Suponha que existe um ponto $x_0 \in R$ onde $u(x_0) = M = \max_{\bar{R}} u$. Então para $0 < r < d(x_0, \partial R)$, o princípio do máximo afirma que

$$M = u(x_0) = \int_{B(x_0, r)} u \, dV \leq M,$$

onde a igualdade só pode acontecer $u(y) = M$ para todo $y \in B(x_0, r)$. Portanto o conjunto $\{x \in R \mid u(x) = M\}$ é simultaneamente aberto e fechado em R , e portanto igual a R já que R é conexo. Isso prova (i), o qual prova (ii). □

Teorema 17 (Unicidade). Existe no máximo uma solução $u \in \mathcal{C}^2$ para o problema de valor de contorno

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } R \\ u = f & \text{em } \partial R \end{cases}$$

Demonstração. Suponha que u e u' são soluções do problema. Defina $w = u - u'$. Então $\Delta w = 0$ em R e $w = 0$ em ∂R . Pelo princípio do máximo temos portanto $w = 0$ em toda região R , i.e., $u = u'$. □

Mais uma importante aplicação do princípio da média:

Teorema 18 (Desigualdade de Harnack). Suponha V conexo e que \bar{V} seja um subconjunto compacto em uma região U . Então existe uma constante positiva, dependendo somente de V , tal que

$$\sup_V u \leq C \inf_V u$$

para toda função harmônica não-negativa u em U .

Em particular

$$\frac{1}{C} u(y) \leq u(x) \leq C u(y)$$

para todos pontos $x, y \in U$. Essas desigualdades afirmam que *valores de uma função harmônica não-negativa, dentro de V , são comparáveis*: u não pode ser muito pequeno (ou grande) em algum ponto de V a menos que u seja muito pequeno (ou grande) em todo conjunto V .

Demonstração. Seja $r := \frac{1}{4}d(V, \partial U)$. Escolha $x, y \in V$, $|x - y| \leq r$. Então

$$u(x) = \int_{B(x, 2r)} u \, dV \geq \frac{1}{\alpha(n)2^n r^n} \int_{B(y, r)} u \, dV = \frac{1}{2^n} \int_{B(y, r)} u \, dV = \frac{1}{2^n} u(y).$$

Portanto $2^n u(y) \geq u(x) \geq \frac{1}{2^n} u(y)$ se $x, y \in V$, $|x - y| \leq r$. Finalmente, como V é conexo e \bar{V} é compacto existe uma cobertura finita $\{B_i\}_{i=1}^N$, todas de raio $r/2$, pela qual podemos percorrer o espaço através das interseções $B_i \cap B_{i-1} \neq \emptyset$ para $i = 1, \dots, n$. Então

$$u(x) \geq \frac{1}{2^{n(N+1)}} u(y)$$

□

A.2.3 A Função de Green

Após identificada uma solução explícita pode-se assim reunir soluções mais gerais. Procurando pelas simetrias, desde que se observou que a equação de Laplace é invariante sobre movimentos rígidos, i.e., transformações ortogonais, é razoável observar primeiramente as soluções radiais. Mais precisamente, considere uma transformação ortogonal representada pela matriz $\mathcal{O}_{n \times n}$, ($\mathcal{O}\mathcal{O}^T = \mathcal{O}^T\mathcal{O} = I$), vamos mostrar que

$$v(x) := u(\mathcal{O}(x)) \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

implica $\Delta v = 0$. (Em sala.) Na tentativa de achar a solução da equação de Laplace em $R = \mathbb{R}^n$, é razoável supor a forma radial seguinte

$$u(x) = v(r),$$

onde $r = |x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$ e selecionar v , se possível, para que $\Delta u = 0$ seja satisfeito. Para $i = 1, \dots, n$ temos que

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{2}(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{-1/2} 2x_i = \frac{x_i}{r} \quad x \neq 0.$$

