Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Departamento de Matemática Aplicada

Polinômios e Funções Inteiras com Zeros Reais

Fábio Rodrigues Lucas*

Doutorado em Matemática Aplicada - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. Dimitar Kolev Dimitrov

* Este trabalho teve apoio financeiro da FAPESP.

Zeros de Polinômios Ortogonais na Reta Real

Este exemplar corresponde à redação final da tese de doutorado devidamente corrigida e defendida por Fábio Rodrigues Lucas e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 15 de junho de 2010.

Dimitar K. Dimitrov

Prof. Dr. Dimitar Kolev Dimitrov - orientador

Prof. Dr. Roberto Andreani - co-orientador

Banca Examinadora:

1. Prof. Dr. Dimitar Kolev Dimitrov
2. Profa. Dra. Eliana Xavier Linhares de Andrade
3. Prof. Dr. Sérgio Antonio Tozoni
4. Prof. Dr. Cláudio Aguinaldo Buzzi
5. Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Matemática Aplicada.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Bibliotecária: Maria Fabiana Bezzera Müller - CRB8 / 6162

Lucas, Fábio Rodrigues

L962p Polinômios e funções inteiras com zeros reais/Fábio Rodrigues Lucas-Campinas, [S.P.: s.n.], 2010.

Orientador: Dimitar Kolev Dimitrov ; Roberto Andreani.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Polinômios. 2. Funções Inteiras. 3. Hipótese de Riemann I. Dimitrov, Dimitar Kolev II. Andreani, Roberto. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Título em inglês: Polynomials and entire functions with real zeros

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1.Polynomials. 2. Entire functions. 3. Riemann's hypothesis.

Área de concentração: Análise Aplicada

Titulação: Doutor em Matemática Aplicada

Banca Examinadora: Prof. Dr. Dimitar Kolev Dimitrov (IBILCE-UNESP)
Profa. Dra. Eliana Xavier Linhares de Andrade (IBILCE-UNESP)
Prof. Dr. Sérgio Antonio Tozoni (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Cláudio Aguinaldo Buzzi (IBILCE-UNESP)
Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga (IBILCE-UNESP)

Data da defesa: 15/06/2010

Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática Aplicada

Tese de Doutorado defendida em 15 de junho de 2010 e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Dimitar K. Dimitrov

Prof(a). Dr(a). DIMITAR KOLEV DIMITROV

Eliana X. L. de Andrade

Prof(a). Dr(a). ELIANA XAVIER LINHARES DE ANDRADE

Prof(a). Dr(a). SÉRGIO ANTONIO TOZONI

Prof(a). Dr(a). CLÁUDIO AGUINALDO BUZZI

Prof(a). Dr(a). ALAGACONE SRI RANGA

Agradecimentos

Bem, chegou a hora de agradecer a todos aqueles que me ajudaram e contribuíram para minha formação nesses últimos anos.

Para começar, é difícil transcrever em palavras o quanto sou grato ao Prof. Dr. Dimitar K. Dimitrov. Desde o primeiro dia em que o conheci tem me ensinado muito e, principalmente, aprendi com ele o gosto pela pesquisa. Grande parte de minha formação devo a ele. Muito obrigado Prof. Dimitar.

Como não lembrar dos demais professores do Grupo de Polinômios Ortogonais da UNESP de São José do Rio Preto, SP. Agradeço em especial a Profa. Dra. Eliana Xavier L. de Andrade, por todo o carinho, amizade, por ter sido a professora de meu primeiro curso de Polinômios Ortogonais e, também, agradeço fortemente a Profa. Dra. Cleonice Fátima Braccialipor por ter lido e corrigido a primeira versão de minha tese. Sou muito grato ao Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga por todo o apoio, pelos ensinamentos, pela amizade e incentivo.

Agradeço ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da UNICAMP. Em especial ao meu co-orientador Prof. Dr. Roberto Andreani, por cuidar de toda a parte burocrática e pela disciplina ministrada, a qual foi muito importante em minha formação. Ao coordenador do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada Prof. Dr. Aurélio Ribeiro L. de Oliveira pelo seu apoio. Também ao pessoal da secretaria de Pós-Graduação, em especial a Tânia por toda ajuda e atenção. Agradeço a todos os meus colegas da UNICAMP, em especial à Cecília P. de Andrade, Denise de Siqueira, Douglas S. Gonçalves, Fernanda T. Nunes, José E. A. Neto, Leandro da Fonseca Prudente, Robson da Silva, Rodrigo S. Lima e Valtemir M. Cabral.

Ao Departamento de Ciências da Computação e Estatística da UNESP de São José do Rio Preto, agradeço por ter cedido seu espaço físico durante minha permanência naquele local e aos colegas da UNESP, Alyne Toscano Martins, Cristiane Maria Defalque, Marcos Proença de Almeida e Wallace C. O. Casaca, também agradeço.

Ao colega de longa data, Fernando Rodrigo Rafaeli, por todos estes anos de convivência. Aos demais colegas do Grupo de Polinômios Ortogonais, Eliel José C. dos Santos, Guilherme L. F. da Silva, Heron Martins Félix, José Augusto Coelho, Manuella A. F. de Lima, Regina da Silva Lamblém, Vanessa G. P. Paschoa, Yen Chi Lu e, em especial, à Mirela V. de Mello pela colaboração em alguns dos resultados deste trabalho. Agradeço também à Gabriela P. Mosquera por todo o apoio nos meus primeiros dois anos de doutorado.

Agradeço também aos membros da Banca Examinadora por aceitarem o convite de participar da defesa desta tese de doutorado e por todas as sugestões.

Sou eternamente grato à minha família cujo apoio incondicional tornou possível a realização deste projeto.

Finalmente, meu agradecimento à FAPESP pelo apoio financeiro.

Resumo

Nesta tese abordamos alguns problemas relacionados com zeros de polinômios e de funções inteiras. Estabelecemos fórmulas explícitas para os polinômios da sequência de Sturm, gerada por um polinômio e pela sua derivada. Como consequência, obtemos condições necessárias e suficientes para que um polinômio sem zeros múltiplos tenha somente zeros reais. Provamos também a veracidade de algumas condições necessárias para a hipótese de Riemann, estendendo desta forma um resultado anterior de Csordas, Norfolk e Varga que estabelecem uma conjectura de Pólya.

Palavras-chave: Polinômios, zeros, Funções Inteiras, Desigualdades de Turán, Hipótese de Riemann.

Abstract

In this thesis we approach problems concerning zeros of polynomials and entire functions. We establish explicit formula for the polynomial in the Sturm sequence, generated by a polynomial and its derivative. As a consequence, we obtain necessary and sufficient conditions for a polynomial without multiple zeros to possess only real zeros. We prove also the truth of certain necessary conditions for the Riemann Hypothesis, thus extending a previons result of Csordas, Norfolk and Varga who established a conjecture of Pólya.

Key words: Polynomials, Zeros, Entire Functions, Turán of Inequality, Riemann Hypothesis.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Um dos resultados fundamentais da matemática é o chamado Teorema Fundamental da Álgebra. Ele afirma que, se

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots a_n z^n, \qquad a_n \neq 0,$$

é um polinômio de grau n, ele possui exatamente n zeros $z_1, z_2, \ldots, z_n$, sendo possível que alguns deles se repitam e, neste caso, os zeros são chamados múltiplos.

Além disso, $p(z)$ pode ser representado da forma

$$p(z) = a_n(z - z_1) \ldots (z - z_n).$$

Representação similar existe para as funções inteiras e ela é conhecida por fórmula de Weierstrass.

Uma questão fundamental é a seguinte: dada uma região Ω do plano complexo, obter condições necessárias e/ou suficientes sobre os coeficientes do polinômio, ou da função inteira, para que todos os seus zeros pertençam a Ω.

Por exemplo, quando Ω é um semi-plano ou um disco, esta questão é simplesmente o problema da estabilidade de soluções de equações diferenciais.

Os temas principais desta tese são relacionados à questão acima no caso em que Ω é a reta real. Portanto, este trabalho contém resultados sobre polinômios e funções inteiras que possuem somente zeros reais.

Na literatura, os polinômios algébricos com zeros somente reais são frequentemente chamados de Polinômios Hiperbólicos. A classe das funções inteiras cujos zeros estão todos localizados na reta real é denominada de Classe de Laguerre-Pólya. É conhecido que toda tal função é de ordem no máximo dois e é limite de polinômios hiperbólicos, no sentido da convergência uniforme nos compactos do plano complexo.

Vale mencionar que a questão de caracterizar as funções da classe de Laguerre-Pólya foi motivada pelo maior problema da matemática na atualidade que é a Hipótese de Riemann. Esta hipótese afirma que todos os zeros não-triviais da função ζ de Riemann pertencem à reta $Re(z) = \frac{1}{2}$. A simples transformação linear que leva esta reta ao eixo real reduz a Hipótese de Riemann ao problema de estabelecer que a função obtida através da transformação, que é conhecida como a função ξ de Riemann, possui somente zeros reais. Sabe-se que ξ é uma função inteira de ordem um. Laguerre, provavelmente tentado por esta simples observação, nos anos 80 do século XIX obteve alguns resultados sobre as funções inteiras com zeros reais. Na primeira década do século XX, Jensen espalhou rumores de que havia obtido caracterizações fundamentais sobre estas funções e condições necessárias e suficientes importantes para a hipótese de Riemann.

Como ele não publicou seus resultados, após seu falecimento foi dado a George Pólya o direito de estudar os manuscritos de Jensen. Apesar das condições necessárias e suficientes que Pólya encontrou não parecerem e nem provarem ser promissoras para estabelecer a hipótese, um resultado bonito e importante tinha sido obtido por Jensen. Associados com qualquer função inteira

$$\psi(z) = \gamma_0 + \frac{\gamma_1 z}{1!} + \frac{\gamma_2 z^2}{2!} + \ldots + \frac{\gamma_k z^k}{k!} \ldots .$$

Jensen introduziu os polinômios

$$g_n(\psi, z) = \gamma_0 + \binom{n}{1}\gamma_1 z + \binom{n}{2}\gamma_k z^2 + \ldots \binom{n}{n}\gamma_n z^n,$$

e provou que ψ é da classe de Laguerre-Pólya se, e somente se, todos os polinômios $g_n(\psi; z)$, que hoje são chamados polinômios de Jensen, são hiperbólicos. Além disso, a sequência $g_n(\psi; \frac{z}{n})$ converge uniformemente para $\psi(z)$ em todo compacto do plano complexo.

É relativamente fácil concluir que se $\psi(z)$ possui apenas zeros reais, não somente $g_{n,k}(\psi; z)$, mas também os chamados polinômios de Jensen generalizados

$$g_{n,k}(z) = \gamma_k + \binom{n}{1}\gamma_{k+1} z + \ldots + \binom{n}{j}\gamma_{k+j} z^j + \ldots + \binom{n}{n}\gamma_{n+k} z^n,$$

são hiperbólicos.

Motivado pela leitura dos manuscritos de Jensen, George Pólya, em parte em coautoria com Schur, obteve a caracterização (denotada aqui por $\mathcal{LP}$) completa da classe que chamamos de Laguerre-Pólya e estabeleceu vários resultados importantes sobre o assunto.

Levando em consideração o papel dos polinômios de Jensen, um problema fundamental é obter caracterizações completas para polinômios hiperbólicos. Existem condições necessárias e suficientes para que um polinômio seja hiperbólico e as mais acessíveis são as fornecidas pelo Teorema de Hermite em termos de formas quadráticas que envolvem os coeficientes dos polinômios. Por outro lado, o resultado clássico de Sturm fornece o número de zeros reais de um polinômio $p(z)$ com coeficientes reais no intervalo (a, b) através das mudanças de sinal da chamada sequência de Sturm, gerada por $p(z)$ e $p'(z)$. Esta última sequência é obtida pelo algoritmo de Euclides e, portanto, exige cálculos bastantes complexos. Alguns dos principais resultados desta tese são fórmulas explícitas sobre os polinômios da sequência de Sturm em termos de determinante cuja matriz é a conhecida matriz de Hurwitz associada a $p(z)$ e que envolve somente $p(z)$ e $p'(z)$. Estes resultados revelam a relação estreita entre o Teorema de Hermite e o Teorema de Sturm. Outra consequência imediata destes resultados são as condições necessárias e suficientes para que um polinômio seja hiperbólico no caso em que ele não possui zeros múltiplos.

Lembramos que a Hipótese de Riemann é equivalente ao fato de que a função $\xi(z)$ de Riemann pertence à classe de Laguerre-Pólya e que $\xi(z)$ é uma função par, isto é,

$$\xi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\widehat{\gamma}_k}{k!} z^{2k}, \quad \text{com} \quad \widehat{\gamma}_k > 0.$$

Portanto, a hipótese é verdadeira se, e somente se, a função $\xi_1(z) = \xi(\sqrt{z})$,

$$\xi_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\widehat{\gamma}_k}{k!} z^k,$$

possui somente zeros reais e negativos. Então, pelos resultados de Jensen mencionados anteriormente, uma condição necessária para a veracidade da Hipótese de Riemann é que os polinômios generalizados

$$g_{2,k-1}(\xi_1; z) = \widehat{\gamma}_{k-1} + 2\widehat{\gamma}_k z + \widehat{\gamma}_{k+1} z^2$$

sejam hiperbólicos, o que por seu lado é equivalente ao fato de seu discriminante ser não-negativo, isto é,

$$\widehat{\gamma}_k^2 - \widehat{\gamma}_{k-1}\widehat{\gamma}_{k+1} \geq 0, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Estas desigualdades são conhecidas na literatura como as desigualdades de Turán. Em 1927 Pólya propôs como problema em aberto provar estas desigualdades para os coeficientes de $\xi_1(z)$. Surpreendentemente, o problema de Pólya foi resolvido depois de quase seis décadas, em 1986 por Csordas, Norfolk e Varga [2]. Naturalmente surge a questão sobre a hiperbolicidade dos polinômios generalizados de Jensen de grau três associados com $\xi_1(z)$, que são dados por

$$g_{3,k-1}(\xi_1; z) = \widehat{\gamma}_{k-1} + 3\widehat{\gamma}_k z + 3\widehat{\gamma}_{k+1} z^2 + \widehat{\gamma}_{k+2} z^3. \tag{1.1}$$

Provamos que um polinômio da forma (1.1) com coeficientes positivos é hiperbólico se, e somente se, $\widehat{\gamma}_{k+1}^2 - \widehat{\gamma}_k\widehat{\gamma}_{k+2} \geq 0$ e

$$4(\widehat{\gamma}_k^2 - \widehat{\gamma}_{k-1}\widehat{\gamma}_{k+1})(\widehat{\gamma}_{k+1}^2 - \widehat{\gamma}_k\widehat{\gamma}_{k+2}) - (\widehat{\gamma}_k\widehat{\gamma}_{k+1} - \widehat{\gamma}_{k-1}\widehat{\gamma}_{k+2})^2 \geq 0 \tag{1.2}$$

simultaneamente. As desigualdades (1.2) são chamadas de desigualdades de Turán de ordem superior. No Capítulo 4 desta tese provamos as desigualdades (1.2), estabelecendo, assim, a hiperbolicidade dos polinômios de Jensen generalizados de grau três e estendendo o resultado de Csordas, Norfolk e Varga.

Capítulo 2

Definições e Resultados Preliminares

Neste capítulo fornecemos definições e resultados preliminares que serão utilizados nos capítulos seguintes. Como as demonstrações de tais resultados são um tanto trabalhosas e, em muitos casos, necessitam de muitos resultados auxiliares, e para que o trabalho não fuja dos seus objetivos não vamos fornecer tais demonstrações.

As definições e demonstrações da seção 2.1 podem ser encontradas em [6].

2.1 Alguns Resultados sobre Formas Quadráticas

Definição 2.1 *Uma forma quadrática é um polinômio homogêneo de grau dois em n variáveis $x_1, x_2, \ldots x_n$. Uma forma quadrática sempre tem a representação*

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k \qquad (a_{ik} = a_{ki}; i, k = 1, 2, \ldots n),$$

onde $A = (a_{ik})$ é uma matriz simétrica.

Se denotarmos o vetor $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ por x e a forma quadrática por

$$A(x, x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k, \tag{2.1}$$

então podemos escrever (2.1) como

$$A(x, x) = x^T A x. \tag{2.2}$$

Uma forma quadrática também pode ser representada na forma

$$A(x,x)=\sum_{i=1}^{r} a_i X_i^2, \tag{2.3}$$

onde $a_i \neq 0 \quad (i=1,2,\ldots,r)$ e

$$X_i=\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} x_k \quad (i=1,2,\ldots r)$$

são formas lineares linearmente independentes nas variáveis $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

É possível provar, utilizando a representação (2.3), que o número de a_i positivos é igual ao posto da matriz $A=(a_{ik})$, além disso o número total de a_i positivos e negativos são invariantes independentemente da representação de $A(x,x)$. Este resultado é conhecido como a Lei da Inércia de uma Forma Quadrática e é dado da seguinte forma.

Teorema 2.1 *Na representação de uma forma quadrática $A(x,x)$ como soma de quadrados independentes*

$$A(x,x)=\sum_{i=1}^{r} a_i X_i^2,$$

o número de a_i positivos e negativos é independente da escolha de sua representação.

Sabendo que o número de quadrados positivos e negativos é invariante, podemos definir o que é signatura de uma forma quadrática

Definição 2.2 *A diferença σ entre o número π de quadrados positivos e o número v de quadrados negativos na representação de $A(x,x)$ é chamado de signatura da forma $A(x,x)$.*

O posto r e a signatura σ determinam os números π e v unicamente, pois $r=\pi+v$ e $\sigma=\pi-v$.

Vamos, agora, enunciar o Teorema de Jacobi. Para este propósito, definimos

- $D_k = A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k \\ 1 & 2 & \ldots & k \end{pmatrix}$ para $k=1,2,\ldots,n$ como sendo o determinante de ordem k formado pelas primeiras k linhas e primeiras k colunas da matriz $A=(a_{ik})$.

- $P(1, D_1, D_2, \ldots, D_r)$ e $V(1, D_1, D_2, \ldots, D_r)$ como sendo o número de permanência e número de mudanças de sinal, respectivamente, da sequência $1, D_1, D_2, \ldots, D_r$, onde r é o posto da matriz $A=(a_{ik})$.

Teorema 2.2 (Jacobi) *Se para a forma quadrática*

$$A(x,x) = \sum_{i,k}^{n} a_{ik} x_i x_k,$$

onde A tem posto r, as desigualdades

$$D_k = A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix} \neq 0 \qquad (k = 1, 2, \dots r) \tag{2.4}$$

são satisfeitas, então o número π de quadrados positivos e o número v de quadrados negativos de $A(x,x)$ coincidem, respectivamente, com o número P de permanências de sinal e o número V de variações de sinal na sequência $1, D_1, D_2, \dots, D_r$ e a signatura é dada por

$$\sigma = r - 2V(1, D_1, D_2, \dots, D_r).$$

Definição 2.3 *Uma forma quadrática $A(x,x) = \sum_{i,k}^{n} a_{ik} x_i x_k$ é chamada definida positiva se,*

$$A(x,x) \geq 0, \quad \textit{para todo} \quad x \neq 0.$$

É possível, através do método de Jacobi, representar uma forma quadrática $A(x,x)$ da forma

$$A(x,x) = \sum_{k=1}^{r} \frac{D_{k-1}}{D_k} X_k^2. \tag{2.5}$$

Utilizando a igualdade (2.5) obtemos o seguinte teorema.

Teorema 2.3 *Uma forma quadrática é definida positiva se, e somente se,*

$$D_1 \geq 0, D_2 \geq 0, \dots D_n \geq 0.$$

Teorema 2.4 *Seja $A(x,x)$ uma forma quadrática definida positiva. Se, para um certo vetor v, vale $\langle Av, v \rangle = 0$, então $Av = 0$.*

2.2 Definições e Resultados de Análise

Para uma melhor compreensão do Capítulo 4, fornecemos, nesta seção, as principais definições e resultados de análise que serão ali utilizados. Para a demonstração destes resultados veja [7].

Definição 2.4 (Função Inteira) *A função f é chamada analítica em algum ponto z_0 do seu domínio D se existir um $\rho > 0$ e uma série de potência $F(z) = a_0 + a_1 z + \ldots$, com raio de convergência maior ou igual a ρ, tal que*

- *a vizinhança $N(z_0, \rho)$ pertence a D, onde $N(z_0, \rho)$ é o disco centrado em z_0 e raio ρ;*
- *para todo z pertencente a $N(z_0, \rho)$, se $h = z - z_0$, então $f(z) = f(z_0 + h) = F(h)$.*

Se $f(z)$ é analítica em z_0 dizemos que $f(z)$ é representada por $F(z)$ em $N(z_0, \rho)$. Quando o domínio de f é todo o plano complexo, dizemos que f é uma Função Inteira se f for analítica em todo ponto z do plano complexo.

Teorema 2.5 *Assuma que as funções $f_1(z), f_2(z), \ldots f_n(z), \ldots$ são inteiras e que elas convergem uniformemente para uma função $f(z)$ em qualquer conjunto compacto do plano complexo. Então, a função limite $f(z)$ é inteira.*

Vale mencionar que os polinômios são funções inteiras, desta forma segue do Teorema anterior que se tivermos uma sequência de polinômios convergindo uniformemente para uma função $f(z)$ em qualquer conjunto compacto do plano complexo, então $f(z)$ é uma função inteira.

Como no Capítulo 4 vamos estudar os zeros de certas funções inteiras que são limites uniformes de sequências de polinômios, cabe mencionar alguns resultados sobre zeros de polinômios. O primeiro resultado é o conhecido Teorema Fundamental da Álgebra.

Teorema 2.6 *Todo polinômio $p(z)$ não constante de grau n com coeficientes complexos, admite exatamente n zeros. Além disso, $p(z)$ pode ser fatorado na forma*

$$p(z) = a_n(z - z_1) \ldots (z - z_n),$$

onde a_n é o coeficiente do maior grau de $p(z)$ e $z_1, \ldots z_n$ são os seus zeros.

Como consequência do Teorema Fundamental da Álgebra temos as chamadas Relações de Vieta, que relacionam os zeros $z_1, \dots z_n$ do polinômio $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} z^{n-k}$ com seus coeficientes a_k. Tal relação é a seguinte: Se definirmos σ_k como sendo as somas simétricas dos zeros $z_1, \dots z_n$, ou seja,

$$\sigma_1 = \sum_{j=1}^{n} z_j, \quad \sigma_2 = \sum_{l,j=1}^{n} z_j z_l, \quad \sigma_3 = \sum_{l,j,p=1}^{n} z_l z_j z_p, \quad \dots \quad \sigma_n = z_1, z_2 \dots z_n,$$

então

$$\sigma_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n} \qquad k = 1, \dots n. \tag{2.6}$$

O próximo teorema, conhecido como Teorema de Hurwitz, afirma que se todas as funções de uma sequência $\{f_n(z)\}_0^\infty$ possuem somente zeros reais, então sua função limite $f(z)$ também tem somente zeros reais.

Teorema 2.7 *Se os termos da sequência $\{f_n(z)\}_0^\infty$ são funções analíticas em um domínio G que tendem uniformemente em G para a função $f(z)$ não identicamente nula, então qualquer vizinhança suficientemente pequena de m zeros de $f(z)$ pertencentes a G contém exatamente m zeros dos f_n para um índice n suficientemente grande.*

O teorema seguinte garante que se um polinômio tem somente zeros reais, então dois coeficientes consecutivos do polinômio não podem ser nulos.

Teorema 2.8 *Se a equação*

$$h(z) = c_0 + c_1 z + \dots c_n z^n = 0$$

tem somente raízes reais e se $c_0 \neq 0$, então dois coeficientes vizinhos não podem se anular. Mais precisamente, se $c_r = 0$, $0 < r < n$, então $c_{r-1} c_{r+1} < 0$.

O próximo teorema garante a convergência de produto infinito de funções.

