UNICAMP

Elizeu Cleber dos Santos França

Soluções Invariantes de Operadores Diferenciais Definidos em Fibrados

CAMPINAS
2014

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

ELIZEU CLEBER DOS SANTOS FRANÇA

SOLUÇÕES INVARIANTES DE OPERADORES DIFERENCIAIS DEFINIDOS EM FIBRADOS

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em matemática.

Orientador: Pedro José Catuogno

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO ELIZEU CLEBER DOS SANTOS FRANÇA, E ORIENTADA PELO PROF. DR. PEDRO JOSÉ CATUOGNO.

Assinatura do Orientador

CAMPINAS
2014

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

F844s França, Elizeu Cleber dos Santos, 1987-
Soluções invariantes de operadores diferenciais definidos em fibrados / Elizeu Cleber dos Santos França. – Campinas, SP : [s.n.], 2014.

Orientador: Pedro José Catuogno.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Simetria (Matemática). 2. Geometria diferencial. 3. Equações diferenciais. 4. Lie, Grupos de. 5. Jatos (Matemática). 6. Transversalidade. I. Catuogno, Pedro José,1959-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Invariant solutions of differential operations defined in bundles
Palavras-chave em inglês:
Symmetry (Mathematics)
Differential geometry
Differential equations
Lie groups
Jet bundles (Mathematics)
Transversality
Área de concentração: Matemática
Titulação: Mestre em Matemática
Banca examinadora:
Pedro José Catuogno [Orientador]
Alexandre José Santana
Diego Sebastian Ladesma
Data de defesa: 13-06-2014
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 13 de junho de 2014 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof.(a). Dr(a). PEDRO JOSÉ CATUOGNO

Prof.(a). Dr(a). DIEGO SEBASTIAN LEDESMA

Prof.(a). Dr(a). ALEXANDRE JOSÉ SANTANA

Abstract

In this work we will give the basic theory of symmetries of differential equations. The goal of this work is searching for invariant solutions of differential operators which are defined on vector bundles with respect to the transverse action of a Lie group in such bundle.

Keywords: Symmetry, Jet Space, Invariant Solution, Invariant Section, Tranversality, Differential Operator, Lie Group, Fiber Bundle, Topology.

Resumo

Neste trabalho, apresentaremos a teoria básica de simetrias de equações diferenciais, focando na busca por soluções invariantes de operadores diferenciais definidos em fibrados vetoriais com relação à ação transversal de um grupo de Lie no fibrado em questão.

Palavras-chave: Simetria, Espaço de Jato, Solução Invariante, Seção Invariante, Transversalidade, Operador Diferencial, Grupo de Lie, Fibrado, Topologia.

Sumário

Dedico este trabalho aos meus pais Elizeu Alvez de França e Lucinéia dos Santos e, in memorian, a meu avô José Maria

Em cada um dos reinos naturais existe um aperfeiçoamento das formas inferiores às superiores. A esse avanço de um domínio ao seguinte corresponde uma perda de simetria. No ser menos perfeito, mais primitivo, o total é mais ou menos igual às suas partes. No mais perfeito, mais evoluído, o total não é parecido com as partes.

Johann Wolfgang Göethe

Agradecimentos

Ninguém, senão eles, poderia dar o amor, a força e o apoio para que eu alcançasse o fim deste trabalho, bem como qualquer outra aventura que me propusesse. Agradeço aos meus pais Lucineia dos Santos e Elizeu Alvez de França pela presença única e, não apenas, claro, por serem meus pais, mas pela amizade que demonstram, amor incondicional, fonte de inspiração da qual bebo, simplicidade, brio e tanto mais. Nestas linhas que seguem, esquecerei de muitas pessoas importantes que tiveram peso no processo que gerou a conclusão do presente trabalho. De início, reúno na palavra família um agradecimento em atacado, especialmente Ludier Kesser, prima que amo. O amor por essa ciência dura começou cedo, por isso sinto a necessidade de agradecer minha professora, Maria de Lourdes, que me auxilou tão bem nas primeiras contas - já não mais preciso cantar a tabuada no banheiro, professora. Professor Dérsio, que me ensinou algo de Matemática na Graduação e, especialmente, o professor Leandro Lima, que sempre me incentivou até me trazer para o primeiro Curso de Verão na UNICAMP, no ano de 2007. Ao professor Tomas E. Barros, pelos ensinamentos de 2007, no qual, inclusive, o símbolo de somatória foi uma novidade. Agradeço, na figura do professor Flávio Nascimento, ao Movimento Negro de Rondonópolis, que me permitiu iniciar as atividades docente no Cursinho Pré-Vestibular Novos Rumos. Agradeço meus amigos por ordem cronológica: Daniel França (meu grande irmão!), Macdouglas Mascarenhas, Ronier Barreto, Orácio Costa, George Morais, Flávia Martins, Tarciano Bandeira e Loami Lopes, que sempre me deram força; Conrado Lacerda, pelos ensinamentos; Eder Moraes, Renan Domingues, Lucas Calixto, André Pereira, Rafeal Genaro, Germano Abud e Samuel Wainer, pelas discussões e auxílio no uso do Latex. Dos professores que não falei, gostaria de agradecer Rafael Leão, Alcebíades Rigas, Plamen Koshlukov, Luiz San Martín, Paulo Ruffino e Sebastian Ladesma pelas disciplinas ministradas. Agradecimentos ao professor Pedro Catuogno pela orientação e paciência. Agradeço às agências de fomento CAPES e CNPq pelo meu "salário". Agradeço ao IMECC pelos Cursos de Verão que proporciona e ao ambiente rico para o estudo de Matemática, em especial, na secretaria de pós-graduação, Tânia Mendes, Lívia Pires, Ednaldo Santana, elas pela dedicação com os alunos e ele, também por isso, mas mais pelas estórias. Em meados de junho de 2013, conheci duas pessoas especiais; declaro meus sinceros agradecimentos ao meu amor, Jhenifer Silva, e ao seu falante filho Otto Silva, pelos bons dias desde então, pelo carinho, atenção e tanto mais. Por fim, gostaria de agradecer ao Deus que minha mãe tanto confia e dedica orações.

Introdução

Modelos matemáticos que descrevem fenômenos do mundo real quase sempre são descritos por um sistema de equações diferenciais parciais (EDP's). Por isso, existe um interesse prático em obter suas soluções. Com o advento dos computadores, mesmo que muitos problemas tenham sido (e continuem sendo) resolvidos numericamente, soluções explícitas de EDP's que surgem em problemas de física e geometria diferencial são de grande interesse. Soluções explícitas podem ser usadas, dentre tantos exemplos, em testes de precisão e comparação de algoritmos numéricos que, por sua vez, são amplamente usados em outras áreas do conhecimento, aprimorando-os. O maior avanço, no sentido de obter soluções explícitas de EDP's, foi iniciado pelo matemático norueguês Marius Sophus Lie (1842-1899), na segunda metade do século XIX. Ele observou que muitos dos métodos particulares para obtenção de soluções de equações diferencias ordinárias estavam contidos em uma teoria mais geral, que estaria intimamente ligada com grupos a 1-parâmetro. Lie obteve um teorema análogo ao de Évariste Galois sobre a solubilidade de equações polinomiais por meio de radicais, que garante que uma equação diferencial ordinária de ordem n é solúvel por quadraturas, ou seja, usando apenas operações elementares de soma, produto, exponenciais e cálculo de primitiva de funções reais, admite-se um grupo de simetria $n-$ dimensional solúvel (veja Teorema 2.64 [24]). Exceto pelo resultado acima mencionado, o que Lie desenvolveu para EDP's foi considerado de valor limitado, pois não dava conta de construir as soluções gerais da EDP considerada. Além disso, sua teoria de integração de Álgebras de Lie para obtenção de um grupo de transformações era apenas local e obtinha apenas grupos locais. A partir da ação de um grupo infinitesimal, ou Álgebra de Lie, como é conhecido atualmente, resgatamos um grupo local de transformações juntamente com uma ação local. Podemos observar esses fatos nos segundo e terceiro teoremas fundamentais de Lie, em versão moderna (extraído de [13]):

(Lie's Second Fundamental Theorem) Each local Lie group determines a unique Lie algebra of infinitesimal transformations, each of which corresponds uniquely to a (local) one parameter subgroup.

(Lie's Third Fundamental Theorem) Each finite dimensional Lie algebra determines a local Lie group in such a fashion that it is the algebra of infinitesimal transformations of the local group.

Compare com [27] páginas 211 à 213. A partir de então, podendo classificar os grupos locais a partir das álgebras, que são objetos algébricos possivelmente mais tratáveis, Lie, dentre outros matemáticos como Wilhelm Killing, Friedrich Engel, Élie Cartan, inclue-se em um programa direcionado a classificar as álgebras de Lie. Nesse sentido, é notável o teorema de Lie que afirma, essencialmente ser, uma álgebra de matrizes triangulares superiores, qualquer álgebra de Lie solúvel sobre um corpo algebricamente fechado (conteúdo do teorema 2.24 de [29]). A formulação global da teoria de Lie ocorreu somente no trabalho de Palais [9], onde é demonstrado que, uma ação infinitesimal de uma álgebra de Lie de dimensão finita é integrada a uma ação de um grupo de Lie cujo a ação infinitesimal adjacente é a ação da álgebra em questão se, e somente se, os campos desta álgebra são completos. É necessário mencionar que é devido a Cartan a integração de uma álgebra de Lie a um grupo de Lie (global), cujo a prova é baseada no Teorema de Ado. Convém evidenciar uma nota dada em Olver [24] página 68, afirmando ser anterior a Lie o resultado que garante a reconstrução do grupo através de seus geradores infinitesimais. Diga-se de passagem, o conceito de grupo local que citamos não é o mesmo de semigrupo, este sendo um conjunto fechado para multiplicação apenas e o primeiro um conjunto ”isomorfo"a uma vizinhança da identidade de algum grupo de Lie. Semigrupos são usados em geometria diferencial, teoria de controle e algebra topológica, pra citar alguns (veja por exemplo trabalhos do pesquisador Luiz A. B. San Martin). Pode-se afirmar que a ligação entre álgebra e topologia, geometria e/ou física, nunca foi tão fortemente percebida antes do surgimento dos grupos de Lie. Dizia um dos colaboradores de Lie, grande geômetra Felix Klein: ”os objetos de estudos em geometria são as propriedades invariantes de figuras geométricas sob a ação de grupos específicos de transformações". Em topologia podemos apreciar o notável resultado devido a Weyl (veja [16] para quatro demonstrações):

Teorema: Seja G um grupo de Lie compacto e conexo com algebra de Lie $\mathfrak{g}$. Então, o grupo fundamental de G é finito se, e somente se, $\mathfrak{g}$ é semi-simples

Em geral, podemos entender uma simetria como uma operação que mantém invariante uma forma. Podemos entender, portanto, que um grupo é de simetria de algum conjunto se ele mantém invariante este conjunto, ou seja, se ele age em tal conjunto (aqui porém com sentido levemente diferente do que conhecido em matemática). Assim, naturalmente surge uma noção de simetria de uma equação diferencial, que é propriedade do grupo em transformar soluções da equação em novas soluções. A princípio, a fim de obter simetrias de uma equação diferencial, precisaríamos considerar um grupo agindo em um espaço de funções, que eventualmente tem dimensão infinita. Isso, todavia, pode ser contornado e o ponto de partida é o seguinte resultado:

Teorema: Se um grupo de Lie conexo age suavemente em um variedade M e zero é valor regular de função suave $F : M \to \mathbb{R}^l$, então, o conjunto $F^{-1}(0)$ é invariante por G se, e somente se, $X_pF = dF_p(X_p) = 0$ para cada p tal que $F(p) = 0$ e todo gerador infinitesimal X da ação de G em M.

Ao considerarmos genericamente um grupo de Lie G agindo em um aberto $M \subset X \times U \subset \mathbb{R}^{m+n}$, onde procuramos soluções da forma $u = f(x)$ de um sistema de equações diferenciais $\Delta = 0$, podemos induzir uma ação no espaço das derivadas destas funções (neste espaço uma função fica representada por sua ordem de contato em cada ponto), denominados espaços de jatos de M. Interpretando um sistema de equações diferenciais como subvariedade do espaço de jatos de M da forma $\Delta^{-1}(0)$, poderemos aplicar os critérios infinitesimais de invariância dado pelo teorema acima, obtendo uma álgebra de Lie de tal modo que cada um de seus elementos corresponde a um grupo a 1-parâmetro que será um subgrupo do grupo total de simetria da EDP estudada. O ponto é obter, a partir de um gerador infinitesimal genérico, um campo no espaço de jatos, processo este denominado prolongamento de campos, cujo seus coeficientes dependem dos coeficientes dos geradores infinitesimais dados inicialmente. Quando aplicamos esses campos estendidos na função Δ, restrito a condição $\Delta = 0$, obtemos equações diferenciais envolvendo as derivadas dos coeficientes dos geradores infinitesimais genéricos que começamos (linearização). Estes são facilmente solucionados, permitindo obter tais geradores e, por conseguinte, obter o grupo total de simetria. A grosso modo, em linguagem moderna, o que apresentamos acima é a teoria inicialmente desenvolvida por Lie para equações diferenciais.

O grupo de simetria de uma EDP permite obter soluções a partir de outras soluções já existentes. O avanço para produzir soluções novas, independente de conhecer alguma solução ou não, está baseado em considerar soluções cujo o gráfico não é afetado (localmente) pela ação do grupo. Essas soluções especiais recebem o nome de soluções invariantes e constituem praticamente tudo que se sabe sobre soluções explícitas de EDP's. Segundo Olver, Sophus Lie já havia trabalhado na busca por soluções invariantes em seu último artigo obtendo resultados gerais como os discutidos nesta dissertação, mas somente após os trabalhos de Ovsiannikov este tópico foi evidenciado tornando-se foco de pesquisa inicialmente na antiga União Soviética e posteriormente na Europa e Estados Unidos ([24] nota ao capítulo III).

O método de soluções invariantes é o que mais se aproxima do resultado obtido por Lie análogo ao de Galois para EDP's, uma vez que se o grupo estudado age com órbitas $s-$dimensionais, conseguimos reduzir o problema ao estudo de um sistema de equações diferenciais com s variáveis a menos. Em aplicações práticas do método e, mesmo para justificar rigorosamente o método das soluções invariantes, é crucial assegurar a existência de invariantes locais da ação. Aparece primeiramente na tese de doutorado de Olver a justificativa rigorosa deste método baseado no trabalho de Palais, usando a teoria de espaços quociente, estes que por sua vez tem relação direta com a construção de invariantes globais. Olver demonstra existir uma correspondência biunívoca entre as soluções invariantes de uma equação diferencial e a soluções invariantes de um operador diferencial definido nos espaço das órbitas. Para tanto, considerando que ao tomarmos o quociente o espaço resultante pode não ser um espaço euclidiano, faz-se necessário uma generalização da noção de espaços de jatos a fim de obter uma definição satisfatória de um sistema de equações diferenciais definidos em uma variedade. Nesta generalização, perde-se a noção de variáveis dependentes e independentes. Já que a uma solução invariante f está associada uma subvariedade localmente invariante, a saber, seu gráfico, pois $f(g{\cdot}x) = g{\cdot}f(x)$ para g próximo da identidade, ao procurarmos uma solução invariante que passa por algum ponto p precisamos garantir, ao menos, que por p passa subvariedades invariantes. A condição para que isso ocorra está ligada ao conceito de transversalidade infinitesimal. Desta forma, existe outro motivo que compele-nos a desconsiderar a noção de variáveis dependentes ou independentes. Diga-se de passagem, ao fixarmos variáveis dependentes e independes, soluções que não correspondem ao gráfico de função nessas coordenadas podem ser interpretadas como soluções a múltiplos valores, estas com grande uso física.

Usando a linguagem de fibrados resgatamos a noção de variáveis dependentes e independentes. Baseado no trabalho [1], no caso de uma ação transversal, podemos mostrar que há uma correspondência biunívoca entre as soluções invariantes de um operador diferencial e as soluções invariantes de um operador definido no fibrado quociente. Os resultados principais que garantem tanto a existência do operador reduzido no fibrado quociente como a correspondência entre a seções deste fibrado e as seções invariantes do fibrado em questão, são:

(Classificação de Ações Transversais em Fibrados) Se um grupo de Lie G age transversalmente e suavemente em $\pi : E \to M$, onde π é uma submersão sobrejetiva, e ação de G em M é regular, então são válidas:

i A ação de G em E é regular e se $\widetilde{M}$ for Haussdorff também $\widetilde{E}$ será uma variedade Hausdorff;

ii $\widetilde{\pi} : \widetilde{E} \to \widetilde{M}$ é uma submersão tal que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\pi_E"] \arrow[d, "\pi"] & \widetilde{E} \arrow[d, "\widetilde{\pi}"] \\ M \arrow[r, "\pi_M"] & \widetilde{M} \end{tikzcd}$$

iii Se $\pi : E \to M$ é um fibrado com fibra F também será um fibrado $\widetilde{\pi} : \widetilde{E} \to \widetilde{M}$ com mesma fibra F e

iv Se π é fibrado, então será fortemente equivalente ao fibrado *pullback* $\mathrm{pr}_1 : {\pi_M}^*(\widetilde{E}) \to M$ com ação canônica de G.

(Classificação das Seções Invariantes) Seja $\pi : E \to M$ uma submersão sobrejetiva e considere G agindo suavemente e transversalmente em E. Se a ação em M é regular, então para qualquer aberto $U \subset \widetilde{M}$ há uma correspondência biunívoca entre as seções suaves $\widetilde{s} : \widetilde{U} \to \widetilde{E}$ e as seções G-invariantes $s : \pi_M^{-1}(\widetilde{U}) \to E$.

O primeiro resultado garante a estrutura de fibrado no quociente e mostra que a ação de G em E herda propriedades da ação de G em M, dentre elas, a regularidade, que é mais difícil checar no espaço total. O segundo nos dá a correspondência entre seções invariantes. A classificação explícita do espaço de todas as seções invariantes de um fibrado é um problema importante em física e geometria diferencial. Nele está incluída, por exemplo, a caracterização de métricas, conexões e formas invariantes, dentre outros. No caso de ações transitivas na base podemos estudar, ainda, pontos fixos da ação induzida em cada fibra pelo respectivo grupo de isotropia.

O presente trabalho está organizado da seguinte maneira:

No Capítulo I, daremos noções de variedades diferenciáveis e grupos de Lie de forma sucinta, omitindo demonstrações de resultados clássicos, com ênfase na parte de ações de grupos e ações infinitesimais, onde provaremos o resultado clássico, intimamente ligado com a redução da ordem de um sistema de equações diferenciais, o qual versa que, sob as condições de uma ação regular, o espaço quociente tem uma estrutura de variedade diferenciável com a projeção natural sendo submersão onde, eventualmente, perderemos a propriedade Hausdorff. Daremos outra caracterização de ação regular , alternativa a dada em Olver [24], usadas extensivamente em [1] na obtenção de seus principais resultados e mostraremos que ambas são equivalentes.

No Capítulo II, analisaremos um sistema de equações diferenciais por um ponto de vista geométrico, com a introdução dos espaços de jatos em espaços euclidianos, e daremos um método para encontrar o grupo de simetria de uma dada equação, especificamente, a álgebra de Lie do grupo em questão, que é gerada pelos campos provenientes da ação prolongada do grupo no espaço de jatos; uma generalização de espaços de jatos para variedades arbitrárias aparece ao fim do capítulo, permitindo obter uma definição do que é um sistema de equações diferencias definidos em uma variedade arbitrária. Mostraremos, com auxílio do Teorema de Frobenius, a existência de um conjunto completo de invariantes pela ação de um grupo de Lie em uma variedade suave, ou seja, conjunto de funções suaves a valores reais que são constante nas órbitas, no caso em que o grupo de estudo é finito dimensional; essas soluções são usadas no procedimento prático de encontrar soluções invariantes assim como na estruturação do espaço de órbitas.

No Capítulo III, abordaremos rapidamente o conceitos de fibrado e fibrados de jatos de seções, mostrando algumas estruturas de fibrados dos espaços de jatos, finalizando com uma definição de operador diferencial entre fibrados.

No último capítulo introduzimos o espaço de jatos invariantes de um fibrado $\pi : E \to M$, local adequado para buscar soluções invariantes, fazendo inicialmente de modo mais geral. Introduzimos o conceito de ação transversal em fibrados, como dada em [1] e [2], comparando com a noção de ação infinitesimalmente transversal e, nestas condições, mostramos que por cada ponto passará um subvariedade globalmente invariante que é a saturação de qualquer localmente invariante passando pelo ponto em questão. Dois teoremas centrais são apresentados, ambos extraídos de [1], mencionados anteriormente. Usando tais resultados caracterizaremos o fibrado $I^k(\pi) \to M$ em termos da aplicação quociente $\pi_M : M \to M/G$ e do espaço $J^k(\widetilde{\pi})$, onde $\widetilde{\pi} \circ \pi_E = \pi_M \circ \pi$. Juntando ambos resultados principais mostraremos que dado um operador diferencial Δ, existe operador reduzido $\widetilde{\Delta}$, de modo que a soluções invariantes de Δ estão em correspondência biunívoca com a soluções do operador reduzido. Finalizamos apresentando o *kinematic bundle*, maior conjunto onde a ação de um grupo de Lie é transversal atentando ao fato que nem sempre tal conjunto é uma variedade suave.

O Trabalho é suplementado pelo apêndice A, onde damos a definição de partição da unidade e, como aplicação, caracterizamos as funções suaves de uma subvariedade mergulhada $N \subset M$ como sendo aquelas que admitem uma extensão em um aberto $U \subset M$ contendo a subvariedade em questão. Mantivemos este apêndice, embora pareça supérfluo, pois tentávamos entender as derivadas de ordem superior de uma função entre variedades e, desta forma, trabalhando em espaços euclidianos com a extensão da função, ficaria mais fácil o entendimento.

O apêndice B é um complemento ao trabalho, essencial para a teoria. Mostra-se nele que a ação estendida ao espaço de jatos é, no caso não projetivo, apenas uma ação local e suave, sendo global no caso projetivo. É a partir deste fato que garantimos a suavidade da ação estendida no espaço de jatos invariantes.

Mais detalhes introdutórios sobre os assuntos a serem abordados serão dados nos inícios de cada capítulo.

Este trabalho almeja apenas ser um texto em português introdutório ao assunto de Grupos de Lie aplicada ao estudo de equações diferenciais culminando em um resultado moderno sobre soluções invariantes de operadores diferenciais definidos em fibrados. Foi feito um esforço para terminar em um texto auto-contido com intenção de permitir ao aluno que orientar-se por essas notas recorrência mínima a outras referências. Questões que por ventura possam aparecer, ou mesmo sugestões que o estudante queira compartilhar, encorajamos-o a entrar em contato pelo endereço *elizeucleber@yahoo.com.br*. Com certeza será bem recebido.

Capítulo 1

Noções de Variedades Diferenciáveis e Grupos de Lie

1.1 Introdução

Este capítulo tem por objetivo apresentar a teoria básica das variedades diferenciáveis e dos grupos de Lie. Daremos ênfase na teoria de ações de grupos de Lie em variedades diferenciáveis, que, por sua vez, é um tópico básico, para interpretarmos geometricamente o problema de encontrar soluções de equações diferenciais.

1.2 Variedades Diferenciáveis

Na maior parte desta dissertação, trabalharemos com variedades diferenciáveis Hausdorff e segundo contável. Haverá, no entanto, um momento em que a condição Hausdorff terá de ser eliminada da definição abaixo, mantendo sempre, porém, a condição de enumerabilidade. Eliminar tal propriedade faz-se necessário para estudar variedades quocientes, que surgem quando estruturamos o espaço de órbitas de maneira natural.

Definição 1.2.1. *Seja M um espaço topológico Hausdorff e com base enumerável de abertos. Considere $\mathcal{A} = \{\phi_\alpha, U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ uma família onde $U_\alpha \subset M$ são abertos e $\phi_\alpha : U_\alpha \to V \subset \mathbb{R}^m$ homeomorfismo, V aberto, tal que $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$; sempre que os domínios de duas funções quaisquer ϕ_α e ϕ_β se interceptam, as funções $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ e $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ são difeomorfismos suaves (dizemos que essas funções são C^∞ compatíveis) Dizemos, então, que a família $\mathcal{A}$ é um atlas suave para M e as funções ϕ_α são denominadas cartas. Um atlas é maximal se não está contido propriamente em qualquer outro atlas $\mathcal{B}$ (contido, aqui, significa que as cartas de $\mathcal{A}$ são C^∞ compatíveis com as cartas de $\mathcal{B}$ incluindo a continência usual). O espaço M será denominado variedade suave quando admitir atlas suave maximal.*

Por vacuidade, se duas cartas não têm pontos em comum em seus respectivos domínios, elas são C^∞ compatíveis. Uma variedade é dita de classe C^k, suave ou analítica, se as funções compostas $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ forem de classe C^k, suaves ou analíticas, respectivamente. Neste trabalho, serão consideradas somente variedades suaves.

Todo atlas $\mathcal{A}$ determina um único atlas maximal, que, por sua vez, é determinado pelo conjunto de todas as cartas que são C^∞ compatíveis com todas as cartas de $\mathcal{A}$.

Seja M uma variedade suave. Para cada ponto $p \in M$ podemos encontrar uma carta ϕ tal que $\phi(p) = 0$. Nessas condições, diremos que essa carta está **centrada** em p. Se p apenas pertence ao domínio da carta diremos que ϕ é carta ao redor de p.

Definição 1.2.2. *Sejam M e N duas variedades suaves e $F : M \to N$ uma função. Dado $p \in M$, diremos que F é suave em p se dadas duas cartas ϕ e ψ ao redor de p e $F(p)$, respectivamente, a função $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ é suave em p. A função F é dita suave se for suave em todos os pontos de M.*

Observe que não especificamos o domínio da função $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$. Faremos diversas vezes tal omissão para deixar o texto menos carregado, e a composta fica definida onde tem sentido. O conjunto de todas as funções suaves $f : M \to \mathbb{R}$ será denotado por $C^\infty(M)$.

Definição 1.2.3. *Seja M variedade suave. Uma derivação em um ponto $p \in M$ é uma função $X : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ que satisfaz*

(a) $X(f + g) = X(f) + X(g)$;

(b) $X(f \cdot g) = X(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot X(g)$.

O espaço tangente a M em um ponto p, denotado por T_pM, é o conjunto das derivações em p.

Sejam ϕ carta ao redor de p e $f : M \to \mathbb{R}$ suave. A função $\partial_i|_p$ definida por

$$\partial_i|_p f := \frac{\partial}{\partial x^i}|_{\phi^{-1}(p)}(f \circ \phi^{-1})$$

é um elemento de T_pM e, mais ainda, T_pM é um espaço vetorial de dimensão finita gerado pelo conjunto $\{\partial_1|_p, ..., \partial_m|_p\}$, onde m é a dimensão da variedade M. É essencial a hipótese de M ser suave, como pode ser notado na demostração. Para variedades que são apenas C^k, esse espaço tem dimensão infinita (veja [17]).

Definição 1.2.4. *Seja $F : M \to N$ função suave. Definimos a derivada de F em p como a função $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$ dada por*

$$F_*X(g) = X(g \circ F),$$

onde $g \in C^\infty(N)$.

Outro símbolo que usaremos para derivada de uma função é o clássico dF_p, onde, eventualmente, o ponto p poderá ser omitido, escrevendo apenas dF. Ele é útil quando estamos trabalhando com funções carregadas de índices. Abaixo listamos algumas propriedades básicas da derivada. Sendo M, N e P variedades suaves e $F : M \to N$, $G : N \to P$ funções suaves, vale:

(a) $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$ esta bem definido e é linear.

(b) $(F \circ G)_* = F_* \circ G_*$

(c) $(1_M)_* : T_pM \to T_pM$ é o mesmo que o mapa $1_{T_pM} : T_pM \to T_pM$

(d) Se F é um difeomorfismo então F_* é um isomorfismo e $(F_*)^{-1} = (F^{-1})_*$.

Observe que dessa forma podemos escrever F_*^{-1} sem ambiguidade.

O próximo exemplo dá uma caracterização do espaço tangente como derivadas de curvas que moram na variedade. A título de esclarecimento, a função $\partial_t|_0$ aplica-se a funções suaves $f : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, U aberto, calculando a derivada de f no tempo $t = 0$.

Exemplo 1.2.5. (Espaço tangente como diferenciais de curvas) Seja M variedade suave n-dimensional, então o espaço tangente a M em p tem a seguinte caracterização:

$$T_pM = \{\alpha_*(\partial_t|_0); \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M \text{ curva suave com } \alpha(0) = p\}.$$

Observemos que α_* é uma aplicação de $T_0\mathbb{R}$ em TpM e passemos à demonstração desse fato. Sejam ϕ carta em p com $\phi(p) = x_0$ e derivação $X = \sum_{i=1}^n x^i\partial_i|_p$ representado em coordenadas, mostraremos que X é a derivada de uma curva. Definindo $\alpha(t) = \phi^{-1}(tx^1 + x_0^1, ..., tx^n + t_0^n)$, observemos que $\alpha(0) = p$ e, para ϵ suficientemente pequeno, $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ é uma função diferenciável. Dada $f : M \to \mathbb{R}$ suave, colocando $\beta(t) = (tx^1 + x_0^1, ..., tx^n + t_0^n)$, temos que

$$\alpha_*(\partial_t|_0)f = \partial_t|_0(f \circ \alpha) = \partial_t|_0((f \circ \phi^{-1}) \circ \beta(t)) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \partial_i|_{\phi^{-1}(p)}(f \circ \phi^{-1}) \cdot (\beta^i)'(0) = \sum_{i=1}^n (\partial_i|_p f) \cdot x^i = (\sum_{i=1}^n x^i\partial_i|_p)f = Xf.$$

Pelo exposto acima, concluímos $\alpha_*(\partial_t|_0) = X$. De fato, toda derivada de curva é uma derivação; com efeito, dada a curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ suave, observando que $\alpha(t) = \phi^{-1} \circ (\phi \circ \alpha(t)) = \phi^{-1} \circ \beta(t)$, temos que $\alpha_*(\partial_t|_0) \in \text{Im } \phi_*^{-1} = T_pM$ (uma vez que $\partial_i|_p = (\phi^{-1}) * (\partial_i)$ e o conjunto $\{\partial_i|_p\}$ gera T_pM). Identificaremos $T_0\mathbb{R}$ com $\mathbb{R}$, escrevendo $\alpha^{'}(0)$ ao invés de $\alpha_*(\partial_t|_0)$. Nada há de especial com 0 e, analogamente, vemos que $\alpha^{'}(t_0)$ é tangente a $\alpha(t_0)$.

O conjunto $TM = \bigcup_p T_pM$ admite uma estrutura natural de variedade diferenciável, com dimensão igual ao dobro da dimensão de M, de modo que a função projeção

$$\pi : TM \to M,$$

dada por $\pi(X \in T_pM) = p$, seja submersão. Dado $\{(\phi_\alpha, U_\alpha)\}$ um atlas para M, a estrutura de TM é obtida considerando o atlas maximal gerado pelo atlas $\{(\Phi_\alpha, \pi^{-1}(U_\alpha)\}$, onde, dado $X = \sum_{i=1}^m x^i\partial_i|_p$ escrito em coordenadas, a expressão para Φ_α é

$$\Phi_\alpha(X) = (\phi(p), x^1, ..., x^m).$$

1.3 Teorema da Função Inversa, de Sard e Subvariedades

Nessa seção, enunciaremos alguns dos teoremas essenciais para o estudo de topologia diferencial, e algumas consequências interessantes, tais como caracterização de certas subvariedades. Para uma demonstração do Teorema da Função Inversa veja Munkres [21] e para o de Sard veja Milnor [20].

Teorema 1.3.1 (Teorema da Função Inversa). *Sejam M e N variedades suaves e $F : M \to N$ função suave. Se $(F_*)_p$ é isomorfismo, então existe aberto U, conexo, contendo p, tal que $F : U \to F(U)$ é um difeomorfismo.*

Teorema 1.3.2 (Teorema da Função Implícita). *Seja $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ aberto. Escreva as coordenadas canônicas de U por $(x, y) = (x^1, ..., x^n, y^1, ..., y^k)$. Se a função $F : U \to \mathbb{R}^k$ é suave, com $F(x_0, y_0) = 0$ e a $k \times k$ matriz*

$$(\frac{\partial F^i}{\partial y^j}(x_0, y_0))_{ij}$$

inversível, então existem vizinhanças V e W de x_0 e y_0, respectivamente, e função suave $g : U \to W$, tal que $F(x, y) = 0$ em $V \times W$ se, e somente se, $y = g(x)$.

Definição 1.3.3. *Sejam M e N variedades suaves e $F : M \to N$ suave. Definimos posto de F em p como o posto de $(F_*)_p$; diremos que F é imersão se F_* for injetiva para todo p. Caso F_* tenha posto máximo para todo p e seja sobrejetiva diremos que F é submersão.*

Definição 1.3.4. *Uma variedade suave N, contida em outra variedade suave M, é dita subvariedade de M se a função $\iota : N \to M$ dado por $\iota(x) = x$ for uma imersão.*

Em geral, seja N variedade e suponha que $F : N \to M$ seja imersão injetiva. Então dizemos que N é subvariedade de M identificando N com $F(N)$. Um elemento $X \in T_pN$ será identificado com $\iota_*X \in T_pM$; dessa forma teremos $T_pN \subset T_pM$. Observe que previamente uma subvariedade tem sua topologia dada. Sendo U aberto em M, então $\iota^{-1}(U \cap N) = \iota^{-1}(U) \cap \iota^{-1}(N) = \iota^{-1}(U)$ aberto. Como ι é difeomorfismo (decretemos a estrutura em $F(N)$ como sendo tal que F seja difeomorfismo) em sua imagem temos que $U \cap N = \iota(U)$ é aberto em N. Concluímos assim, que os abertos da topologia de N como subespaço de M são abertos de N. Mas há subvariedades que possuem mais abertos que somente os herdados de M, como exemplo temos a figura “8", como subvariedade de $\mathbb{R}^2$. Uma subvariedade cuja topologia intrínseca coincide com a topologia herdada da variedade ambiente é dita subvariedade **mergulhada**, ou **regular**; neste trabalho são de interesse somente subvariedades mergulhadas.

Uma subvariedade imersa N em M, de mesma dimensão de M é regular. Isso segue pois o fato de ι ser imersão permite concluir que também é uma submersão (argumentos de dimensão dos espaços tangentes). Assim é um difeomorfismo local em virtude do Teorema da Função Inversa e, logo, função aberta, concluindo que as topologias intrínseca e induzida coincidem.

Para funções suaves $f : U \subset M \to \mathbb{R}$, onde U é aberto, usaremos a notação $(f_*)_p = df_p$. A função linear $df_p : T_pM \to T_{f(p)}\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$ pode ser interpretada como um elemento de $(T_pM)^*$, o dual de T_pM. Note que se $\phi = (x^i)$ for uma carta ao redor de p então

$$dx^i{}_p(\partial/\partial x^j|_p) = \delta^i_j,$$

onde o último símbolo representa o símbolo de *Kronecker*. Em geral quando $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ é uma transformação linear entre espaços vetoriais, podemos definir um operador transposto $T^* : \mathbb{W}^* \to \mathbb{V}^*$ dado por

$$T^*(\lambda)(v) := \lambda(T(v)).$$

Esse operador recebe esse nome pois quando os espaços vetoriais em questão são de dimensão finita a matriz desse operador linear tem relação com a transposta da matriz de T. Além disso, quando o operador T é injetivo então T^* será sobrejetivo e se T for sobrejetivo T^* será injetivo (supondo finita as dimensões dos espaços em questão). No contexto diferencial, o transposto da aplicação linear F_*, onde $F : M \to N$ é uma função suave, é denominado *pushfoward* e pode ser definido alternativamente na base por

$$F^*(dx^i) = d(F \circ x^i) \text{ onde } \quad F^* : (T_{F(p)}N)^* \to (T_pM)^*.$$

De fato temos as igualdades

$$F^*(dx^i)(X) = d(F \circ x^i)(X) = (x^i \circ F)_*(X) = (x^i)_*(F_*(X)) = dx^i(F_*(X)) = (F_*)^*(dx^i)(X),$$

mostrando que o operador transposto de F_* coincide com F^*.

Proposição 1.3.5. *Sendo M, N e P variedades suaves, são válidas:*

(i) *Se função suave $\iota : N \to M$ é tal que $(i_*)_q$ é injetiva e $\phi = (x^i)$ é carta ao redor de $\iota(q) = p$, algum subconjunto de $\{x^i \circ \iota\}$ define uma carta ao redor de $q \in N$.*

(ii) *Se a função suave $\pi : M \to P$ é tal que $(\pi_*)_p$ é sobrejetiva e $\psi = (y^i)$ é carta ao redor de $\pi(p)$, o conjunto $\{y^i \circ \pi\}$ pode ser completado a uma carta $(y^i \circ \pi, \zeta)$ ao redor de p para alguma função suave $\zeta : U \subset M \to \mathbb{R}^{m-p}$.*

Demonstração. Como ι_* é injetiva então o mapa $(\iota_*)^* : (T_pM)^* \to (T_qN)^*$ é sobrejetor. Assim, o conjunto $\{(\iota_*)^*(dx^i) = d(x^i \circ \iota)\}$ gera $(T_qN)^*$ e podemos extrair um subconjunto $\{d(x^{i_1} \circ \iota), ..., d(x^{i_n} \circ \iota)\}$ linearmente independente que forma uma base para $(T_qN)^*$. A função $\psi = (x^{i_1} \circ \iota, ..., x^{i_n} \circ \iota)$, definida próximo de $q \in N$ chegando em $\mathbb{R}^n$, é uma carta ao redor de q pois, simbolizando a projeção na i-ésima coordenada de um vetor $(z^1, ..., z^n) \in \mathbb{R}^n$ por z^j, temos que

$$(\psi_*)^*(dz^j) = \psi^*(dz^j) = d(z^j \circ \psi) = d(x^{i_j} \circ \iota).$$

Isso mostra que o mapa $(\psi_*)^*$ é necessariamente bijetor pois leva base em base. Segue que ψ_* é bijetor, já que seu transposto é bijetor e, pelo Teorema da Função Inversa, ψ define um difeomorfismo próximo de q, ou seja, define uma carta ao redor de q, completando a demonstração do primeiro item.

Sendo (y^i) carta ao redor de $q \in N$, o conjunto $\beta = \{d(y^i \circ \pi)\}$ é linearmente independente, pois caso

$$\sum a^i d(y^i \circ \pi) \equiv 0$$

então para todo $X \in T_pM$ tem-se

$$0 = \sum a^i d(y^i \circ \pi)X = \sum a^i y^i_* \circ \pi_*(X) = (\sum a^i y^i)_*(\pi_* X) = (\pi_*)^*(\sum a^i dy^i)(X),$$

mostrando que o funcional $(\pi_*)^*(\sum a^i dy^i) \equiv 0$, mas como π_* é sobrejetiva então $(\pi_*)^*$ é injetiva e, consequentemente, $\sum a^i dy^i = 0$ concluindo que $a^i = 0$ já que $\{dy^i\}$ é base dual a $\{\partial/\partial y^i\}$. Dado uma carta $\phi = (x^i)$ ao redor de $p \in M$ o conjunto $\{d(y^i \circ \pi), dx^j\}$ gera $(T_pM)^*$ de modo que, em virtude de β ser linearmente independente, podemos extrair uma base da forma

$$\{d(y^1 \circ \pi), ..., d(y^n \circ \pi), dx^{j_1}, ..., dx^{j_{m-n}}\}.$$

Se $\zeta = (x^{j_1}, ..., x^{j_{m-n}})$, então a função

$$(y^1 \circ \pi, ..., y^n \circ \pi, \zeta)$$

define uma carta ao redor p. □

Uma consequência do Teorema da Função Inversa é o seguinte resultado:

Teorema 1.3.6 (Teorema do Posto)**.** *Sejam M e N variedades suaves com dimensões m e n, respectivamente, e $F : M \to N$ função suave com posto constante k. Então, para cada $p \in M$, existem cartas (ϕ, U) e (ψ, V) com $\phi(p) = 0$ e $\psi(F(p)) = 0$, tais que*

$$F(\phi^{-1}(x^1, ..., x^m)) = \psi^{-1}(x^1, ..., x^k, 0, ..., 0),$$

onde o número de zeros é $n - k$.

Gostaria de destacar uma simples e útil consequência desse Corolário.

Proposição 1.3.7. *Considere $\pi : M \to N$ submersão suave. São válidas:*

a *π é uma mapa aberto;*

b *Se π é sobrejetiva, uma função $f : N \to P$ é suave se, e somente se, $\pi \circ f$ é suave.*

Demonstração. Dados $W \subset M$ aberto e ponto $p \in W$, tomemos cartas (ϕ, U) e $\psi(V)$ como no teorema anterior, ao redor de p e $\pi(p)$, respectivamente, de maneira que

$$\psi \circ \pi \circ \phi^{-1}(x^1, ..., x^m) = (x^1, ..., x^n).$$

Temos que $\psi \circ \pi \circ \phi^{-1}(\phi(U \cap W)) = pr_1 \circ \phi(U \cap W)$, onde $pr_1(x, u) = x$, é um conjunto aberto, pois ambas pr_1 e ϕ são mapas abertos. Desse modo

$$\pi(W \cap U) = \psi^{-1}(pr_1 \circ \phi(U \cap W)) \subset \pi(W)$$

é aberto contendo $\pi(p)$, seguindo que π é aberto. Como para qualquer p podemos tomar cartas da forma acima, existe função $s : V \to M$ suave que passa por p satisfazendo $\pi \circ s = I_V$; em outras palavras existem seções locais passando por p. A função s é dada por

$$s = \phi^{-1} \circ \iota \circ \psi,$$

onde $\iota(x^1, ..., x^n) = (x^1, ..., x^n, 0, ..., 0)$. Claramente

$$\psi \circ \pi \circ s(q) = \psi \circ \pi \circ \phi^{-1} \circ \iota \circ \psi(q) = \psi(q),$$

de modo que $\pi \circ s = I_V$, e $s(\pi(p)) = \phi^{-1} \circ \iota(0) = \phi^{-1}(0) = p$. Com isso, dados $f : N \to P$ e $q \in N$, tomemos $p \in M$ tal que $\pi(p) = q$ e seção local s com $s(q) = p$. A função f pode ser escrita próximo de q como

$$f(r) = (f \circ \pi) \circ s(r);$$

uma vez que $f \circ \pi$ é suave, f será suave próximo de cada ponto $q \in N$ como composta de funções suaves. $\square$

Definição 1.3.8. *Mantendo as notações acima, dizemos que $q \in N$ é valor regular se, para todo p, tal que $F(p) = q$, $(F_*)_p$ tem posto máximo.*

Uma demonstração da próxima proposição poderá ser encontrada em [17].

Proposição 1.3.9. *Com as notações anteriores, se $q \in N$ é tal que $(F_*)_p$ é sobrejetiva para cada $p \in F^{-1}(\{q\})$, então $F^{-1}(\{q\})$ é subvariedade mergulhada de dimensão $m - n$.*

Proposição 1.3.10. *(Espaço tangente de imagens inversas de valores regulares) Sejam $F : M \to N$ suave e $q \in N$ valor regular. Escreva $P = F^{-1}(\{q\})$. Então, dado $p \in P$, vale a igualdade $T_pP = \ker \quad F_*$.*

Demonstração. Dado $X \in T_pP$, seja $\alpha(t)$ curva em P tal que $\alpha'(0) = X$ e $\alpha(0) = p$. Temos que $F_*X = \partial_t|_0 F(\alpha(t)) = \partial_t|_0(q) = 0$. Segue que $T_pP \subset \ker \quad F*$. Sendo m e n as dimensões de M e N, respectivamente, temos $\quad n + \dim(\ker F_*) = \dim(\mathrm{Im}\ F_*) + \dim(\ker F_*) = m = n + \dim(T_pP)$. Logo $\dim(T_pP) = \dim(\ker F_*)$ com $T_pP \subset \ker \quad F*$. Seguindo o resultado. $\square$

O próximo teorema é uma ferramenta muito poderosa no estudo das variedades diferenciáveis. Uma demonstração pode ser encontrada na referência [20]. Logo abaixo provamos uma consequência simples e útil para ilustrar o uso desse resultado.

Teorema 1.3.11 (Teorema de Sard). *Seja $F : M \to N$ mapa suave com N n-dimensional. Então o conjunto $CritF = \{q \in N; Posto(F_*)_p < n$, para algum p com $F(p) = q$ $\}$ tem medida nula (Aqui um conjunto $A \subset M$ é dito de medida nula em M se, para toda carta (ϕ, U), $\phi(U \cap A)$ tem medida nula em $\mathbb{R}^n$; medida de Lebesgue).*

Observe que dado $q \in N$ com $q \notin \mathrm{Im}\ F$, q não é ponto critico de F, ou seja, $q \notin CritF$. Isso segue por vacuidade, pois caso contrário deveria existir p tal que Posto $(F_*)_p < n$ e $F(p) = q$. Aplicaremos esse resultado para demonstrar o seguinte lema que também pode ser provado usando o Teorema do Posto.

