UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - IMECC

Departamento de Matemática

Famílias Normais de Aplicações Holomorfas em Espaços de Dimensão Infinita

Tese de Doutorado

Paula Takatsuka

Orientador: **Prof. Dr. Jorge Mujica**

Dezembro de 2006
Campinas-SP

Famílias Normais de Aplicações Holomorfas em Espaços de Dimensão Infinita

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Paula Takatsuka** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 15 de Dezembro de 2006.

J. Mujica

Prof. Dr. Jorge Tulio Mujica Ascui
Orientador

Banca Examinadora
1 Prof. Dr. Ary Orozimbo Chiacchio
2 Prof. Dr. Jorge Tulio Mujica Ascui
3 Profa. Dra. Luiza Amália de Moraes
4 Prof. Dr. Mário Carvalho de Matos
5 Profa. Dra. Mary Lilian Lourenço

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de DOUTOR em Matemática.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues – CRB8a / 2116

Takatsuka, Paula

T139f Famílias normais de aplicações holomorfas em espaços de dimensão infinita / Paula Takatsuka -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2006.

Orientador : Jorge Tulio Mujica Ascui

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Aplicações holomorfas. 2. Espaços localmente convexos. 3. Funções holomorfas. I. Mujica, Jorge, 1946-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Normal families of holomorphic mappings on infinite dimensional spaces.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Holomorphic mappings. 2. Locally convex spaces. 3. Holomorphic functions.

Área de concentração: Matemática - Análise

Titulação: Doutora em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Ary Orozimbo Chiacchio (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Jorge Tulio Mujica Ascui (IMECC-UNICAMP)
Profa. Dra. Luiza Amália de Moraes (UFRJ)
Prof. Dr. Mário Carvalho de Matos (IMECC-UNICAMP)
Profa. Dra. Mary Lilian Lourenço (USP-São Paulo)

Data da defesa: 15/12/2006

Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática

Tese de Doutorado defendida em 15 de dezembro de 2006 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

____

Prof. (a). Dr (a). JORGE TULIO MUJICA ASCUI

____

Prof. (a). Dr (a). MARIO CARVALHO DE MATOS

____

Prof. (a). Dr (a). ARY OROZIMBO CHIACCHIO

____

Prof. (a). Dr (a). LUIZA AMÁLIA DE MORAES

____

Prof. (a) Dr. (a) MARY LILIAN LOURENÇO

Agradecimentos

Agradeço:

primeiramente a Deus, experimentado e pensado de tantas formas diversas ao longo destes anos, mas que certamente experienciei durante a realização deste trabalho;

ao querido Prof. Dr. Jorge Mujica, por quem tenho profundo respeito, admiração e carinho, por sua grande competência e dedicação na condução desta pesquisa e pela presteza e bondade com que sempre se dispôs a me ajudar; uma pessoa incrível, por quem tive a sorte de ser orientada durante todos estes anos;

a todos os professores da banca examinadora, pelas sugestões cuidadosas que contribuíram para melhorar a exposição deste trabalho;

à UNICAMP e à CAPES, pela concessão das bolsas;

aos amigos de curso e de pesquisa, de perto e de longe, entre eles Po Ling, Sônia, Dani, Lulu e Edson, pelo carinho, amizade, e pelos bons momentos e aprendizado que tivemos juntos; agradeço também às observações da Dani referentes à tese; e em especial Lu e Ximena, que me acompanharam bem de perto com uma amizade linda;

aos professores, às secretarias e à biblioteca do IMECC, pelo grande apoio e ajuda de todos com que sempre pude contar;

à minha família, por fazerem parte de todos os momentos importantes da minha vida, principalmente minha mãe, minha tia Neuza, minha avó, e meus tios de Campinas;

e muito especialmente ao Romário, meu esposo querido, que me acompanhou de mãos dadas em cada passo do meu doutoramento, me encorajando sempre, me fortalecendo, e às vezes até fragilizando por excesso de carinho e cuidado; pelas inúmeras vezes que você me ajudou e por todas as coisas que você me ensinou e inspirou; por ter sido verdadeiramente imprescindível na realização de cada etapa deste trabalho.

Muito obrigada.

Resumo

Este trabalho estende teoremas clássicos da teoria de funções holomorfas de uma variável complexa para espaços localmente convexos de dimensão infinita. Serão dadas várias caracterizações de famílias normais, não apenas com relação à topologia compacto-aberta, mas também para outras topologias naturais no espaço de aplicações holomorfas. Teoremas de tipo Montel e de tipo Schottky, bem como outros resultados correlatos, serão estabelecidos em dimensão infinita para as diferentes topologias. Teoremas de limitação universal sobre famílias de funções holomorfas que omitem dois valores distintos serão formulados para espaços de Banach.

Abstract

The present work extends some classical theorems from the theory of holomorphic functions of one complex variable to infinite dimensional locally convex spaces. Several characterizations of normal families are given, not only for the compact-open topology, but also for other natural topologies on spaces of holomorphic mappings. Montel-type and Schottky-type theorems and various related results are established in infinite dimension for these different topologies. Universal boundedness theorems concerning families of holomorphic functions which omit two distinct values are formulated for Banach spaces.

Sumário

Introdução

O teorema clássico de Bolzano-Weierstrass afirma que toda seqüência limitada de pontos em $\mathbb{R}^n$ admite uma subseqüência convergente. Um teorema clássico de Montel estende esta propriedade a seqüências de funções holomorfas de uma variável complexa:

> *"Une suite infinie de fonctions analytiques et bornées à l'intérieur d'un domaine simplement connexe, admet au moins une fonction limite à l'intérieur de ce domaine"* – Paul Montel, 1907.

Se denotarmos por $(\mathcal{H}(U), \tau_c)$ o espaço $\mathcal{H}(U)$ das funções holomorfas em um aberto $U \subset \mathbb{C}$, munido da topologia compacto-aberta τ_c, o teorema afirma que cada seqüência limitada em $(\mathcal{H}(U), \tau_c)$ admite uma subseqüência convergente. Esta propriedade se estende imediatamente de seqüências a famílias, e o termo *família normal*, introduzido por Montel em 1912, passou a designar famílias de funções holomorfas onde toda seqüência admite uma subseqüência convergente em $(\mathcal{H}(U), \tau_c)$. Assim, uma versão do teorema clássico de Montel para famílias normais afirma que cada família limitada em $(\mathcal{H}(U), \tau_c)$ é normal.

Este processo de extrair subseqüências convergentes de um conjunto de funções foi usado primeiramente em 1899 por David Hilbert, em sua demonstração do Princípio de Dirichlet (Hilbert [9], pp. 13-14). Montel foi o primeiro a reconhecer o grande significado deste processo para a teoria de funções. Ele publicou este teorema em 1907, em sua tese (Montel [14], pp. 298-302), mais tarde conhecido como o *Teorema de Montel*.

Em linguagem moderna, o Teorema de Montel afirma que cada família $\mathfrak{F}$ limitada em $(\mathcal{H}(U), \tau_c)$ é relativamente τ_c-compacta. Se U é um aberto de um espaço de Banach E, então ainda é verdade que cada família limitada em $(\mathcal{H}(U), \tau_c)$ é relativamente τ_c-compacta. Mas se E tem dimensão infinita, então o espaço $(\mathcal{H}(U), \tau_c)$ não é metrizável, e em geral só podemos afirmar que cada rede em $\mathfrak{F}$ admite uma subrede convergente. Como é bem mais conveniente trabalhar com seqüências do que com redes, é importante obter condições equivalentes para que uma família $\mathfrak{F} \subset \mathcal{H}(U)$ seja normal.

O tema central deste trabalho são as famílias normais. Provaremos versões do Teorema de Montel e de vários resultados que dizem respeito a famílias normais em dimensão infinita, e daremos várias condições equivalentes para que uma família seja normal, não apenas com relação à topologia compacto-aberta, mas também para outras topologias naturais no espaço de funções holomorfas.

No decorrer do estudo das generalizações dos teoremas sobre famílias normais, mais especificamente, durante a tentativa de estender um teorema clássico de Montel sobre funções holomorfas com valores excepcionais que reconhece famílias normais, conhecido como o *Critério Fundamental*, fez-se necessária uma versão em dimensão infinita do *Teorema de Schottky*, que limita o crescimento de uma função holomorfa que omite dois valores em sua imagem por uma constante universal que depende apenas do valor tomado pela função na origem. A partir de então, estabelecemos versões do Teorema de Schottky em dimensão infinita, o que direcionou nosso estudo às famílias de funções holomorfas que omitem valores em sua imagem, quando passamos a examinar o "tamanho" da imagem de uma função holomorfa com valores excepcionais.

O primeiro capítulo contém versões em dimensão infinita de vários teoremas clássicos da teoria de famílias normais de funções holomorfas de uma variável complexa. Neste capítulo, o conceito de normalidade é abordado no sentido usual, ou seja, munindo o espaço das funções holomorfas com a topologia compacto-aberta. Vamos provar versões do Teorema de Montel para espaços localmente convexos e estabelecer condições necessárias e/ou suficientes para que uma família seja normal. Alguns destes resultados generalizam versões incorretas enunciadas anteriormente por Hu e Yue [10] e Kim e Krantz [11]. Alguns resultados deste capítulo foram publicados em [19].

Dando continuidade ao estudo de condições equivalentes à normalidade de uma família, no segundo capítulo serão consideradas outras topologias que aparecem de modo natural no espaço das funções holomorfas. Seguindo o que foi feito no primeiro capítulo, vamos provar teoremas de tipo Montel em dimensão infinita e investigar condições necessárias e/ou suficientes para que uma família seja normal, agora munindo o espaço das funções holomorfas com as topologias τ_π, τ_ω e τ_δ que, em dimensão infinita, diferem da topologia compacto-aberta.

Também será feita uma investigação sobre famílias fracamente normais em espaços de funções holomorfas com imagem em espaços duais, munidos da topologia compacto-fraca*-aberta. Teoremas de tipo Montel, bem como alguns resultados relacionados, e condições necessárias e/ou suficientes para a normalidade fraca serão estabelecidos na última seção deste capítulo. Um destes resultados generaliza uma versão incorreta enunciada anteriormente por Kim e Krantz [11].

O terceiro e último capítulo reúne resultados sobre famílias normais de funções holomorfas com valores excepcionais. Provaremos versões do Teorema de Schottky em dimensão infinita para espaços localmente convexos, a partir do qual serão obtidas versões em dimensão infinita do Critério Fundamental e do famoso *Pequeno Teorema de Picard*. Estes resultados foram publicados em [19].

Foram obtidos também alguns resultados de tipo Schottky para espaços de Banach. Para domínios estrelados, provaremos que uma família limitada na origem de funções holomorfas com dois valores excepcionais está contida e é limitada em $\mathcal{H}_b(U)$, o espaço das funções holomorfas de tipo limitado em U. Para domínios arbitrários, provaremos que uma família limitada em algum ponto de funções holomorfas com dois valores excepcionais está contida e é limitada em $\mathcal{H}_d(U)$, o espaço de funções holomorfas introduzido por Matos [13] em 1972 e recentemente redescoberto por Dineen e Venkova [6]. Estes resultados serão publicados em [18].

Esta tese não contém capítulos preliminares, uma vez que sua compreensão exige apenas um conhecimento básico da teoria de variáveis complexas e de topologia geral, e alguma experiência com a teoria de espaços de Banach. No decorrer deste texto, incluímos as definições e resultados sobre espaços vetoriais topológicos que se fizeram necessários.

É com grande prazer que faço constar aqui meus sinceros agradecimentos a todos aqueles que de algum modo incentivaram e contribuíram para a conclusão deste trabalho.

Capítulo 1

Famílias Normais na Topologia Compacto-Aberta

Neste capítulo, vamos definir a topologia compacto-aberta e introduzir o conceito de famílias normais de funções holomorfas no sentido usual, ou seja, munindo o espaço das funções holomorfas com a topologia compacto-aberta. Vamos provar versões do Teorema de Montel em dimensão infinita e estabelecer condições necessárias e suficientes para que uma família seja normal. Será também abordada a noção de famílias normais em um ponto.

Fixemos primeiramente algumas notações que serão adotadas neste trabalho. A menos que seja mencionado o contrário, X denotará um espaço topológico, F um espaço de Banach e E um espaço localmente convexo. De maneira usual, vamos denotar por F^X o espaço vetorial de todas as aplicações $f : X \to F$ e por $\mathcal{C}(X, F)$ o espaço vetorial das aplicações contínuas de X em F. Se U é um aberto não vazio de E, denotaremos por $\mathcal{H}(U, F)$ o espaço vetorial de todas as aplicações holomorfas de U em F. Quando $F = \mathbb{C}$ (o corpo dos números complexos), o espaço das funções contínuas $\mathcal{C}(X, F)$ será denotado simplesmente por $\mathcal{C}(X)$ e, da mesma forma, denotaremos $\mathcal{H}(U, F)$ simplesmente por $\mathcal{H}(U)$.

1.1 A Topologia Compacto-Aberta

Definição 1.1 A *topologia compacto-aberta* é a topologia localmente convexa em $\mathcal{C}(X, F)$ definida pela família de seminormas da forma:

$$p_K : f \mapsto \sup_{x \in K} \|f(x)\|,$$

onde K varia entre todos os subconjuntos compactos de X.

Esta topologia, que denotaremos por τ_c, também é conhecida como a *topologia da convergência compacta*, pois é a topologia da convergência uniforme sobre cada subconjunto compacto de X.

Da mesma forma, uma família *limitada em* $(\mathcal{C}(X, F), \tau_c)$ ou τ_c*-limitada* é uma família uniformemente limitada sobre cada subconjunto compacto de X.

Proposição 1.2 *Seja U um subconjunto aberto não vazio de um espaço localmente convexo. Então $\mathcal{H}(U, F)$ é um subespaço vetorial fechado de $(\mathcal{C}(U, F), \tau_c)$.*

Demonstração: Ver Barroso ([1], Proposition 30.1). ∎

Lembremos que um espaço topológico X é dito um k-*espaço* se um conjunto $A \subset X$ for aberto, sempre que $A \cap K$ for aberto em K para cada subconjunto compacto K de X. Exemplos de k-espaços são os espaços localmente compactos e os espaços que satisfazem a primeira condição de enumerabilidade, i.e., todo ponto possui um sistema fundamental enumerável de vizinhanças. Portanto todo espaço metrizável é um k-espaço. Se X é um k-espaço e Y é um espaço topológico qualquer, então uma aplicação $f : X \to Y$ é contínua se, e somente se, a restrição $f|_K$ for contínua, para cada subconjunto compacto K de X.

Da proposição acima segue que se E for um k-espaço localmente convexo, o limite para a topologia compacto-aberta de uma seqüência de aplicações holomorfas em U é também uma aplicação holomorfa em U, o que estende o clássico *Teorema de Weierstrass* (Montel [15], Théorème 8). Com efeito, se $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}(U, F)$ e $f_n \to f$ na topologia conpacto-aberta, então a restrição $f|_K$ é contínua, para todo $K \subset U$ compacto, e portanto f é contínua em U, pois neste caso U é um k-espaço. Mas $\mathcal{H}(U, F)$ é um subespaço fechado de $(\mathcal{C}(U, F), \tau_c)$, e portanto $f \in \mathcal{H}(U, F)$.

Definição 1.3

a) Uma família $\mathfrak{F} \subset F^X$ é dita ser *localmente limitada* se para cada $a \in X$ existem uma vizinhança $V \subset X$ de a e uma constante $c > 0$ tal que $\|f(x)\| \leq c$ para todo $x \in V$ e $f \in \mathfrak{F}$.

b) Uma família $\mathfrak{F} \subset F^X$ é dita ser *equicontínua* se para cada $a \in X$ e $\varepsilon > 0$ existe uma vizinhança $V \subset X$ de a tal que $\|f(x) - f(a)\| \leq \varepsilon$ para todo $x \in V$ e $f \in \mathfrak{F}$.