Teorema 2.9 *Uma condição necessária e suficiente para a convergência do produto $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n(z))$ é a convergência absoluta da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z)$.*

Concluímos esta seção com dois resultados sobre polinômios com somente zeros reais, o primeiro deles é conhecido como Teorema de Malo-Schur.

Teorema 2.10 *Se os zeros do polinômio*

$$p_1(z) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{1!}z + \dots \frac{\alpha_m}{m!}z^m$$

são reais e os zeros do polinômio

$$p_2(z) = \beta_0 + \frac{\beta_1}{1!}z + \dots + \frac{\beta_n}{n!}z^n$$

são reais e de mesmo sinal, então os zeros do polinômio

$$p_3(z) = \alpha_0\beta_0 + \frac{\alpha_1\beta_1}{1!}z + \dots + \frac{\alpha_k\beta_k}{k!}z^k$$

onde $k = min(m, n)$, são reais.

Teorema 2.11 *Uma condição necessária e suficiente para que o polinômio*

$$p_1(z) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{1!}z + \dots \frac{\alpha_n}{n!}z^n$$

tenha somente zeros reais é que o polinômio

$$p_1(D)z^m = \alpha_0 z^m + \binom{m}{1}\alpha_1 z^{m-1} + \dots \binom{m}{n}\alpha_n z^n$$

tenha somente zeros reais para todo inteiro positivo m, $m > n$.

Capítulo 3

Sequência de Sturm e Polinômios Hiperbólicos

Neste capítulo são obtidas condições necessárias e suficientes para que todas as raízes de um polinômio com coeficientes reais sejam reais. Além disso, dois outros novos resultados são estabelecidos, o primeiro propõe uma nova relação entre os determinantes das chamadas matrizes de Hankel e o segundo resultado fornece uma forma explícita para se calcular todos os polinômios gerados pelo algoritmo de Sturm. Ambos os resultados estão fortemente ligados e serão de grande importância para concluir o resultado principal.

Iniciamos o Capítulo 3 falando sobre a sequência e o Teorema de Sturm.

3.1 Teorema de Sturm.

O Teorema de Sturm trata de um método para se calcular o número de raízes reais que um polinômio com coeficientes reais possui em um dado intervalo qualquer (a, b), onde a e b são reais ou $\pm\infty$.

Para enunciarmos o Teorema de Sturm, primeiramente vamos introduzir alguns resultados e notações.

Considere a sequência de polinômios reais

$$Q_n(z), Q_{n-1}(z), Q_{n-2}(z), \ldots, Q_1(z), Q_0(z) \tag{3.1}$$

que possui as duas seguintes propriedades com respeito ao intervalo (a, b):

1. Para todo valor de z $(a < z < b)$, se algum $Q_m(z)$ se anula, então os dois polinômios adjacentes $Q_{m-1}(z)$ e $Q_{m+1}(z)$ têm valores diferentes de zero e sinais opostos, isto é, para $a < z < b$ segue que se $Q_m(z) = 0$, então

$$Q_{m-1}(z)Q_{m+1}(z) < 0.$$

2. A última função $Q_0(z)$ em (3.1) não se anula no intervalo (a, b).

A sequência de polinômios (3.1)é chamada de sequência de Sturm no intervalo (a, b).

Vamos verificar, agora, que se $f(z)$ é um polinômio de grau n e $f'(z)$ é a derivada de $f(z)$, então sempre podemos construir uma sequência de Sturm iniciando com $f(z)$ e $f'(z)$.

Para gerar uma sequência de Sturm vamos aplicar o algoritmo de divisão de Euclides para os polinômios $f(z)$ e $f'(z)$ a fim de encontrar o máximo divisor comum entre $f(z)$ e $f'(z)$, e verificar que o processo de divisão de Euclides gera uma sequência de Sturm.

Teorema 3.1 *Os polinômios obtidos pelo algoritmo de Euclides a partir dos polinômios $f(z)$ e $f'(z)$,*

$$\begin{array}{rcl}
f(z) & = & f'(z)A_0(z) - Q_{n-2}(z) \\
f'(z) & = & Q_{n-2}(z)A_1(z) - Q_{n-3}(z) \\
Q_{n-2}(z) & = & Q_{n-3}(z)A_2(z) - Q_{n-4}(z) \\
\vdots & \vdots & \vdots. \\
Q_{n-r-1}(z) & = & Q_{n-r}(z)A_{r+1}(z) - Q_{n-r+1}(z) \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
Q_2(z) & = & Q_1(z)A_{n-2}(z) - Q_0(z),
\end{array}$$

se, quando $f(z)$ não possui zeros múltiplos, formam uma sequência de Sturm.

Precisamos verificar que a sequência

$$f(z), f'(z), Q_{n-2}(z), \ldots, Q_0(z),$$

gerada pelo algoritmo de Euclides, satisfaz as duas condições citadas na definição de sequência de Sturm.

Observe que, no processo de Euclides, tomamos os restos da divisão com sinal negativo.

Podemos notar também que os graus dos polinômios $Q_{n-r-1}(z)$, $r = 1, 2, \ldots, n-1$, decrescem estritamente. A divisão é repetida até obtermos o resto $Q_0(z)$ de grau zero, isto é, uma constante. Se esta constante é nula, então $Q_1(z)$ é o fator comum entre $f(z)$ e $f'(z)$.

Se esta constante é não nula então $f(z)$ e $f'(z)$ não têm fator comum diferente de constante. Por exemplo, se $f(z)$ não tem zeros múltiplos, então $f(z)$ e $f'(z)$ não têm fator comum diferente de constante e, consequentemente, o algoritmo de Euclides produz a sequência $f(z), f'(z), Q_{n-2}(z), \ldots, Q_0(z)$ com $Q_0(z) = const \neq 0$.

Para demonstrarmos o Teorema 3.1 precisamos do seguinte resultado.

Lema 3.2 *Seja f uma função que tem derivadas contínuas até ordem k em uma vizinhança $\mathcal{U}$ do ponto c. Sejam*

$$f(c) = f'(c) = \ldots = f^{(k-1)}(c) = 0 \qquad e \qquad f^{(k)}(c) \neq 0.$$

Então, para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$\begin{aligned} f(c+\varepsilon)f'(c+\varepsilon) &> 0, \\ f(c-\varepsilon)f'(c-\varepsilon) &< 0. \end{aligned}$$

<u>Demonstração</u>:O lema afirma que para qualquer raiz c da equação $f(t) = 0$, a função f e sua derivada têm sinais opostos antes da raiz e mesmo sinal depois da raiz. A demonstração é baseada na fórmula de Taylor. Para todo h suficientemente pequeno, precisamente tal que $c+h,\ c-h \in \mathcal{U}$, temos

$$f(c+h) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}\,h + \frac{f''(c)}{2!}\,h^2 + \ldots + \frac{f^{(k-1)}(c)}{(k-1)!}\,h^{k-1} + \frac{f^{(k)}(c+\theta h)}{k!}\,h^k,$$

onde θ é algum número do intervalo $(0, 1)$.

Analogamente,

$$f'(c+h) = f'(c) + \frac{f''(c)}{1!}\,h + \ldots + \frac{f^{(k-1)}(c)}{(k-2)!}\,h^{k-2} + \frac{f^{(k)}(c+\theta_1 h)}{(k-1)!}\,h^{k-1},$$

onde $\theta_1 \in (0,1)$. Como $f^{(j)}(c) = 0$ para $j = 0, \ldots, k-1$, então

$$\frac{f(c+h)}{f'(c+h)} = \frac{f^{(k)}(c+\theta h)}{f^{(k)}(c+\theta_1 h)}\,\frac{h}{k}.$$

Mas, $f^{(k)}(t) \neq 0$. De fato desde que $f^{(k)}(t)$ é uma função contínua, existe uma vizinhança $\mathcal{U}_1$ de c tal que $f^{(k)}(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathcal{U}_1$. Além disso, $sign\ f^{(k)}(t) = sign\ f^{(k)}(c)$ para todo $t \in \mathcal{U}_1$. Em particular, para h suficientemente pequeno, temos

$$sign\ f^{(k)}(c+\theta h) = sign\ f^{(k)}(c+\theta_1 h).$$

Consequentemente,

$$sign\ \frac{f(c+h)}{f'(c+h)} = sign\ h.$$

Assim, para $h = \varepsilon$ e $h = -\varepsilon$ obtemos a afirmação do lema. ■

Vamos agora demonstrar o Teorema 3.1.

Demonstração. Seja (a,b) um intervalo dado. Vamos, inicialmente, supor que $f(z)$ não tem raízes múltiplas no intervalo (a,b). Mostremos que $Q_0(z) \neq 0$ em (a,b) se, e somente se, $f(z)$ não tem zeros múltiplos em (a,b). De fato, se $f(z)$ tivesse um zero ξ com multiplicidade p em (a,b), então ξ seria um zero com multiplicidade $(p-1)$ de $f'(z)$ e, consequentemente, $f(z)$ e $f'(z)$ teriam um fator comum, $(x-\xi)^{p-1}$, com $\xi \in (a,b)$. Reciprocamente, se $f(z)$ não tem raízes múltiplas em (a,b), então o fator comum entre $f(z)$ e $f'(z)$ não tem raízes em (a,b), pois $Q_0(z)$ é uma constante não nula.

Seja $f(c) = 0$. Então, pelo Lema 3.2, $f(c-\varepsilon)$ e $f'(c-\varepsilon)$ têm sinais opostos para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Agora, considere $Q_{n-r}(c) = 0$ para algum $r = 2, \ldots, n-1$. Então, $Q_{n-r-1}(c)$ e $Q_{n-r+1}(c)$ são diferentes de zero e, além disso, $Q_{n-r-1}(c)$ e $Q_{n-r+1}(c)$ têm sinais opostos.

Estas afirmações são consequências imediata da relação

$$Q_{n-r-1}(z) = Q_{n-r}(z)A_{r+1}(z) - Q_{n-r+1}(z),$$

pois para $z = c$, como $Q_{n-r}(c) = 0$, segue que $Q_{n-r-1}(c) = -Q_{n-r+1}(c)$.

Se supomos que um destes dois números é zero, então, pela relação de recorrência, gerada pelo algoritmo de Euclides, obtemos

$$Q_{n-r-1}(c) = Q_{n-r+1}(c) = \ldots = Q_{n-2}(c) = f'(c) = f(c) = 0.$$

Assim, c seria raiz múltipla de $f(z)$, o que leva a uma contradição.

O fato de $Q_0(z) \neq 0$ em (a,b) é uma consequência da observação feita de que se $f(z)$ não tem raízes múltiplas em (a,b) e, então, $Q_0(z)$ é uma constante diferente de zero.

Isto mostra que a sequência

$$f(z), f'(z), Q_{n-2}(z), \ldots Q_1(z), Q_0(z),$$

gerada pelo algoritmo de Euclides, é uma sequência de Sturm.

Agora, se $Q_0(z)$ é uma constante nula, isto é, $f(z)$ tem zeros múltiplos no intervalo (a,b), então $Q_m(z)$ é o fator comum não somente de $f(z)$ e $f'(z)$ mas também de toda a sequência $f(z), f'(z), Q_{n-2}(z), \ldots, Q_m(z)$ gerada pelo algoritmo de Euclides. Desta forma, a sequência gerada pelo algoritmo de Euclides não gera uma sequência de Stum. Para resolver este problema basta dividir toda a sequência pelo seu fator comum $Q_m(z)$ e considerar a nova sequência

$$\frac{f(z)}{Q_m(z)}, \frac{f'(z)}{Q_m(z)}, \frac{Q_{n-2}(z)}{Q_m(z)}, \ldots, \frac{Q_{m-1}(z)}{Q_m(z)}, 1,$$

que é uma sequência de Sturm.

Portanto, o algoritmo de Euclides sempre, gera uma sequência de Sturm independentemente do polinômio $f(z)$ possuir ou não raízes múltiplas. ■

A seguir, vamos definir o que é número de mudança forte de sinal de uma sequência, para que, em seguida, possamos demonstrar o Teorema de Sturm que relaciona o número de raízes de um polinômio com o número de mudança forte de sinal na sequência de Sturm.

Definição 3.1 *Por $S^-(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ denotaremos o número das mudanças fortes de sinal na sequência $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Em outras palavras, este é o número de pares da forma $(+,-)$ ou $(-,+)$ na sequência obtida por $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ descartando-se os zeros da sequência e substituindo-se todo número positivo α_i por " $+$ " e todo número negativo por $-$".*

Por exemplo,

$$S^-(-5, 6, 4, 0, -1, 2) = 3.$$

Vamos denotar por $S^-(z)$ o número das mudanças fortes de sinal na sequência de Sturm, isto é,

$$S^-(z) := S^-(f(z), f'(z), Q_{n-2}(z), \ldots, Q_0(z)).$$

Por $S^-(a)$ e $S^-(b)$ vamos entender como sendo, respectivamente, $S^-(a+\epsilon)$ e $S^-(b-\epsilon)$ onde ϵ é tal que nenhum elemento da sequência

$$f(z), f'(z), Q_{n-2}(z), \ldots, Q_0(z)$$

se anula no intervalo $(a, a+\epsilon]$ e $[b-\epsilon, b)$.

Agora, podemos enunciar o Teorema de Sturm.

Teorema 3.3 (Sturm). *Seja $f(z)$ um polinômio algébrico arbitrário de grau n, que não tem raízes múltiplas em (a,b). Então, o número de zeros de $f(z)$ em (a,b) é igual a $S^-(a) - S^-(b)$.*

Demonstração. Vamos acompanhar a variação do número $S^-(z)$ de mudanças fortes de sinal na sequência de Sturm quando z se move de a até b. Desde que todas as funções desta sequência são polinômios algébricos e, portanto, são funções contínuas, então a mudança do número $S^-(z)$ pode ocorrer somente quando z passa por uma raiz de uma das funções $f(z)$, $f'(z)$, $Q_{n-2}(z)$, $\ldots$, $Q_1(z)$. Vamos supor que $c \in (a,b)$ e $Q_n(c) = 0$. Então, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, pelo Lema 3.2, $f(c-\varepsilon)$ e $f'(c-\varepsilon)$ têm sinais opostos, e $f(c+\varepsilon)$ e $f'(c+\varepsilon)$ têm o mesmo sinal. Consequentemente, entre $f(z)$ e $f'(z)$ existe uma mudança de sinal antes de c e esta mudança desaparece depois de c. Em outras palavras, o número $S^-(z)$ diminui de um quando z passa pela raiz de $f(z)$.

Vamos observar o que acontece quando z passa por uma raiz de $Q_{n-r}(z)$ para algum $r = 2, \ldots, n-1$. Seja, então, $Q_{n-r}(c) = 0$. Neste caso, pela Propriedade 1 da sequência de Sturm, $Q_{n-r+1}(c) \neq 0$, $Q_{n-r-1}(c) \neq 0$ e $Q_{n-r+1}(c)Q_{n-r+1}(c) < 0$. Isto significa que $Q_{n-r+1}(c)Q_{n-r+1}(c) < 0$ para todo z em uma vizinhança suficientemente pequena de c e, portanto,

$$S^-(Q_{n-r+1}(z), Q_{n-r}(z), Q_{n-r-1}(z)) = 1$$

para todo z desta vizinhança. Isto mostra que quando z passa por um zero de uma função intermediária da sequência de Sturm o número de mudanças $S^-(z)$ não muda. Assim, mostramos que $S^-(z)$ diminui de um somente quando z passa por um zero de $f(z)$. Consequentemente, o número de mudanças de sinal que se perde quando z percorre o intervalo (a, b) é exatamente igual ao número de raízes de $f(z)$ em (a, b). Suponha que $S^-(a) = m$ e que $f(z)$ possua k zeros no intervalo (a, b). Pelas conclusões anteriores quando z estiver em b a sequência $S^-(z)$ perde k mudanças de sinal, ou seja, $S^-(b) = m-k$. Assim, $S^-(a) - S^-(b) = k$, o que completa a demonstração. ■

Vale observar que a demonstração do Teorema de Sturm foi baseada somente nas duas condições para que uma sequência seja sequência de Sturm. Desta forma, o Teorema de Sturm sempre é válido toda vez que dois polinômios gerarem uma sequência de Sturm. Também é importante notar que para polinômios com raízes múltiplas no intervalo (a, b) uma modificação natural do Teorema de Sturm é válida. De fato, se $f(z)$ tem raízes múltiplas em (a, b), então $f(z)$ e $f'(z)$ tem um fator comum $Q_m(z)$, que não é constante e também é fator comum de $Q_{n-2}(z), \ldots, Q_1(z)$. Como foi visto anteriormente, a sequência

$$\frac{f(z)}{Q_m(z)}, \frac{f'(z)}{Q_m(z)}, \frac{Q_{n-2}(z)}{Q_m(z)}, \ldots, \frac{Q_2(z)}{Q_m(z)}, 1$$

é uma sequência de Sturm.

Assim, pelo Teorema de Sturm,

$$S := S^- \left(\frac{f(a)}{Q_m(a)}, \frac{f'(a)}{Q_m(a)}, \ldots, \frac{Q_2(a)}{Q_m(a)}, 1 \right) - S^- \left(\frac{Q_n(b)}{Q_m(b)}, \frac{Q_{n-1}(b)}{Q_m(b)}, \ldots, \frac{Q_2(b)}{Q_m(b)}, 1 \right)$$

é o número de raízes de $\dfrac{f(z)}{Q_m(z)}$ em (a, b), isto é, o número de raízes de $f(z)$ em (a, b) sem contar suas multiplicidades.

3.2 Relação entre os determinantes das matrizes de Hankel

Nesta seção, primeiramente estabelecemos uma nova relação entre os determinantes das matrizes de Hankel, cujos elementos são exatamente os coeficientes de uma série de potências dada. Como consequência, caracterizamos todos os coeficientes de maior grau dos polinômios gerados pelo algoritmo de Sturm em termos destes determinantes de Hankel.

Para este propósito, vamos definir o que é o determinante de uma matriz de Hankel e fazer algumas observações relacionadas ao algoritmo de Euclides, que serão úteis para demonstrar os novos resultados.

Definição 3.2 (Determinante de Hankel.) *Seja* $F(z) = \frac{s_0}{z} + \frac{s_1}{z^2} + \frac{s_2}{z^3} + \ldots$, *uma série de potências negativas com coeficientes reais. Para inteiros arbitrários* n *e* k *maiores ou iguais que zero, definimos os determinantes* $H_k^{(n)}$ *por*

$$H_k^{(n)} = \begin{vmatrix} s_n & s_{n+1} & \ldots & s_{n+k-1} \\ s_{n+1} & s_{n+2} & \ldots & s_{n+k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n+k-1} & s_{n+k} & \ldots & s_{n+2k-2} \end{vmatrix}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

e $H_0^{(n)} = 1$.

Estes determinantes são chamados de determinantes de Hankel associados com os coeficientes da série de potências $F(z)$.

Seja $\{Q_{n+1-r}\}_{r=1}^{n+1}$ uma sequência de polinômios, onde Q_{n+1-r} é um polinômio de grau exatamente $n+1-r$, e a sequência é obtida a partir do algoritmo de Euclides, isto é,

$$\frac{Q_{n+1-r}(z)}{Q_{n-r}(z)} = \alpha_r z + \beta_r - \frac{Q_{n-1-r}(z)}{Q_{n-r}(z)}, \quad r = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{3.2}$$

com $Q_n(z) = f(z)$, $Q_{n-1}(z) = f'(z)$ e

$$Q_{n+1-r}(z) = \sum_{j=0}^{n+1-r} q_j^{(r)} z^{n+1-r-j}, \quad r = 1, 2, \ldots, n+1. \tag{3.3}$$

Observe que, de (3.2),

$$Q_{n+1-r}(z) + Q_{n-1-r}(z) = (\alpha_r z + \beta_r) Q_{n-r}(z).$$

Logo, em ambos os lados da igualdade acima, temos um polinômio de grau $n+1-r$. Assim, igualando os coeficientes de maior grau de ambos os lados, obtemos $q_0^{(r)} = \alpha_r q_0^{(r+1)}$, ou seja,

$$\alpha_r = q_0^{(r)} / q_0^{(r+1)}, \ r = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.4}$$

Podemos escrever (3.2) da forma

$$\frac{Q_{n+1-r}(z)}{Q_{n-r}(z)} = \alpha_r z + \beta_r - \frac{1}{\frac{Q_{n-r}(z)}{Q_{n-1-r}(z)}} = \alpha_r z + \beta_r - \frac{1}{\alpha_{r+1} z + \beta_{r+1} - \frac{1}{\frac{Q_{n-1-r}(z)}{Q_{n-2-r}(z)} \cdots}}. \tag{3.5}$$

Continuando este processo, obtemos a seguinte expressão para $\dfrac{Q_{n-r}(z)}{Q_{n-r+1}(z)}$ em forma de fração contínua

$$\frac{Q_{n-r}(z)}{Q_{n+1-r}(z)} = \frac{1}{\alpha_r z + \beta_r} \; - \; \frac{1}{\alpha_{r+1} z + \beta_{r+1}} \; - \; \cdots \; - \; \frac{1}{\alpha_n z + \beta_n}\,, \tag{3.6}$$

para $r = 1, 2, \ldots, n$.

Agora, enunciamos o primeiro resultado desta seção, onde relacionamos todos os determinantes de Hankel associados a uma dada série de potências.

Teorema 3.4 *Com r fixo, suponhamos que as séries $F_r(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(r)}/z^{k+1}$ e $F_{r+1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(r+1)}/z^{k+1}$ são tais que*

$$\frac{1}{F_r(z)} = c_{-2}^{(r+1)} z + c_{-1}^{(r+1)} - F_{r+1}(z). \tag{3.7}$$

Se os determinantes de Hankel $H_n^{(r)}$ são definidos por

$$H_0^{(r)} = 1, \quad H_n^{(r)} = \begin{vmatrix} c_0^{(r)} & c_1^{(r)} & \cdots & c_{n-1}^{(r)} \\ c_1^{(r)} & c_2^{(r)} & \cdots & c_n^{(r)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n-1}^{(r)} & c_n^{(r)} & \cdots & c_{2n-2}^{(r)} \end{vmatrix}, \quad n \geq 1, \tag{3.8}$$

então

$$H_j^{(r+1)} = \frac{1}{[H_1^{(r)}]^{2j+1}} H_{j+1}^{(r)}, \quad j = 1, 2, \ldots, n-r+1. \tag{3.9}$$

Demonstração:Multiplicando a igualdade (3.7) por $F_r(z)$ obtemos

$$1 = \left(\frac{c_0^{(r)}}{z} + \frac{c_1^{(r)}}{z^2} + \frac{c_2^{(r)}}{z^3} + \ldots \right) \left(c_{-2}^{(r+1)} z + c_{-1}^{(r+1)} - \frac{c_0^{(r+1)}}{z} - \frac{c_1^{(r+1)}}{z^2} - \ldots \right).$$

Igualando os coeficientes em ambos os lados, de 1, z^{-1} e z^{-2} obtemos o seguinte sistema

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & c_0^{(r)} c_{-2}^{(r+1)} \\ 0 & = & c_1^{(r)} c_{-2}^{(r+1)} + c_0^{(r)} c_{-1}^{(r+1)} \\ 0 & = & c_2^{(r)} c_{-2}^{(r+1)} + c_1^{(r)} c_{-1}^{(r+1)} - c_0^{(r)} c_0^{(r+1)} \end{array}.$$

É fácil ver que, do sistema acima,

$$c_{-2}^{(r+1)} = \frac{1}{H_1^{(r)}}, \quad c_{-1}^{(r+1)} = -\frac{c_1^{(r)}}{[H_1^{(r)}]^2}, \quad c_0^{(r+1)} = \frac{H_2^{(r)}}{[H_1^{(r)}]^3}. \tag{3.10}$$

Como $c_0^{(r+1)} = H_1^{(r+1)}$, comparando a última expressão sobre $c_0^{(r+1)}$ em (3.10), obtemos

$$H_1^{(r+1)} = \frac{H_2^{(r)}}{[H_1^{(r)}]^3}. \tag{3.11}$$

Assim, em (3.7), é importante que $c_0^{(r)} = H_1^{(r)} \neq 0$. Além disso, de (3.11), concluímos que $c_0^{(r+1)} = H_1^{(r+1)} \neq 0$ se $H_2^{(r)} \neq 0$.