Lema 1.3.12. *Seja $F : M \to N$ suave, injetiva e sobrejetiva. Se F_* é sempre injetiva ou sempre sobrejetiva então F é difeomorfismo.*

Demonstração. É suficiente mostrar que F_* é sobrejetiva. De fato, observe que sendo F_* bijetiva para cada ponto p, existirá G^p suave que é inversa de F em uma vizinhança de p, onde F é difeomorfismo, garantida pelo Teorema da Função Inversa; $F : U \to F(U)$. Claro que $G^p = F^{-1}$ em $F(U)$, seguindo que F^{-1} é localmente suave. Se M e N tiverem mesma dimensão (e logo seus espaços tangentes também terão mesma dimensão) então F_* necessariamente será sobrejetiva e poderemos concluir o resultado. Posto isso, suponha que $\dim M < \dim N = n$ (claro que o outro caso não é possível pois F_* é injetiva; novamente entra as dimensões dos espaços tangentes). Isso implica que $(F_*)_p$ tem posto menor que n para todo p, permitindo concluir que $\text{Crit } F = F(M) = N$, uma vez que F é sobrejetiva, contrariando o teorema de Sard. O caso F_* sempre sobrejetiva é uma simples aplicação do Teorema do Posto. □

O seguinte teorema, que pode ser demonstrado com auxílio do Teorema de Sard, afirma, essencialmente, que toda variedade suave está mergulhada em algum $\mathbb{R}^N$.

Teorema 1.3.13 (Teorema de Withney)**.** *Toda variedade suave n-dimensional pode ser imersa em $\mathbb{R}^{2n}$ e mergulhada em $\mathbb{R}^{2n+1}$ (no último caso como uma subvariedade fechada).*

1.4 Campos Vetoriais

O conceito de campo vetorial, que nada mais é do que uma seção suave do fibrado $TM \to M$, far-se-á uma ferramenta e será usada para construir, efetivamente, o grupo (ou subgrupos do grupo total) de simetria de uma equação diferencial. A partir de critérios infinitesimais (que serão singularidades de certos campos), obteremos uma álgebra de Lie formada por campos vetoriais e, integrá-la, permitirá encontrar, por conseguinte, um grupo conexo G que tem como sua álgebra de Lie a álgebra dada inicialmente. Ao fim desta seção, ficará claro o que significa integrar um campo apenas e como isso gera uma ação de algum grupo 1-dimensional em uma variedade M.

Definição 1.4.1. *Uma função $X : M \to TM$ tal que $X(p) = X_p \in T_pM$ é denominada campo vetorial (alternativamente, X é seção do fibrado $TM \to M$, isto é, $\pi \circ X = I_M$). O campo é dito suave se a função X for suave.*

Ambos conceitos de fibrado e seção serão discutidos com mais detalhes no Capítulo 3.

Como foi comentado mais acima, uma curva $\alpha : I \to M$ suave determina, em cada t, um elemento $\alpha^{'}(t) \in T_{\alpha(t)}M$. Mas será que dado um campo suave X e um ponto $p \in M$, existe uma curva α definida em algum intervalo I, com $\alpha(0) = p$, tal que X seja a derivada de α, ou seja,

$$\alpha^{'}(t) = X(\alpha(t)),$$

para cada $t \in I$? Isso de fato ocorre. Para vermos, considere ϕ carta ao redor de p e α curva suave em M com início em p. Escreva $\beta(t) = \phi \circ \alpha(t)$ de modo que $\alpha(t) = \phi^{-1}(\beta^i(t))$. Em coordenadas

$$X(\alpha(t)) = \sum \zeta^i(\alpha(t))\partial_i|_{\alpha(t)}$$

e

$$\alpha^{'}(t) = {\phi^{-1}}_*(\partial_t(\beta^1(t), \cdots, \beta^m(t)) = \sum \frac{d\beta^i}{dt}\partial_i|_{\alpha(t)}$$

(Para esclarecer a última igualdade, seja dado $\beta : I \to U \subset \mathbb{R}^n$, onde U é domínio de ϕ. A derivada dessa curva em t é dada por $\beta^{'}(t) = \sum \frac{d\beta^i}{dt}\partial_i|_{\beta(t)}$, uma vez que estamos identificando $T_x\mathbb{R}^n$ com $\mathbb{R}^n$; estaremos corriqueiramente escrevendo essa derivada da forma usual. Então

$$\partial_t|_t(\phi^{-1} \circ \beta) = {\phi^{-1}}_*(\sum \frac{d\beta^i}{dt}\partial_i|_{\beta(t)}) = \sum \frac{d\beta^i}{dt}{\phi^{-1}}_*(\partial_i|_{\beta(t)}) = \sum \frac{d\beta^i}{dt}\partial_i|_{\beta(t)}).$$

Escrevendo
$$F(u) = (\zeta^i \circ \phi^{-1}(u))),$$
para obter uma curva α tal que $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$, com $\alpha(0) = p$, é equivalente a resolver o sistema de equações diferencias abaixo:
$$\begin{cases} \beta'(t) = F(\beta(t)) \\ \beta(0) = \phi(p) \end{cases} \tag{1.4.1}$$

Como a função F é suave, esse sistema tem única solução β definida em um intervalo maximal (veja [17]). Isso permite concluir que existe única curva α, definida em um intervalo maximal, satisfazendo o requerido com $\alpha(0) = p$, pois se α_1, α_2 satisfazem o problema inicialmente proposto, com $\alpha_i(0) = p$, então $\beta_i = \phi \circ \alpha_i$ satisfaz (1.4.1) com mesma condição inicial. Devido a unicidade, $\beta_1 = \beta_2$ em seu domínio comum de definição e, portanto, $\alpha_1 = \alpha_2$. Denominaremos essa única curva definida em um intervalo aberto conexo maximal de curva integral de X que passa por p. Dessa forma é possível definir o fluxo de um campo X, $\Phi(p, t) = \Phi^p(t)$, onde a curva $\Phi^p(t)$ é a única curva (no sentido que esta definida em um intervalo aberto conexo maximal) que soluciona o problema acima com condição inicial $\Phi^p(0) = p$ (ou seja, para calcularmos $\Phi(p, t)$ achamos a solução α do problemas acima e depois avaliamos ela em t). É possível mostrar que o domínio D de Φ é um aberto de $M \times \mathbb{R}$ e que o fluxo de X satisfaz as seguintes propriedades

Proposição 1.4.2.

(a) *Colocando $M_t = \{p; (p, t) \in D\}$, a função $\Phi_t : M_t \to M$, dada por $\Phi_t(p) = \Phi(p, t)$ é difeomorfismo em sua imagem (quando M é compacta vale $D = M \times R$) e valem:*

(b) $\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s}$*, quando a composta estiver definida;*

(c) *Para cada t, $(\Phi_t)_* X = X$ em $\Phi_t(M_t)$.*

Para uma demonstração desses fatos consulte [17].

Logo mais, o leitor poderá perceber que existência do fluxo de um campo é crucial para o desenvolvimento de toda a teoria de simetrias de equações diferencias, uma vez que os grupos de simetrias serão obtidos integrando fluxos, denominados geradores infinitesimais da ação do grupo (observe que no caso de M ser compacta o item b diz que existe uma ação a de $\mathbb{R}$ em M, dada por $a(t, p) = \Phi(p, t)$). Já na próxima seção, onde daremos a noção de grupos de Lie e definiremos o mapa exp, ver-se-á como esse fato é importante.

Para finalizar esta seção, vamos definir algebricamente o que é o colchete de Lie de dois campos e listar algumas propriedades dessa operação. Uma definição geométrica pode ser encontrada em [4]. Dados campo X e $f : U \subset M \to \mathbb{R}$ suaves, podemos definir a função variação de f na direção de X_p por $Xf(p) = X_p f$. Essa função é suave, uma vez que descrita em coordenadas, $X = \sum x^i \partial_i$, temos
$$Xf(p) = \sum x^i(p) \partial_i|_p f,$$
e as funções x^i assim como a associação $p \to \partial_i|_p f$ são suaves.

Definição 1.4.3. *Dados X, Y campos suaves em M, definimos o colchete de Lie entre esses campos, denotado por $[X, Y]$, por*

$$[X, Y]_p(f) = X_p(Yf) - Y_p(Xf)$$

.

Listamos abaixo algumas propriedades do colchete de Lie:

(a) $[X, Y]_p \in T_pM$;

(b) $[X, Y]$ define um campo de vetores em M;

(c) $[X, Y] = -[Y, X]$;

(d) Dados $a, b \in \mathbb{R}$, $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ e, logo, $[,]$ é bilinear;

(e) se (u^i) é um sistema de coordenadas, então

$$[X, Y] = \sum_{i,j}(X^i \cdot \partial Y^j/\partial u^i - Y^i \cdot \partial X^j/\partial u^i)\partial/\partial u^j;$$

(f) se $F : M \to N$ é um difeomorfismo, então F_*X é campo em N e $F_*[X, Y] = [F_*X, F_*Y]$ e

(g) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$.

Um espaço vetorial $\mathfrak{g}$, munido com uma função bilinear que satisfaz (c) e (g) acima é denominado álgebra de Lie (um ótimo texto sobre álgebras de Lie é [29]).

1.5 O Teorema de Frobenius

O Teorema de Frobenius afirma que, se para cada ponto p de uma variedade suave M escolhermos um subespaço $W_p \subset T_pM$, de maneira suave (o que tornaremos preciso abaixo), então, sob certas condições, existe uma única subvariedade maximal conexa N contida em M tal que $T_pN = W_p$. A fim de exemplificar, imagine a bola maciça $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ de raio 1, e para cada ponto p associe o subespaço $W_p =< p >^\perp$ (complemento ortogonal do subespaço gerado por p). Não é difícil perceber que a variedade que passa por p e cujo o espaço tangente em p é $< p >^\perp$ é a esfera $\mathbb{S}^n(||p||)$ (de raio norma de p), exceto quando $p = 0$ que não existirá tal subvariedade. Adiante, falaremos de funções que são invariantes pela ação de um grupo e com auxílio do teorema de Frobenius será possível mostrar que existem funções desse tipo e, mais ainda, que essas funções de certa forma formam uma base para o espaço das funções invariantes. Poderemos mostrar também com auxílio desse teorema que as órbitas da ação de um grupo G em M são subvariedades. Entre outras coisas pode-se discutir com auxílio desse teorema quando certas equações diferencias parciais possuem solução.

Definição 1.5.1. *Uma n-dimensional distribuição $\mathcal{D}$ é uma escolha, para cada $p \in M$, de um subespaço n-dimensional $\mathcal{D}_p$ de T_pM. A distribuição é dita suave se, para cada $p \in M$, existe vizinhança U de p e campos suaves $X_1, ..., X_n$ que geram $\mathcal{D}$ em cada ponto $p \in U$, ou seja, $\mathcal{D}_p =< \{(X_1)_p, ..., (X_n)_p\} >$. Um campo X é dito pertencer a distribuição $\mathcal{D}$ se $X_p \in \mathcal{D}_p$ para cada p. Uma distribuição suave é dita involutiva se, para quaisquer X e $Y \in \mathcal{D}$ suaves, tem-se $[X, Y] \in \mathcal{D}$.*

Definição 1.5.2. *Uma subvariedade (N, ψ) de M é dita subvariedade integral de uma distribuição $\mathcal{D}$, se*

$$\psi_*(T_pN) = \mathcal{D}_{\psi(p)}$$

para cada $p \in N$.

Para esclarecer, (N, ψ) ser subvariedade de M significa que $\psi : N \to M$ é uma imersão.

Definição 1.5.3. *Uma subvariedade N de M é dita quase regular se, para quaisquer espaço topológico P localmente conexo e função contínua $f : P \to M$, tal que $f(P) \subset N$, tem-se $f : P \to N$ contínua.*

Proposição 1.5.4. *Se N é quase regular e $f : P \to M$ é função suave, com $f(P) \subset N$, então a função $f : P \to N$ é suave.*

Demonstração. Seja $x \in P$ e $q \in N$ tal que $f(x) = q$. Dado $p \in M$ existem cartas (ϕ, U) e $(\psi, U \times V)$ ao redor de p e q, respectivamente, tais que $\psi \circ \iota \circ \phi^{-1}(u) = (u, 0)$ (consequência do Teorema do Posto). Como N é quase regular, o conjunto $W = f^{-1}(\phi^{-1}(U))$ é aberto em P. Mostrando que f restrita a esse aberto é suave concluiremos que f é suave, pois x foi tomado arbitrariamente. Observe que nesse aberto

$$\psi(f(y)) = \psi \circ \iota(f(y)) = \psi \circ \iota \circ \phi^{-1} \circ \phi(f(y)) = (\phi(f(y)), 0).$$

Então temos que $\phi \circ f = \pi_1 \circ \psi \circ f$ é suave, permitindo concluir que $f = \phi^{-1} \circ (\phi \circ f) : W \to N$ é suave como composta de funções suaves. □

Teorema 1.5.5 (Teorema de Frobenius)**.** *Seja $\mathcal{D}$ uma n-dimensional distribuição suave e involutiva em M. Existem, para cada $p \in M$, uma subvariedade integral da distribuição $\mathcal{D}$ contendo p e um sistema de coordenadas, (ϕ, U) ao redor de p, tal que os conjuntos*

$$\{x^i = c^i, i = n + 1, ..., m\}$$

são subvariedades integrais de $\mathcal{D}$, para cada upla constante $(c^1, ..., c^n)$. Se (N, ψ) é subvariedade integral tal que $\psi(N) \subset U$ então $\psi(N)$ está contido em algum slice $\{x^i = cte\}$ e, ainda mais, para cada p existe uma única subvariedade conexa integral maximal (ou seja, não está contida propriamente em nenhuma outra subvariedade conexa integral contendo p) e tais subvariedades são quase regulares (veja [30] **B.5.***).*

Duas ideias para construir a subvariedade conexa integral maximal:

(a) Seja $\mathcal{F}_p$ o conjunto de todas as subvariedades integrais conexas que contém p. O conjunto $\mathcal{I}(p) = \bigcup_{N \in \mathcal{F}_p} N$ admite uma estrutura de variedade que o torna a única subvariedade integral conexa maximal que contém p. Além disso, cada subvariedade $N \in \mathcal{F}_p$ é aberta em $\mathcal{I}(p)$ (veja [17]).

(b) Outra construção é tomar o conjunto de todos o pontos que podem ser ligados a p por uma curva suave por partes e que tem derivadas morando em $\mathcal{D}$. Esse conjunto será a subvariedade conexa integral maximal passando por p (veja [12]).

1.6 Transversalidade

Para escrevermos esta seção usamos a referência [11]. Sabemos que dada função suave $F : M \to N$, se q é valor regular de F, então $F^{-1}(q)$ é uma subvariedade mergulhada de M. Uma questão surge naturalmente: dado P subvariedade de N, sob que condições $F^{-1}(P)$ é um objeto geométrico razoável, como uma variedade por exemplo? Localmente qualquer subvariedade mergulhada P é dado por $g^{-1}(0)$ para alguma função suave $g : N \to \mathbb{R}^p$, (consequência de 1.3.5), de modo que, localmente, $F^{-1}(P) = (g \circ F)^{-1}(0)$. Se 0 for valor regular de $g \circ F$ então, localmente, $F^{-1}(P)$ será uma subvariedade; claro que ser localmente uma subvariedade, ou seja, para cada ponto existe um aberto que contém esse ponto e é subvariedade, não implica que o conjunto em questão seja subvariedade; ainda é necessário que as dimensões desse abertos se mantenham a mesma e, sendo assim, um conjunto que é localmente subvariedade será de fato uma subvariedade. Segue, consequentemente, uma condição suficiente para que $F^{-1}(P)$ seja subvariedade mergulhada, a saber, que $(F \circ g)_*$ seja sobrejetora em cada ponto p tal que $g \circ F(p) = 0$ e para cada função g. Essa suficiência, como foi descrita acima, não é prática, pois precisaríamos ter em mãos as funções que descrevem P localmente, o que é, na maioria dos casos, apenas virtualmente possível. Passamos então a uma leitura diferente dessa condição. Observado que

$$((g \circ F)_*)_p = (g_*)_{F(p)} \circ (F_*)_p,$$

uma vez que, para uma g arbitrária que descreva localmente P, g_* é sobrejetiva, afirmamos que deve-se ter

$$\operatorname{Im}(F_*)_p + T_{F(p)}P = T_{F(p)}N.$$

Observe que isso é o mesmo que $\operatorname{Im}(F_*)_p + \ker(g_*)_{F(p)} = T_{F(p)}N$ (veja 1.2.5). Com efeito, segue do seguinte fato geral: se $T : V \to W, S : W \to L$ são transformações lineares, com S sobrejetiva então, se vale

$$\operatorname{Im} T + \ker S = W,$$

aplicando S em ambos o lados obtemos

$$\operatorname{Im}(S \circ T) = S(W) = L$$

e, portanto, $S \circ T$ é sobrejetiva. Reciprocamente, dado $w \in W$, se $l = S(w) = S \circ T(v)$ (assumindo a composta sobrejetiva também) então teremos $S(w - T(v)) = 0$, concluindo $w - T(v) = z \in \ker S$, ou seja, $w \in \operatorname{Im} T + \ker S$; aqui w foi tomado arbitrariamente concluindo a igualdade. Lendo dessa forma, a condição suficiente comentada anteriormente fica descrita como:

$$\operatorname{Im}(F_*)_p + T_{F(p)}P = T_{F(p)}N,$$

que é uma condição intrínseca, nos libertando de analisar cada função g. Baseado na discussão precedente surge a seguinte definição:

Definição 1.6.1. *Uma função suave $F : M \to N$ é transversal a uma subvariedade mergulhada P se, para cada $p \in F^{-1}(P)$, satisfaz a equação*

$$Im(F_*)_p + T_{f(p)} = T_{F(p)}N.$$

Em particular, quando F é submersão então F é transversal a qualquer subvariedade mergulhada. De acordo com o exposto acima é válida a seguinte proposição:

Proposição 1.6.2. *Se $F : M \to N$ é transversal a uma subvariedade mergulhada P, então $F^{-1}(P)$ é subvariedade e sua dimensão é igual a codimensão de P em N.*

Quando consideramos N e P duas subvariedades de M, e $\iota : N \to M$ a inclusão, se ι for transversal a P, significa que $i^{-1}(P) = P \cap N$ é subvariedade. A condição de transversalidade acima, diz que $\operatorname{Im}(i_*)_p + T_{i(p)}P = T_{i(p)}M$, de modo que

$$T_pN + T_pP = T_pM,$$

permitindo obter um critério para verificar quando $N \cap P$ é subvariedade.

Se $M \subset X \times U$ é subvariedade (m-dimensional), onde X e U são subvariedades de dimensão r e s, respectivamente, $m = r + s$, dada uma subvariedade N de dimensão r, quando existe função suave $f : V \subset X \to U$ (V aberto) tal que $N = \operatorname{Graf} f$? Dado $p = (x_0, u_0) \in M$, definindo o espaço vertical a esse ponto por $U_{p_0} = \{(x_0, u); u \in U\}$, as condições para que isso ocorra são dadas na seguinte proposição:

Proposição 1.6.3. *A variedade N é gráfico de alguma f se, e somente se, pra todo $p_0 \in M$, valem:*

(1) *U_{p_0} é transversal a N.*

(2) *$N \cap U_{p_0}$ tem no máximo um ponto.*

Demonstração. No caso em que vale apenas o primeiro item para algum $p_0 \in M$ previamente fixado, podemos garantir localmente o segundo item, uma vez que $N \cap U_{p_0}$ é uma variedade 0-dimensional (pois $T_{p_0}U_{p_0} \cap T_{p_0}N = 0$). Observe que aqui transversalidade é equivalente a $T_{p_0}N \cap T_{p_0}U_{p_0} = 0$, uma vez que

$$m = r + s = \dim(T_{p_0}N + T_{p_0}U_{p_0}) =$$
$$\dim T_{p_0}N + T_{p_0}U_{p_0} - \dim(T_{p_0}N \cap T_{p_0}U_{p_0}) = r + s - \dim(T_{p_0}N \cap T_{p_0}U_{p_0}).$$

Suponha inicialmente que $N = \{(x, f(x)); f : V \subset X \to U\}$ (uma vez que M é subvariedade de mesma dimensão M é aberta em $X \times U$; então seus espaços tangentes coincidem e estaremos usando a identificação $T_{p_0}M = T_{x_0}N \times T_{u_0}U_{p_0}$). Sendo $X = (X_1, X_2) \in T_{p_0}N \cap T_{p_0}U_{z_0}$, então por um lado

$$X = \partial_t|_0(\alpha(t), f(\alpha(t)),$$

pois é tangente a N e por outro lado é igual

$$\partial_t|_0(x_0, \beta(t)),$$

por ser tangente a U_{p_0}, para certas curvas suaves α e β. Concluindo que $\alpha'(0) = X_1 = \partial_t|_0(x_0) = 0$, $X_2 = f_*(X_1) = 0$ e, necessariamente, $X = 0$. Claramente (2) ocorre. Reciprocamente, suponha que (1) e (2) ocorram com uma subvariedade N. Se provarmos que a função

$$\pi_1 : N \to \pi_1(N) \subset X,$$

dada por restringir a função projeção na primeira coordenada à subvariedade N é um difeomorfismo, teremos que $N = \{(x, \pi_2 \circ (\pi_1)^{-1}(x)); x \in \pi_1(N)\}$, ou seja, é gráfico da função $\pi_2 \circ (\pi_1)^{-1} : \pi_1(N) \to U$. Demonstremos isso. Se $(x_0, u_0) = (x_0, u_1)$, então a propriedade (2) diz que $u_0 = u_1$, ou seja, π_1 é injetiva e, logo, bijetiva. Esta função também é suave pois é restrição de função suave. Além disso, dado $X = (X_1, X_2) \in T_pN$, $(\pi_1) * (X) = \partial_t|_0\pi_1(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) = \partial_t|_0\alpha_1(t) = X_1$, concluindo que $(\pi_1)_*X = 0$ se, e somente se, $X_1 = 0$. Mas então teremos também que $X \in T_pU_p$, acarretando em $X = 0$ em virtude de (2). Donde π é uma imersão (logo $\pi_1(N)$ é subvariedade de X) bijetiva, logo um difeomorfismo (vide 1.3.12). Podemos concluir a partir de $\dim \pi_1(N) = \dim N = \dim X$, que $\pi_1(N)$ é um aberto em X, portanto N é de fato gráfico de função definida em um aberto de X chegando em U. □

1.7 Grupos de Lie e campos invariantes

Um grupo de Lie é uma variedade diferenciável G que é um grupo e para o qual as operações multiplicação e inversão,

$$p : G \times G \to G \quad i : G \to G,$$

das por $p(g, h) = gh$ e $i(g) = g^{-1}$, são suaves.

Dado G um grupo de Lie denotaremos seu elemento neutro por 1. Considere $\mathfrak{g} = T_1G$ e seja $V \in \mathfrak{g}$. Pondo $D_g(h) = hg$ temos um difeomorfismo de modo que D_g define um campo de vetores em G pondo, para cada $g \in G$, $X(g) = (D_g)_*(V)$ (a diferencial é em $g = 1$). Esses campos satisfazem uma propriedade interessante, a saber, são invariantes por translações a direita. Mais precisamente temos

$$((D_g)_*)_h(X(h)) = ((D_g)_*)_h((D_h)_*(V)) = (D_{hg})_*(V) = X(hg),$$

ou, escrito de outra forma, $(D_g)_*X = X$. Por outro lado, se X é campo satisfazendo $(D_g)_*X = X$, então ele é unicamente determinado por seu valor em 1, pois

$$X(g) = X(1 \cdot g) = (D_g)_*(X(1)).$$

Poderíamos ter falado sobre campos invariantes a esquerda, mas como, por convenção, trabalharemos com ações a esquerda, os campos que irão nos interessar, portanto, devem ser os invariantes a direita. Como foi mencionado anteriormente o conjunto $\Upsilon(G)$ dos campos suaves em G formam uma álgebra de Lie. Há uma subálgebra muito importante que destacamos na seguinte proposição:

Proposição 1.7.1. *O conjunto $Inv^d(G)$, dos campos invariantes a direita, é uma álgebra de Lie de dimensão finita, cujo o colchete é dado pelo colchete entre campos, como definido na seção de campos. Mais ainda, o espaço vetorial $Inv^d(G)$ é isomorfo a $\mathfrak{g}$ e isso permite munir $\mathfrak{g}$ com uma estrutura de álgebra de Lie isomorfa a $Inv^d(G)$.*

Demonstração. Temos para campos invariantes X e Y e constantes a e b que $(D_g)_*(aX+bY) = a(D_g)_*X + b(d_g)_*Y = aX+bY$ e $(D_g)_*[X,Y] = [(D_g)_*X, (D_g)_*Y] = [X,Y]$, mostrando que $\mathrm{Inv}^d(G)$ é subálgebra. A função

$$V \in \mathfrak{g} \to X \in \mathrm{Inv}^d(G),$$

como definida acima, e

$$X \in \mathrm{Inv}^d(G) \to X(1) \in \mathfrak{g},$$

são lineares e uma inversa da outra, como pode ser checado. Assim, dados V e $W \in \mathfrak{g}$, e os respectivos campos correspondentes X e Y, definimos

$$[V,W] = [X,Y](1).$$

Com esse colchete, $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie isomorfa a $\mathrm{Inv}^d(G)$. □

Em nosso trabalho será mais interessante trabalhar com a álgebra formada por campos; com essa correspondência basta conhecer o espaço tangente em 1 para conhecer os campos invariantes. Por isso denotaremos $\mathrm{Inv}^d(G)$ por $\mathfrak{g}$ simplesmente.

1.8 Aplicação Exponencial

A função que iremos definir agora é de suma importância para o estudo de grupos de Lie, uma vez que ela permite transportar informações (ou mesmo construir grupos através de) da álgebra de Lie para o grupo. A essência da teoria de Lie, a partir de fatos algébricos em relação a álgebra de Lie, podemos inferir em resultados de natureza diversas no grupo; por exemplo, um grupo de Lie conexo é abeliano se, e somente se, sua álgebra é abeliana; um grupo de Lie compacto é compacto se, e somente se, sua álgebra de Lie é compacta (veja [30]), etc. Sabemos que a cada campo $X \in \mathfrak{g}$, está associado um fluxo $\Phi_X = \Phi_X(g,t)$, definido em algum aberto de $G \times \mathbb{R}$. No caso de campos invariantes, esse aberto é todo espaço $G \times \mathbb{R}$, ou seja, campos invariantes são completos (ver [30]). Em virtude das propriedades dadas na seção de campos, temos uma notação sugestiva para representar o fluxo de campos completos, essa é dada por

$$\Phi(g,t) = (\exp tX)g;$$

então vale a igualdade $(\exp(t+s)X)g = (\exp tX)(\exp sX)g$, que segue do fato de valer, para todos t e $s \in \mathbb{R}$, a igualdade $\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s}$. Vamos tornar a fórmula acima uma multiplicação entre elementos de G, com a definição da função exp. A função exponencial pode ser definida da seguinte forma: Seja $X \in \mathfrak{g}$ e considere Φ o fluxo associado a X. Definimos

$$\exp : \mathfrak{g} \to G \text{ dada por}$$

$$\exp X = \Phi(1,1)$$

(observe que o primeiro 1 é o elemento neutro de G). Outra forma de definir exp é tomar $V \in T_1G$ e considerar a única curva $\Phi(t)$ em G que satisfaz $\Phi(0) = 1$ e $\Phi^{'}(0) = V$, definindo-a por $\exp V = \Phi(1)$. Usaremos o que for mais conveniente. Observe que se X é o campo invariante associado a V, então $\exp X = \exp V$ (mantendo a coerência das identificações), pois uma vez que, sendo Φ o fluxo de X, tem-se que $\Phi^1(t) = \Phi(1,t)$ é curva satisfazendo $\Phi^1(0) = 1$ e $\partial_t|_0\Phi^1(t) = X(\Phi^1(0)) = X(1) = V$. Dessas observações $\exp X = \Phi(1,1) = \Phi^1(1) = \exp V$. Além disso a curva $X_t = \exp tX$ satisfaz $X_t(0) = 1$ e $X_t^{'}(0) = X(1)$, que estaremos identificando com X, ou seja, estaremos escrevendo $\partial_t|_0 \exp tX = X$. A seguinte proposição reúne algumas propriedades da aplicação exponencial.

Proposição 1.8.1. *Seja $X \in \mathfrak{g}$. Para todos s e $t \in \mathbb{R}$ tem-se:*

(a) $\exp tX = \Phi(1,t)$.

(b) *De fato temos $\Phi(g,t) = \exp tX \cdot g$.*

(c) $\exp(t+s)X = (\exp tX) \cdot (\exp sX)$.

(d) $\exp(-tX) = (\exp tX)^{-1}$.

(e) exp *é suave.*

(f) *Existe V vizinhança de 0 tal que $\exp V \to \exp(V)$ é um difeomorfismo.*

Demonstração. Os itens (c) e (d) seguem facilmente de (a) e (b).

(a) Observe que $\Psi(g,t) = \Phi_X(g,st)$ é o fluxo de sX. Então $\exp sX = \Psi(1,1) = \Phi_X(1,s)$ para todo $s \in \mathbb{R}$.

(b) Denote $X_t(h) = \Phi_X(h,t)$. Sendo $\alpha(t) = D_g(X_t(h))$, observe que $\alpha(0) = hg$ e, também, $\alpha^{'}(t) = (D_g)_*(\partial_t|_t(X_t(h))) = (D_g)_*(X(X_t(h))) = X(X_t(h)\cdot g) = X(\alpha(t))$; a última igualdade é devido a invariância de X. A curva $\beta(t) = \Phi_X(hg,t)$ satisfaz a mesma condição inicial de α e claro que $\beta^{'}(t) = X(\beta(t))$. Concluindo que essa duas curvas são iguais devido a unicidade da solução. Com $h = 1$ temos

$$\exp X \cdot g = \Phi(1,1)\cdot g = \alpha(1) = \beta(1) = \Phi_X(g,1) = (\exp X)g,$$

esse último é a notação do fluxo.

(e) Para ver que exp é suave, primeiro defina $V(g,X) = (X(g),0) \in TG \oplus \mathfrak{g}$ campo suave em $TG \oplus \mathfrak{g}$. O fluxo desse campo é dado por $\Phi_V((g,X),t)) = (\exp tX \cdot g, X)$; de fato, observe que $\Phi_V((g,X),0)) = (\exp 0X \cdot g, X) = (g,X)$ e $\partial_t|_0(\exp tX \cdot g, X) = (\partial_t|_0 D_g(\exp tX), \partial_t|_0(X)) =$

$((D_g)_*(X),0) = (X(D_g(1)),0)) = (X(g),0)$ (esse campo é claramente completo). Então exp é dado de acordo com o diagrama:

$$\mathfrak{g} \xrightarrow{\iota} G \oplus \mathfrak{g} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\Phi_V} G \oplus \mathfrak{g} \xrightarrow{\pi_1} G$$

$\exp X = \pi_1 \circ \Phi_V \circ \iota(X)$, onde $\iota(X) = ((1,X),1)$, é suave como composta de funções suaves.

(f) Agora sejam dados, $X \in T_0\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$ e curva $\alpha(t) = tX$ que satisfaz $\alpha(0) = 0$ e $\alpha'(0) = X$. Então $(\exp_*)_0(X) = \partial_t|_0 \exp(tX) = X$, uma vez que $\beta(t) = \exp(tX)$ é a curva que resolve o problema $\beta(0) = 1$ e $\beta'(0) = X$. Segue que $(\exp_*)_0$ é não singular e, de acordo com Teorema da Função Inversa, ela é um difeomorfismo próximo de 0. □

Proposição 1.8.2. *Seja G grupo de Lie e denote por G_0 a componente conexa da identidade. Então G_0 é subgrupo de G e, dado V vizinhança aberta de 1 (contida em G_0), tem-se*

$$G_0 = \bigcup_{n>0} V^n.$$

Além disso dados $g \in G_0$, existem $X_1, ..., X_k \in \mathfrak{g}$ tais que

$$g = \exp X_1 \cdot ... \cdot \exp X_k.$$

Demonstração. Escreva $f(g,h) = gh^{-1}$, definida em $G \times G$. Essa função é suave e, como $G_0 \times G_0$ é conexo, tem-se $f(G_0 \times G_0)$ conexo. Por outro lado, esse conjunto intersepta G_0 (1 pertence a ambos), permitindo concluir que $f(G_0 \times G_0) \cup G_0$ é conexo, como união de conexo que tem ponto comum. Segue que $f(G_0 \times G_0) \subset G_0$, pois G_0 é um conexo maximal e, logo, G_0 é subgrupo. Agora é fácil notar que $\bigcup_{n>0} V^n$ é um subgrupo de G_0 que é aberto, pois cada V^n é aberto em virtude de p ser contínua. Mas subgrupos que são abertos também são fechados (pois, em geral G pode ser escrito como união disjunta de classes laterais e, se H é aberto, cada classe gH é aberto). Logo segue a igualdade em virtude da conexidade de G_0. Para provar o último fato tome V como garantido pelo último item da proposição acima. □

Definição 1.8.3. *Um homomorfismo entre grupos de Lie é uma função $\phi : G \to H$ que satisfaz $\phi(gh) = \phi(g)\phi(h)$. Um homomorfismo entre álgebras de Lie é uma transformação linear $\theta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ que satisfaz $\theta[X,Y] = [\theta X, \theta Y]$.*

Sejam G, H grupos de Lie e $\phi : G \to H$ um homomorfismo suave. Então identificando $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ com T_1G e T_1H, respectivamente, a função $(\phi_*)_1 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ é um homomorfismo de álgebras de Lies e vale

$$\phi(\exp tX) = \exp(t\phi_* X).$$

Em qualquer texto que versa sobre grupos de Lie é possível encontrar uma demonstração para esse fato, visto que é essencial para o estudo da teoria de Lie (por exemplo [30]).

Um conjunto de funções que merecem atenção especial são os automorfismo de G, dados por $C_g(h) = g^{-1}hg$. Elas satisfazem $C_g \circ C_h = C_{gh}$. A função $\mathrm{Ad} : G \to Gl(\mathfrak{g})$ definida por $\mathrm{Ad}(g) = (C_g)_*$ é uma representação de G em $\mathfrak{g}$ e , isso por si só, é interessante; estamos representando o grupo, de modo (talvez) não trivial, em sua álgebra. Por exemplo, suponha G conexo e seja $g \in G$ tal que $\mathrm{Ad}(g) = 0$. Segue que para cada $X \in \mathfrak{g}$, $0 = (C_g)_* X = \partial_t|_0 g^{-1} \exp tXg$, permitindo concluir que $g \exp tX = \exp tX \cdot g$. Logo pela conexidade de G, a proposição 1.8.2 permite concluir que $g \in Z(G)$. Em particular, se a representação adjunta é trivial e G é conexo então G é abeliano. Outra representação importante é $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to Gl(\mathfrak{g})$ dada por $\mathrm{ad}(X)(Y) = [X, Y]$. Valem as seguintes relações entre essas duas representações:

(a) $(\mathrm{Ad}_*)_1 = \mathrm{ad}(X)$.

(b) $\mathrm{Ad}(\exp X) = \exp(\mathrm{ad}(X))$.

1.9 Ações de Grupos e Ações Inifinitesimais

A noção de ação de grupo em variedade, surge quando Sophus Lie considera o problema de estender o resultados obtidos por Galois, sobre solubilidade por radicais de equações polinomiais, às equações diferenciais ordinárias ou parciais. No caso das equações diferencias ordinárias, temos um resultado análogo ao obtido por Galois, como expõe [24] (Teorema 2.64). O livro de Bluman e Kumei [5] trabalha com uma linguagem semelhante a usada nos primeiros trabalhos de Lie, usando ações de grupos a 1-parâmetro, ao invés de definir ação de grupo em variedade, como é feito neste trabalho. Escolhemos trabalhar com ações de grupo em variedades pois acreditamos que, além de ter como consequência um estudo teórico mais simples e (talvez) rico, permite-nos estudar soluções invariantes de maneira que não seria possível fazer apenas com a linguagem dos grupos a 1-parâmetro; estudar soluções invariantes de equações diferenciais definidas em fibrados se faz somente quando consideramos um grupo "agindo no fibrado".

Definição 1.9.1. *Seja M uma variedade suave, G um grupo de Lie. Uma ação de G em M é uma função suave*

$$\Psi : G \times M \to M$$

satisfazendo:

(a) $\Psi(g, \Psi(h, x)) = \Psi(gh, x)$

(b) $\Psi(e, x) = x$

Se escrevemos $\Psi(g, x) = gx$ essas propriedades podem ser reescritas como:

(a) $g(hx) = (gh)x$

(b) $ex = x$

Para todos elementos $x \in M$ e $g \in G$.

Definição 1.9.2.

(a) *Considere G agindo suavemente em uma variedade suave M. A órbita de um elemento $p \in M$ é definida como sendo o conjunto $\{gp; g \in G\} = G \cdot p = \mathcal{O}(p)$.*

(b) *O grupo de isotropia de um elemento $p \in M$ é $G_p = \{g \in G; \quad gp = p\}$.*

Observe que, como $\Psi|_{G\times\{p\}} : G \times \{p\} \to M$ é a restrição da ação Ψ ao espaço $G \times \{p\}$, tem-se que $G_p = \Psi|^{-1}_{G\times\{p\}}(\{p\})$ é subgrupo fechado, logo subgrupo de Lie (Veja [30] **5.4**).

É fácil notar que duas órbitas ou são iguais ou tem interseção vazia, de modo que podemos definir uma relação de equivalência, onde as classes são as órbitas dos elementos de M. Isso permite construir o espaço topológico $M/G = \{\mathcal{O}(p); p \in M\}$ com a topologia quociente, que é a menor topologia (com menos abertos) que torna o mapa $\pi : M \to M/G$ dado por $\pi(p) = \mathcal{O}(p)$ contínuo, ou seja, $V \subset M/G$ é aberto se, e somente se, $\pi^{-1}(V)$ é aberto. Consequentemente uma função $f : M/G \to Y$ é contínua se, e somente se, $\pi \circ f$ é contínua, como pode ser verificado. Dado U aberto em M, uma vez que

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g\in G} gU$$

é aberto (cada função g é um difeomorfismo; $g = \Psi|_{\{g\}\times M}$), concluímos que $\pi(U)$ é aberto e, então, a função π é aberta. Esse quociente no contexto do estudo de equações diferencias significará redução da ordem das equações (redução do número de variáveis).

Observação 1.9.3. Corriqueiramente estaremos fazendo identificações. Isso aqui significa o seguinte: Seja dada uma relação $\Re$ em um espaço topológico X e considere o espaço quociente $X/\Re$. Se existe $f : X \to Y$ tal que f é contínua, sobrejetora, assume valores diferentes nas órbitas e é constante em cada órbita, então Y é homeomorfo a $X/\Re$. Permitindo identificar $X/\Re$ com Y via o homeomorfismo.

Estamos interessados em saber quando o espaço M/G é uma variedade suave tal que a projeção seja uma submersão. No caso da ação ser regular, o que definiremos em breve, provaremos que o quociente satisfaz as propriedades de variedade exceto, talvez, a propriedade de ser Hausdorff. Isso faz com que consideremos uma noção mais ampla de variedade, suprimindo o axioma Hausdorff. Palais em seu artigo *A Global Formulation of the Lie Theory of Group Transformation* faz um estudo de variedades quocientes mesmo sem a hipótese de serem Hausdorff e, em alguns resultados, identificando onde essa hipótese é necessária. De qualquer maneira podemos retirar os pontos onde o axioma Hausdorff falha e aplicar os resultados que iremos desenvolver ao longo deste trabalho. O seguinte teorema, mesmo não sendo de utilidade prática para nosso trabalho, diz sob que condições o quociente proveniente de uma ação de grupos é uma variedade suave. Uma demonstração dessa versão pode ser encontrada em [7] (III pg 60) ou, para uma generalização em variedades modeladas em espaços de Banach, veja [18].

Teorema 1.9.4. *Seja G agindo suavemente em uma variedade M e $\pi : M \to M/G$ o mapa quociente. Se o conjunto $R = \{(x, y); \pi(x) = \pi(y)\}$ é uma subvariedade fechada de $M \times M$, então o espaço topológico M/G admite uma única estrutura de variedade suave tal que π seja uma submersão.*

Observe que no caso de M/G ser variedade suave tal que π é uma submersão teremos que o conjunto $R = (\pi \times \pi)^{-1}(\pi(1), \pi(1))$ é,necessariamente, uma subvariedade fechada.

Definição 1.9.5. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e denote $\Upsilon(M)$ a álgebra de Lie dos campos de vetores em M. Uma ação infinitesimal em M é um homomorfismo de $\mathfrak{g} \to \Upsilon(M)$.*

Uma ação de G em M nos permite obter uma ação infinitesimal θ da álgebra de Lie de G em M da seguinte forma:

$$\theta X(p) := \partial_t|_0 \exp tX \cdot p = \partial_t|_0 \Psi_p(\exp tX) = (\Psi_p)_*(X)$$

para $X \in \mathfrak{g}$ com $\Psi_p(g) = gp$. Observe que é um homomorfismo pois

$$[\theta X, \theta Y] = [(\Psi_p)_*(X), (\Psi_p)_*(Y)] = (\Psi_p)_*[X, Y] = \theta[X, Y]$$

A álgebra de Lie de G_p é dada por $\{X \in \mathfrak{g};\ \ \exp tX \cdot p = p\ \ \forall\ \ t\}$. Diferenciando em $t = 0$ obtemos a caracterização:

$$G_p = \ker \quad \theta.$$

Uma questão importante é saber se uma dada ação infinitesimal de uma álgebra $\mathfrak{g}$ em M é proveniente de uma ação infinitesimal de um grupo de Lie G, isto é, se existe um grupo G que age suavemente em M, com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, tal que, a ação infinitesimal induzida pela ação de G, seja a ação infinitesimal de $\mathfrak{g}$ dada inicialmente. Uma resposta para essa pergunta pode ser encontrada em Palais [9], Teorema X página 72, diz que uma condição necessária e suficiente para que isso ocorra é que os campos $\theta(X)$ sejam completos para cada $X \in \mathfrak{g}$.

Exemplo 1.9.6. Considere $M = \mathbb{R}^2$ e seja $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie gerada por ∂_x e $x\partial_x$. Em geral vale a seguinte fórmula (veja 1.4.3)

$$[a\partial_x + b\partial_y, c\partial_x + d\partial_y] = (ac_x + bc_y - ca_x - da_y)\partial_x + (ad_x + bd_y - cb_x - db_y)\partial_y.$$

Aplicando ao nosso caso particular, obtemos $[\partial_x, x\partial_x] = \partial_x$. Essa álgebra é isomorfa a álgebra gerada pelas matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Considere $\mathfrak{g}$ a álgebra gerada por $\{A, B\}$ e $G = \exp \mathfrak{g}$, subgrupo de $GL(2)$. Existe uma ação Ψ de G em M, cujo a ação infinitesimal é dada por

$$A \to \partial_x \ \ B \to x\partial_x.$$

A aplicação exponencial em $GL(n)$ é dada por

$$\exp A = \sum_{i=1}^{\infty} 1/i! \cdot A^i$$

para $A \in GL(n, \mathbb{R})$ (veja [30]). Assim temos que

$$\exp tA = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \exp tB = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Isso nos dá uma expressão para os elementos de G

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

com $\alpha > 0$, que pode ser identificado com $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$. Seja $p = (x_0, y_0) \in M$. Para determinar como se dá a ação de G em M encontraremos o valor de

$$f(\alpha, \beta) = \Psi_p(\alpha, \beta),$$

sabendo que devemos ter

$$\partial_t|_0 \exp tA \cdot p = \partial_t|_0 f(1,t) = \partial_x \quad e \quad \partial_t|_0 \exp tB \cdot p = \partial_t|_0 f(e^t, 1) = x_0 \partial_x,$$

de acordo com a definição de ação infinitesimal. Sendo $f = (f^1, f^2)$ precisamos resolver

$$\partial_t|_0 f(1,t) = {f^1}_\beta \partial_x + {f^2}_\beta \partial_y = \partial_x \ \text{ e } \ \partial_t|_0 f(e^t, 0) = {f^1}_\alpha \partial_x + {f^2}_\alpha \partial_y = x_0 \partial_x$$

com condição inicial dada por $f(1,0) = 1 \cdot p = p$. Esse problema é facilmente solucionado obtendo

$$\Psi_p(\alpha, \beta) = f(\alpha, \beta) = (x_0 \alpha + \beta, y_0),$$

ou seja, a ação de G é M é a ação canônica $(A, p) \to A \cdot p$.

Esse exemplo mostra uma maneira de encontrar, explicitamente, o grupo e a ação deste na variedade a partir de uma ação infinitesimal. A forma como abordamos, elementar, é impraticável na maioria dos casos. Esse exemplo serve apenas para esclarecer o que significa integrar uma ação infinitesimal e sugerir que o problema não é simples.