Proposição 1.4 *Sejam E um espaço localmente convexo, $U \subset E$ um subconjunto aberto e $\mathfrak{F} \subset \mathcal{H}(U, F)$. Considere as seguintes afirmações:*

(a) *$\mathfrak{F}$ é localmente limitada;*

(b) *$\mathfrak{F}$ é equicontínua e pontualmente limitada.*

(c) *$\mathfrak{F}$ é limitada em $(\mathcal{H}(U, F),\, \tau_c\,)$;*

Então (a) *e* (b) *são equivalentes e ambas implicam* (c). *Além disso, se E for metrizável, então todas as condições acima são equivalentes.*

Demonstração:

(a) $\Rightarrow$ (b): Sejam $a \in U$, $V \subset U$ uma vizinhança de a e $c > 0$ tais que:

$$\|f(x)\| < c, \text{ para todo } x \in V \text{ e } f \in \mathfrak{F}.$$

Podemos supor que $V \supset \overline{B}_\alpha(a, r) = \{x \in E : \alpha(x) \leq r\}$, para algum $r > 0$ e alguma seminorma contínua α em E. Segue da desigualdade de Cauchy que:

$$\|f(x) - f(a)\| \;\leq\; \sum_{m=1}^{\infty} \|P^m f(a)(x-a)\| \;\leq\; \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c}{r^m}\, (\alpha(x-a))^m \;\longrightarrow\; 0,$$

quando $\alpha(x - a) \to 0$, donde obtemos a equicontinuidade de $\mathfrak{F}$.

Além disso, é claro que toda família localmente limitada é pontualmente limitada.

(b) $\Rightarrow$ (a): Seja $a \in U$. Como $\mathfrak{F}$ é pontualmente limitada, existe $c > 0$ tal que $\|f(a)\| < c$, para toda $f \in \mathfrak{F}$. Além disso, existe uma vizinhança $V \subset U$ de a tal que $\|f(x) - f(a)\| < 1$, para todo $x \in V$ e $f \in \mathfrak{F}$, visto que $\mathfrak{F}$ é equicontínua. Logo, temos:

$$\|f(x)\| \;\leq\; \|f(x) - f(a)\| \;+\; \|f(a)\| \;<\; c + 1,$$

para todo $x \in V$ e $f \in \mathfrak{F}$, o que prova que $\mathfrak{F}$ é localmente limitada.

(a) $\Rightarrow$ (c): Como $\mathfrak{F}$ é uniformemente limitada em alguma vizinhança de cada ponto de U, segue que $\mathfrak{F}$ é claramente uniformemente limitada sobre cada conjunto compacto de U.

Agora suponhamos que E seja metrizável e digamos que $\mathfrak{F}$ não seja localmente limitada. Logo, existem $a \in U$ e seqüências $\{f_n\} \subset \mathfrak{F}$ e $\{a_n\} \subset U$ tais que $a_n \to a$ e $\|f_n(a_n)\| > n$, para todo n. Com isto, a seqüência $\{f_n\}$ não é limitada sobre o compacto:

$$K := \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\},$$

e desta forma, $\mathfrak{F}$ não é τ_c-limitada. Isto prova (c) $\Rightarrow$ (a), o que fecha o ciclo de equivalências.

∎

Uma outra prova da implicação (c) $\Rightarrow$ (a) da proposição acima consta também em Dineen ([5], Example 3.20(a)).

A *topologia da convergência pontual* ou *topologia produto de Tychonoff* é a topologia localmente convexa τ_p definida em F^X pelas seminormas da forma:

$$f \mapsto \sup_{x \in A} \|f(x)\|,$$

onde A varia entre todos os subconjuntos finitos de X.

Proposição 1.5 *A topologia compacto-aberta e a topologia da convergência pontual induzem a mesma topologia em cada subconjunto equicontínuo de $\mathcal{C}(X, F)$.*

Demonstração: Ver Mujica ([17], Proposition 9.11). ∎

Definição 1.6 Diremos que uma família $\mathfrak{F} \subset \mathcal{C}(X, F)$ é *pontualmente relativamente compacta* se para cada $x \in X$ o conjunto $\mathfrak{F}(x) = \{f(x) : f \in \mathfrak{F}\} \subset F$ for relativamente compacto.

Vale observarmos que em $\mathbb{C}^n$ todo conjunto limitado é relativamente compacto. Em particular, toda família $\mathfrak{F} \subset \mathcal{C}(X)$ pontualmente limitada é pontualmente relativamente compacta.

A seguir vamos enunciar o clássico *Teorema de Arzelà-Ascoli*:

Teorema 1.7 *Cada família equicontínua e pontualmente relativamente compacta de* $\mathcal{C}(X, F)$ *é relativamente compacta em* $(\mathcal{C}(X, F), \tau_c)$.

Demonstração: Ver Dugundji ([7], Theorem XII.6.4). ∎

Como $\mathcal{H}(U, F)$ é fechado em $(\mathcal{C}(U, F), \tau_c)$, é importante percebermos que quando se tratar de uma família de aplicações holomorfas $\mathfrak{F} \subset \mathcal{H}(U, F)$, onde U é um aberto não vazio de um espaço localmente convexo, então nas condições do teorema acima temos que na verdade $\mathfrak{F}$ é relativamente compacta em $(\mathcal{H}(U, F), \tau_c)$.

1.2 O Teorema de Montel

Vamos a seguir introduzir o conceito de famílias normais de funções holomorfas.

Definição 1.8 Seja E um espaço localmente convexo e U um subconjunto aberto de E. Uma família $\mathfrak{F} \subset \mathcal{H}(U)$ é dita τ_c-*normal* ou simplesmente *normal* se cada seqüência em $\mathfrak{F}$ possui uma subseqüência convergente em $(\mathcal{H}(U), \tau_c)$.

Enunciamos abaixo o teorema clássico de Montel (Montel [15], Seção 10) a respeito de famílias de funções holomorfas de uma variável complexa:

Teorema 1.9 (Montel) *Seja* U *um subconjunto aberto de* $\mathbb{C}$. *Então toda família limitada em* $(\mathcal{H}(U), \tau_c)$ *é normal.*

Observemos que no caso em que $(\mathcal{H}(U), \tau_c)$ é metrizável (por exemplo quando $U \subset \mathbb{C}^n$), os conceitos de normalidade e compacidade relativa coincidem. Logo, podemos enunciar a seguinte versão equivalente do Teorema de Montel:

Teorema 1.10 *Seja* U *um subconjunto aberto de* $\mathbb{C}$. *Então cada família* τ_c*-limitada em* $\mathcal{H}(U)$ *é relativamente* τ_c*-compacta.*

Se U é um aberto de um espaço de Banach, então ainda é verdade que cada família limitada em $(\mathcal{H}(U), \tau_c)$ é relativamente compacta (ver Mujica [17], Proposition 9.16). Mas se E tem dimensão infinita, então o espaço $(\mathcal{H}(U), \tau_c)$ não é metrizável, e em geral só podemos afirmar que cada rede limitada possui subrede convergente. Como é bem mais conveniente trabalhar com seqüências do que com redes, é importante obter condições necessárias e suficientes para que uma família $\mathfrak{F} \subset \mathcal{H}(U)$ seja normal.

Daremos a seguir um primeiro resultado nesta direção, que estende o Teorema de Montel para espaços de Banach separáveis. É um resultado já conhecido, inclusive versões bem mais gerais e completas serão dadas adiante neste trabalho (Teoremas 1.12 e 1.16), contudo optamos por demonstrá-lo a fim de elucidar as diferentes técnicas utilizadas para se trabalhar com normalidade. Esta técnica foi proposta em ([17], Exercise 9.F).

Teorema 1.11 *Sejam E um espaço de Banach separável e U um subconjunto aberto de E. Então toda família limitada em $(\mathcal{H}(U), \tau_c)$ é normal.*

Demonstração: Usaremos o processo da *diagonal de Cantor:*

Seja $\mathfrak{F}$ uma família limitada em $(\mathcal{H}(U), \tau_c)$ e consideremos uma seqüência $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ em $\mathfrak{F}$. Por hipótese, existe um subconjunto $D = \{a_1, a_2, \cdots\} \subset U$ denso em U. Como $\mathfrak{F}$ é uniformemente limitada em cada subconjunto compacto de U, temos em particular que $\{f_n\}$ é pontualmente limitada.

Assim, como $\{f_n(a_1)\}$ é uma seqüência numérica limitada, podemos extrair uma subseqüência $\{f_n^{(1)}(a_1)\}$ convergente. Por sua vez, $\{f_n^{(1)}(a_2)\}$ é uma seqüência numérica limitada; logo, podemos extrair uma subseqüência $\{f_n^{(2)}(a_2)\}$ convergente. Analogamente, como $\{f_n^{(2)}(a_3)\}$ é uma seqüência numérica limitada, podemos extrair uma subseqüência $\{f_n^{(3)}(a_3)\}$ convergente, e assim por diante.

Prosseguindo indutivamente, obtemos para cada $k \in \mathbb{N}$ uma subseqüência $\{f_n^{(k)}(a_k)\}$ de $\{f_n^{(k-1)}(a_k)\}$ convergente. Mostraremos que a seqüência diagonal $\{f_n^{(n)}\}$ converge na topologia compacto-aberta.

Observemos primeiramente que $\{f_n^{(n)}\}$ converge em cada ponto $a_k \in D$, pois por construção temos que $\{f_n^{(n)}(a_k)\}$ é, a menos dos $k-1$ termos iniciais $f_1^{(1)}(a_k), \cdots, f_{k-1}^{(k-1)}(a_k)$, uma subseqüência de $\{f_n^{(k)}(a_k)\}$, que é convergente.

Disto segue que $\{f_n^{(n)}\}$ converge pontualmente em todo U. Com efeito, considere $x \in U$ e $\varepsilon > 0$. Como $\{f_n^{(n)}\}$ constitui uma família equicontínua, existe uma vizinhança $V \subset U$ de x tal que:

$$|f_n^{(n)}(x') - f_n^{(n)}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \ \forall\, x' \in V, \ \forall\, n.$$

Além disso, podemos tomar $a_k \in V$, já que D é denso em U, e como $\{f_n^{(n)}(a_k)\}$ é convergente, existe N tal que:

$$|f_n^{(n)}(a_k) - f_m^{(m)}(a_k)\,| < \frac{\varepsilon}{3}\,,\ \forall\, n, m \geq N.$$

Logo, para $n, m \geq N$, temos:

$$|f_n^{(n)}(x) - f_m^{(m)}(x)\,| \leq |f_n^{(n)}(x) - f_n^{(n)}(a_k)\,| + |f_n^{(n)}(a_k) - f_m^{(m)}(a_k)\,| + |f_m^{(m)}(a_k) - f_m^{(m)}(x)\,| < \varepsilon.$$

Ou seja, $\{f_n^{(n)}(x)\} \subset \mathbb{C}$ é de Cauchy, e portanto convergente.

Finalmente, em se tratando de uma família equicontínua de funções holomorfas, de acordo com a Proposição 1.5 a convergência pontual coincide com a convergência uniforme em cada parte compacta de U, donde obtemos finalmente a convergência de $\{f_n^{(n)}(x)\}$ em $(\,\mathcal{H}(U)\,,\,\tau_c)$. ∎

Segundo a Proposição 1.4, toda família $\mathfrak{F} \subset \mathcal{H}(U)$ localmente limitada é τ_c-limitada, e em espaços metrizáveis a recíproca também é verdadeira. Daremos agora uma generalização do resultado acima para espaços localmente convexos separáveis, por meio de técnicas bem diversas das utilizadas na demonstração anterior.

Teorema 1.12 *Sejam E um espaço localmente convexo separável e U um subconjunto aberto não vazio de E. Então toda família localmente limitada $\mathfrak{F} \subset \mathcal{H}(U)$ é normal.*

Demonstração: Como E é separável, existe um subconjunto $D = \{x_1, x_2, \cdots\} \subset U$ denso em U. Defina $X_n := \overline{\mathfrak{F}(x_n)}$, para cada n e $X := \prod_{n=1}^{\infty} X_n$. Cada X_n é compacto por hipótese, e portanto temos do Teorema de Tychonoff que X é um espaço métrico compacto.

Seja $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ uma seqüência em $\mathfrak{F}$. Para cada k, denotemos por x^{f_k} o elemento de X dado por $(f_k(x_1), f_k(x_2), \cdots)$. Ou seja, $\{x^{f_k}\}_{k=1}^{\infty}$ é uma seqüência em X. Logo, existe uma subseqüência $\{x^{f_{k_i}}\}_{i=1}^{\infty}$ convergente. Vamos provar que $\{f_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ converge em $(\,\mathcal{H}(U)\,,\,\tau_c)$.

Como $\mathfrak{F}$ é localmente limitada, e portanto equicontínua, basta provar que $\{f_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ converge pontualmente em todo U. Para tanto, seja $y = (y_1, y_2, \cdots) \in X$ o limite de $\{x^{f_{k_i}}\}_{i=1}^{\infty}$. Ou seja, $y_n = \lim\limits_{i\to\infty} f_{k_i}(x_n)$. Em outras palavras, $\{f_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ converge pontualmente em cada x_n. Finalmente, sejam $x \in U$ e $\varepsilon > 0$. Como $\{f_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ constitui uma família equicontínua, existe uma vizinhança $V \subset U$ de x tal que:

$$|f_{k_i}(x') - f_{k_i}(x)\,| < \frac{\varepsilon}{3}\,,\ \forall\, x' \in V,\ \forall\, i.$$

Como D é denso em U, existe algum $x_n \in V$. Além disso, $\{f_{k_i}(x_n)\}$ é convergente, de modo que existe $I \in \mathbb{N}$ tal que:

$$|f_{k_i}(x_n) - f_{k_j}(x_n)\,| < \frac{\varepsilon}{3}\,,\ \forall\, i, j \geq I.$$

Logo, para $i, j \geq I$, temos:

$$|f_{k_i}(x) - f_{k_j}(x)\,| \leq |f_{k_i}(x) - f_{k_i}(x_n)\,| + |f_{k_i}(x_n) - f_{k_j}(x_n)\,| + |f_{k_j}(x_n) - f_{k_j}(x)\,| < \varepsilon.$$

Ou seja, $\{f_{k_i}(x)\} \subset \mathbb{C}$ é uma seqüência de Cauchy, e portanto convergente. A função limite f é G-holomorfa, e como $\{f_{k_i}\}$ é localmente limitada, f também é localmente limitada, e portanto holomorfa. ∎

Se U é um subconjunto aberto não vazio de um espaço localmente convexo E, então pelo Teorema de Arzelà-Ascoli (1.7) toda família localmente limitada $\mathfrak{F} \subset \mathcal{H}(U)$ é relativamente compacta em $(\,\mathcal{H}(U)\,,\,\tau_c\,)$. Desta forma, quando E é separável, em $\overline{\mathfrak{F}}^{\tau_c}$ a topologia τ_c coincide com a topologia τ_D da convergência pontual em cada ponto de uma seqüência densa $D = \{x_n\} \subset U$, sendo esta última claramente metrizável, pois é gerada pela seqüência de seminormas $\{p_n\}$ dadas por $p_n(f) := |f(x_n)|$. Da densidade de D segue que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} p_n^{-1}(0) = 0$, ou seja, τ_D é uma topologia de Hausdorff. Como τ_c é mais fina que τ_D, a aplicação identidade $id : (\overline{\mathfrak{F}}^{\tau_c},\ \tau_c) \to (\overline{\mathfrak{F}}^{\tau_c},\ \tau_D)$ é uma bijeção contínua de um espaço compacto sobre um espaço de Hausdorff, e é portanto um homeomorfismo. Poderíamos também provar o Teorema 1.12 combinando estes resultados, pois de fato isto nos mostra que $\overline{\mathfrak{F}}^{\tau_c}$ é compacta e metrizável para τ_c. Esta abordagem foi utilizada por Boyd e Dineen em ([2], p. 34) no caso em que E é um espaço metrizável.

Também no caso em que E é metrizável, o Teorema 1.12 foi enunciado em 1992 por Hu e Yue ([10] Theorem 2.1), porém os autores utilizam o fato de que se D é um subconjunto denso de um conjunto aberto U então $D \cap K$ é um subconjunto denso de K, para cada subconjunto compacto $K \subset U$, o que em geral não é verdade. É fácil encontrar exemplos em que $D \cap K$ é vazio. Por exemplo, $K = \{x\}$ com $x \notin D$.