Sejam os polinômios

$$B_j^{(r)}(z) = \sum_{l=0}^{j} b_l^{(r,j)} z^{j-l} \quad \text{e} \quad A_j^{(r)}(z) = \sum_{l=0}^{j-1} a_l^{(r,j)} z^{j-1-l},$$

$j = 1, 2, \ldots n - r + 1$, definidos através das fórmulas de recorrência

$$\begin{aligned} A_j^{(r)}(z) &= (\alpha_{r-1+j} z + \beta_{r-1+j}) A_{j-1}^{(r)}(z) - A_{j-2}^{(r)}(z), \\ B_j^{(r)}(z) &= (\alpha_{r-1+j} z + \beta_{r-1+j}) B_{j-1}^{(r)}(z) - B_{j-2}^{(r)}(z), \end{aligned} \quad j = 2, 3, \ldots n - r + 1, \tag{3.12}$$

com

$$A_0^{(r)}(z) = 0, \; A_1^{(r)}(z) = 1, \; B_0^{(r)}(z) = 1 \text{ e } B_1^{(r)}(z) = \alpha_r z + \beta_r.$$

Podemos calcular explicitamente o coeficiente de maior grau, $b_0^{(r,j)}$, visto que, aplicando sucessivamente a relação para os B_j, obtemos a seguinte expressão

$$B_j^{(r)}(z) = (\alpha_{r-1+j} z + \beta_{r-1+j})(\alpha_{r-2+j} z + \beta_{r-2+j}) \ldots (\alpha_{r+1} z + \beta_{r+1})(B_1^{(r)}(z) + B_0^{(r)}(z)) + H(z),$$

onde $H(z)$ é um polinômio de grau menor que j, o que não influencia no coeficiente de maior grau. Logo, da igualdade acima, utilizando o fato que $B_1^{(r)}(z) = \alpha_r z + \beta_r$, obtemos

$$b_0^{(r,j)} = \prod_{l=1}^{j} \alpha_{r-1+l}.$$

Como a relação de recorrência para os $A_j^{(r)}(z)$ é a mesma, podemos encontrar o coeficiente de maior grau dos $A_j^{(r)}(z)$ utilizando o mesmo raciocínio. A única diferença é que $A_1^{(r)}(z) = 1$. Logo,

$$a_0^{(r,j)} = b_0^{(r,j)} / \alpha_r. \tag{3.13}$$

Para a função racional $A_j^{(r)}/B_j^{(r)}$, vale

$$\frac{A_j^{(r)}(z)}{B_j^{(r)}(z)} = \frac{1}{\alpha_r z + \beta_r} - \cdots - \frac{1}{\alpha_{r-1+j} z + \beta_{r-1+j}} \tag{3.14}$$

para $j = 1, 2, \ldots, n-r+1$.

Fazendo $j = n-r+1$ em (3.14) e comparando (3.14) com (3.6), obtemos

$$\frac{A_{n-r+1}^{(r)}(z)}{B_{n-r+1}^{(r)}(z)} = \frac{Q_{n-r}(z)}{Q_{n-r+1}(z)}.$$

Utilizando a igualdade acima e (3.2), concluímos que

$$\frac{B_{j+1}^{(r)}(z)}{A_{j+1}^{(r)}(z)} = \alpha_r z + \beta_r - \frac{A_j^{(r+1)}(z)}{B_j^{(r+1)}(z)}, \quad j = 1, 2, \ldots, n-r. \tag{3.15}$$

Das relações de recorrências (3.12) para $A_j^{(r)}(z)$ e $B_j^{(r)}(z)$, temos a seguinte identidade

$$A_{j+1}^{(r)}(z)B_j^{(r)}(z) - A_j^{(r)}(z)B_{j+1}^{(r)}(z) = 1.$$

A prova desta afirmação segue diretamente por indução sobre j. Utilizando a afirmação acima, temos que

$$\frac{A_{j+1}^{(r)}(z)}{B_{j+1}^{(r)}(z)} - \frac{A_j^{(r)}(z)}{B_j^{(r)}(z)} = \frac{1}{B_{j+1}^{(r)}(z)B_j^{(r)}(z)} = \tilde{\gamma}_j^{(r)} \frac{1}{z^{2j+1}} + O\left((1/z)^{2j+2}\right),$$

para $j = 0, 1, \ldots, n-r$, onde

$$\tilde{\gamma}_0^{(r)} = \frac{1}{b_0^{(r,1)}} \neq 0, \qquad \tilde{\gamma}_j^{(r)} = \frac{1}{b_0^{(r,j)} b_0^{(r,j+1)}} \neq 0, \quad j = 1, \ldots, n-r. \tag{3.16}$$

Portanto, os termos das expansões em série das funções racionais $A_j^{(r)}/B_j^{(r)}$ sucessivamente coincidem com mais e mais termos de uma série de Laurent. Seja esta série $F_r(z)$. Logo,

$$F_r(z) - \frac{A_j^{(r)}(z)}{B_j^{(r)}(z)} = \tilde{\gamma}_j^{(r)} \frac{1}{z^{2j+1}} + O\left((1/z)^{2j+2}\right), \quad j = 1, \ldots, n-r+1, \tag{3.17}$$

onde os valores de $\tilde{\gamma}_j^{(r)}$, para $j = 1, \ldots, n-r$, são como em (3.16) e, por enquanto, o valor de $\tilde{\gamma}_{n-r+1}^{(r)}$ é desconhecido.

Temos, então, de (3.17), que

$$B_j^{(r)}(z)F_r(z) - A_j^{(r)}(z) = \gamma_j^{(r)} \frac{1}{z^{j+1}} + O\left((1/z)^{j+2}\right), \quad j = 1, \ldots, n-r+1, \tag{3.18}$$

onde $\gamma_j^{(r)} = b_0^{(r,j)} \tilde{\gamma}_j^{(r)}$, $j = 1, \ldots, n-r+1$.

Comparando as potências de $z^{j-1}, z^{j-2}, \ldots, z, 1$ em (3.18), obtemos

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & & & c_0^{(r)} b_0^{(r,j)} & = & a_0^{(r,j)} \\ & & & & c_0^{(r)} b_1^{(r,j)} & + & c_1^{(r)} b_0^{(r,j)} & = & a_1^{(r,j)} \\ & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_0^{(r)} b_{j-1}^{(r,j)} & + & \cdots & + & c_{j-2}^{(r)} b_1^{(r,j)} & + & c_{j-1}^{(r)} b_0^{(r,j)} & = & a_{j-1}^{(r,j)} \end{array}. \tag{3.19}$$

Similarmente, igualando os coeficientes de $\frac{1}{z}, \frac{1}{z^2}, \ldots, \frac{1}{z^{j-1}}$ em (3.18), segue que

$$\begin{array}{ccccccccccc} c_0^{(r)} b_j^{(r,j)} & + & c_1^{(r)} b_{j-1}^{(r,j)} & + & \cdots & + & c_{j-1}^{(r)} b_1^{(r,j)} & + & c_j^{(r)} b_0^{(r,j)} & = & 0 \\ c_1^{(r)} b_j^{(r,j)} & + & c_2^{(r)} b_{j-1}^{(r,j)} & + & \cdots & + & c_j^{(r)} b_1^{(r,j)} & + & c_{j+1}^{(r)} b_0^{(r,j)} & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{j-1}^{(r)} b_j^{(r,j)} & + & c_j^{(r)} b_{j-1}^{(r,j)} & + & \cdots & + & c_{2j-2}^{(r)} b_1^{(r,j)} & + & c_{2j-1}^{(r)} b_0^{(r,j)} & = & 0 \\ c_j^{(r)} b_j^{(r,j)} & + & c_{j+1}^{(r)} b_{j-1}^{(r,j)} & + & \cdots & + & c_{2j-1}^{(r)} b_1^{(r,j)} & + & c_{2j}^{(r)} b_0^{(r,j)} & = & \gamma_j^{(r)} \end{array} \tag{3.20}$$

para $j = 1, 2, \ldots, n-r+1$.

Observe que, da primeira equação dos sistemas (3.19) e (3.20) fazendo $j = 1$, obtemos

$$\alpha_r = b_0^{(r,1)} = \frac{1}{H_1^{(r)}} \quad e \quad \beta_r = b_1^{(r,1)} = \frac{-c_1^{(r)}}{(H_1^{(r)})^2}. \tag{3.21}$$

De (3.10) e (3.21), concluímos que

$$c_{-2}^{(r+1)} = \alpha_r \quad \text{e} \quad c_{-1}^{(r+1)} = \beta_r. \tag{3.22}$$

Aplicando a regra de Cramer para $b_0^{(r,j)}$ ao sistema (3.20), obtemos

$$b_0^{(r,j)} H_{j+1}^{(r)} = \gamma_j^{(r)} H_j^{(r)}, \quad j = 1, 2, \ldots, n-r+1. \tag{3.23}$$

Além disso, substituindo a última equação do sistema (3.20) por

$$b_j^{(r,j)} + zb_{j-1}^{(r,j)} + \cdots + z^{j-1}b_1^{(r,j)} + z^j b_0^{(r,j)} = B_j^{(r)}(z)$$

e aplicando a regra de Cramer para $b_0^{(r,j)}$ ao novo sistema linear, obtemos

$$b_0^{(r,j)} \begin{bmatrix} c_0^{(r)} & c_1^{(r)} & \cdots & c_{j-1}^{(r)} & c_j^{(r)} \\ c_1^{(r)} & c_2^{(r)} & \cdots & c_j^{(r)} & c_{j+1}^{(r)} \\ \vdots & & & & \vdots \\ c_{j-1}^{(r)} & c_j^{(r)} & \cdots & c_{2j-2}^{(r)} & c_{2j-1}^{(r)} \\ 1 & z & \cdots & z^{j-1} & z^j \end{bmatrix} = H_j^{(r)} B_j^{(r)}(z).$$

Então, para que $F_r(z)$ seja a série que satisfaz (3.17), devemos ter

$$H_j^{(r)} \neq 0, \text{ para } j = 1, 2, \ldots, n - r + 1.$$

Da expressão (3.13) e da primeira equação do sistema (3.19), segue tambem que

$$\frac{1}{\alpha_r} = \frac{a_0^{(r,j)}}{b_0^{(r,j)}} = \frac{H_1^{(r)}}{H_0^{(r)}} \quad j = 1, 2, \ldots, n - r + 1. \tag{3.24}$$

Utilizando o fato de que $\gamma_j^{(r)} = b_0^{(r,j)} \tilde{\gamma}_j^{(r)}$ e a igualdade (3.23), obtemos

$$\tilde{\gamma}_j^{(r)} = \frac{H_{j+1}^{(r)}}{H_j^{(r)}}, \quad j = 1, 2, \ldots, n - r + 1. \tag{3.25}$$

Multiplicando (3.17) por $\dfrac{B_j^{(r)}(z)}{A_j^{(r)}(z) F_r(z)}$, obtemos

$$\frac{B_j^{(r)}(z)}{A_j^{(r)}(z)} - \frac{1}{F_r(z)} = \frac{B_j^{(r)}(z)}{A_j^{(r)}(z)} \frac{1}{F_r(z)} \left[\tilde{\gamma}_j^{(r)} \frac{1}{z^{2j+1}} + O\left((1/z)^{2j+2} \right) \right], \tag{3.26}$$

$j = 1, \ldots, n - r + 1$. Portanto, supondo $H_1^{(r)} \neq 0$, o produto que está fora dos colchetes do lado direito da última expressão é

$$\frac{B_j^{(r)}(z)}{A_j^{(r)}(z)} \frac{1}{F_r(z)} = \frac{b_0^{(r,j)} z^j + \cdots + b_j^{(r,j)}}{(a_0^{(r,j)} z^{j-1} + \cdots + a_{j-1}^{(r,j)})(\frac{c_0^{(r)}}{z} + \cdots)},$$

isto é,

$$\frac{B_j^{(r)}(z)}{A_j^{(r)}(z)}\frac{1}{F_r(z)} = \frac{b_0^{(r,j)}z^2}{a_0^{(r,j)}c_0^{(r)}} + \cdots = \frac{z^2}{(c_0^{(r)})^2} + \cdots .$$

Da última expressão e de (3.26), obtemos

$$\frac{B_j^{(r)}(z)}{A_j^{(r)}(z)} - \frac{1}{F_r(z)} = \frac{\tilde{\gamma}_j^{(r)}}{(c_0^{(r)})^2}\frac{1}{z^{2j-1}} + O\left((1/z)^{2j}\right).$$

Subtraindo (3.7) de (3.15) e usando a última relação, concluímos que

$$F_{r+1}(z) - \frac{A_{j-1}^{(r+1)}(z)}{B_{j-1}^{(r+1)}(z)} = c_{-2}^{(r)}z + c_{-1}^{(r)} - \alpha_r z - \beta_r + \frac{\tilde{\gamma}_j^{(r)}}{(c_0^{(r)})^2}\frac{1}{z^{2j-1}} + O\left((1/z)^{2j}\right),$$

para $j = 2, \ldots, n-r+1$. Portanto, de (3.22), temos

$$F_{r+1}(z) - \frac{A_j^{(r+1)}(z)}{B_j^{(r+1)}(z)} = \frac{\tilde{\gamma}_{j+1}^{(r)}}{(c_0^{(r)})^2}\frac{1}{z^{2j+1}} + O\left((1/z)^{2j+2}\right), \tag{3.27}$$

para $j = 1, \ldots, n-r$. Como em (3.17), se escrevermos

$$F_{r+1}(z) - \frac{A_j^{(r+1)}(z)}{B_j^{(r+1)}(z)} = \tilde{\gamma}_j^{(r+1)}\frac{1}{z^{2j+1}} + O\left((1/z)^{2j+2}\right), j = 1, \ldots, n-r,$$

onde, de (3.27),

$$\tilde{\gamma}_j^{(r+1)} = \frac{\tilde{\gamma}_{j+1}^{(r)}}{(c_0^{(r)})^2}, \tag{3.28}$$

então segue, das igualdades em (3.24), (3.25) e de (3.28), que

$$\frac{1}{\alpha_{r+1}} = \frac{H_1^{(r+1)}}{H_0^{(r+1)}}, \qquad \frac{H_{j+1}^{(r+1)}}{H_j^{(r+1)}} = \tilde{\gamma}_j^{(r+1)} = \frac{\tilde{\gamma}_{j+1}^{(r)}}{(c_0^{(r)})^2} = \frac{1}{(H_1^{(r)})^2}\frac{H_{j+2}^{(r)}}{H_{j+1}^{(r)}},$$

para $j = 1, \ldots, n-r$. Isto implica em

$$H_{j+1}^{(r+1)} = \frac{H_j^{(r+1)}}{(H_1^{(r)})^2}\frac{H_{j+2}^{(r)}}{H_{j+1}^{(r)}} \quad j = 1, \ldots, n-r.$$

Se aplicarmos sucessivamente a relação acima para $H_j^{(r+1)}$, vamos obter

$$\begin{aligned}
H_{j+1}^{(r+1)} &= \frac{H_j^{(r+1)}}{(H_1^{(r)})^2}\frac{H_{j+2}^{(r)}}{H_{j+1}^{(r)}} \\
H_j^{(r+1)} &= \frac{H_{j-1}^{(r+1)}}{(H_1^{(r)})^2}\frac{H_{j+1}^{(r)}}{H_j^{(r)}} \\
H_{j-1}^{(r+1)} &= \frac{H_{j-2}^{(r+1)}}{(H_1^{(r)})^2}\frac{H_j^{(r)}}{H_{j-1}^{(r)}} \quad . \\
\vdots \quad & \vdots \qquad \vdots \\
H_2^{(r+1)} &= \frac{H_1^{(r+1)}}{(H_1^{(r)})^2}\frac{H_3^{(r)}}{H_2^{(r)}}
\end{aligned}$$

Observe que, na multiplicação de todos os termos, $H_{j+1}^{(r)}$, que aparece no denominador da primeira igualdade acima, se cancela com $H_{j+1}^{(r)}$, que aparece no numerador da segunda igualdade. Da mesma forma o termo $H_j^{(r)}$, que aparece no denominador da segunda igualdade, se cancela com o termo $H_j^{(r)}$ no numerador da terceira igualdade. Estes termos seguem cancelando-se até a última igualdade ficando apenas os termos $(H_1^{(r)})^2$ no denominador e o termo $H_{j+2}^{(r)}$. Como aplicamos j vezes este processo, concluímos que

$$H_{j+1}^{(r+1)} = \frac{H_1^{(r+1)}}{(H_1^{(r)})^{2j}}\frac{H_{j+2}^{(r)}}{H_2^{(r)}} \quad j = 1, \ldots, n-r.$$

Finalmente, como, por (3.11), temos que $H_1^{(r+1)} = \dfrac{H_2^{(r)}}{[H_1^{(r)}]^3}$, segue, da igualdade acima, que

$$H_{j+1}^{(r+1)} = \frac{H_{j+2}^{(r)}}{[H_1^{(r)}]^{2j+3}}, \quad j = 1, \ldots, n-r.$$

Portanto,

$$H_j^{(r+1)} = \frac{1}{[H_1^{(r)}]^{2j+1}} H_{j+1}^{(r)}, \quad j = 1, 2, \ldots, n-r+1.$$

Observe que, se $H_j^{(r)} \neq 0$, para $j = 1, 2, \ldots, n-r+1$ então $H_j^{(r+1)} \neq 0$, para $j = 1, 2, \ldots, n-r$.

Concluindo, se $F_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)}/z_{k+1}$ é uma série tal que $H_j^{(1)} \neq 0$, para $j = 1, 2, \ldots, n$, então, para $r = 1, 2, \ldots, n$, temos

$$H_j^{(r)} \neq 0, \quad \text{para} \quad j = 1, 2, \ldots, n-r+1.$$

Observe, também, que, se $H_m^{(1)} = 0$, então $H_{m-r+1}^{(r)} = 0$ para $r = 1, 2, \ldots, m$.

Como consequência direta do Teorema 3.4 podemos enunciar o seguinte lema.

Lema 3.5 *A relação*

$$H_1^{(r)} = H_{p+1}^{(r-p)}[H_p^{(r-p)}]^{-3}[H_{p-1}^{(r-p)}]^4[H_{p-2}^{(r-p)}]^{-4}[H_{p-3}^{(r-p)}]^4 \ldots [H_2^{(r-p)}]^{4(-1)^{p-1}}[H_1^{(r-p)}]^{4(-1)^p} \quad (3.29)$$

é válida para todo $r, p \in \mathbb{N}$ com $r > p$, onde p é o número de passos ao aplicar sucessivamente a relação

$$H_j^{(r+1)} = \frac{H_{j+1}^{(r)}}{[H_1^{(r)}]^{2j+1}}. \quad (3.30)$$

Demonstração: Seja $j = 1$ fixo e vamos aplicar a fórmula (3.30) p vezes. A demonstração será feita por indução sobre p. Para $p = 1$, (3.29) segue diretamente da relação (3.30) fazendo $j = 1$. Suponha que (3.29) seja válida para p, mostremos que é válida para $p + 1$.

Aplicando a relação (3.30) para cada termo de (3.29), obtemos

$$\begin{aligned} H_1^{(r)} \quad = \quad & \frac{H_{p+2}^{(r-p-1)}}{[H_1^{(r-p-1)}]^{2p+3}} \left[\frac{H_{p+1}^{(r-p-1)}}{[H_1^{(r-p-1)}]^{2p+1}}\right]^{-3} \left[\frac{H_{p}^{(r-p-1)}}{[H_1^{(r-p-1)}]^{2p-1}}\right]^{4} \left[\frac{H_{p-1}^{(r-p-1)}}{[H_1^{(r-p-1)}]^{2p-3}}\right]^{-4} \ldots \\ & \left[\frac{H_{3}^{(r-p-1)}}{[H_1^{(r-p-1)}]^{5}}\right]^{4(-1)^{p-1}} \left[\frac{H_{2}^{(r-p-1)}}{[H_1^{(r-p-1)}]^{3}}\right]^{4(-1)^{p}}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

ou seja,

$$H_1^{(r)} = H_{p+2}^{(r-p-1)}[H_{p+1}^{(r-p-1)}]^{-3}[H_p^{(r-p-1)}]^4[H_{p-1}^{(r-p-1)}]^{-4} \ldots [H_2^{(r-p-1)}]^{4(-1)^p}[H_1^{(r-p-1)}]^m. \quad (3.32)$$

Observe que

$$m = 4\{-(2p-1)+(2p-3)-(2p-5)+(2p-7)+\ldots+5(-1)^p+3(-1)^{p+1}\}+3(2p+1)-(2p+3),$$

ou seja,

$$m = 4\{-(2p-1) + (2p-3) - (2p-5) + (2p-7) + \ldots + 5(-1)^p + 3(-1)^{p+1} + p\}.$$

Colocando $(-1)^{p+1}$ em evidência, temos que

$$m = 4(-1)^{p+1}\{3 - 5 + 7 - 9 + \ldots + (-1)^p(2p-1) + (-1)^{p+1}p\}.$$

Para completar a demonstração basta mostrar que $\{3-5+7-9+\ldots+(-1)^p(2p-1)+(-1)^{p+1}p\}=1$. Observe que

$$3-5+7-\ldots+(-1)^p(2p-1)+(-1)^{p+1}p = \underbrace{(3+7+11+\ldots)}_{S} - \underbrace{(5+9+13+\ldots)}_{\widetilde{S}} + (-1)^{p+1}p.$$

Assim, temos a diferença de duas progressões aritméticas de razão 4.

Observe que se p é ímpar, então S e $\widetilde{S}$ têm o mesmo número n de termos e, além disso, $p = 2n+1$. Assim,

$$S\_\widetilde{S} + (-1)^{p+1}p = [(1+2n)n] - [(3+2n)n] + (-1)^{p+1}p = -2n + p.$$

Como $p = 2n+1$, segue que

$$\{3-5+7-9+\ldots+(-1)^p(2p-1)+(-1)^{p+1}p\} = 1.$$

Se p é par, então $\widetilde{S}$ tem um termo a menos que S. Além disso, $p = 2n$ e, assim,

$$S - \widetilde{S} + (-1)^{p+1}p = [(1+2n)n] - [(2n+1)(n-1)] + (-1)^{p+1}p = 2n+1-p.$$

Como $p = 2n$, segue que

$$\{3-5+7-9+\ldots+(-1)^p(2p-1)+(-1)^{p+1}p\} = 1.$$

$\blacksquare$

Aplicando o Lema 3.5, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 3.1 *A relação*

$$H_1^{(r)} = H_r^{(1)}[H_{r-1}^{(1)}]^{-3}[H_{r-2}^{(1)}]^4[H_{r-3}^{(1)}]^{-4}[H_{r-4}^{(1)}]^4\ldots[H_2^{(1)}]^{4(-1)^{r-2}}[H_1^{(1)}]^{4(-1)^{r-1}} \tag{3.33}$$

é válida para todo $r \in \mathbb{N}$.

A demonstração segue diretamente de (3.29) fazendo $p = r-1$. $\blacksquare$

O seguinte teorema fornece uma forma de calcular todos os coeficientes de maior grau dos polinômios gerados pelo algoritmo de Sturm em termos dos determinantes das matrizes de Hankel.