A ação infinitesimal que G induz numa variedade que esteja agindo, M, nos permite associar uma distribuição

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}(p) = \{\theta X(p); X \in \mathfrak{g}\}.$$

No caso em que a dimensão da distribuição não varia, podemos garantir que ela é integrável e que, se G é conexo, as variedades integrais maximais dessa distribuição são as órbitas de G (veja [30] **Teorema 12.8**).

Proposição 1.9.7. *Se $\Psi : G \times M \to M$ é uma ação suave, então, para cada $p \in M$, o conjunto G/G_p admite uma estrutura de variedade suave, de modo que $\pi : G \to G/G_p$ é submersão e a função $\Psi_p : G/G_p \to G \cdot p$, dada por $\Psi_p(gG_p) = gp$, é um difeomorfismo.*

Demonstração. Consideremos a ação natural

$$G_p \times G \to G,$$

dada por $(h, g) \to hg$. Mostraremos que $R = \{(g,k); \quad \pi(g) = \pi(k)\} = \{(g,k); \quad gk^{-1} \in G_p\}$ é uma subvariedade mergulhada e fechada de $G \times G$. Sobre a função $F : (g,k) \in G \times G \to gk^{-1} \in G$, podemos dizer que é submersão, pois $F_*(X,Y) = \dfrac{\partial p}{\partial g}(i_* X) + \dfrac{\partial p}{\partial k}(Y)$, onde p representa o a função produto do grupo e i a a função inversa e que vale a igualdade $F^{-1}(G_p) = R$. Uma vez que G_p é subvariedade mergulhada, pois G_p é subgrupo de Lie fechado, os resultados da seção sobre transversalidade garantem que $R = F^{-1}(G_p)$ é subvariedade mergulhada fechada de $G \times G$. O resultado do teorema anterior nos garante que G/G_p é variedade suave e $\pi : G \to G/G_p$ é submersão.

Agora demonstraremos que a função Ψ_p é difeomorfismo. Observe que Φ_p está bem definida, pois se $g^{-1}h \in G_p$ então $g^{-1}hp = p \equiv \Phi_p(gG_p) = \Phi_p(hG_p)$. O fato de π ser submersão, permite concluir que $f : G/G_p \to P$ é suave se, e somente se, $\pi \circ f$ é suave. No nosso caso, temos $\Phi_p \circ \pi(g) = gp$ e a associação $\Psi_p : g \to gp \in G \cdot p$ é suave (pois $G \cdot p$ é quase regular em virtude do Teorema de Frobenius juntamente com o comentário acima). Segue que Φ_p é suave. Essa função é claramente sobrejetiva e, se $\Phi_p(gG_p) = \Phi_p(hG_p) \equiv gp = hp$, então $g^{-1}h \in G_p$. Logo Φ_p é uma bijeção suave. Por outro lado temos que $((\Phi_p \circ \pi)_*)_g = (\Psi_{p*})_g$. Mas lembre que $(\Psi_{p*})_g(X) = \theta(X)(gp)$, ou seja, $\mathrm{Im}(\Psi_{p*})_g = \mathcal{D}_{\mathfrak{g}}(gp)$ que por sua vez é o espaço tangente a $G \cdot p$ no ponto gp. Isso diz que a transformação linear

$$(\Psi_p)_* \circ \pi_*$$

é sobrejetiva em cada g, concluindo que $((\Psi_p)_*)_{gG_p}$ é sobrejetiva em cada ponto gG_p. Como ambas as dimensões de $G \cdot p$ e G/G_p são iguais a $\dim G - \dim G_p$, concluem-se que $(\Psi_p)_*$ é isomorfismo em cada ponto e, consequentemente, juntando as afirmações, Ψ_p é um difeomorfismo. □

Exemplo 1.9.8. Quando $GL(n)$ age naturalmente em $\mathbb{R}^n$, a órbita de cada elemento não nulo é $\mathbb{R}^n - \{0\}$, e a órbita do 0 é $\{0\}$. Observe que as órbitas de cada elemento são variedades regulares.

Exemplo 1.9.9. Considere o subgrupo H de $\mathbb{SO}(3)$, dada pelas matrizes de rotação em torno do eixo z; é fácil ver que é um subgrupo fechado e logo de Lie. Ele age suavemente em $\mathbb{S}^2$, já que é a restrição da ação de $Gl(3)$ em $\mathbb{R}^3$ que é suave e, claramente, tem-se $\mathbb{SO}(3) \times \mathbb{S}^2$ é subvariedade de $GL(n) \times \mathbb{R}^n$. As órbitas dessa ação num ponto $p \in \mathbb{S}^2$ são obtidas por interceptar $\mathbb{S}^2$ com um plano que passa por p e é paralelo ao plano $z = 0$. Disso, se $p \neq N, S$ (norte e sul), cada órbita é difeomorfa a $\mathbb{S}^1$. A órbita de N e P são, respectivamente, $\{N\}$ e $\{P\}$. Em particular observe que $\mathbb{S}^2/H$ pode ser identificado com $[-1, 1]$, que é uma variedade suave com fronteira.

Definição 1.9.10. *A ação de G é dita* **regular** *se as órbitas tem todas mesma dimensão e, para cada ponto $p \in M$, existe aberto U contendo p de modo que cada órbita intersepta U em um conjunto conexo por caminhos. Se a dimensão das órbitas não variam a ação é dita* **semi-regular**.

Exemplo 1.9.11. Considere $\mathbb{Z}^2$ agindo em $\mathbb{R}^2$ por translação $((m, n), (x, y)) \to (m + x, n + y)$. O grupo $\mathbb{Z}^2$ é um subgrupo fechado de $\mathbb{R}^2$ e logo é grupo de Lie. A órbita de um ponto (x, y) são subvariedades $(x, y) + \mathbb{Z}^2$ e todas têm mesma dimensão; além disso cada quadrado aberto de tamanho 1 em $\mathbb{R}^2$ passa no máximo um ponto de cada órbita (se passam (x, y) e (z, w), tem-se $x - z = m < 1$, $y - w = n < 1$) logo a ação é regular. O quociente pode ser identificado com o *Torus* $\mathbb{T}^2$.

Teorema 1.9.12. *Seja M variedade suave e G grupo de Lie agindo em M regularmente com órbitas k-dimensionais. Então existe uma estrutura em M/G que o torna uma variedade suave não necessariamente Hausdorff. Se $\pi : M \to M/G$ é a projeção quociente tem-se:*

(a) $\pi(p) = \pi(q)$ *se, e somente se, p e q estão na mesma órbita.*

(b) *π é suave.*

(c) *O mapa*

$$\pi_* : T_pM \to T_{\pi(p)}M/G$$

é sobrejetor com kernel dado por $\mathfrak{g}_p = \{\theta(X)(p); \quad X \in \mathfrak{g}\}$.

Demonstração. Inicialmente o fato de G agir regularmente diz que para cada $p \in M$ existe aberto U tal que a interseção de cada órbita com U é um conjunto conexo por caminhos. Cada órbita de G pode ser escrita como união enumerável de variedades integrais conexas maximais dada pela distribuição $\mathcal{D}_\mathfrak{g}$ (veja [30]). Seja $(\psi = (y^i), U)$ carta em p chegando em $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$ tal que cada fatia $\{y^{k+1} = c^1, ..., y^m = c^k\}$ determina uma subvariedade integral da distribuição $\mathcal{D}_\mathfrak{g}$ (pedaço de uma órbita). Podemos supor sem perda de generalidade que U é tal que sua interseção com cada órbita é um conjunto conexo por caminhos (devido a ação ser regular). Isso é o mesmo que dizer que cada órbita intersepta no máximo uma fatia (pois uma fatia é determinada por $\psi^{-1}(U \times \{(c^1, ..., c^k)\})$; se $O \cap U$ tem mais que duas fatias, digamos, $O \cap U = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \psi^{-1}(U \times \{({c^i}_\alpha)\})$, então, por um lado, $\psi(\mathcal{O} \cap U)$ deve ser conexo e por outro igual a $\bigcup_\alpha U \times \{({c^i}_\alpha)\}$. Esse conjunto por sua vez é desconexo pois o conjunto dos Λ deve ser enumerável em virtude de $\mathcal{O}$ ser segundo contável e aquela união envolver abertos disjuntos de $\mathcal{O}$). Denote por (ψ_α, U_α) as cartas obtidas acima. O fato de cada órbita interceptar cada aberto U_α em no máximo uma fatia determina, sem ambiguidade, uma associação $\mathcal{O} \to (c^1, ..., c^k)$, que por sua vez é dada por tomar um representante p de O e calcular $\pi_2 \circ \psi(p)$. Então uma maneira de tentar definir uma carta é colocar

$$\xi_\alpha : V_\alpha \to \mathbb{R}^{m-k},$$

dada por $\xi(\mathcal{O}) = \mathrm{pr}_2 \circ \psi_\alpha(p)$, onde p é algum representante ($\mathrm{pr}_2(x, y) = y$). A definição de ξ_α tem sentido para órbitas que interceptam U_α e isso sugere como definir os abertos V_α:

$$V_\alpha = \{O \in M/G; \pi^{-1}(\mathcal{O}) \cap U_\alpha \neq \mathcal{O}\},$$

ou seja, $V_\alpha = \pi(U_\alpha)$ que é aberto. Esses abertos formam uma base para a topologia quociente de M/G, uma vez que essa topologia é obtida por projetar os abertos de M e os conjuntos W_α formam uma base para a topologia de M. Então M/G é segundo contável. Suponha essas cartas geram uma estrutura suave em M/G. Então nessas coordenadas teremos

$$\xi_\alpha \circ \pi \circ {\psi_\alpha}^{-1}(u, v) = v,$$

donde π é suave. Em particular, dessa última igualdade concluímos que

$$\pi_*(\partial_i|_p) = 0, \quad se \quad i = 1, ..., k,$$

e

$$\pi_*(\partial_i|_p) = \partial_i|_{\mathcal{O}(p)} \quad se \quad i > k,$$

Ou seja, π_* é sobrejetiva. Além disso, dado $X = \sum_{i=1}^m a^i \partial_i|_p \in T_pM$ descrito em coordenadas temos que

$$\pi_* X = \sum_{i=k+1}^m a^i \partial_i|_p;$$

logo esse elemento é nulo se, e somente se, $a^{k+1} = ... = a^m = 0$. Isso é o mesmo que dizer que X é tangente a órbita $\mathcal{O}(p)$; mas lembrando que o espaço tangente a órbita $\mathcal{O}(p)$ em p é o conjunto $\mathfrak{g}_p$, concluímos que ker $\pi_* = \mathfrak{g}_p$. Somente mais um fato precisa ser mostrado pra cumprir o prometido pelo teorema, a saber, que as funções de transição são suaves. Suponha que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$. Escreva

$$\psi_\alpha \circ {\psi_\beta}^{-1}(u, v) = (\widetilde{u}(u, v), \widetilde{v}(u, v)).$$

Quando fixamos v, o elemento ${\psi_\beta}^{-1}(u, v)$ está sempre na mesma órbita, independente de u. Dessa forma a segunda coordenada de $\psi_\alpha \circ {\psi_\beta}^{-1}(u, v)$ também não depende do valor de u, ou seja, temos $\widetilde{v}(u, v) = \widetilde{v}(v)$. Com essas observações podemos concluir que $\xi_\alpha \circ {\xi_\beta}^{-1}$ é suave. De fato, sabemos que ${\xi_\beta}^{-1}(v)$ determina uma órbita $\mathcal{O}(p)$ tal que $\psi_\beta(p) = (*, v)$. Por outro lado $\xi_\alpha(\mathcal{O}(p)) = \widetilde{v}$, pois é dado por projetar a segunda coordenada de $\psi_\alpha(p) = (*, \widetilde{v})$. Foi exposto acima como v e $\widetilde{v}$ se relacionam permitindo concluir que

$$\xi_\alpha \circ {\xi_\beta}^{-1}(v) = \widetilde{v}(v)$$

é suave. Trataremos agora o caso $U_\alpha \cap U_\beta = \varnothing$. Tome g tal que $gU_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ (existe desde que $V_\alpha \cap V_\beta \neq \varnothing$; então assuma isso). Dado uma carta ψ_α como descrita acima, seja $(\widetilde{\psi_\alpha} = \psi_\alpha \circ g^{-1}, gU_\alpha)$ carta e a respectiva carta $\widetilde{\xi_\alpha}$ em M/G. Dado $q \in gU_\alpha \cap U_\beta$ temos que $\widetilde{\xi_\alpha}(\mathcal{O}(q)) = \pi_2 \circ \psi \circ g^{-1}(q)$; como $q = gp$ para algum $p \in U_\alpha$, tem-se que

$$\widetilde{\xi_\alpha}(\mathcal{O}(q)) = \pi_2 \circ \psi \circ g^{-1}(gp) = \pi_2 \circ \psi(p) = \xi_\alpha(\mathcal{O}(p)).$$

Ou seja, $\widetilde{\xi_\alpha}$ e ξ_α coincidem em seu domínio comum de definição. Pelo que foi demonstrado acima, mais o que acabamos de concluir, temos que a função

$$\xi_\alpha \circ {\xi_\beta}^{-1} = \widetilde{\xi_\alpha} \circ {\xi_\beta}^{-1}$$

é suave. $\square$

Observação 1.9.13. Iremos denotar por $\widetilde{M}$ o quociente de uma variedade suave M por um grupo de Lie G e por $\widetilde{p}$ os elementos de $\widetilde{M}$, ou seja, o elemento $\pi(p)$ será representado por $\widetilde{p}$.

Exemplo 1.9.14. Suponha que G age em M suavemente e que $\widetilde{M}$ seja variedade Hausdorff. Então pode-se concluir que a ação é regular? O exemplo **??** mostra que pode ocorrer do quociente ser variedade suave e Hausdorff (nesse caso com fronteira), sem que as órbitas possuam mesma dimensão. Seja agora $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}_2$ agindo em $\mathbb{R}^2$ por $(t, i) \cdot (x, y) = (t + x, iy)$, onde aqui $\mathbb{Z}_2 = \{-1, +1\}$. Essa ação é suave, a órbita de um ponto (x_0, y_0) é a união das retas $y = y_0$ e $y = -y_0$ e todas as órbitas tem mesma dimensão. O quociente $\widetilde{M}$ pode ser identificado com o intervalo semi-aberto $[0, \infty)$ que é uma variedade Hausdorff. Porém, como pode ser notado, qualquer aberto contendo $(0, 0)$ é tal que sua interseção com qualquer órbita $\mathcal{O}(x, y)$ com $x \neq 0$ ou é vazia ou tem duas componentes conexas. Se agíssemos em $\mathbb{R}^2 - \{y = 0\}$ teríamos uma ação regular com $\widetilde{M}$ equivalente a $(0, \infty)$.

Exemplo 1.9.15. Considere ação suave de $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ em $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ dada por $(x, y) \to (tx, t^{-1}y)$. A órbita $\mathcal{O}(x, y)$ é uma hipérbole passando por (x, y) quando $x, y \neq 0$. Os outros casos são $\mathcal{O}(0, y)$, que é a semi-reta $1/t \cdot y$, e $\mathcal{O}(x, 0)$ que é a semi-reta tx; então fica simples concluir que essa ação é regular. Considere um aberto V que contenha o elemento $\mathcal{O}(0, 1)$. A sequência $(1/n, 1)$ para n grande se encontra em $U = \pi^{-1}(V)$, de modo que esse aberto deve conter todas as órbitas $\mathcal{O}(1/n, 1)$ para n grande. Escolhendo $t_n = n$ tem-se que $(t_n/n, 1/t_n) \in U$ para todos esses $n's$. Em virtude dessa sequência convergir para $(1, 0)$, qualquer aberto que contenha esse ponto, deve conter todos os pontos dessa sequência a partir de um certo n. Dessa forma não exitem abertos disjuntos que separam as órbitas $\mathcal{O}(1, 0)$ e $\mathcal{O}(0, 1)$, já que a imagem inversa desses abertos deve conter as órbitas $\mathcal{O}(1/n, 1)$ para n grande.

Exemplo 1.9.16. Considere $M = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ e a ação de $(\mathbb{R}, +)$ em M definida por $(\epsilon, (r, \theta)) \to (re^{-\epsilon} + (1 - e^{-\epsilon}), \theta + \epsilon)$, escrita em coordenadas polares. Quando $\epsilon \to \infty$, $\epsilon \cdot (r, \theta) \to (1, \theta)$, de modo que cada órbita dessa ação é uma espiral que fica tendendo a tangenciar $\mathbb{S}^1$ e a órbita de $(1, 0)$ é $\mathbb{S}^1$. Geometricamente é fácil perceber que cada orbita é uma variedade mergulhada. No entanto qualquer aberto contendo algum ponto de $\mathbb{S}^1$ é tal que cada órbita passa infinitas vezes por esse aberto, ou seja, a interseção de cada órbita com esse aberto é um conjunto desconexo. Concluindo que a ação não é regular. Esse exemplo mostra que exigir que a ação seja regular é bem mais forte que exigir apenas que as órbitas sejam variedades mergulhadas.

Outra maneira de inferir se uma ação é regular (extraída de [1] como definição de ação regular), a qual estaremos trabalhando para obter os principais resultados dessa dissertação, é dada na proposição abaixo.

Proposição 1.9.17. *Se as órbitas da ação de um grupo de Lie G em uma variedade suave M têm dimensão constante e, para cada $p \in M$, exitem seções contínuas*

$$\zeta : W \subset G/G_p \to G, \qquad \eta : V \subset M/G \to M,$$

que passam por 1 e p, respectivamente, onde V e W são abertos e tal que, $\chi : V \times W \to U$, dada por

$$\chi(\overline{g}, \overline{q}) = \zeta(\overline{g}) \cdot \eta(\overline{q}),$$

é um homeomorfismo, com U aberto em M contendo p, então a ação de G em M é regular (veja 1.9.10) e reciprocamente.

Demonstração. **(a)** Para cada p tome W conexo (logo conexo por caminhos, pois estamos em variedades que são localmente espaços euclidianos), dado de acordo com as hipóteses da proposição. Seja $O(q)$ uma órbita e $\overline{g_0}, \overline{q_0}$ tal que $\zeta(\overline{g_0}) \cdot \eta(\overline{q_0}) = q$. Afirmamos que

$$\mathcal{O}(q) \cap U = \zeta(W) \cdot \eta(\overline{q_0}).$$

Observe que uma continência é clara. Por outro lado, se $p \in \mathcal{O}(q) \cap U$ então $p = gq = \zeta(\overline{g_1}) \cdot \eta(\overline{q_1})$. Aplicando π_M em ambos os lados dessa última igualdade, usando o fato de η ser seção e a forma de q dado acima, obtemos

$$\overline{q_0} = \pi(q) = \pi(gq) = \pi(\eta(\overline{q_0})) = \pi(q) = \pi(\eta(\overline{q_1}) = \overline{q_1}.$$

Assim, quando W é escolhido conexo tem-se que $\mathcal{O}(q) \cap U$ é conexo. E claramente podemos diminuir U tanto quanto queira concluindo que a ação é regular.

(b) Suponha, reciprocamente, que a ação seja regular. Sabemos que o quociente $\widetilde{M}$ é uma variedade (não necessariamente Hausdorff) tal que a projeção natural $\pi : M \to \widetilde{M}$ é uma submersão, com $\ker \pi_* = T_q\mathcal{O}(q)$. Também G/G_p é uma variedade suave iremos identificar G/G_p com $G \cdot p$ de acordo com 1.9.7. Assim uma seção local $G/G_p \to G$ com relação a π_G, corresponde a uma seção local $G \cdot p \to G$ com relação a $(\psi_p)^{-1} \circ \pi_G$, onde ψ_p é um difeomorfismo entre G/G_p e $G \cdot p$. Seja $p \in M$. Existem seções locais (e suaves)

$$\zeta : W \subset G \cdot p \to G, \quad \eta : V \subset \widetilde{M} \to M$$

tais que

$$\zeta(p) = 1, \quad \eta(\pi(p)) = p,$$

uma vez que $\pi : M \to \widetilde{M}$ e $\pi_G : G \to G_p$ são submersões tais seções existem. Defina $\chi : W \times V \to M$ dada por

$$\chi(q, \overline{q}) = \zeta(q) \cdot \eta(\overline{q}).$$

(Aqui o símbolo $\overline{q}$ não tem nada a ver com $\pi(q)$). Dado $(X, \overline{Y}) \in T_pO(p) \times T_{\pi(p)}\widetilde{M}$ tem-se

$$(\chi_*)(X, \overline{Y}) = (\chi_{\pi(p)})_*(X) + (\chi_p)_*(\overline{Y}),$$

onde $\chi_{\pi(p)}(q) = \chi(q, \pi(p))$ e $\chi_p(\overline{q}) = \chi(p, \overline{q})$. Mostrando que essa soma é todo o espaço T_pM concluiremos que χ é um difeomorfismo definido em um aberto contendo $(p, \pi(p))$, chegando em um aberto que contém p, concluindo a recíproca. Observando que

$$\pi_* \circ (\chi_{\pi(p)})_*(X) = 0,$$

que seções são imersões e que $\ker \quad \pi_* = T_p\mathcal{O}(p)$, temos

$$\operatorname{Im}(\chi_{\pi(p)})_* = \ker \quad \pi_*.$$

Por outro lado

$$\pi_* \circ (\chi_p)_*(\overline{Y}) = \partial_t|_0(\pi \circ \eta(\pi(\alpha(t))) = \partial_t|_0(\pi(\alpha(t))) = \overline{Y}.$$

Dessa forma, se $\{\overline{Y_i}\}$ é uma base de $T_{\pi(p)}\widetilde{M}$ e $\{X_j\}$ uma base de $\ker \quad \pi_*$ então $\{(\chi_p)_*\overline{Y_i}, X_j\}$ é uma base de T_pM, de acordo com o Teorema do Núcleo e da imagem dado em Álgebra Linear (uma vez que $\{\pi_*((\chi_p)_*\overline{Y_i}) = \overline{Y_i}\}$ é base); portanto χ_* é sobrejetiva (logo bijetiva), concluindo o resultado.

$\square$

O seguinte exemplo dá um critério para testar quando uma ação não é regular.

Exemplo 1.9.18. Suponha que G age suavemente em M e que exista sequência p^i tal que

(a) $\lim p^i = p$;

(b) $p^i \in \mathcal{O}(p^1)$; $\forall\ i$

(c) $\mathcal{O}(p^1) \neq \mathcal{O}(p)$.

Então a ação de G em M não é regular. Por contradição, se a ação for regular, considere os elementos da definição de ação regular para p. Para i grande o suficiente, tem-se que $p^i \in U$ e, portanto, pode ser escrito como $p^i = \zeta(\overline{g_i}) \cdot \eta(\overline{q})$, com $\overline{q}$ fixo, pois todos os p^i estão na mesma órbita, e $p = \zeta(\overline{g}) \cdot \eta(\overline{q_0})$. Ou seja, temos que

$$\lim p^i = \lim \chi(\overline{g_i}, \overline{q}) = \chi(\overline{g}, \overline{q_0});$$

aplicando χ^{-1} e usando o fato de ser um homeomorfismo, tem-se

$$(\overline{g}, \overline{q_0}) = \chi^{-1}(\lim \chi(\overline{g_i}, \overline{q})) = \lim \chi^{-1}(\chi(\overline{g_i}, \overline{q})) = \lim(\overline{g_i}, \overline{q}).$$

Essa última igualdade mostra, em particular, que $\overline{q_0} = \overline{q}$ donde $\mathcal{O}(p^i) = \mathcal{O}(p)$. Disso segue que as condições (a),(b) e (c) são incompatíveis com uma ação regular.

Exemplo 1.9.19. Quando uma órbita $\mathcal{O}(q) \neq M$ é densa, temos que a ação não pode ser regular pois podemos tomar $p \notin \mathcal{O}(q)$ e uma sequência $q^i \to p$ com $q^i \in \mathcal{O}(q)$, como $\mathcal{O}(q^1) \neq \mathcal{O}(p)$ teremos pelo exemplo anterior que a ação não é regular.

Mostramos acima que nas condições de uma ação regular o espaço M/G é uma variedade suave (não necessariamente Hausdorff), tal que π é uma submersão. Disso concluem-se que $R = \pi^{-1}(M/G)$ é uma variedade mergulhada de M. A condição do quociente ser Hausdorff ou não esta amarrada no fato de R ser ou não um conjunto fechado. O próximo teorema é o mais geral sobre quando o quociente M/G é variedade suave Hausdorff com π submersão.

Teorema 1.9.20. *Seja G grupo de Lie agindo suavemente uma uma variedade M. O quociente $\widetilde{M}$ admite uma estrutura suave tal que $\pi : M \to \widetilde{M}$ seja uma submersão se, e somente se, a ação de G em M é regular e $\widetilde{M}$ é Hausdorff.*

Demonstração. Sendo a ação regular e $\widetilde{M}$ espaço Hausdorff, o quociente M/G admite uma única estrutura suave tal que $\pi : M \to \widetilde{M}$ seja submersão de acordo com o teorema **??**. Reciprocamente tem-se que sendo $\widetilde{M}$ Hausdorff e π submersão, então $\pi^{-1}(\{\widetilde{p}\})$ é uma subvariedade mergulhada de dimensão $m - k$, logo a ação é semi-regular. A recíproca já foi demonstrada no item (b) da proposição 1.9.17. De fato, existem seções suaves

$$\zeta : W \subset G/G_p \to G, \quad \eta : V \subset \widetilde{M} \to M,$$

como no item (b) da proposição 1.9.17. Como ja foi checado nesse item a função χ é localmente difeomorfismo, caracterizando o fato de a ação ser regular. □

Observação 1.9.21. Quando alguma órbita não é fechada então o quociente $\widetilde{M}$ não é Haussdorff, uma vez que pontos são fechados em espaços Hausdorff e

$$\mathcal{O}(p) = \pi^{-1}(\{\widetilde{p}\}).$$

A recíproca desse fato não é valida em geral, pois no exemplo 1.9.15 todas as órbitas são fechadas mas o quociente não é Hausdorff.

Capítulo 2

Simetria de Equações Diferenciais

2.1 Introdução

No trabalho de Sophus Lie, *Differentialgleichungen*, Leipzig (1891), encontra-se, transcrito para o inglês, o seguinte trecho (extraído de [22]):

The older examinations on ordinary differential equations as found in standard books are not systematic. The writers developed special integration theories for homogeneous differential equations, for linear differential equations, and other special integrable forms of differential equations. However, the mathematicians did not realize that these special theories are all contained in the term infinitesimal transformations, which is closely connected with the term of a one parametric group.

Podemos concluir, partir deste trecho, que S. Lie estava inclinado a generalizar os métodos utilizados para solucionar equações deferenciais, ordinárias e parciais, procurando, também, explicar os truques especiais que eram expostos nos livros sobre o assunto e, ainda hoje, truques esses, que são ensinados nos cursos básicos sobre equações diferencias. O mesmo problema que ocorre no colegial, memorizar métodos para solucionar problemas sem entender o que está por traz do método, ou, o que é o mesmo, qual motivação do método utilizado, ocorre nas universidades, quando nos referimos a esse tópico. Isso segue da omissão da teoria básica sobre aplicações de grupos de Lie ao estudo de equações diferencias, mas esta é outra questão que foge do escopo deste texto. Este capítulo tentará desenvolver tal teoria básica em um texto, que por pouco, seria auto-contido.

2.2 Simetria de equações algébricas

Nesta seção, daremos os rudimentos de teoria que versa sobre como grupos agindo em uma variedade nos dá soluções de equações diferenciais. Para iniciar o estudo, considere G grupo de Lie agindo suavemente em uma variedade M e $F : M \to N$ suave. Uma questão central no desenvolvimento da teoria é saber quando um sistema do tipo

$$F(p) = q$$

é invariante por G. Ser invariante por G significa que dado $g \in G$ e p solução do sistema temos gp solução do sistema, ou seja,

$$F(gp) = q.$$

A resposta para esse problema tem estrita relação com a obtenção de soluções e equações diferenciais. Veremos que uma equação diferencial em M pode ser interpretada como uma subvariedade mergulhada (sob certas restrições com relação à equação) do espaço de jato, $J^k(M)$, de M, que por sua vez, poderá ser interpretado como imagem inversa de zero por alguma função suave Δ, definida em $J^k(M) \to \mathbb{R}^l$. A ação de G em M será prolongada a uma ação de G no espaço de jatos de M e, quando ocorrer da função Δ ser invariante pela ação de G, será equivalente a dizer que G transforma funções que são soluções da equação Δ em novas soluções. Denominaremos G grupo de simetria de Δ, e escreveremos $G \subset \mathrm{Sim}(\Delta)$. O que ocorre é que quando G é grupo de simetria de uma equação Δ ele transforma soluções da referida equação e novas soluções. Isso permite construir, a partir de soluções triviais, soluções não triviais além de podermos investigar soluções que são invariantes pela ação do grupo. Uma questão natural pode surgir: como saber que grupos são grupos de simetria de uma dada equação? Teremos uma boa resposta para essa questão mostrando um método para calcular, efetivamente, os grupos de simetria de uma dada equação, que será obtido por integrar uma ação infinitesimal de álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ em M. Com o auxílio do resultado dado em Palais [9], Teorema X, Teremos associado uma ação de algum grupo de Lie G, cujo a álgebra de Lie é $\mathfrak{g}$, e esse grupo com sua ação será o grupo de simetria da equação que usamos para obter a álgebra $\mathfrak{g}$. A princípio é prático considerar grupos a 1-parâmetro e a partir de operações sucessivas desses grupos em uma dada solução ir obtendo novas soluções. Todavia, para um estudo mais profundo da equação é necessário entender como se dá a ação de todo o grupo, ou pelo menos de um subgrupo finito de todo o grupo (pois os grupos e simetrias podem ter dimensão infinita, mas nos restringiremos apenas a grupos finitos; para uma discussão sobre grupos de dimensão infinita veja [27]). O próximo resultado caminha no sentido de obter tais resultados.

Proposição 2.2.1. *Seja G grupo de Lie conexo agindo suavemente em uma variedade M. Uma função suave $f : M \to \mathbb{R}$ é $G-$invariante se, e somente se,*

$$X_p(f) = 0$$

para todo $p \in M$ e todo gerador infinitesimal X de G.

Demonstração. Se f é $G-$invariante, então para todo $p \in M$, $X \in \theta(\mathfrak{g})$ e $t \in \mathbb{R}$, tem-se

$$f(\exp tX \cdot p) = f(p).$$

Diferenciando em $t = 0$, obtemos

$$(f_*)_p(X) = X_p f = 0.$$

Reciprocamente, se $X_p(f) = 0$ para cada $p \in M$, teremos, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$\partial_s|_0 f(\exp(s+t)X \cdot p) = \partial_s|_0 f(\exp sX \cdot (\exp tX \cdot p)) = X_{(\exp tX \cdot p)}(f) = 0$$

(lembre-se que em geral $X_p = \partial_s|_0 \exp sX \cdot p$)

Dessa forma, a curva $t \to f(\exp tX \cdot p)$ é constante, como em $t = 0$ é igual a $f(p)$ devemos ter, em particular,

$$f(\exp X \cdot p) = f(p).$$

Dado $g \in G$ podemos escrevê-lo da forma $g = \exp X_1 \cdot ... \cdot \exp X_n$ pois G é conexo (veja 1.8.2). Então aplicando repetidamente o que obtemos acima concluiremos que

$$f(gp) = f(p)$$

. ☐

Exemplo 2.2.2. A conexidade exigida para demonstração do teorema é essencial. Por exemplo, considere $\mathbb{Z}_2 = \{-1, +1\}$ agindo em $\mathbb{R}$ por $(-1, x) \to -x$. Como a álgebra de Lie de $\mathbb{Z}_2$ é nula, a condição do teorema acima é verificada trivialmente. Mas observe que as únicas funções invariantes de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$ são as funções pares.

Teorema 2.2.3. *Seja G grupo de Lie conexo agindo suavemente em M e $F : M \to \mathbb{R}^l$ função suave. Considere o sistema*

$$F(p) = 0$$

tal que o posto de $(F_*)_p$ seja máximo para os valores de p tais que $F(p) = 0$. Então G é grupo de simetria do sistema acima se, e somente se,

$$X_p(F) = dF_p(X_p) = 0$$

para todo $p \in F^{-1}(0)$ e todo gerador infinitesimal X da ação de G em M.

Demonstração. Seja $p \in M$ tal que $F(p) = 0$. Se G é grupo de simetria do sistema, teremos para cada $t \in \mathbb{R}$ que $F(\exp tX) \cdot p = 0$. Diferenciando em $t = 0$ obtemos o "somente se" do teorema. Reciprocamente, seja $p \in M$ tal que $F(p) = 0$ e suponha que $X_p(F) = dF_p(X_p) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$. Então, uma vez que o espaço tangente de a $F^{-1}(0)$ em p é dado pelo *kernel* de dF_p, X_p é tangente a subvariedade mergulhada $F^{-1}(0)$ para cada $p \in F^{-1}(0)$ e, consequentemente, a curva integral de X passando por p, $\exp(tX) \cdot p$, está contida em $F^{-1}(0)$ para todo t próximo o suficiente de 0, ou seja,

$$F(\exp(tX) \cdot p) = 0$$

para t próximo de zero. Assim, a função

$$\delta : t \in \mathbb{R} \to F(\exp tX \cdot p)$$

se anula em um aberto que contém zero. Como o conjunto t tais que $\delta(t) \neq 0$ é aberto, a conexidade de $\mathbb{R}$ nos garante que δ é constante, concluindo o resultado para exponenciais. Uma vez que G é conexo, concluímos que tal resultado vale em todo G, ou seja,

$$F(gp) = 0 \text{ para todo } p \text{ tal que } F(p) = 0.$$

☐

Observação 2.2.4. *Este resultado é válido mesmo para uma* **ação local** *(função* $\Psi : \mathcal{D} \subset G \times M \to M$*,* $\mathcal{D}$ *aberto contendo* $\{1\} \times M$*, satisfazendo as propriedades de ação desde que as operações envolvidas estejam definidas)*

Exemplo 2.2.5. Seja $G = \mathbb{SO}(2, \mathbb{R})$ agindo em $M = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ e em $\mathbb{S}^1$. O gerador infinitesimal em ambos os casos é dado por $X = -y\partial_x + x\partial_y$. Dado $F : M \to \mathbb{R}$ temos que $XF = -xF_y + yF_y$ e, desta maneira, as funções invariantes são obtidas resolvendo a equação diferencial

$$-xF_y + xF_y = 0.$$

Por teoria geral de equações diferenciais obtemos tais funções resolvendo o **sistema característico** correspondente (veja [18] página 287)

$$dx/-y = dy/x$$

obtendo como solução $F(x, y) = x^2 + y^2$. Claramente qualquer função $H(F(x, y))$ é também G invariante. Em particular, as únicas funções invariantes em $\mathbb{S}^1$ são as funções constantes.

Se G é grupo a 1-parâmetro agindo em M com gerador infinitesimal dado em coordenadas

$$X = \zeta^1\partial_{x^1} + ... + \zeta^m\partial_{x^m},$$

então um invariante local da ação de G em M é o obtido resolvendo o sistema característico

$$\frac{dx^1}{\zeta^1} = \cdots \frac{dx^m}{\zeta^m}$$

(veja [24] pg. 87 para mais detalhes)

Exemplo 2.2.6. Considere G agindo suavemente em M e seja $F : M \to \mathbb{R}^l$ funções suave $G-$invariante. Uma vez que $F(gp) = F(p)$ para cada $g \in G$ e $p \in M$, a função F é constante nas órbitas. A recíproca é imediata, pois se $F|_{(O(p))} = \text{cte}$, temos $F(gp) = f(p)$ para cada $g \in G$. Assim, por exemplo, as funções invariantes pela ação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{T}^2$, ação essa que gera o fluxo irracional, devem ser constantes, pois cada órbita proveniente desta ação é densa no *Torus*.

Definição 2.2.7. *Considere* G *agindo suavemente em* M*. Uma função* $F : U \subset M \to N$ *é dita localmente* $G-$*invariante se, para cada* $p \in U$*, exite* V_p *vizinhança de* $1 \in G$ *tal que para cada* g *nessa vizinhança, sempre que* $gp \in U$*, tem-se se* $F(gp) = F(p)$*. Um subconjunto* $S \subset M$ *é dito localmente* $G-$*invariante se, dado* $p \in S$*, existe* V_p *vizinhança da identidade tal que* $gp \in S$ *sempre que* $g \in V_p$*.*

2.3 Funções Invariantes

Estaremos interessados em encontrar funções que são invariantes pela ação de um grupo de simetria de uma certa equação fixa e que, também, são soluções dessa equação. Dado um grupo de Lie G agindo regularmente em uma variedade M existe, para cada $p \in M$, um conjunto de invariantes globais (para ação semi-regular somente garantimos a existência de invariantes locais próximo de cada p) definidos próximo de p, de modo que todos os outros invariantes definidos próximos de p são obtidos através destes invariantes. Além disso, essas funções são independentes no sentido da definição abaixo:

Definição 2.3.1. *Sejam $\zeta^1, ..., \zeta^k : M \to \mathbb{R}$ funções suaves. Dizemos que essa coleção é funcionalmente dependente se, para cada $p \in M$, existe U vizinhança de p e $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ função suave que não se anula em qualquer aberto de $\mathbb{R}^n$, de modo que*

$$F(\zeta^1(x), ..., \zeta^k(x)) = 0 \quad \textit{para todo} \quad q \in U.$$

O seguinte teorema caracteriza quando um conjunto de funções é linearmente funcionalmente dependente. Para o roteiro que seguiremos na demonstração necessitaremos de uma caracterização de conjuntos fechados em uma variedade M, a saber, se $S \subset M$ é um conjunto fechado, então existe $f : M \to \mathbb{R}$ suave tal que $S = f^{-1}(0)$, uma demonstração pode ser encontrada em ([15], Teorema 1.5. Nessa referência o resultado é demonstrado para o caso em que $M = \mathbb{R}^n$. O caso geral mostra-se tomando M mergulhada como uma subvariedade fechada de $\mathbb{R}^N$ para algum N, como garantido pelo Teorema de Whitney, de modo que $S \subset \mathbb{R}^N$ será fechado; obtendo $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ suave tal que $S = F^{-1}(0)$ tome $f = F|_M$ teremos o resultado). Gostaria de ressaltar que o roteiro para demonstração desse teorema é dado em Olver na "Nota" referente ao capítulo 2.

Teorema 2.3.2. *Seja $\zeta = (\zeta^1, ..., \zeta^k) : M \to \mathbb{R}^k$ suave. Então $\zeta^1, ..., \zeta^k$ é linearmente funcionalmente dependente se, e somente se, $d\zeta_x$ tem posto menor que k para cada $p \in M$.*

Demonstração. Suponha Posto $d\zeta_p < k$ para todo $p \in M$. Pelo Teorema de Sard o conjunto $\{\zeta(p)/\text{Posto } d\zeta_p < k\}$ tem medida nula em M, de modo que Im ζ não contém abertos. Seja $U \subset M$ aberto com fecho compacto e $K = \zeta(\overline{U})$. K é fechado pois é imagem de compacto por função contínua em $\mathbb{R}^k$ que é Hausdorff. Considere f suave tal que $K = F^{-1}(0)$. Então F não se anula em abertos (pois se anula apenas em K e $\text{int}(K) = \text{int}(\zeta(\overline{U})) = \varnothing$). Observando que

$$F(\zeta^1(x), ..., \zeta^k(x)) = 0 \quad \text{para todo} \quad p \in U,$$

concluímos que $\zeta^1, ..., \zeta^k$ são funcionalmente dependentes. Reciprocamente, suponha que para algum $p \in M$, $d\zeta_p$ tenha posto máximo, de modo que em algum aberto contendo p deverá ter posto máximo, logo constante nesse aberto. Em virtude Teorema do Posto, existe coordenadas ϕ e ψ ao redor de p e $\zeta(p)$, respectivamente, com

$$\zeta \circ \phi^{-1}(x_1, ..., x_n) = \psi^{-1}(x_1, ..., x_k),$$

de tal maneira que se existisse aberto U_p tal que $F(\zeta(y)) = 0$ para todo $q \in U_p$, então, em $U_q \cap \phi^{-1}(\text{Im}\phi)$, teríamos

$$0 = F(\zeta \circ \phi^{-1}(x_1, ..., x_n)) = F \circ \psi^{-1}(x_1, ..., x_k) \quad \text{para todo} \quad (x_1, ..., x_n) \in U_p \cap \phi^{-1}(\text{Im}\phi).$$

Em particular, $F \circ \psi^{-1}$ se anularia em um aberto. Como ψ é carta, concluiríamos que F se anula em abertos, ou seja, o conjunto $\zeta^1, ..., \zeta^n$ seria funcionalmente dependente. Portanto não existe ponto $p \in M$ tal que $d\zeta_p$ tenha posto máximo. $\square$

O próximo teorema, fornecerá uma maneira de encontrar os invariantes definidos localmente de uma ação regular suave.

Teorema 2.3.3. *Seja G um grupo de Lie agindo regularmente em uma variedade M com órbitas de dimensão s. Para cada $p \in M$ existe exatamente $m-s$ invariantes funcionalmente independentes $\zeta^1, ..., \zeta^{m-s}$ definidas em uma vizinhança de p. Mais ainda, qualquer outro invariante da ação do grupo próximo de p é da forma*

$$F(p) = G(\zeta^1(p), ..., \zeta^n(p))$$

para alguma função suave G.

Demonstração. O fato da ação ser regular permite concluir que $\widetilde{M}$ é uma variedade suave (não necessariamente Hausdorff) de dimensão $m-s$ tal que π é submersão e, qualquer carta definida em M/G, permite construir invariantes. De fato, sejam $p \in M$ e $(\eta = (\eta^1, ..., \eta^{m-s}), V)$ carta em $\widetilde{p} \in \widetilde{M}$. As funções suaves

$$\zeta^1 = \eta^1 \circ \pi, ..., \zeta^{m-s} = \eta^{m-s} \circ \pi$$

definidas em $\pi^{-1}(V)$ são invariantes locais, pois claramente temos

$$\zeta^i(gq) = \eta^i \circ \pi(gq) = \eta^i \circ \pi(q) = \zeta^i(q).$$

Além disso, se $\zeta = (\zeta^i)$ então

$$\zeta_* = \eta_* \circ \pi_*$$

tem posto máximo, pois η_* e π_* são sobrejetivas. Portanto o conjunto $\zeta^1, ..., \zeta^{m-s}$ é funcionalmente linearmente independente. Para completar, considere $F : \pi^{-1}(V) \to \mathbb{R}^{m-s}$ função suave invariante. Completando o conjunto ζ^i a uma carta $\psi(p) = (\phi(p), \zeta(p))$, teremos que em $\pi^{-1}(V)$ cada órbita é determinada por um *slice* $\{\zeta = \text{cte}\}$. Dessa maneira, em virtude de F ser constantes nas órbitas, teremos que a função $F \circ \psi^{-1}(u, v)$ é independente de u, ou seja,

$$F \circ \psi^{-1}(u, v) = G(v).$$

Escrevendo de outra forma, com $p = \psi^{-1}(u, v)$, tem-se

$$F(p) = G(\zeta(p)).$$

□

Observação 2.3.4. *O teorema anterior vale no caso de ações semi-regulares. A demonstração segue tomando um sistema de coordenadas $\psi = (\zeta^i)$ próximo de p, de modo que as órbitas são slices $\zeta^{s+1} = c^1, ..., \zeta^m = c^{m-s}$ e esses serão os invariantes, mas não necessariamente globais. A diferença aqui é que a interseção de uma órbita com um aberto onde estão definidos os invariantes pode ser um conjunto não conexo e, consequentemente, podemos garantir a invariância em cada "pedaço" apenas, ou seja, a invariância ocorre para g próximo de 1 apenas. Com efeito, sabemos que, a restrição $\Psi|_{G\times\mathcal{O}(q)} : G \times \mathcal{O}(q) \to \mathcal{O}(q)$ da ação de G em M define uma ação suave, $\mathcal{O}(q)$ é uma união enumerável de fatias e cada fatia é aberta na variedade $\mathcal{O}(q)$. Desta forma, se S é a fatia que contém q, então para cada $g \in \Psi|^{-1}_{G\times\mathcal{O}(q)}(S)$ (aberto em G contendo 1) temos $\zeta^i(gq) = \zeta^i(q)$. Se F é outra função localmente invariante definida em algum aberto de M, então, analogamente, temos que ela é da forma $F(p) = G(\zeta(p))$.*

Exemplo 2.3.5. Quando consideramos G o subgrupo de $\mathbb{SO}^3$ formado pelas matrizes de rotação em torno do eixo z agindo em $\mathbb{S}^2$, obtemos o quociente $\widetilde{M} = [-1, 1]$. Neste caso não temos que $\pi : M \to \widetilde{M}$ é uma submersão, uma vez que $\pi^{-1}(1) = \{N\}$ é $0-$variedade e não uma $1-$variedade como esperado. A partir da fórmula

$$\pi(x, y, z) = \begin{cases} (1 - x^2 - y^2)^{1/2}, \text{ se } z \geq 0 \\ -(1 - x^2 - y^2)^{1/2}, \text{ se } z < 0 \end{cases}$$

concluímos que $\pi_* = (0, -2x^2(1-x^2-y_2)^{-1/2}, -2y^2(1-x^2-y_2)^{-1/2})$ acarretando em $(\pi_*)_{(0,0,1)} \equiv 0$.