No caso em que E é um espaço de Banach, este resultado foi enunciado em 2003 por Kim e Krantz ([11], Theorem 1.8), mas a demonstração está incompleta. Na verdade os autores provam que, para cada subconjunto compacto $K \subset U$ fixado, toda seqüência em $\mathfrak{F}$ admite uma subseqüência que converge uniformemente em K.

O próximo resultado estende um teorema sobre propagação da convergência de funções holomorfas na topologia compacto-aberta. Ele generaliza o *Teorema de Stieltjès* (Montel [15], Théorème 15) conhecido para funções de uma variável complexa. Vamos designar por *domínio* um subconjunto aberto e conexo de E.

Teorema 1.13 *Sejam E um espaço localmente convexo separável, $U \subset E$ um domínio, e seja $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência localmente limitada em $\mathcal{H}(U)$. Se $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge pontualmente em algum aberto $V \subset U$ não vazio então $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge em $(\mathcal{H}(U)\,,\,\tau_c)$.*

Demonstração: Seja $K \subset U$ um compacto e suponhamos por um momento que existam $\varepsilon_0 > 0$, duas seqüências estritamente crescentes $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}, \{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ e uma seqüência $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset K$ tais que:

$$|f_{m_k}(x_k) - f_{n_k}(x_k)| > \varepsilon_0, \text{ para todo } k.$$

Para cada k, considere a função holomorfa $g_k := f_{m_k} - f_{n_k}$. Como a seqüência $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ é localmente limitada, temos que $\mathfrak{F} = \{g_k : k \in \mathbb{N}\}$ constitui uma família localmente limitada, e portanto normal. Logo, existe uma subseqüência $\{g_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ convergente em $(\mathcal{H}(U)\,,\,\tau_c)$, digamos a uma função g. Como os valores de g_k convergem a zero em cada ponto de V, temos que g é identicamente nula em V. Assim, pelo Princípio da Identidade (Mujica [17], Proposition 5.7), temos que g é identicamente nula em todo U. Ou seja, $\{g_{k_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ converge uniformemente a zero em todo K. Mas isto é um absurdo, já que $|g_k(x_k)| > \varepsilon_0$, para todo k. ∎

Vale observar que a demonstração do Princípio da Identidade apresentada em [17] para aplicações holomorfas entre espaços de Banach também é válida para funções holomorfas definidas em espaços localmente convexos.

A hipótese de separabilidade é realmente indispensável no Teorema 1.11 (e portanto no Teorema 1.12) como podemos ver no próximo exemplo:

Exemplo 1.14 Considere o espaço de Banach não separável $E = \ell^\infty$ e seja $\mathfrak{F} = \overline{B}_{E'}$ a bola unitária fechada em E'. Claramente $\mathfrak{F}$ é um subconjunto localmente limitado de $\mathcal{H}(E)$, mas afirmamos que $\mathfrak{F}$ não é uma família normal.

De fato, seja $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathfrak{F}$ a seqüência dos funcionais lineares canônicos definidos por:

$$\varphi_j : \{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in E \;\mapsto\; \xi_j \in \mathbb{C}.$$

Se $\mathfrak{F}$ fosse normal, esta seqüência admitiria uma subseqüência que converge em $(\,\mathcal{H}(E)\,,\,\tau_c\,)$. Entretanto, dada qualquer subseqüência $\{\varphi_{j_k}\}_{k=1}^\infty$, podemos definir $x = \{\xi_j\}_{j=1}^\infty \in E$ onde $\xi_{j_k} := (-1)^k$ para todo k e $\xi_j := 0$ para $j \neq j_k$, de modo que $\{\varphi_{j_k}(x)\}_{k=1}^\infty = \{(-1)^k\}_{k=1}^\infty$ é a seqüência alternada de escalares que não converge, uma contradição.

Proposição 1.15 *Sejam E um espaço localmente convexo, U um subconjunto aberto não vazio de E e $\mathfrak{F} \subset \mathcal{H}(U)$. Considere as seguintes afirmações:*

(a) *$\mathfrak{F}$ é localmente limitada.*

(b) *$\mathfrak{F}$ é equicontínua e pontualmente limitada.*

(c) *$\mathfrak{F}$ é relativamente compacta em $(\,\mathcal{H}(U)\,,\,\tau_c\,)$.*

(d) *$\mathfrak{F}$ é limitada em $(\,\mathcal{H}(U)\,,\,\tau_c\,)$.*

Então (a) *e* (b) *são equivalentes e cada afirmação acima implica a afirmação seguinte. Além disso, se E for metrizável, então todas as condições são equivalentes.*

Demonstração:

As implicações (a) $\Leftrightarrow$ (b) e (b) $\Rightarrow$ (c) seguem, respectivamente, da Proposição 1.4 e do Teorema de Arzelà-Ascoli (1.7). E se o fecho $\overline{\mathfrak{F}}$ de $\mathfrak{F}$ em $(\mathcal{H}(U), \tau_c)$ for compacto então $\overline{\mathfrak{F}}$, e portanto $\mathfrak{F}$, é limitado em $(\mathcal{H}(U), \tau_c)$, o que prova (c) $\Rightarrow$ (d).

No caso em que E é metrizável, toda família τ_c-limitada é localmente limitada (Proposição 1.4), o que fecha o ciclo de equivalências. ∎

Finalmente, a partir das considerações anteriores a respeito de famílias de funções holomorfas, unindo as hipóteses de separabilidade e metrizabilidade vamos estabelecer condições necessárias e suficientes para que uma família seja normal.

Teorema 1.16 *Sejam E um espaço localmente convexo separável, U um subconjunto aberto não vazio de E e $\mathfrak{F} \subset \mathcal{H}(U)$. Considere as seguintes afirmações:*

(a) *$\mathfrak{F}$ é localmente limitada.*

(b) *$\mathfrak{F}$ é equicontínua e pontualmente limitada.*

(c) *$\mathfrak{F}$ é relativamente compacta em $(\mathcal{H}(U), \tau_c)$.*

(d) *$\mathfrak{F}$ é normal.*

(e) *$\mathfrak{F}$ é limitada em $(\mathcal{H}(U), \tau_c)$.*

Então (a) *e* (b) *são equivalentes e cada afirmação acima implica a afirmação seguinte. Além disso, se E for metrizável, então todas as condições são equivalentes.*

Demonstração:
As implicações (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) seguem diretamente da proposição anterior.

Com a hipótese adicional de separabilidade, obtemos a metrizabilidade de subconjuntos compactos de $(\mathcal{H}(U), \tau_c)$, já que o mesmo argumento utilizado no final da página 11 mostra que em subconjuntos compactos de $(\mathcal{H}(U), \tau_c)$ a topologia τ_c coincide com a topologia τ_D da convergência em cada ponto de uma seqüência densa $D = \{x_n\}$ de U, e com isto, quando o fecho $\overline{\mathfrak{F}}$ é compacto, e portanto metrizável, então toda seqüência em $\overline{\mathfrak{F}}$, e portanto em $\mathfrak{F}$, admite uma subseqüência convergente, ou seja, $\mathfrak{F}$ é normal. Isto prova a implicação (c) $\Rightarrow$ (d).

Vamos assumir agora que $\mathfrak{F}$ seja normal, e seja $K \subset U$ um subconjunto compacto. Suponhamos por um momento que exista uma seqüência $\{f_n\}$ em $\mathfrak{F}$ tal que:

$$\sup_{x \in K} |f_n(x)| > n, \text{ para todo } n.$$

Como $\mathfrak{F}$ é normal, $\{f_n\}$ admite uma subseqüência $\{f_{n_i}\}$ convergente em $(\mathcal{H}(U), \tau_c)$, digamos para f. Temos que $f(K)$ é compacto, logo limitado. Ou seja, existe $M < \infty$ tal que $\sup_{x \in K} |f(x)| < M$. Assim,

$$n_i < \sup_{x \in K} |f_{n_i}(x)| \leq \sup_{x \in K} |f_{n_i}(x) - f(x)| + \sup_{x \in K} |f(x)|, \text{ para cada } i.$$

Fazendo $i \to \infty$, obtemos um absurdo. Logo, $\mathfrak{F}$ é limitada na topologia τ_c, o que finalmente prova (d) $\Rightarrow$ (e).

Novamente, a metrizabilidade de E implica que toda família τ_c-limitada é localmente limitada, fechando o ciclo de equivalências. ∎

1.3 Famílias Normais em um Ponto

Antes de estender os seguintes teoremas de tipo Montel (Montel [15], Seção 19) vamos estabelecer algumas definições:

Definição 1.17 Seja $\mathfrak{F} \subset \mathcal{H}(U)$ e seja $V \subset U$ um subconjunto aberto. Dizemos que $\mathfrak{F}$ é *normal em* V se cada seqüência em $\mathfrak{F}$ possui uma subseqüência uniformemente convergente em cada parte compacta de V. Neste caso, diremos que cada seqüência em $\mathfrak{F}$ possui uma subseqüência que converge em $(\mathcal{H}(V), \tau_c)$.

Quando $V = U$, esta definição simplesmente coincide com a definição de uma família normal.

Definição 1.18 Uma família $\mathfrak{F} \subset \mathcal{H}(U)$ é dita *normal em um ponto* $x_0 \in U$ se existir uma vizinhança aberta $V \subset U$ de x_0 onde a família seja normal.

Uma família normal em um aberto U é evidentemente normal em cada um de seus pontos. Provaremos a seguir que a recíproca também é verdadeira para espaços localmente convexos metrizáveis separáveis. Antes disso, vamos precisar do seguinte resultado:

Teorema 1.19 *Sejam E um espaço localmente convexo, $U \subset E$ um aberto e $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência de abertos em U. Se uma família $\mathfrak{F} \subset \mathcal{H}(U)$ é normal em cada V_n, então $\mathfrak{F}$ é normal em $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$.*

Demonstração: Considere uma seqüência $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{F}$. Como $\mathfrak{F}$ é normal em cada V_n, então em particular $\{f_n\}$ possui uma subseqüência $\{f_n^{(1)}\}$ uniformemente convergente em cada compacto de V_1. Por sua vez, $\{f_n^{(1)}\}$ possui, em particular, uma subseqüência $\{f_n^{(2)}\}$ uniformemente convergente em cada compacto de V_2. E por ser subseqüência de $\{f_n^{(1)}\}$, $\{f_n^{(2)}\}$ é também uniformemente convergente em cada compacto de V_1. Ou seja, $\{f_n^{(2)}\}$ converge uniformemente em cada compacto de $V_1 \cup V_2$. Da mesma forma, $\{f_n^{(2)}\}$ admite uma subseqüência $\{f_n^{(3)}\}$ uniformemente convergente em cada compacto de $V_1 \cup V_2 \cup V_3$. Procedendo assim por diante, obteremos para cada k uma subseqüência $\{f_n^{(k)}\}$ de $\{f_n^{(k-1)}\}$ uniformemente convergente em cada compacto de $V_1 \cup \cdots \cup V_k$. Vamos mostrar que a seqüência diagonal $\{f_n^{(n)}\}$ converge em cada parte compacta de $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$.

Seja $K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ compacto. Como $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ forma uma cobertura aberta de K, podemos extrair uma subcobertura finita e portanto $K \subset V_1 \cup \cdots \cup V_k$, para algum k. Ora, $\{f_n^{(n)}\}$ é, a menos dos $k-1$ primeiros termos $f_1^{(1)}, f_2^{(2)}, \cdots, f_{k-1}^{(k-1)}$, uma subseqüência de $\{f_n^{(k)}\}$, que converge uniformemente nos compactos de $V_1 \cup \cdots \cup V_k$, donde concluímos finalmente que $\{f_n^{(n)}\}$ é uniformemente convergente em K. Por hipótese, a função limite é holomorfa em cada V_n, e portanto holomorfa em $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$. ∎

Tendo provado o resultado anterior, o próximo teorema agora segue facilmente:

Teorema 1.20 *Sejam E um espaço localmente convexo metrizável separável e $U \subset E$ aberto. Então uma família $\mathfrak{F} \subset \mathcal{H}(U)$ é normal se, e somente se, ela é normal em todos os pontos de U.*

Demonstração:

Para provar a implicação não trivial vamos assumir que $\mathfrak{F}$ seja normal em cada ponto de U, ou seja, para cada $x \in U$ existe uma vizinhança aberta $V_x \subset U$ de x onde $\mathfrak{F}$ é normal. É claro que $U = \bigcup_{x \in U} V_x$, e como todo espaço métrico separável é um espaço de Lindelöf, existe uma subcobertura enumerável de $\bigcup_{x \in U} V_x$, ou seja, $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_{x_n}$, e o resultado segue imediatamente do Teorema 1.19. ∎

Pode ser útil observarmos que, em decorrência deste teorema, para provar que uma família $\mathfrak{F} \subset \mathcal{H}(U)$ é normal podemos sempre supor sem perda de generalidade que U é uma bola, no caso em que E for um espaço separável e metrizável.

Alguns dos resultados deste capítulo foram publicados em [19].

Capítulo 2

A Normalidade em Diferentes Topologias

Daremos continuidade ao estudo de condições que nos garantem a normalidade de uma família. Outras topologias naturais em $\mathcal{H}(U)$ serão consideradas, bem como outros espaços de aplicações holomorfas e um novo conceito de normalidade serão abordados neste capítulo.

Vamos denotar por E um espaço localmente convexo e U um subconjunto aberto não vazio de E.

2.1 Topologias no Espaço de Funções Holomorfas

Diferentemente do que ocorre em $\mathbb{C}^n$, em dimensão infinita aparecem várias outras topologias de modo natural no espaço das funções holomorfas $\mathcal{H}(U)$, além da topologia compacto-aberta. Vamos definir a seguir algumas destas topologias, para as quais obtivemos os resultados estabelecidos na próxima seção. Para mais detalhes sobre estas topologias, recomendamos Dineen [5].

Definição 2.1 Uma seminorma $p : \mathcal{H}(U) \to \mathbb{R}$ é dita *portada por um compacto* $K \subset U$ se para cada vizinhança V de K contida em U existe uma constante $c(V) > 0$ tal que:

$$p(f) \leq c(V) \sup_{x \in V} |f(x)|,$$

para toda $f \in \mathcal{H}(U)$.

A *topologia de Nachbin*, que denotaremos por τ_ω, é a topologia localmente convexa em $\mathcal{H}(U)$ definida pela família de todas as seminormas em $\mathcal{H}(U)$ que são portadas por algum subconjunto compacto de U.

Definição 2.2 Uma seminorma $p : \mathcal{H}(U) \to \mathbb{R}$ é dita *portada por uma cobertura aberta $\mathcal{V}$ de U* se existem uma constante $c(\mathcal{V}) > 0$ e $V_1, \cdots, V_n \in \mathcal{V}$ tais que:

$$p(f) \leq c(\mathcal{V}) \sup_{x \in V_1 \bigcup \cdots \bigcup V_n} |f(x)|,$$

para toda $f \in \mathcal{H}(U)$.

A *topologia* τ_λ é a topologia localmente convexa em $\mathcal{H}(U)$ definida pela família de todas as seminormas em $\mathcal{H}(U)$ que são portadas por todas as coberturas abertas de U.

A *topologia* τ_δ é a topologia localmente convexa em $\mathcal{H}(U)$ definida pela família de todas as seminormas em $\mathcal{H}(U)$ que são portadas por todas as coberturas abertas enumeráveis de U.