Teorema 3.6 *Seja* $\{Q_{n+1-r}\}_{r=1}^{n+1}$*, uma sequência de polinômios obtidos a partir do algoritmo de Sturm, com* $Q_n(z) = f(z)$*,* $Q_{n-1}(z) = f'(z)$ *e* $f(z)$ *é um polinômio sem zeros múltiplos. Em outras palavras,*

$$\frac{Q_{n+1-r}(z)}{Q_{n-r}(z)} = \alpha_r z + \beta_r - \frac{Q_{n-1-r}(z)}{Q_{n-r}(z)}, \quad r = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{3.34}$$

Se,

$$Q_{n+1-r}(z) = \sum_{j=0}^{n+1-r} q_j^{(r)} z^{n+1-r-j}, \quad r = 1, 2, \ldots n+1,$$

então, para $r = 1, 2, \ldots, n+1$*,*

$$q_0^{(r)} = H_{r-1}^{(1)}[H_{r-2}^{(1)}]^{-2}[H_{r-3}^{(1)}]^{2}[H_{r-4}^{(1)}]^{-2}[H_{r-5}^{(1)}]^{2}\ldots[H_2^{(1)}]^{2(-1)^{r-1}}[H_1^{(1)}]^{2(-1)^{r}}. \tag{3.35}$$

<u>Demonstração</u>: A prova será feita por indução sobre r. Para $r = 3$, temos, de (3.4),

$$q_0^{(3)} = \frac{q_0^{(1)}}{\alpha_1\alpha_2} = \frac{1}{\alpha_1\alpha_2}.$$

Utilizando as relações (3.24) e (3.30), segue que

$$q_0^{(3)} = H_1^{(1)}H_1^{(2)} = H_1^{(1)}\frac{H_2^{(1)}}{[H_1^{(1)}]^3} = [H_1^{(1)}]^{-2}H_2^{(1)}.$$

Suponha que (3.35) seja válido para r. Mostremos que é verdadeiro para $r+1$. Segue, de (3.4) e (3.21), que

$$q_0^{(r+1)} = H_1^{(r)}q_0^{(r)}.$$

Utilizando a hipótese de indução para $q_0^{(r)}$, temos

$$q_0^{(r+1)} = H_1^{(r)}\{H_{r-1}^{(1)}[H_{r-2}^{(1)}]^{-2}[H_{r-3}^{(1)}]^{2}\ldots[H_1^{(1)}]^{2(-1)^{r}}\}.$$

Aplicando o Corolário 3.1 para $H_1^{(r)}$, segue que

$$q_0^{(r+1)} = H_r^{(1)}[H_{r-1}^{(1)}]^{-2}[H_{r-2}^{(1)}]^{2}[H_{r-3}^{(1)}]^{-2}\ldots[H_1^{(1)}]^{2(-1)^{r+1}}.$$

■

Na próxima seção vamos obter uma relação entre os determinantes das matrizes de Hankel e os determinantes das matrizes de Hurwitz, com o propósito de dar uma nova versão do Teorema 3.6.

3.3 Relação entre os determinantes das matrizes de Hankel e de Hurwitz

Iniciamos esta seção com a definição de matrizes de Hurwitz relacionadas aos polinômios $f(z)$ e $g(z)$.

Definição 3.3 *Considere os polinômios com coeficientes reais*

$$\begin{array}{rl} f(z) = & a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 \quad (a_n = 1), \\ g(z) = & b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \ldots + b_1 z + b_0 \end{array}.$$

A Matriz

$$H_{2n-1}(g,f) = \begin{pmatrix} b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \ldots & b_0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & b_n & b_{n-1} & \ldots & b_1 & b_0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & b_n & \ldots & b_2 & b_1 & b_0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_n & \ldots & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}$$

é chamada matriz de Hurwitz de f e g de ordem $2n-1$.

Vamos denotar por

$$H_{2r-1}(g,f) \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 2r-2 & 2r-1 \\ 1 & \ldots & 2r-2 & 2r-1+l \end{pmatrix}$$

a matriz de ordem $2r-1$ formada pelas primeiras $2r-1$ linhas e pelas primeiras $2r-2$ colunas mais a coluna de índice $2r-1+l$ de $H_{2n-1}(g,f)$. Desta forma, definimos

$$\nabla_{2r-1}^{(l)} = \nabla_{2r-1}^{(l)} \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 2r-2 & 2r-1 \\ 1 & \ldots & 2r-2 & 2r-1+l \end{pmatrix}$$

como sendo

$$det \left(H_{2r-1}(g,f) \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 2r-2 & 2r-1 \\ 1 & \ldots & 2r-2 & 2r-1+l \end{pmatrix} \right) \tag{3.36}$$

e por ∇_{2r-1} o determinante $\nabla_{2r-1}^{(0)}$, que é exatamente o determinante do menor principal de ordem $2r-1$ da matriz $H_{2n-1}(g,f)$.

A seguir forneceremos uma relação entre os determinantes de Hurwitz e os determinantes de Hankel. Tal relação se encontra no livro de Gantmacher [6].

Teorema 3.7 *Sejam*

$$f(z) = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j} z^{n-j}, \quad a_n = 1$$

e

$$g(z) = \sum_{j=0}^{n} b_{n-j} z^{n-j}.$$

Considere

$$F(z) = \frac{g(z)}{f(z)} = s_{-1} + \frac{s_0}{z} + \frac{s_1}{z^2} + \cdots . \tag{3.37}$$

Então, temos que

$$\nabla_{2p} = H_p^{(0)} \quad (p = 1, 2, \ldots), \tag{3.38}$$

onde ∇_{2p} é o determinante do menor principal de ordem $2p$ da matriz de Hurwitz $H_{2n-1}(g, f)$ e $H_p^{(0)}$ é o determinante de Hankel associado a $F(z)$ definido em 3.2.

<u>Demonstração</u>:Se multiplicarmos ambos os lados da igualdade (3.37) por $f(z)$, temos que

$$g(z) = f(z)(s_{-1} + \frac{s_0}{z} + \frac{s_1}{z^2} + \ldots).$$

Igualando os coeficientes das potências de z, obtemos

$$\begin{aligned} a_n s_{-1} &= b_n \\ a_n s_0 + a_{n-1} s_{-1} &= b_{n-1} \\ &\ldots \\ a_n s_{n-1} + a_{n-1} s_{n-2} + \ldots + a_0 s_{-1} &= b_0 \\ a_n s_t + a_{n-1} s_{t-1} + \ldots + a_0 s_{t-n} = 0 \ \ &(t = n, n+1, \ldots). \end{aligned} \tag{3.39}$$

Usando o sistema acima, obtemos uma expressão para os seguintes determinantes de Hurwitz de ordem $2p$

$$\widetilde{\nabla}_{2p} = T_p . A_p, \tag{3.40}$$

onde

$$\widetilde{\nabla}_{2p} = det \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_{2p-1} \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_{2p-1} \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_{2p-2} \\ 0 & b_n & b_{n-1} & \dots & b_{2p-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$$T_p = det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ s_{-1} & s_0 & s_1 & \dots & s_{2p-2} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_{-1} & s_0 & \dots & s_{2p-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

e

$$A_p = det \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_{2p-1} \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_{2p-2} \\ 0 & 0 & a_0 & \dots & a_{2p-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

Observe que $\widetilde{\nabla}_{2p}$ é o determinante do menor principal de ordem $2p$ da matriz de Hurwitz trocando suas linhas, ou seja, $\widetilde{\nabla}_{2p} = det(H_{2p}(f,g))$.

A relação (3.40) é válida, pois, do sistema (3.39), temos

$$H_{2p}(f,g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ s_{-1} & s_0 & s_1 & \dots & s_{2p-2} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_{-1} & s_0 & \dots & s_{2p-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_{2p-1} \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_{2p-2} \\ 0 & 0 & a_n & \dots & a_{2p-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

Agora, como a matriz do determinante A_p é triangular superior, temos que $A_p = (a_n)^{2p}$.

Para calcular T_p vamos transpor todas as linhas que contém os vetores unitários $e_i = (0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ para cima. Como a matriz é de ordem $2p$, temos então que transpor $p-1$ linhas. Sabendo que, ao trocar duas linhas consecutivas de um determinante, tal determinante fica multiplicado por (-1), temos então que ao transpor todas as linhas e_i para cima o determinante T_p fica multiplicado por $(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}$, pois temos que fazer $1+2+\ldots+p-1$ trocas de linhas consecutivas. Logo,

$$T_p = (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_{-1} & s_0 & s_1 & \ldots & s_{p-1} & s_p & \ldots & s_{2p-2} \\ 0 & s_{-1} & s_0 & \ldots & s_{p-2} & s_{p-1} & \ldots & s_{2p-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & s_{-1} & s_0 & \ldots & s_{p-1} \end{pmatrix}.$$

Calculando T_p por blocos, temos que

$$T_p = (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} det \begin{pmatrix} s_{p-1} & s_p & \ldots & s_{2p-2} \\ s_{p-2} & s_{p-1} & \ldots & s_{2p-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_0 & s_1 & \ldots & s_{p-1} \end{pmatrix},$$

pois um dos blocos é exatamente a matriz identidade. Transpondo todas as linhas do determinante acima para transformar T_p no determinante da matriz de Hankel precisamos novamente multiplicar T_p por $(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}$. Desta forma, obtemos que

$$T_p = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{p-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_p \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{p-1} & s_p & \ldots & s_{2p-2} \end{vmatrix} = H_p^{(0)}.$$

Logo,

$$T_p.A_p = (a_n)^{2p} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{p-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{p-1} & s_p & \dots & s_{2p-2} \end{vmatrix}.$$

Assim, da igualdade (3.40), segue que

$$\widetilde{\nabla}_{2p} = (a_n)^{2p} H_p^{(0)} = H_p^{(0)} \quad (p = 1, 2, \dots), \tag{3.41}$$

pois $a_n = 1$.

Como nosso objetivo é considerar sequências de Sturm geradas a partir do polinômio $f(z)$ e de sua derivada $f'(z)$, vamos considerar, primeiramente, $g(z)$ um polinômio de grau $n-1$. Como $g(z)$ tem grau $n-1$, isto implica que $b_n = 0$ e, portanto, ao substituir $a_n = 1$ e $b_n = 0$ nas entradas da primeira coluna de $\widetilde{\nabla}_{2p}$, concluímos que

$$\widetilde{\nabla}_{2p} = \nabla_{2p-1}.$$

Segue, de (3.41), que

$$\nabla_{2p-1} = H_p^{(0)} \quad (p = 1, 2, \dots). \tag{3.42}$$

Substituindo (3.42) em (3.35), obtemos diretamente uma nova versão do Teorema 3.6 que é a seguinte.

Teorema 3.8 *Seja $\{Q_{n+1-r}\}_{r=1}^{n+1}$, com $Q_n = f$ e $Q_{n-1} = f'$ uma sequência de polinômios obtidos a partir do algoritmo de Sturm, onde Q_{n+1-r} são polinômios de grau exatamente $n+1-r$, com f não tendo zeros múltiplos. Isto é,*

$$\frac{Q_{n+1-r}(z)}{Q_{n-r}(z)} = \alpha_r z + \beta_r - \frac{Q_{n-1-r}(z)}{Q_{n-r}(z)}, \quad r = 1, 2, \dots, n-1. \tag{3.43}$$

Se denotarmos

$$Q_{n+1-r}(z) = \sum_{j=0}^{n+1-r} q_j^{(r)} z^{n+1-r-j}, \quad r = 1, 2, \dots n+1,$$

então

$$q_0^{(r)} = [\nabla_{2r-5}]^{-2} [\nabla_{2r-7}]^{2} [\nabla_{2r-9}]^{-2} [\nabla_{2r-11}]^{2} \dots [\nabla_3]^{2(-1)^{r-1}} [\nabla_1]^{2(-1)^r} \nabla_{2r-3} \tag{3.44}$$

para $r = 2, 3, \dots, n+1$.

Na próxima seção daremos uma versão mais geral do Teorema 3.8, fornecendo não somente os coeficientes do termo de maior grau dos polinômios do algoritmo de Sturm, mas, também, todos os outros coeficientes.

3.4 Polinômios de Sturm e Determinantes de Hurwitz.

Utilizando o algoritmo de Sturm, iniciamos esta seção com o seguinte lema.

Lema 3.9 *Aplicando o algoritmo de Sturm para $f(z)$ e $f'(z)$ obtemos que os restos $Q_{n-r}(z), \quad r = 2, 3, \ldots n$, são dados por*

$$Q_{n-r}(z) = M_r(z)f(z) + N_r(z)f'(z), \tag{3.45}$$

onde M_r é um polinômio de grau $r-2$ e N_r um polinômio de grau $r-1$.

Observação: Apesar de, pela afirmação deste lema, o polinômio do lado direito ser aparentemente de grau $n+r-2$, seu verdadeiro grau é $n-r$. Isto é devido ao fato de os coeficientes das potências de z^j, $j = n-r+1, \ldots, n+r-2$, se anularem.

Demonstração: A prova será feita por indução sobre r. Para $r = 2$ observe que, ao aplicar o algoritmo de Sturm para os polinômios f e f', temos que $f(z) = \left(\frac{z}{n} + \frac{q_1^{(1)}}{n^2}\right) f'(z) - Q_{n-2}(z)$. Isto é,

$$Q_{n-2}(z) = -f(z) + \left(\frac{z}{n} + \frac{q_1^{(1)}}{n^2}\right) f'(z),$$

onde $M_2 = -1$ e $N_2 = \left(\frac{z}{n} + \frac{q_1^{(1)}}{n^2}\right)$ são polinômios de graus respectivamente $r-2$ e $r-1$. Suponha válido para r e mostremos que é verdade para $r+1$.

Aplicando o algoritmo de Sturm para os polinômios $Q_{n-r-1}(z)$ e $Q_{n-r}(z)$, obtemos

$$Q_{n-r-1}(z) = l_r(z)Q_{n-r}(z) - Q_{n-r+1}(z),$$

onde $l_r(z)$ é um polinômio de grau 1. Utilizando, na igualdade acima, a hipótese de indução para $Q_{n-r}(z)$ e $Q_{n-r+1}(z)$, temos

$$Q_{n-r-1}(z) = l_r(z)(M_r(z)f(z) + N_r(z)f'(z)) - (M_{r-1}(z)f(z) + N_{n-1}(z)f'(z)),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} Q_{n-r-1}(z) &= (l_r(z)M_r(z) - M_{r-1})f(z) + (l_r(z)N_r(z) - N_{r-1}(z))f'(z) \\ &= M_{r+1}(z)f(z) + N_{r+1}(z)f'(z), \end{aligned}$$

onde $M_{r+1}(z) = l_r(z)M_r(z) - M_{r-1}(z)$ e

$$N_{r+1}(z) = l_r(z)N_r(z) - N_{r-1}(z).$$

Como $l_r(z)$ é de grau 1, segue que $M_{r+1}(z)$ e $N_{r+1}(z)$ são de graus, respectivamente, $r-1$ e r, o que demonstra nosso Lema. ■

Utilizando o Lema 3.9 é possível demonstrar o seguinte teorema que é uma generalização do Teorema 3.8.

Teorema 3.10 *Seja $\{Q_{n+1-r}\}_{r=1}^{n+1}$, com $Q_n(z) = f(z)$ e $Q_{n-1}(z) = f'(z)$, uma sequência de polinômios obtidos a partir do algoritmo de Sturm, onde Q_{n+1-r} é um polinômio mônico de grau exatamente $n+1-r$, com f não tendo zeros múltiplos. Isto é,*

$$\frac{Q_{n+1-r}(z)}{Q_{n-r}(z)} = \alpha_r z + \beta_r - \frac{Q_{n-1-r}(z)}{Q_{n-r}(z)}, \quad r = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{3.46}$$

Se denotarmos

$$Q_{n-r}(z) = \sum_{j=0}^{n-r} q_j^{(r+1)} z^{n-r-j}, \quad r = 1, 2, \ldots n,$$

então

$$q_j^{(r+1)} = [\nabla_{2r-3}]^{-2}[\nabla_{2r-5}]^2[\nabla_{2r-7}]^{-2}[\nabla_{2r-9}]^2 \ldots [\nabla_3]^{2(-1)^r}[\nabla_1]^{2(-1)^{r+1}}\nabla_{2r-1}^{(j)} \tag{3.47}$$

para $r = 1, 2, \ldots, n$ e $j = 0, 1, \ldots, n-r$.

Demonstração: Sejam

$$M_r(z) = c_{r-2}z^{r-2} + c_{r-3}z^{r-3} + \ldots + c_1 z + c_0$$

e

$$N_r(z) = d_{r-1}z^{r-1} + d_{r-2}z^{r-2} + \ldots + d_1 z + d_0.$$

Da igualdade (3.45), observe que seu lado esquerdo é um polinômio de grau $n-r$ e o lado direito é um polinômio de grau $n+r-2$. Então, igualando a zero os $2r-2$ maiores coeficientes de $M_r(z)f(z)+N_r(z)f'(z)$ e também igualando o coeficiente do termo de maior grau de $Q_{n-r}(z)$, que já conhecemos pelo Teorema 3.8, com o coeficiente de grau $n-r$ do polinômio $M_r(z)f(z)+N_r(z)f'(z)$, obtemos o seguinte sistema de $2r-1$ equações:

$$\begin{array}{lcl}
nd_{r-1}+c_{r-2} & = & 0\\
(n-1)q_1^{(1)}d_{r-1}+q_1^{(1)}c_{r-2}+nd_{r-2}+c_{r-3} & = & 0\\
(n-2)q_2^{(1)}d_{r-1}+q_2^{(1)}c_{r-2}+(n-1)q_1^{(1)}d_{r-2}+q_1^{(1)}c_{r-3}+nd_{r-3}+c_{r-4} & = & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots\\
(n-2r+2)q_{2r-2}^{(1)}d_{r-1}+q_{2r-2}^{(1)}c_{r-2}+\dots & = & q_0^{(r+1)}
\end{array}$$

onde a matriz de ordem $2r-1$ do sistema acima é

$$\begin{pmatrix}
n & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0\\
(n-1)q_1^{(1)} & q_1^{(1)} & n & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\
(n-2)q_2^{(1)} & q_2^{(1)} & (n-1)q_1^{(1)} & q_1^{(1)} & n & 1 & 0 & \dots & 0\\
(n-3)q_3^{(1)} & q_3^{(1)} & (n-2)q_2^{(1)} & q_2^{(1)} & (n-1)q_1^{(1)} & n & 1 & 0 & \dots\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots\\
(n-2r+2)q_{2r-2}^{(1)} & q_{2r-2}^{(1)} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & n
\end{pmatrix}.$$

Observe que esta matriz é exatamente a transposta da sub-matriz de Hurwitz $H(f';f)$ de ordem $2r-1$.

Resolvendo este sistema pelo método de Cramer, obtemos

$$\beta_{r-j}=\frac{q_0^{(r+1)}}{\nabla_{2r-1}}\Delta_{2j-1},$$

onde Δ_{2j-1} é o determinante da matriz do sistema excluindo-se a última linha e a coluna de índice $2j-1$. Pelo Teorema 3.8, sabemos o valor de $q_0^{(r+1)}$. Logo,

$$\beta_{r-j}=\frac{\Delta_{2j-1}}{\nabla_{2r-1}}\nabla_{2r-1}\Gamma_{r+1}=\Delta_{2j-1}\Gamma_{r+1},\quad j=1,2,\dots r,$$

onde

$$\Gamma_{r+1}=[\nabla_{2r-3}]^{-2}[\nabla_{2r-5}]^{2}[\nabla_{2r-7}]^{-2}[\nabla_{2r-9}]^{2}\dots[\nabla_3]^{2(-1)^r}[\nabla_1]^{2(-1)^{r+1}},\quad r=2,3,\dots n-1.$$

Da mesma forma, temos

$$\alpha_{r-j}=\frac{\Delta_{2j-2}}{\nabla_{2r-1}}\nabla_{2r-1}\Gamma_{r+1}=\Delta_{2j-2}\Gamma_{r+1},\quad j=2,3,\dots r.$$

Desde que a matriz do sistema coincide com a sub-matriz transposta de Hurwitz $H(f';f)$ de ordem $2r-1$, então Δ_m é de fato o determinante da matriz $H_{2r-1}(f';f)$ excluindo-se sua última coluna e a linha de índice m. Em outras palavras, temos que

$$\beta_{r-j} = \Gamma_{r+1} \begin{vmatrix} & 0 \\ & \vdots \\ & 0 \\ H_{2r-1}\begin{pmatrix} 1 & \dots & 2r-1 \\ 1 & \dots & 2r-2 \end{pmatrix} & 1 \\ & 0 \\ & \vdots \\ & 0 \end{vmatrix}, \tag{3.48}$$

onde o elemento 1 aparece na linha de número $2j-1$ e, similarmente,

$$\alpha_{r-j} = -\Gamma_{r+1} \begin{vmatrix} & 0 \\ & \vdots \\ & 0 \\ H_{2r-1}\begin{pmatrix} 1 & \dots & 2r-1 \\ 1 & \dots & 2r-2 \end{pmatrix} & 1 \\ & 0 \\ & \vdots \\ & 0 \end{vmatrix}, \tag{3.49}$$

onde o elemento 1 aparece na linha de número $2j-2$.

Levando em consideração a forma explícita de $N_r(z)$ e $M_r(z)$, observe que, de (3.48) e (3.49), temos

$$N_r = \Gamma_{r+1} \begin{vmatrix} & z^{r-1} \\ & 0 \\ & z^{r-2} \\ H_{2r-1}\begin{pmatrix} 1 & \dots & 2r-1 \\ 1 & \dots & 2r-2 \end{pmatrix} & 0 \\ & \vdots \\ & x \\ & 0 \\ & 1 \end{vmatrix}. \tag{3.50}$$

e

$$M_r = -\Gamma_{r+1} \begin{vmatrix} & 0 \\ & z^{r-2} \\ & 0 \\ H_{2r-1}\begin{pmatrix} 1 & \dots & 2r-1 \\ 1 & \dots & 2r-2 \end{pmatrix} & z^{r-3} \\ & 0 \\ & \vdots \\ & 1 \\ & 0 \end{vmatrix}. \tag{3.51}$$

De fato, se desenvolvermos os determinantes acima pela sua última coluna, obtemos exatamente M_r e N_r.

Observe que as potências de z na última coluna do determinante (3.50) aparecem nas posições ímpares e as potências de z em (3.51) estão nas posições pares. Finalmente, como $Q_{n-r}(z) = M_r(z)f(z) + N_r(z)f'(z)$, multiplicando (3.50) por $f'(z)$ e (3.51) por $f(z)$, obtemos

$$Q_{n-r}(z) = \Gamma_{r+1} \left| \begin{array}{cc} & z^{r-1}f'(z) \\ & z^{r-2}f(z) \\ & z^{r-2}f'(z) \\ H_{2r-1}\begin{pmatrix} 1 & \dots & 2r-1 \\ 1 & \dots & 2r-2 \end{pmatrix} & \vdots \\ & zf'(z) \\ & f(z) \\ & f'(z) \end{array} \right| . \tag{3.52}$$

Seja D_j o determinante da matriz relacionada com (3.52) exluindo-se a última coluna e a j-ésima linha. Então, ao desenvolvermos o determinante acima pela sua última coluna, temos

$$\begin{aligned} \frac{Q_{n-r}(z)}{\Gamma_{r+1}} &= f'(z)\textstyle\sum_{i=1}^{r} z^{r-i}D_{2i-1} - f(z)\sum_{i=2}^{r} z^{r-i}D_{2i-2} \\ &= (b_1z^{n-1} + b_2z^{n-2} + \dots b_{n-1})(z^{r-1}D_1 + z^{r-2}D_3 + \dots + z^{r-i}D_{2i-1} + \dots + D_{2r-1}) \\ &- (a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_n)(z^{r-2}D_2 + z^{r-3}D_4 + \dots + z^{r-i}D_{2i-2} + \dots + D_{2r-2}). \end{aligned} \tag{3.53}$$

Como o lado direito da expressão acima é um polinômio, observe que os coeficientes de z^j são exatamente $b_kD_{2i-1} - a_kD_{2i-2}$ quando

$$n-k+r-i = j \ \text{ com } \ 1 \leq k \leq n-1 \ \text{ e } \ 1 \leq i \leq r.$$

Logo, segue da observação acima e de (3.53), que

$$\frac{Q_{n-r}(z)}{\Gamma_{r+1}} = \sum_{j=0}^{n-r}\left(\sum_{i=1}^{r} b_{n+r-j-i}D_{2i-1} - \sum_{i=2}^{r} a_{n+r-j-i}D_{2i-2}\right)z^j \tag{3.54}$$

Os coeficientes do polinômio (3.54) são determinantes da forma

$$\left| \begin{array}{cc} & b_{n+r-j-1} \\ & a_{n+r-j-2} \\ & b_{n+r-j-2} \\ H_{2r-1}\begin{pmatrix} 1 & \dots & 2r-1 \\ 1 & \dots & 2r-2 \end{pmatrix} & \vdots \\ & b_{n-j+1} \\ & a_{n-j} \\ & b_{n-j} \end{array} \right|, \tag{3.55}$$

onde se $m > n$ então $a_m = b_m = 0$.