Exemplo 2.3.6. Considere a ação canônica de $G = SO(n)$ em $M = \mathbb{R}^n - \{0\}$. As órbitas dessa ação são esferas, de modo que $\widetilde{M}$ pode ser identificado com $(0, \infty)$ via

$$\pi : M \to \widetilde{M}$$

dada por $\pi(p) = ||p||$. Assim, temos uma função globalmente invariante

$$\zeta : M \to \mathbb{R}$$

dada por $\zeta(p) = ||p||$ e todos os outros invariantes são da forma

$$p \to F(||p||)$$

para alguma função suave F.

Exemplo 2.3.7. Seja $G = \mathbb{R}_{>0}$ agindo em $M = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ por $(t, (x, y)) \to (tx, t^2y)$. As órbitas da ação de G são semi-parábolas ou semi-eixo. A expressão para $\pi(x_0, y_0)$ é dada resolvendo a equação

$$(tx_0)^2 + (t^2y_0)^2 = 1.$$

O teorema anterior nos diz sobre existência de invariantes, mas esse exemplo deixa claro que não temos um método eficiente para descobri-los; de fato, o problema passa por caracterizar $\widetilde{M}$ e obter uma fórmula explícita para π.

Sobre os dois exemplos temos de imediato que no primeiro há invariantes definidos em todo M, pois o quociente $\widetilde{M}$ pode ser parametrizado por uma carta apenas. No segundo exemplo, no entanto, não podemos parametrizar $\mathbb{S}^1$ com uma carta apenas. Será que isso é suficiente para mostrar que não existe invariantes (não triviais, pois toda função constante é invariante) definidos em todo M? Como veremos, sob certas restrições sobre a ação poderemos mostrar que existem invariantes definidos em toda variedade M e eles estão em correspondência biunívoca com as funções definidas em $\widetilde{M}$. Gostaríamos de destacar mais um resultado:

Proposição 2.3.8. *Se G age suavemente e regularmente com órbitas de dimensão s em uma variedade M, então:*

(a) *uma função $F : M \to \mathbb{R}^l$ é $G-$invariante se, e somente se, existe função suave $\widetilde{F} : \widetilde{M} \to \mathbb{R}^l$ tal que $\widetilde{F}(\widetilde{x}) = F(x)$ para todo $x \in M$;*

(b) *uma subvariedade $n-$dimensional N de M é $G-$invariante se, e somente se, existe uma $(n-s)-$dimensional subvariedade mergulhada $\widetilde{N}$ de $\widetilde{M}$ tal que $N = \pi^{-1}(\widetilde{N})$;*

(c) *a subvariedade $S = \{x;\ \ F(x) = 0\}$ é $G-$invariante se, e somente se, existe uma subvariedade $\widetilde{S} = \{\widetilde{x};\ \ \widetilde{F}(\widetilde{x}) = 0\}$ determinada por alguma função suave $\widetilde{F} : \widetilde{M} \to \mathbb{R}^l$ satisfazendo $\pi(S) = \widetilde{S}$.*

Demonstração. (a) Sendo F invariante por G está bem definida e é suave a função suave $\widetilde{F} : \widetilde{M} \to P$ dada por $\widetilde{F}(\widetilde{x}) = F(x)$. Se existe $\widetilde{F}$ satisfazendo $\widetilde{F}(\widetilde{x}) = F(x)$, necessariamente tem-se $F|_{\mathcal{O}(x)} = \text{cte}$.

(b) Se N é subvariedade invariante por G, então $\widetilde{N} = \pi(N)$ é uma subvariedade de $\widetilde{M}$. Com efeito, note inicialmente que N necessariamente é uma união de órbitas, $N = \bigcup_{x \in N} G \cdot x$. Dado $\mathcal{O}(x) \subset N$, tome $(\zeta^1, ..., \zeta^{m-s})$ carta ao redor $\widetilde{x} \in \widetilde{M}$ e complete o conjunto $\zeta^1 \circ \pi, ..., \zeta^{m-s} \circ \pi$ a uma carta $(\zeta^i \circ \pi, y^1, ..., y^s)$ definida em um aberto U de M ao redor de x (veja 1.3.5). Necessariamente, uma vez que (y^j) é carta para a subvariedade $\mathcal{O}(x)$, algum subconjunto $(\zeta^{i_1} \circ \pi, ..., \zeta^{i_{n-s}} \circ \pi, y^1, ..., y^s)$ é carta em N ao redor de x, definida em $N \cap U$, de maneira que as funções $(\zeta^{i_1}, ..., \zeta^{i_{n-s}})$ formam um sistema de coordenadas em $\pi(N)$ definidas no aberto $\pi(N \cap U)$. Reciprocamente se $\widetilde{N}$ é subvariedade mergulhada $(n-s)-$dimensional de $\widetilde{M}$, seguirá que $N = \pi^{-1}(\widetilde{N})$ é subvariedade n dimensional, pois a subvariedade mergulhada $\widetilde{N}$ é transversal a π, uma vez que π é submersão. Claro que N é G invariante.

(c) (veja versão local abaixo, 2.3.10) Pelo item anterior juntamente com o fato de que $N = \{z;\ \ F(x) = 0\}$ é uma subvariedade $G-$invariante, $\widetilde{N} = \pi(N)$ será subvariedade e, mais que isso, fechada. Isso pois π é mapa aberto e, uma vez que N é união de órbitas temos a igualdade $\pi(M - N) = \pi(M) - \pi(N) = \widetilde{M} - \widetilde{N}$; consequentemente existe $\widetilde{F} : \widetilde{M} \to \mathbb{R}$ suave tal que $\widetilde{N} = \widetilde{F}^{-1}(0)$ (veja caracterização de fechados usada para demonstrar 2.3.2) e, claramente, podemos definir $\widetilde{F}$ com contradomínio em $\mathbb{R}^l$, satisfazendo o requerido. A reciproca é imediata.

$\square$

Observação 2.3.9. *Sobre o resultado acima, item (c), não havemos falado muito. Uma questão surge naturalmente: Se temos $F : M \to \mathbb{R}^l$ suave tal que $N = F^{-1}(0)$ é subvariedade, seria possível encontrar uma função suave $G : M \to \mathbb{R}^l$ tal que $N = G^{-1}(0)$ e 0 é valor regular de G. Certamente é necessário que $\dim N = m - l$. É suficiente? De fato não podemos garantir isso. A faixa de Möbius $\mathbb{M}^2$ pode ser mergulhada como uma subvariedade fechada de $\mathbb{R}^N$ para algum N (Teorema de Whitney). Portanto pode ser escrita como $f^{-1}(0)$, $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ suave. Definindo $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^2$ por $F(x) = (f(x), 0)$, ainda temos que $\mathbb{M}^2 = F^{-1}(0)$ e claramente tal G não pode ser encontrada, pois imagem inversa de valor regular é orientável. Com relação ao item (c), se tivermos 0 valor regular de F conseguimos $\overline{F}$ tal que 0 é valor regular de $\overline{F}$?*

Observação 2.3.10. *Vejamos uma demonstração da versão local do item (c) que nos é mais interessante. Suponha $N = F^{-1}(0)$ G-invariante. Seja $x_0 \in N$ e carta $\zeta^1, ..., \zeta^{m-s}$ ao redor de $\widetilde{x_0}$. Pondo $(\zeta^i \circ \pi) = \zeta$ existem coordenadas $(x^{i_1}, ..., x^{i_{m-s}}) = \widehat{x}$ tal que*

$$\det \frac{\partial \zeta}{\partial \widehat{x}} \neq 0,$$

de modo que $y = \psi(x) = (\zeta(x), \widehat{x})$ é carta ao redor de x_0 com domínio U. Observe que os pontos $(y, \widehat{x_0})$ e $(y, \widehat{x})$ estão na mesma órbita. Necessariamente, devido a invariância de N, quando $\psi^{-1}(y, x_0) \in N$, deve se ter

$$0 = F \circ \psi^{-1}(y, \widehat{x_0}) = F \circ \psi^{-1}(y, \widehat{x}).$$

Isso nos dá uma fórmula para $\widetilde{F}$, a saber,

$$\widetilde{F}(x) = F \circ \psi^{-1}(\zeta(x), \widehat{x_0}),$$

pois ocorrendo

$$0 = F(x) = F \circ \psi^{-1}(\zeta(x), \widehat{x}) = F \circ \psi^{-1}(\zeta(x), \widehat{x_0}) = \widetilde{F},$$

tem-se $\widetilde{F}(x) = 0$ e reciprocamente. A versão é local no sentido que temos $\widetilde{F}$ definida apenas no domínio U da carta ψ. Por outro lado, se 0 é valor regular de F então deve ser valor regular de $\widetilde{F}$ e, naturalmente, podemos encarar essa função como uma função em $\pi(U) \subset \widetilde{M}$, já que é constante nas órbitas.

Considere agora $E = M \times N$ e suponha que os invariantes possam ser conseguidos da forma $\eta^1(x), ..., \eta^{m-s}(x), \zeta^1(x, u), ..., \zeta^n(x, u)$. Quando questionamos se uma função $u = f(x)$ é invariante pela ação de G em E, o problema se torna equivalente determinar se o conjunto $N = F^{-1}(0)$ é invariante por G ou não, onde $F(x, u) = u - f(x)$. Assim, quando tal conjunto for invariante a função $\widetilde{F}$ terá a forma

$$\widetilde{F}(x, u) = F \circ \psi^{-1}(\eta(x), \zeta(x, u), \widehat{x_0}).$$

2.4 Ação em Espaços de Funções

Nesta seção, veremos como a ação de um grupo de Lie G em $M \times N$, M e N variedades suaves, transforma uma dada função suave $f : M \to N$ em outra função suave denotada por gf. Considerando $\mathrm{pr}_1 : E = M \times N \to M$ a projeção na primeira coordenada, denotaremos por $S(E)$ o espaço da funções suaves $s : M \to E$ tais que

$$\mathrm{pr}_1 \circ s = I_M,$$

ou espaço das seções de E com relação a pr_1. Sendo $s(p) = (s^1(p), s^2(p))$ então, de $\pi(s(p)) = s^2(p) = p$, concluímos que seções tem a forma

$$s(p) = (p, f(p))$$

para alguma função suave $f : M \to N$. Suponha que um grupo de Lie G age suavemente em E. Dado uma seção s, sua imagem Γ_s, que é uma subvariedade de E, é transformada em uma subvariedade $g \cdot \Gamma_s = \{gp, \ \ p \in \Gamma_s\}$ (pois g é difeomorfismo), para cada $g \in G$. Uma questão surge imediatamente: quando essa subvariedade representa a imagem de uma seção? Podemos garantir que $g\Gamma_s$ é a imagem de uma seção desde que g esteja próximo da identidade; porém poderemos garantir que a seção é definida somente em abertos (seção local) de M e, ocasionalmente, não para todo M. Mais geralmente quando a ação de G é transversal (que definiremos posteriormente) poderemos garantir que essa subvariedade é imagem de uma seção local para cada g. Para concluir a afirmação acima escreva

$$g(p, q) = (\Phi_g(p, q), \Omega_g(p, q))$$

e

$$g(s(p)) = (\overline{p}, \overline{q}).$$

Observe que $\overline{p} = \Phi_g \circ s(p)$ e a para cada g, $\Phi_g \circ s$ é uma função suave de M para M. Fixado p afirmamos que a associação

$$g \in G \to \det((\Phi_g \circ s)_*)_p \tag{2.4.1}$$

é contínua. Sendo $s = 1 \times f$, observando que

$$\Phi_g \circ s(q) = \mathrm{pr}_1 \circ \Psi \circ (1_G \times f)(g, q),$$

onde 1_G é a identidade de G, Ψ a ação de G em M e pr_1 é a projeção na primeira coordenada, podemos concluir que associação dada em (2.4.1) é suave resolvendo o seguinte problema geral: se $\Phi : G \times M \to M$ é uma função suave, então a associação

$$g \in G \to \det(\partial\Phi/\partial p|_{(g,p_0)})$$

é contínua. É fácil concluir essa afirmação fazendo o estudo dessa função em coordenadas.

Como $\det(\Phi_1 \circ s)_* = 1$ e, pelo fato de termos uma associação contínua em (2.4.1), concluímos que próximo de 1

$$\det(\Phi_g \circ s)_* \neq 0;$$

com o auxílio do Teorema da Função Inversa, podemos garantir que para cada g próximo o suficiente de 1 poderemos escrever

$$q = (\Phi_g \circ s)^{-1}(\overline{q}),$$

numa vizinhança de p. Consequentemente

$$(gs)(\overline{p}) = \overline{q} = \Omega_g(s(p)) = \Omega_g \circ s \circ (\Phi_g \circ s)^{-1}(\overline{p}),$$

definida em algum aberto de M.

Exemplo 2.4.1. Considere G agindo em $E = M \times N$ suavemente e suponha que $g(p, q) = (\Phi_g(p), \Omega_g(p, q))$ (esse tipo de ação é denominado ação projetiva). Nessas condições, temos que G age em M por $(g, p) = \Phi_g(p)$. Então $\overline{p} = (\Phi_g)^{-1}$ e a função transformada assume a forma

$$(sg)(\overline{p}) = \Omega_g \circ s \circ (\Phi_g)^{-1}(\overline{p}).$$

Note que aqui $g \cdot \Gamma_s$ é o gráfico de uma função suave pois podemos obter $\overline{p}$ em função de p globalmente.

Neste último exemplo, observamos que se G age projetavelmente em $E = M \times N$ então existe uma ação suave de G em M dada por $gp := \pi_1 \circ \Psi(g, (p, q)) = \Phi_g(p)$; observe que essa regra está bem definida. Denotaremos, nesse caso, Ψ_M a ação de E projetada em M.

2.5 Espaços de Jatos de Espaços Euclidianos

Quando definimos uma variedade suave carregamos uma noção de diferenciabilidade, permitindo que pensemos em problemas que envolva essa noção, como por exemplo, descobrir uma função suave a partir de informações sobre suas derivadas. Em espaços euclidianos, esse tipo de problema é estudado com auxílio de equações diferenciais, que é facilmente definida. Já em variedades, para definir uma noção de equação diferencial, necessitaremos introduzir o conceito de espaços de jatos, e uma equação diferencial tornar-se-a um objeto geométrico, uma subvariedade desse espaço. Com o ferramental desenvolvido em seções anteriores para o estudo de equações algébricas (onde demos um critério de invariância pela ação de um grupo), iremos construir soluções de equações diferenciais entre espaços euclidianos (ou abertos de espaços euclidianos); no entanto, para aplicar o que desenvolvemos, precisamos substituir uma equação diferencial definida algebricamente por um objeto geométrico do tipo "$\Delta^{-1}(0)$". O local correto para definição de "delta" é o que denominamos espaço de jato.

Na seção anterior mostramos que quando G age suavemente em $M \times N$, para cada g próximo o suficiente de 1 e cada $p \in M$, o grupo transforma uma seção s em uma seção local $g \cdot s \in \Gamma_p$. A essa altura já podemos definir o que significa G ser grupo de simetria de uma equação diferencial Δ. Fixemos a partir de agora $E = X \times U$, onde X e U são abertos de espaços euclidianos, as coordenadas (x^i) sendo as variáveis independentes e (u^i) as variáveis dependentes.

Definição 2.5.1. *Um grupo G agindo suavemente em $E = M \times N$ é grupo de simetria de uma equação diferencial Δ se G transforma soluções de Δ em novas soluções, ou seja, se $u = f(x)$ é uma solução (que corresponde a seção $s = 1_M \times f$ dada por s(x)=(x,f(x))) então $g \cdot s$ é solução quando estiver definida.*

Aqui um sistema de equações diferenciais está sendo denominado com equação diferencial apenas. Dado M variedade e $f : M \to \mathbb{R}$, denotaremos por

$$\partial_J f = \frac{\partial^k f}{\partial x^{j_1} \partial x^{j_2} ... \partial x^{j_k}}$$

as derivadas de ordem k de f, onde $J = (j_1, ..., j_k)$ é uma $k-$upla de inteiros com $1 \leq j_1 \leq ... \leq j_k \leq m$. Existem precisamente

$$m_k = \left(\begin{array}{c} m+k-1 \\ k \end{array} \right)$$

derivadas de f de ordem k (veja [28]). Sendo $f = (u^i)$ existem, para cada $p \in M$, $n \cdot m_k$ números ${u^\alpha}_J$ que representam as derivadas das componentes da função f no ponto p.

Definição 2.5.2. *Dado $s = 1_M \times f \in \Gamma_p$, $f = (u^i)$, definimos o $k-$jato de s em um ponto q de seu domínio por*

$$j^k s(q) = (s(q), \partial_J(u^i)(q)),$$

onde i varia entre 1 e n e são tomadas todas a uplas $J = (j_1, \cdots, j_l)$ com $j_1 \leq j_2 \leq \cdots \leq j_l$ e $l \leq k$. Eventualmente usaremos a notação $\partial_J|_q u = u_J(q)$.

Pela definição anterior, entendemos que o k-jato de uma seção s em um ponto q, carrega toda informação sobre o valor de s em q assim como os valores de todas a possíveis derivadas até ordem k das funções coordenadas u^i avaliadas no ponto q. Quanto a ordem em relação as uplas J não precisamos nos preocupar. Convencionaremos $j^0 s = s$; definiremos o $k-$jato do espaço E como sendo o conjunto

$$J^k(E) = E \times \mathbb{R}^{n \cdot m_1} \times ... \times \mathbb{R}^{n \cdot m_k}$$

e, deste modo, teremos $j^k s(q) \in J^k(E)$. As coordenadas de $J^k(E)$ será representada por (x, u^i, u^i_J), onde i e J variam como na definição acima. Usando polinômios de Taylor (veja exemplo abaixo) podemos mostrar que um elemento $u^{(k)} \in J^k(E)$ é o $k-$jato de uma seção em algum ponto q. O espaço de jato de ordem k de E, $J^k(E)$, tem dimensão dada por $m+n+n \cdot m_1+...+n \cdot m_k := m+m^{(k)}$.

Exemplo 2.5.3. Considere $E = U \times V \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ e $s = 1_{\mathbb{R}^2} \times f$ uma seção em E. O 2-jato de s é dado por

$$j^2 s = (s, \partial f/\partial x, \partial f/\partial y, \partial^2 f/\partial x^2, \partial^2 f/\partial x \partial y, \partial^2 f/\partial y^2).$$

Dado $u^{(2)} = (x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) \in J^2(E)$, considerando o polinômio de Taylor

$$f(z, w) = u + u_x(z - x) + u_y(w - y) + \frac{u_{xx}}{2}(z - x)^2 + u_{xy}(w - x)(w - y) + \frac{u_{yy}}{2}(w - y)^2,$$

temos que $f(x, y) = u$ e, por continuidade, próximo de (x, y), podemos garantir que f determina uma seção local em E de tal modo que $j^1 s(x, y) = u^{(2)}$.

Uma equação diferencial definida em E que envolva derivadas de ordem até k pode ser interpretada como um objeto geométrico (uma subvariedade, sob certas restrições) no espaço de jatos $J^k(E)$. Com efeito, qualquer função suave

$$\Delta : J^k(E) \to \mathbb{R}^l$$

tal que $\Delta^{-1}(0)$ é uma subvariedade de $J^k(E)$, subvariedade essa que denotaremos por Δ também, determina uma equação diferencial de modo que, se s é uma seção tal que $j^k s(p) \in \Delta$ para cada p no domínio de s, então s é solução da equação Δ.

Exemplo 2.5.4. Considere a equação $u_t = u_{xx}$, onde procuramos soluções em $E = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. Podemos reescrevê-la geometricamente como

$$\Delta : J^2(E) \to \mathbb{R}$$

dado por $\Delta(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}) = u_t - u_{xx}$. Observe que $\Delta^{-1}(0)$ é subvariedade mergulhada de $J^2(E)$ e a seção $s(x, t) = (x, t, \exp(t - x))$ é tal que

$$j^2 s(x, t) = (x, t, \exp(t - x), -\exp(t - x), \exp(t - x), \exp(t - x), -\exp(t - x), \exp(t - x)),$$

logo $\Delta(j^2 s(x, y)) = \exp(t - x) - \exp(t - x) = 0$, concluindo que s é solução de Δ.

Dado seção s com relação a $\mathrm{pr}_1 : E \to M$, temos que $j^k s$, que é dada por $j^k s(p \in E) = k-$ésimo jato de s em p, é uma seção com relação a $\pi_1 : J^k(E) \to E$. Afirmar que s é solução de Δ é o mesmo que $\mathrm{Im} j^k s \subset \Delta$.

2.6 Ação Prolongada

O modo como passamos a entender uma equação diferencial, a saber, uma subvariedade mergulhada do espaço de jatos, é crucial para que possamos aplicar o que desenvolvemos nas seções anteriores sobre sistemas de equações algébricas. Quando G age em E ele transforma uma dada seção $s \in \Gamma_p$ em nova seção e com isso também transforma as derivadas de s. Isso nos dá naturalmente uma ação de G em $J^k(E)$ para cada k, esta é obtida avaliando as derivadas da seção gs em $\Phi_g(gp) = \overline{x}$. Rigorosamente, seja ${u_0}^{(k)} \in J^k(E)$ e encontre seção tal que $j^k s(x_0) = {u_0}^{(k)}$. Por exemplo, o polinômio de Taylor de ordem k (veja 2.5.3)

$$u^\alpha(x^i) = \sum_J \frac{{u^\alpha}_{J_0}}{\widehat{J}!}(x - x_0)^J$$

(aqui $J = (j_1, ..., j_l)$ com $0 \leq j_i \leq k$, $(x - x_0)^J = (x^{j_1} - {x_0}^{j_1})...(x^{j_l} - {x_0}^{j_l})$, $\widehat{J} = (\widehat{j}_1, ..., \widehat{j}_l)$, $\widehat{j}_i$ é o número de $j_l's$ que são iguais a i e $\widehat{J}! = \widehat{j}_1!\widehat{j}_2!...\widehat{j}_l!$.) nos dá a seção $s(x) = (x, u^1(x), ..., u^n(x))$ satisfazendo o requerido. Desta maneira, próximo de $1 \in G$, $(gs)(\overline{x})$ está definida e é uma seção local em $gx_0 = \overline{x_0}$. Calculando as derivadas de gs em $\overline{x_0}$ obtemos a ação de G em ${u_0}^{(k)}$, a qual denotaremos por Ψ_k, ou seja,

$$\Psi_k(g, u_0^{(k)}) = g \cdot u_0^{(k)} = j^k(gs)(\overline{x_0}). \tag{2.6.1}$$

Observação 2.6.1. *Na verdade o que podemos garantir é que essa regra define uma ação suave local de G em $J^k(E)$ (veja apêndice B), pois não podemos garantir que dada uma seção sempre gs é uma seção . Uma ação local é, portanto, uma ação onde sempre vale: $1p = p$; $g(hp) = (gh)p$, desde que ambos os lados estejam definidos e se gp está definido deve também estar definido $g^{-1}p$ e valer $g(g^{-1}p) = p$. Em outras palavras, uma ação suave local é uma função $\Psi : \mathcal{D} \subset G \times M \to M$ onde $\mathcal{D}$ é aberto, Ψ suave e valem as propriedades de ação quando estiverem definidas; em particular para g e h próximos de 1 devem valer tais propriedades.*

Exemplo 2.6.2. Considere $G = \mathbb{SO}(2) \times \mathbb{R}_{>0}$ agindo em $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ por

$$(A_\theta, \epsilon)(x, u, v) = (A_\theta(x, u), \epsilon^{-1}v),$$

onde $A_\theta(x, u) = (x\cos\theta - u\sin\theta, x\sin\theta + u\cos\theta)$. Seja ${u_0}^{(1)} = (x^0, u^0, v^0, {u_x}^0, {v_x}^0) \in J^1(E)$ e $s(x) = (x, u^0 + {u_x}^0(x - x^0), v^0 + {v_x}^0(x - x^0))$ seção tal que $j^1 s(x_0) = {u_0}^{(1)}$. Para simplificar escreva $s(x) = (x, ax + b, cx + d)$. Sendo

$$(A_\theta, \epsilon)s(x) = (\overline{x}, \overline{u}, \overline{v}),$$

temos que

$$\overline{x} = x\cos\theta - (ax + b)\sin\theta$$

de modo que isolando x obtemos

$$x = \frac{b\sin\theta + \overline{x}}{\cos\theta - a\sin\theta},$$

portanto

$$\overline{u}(\overline{x}) = x\sin\theta + (x + b)\cos\theta = x(\sin\theta + a\cos\theta) + b\cos\theta =$$

$$= \frac{\sin\theta + a\cos\theta}{\cos\theta - a\sin\theta} \cdot \overline{x} + \frac{b}{\cos\theta - a\sin\theta}.$$

Com relação a v temos

$$\overline{v}(\overline{x}) = \epsilon^{-1}(cx+d) = \frac{\epsilon^{-1}c}{\cos\theta - a\sin\theta} \cdot \overline{x} + \epsilon^{-1} \cdot (\frac{cb\sin\theta}{\cos\theta - a\sin\theta} + d).$$

Assim

$$j^1(gs)(\overline{x}) = ((gs)(\overline{x}), \frac{\sin\theta + a\cos\theta}{\cos\theta - a\sin\theta}, \frac{\epsilon^{-1}c}{\cos\theta - a\sin\theta}).$$

Substituindo a, b, c e d, a ação prolongada em ${u_0}^{(1)}$ é dada por $(g = (A_\theta, \epsilon))$

$$(A_\theta, \epsilon) \cdot {u_0}^{(1)} = j^1(gs)(\overline{x^0})$$

segundo nossa definição. Eliminando os sub/super-índices obtemos a ação de G em J^1E

$$(A_\theta, \epsilon)(x, u, v, u_x, v_x) = (A_\theta(x, u), \epsilon^{-1}v, \frac{\sin\theta + u_x\cos\theta}{\cos\theta - u_x\sin\theta}, \frac{\epsilon^{-1}v_x}{\cos\theta - u_x\sin\theta}).$$

Observe que essa ação é definida desde que $u_x \neq \cot\theta$; então temos uma ação local em contraste com a ação de G em E que é linear (para cada θ, ϵ temos que (A_θ, ϵ) é uma transformação linear em E) e definida globalmente.

Dado uma equação diferencial $\Delta : J^k(E) \to \mathbb{R}^l$, suponha que $\Delta^{-1}(0)$ seja uma subvariedade mergulhada $G-$invariante. Se uma seção s for solução de Δ e gs uma seção local então, de

$$\Delta(j^k s(x)) = 0$$

para todo $x \in \text{Dom } s$, obtemos que

$$0 = \Delta(j^k s(x)) = \Delta(g \cdot j^k s(x)) = \Delta(j^k(gs)(\overline{x}))$$

para todo $\overline{x} \in \text{Dom }(gs)$.

Por outro lado, sabemos que se 0 é valor regular de Δ a subvariedade $\Delta^{-1}(0)$ é $G-$invariante se, e somente se,

$$X^{(k)}\Delta^i = 0$$

para todo gerador infinitesimal $X^{(k)}$ da ação de G em J^kE, como consequência do teorema 2.2.3. Destaquemos esse fato:

Teorema 2.6.3. *Suponha que um grupo de Lie conexo G age suavemente em $E = M \times N \subset \mathbb{R}^{m+n}$ e que 0 seja valor regular de $\Delta : J^kE \to \mathbb{R}^l$. Se*

$$X^{(k)}\Delta^i = 0$$

sempre que $\Delta = 0$ e para todo gerador infinitesimal $X^{(k)}$ da ação de G em J^kE, então G equação Δ.

Para obter a recíproca desse resultado necessitamos também que a equação Δ seja localmente solúvel no sentido da definição abaixo:

Definição 2.6.4. *Um sistema de equações diferenciais $\Delta : J^kE \to \mathbb{R}^l$ é dito localmente solúvel se, dado $u_0^{(k)} \in J^kE$ existe seção s tal que $j^ks(x_0) = u_0^{(k)}$ e s seja solução de Δ. Caso Δ tenha posto máximo quando $\Delta = 0$ e seja localmente solúvel diremos que Δ é um sistema não degenerado de equações diferenciais.*

O fato de G ser grupo de simetria da equação Δ não implica que $\Delta^{-1}(0)$ seja uma subvariedade invariante por G e, logo, não podemos aplicar o Teorema 2.2.3, que permitirá concluir que $X^{(k)}\Delta^i = 0$ quando $\Delta = 0$. Mas supondo que Δ seja não degenerada poderemos garantir que $\Delta^{-1}(0)$ é uma subvariedade invariante por G e, consequentemente, em virtude de 2.2.3, concluiremos a recíproca teorema anterior.

Teorema 2.6.5. *Seja $\Delta : J^kE \to \mathbb{R}^l$ um sistema de equações diferenciais não degenerado. Então um grupo conexo G é grupo de simetria de Δ se, e somente se,*

$$X^{(k)}\Delta = 0$$

sempre que $\Delta = 0$ e para todo gerador infinitesimal $X^{(k)}$ da ação de G em J^kE.

Demonstração. Seja $u_0^{(k)} \in \Delta^{-1}(0)$ e s seção local tal que $j^ks(x_0) = u_0^{(k)}$, com s solução de Δ. Para g próximo de 1 está bem definida a seção gs e essa é solução de Δ, em virtude de G ser grupo de simetria de Δ. Assim, $\Delta(j^k(gs)(x)) = 0$ para cada $x \in \mathrm{Dom}(gs)$. Uma vez que

$$0 = \Delta(j^k(gs)(\overline{x_0})) = \Delta(g \cdot u_0^{(k)})$$

e $u_0^{(k)}$ é arbitrário concluímos que $\Delta^{-1}(0)$ é invariante por G e o resultado segue. □

Agora precisamos determinar quais são o geradores infinitesimais da ação Ψ_k de G em J^kE para poder aplicar o critério de invariância e determinar quando uma equação é invariante pela ação estendida de G (adiantamos que não sairemos com uma ação fixada e depois procuraremos equações que são invariantes, mas sim, a partir de uma equação e a aplicação de critérios infinitesimais sobre a mesma, obter um grupo que será grupo de simetria da equação diferencial em questão e, talvez, conseguir soluções da mesma). Segundo nossa definição, os geradores infinitesimais da ação de G em $J^k(E)$, que denotaremos por $X^{(k)}$, são dados por

$$X^{(k)}(u^{(k)}) = \partial_t|_0 \exp(tX) \cdot u^{(k)}$$

onde $u^{(k)} \in J^k(E)$, $X \in \mathfrak{g}$. Suponha que esses campos estendidos possam ser obtidos em função dos coeficientes ζ^i, ϕ_α do gerador infinitesimal da ação de G em E,

$$\theta X = \sum_{i=}^{m} \zeta^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{n} \phi_\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha};$$

(passaremos a escrever apenas X ao invés de $\theta(X)$). Então poderemos aplicar um campo genérico $X^{(k)}$ definido em J^kE a uma equação diferencial Δ e questionar quais as condições sobre os coeficientes de $X^{(k)}$ para termos $X^{(k)}(\Delta) = 0$ quando $\Delta = 0$. Isso permitirá que consiga descobrir quem são as funções ζ^i, ϕ_α e assim obter uma álgebra de Lie gerada por esses campos. Integrando obtemos um grupo G junto com sua ação Ψ em E, e esse grupo deverá ser grupo de simetria da equação Δ. É certo que devemos estar sujeitos as restrições que os teoremas que usamos exigem, como por exemplo que a função Δ deve ter posto máximo nos pontos tais que $\Delta = 0$.

Observação 2.6.6. *Podemos definir uma equação diferencial em E como sendo um conjunto fechado contido em $J^k(E)$. Nessas condições existe função suave*

$$\Delta : J^k(E) \to \mathbb{R}^l$$

tal que esse fechado é dado por $\Delta^{-1}(0)$, veja a caracterização de fechados dada em 2.3.2. Porém, para aplicar os critérios infinitesimais, necessitamos que 0 seja um valor regular e isso nos direciona a considerar uma equação diferencial como sendo uma subvariedade mergulhada de $J^k(E)$ pois, sendo assim, para cada ponto em Δ, existe aberto $U \subset J^k(E)$ tal que

$$\Delta \cap U = \widetilde{\Delta}^{-1}(0)$$

e 0 é valor regular de $\widetilde{\Delta}$. Se s é solução de $\widetilde{\Delta}$ então será solução de Δ, pois quando $\widetilde{\Delta}(j^k(s)(x)) = 0$ é o mesmo que dizer que $j^k s(x) \in \Delta \equiv \Delta(j^k s(x)) = 0$; mais que isso, podemos dizer que os sistemas Δ e $\widetilde{\Delta}$ são equivalentes em $\Delta \cap U$. Aqui estamos usando também o símbolo Δ para representar a variedade dada por $\Delta^{-1}(0)$.

Definição 2.6.7. *Seja $E = M \times N$ aberto de $\mathbb{R}^{m+n}$. Um equação diferencial definida em E é uma subvariedade mergulhada Δ de $J^k E$. Uma solução de Δ é uma seção local s que satisfaz Im $(j^k s) \subset \Delta$.*

Caminharemos no sentido de descobrir como são os geradores infinitesimais da ação de G em $J^k(E)$. Examinemos um caso particular:

Exemplo 2.6.8. Suponha que a ação de G é dada por $g(x,u) = (x, \Omega_g(x,u))$. Nessas condições um gerador infinitesimal genérico assume a forma

$$X = \sum_{\alpha=1}^{n} \phi_\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}.$$

Escrevendo $\exp tX(x,u) = (x, \Omega_t^\alpha(x,u))$ (aqui $\Omega_t^\alpha = \Omega_{\exp tX}^\alpha$), tem-se que

$$\partial_t|_0 \Omega_t^\alpha = \phi_\alpha.$$

Uma seção $s = 1_M \times f$ transformada pelo fluxo de X é dada por

$$(ts)(x) = (x, \Omega_t \circ s(x)),$$

de modo que, diferenciando as n últimas coordenadas da função ts e avaliando em $\overline{x} = x$, obteremos a ação prolongada

$$u_j^\alpha = \frac{\partial (ts)^\alpha}{\partial x^j}(x) = \frac{\partial}{\partial x^j}|_x[(\Omega_t \circ s)^\alpha] = \frac{\partial}{\partial x^j}|_x(\Omega_t^\alpha \circ s) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \Omega_t^\alpha}{\partial x^i}(s(x)) + \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial \Omega_t^\alpha}{\partial u^\beta}(s(x)) \frac{\partial s^\beta}{\partial x^j}(x).$$

Dessa forma a ação em J^1E dada pelo fluxo de X é dada por $(\exp tX)u^{(1)} = \overline{u^{(1)}}$, onde

$$\overline{u_j^\alpha} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \Omega_t^\alpha}{\partial x^i}(x,u) + \sum_{\beta=1}^n u_j \frac{\partial \Omega_t^\alpha}{\partial u^\beta}(x,u).$$

O gerador infinitesimal assume a forma

$$X^{(1)} = X + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{j=1}^m \phi_j^\alpha(u^{(1)}) \frac{\partial}{\partial u_j^\alpha}$$

e é obtido diferenciando em $t = 0$ a expressão obtida para $\overline{u_j^\alpha}$ acima, ou seja, temos

$$\phi_j^\alpha(u^{(1)}) = \partial_t|_0 \overline{u_j^\alpha} = \sum_{i=1}^m \partial_t|_0 \frac{\partial \Omega_t^\alpha}{\partial x^i} + \sum_{\beta=1}^n u_j \partial_t|_0 \frac{\partial \Omega_t^\alpha}{\partial u^\beta} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x^i} \partial_t|_0(\Omega_t^\alpha) + \sum_{\beta=1}^n u_j \frac{\partial}{\partial u^\beta} \partial_t|_0(\Omega_t^\alpha) =$$

$$= \sum_{i=1}^m \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x^i} + \sum_{\beta=1}^n u_j \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial u^\beta},$$

onde acima usamos que $\partial_t \frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j} \partial_t$ quando aplicado em funções suaves.

No exemplo anterior, para calcular o valor de ϕ_j^α em $u^{(1)}$, tomamos uma seção s que represente esse ponto e diferenciamos a função $\phi_\alpha \circ s(x)$ com respeito a x^j, ou seja,

$$\phi_j^\alpha(u^{(1)}) = \frac{\partial}{\partial x^j}[\phi_\alpha \circ s](x).$$

Sem ficarmos apegados a seção que representa, podemos entender esse processo como diferenciar $\phi_\alpha(x,u)$ com respeito a x^j e tratar u como uma função de x (lembre que u representa as coordenadas e a princípio não tem sentido dizer que u é uma função de x). O resultado dessa operação será denominado derivada total de $\phi_\alpha(x,u)$ com respeito a x^j e será denotado por

$$D_j \phi_\alpha(x,u) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x^i} + \sum_{\beta=1}^n u_j \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial u^\beta}.$$

Observe que se $\phi : E \to \mathbb{R}$ é suave e s uma seção em E então a derivada total satisfaz

$$(D_j \phi)(j^1 s) = \frac{\partial}{\partial x^j}(\phi \circ s).$$

A seguinte definição é sugerida pelas ideias acima

Definição 2.6.9. *Seja $P : J^kE \to \mathbb{R}$ suave. A derivada total de P com respeito a x^j é a única função suave $D_jP : J^{k+1}E \to \mathbb{R}$ tal que para qualquer seção suave s deve valer a propriedade*

$$(D_jP) \circ j^{k+1}s = \frac{\partial}{\partial x^j}(P \circ j^k s).$$

A proposição abaixo mostra a forma geral assumida pelas derivadas totais.

Proposição 2.6.10. *Dado $P : J^kE \to \mathbb{R}$ suave então D_iP assume a forma geral*

$$D_iP = \frac{\partial P}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{J} u^\alpha_{J,i} \frac{\partial P}{\partial u^\alpha_J},$$

onde , para $J = (j_1, ..., j_l)$,

$$u^\alpha_{J,i} = \frac{\partial^{k+1} u^\alpha}{\partial x^i \partial x^{j_1} ... \partial x^{j_l}}$$

e a soma varia sobre todos os $J's$ com $0 \leq \#J \leq k$.

Demonstração. Seja s seção suave arbitrária. Usando a regra da cadeia temos que

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(P \circ j^k s) = \sum_{l=1}^{m+m^{(k)}} \frac{\partial P}{\partial y^l}(j^k s(x)) \cdot \frac{\partial (j^k s)^l}{\partial x^i}(x);$$

lembrando que $j^k s(x) = (x, s^\alpha(x), \dfrac{\partial^J s^\alpha}{\partial x^J})$, (onde aqui J assume todos os valores possíveis tais que $0 \leq \#J \leq k$) das m primeiras coordenadas da soma acima ficamos apenas com

$$\frac{\partial P}{\partial x^i}(j^k s(x)),$$

uma vez que para $1 \leq l \leq m$ temos

$$\frac{\partial (j^k s)^l}{\partial x^i} = \delta^i_l.$$

Para $l \geq m$, digamos $l = (J, \alpha)$ (e isso significa que estamos considerando a entrada em J^kE que é dada pelo simbolo algébrico u^α_J e logo $y^l = u^\alpha_J$) temos que

$$\frac{\partial (j^k s)^l}{\partial x^i}(x) = \frac{\partial}{\partial x^i} u^\alpha_J = u^\alpha_{J,i},$$

ficando com

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(P \circ j^k s) = \frac{\partial P}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{J} u^\alpha_{J,i} \frac{\partial P}{\partial u^\alpha_J}(j^k s(x)),$$

obtendo o resultado. Observe que em particular vale

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{J} u^\alpha_{J,i} \frac{\partial}{\partial u^\alpha_J}$$

□

Exemplo 2.6.11. Se $E = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ temos

$$D_xP = D_1P = \frac{\partial P}{\partial x} + u_x \frac{\partial P}{\partial u} + u_{xx} \frac{\partial P}{\partial u_x} + u_{xy} \frac{\partial P}{\partial u_y} + u_{xxx} \frac{\partial P}{\partial u_{xx}} + u_{xxy} \frac{\partial P}{\partial u_{xy}} + ...$$

e

$$D_yP = D_1P = \frac{\partial P}{\partial y} + u_y \frac{\partial P}{\partial u} + u_{xy} \frac{\partial P}{\partial u_x} + u_{yy} \frac{\partial P}{\partial u_y} + u_{xxy} \frac{\partial P}{\partial u_{xx}} + u_{xyy} \frac{\partial P}{\partial u_{yy}} + ...$$

A derivada total de ordem superior para $J = (j_1, ..., j_l)$ é definida recursivamente por

$$D_J = D_{j_1} D_{j_2} ... D_{j_l}.$$

Com isso em mãos, podemos enunciar o resultado que nos diz como calcular os geradores infinitesimais de uma ação a $1-$parâmetro de $\mathbb{R}$ em E, que é o que necessitamos para descobrir e geradores infinitesimais da ação de um grupo G em E.

Teorema 2.6.12. *Seja*

$$X = \sum_{i=1}^{m} \zeta^i(x,u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{n} \phi_\alpha(x,u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

um campo de vetores definido em $E = M \times N$ aberto de $\mathbb{R}^{m+n}$. Suponha que esse campo seja completa de modo que seu fluxo defina uma ação de $\mathbb{R}$ em E. Então o gerador infinitesimal de ação de $\mathbb{R}$ em $J^k(E)$ é dado por

$$X^{(k)} = X + \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{J} \phi_\alpha^J \frac{\partial}{\partial u_\alpha^J},$$

onde os coeficientes $\phi_\alpha^J(u^{(k)})$ são dados por

$$\phi_\alpha^J = D_J(\phi_\alpha - \sum_{i=1}^{m} \zeta^i u_i^\alpha) + \sum_{i=1}^{m} \zeta^i u_{J,i}^\alpha;$$

$u_{J,i}^\alpha$ foi definido acima e $u_i^\alpha = \dfrac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}$ (ou seja, u_i^α representa a coordenada em $J^k(E)$ obtida por calcular a derivada da $\alpha-$ésima coordenada de uma seção s com respeito a x^i).

Este Teorema é demonstrado por indução sobre k na referência [24] página 110. Em [23], a partir da página 117, encontra-se uma prova. O próximo resultado nos diz que dado uma equação diferencial Δ definida em $J^k(E)$ o conjunto dos campos X em E tais que,

$$X^{(k)}\Delta = 0$$

quando $\Delta = 0$, formam uma álgebra de Lie, subálgebra da álgebra de Lie dos campos de vetores de M.

Teorema 2.6.13. *Sejam X, Y campos definidos em E. Então vale*

(a) $(aX + bY)^{(k)} = aX^{(k)} + bY^{(k)}$, $a, b \in \mathbb{R}$;

(b) $[X, Y]^{(k)} = [X^{(k)}, Y^{(k)}]$

Demonstração. A linearidade é uma simples aplicação do último teorema. Para ver, escreva

$$X = \sum_{i=1}^{m} \zeta^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{n} \phi_\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

e

$$Y = \sum_{i=1}^{m} \chi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{n} \xi_\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}.$$

O coeficiente $\phi^J_{(aX+bY)\alpha}$ de $(aX+bY)^{(k)}$, de acordo com o último teorema, é dado por

$$D_J[(a\phi_\alpha + b\xi_\alpha) - (\sum_{i=1}^{m} a\zeta^i + b\chi^i)u^\alpha_i] + \sum_{i=1}^{m}(\zeta^i + \chi^i)u^\alpha_{J,i} =$$

$$= a[D_J(\phi_\alpha - \sum_{i=1}^{m}\zeta^i) + \sum_{i=1}^{m}\zeta^i u^\alpha_{J,i}] + b[D_J(\xi_\alpha - \sum_{i=1}^{m}\chi^i) + \sum_{i=1}^{m}\chi^i u^\alpha_{J,i}] = a\phi^J_{(X)\alpha} + b\phi^J_{(Y)\alpha},$$

onde usamos o fato de que D_J ser linear (direto da definição de D_J); por comparação de coeficientes, concluímos o item (a). Para provar o item (b) assumiremos que X, Y são completos e geram uma álgebra de dimensão finita (no caso geral pode-se proceder usando a fórmula para computar o prolongamento de campos dada acima, mas é um pouco complicado trabalhar com tantos índices). Usaremos também a seguinte caracterização do colchete de Lie:

$$[X,Y](p) = \partial t|_{t=0^+}\psi(t,p)$$

onde $\psi(t,p) = \exp(-\sqrt{\epsilon}X)\exp(-\sqrt{\epsilon}Y)\exp(-\sqrt{\epsilon}X)\exp(\sqrt{\epsilon}X)\exp(\sqrt{\epsilon}Y)p$ e o símbolo $(\exp tX)p$ representa o fluxo de um campo X (veja [24] Teorema 1.33). Essa curva pode ser estendida suavemente para um aberto de $\mathbb{R}$ contendo $[0,\infty)$ e denotaremos sua extensão pelo mesmo símbolo $\psi(t,p)$. O fato de X, Y gerarem uma álgebra de dimensão finita $\mathfrak{g}$, permite obter um grupo G que age suavemente em E tal que $\mathfrak{g}$ seja o conjunto de geradores infinitesimais da ação de G em E.

$$[X,Y]^{(k)}(u^{(k)}) = \partial_t|_0(\exp t[X,Y]\cdot u^{(k)}) = (\Psi_{u^{(k)}})_*([X,Y]) = \partial_t|_0[\Psi_{u^{(k)}} \circ \psi(t)] =$$

$$= \partial_t|_0\psi(t)\cdot u^{(k)} = \partial_t|_{0^+}\psi(t,u^{(k)}) = [X^{(k)}, Y^{(k)}](u^{(k)})$$

onde $\psi(t) = \exp(-\sqrt{\epsilon}X)\exp(-\sqrt{\epsilon}Y)\exp(-\sqrt{\epsilon}X)\exp(\sqrt{\epsilon}X)\exp(\sqrt{\epsilon}Y)$, usando o fato de que a diferencial é independente da curva em questão e $\Psi_{u^{(k)}}(g) = gu^{(k)}$ como usual, onde Ψ denota a ação de G em J^kE. □

Uma prova simples dessa proposição pode ser encontrada em [24] Teorema 2.39.