Observações 2.3

a) Se E tem dimensão finita, então $\tau_c = \tau_\omega = \tau_\lambda = \tau_\delta$.

b) Já em dimensão infinita, é claro que $\tau_\lambda \leq \tau_\delta$. Além disso, toda seminorma p_K que define a topologia τ_c é claramente portada pelo próprio compacto K. Por sua vez, se p é uma seminorma em $\mathcal{H}(U)$ portada por um compacto K e $\mathcal{V}$ é uma cobertura aberta de U, então K admite uma subcobertura finita $V_1 \cup \cdots \cup V_n$ de $\mathcal{V}$. Ou seja, tomando $c(\mathcal{V}) = c(V)$, onde $V = V_1 \cup \cdots \cup V_n$, segue que p é portada por $\mathcal{V}$. Desta forma, temos observado que:

$$\tau_c \leq \tau_\omega \leq \tau_\lambda \leq \tau_\delta.$$

Além disso, se E é um espaço de Lindelöf então as topologias τ_λ e τ_δ coincidem. Em particular, $\tau_\lambda = \tau_\delta$ em espaços de Banach separáveis.

c) Se E é metrizável então as topologias $\tau_c, \tau_\omega, \tau_\lambda$ e τ_δ definem os mesmos conjuntos limitados em $\mathcal{H}(U)$ (Mujica [16], Proposición 11.2).

2.2 Germes de Funções Holomorfas e a Topologia τ_π

Dado um subconjunto compacto não vazio $K \subset E$, definimos:

$$h(K) := \bigcup \{ \mathcal{H}(U) \ : \ U \subset E \text{ aberto } \ \text{ e } \ U \supset K \}.$$

Sejam $f_1, f_2 \in h(K)$, ou seja, $f_1 \in \mathcal{H}(U_1)$, $f_2 \in \mathcal{H}(U_2)$, com $U_1, U_2 \subset E$ abertos contendo K. Dizemos que $f_1 \equiv f_2 \mod K$ se o conjunto $\{ x \in U_1 \cap U_2 : f_1(x) = f_2(x) \}$ for uma vizinhança de K em E.

A equivalência módulo K é uma relação de equivalência em $h(K)$. Cada classe de equivalência é chamada *germe de funções holomorfas de* K. Denotamos o conjunto destes germes por $H(K)$, ou seja:

$$H(K) := h(K)/\equiv .$$

A projeção canônica $\pi : f \in h(K) \mapsto [f] \in H(K)$ induz por restrição uma aplicação natural $\pi_{_U} : \mathcal{H}(U) \to H(K)$ para cada $U \subset E$ aberto contendo K.

Se definirmos em $H(K)$ as operações:

$$[f_1] + [f_2] := [f_1|_{_{U_1 \cap U_2}} + f_2|_{_{U_1 \cap U_2}}]$$

$$\lambda[f] := [\lambda f],$$

munimos $H(K)$ com uma estrutura de espaço vetorial que torna cada aplicação natural $\pi_{_U} : \mathcal{H}(U) \to H(K)$ uma aplicação linear.

Desta forma, as imagens naturais de $\mathcal{H}(U)$ em $H(K)$, com $U \subset E$ aberto contendo K, formam uma coleção dirigida de subespaços vetoriais cuja união é todo o espaço $H(K)$.

Munindo $\mathcal{H}(U)$ com a topologia τ_ω, denotamos a topologia indutiva localmente convexa em $H(K)$ com respeito à família de aplicações:

$$\{\pi_{_U} : (\mathcal{H}(U), \tau_\omega) \to H(K) \quad | \quad U \subset E \text{ aberto contendo } K\}$$

também por τ_ω. Ou seja:

Definição 2.4 A *topologia* τ_ω é a topologia localmente convexa mais fina em $H(K)$ que torna cada aplicação $\pi_{_U} : (\mathcal{H}(U), \tau_\omega) \to (H(K), \tau_\omega)$ contínua, para todo $U \subset E$ aberto contendo K, e escrevemos:

$$(H(K), \tau_\omega) := \operatorname*{ind}_{U \supset K} (\mathcal{H}(U), \tau_\omega).$$

Definição 2.5 A *topologia* τ_π é a topologia projetiva localmente convexa em $\mathcal{H}(U)$ com respeito à família de aplicações:

$$\{\pi_{_U} : \mathcal{H}(U) \to (\, H(K), \tau_\omega \,) \;\mid\; K \subset U \text{ compacto não vazio}\}.$$

Em outras palavras, τ_π é a topologia localmente convexa menos fina em $\mathcal{H}(U)$ que torna cada aplicação $\pi_{_U} : (\, \mathcal{H}(U), \tau_\pi \,) \to (\, H(K), \tau_\omega \,)$ contínua, para todo $K \subset U$ compacto não vazio, e escrevemos:

$$(\, \mathcal{H}(U), \tau_\pi \,) := \operatorname*{proj}_{K \subset U} (\, H(K), \tau_\omega \,).$$

Notemos que $\tau_c \leq \tau_\pi \leq \tau_\omega$, e com isto as topologias $\tau_c, \tau_\pi, \tau_\omega, \tau_\lambda$ e τ_δ definem todas os mesmos conjuntos limitados em $\mathcal{H}(U)$ sempre que E for metrizável.

2.3 Famílias τ-Normais em $\mathcal{H}(U)$

Seguindo o que foi feito na seção 1.2, vamos investigar condições necessárias e suficientes para garantir a normalidade em $\mathcal{H}(U)$, agora munido com as topologias τ_π, τ_ω e τ_δ que, em dimensão infinita, diferem da topologia compacto-aberta.

Serão peças fundamentais nesta investigação alguns resultados de García e Mujica, que vamos enunciar adiante (Teorema 2.12 e Corolário 2.13). Mas antes disso, vale relembrarmos algumas noções sobre espaços vetoriais topológicos. A menos que seja mencionado o contrário, E denota um espaço localmente convexo de Hausdorff e U denota um subconjunto aberto de E.

Recordemos que um conjunto $A \subset E$ é dito *equilibrado* se $\lambda x \in A$ sempre que $x \in A$ e $|\lambda| \leq 1$, e se $x_0 \in A$ então A é dito x_0-*equilibrado* se o conjunto $A - x_0$ for equilibrado. O conjunto A é dito *absorvente* se A absorve todos os pontos de E, ou seja, para cada $x \in E$ existe $\delta > 0$ tal que $\lambda x \in A$ sempre que $|\lambda| \leq \delta$.

Dado um subconjunto absorvente $A \subset E$, denotamos por p_A o *funcional de Minkowski de* A, ou seja, a função definida por:

$$
\begin{aligned}
p_A : E &\to \mathbb{R} \\
x &\mapsto \inf\{\alpha > 0 : x \in \alpha A\}.
\end{aligned}
$$

Se, além de absorvente, A for também convexo e equilibrado, então p_A define uma semi-norma em E.

Dado um subconjunto convexo, equilibrado e limitado $B \subset E$, denotamos por E_B o subespaço vetorial de E gerado por B, ou seja,

$$E_B = \bigcup_{n=1}^{\infty} nB,$$

(semi)normado pelo funcional de Minkowski p_B. Na verdade, o fato de B ser limitado faz com que o funcional de Minkowski de B defina uma norma em E_B, ou seja, nestas condições E_B é um espaço normado.

Definição 2.6 Dizemos que um espaço localmente convexo E satisfaz a *condição de convergência de Mackey estrita* se, para cada subconjunto limitado $A \subset E$, existe um subconjunto $B \subset E$ convexo, equilibrado e limitado tal que $A \subset E_B$, e os espaços E e E_B induzem a mesma topologia em A.

É importante percebermos que, como o espaço E_B neste caso é normado, em espaços que satisfazem a condição de convergência de Mackey estrita segue que todo conjunto limitado é normável.

Definição 2.7 Dizemos que E é um espaço *quase-normável* se, dada uma vizinhança de zero $V \subset E$, existe uma vizinhança de zero $W \subset E$ tal que a cada $\delta > 0$ corresponde um subconjunto limitado $B_\delta \subset E$ que satisfaz:

$$W \subset B_\delta + \delta V.$$

Vale ressaltar o fato de que todo espaço de Banach é quase-normável. Na verdade, todo espaço $\mathfrak{DF}$ infratonelado é quase-normável, a saber:

Definição 2.8 Seja E um espaço vetorial topológico.

a) Um conjunto $A \subset E$ é chamado de *tonel* se A é fechado, convexo, equilibrado e absorvente.

b) Um conjunto $A \subset E$ é dito *bornívoro* se A absorve cada limitado de E, ou seja, dado $B \subset E$ limitado, existe $\delta > 0$ tal que $\lambda B \subset A$ sempre que $|\lambda| \leq \delta$.

c) E é dito *tonelado* se cada tonel em E é uma vizinhança de zero.

d) E é dito *infratonelado* se cada tonel bornívoro em E é uma vizinhança de zero.

O dual E' de E, munido da topologia da convergência uniforme sobre os limitados de E, é chamado o *dual forte* de E, e é denotado por E'_b. Diremos que $\Phi \subset E'$ é *fortemente limitado* se Φ é limitado em E'_b, ou seja, Φ é uniformemente limitado sobre cada limitado de E.

Definição 2.9 Um *espaço* $\mathfrak{DF}$ é um espaço localmente convexo H com as seguintes propriedades:

i) H admite uma seqüência fundamental de limitados;

ii) Toda união enumerável fortemente limitada de subconjuntos equicontínuos do dual H' de H é um conjunto equicontínuo.

Segue do Teorema de Banach-Steinhaus que todo *espaço de Fréchet* (i.e. um espaço localmente convexo metrizável completo) é tonelado, logo infratonelado. E de acordo com Mujica [16] (Observación 13.2 e Corolario 16.9), todo espaço infratonelado satisfaz a condição ii) da Definição 2.9, e em particular todo espaço de Banach é um espaço $\mathfrak{DF}$ infratonelado, e portanto quase-normável.

Assim como espaços quase-normáveis, outros importantes conceitos podem ser expressos através de inclusão de conjuntos:

Definição 2.10 Dizemos que E é um *espaço de Schwartz* se, dada uma vizinhança de zero $V \subset E$, existe uma vizinhança de zero $W \subset E$ tal que a cada $\delta > 0$ corresponde um subconjunto finito $A_\delta \subset E$ que satisfaz:

$$W \subset A_\delta + \delta V.$$

Com motivação no Teorema de Montel em teoria clássica de funções complexas (Teorema 1.10), define-se:

Definição 2.11 Um espaço localmente convexo E é dito *semi-Montel* se todo subconjunto limitado de E é relativamente compacto. Um espaço semi-Montel infratonelado é dito um *espaço de Montel*.

Claramente, todo espaço E semi-Montel é *quase-completo* (i.e. cada subconjunto fechado e limitado de E é completo). Reciprocamente, há também uma caracterização para espaços semi-Montel quase-completos em termos de inclusão de conjuntos: um espaço localmente convexo quase-completo E é semi-Montel se, e somente se, para cada vizinhança de zero $V \subset E$, cada subconjunto limitado $B \subset E$ e cada $\delta > 0$, existe um subconjunto finito $A_\delta \subset E$ tal que:

$$B \subset A_\delta + \delta V.$$

Estas representações mostram que espaços de Schwartz são quase-normáveis e que espaços quase-completos de Schwartz são semi-Montel. Em particular, todo espaço de Fréchet-Schwartz é um espaço de Montel. Mais ainda, um espaço localmente convexo completo E é um espaço de Schwartz se, e somente se, E é semi-Montel e quase-normável.

Finalmente estamos nas condições de enunciar os resultados de García e Mujica:

Teorema 2.12 (García e Mujica) *Seja U um subconjunto aberto de um espaço de Fréchet separável E. Então as seguintes condições são equivalentes:*

a) E é quase-normável;

b) $(\mathcal{H}(U), \tau_\pi)$ satisfaz a condição de convergência de Mackey estrita.

c) $(\mathcal{H}(U), \tau_\omega)$ satisfaz a condição de convergência de Mackey estrita;

d) $(\mathcal{H}(U), \tau_\delta)$ satisfaz a condição de convergência de Mackey estrita;

Se uma destas condições (e portanto todas) é satisfeita, então τ_π, τ_ω e τ_δ induzem a mesma topologia em cada subconjunto limitado.

Demonstração: Ver García e Mujica ([8], Theorem 2.1). ∎

Corolário 2.13 *Seja U um subconjunto aberto de um espaço de Fréchet E. Então as seguintes condições são equivalentes:*

a) E *é um espaço de Schwartz;*

b) $(\mathcal{H}(U), \tau_\pi)$ *é um espaço semi-Montel que satisfaz a condição de convergência de Mackey estrita.*

c) $(\mathcal{H}(U), \tau_\omega)$ *é um espaço semi-Montel que satisfaz a condição de convergência de Mackey estrita;*

d) $(\mathcal{H}(U), \tau_\delta)$ *é um espaço semi-Montel que satisfaz a condição de convergência de Mackey estrita;*

Demonstração: Ver García e Mujica ([8], Corollary 2.3). ∎

Vamos generalizar o conceito de normalidade:

Definição 2.14 Seja E um espaço localmente convexo e U um subconjunto aberto de E. Vamos denotar por τ as topologias τ_π, τ_ω ou τ_δ. Uma família $\mathfrak{F} \subset \mathcal{H}(U)$ é chamada τ-*normal* se toda seqüência em $\mathfrak{F}$ possui uma subseqüência convergente em $(\mathcal{H}(U), \tau)$.

Proposição 2.15 *Sejam* E *um espaço localmente convexo metrizável e* U *um subconjunto aberto de* E*. Então:*

a) *Toda família* $\mathfrak{F} \subset \mathcal{H}(U)$ τ_π*-normal é* τ_π*-limitada.*

b) *Toda família* $\mathfrak{F} \subset \mathcal{H}(U)$ τ_ω*-normal é* τ_ω*-limitada.*

c) *Toda família* $\mathfrak{F} \subset \mathcal{H}(U)$ τ_δ*-normal é* τ_δ*-limitada.*

Demonstração: Com efeito, se denotarmos por τ as topologias τ_π, τ_ω ou τ_δ, como as topologias τ_π, τ_ω e τ_δ são mais finas do que a topologia compacto-aberta, segue diretamente que toda família τ-normal é τ_c-normal, e portanto τ_c-limitada $=$ τ-limitada. ∎

Teorema 2.16 *Sejam* E *um espaço de Fréchet quase-normável separável,* $U \subset E$ *um subconjunto aberto e* $\mathfrak{F}$ *uma família em* $\mathcal{H}(U)$*. Então as seguintes condições são equivalentes:*

a) $\mathfrak{F}$ *é* τ_π*-normal.*

b) $\mathfrak{F}$ *é relativamente* τ_π*-compacta.*

c) $\mathfrak{F}$ *é* τ_ω*-normal.*

d) $\mathfrak{F}$ *é relativamente* τ_ω*-compacta.*

e) $\mathfrak{F}$ *é* τ_δ*-normal.*

f) $\mathfrak{F}$ *é relativamente* τ_δ*-compacta.*

Diante do resultado provado por García e Mujica e das observações acima, a demonstração deste teorema torna-se bastante direta:

Demonstração: Segue de uma só vez do Teorema 2.12 que $(\mathcal{H}(U), \tau_\pi)$, $(\mathcal{H}(U), \tau_\omega)$ e $(\mathcal{H}(U), \tau_\delta)$ satisfazem a condição de convergência de Mackey estrita, e por conseguinte, obtemos em particular a metrizabilidade de conjuntos limitados para estas topologias.

Assim, seja $\mathfrak{F}$ uma família em $\mathcal{H}(U)$ e vamos denotar por τ as topologias τ_π, τ_ω ou τ_δ. Uma vez que tanto famílias τ-normais quanto relativamente τ-compactas são τ-limitadas, e portanto metrizáveis, de fato τ-normalidade e τ-compacidade relativa coincidem em $\mathfrak{F}$, o que prova as equivalências (a) $\Leftrightarrow$ (b), (c) $\Leftrightarrow$ (d), (e) $\Leftrightarrow$ (f).