Desta forma, o determinante (3.55) coincide com o determinante da sub-matriz de Hurwitz $H(f', f)$ tomando suas $2r-1$ primeiras linhas, suas $2r-2$ primeiras colunas e acrescentando a coluna de índice $n+r-j-1$.

Portanto, igualando os coeficientes dos termos de mesmo grau dos polinômios em (3.54), concluímos que

$$q_j^{(r+1)} = \Gamma_{r+1}\nabla_{2r-1}^{(j)} \quad r = 1, 2, \dots n.$$

■

Observe que o Teorema 3.10 generaliza o Teorema 3.8 no sentido de que é possível calcular não somente os coeficientes dos termos de maior grau dos polinômios da sequência de Sturm, mas também todos os outros coeficientes.

Segue da própria demonstração do Teorema 3.10 o seguinte corolário.

Corolário 3.2 *Sejam $f(z)$ um polinômio sem zeros múltiplos de grau exatamente n e $f'(z)$ sua derivada. Então, os polinômios Q_{n-r}, gerados pelo algoritmo de Sturm a partir de $f(z)$*

e $f'(z)$, são dados da seguinte forma

$$Q_{n-r}(z) = \Gamma_{r+1} \begin{vmatrix} & z^{r-1}f'(z) \\ & z^{r-2}f(z) \\ & z^{r-2}f'(z) \\ H_{2r-1}\begin{pmatrix} 1 & \dots & 2r-1 \\ 1 & \dots & 2r-2 \end{pmatrix} & \vdots \\ & zf'(z) \\ & f(z) \\ & f'(z) \end{vmatrix}, \quad r = 2, \dots n, \tag{3.56}$$

onde

$$\Gamma_{r+1} = [\nabla_{2r-3}]^{-2}[\nabla_{2r-5}]^{2}[\nabla_{2r-7}]^{-2}[\nabla_{2r-9}]^{2}\dots[\nabla_{3}]^{2(-1)^r}[\nabla_1]^{2(-1)^{r+1}}.$$

Observe que o corolário acima fornece um método direto para se calcular os polinômios obtidos pelo algoritmo de Sturm sem a necessidade de executar o algoritmo de divisão de Euclides.

Em seguida, vamos estabelecer condições necessárias e suficientes para que um polinômio possua somente zeros reais.

3.5 Caracterização dos Polinômios Hiperbólicos

Iniciamos está seção dando dois resultados conhecidos, que fornecem condições necessárias e suficientes para que um polinômio possua somente zeros reais. O primeiro método é o Teorema de Hermite que utiliza de formas quadráticas (2.1), para dar condições necessárias e suficientes para que um polinômio tenha somente zeros reais, e o segundo método é uma consequência do Critério de Routh-Hurwitz, que se baseia na positividade dos menores principais das matrizes de Hurwitz.

Por fim utilizando o Teorema 3.10 conseguimos provar que, apenas os menores de ordens ímpares da matriz de Hurwitz sendo positivos, já garantem que o polinômio possui somente zeros reais.

Seja

$$f(x) = q_0^{(1)}x^n + q_1^{(1)}x^{n-1} + \ldots + q_n^{(1)} = 0 \tag{3.57}$$

uma equação arbitrária com coeficientes reais e sejam $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ suas raízes.

Denote por

$$S_m = \alpha_1^m + \alpha_2^m + \ldots + \alpha_n^m, \quad m = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.58}$$

a correspondente soma de potências. Considere a forma quadrática

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{u=1}^{n}\sum_{v=1}^{n} S_{u+v-2}x_u x_v. \tag{3.59}$$

Provaremos o seguinte teorema devido a Hermite.

Teorema 3.11 *O número de raízes distintas da equação (3.57) é igual ao posto da forma (3.59) e o número de raízes reais distintas é igual a sua signatura.*

Demonstração:

Substituindo (3.58) em (3.59) obtemos

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \sum_{u=1}^{n}\sum_{v=1}^{n}\left(\sum_{r=1}^{n}\alpha_r^{u+v-2}\right)x_u x_v \\ &= \sum_{r=1}^{n}\left(\sum_{u=1}^{n}\alpha_r^{u-1}x_u\sum_{v=1}^{v-1}\alpha_r^{v-1}x_v\right) \\ &= \sum_{r=1}^{n}\left(x_1 + \alpha_1 x_2 + \ldots + \alpha_r^{n-1}x_n\right)^2. \end{aligned} \tag{3.60}$$

Sejam $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ as raízes reais de (3.57) e $p_1, p_2, \ldots, p_k$ suas corespondentes multiplicidades. Sejam $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_l, \overline{\delta_1}, \ldots, \overline{\delta_l}$ as raízes não reais da equação (3.57) de multiplicidades $q_1, \ldots, q_l$ respectivamente, ou seja

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_k + 2(q_1 + q_2 + \ldots + q_l) = n.$$

Abrindo o somatório em (3.60) obtemos

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = &\textstyle\sum_{s=1}^{k} p_s(x_1 + \beta_s x_2 + \ldots + \beta_s^{n-1}x_n)^2 \\ &+ \textstyle\sum_{v=1}^{l} q_v(x_1 + \delta_v x_2 + \ldots + \delta_v^{n-1})^2 \\ &+ \textstyle\sum_{v=1}^{l} q_v(x_1 + \overline{\delta_v}x_2 + \ldots + \overline{\delta_v}^{n-1})^2 \end{aligned} \tag{3.61}$$

Sempre vamos ter $k+2l \leq n$. Se $k+2l < n$, então escolhemos $n-k-2l$ diferentes números $g_1, g_2, \ldots, g_{n-k-2l}$, e diferentes também dos números β_s. Então, o determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & .. & 1 & 1 & 1 & .. & 1 & 1 & 1 & .. & 1 \\ \beta_1 & .. & \beta_k & \delta_1 & \overline{\delta_1} & .. & \delta_l & \overline{\delta_l} & g_1 & .. & g_{n-k-2l} \\ . & .. & . & . & . & .. & . & . & . & .. & . \\ \beta_1^{n-1} & .. & \beta_k^{n-1} & \delta_1^{n-1} & \overline{\delta_1}^{n-1} & .. & \delta_l^{n-1} & \overline{\delta_l}^{n-1} & g_1^{n-1} & .. & g_{n-k-2l}^{n-1} \end{vmatrix}$$

é o determinante de Vandermonde, que é diferente de zero, pois todos os elementos da segunda linha são dois à dois diferentes. Denotemos por

$$\delta_\lambda = u_\lambda^{(1)} + iv_\lambda^{(1)},\ \overline{\delta_\lambda}^{(1)} = u_\lambda^{(1)} - iv_\lambda^{(1)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\delta_\lambda^{n-1} = u_\lambda^{(n-1)} + iv_\lambda^{(n-1)},\ \overline{\delta_\lambda}^{(n-1)} = u_\lambda^{(n-1)} - iv_\lambda^{(n-1)}.$$

Então o determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & .. & 1 & 1 & 0 & .. & 1 & 0 & 1 & .. & 1 \\ \beta_1 & .. & \beta_k & u_1^{(1)} & v_1^{(1)} & .. & u_l^{(1)} & v_l^{(1)} & g_1 & .. & g_{n-k-2l} \\ . & .. & . & . & . & .. & . & . & . & .. & . \\ \beta_1^{n-1} & .. & \beta_k^{n-1} & u_1^{(n-1)} & v_1^{(n-1)} & .. & u_l^{(n-1)} & v_l^{(n-1)} & g_1^{n-1} & .. & g_{n-k-2l}^{n-1} \end{vmatrix}$$

é igual ao determinante anterior multiplicado por $(2i)^l$ e, como o determinante anterior é diferente de zero, segue que o determinante acima também é diferente de zero. Consequentemente a transformação linear

$$\begin{aligned} y_s &= x_1 + \beta_s x_2 + \ldots + \beta_s^{n-1} x_n,\ s = 1, 2, \ldots k, \\ y_{k+2\lambda-1} &= x_1 + u_\lambda^{(1)} x_2 + \ldots + u_\lambda^{(n-1)} x_n,\ \lambda = 1, 2, \ldots, l, \\ y_{k+2\lambda} &= \quad v_\lambda^{(1)} + \ldots + v_\lambda^{(n-1)} x_n, \lambda = 1, 2, \ldots, l, \\ y_{k+2l+u} &= x_1 + g_u x_2 + \ldots + g_u^{n-1} x_n, u = 1, 2, \ldots, n-k-2l \end{aligned}$$

tem o determinante não-nulo. Sobre esta transformação, (3.61) toma a forma

$$\sum_{s=1}^{k} p_s y_s^2 + \sum_{\lambda=1}^{l} q_\lambda [(y_{k+2\lambda-1} + iy_{k+2\lambda})^2 + (y_{k+2\lambda-1} - iy_{k+2\lambda})^2]$$

que é igual a

$$\sum_{s=1}^{k} p_s y_s^2 + \sum_{\lambda=1}^{l} 2q_\lambda y_{k+2\lambda-1}^2 - \sum_{\lambda=1}^{l} 2q_\lambda y_{k+2\lambda}^2.$$

Onde o número de quadrados positivos é igual à $k+l$ e o número de quadrados negativos é l. Sabemos de (2.2) que o posto de uma forma quadrática é a soma dos quadrados positivos com os quadrados negativos, e sua signatura é a diferença entre os quadrados positivos e os negativos, logo o posto de F é $(k+l)+l = k+2l$ e sua signatura é $(k+l)-l = k$. Assim o teorema está estabelecido. ■

Do Teorema de Jacobi 2.2 o número de quadrados negativos na representação canônica da forma quadrática F é igual ao número de variação na sequência dos menores principais da matriz da forma F. Considerando o teorema anterior e o Teorema de Jacobi segue diretamente o seguinte resultado.

Teorema 3.12 *O número de diferentes pares de raízes adjuntas da equação (3.57) é igual ao número de variações na sequência dos determinantes*

$$S_0 = n, \quad \begin{vmatrix} S_0 & S_1 \\ S_1 & S_2 \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 & \ldots & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & S_3 & \ldots & S_n \\ S_2 & S_3 & S_4 & \ldots & S_{n+1} \\ . & . & . & . & . \\ S_{n-1} & S_n & S_{n+1} & \ldots & S_{2n-2} \end{vmatrix}, \tag{3.62}$$

e o número de raízes distintas é igual ao posto da matriz

$$\begin{pmatrix} S_0 & S_1 & S_2 & \ldots & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & S_3 & \ldots & S_n \\ S_2 & S_3 & S_4 & \ldots & S_{n+1} \\ . & . & . & . & . \\ S_{n-1} & S_n & S_{n+1} & \ldots & S_{2n-2} \end{pmatrix}.$$

Segue do teorema anterior o seguinte teorema que da condições para que todas as raízes de um polinômio sejam reais.

Teorema 3.13 *Todas as raízes da equação (3.57) são reais se, e somente se, a forma F é definida positiva, ou seja, se todos os determinantes na sequência (3.62) são não-negativos (ver definição 2.3). O número de raízes distintas é igual à ordem do último determinante não nulo na sequência (3.62).*

Em virtude do Teorema 3.12 temos apenas que mostrar que para uma forma definida positiva F, no caso quando algum dos determinantes na sequência (3.62) é igual a zero, então o próximo determinante deve ser zero.

<u>Demonstração</u>:

Suponha que o determinante $|A_m|$ de ordem m na sequência (3.62) seja nulo. Este determinante corresponde ao determinante da matriz associada a forma quadrática

$$U_m = \sum_{u=1}^{m}\sum_{v=1}^{m} S_{u+v-2}x_u x_v.$$

Como $|A_m| = 0$ e U_m é definida positiva, vai existir um vetor $x^T = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \neq 0$ tal que

$$x^T A_m x = 0.$$

Considere as formas quadráticas

$$U_{m+s} = \sum_{u=1}^{m+s}\sum_{v=1}^{m+s} S_{u+v-2}x_u x_v, \quad s = 1, 2, \ldots, n-m,$$

e seja o vetor com $m+s$ coordenadas, dado da seguinte forma

$$y = (x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, 0, \ldots, 0) \neq 0.$$

Então, temos que,

$$y^T A_{m+s} y = x^T A_m x = 0 \quad \text{para} \quad y \neq 0.$$

Isto mostra que do Teorema 2.4, $|A_{m+s}| = 0$ para, $s = 0, 1, \ldots, n-m$.

O Teorema 3.13, fornece condições necessárias e suficientes para que um polinômio tenha somente zeros reais, entretanto o método para se verificar tais condições é um tanto trabalhoso, pois além de calcular todos os determinantes na sequência (3.62), observe que, as entradas S_k dos determinantes, são também determinantes calculados da seguinte forma

$$S_k = (-1)^{k-1}\begin{vmatrix} 1 & & & & & 1\sigma_1 \\ \sigma_1 & 1 & & & & 2\sigma_2 \\ \sigma_2 & \sigma_1 & 1 & & & 3\sigma_3 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \sigma_{k-2} & \sigma_{k-3} & \sigma_{k-4} & & 1 & (k-1)\sigma_{k-1} \\ \sigma_{k-1} & \sigma_{k-2} & \sigma_{k-3} & & \sigma_1 & k\sigma_k \end{vmatrix},$$

onde os σ_k são as somas simétricas elementares dos zeros do polinômio $f(z)$ ou seja,

$$f(z) = z^n - \sigma_1 x^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}z + (-1)^n\sigma_n.$$

O próximo método é uma consequência direta dos dois teoremas abaixo. Este método da condições para que um polinômio tenha somente zeros reais e negativos.

Teorema 3.14 *Uma condição necessária e suficiente para que a equação com coeficientes reais*

$$h(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n = \varphi(z^2) + z\psi(z^2) = 0$$

tenha somente raízes de um dos lados do eixo imaginário, é que os polinômios $\varphi(z)$ e $\psi(z)$ tenham somente zeros reais, negativos e que se entrelaçam.

O teorema acima é válido para quaisquer dois polinômios $\varphi(z)$ e $\psi(z)$ que satisfaçam as hipóteses de seu enunciado, neste trabalho vamos sempre considerar,

$$\varphi(z) = q_0^{(1)} z^n + q_1^{(1)} z^{n-1} + \ldots + q_n^{(1)} \quad (q_0^{(1)} = 1)$$

e

$$\psi(z) = q_0^{(2)} z^{n-1} + q_1^{(2)} z^{n-2} + q_2^{(2)} z^{n-3} + \ldots + q_{n-1}^{(2)},$$

onde $q_k^{(2)} = (n-k)q_k^{(1)}$, para $k = 0, \ldots n-1$.

O seguinte resultado é conhecido como critério de Routh-Hurwitz.

Teorema 3.15 *Todas as raízes do polinômio real $h(z)$ têm a parte real negativa se, e somente se,*

$$\nabla_1 > 0,\ \nabla_2 > 0,\ \ldots \nabla_{2n-1} > 0,$$

onde ∇_k são os determinantes dos menores principais da matriz de Hurwitz definida na definição 3.3.

Segue dos Teoremas 3.14 e 3.15 o seguinte resultado que dá condições para que um polinômio tenha somente zeros reais e negativos.

Teorema 3.16 *Todas as raízes do polinômio real $f(z)$ são reais e negativas se, e somente se,*

$$\nabla_1 > 0,\ \nabla_2 > 0,\ \ldots \nabla_{2n-1} > 0,$$

onde os ∇_k são os determinantes dos menores principais da matriz de Hurwitz.

Demonstração: Suponha que $f(z)$ tenha somente zeros reais e negativos. Desta forma como os zeros de f e f' se entrelaçam e estão todos do lado esquerdo do eixo imaginário segue do Teorema 3.14, que os zeros de $h(z) = f(z^2) + zf'(z^2)$ tem a parte real negativa. Logo pelo Teorema 3.15 segue que

$$\nabla_1 > 0,\ \nabla_2 > 0,\ \ldots \nabla_{2n-1} > 0.$$

Por outro lado suponha que, $\nabla_k > 0$ para $k = 1, 2, \ldots 2n-1$. Segue do Teorema 3.15, que todos os zeros de $h(z)$ têm parte real negativa. Logo pelo Teorema 3.14, $f(z)$ possui somente zeros reais e negativos. ■

O Teorema 3.16 fornece um método mais vantajoso em relação ao Teorema 3.13, pois no Teorema 3.16 temos que calcular diretamente, apenas $2n-1$ determinantes de Hurwitz.

Utilizando o Teorema de Sturm, juntamente com o Teorema 3.8, conseguimos mostrar que, para um polinômio com coeficientes reais possuir somente zeros reais, basta que $\nabla_{2k-1} \geq 0$ para $k = 1, 2, \ldots n$. Tal resultado segue da seguinte forma:

Teorema 3.17 *O polinômio $f(z) = \sum_{j=0}^{n} q_j^{(1)} z^{n-j}$ com $q_0^{(1)} = 1$ tem somente zeros reais se, e somente se, todos os menores principais de ordem ímpar da matriz de Hurwitz $H(f'(z), f(z))$ são maiores ou iguais a zero.*

Demonstração:

Suponha primeiramente que o polinômio $f(z)$ possua somente zeros reais. Pelo Teorema de Sturm 3.3, o número de zeros do polinômio $f(z)$ no intervalo (a, b) é igual a

$$S^-(a) - S^-(b),$$

ou seja,

$$S^-(f(a), f'(a), Q_{n-2}(a), \ldots, Q_0(a)) - S^-(f(b), f'(b), Q_{n-2}(b), \ldots, Q_0(b)).$$

Como o polinômio $f(z)$ tem somente zeros reais vamos considerar $a = -\infty$ e $b = \infty$. Neste caso, observe que $sinal(f(-\infty))$ e $sinal(f(\infty))$ são, respectivamente, $(-1)^n q_0^1$ e q_0^1, visto que

$$f(z) = z^n(q_0^1 + \frac{q_1^1}{z^{n-1}} + \frac{q_2^1}{z^{n-2}} + \ldots + \frac{q_n^1}{z^n}).$$

Assim, temos que

$$S^-(f(-\infty), Q_{n-1}(-\infty), \ldots, Q_0(-\infty)) - S^-(f(\infty), f'(\infty), \ldots, Q_0(\infty))$$

é igual a

$$S^-((-1)^n q_0^1, (-1)^{n-1} q_0^2, (-1)^{n-2} q_0^3, \ldots, q_0^{n+1}) - S^-(q_0^1, q_0^2, q_0^3 \ldots, q_0^{n+1}). \tag{3.63}$$

Pelo Teorema 3.8,

$$q_0^{(r)} = \nabla_{2r-3}[\nabla_{2r-5}]^{-2}[\nabla_{2r-7}]^2[\nabla_{2r-9}]^{-2}[\nabla_{2r-11}]^2 \ldots [\nabla_3]^{2(-1)^{r-1}}[\nabla_1]^{2(-1)^r}.$$

Observando que apenas ∇_{2r-3} na expressão acima não está elevado ao quadrado, segue que

$$sinal(q_0^r) = sinal(\nabla_{2r-3}).$$

Portanto, substituindo os q_0^r na expressão (3.63), obtemos

$$S^-((-1)^n, (-1)^{n-1}n, (-1)^{n-2}\nabla_3, \ldots, \nabla_{2n-1}) - S^-(1, n, \nabla_3 \ldots, \nabla_{2n-1}).$$

Como o polinômio $f(z)$ de grau n tem somente zeros reais, segue, do Teorema de Sturm, que

$$n = S^-((-1)^n, (-1)^{n-1}n, (-1)^{n-2}\nabla_3, \ldots, \nabla_{2n-1}) - S^-(1, n, \nabla_3 \ldots, \nabla_{2n-1}).$$

Assim para que a igualdade acima seja satisfeita temos que ter

$$S^-(1, n, \nabla_3 \ldots, \nabla_{2n-1}) = 0$$

ou seja

$$\nabla_1 = n \geq 0, \quad \nabla_3 \geq 0, \quad \nabla_5 \geq 0, \ldots, \nabla_{2n-1} \geq 0.$$

Agora, se todos os determinantes de ordem ímpar são maiores ou iguais que zero, segue diretamente do Teorema de Sturm que o polinômio $f(z)$ tem somente zeros reais, visto que

$$S^{-}((-1)^n, (-1)^{n-1}n, (-1)^{n-2}\nabla_3, \ldots, \nabla_{2n-1}) = n$$

e

$$S^{-}(1, n, \nabla_3 \ldots, \nabla_{2n-1}) = 0.$$

Portanto,

$$n = S^{-}(-\infty) - S^{-}(\infty).$$

■

Capítulo 4

Funções Inteiras da Classe de Laguerre-Pólya

Neste capítulo é introduzido o conceito de Funções Inteiras da Classe de Laguerre-Pólya, que são limites de polinômios com somente zeros reais ou limites de polinômios com somente zeros reais e de mesmo sinal.

Na seção 4.1 são fornecidas suas definições e os principais teoremas que dão condições necessárias e suficientes para que uma função inteira pertença à classe de Laguerre-Pólya. Na seção 4.2 são definidos os polinômios de Jensen que estão fortemente relacionados com as funções da classe de Laguerre-Pólya através do Teorema de Jensen. Este teorema fornece condições necessárias e suficientes para que uma função inteira pertença à classe de Laguerre-Pólya através dos polinômios de Jensen. Em seguida, na seção 4.3, descrevemos a forte relação dos polinômios de Jensen com a famosa Hipótese de Riemann.

Por fim, na seção 4.4, utilizando os polinômios de Jensen, mostramos que as desigualdades de Turán de ordem superior são satisfeitas para a função ξ de Riemann.

4.1 A Classe de Laguerre-Pólya

Iniciamos com duas definições e em seguida provamos quatro teoremas. Dois deles são devidos a Laguerre e descrevem a forma analítica de uma função inteira da classe de

Laguerre-Pólya. Os outros dois teoremas que são um refinamento dos teoremas de Laguerre e são devidos a Pólya.

Definição 4.1 *Por* $\mathbf{L_1}$ *denotaremos a classe das funções inteiras que são polinômios com somente zeros reais não positivos, ou são limites uniformes de tais polinômios em todo conjunto compacto do plano complexo.*

Definição 4.2 *Por* $\mathbf{L_2}$ *denotaremos a classe das funções inteiras que são polinômios com somente zeros reais, ou são limites uniformes de tais polinômios em todo conjunto compacto do plano complexo.*

Claramente $\mathbf{L_1} \subset \mathbf{L_2}$, e como as funções da classe $\mathbf{L_1}$ e $\mathbf{L_2}$ foram introduzidas por Laguerre e Pólya, elas são chamadas de funções da classe de Laguerre-Pólya.

Os quatro próximos teoremas fornecem uma caracterização analítica para as funções de Laguerre-Pólya.

Teorema 4.1 *Seja*

$$P_n(z) = a_{n0} + a_{n1}z + \ldots + a_{n\lambda_n}z^{\lambda_n}, \quad \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots \tag{4.1}$$

uma sequência de polinômios com zeros somente reais e não positivos. Suponha que esta sequência converge uniformemente em todo domínio finito. Então, seu limite $f(z)$ *é uma função inteira e tem a forma*

$$f(z) = bz^m e^{az} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{\alpha_n}\right), \tag{4.2}$$

onde $a \leq 0$ *e* b *são constantes reais,* m *é um inteiro não negativo,* $\alpha_n > 0,\ n = 1, 2, \ldots,$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} < \infty$.