Corolário 2.6.14. *Seja Δ uma equação diferencial definida em J^kE. O conjunto de todos os campos X em E tais que $X^{(k)}\Delta = 0$ quando $\Delta = 0$ forma uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ em M. Mais ainda, se essa álgebra é de dimensão finita e todos os campos são completos, existe um grupo de Lie G agindo suavemente em E cujo o conjunto dos geradores infinitesimais da ação é $\mathfrak{g}$ e, consequentemente, G é grupo de simetria da equação Δ.*

Exemplo 2.6.15. Considere a equação não linear da onda dada por

$$\Delta : u_{tt} = c^2(u)u_{xx},$$

com $E = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. A equação Δ pode ser reescrita como

$$\Delta : J^2E \to \mathbb{R}$$

$$\Delta(t,x,u,u_t,u_x,u_{tt},u_{tx},u_{xx}) = u_{tt} - c^2(u)u_{xx}.$$

Observe que

$$\Delta_* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -u_{xx}2cc_u & 0 & 1 & 0 & -c^2(u) \end{pmatrix}$$

e logo tem posto máximo. Seja

$$X = \tau(t,x,u)\frac{\partial}{\partial t} + \zeta(x,t,u)\frac{\partial}{\partial_x} + \phi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u}$$

campo em E. Temos que os campos estendidos assumem a forma

$$X^{(1)} = X + \phi^t\frac{\partial}{\partial u_t} + \phi^x\frac{\partial}{\partial u_x}$$

e

$$X^{(2)} = X^{(1)} + \phi^{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \phi^{xt}\frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \phi^{tt}\frac{\partial}{\partial u_{tt}}.$$

Quando aplicamos $X^{(2)}$ em Δ ficamos com

$$X^{(2)}\Delta = \phi\frac{\partial}{\partial u}(-c^2(u)u_{xx}) - c^2(u)\phi^{xx} + \phi^{tt}.$$

Deste modo, precisamos apenas dos coeficientes ϕ^{xx} e ϕ^{tt}. De acordo com a fórmula de prolongamento

$$\phi^{xx} = D_x^2(\phi - \zeta u_x - \tau u_t) + \zeta u_{xxx} + \tau u_{xxt},$$

calculando separadamente obtemos

(a)
$$D_x^2\phi = D_x(\phi_x + \phi_u u_x) = \phi_{xx} + 2\phi_{xu}u_x + \phi_u u_{xx} + \phi_{uu}u_x^2$$

(b)
$$D_x^2(\zeta u_x) = D_x[\zeta u_{xx} + (\zeta_x + \zeta_u u_x)u_x] =$$
$$\zeta u_{xxx} + (\zeta_x + \zeta_u u_x)u_{xx} + (\zeta_x + \zeta_u u_x)u_{xx} + [\zeta_{xx} + \zeta_{xu}u_x + \zeta_u u_{xx} + (\zeta_{xu} + \zeta_{uu}u_x)u_x]u_x$$

(c)
$$D_x^2(\tau u_t) = D_x[\tau u_{xt} + (\tau_x + \tau_u u_x)u_t] =$$
$$\tau u_{xxt} + (\tau_x + \tau_u u_x)u_{xt} + (\tau_x + \tau_u u_x)u_{xt} + [\tau_{xx} + \tau_{xu}u_x + \tau_u u_{xx} + (\tau_{xu} + \tau_{uu}u_x)u_x]u_t.$$

Juntando os termos e evidenciando os monômios u_x, u_t, u_x^2, u_{xx}, etc, obtemos

$$\phi^{xx} = \phi_{xx} + (2\phi_{xu} - \zeta_{xx})u_x - \tau_{xx}u_t + (\phi_{uu} - 2\zeta_{xu})u_x^2 - 2\tau_{xu}u_x u_t$$
$$-\zeta_{uu}u_x^3 - \tau_{uu}u_x^2 u_t + (\phi_u - 2\zeta_x)u_{xx} - 2\tau_x u_{xt} - 3\zeta_u u_x u_{xx} - \tau_u u_t u_{xx} - 2\tau_u u_x u_{xt}.$$

Em virtude da simetria entre x e t obtemos ϕ^{tt} apenas trocando x por t e ζ por τ. Mas façamos a conta para conferir.

$$\phi^{tt} = D_t^2(\phi - \zeta u_x - \tau u_t) + \zeta u_{ttx} + \tau u_{ttt}$$

(a)

$$D_t^2(\phi) = D_t(\phi_t + \phi_u u_t) = \phi_{tt} + \phi_{ut}u_t + (\phi_{ut} + \phi_{uu}u_t)u_t + \phi_u u_{tt}$$

(b)

$$D_t^2(\zeta u_x) = D_t[(\zeta_t + \zeta_u u_t)u_x + \zeta u_{xt}] =$$

$$(\zeta_t + \zeta_u u_t)u_{xt} + [\zeta_{tt} + \zeta_{tu}u_t + \zeta_u u_{tt} + (\zeta_{tu} + \zeta_{uu}u_t)u_t]u_x + \zeta u_{xtt} + (\zeta_t + \zeta_u u_t)u_{xt}$$

(c)

$$D_t^2(\tau u_t) = D_t[(\tau_t + \tau_u u_t)u_t + \tau u_{tt}] =$$

$$= (\tau_t + \tau_u u_t)u_{tt} + [\tau_{tt} + \tau_{tu}u_t + \tau_u u_{tt} + (\tau_{tu} + \tau_{uu}u_t)u_t]u_t + \tau u_{ttt} + (\tau_t + \tau_u u_t)u_{tt}.$$

Ficamos com

$$\phi^{tt} = \phi_{tt} + (2\phi_{tu} - \tau_{tt})u_t - \zeta_{tt}u_x + (\phi_{uu} - 2\tau_{tu})u_t^2 - 2\zeta_{tu}u_t u_x$$

$$-\tau_{uu}u_t^3 - \zeta_{uu}u_t^2 u_x + (\phi_u - 2\tau_t)u_{tt} - 2\zeta_t u_{xt} - 3\tau_u u_t u_{tt} - \zeta_u u_x u_{tt} - 2\zeta_u u_t u_{xt}.$$

Precisamos, agora, determinar os coeficientes ζ, τ, ϕ supondo que

$$X^{(2)}\Delta = \phi\frac{\partial}{\partial u}(-c^2(u)u_{xx}) - c^2(u)\phi^{xx} + \phi^{tt} = 0$$

quando $\Delta = 0$. Assim, substituindo na equação acima u_{tt} por $c^2(u)u_{xx}$, obtemos

$$X^{(2)}\Delta = -2\phi c \cdot c_u u_{xx} - c^2(u)\{\phi_{xx} + (2\phi_{xu} - \zeta_{xx})u_x - \tau_{xx}u_t + (\phi_{uu} - 2\zeta_{xu})u_x^2 - 2\tau_{xu}u_x u_t$$

$$-\zeta_{uu}u_x^3 - \tau_{uu}u_x^2 u_t + (\phi_u - 2\zeta_x)u_{xx} - 2\tau_x u_{xt} - 3\zeta_u u_x u_{xx} - \tau_u u_t u_{xx} - 2\tau_u u_x u_{xt}\}+$$

$$\phi_{tt} + (2\phi_{tu} - \tau_{tt})u_t - \zeta_{tt}u_x + (\phi_{uu} - 2\tau_{tu})u_t^2 - 2\zeta_{tu}u_t u_x$$

$$-\tau_{uu}u_t^3 - \zeta_{uu}u_t^2 u_x + (\phi_u - 2\tau_t)c^2 u_{xx} - 2\zeta_t u_{xt} - 3\tau_u u_t c^2 u_{xx} - \zeta_u u_x c^2 u_{xx} - 2\zeta_u u_t u_{xt}.$$

Para essa expressão se anular é necessário todos os elementos que acompanham os monômios se anulem. A informação está contida na tabela abaixo.

monômio	coeficiente	itens
1	$-c^2\phi_{xx} + \phi_{tt}$	(a)
u_x	$-c^2(2\phi_{xu} + \zeta_{xx}) - \zeta_{tt}$	(b)
u_x^2	$-c^2(\phi_{uu} - 2\zeta_{xu})$	(c)
u_t	$c^2\tau_{xx} + 2\phi_{tu} - \tau_{tt}$	(d)
u_t^2	$\phi_{uu} - 2\tau_{tu}$	(e)
u_x^3	$c^2\zeta_{uu}$	(f)
u_t^3	$-\tau_{uu}$	(g)
u_{xx}	$2\phi cc_u - 2c^2(\zeta_x - \tau_t)$	(h)
u_{xt}	$2c^2\tau_x - 2\zeta_t$	(i)
$u_x u_t$	$2c^2\tau_{xu} - 2\zeta_{tu}$	(j)
$u_x u_{xx}$	$2c^2\zeta_u$	(k)
$u_t u_{xx}$	$-2c^2\tau_u$	(l)
$u_x u_{xt}$	$2c^2\tau_u$	(m)
$u_{xt} u_t$	$-2\zeta_u$	(n)
$u_x^2 u_t$	$c^2\tau_{uu}$	(o)
$u_x u_t^2$	$-\zeta_{uu}$	(p)

Iremos analisar as restrições que obtemos acima para descobrir os coeficientes de um gerador infinitesimal arbitrário. A partir de (m) concluímos que

$$\tau = f^1(x,t).$$

Por (k) concluímos que

$$\zeta = f^2(x,t),$$

e de (e)

$$\phi = f^3(x,t) + f^4(x,t)u.$$

Os itens que ainda podem nos informar algo são

(a) $\phi_{tt} = c^2\phi_{xx}$

(b) $-\zeta_{tt} = c^2\zeta_{xx}$

(d) $c^2\tau_{xx} = \tau_{tt}$

(h) $\phi cc_u + c^2(\zeta_x - \tau_t) = 0$

(i) $c^2\tau_x = \zeta_t$.

Sendo $c(u)$ não constante então, como τ, ζ não dependem de u, o item (b) e (d) nos diz que $\tau_{tt} = \zeta_{xx} = \tau_{xx} = \zeta_{tt} = 0$. Juntando essa informação com a dada em (i), $\tau_x = \zeta_t = 0$, ficamos com

$$\zeta = a^1 x + a^2$$

$$\tau = a^3 t + a^4.$$

Usando isso em (h) obtemos que nos abertos onde $c \neq 0$

$$\phi c_u + c(a^1 - a^3) = 0.$$

Para que isso valha independente de c é necessário que $a^1 = a^3$ e $\phi = 0$. Logo os geradores infinitesimais tem a forma

$$X = (ax + b)\partial_x + (at + d)\partial_t,$$

e, portanto, a álgebra de Lie dos invariantes de Δ é gerada por

$$X^1 = \partial_x \quad X^2 = \partial_t \quad X^3 = x\partial_x + t\partial_t,$$

que correspondem aos grupos a $1-$parâmetro

$$G_1 : (x, t, u) \to (x + \epsilon, t, u)$$

$$G_2 : (x, t, u) \to (x, t + \epsilon, u)$$

$$G_3 : (x, t, u) \to (e^{\epsilon}x, e^{\epsilon}t, u).$$

Se f for solução, então também serão as funções transformadas

$$u^1 = f(x - \epsilon, t)$$

$$u^2 = f(x, t - \epsilon)$$

$$u^3 : f(e^{-\epsilon}x, e^{-\epsilon}t).$$

Ainda podemos investigar

$$\int \phi du = -(a^1 - a^3) \int \frac{c}{c_u} du$$

para obter mais simetrias quando particularizamos c. Como exemplo, se $c = A(u + B)^D$, A, B, D contantes com $D > 0$, ficamos com

$$\int \{f^3(x,t) + f^4(x,t)u\} du = (a^1 - a^3) \int \{\frac{1}{D}(u + B)\} du$$

$$f^3(x,t)u + f^4(x,t)\frac{u^2}{2} = -(a^1 - a^3)(\frac{u^2}{2D} + \frac{B}{D}u + E).$$

Derivando com relação a u duas vezes obtemos que $f^4 = -\dfrac{1}{D}(a^1 - a^3)$ e, logo, $f^3 = -(a^1 - a^3)B/D$, o que nos dá mais uma simetria

$$X^4 = Dx\partial_x - (B + u)\partial_u,$$

simetria essa que gera o grupo

$$G_4 : (x, t, u) \to (e^{\epsilon D}x, t, (e^{-\epsilon} - B)u),$$

com correspondente função transformada

$$u^3 : (e^{-\epsilon} - B)f(e^{-\epsilon D}x, t).$$

2.7 Espaço de Jatos, Uma Generalização

Havíamos interpretado uma equação diferencial definida em um espaço euclidiano como uma subvariedade do espaço de jatos deste espaço, e uma solução da equação como uma seção s de modo que o jato desta seção em cada ponto de seu domínio esteja inteiramente contida nesta subvariedade, que, como mencionamos, para aplicar critérios infinitesimais, é interessante que seja uma subvariedade regular. O que trabalhamos para espaços euclidianos permite que possamos definir o que vem a ser uma equação diferencial em uma variedade arbitrária. A generalização que esta seção propõe expor é necessária pois, ao tornarmos rigoroso o método para encontrar soluções invariantes, precisaremos trabalhar em espaços quocientes e, como sabemos, mesmo quando o espaço é euclidiano não temos, necessariamente, uma estrutura simples no espaço quociente.

Nesta seção o símbolo E representará uma variedade suave arbitrária de dimensão $m+n$. Dado $p \in E$ e $m \in \mathbb{N}$ denotemos por $\Gamma_p(m)$ o conjunto formado por todas as subvariedades mergulhadas de E cujo a dimensão é m e que passam por p. Dado $\Gamma \in \Gamma_p(m)$ existe carta $(\phi = (x^1, ..., x^m, u^1, ..., u^n), W)$, $\phi(W) = X \times U$, com $p \in W$, tal que

$$U \cap \Gamma = \phi^{-1}(\text{Im } s),$$

onde $s : X \to X \times U$ é uma seção suave. A grosso modo, é o mesmo que dizer que Γ é localmente gráfico de função (ou imagem de seção); de fato, nesse sentido qualquer subvariedade mergulhada Γ é gráfico de função próximo de qualquer um de seus pontos. Isso ocorre pois para qualquer subvariedade $m-$dimensional Γ contida em $\mathbb{R}^N$ e $p \in \Gamma$ existe uma projeção $\text{pr}_1(x^1, ..., x^N) = (x^{i_1}, ..., x^{i_m})$ tal que $\text{pr}_1|_\Gamma$ é uma carta (veja 1.3.5); assim, se $\phi(x^1, ..., x^N) = (x^{i_1}, ..., x^{i_m}, \text{pr}(x^1, ..., x^N))$, onde pr é a projeção das coordenadas remanescentes, Γ será dada localmente por $\phi^{-1}\{(x, \text{pr} \circ (\text{pr}_1|_\Gamma)^{-1}(x)); \;\; x = (x^1, ..., x^m) \in \mathbb{R}\}$. Definiremos uma relação $\sim_k$ em $\Gamma_p(m)$ decretando que $\Gamma \sim_k \Lambda$ se

$$j^k s_1(\phi(p)) = j^k s_2(\phi(p)),$$

quando Γ e Λ forem imagens s_1 e s_2, respectivamente, no sentido acima, com relação a uma carta previamente fixada ϕ. Quando as variedades Γ e Λ se relacionam segundo a relação definida anteriormente diremos que elas tem **contato de ordem** k em p. Fixado m, definiremos o espaço de jatos de ordem k de E por

$$J^k E = \bigcup_{p \in E} \Gamma_p(m)/\sim_k$$

e denotaremos a classe determinada por $\Gamma \in \Gamma_p(m)$ pelo símbolo $j_p^k \Gamma$.

Exemplo 2.7.1. Duas subvariedades mergulhadas $m-$dimensionais tem contato de ordem 1 em p se, e somente se, seus planos tangentes coincidem em p. Pois se, localmente

$$\Gamma = \phi^{-1}\{(x, f(x)); \;\; x \in X\} \text{ e } \;\; \Lambda = \phi^{-1}\{(x, g(x)); \;\; x \in X\},$$

os seus respectivos planos tangentes em p são dados por $\phi_*^{-1}[T_{\phi(p)}(\text{Graf } f)]$ e $\phi_*^{-1}[T_{\phi(p)}(\text{Graf } g)]$, e como $T_x(\text{Graf } f)$ é gerado pelo conjunto

$$\{(0, ..., 1_i, ..., 0, \frac{\partial f^1}{\partial x^i}(x), ..., \frac{\partial f^n}{\partial x^i}(x)); \;\; i = 1, ..., m\},$$

com 1_i significando que apenas na entrada i temos o valor 1, se $j^1_p\Gamma = j^1_p\Lambda$ então seus planos tangentes coincidem em p. Por outro lado se

$$T_z(\text{Graf } f) = T_z(\text{Graf } g),$$

mostraremos que $j^1_x f = j^1_x g$, concluindo a recíproca. As funções $F(x) = (x, f(x))$ e $G(x) = (x, g(x))$ são parametrizações (inversas de) para $M = \text{Graf } f$ e $N = \text{Graf } g$, respectivamente, e suas inversas são dadas respectivamente por $\zeta = \text{pr}_1|_M$ e $\xi = \text{pr}_1|_N$ (pr_1 e pr_2 são as projeções na primeira e segunda entrada respectivamente). Escrevendo $z = (x, u)$ temos que

$$(\zeta_*)_z = (\text{pr}_{1*})_z|_{T_zM} = (\text{pr}_{1*})_z|_{T_zN} = (\xi_*)_z;$$

com isso, obtemos a igualdade

$$(F_*)_x = [(\zeta_*)_z]^{-1} = [(\xi_*)_z]^{-1} = (G_*)_x$$

concluindo o proposto, a saber, $j^1_x f = j^1_x g$.

Proposição 2.7.2. *A relação $\sim_k$ está bem definida.*

Demonstração. Se próximo de p , Γ for dada localmente por

$$\phi^{-1}\{(x, f(x)),\quad x \in U\} \text{ e } \psi^{-1}\{(y, g(y)),\quad y \in V\},\quad U, V \subset \mathbb{R}^n$$

e Λ localmente por

$$\phi^{-1}\{(x, h(x)),\quad x \in U\} \text{ e } \psi^{-1}\{(y, s(y)),\quad y \in V\},\quad U, V \subset \mathbb{R}^n,$$

também próximo de p, com $j^k f(x_0) = j^k h(x_0)$ (aqui identificamos f com a seção $1 \times f$), onde $\phi^{-1}(x_0, f(x_0)) = p$ (claro que supondo $p \in \Gamma \cap \Lambda$), da igualdade

$$\psi \circ \phi^{-1}(x, f(x)) = (y, g(y)),$$

obtemos

$$y = \text{pr}_y \circ \psi \circ \phi^{-1} \circ (1 \times f)(x) = \delta_f(x) \tag{2.7.1}$$

com $\delta_f : U \to V$ difeomorfismo próximo de p (aqui pr_y representa a projeção na coordenada y). Assim,

$$g(y) = \text{pr}_v \circ \psi \circ \phi^{-1} \circ (1 \times f)(x) = \text{pr}_v \circ \psi \circ \phi^{-1} \circ (1 \times f) \circ \delta_f^{-1}(y) \tag{2.7.2}$$

e, analogamente,

$$s(y) = \text{pr}_v \circ \psi \circ \phi^{-1} \circ (1 \times h) \circ \delta_h^{-1}(y).$$

Como consequência do Lema B.0.15, as derivadas de δ_f^{-1} e δ_h^{-1} são iguais em $y_0 = \delta^{-1}(x_0)$ até ordem k, uma vez que as derivadas de f e h coincidem até essa ordem em x_0. Se $j^k h(x_0) = j^k s(x_0)$ e $j^k f(h(x_0)) = j^k g(h(x_0))$ em x_0, então

$$j^k(f \circ h)(x_0) = j^k(g \circ s)(x_0),$$

novamente em devido a B.0.15, permitindo concluir que $j^k g(y_0) = j^k s(y_0)$, em virtude das fórmulas para g e s dadas acima. □

Dado carta $\phi = (x, u)$ em $p_0 = (x_0, u_0)$ e subvariedade Γ passando por p, se $\phi(\Gamma)$ é transversal ao espaço $U_{p_0} = \{(x_0, u), \quad u \in U\}$, então existe f tal que

$$\Gamma = \phi^{-1}\{(z, f(x)), \quad x \in X\}$$

onde, possivelmente, X precise ser diminuído para que tenhamos $\phi(\Gamma) \cap U_{p_0} = p_0$. Portanto, com relação a carta ϕ, todas as classes da relação $\sim_k$ são completamente determinadas pelas seções locais de $X \times U$. Iremos dar uma estrutura de diferenciabilidade para J^kE. Optamos por uma exposição elementar sobre o fato de J^kE ser uma variedade suave. No artigo *Symmetry Groups and Invariant Solutions of Partial Differential Equations* [25] encontra-se uma exposição deste fato, assim como estudo de soluções invariantes, porém fazendo uso de uma linguagem rebuscada, no que toca a Matemática, de modo que para ser feito sua leitura precisamos de pré-requisitos que o presente trabalho dispensa (veja por exemplo a identificação dada na proposição 3.11 do referido artigo). Talvez assim ficamos com um trabalho mais denso mas quase que auto-contido. Dado $(\phi = (x, u), W)$ carta em E, definiremos uma carta em J^kE,

$$(\phi_k = (x, u, u_J), W_k),$$

onde

$$W_k = \bigcup_{p \in W} \{j_p^k\Gamma; \quad \Gamma \text{ é transversal a } U_p\} \text{ com } \phi_k \text{ dada por } \phi_k(j_p^k\Gamma) = (\phi(p), \partial_J f(\phi(p)))$$

onde J varia todos os índices simétricos com $1 \leq \#J \leq k$ e tal que Γ seja gráfico de f próximo de p. A função ϕ_k está bem definida em virtude da definição de $\sim_k$. A topologia em J^kE, como usual, é dada pela base

$$\beta = \bigcup_{\phi} \{\phi_k^{-1}(U); \quad U \subset \phi_k(W_k) \quad U \text{ aberto } \},$$

onde ϕ percorre o conjunto de cartas de algum atlas suave $\mathcal{A}$ que gere a estrutura de E. Afirmamos que a família

$$\{\phi_k, W_k\}$$

gera um atlas suave para j^kE e, portanto, esse espaço admite uma estrutura suave. A demonstração desse fato seguirá nas próximas linhas.

Proposição 2.7.3. *A funções de transição $\psi_k \circ \phi_k^{-1}$ são suaves.*

Demonstração. Sejam $(\phi = (x, u), W)$ e $(\psi = (y, v), P)$ cartas em E. Sendo $\phi(W) = X \times U$, dado $u^{(k)} = (x, u, u_J) \in W_k$, podemos encontrar um polinômio $P_{u^{(k)}} : X \times U$ tal que seu valor em x seja u e suas derivadas avaliadas em x sejam iguais u_J para cada upla J, de modo que a subvariedade $\Gamma = \phi^{-1}(\text{Graf } (P_{u^{(k)}}))$ satisfaz $\phi_k(j_p^k\Gamma) = (x, u, u_J)$, onde $\phi(p) = (x, u)$. Identificaremos o ponto (x, u, u^J) com $(x, P_{u^{(k)}})$. Temos então

$$\psi_k \circ \phi_k^{-1}(x, P_{u^{(k)}}) = \psi_k \circ \phi_k^{-1}(x, u, u_J) = \psi_k(j_p^k\Gamma) = (\psi(p), \partial_J g(\pi_1 \circ \psi(p))),$$

onde $g = g(y)$ é função que representa a subvariedade Γ nas coordenadas (y, v). Na primeira entrada, temos a associação $u \to \psi \circ \phi^{-1}(x, u)$ que é suave. Na outra entrada, temos a associação

$$(x, P_{u^{(k)}}) \to \partial_J g(y),$$

onde $y = \mathrm{pr}_1 \circ \phi \circ \psi^{-1}(x, u)$. Segundo as fórmulas obtidas na proposição anterior que relacionam $g(y)$ com $f(x)$, especificamente as fórmulas dadas pelas equações 2.7.1 e 2.7.2, onde f é uma função que representa Γ com respeito a carta ϕ, essa associação pode ser reescrita como

$$(x, P_{u^{(k)}}) \to (y, P_{u^{(k)}}) \to \partial_J|_y \{\pi_v \circ \psi \circ \phi^{-1} \circ (1 \times P_{u^{(k)}}) \circ [\pi_y \circ \psi \circ \phi^{-1} \circ (1 \times P_{u^{(k)}})]^{-1}\},$$

que é suave. Para o leitor ficar seguro quanto a última afirmação sugerimos a leitura do Apêndice B. $\square$

O seguinte exemplo será usado para provar a próxima proposição; esta assegura que $J^k E$ é Hausdorff e segundo contável.

Exemplo 2.7.4. Seja $G_m(\mathbb{V})$ a Variedade de Grassmann dada por construir uma estrutura suave no conjunto formado pelos subespaços m-dimensionais do espaço vetorial de dimensão finita $\mathbb{V}$ (veja [17]). Afirmamos que

$$J^1\mathbb{R}^{m+n} \simeq \mathbb{R}^{m+n} \times G_m(\mathbb{R}^{m+n}).$$

Pelo exemplo 2.7.1 sabemos que duas variedades $m-$dimensionas Γ e Λ tem contato de ordem 1 p se, e somente se, seus respectivos planos tangente coincidem em p. Assim, naturalmente temos, sem ambiguidade, a associação bijetiva

$$I : j^1_p\Gamma \to \ (p, T_p\Gamma).$$

Vamos lembrar rapidamente como é dada a estrutura de diferenciabilidade de $G_m(\mathbb{V})$ para mostrarmos que a associação acima é um homeomorfismo; aqui $\dim\mathbb{V} = m + n$. Tome P subespaço $m-$dimensional e Q subespaço tal que

$$\mathbb{V} = P \oplus Q.$$

Seja U_Q o conjunto formado pelos subespaços de dimensão m que interceptam P trivialmente e $L(P, Q)$ o conjunto das transformações lineares de P em Q (que pode ser identificado com $\mathbb{R}^{mn}$). A função

$$\psi : L(P, Q) \to U_Q$$

dada por

$$\psi(A) = \{x + Ax; \ \ x \in P\}$$

é tal que ψ^{-1} é carta. Voltando ao problema, mostraremos que a função I em coordenadas é difeomorfismo. Dado Λ arbitrariamente, tome $(\phi = (y, v), W = \mathbb{R}^{m+n})$ carta tal que Λ é localmente gráfico com relação a ϕ (tome tal carta como sendo uma permutação das coordenadas (x^i), ou seja, $\phi(x^i) = (x^{\sigma(1)}, ..., x^{\sigma(m+n)})$, para alguma permutação σ). O aberto W_1 contém todas as subvariedades que são transversas a $V = \phi^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^n)$, ou seja, tais que seu espaço tangente intersepta trivialmente V; colocando

$$P =< e^{i_1}, ..., e^{i_m} > \text{ e } \quad Q = V,$$

de maneira que valha a decomposição $\mathbb{R}^{m+n} = P \oplus Q$, é simples concluir que $I : W_1 \to W \times U_Q$ é bijeção. Escrevendo convenientemente as coordenadas de $\phi_1(W_1)$ por $(y, v, \dfrac{\partial v^i}{\partial y^j})$, teremos

$$(\phi \times \psi^{-1}) \circ I \circ \phi_1^{-1}(y, v, \frac{\partial f^i}{\partial y^j}) = (\phi \times \psi^{-1}) \circ I(j^1_p \Gamma),$$

para alguma subvariedade Γ que é localmente gráfico de f com respeito a ϕ. O tangente da subvariedade Γ em p é dado por $\phi_*^{-1}[T_y(\text{Graf } f)]$, onde $\phi^{-1}(y, f(y)) = p$ (observe que $\phi_* = \phi$). Não é difícil ver que

$$(\phi \times \psi^{-1}) \circ I(j^1_p \Gamma) = (y, A),$$

com

$$A = (\frac{\partial f^j}{\partial y^i})_{m \times n}.$$

Concluímos a partir da igualdade acima que que $(\phi \times \psi^{-1}) \circ I \circ \psi_k^{-1} = 1$, logo difeomorfismo e, em particular, $I|_{W_1}$ é um homeomorfismo. Um simples argumento baseado no fato de I ser bijeção e homeomorfismo local permite concluir que I é um homeomorfismo. Concluímos que de fato $J^1\mathbb{R}^{m+n}$ é Hausdorff e segundo enumerável; por definição, portando, uma variedade suave. Resumindo, temos a equivalência entre variedades suaves

$$J^1\mathbb{R}^{m+n} \simeq \mathbb{R}^{m+n} \times G_m(\mathbb{R}^{m+n}).$$

Proposição 2.7.5. *A topologia de J^kE é Hausdorff e segundo contável.*

Demonstração. (a) (Segundo enumerável) Tome uma base enumerável $\{W^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de E formada por domínios de cartas ϕ^n. Considerando todas as permutações das coordenadas de $\mathbb{R}^{m+n}$,

$$\phi^\sigma(x^1, ..., x^{m+n}) = (x^{\sigma(1)}, ..., x^{\sigma(m+n)}),$$

o conjunto

$$\{W_k^{n,\sigma}\},$$

tal que $W^{n,\sigma} = \text{Dom }(\phi^\sigma \circ \phi^n)$ é uma base enumerável para a topologia de J^kE.

(b) (Propriedade Hausdorff) Sejam E e S variedades suaves difeomorfos via a função F. Defina $J^kF : J^kE \to J^kS$ pondo $J^kF(j^k_p\Gamma) = j^k_{F(p)}(F(\Gamma))$. Se ϕ é carta para S então $\phi \circ F$ é carta para E e teremos que

$$\phi_k \circ (J^kF) \circ (\phi \circ F)_k^{-1} = 1,$$

já que se Γ for escrita localmente como $(\phi \circ F)^{-1}\{(x, f(x))\}$ então $F(\Gamma)$ pode ser escrita como $\phi^{-1}\{(x, f(x))\}$. Concluímos então que J^kF é um difeomorfismo em coordenadas e, logo, J^kE é um homeomorfismo. Se W for aberto coordenado de E, domínio de uma carta

$\phi = (x^1, ..., x^{m+n})$, então $J^kW \subset J^kE$ é aberto. Com efeito, considere $(\phi^\sigma, W_k^\sigma)$ carta tal que, se $\phi(p) = (x^1, ..., x^{m+n})$, então $\phi^\sigma(p) = (x^{\sigma(1)}, ..., x^{\sigma(m+n)})$, σ permutação de $\{1, ..., m+n\}$; vale a igualdade $J^kW = \bigcup_\sigma W_k^\sigma$, pois claramente $W^\sigma \subset J^kW$ para toda σ e, dado uma subvariedade Γ de W, ela é escrita como gráfico de função com relação a ϕ^σ para alguma permutação σ. Como consequência, se W é qualquer aberto de E teremos que J^kW é aberto de J^kE.

Mostraremos inicialmente que J^1E é Hausdorff. Dado $j_p^1\Gamma, j_q^1\Lambda$ distintos, se $p \neq q$ basta tomar vizinhanças coordenadas W e P de p e q, respectivamente, disjuntas, e teremos W_1 e P_1 são abertos disjuntos contendo, respectivamente, $j_p^1\Gamma$ e $j_p^1\Lambda$ (aqui nada tem de especial com k=1). Se $p = q$, tome W aberto difeomorfo a $\mathbb{R}^{m+n}$ contendo p. Sem perca de generalidade, podemos supor que Γ e Λ são subvariedades de W. De acordo com o exemplo (2.7.4) e o que concluímos no parágrafo anterior temos $j^1W \simeq \mathbb{R}^{m+n} \times G_m(\mathbb{R}^{m+n})$ (homeomorfismo) permitindo concluir que J^1W é Hausdorff; separando $j_p^1\Gamma$ de $j_p^1\Lambda$ em J^1W acarreta em uma separação em J^1E, já que J^1W é aberto no espaço J^1E, portanto J^1E é Hausdorff. Para finalizar, observamos que a aplicação

$$\pi_1^k : J^kE \to J^1E$$

dada por $j_p^k\Gamma \to j_p^1\Gamma$ é contínua, pois em coordenadas é uma projeção. Se Γ e Λ podem ser escritas como gráficos de funções com relação a uma carta (ϕ, W), $p \in W$, então

$$j_p^k\Gamma, j_p^k\Lambda \in W_k$$

e logo podem ser separados por abertos disjuntos (estão no domínio de uma mesma carta). Caso contrário, necessariamente seus planos tangentes em p são distintos, de modo que

$$\pi_1^k(j_p^k\Gamma) = j_p^1\Gamma \neq J_p^1\Lambda = \pi_1^k(j_p^k\Lambda),$$

permitindo, via a continuidade de π_1^k, separar $j_p^k\Gamma$ de $j_p^k\Lambda$ por abertos disjuntos e isso completa a demonstração da proposição.

□

Posto a estrutura de J^kE, destacamos alguns fatos elementares:

(a) As funções

$$\pi_s^k : J^kE \to J^sE$$

dadas por

$$\pi_s^k(j_p^k\Gamma) = j_p^s\Gamma,$$

com $s < k$ (se $s > k$ essa associação dependerá de representante), são submersões, pois fixado uma carta ϕ temos que $\phi_s \circ \pi_s^k \circ \phi_k^{-1}$ é uma projeção.

(b) Dado uma subvariedade mergulhada Γ, a função

$$j^k : \Gamma \to J^kE$$

dada por $j^k(p) = j^k_p\Gamma$ é um mergulho, pois dado carta $\phi = (x, u)$ tal que Γ é localmente gráfico de $u = f(x)$, temos que $\delta = \pi_x \circ \phi|_\Gamma$ é carta e, em coordenadas, j^k é dada por

$$\phi_k \circ j^k \circ \delta^{-1}(x) = (x, f(x), \partial_J f(x))$$

concluindo que j^k é imersão. Por outro lado, os abertos de Γ são dados por $W \cap \Gamma$ com W aberto de E, e é fácil notar que vale a igualdade

$$j^k(W \cap \Gamma) = J^k W \cap j^k(\Gamma),$$

concluindo que j^k é mergulho. Denotaremos essa subvariedade mergulhada por $j^k\Gamma$.

(c) Se $F : E \to P$ é um difeomorfismo, então a função

$$J^k F : J^k E \to J^k P$$

dada por $J^k F(j^k_p\Gamma) = j^k_{F(p)}(F(\Gamma))$ é um difeomorfismo.

Se um grupo de Lie G age suavemente em uma variedade suave E, ele induz uma ação suave

$$\Psi_k : G \times J^k E \to J^k E$$

dada por $\Psi_k(g, j^k_p\Gamma) = J^k g(j^k_p\Gamma)$ (veja (c) acima), que denotaremos simplesmente por $g \cdot j^k_p\Gamma$. Escolhendo um sistema de coordenadas locais $(\phi = (x, u), W)$, de modo que x represente as variáveis independentes e u as dependentes, perceberemos que, essencialmente, essa ação é a mesma que a ação estendida definida anteriormente (veja 2.6.1). De fato, se Γ é localmente gráfico de $u = f(x)$ então localmente

$$g\Gamma = g \circ \phi^{-1}\{(x, f(x))\}.$$

Para escrevermos isso na forma $\phi^{-1}\{(x, h(x))\}$, precisamos que

$$(x, h(x)) = \phi \circ g \circ \phi^{-1}(x, f(x)).$$

Observe que para g suficientemente próximo de 1, a regra

$$g \cdot (x, u) := \phi \circ g \circ \phi^{-1}(x, u) \tag{2.7.3}$$

define uma ação suave local em $\phi(W) = X \times U$. Também próximo de 1,

$$g \cdot (x, f(x)) = (\overline{x}, (gf)(\overline{x})) = (gs)(\overline{x}).$$

Como $g \cdot j^k_{p_0}\Gamma = j^k_{gp_0}(g\Gamma)$ é determinado pelas derivadas até ordem k de gf no ponto $\overline{x_0}$, temos

$$\phi_k(g \cdot j^k_{p_0}\Gamma) = g \cdot j^k s(x_0),$$

onde do lado direito temos a ação estendida definida pela equação 2.6.1.

Para concluir que Ψ_k é suave, basta mostrar que $g \to \Psi_k(g, j^k_p\Gamma)$ é suave uma vez que $j^k_p\Gamma \to \Psi_k(g, j^k_p\Gamma) = J^k g(j^k_p\Gamma)$ é claramente suave. Dado $h \in G$ temos que $h\Gamma$ é gráfico de $u = f(x)$ com relação $\delta = \phi \circ h^{-1}$. Iremos concluir que para g próximo de h tem-se que $g\Gamma$ é gráfico com relação a δ. Observe que localmente

$$\delta(g\Gamma) = \delta \circ gh^{-1} \circ \delta^{-1}\{(x, f(x))\} = gh^{-1}\{(x, f(x))\},$$

onde usamos a notação dada na equação 2.7.3. A questão agora é: quando $gh^{-1}(x, f(x)) = (\overline{x}, \overline{u}(\overline{x}))$? Sabemos que isso ocorre desde que gh^{-1} esteja próximo de 1 ou, equivalentemente, desde que g esteja próximo de h, em virtude da continuidade da associação $g \to g^{-1}$. Posto isso, para g próximo de h, a associação, onde $z_0 = \delta(gp)$ e $s = 1 \times f$,

$$g \to \delta_k \circ \Psi_k(g, j^k_p\Gamma) = \delta_k(j^k_{gp} g\Gamma) = (gh^{-1}) \cdot j^k s(x_0),$$

é suave, pois do lado direito temos a ação estendida (veja Apêndice B) com relação a ação definida acima pela equação 2.7.3. Isso completa o argumento que justifica a suavidade de Ψ_k.

No caso mais geral de espaços de jatos não precisamos nos preocupar quanto ao domínio da ação estendida uma vez que, agora, independente da subvariedade em questão ser transversa ou não com relação a um dado sistema de coordenadas previamente fixado, ela está definida para todo G. Mais sobre a estrutura dos espaços de jatos como apresentado neste trabalho pode ser encontrado em [25]. Para finalizar esta seção, a qual objetivávamos entender o que vem a ser um equação diferencial entre variedades, faremos uma última definição.

Definição 2.7.6. *Seja E uma variedade suave e $m \in \mathbb{N}$. Um sistema de equações diferenciais de ordem k definida em E é uma subvariedade mergulhada fechada Δ de J^kE. Uma solução de Δ é uma subvariedade mergulhada $m-$dimensional $\Gamma \subset E$ tal que $j^k\Gamma$ está contida em Δ.*

Se M e N são variedades suaves, $m-$dimensional e $n-$dimensional, respectivamente, um problema em que pretendamos encontrar funções $f : M \to N$ a partir de informações sobre suas derivadas, pode ser interpretado como o problema de encontrar o gráfico de f, ou seja, uma subvariedade mergulhada de $E = M \times N$. Ao traduzirmos esse problema como "uma subvariedade mergulhada de J^kE", poderemos encontrar soluções (subvariedades) que podem não ser transversas a N em todos seus pontos, e deste modo não poderão ser ser escritas como gráfico de função $f : M \to N$. Assim, algumas soluções poderão apenas ser interpretadas como regras multivalentes $f : M \to N$. Uma solução Γ que corresponda a uma função f, ou seja, Graf $f = \Gamma$ é entendida como uma solução clássica, de outro modo será dita solução não-clássica. Veremos no próximo capítulo, uma consequência de 3.1.8, que uma solução não-clássica é limite de soluções clássicas.

Capítulo 3

Fibrados, Ações Projetivas e Operadores diferenciais Entre Fibrados

3.1 Fibrados

Muitos problemas em Matemática e Física podem ser descritos por considerar funções suaves entre variedades. A uma função suave $f : M \to N$, temos associado uma nova função suave $s = 1 \times f : M \to M \times N$ cujo a imagem é o gráfico de f com a propriedade $\mathrm{pr}_1 \circ s = I_M$ e, reciprocamente, se $s : M \to M \times N$ é tal que $\pi_1 \circ s = I_M$, temos bem definida uma única função $f : M \to N$ dada por $f = \mathrm{pr}_2 \circ s$; o espaço M é denominado espaço base e $M \times N$ espaço total. Uma das vantagens de olhar sob esse ponto de vista é que permite uma generalização da noção de cartesiano de variedades e também de funções entre variedades. Como exemplo, quando $\pi : E \to M$ é uma submersão então, localmente, em virtude do Teorema do Posto, podemos olhar E como produto cartesiano com M funcionando como "espaço base" e E "espaço total", mas não necessariamente E é um cartesiano trivial; nesse caso uma seção $s : M \to E$, ou seja, tal que $\pi \circ s = I_M$, nos dá uma generalização da noção de função entre variedades com a imagem de s funcionando, de certa forma, como o gráfico de uma função suave (isso ocorre de fato em coordenadas). O conceito de fibrado nos permite essa generalização e é mais rico que uma simples tripla (E, π, M), onde $\pi : E \to M$ é submersão (tal tripla é denominada variedade de fibras), em virtude de exigir trivializações locais em sua definição. Grande parte do trabalho poderíamos trabalhar apenas com uma tripla que é apenas uma variedade de fibras mas, ao estudarmos equações diferenciais entre variedades naturalmente surge uma relação com o que iremos definir como fibrado vetorial. Assumiremos de agora em diante que todas as variedades são conexas.

Definição 3.1.1. Uma variedade de fibras é uma tripla (E, π, M) tal que $\pi : E \to M$ é uma submersão. A variedade M é denominado espaço base e E espaço total. O conjunto $\pi^{-1}(x) := E_x$ é denominado fibra sobre x.

Exemplo 3.1.2. A função $\pi : E = \mathbb{R}^3 - 0 \to M = \mathbb{S}^2$ dada por $\pi(x) = \dfrac{x}{|x|}$ define a uma estrutura de variedade de fibras na tripla (E, π, M). Observe que E_x é $r - 0$, onde r é a reta passando por x e 0. Em particular todas as fibras são difeomorfas. No caso da submersão $\pi : TM \to M$ onde

$\pi(X_x) = x$ temos que cada fibra, além de serem difeomorfas entre si, admitem naturalmente uma estrutura de espaço vetorial, $TM_x = T_xM$. Se considerarmos $E = \pi_1 : \mathbb{R}^2 - 0 \to \mathbb{R}$ teremos que nem todas as fibras são difeomorfas entre si, pois $E_0 = \{(0, y); \quad y \neq 0\}$ é desconexo; se considerarmos $F : \mathbb{R} \to E$ uma seção que associa a cada ponto x um vetor força $F(x)$ necessariamente qualquer partícula lançada de um certo ponto x_0 não poderia passar pelo ponto $(0, 0)$, isso parece irreal já que nesse caso estamos tratando de um problema físico e não há impossibilidade imediata de um movimento aleatório ter tal restrição.

A definição de fibrado dá um característica comum as fibras, a saber, que todas são difeomorfas mas é mais forte que isso.

Definição 3.1.3. Uma tripla (E, π, M) é dita fibrado (ou feixe de fibras) se para cada $x \in M$ exite uma tripla (W_x, F_x, δ_x), denominada trivialização ao redor de x, onde W_x é vizinhança de x e

$$\delta_x : \pi^{-1}(W_x) \to W_x \times F_x$$

é um difeomorfismo satisfazendo

$$\pi|_{\pi^{-1}(W_x)} = \mathrm{pr}_1 \circ \delta_x$$

Observe que por essa definição π é automaticamente uma submersão e, não é difícil mostrar, dada duas trivializações (W_x, F_x, δ_x) e (W_y, F_y, δ_y) as variedades F_x e F_y são difeomorfas; denominamos $F = F_x$ como fibra típica. Caso as fibras tenham uma estrutura adicional e as funções trivializantes preservem essa estrutura, dizemos que o fibrado em questão é de tal estrutura. O fibrado tangente TM de uma variedade suave M é um fibrado vetorial, veja definição abaixo:

Definição 3.1.4. Um fibrado vetorial é um fibrado $\pi : E \to M$ tal que cada fibra $E_x = \{p \in E; \quad \pi(p) = x\}$ é um espaço vetorial e, para cada $x \in M$, existe trivialização ao redor de x, $\delta : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$, tal que a restrição

$$\mathrm{pr}_2 \circ \delta : E_x \to \mathbb{R}^n$$

é isomorfismo de espaços vetoriais para cada $x \in U$.