Segue da última afirmação do Teorema 2.12 que τ_π, τ_ω e τ_δ induzem a mesma topologia em cada subconjunto limitado, e isto completa a demonstração. ∎

Como espaços de Banach são em particular espaços de Fréchet quase-normáveis, podemos enunciar o seguinte:

Corolário 2.17 *Sejam* E *um espaço de Banach separável,* $U \subset E$ *um subconjunto aberto e* $\mathfrak{F}$ *uma família em* $\mathcal{H}(U)$*. Então as seguintes condições são equivalentes:*

a) $\mathfrak{F}$ *é* τ_π*-normal.*

b) $\mathfrak{F}$ *é relativamente* τ_π*-compacta.*

c) $\mathfrak{F}$ *é* τ_ω*-normal.*

d) $\mathfrak{F}$ *é relativamente* τ_ω*-compacta.*

e) $\mathfrak{F}$ *é* τ_δ*-normal.*

f) $\mathfrak{F}$ *é relativamente* τ_δ*-compacta.*

Para espaços de Fréchet-Schwartz obtivemos uma série de equivalências para cada uma das topologias τ_π, τ_ω e τ_δ. Vale observar que todo espaço de Fréchet-Schwartz é separável. Aliás, todo espaço de Fréchet-Montel é separável (ver Köthe [12], p. 370).

Teorema 2.18 *Sejam* E *um espaço de Fréchet-Schwartz,* $U \subset E$ *um subconjunto aberto. Se denotarmos por* τ *as topologias* τ_π*,* τ_ω *ou* τ_δ*, então para cada família* $\mathfrak{F} \subset \mathcal{H}(U)$ *as seguintes condições são equivalentes:*

a) $\mathfrak{F}$ *é* τ*-normal.*

b) $\mathfrak{F}$ *é relativamente* τ*-compacta.*

c) $\mathfrak{F}$ *é* τ*-limitada.*

d) $\mathfrak{F}$ *é* τ_c*-limitada.*

e) $\mathfrak{F}$ *é* τ_c*-normal.*

f) $\mathfrak{F}$ *é relativamente* τ_c*-compacta.*

g) $\mathfrak{F}$ *é equicontínua e pontualmente limitada.*

h) $\mathfrak{F}$ *é localmente limitada.*

Demonstração: A equivalência (a) $\Leftrightarrow$ (b) segue do teorema anterior, uma vez que espaços de Schwartz são quase-normáveis. E segundo o Corolário 2.13 de García e Mujica, os espaços $(\mathcal{H}(U), \tau)$ são semi-Montel, donde obtemos a equivalência fundamental (b) $\Leftrightarrow$ (c). Com a metrizabilidade de E, sabemos que (c) $\Leftrightarrow$ (d). As demais equivalências são fornecidas diretamente pelo Teorema 1.16. ∎

2.4 Famílias Fracamente Normais

Sejam E um espaço localmente convexo, F um espaço de Banach e seja F' o dual topológico de F. Seja U um subconjunto aberto de E e seja $\mathcal{H}(U, F')$ o espaço vetorial de todas as aplicações holomorfas de U em F'. Nesta seção, vamos estabelecer um teorema de tipo Montel para famílias em $\mathcal{H}(U, F')$ e obter resultados para estas famílias sobre condições relacionadas à normalidade, seguindo os Teoremas 1.15 e 1.16. Para tanto, vamos munir este espaço de uma topologia fraca e introduzir o conceito de normalidade fraca.

Considere as seguintes seminormas em $\mathcal{H}(U, F')$:

$$p_{K,B}(f) = \sup_{x \in K,\ y \in B} |f(x)(y)|,$$

onde $K \subset U$ compacto e $B \subset F$ finito.

Definição 2.19 A topologia localmente convexa em $\mathcal{H}(U, F')$ definida pela família de seminormas acima é chamada a *topologia compacto-fraca*-aberta*, que denotaremos por τ_c^*.

O espaço $(\mathcal{H}(U, F'), \tau_c^*)$ é Hausdorff, uma vez que $\bigcap_{K,B} p_{K,B}{}^{-1}\{0\} = \{0\}$, onde K varia entre todos os subconjuntos compactos de U e B varia entre todos os subconjuntos finitos de F.

Para cada $y \in F$, consideremos a aplicação:

$$\begin{aligned} \pi_y : \mathcal{H}(U, F') &\to (\mathcal{H}(U), \tau_c) \\ f &\mapsto f_y \end{aligned}$$

onde f_y denota a função holomorfa dada por $f_y(x) := f(x)(y)$, para cada $x \in U$. Se denotarmos por $U_{K,\varepsilon} = \{ f \in \mathcal{H}(U) \ : \ p_K(f) < \varepsilon \}$ as vizinhanças básicas de zero em $(\mathcal{H}(U), \tau_c)$, então os conjuntos:

$$\begin{aligned} \bigcap_{y \in B} \pi_y^{-1}(U_{K,\varepsilon}) &= \bigcap_{y \in B} \{ f \in \mathcal{H}(U, F') \ : \ \pi_y(f) \in U_{K,\varepsilon} \} \\ &= \bigcap_{y \in B} \{ f \in \mathcal{H}(U, F') \ : \ \sup_{x \in K} |f(x)(y)| < \varepsilon \} \end{aligned}$$

$$= \{\, f \in \mathcal{H}(U, F') \;:\; \sup_{x \in K,\ y \in B} |f(x)(y)| < \varepsilon \,\}$$

com $B \subset F$ finito, $K \subset U$ compacto e $\varepsilon > 0$, formam uma base de vizinhanças de zero em $\mathcal{H}(U, F')$ para a topologia τ_c^*. Em outras palavras, τ_c^* é a topologia projetiva em $\mathcal{H}(U, F')$ com relação à família de aplicações $\{\pi_y \,:\, y \in F\}$.

Além disso, a coleção $\{\pi_y \,:\, y \in F\}$ separa pontos em $\mathcal{H}(U, F')$. Com efeito, sejam $f \neq g$ em $\mathcal{H}(U, F')$ e suponhamos por um momento que $\pi_y(f) = \pi_y(g)$, para todo $y \in F$. Assim,

$$f(x)(y) = f_y(x) = \pi_y(f)(x) = \pi_y(g)(x) = g_y(x) = g(x)(y),$$

para todo $y \in F$. Ou seja, $f(x) = g(x)$ para cada $x \in U$, e daí $f = g$, uma contradição.

Com isto, temos que a aplicação:

$$\begin{aligned} \pi : (\, \mathcal{H}(U, F'),\, \tau_c^* \,) &\to \prod_{y \in F} (\, \mathcal{H}(U),\, \tau_c \,) \\ f &\mapsto (\, \pi_y(f) \,)_{y \in F} = (f_y)_{y \in F} \end{aligned}$$

é um mergulho. Ou seja, π é um homeomorfismo entre $(\, \mathcal{H}(U, F'),\, \tau_c^* \,)$ e um subespaço de $\prod_{y \in F} (\, \mathcal{H}(U),\, \tau_c \,)$.

Como F' é um espaço de Banach, podemos também munir o espaço $\mathcal{H}(U, F')$ com a topologia compacto-aberta. A relação entre as topologias compacto-fraca*-aberta e compacto-aberta é dada pela seguinte:

Proposição 2.20 *A topologia τ_c^* é menos fina que a topologia τ_c.*

Demonstração: Sejam $K \subset U$ compacto, $B \subset F$ finito e $\varepsilon > 0$ e seja:

$$V = U_{K,B,\varepsilon} = \{f \in \mathcal{H}(U, F') \;:\; \sup_{x \in K,\ y \in B} |f(x)(y)| < \varepsilon\}$$

uma vizinhança básica de zero em $\mathcal{H}(U, F')$ para a topologia τ_c^*. Tomemos então a seguinte vizinhança de zero para a topologia τ_c:

$$W = U_{K, \frac{\varepsilon}{M}} = \{f \in \mathcal{H}(U, F') \;:\; \sup_{x \in K} \|f(x)\| < \frac{\varepsilon}{M}\}, \quad \text{onde } M = \max_{y \in B} \|y\|.$$

Afirmamos que $W \subset V$. Com efeito, se $f \in W$ então:

$$\sup_{x \in K,\ y \in B} |f(x)(y)| \;\leq\; \sup_{x \in K,\ y \in B} \|f(x)\| \, \|(y)\| \;\leq\; \frac{\varepsilon}{M}\, M \;=\; \varepsilon,$$

ou seja, $f \in V$ e isto completa a demonstração. ∎

Porém ambas as topologias possuem os mesmos conjuntos limitados:

Proposição 2.21 *As topologias τ_c^* e τ_c definem os mesmos conjuntos limitados em $\mathcal{H}(U, F')$.*

Demonstração: É claro que todo conjunto τ_c-limitado é τ_c^*-limitado, visto que $\tau_c^* \leq \tau_c$. Agora seja $X \subset \mathcal{H}(U, F')$ τ_c^*-limitado, ou seja, dados $K \subset U$ compacto e $B \subset F$ finito, existe $c_{K,B} < \infty$ tal que:

$$\sup_{x \in K,\ y \in B} |f(x)(y)| < c_{K,B},\ \forall\, f \in X.$$

Em particular, para cada $K \subset U$ compacto, a família $\{f(x) : x \in K,\ f \in X\} \subset F'$ é pontualmente limitada. Logo, pelo Teorema de Banach-Steinhaus, existe $M < \infty$ tal que:

$$\|f(x)\| < M, \ \ \forall\, x \in K, \forall\, f \in X,$$

ou seja, X é uniformemente limitado sobre cada subconjunto compacto de U. Em outras palavras, X é τ_c-limitado. ∎

Definição 2.22 Uma família $\mathfrak{F} \subset \mathcal{H}(U, F')$ é chamada *fracamente normal* ou τ_c^**-normal* se toda seqüência em $\mathfrak{F}$ possui uma subseqüência convergente em $(\mathcal{H}(U, F'), \tau_c^*)$.

Proposição 2.23 *Se E é metrizável então o limite de cada seqüência em $\mathcal{H}(U, F')$ que converge para a topologia τ_c^* é também uma função holomorfa.*

Vamos provar esta proposição lembrando o seguinte resultado enunciado em (Mujica [17], 8.D) para espaços de Banach. Vale mencionar que este resultado continua válido para E metrizável:

Lema 2.24 *Sejam E e F espaços de Banach e $U \subset E$ aberto. Uma função $f : U \to F'$ é holomorfa se, e somente se, para cada $y \in F$ a função $x \in U \mapsto f(x)(y) \in \mathbb{C}$ é holomorfa.*

Demonstração da Proposição: Seja $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência em $\mathcal{H}(U, F')$. Para cada $y \in F$, considere as funções:

$$\begin{aligned} f_n^{(y)} : U &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto f_n(x)(y). \end{aligned}$$

Vamos assumir que a seqüência $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a uma função f na topologia τ_c^*. Em particular, para cada $y \in F$, a seqüência $\{f_n^{(y)}\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}(U)$ converge na topologia τ_c para a função:

$$f_y(x) := f(x)(y).$$

Como a função f_y é o limite de uma seqüência de funções holomorfas para a topologia compacto-aberta e E é um k-espaço, temos que f_y é holomorfa, para cada $y \in F$, e pelo lema segue que f é holomorfa. ∎

Provaremos agora um primeiro resultado de tipo Montel para a topologia τ_c^*. Uma versão bem mais geral e completa será provada no Teorema 2.27, porém utilizando técnicas totalmente diversas da demonstração que daremos a seguir:

Teorema 2.25 *Sejam E um espaço localmente convexo metrizável e separável, F um espaço de Banach separável e U um subconjunto aberto de E. Então todo subconjunto limitado de $(\mathcal{H}(U, F'), \tau_c^*)$ é τ_c^*-normal.*

Demonstração: Seja $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ uma seqüência limitada em $(\mathcal{H}(U, F'), \tau_c^*)$. Ou seja, dados $K \subset U$ compacto e $B \subset F$ finito, existe $c_{K,B} < \infty$ tal que:

$$\sup_{x \in K,\ y \in B} |f_j(x)(y)| < c_{K,B},\ \forall\, j.$$

Defina para cada $y \in F$ o funcional linear:

$$\begin{aligned} \delta_y : F' &\to \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto \varphi(y), \end{aligned}$$

e para cada $y \in F$ e $j \in \mathbb{N}$, defina as seguintes funções holomorfas:

$$\phi_{y,j} := \delta_y \circ f_j \in \mathcal{H}(U).$$

Note que, para cada $y \in F$, a seqüência $\{\phi_{y,j}\}_{j=1}^{\infty}$ é limitada em $(\mathcal{H}(U), \tau_c)$. Logo, segue do Teorema 1.12 que a seqüência $\{\phi_{y,j}\}_{j=1}^{\infty}$ é normal, para cada $y \in F$.

Por hipótese, existe um subconjunto $D = \{y_1, y_2, \cdots\} \subset F$ denso em F. Vamos usar aqui novamente o processo da *diagonal de Cantor*:

A seqüência $\{\phi_{y_1,j}\}_{j=1}^{\infty} = \{\delta_{y_1} \circ f_j\}_{j=1}^{\infty}$ admite uma subseqüência $\{\delta_{y_1} \circ f_j^{(1)}\}_{j=1}^{\infty}$ convergente em $(\mathcal{H}(U), \tau_c)$. Por sua vez, a seqüência $\{\delta_{y_2} \circ f_j^{(1)}\}_{j=1}^{\infty}$ admite uma subseqüência $\{\delta_{y_2} \circ f_j^{(2)}\}_{j=1}^{\infty}$ convergente em $(\mathcal{H}(U), \tau_c)$, e assim por diante.

Prosseguindo indutivamente, obtemos para cada k uma subseqüência $\{\delta_{y_k} \circ f_j^{(k)}\}_{j=1}^{\infty}$ de $\{\delta_{y_k} \circ f_j^{(k-1)}\}_{j=1}^{\infty}$ convergente em $(\mathcal{H}(U), \tau_c)$. Vamos provar que a seqüência diagonal $\{f_j^{(j)}\}_{j=1}^{\infty}$ converge em $(\mathcal{H}(U, F'), \tau_c^*)$.

Sejam $K \subset U$ compacto e $B \subset F$ finito. Podemos supor sem perda de generalidade que $B = \{y\}$, com $y \in F$, e assim ficamos reduzidos a mostrar que, fixado $y \in F$, a seqüência $\{f_j^{(j)}(x)(y)\}_{j=1}^{\infty}$ converge uniformemente para $x \in K$.

Para tanto, consideremos primeiramente o caso particular em que $y = y_k \in D$. Temos que $\{f_j^{(j)}(x)(y_k)\}_{j=1}^{\infty} = \{\delta_{y_k} \circ f_j^{(j)}(x)\}_{j=1}^{\infty}$, e a seqüência $\{\delta_{y_k} \circ f_j^{(j)}\}_{j=1}^{\infty}$ é, a menos dos $k-1$ termos iniciais $\delta_{y_k} \circ f_1^{(1)}, \delta_{y_k} \circ f_2^{(2)}, \cdots, \delta_{y_k} \circ f_{k-1}^{(k-1)}$, uma subseqüência de $\{\delta_{y_k} \circ f_j^{(k)}\}_{j=1}^{\infty}$, que converge na topologia τ_c. Ou seja, $\{\delta_{y_k} \circ f_j^{(j)}(x)\}_{j=1}^{\infty}$ converge uniformemente para $x \in K$.

Agora seja $y \in F$ arbitrário. Observe que a família $\{f_j^{(j)}(x) \ : \ x \in K, \ j \in \mathbb{N}\} \subset F'$ é pontualmente limitada:

$$\sup_{x \in K, \ j \in \mathbb{N}} |f_j^{(j)}(x)(y)| < c_{K, \{y\}}.$$

Logo, pelo Teorema de Banach-Steinhaus, existe $M < \infty$ tal que:

$$\sup_{x \in K, \ j \in \mathbb{N}} \|f_j^{(j)}(x)\| < M.$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $y_k \in D$ tal que $\|y - y_k\| < \frac{\varepsilon}{3M}$. E como foi visto acima, a seqüência $\{f_j^{(j)}(x)(y_k)\}_{j=1}^{\infty}$ é uniformemente convergente para $x \in K$; logo, existe J tal que:

$$|f_j^{(j)}(x)(y_k) - f_i^{(i)}(x)(y_k)| < \frac{\varepsilon}{3}, \ \forall \, i, j \geq J, \ \forall \, x \in K.$$

Finalmente, para todo $i, j \geq J$ e para todo $x \in K$, temos:

$$|f_j^{(j)}(x)(y) - f_i^{(i)}(x)(y)| \quad \leq$$

$$|f_j^{(j)}(x)(y) - f_j^{(j)}(x)(y_k)| \ + \ |f_j^{(j)}(x)(y_k) - f_i^{(i)}(x)(y_k)| \ + \ |f_i^{(i)}(x)(y_k) - f_i^{(i)}(x)(y)| \quad \leq$$

$$\|f_j^{(j)}(x)\|\cdot\|y-y_k\| \ + \ |f_j^{(j)}(x)(y_k)-f_i^{(i)}(x)(y_k)| \ + \ \|f_i^{(i)}(x)\|\cdot\|y-y_k\| \ < \ \tfrac{\varepsilon}{3}+\tfrac{\varepsilon}{3}+\tfrac{\varepsilon}{3} \ = \ \varepsilon.$$

E assim temos provado que $\{f_j^{(j)}(x)(y)\}_{j=1}^{\infty}$ é uma seqüência numérica uniformemente de Cauchy para $x \in K$, e portanto uniformemente convergente em K, para cada $y \in F$.