E portanto

$$u_{x_i} = v'(r) \frac{x_i}{r}, \quad u_{x_i x_i} = v''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + v'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right)$$

para $i = 1, \dots, n$, e assim,

$$\Delta u = v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r).$$

Então $\Delta u = 0$ se, e somente se,

$$v'' + \frac{n-1}{r} v' = 0.$$

Se $v' \neq 0$, deduzimos

$$\log(|v'|)' = \frac{v''}{v'} = \frac{1-n}{r},$$

e então $v'(r) = \frac{a}{r^{n-1}}$ para alguma constante a . Consequentemente, se $r > 0$, temos

$$v(r) = \begin{cases} b \log r + c & n = 2 \\ \frac{b}{r^{n-2}} + c & n \geq 3 \end{cases}$$

e através de uma bruxaria obtemos as constantes b e c ,

Definição 8 (Solução Fundamental para a equação de Laplace).

$$\Phi(x) := \begin{cases} \frac{-1}{2\pi} \log|x| & n = 2 \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{1}{|x|^{n-2}} & n \geq 3 \end{cases}$$

definida para $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, que por construção, satisfaz $\Delta\Phi = 0$.

Definição 9 (Função de Green).

$$G(x, y) := \Phi(y - x) - \phi^x(y), \quad x, y \in R, x \neq y$$

onde ϕ^x , chamado de função *corretora*, satisfaz

$$\begin{cases} \Delta\phi^x = 0 & \text{em } R \\ \phi^x = \Phi(y - x) & \text{em } \partial R \end{cases}$$

A fórmula explícita depende em qual conjunto (e sua fronteira) estamos procurando pela solução. O cálculo é conhecido para regiões específicas e pode ser encontrado em livros texto de Equações Diferenciais Parciais, como por exemplo (refs.)

Referências

- [Apo69] T. Apostol. *Calculus*. Vol. 1,2. New York: Wiley, 1969.
- [CFL67] R. Courant, K. Friedrichs e H. Lewy. “On the Partial Difference Equations of Mathematical Physics”. Em: *IBM Journal of Research and Development* 11 (1967).
- [Doo53] J. L. Doob. *Stochastic processes*. New York: John Wiley & Sons Inc., 1953.
- [Doo59] J. L. Doob. “Discrete Potential Theory and Boundaries”. Em: *Journal of Mathematics and Mechanics* 8.3 (1959).
- [DS84] P. G. Doyle e J. L. Snell. *Random walks and electric networks*. Vol. 22. Carus Monographs. Washington, D. C.: Mathematical Association of American, 1984.
- [Dur10] R. Durrett. *Probability: theory and examples*. Cambridge: Cambridge Press, 2010.
- [DY69] E. B. Dynkin e A. A. Yushkevich. *Markov Processes: theorems and problems*. New York: Plenum Press, 1969.
- [Eva98] L.C. Evans. *Partial Differential Equations*. Providence: AMS, 1998.
- [Fel68] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. Vol. 1. New York: Wiley, 1968.
- [Fey64] R. Feynman. *Lectures on Physics*. Vol. 1,2. Reading: Addison-Wesley, 1964.
- [LL10] G. F. Lawler e V. Limic. *Random walk: a modern introduction*. Cambridge: Cambridge Press, 2010.
- [Moi67] Abraham de Moivre. *The doctrine of chances : or, a method of calculating the probabilities of events in play*. New York: Chelsea Pub. Co., 1967.
- [Pon09] C. P. Ponce. *Métodos Clássicos em Teoria do Potencial*. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.
- [Res99] S. I. Resnick. *A probability path*. Cambridge: Birkhauser Boston Inc., 1999.
- [Shi96] A. N. Shiryaev. *Probability*. New York: Springer-Verlag, 1996.
- [SMS+13] Ranieri Silva, Tiago Macedo, Júnior Soares et al. *Modelo de Dissertação/Tese do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC) da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)*. 2013. URL: https://github.com/r-gaia-cs/modelo_tese_imecc.
- [Sne82] J. L. Snell. “Probability and martingales”. Em: *The Mathematical Intelligencer* 4 (1982).

- [Spi76] F. Spitzer. *Principles of random walk*. New York: Springer-Verlag, 1976.
- [Wil91] D. Williams. *Probability with Martingales*. Cambridge: Cambridge Press, 1991.