Cada fibrado vetorial admite uma seção especial, a seção nula, que associa cada $x \in M$ ao elemento nulo de E_x, ou seja,

$$\zeta(x) = 0.$$

Se $\psi(p) = (\pi, \phi(p))$ é carta trivialização para o fibrado π, com ϕ isomorfismo nas fibras, temos a seguinte representação para a seção nula

$$\psi(\zeta(p)) = (\pi(p), 0),$$

e reciprocamente.

O seguinte exemplo de construção de fibrados a partir de outros fibrados será usado adiante.

Exemplo 3.1.5. Seja $\pi : E \to M$ um fibrado e $\rho : H \to M$ uma função suave. O fibrado *pullback* de π por ρ é a tripla $(\rho^*E, \rho^*\pi, H)$ onde

$$\rho^*E = \{(h,p) \in H \times E; \quad \rho(h) = \pi(p)\}$$

e $\rho^*\pi$ é definida por

$$\rho^*\pi(h,p) = h.$$

Isso é de fato um fibrado com mesma fibra de π. Inicialmente observe $\rho^*E = (\rho\times\pi)^{-1}(\Delta_M)$, onde $\Delta_M = \{(x,x); \;\; x \in M\}$. Além disso, a subvariedade mergulhada Δ_M é transversal a $\rho\times\pi$, uma vez que dado $(X,Y) \in T_xM \times T_xM$, $x = \rho(h) = \pi(p)$, vale a igualdade $(X,Y) = (0, Y-X) + (X,X) \in (\rho\times\pi)_*(Z) + T_{(x,x)}\Delta_M$; de fato existe Z tal que $(0, Y-X) = (\rho_*(0), (\pi_*)_p(Z))$, pois π é submersão, lembrando que $(\pi \times \rho)_* = \pi_* \times \rho_* : T_pE \times T_qH$ com as devidas identificações. Logo temos que ρ^*E é uma subvariedade mergulhada do cartesiano $H \times E$. Sejam $h \in H$, $\rho(h) = x$, e trivialização local

$$\delta_x : \pi^{-1}(W_x) \to W_x \times F$$

para π. A função $\lambda_h(k,p) = (k, \mathrm{pr}_2 \circ \delta_x(p))$ é uma trivialização local para ρ^*E ao redor de h,

$$\lambda_q : (\rho^*\pi)^{-1}(\rho^{-1}(W_x)) \to \rho^{-1}(W_x) \times F.$$

As funções λ_h são claramente suaves e é simples concluir que são bijetivas. Como

$$(\lambda_h)_* = (\mathrm{pr}_2 \circ \delta_x)_* \times 1$$

concluímos que $(\lambda_h)_*$ é sobrejetiva e consequentemente será isomorfismo. Portanto as funções λ_h são difeomorfismos, concluindo que $(\rho^*E, \rho^*\pi, H)$ é um fibrado com fibra igual a de π.

Definição 3.1.6. Um subfibrado de um fibrado (E, π, M) é determinado por uma subvariedade $E^{'}$ de E tal que a tripla $(E^{'}, \pi|_{E^{'}}, \pi(E^{'}))$ venha a ser um fibrado. Denominaremos $\pi|_{E^{'}}$ subfibrado de π.

Uma carta $\phi = (x^i, u^\alpha)$ é um sistema adaptado para o fibrado $\pi : E \to M$ se (x^i) é um sistema de coordenadas para M e vale $x^i(p) = x^i \circ \pi(p)$. Todo fibrado (inclusive variedade de fibras) admite uma sistema adaptado de cartas ao redor de cada ponto, pois se (x^i) é um sistema de coordenadas ao redor de x, em virtude das funções $(x^i) \circ \pi := (x^i)$ serem independentes, podem ser completadas a um sistema sistema de coordenadas (x^i, u^α) em E. Uma seção $s : M \to E$ é uma função suave que satisfaz $\pi \circ s = 1_M$. A seguinte proposição dá as condições para que uma subvariedade $m-$dimensional seja imagem de uma seção local.

Proposição 3.1.7. *Seja $\pi : E \to M$ uma submersão. Dado uma subvariedade mergulhada Γ de E, $m-$dimensional, temos que Γ corresponde a imagem de uma seção suave s (possivelmente local) se, e somente se, são satisfeitas:*

(a) $\Gamma \cap E_p$ *tem no máximo um ponto.*

(b) *Dado $X_p \in T_p\Gamma$, se $\pi_*(X_p) = 0$ então $X = 0$.*

Demonstração. Denotaremos Ker $\pi_* = \mathrm{Vert}_p(\pi)$, conjunto dos $X_p \in T_pE$ tais que $\pi_*(X_p) = 0$. Se é válido os itens acima a função a restrição $\pi|_\Gamma : \Gamma \to \pi(\Gamma)$ é difeomorfismo pois, pela propriedade (a) é injetiva e se $(\pi|_\Gamma)_*(X_p) = \pi_*(X_p) = 0$, $X_p \in T_p\Gamma$ então $X_p = 0$ de acordo com (b). Logo, por argumento de dimensão, concluímos que $(\pi|_\Gamma)_*$ isomorfismo sempre. A função $\pi|_\Gamma^{-1}$ é a requerida seção. Reciprocamente, se $\Gamma = \mathrm{Im}\ s$, $s : U \subset M \to E$ seção suave, então $\pi|_\Gamma \circ s = 1_U$ e os itens acima seguem dessa igualdade. □

Com relação ao fibrado trivial $E = M \times N$ temos claro a noção de variáveis independentes e variáveis dependentes, a saber, as coordenadas de M fazem o papel das variáveis independentes. Generalizando em um fibrado $\pi : E \to M$, o espaço base será interpretado como o espaço das variáveis independentes. Observe que se $\phi = (x^i, u^\alpha)$ é um sistema adaptado de coordenadas em p e s uma seção local então

$$\mathrm{pr}_1 \circ \phi \circ s \circ \phi^{-1}(x^i) = \phi \circ \pi \circ s \circ \phi^{-1}(x^i) = (x^i);$$

segue que, em coordenadas, s é da forma

$$s(x^i) = (x^i, f(x^i)), \tag{3.1.1}$$

onde $f(x^i) = \mathrm{pr}_2 \circ \phi \circ s \circ \phi^{-1}(x^i)$, e isso deixa claro o que significa M servir como espaço das variáveis independentes. Denotaremos $s^\alpha = u^\alpha \circ s$.

Uma vez que temos coordenadas independentes bem definidas em um fibrado $\pi : E \to M$, é possível definir uma noção de espaço de jatos que assemelha-se a que definimos na seção 2.5. Considerando $\Gamma_x(\pi)$ o conjunto das seções locais com relação a π, definidas numa vizinhança de x, já temos bem definida uma relação $\sim_k$ nesse conjunto, pois identificando uma seção local com uma subvariedade regular $m-$dimensional temos a continência

$$\Gamma_x(\pi) \subset \Gamma_{s(x)}(m) \tag{3.1.2}$$

onde o conjunto da direita é formado pelas subvariedades mergulhadas m-dimensionais que passam por $s(x)$ (veja seção 2.7). Dado $s, r \in \Gamma_{s(x)}(\pi)$, definimos a relação $s \sim_k r$, se $s(x) = r(x)$ e

$$\frac{\partial^{|J|}(u^\alpha \circ s \circ (x^i)^{-1})}{\partial x^{i_1}...\partial x^{i_l}}|_{(x^i(x))} = \frac{\partial^{|J|} s^\alpha}{\partial x^J}|_x = \frac{\partial^{|J|} r^\alpha}{\partial x^J}|_x,$$

para todas as uplas simétricas $J = (i_1, ..., i_l)$ com $\#J \leq k$. De fato, observe que

$$u^\alpha \circ s \circ (x^i)^{-1} = f^\alpha(x^i),$$

f dada em 3.1.1. Como já foi provado na última seção do capítulo anterior, essa relação está bem definida, ou seja, independe da escolha de um sistema adaptado de cartas. Pondo

$$J^k(\pi) = \bigcup_{x \in M} \Gamma_x(\pi)/\sim_k$$

denominaremos esse espaço por espaço de jatos de π. Seus elementos serão denotados por $j^k s(x)$, com s seção. Ele admite uma estrutura de variedade suave cujo as cartas são dadas por

$$\phi_k(j^k s(x)) = (x^i(x), s^\alpha(x), \frac{\partial^{|J|} s^\alpha}{\partial x^J}|_x),$$

onde $\phi = (x, u)$ é um sistema adaptado de cartas. A diferença entre $J^k(\pi)$ e $J^k(E)$ é que no último permitimos "mudanças das variáveis independentes", enquanto em $J^k(\pi)$ temos fixados as coordenadas independentes que é dada em relação a uma carta adaptada. Observe que temos a seguinte caracterização

$$J^k(\pi) = \{j^k_p\Gamma \in J^kE; \quad T_p\Gamma \cap \mathrm{Vert}_p(\pi) = 0\}.$$

A próxima proposição mostra que, de certa forma, J^kE é o acabamento (completamento) de $J^k(\pi)$ assim como o espaço projetivo é o acabamento do espaço Euclidiano. Mais que isso, permitirá inferir que soluções de equações diferencias no sentido não-clássico (onde permitimos funções multivalentes como sendo soluções) é limite de soluções no sentido clássico.

Proposição 3.1.8. *Seja $\pi : E \to M$ um fibrado. O espaço $J^k(\pi)$ é aberto e denso em $J^k(E)$.*

Demonstração. A forma como foi construída sua estrutura de diferenciabilidade permite concluir imediatamente que $J^k(\pi)$ é aberto em J^kE. A densidade seguirá dos seguintes fatos:

(a) Se $f : X \to Y$ é contínua, aberta, sobrejetiva então, se A é denso em Y, $f^{-1}(A)$ será denso em X. Observando que $\pi^k_1 : J^kE \to J^1E$ satisfaz essas propriedades, mostrando que $J^1(\pi)$ é denso em J^1E concluiremos, em virtude da igualdade

$$(\pi^k_1)^{-1}(J^1(\pi)) = J^k(\pi),$$

que $J^k(\pi)$ é denso em J^kE,

(b) Considere $G = G_m(\mathbb{R}^{m+n})$ a variedade de Grassmann (veja 2.7.4). Dado Q subespaço $n-$dimensional, afirmamos que o conjunto

$$\mathrm{Vert}_Q = \{P \in G; \quad P \cap Q = 0\}$$

é denso em G. Para ver isso, escreva $\mathbb{R}^{m+n} = P' \oplus Q'$ e considere aberto $U_{Q'}$ domínio de uma carta ψ em G. Os abertos básicos de G são dados por $\psi^{-1}(V)$ com V aberto de $\psi(U_{Q'}) = \mathbb{R}^{mn}$, ψ percorrendo o atlas natural para G, de acordo com 2.7.4. Consideraremos um aberto básico arbitrário de G e mostraremos que Vert_Q o intersepta, ou seja, $\mathrm{Vert}_Q \cap \psi^{-1}(V) \neq \varnothing$; equivalentemente existe matriz $A \in V$ tal que

$$(\psi^{-1}(A) = \{x + Ax; \quad x \in P'\}) \cap Q = 0.$$

Fixados uma base $x^1, ..., x^m$ de P' e $y^1, ..., y^n$ de Q, a última igualdade ocorre se, e somente se, existe A tal que

$$T(A) = \det(x^1 + Ax^1, ..., x^m + Ax^m, y^1, ..., y^n) \neq 0;$$

mas observe que T é um polinômio em $\mathbb{R}^{mn}$ e, necessariamente, não se anula em abertos, a menos que seja identicamente nulo, mas esse não é o caso, pois se $z^1, ..., z^m$ é base de P, definindo $Ax^j = z^j - x^j$ temos que $T(A) \neq 0$.

(c) Uma vez que as subvariedades Γ que são gráficos de uma seção suave próximo de p com relação a $\mathrm{pr}_1 : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$ são caracterizadas por satisfazerem

$$T_p\Gamma \cap (0 \times \mathbb{R}^n) = 0$$

e o conjunto $\mathrm{Vert}_{(0\times\mathbb{R}^n)}$ (conjunto dos planos tangentes que interceptam trivialmente $0 \times \mathbb{R}^n$) é denso em $G_m(\mathbb{R}^{m+n})$, devido ao item anterior, dado aberto

$$U \times V \subset \mathbb{R}^{m+n} \times G_m(\mathbb{R}^{m+n}) \simeq J^1\mathbb{R}^{m+n}$$

e $p \in U$, existe $T_p\Gamma = (p, T_p\Gamma) \in J^1(\mathrm{pr}_1)$ tal que $(p, T_p\Gamma) \in U \times V$, ou seja, $J^1(\mathrm{pr}_1)$ é denso em $J^1\mathbb{R}^{m+n}$. Seja $\phi = (x^i, u^\alpha)$, com domínio $W = \phi^{-1}(W_1 \times W_2)$, um sistema adaptado de cartas. Não é difícil concluir os seguintes fatos: J^1W é difeomorfo a $J^1(\phi(W))$ via $(J^1\phi)(p, T_p\Gamma) = (\phi(p), \phi_*(T_p\Gamma))$, vale a igualdade

$$J^1(\pi) \cap J^1W = \{T_p\Gamma \in J^1W;\quad T_p\Gamma \cap \mathrm{Vert}_p(\pi) = 0\}$$

e $(J^1\phi)(\mathrm{Vert}_p(\pi)) = \mathrm{Vert}_{\phi(p)}(\mathrm{pr}_1) = \mathrm{Vert}_{(0\times\mathbb{R}^n)}$. Dessa forma, dado $(\phi(p), T_{\phi(p))}\phi(\Gamma)) \in J^1(\mathrm{pr}_1) \cap (J^1\phi)(W)$, garantido pelo que fizemos no início deste item,

$$T_{\phi(p))}\phi(\Gamma) \cap \mathrm{Vert}_{\phi(p)}(\mathrm{pr}_1) = 0,$$

logo $T_p\Gamma \cap \mathrm{Vert}_p(\pi) = 0$, concluindo que $(p, T_p\Gamma) \in J^1(\pi) \cap J^1W$, mostrando a densidade de $J^1(\pi)$ em $J^1(E)$. Isso completa a demonstração da proposição.

Exemplo 3.1.9. Seja $\mathrm{pr}_1 : E = \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^n$ fibrado trivial. Dada seção s em coordenadas, com relação a uma carta $\phi = (y^i)$, por $s(\phi(x)) = (\phi(x), f(\phi(x)))$, $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^m$, a partir da igualdade $f(\phi(x)) \cdot f(\phi(x)) = 1$ obtemos as relações

$$\partial_i|_x f \cdot f(x) = 0 \text{ e}$$

$$(\partial_j|_x \partial_i f) \cdot f(x) + \partial_j|_x f \cdot \partial_i|_x f = 0;$$

lembrando que $\partial_i f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{m+1}$ é dada por $x \to \partial_t|_0 (f \circ \phi^{-1})(te_i + \phi(x))$. Considerando o fibrado trivial $\mathrm{Pr}_1 : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ obtemos a caracterização

$$J^2(\mathrm{pr}_1) = \{(x, u, \partial_i u, \partial_{ij} u) \in J^2(\mathrm{Pr}_1);\quad x \cdot x = u \cdot u = 1;\quad \partial_i u \cdot u = 0 \text{ e } \partial_{ij} u \cdot u + \partial_j u \cdot \partial_i u = 0\}.$$

Exemplo 3.1.10. Considere $\mathrm{pr}_1 : \mathbb{R} \times M \to \mathbb{R}$ fibrado trivial, com M variedade suave. Uma seção $s(t) = (t, \alpha(t))$ corresponde a uma curva $t \to \alpha(t)$ definida em M de modo que é simples concluir a equivalência $J^1(\mathrm{pr}_1) = TM$.

$\square$

3.2 Fibrados de Jatos

Estudando nas coordenadas canônicas as funções

$$\pi_l^k : J^k E \to J^l E, \quad l < k,$$

dadas por $\pi_l^k(j_p^k \Gamma) = j_p^l \Gamma$, concluímos que são projeções e, logo, submersões. Mais que isso, de fato $(J^k E, \pi_l^k, J^k E)$ é um fibrado. Se $\pi : E \to M$ for um fibrado, também será um fibrado

$$\pi_k : J^k(\pi) \to M,$$

onde $\pi_k(j^k s(x)) = x = \pi \circ \pi_1^k(j^k s(x))$, onde aqui consideramos $\pi_0^k : J^k(\pi) \to E$ dada por $\pi_0^k(j^k s(x)) = s(x)$, que nada mais é que a restrição de $\pi_0^k : J^k E \to E$ ao espaço $J^k(\pi)$.

Proposição 3.2.1. *$\pi_l^k : J^k E \to J^l E$ é um fibrado, $1 \leq l < k$.*

Demonstração. Seja $(\phi = (x, u), W)$ carta ao redor de $p \in E$. Uma trivialização ao redor dos elementos $j_p^l \Gamma$ onde $\Gamma \in W_l$ é

$$\delta : (\pi_l^k)^{-1}(W_l) = W_k \to W_l \times \mathbb{R}^N,$$

onde $\delta(j_p^k \Gamma) = (j_p^l \Gamma, \mathrm{pr} \circ \phi_k(j_p^k \Gamma))$ (para definição de ϕ_k veja seção 2.7), onde pr é a função que projeta as derivadas de ordem maior que l. Dessa forma, a função δ é bijetiva, pois se $j_p^l \Gamma = j_q^l \Lambda$ concluímos que $\phi_l(j_p^l \Gamma) = \phi_l(j_p^k \Lambda)$ e, como $\phi_k = \phi_l \times (\mathrm{pr} \circ \phi_k)$ (por definição $f \times g(x) = (f(x), g(x))$), segue que δ é injetiva; é simples perceber que essa função é sobrejetiva e claramente é suave. Uma vez que vale

$$(\phi_l \times 1) \circ \delta \circ \phi_k^{-1} = (\phi_l \circ \pi_l^k \circ \phi_k^{-1}) \times \mathrm{pr},$$

concluímos que δ_* é sobrejetiva e, mais ainda, se

$$0 = (\phi_l \circ \pi_l^k \circ \phi_k^{-1})_*(X, Y) \times (\mathrm{pr})_*(X, Y) = (X, Y),$$

necessariamente $(X, Y) = 0$, concluindo que δ_* é injetiva e por conseguinte δ é difeomorfismo. Para finalizar, observe que

$$\pi_l^k(j_p^k \Gamma) = j_p^l \Gamma = \mathrm{pr}_1 \circ \delta(j_p^k \Gamma),$$

seguindo que δ é uma trivialização. □

Para mostrar que $\pi_0^k : J^k E \to E$ é um fibrado não dá para fazer uma demonstração análoga a da proposição anterior, pois nenhuma fibra de π_0^k está contida em abertos coordenados W_k. Mostraremos inicialmente que os jatos de espaços euclidianos são fibrados triviais e usaremos esse fato para trivializar localmente $\pi_0^k : J^k E \to E$.

Proposição 3.2.2. *$\pi_0^k : J^k \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^{m+n}$ é um fibrado trivial.*

Demonstração. Sejam $p \in \mathbb{R}^{m+n} = E$ e $F = (\pi_0^k)^{-1}(0) = \Gamma_0(m)/\sim_k$. Dado $p \in E$, uma vez que

$$F_p : q \in E \to q - p \in E$$

é um difeomorfismo, $G_p = J^k F_p : J^k E \to J^k E$ é um difeomorfismo e carrega difeomorficamente $(\pi_0^k)^{-1}(p)$ em F. Definindo

$$\delta : J^k E \to E \times F$$

por $\delta(j_q^k \Gamma) = (q, G_q(j_q^k \Gamma)) = (q, j_0^k(\Gamma - q))$, demonstraremos que essa função é uma trivialização global. Para qualquer subvariedade mergulhada m-dimensional Γ de E e $p \in \Gamma$, existe carta ϕ em E ao redor de p, dada por $\phi(x^1, ..., x^{m+n}) = (x^{\sigma(1)}, ..., x^{\sigma(m)}, ..., x^{\sigma(m+n)})$, para alguma permutação σ, logo uma transformação linear, tal que Γ é gráfico de função com relação a ϕ (veja início da seção 2.7). Definindo $\psi(q) = \phi(q - p)$, obtemos uma carta ao redor de $0 \in E$. Escrevendo $\phi_k(j_q^k \Gamma) = (\phi(q), \partial_J f(\mathrm{pr}_1 \circ \phi(q))) = (a, b)$, onde f é a função que representa a subvariedade Γ com relação a carta ϕ, δ em coordenadas será dada por

$$[\psi \times (\mathrm{pr}_2 \circ \psi_k)] \circ \delta \circ \phi_k^{-1}(a, b) = [\psi \times (\mathrm{pr}_2 \circ \psi_k)](q, j_0^k(\Gamma - q)); \tag{3.2.1}$$

sendo $\phi(p) = (x_0, u_0)$ é fácil concluir, usando que ϕ é linear, a igualdade

$$\psi^{-1}(x, u) = \phi^{-1}(x + x_0, u + u_0).$$

Assim, se $\phi(q) = (x_1, u_1)$, um simples cálculo mostra que $\Gamma - q$ poderá ser escrita localmente como

$$\Gamma - p = \psi^{-1}\{(x - x_1, f(x) - u_1)\} = \psi^{-1}\{(y, f(y + x_1) - u_1)\},$$

de modo que

$$\mathrm{pr}_2 \circ \psi_k(j_0^k(\Gamma - p)) = (\partial_J|_{y=0} f(y + x_1)) = (\partial_J f(x_1)) = b;$$

(observe que $x_1 = \mathrm{pr}_1 \circ \phi(q)$). Portando

$$(3.2.1) = (\psi \circ \phi^{-1}(a), b)$$

permitindo concluir que a associação dada na equação (3.2.1) é suave. A função δ é claramente uma bijeção e, como é um difeomorfismo local, é um difeomorfismo. Claro que $(\pi_0^k)^{-1}(E) = J^k E$ e vale $\pi_0^k \circ \delta(j_q^k \Gamma) = q = \mathrm{pr}_1(q, j_0^k(\Gamma - q))$, concluindo a proposição. $\square$

Observação 3.2.3. *Aqui convém dar a noção de isomorfismo entre fibrados. Sejam $\pi : E \to M$ fibrado e $\rho : P \to N$ função suave. Se existirem difeomorfismos f e g tais que o diagrama abaixo comuta*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"] & M \arrow[d, "g"] \\ P \arrow[r, "\rho"] & N \end{tikzcd}$$

então ρ também será fibrado. Nessas condições, se $\delta : \pi^{-1}(U) \to U \times F$ é uma trivialização local, $\delta(p) = (\pi(p), h(p))$, então é fácil concluir que

$$\lambda : f(\pi^{-1}(U)) \to g(U) \times F,$$

dada por $\lambda(q) = (\rho(q), h(f^{-1}(q)))$, é uma trivialização local de ρ e, dada trivialização local de ρ, obtemos, analogamente, trivialização local de π. Dizemos nesse caso que esses fibrados são isomorfos. Assim, se E é difeomorfo a P via a função H então, a partir do seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} J^kE & \xrightarrow{J^kH} & J^kP \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_0^k} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_0^k} \\ E & \xrightarrow{H} & P \end{array}$$

concluímos que as trivializações locais de $\pi_0^k : J^kE \to E$ nos dá trivializações locais de $\pi_0^k : J^kP \to P$ e reciprocamente.

Proposição 3.2.4. *Seja E uma variedade suave. Então $\pi_0^k : J^kE \to E$ é um fibrado.*

Demonstração. Seja (ϕ, U) um sistema de coordenadas em E tal que $\phi(U) = \mathbb{R}^{m+n}$ (por simplicidade, pois aqui poderíamos considerar apenas que $\phi(U)$ é difeomorfo a $\mathbb{R}^{m+n}$, de acordo com o que comentamos acima). A partir do diagrama

$$\begin{array}{ccc} J^kU \subset J^kE & \xrightarrow{\pi_0^k} & U \subset E \\ \downarrow{\scriptstyle J^k\phi} & & \downarrow{\scriptstyle \phi} \\ J^k\mathbb{R}^{m+n} & \xrightarrow{\pi_0^k} & \mathbb{R}^{m+n} \\ \downarrow{\scriptstyle \delta} & & \downarrow{\scriptstyle 1} \\ \mathbb{R}^{m+n} \times F & \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} & \mathbb{R}^{m+n} \end{array}$$

onde $F = \Gamma_0(m)/\sim_k$ e δ trivialização global (veja proposição anterior), podemos concluir que uma trivialização é

$$\lambda = (\phi^{-1} \times 1_F) \circ \delta \circ J^k\phi.$$

Observe que λ é um difeomorfismo como composta de difeomorfismos ($J^k\phi$ é difeomorfismo pois ϕ o é). Por outro lado, temos que

$$\mathrm{pr}_1 \circ \lambda(j_p^k\Gamma) = (\phi^{-1} \times 1_F) \circ \delta \circ J^k\phi(j_p^k\Gamma) = \mathrm{pr}_1 \circ (\phi^{-1} \times 1_F) \circ \delta(j_{\phi(p)}^k(\phi(\Gamma))) =$$

$$= \mathrm{pr}_1 \circ (\phi^{-1} \times 1_F)(\phi(p), *) = \mathrm{pr}_1(p, *) = p = \pi_0^k(j_p^k\Gamma),$$

concluindo a igualdade

$$\pi_0^k = \mathrm{pr}_1 \circ \lambda.$$

Para finalizar, basta observar que de fato $J^kU = (\pi_0^k)^{-1}(U)$. $\square$

Proposição 3.2.5. *Considere o fibrado trivial $pr_1 = \mathbb{R}^m \times M \to \mathbb{R}^m$. Então $\pi_0^k : J^k(pr_1) \to \mathbb{R}^m$ é um fibrado trivial.*

Demonstração. Seja $\delta_x : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ dada por $\delta_x(y) = x+y$. Dado $s \in \Gamma_x(\mathrm{pr}_1)$ (veja 3.1.2) podemos definir a seção $r \in \Gamma_0(\mathrm{pr}_1)$ por

$$r(y) = (y, \mathrm{pr}_2(s(\delta_x(y))))$$

cujo as derivadas em 0 dependem apenas dos valores das derivadas de s em x. Desta forma, a função

$$\begin{aligned} \delta : J^k(\mathrm{pr}_1) &\longrightarrow \mathbb{R}^m \times \Gamma_0(\mathrm{pr}_1) \\ j^k s(x) &\rightsquigarrow (x, j^k r(0)) \end{aligned}$$

define um difeomorfismo, como pode ser facilmente checado, e tem-se que

$$\mathrm{pr}_1 \circ \delta(j^k s(x)) = \pi_0^k \circ \mathrm{pr}_1(j^k s(x)).$$

□

Proposição 3.2.6. *Se $\pi : E \to M$ é um fibrado também será $\pi_k : J^k(\pi) \to M$ dado por $\pi_k = \pi \circ \pi_0^k$.*

Demonstração. Considere $\delta : W = \pi^{-1}(U) \to U \times F$ uma trivialização local de modo que U seja difeomorfo a $\mathbb{R}^m$. Considere a restrição $\pi|_W : W \to U$, que é um fibrado trivializado pela função δ. É simples notar que $(\pi_0^k)^{-1}(W) = J^k(\pi|_W)$ e, definindo $J^k\delta(j^k s(x)) = j^k(\delta(s(x)))$ temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} J^k(\pi|_W) \arrow[r, "J^k\delta"] \arrow[d, "\pi|_W \circ \pi_0^k"] & J^k(\mathrm{pr}_1) \arrow[d, "\mathrm{pr}_1 \circ \pi_0^k"] \\ U \arrow[r, "1"] & U \end{tikzcd}$$

com $J^k\delta$ difeomorfismo (essa função é a restrição de $J^k\delta : J^kW \to J^k(U \times F)$ ao espaço $J^k(\pi|_W)$ e, essa por sua vez, é um difeomorfismo). Uma vez que U é difeomorfo a $\mathbb{R}^m$, então $\mathrm{pr}_1 \circ \pi_0^k : J^k(\mathrm{pr}_1) \to U$ é um fibrado trivial, em virtude da última proposição juntamente com o que observamos em 3.2.3. Assim, novamente pela observação 3.2.3, podemos trivializar $\pi|_W \circ \pi_0^k : J^k(\pi) \to U$, concluído que $\pi_k : J^k(\pi) \to M$ é um fibrado. □

Para o leitor interessado em saber mais sobre a estrutura dos espaços de jatos em fibrados sugerimos a leitura de Saunders [31].

3.3 Ações Projetivas

Se $\pi : E \to M$ é um fibrado, quando consideramos G agindo suavemente em E podemos estender a ação de G a uma ação suave Ψ_k em J^kE e a uma ação suave local em $J^k(\pi)$, dada por $g \cdot j^k s(x) = j^k(gs)(\overline{x})$. A ação em $J^k(\pi)$ é na verdade a restrição de Ψ_k a algum conjunto aberto $\mathcal{U}$ tal que

$$1 \times E \subset \mathcal{U} \subset G \times J^kE,$$

isso porque quando Γ representa localmente imagem de uma seção suave só podemos garantir que $g\Gamma$ é localmente imagem de uma seção suave quando g está próximo o suficiente de $1 \in G$. Porém, quando consideramos ações projetivas, de acordo com a definição abaixo, então a ação será global e igual a restrição

$$\Psi_k|_{G\times J^k(\pi)}.$$

Definição 3.3.1. Seja $\pi : E \to M$ uma variedade de fibras e suponha que G age suavemente em E. Dizemos que ação é projetiva se tivermos $\pi(gp) = \pi(gq)$ sempre que $\pi(p) = \pi(q)$.

Uma consequência imediata é que no caso projetivo podemos definir uma ação suave de G em M decretando que $gx = \pi(gp)$, onde $\pi(p) = x$; observe que essa associação independe do representante em E_x. Por outro lado é suave pois

$$1_G \times \pi : G \times E \to G \times M$$

é uma submersão e, sendo Ψ_E e Ψ_M as ações de G em E e de G em M, respectivamente, temos que

$$\Psi_M \circ (1 \times \pi)(g, p) = \Psi_E(g, p)$$

é suave (lembre-se que se $\pi : X \to Y$ é submersão então $g : Y \to Z$ é suave se, e somente se, $\pi \circ g$ é suave). Com isso, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi"] & E \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[r, "g"] & M \end{tikzcd}$$

No caso projetivo, se s é uma seção local em x, então $\pi \circ g(s(x)) = gx$ e, escrevendo $y = g^{-1}x$, vemos que a função $gs := g \circ s \circ g^{-1}$ é uma seção suave com domínio $g(\text{Dom } s)$. Desta forma podemos escrever ação de G em $J^k(\pi)$ simplesmente por

$$g \cdot j^k s(x) = j^k(gs)(gx)$$

(observe que nesse caso $\overline{x} = gx$).

Vamos definir uma noção de seção invariante, com relação a ações projetivas, de maneira a manter a coerência entre a noção de subvariedade localmente invariante; uma vez que estamos sempre associando uma seção à sua imagem a coerência é necessária.

Definição 3.3.2. Seja $\pi : E \to M$ uma submersão no qual G age projetavelmente. Definimos uma ação de G no espaço das seções locais de π pondo

$$(gs)(x) := g^{-1}s(gx), \text{ sempre que } gx \in U.$$

Uma seção local $s : U \subset M \to E$ é dita G invariante se $gs = s$.

Podíamos ter definido uma seção invariante com sendo tal que sua imagem é uma subvariedade localmente G-invariante e, como consequência, essa definição seria um caso particular.

3.4 Operadores Diferenciais Entre Fibrados

No capítulo 2 começamos a trabalhar a noção de sistema de equações diferenciais como sendo uma subvariedade mergulhada fechada do espaço de jatos da variedade em questão (veja 2.7.6). Daremos um generalização dessa noção formalizando o conceito de operador diferencial entre fibrados. Uma motivação lúdica: suponha por exemplo que $\Delta^{-1}(0)$ seja uma subvariedade mergulhada de J^kE, onde $\Delta : J^kE \to \mathbb{R}^l$ é suave e 0 valor regular dessa função. Sabemos que um grupo G está contido em $\mathrm{Sim}(\Delta)$ se ele mantém a subvariedade Δ invariante. Essa subvariedade corresponde a uma seção Δ do fibrado vetorial $\mathrm{pr}_1 : J^kE \times \mathbb{R}^l \to J^kE$ (pr_1 sendo a projeção no primeiro fator), no qual G age projetavelmente por $g(x, y) := (gx, y)$, dada por $\Delta(j^k_p\Gamma) = (j^k_p\Gamma, \Delta(j^k_p\Gamma))$, onde aqui usamos o símbolo Δ com dois significados óbvios. Sabemos que está bem definida uma ação de G no espaço das seções de pr_1, uma vez que temos uma ação projetiva. Assim, se tivermos que $g\Delta = \Delta$, ou seja,

$$g \cdot \Delta(j^k_p\Gamma) := g^{-1}(\Delta(g \cdot j^k_p\Gamma)) = g^{-1}(g \cdot j^k_p\Gamma, \Delta(g \cdot j^k_p\Gamma)) = (j^k_p\Gamma, \Delta(g \cdot j^k_p\Gamma)),$$

então quando $\Delta(j^k_p\Gamma) = 0$ (zero da fibra $\pi_1^{-1}(j^k_p\Gamma)$), o mesmo deverá ocorrer com $\Delta(g \cdot j^k_p\Gamma)$; isso corresponde a noção de G ser grupo de simetria da equação Δ. Essa maneira de ver o problema nos direciona para a seguinte definição:

Definição 3.4.1. Seja E uma variedade suave. Um operador diferencial em E é um seção suave Δ definida em um fibrado vetorial $\rho : \mathcal{D} \to J^kE$. Um operador diferencial determina uma equação diferencial dada por $\Delta = 0$. Uma solução do problema $\Delta = 0$ é uma subvariedade Γ tal que $\Delta(j^k_p\Gamma) = 0$ (elemento nulo do espaço vetorial $\rho^{-1}(j^k_p\Gamma)$) para cada $p \in \Gamma$.

Pelos comentários acima, essa definição engloba nossa definição de sistema de equações diferenciais definido em E. De fato se Δ é uma subvariedade mergulhada fechada de J^kE existe função suave $\Delta : j^k(\pi) \to \mathbb{R}^l$ tal que $\Delta = \Delta^{-1}(0)$ (vide 2.3.2. Estamos escrevendo $\mathbb{R}^l$ mas o teorema que garante a existência de Δ mostra que essa função tem contradomínio $\mathbb{R}$; para nós é interessante que 0 seja valor regular e, caso não seja, localmente poderemos caracterizar Δ com tal, contudo precisamos dessa caracterização para conseguir a seção Δ) e, então, podemos definir a seção $\Delta : J^kE \to J^kE \times \mathbb{R}^l$ pondo $\Delta(j^k_p\Gamma) = (j^k_p\Gamma, \Delta(j^k_p\Gamma))$, de modo que o problema $j^k_p\Gamma \in \Delta$ torna-se equivalente a $\Delta(j^k_p\Gamma) = (j^k_p\Gamma, 0) \equiv 0$. Quando $\pi : E \to M$ é um fibrado, o problema de encontrar soluções de $\Delta = 0$ (suponha aqui que $\Delta \subset J^k(\pi)$) consiste em encontrar seções de π tais $\Delta \circ j^ks : M \to \mathcal{D}$ seja a seção nula.

Exemplo 3.4.2. Dados M variedade e campo $X : M \to TM$ suaves, podemos definir um operador $\Delta : J^1(\mathrm{pr}_1) \to J^1(\mathrm{pr}_1) \times TM$, onde $\mathrm{pr}_1 : \mathbb{R} \times M \to \mathbb{R}$ é a projeção no primeiro fator, decretando que

$$\Delta(j^1\alpha(t)) = (j^1\alpha(t), \alpha'(t) - X(\alpha(t))).$$

As soluções do problema $\Delta = 0$ são as curvas integrais do campo X.

Capítulo 4

Soluções Invariantes

4.1 Introdução

A procura por soluções invariantes é um dos poucos métodos que permite obter soluções explícitas de sistemas de equações diferenciais. O método se baseia no fato de existirem invariantes locais para ação de de um grupo G em M sob certas restrições sobre a ação. Descreveremos um método, que estará parcialmente justificado nas próximas linhas, do procedimento para encontrar soluções invariantes. As demonstrações rigorosas e generalizações das ideias trabalhadas nessas linhas seguirão nas subsequentes seções. Suponha que G age em $M \times N \subset \mathbb{R}^{m+n}$ projetavelmente com órbitas $s-$dimensionais e que tenhamos uma ação regular. Dado $p_0 = (x_0, y_0) \in M \times N$ existem $m - s$ invariantes locais $y^i = \eta^i(x)$, invariantes com relação a ação de G em M, definidos próximo de x_0. Pondo $\eta^i(x, y) = \eta^i(x)$, o conjunto y^i forma um conjunto de invariantes locais da ação de G em $M \times N$ próximo de p_0. Podemos completar esse conjunto com mais n invariantes $v^i = \zeta^i(x, y)$ de modo que tenhamos um conjunto completo de $m + n - s$ invariantes para a ação de G em $M \times N$. Escrevendo

$$y = \eta(x), \quad v = \zeta(x, u) \tag{4.1.1}$$

para cada função invariante $u = f(x)$, temos associado uma única função $v = h(y)$ envolvendo as novas variáveis, sob certas restrições sobre a ação. Lembramo que uma função f é invariante pela ação de G se as funções f e gf coincidem em seu domínio comum de definição (e sempre que gf representar uma função). Vejamos como é possível obter essa associação. Como o conjunto $\eta^1, ..., \eta^{m-s}$ é independente existe uma upla $\widehat{x} = (x^{i_1}, ..., x^{i_{m-s}})$ tal que

$$\frac{\partial \eta}{\partial \widehat{x}}$$

é não singular. Usando o Teorema da Função Implícita podemos obter as remanescentes entradas $\overline{x}$, que denominaremos **variáveis principais**, em função de $(\widehat{x}, y)$, ou seja, $\overline{x} = \delta(\widehat{x}, y)$ para alguma função suave δ; as coordenadas $\widehat{x}$ denominaremos **variáveis paramétricas**. Suponha também que possamos obter u em função de x e v, $u = \widehat{\vartheta}(x, v)$ para alguma função suave $\widehat{\vartheta}$. Como veremos isso sempre será possível quando tivermos uma ação infinitesimalmente transversal. Assim teremos

$$u = \widehat{\vartheta}(\widehat{x}, \overline{x}, v) = \widehat{\vartheta}(\widehat{x}, \delta(\widehat{x}, y), v) = \vartheta(\widehat{x}, y, v) \tag{4.1.2}$$

com ϑ suave. Seja $u = f(x)$ função suave invariante pela ação de G. Devido a 4.1.1 e 4.1.2 temos que

$$f(x) = u = \vartheta(\widehat{x}, y, v) = \vartheta(\widehat{x}, \eta(x), \zeta(x, f(x))) \tag{4.1.3}$$

Observe que pondo $h(y) = h(\eta(x)) = \zeta(x, f(x))$, temos bem definida uma função suave, pois quando $\eta(x) = \eta(z)$ necessariamente $x = gz$ para algum g e, consequentemente,

$$\zeta(x, f(x)) = \zeta(g(x, f(x))) = \zeta(z, (gf)(z)) = \zeta(z, f(z)),$$

uma vez que f e gf coincidem em seu domínio comum de definição em virtude da invariância de f. Por outro lado $h(y)$ é suave pois $h \circ \eta(x)$ é suave; veja argumento abaixo do ponto de vista de espaços quocientes. Isso mostra que a função f deve assumir a forma

$$u = f(x) = \vartheta(\widehat{x}, \eta(x), h(\eta(x)))$$

onde $v = h(y)$ é uma função suave e temos a associação $f \to h$, devido a 4.1.3. Reciprocamente, dada função suave $h(y)$, ao obtermos implicitamente uma função $u = f(x)$ a partir da equação

$$v = \zeta(x, u) = \zeta(x, f(x)) = h(\eta(x)) \tag{4.1.4}$$

uma vez que devem valer as igualdades

$$\zeta(gx, (gf)(gx)) = \zeta(g(x, f(x))) = \zeta(x, f(x)) = h(\eta(x)) = h(\eta(gx)) = \zeta(gx, f(gx)),$$

onde usamos 4.1.4 e o fato que ζ e η serem $G-$invariantes, obtemos as duas igualdades

$$(gf)(gx) = \vartheta(\widehat{gx}, y, v) \text{ e } f(gx) = \vartheta(\widehat{gx}, y, v) \tag{4.1.5}$$

já que $u = \vartheta(\widehat{x}, y, v)$ é obtido a partir da equação $v = \zeta(x, u)$ de acordo com 4.1.2. Isso diz que resgatamos uma função invariante a partir de um função suave $h(y)$. Observe que essa função necessariamente tem a forma

$$f(x) = \vartheta(\widehat{x}, y, v) = \vartheta(\widehat{x}, \eta(x), h(\eta(x)),$$

onde usamos a segunda igualdade dada em 4.1.5 juntamente com 4.1.4. É interessante reescrever esse processo na linguagem dos espaços de órbitas, pois uma correspondência interessante surgirá. Observe o diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\pi_{M\times N}"] & M \arrow[d, "\pi_M"] \\ \widetilde{M \times N} \arrow[r, "\widetilde{\pi}"] & \widetilde{M} \end{tikzcd}$$

onde $\pi_{M\times N}$ e π_M são as projeções quocientes e $\widetilde{\pi}(\widetilde{x, u}) = \widetilde{x}$; claramente essa regra é uma função, já que quando ocorrer $(x, u) = g(y, v) = (gy, \Omega_g(y, v))$, então $\widetilde{\pi}(\widetilde{x, u}) = \widetilde{x} = \widetilde{y} = \widetilde{\pi}(\widetilde{y, v})$, e é suave pois vale

$$\widetilde{\pi} \circ \pi_{M\times N}(x, u) = \pi_M \circ \pi(x, u).$$

Sabemos que $y = \eta(\widetilde{x}) := \eta(x)$ é carta ao redor de $\widetilde{x_0} \in \widetilde{M}$ e $(y,v) = (\eta\times\zeta)\widetilde{(x,u)} := (\eta(x),\zeta(x,u))$ é carta ao redor de $\widetilde{(x_0,y_0)} \in \widetilde{M\times N}$. Uma função da forma $v = h(y)$ corresponde a uma seção da variedade de fibras determinada por $\widetilde{\pi}$ dada por

$$\widetilde{s}(\widetilde{x}) = (\eta\times\zeta)^{-1}(\eta(x), h(\eta(x)));$$

de fato, pois $(\eta\times\zeta)(\widetilde{(x,u)} = (\eta(x),\zeta(x,u))$ implicando em $(\eta\times\zeta)^{-1}(\eta(x),*) = \widetilde{(x,*)}$ e disso $\widetilde{\pi}\circ\widetilde{s} = 1$. Juntando tudo o que fizemos até então obtemos uma correspondência entre as seções locais de $\widetilde{\pi}$ e as funções $u = f(x)$ que são $G-$invariante. A partir de agora iremos tomar a direção de estudar, com relação a um fibrado $\pi : E \to M$ no qual G age suavemente e projetavelmente, a correspondência entre as seções invariantes de π e as seções de $\widetilde{\pi} : \widetilde{E} \to \widetilde{M}$.

Suponha agora que tenhamos uma equação diferencial $\Delta(x, u^{(k)}) = 0$. Se procuramos uma solução invariante, pelo que fizemos acima é necessário que localmente

$$u = f(x) = \vartheta(\widehat{x}, \eta(x), h(\eta(x))$$

para alguma função suave $h(y)$. Quando expressamos as derivadas de u em termos das derivadas de h e η com relação a y, o jacobiano da função u etc., obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[\vartheta(\widehat{x},\eta(x),h(\eta(x))] = \frac{\partial\vartheta}{\partial\widehat{x}} + \frac{\partial\vartheta}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\vartheta}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}.$$

Usando o fato que $\overline{x} = \delta(\widehat{x}, y)$ podemos obter $\dfrac{\partial\eta}{\partial x}$ em termos de $y, \widehat{x}$ assim obtendo

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \vartheta_1(\widehat{x}, y, v, \frac{\partial v}{\partial y}).$$

Continuando o processo de diferenciação, usando a regra da cadeia e substituindo $\dfrac{\partial\eta}{\partial x}$ quando ocorrer chegaremos a uma fórmula geral

$$u^{(n)} = \vartheta_n(\widehat{x}, y, v^{(n)}).$$

O que de fato ocorre é que quando substituímos $u^{(n)}$ na equação $\Delta = 0$ obteremos uma equação $\widetilde{\Delta}(\widehat{x}, y, v^{(n)})$ que corresponde a uma equação $\widetilde{\Delta}(y, v^{(n)})$ definida em $\widetilde{M}$; cada solução dessa equação nos dará uma solução invariante da equação Δ e reciprocamente. Como já ressaltamos podemos ter quocientes com estruturas topológicas interessantes (por exemplo $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z} = \mathbb{T}^2$) e assim se faz necessário o uso da linguagem de espaços de jatos para tornar rigoroso o método anteriormente mencionado. A seguir, construiremos o espaço de jatos invariante, formado por classes de subvariedades invariantes pela ação de G, denotado por I^k, e mostraremos que existe uma identificação natural $I^k/G \simeq J^k(E/G)$. Com relação a um fibrado $\pi : E \to M$, teremos um correspondente $I^k(\pi)$. Muitos exemplos interessantes de aplicação do método descrito acima poderão ser encontrados na referência [14].