Ou seja, provamos que a seqüência $\{f_j^{(j)}\}_{j=1}^{\infty}$ converge na topologia τ_c^*. A proposição acima nos garante que a função limite é holomorfa, e o teorema está provado. ∎

Agora, analogamente ao que foi feito em 1.15 e 1.16, vamos obter resultados relativos à topologia compacto-fraca*-aberta para famílias em $\mathcal{H}(U, F')$.

Proposição 2.26 *Sejam E um espaço localmente convexo, F um espaço de Banach e U um subconjunto aberto de E. Seja $\mathfrak{F}$ uma família em $\mathcal{H}(U, F')$. Considere as seguintes afirmações:*

(a) *$\mathfrak{F}$ é localmente limitada.*

(b) *$\mathfrak{F}$ é equicontínua e pontualmente limitada.*

(c) *$\mathfrak{F}$ é relativamente compacta em $(\,\mathcal{H}(U, F')\,,\,\tau_c^*\,)$.*

(d) *$\mathfrak{F}$ é limitada em $(\,\mathcal{H}(U, F')\,,\,\tau_c^*\,)$.*

Então (a) *e* (b) *são equivalentes e cada afirmação acima implica a afirmação seguinte. Além disso, se E for metrizável, então todas as condições são equivalentes.*

Demonstração:

A equivalência (a) $\Leftrightarrow$ (b) segue da Proposição 1.4.

Suponhamos então que $\mathfrak{F}$ seja equicontínua e pontualmente limitada. Para cada $y \in F$, consideremos a família:

$$\mathfrak{F}_y := \{\, f_y \ : \ f \in \mathfrak{F} \,\} \ \subset \ \mathcal{H}(U)\,,$$

onde f_y denota a função holomorfa dada por $f_y(x) = f(x)(y)$, para cada $x \in U$. Vamos provar que cada $\mathfrak{F}_y$ é equicontínua e pontualmente limitada.

Para tanto, fixemos $y \in F$. Se $y = 0$, a afirmação é clara. Caso contrário, para provar a equicontinuidade de $\mathfrak{F}_y$, sejam $a \in U$ e $\varepsilon > 0$. Como $\mathfrak{F}$ é equicontínua, existe uma vizinhança $V \subset U$ de a tal que:

$$\|f(x) - f(a)\| \leq \frac{\varepsilon}{\|y\|}, \quad \text{para todo } x \in V \text{ e } f \in \mathfrak{F}.$$

Em particular,

$$\left| \big(f(x) - f(a)\big)\left(\frac{y}{\|y\|}\right) \right| \;=\; \frac{1}{\|y\|} \left| f(x)(y) - f(a)(y) \right| \;\leq\; \frac{\varepsilon}{\|y\|},$$

ou seja,

$$|f_y(x) - f_y(a)| \leq \varepsilon, \quad \text{para todo } x \in V \text{ e } f_y \in \mathfrak{F}_y,$$

o que prova que $\mathfrak{F}_y$ é equicontínua.

Agora seja $a \in U$. Se $\|f(a)\| \leq c$ para toda $f \in \mathfrak{F}$ então, em particular, temos:

$$\left| f(a)\left(\frac{y}{\|y\|}\right) \right| \;=\; \frac{1}{\|y\|} \, |f(a)(y)| \;\leq\; c,$$

ou seja, $|f_y(a)| \leq \|y\| \cdot c$ para toda $f_y \in \mathfrak{F}_y$, e com isto provamos que $\mathfrak{F}_y$ é pontualmente limitada.

Assim, aplicando o Teorema de Arzerlà-Ascoli (1.7), obtemos que cada $\mathfrak{F}_y$ é relativamente compacta em $(\mathcal{H}(U), \tau_c)$ e disto segue que $\prod_{y \in F} \overline{\mathfrak{F}_y}$ é compacto, pelo Teorema de Tychonoff.

Via a aplicação $\pi : (\mathcal{H}(U, F'), \tau_c^*) \to \prod_{y \in F} (\mathcal{H}(U), \tau_c)$, podemos mergulhar a família $\mathfrak{F}$ no espaço $\prod_{y \in F} (\mathcal{H}(U), \tau_c)$, e com esta identificação podemos escrever $\mathfrak{F} \subset \prod_{y \in F} \mathfrak{F}_y$. Desta forma, temos que $\overline{\mathfrak{F}} \subset \prod_{y \in F} \overline{\mathfrak{F}_y}$, sendo este último um conjunto compacto. Portanto, $\overline{\mathfrak{F}}$ é compacto, e a implicação (b) $\Rightarrow$ (c) está provada.

A implicação (c) $\Rightarrow$ (d) é trivial.

Se E é metrizável então toda família τ_c^*-limitada $=$ τ_c-limitada é localmente limitada (Proposição 1.4), o que fecha o ciclo de equivalências. ∎

Se E e F forem separáveis, podemos obter condições necessárias e/ou suficientes para que uma família seja fracamente normal:

Teorema 2.27 *Sejam E um espaço localmente convexo separável, F um espaço de Banach separável e U um subconjunto aberto de E. Seja $\mathfrak{F}$ uma família em $\mathcal{H}(U, F')$. Considere as seguintes afirmações:*

(a) $\mathfrak{F}$ *é localmente limitada.*

(b) $\mathfrak{F}$ *é equicontínua e pontualmente limitada.*

(c) $\mathfrak{F}$ *é relativamente compacta em* $(\,\mathcal{H}(U,F')\,,\,\tau_c^*\,)$.

(d) $\mathfrak{F}$ *é* τ_c^**-normal.*

(e) $\mathfrak{F}$ *é limitada em* $(\,\mathcal{H}(U,F')\,,\,\tau_c^*\,)$.

Então (a) *e* (b) *são equivalentes e cada afirmação acima implica a afirmação seguinte. Além disso, se* E *for metrizável, então todas as condições são equivalentes.*

Demonstração:

As implicações (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) seguem diretamente da proposição anterior.

Com a separabilidade dos espaços E e F, obtemos a metrizabilidade dos conjuntos compactos de $(\,\mathcal{H}(U,F')\,,\,\tau_c^*)$. Com efeito, sejam $D_U = \{x_1, x_2, \ldots\}$ um subconjunto denso em U e $D_F = \{y_1, y_2, \ldots\}$ um subconjunto denso em F. Afirmamos que em subconjuntos compactos de $(\,\mathcal{H}(U,F')\,,\,\tau_c^*)$ a topologia τ_c^* coincide com a topologia $\tau_{_D}^*$ gerada pelas seminormas dadas por $p_{n,m}(f) := |f(x_n)(y_m)|$, sendo esta última claramente metrizável. Da densidade de D_U e de D_F segue que $\bigcap\limits_{n,m} {p_{n,m}}^{-1}\{0\} = \{0\}$, ou seja, $\tau_{_D}^*$ é uma topologia de Hausdorff. Agora, para provarmos a afirmação, basta observarmos que se $B \subset \mathcal{H}(U,F')$ é τ_c^*-compacto, como τ_c^* é claramente mais fina que $\tau_{_D}^*$, temos que a aplicação identidade $id : (B, \tau_c^*) \to (B, \tau_{_D}^*)$ é uma bijeção contínua de um espaço compacto sobre um espaço de Hausdorff, e portanto é um homeomorfismo. Isto prova a nossa afirmação. Com isto, a implicação (c) $\Rightarrow$ (d) torna-se imediata, visto que se o fecho $\overline{\mathfrak{F}}^{\tau_c^*}$ é compacto, e portanto metrizável, então toda seqüência em $\overline{\mathfrak{F}}^{\tau_c^*}$, e portanto em $\mathfrak{F}$, admite uma subseqüência τ_c^*-convergente, ou seja, $\mathfrak{F}$ é τ_c^*-normal.

Vamos assumir agora que $\mathfrak{F}$ seja τ_c^*-normal, e sejam $K \subset U$ um subconjunto compacto e $B \subset F$ um subconjunto finito. Suponhamos por um momento que exista uma seqüência $\{f_n\}$ em $\mathfrak{F}$ tal que:

$$\sup_{x \in K,\, y \in B} |f_n(x)(y)| > n, \text{ para todo } n.$$

Como $\mathfrak{F}$ é τ_c^*-normal, $\{f_n\}$ admite uma subseqüência $\{f_{n_i}\}$ convergente em $(\,\mathcal{H}(U,F')\,,\,\tau_c^*\,)$, digamos para f. Temos que $f(K)$ é compacto, e portanto limitado. Logo, existe $c < \infty$ tal que $\sup_{x \in K} \|f(x)\| < c$. Assim, se tomarmos $M = \max_{y \in B} \|y\|$, teremos:

$$\begin{aligned} n_i \; < \; & \sup_{x \in K,\, y \in B} |f_{n_i}(x)(y)| \; \leq \; \sup_{x \in K,\, y \in B} |f_{n_i}(x)(y) - f(x)(y)| \; + \; \sup_{x \in K,\, y \in B} |f(x)(y)| \; \leq \\ \leq \; & \sup_{x \in K,\, y \in B} |f_{n_i}(x)(y) - f(x)(y)| \; + \; \sup_{x \in K,\, y \in B} \|f(x)\| \; \|(y)\| \; < \\ \leq \; & \sup_{x \in K,\, y \in B} |f_{n_i}(x)(y) - f(x)(y)| \; + \; cM, \end{aligned}$$

para cada i. Fazendo $i \to \infty$, obtemos uma contradição. Logo, $\mathfrak{F}$ é τ_c^*-limitada, o que finalmente prova (d) $\Rightarrow$ (e).

Mais uma vez, a metrizabilidade de E implica que toda família τ_c^*-limitada $= \tau_c$-limitada é localmente limitada, fechando o ciclo de equivalências. ∎

Encerramos este capítulo ilustrando o fato de que as hipóteses de separabilidade, tanto de E quanto de F, são ambas fundamentais nos teoremas 2.25 e 2.27. Adaptando o Exemplo 1.14, vemos o que pode ocorrer se F não for separável, mesmo que E o seja:

Exemplo 2.28 Considere $E = \mathbb{C}$, $F = \ell^\infty$ e denotemos por $\mathcal{L}(E, F')$ o espaço vetorial das transformações lineares contínuas de E em F'. Seja $\mathfrak{F} = \overline{B}_{\mathcal{L}(E,F')}$ a bola unitária fechada em $\mathcal{L}(E, F')$. Claramente $\mathfrak{F}$ é um subconjunto localmente limitado de $\mathcal{H}(E, F')$, mas afirmamos que $\mathfrak{F}$ não é uma família τ_c^*-normal.

Com efeito, tomemos $\{T_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{L}(E, F')$ a seqüência de transformações lineares dadas por:

$$T_j : \mu \in E \;\mapsto\; \varphi_\mu^j \in F',$$

onde φ_μ^j denota o funcional linear definido da seguinte maneira:

$$\varphi_\mu^j : \{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in F \;\mapsto\; \mu\, \xi_j \in \mathbb{C}.$$

Notemos que $\|T_j\| = 1$ para todo j, ou seja, $\{T_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathfrak{F}$. Porém, esta seqüência não admite subseqüência τ_c^*-convergente, pois se $\{T_{j_k}\}_{k=1}^\infty$ é uma subseqüência, podemos definir $x = \{\xi_j\}_{j=1}^\infty \in F$ onde $\xi_{j_k} := (-1)^k$ para todo k e $\xi_j := 0$ para $j \neq j_k$, de modo que $\{T_{j_k}(1)(x)\}_{k=1}^\infty = \{(-1)^k\}_{k=1}^\infty$ é a seqüência alternada de escalares, que não converge.

E de maneira completamente simétrica, para o caso em que E não é separável, mesmo que F o seja, podemos construir o seguinte:

Exemplo 2.29 Considere $E = \ell^\infty$ e $F = \mathbb{C}$. Então a bola unitária fechada $\mathfrak{F} = \overline{B}_{\mathcal{L}(E,F')}$ em $\mathcal{L}(E, F')$ é claramente um subconjunto localmente limitado de $\mathcal{H}(E, F')$, e no entanto $\mathfrak{F}$ não é uma família τ_c^*-normal.

Basta tomarmos $\{T_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{L}(E, F')$ a seqüência de transformações lineares dadas por:

$$T_j : \{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in E \;\mapsto\; \varphi_{\xi_j} \in F',$$

onde φ_{ξ_j} denota o funcional linear definido da seguinte maneira:

$$\varphi_{\xi_j} : \lambda \in F \;\mapsto\; \lambda\, \xi_j \in \mathbb{C}.$$

Da mesma forma, temos que $\{T_j\}_{j=1}^\infty$ é uma seqüência em $\mathfrak{F}$ que não admite subseqüência τ_c^*-convergente, pois se $\{T_{j_k}\}_{k=1}^\infty$ é qualquer subseqüência, podemos definir $x \in E$ como no exemplo acima, de modo que $\{T_{j_k}(x)(1)\}_{k=1}^\infty = \{(-1)^k\}_{k=1}^\infty$ é a seqüência alternada de escalares, que não converge.

Capítulo 3

Funções Holomorfas com Valores Excepcionais

Este capítulo é voltado ao estudo de funções holomorfas que omitem valores na sua imagem. Serão estabelecidas versões em dimensão infinita de teoremas clássicos da teoria de funções holomorfas de uma variável complexa. Vamos estender um critério sobre famílias normais e investigar a imagem de funções holomorfas com valores excepcionais, obtendo resultados no contexto geral e para os espaços de funções de tipo limitado $\mathcal{H}_b(U)$ e $\mathcal{H}_d(U)$.

3.1 Funções Holomorfas com Valores Excepcionais em Espaços Localmente Convexos

Antes de provarmos os resultados propriamente sobre funções holomorfas com valores excepcionais, vamos estender um teorema sobre zeros de funções holomorfas decorrente do conhecido *Teorema de Hurwitz* (Conway [4], Theorem VII.2.5, Corollary VII.2.6). É um resultado de interesse intrínseco, que vamos precisar para provar alguns teoremas desta seção.

Teorema 3.1 *Sejam E um espaço localmente convexo, $U \subset E$ um domínio, e seja $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência em $\mathcal{H}(U)$ que converge a f na topologia τ_c. Se cada f_n nunca se anula em U então $f \equiv 0$ ou f também são se anula em U.*

Demonstração:

Primeiro Caso: Vamos assumir que U seja convexo.

Suponhamos que exista $x_0 \in U$ tal que $f(x_0) = 0$. Vamos provar então que $f(x) = 0$, para todo $x \in U$.

Para tanto, seja $x \in U$. Defina:

$$\Lambda := \{\, \lambda \in \mathbb{C} \,:\, x_0 + \lambda(x - x_0) \in U \,\}.$$

Como U é convexo, o conjunto aberto Λ também é convexo, e em particular conexo. Ou seja, $\Lambda \subset \mathbb{C}$ é um domínio. Para cada n, a função:

$$g_n(\lambda) := f_n(\, x_0 + \lambda(x - x_0)\,)$$

é holomorfa em Λ e nunca se anula. Se definirmos:

$$g(\lambda) := f(\, x_0 + \lambda(x - x_0)\,),$$

então $g_n \to g$ uniformemente sobre os subconjuntos compactos de Λ. Logo, segue do Teorema de Hurwitz para funções holomorfas de uma variável complexa (Conway [4], Corollary VII.2.6) que $g \equiv 0$ ou g não se anula em Λ. Mas $0 \in \Lambda$ e $g(0) = f(x_0) = 0$, e portanto $g \equiv 0$. Em particular, $0 = g(1) = f(x)$, donde concluímos que $f \equiv 0$.