Pela definição de $\mathbf{L_1}$, o Teorema 4.1 é equivalente a afirmar que se $f(z) \in \mathbf{L_1}$, então

$$f(z) = bz^m e^{az} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{\alpha_n}\right).$$

Demonstração:

Suponha que a sequência (4.1) converge uniformemente em todo compacto do plano complexo para $f(z)$. Pelo Teorema de Weierstrass (Teorema 2.5) a função limite $f(z)$ é analítica em todo domínio compacto, ou seja, $f(z)$ é uma função inteira. Seja

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots.$$

Obviamente $\lim_{n\to\infty} a_{np} = a_p$.

Podemos supor que $a_0 \neq 0$. Realmente, seja β um número maior que o maior zero negativo de $f(z)$. A sequência $P_n(z+\beta)$ obviamente converge para $f(z+\beta)$ e $f(\beta) \neq 0$.

Como a_{n0} converge para a_0, então, $a_0 \neq 0$ para todo n suficientemente grande. Portanto podemos considerar a sequência de polinômios $P_n(z)/a_{n0}$ ou seja,

$$P_n(z) = 1 + a_{n1} z + \dots + a_{n\lambda_n} z^{\lambda_n}, \quad \lambda_1 < \lambda_2 < \dots. \tag{4.3}$$

Pelo Teorema Fundamental da Álgebra (Teorema 2.6), temos

$$\begin{aligned} P_n(z) &= a_{n\lambda_n} \textstyle\prod_{v=1}^{\lambda_n} (z + \alpha_{nv}) \\ &= a_{n\lambda_n} \alpha_{n1} \dots \alpha_{n\lambda_n} \textstyle\prod_{v=1}^{\lambda_n} \left(1 + \frac{z}{\alpha_{nv}}\right), \end{aligned} \tag{4.4}$$

onde $-\alpha_{n1}, -\alpha_{n2}, \dots, -\alpha_{n\lambda_n}$ são as raízes de $P_n(z)$ em ordem não crescente.

Pelas fórmulas de Vieta (2.6),

$$\alpha_{n1} \dots \alpha_{n\lambda_n} = \frac{1}{a_{n\lambda_n}}.$$

Substituindo em (4.4), temos

$$P_n(z) = 1 + a_{n1} z + \dots + a_{n\lambda_n} z^{\lambda_n} = \prod_{v=1}^{\lambda_n} \left(1 + \frac{z}{\alpha_{nv}}\right). \tag{4.5}$$

Novamente utilizando as fórmulas de Vieta, para os números s_n definidos a seguir, temos a igualdade

$$s_n = \frac{1}{\alpha_{n1}} + \frac{1}{\alpha_{n2}} + \dots + \frac{1}{\alpha_{n\lambda_n}} = a_{n1}$$

o que mostra que a sequência $\{s_n\}$ é limitada. Denotaremos por $-\alpha_1, -\alpha_2, \dots$ os zeros da função $f(z)$ ordenados em ordem não crescente. Pelo Teorema de Hurwitz (Teorema 2.7) segue que $\lim_{n\to\infty} \alpha_{np} = \alpha_p,\ p = 1, 2, \dots$ e, portanto, para qualquer q fixo, temos

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\alpha_{n1}} + \frac{1}{\alpha_{n2}} + \dots + \frac{1}{\alpha_{nq}} \right) = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_q}. \tag{4.6}$$

Como

$$\sum_{v=1}^{q} \frac{1}{\alpha_{nv}} \leq \sum_{v=1}^{\lambda_n} \frac{1}{\alpha_{nv}} = s_n$$

e $\{s_n\}$ é limitada, segue que $s_n < K$, onde K é uma constante. Assim, de (4.6) e da desigualdade acima temos

$$\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \ldots + \frac{1}{\alpha_q} \leq K,$$

que mostra que a série

$$\delta = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} + \ldots$$

é convergente. Portanto, do Teorema 2.9, a função

$$\varphi(z) = \left(1 + \frac{z}{\alpha_1}\right)\left(1 + \frac{z}{\alpha_2}\right) \ldots \left(1 + \frac{z}{\alpha_n}\right) \ldots$$

é inteira.

Mostraremos, agora, que as funçôes

$$g_n(z) = a_{n1} - \frac{P_n'(z)}{P_n(z)} = \sum_{v=1}^{\lambda_n} \frac{z}{\alpha_{nv}(z + \alpha_{nv})}$$

convergem uniformemente para a função

$$g(z) = \delta - \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{z}{\alpha_v(z - \alpha_v)} \tag{4.7}$$

em qualquer compacto do plano complexo, onde os pólos α_v são isolados por pequenos discos $|z - \alpha_v| < \varepsilon$. Isto pode ser feito pois os pólos não possuem pontos de acumulação.

Seja $R > 0$ um número arbitrário e seja $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ os zeros contidos no disco $|z| < \lambda R$, onde λ é um número maior que 1. Se N é suficientemente grande, para todo $n > N$, os pólos $\alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \ldots, \alpha_{np}$ estarão no disco $|z| < \lambda R$ e temos ainda que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{v=1}^{p} \frac{z}{\alpha_{nv}(z - \alpha_{nv})} = \sum_{v=1}^{p} \frac{z}{\alpha_v(z - \alpha_v)}$$

para $|z| \leq R$. Para os outros pólos α_{nv}, com $v > p$ e $|z| \leq R$, temos $|\alpha_{nv}| \geq \lambda R$ e pela desigualdade triangular obtemos

$$|\alpha_{nv} + z| > (\lambda - 1)R, \quad |\alpha_v + z| \geq (\lambda - 1)R.$$

Portanto,

$$\left|\sum_{v=p+1}^{\lambda_n} \frac{z}{\alpha_{nv}(z-\alpha_{nv})}\right| < \sum_{v=p+1}^{\lambda_n} \frac{R}{|\alpha_{nv}|(\lambda-1)R} < \frac{K}{\lambda-1},$$

ou seja,

$$\left|\sum_{v=p+1}^{\infty} \frac{z}{\alpha_v(z-\alpha_v)}\right| \leq \frac{K}{\lambda-1}.$$

Seja $\varepsilon > 0$ um número arbitrário. Escolhendo λ tal que $\dfrac{2K}{\lambda-1} < \varepsilon$, então

$$\limsup_{n\to\infty} |g_n(z) - g(z)| \leq \varepsilon,$$

para todo $\varepsilon > 0$, ou seja, $g_n(z)$ converge uniformemente para $g(z)$ quando $n \to \infty$ no disco $|z| \leq R$.

Este limite implica que para todo $R > 0$, $|z| \leq R$ e utilizando o fato que $\lim_{n\to\infty} a_{n1} = a_1$ temos de (4.7) que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n'(z)}{P_n(z)} = -\delta + a_1 + \frac{\varphi\prime(z)}{\varphi(z)}.$$

Como por hipótese $P_n(z)$ converge uniformemente para $f(z)$, segue da igualdade acima que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\delta + a_1 + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}. \tag{4.8}$$

Observe que a igualdade (4.8) é equivalente a

$$[\ln(f_1(z))]' = -\delta + a_1 + [\ln(\varphi(z))]'. \tag{4.9}$$

Integrando com relação a z em ambos os lados da igualdade (4.9), concluímos que, em qualquer domínio finito,

$$f(z) = be^{(a_1-\delta)z}\varphi(z).$$

Provaremos, agora, que $a = a_1 - \delta \leq 0$. Seja $\epsilon > 0$ um número arbitrário e seja N tal que, para $p > N$,

$$\frac{1}{\alpha_{p+1}} + \frac{1}{\alpha_{p+2}} + \ldots + \frac{1}{\alpha_n} + \ldots < \epsilon.$$

Da igualdade

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\alpha_{n1}} + \frac{1}{\alpha_{n2}} + \ldots + \frac{1}{\alpha_{np}}\right) = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \ldots + \frac{1}{\alpha_p},$$

segue da definição de limite que

$$\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \ldots + \frac{1}{\alpha_p} > a_1 - \epsilon.$$

Portanto,

$$\delta = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_i} = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\alpha_i} + \sum_{i=p+1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_i} \geq a_1.$$

Como a desigualdade segue para todo $\epsilon > 0$,temos que $-\delta a_1 \leq 0$.

Assim, está estabelecido que se uma função $f(z) \in \mathbf{L_1}$, então ela tem a forma (4.2). ■

O seguinte teorema, que foi demonstrado por Pólya, é uma extensão do Teorema de Laguerre.

Teorema 4.2 *Seja a sequência de polinômios (4.1), tendo somente zeros reais e não positivos, tendendo uniformemente para a função $f(z)$ no disco $|z| \leq p$. Então, $f(z)$ é uma função inteira da forma (4.2), onde m é um número inteiro não negativo, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ são números positivos e a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n}$ é convergente. Por outro lado, cada função inteira da forma (4.2), sobre as condições mencionadas acima, é limite de polinômios com somente zeros reais e não positivos.*

Demonstração:Vamos fornecer a demonstração dada no livro de Obrechkoff [8].

Pelo Teorema de Weierstrass 2.5 a função $f(z)$ é analítica no disco $|z| < p$. Seja

$$f(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$$

sua expansão em série de Maclaurin. Então, $\lim_{n\to\infty} c_{np} = c_p$. Como no Teorema anterior, podemos restringir a sequência de polinômios (4.1) pela sequência

$$P_n(z) = \left(1 - \frac{z}{\alpha_{n1}}\right)\left(1 - \frac{z}{\alpha_{n2}}\right)\ldots\left(1 - \frac{z}{\alpha_{n\lambda_n}}\right).$$

Observe, da desigualdade triangular e do fato que

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots \geq 1 + z,$$

fazendo $z = |u|$ obtemos

$$|1 + u| \leq 1 + |u| \leq e^{|u|}. \tag{4.10}$$

Seja $R > 0$, então, de (4.10),

$$|P_n(z)| \leq e^{|z|\left(\frac{1}{\alpha_{n1}}+\frac{1}{\alpha_{n2}}+\ldots+\frac{1}{\alpha_{n\lambda_n}}\right)} \leq e^{K|z|} \leq e^{KR}, \tag{4.11}$$

onde K é uma constante finita. Consequentemente, os polinômios $P_n(z)$ são uniformemente limitados no disco $|z| \leq R$ e, assim, eles tendem uniformemente para a função $f(z)$ no disco. Uma vez que R pode ser escolhido arbitrário, estamos então no caso de Laguerre e assim o limite $f(z)$ é uma função inteira da forma (4.2).

Para estabelecer a implicação contrária, é suficiente considerar os polinômios

$$P_n(z) = c\left(z - \frac{1}{n}\right)^m \left(1 - \frac{az}{n}\right)^n \prod_{v=1}^{n}\left(1 - \frac{z}{\alpha_v}\right),$$

que claramente tendem uniformemente para a função $f(z)$ em cada disco $|z| \leq R$. ■

Teorema 4.3 *Seja a sequência de polinômios (4.1), tendo somente zeros reais, convergindo uniformemente para a função $f(z)$ no disco $|z| < \rho$. Então $f(z)$ é uma função inteira da forma*

$$f(z) = ce^{-az^2+bz}z^m \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right)e^{\frac{z}{\alpha_n}}, \tag{4.12}$$

onde $a \geq 0$ b e c são constantes reais, m inteiro não negativo, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ são números reais e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n^2} < \infty$.

Pela definição de $\mathbf{L_2}$ o Teorema 4.3 é equivalente a afirmar que

$$f(z) \in \mathbf{L_2} \rightarrow f(z) = ce^{-az^2+bz}z^m \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right)e^{\frac{z}{\alpha_n}}.$$

Demonstração:Suponha que os polinômios

$$P_n(z) = \left(1 - \frac{z}{\alpha_{n1}}\right)\left(1 - \frac{z}{\alpha_{n2}}\right)\ldots\left(1 - \frac{z}{\alpha_{n\lambda_n}}\right) = 1 + c_{n1}z + c_{n2}z^2 + \ldots$$

convergem uniformemente em cada disco para uma função com expansão de Maclaurin

$$f(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots.$$

Da mesma forma, como foi feito no Teorema 4.1, se prova que o limite $f(z)$ é uma função inteira.

Utilizando as fórmulas de F. Vieta observe que,

$$s_n^{(2)} = \sum_{v=1}^{\lambda_n} \frac{1}{\alpha_{nv}^2} = c_{n1}^2 - 2c_{n2}.$$

Assim pelo fato de que $\lim_{n\to\infty} c_{np} = c_p$, a série

$$s = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_v^2}$$

é convergente.

Sendo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ os zeros da função $f(z)$, considere as funções racionais

$$g_n(z) = \sum_{v=1}^{\lambda_n} \left(\frac{1}{\alpha_{nv}} + \frac{z}{\alpha_{nv}^2} + \frac{1}{z - \alpha_{nv}} \right) = \sum_{v=1}^{\lambda_n} \frac{z^2}{\alpha_{nv}^2 (z - \alpha_{nv})}$$

e

$$g(z) = \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_v} + \frac{z}{\alpha_v^2} + \frac{1}{z - \alpha_v} \right) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{z^2}{\alpha_v^2 (z - \alpha_v)}.$$

Como no Teorema 4.1, prova-se que a função $g_n(z)$ tende uniformemente para a função $g(z)$ em cada disco $|z| \leq \rho$, onde os pólos de $f(z)$, contidos neste disco, são isolados em discos pequenos.

Como a soma $\sum_{v=1}^{\lambda_n} \alpha_{nv}^{-1}$ converge para $-c_1$ pela fórmula de Veita e a soma $\sum_{v=1}^{\lambda_n} \alpha_{nv}^{-2}$ converge para $c_1^2 - 2c_2 = 2\gamma_1$, se denotarmos por $2b$ a soma $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v^{-2}$, então

$$\lim_{n\to\infty} g_n(z) = 2b + \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_v} + \frac{1}{z - \alpha_v} \right) = -c_1 + 2\gamma_1 z + \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Portanto,

$$f(z) = ce^{-az^2 + bz} z^m \prod_{v=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_v} \right) e^{\frac{z}{\alpha_v}}.$$

Para completar a demonstração basta provar que $a \geq 0$.

Para cada p fixo temos

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{v=1}^{p} \frac{1}{\alpha_{nv}^2} \right) = \sum_{v=1}^{p} \frac{1}{\alpha_v^2}$$

e, consequentemente,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{v=1}^{\lambda_n} \frac{1}{\alpha_{nv}^2} \right) \geq \sum_{v=1}^{p} \frac{1}{\alpha_v^2}.$$

Segue desta última desigualdade que $a = \gamma_1 - b \geq 0$, ou seja , que a é um número não negativo.

■

Novamente Pólya obteve um refinamento para o caso $\mathbf{L_2}$, ou seja, um refinamento do Teorema anterior, que é enunciado a seguir.

Teorema 4.4 *Seja a sequência de polinômios (4.1), possuindo somente zeros reais, tendendo uniformemente para a função $f(z)$ no disco $|z| < p$. Então $f(z)$, é uma função inteira da forma (4.12), onde $a, b, \alpha_n (n = 1, 2, \ldots)$ são números reais, $a \geq 0$, m é inteiro não negativo e, além disso, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^2}$ é convergente. Por outro lado, cada função da forma (4.12) sob as condições enunciadas acima, é o limite de polinômios com somente zeros reais, isto é, $f(z) \in \mathbf{L_2}$.*

Demonstração:Novamente podemos restringir ao estudo dos polinômios

$$P_n(z) = \prod_{v=1}^{\lambda_n} \left(1 - \frac{z}{\alpha_{nv}}\right) = 1 + c_{n1}z + c_{n2}z^2 + \ldots,$$

supondo que eles convergem uniformemente para a função $f(z)$ no disco $|z| < p$.

Então, $f(z)$ é inteira e tem uma expansão $f(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$.

A sequência

$$s_n^{(2)} = \frac{1}{\alpha_{n1}^2} + \frac{1}{\alpha_{n2}^2} + \ldots + \frac{1}{\alpha_{n\lambda_n}^2}$$

tende para um limite finito, como vimos no Teorema anterior, e portando $s_n^{(2)}$ é limitada.

Então, da mesma forma, se prova que a série

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_{n^2}}$$

é convergente. Da desigualdade $|(1-u)e^u| < e^{L|u|^2}$, onde L é uma constante, obtemos

$$|P_n(z)||e^{z\left(\frac{1}{\alpha_{n1}} + \frac{1}{\alpha_{n2}} + \ldots + \frac{1}{\alpha_{n\lambda_n}}\right)}| < e^{Ls|z|^2},$$

logo,

$$|P_n(z)| < e^{Ls|z|^2 + \lambda|z|},$$

onde λ é uma constante e portanto a sequência $P_n(z)$ tende uniformemente para $f(z)$ em cada disco $|z| \leq R < \infty$ e o caso considerado reduz ao caso de Laguerre.

Para estabelecer a afirmação contrária, considere a sequência de polinômios

$$P_n(z) = c\left(z - \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \frac{az^2}{n}\right)^n \left(1 + \frac{g_n z}{m_n}\right)^{m_n} \prod_{v=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{\alpha_v}\right),$$

onde

$$g_n = b + \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \ldots + \frac{1}{\alpha_n}.$$

Observe que se o inteiro m_n cresce rapidamente, quando n tende para o infinito, então o polinômio $P_n(z)$ tende uniformemente para $f(z)$ em cada domínio finito. Para isto é suficiente escolher um número m_n tal que $|z| < n$ para ter

$$\left|1 - e^{-g_n z}\left(1 + \frac{g_n z}{m_n}\right)^{m_n}\right| < \frac{1}{n}.$$

■

Em outras palavras, o conjunto das funções da classe $\mathbf{L_1}$ é identicamente ao conjunto das funções da forma

$$f(z) = b_1 z^m e^{\lambda z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right), \tag{4.13}$$

onde$\lambda \geq 0$ e b_1 são constantes reais, m inteiro não negativo, $\alpha_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} < \infty$, e o conjunto das funções da classe $\mathbf{L_2}$ são identicamente ao conjunto das funções da forma

$$f(z) = ce^{-az^2 + bz} z^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right) e^{\frac{z}{\alpha_n}} \tag{4.14}$$

onde $a \geq 0$ b e c são constantes reais, m inteiro não negativo, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ são números reais e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^2} < \infty$.

Observe que os quatro teoremas anteriores fornecem uma caracterização analítica das funções inteiras que pertencem à classe de Laguerre-Pólya, porém até o momento esta caracterização é um tanto complicada para se verificar. A seguir vamos fornecer duas definições e algumas propriedades que serão de muita utilidade para fornecer caracterizações mais fáceis de se verificar.

Definição 4.3 *A sequência infinita* $\{\alpha_n\}_0^\infty \in \mathcal{A}$ *se, para todo polinômio*

$$b(z) = b_0 + b_1 z + \ldots b_n z^n$$

possuindo somente zeros reais, o polinômio

$$b(z) * \{\alpha_n\} = b_0\alpha_0 + b_1\alpha_1 z + \ldots b_n\alpha_n z^n$$

tem somente zeros reais.

As sequências pertencentes ao conjunto $\mathcal{A}$ serão também chamadas de $\mathcal{A}$-sequências.

Definição 4.4 *A sequência infinita* $\{\beta_n\}_0^\infty \in \mathcal{B}$ *se para todo polinômio*

$$a(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$$

possuindo somente zeros reais não positivos, o polinômio

$$a(z) * \{\beta_n\} = a_0\beta_0 + a_1\beta_1 z + \ldots + a_n\beta_n z^n$$

tem somente zeros reais.

As sequências pertencentes ao conjunto $\mathcal{B}$ serão também chamadas de $\mathcal{B}$-sequências.

A seguir vamos estabelecer algumas propriedades elementares sobre essas sequências.

Observe primeiramente que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, pois se $\{\alpha_n\}_0^\infty \in \mathcal{A}$ então para todo polinômio $b(z)$ com somente zeros reais o polinômio $b(z) * \{\alpha_n\}$ possui somente zeros reais. Em particular, considere os polinômios $b(z)$ que possuem somente zeros reais não positivos, assim $\{\alpha_n\}_0^\infty \in \mathcal{B}$ ou seja, $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.

Propriedade 4.1.1 *Em qualquer sequência* $\{\alpha_n\}_0^\infty \in \mathcal{A}$ *os termos diferentes de zero iniciam um seguido do outro, e eles têm o mesmo sinal ou formam uma sequência com sinais alternados.*

Temos que provar que se na sequência $\{\alpha_n\}_0^\infty$ os números α_λ e $\alpha_{\lambda+\mu}$ são diferentes de zero, então todos os termos da sequência entre α_λ e $\alpha_{\lambda+\mu}$ são diferentes de zero, e que

$$sinal(\alpha_{v-1}) = sinal(\alpha_{v+1}), \quad v = \lambda + 1, \ldots, \lambda + \mu - 1.$$

Demonstração: Seja

$$a_\lambda x^\lambda + a_{\lambda+1}x^{\lambda+1} + \ldots + a_{\lambda+\mu}x^{\lambda+\mu}$$

um polinômio que possui somente zeros reais e sejam a_λ e $a_{\lambda+\mu}$ diferentes de zero. Pela definição de α o polinômio

$$a_\lambda \alpha_\lambda x^\lambda + a_{\lambda+1}\alpha_{\lambda+1}x^{\lambda+1} + \ldots a_{\lambda+\mu}\alpha_{\lambda+\mu}x^{\lambda+\mu}$$

possui somente zeros reais. Em virtude do Teorema 2.8, dois termos consecutivos da sequência

$$\alpha_\lambda, \ldots, \alpha_{\lambda+\mu}$$

não podem ser nulos.

O caso em que somente um α_v é nulo também não pode ocorrer. Visto que, se $\alpha_v = 0$, então α_{v-1} e α_{v+1} devem ser diferentes de zero, logo usando os polinômios

$$x^{v-1} - x^{v+1} \quad \text{e} \quad x^{v-1} + 2x^v + x^{v+1},$$

que possuem somente zeros reais, e pela definição de $\mathcal{A}$ que os polinômios

$$\alpha_{v-1}x^{v-1} - \alpha_{v+1}x^{v+1}, \quad \alpha_{v-1}x^{v-1} + 2\alpha_v x^v + \alpha_{v+1}x^{v+1}$$

devem ter somente zeros reais, equivalentemente podemos dizer que os polinômios

$$\alpha_{v-1} - \alpha_{v+1}x^2, \quad \alpha_{v-1} + 2\alpha_v x + \alpha_{v+1}x^2$$

possuem somente zeros reais (basta colocar x^{v-1} em evidência). Mas, como $\alpha_v = 0$, temos que

$$\alpha_{v-1} + 2\alpha_v x + \alpha_{v+1}x^2 = \alpha_{v-1} + \alpha_{v+1}x^2$$

ou seja,

$$\alpha_{v-1} + \alpha_{v+1}x^2 \quad \text{e} \quad \alpha_{v-1} - \alpha_{v+1}x^2$$

possuem somente zeros reais, o que é impossível.

O fato de que $sinal(\alpha_{v-1}) = sinal(\alpha_{v+1})$, segue de que o polinômio $\alpha_{v-1} - \alpha_{v+1}x^2$ possui somente zeros reais, pois

$$\alpha_{v-1} - \alpha_{v+1}x^2 = 0$$

implica que $x = \pm\sqrt{\frac{\alpha_{v-1}}{\alpha_{v+1}}}$, ou seja, para que x seja real os sinais de α_{v-1} e α_{v+1} devem ser iguais. ■

De forma análoga prova-se a seguinte propriedade.

Propriedade 4.1.2 *Se em uma sequência $\beta_n \in \mathcal{B}$ dois termos vizinhos são iguais à zero, então todos os termos posteriores ou todos os termos atrás destes são iguais a zero. Em particular, quando um dos termos anteriores a eles da sequência β_n são iguais a zero e um dos termos vizinhos é diferente de zero, então eles têm sinais opostos.*

A demonstração é análoga para o caso das sequências em $\mathcal{A}$, considerando agora os polinômios

$$x^v + x^{v+1}, \qquad x^{v-1} + 2x^v + x^{v+1}$$

que possuem somente zeros reais e não positivos.