4.2 O Espaço de Jatos Invariantes

Quando procuramos soluções invariantes podemos nos restringir a um espaço menor que todo o espaço de jatos J^kE, esse espaço, que denominaremos espaço de jatos invariante e denotaremos por I^k, é formado por classes de subvariedades que são localmente $G-$invariantes. A seguinte proposição nos garante que ao invés de trabalharmos com subvariedades localmente $G-$invariantes podemos trabalhar com subvariedades $G-$invariantes permitindo dar uma definição de I^k mais fácil de ser tratada.

Proposição 4.2.1. *Se G age suavemente e regularmente em E e por $p \in E$ passa uma subvariedade $n-$dimensional N que é localmente G invariante (ou seja, para todo $x \in N$ existe V_x vizinhança de $1 \in G$ tal que $V_x \cdot N \subset N$), então existe uma subvariedade GN , $n-$dimensional, $G-$invariante passando por p.*

Demonstração. Seja $\Lambda = \{(\phi_\alpha, U_\alpha)\}$ atlas para N. Então $\{(\phi_\alpha \circ g, g^{-1}(U_\alpha))\}$ define um atlas suave para $GN = \{gx;\ \ g \in G \text{ e } x \in N\}$. Seja $\{U_n\}$ base enumerável para a topologia de N de modo que $V_{nk}W_{nk} \subset U_n$ onde V_{nk} é vizinhança 1, W_{nk} aberto em N e $U_n = \bigcup_k W_{nk}$ (para ver que é possível construir tal base, usa-se o fato que dado $x \in N$ existe vizinhança V_x de 1 tal que $V_xN \subset N$ e logo a restrição $\Psi_{V_x \times N} : V_x \times N \to N$ está bem definida e é contínua). Para cada upla (n, k) tome vizinhança S_{nk} de 1 com $S_{nk} = S_{nk}^{-1}$ e $S_{nk}^2 \subset V_{nk}$. Podemos escrever G como $G = \bigcup_m g_{mnk}S_{nk}$ (uma vez que, em geral, se $G = \bigcup_{g\in G} gV$, V vizinhança de 1, podemos extrair uma subcobertura enumerável), consequentemente $\{g_{mnk}S_{nk}W_{nk}\}$ é base para a topologia de GN. De fato, dado $gx \in g(U)$ (aberto básico de GN) então para alguma upla (n, k), $x \in W_{nk} \subset U_n \subset U$ (pois $\{U_n\}$ é base para N e $U_n = \bigcup_k W_{nk}$) e também $g = g_{mnk}h$ com $h \in S_{nk}$. Assim,

$$gx = g_{mnk}hx \in g_{mnk}S_{nk}W_{nk} = gh^{-1}S_{nk}W_{nk} \subset gS_{nk}^2W_{nk} \subset gV_{mk}W_{nk} \subset gU_n \subset g(U),$$

concluindo que é base. Se U for aberto de E então $GN \cap U$ é aberto de GN, pois dado $gx \in GN \cap U$ existe aberto V de N, $gx \in gV$, de maneira que $gx \in gV \cap U = g(V \cap g^{-1}U)$ e este conjunto é aberto de GN uma vez que $V \cap g^{-1}U$ é aberto em N. Concluímos, por conseguinte, que a topologia de GN é Hausdorff. Para completar, uma vez que a ação é regular e temos GN variedade invariante, a proposição 2.3.8 nos assegura que $\pi(GN) = \pi(N) = \widetilde{N}$ é uma subvariedade. Observe que em geral se $P = \bigcup_\alpha \mathcal{O}(x_\alpha)$ é união de órbitas, dado $\mathcal{O}(v) \in \pi(P)$ necessariamente $\mathcal{O}(v) \subset P$ e logo $v \in P$. Com isso podemos mostrar que $\widetilde{N}$ é subvariedade mergulhada, pois dado aberto básico gU em GN existe aberto V de E tal que $U = N \cap V$ (considere aqui $U \neq \varnothing$). Dessa forma, temos que

$$\pi(gU) = \pi(V \cap N) = \pi(G(V \cap N)) = \pi(GV \cap GN) = \pi(GV) \cap \pi(GN) = \pi(V) \cap \pi(N),$$

pois se $\mathcal{O}(v) \in \pi(GV \cap GN)$ concluiremos, pelo que dissemos acima, que $v \in GV \cap GN$, pois esses conjuntos são união de órbitas uma vez que são invariantes. Pelo fato de $\widetilde{N}$ ser subvariedade mergulhada e transversal a π concluímos que $NG = \pi^{-1}(\widetilde{N})$ é subvariedade mergulhada. □

Nas condições de uma ação regular, devido a proposição anterior, podemos usar a seguinte caracterização do espaço de jatos invariante:

$$I^k = \{j_p^k\Gamma \in J^kE;\ \ G\Gamma = \Gamma\} \tag{4.2.1}$$

Caminharemos no sentido de dar uma estrutura de diferenciabilidade para esse espaço sempre considerando fixada uma ação regular de G em E.

Observação 4.2.2. *Quando temos um fibrado (ou apenas uma submersão) $\pi : E \to M$, podemos definir o espaço de jatos invariantes de π, denotado por $I^k(\pi)$, que é formado por jatos de seções locais que são invariantes (ou seja, sua imagem é uma subvariedade G invariante; levemente diferente de 3.3.2); aqui, porém, não podemos garantir que por todo ponto $p \in E$ existe uma seção local s tal que $s(x) = p$ e s seja $G-$invariante. Para que isso ocorra precisaremos exigir mais sobre a ação de G em M, a saber, que a ação seja infinitesimalmente transversal. Se $j^k_p\Gamma \in I^k$ e Γ pode ser escrita, localmente ao redor de p, como imagem de uma seção local s, então claro que s é seção localmente invariante e teremos, portanto, que $j^k_p\Gamma \in I^k(\pi)$. De fato vale a igualdade*

$$I^k(\pi) = I^k \cap J^k(\pi).$$

Precisamos eliminar uma possível confusão que surge ao lermos essa interseção considerando a caracterização dada em (4.2.1). Não necessariamente os elementos $j^k_p\Gamma \in I^k(\pi)$ são tais que $g\Gamma = \Gamma$. Um exemplo simples: considerando a ação de $\mathbb{SO}(2)$ em $pr_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, então uma subvariedade invariante conexa de dimensão 1 é um círculo com centro na origem e nenhum círculo é imagem de seção com relação a pr_1.

Lema 4.2.3. *Se Γ, Λ são subvariedades mergulhadas $G-$invariantes (ou podem ser localmente apenas) com $j^k_p\Gamma = j^k_p\Lambda$, então $j^k_{\tilde{p}}(\widetilde{\Lambda}) = j^k_{\tilde{p}}(\widetilde{\Gamma})$.*

Demonstração. O resultado seguirá facilmente mostrando que é possível construir um sistema de coordenadas (t, y, v) ao redor de p tal que as órbitas de G são dadas pelos *slices* $\{(y, v) = \text{cte}\}$ e ambas as subvariedades Γ e Λ possam ser escritas localmente como gráficos $v = f(y)$ e $v = g(y)$, respectivamente, com f e g independente de t. Dividiremos a demonstração em duas partes, onde na primeira mostraremos o fato mencionado neste parágrafo.

(a) Seja $\zeta^1, ..., \zeta^{m+n-s}$ um sistema de coordenadas para $\mathcal{O}(p)$ e complete o conjunto $\zeta^i \circ \pi_M$ a uma carta $\phi = (t^j, \zeta^i \circ \pi_M)$ ao redor de p (veja 1.3.5). Como $(\zeta^i \circ \pi_M)|_{\mathcal{O}(q)} = \text{cte}$ nenhuma dessas funções pode fazer parte de um sistema de coordenadas para qualquer órbita e, consequentemente, se $(t^{j_l}, \zeta^{i_l} \circ \pi_M)$ é carta para Γ, necessariamente deveremos ter $l = s$ uma vez que algum subconjunto de $\{t^{j_l}, \zeta^{i_l} \circ \pi_M\}$ deverá formar uma carta para $\mathcal{O}(p) \subset \Gamma$ cujo a dimensão é s. Como $\phi(\Gamma)$ e $\phi(\Lambda)$ tem contato de ordem k em $\phi(p)$, existe uma projeção $\text{pr} = \text{pr}_{(t,y)}$ que é carta tanto para $\phi(\Gamma)$ tanto para $\phi(\Lambda)$ ao redor de $\phi(p)$ e que envolve todas as $t-$entradas (de fato todas as coordenas t devem fazer parte, uma vez que $\text{pr} \circ \phi = (t^{j_k}, \zeta^{i_l} \circ \pi_M)$ será carta para Γ e logo um subconjunto de $\{t^{j_k}, \zeta^{i_l} \circ \pi_M\}$ será carta para $\mathcal{O}(p)$). Dessa forma, sendo $f = (\text{pr}|_{\phi(\Gamma)})^{-1}$ e $g = (\text{pr}|_{\phi(\Lambda)})^{-1}$ localmente essas subvariedades assumem a forma

$$\{(y, t, f(y, t))\} \text{ e } \quad \{(y, t, g(y, t))\},$$

concluindo que Γ e Λ localmente são dadas por

$$\phi^{-1}\{(t, y, f(t, y))\} \text{ e } \quad \phi^{-1}\{(t, y, g(t, y))\},$$

respectivamente. Próximo de p uma órbita contida em Γ assume localmente as formas

$$\{q;\quad \mathrm{pr}_2\circ\phi(q)=(c_1,c_2)\}\text{ e }\quad \phi^{-1}\{(t,y,f(t,y))\},$$

com c_1 e c_2 constantes. Isso permite concluir que

$$(c_1,f(t,c_1))=(c_1,c_2)$$

para todo t concluindo que f é independente de t.

(b) Por outro lado, definindo

$$\widetilde{\phi}(\widetilde{q}):=\mathrm{pr}_2\circ\phi(q) \tag{4.2.2}$$

obtemos uma carta ao redor de $\widetilde{p}$. Quando $q\in\Gamma$ teremos

$$\widetilde{\phi}(\widetilde{q})=(y(q),f(y(q))),$$

mostrando que $\widetilde{\Gamma}$ é localmente dada por $\widetilde{\phi}^{-1}\{(y,f(y))\}$. Agora é simples concluir o resultado, pois se $\widetilde{\Gamma}$ e $\widetilde{\Lambda}$ tem contato de ordem k em $\widetilde{p}$, então as derivadas f e g com relação a y coincidem até ordem k. Como as derivadas com relação a t coincidem, pois são nulas, concluímos que $j^k_p\Gamma=j^k_p\Lambda$ e reciprocamente.

$\square$

O espaço invariante tem uma estrutura natural de diferenciabilidade onde as cartas são dadas por "desconsiderar as t derivadas". Para concluir isso, seja $(\phi=(t,y,v),V)$ carta tal que $\widetilde{\phi}=(y,v)$ é carta em $\widetilde{M}$ como no lema acima. Então as funções δ_ϕ dadas por

$$\delta_\phi(j^k_p\Gamma)=(t(p),\widetilde{\phi}_k(j^k_{\widetilde{p}}(\widetilde{\Gamma}))),$$

definidas em $I^k\cap V_k$, onde $\widetilde{\Gamma}=\pi_M(\Gamma)$, formam um atlas suave. O lema anterior garante que essas funções independem de representante. Quando $\delta_\phi(j^k_p\Gamma)=\delta_\phi(j^k_q\Lambda)$ concluímos que $p=q$ e, considerando a igualdade $\widetilde{\phi}_k(j^k_{\widetilde{p}}(\widetilde{\Gamma}))=\widetilde{\phi}_k(j^k_{\widetilde{p}}(\widetilde{\Lambda}))$, o lema anterior nos garante que $j^k_p\Gamma=j^k_p\Lambda$, concluindo que δ_ϕ é uma bijeção (a função δ_ϕ age como a função ϕ_k desconsiderando as t derivadas da função que representa a subvariedade Γ, já que essas se anulam; essa observação já seria suficiente para concluir a suavidade das funções de transição). Observe a partir da caracterização dos abertos básicos de I^k que a topologia gerada por esses deve ser a mesma que a topologia induzida de J^kE, já que ao redor de qualquer ponto de E podemos encontrar coordenadas que determinam as órbitas via *slices*, o que permite construir as cartas do lema anterior. Verifiquemos que esse atlas é suave e que a estrutura é compatível com a de J^kE, ou seja, que a inclusão é uma imersão.

(1) Dadas duas cartas $\phi=(t,y,v)$ e $\psi=(s,u,w)$ como no lema anterior, escreva $(a,b)=\delta_\psi(j^k_p\Gamma)=(s(p),\widetilde{\psi_k}(j^k_{\widetilde{p}}(\widetilde{\Gamma})))$, assim $\widetilde{\psi_k}^{-1}(b)=j^k_{\widetilde{p}}(\widetilde{\Gamma})$, de modo que

$$\delta_\phi\circ(\delta_\psi)^{-1}(a,b)=\delta_\phi(j^k_p\Gamma)=(t(p),\widetilde{\phi_k}(j^k_{\widetilde{p}}(\widetilde{\Gamma}))=(t(p),\widetilde{\phi_k}\circ\widetilde{\psi_k}^{-1}(b)).$$

A segunda coordenada varia suavemente e independente da variação de a, de acordo com a fórmula. Quando fixamos b permanecemos na mesma órbita de modo que temos a igualdade

$$t(p) = t \circ s^{-1}(a),$$

concluindo que as funções de transição são suaves (diretamente, reescrevendo $(a, b) = (a, b_1, b_2, b_3)$ onde (b_1, b_2) corresponde aos valores de $(y(\widetilde{p}), v(\widetilde{p})) = (y(p), v(p)))$, ficamos com $t(p) = t \circ \phi^{-1}(a, b_1, b_2)$ que é uma associação suave).

(2) Vejamos como fica a inclusão $\iota : I^k \to J^k E$ nas coordenadas ϕ_k e δ_ϕ. Escreva convenientemente, como usual,

$$(t, y, v, v_J) = (t, y, f(y), \partial_J f(y)) = (t(p), \widetilde{\phi}_k(j^k_{\widetilde{p}}(\widetilde{\Gamma})) = \delta_\phi(j^k_p \Gamma),$$

onde $v = f(y)$ representa a classe de $\widetilde{\Gamma}$ em $\widetilde{p}$ com $v = f(t, y)$ representando a classe de Γ em p, com f constante com relação a t. Ficamos com

$$\phi_k \circ \iota \circ \delta_\phi^{-1}(t, y, v, v_J) = \phi_k \circ \iota(j^k_p \Gamma) = \phi_k(j^k_p \Gamma) = (\phi(p), \partial_{J'} f(\phi(p)))$$

onde agora os índices $J^{'}$ consideram as t derivadas da função f, que neste caso são todas nulas. Aplicando uma permutação σ na igualdade acima de modo que as t derivadas figurem nas últimas coordenadas ficamos com a igualdade

$$\phi_k \circ \iota \circ \delta_\phi^{-1}(t, y, v, v_J) = \sigma^{-1}(t, y, v, v_J, 0, ..., 0),$$

concluindo que a inclusão é uma imersão.

A ação de G em $J^k E$ mantém invariante o espaço I^k e dessa forma está bem definida e é suave a ação

$$\Psi_k : G \times I^k \to I^k.$$

De fato, quando Γ é $G-$invariante então $g \cdot j^k_p \Gamma = j_{gp}(g \cdot \Gamma) = j^k_{gp}(\Gamma)$ (essa observação também é válida quando Γ é apenas localmente invariante uma vez que teremos $g \cdot \Gamma$ localmente $G-$invariante).

O lema anterior nos diz que uma subvariedade Γ, G-invariante, é tal que sua ordem de contato em um ponto p determina a ordem de contato em todos os pontos de $\widetilde{p}$, uma vez que necessariamente da igualdade $j^k_{\widetilde{p}}(\widetilde{\Gamma}) = j^k_{\widetilde{p}}(\widetilde{\Lambda})$ seguirá que $j^k_q \Gamma = j^k_q \Lambda$ sempre que $\widetilde{q} = \widetilde{p}$. Por outro lado, uma vez que vale a igualdade $g \cdot j^k_p \Gamma = j^k_{gp} \Gamma$, juntando o que dissemos imediatamente acima, é possível perceber que a órbita determinada por $j^k_p \Gamma$ com relação a ação de G em I^k é completamente determinada pelo elemento $j^k_{\widetilde{p}}(\widetilde{\Gamma}) \in J^k(\widetilde{E})$. De fato temos o difeomorfismo:

Proposição 4.2.4. $\widetilde{I^k} \simeq J^k(\widetilde{E})$.

Demonstração. Sendo $\pi_k : J^k E \to \widetilde{J^k E}$ a projeção canônica, considere a bem definida função

$$\pi^{(k)}(\widetilde{j^k_p \Gamma}) = j^k_{\widetilde{p}}(\widetilde{\Gamma}).$$

Essa função é uma bijeção pois quando $\widetilde{j^k_p\Gamma} \neq \widetilde{j^k_q\Gamma}$ então, ou $\tilde{p} \neq \tilde{q}$, e claramente esses elementos são associados a elementos distintos via $\pi^{(k)}$, ou caso estejam na mesma órbita, ter-se-á que $j^k_p\Gamma \neq j^k_p\Lambda$ para algum p, logo para todos q com $\pi(q) = \pi(p)$ e, pelo lema anterior, ambos são levados em elementos distintos via $\pi^{(k)}$; novamente o lema anterior garante a sobrejetividade. Para verificar que essa associação é suave basta estudar a suavidade de $\pi^{(k)} \circ \pi_k|_{I^k}$. Seja $\phi = (t, y, v)$ carta como no lema anterior. Escrevendo como usual

$$(t, y, v, v_J) = (t, y, f(y), \partial_J f(y)) = (t(p), \widetilde{\phi}_k(j^k_{\tilde{p}}(\widetilde{\Gamma})) = \delta_\phi(j^k_p\Gamma),$$

onde, $f = f(t, y)$ é uma função suave que presenta a classe de Γ em p e é constante com relação a t, e $\widetilde{\phi}$ é dada por (4.2.1), obtemos a igualdade

$$\widetilde{\phi_k} \circ (\pi^{(k)} \circ \pi_k|_{I^k}) \circ \delta_\phi^{-1}(t, y, v, v_J) = \widetilde{\phi_k}(j^k_{\tilde{p}}(\widetilde{\Gamma})) = (y, f(y), \partial_J f(y)) = (y, v, v_J),$$

concluindo a suavidade (isso era de se esperar uma vez que (t^j) é carta para órbitas e a função $\pi^{(k)}$ não sente a variação de pontos numa mesma órbita). Mais que isso, concluímos que $\pi^{(k)} \circ \pi_k|_{I^k}$ é uma submersão e, como $\pi_k|_{I^k}$ também é submersão, teremos que $\pi^{(k)}$ será submersão e bijetiva, portanto difeomorfismo em virtude de 1.3.12. $\square$

Observação 4.2.5. *O leitor atento deve ter notado que para argumentação acima ser válida, mesmo o enunciado da proposição ter sentido, é necessário que a ação restrita de G em I^k seja regular, pois caso contrário não tem sentido o quociente $I^k/G = \widetilde{I^k}$ no contexto diferenciável. Para eliminar esse problema, poderíamos usar a bijeção natural $\pi^{(k)} : \widetilde{I^k} \to J^k(\widetilde{E})$ e decretar a estrutura de I^k de modo que essa função seja difeomorfismo, mas para nós o mais coerente será demonstrar que a ação de G em I^k é regular (veja 4.4.7).*

Se Δ é uma sistema de equações diferenciais definido em E, espaço onde G age regularmente e suavemente, com G grupo de simetria de Δ, ao procuramos soluções invariantes estamos procurando subvariedades tais que $j^k\Gamma \subset \Delta \cap I^k$, uma vez que soluções são subvariedades Γ tais que $j^k_p\Gamma \in \Delta$ para cada $p \in \Gamma$ que é mesmo que $j^k\Gamma$ ser subvariedade de Δ. Quando ocorrer de $\Delta \cap I^k$ ser uma subvariedade de I^k, e logo será uma subvariedade fechada já que Δ é fechada ($I^k - (\Delta \cap I^k) = (J^kE - \Delta) \cap I^k$), teremos

$$\widetilde{\Delta} := \pi^{(k)}(\Delta \cap I^k)$$

será uma subvariedade mergulhada fechada de $J^k(\widetilde{E})$ e, logo, um sistema de equações diferenciais definido em $\widetilde{E}$; mais que isso, as soluções invariantes de Δ estarão em correspondência biunívoca com a soluções de $\widetilde{\Delta}$. Aqui há um porém, não podemos garantir que a interseção seja uma subvariedade mergulhada de J^kE, por isso iremos referir a $\widetilde{\Delta}$ como **sistema reduzido**.

Teorema 4.2.6. *Dado um sistema de equações diferenciais Δ definidos em E, espaço no qual G age regularmente e suavemente, se G é grupo de simetria de Δ, então cada solução $\widetilde{\Gamma}$ do sistema reduzido $\widetilde{\Delta}$ corresponde a uma solução $\Gamma = \pi^{-1}(\widetilde{\Gamma})$ de Δ, $G-$invariante, e reciprocamente.*

Demonstração. Se $j^k\Gamma \subset \Delta \cap I^k$ então $\pi^{(k)}(j^k\Gamma) = j^k(\widetilde{\Gamma}) \subset \widetilde{\Delta} = \pi^{(k)}(\Delta \cap I^k)$, mostrando que soluções invariantes correspondem a soluções de $\widetilde{\Delta}$. Reciprocamente, dado $\widetilde{\Gamma}$ solução de $\widetilde{\Delta}$, a subvariedade $\Gamma = \pi^{-1}(\widetilde{\Gamma})$ será solução de Δ, pois quando $j^k_{\widetilde{p}}(\widetilde{\Gamma}) \in \widetilde{\Delta}$, para algum $q \in \mathcal{O}(p)$ temos que $j^k_q(\Gamma) \in \Delta$ (lembre que $\widetilde{\Delta} = \pi^{(k)}(\Delta \cap I^{(k)})$); uma vez que G é grupo de simetria de Δ, teremos

$$g \cdot j^k_q\Gamma = j^k_{gq} g\Gamma = j^k_{gp}\Gamma \in \Delta.$$

$\square$

A essa altura um exemplo nos ajudará a colocar os pés no chão.

Exemplo 4.2.7. (Equação de Burgers) Considere a equação $\Delta : u_t + uu_x + u_{xx} = 0$, cujo o grupo de simetria é dado por integrar os campos $X_1 = \partial_x$, $X_2 = \partial_t$, $X_3 = x\partial_x + 2t\partial_t - u\partial_u$, $X_4 = t\partial_x + \partial_u$ e $X_5 = xt\partial_x + t^2\partial_t + (x - tu)\partial_u$. O grupo associado a X_4 tem ação dada por

$$G_4 : (x, t, u) \to (x + \epsilon t, t, u + \epsilon),$$

e cada órbita é determinada pela sua interseção com o plano $x = 0$ de modo que tem-se a identificação $\mathbb{R}^3/G_4 \simeq \mathbb{R}^2$. Os invariante são dados por $y = \eta(x, t) = t$ e $v = \zeta(x, t, u) = u - x/t$ (essa ação é projetiva e estaremos colocando as coisas na forma como foi abordada na introdução). Ficamos com $u = v + x/t = v + y/t$, onde aqui x faz o papel de $\widehat{x}$. Calculando as derivadas,

$$u_t = v_t + (ty_t - y)/t^2 = v_t, \quad u_x = v_x, \quad u_{xx} = v_{xx} = 0,$$

e substituindo na equação Δ ficamos com

$$\widetilde{\Delta} : v_t + v/t = 0 \equiv tv_t + v = 0,$$

cuja solução é $v = 1/t + k_0$ levando nas soluções invariantes

$$u = (x + k_0)/t.$$

As subvariedades invariantes podem ser parametrizadas por funções $v = f(t)$ com relação a carta global $(x, t, v) = \phi(x, t, u) = (x, t, u - x/t)$, ou seja, uma subvariedade invariante tem a forma

$$\Gamma_f\{(x, t, f(t) + x/t), (x, t) \in \mathbb{R}^2\}.$$

A carta δ_ϕ é global para $I^{(2)}$ e

$$\delta_\phi(j^2_{(x,t,u)}\Gamma_f) = (x, t, f(t), f_t(t), f_{tt}(t)),$$

sendo que em $J^2(\mathbb{R}^3)$ o espaço invariante é dado por

$$\phi_2(j^2_{(x,t,u)}\Gamma_f) = (x, t, f(t), 0, f_t(t), 0, 0, f_{tt}(t)).$$

Uma vez que procuramos obter $\widetilde{\Delta}$ precisamos determinar quem é a subvariedade obtida por Δ. Fixando a carta $\psi = (x, t, u)$, a subvariedade Δ será dada por $\Delta = \psi_2^{-1}(\Delta^{-1}(0))$, onde

$$\Delta(x, t, ..., u_{xx}) = u_t + uu_x + u_{xx}.$$

Vejamos o que é preciso para ocorrer $j^2\Gamma \subset I^{(2)} \cap \Delta$. Como Γ é da forma $\phi^{-1}\{(x,t,f(t))\}$, se escrevemo-a na forma $\{(x,t,g(x,t))\}$ ficamos com a relação

$$f(t) = g(x,t) - x/t,$$

e, deste modo, como $g_x = 1/t, \quad g_{xx} = 0, \quad g_t = f_t - x/t^2$, ficamos com

$$0 = \Delta \circ \psi_2(j^k_{(x,t,u)}\Gamma) = \Delta(x,t,f(t)+x/t,1/t,f_t - x/t^2, 0, *, *) =$$

$$f_t - x/t^2 + (f(t)+x/t)1/t = u_t + u/t \equiv 0 = tu_t + u,$$

que é independe da variável paramétrica $x = \widehat{x}$ como prometido pela teoria geral. Dessa forma, escrevendo $\widetilde{\Delta} = tu_t + u$ então $I^{(2)} \cap \Delta = \psi_2^{-1}(\widehat{\Delta}^{-1}(0))$. Como

$$\widetilde{\psi_2} \circ \psi_2^{-1}(j^2_{(x,t,u)}\Gamma_f) = (t, f(t), f_t, f_{tt})$$

vemos que, de fato, $\widetilde{\Delta} = \pi^{(2)}(I^{(2)} \cap \Delta) = \widetilde{\psi_2}^{-1}(\widehat{\Delta}^{-1}(0))$ e a teoria geral nos garante que todas a soluções invariantes por G são dadas pelas soluções de $\widetilde{\Delta}$.

Considere agora o grupo

$$G_3 : (x,t,u) \to (e^{\epsilon}x, e^{2\epsilon}t, e^{-\epsilon}u).$$

O ponto $(0,0,0)$ tem órbita $0-$dimensional. Então restringiremos nossa atenção para $E = \mathbb{R}^3 - 0$ onde a ação é regular. Quando $(x,t) \neq 0$ temos que $(e^{\epsilon}x, e^{2\epsilon}t, e^{-\epsilon}u)$ intersepta uma única vez o cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ e dado qualquer ponto (x,t,u) no cilindro temos que $x = e^{\epsilon}x', \quad t = e^{2\epsilon}y', \quad u = e^{-\epsilon}u'$ com $u' = u/e^{-\epsilon}, \quad x' = x/e^{\epsilon}, \quad y' = \sqrt{\dfrac{1 - e^{2\epsilon}x'^2}{e^{4\epsilon}}}$. Por outro lado, quando $(x,t) = 0$ temos que as orbitas de $L_+ = \{(0,0,e^{-\epsilon}u), u > 0\}$ e $L_- = \{(0,0,e^{-\epsilon}u), u < 0\}$ não poderão ser separadas por abertos disjuntos no quociente. Desse modo, o quociente E/G_3 pode ser identificado com $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ mais os pontos infinitamente próximos $\{L_+\}$ e $\{L_-\}$, logo não é um espaço Hausdorff. Um fato geral, suponha que M e N são espaços topológicos com M Hausdorff e N não Hausdorff, digamos p e q em N não são separáveis por abertos disjuntos. Suponha que $f : M \to N$ é contínua com $f(x) = p$. Como f é contínua, temos que $f(x_n) \to f(x) = p$ para qualquer sequência $x_n \to x$. Então, se existir infinitos valores de k tais que $f(x_{n_k})$ é diferente de p, necessariamente concluiremos que $\lim f(x_{n_k}) = q$, pois q está infinitamente próximo de p. Seguiria que f assume dois valores em x, o que não é possível. Portanto, qualquer sequência x_n que convirja a x é tal que $f(x_n)$ é quase constante, ou seja, a partir de um certo n_0, $f(x_n) = p$ sempre que $n > n_0$.

Quando escrevemos uma subvariedade mergulhada Γ/G de E/G_3 como gráfico de função $\Gamma/G = \phi^{-1}\{(x,f(x))\}$ não poderemos ter, por exemplo $L_+ \in \Gamma/G$, pois L_+ seria imagem da função contínua $x \to \phi^{-1}(x,f(x))$, e de acordo com o argumento anterior não é possível obter tal função f, pois a associação $x \to \phi^{-1}(x,f(x))$ é bijetiva. Nestes casos, precisamos considerar regras multivalentes, permitindo que f possa assumir dois valores, por exemplo, $f(x) = L_+$ e $f(x) = L_-$, de modo que fora desses pontos f seja uma função suave, teremos eliminado o problema. Por isso, vamos nos restringir a subvariedade $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ de E/G_3 que é Haussdorff. Um conjunto independente de invariantes para ação de G é

$$\eta = t^{-1}x^2, \quad \zeta = xu.$$

Tratando η como variável independente e ζ como dependente obtemos, onde $\zeta^{'} = \zeta_\eta$,

$$u_t = \partial_t[\zeta(\eta)/x] = \eta_t\zeta^{'}/x = -t^2x\zeta^{'}$$

$$u_x = (x\eta_x\zeta^{'} - \zeta)/x^2 = -x^{-2}\zeta + 2t^{-1}\zeta^{'}$$
$$u_{xx} = 2x^{-3}\zeta + x^{-1}t^{-1}\zeta^{'} + 4xt^{-2}\zeta^{''}$$

que ao substituirmos na equação Δ nos dá a equação

$$\widetilde{\Delta} : 4\eta^2\zeta^{''} + \eta(2\zeta - 2 - \eta)\zeta^{'} + \zeta(2 - \zeta) = 0$$

Para o leitor interessado no estudo da Equação de Burgers sugerimos a leitura de [32].

4.3 A Hipótese de Transversalidade

Na seção anterior mostramos que cada solução invariante de um sistema de equações diferencias corresponde a uma solução em um sistema reduzido definido no espaço quociente, Teorema 4.2.6. Quando consideramos $\pi : E \to M$ um fibrado e um sistema de equações diferencias em E, podem surgir soluções, via o método das soluções invariantes, que não correspondem a soluções clássicas, ou seja, que não são seções do fibrado π. Por exemplo, se consideramos $G : (x, t, u) \to (x, t + \epsilon, u)$ agindo no fibrado trivial $\text{pr}_{(x,t)} : E = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ teremos que $\widetilde{E} = \mathbb{R}^2$. Considerando os invariantes $y = x + u$ e $v = u$, y fazendo papel das novas variáveis independentes e v a nova variável dependente, qualquer função $v = h(y)$ definida em E/G determina uma subvariedade de E dada pela equação $u = h(x + u)$, exceto quando $h^{'}(y) \neq 1$. Assim, a função $v = h(y) = y$ é tal que a subvariedade invariante dada pela equação $u = h(x + u)$ é o plano $x = 0$, que não pode ser escrito como gráfico de função $u = f(x, t)$. Esse fenômeno, porém, não ocorrerá se a ação for infinitesimalmente transversal, o que definiremos abaixo. Antes, um exemplo onde a ação não é infinitesimalmente transversa.

Exemplo 4.3.1. considere $\mathbb{SO}(2)$ agindo em $\mathbb{R}^2 - 0$, cujo as órbitas são círculos. As subvariedades localmente invariantes de dimensão 1 conexas devem ser pedaço de círculo. A partir disso, fica claro que pelos pontos da reta $x = 0$ não passa nenhuma subvariedades localmente $G-$invariante que é dada pelo gráfico de uma função suave $u = f(x)$. Esse problema será eliminado caso solicitemos que a ação seja infinitesimalmente transversal no sentido que as órbitas sejam transversais ao espaço U_p. Veja a proposição:

Proposição 4.3.2 (Transversalidade das órbitas)**.** *Considere G agindo suavemente e regularmente no fibrado trivial $pr_1 : E = M \times N \to M$. Se para cada $p \in E$, tem-se que $T_p\mathcal{O}(p) \cap T_pU_p = 0$ (nesse caso dizemos a ação ser infinitesimalmente transversal em p), então existe uma subvariedade localmente invariante (logo existe uma invariante) passando por p que pode ser parametrizada localmente por gráfico de função $u = f(x)$ para alguma função suave f.*

Demonstração. A condição de transversalidade infinitesimal pode ser reescrita como $\mathfrak{g}_p \cap T_pU_p = 0$, onde aqui tem-se que $\mathfrak{g}_p = T_p\mathcal{O}(p) = \ker((\pi_E)_*)_p$, $\pi_E : E \to \widetilde{E}$ a projeção natural. Com isso temos que $((\pi_E)_*)_p(T_pU_p) = \mathbb{V}$ é uma subespaço de dimensão n de $T_{\pi(p)\widetilde{p}}\widetilde{E}$. Qualquer subvariedade $\widetilde{\Gamma}$ passando por $\widetilde{p}$ que satisfaz $T_{\widetilde{p}}(\widetilde{\Gamma}) \cap \mathbb{V} = 0$ são tais que $\pi^{-1}(\widetilde{\Gamma})$ será uma subvariedade invariante que poderá ser escrita como gráfico de função $u = f(x)$ próximo de p, uma vez que é mergulhada e transversa a subvariedade U_p por construção, veja 1.6.3. $\square$

Vejamos como isso pode ser interpretado do ponto de vista infinitesimal. Sejam

$$X_k = \sum_i \zeta_k^i(x,u)\partial_{x^i} + \sum_\alpha \phi_\alpha^k(x,u)\partial_{u^\alpha},$$

$k = 1, ..., r$, os geradores infinitesimais da ação de G em E. A condição de transversalidade em p é equivalente a

$$\text{Posto}(\zeta_k^i(p))_{m\times r} = \text{Posto}(\zeta_k^i(p), \phi_\alpha^k(p))_{(m+n)\times r} = \dim \mathcal{O}(p) \tag{4.3.1}$$

Com efeito, uma vez que o conjunto $\{X_k\}$ gera $T_p\mathcal{O}(p)$, o lado direito da igualdade acima sempre é válido de modo que podemos supor $r = s$, já que é possível extrair um conjunto gerador linearmente independente. Supondo válido a igualdade dada em (4.3.1), se ocorrer

$$v = \sum_{k=1}^{s} a^k X_k(p) = \sum_\alpha b^\alpha \partial_{u^\alpha}|_p$$

(isso é o mesmo que $v \in \mathfrak{g}_p \cap T_pU_p$) teremos necessariamente que

$$\sum_{k,i} a^k \zeta_k^i(p)\partial_{x^i} = 0,$$

uma vez que o conjunto $\{\partial_{x^i}|_p, \partial_{u^\alpha}|_p\}$ é linearmente independente. Essa igualdade é equivalente a

$$(\zeta_k^i(p))a = 0, \quad a = (a^1, ..., a^s)$$

concluindo que $a = 0$, pois posto de $(\zeta_k^i(p))$ é máximo, e logo obtendo a condição de transversalidade infinitesimal. Reciprocamente, escrevendo $X_k = Y_k + Z_k$, onde $Y_k = \sum_i \zeta_k^i(p)\partial_{x^i}$, se $Y_j = \sum_{i\neq j} a^i Y_i$ (é o mesmo que supor $\text{Posto}(\zeta_k^i(p)) < s$) obtemos a igualdade

$$X_j = \sum_{i\neq j} a^i Y_i + Z_j = \sum_{i\neq j} a^i (X_k - Z_k)$$

permitindo concluir que $X_j - \sum_{i\neq j} a^i X_i = -\sum_{i\neq j} a^i Z_i \in \mathfrak{g}_p \cap T_pU_p = 0$ contradizendo o fato de $\{X_k\}$ ser um conjunto linearmente independente.

A proposição anterior nos diz que nas condições de uma ação regular e infinitesimalmente transversal podemos garantir que por cada ponto passa uma função $u = f(x)$ $G-$invariante definida localmente. Mas nem sempre podemos garantir que existe uma função globalmente definida G-invariante passando por todos os pontos (desconsiderando o caso trivial $f = \text{cte}$). Logo mais, no contexto de ações projetivas e transversais em fibrados, teremos um resultado que nos garante a existência de seções globais, porém a transversalidade neste contexto será levemente diferente da transversalidade infinitesimal.

Exemplo 4.3.3. Considere $G : (x, y, u) \to (x + \epsilon, y + \epsilon u, u)$ com variável dependente u. A ação é regular com gerador infinitesimal dado por $X = \partial_x + u\partial_y$. Como $\text{Posto}(1, u) = \text{Posto}(1, u, 0)$ sempre, temos uma ação transversalmente infinitesimal. Agora, veja que a função $\Omega_\epsilon \circ (1 \times f)(x, y) = (x + \epsilon, y + \epsilon f(x, y))$, cujo a derivada é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \epsilon f_x & 1 + \epsilon f_y \end{pmatrix}$$

não é inversível para os $\epsilon' s$ e pontos (x, y) tais que $f_y \neq 0$ com $\epsilon = -1/f_y$. Quando $f_y \neq 0$ (isso acarretará que ϵf não estará definida se $\epsilon = 1/f_y$) poderemos isolar y na igualdade $\overline{y} = y + \epsilon f(x, y)$ obtendo $y = \overline{y} - \epsilon f(x, g(x))$ para alguma função suave g. Com isso

$$(\epsilon f)(x, y) = f(x - \epsilon, y - \epsilon f(x - \epsilon, g(x - \epsilon))).$$

Se próximo de cada ponto (x_0, y_0) e para $\epsilon \neq f_y(x, y)$ vale $(\epsilon f)(x, y) = f(x, y)$ não é difícil concluir que necessariamente $f = \text{cte}$.

A garantia do Teorema 4.2.6 depende da regularidade da ação de G em $I^{(k)}$. Nossos próximos passos caminham no sentido de garantir esse fato. Além disso é interessante obter soluções globais que, dependendo da equação, talvez seja único objetivo, como equações que surgem da Geometria. Como queremos resolver equações com variáveis independentes fixas (no sentido clássico) usaremos a linguagem dos fibrados como ferramenta e, para tanto, tendo em vista a proposição 4.3.2, que restringe quando conseguimos seções invariantes locais do fibrado trivial $\pi_1 : M \times N \to N$, precisamos obter uma definição que generaliza o conceito de transversalidade infinitesimal que temos dado. O desenho abaixo indica que o problema ocorre quando uma órbita intersepta uma fibra em mais de um ponto ($\pi(p) = \pi(gp)$ com $gp \neq p$). Assim, a transversalidade deve falhar quando ocorrer $\pi(gp) = \pi(p)$ com $gp \neq p$. Neste caso, porém, as órbitas precisam ser conexas, já que se tivéssemos $q \notin \mathcal{O}(p)$ a transversalidade infinitesimal ainda seria satisfeita.

Definição 4.3.4. *Seja $\pi : E \to M$ uma submersão e considere G agindo suavemente em E. Dizemos que ação de G em E é transversal se é projetável e vale $\pi(gp) = \pi(p)$ se, e somente se, $gp = p$.*

Proposição 4.3.5. *Seja $\pi : E \to M$ uma submersão e considere G agindo suavemente projetavelmente em E. Se, sempre que $\pi(gp) = \pi(p)$ implicar $gp = p$ então vale,*

$$\text{Vert}_p(\pi) \cap T_p\mathcal{O}(p) = 0.$$

Demonstração. Observe que no caso do fibrado trivial $\text{pr}_1 : M \times N \to N$ isso equivale condição de transversalidade infinitesimal. Seja $X_p \in \text{Vert}_p(\pi) \cap T_p\mathcal{O}(p)$. Claramente $X_p = X(p)$ onde X é elemento do conjunto dos geradores infinitesimais da ação de G em E. Como a ação é projetável, se $\pi(p) = \pi(q)$ então temos $\pi_*(X(p)) = \pi_*(X(q))$, pois, em primeiro lugar

$$\pi(gp) = g\pi(p) = g\pi(q) = \pi(gq)$$

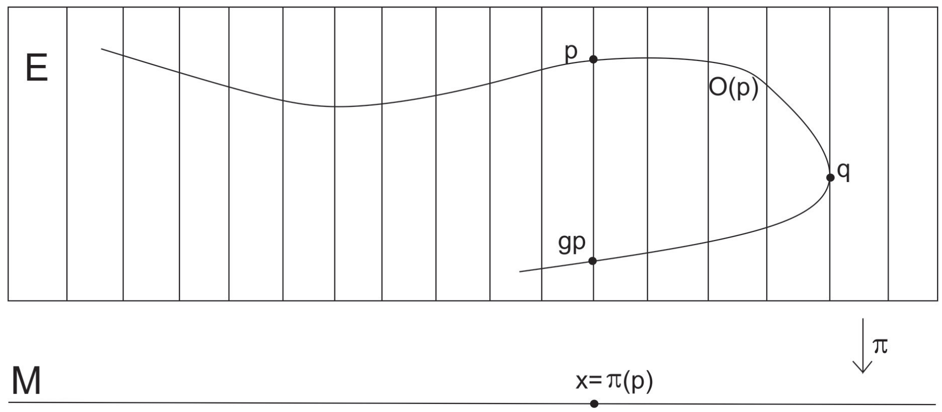

Figura 4.1: Ação não transversal em q.

e, segundo, considerando $\Psi_p(g) = gp$, temos

$$\pi_*(X(p)) = \pi_* \circ (\Psi_p)_*(X(p)) = \partial_t|_0 \pi \circ \Psi_p(\exp tX) = \partial_t|_0 \pi(\exp tX \cdot p) =$$

$$\partial_t|_0 \pi(\exp tX \cdot q) = \pi_*(X(q)).$$

Dessa forma $X(q) \in \mathrm{Vert}_p(\pi)$ sempre que $q \in E_x$, onde $x = \pi(p)$. Isso mostra que o campo X restringe-se a um campo $X|_{E_x}$ em E_x, de modo que a curva integral $\exp tX \cdot p$ do campo X com início em $p \in E_x$ coincide com a curva integral de $X|_{E_x}$ e, consequentemente, temos que $\exp tX \cdot p \in E_x$ para t próximo de zero Por outro lado, dado curva α contida em E_x temos que $\pi(\alpha(t)) = x$, concluindo que $T_p(E_x) = \mathrm{Vert}_p(\pi)$ (pois $T_p(E_x) \subset \mathrm{Vert}_p(\pi)$ e suas dimensões coincidem). Para concluir, usando que $\pi(\exp tX \cdot p) = \pi(p)$ implica $\exp tX \cdot p = p$, concluímos, diferenciando em t e avaliando em $t = 0$, que $X_p = 0$, com $X_p \in T_p(E_x) = \mathrm{Vert}_p(\pi)$ e $X_p \in T_p\mathcal{O}(p)$. □

Outra caracterização de uma ação transversal é dada pela seguinte proposição

Proposição 4.3.6. *Seja $\pi : E \to M$ submersão e considere G agindo suavemente em E. A ação de G em E é transversal se, o somente se, $\mathcal{O}(p)$ é difeomorfa a $\mathcal{O}(\pi(p))$ via a restrição $\pi|_{\mathcal{O}(p)} : \mathcal{O}(p) \to \mathcal{O}(\pi(p))$.*

Demonstração. Sendo a ação transversal a restrição $\pi : \mathcal{O}(p) \to \mathcal{O}(\pi(p))$ é um difeomorfismo. Com efeito, a igualdade $\pi(gp) = \pi(hp) \equiv \pi(h^{-1}gp) = \pi(p)$ nos da $h^{-1}gp = p$, pois a ação é transversal, seguindo que a restrição é injetiva e também permitindo concluir que está bem definida. Se tivermos $\pi_*(X(q)) = 0$ a transversalidade diz que $X(q) = 0$, em virtude da proposição anterior, pois teremos $X(p) \in T_p\mathcal{O}(p) \cap \mathrm{Vert}_q(\pi) = 0$. A sobrejetividade de π_* segue do fato da ação ser projetável, uma vez que vale a igualdade $X(x) = \partial_t|_0 \exp tX \cdot \pi(p) = \partial_t|_0 \pi(\exp tX \cdot p) = \pi_*(X(p))$. A recíproca é imediata. □

O próximo exemplo ajudará a completar o teorema 4.2.6.