Caso Geral:

Considere $A := \{x \in U : f(x) = 0\}$.

A é obviamente fechado em U. Vamos provar que A também é aberto em U. Para tanto, seja $a \in A$ e seja $V \subset U$ uma vizinhança aberta e convexa de a. Em particular, temos que $\{f_n\}$ é uma seqüência de funções holomorfas em V que convergem a f uniformemente sobre os subconjuntos compactos de V e que nunca se anulam em V. Como V é convexa, segue do primeiro caso que $f \equiv 0$ em V ou f não se anula em V. Mas $f(a) = 0$. Logo, $f \equiv 0$ em V, ou seja, $V \subset A$, e a afirmação está provada.

Ora, A é um subconjunto aberto e fechado de U. Como U é conexo, temos que $A = U$ ou $A = \varnothing$. Em outras palavras, $f \equiv 0$ ou f não se anula em U, como queríamos. ∎

Os próximos resultados dizem respeito diretamente a funções holomorfas com valores excepcionais, a saber:

Definição 3.2 Quando uma função $f : E \to \mathbb{C}$ não assume um valor $a \in \mathbb{C}$, dizemos que a é um *valor excepcional* de f.

Vamos começar estendendo um resultado sobre funções que admitem uma região excepcional (Montel [15], Seção 17). Porém, uma versão bem mais forte será dada mais adiante (Teorema 3.9). Antes disto, daremos uma extensão do conceito de famílias normais.

Denotaremos por $\mathbb{C}_\infty$ o plano complexo estendido, ou seja, $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Definição 3.3 Uma família $\mathfrak{F} \subset \mathcal{H}(U)$ é dita $\mathbb{C}_\infty$-*normal* se cada seqüência em $\mathfrak{F}$ ou admite uma subseqüência convergente em $(\mathcal{H}(U)\,,\,\tau_c)$, ou admite uma subseqüência que diverge a infinito uniformemente sobre cada subconjunto compacto de U.

Teorema 3.4 *Sejam E um espaço localmente convexo separável, $U \subset E$ um domínio e $\mathfrak{F} \subset \mathcal{H}(U)$. Se existem $a \in \mathbb{C}$ e $m > 0$ tais que $|f(x) - a| > m$ para toda $f \in \mathfrak{F}$ e para todo $x \in U$, então $\mathfrak{F}$ é $\mathbb{C}_\infty$-normal.*

Demonstração: Seja $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ uma seqüência em $\mathfrak{F}$. Considere a família $\mathcal{G}$ das seguintes funções:

$$g(x) := \frac{1}{f(x) - a}\,, \quad \text{com } f \in \mathfrak{F}.$$

Cada $g \in \mathcal{G}$ é holomorfa e é limitada em módulo por $1/m$ em todo U. Em particular, $\mathcal{G}$ é localmente limitada, e portanto normal pelo Teorema 1.12. Logo, $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ admite uma subseqüência $\{g_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ convergente na topologia τ_c, digamos a uma função h. Como cada f_{n_k} é sempre finita, então cada g_{n_k} nunca se anula. Logo, de acordo com o Teorema 3.1, ou $h \equiv 0$ ou h também não se anula em U. Se $h \equiv 0$, então $f_{n_k}(x) \to \infty$ nas partes compactas de U; se h nunca se anula, então a função:

$$f(x) := a + \frac{1}{h(x)}$$

é holomorfa em U e $f_{n_k} \to f$ em $(\mathcal{H}(U)\,,\,\tau_c)$, como queríamos. ∎

A principal ferramenta utilizada na demonstração dos próximos resultados é a extensão do clássico *Teorema de Schottky*, que daremos a seguir. Se denotarmos o disco aberto e o disco fechado em $\mathbb{C}$ respectivamente por:

$$\Delta(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$$

$$\overline{\Delta}(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\},$$

o Teorema de Schottky clássico afirma que para cada $0 < \alpha < \infty$ e $0 < \beta < 1$ existe uma constante $c(\alpha, \beta)$ tal que, se $f \in \mathcal{H}(\Delta(0,1))$ é uma função que omite os valores 0 e 1 com $|f(0)| \leq \alpha$, então:

$$|f(z)| \leq c(\alpha, \beta), \ \forall \ z \in \overline{\Delta}(0, \beta).$$

Citamos Carathéodory ([3], p. 201) ou Montel ([15], p. 86) para esta versão do Teorema de Schottky.

Nota: Há um erro de digitação na versão do Teorema de Schottky enunciada no livro de Conway ([4], p. 298), onde a constante β deveria ser estritamente menor do que 1. De fato, as funções $f_\rho(z) = \frac{1}{z-\rho}$, com $\rho > 1$, constituem um contra-exemplo para o enunciado do teorema para $\beta = 1$.

Daremos a seguir extensões deste teorema. São resultados que garantem a limitação de funções holomorfas com valores excepcionais em subconjuntos próprios e equilibrados do domínio, ainda que estes subconjuntos sejam extremamente grandes, limitação esta que depende apenas do valor tomado pela função na origem.

Teorema 3.5 *Para cada $0 < \alpha < \infty$ e $0 < \beta < 1$ existe uma constante $c(\alpha, \beta)$ tal que, dados um espaço localmente convexo E e um conjunto aberto e equilibrado $U \subset E$, se $f \in \mathcal{H}(U)$ é uma função que omite os valores 0 e 1 com $|f(0)| \leq \alpha$, tem-se que:*

$$|f(x)| \leq c(\alpha, \beta), \ \forall \ x \in \beta U.$$

Demonstração: Sejam α, β e f satisfazendo as condições acima. Para cada $x \in U$, defina:

$$\Lambda_x := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda x \in U\}.$$

Notemos que cada $\Lambda_x \supset \Delta(0,1)$ pois U é equilibrado, e as funções:

$$g_x(\lambda) := f(\lambda x)$$

são holomorfas em Λ_x (e portanto em $\Delta(0,1)$), omitem os valores 0 e 1, e ainda $|g_x(0)| = = |f(0)| \leq \alpha$, para todo $x \in U$. Logo, aplicando o clássico Teorema de Schottky, obtemos uma constante $c(\alpha,\beta)$ tal que $|g_x(\lambda)| \leq c(\alpha,\beta)$, para todo $\lambda \in \overline{\Delta}(0,\beta)$ e $x \in U$. Em particular,

$$|f(\beta x)| = |g_x(\beta)| \leq c(\alpha,\beta)$$

para todo $x \in U$, e o teorema está provado. ∎

Observação 3.6 Em virtude da continuidade de f, a desigualdade $|f(x)| \leq c(\alpha,\beta)$ se estende ao conjunto fechado $\beta\overline{U}$, com $0 < \beta < 1$.

Podemos enunciar também a seguinte forma mais geral:

Corolário 3.7 *Para cada $0 < \alpha < \infty$ e $0 < \beta < 1$ existe uma constante $c(\alpha,\beta)$ tal que, dados um espaço localmente convexo E e um conjunto aberto e equilibrado $U \subset E$, se $f \in \mathcal{H}(x_0 + U)$ é uma função que omite os valores 0 e 1 com $|f(x_0)| \leq \alpha$, tem-se que:*

$$|f(x)| \leq c(\alpha,\beta), \;\; \forall \; x \in x_0 + \beta U.$$

Demonstração: Basta considerar a função $g(x) := f(x_0 + x), \; x \in U$. ∎

Podemos sempre supor que os dois valores excepcionais a e b de uma função f são 0 e 1, pois a função φ dada por $\varphi(x) := \frac{f(x)-a}{b-a}$ é também holomorfa e omite os valores 0 e 1. E como a limitação depende apenas dos valores excepcionais e do valor assumido pela função no ponto x_0, podemos estender o Teorema 3.5 para famílias de funções holomorfas:

Corolário 3.8 *Sejam E um espaço localmente convexo e $U \subset E$ um conjunto aberto e equilibrado. Então para cada $0 < \alpha < \infty$ e $0 < \beta < 1$, a família:*

$$\mathfrak{F}_\alpha = \{\, f \in \mathcal{H}(x_0 + U) \; : \; f \textit{ omite os valores 0 e 1, e } |f(x_0)| \leq \alpha \,\}$$

é uniformemente limitada em $x_0 + \beta U$.

Demonstração: Para cada $0 < \alpha < \infty$ e $0 < \beta < 1$, a família $\mathfrak{F}_\alpha$ é uniformemente limitada em $x_0 + \beta U$ pela constante de Schottky $c(\alpha, \beta)$. ∎

Vamos agora estender um teorema de Montel (Conway [4], Theorem XII.4.1), também mencionado como *Critério Fundamental* no livro de Montel ([15], Seção 32), que nos permite reconhecer famílias normais:

Teorema 3.9 *Sejam E um espaço localmente convexo separável e $U \subset E$ um domínio. Então toda família de funções holomorfas em U que possuem dois valores excepcionais distintos a e b é $\mathbb{C}_\infty$-normal.*

Demonstração: Seja $\mathfrak{F}$ a família de todas as funções holomorfas em U que possuem a e b como valores excepcionais (podemos sempre supor que os dois valores excepcionais das funções de $\mathfrak{F}$ são 0 e 1, pois substituindo, se necessário, cada $f \in \mathfrak{F}$ pela função φ dada por $\varphi(x) := \frac{f(x)-a}{b-a}$, obtemos uma família de funções holomorfas que têm 0 e 1 como valores excepcionais, e que será igualmente normal ou não).

Fixe um ponto qualquer $x_0 \in U$ e defina as seguintes famílias:

$$\mathcal{G} := \{f \in \mathfrak{F} \,:\, |f(x_0)| \leq 1\} \quad \text{e} \quad \mathcal{H} := \{f \in \mathfrak{F} \,:\, |f(x_0)| \geq 1\}.$$

É claro que $\mathfrak{F} = \mathcal{G} \cup \mathcal{H}$. Para provar o resultado, vamos mostrar que $\mathcal{G}$ é normal e que $\mathcal{H}$ é $\mathbb{C}_\infty$-normal.

Como E é separável, para provar a normalidade de $\mathcal{G}$, pelo Teorema 1.16 é suficiente provar que $\mathcal{G}$ é localmente limitada. Para tanto, consideremos $a \in U$ e seja γ uma curva em U que liga x_0 a a. Sejam $V_0, V_1, \cdots, V_n \subset U$ vizinhanças de $x_0, x_1, \cdots, x_n = a$ no traço da curva γ, onde $V_k = x_k + U_k$, com U_k aberto e equilibrado e $x_k + 2U_k \subset U$ para $0 \leq k \leq n$, e tais que x_{k-1} e x_k estejam em $V_{k-1} \cap V_k$ para $1 \leq k \leq n$. Vamos provar que $\mathcal{G}$ é uniformemente limitada em V_n.

Note que cada função de $\mathcal{G}$ é em particular holomorfa em $x_0 + 2U_0$, onde $2U_0$ é aberto e equilibrado, omite os valores 0 e 1, e é limitada em x_0 por $\alpha = 1$. Logo, aplicando o Corolário 3.8 para $\alpha = 1$ e $\beta = 1/2$, obtemos uma constante $c_0 := c(\alpha, \beta)$ tal que $\mathcal{G}$ seja uniformemente limitada por c_0 em V_0. Em particular, temos que $x_1 \in V_0$, ou seja, $|f(x_1)| \leq c_0$, $\forall\ f \in \mathcal{G}$. Podemos então aplicar novamente o Corolário 3.8 para $\alpha = c_0$ e

$\beta = 1/2$, obtendo assim uma constante c_1 tal que $\mathcal{G}$ seja uniformemente limitada em V_1 por c_1. Prosseguindo desta forma, vamos obter finalmente que $\mathcal{G}$ é uniformemente limitada por uma constante c_n em V_n, como queríamos.

Para provar que $\mathcal{H}$ é $\mathbb{C}_\infty$-normal, considere a família:

$$\widetilde{\mathcal{H}} := \{ \ 1/f \ : \ f \in \mathcal{H} \ \}.$$

Note que $\widetilde{\mathcal{H}} \subset \mathcal{G}$, e portanto $\widetilde{\mathcal{H}}$ é normal. Logo, se $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ é uma seqüência em $\mathcal{H}$, existem uma subseqüência $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ e uma função $f \in \mathcal{H}(U)$ tal que $\{1/f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ converge para f na topologia τ_c. Como cada f_{n_k} é sempre finita, a seqüência $1/f_{n_k}$ nunca se anula. Logo, de acordo com o Teorema 3.1, ou $f \equiv 0$ ou f não se anula em U. Se $f \equiv 0$, então $f_{n_k}(x) \to \infty$ uniformemente nas partes compactas de U; se f nunca se anula, então $1/f$ é holomorfa e $f_{n_k} \to 1/f$ em $(\mathcal{H}(U)\, , \tau_c)$, e o teorema está provado. ∎

Vamos concluir esta seção estendendo o clássico *Pequeno Teorema de Picard* (Conway [4], Theorem XII.2.3), que nos garante que a imagem de cada função inteira não constante é todo o plano complexo, a menos de um único possível ponto:

Teorema 3.10 *Se uma função inteira em um espaço localmente convexo não se reduz a uma constante, então ela possui no máximo um valor excepcional.*

É fácil provar este teorema diretamente do Pequeno Teorema de Picard para funções de uma variável complexa, como podemos ver a seguir:

Demonstração: Seja E um espaço localmente convexo e seja $f \in \mathcal{H}(E)$ uma função com dois valores excepcionais distintos. Para cada $x \in E$, a função $f_x : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f_x(\lambda) := f(\lambda x)$ é inteira e omite dois valores distintos. Logo, pelo Pequeno Teorema de Picard para funções de uma variável complexa, temos que cada f_x é uma função constante. Desta forma, temos:

$$f(x) = f_x(1) = f_x(0) = f(0)$$

para todo $x \in E$, ou seja, f é constante. ∎

Porém, vamos dar uma prova da generalização do Pequeno Teorema de Picard como mais uma aplicação do Teorema de Schottky, utilizando o conceito de famílias de funções holomorfas com valores excepcionais:

Outra demonstração: Seja E um espaço localmente convexo e suponhamos que uma função inteira f tenha dois valores excepcionais distintos a e b (aqui novamente podemos supor que os dois valores excepcionais são 0 e 1, pois substituindo, se necessário, a função f pela função φ dada por $\varphi(x) := \frac{f(x)-a}{b-a}$, obtemos uma função inteira que tem 0 e 1 como valores excepcionais, e que será igualmente constante ou não).

Fixe uma vizinhança aberta e equilibrada de zero $U \subset E$, e para cada n defina $U_n := 2^n U$ e $f_n(x) := f(2^n x)$.

Cada f_n é uma função inteira, e em particular é holomorfa em $2U$. Além disso, 0 e 1 são valores excepcionais de cada f_n em $2U$ e $f_n(0) = f(0)$, para todo n. Logo, aplicando o Teorema 3.5 para cada f_n e para $\alpha = |f(0)|$ e $\beta = 1/2$, obtemos uma constante $C := c(\alpha, \beta)$ tal que:

$$|f_n(x)| \leq C, \ \forall \ x \in U \ \text{ e } \forall \ n.$$

Finalmente, cada $x \in E$ pertence a algum U_n, e f assume em cada U_n os mesmos valores que f_n assume em U, que por sua vez são limitados por C. Ou seja, f é limitada em todo E, e pelo Teorema de Liouville (Mujica [17], Proposition 5.10), f é constante em E. ∎

A prova do Teorema de Liouville dada em [17] para aplicações holomorfas entre espaços de Banach é igualmente válida para funções holomorfas definidas em espaços localmente convexos.