Propriedade 4.1.3 *Se $\{\beta\}_n^\infty \in \mathcal{B}$, então*

$$\beta_v^2 - \beta_{v-1}\beta_{v+1} \geq 0, \quad v = 1, 2, \ldots$$

Realmente , visto que o polinômio

$$x^{v-1} + 2x^v + x^{v+1}, \quad v = 1, 2, \ldots$$

possui somente zeros reais e não positivos, então os polinômios

$$\beta_{v-1}x^{v-1} + 2\beta_v x^v + \beta_{v+1}x^{v+1}, \quad v = 1, 2, \ldots$$

devem ter somente zeros reais. Logo, colocando x^{v-1} em evidência, temos que os polinômios

$$\beta_{v-1} + 2\beta_v x + \beta_{v+1}x^2, \quad v = 1, 2, \ldots$$

possuem somente zeros reais. Assim, temos que seu discriminante deve ser maior ou igual a zero, ou seja,

$$\beta_v^2 - \beta_{v-1}\beta_{v+1} \geq 0.$$

A propriedade seguinte segue diretamente da definição.

Propriedade 4.1.4 *Se* $\{\alpha_n\}_0^\infty \in \mathcal{A}$, $\{\alpha'_n\}_n^\infty \in \mathcal{A}$ *e* $\{\beta_n\}_0^\infty \in \mathcal{B}$, *então* $\{\alpha_n\beta_n\}_0 \in \mathcal{B}$ *e* $\{\alpha_n\alpha'_n\}_0^\infty \in \mathcal{A}$.

Propriedade 4.1.5 *Se*

$$\{\beta_n\}_0^\infty \in \mathcal{B} \quad e \quad \{\alpha_n\}_0^\infty \in \mathcal{A},$$

então

$$\{\beta_n\}_v^\infty \in \mathcal{B} \quad e \quad \{\alpha_n\}_v^\infty \in \mathcal{A}, \quad v = 0, 1, 2, \ldots.$$

Demonstração: Considere o polinômio

$$b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n$$

possuindo somente zeros reais, e seja o polinômio

$$a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$$

possuindo somente zeros reais não negativos.

Os polinômios

$$b_0x^v + b_1x^{v+1} + \ldots + b_nx^{n+v}, \quad a_0x^v + a_1x^{v+1} + \ldots + a_nx^{v+n}$$

tem as mesmas propriedades respectivamente.

Então, os polinômios

$$\beta_vb_0x^v + \beta_{v+1}b_1x^{v+1} + \ldots + \beta_{v+n}b_nx^{n+v},$$

$$\alpha_va_0x^v + \alpha_{v+1}a_1x^{v+1} + \ldots + \alpha_{v+n}a_nx^{v+n},$$

ou

$$\beta_vb_0 + \beta_{v+1}b_1x + \ldots + \beta_{v+n}b_nx^n,$$

$$\alpha_va_0 + \alpha_{v+1}a_1x + \ldots + \alpha_{v+n}a_nx^n$$

possuem somente zeros reais, o que completa a demonstração. ■

As sequências em $\mathcal{A}$ satisfazem à seguinte propriedade.

Propriedade 4.1.6 *Se* $\{\alpha_v\}_0^\infty \in \mathcal{A}$, *então*

$$\alpha_n^2 - \alpha_{n-2}\alpha_{n+2} \geq 0, \quad n = 2, 3, \ldots$$

e para $\alpha_n \neq 0$

$$\left(\frac{\alpha_{n-3}}{\alpha_n}\right)^2 - \left(\frac{\alpha_{n-2}}{\alpha_n}\right)^3 \leq 0, \quad n = 3, 4, \ldots$$

Demonstração:Como o polinômio $z^{n-2} - 2z^n + z^{n+2}$ tem somente zeros reais, então o polinômio $\alpha_{n-2}z^{n-2} - 2\alpha_n z^n + \alpha_{n+2}z^{n+2}$ também possui somente zeros reais. Assim, a primeira das desigualdades acima segue do fato que colocando z^{n-2} em evidência o discriminante do polinômio, $\alpha_{n-2} - 2\alpha_n z^2 + \alpha_{n+2}z^4$, deve ser maior ou igual a zero.

Os zeros de

$$z^n - \sqrt[3]{\frac{3}{4}}z^{n-2} + \frac{1}{3}z^{n-3}, \quad n = 3, 4, \ldots,$$

são reais. Logo, os zeros de

$$\alpha_n z^n - \alpha_{n-2}\sqrt[3]{\frac{3}{4}}z^{n-2} + \alpha_{n-3}\frac{1}{3}z^{n-3}$$

são reais, assim para $\alpha_n \neq 0$ o discriminante

$$D = -3\left[\left(\frac{\alpha_{n-3}}{\alpha_n}\right)^2 - \left(\frac{\alpha_{n-2}}{\alpha_n}\right)^3\right]$$

é não negativo, o que completa a demonstração. ∎

Os dois teoremas a seguir são devidos a Pólya e Schur e relacionam as sequências $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ com as classes $\mathbf{L_1}$ e $\mathbf{L_2}$, respectivamente.

Teorema 4.5 *A sequência* $\{\alpha_n\}_0^\infty \in \mathcal{A}$ *se, e somente se,*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_k z^k \in \mathbf{L_1}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Demonstração:Como os zeros do polinômio

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k = (1+z)^n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

são reais, então segue que os zeros do polinômio

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \binom{n}{k} z^k, \quad n = 1, 2, \ldots$$

são também reais. A Propriedade 4.1.1 implica que esses zeros são de mesmo sinal.

Para demonstrar a volta suponha que o polinômio

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k = (1+z)^n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

tenha somente zeros reais não positivos e seja

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_m z^m$$

polinômio arbitrário possuindo somente zeros reais. Do Teorema de Malo-Schur (2.10), segue que o polinômio

$$a_0\alpha_0 + 1!a_1\alpha_1\binom{n}{1}z + \ldots + m!a_m\alpha_m\binom{n}{m}z^m,$$

possui somente zeros reais. Se substituirmos z por $\frac{z}{n}$ obtemos o polinômio

$$a_0\alpha_0 + a_1\alpha_1 z + a_2\alpha_2\left(1-\frac{1}{n}\right)z^2 + \ldots + a_m\alpha_m\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)z^m,$$

que também possui somente zeros reais. Para $n \to \infty$, o Teorema de Hurwitz (2.7) implica que o polinômio

$$a_0\alpha_0 + a_1\alpha_1 z + \ldots a_m\alpha_m z^m$$

também possui somente zeros reais, ou seja $\{\alpha_n\}_0^\infty \in \mathcal{A}$. ■

Teorema 4.6 *A sequência $\{\beta_n\}_0^\infty \in \mathcal{B}$ se, e somente se,*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\beta_k z^k \in \mathbf{L_2}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Demonstração:Da mesma forma como na demonstração do Teorema anterior, a condição necessária é demonstrada. Para a condição suficiente basta considerar o polinômio possuindo somente zeros reais não positivos

$$b_0 + b_1 z + \ldots + b_m z^m.$$

Pelo Teorema de Malo-Schur (2.10) e utilizando a hipótese de que o polinômio $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\beta_k z^k$ possui somente zeros reais, segue que o polinômio

$$b_0\beta_0 + 1!\binom{n}{1}b_1\beta_1 z + \ldots + m!\binom{n}{m}b_m\beta_m z^m$$

também possui somente zeros reais. Da mesma forma, como foi feito na demonstração do Teorema anterior, temos que o polinômio

$$b_0\beta_0 + b_1\beta_1 z + \ldots b_m\beta_m z^m$$

possui também somente zeros reais, ou seja $\{\beta_n\}_0^\infty \in \mathcal{B}$. ■

Esta demonstração implica no seguinte Teorema

Teorema 4.7 *Uma $\mathcal{B}$-sequência é também uma $\mathcal{A}$-sequência se, e somente se, os termos da sequência que são diferentes de zero são sucessivos e cada termo tem o mesmo sinal ou mudam de sinal alternadamente.*

De fato, os zeros do polinômio $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \beta_k z^k$ são de mesmo sinal se, e somente se, todas as hipótese do Teorema são satisfeitas.

4.2 Polinômios de Jensen.

Nesta seção vamos introduzir os polinômios de Jensen e, a partir deles será possível fornecer melhores condições necessárias e suficientes para que uma função inteira pertença à classe de Laguerre-Pólya.

Inicialmente considere a série

$$g(z) = c_0 + \frac{c_1}{1!}z + \frac{c_2}{2!}z^2 + \dots \frac{c_n}{n!}z^n + \dots \tag{4.15}$$

convergente em uma vizinhança de $z = 0$.

Se denotarmos por D o operador diferencial, então o polinômio

$$J_n(g, z) = g(D)z^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} c_k z^{n-k} = J_n(z), \quad n = 1, 2, \dots, \tag{4.16}$$

é chamado de polinômio de Jensen associado a função inteira $g(z)$.

É imediato verificar que a derivada $J_n'(z)$ é igual a $nJ_{n-1}(z)$.

Vamos denotar por

$$J_n^*(g, z) = J_n^*(z) = z^n J_n\left(g, \frac{1}{z}\right), \quad n = 1, 2, \dots, \tag{4.17}$$

seu polinômio recíproco.

Utilizando os polinômios de Jensen podemos enunciar o seguinte teorema que fornece caracterização para uma função inteira pertencer à classe de Laguerre-Pólya em termos dos polinômios de Jensen.

Teorema 4.8 *Seja $f(z)$ uma função inteira. Então, $f(z)$ pertence à $\mathbf{L_1}$ se, e somente se,*

$$J_n(f, z) \in \mathbf{L_1}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

ou seja, uma função inteira $f(z)$ pertence à classe de Laguerre-Pólya se, e somente se, para todo n inteiro, o polinômio de Jensen associado a $f(z)$ possui somente zeros reais não positivos.

Demonstração: Seja

$$f(z) = c_0 + \frac{c_1}{1!}z + \frac{c_2}{2!}z^2 + \ldots \in \mathbf{L_1}.$$

Então, existe uma sequência de polinômios

$$P_n(z) = c_{n0} + \frac{c_{n1}}{1!}z + \ldots + \frac{c_{n\lambda_n}}{\lambda_n!}z^{\lambda_n} \in \mathbf{L_1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

tal que, em todo disco, $P_n(z)$ converge uniformemente para $f(z)$.

Pelo Teorema 2.11, segue que

$$P_n(D)z^p = c_{n0}z^p + \binom{p}{1}c_{n1}z^{p-1} + \binom{p}{2}c_{n2}z^{p-2} + \ldots \in \mathbf{L_1}, \quad p < \lambda_n.$$

Assim, para p fixo e utilizando o Teorema de Hurwitz 2.7, temos

$$\lim_{n\to\infty} P_n(D)z^p = c_0z^p + \binom{p}{1}z^{p-1} + \binom{p}{2}c_2z^{p-2} + \ldots = f(D)z^p = J_p(f, z) \in \mathbf{L_1}, \ \ p = 1, 2, \ldots,$$

e assim a primeira parte do Teorema está provada.

Seja

$$f(z) = c_0 + \frac{c_1}{1!}z + \frac{c_2}{2!}z^2 + \cdots \tag{4.18}$$

uma função tal que

$$f(D)z^p = J_p(f, z) \in \mathbf{L_1}, \quad p = 1, 2, \ldots.$$

Vamos provar que $f(z) \in \mathbf{L_1}$.

Seja c_s o primeiro coeficiente diferente de zero, e $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-s}$ os zeros do polinômio

$$\binom{p}{s}c_sz^{p-s} + \cdots + \binom{p}{p}c_p.$$

Utilizando as relações de Veita temos

$$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p-s} = (-1)^{p-s}\frac{c'_p}{c'_s}(p-s)! \tag{4.19}$$

e

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{p-s} = -\frac{c'_{p+1}}{c'_s}(p-s), \tag{4.20}$$

onde $c'_\lambda = \dfrac{c_\lambda}{\lambda!}$, $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$.

Utilizando o fato que a média geométrica de números positivos não excede sua média aritmética, temos de (4.19) que

$$(p-s)! \left|\frac{c'_p}{c'_s}\right| \leq \left|\frac{c'_{s+1}}{c'_s}\right|^{p-s}.$$

Portanto, da desigualdade acima, segue que

$$|c'_p| < A\frac{a^p}{p!},$$

onde A e a são números positivos. Esta desigualdade mostra que a série (4.18) é convergente para todo z e, portanto, é uma função inteira $f(z)$ para a qual $|f(z)| < Ae^{a|z|}$.

Agora, considere o polinômio

$$J_p^*\left(f, \frac{z}{p}\right) = c_0 + \frac{c_1}{1!}z + \frac{c_2}{2!}\left(1 - \frac{1}{p}\right)z^2 + \ldots + \frac{c_p}{p!}\left(1 - \frac{p-1}{p}\right)z^p.$$

Seja $\epsilon > 0$ e $R > 0$. Como $f(z)$ é uma função inteira, N pode ser escolhido tal que

$$\sum_{v=N+1}^{\infty} \left|\frac{c_v}{v!}\right| |z|^v < \epsilon,$$

onde $|z| \leq R$.

Seja

$$J_n^*\left(f, \tfrac{z}{p}\right) = c_0 + \sum_{v=1}^{N} \frac{c_v}{v!}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\ldots\left(1 - \frac{v-1}{p}\right)z^v$$
$$+ \sum_{n=N+1}^{p} \frac{c_v}{v!}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\ldots\left(1 - \frac{v-1}{p}\right)z^v = h_p(z) + H_p(z)$$

e

$$f(z) = \sum_{v=0}^{N} \frac{c_v}{v!}z^v + \sum_{v=N+1}^{\infty} \frac{c_v}{v!}z^v = f_1(z) + f_2(z).$$

Para $|z| \leq R$ temos

$$|H_p(z)| < \sum_{v=N+1}^{p} \left|\frac{c_v}{v!}\right| R^v < \epsilon, \quad |f_2(z)| < \sum_{v=N+1}^{\infty} \left|\frac{v_v}{v!}\right| R^v < \epsilon, \tag{4.21}$$

e para N fixo

$$\lim_{p\to\infty} h_p(z) = f_1(z). \tag{4.22}$$

Assim, (4.21) e (4.22) implicam que em todo domínio finito

$$\lim_{p\to\infty} J_p^*\left(f, \frac{z}{p}\right) = f(z). \tag{4.23}$$

Portanto, $f(z)$ é uma função inteira, em todo domínio compacto e é o limite de polinômios possuindo somente zeros reais não positivos, ou seja, $f(z) \in \mathbf{L_1}$. ■

Da mesma forma como foi provado o Teorema 4.8 para classe $\mathbf{L_1}$, se prova o seguinte teorema relacionado à classe $\mathbf{L_2}$.

Teorema 4.9 *Seja $f(z)$ uma função inteira. Então, $f(z)$ pertence à $\mathbf{L_2}$ se, e somente se,*

$$J_n(f, z) \in \mathbf{L_2}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

ou seja, uma função inteira $f(z)$ pertence à classe de Laguerre-Pólya se, e somente se, para todo n inteiro, o polinômio de Jensen associado a $f(z)$ possui somente zeros reais.

Segue diretamente de (4.23) o seguinte resultado.

Teorema 4.10 *Se $f(z) \in \mathbf{L_1}$, ou $f(z) \in \mathbf{L_2}$, então*

$$\lim_{n\to\infty} J_n^*\left(f, \frac{z}{n}\right)$$

converge uniformemente para $f(z)$ em todo disco $|z| \leq R$.

Os Teoremas 4.8 e 4.9 também podem ser enunciados em termos das $\mathcal{A}$-sequências e $\mathcal{B}$-sequências respectivamente da seguinte forma.

Teorema 4.11 *A sequência $\{\alpha_n\}_0^\infty$ pertence a $\mathcal{A}$ se, e somente se,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n!} z^n \in \mathbf{L_1}.$$

Demonstração:

Suponha que a sequência $\{\alpha_n\}_0^\infty$ pertença a $\mathcal{A}$. Pelo Teorema 4.5

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_k z^k \in \mathbf{L_1}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Utilizando o fato que os zeros de um polinômio $f(z)$ e os zeros do polinômio recíproco $f^*(z)$ são os mesmos, temos que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_k z^{n-k} \in \mathbf{L_1}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Portanto, do Teorema 4.8,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n!} z^n \in \mathbf{L_1}.$$

Da mesma forma se prova a implicação contrária. ■

Segue abaixo um resultado análogo ao Teorema 4.11 sobre as sequências em $\mathcal{B}$.

Teorema 4.12 *A sequência $\{\beta_n\}_0^\infty$ pertence a $\mathcal{B}$ se, e somente se,*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n}{n!} z^n \in \mathbf{L_2}$$

Sua demonstração é equivalente à do Teorema 4.11

A seguir descreveremos uma breve seção sobre a famosa Hipótese de Riemann, pois tal hipótese tem uma forte relação com os polinômios de Jensen.

4.3 A Hipótese de Riemann.

A Hipótese de Riemann é uma hipótese matemática, publicada pela primeira vez em 1859 por Bernhard Riemann, que declara que os zeros não-triviais da função zeta de Riemann pertencem todos à "linha crítica" $\mathbf{Re}(z) = \frac{1}{2}$.

Vamos verificar que o problema sobre a Hipótese de Riemann pode ser resumido a um problema sobre zeros de polinômios.

A função zeta de Riemann $\zeta(z)$ é definida por

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \tag{4.24}$$

ou, equivalentemente, por

$$\zeta(z) = \prod_{p\ primo} \left(1 - \frac{1}{p^z}\right)^{-1},$$

onde $z = x + iy$ é um número complexo.

Observe que a série de Dirichlet (4.24) é convergente para $x > 1$ e uniformemente convergente em todo compacto de $\{x \geq 1 + \delta\}$, $\delta > 0$. Desta forma, (4.24) define uma função analítica para $x > 1$.

A função zeta de Riemann pode ser estendida analiticamente para todo plano complexo através da equação funcional

$$\zeta(z) = 2^z \pi^{z-1} \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right) \Gamma(1-z)\zeta(1-z), \tag{4.25}$$

onde Γ é a função gamma.

É bem conhecido que os únicos zeros reais de $\zeta(z)$ são $-1, -2, -4, \ldots$ e que $\zeta(z)$ têm um número infinito de zeros não reais, chamados de zeros não-triviais, além disso todos seus zeros não reais pertencem à faixa $0 \leq \mathbf{Re}(z) \leq 1$.

Fazendo algumas mudanças na variável podemos escrever a função $\zeta(z)$ da seguinte forma

$$\xi(iz) = \frac{1}{2}\left(z^2 - \frac{1}{4}\right) \pi^{\frac{-z}{2} - \frac{1}{4}} \Gamma\left(\frac{z}{2} + \frac{1}{4}\right) \zeta\left(z + \frac{1}{2}\right).$$

Observe que ao fazer a transformação de $\zeta(z)$ para $\zeta(z + \frac{1}{2})$ estamos transladando a reta crítica $\mathbf{Re}(z) = \frac{1}{2}$ para o eixo imaginário além disso quando multiplicamos z pelo número imaginário i estamos fazendo uma rotação de noventa graus, desta forma a hipótese de Riemann é equivalente a afirmar que os zeros não triviais da função $\xi(iz)$ são todos reais.

Uma outra forma de representar a função $\xi(iz)$ é a seguinte

$$\xi\left(\frac{x}{2}\right) = 8\int_0^{\infty} \Phi(t) \cos xt dt, \tag{4.26}$$

onde

$$\Phi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (2n^4\pi^2 e^{9t} - 3n^2\pi e^{5t}) exp(-n^2\pi e^{4t}). \tag{4.27}$$

Utilizando a expansão em série da função cosseno segue que,

$$\frac{1}{8}\xi\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \widehat{b}_k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \tag{4.28}$$

com

$$\widehat{b}_k = \int_0^\infty t^{2k}\Phi(t)dt, \quad \text{para} \quad k \geq 0.$$

Fazendo $z = -x^2$ em (4.28) obtemos a função

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\gamma}_k \frac{z^k}{k!}, \quad \widehat{\gamma}_k = \frac{k!}{(2k)!}\widehat{b}_k. \tag{4.29}$$

Observe que a transformação $z = -x^2$ faz com que a função inteira $F(z)$ tenha somente zeros reais negativos, ou seja, que $F(z)$ pertença à classe de Laguerre Pólya $\mathbf{L_1}$. Assim, a Hipótese de Riemann é equivalente a afirmar que a função inteira $F(z)$ pertença a classe $\mathbf{L_1}$.

Uma forma de abordar o problema de Riemann é utilizar os polinômios de Jensen, pois segue do Teorema 4.8 que uma função inteira $F(z)$ pertence a classe $\mathbf{L_1}$ se, e somente se, os polinômios de Jensen associados a $F(z)$ possuem somente zeros reais e não positivos.

4.4 Desigualdades de Turán para a função ξ de Riemann.

Uma simples condição necessária para uma função inteira

$$\psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \frac{z^k}{k!} \tag{4.30}$$

pertencer à classe de Laguerre-Pólya, são as chamadas desigualdades de Turán

$$\gamma_k^2 - \gamma_{k+1}\gamma_{k-1} \geq 0,$$

que são de fato condições necessárias e suficientes para que os polinômios de Jensen associados a $\psi(x)$ de grau dois serem hiperbólicos. As desigualdades de Turán de ordem superior $4(\gamma_n^2 - \gamma_{n-1}\gamma_{n+1})(\gamma_{n+1}^2 - \gamma_n\gamma_{n+2}) - (\gamma_n\gamma_{n+1} - \gamma_{n-1}\gamma_{n+2})^2 \geq 0$ são também condições necessárias e suficientes para que uma função da forma (4.30) pertença à classe de Laguerre-Pólya. De fato, esses dois conjuntos de desigualdades garantem que os polinômios de Jensen de grau três são hiperbólicos.

Pólya conjecturou em 1927 e Csordas, Norfolk e Vargas provaram em 1986 [2], que as desigualdades de Turán são verdadeiras para os coeficientes da função ξ de Riemann. Nesta seção provamos que as desigualdades de Turán de ordem superior também são verificadas para a função ξ de Riemann estabelecendo a hiperbolicidade dos polinômios de Jensen de grau três associados à ψ.

Como havíamos dito antes, uma simples condição necessária para que ξ pertença à classe de Laguerre-Pólya, são as desigualdades de Turán serem satisfeitas. Uma das formas mais simples de verificar este fato, baseia-se nos polinômios de Jensen, pois se

$$g_{n,k}(z) = g_{n,k}(\psi; z) := \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \gamma_{k+j} z^j, \qquad n, k = 0, 1, \ldots, \tag{4.31}$$

são os polinômios de Jensen associados a ψ, sabemos do Teorema 4.8 que ψ pertence à classe de Laguerre-Pólya se, e somente se, $g_{n,k}(z)$ possui somente zeros reais não positivos para todo $n, k = 0, 1, \ldots$. Portanto, se considerarmos todos os polinômios de Jensen de grau dois

$$g_{2,k-1}(z) = \gamma_{k-1} + 2\gamma_k z + \gamma_{k+1} z^2,$$

tendo somente zeros reais, implica que seu discriminante tem que ser maior ou igual a zero, isto é,

$$\gamma_k^2 - \gamma_{k+1}\gamma_{k-1} \geq 0 \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{4.32}$$

Uma extensão de (4.32) foi obtida em [4], onde a desigualdade

$$H_k := 4(\gamma_k^2 - \gamma_{k-1}\gamma_{k+1})(\gamma_{k+1}^2 - \gamma_k\gamma_{k+2}) - (\gamma_k\gamma_{k+1} - \gamma_{k-1}\gamma_{k+2})^2 \geq 0, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{4.33}$$

é uma condição necessária para que a função inteira ψ definida por (4.30) pertença à classe de Laguerre-Pólya. Chamamos o novo conjunto de desigualdades de Turán de ordem superior. A idéia da demonstração é simples e baseia-se no fato dos polinômios de Jensen de grau três $g_{3,k}(z)$ serem hiperbólicos. Também, não é difícil verificar que as desigualdades (4.32) e (4.33) são condições suficientes para que $g_{3,k}(z)$ seja hiperbólico. Fornecemos este fato através do seguinte lema.