3.2 Um Teorema de Tipo Schottky para Domínios Estrelados em Espaços de Banach

Nesta seção, utilizamos a versão do Teorema de Schottky em dimensão infinita estabelecida no Teorema 3.5 para investigarmos quando funções holomorfas com valores excepcionais são de tipo limitado. Mais precisamente, vamos provar que se U é um domínio estrelado em um espaço de Banach E e $\mathfrak{F} \subset \mathcal{H}(U)$ é uma família de funções holomorfas que omitem dois valores distintos e é limitada na origem, então $\mathfrak{F}$ é uniformemente limitada em cada conjunto U-limitado. Em particular, $\mathfrak{F}$ está contida e é limitada em $\mathcal{H}_b(U)$, o espaço das funções holomorfas de tipo limitado em U.

Definição 3.11 Sejam E um espaço de Banach e $U \subset E$.

a) Dizemos que um conjunto $U \subset E$ é *estrelado* se $\lambda x \in U$, para todo $x \in U$ e $\lambda \in [0,1]$. Isto significa que todos os segmentos ligando a origem a outros pontos de U estão contidos em U.

b) Um conjunto $U \subset E$ é dito x_0-*estrelado* se o conjunto $U - x_0$ é estrelado, ou seja, $(1-\lambda)x_0 + \lambda x \in U$, para todo $x \in U$ e $\lambda \in [0,1]$. Neste caso, todos os segmentos ligando x_0 a outros pontos de U estão contidos em U.

É claro que todo conjunto x_0-equilibrado é x_0-estrelado, e se U é convexo então U é x_0-estrelado para cada $x_0 \in U$.

Dados $U \subset E$ um subconjunto aberto e $x \in U$, denotamos por $d_U(x)$ a distância de $x \in U$ à fronteira de U, isto é:

$$d_U(x) = \sup\{r > 0 : B(x,r) \subset U\}.$$

Teorema 3.12 *Seja U um subconjunto aberto estrelado de um espaço de Banach e seja:*

$$U_n := \{x \in U : \|x\| < n \quad e \quad d_U(x) > 1/n\}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Então para cada $0 < \alpha < \infty$, existe uma seqüência $\{c_n(\alpha)\}_{n=1}^{\infty}$ de constantes positivas tais que, dada uma função $f \in \mathcal{H}(U)$ que omite os valores 0 e 1, e que satisfaz $|f(0)| \leq \alpha$, então:

$$|f(x)| < c_n(\alpha) \text{ para todo } x \in U_n \text{ e } n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração: Para cada n, vamos considerar a envoltória estrelada de U_n, ou seja, $V_n := \mathrm{st}(U_n) = \{\lambda x \,:\, x \in U_n,\ \lambda \in [0,1]\}$. Então $U_n \subset V_n \subset U$ e cada V_n é um conjunto aberto e estrelado.

Seja n_0 o primeiro índice $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 \in U_n$. Fixe $n \geq n_0$ e seja $\varepsilon := \frac{1}{4n^3}$. Afirmamos que:

$$B(y, 2\varepsilon) \subset U \text{ para todo } y \in V_n. \tag{1}$$

Com efeito, seja $y = \lambda x$, com $x \in U_n$ e $\lambda \in [0,1]$. Vamos distinguir dois casos:
(i) Assuma que $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2n^2}$. Então, como $\|x\| \leq n$, segue que $\|\lambda x\| \leq \frac{1}{2n}$, e portanto:

$$B(\lambda x, 2\varepsilon) = B(\lambda x, \frac{1}{2n^3}) \subset B\Big(\lambda x, \frac{1}{2n}\Big) \subset B\Big(0, \frac{1}{n}\Big) \subset U.$$

(ii) Assuma que $\frac{1}{2n^2} \leq \lambda \leq 1$. Então, como $B(x, \frac{1}{n}) \subset U$, segue que:

$$U \supset \lambda\, B\Big(x, \frac{1}{n}\Big) = B\Big(\lambda x, \frac{\lambda}{n}\Big) \supset B\Big(\lambda x, \frac{1}{2n^3}\Big) = B(\lambda x, 2\varepsilon).$$

Isto prova (1). Note também que $V_n \subset B(0, m\varepsilon)$, onde $m = 4n^4$.

Agora sejam f e α satisfazendo as condições do teorema. Vamos mostrar a existência de constantes $\alpha \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_m$ tais que:

$$|f(x)| \leq \alpha_k \text{ para todo } x \in V_n \cap B(0, k\varepsilon),\ \ 1 \leq k \leq m. \tag{2}$$

De fato, como $0 \in V_n$, $B(0, 2\varepsilon) \subset U$ e $|f(0)| \leq \alpha$, uma aplicação do Corolário 3.7 nos fornece uma constante $\alpha_1 := c(\alpha, \frac{1}{2}) \geq \alpha$ tal que:

$$|f(x)| \leq \alpha_1 \text{ para todo } x \in B(0, \varepsilon).$$

Suponhamos então que a desigualdade (2) ocorra para algum k, com $1 \leq k \leq m-1$. Dado $x \in V_n \cap B(0, (k+1)\varepsilon)$, tomando $y := \frac{k}{k+1}\, x$ temos que $y \in V_n \cap B(0, k\varepsilon)$ e $x \in B(y, \varepsilon)$. Como $B(y, 2\varepsilon) \subset U$ e $|f(y)| \leq \alpha_k$, novamente pelo Corolário 3.7 obtemos uma constante $\alpha_{k+1} \geq \alpha_k$ tal que $|f(x)| \leq \alpha_{k+1}$. Isto prova (2).

Como $U_n \subset V_n \subset B(0, m\varepsilon)$, segue que:

$$|f(x)| \leq \alpha_m, \text{ para todo } x \in U_n.$$

Logo, se $n \geq n_0$ podemos tomar $c_n(\alpha) := \alpha_m$. Caso contrário, temos que $U_n \subset U_{n_0}$ e portanto podemos tomar $c_n(\alpha) := c_{n_0}(\alpha)$. Isto completa a demonstração. ∎

Podemos também enunciar a seguinte forma mais geral:

Corolário 3.13 *Seja U um subconjunto aberto e x_0-estrelado de um espaço de Banach e seja:*

$$U_n := \{x \in U : \|x - x_0\| < n \quad e \quad d_U(x) > 1/n\}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Então para cada $0 < \alpha < \infty$, existe uma seqüência $\{c_n(\alpha)\}_{n=1}^{\infty}$ de constantes positivas tais que, dada uma função $f \in \mathcal{H}(U)$ que omite os valores 0 e 1, e que satisfaz $|f(x_0)| \leq \alpha$, então:

$$|f(x)| < c_n(\alpha) \text{ para todo } x \in U_n \text{ e } n \in \mathbb{N}.$$

Definição 3.14 Um conjunto $A \subset U$ é dito *U-limitado* se A é limitado em E e a distância de A à fronteira de U é positiva, ou seja, existe $\varepsilon > 0$ tal que $A + B(0, \varepsilon) \subset U$.

Definição 3.15 Uma função $f \in \mathcal{H}(U)$ é dita ser de *tipo limitado* se f é limitada em cada subconjunto U-limitado de U.

O espaço vetorial de todas as funções holomorfas $f : U \to \mathbb{C}$ de tipo limitado é denotado por $\mathcal{H}_b(U)$. Vamos munir $\mathcal{H}_b(U)$ com a topologia da convergência uniforme sobre todos os subconjuntos U-limitados de U.

Os conjuntos $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ definidos anteriormente constituem uma seqüência fundamental de conjuntos U-limitados de E, isto é, cada U_n é um conjunto U-limitado e cada conjunto U-limitado está contido em algum U_n.

Desta forma, quando U é x_0-estrelado, o Corolário 3.13 nos garante em particular que se uma função $f \in \mathcal{H}(U)$ omite dois valores então $f \in \mathcal{H}_b(U)$. Mais geralmente:

Corolário 3.16 *Seja U um subconjunto aberto e x_0-estrelado de um espaço de Banach e seja $\mathfrak{F} \subset \mathcal{H}(U)$ uma família de funções que omitem dois valores distintos. Se a família $\mathfrak{F}$ é limitada no ponto $x_0 \in U$, então $\mathfrak{F}$ é um subconjunto limitado de $\mathcal{H}_b(U)$.*

3.3 Um Teorema de Tipo Schottky para Domínios Arbitrários em Espaços de Banach

Dando continuidade aos resultados obtidos na Seção 3.2, vamos estabelecer um teorema de tipo Schottky para domínios arbitrários em espaços de Banach. Sem a hipótese de ser estrelado, provamos que se $U \subset E$ é um domínio e $\mathfrak{F} \subset \mathcal{H}(U)$ é uma família de funções com dois valores excepcionais distintos, limitada em algum ponto, então $\mathfrak{F}$ é uniformemente limitada em cada bola estritamente contida em U.

Teorema 3.17 *Seja U um domínio num espaço de Banach e seja $x_0 \in U$. Seja $0 < \alpha < \infty$. Então para cada $a \in U$ e $0 < r < d_U(a)$, existe uma constante $c(a, r, \alpha) > 0$ tal que, dada uma função $f \in \mathcal{H}(U)$ que omite os valores 0 e 1, e que satisfaz $|f(x_0)| \leq \alpha$, então:*

$$|f(x)| \leq c(a, r, \alpha) \text{ para todo } x \in B(a, r).$$

Demonstração: Se a é um ponto de U, seja γ um caminho em U ligando x_0 ao ponto a. Como o traço de γ é compacto e conexo, podemos tomar um número finito de bolas $B(x_0, r_0), B(x_1, r_1), \ldots, B(x_n, r_n) = B(a, d_U(a))$ em U com centros no traço de γ tais que x_{k+1} e x_k estejam em $B_{k+1} \cap B_k$ e $B(x_k, 2r_k) \subset U$ para $0 \leq k \leq n-1$.

Aplicando o Corolário 3.7 na bola $B(x_0, 2r_0)$ obtemos uma constante $\alpha_0 := c(\alpha, \frac{1}{2})$ tal que:

$$|f(x)| \leq \alpha_0, \quad \text{para todo } x \in B(x_0, r_0).$$

Uma segunda aplicação do Corolário 3.7 nos fornece uma outra constante $\alpha_1 := c(\alpha_0, \frac{1}{2})$ tal que:

$$|f(x)| \leq \alpha_1, \quad \text{para todo } x \in B(x_1, r_1).$$

Prosseguindo desta forma, para o último passo deste processo indutivo, notemos primeiramente que cada $0 < r < d_U(a)$ é da forma $r = \beta\, d_U(a)$, com $0 < \beta < 1$, e como $|f(a)| \leq \alpha_{n-1}$, o Corolário 3.7 nos fornece por fim a constante $c(a, r, \alpha) := c(\alpha_{n-1}, \beta)$ tal que:

$$|f(x)| \leq c(a, r, \alpha), \quad \text{para todo } x \in B(a, r),$$

o que completa a demonstração. ∎

Este teorema nos leva a considerar um espaço de funções holomorfas de tipo limitado entre $\mathcal{H}_b(U)$ e $\mathcal{H}(U)$ recentemente estudado por Dineen e Venkova [6], o espaço das funções holomorfas em U que são limitadas nas bolas estritamente contidas em U, denotado por:

$$\mathcal{H}_d(U) := \{f \in \mathcal{H}(U) : \|f\|_{B(a,r)} < \infty, \ \forall \ a \in U \text{ e } \forall \ 0 < r < d_U(a)\},$$

onde $\|\cdot\|_{B(a,r)}$ é a seminorma em $\mathcal{H}_d(U)$ definida por $\|f\|_{B(a,r)} := \sup_{x\in B(a,r)} |f(x)|$. Vamos munir $\mathcal{H}_d(U)$ com a topologia da convergência uniforme em todas estas bolas. Como toda bola estritamente contida em U é U-limitada, segue claramente que:

$$\mathcal{H}_b(U) \subset \mathcal{H}_d(U) \subset \mathcal{H}(U),$$

e Dineen e Venkova [6] deram exemplos em que $\mathcal{H}_b(U) = \mathcal{H}_d(U)$ e também $\mathcal{H}_b(U) \neq \mathcal{H}_d(U)$.

Notemos que o espaço $\mathcal{H}_d(U)$ é um caso particular dos espaços $\mathcal{H}_\tau(U)$ estudados por Matos em [13].

Seguindo as notações de Dineen e Venkova, no Teorema 3.17 foi provado, em particular, que se uma função $f \in \mathcal{H}(U)$ omite dois valores distintos então $f \in \mathcal{H}_d(U)$. Mais geralmente:

Corolário 3.18 *Seja U um domínio em um espaço de Banach e seja $\mathfrak{F} \subset \mathcal{H}(U)$ uma família de funções que omitem dois valores distintos. Se a família $\mathfrak{F}$ é limitada em algum ponto $x_0 \in U$, então $\mathfrak{F}$ é um subconjunto limitado de $\mathcal{H}_d(U)$.*

Se E possui dimensão finita, então $\mathcal{H}_b(U) = \mathcal{H}_d(U)$ e as conclusões do Corolário 3.16 e do Corolário 3.18 coincidem. Mas se E tem dimensão infinta, em geral $\mathcal{H}_b(U) \neq \mathcal{H}_d(U)$, como Dineen e Venkova mostraram, e neste caso as conclusões do Corolário 3.16 são estritamente mais fortes do que as do Corolário 3.18.

Os resultados da Seção 3.1 foram publicados em [19]. Os resultados das Seções 3.2 e 3.3 serão publicados em [18].

Referências Bibliográficas

[1] Barroso, J. A., *Introduction to Holomorphy*, editor: Leopoldo Nachbin, North-Holland Mathematics Studies **106** (Notas de Matemática 98), Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, 1985.

[2] Boyd, C. and Dineen, S., *Compact sets of holomorphic mappings*, Mathematische Nachrichten **193**, 27–36 (1998).

[3] Carathéodory, C., *Theory of Functions of a Complex Variable*, Vol. II, Chelsea Publishing Company, New York, 1960.

[4] Conway, J. B., *Functions of One Complex Variable I*, GTM **11**, Springer-Verlag, New York, 1978.

[5] Dineen, S., *Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces*, Springer-Verlag, London, 1999.

[6] Dineen, S. and Venkova, M., *Extending bounded type holomorphic mappings on a Banach space*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **297**, 645–658 (2004).

[7] Dugundji, J., *Topology*, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1970.

[8] García, D. and Mujica, J., *Quasi-normable preduals of spaces of holomorphic functions*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **208**, 171–180 (1997).

[9] Hilbert, D., *Über das Dirichletsche prinzip*, Jber. DMV **8**, 184–188 (1899).

[10] Hu, C.-G. and Yue, T.-H., *Normal families of holomorphic mappings*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **171**, 436–447 (1992).

[11] Kim, T.-K. and Krantz, S. G., *Normal families of holomorphic functions and mappings on a Banach space*, Expositiones Mathematicae **21**, 193–218 (2003).

[12] Köthe, G., *Topological Vector Spaces I*, Die Grundlehren der Matematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Band 159, Springer Verlag, 1969.

[13] Matos, M. C., *Domains of τ-holomorphy in a separable Banach space*, Mathematische Annalen **195**, 273–278 (1972).

[14] Montel, P., *Sur les suites infinies de fonctions*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure **24**, 233–334 (1907).

[15] Montel, P., *Leçons sur les Familles Normales de Fonctions Analytiques et leurs applications*, Chelsea Publishing Company, Bronx, New York, 1974.

[16] Mujica, J., *Gérmenes Holomorfos y Funciones Holomorfas en Espacios de Fréchet*, Publicaciones del Departamento de Teoria de Funciones, Universidad de Santiago de Compostela **1**, 1978.

[17] Mujica, J., *Complex Analysis in Banach Spaces*, editor: Leopoldo Nachbin, North-Holland Mathematics Studies **120** (Notas de Matemática 107), Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, 1986.

[18] Mujica, J. and Takatsuka, P., *A Schottky-type theorem for starlike domains in Banach spaces*, Proceedings of the American Mathematical Society, **135**, 1141–1144 (2007).

[19] Takatsuka, P., *Normal families of holomorphic functions on infinite dimensional spaces*, Portugaliae Mathematica, **63**, 351–362 (2006).