Lema 4.13 *Seja $k \in \mathbb{N}$. Então, o polinômio real*

$$g_{3,k-1}(x) = \gamma_{k-1} + 3\gamma_k x + 3\gamma_{k+1} x^2 + \gamma_{k+2} x^3,$$

com coeficiente do termo de maior grau γ_{k+2} não nulo, é hiperbólico se, e somente se, as desigualdades

$$\gamma_k^2 - \gamma_{k-1}\gamma_{k+1} \geq 0,$$

e

$$4(\gamma_k^2 - \gamma_{k-1}\gamma_{k+1})(\gamma_{k+1}^2 - \gamma_k\gamma_{k+2}) - (\gamma_k\gamma_{k+1} - \gamma_{k-1}\gamma_{k+2})^2 \geq 0,$$

são satisfeitas simultaneamente.

Demonstração:

As condições necessárias e suficientes do Lema 4.13, seguem diretamente do Teorema de Hermite (Teorema 3.13) verificando-se que os determinantes

$$T_0 = S_0, \quad T_1 = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 \\ S_1 & S_2 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad T_2 = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{vmatrix}$$

são maiores ou iguais que zero.

De fato, aplicando o Teorema de Hermite para o polinômio

$$g_{3,k-1}(z) = \gamma_{k-1} + 3\gamma_k x + 3\gamma_{k+1}x^2 + \gamma_{k+2}x^3$$

inicialmente construímos as somas simétricas

$$\sigma_1 = -3\frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_{k+2}} \qquad \sigma_2 = 3\frac{\gamma_k}{\gamma_{k+2}} \qquad \sigma_3 = -\frac{\gamma_{k-1}}{\gamma_{k+2}}. \tag{4.34}$$

Em seguida, como

$$\begin{aligned} S_0 &= 3 \\ S_1 &= \sigma_1 \\ S_2 &= (\sigma_1)^2 - 2\sigma_2 \qquad\qquad\qquad\qquad , \\ S_3 &= (\sigma_1)^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 \\ S_4 &= (\sigma_1)^4 - 4(\sigma_1)^2\sigma_2 + 4\sigma_1\sigma_3 + 2(\sigma_2)^2 \end{aligned}$$

segue de (4.34) que

$$\begin{aligned}
S_0 &= 3 \\
S_1 &= -3\frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_{k+2}} \\
S_2 &= \frac{9\gamma_{k+1}^2}{\gamma_{k+2}^2} - \frac{6\gamma_k}{\gamma_{k+2}} \\
S_3 &= \frac{-27\gamma_{k+1}^3}{\gamma_{k+2}^3} + \frac{27\gamma_k\gamma_{k+1}}{\gamma_{k+2}^2} - \frac{3\gamma_{k-1}}{\gamma_{k+2}} \\
S_4 &= \frac{81\gamma_{k+1}^4}{\gamma_{k+2}^4} - \frac{108\gamma_k\gamma_{k+1}^2}{\gamma_{k+2}^3} + \frac{18\gamma_k^2}{\gamma_{k+2}^2} + \frac{12\gamma_{k-1}\gamma_{k+1}}{\gamma_{k+2}^2}
\end{aligned}.$$

Substituindo os valores de S_k $k = 0, 1, 2, 3, 4$ nas entradas dos determinantes T_0, T_1 e T_2 e desenvolvendo tais determinantes, obtemos

$$T_0 = 3, \quad T_1 = \frac{18(\gamma_{k+1}^2 - \gamma_{k-1}\gamma_{k+2})}{\gamma_{k+2}^2}$$

e

$$T_2 = \frac{-27(-3\gamma_k^2\gamma_{k+1}^2 + 4\gamma_k^3\gamma_{k+2} - 6\gamma_{k-1}\gamma_k\gamma_{k+1}\gamma_{k+2} + \gamma_{k-1}(4\gamma_{k+1}^3 + \gamma_{k-1}\gamma_{k+2}^2))}{\gamma_{k+2}^4}.$$

Observe que no numerador de T_1 temos exatamente a expressão para a desigualdade de Turám, multiplicada por 18. Agora, se desenvolvermos

$$H_k = 4(\gamma_k^2 - \gamma_{k-1}\gamma_{k+1})(\gamma_{k+1}^2 - \gamma_k\gamma_{k+2}) - (\gamma_k\gamma_{k+1} - \gamma_{k-1}\gamma_{k+2})^2,$$

verifica-se facilmente que

$$T_2 = \frac{27H_k}{\gamma_{k+2}^4}.$$

Portanto, as condições necessárias e suficientes seguem diretamente do Teorema de Hermite. ■

Vamos considerar agora funções inteiras que são representadas por uma transformada de Fourier com núcleo par, $K(t)$ sendo positivo e com decaimento suficientemente rápido, ou seja,

$$F(z) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} K(t)e^{izt}dt = \int_0^{\infty} K(t)\cos(zt)dt.$$

Então,

$$F(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m b_m}{(2m)!}z^{2m}, \quad \text{com } b_m:=\int_0^{\infty}t^{2m}K(t)dt, \quad m=0,1,2,\dots.$$

Novamente, fazendo a mudança de variável, $-z=x^2$ temos

$$F_1(x):=\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k\frac{x^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}b_k\frac{x^k}{(2k)!}, \qquad \text{com} \qquad \gamma_k:=\frac{k!}{(2k)!}b_k.$$

Então, obviamente, $F(z)$ pertence à $\mathbf{L_1}$ se, e somente se, $F_1(z)$ pertence à $\mathbf{L_2}$. Então, a primeira condição necessária que $F_1(z)$ deve satisfazer é que as desigualdades de Turán $T_k:=\gamma_k^2-\gamma_{k-1}\gamma_{k+1}$ sejam não negativas para todo $k\in\mathbb{N}$. Observe que

$$T_k=c_k\begin{vmatrix} b_k & (2k-1)b_{k-1} \\ b_{k+1} & (2k+1)b_k \end{vmatrix},$$

onde $c_k:=2\,k!(k+1)!/((2k)!(2k+2)!)$, então as desigualdades de Turán são equivalentes a

$$\widetilde{T_k}=(2k+1)b_k^2-(2k-1)b_{k-1}b_{k+1}\geq 0, \quad k\in\mathbb{N}. \tag{4.35}$$

Consequentemente uma simples condição necessária para a Hipótese de Riemann é que

$$(2k+1)\hat{b}_k^2-(2k-1)\hat{b}_{k-1}\hat{b}_{k+1}\geq 0, \quad k\in\mathbb{N}, \tag{4.36}$$

para os núcleos $\Phi(t)$ definidos em (4.27). Em 1927, Pólya [9] conjecturou que as desigualdades (4.36) são verdadeiras. A conjectura de Pólya foi provada somente em 1986 por Csordas, Vargas e Norfolk [2]. A idéia da demonstração em [2] é estabelecer primeiramente a seguinte condição suficiente.

Teorema 4.14 *Se $K(t)$ é um núcleo par, positivo, com decaimento suficientemente rápido e $\log K(\sqrt{t})$ é concavo para $t>0$, isto é,*

$$(\log K(\sqrt{t}))''<0 \quad \text{para} \quad t>0, \tag{4.37}$$

então as desigualdades (4.36) são satisfeitas.

Csordas, Norfolk e Vargas provaram o Teorema 4.14 para o núcleo $\Phi(t)$ da função ξ de Riemann, fornecendo o seguinte resultado.

Teorema 4.15 *A função* $\log(\Phi(\sqrt{t}))$ *é concova para* $t > 0$.

Uma observação interessante é que a desigualdade (4.37) é equivalente a

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{K'(t)}{tK(t)}\right\} < 0 \qquad \text{for} \quad t > 0.$$

Para demonstração do Teorema 4.14 veja [3].

Voltado para as desigualdades de Turán de ordem superior, um simples cálculo mostra que $H_k = d_k \widetilde{H}_k$, onde

$$d_k = \frac{[k!]^2[(k+1)!]^2}{(2k)!(2k+1)![(2k+3)!]^2}$$

e

$$\begin{aligned} \widetilde{H_k} &= 4(2k+3)\left[(2k+1)b_k^2 - (2k-1)b_{k-1}b_{k+1}\right]\left[(2k+3)b_{k+1}^2 - (2k+1)b_k b_{k+2}\right] \\ &\quad -(2k+1)\,\left[(2k+3)b_k b_{k+1} - (2k-1)b_{k-1}b_{k+2}\right]^2. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Em seguida damos a definição de núcleo admissível, para que possamos demonstrar o nosso resultado principal desta seção.

Definição 4.5 *Uma função* $K : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *é chamada de núcleo admissível, se ela satisfaz as seguintes propriedades :*

(i) $K(t) > 0$ *for* $t \in \mathbb{R}$,

(ii) $K(t)$ *é analítica na faixa* $\left|Im\ z\right| < \tau$ *para algum* $\tau > 0$,

(iii) $K(t) = K(-t)$ *para* $t \in \mathbb{R}$,

(iv) $K'(t) < 0$ *para* $t > 0$, *e*

(v) para algum $\varepsilon > 0$ *e* $n = 0, 1, 2, \dots$,

$$K^{(n)}(t) = \mathcal{O}\left(exp\big(-|t|^{2+\varepsilon}\big) =\right) \ \ com\ t \longrightarrow \infty\,.$$

É bem conhecido que o núcleo $\Phi(t)$ satisfaz essas condições.

Temos, então, o seguinte resultado.

Teorema 4.16 *Se $K(t)$ é um núcleo admissível com momentos $b_k = \int_0^\infty t^{2k} K(t)dt$ e*

$$(\log K(\sqrt{t}))'' < 0 \quad \text{para} \quad t > 0,$$

então $\widetilde{H_k} \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

É interessante observar que a concavidade logarítmica de $K(\sqrt{t})$ garante não somente que as desigualdades de Turán sejam válidas, mas também as desigualdades de Turán de ordem superior. Além disso, segue diretamente do Lema 4.13 e dos Teoremas 4.15 e 4.16 o seguinte corolário.

Corolário 4.1 *Todos os polinômios de Jensen de grau três*

$$g_{3,k-1}(x) = \hat{\gamma}_{k-1} + 3\hat{\gamma}_k x + 3\hat{\gamma}_{k+1} x^2 + \hat{\gamma}_{k+2} x^3, \quad k \in \mathbb{N},$$

associados com a função ξ de Riemann são hiperbólicos.

Agora, vamos fornecer uma fórmula envolvendo determinantes de integrais, que será de muita utilidade para a demonstração do Teorema 4.16.

Teorema 4.17 *Seja as funções f_1, f_2, g_1, g_2 quadrado integraveis em $[0, \infty)$. Então*

$$\begin{vmatrix} \int_0^\infty f_1(t)g_1(t)dt & \int_0^\infty f_1(t)g_2(t)dt \\ \int_0^\infty f_2(t)g_1(t)dt & \int_0^\infty f_2(t)g_2(t)dt \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \int_0^\infty \begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} g_1(x_1) & g_1(x_2) \\ g_2(x_1) & g_2(x_2) \end{vmatrix} dx_1\, dx_2.$$

A demonstração desta fórmula pode ser encontrada em [10].

Demonstração do Teorema 4.16. Seja $K(t)$ um núcleo. Então, definimos

$$A(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)K(x_1)K(x_2) \left\{ (x_2 - x_1) \begin{vmatrix} \frac{K'(x_1)}{x_1 K(x_1)} & \frac{K'(x_2)}{x_2 K(x_2)} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right\}, \tag{4.39}$$

e para qualquer par de inteiros não negativos m and n,

$$I_{m,n} \int_0^\infty \int_0^\infty x_1^m x_2^n A(x_1, x_2)\; dx_1 dx_2.$$

Seja,

$$\widetilde{T_k} = (2k+1)b_k^2 - (2k-1)b_{k-1}b_{k+1}.$$

Foi provado em [3] que $2\widetilde{T_k} = I_{2k,2k}$. De uma forma similar obtemos uma expressão explícita para $\widetilde{U_k} = (2k+3)b_k b_{k+1} - (2k-1)b_{k-1}b_{k+2}$. Visto que

$$\widetilde{U_k} = \begin{vmatrix} b_k & (2k-1)b_{k-1} \\ b_{k+2} & (2k+3)b_{k+1} \end{vmatrix},$$

utilizando o fato que $b_k = \int_{-\infty}^{\infty} t^{2k} K(t)dt$ e integrando por partes, obtemos

$$(2k-1)b_{k-1} = -\int_0^{\infty} t^{2k-1} K'(t)dt.$$

Logo,

$$\widetilde{U_k} = \begin{vmatrix} \int_0^\infty t^{2k} K(t)dt & \int_0^\infty t^{2k} \frac{-K'(t)}{t} dt \\ \int_0^\infty t^{2k+4} K(t)dt & \int_0^\infty t^{2k+4} \frac{-K'(t)}{t} dt \end{vmatrix}.$$

Aplicando o Teorema 4.17, obtemos

$$\widetilde{U_k} = \frac{1}{2}[I_{2k+2,2k} + I_{2k,2k+2}].$$

Considere a diferença $I_{2k+2,2k} - I_{2k,2k+2}$. Pela definição das integrais $I_{m,n}$, segue que

$$I_{2k+2,2k} - I_{2k,2k+2} = \int_0^\infty \int_0^\infty x_1^{2k} x_2^{2k} (x_1^2 - x_2^2) A(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Denotando a última integral por $G(x_1, x_2)$, como obviamente ela é ímpar com respeito ao eixo $x_1 = x_2$, isto é, $G(x_1, x_2) = -G(x_2, x_1)$, segue que a integral acima é nula e, portanto, $I_{2k+2,2k} = I_{2k,2k+2}$. Isto significa que

$$\widetilde{U_k} = I_{2k+2,2k} = I_{2k,2k+2}.$$

Então, por (4.38),

$$\begin{aligned} \widetilde{H_k} &= 4(2k+3)\,\widetilde{T_k}\,\widetilde{T_{k+1}} - (2k+1)\,\widetilde{U_k}^2 && (4.40) \\ &= (2k+3)\,I_{2k,2k}I_{2k+2,2k+2} - (2k+1)\,I_{2k+2,2k}I_{2k,2k+2}. && (4.41) \end{aligned}$$

Considere a diferença $\widetilde{J_k} = I_{2k,2k}I_{2k+2,2k+2} - (2k+1)\,I_{2k+2,2k}I_{2k,2k+2}$, representada na forma de determinantes por

$$\widetilde{J_k} = \begin{vmatrix} \int_o^\infty u^{2k}[\int_0^\infty v^{2k} A(u,v)dv]du & \int_o^\infty u^{2k}[\int_0^\infty v^{2k+2} A(u,v)dv]du \\ \int_o^\infty u^{2k+2}[\int_0^\infty v^{2k} A(u,v)dv]du & \int_o^\infty u^{2k+2}[\int_0^\infty v^{2k+2} A(u,v)dv]du \end{vmatrix}.$$

Aplicando o Teorema 4.17 com $f_1(u) = u^{2k}$, $f_2(u) = u^{2k+2}$, $g_1(u) = \int_0^\infty v^{2k} A(u,v)dv$ e $g_2(u) = \int_0^\infty v^{2k+2} A(u,v)dv$, obtemos

$$\widetilde{J}_k = \frac{1}{2}\int_0^\infty \int_0^\infty \begin{vmatrix} y_1^{2k} & y_2^{2k} \\ y_1^{2k+2} & y_2^{2k+2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} g_1(y_1) & g_1(y_2) \\ g_2(y_1) & g_2(y_2) \end{vmatrix} dy_1 dy_2,$$

que é equivalente a

$$\widetilde{J}_k = \int_0^\infty \int_0^\infty y_1^{2k} y_2^{2k} g_1(y_1) g_1 = (y_2)(y_1+y_2) \left\{ (y_2 - y_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{g_2(y_1)}{g_1(y_1)} & \frac{g_2(y_2)}{g_1(y_2)} \end{vmatrix} \right\} dy_1 dy_2.$$

Utilizando o Teorema do Valor Médio, a expressão entre chaves acima é igual a

$$(y_2 - y_1)^2 \psi'(y) \quad \text{com} \quad \psi(y) = \frac{g_2(y)}{g_1(y)} \quad \text{e} \quad y \in (y_1, y_2).$$

Então, $\widetilde{J}_k \geq 0$, desde que $\psi'(y) \geq 0$ para todo $y \in [0, \infty)$.

Obviamente

$$(g_1(y))^2 \psi'(y) = (g_1(y))^2 \left[\frac{g_2(y)}{g_1(y)}\right]' = g_2'(y) g_1(y) - g_2(y) g_1'(y). \tag{4.42}$$

Desta forma se usarmos a notação $\mathcal{D}_{i,j}A(x,y)$ e $F_{ij}(x,y)$ para a derivada parcial $\partial^{i+j}F/\partial x^i \partial y^j$ da função $F(x,y)$, como $g_1(u) = \int_0^\infty v^{2k} A(u,v)dv$ e $g_2(u) = \int_0^\infty v^{2k+2} A(u,v)dv$ são funções uniformemente convergentes com respeito a y em $(0,\infty)$, então

$$g_1'(y) = \int_0^\infty v^{2k} A_{1,0}(y,v)dv \quad \text{e} \quad g_2'(y) = \int_0^\infty v^{2k+2} A_{1,0}(y,v)dv.$$

Assim, o lado direito de (4.42) é igual a

$$\int_0^\infty v^{2k+2} A_{1,0}(y,v)dv \int_0^\infty v^{2k} A(y,v)dv - \int_0^\infty v^{2k+2} A(y,v)dv \int_0^\infty v^{2k} A_{1,0}(y,v)dv$$

e se escrevermos novamente na forma de determinantes temos

$$(g_1(y))^2 \psi'(y) = \begin{vmatrix} \int_0^\infty v^{2k} A(y,v)dv & \int_0^\infty v^{2k} A_{1,0}(y,v)dv \\ \int_0^\infty v^{2k+2} A(y,v)dv & \int_0^\infty v^{2k+2} A_{1,0}(y,v)dv \end{vmatrix}.$$

Agora, aplicando pela última vez o Teorema 4.17, com $f_1(v) = v^{2k}$, $f_2(v) = v^{2k+2}$, $g_1(v) = A(y,v)$ e $g_2(v) = A_{1,0}(y,v)$, obtemos

$$(g_1(y))^2 \psi'(y) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \int_0^\infty \begin{vmatrix} z_1^{2k} & z_2^{2k} \\ z_1^{2k+2} & z_2^{2k+2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A(y,z_1) & A(y,z_2) \\ A_{1,0}(y,z_1) & A_{1,0}(y,z_2) \end{vmatrix} dz_1 dz_2.$$

Assim, o lado direito da expressão acima é igual a

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \int_0^\infty z_1^{2k} z_2^{2k} A(y,z_1)A(y,z_2)(z_2+z_1)\left\{(z_2-z_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{A_{1,0}(y,z_1)}{A(y,z_1)} & \frac{A_{1,0}(y,z_2)}{A(y,z_2)} \end{vmatrix}\right\} dz_1 dz_2.$$

Novamente o Teorema do Valor Médio implica que, para qualquer z_1, z_2, existe z dentro do intervalo limitado por z_1 e z_2, tal que a expressão dentro das chaves é igual a

$$(z_2-z_1)^2 \mathcal{D}_{0,1}\left[\frac{A_{1,0}(y,z)}{A(y,z)}\right].$$

Portanto, temos que $\psi' > 0$ se, e somente se,

$$\mathcal{D}_{0,1}\left[\frac{\mathcal{D}_{1,0}A(y,z)}{A(y,z)}\right] > 0.$$

Vamos, agora, analisar a expressão

$$\mathcal{D}_{0,1}\left[\frac{\mathcal{D}_{1,0}A(y,z)}{A(y,z)}\right] = \frac{A(y,z)A_{11}(y,z) - A_{1,0}(y,z)A_{0,1}(y,z)}{(A(y,z))^2}. \tag{4.43}$$

Observe que, se

$$B(y,z) := \begin{vmatrix} \frac{K'(y)}{K(y)} & \frac{K'(z)}{K(z)} \\ K(z) & K(y) \end{vmatrix},$$

então

$$A(y,z) = (z^2-y^2)B(y,z)\,,$$

$$A_{1,0} = (z^2-y^2)B_{1,0} - 2yB,$$

$$A_{0,1} = (z^2-y^2)B_{0,1} + 2zB$$

e

$$A_{1,1} = (z^2-y^2)B_{1,1} + 2zB_{1,0} - 2yB_{0,1}.$$

Substituindo está expressão no numerador do lado direito de (4.43), obtemos

$$AA_{1,1} - A_{1,0}A_{0,1} = (y^2-z^2)^2(BB_{1,1} - B_{1,0}B_{0,1}) + 4yzB^2.$$

Observe que a última função é positiva para $y, z \in (0,\infty)$, se provarmos que

$$L = BB_{1,1} - B_{1,0}B_{0,1}$$

é positiva. Cálculos imediatos mostram que

$$y^2z^2L = [y(K'(y))^2 + K(y)(K'(y) - yK''(y))][z(K'(z))^2 + K(z)(K'(z) - zK''(z))].$$

Como

$$t(K'(t))^2 + K(t)(K'(t) - tK''(t)) = -(tK(t))^2 \left[\frac{K'(t)}{tK(t)}\right]',$$

então

$$L = (K(y))^2 \left[\frac{K'(y)}{yK(y)}\right]' (K(z))^2 \left[\frac{K'(z)}{zK(z)}\right]'.$$

Por outro lado,

$$\left[\frac{K'(t)}{tK(t)}\right]' = (log(K(\sqrt{t})))'' < 0 \quad \text{para todo} \quad t > 0,$$

o que implica $L > 0$. Assim,

$$\widetilde{J}_k = I_{2k,2k}I_{2k+2,2k+2} - [I_{2k+2,2k}]^2 > 0$$

e então obviamente

$$(2k+3)I_{2k,2k}I_{2k+2,2k+2} - (2k+1)[I_{2k+2,2k}]^2 > 0$$

que é equivalente a $\widetilde{H_k} > 0$.

Os resultados desta última seção podem ser encontrados em [5]

Referências Bibliográficas

[1] G. E. ANDREWS, R. ASKEY, R. ROY, Special Functions, Published by the Press Syndicate of the University of Cambridge, 2000.

[2] G. CSORDAS, T.S. NORFOLK, R. S. VARGAS, The Riemann Hypothesis and the Turán inequalities, Trans. Amer. Math. Soc. 296 (1986) 521-541.

[3] G. Csordas, D. K. Dimitrov, Conjectures and theorems in the theory of entire functions, Numer. Algorithms 25 (2000) 109-122.

[4] D.K. DIMITROV, Higher order Turán inequalities, Proc. Amer. Math. Soc. 126 (1998) 2033-2037.

[5] D.K. DIMITROV, F. R. LUCAS, Higher order Turán inequalities for the Riemann ξ-Function, Proc. Amer. Math. Soc. 2010.

[6] F.R. GANTMACHER, The Theory of Matrices Vol. I and II, Chelsea Publishing Company, 1989.

[7] P. HENRICI, Applied and Computational Complex Analysis Vol. I and II, Wiley Classics Library, 1991. Math. Monographs, vol 5, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1964.

[8] N. OBRECHKOFF, Zeros of Polynomials, Publishing House of the Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, 2003.

[9] G. PÓLYA, Über die algebraisch-funcktionentheoretischaen Untersuchungen von J. L. W. V. Jensen, klg. Danske Vid. Sel. Math-Fys Med 7 (1927) 3-33.

[10] G. Pólya, G. Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Springer-Verlag, Berlin, 1925, English translation: Problems and Theorems in Analysis, Springer-Verlag, Berlin, 1976.