Exemplo 4.3.7. Se G age suavemente regularmente em E, então a ação de G em

$$\pi_0^k|_{I^{(k)}} = \rho : I^{(k)} \to E$$

é transversal. Observe que essa ação é projetiva, uma vez que

$$\rho \circ g(j^k_p\Gamma) = \rho(j^k_{gp}g\Gamma) = gp = g(\rho(j^k_p\Gamma)).$$

A restrição

$$\pi^k_0 : \mathcal{O}(j^k_p\Gamma) \to \mathcal{O}(p)$$

é um difeomorfismo, pois uma vez que $\delta_\phi(j^k_{gp}\Gamma) = (t^i(gp), \mathrm{cte})$ concluímos que $(t^i)|_{\mathcal{O}(j^k_p\Gamma)}$ é uma carta para $\mathcal{O}(j^k_p\Gamma)$ e como $(t^i)|_{\mathcal{O}(p)}$ também é carta para $\mathcal{O}(p)$ fica fácil ver que nessas coordenadas a restrição π^k_0 é a identidade. Assim, a caracterização de transversalidade dada na última proposição garante que a ação é transversal.

Exemplo 4.3.8. Considere a ação de $G = \mathbb{SO}^2$ em $E = (\mathbb{R}^2 - 0) \times \mathbb{R}$ com gerador infinitesimal $X = x\partial_y - y\partial_x + \partial_u$. A ação dada por

$$(x, y, u) \to (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\sin\theta, u + \theta)$$

tem como órbitas espirais com base em círculos centrados na origem contidos no plano xy. A ação satisfaz o critério infinitesimal de transversalidade mas não é transversal pois as órbitas não são difeormorfas.

Além do critério infinitesimal de transversalidade o que precisa satisfazer uma ação projetiva a fim de termos uma ação transversal? A condição $gx = \pi(gp) = \pi(p) = x$ implicar $gp = p$ pode ser relida como $G_p = G_x$; observe que naturalmente temos $G_p \subset G_x$. Investigando quando $gx = x$ implica em $g \in G_p$, sob as condições de uma ação infinitesimalmente transversal, somos conduzidos a concluir que G_x ser conexo é uma condição suficiente para termos uma ação transversal. Com efeito, dado $X \in \mathfrak{g}_x$

$$\pi_*(X(p)) = \partial_t|_0\pi(\exp tX \cdot p) = \partial_t|_0 \exp tX \cdot x = \partial_t|_0 x = 0$$

concluindo que $X(p) \in T_p\mathcal{O}(p) \cap \mathrm{Vert}_p(\pi) = 0$. Assim $X \in \mathfrak{g}_p$, uma vez que $\mathfrak{g}_p = \{X;\ \ X(p) = 0\}$, e logo $\exp tX \cdot p = p$ para todo t. Sendo G_x conexo todos seus elementos podem ser escritos como produto de exponenciais permitindo inferir que $G_x = G_p$, concluindo a suficiência (só pra lembrar $X(p) = \partial_t|_0 \exp tX \cdot p = (\Psi_p)_*(X)$, onde $\Psi_p(g) = gp$, dai $\pi_*(X(p)) = \partial_t|_0\pi \circ \Psi_p(\exp tX) = \partial_t|_0\pi(\exp tX \cdot p)$).

4.4 Classificação de Ações Transversas em Fibrados

Estaremos caminhando no sentido de solucionar o problema de quando a restrição da ação estendida ao espaço de jatos invariante é regular e quando temos uma correspondência entre seções invariantes de E com as seções invariantes de E/G, problema esse, que está relacionado com o problema de encontrar soluções globais de sistema de equações diferenciais definido na variedade E. Na linguagem dos fibrados, interpretamos uma equação diferencial como uma seção $\Delta : J^k(\pi) \to \mathcal{D}$ onde $\rho : \mathcal{D} \to J^k(\pi)$ é um fibrado vetorial (há noções mais gerais, veja [25] página 515 definição 4.1). No caso projetivo o problema de quando G é grupo de simetria de Δ equivale a Δ ser seção $G-$invariante. Conseguiremos garantir que nas condições de uma ação projetiva e transversal a existência de um operador diferencial tal que todas as soluções invariantes de Δ estão em correspondência biunívoca com a soluções de $\widetilde{\Delta}$. Os dois seguintes resultados, extraídos do trabalho [1], formam o principal ferramental usado para justificar rigorosamente o método da soluções invariantes no caso de ações transversais em fibrados.

Teorema 4.4.1 (Classificação das Ações Transversas)**.** *Se um grupo de Lie G age transversalmente e suavemente em $\pi : E \to M$, onde π é uma submersão sobrejetiva, e ação de G em M é regular, então são válidas:*

i *A ação de G em E é regular e se $\widetilde{M}$ for Haussdorff também $\widetilde{E}$ será uma variedade Hausdorff;*

ii *$\widetilde{\pi} : \widetilde{E} \to \widetilde{M}$ é uma submersão tal que o diagrama abaixo comuta*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\pi_E} & \widetilde{E} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{\pi}} \\ M & \xrightarrow{\pi_M} & \widetilde{M} \end{array}$$

iii *Se $\pi : E \to M$ é um fibrado com fibra F também será um fibrado $\widetilde{\pi} : \widetilde{E} \to \widetilde{M}$ com mesma fibra F e*

iv *se π é fibrado, então será fortemente equivalente ao fibrado pullback $\pi : {\pi_M}^*(\widetilde{E}) \to M$ com ação canônica de G.*

Teorema 4.4.2 (Classificação das Seções Invariantes)**.** *Seja $\pi : E \to M$ uma submersão sobrejetiva e considere G agindo suavemente e transversalmente em E. Se ação em M é regular então para qualquer aberto $U \subset \widetilde{M}$ há uma correspondência biunívoca entre as seções suaves $\widetilde{s} : \widetilde{U} \to \widetilde{E}$ e as seções G-invariantes $s : \pi_M^{-1}(\widetilde{U}) \to E$.*

Segue abaixo um lema técnico que será usado para demonstrar os teoremas de classificação citados acima.

Lema 4.4.3. *Suponha que G aja suavemente e projetavelmente em $\pi : E \to M$, onde π é um mapa aberto, e que a ação em M seja regular. Dado $p \in E$ e V vizinhança de p existe $W \subset V$ vizinhança de p com a seguinte propriedade: para qualquer $q \in W$ e $r \in E$ tal que*

i *$\pi(r) \in \pi(W)$ e*

ii *$\pi(r)$ e $\pi(q)$ estão na mesma órbita em M,*

então existe $g \in G$ com $gq \in V$ e $\pi(gq) = \pi(r)$

Demonstração. A figura 4.2 abaixo ilustra as condições e conclusão do lema. Uma vez que $\pi(q)$ e $\pi(r)$ estão na mesma órbita existe $g \in G$ tal que $g\pi(q) = \pi(r)$ e dai tem-se $\pi(gq) = \pi(r)$. No entanto, não temos garantia que $gq \in V$. Esse é o ponto do lema, mostrar que tomando g próximo de 1 poderemos mover o ponto q para um ponto que está tanto na fibra de r quanto no aberto V.

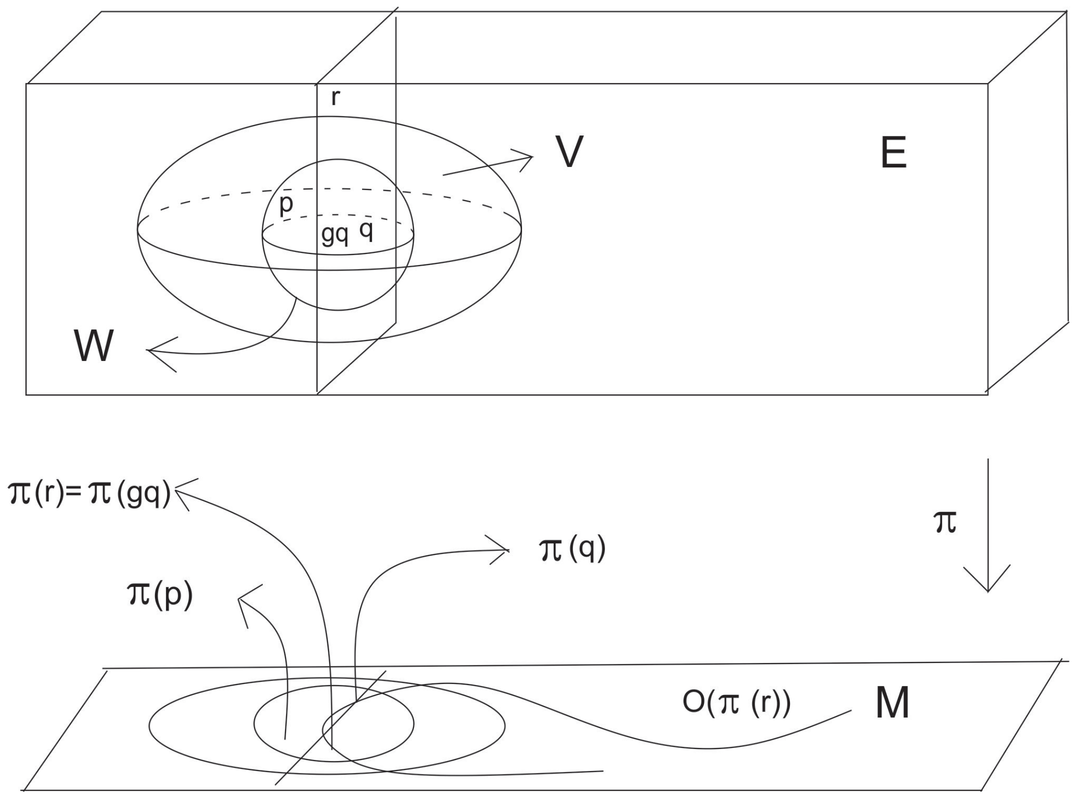

Figura 4.2: Condição do Lema

Tome vizinhança simétrica $A = A^{-1}$ com $A^2 \subset B$ do elemento $1 \in G$ e $V_0 \subset V$ vizinhança de p tal que $B \cdot V_0 \subset V$ (é possível obter o par (B, V_0) pois a ação de G em E é suave). Sejam

$$x = \pi(p), \quad \widetilde{x} = \pi_M(x) \in \widetilde{M}, \quad \widetilde{g} = G_x \in G/G_x$$

e seções contínuas

$$\zeta : \widetilde{W} \subset G/G_x \to G, \qquad \eta : \widetilde{V} \subset \widetilde{M} \to M$$

com $\zeta(\widetilde{g}) = 1, \quad \eta(\widetilde{x}) = x$ tal que $\chi : \widetilde{V} \times \widetilde{W} \to U$ dada por

$$\chi(\widetilde{h}, \widetilde{q}) = \zeta(\widetilde{h}) \cdot \eta(\widetilde{q})$$

seja um homeomorfismo com U aberto em M; já que a ação de G em M é regular isso é possível. Uma vez que o mapa $\pi : E \to M$ é aberto, podemos diminuir os abertos $\widetilde{V}, \widetilde{W}$ e U de modo que

$$U \subset \pi(V_0), \quad \zeta(\widetilde{W}) \subset A$$

(a última continência não necessita de hipótese sobre π). Afirmamos que o aberto

$$W = \pi^{-1}(U) \cap V_0$$

satisfaz as condições do lema. Seja $q \in W$ e $r \in E$ tal que $y = \pi(q)$ e $z = \pi(r)$ estão na mesma órbita e $z \in W$. Como $\pi(W) \subset U$ temos que $y, z \in U$ e, para certos elementos $\widetilde{h}, \widetilde{k} \in \widetilde{W}$ e $\widetilde{y}, \widetilde{z} \in \widetilde{V}$, y e z poderão ser escritos como

$$y = \chi(\widetilde{h}, \widetilde{y}) = \zeta(\widetilde{h}) \cdot \eta(\widetilde{y}) \quad \text{e} \quad z = \chi(\widetilde{k}, \widetilde{z}) = \zeta(\widetilde{k}) \cdot \eta(\widetilde{z}).$$

Como y está na mesma órbita de z as igualdades

$$q_M(y) = q_M(\zeta(\widetilde{h}) \cdot \eta(\widetilde{y})) = q_M(\eta(\widetilde{y})) = \widetilde{y} \text{ e}$$

$$q_M(z) = q_M(\zeta(\widetilde{k}) \cdot \eta(\widetilde{z})) = q_M(\eta(\widetilde{z})) = \widetilde{z}$$

permitem concluir que $\widetilde{y} = \widetilde{z}$. Uma vez que $\zeta(\widetilde{W}) \subset A$ tem-se que $g = \zeta(\widetilde{k})\zeta(\widetilde{h})^{-1} \in A \cdot A^{-1} \subset B$ e logo $gq \in B \cdot W \subset B \cdot V_0 \subset V$. Ou seja, conseguimos manter gq no aberto V valendo a igualdade

$$\pi(gq) = g \cdot \zeta(\widetilde{h}) \cdot \eta(\widetilde{y}) = \zeta(\widetilde{k}) \cdot \eta(\widetilde{y}) = \zeta(\widetilde{k}) \cdot \eta(\widetilde{z}) = z = \pi(r).$$

□

Proposição 4.4.4. *Considere G agindo suavemente e transversalmente em $\pi : E \to M$, onde π é um mapa aberto, $\widetilde{E}$ e $\widetilde{M}$ variedades suaves (não necessariamente Hausdorff) tal que $\pi_M : M \to \widetilde{M}$ seja submersão. Então se $\widetilde{M}$ for Hausdorff a variedade $\widetilde{E}$ será Hausdorff.*

Demonstração. Para mostrar esse resultado, dados órbitas disjuntas $\mathcal{O}(p) \cap \mathcal{O}(q) = \varnothing$ iremos encontrar abertos V e W, $G-$invariantes, que as separam, concluindo assim que

$$\widetilde{p} \in q_E(V), \quad \widetilde{q} \in q_E(W), \quad \text{e} \quad q_E(V) \cap q_E(W) = \varnothing$$

(a última conclusão seguindo do fato dos abertos V e W serem $G-$invariantes), com $q_E(V)$ e $q_E(W)$ abertos, uma vez que $\pi_E : E \to \widetilde{E}$ é um mapa aberto. Sejam $x = \pi(p)$ e $y = \pi(q)$. Se ocorrer

$$\mathcal{O}(x) \cap \mathcal{O}(y) = \varnothing,$$

então dado abertos disjuntos $\widetilde{V}, \widetilde{W} \subset \widetilde{M}$ contendo $\widetilde{x}$ e $\widetilde{y}$, respectivamente, os abertos

$$\pi^{-1}(\pi_M^{-1}(\overline{V})) \text{ e } \pi^{-1}(\pi_M^{-1}(\overline{V}))$$

são abertos disjuntos contendo $\widetilde{p}$ e $\widetilde{q}$ respectivamente (em geral, quando vale $\pi(gp) = g\pi(p) = gx$ para todo g, tem-se que $\mathcal{O}(p) \subset \pi^{-1}(\mathcal{O}(x))$ e quando $U \subset M$ é $G-$invariante necessariamente $\pi^{-1}(U)$ é invariante já que $\pi(p) = x \in U$ então $\pi(gp) = gx \in U$). A outra possibilidade,

$$\mathcal{O}(x) \cap \mathcal{O}(y) \neq \varnothing,$$

é possível de ser contornada devido a transversalidade juntamente com o resultado do lema anterior. Suponha, sem perda de generalidade, que $\pi(p) = \pi(q)$ (uma vez que $\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(y)$ e as restrições $\pi : \mathcal{O}(p) \to \mathcal{O}(x)$ e $\pi : \mathcal{O}(q) \to \mathcal{O}(x)$ são difeomorfismos em virtude da ação ser transversal).

Separando p de q por abertos disjuntos U e V, respectivamente, dados W e Z abertos como no lema anterior com relação aos abertos U e V, respectivamente, os abertos

$$Q_1 = GW \text{ e } Q_2 = GZ$$

separam as órbitas de p e de q respectivamente, são $G-$invariantes por construção e disjuntos. Com efeito são disjuntos, pois se $Q_1 \cap Q_2 \neq \varnothing$ conseguimos uma igualdade $hq = kr$ com $h \in W, r \in Z$ e certos elementos $h, k \in G$. Isso diz que $\pi(q)$ e $\pi(r)$ estão na mesma órbita em M e, devido as escolhas dos abertos W e Z dadas pelo lema anterior, conseguimos elemento $g \in G$ satisfazendo

$$gq \in U, \quad \pi(gp) = \pi(r) = \pi(k^{-1}hq)$$

de modo que a hipótese de transversalidade permite inferir a seguinte contradição

$$gp = k^{-1}gq = r \in U \cap Z \subset U \cap V = \varnothing,$$

concluindo que $\widetilde{E}$ é Hausdorff. $\square$

O seguinte lema dá a fórmula para construir seções invariantes de $\pi : E \to M$ quando tem-se G agindo transversalmente em π. No caso de uma ação projetiva $\pi : E \to M$, onde π é mapa aberto, é possível obter mapa aberto $\widetilde{\pi}$ tal que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\pi_E"] & M \arrow[d, "\pi_M"] \\ \widetilde{E} \arrow[r, "\widetilde{\pi}"] & \widetilde{M} \end{tikzcd}$$

Basta definir $\widetilde{\pi}(\pi_E(p)) = \pi_M \circ \pi(p)$. Observe que

$$\pi_M \circ \pi(gq) = \pi_M(g\pi(p)) = \pi_M \circ \pi(p) = \widetilde{\pi}(p),$$

mostrando que $\widetilde{\pi}$ está bem definida. Ela é contínua pois $\widetilde{\pi} \circ \pi_E = \pi_M \circ \pi$ é contínua e aberta pois $\widetilde{\pi}(\pi(U)) = \pi_M \circ \pi(U)$ e $\pi_M \circ \pi$ é aberto.

Lema 4.4.5. *Considere G agindo suavemente e transversalmente em $\pi : E \to M$, onde π é submersão. Se $\widetilde{p} \in \widetilde{E}$ e $x \in M$ satisfazem*

$$\widetilde{\pi}(\widetilde{p}) = \pi_M(x),$$

então existe um único $p \in E$ tal que

$$\widetilde{p} = \pi_E(p), \quad x = \pi(p).$$

Demonstração. Inicialmente existe $p_0 \in E$ tal que $\widetilde{p} = \pi_E(p_0)$, pois o mapa π_E é sobrejetor, e vale a igualdade

$$\pi_M(\pi(p_0)) = \widetilde{\pi}(\pi_E(p_0)) = \widetilde{\pi}(\widetilde{p}) = \pi_M(x),$$

de modo que existe $g \in G$ satisfazendo $x = g\pi(p_0)$. O elemento gp_0 satisfaz o requerido. Ele é único pois, se existirem p e q satisfazendo as hipóteses do teorema então $\pi_E(p) = \pi_E(q)$ de modo que $q = gp$ para algum g; juntando isso com $x = \pi(p), x = \pi(q)$ e a hipótese de transversalidade, concluímos de $\pi(p) = \pi(gp)$ que $p = gp = q$. $\square$

Quando a ação é transversal uma seção $\widetilde{s} : \widetilde{U} \subset \widetilde{M} \to \widetilde{E}$ corresponde a uma seção invariante $s : {\pi_M}^{-1}(\widetilde{U}) \subset M \to E$ que se relacionam pela fórmula

$$\widetilde{s}(\pi_M(x)) := \pi_E(s(x)). \tag{4.4.1}$$

Essa regra está bem definida pois sendo s $G-$invariante tem-se $s(gx) = gs(x)$ para todos g e x, de modo que $\pi_E(s(x)) = \pi_E(gs(x)) = \pi_E(s(gx))$. Para obter s a partir de $\widetilde{s}$ de modo que valha (4.4.1), para cada $x \in M$ precisamos obter $p_x \in E$ tal que

$$\pi_E(p_x) = \widetilde{s}(\pi_M(x)) = \widetilde{p} \quad \text{e} \quad \pi(p_x) = x.$$

Uma vez que $\widetilde{\pi}(\widetilde{p}) = \pi_M(x)$ o lema anterior garante que existe um único p_x satisfazendo o requerido. A seção s será dada por

$$s(x) = p_x.$$

A unicidade do lema anterior nos garante que de fato temos uma seção invariante pois, em virtude do ponto gp_x satisfazer

$$\pi_E(gp_x) = \pi_E(p_x) = \widetilde{s}(\pi_M(x)) = \widetilde{s}(\pi_M(gx)), \quad \pi(gp_x) = g\pi(p_x) = gx,$$

concluímos, pela definição de s, que

$$s(gx) = gp_x = gs(x).$$

Mostramos, portanto, a associação biunívoca $\widetilde{s} \to s$. Quando π é uma submersão naturalmente qualquer seção $s : U \subset M \to E$ é suave, em virtude de $\pi \circ s = I_M$ ser suave. Quando temos s invariante a suavidade de $\widetilde{s}$ seguirá quando $\widetilde{\pi}$ for uma submersão, caso este que estaremos trabalhando. Fica portanto estabelecido 4.4.2 a menos da suavidade de $\widetilde{\pi}$.

Para demonstrar a regularidade da ação de G em E a partir da regularidade de G em M necessitamos construir seções de acordo com a equivalência dada em 1.9.17. O passo inicial vem na seguinte proposição que nos mostra como seções suaves $\eta : \widetilde{V} \subset \widetilde{M} \to M$ nos dá seções contínuas $\eta_E : \widetilde{\pi}^{-1}(\widetilde{V}) \subset \widetilde{E} \to E$.

Proposição 4.4.6. *Se G age suavemente transversalmente em $\pi : E \to M$ e $\widetilde{M}$ é variedade suave tal que π_M seja submersão, dado seção $\eta : \widetilde{V} \subset \widetilde{M} \to M$ existe uma única seção $\eta_E : \widetilde{\pi}^{-1}(\widetilde{V}) \subset \widetilde{E} \to E$ tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\pi}^{-1}(\widetilde{V}) \arrow[r, "\eta_E"] \arrow[d, "\widetilde{\pi}"] & E \arrow[d, "\pi"] \\ \widetilde{V} \arrow[r, "\eta"] & M \end{tikzcd}$$

comuta e essa seção é contínua.

Demonstração. Observe que uma seção $\eta_E : \widetilde{U} \subset \widetilde{E} \to E$ induz uma seção $\eta : \widetilde{\pi}(\widetilde{U}) \to M$ pondo $\eta(\widetilde{\pi}(\widetilde{p})) = \pi \circ \eta_E(\widetilde{p})$ de modo que seja natural que comecemos da igualdade $\eta \circ \widetilde{\pi} = \pi \circ \eta_E$ a fim de obter a seção η_E. Nessas condições, para que $\eta_E(\widetilde{p}) = p$ é necessário que

$$\pi_E(p) = \widetilde{p} \;\text{ e }\; \pi \circ \eta_E(p) = \eta \circ \widetilde{\pi}(\widetilde{p}).$$

Seja dado $\widetilde{p} \in \widetilde{\pi}^{-1}(\widetilde{V})$ e escreva $x = \eta \circ \widetilde{\pi}(\widetilde{p})$. Uma vez que vale a igualdade $\pi_M(x) = \widetilde{\pi}(\widetilde{p})$ o lema 4.4.5 garante que existe um único p tal que

$$\widetilde{p} = \pi_E(p) \ \text{ e } \ x = \pi(p).$$

Defina $\eta_E(\widetilde{p}) = p$. Claramente η_E é uma seção tal que o diagrama acima comuta. A intenção dessa proposição segue no caminho de provar que $\widetilde{E}$ admite uma estrutura de diferenciabilidade tal que π_E seja submersão; desse modo é necessário que η_E seja contínua e esse tipo de seção deve existir a fim de que a ação de G em E seja regular. Passemos a provar essa última parte. Seja U aberto em E. Para verificar que η_E é contínua, dado ponto $\widetilde{p}$ tal que $\eta_E(\widetilde{p}) \in U$, mostraremos que existe aberto $\widetilde{W} \subset \widetilde{\pi}^{-1}(\widetilde{V})$ contendo $\widetilde{p}$ de modo que $\eta_E(\widetilde{W}) \subset U$, como usual. Para termos $\eta_E(\widetilde{q}) = q \in U$ necessariamente deve ocorrer

$$\widetilde{q} \in \pi_E(U) \cap (\eta \circ \widetilde{\pi})^{-1} \circ \pi(U)$$

(pois $\pi_E \circ \eta_E = 1$ e devido a comutatividade do diagrama acima). Dado ponto $\widetilde{q}$ nessa intersecção, existem $q_1, q_2 \in U$ satisfazendo

$$\pi_E(q_1) = \widetilde{q} \ \text{ e } \ \pi(q_2) = \eta \circ \widetilde{\pi}(\widetilde{q}). \tag{4.4.2}$$

Se tivéssemos $q_1 = q_2$ então necessariamente $\eta_E(\widetilde{q}) = q_1 = q_2 \in U$ como gostaríamos. Ou se para algum g, gq_1 fosse tal que $\pi(q_2) = \pi(gq_1)$ e $gq_1 \in U$, então

$$\pi_E(gq_1) = \pi_E(q_1) = \overline{q} \ \text{ e } \ \pi(gq_1) = \pi_E(q_2) = \eta \circ \widetilde{\pi}(\widetilde{q})$$

e novamente temos $\eta_E(\widetilde{q}) = gq_1 \in U$. Observe que $\pi(q_1)$ e $\pi(q_2)$ estão na mesma órbita, pois aplicando $\widetilde{\pi}$ e π_M nas equações dadas em (4.4.2), respectivamente, obtêm-se

$$\widetilde{\pi} \circ \pi_E(q_1) = \pi_M(\pi(q_1)) = \widetilde{\pi}(\widetilde{q}) \ \text{ e } \ \pi_M(\pi_E(q_2)) = \pi_M \circ \eta \circ \widetilde{\pi}(\widetilde{q}) = \widetilde{\pi}(\widetilde{q}).$$

Dessa forma, se tomarmos $W \subset U$ vizinhança de $\eta_E(\widetilde{p})$ dado pelo lema 4.4.3, de acordo com o que argumentamos, teremos que

$$\widetilde{W} = \pi_E(W) \cap (\eta \circ \widetilde{\pi})^{-1} \circ \pi(W)$$

é aberto satisfazendo $\eta_E(\widetilde{p}) \in \eta_E(\widetilde{W}) \subset U$ como queríamos.

□

Corolário 4.4.7. *Se G age transversalmente em $\pi : E \to M$, π submersão, e G age regularmente em M, então a ação de G em E é regular.*

Demonstração. A ação é semi-regular, pois a órbita de um ponto $p \in E$ é difeomorfa, via a restrição de π, à órbita de $\pi(p)$, de acordo com a proposição 4.3.6 e, uma vez que órbitas em M tem mesma dimensão, o mesmo ocorrerá com as $E-$órbitas. Dado $p \in E$, sendo $x = \pi(p)$, podemos encontrar seções suaves

$$\zeta : \widetilde{W} \subset G/G_x \to G, \qquad \eta : \widetilde{V} \subset \widetilde{M} \to M$$

com $\zeta(G_x) = 1$, $\eta(\pi_M(x)) = x$ tal que $\chi : \widetilde{V} \times \widetilde{W} \to U$ dada por

$$\chi(\widetilde{g}, \widetilde{y}) = \zeta(\widetilde{g}) \cdot \eta(\widetilde{y})$$

é um homeomorfismo suave (logo difeomorfismo), uma vez que G age regularmente em M. Seja η_E a seção correspondente a η dada pela proposição anterior. Com essa seção e a seção ζ temos os ingredientes necessários para mostrar que a ação de G em M é regular; verificaremos que a função

$$\chi_E : \widetilde{W} \times \widetilde{\pi}^{-1}(\widetilde{V}) \to E$$

definida naturalmente por

$$\chi_E(\widetilde{g}, \widetilde{q}) = \zeta(\widetilde{g}) \cdot \eta_E(\widetilde{q})$$

é um homeomorfismo. De fato η_E passa por p, pois sendo $\pi_E(p) = \widetilde{p}$ ($\in \widetilde{\pi}^{-1}(\widetilde{V})$, pois $\widetilde{\pi}(\pi_E(p)) = \pi_M \circ \pi(p) = \pi_M(x) \in \widetilde{V}$), temos

$$\eta \circ \widetilde{\pi}(\widetilde{p}) = \eta \circ \widetilde{\pi} \circ \pi_E(p) = \eta \circ \pi_M \circ \pi(p) = \eta \circ \pi_M(x) = x$$

(essa última igualdade deve seguir pois sendo $\eta(\widetilde{y}) = x$ então $\widetilde{y} = \pi_M(\eta(\widetilde{y})) = \pi_M(x)$ e esse tal $\widetilde{y}$ deve existir pois η passa por x) de modo que a proposição anterior nos garante que $\eta_E(\widetilde{p}) = p$. Avaliando o digrama

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{W} \times \widetilde{\pi}^{-1}(\widetilde{V}) \arrow[r, "\chi_E"] \arrow[d, "I_d \times \widetilde{\pi}"] & E \arrow[d, "\pi"] \\
\widetilde{W} \times \widetilde{V} \arrow[r, "\chi"] & M
\end{tikzcd}$$

vemos que ele comuta,

$$(\pi \circ \chi_E(\widetilde{g}, \widetilde{p}) = \pi(\zeta(\widetilde{g}) \cdot \eta_E(\widetilde{p})) = \zeta(\widetilde{p}) \cdot \pi \circ \eta_E(\widetilde{p}) = \zeta(\widetilde{g}) \cdot \eta \circ \widetilde{\pi}(\widetilde{p}) = \chi \circ (I_d \times \widetilde{\pi})(\widetilde{g}, \widetilde{p})).$$

Se a função χ_E admite uma inversa e $\chi_E^{-1}(p) = (\widetilde{g}, \widetilde{p})$ então

$$\pi_E(p) = \pi_E \circ \chi_E(\widetilde{g}, \widetilde{p}) = \pi_E(\zeta(\widetilde{g}) \cdot \eta_E(\widetilde{p})) = \pi_E(\eta_E(\widetilde{p})) = \widetilde{p},$$

consequentemente tem-se que $\chi_E^{-1}(p) = (*, \pi_E(p))$. Por outro lado o diagrama sugere que a primeira coordenada de χ_E^{-1} tem a forma

$$p \to \mathrm{pr}_1 \circ \chi^{-1}(\pi(p)).$$

Devido as obervações anteriores a função contínua

$$\Psi : p \to (\mathrm{pr}_1 \circ \chi^{-1}(\pi(p)), \pi_E(p))$$

é candidata a ser a inversa de χ_E. Verificando

$$\Psi \circ \chi_E = (\mathrm{pr}_1 \circ \chi^{-1} \circ \pi \circ \chi_E) \times (\pi_E \circ \chi_E) = 1 \times 1$$

pois $\pi \circ \chi_E = \chi \circ (1 \times \widetilde{\pi})$ e χ_E é seção de π_E. Para finalizar, basta mostrar que $\chi_E \circ \Psi = 1$. Escrevendo $\Psi(p) = (\widetilde{g}, \widetilde{p})$ temos

$$\chi_E \circ \Psi(p) = \zeta(\widetilde{g}) \cdot \eta_E(\widetilde{p})$$

logo, usando a fórmula de Ψ, a comutatividade do diagrama acima e a igualdade $\widetilde{\pi} \circ \pi = \pi_M \circ \pi$ obtemos as igualdades

$$\pi_E(\chi_E \circ \Psi(p)) = \pi_E(\eta_E(\widetilde{p})) = \widetilde{p} = \pi_E(p) \tag{4.4.3}$$

e

$$\pi(\chi_E \circ \Psi(p)) = \chi \circ (1 \times \widetilde{\pi}) \circ \Psi(p) = \chi(pr_1 \circ \chi^{-1} \circ \pi(p), \widetilde{\pi} \circ \pi_E(p)) =$$

$$= \chi(\mathrm{pr}_1 \circ \chi^{-1}(\pi(p)), \pi_M(\pi(p))) = \pi(p) = x; \tag{4.4.4}$$

escrevendo $\pi(p) = x$, temos $\pi_M(x) = \pi_M \circ \pi(p) = \widetilde{\pi} \circ \pi_E(p) = \widetilde{\pi}(\widetilde{p})$ de modo que em acordo com lema 4.4.5 o ponto p é único satisfazendo

$$\pi_E(p) = \widetilde{p}, \pi(p) = x,$$

e observe pelas igualdades (4.4.7) e (4.4.4) que o ponto $\chi_E \circ \Psi(p)$ também satisfaz essa propriedade. Portanto $\chi_E \circ \Psi = 1$. □

Concluímos que nas condições de uma ação transversal tal que $\widetilde{M}$ seja variedade suave (não necessariamente Hausdorff) poderemos garantir que $\widetilde{E}$ será uma variedade suave em virtude do corolário anterior, que garante a regularidade da ação de G em E. Com isso tem-se que

$$\widetilde{\pi} : \widetilde{E} \to \widetilde{M}$$

é suave, pois $\widetilde{\pi} \circ \pi_E = \pi_M \circ \pi$ é suave e π_E é submersão. De fato $\widetilde{\pi}$ é submersão:

Proposição 4.4.8. *Se G age regularmente nas variedades E e M, $\pi : E \to M$ é submersão, e a ação é projetiva, então está bem definida a função $\widetilde{\pi} : \widetilde{E} \to \widetilde{M}$, dada por $\widetilde{\pi}(\pi_E(p)) = \pi_M(\pi(p))$ e, além disso, essa função é uma submersão.*

Demonstração. Para provar que $\widetilde{\pi}$ é submersão, observamos um fato geral: se $\pi : E \to M$ é uma submersão, então dado $X \in T_pE$ existe seção $s : U \subset M \to E$ tal que $s_*(Y) = X$ para algum Y. Com efeito, dado arbitrariamente $p \in E$ tome cartas $(\phi = \psi \times \chi, U), (\psi, V)$ ao redor de p e $\pi(p)$, respectivamente, tais que

$$\psi \circ \pi \circ \phi^{-1}(z, u) = x.$$

Sendo $\phi(U) = \psi(V) \times W$, dado $X \in T_pE$, $\phi_*(X) = (X_1, X_2)$, tome função $f : \psi(V) \to W$ com $f_*(X_1) = X_2$ (pode-se tomar f linear satisfazendo $f(X_1) = X_2$, por exemplo). A seção $z \to (z, f(z))$ corresponde a uma seção $s : x \to \phi^{-1}(\psi(x), f(\psi(x))$ satisfazendo $s_*(Y) = X$ onde $Y = \psi_*^{-1}(X_1)$, pois

$$s_*(Y) = \phi_*^{-1}(\psi_*(Y), f_*(\psi_*(Y))) = \phi_*^{-1}(X_1, X_2) = X;$$

de fato é uma seção pois a igualdade

$$\psi \circ \pi \circ s(x) = \psi \circ \pi \circ \phi^{-1}(\psi(x), f(\psi(x)) = \psi(x)$$

permite concluir que $\pi \circ s = I_M$. Voltando ao problema inicial, dado $\widetilde{X} \in T_{\widetilde{\pi}(\widetilde{p})}\widetilde{M}$ tome $Y \in T_pE$ tal que $\widetilde{X} = (\pi_M \circ \pi)_*(Y)$ e seção s de π_E tal que $s_*(\widetilde{Y}) = Y$ para algum $\widetilde{Y} \in \widetilde{E}$. Então

$$\widetilde{\pi}_*(\widetilde{Y}) = (\widetilde{\pi} \circ \pi_E)_* \circ s_*(\widetilde{Y}) = (\pi_M \circ \pi)_*(Y) = \widetilde{X},$$

concluindo que $\widetilde{\pi}$ é submersão. □

Os resultados obtidos até agora só exigem que $\pi : E \to M$ seja uma submersão no qual G age transversalmente e suavemente. No caso de π ser um fibrado podemos dizer mais, que $\widetilde{\pi}$ é um fibrado com mesma fibra de π. Segue abaixo uma definição e alguns resultados elementares que serão usados para mostrar a última afirmação.

Definição 4.4.9. *Seja $\pi : E \to M$ um fibrado e*

$$\Psi : \pi^{-1}(W) \to W \times F$$

trivialização local de π, $\Psi(p) = (\pi(p), \psi(p))$. Diremos que Ψ é $G-$invariante quando ocorrer

$$\Psi(gp) = (\pi(gp), \psi(p)),$$

sempre que ambos os lados estiverem definidos.

A noção de invariância fica mais clara definindo a ação local em $W \times F$ por $g \cdot (x, f) = (gx, f)$. Nessas condições a trivialização é invariante se ocorrer

$$g \cdot \Psi(p) = \Psi(gp).$$

(1) Uma trivialização invariante local de π nos dá uma trivialização $\widetilde{\pi}$. Veja o diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(W) \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "\pi_E"] & W \times F \arrow[d, "\pi_M \times 1"] \\ \pi_E(\pi^{-1}(W)) \arrow[r, "\overline{\Psi}"] & \pi_M(W) \times F \end{tikzcd}$$

onde $\widetilde{\Psi}(\widetilde{p}) := \pi_M \times 1(\Psi(p))$. Observe que

$$\pi_M \times 1(\Psi(gp)) = (\pi_M(\pi(gp)), \psi(gp)) = (\pi_M(\pi(p)), \psi(p)) = \pi_M \times 1(\Psi(p))$$

de modo que $\widetilde{\Psi}$ está bem definida e é suave pois $\widetilde{\Psi} \circ \pi = (\pi_M \times I_d) \circ \Psi$ é suave.

(2) É válida a igualdade

$$\pi_E(\pi^{-1}(W)) = \widetilde{\pi}^{-1}(\pi_M(W)).$$

Escrevendo $\pi_E(\pi^{-1}(W)) = X$ teremos

$$\widetilde{\pi}(X) = \widetilde{\pi} \circ \pi_E(\pi^{-1}(W)) = \pi_M \circ \pi(\pi^{-1}(W)) = \pi_M(W),$$

concluindo que $X \subset \widetilde{\pi}^{-1}(\pi_M(W))$. Por outro lado, dado $\widetilde{p} \in \widetilde{\pi}^{-1}(\pi_M(W))$ então $\widetilde{\pi}(\widetilde{p}) = \pi_M(x)$, com $x \in W$. O Lema 4.4.5 garante que existe um único p satisfazendo $\pi_E(p) = \widetilde{p}$ e $\pi(p) = x \in W$. Observe que $\overline{p} = \pi_E(p) \in \pi_E(\pi^{-1}(W))$, concluindo a outra continência.

(3) A função $\widetilde{\Psi}$ é um difeomorfismo. Ela é sobrejetiva por construção e quando ocorrer $\widetilde{\Psi}(\widetilde{p}) = \widetilde{\Psi}(\widetilde{q})$ deve valer

$$(\pi_M(\pi(p)), \psi(p)) = (\pi_M(\pi(q)), \psi(q)),$$

de modo que $\pi(p) = \pi(gq)$ para algum $g \in G$, acarretando em

$$\Psi(gq) = (\pi(gq), \psi(gq)) = (\pi(p), \psi(q)) = \Psi(\pi(p), \psi(p)) = \Psi(p),$$

e sendo Ψ difeomorfismo então $gq = p$ e logo $\widetilde{p} = \widetilde{q}$. Portanto $\widetilde{\Psi}$ é bijeção. De fato é um difeomorfismo, pois $(\pi_M \times I_d)_* \circ \Psi_*$, $(\pi_E)_*$ são sobrejetivas e vale a igualdade $\widetilde{\Psi}_* \circ (\pi_E)_* = (\pi_M \times I_d)_* \circ \Psi_*$, mostrando que $\widetilde{\Psi}_*$ é sobrejetiva e logo bijetiva.

O próximo resultado, inspirado nas observações anteriores, constroe trivializações invariantes pela ação de G de modo a cobrir todo o espaço E.

Proposição 4.4.10. *Se G age suavemente e transversalmente em um fibrado $\pi : E \to M$ e $\widetilde{M}$ é uma variedade suave, então $\widetilde{\pi} : \widetilde{E} \to \widetilde{M}$ será um fibrado com mesma fibra de π.*

Demonstração. Iremos mostrar que para cada ponto $p_0 \in E$ é possível obter uma trivialização invariante por G. Com isso, as últimas observações garantem que $\widetilde{\pi}$ será um fibrado com mesma fibra de π. Uma vez que π é um fibrado e a ação de G em M é regular para cada ponto $p_0 \in E$ é possível obter aberto trivializante U de $x_0 = \pi(p_0)$ e seções suaves

$$\zeta : \widetilde{W} \subset G/G_{x_0} \to G \quad \text{e} \quad \eta : \widetilde{V} \subset \widetilde{M} \to M$$

com $\zeta(G_{x_0}) = 1$, $\eta(\pi_M(x_0)) = x_0$ tal que $\chi : \widetilde{V} \times \widetilde{W} \to U$ dada por

$$\chi(\widetilde{g}, \widetilde{q}) = \zeta(\widetilde{g}) \cdot \eta(\widetilde{q})$$

é um difeomorfismo. Considere as funções dadas no diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd}
(\widetilde{V} \arrow[dd, "pr_1"] & \times & \widetilde{W}) \arrow[d, "pr_2"] & U \arrow[l, "\chi^{-1}"'] \arrow[d, "\lambda"] \arrow[dd, bend left, "\sigma"] \\
 & & \widetilde{W} \arrow[r, "\eta"] & M \\
\widetilde{V} \arrow[rrr, "\zeta"] & & & G
\end{tikzcd}$$

$$\sigma(x) = \zeta \circ \mathrm{pr}_1 \circ \chi^{-1}(x) \ \text{ e } \ \lambda(x) = \eta \circ \mathrm{pr}_2 \circ \chi^{-1}(x).$$

Se $\chi(\widetilde{g}, \widetilde{q}) = \zeta(\widetilde{g}) \cdot \eta(\widetilde{q}) = x$ então $\lambda(x) = \eta(\widetilde{q}) = \eta(\pi_M(x))$, seguindo que λ é $G-$invariante e $\lambda(U) \subset U$. Além disso vale a igualdade

$$\lambda(x) = \zeta(\widetilde{q})^{-1} \cdot x = \sigma(x)^{-1} \cdot x$$

Se $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times F$, é trivialização ao redor de $x \in M$, $\Phi(p) = (\pi(p), \phi(p))$, definindo

$$\psi(p) = \phi(\sigma(\pi(p))^{-1} \cdot p)$$

o mapa $\Psi(p) = (\pi(p), \psi(p))$ é trivialização $G-$invariante. Com efeito, dado $p \in \pi^{-1}(U)$ e g tal que $gp \in \pi^{-1}(U)$, escrevendo $x = \pi(p)$, as igualdades

$$\pi(\sigma(\pi(gp)))^{-1} \cdot gp) = \sigma(gx)^{-1} \cdot gx = \lambda(gx) = \lambda(x) = \sigma(x)^{-1} \cdot x = \pi(\sigma(x)^{-1} \cdot p) \text{ e}$$

$$\pi_E(\sigma(\pi(gp)))^{-1} \cdot gp) = \pi_E(p)$$

juntamente com o lema 4.4.5 nos garante que

$$\psi(gp) = \psi(p).$$

Uma vez que

$$\Psi(p) = (\pi(p), \phi(\sigma(x)^{-1} \cdot p)) = (\sigma(x) \cdot \pi(\sigma(x)^{-1} \cdot p), \phi(\sigma(x)^{-1} \cdot p)) = (x, f)$$

então $(\lambda(x), f) = (\pi(\sigma(x)^{-1} \cdot p), \phi(\sigma(x)^{-1} \cdot p)) = \Phi(\sigma(x)^{-1} \cdot p)$ de modo que aplicando Φ^{-1} em ambos os lados da última igualdade obtemos a inversa de Ψ

$$\Psi^{-1}(x, f) = \sigma(x) \cdot \Phi^{-1}(\lambda(x), f)$$

concluindo o resultado. □

Corolário 4.4.11. *Considere $\pi : E \to M$ fibrado vetorial no qual G age transversalmente e suavemente e, para todo $g \in G$ e $x \in M$, $g : E_x \to E_{gx}$ seja isomorfismo de espaços vetoriais (diremos que G age por automorfismos). Então o fibrado $\widetilde{\pi} : \widetilde{E} \to \widetilde{M}$ é um fibrado vetorial e $0 \in E_x$ é o zero da fibra E_x se, e somente se, $\widetilde{0}$ for zero da fibra $\widetilde{E}_{\widetilde{\pi}(\widetilde{0})}$.*

Demonstração. Este corolário segue imediatamente da proposição anterior, pois se $\Phi(p) = (\pi(p), \phi(p))$ é trivialização com ϕ isomorfismo em cada fibra e $\Psi(p) = (\pi(p), \phi(\sigma(\pi(p))^{-1} \cdot p)$ trivialização G invariante associada dada pela proposição anterior então, como a função $p \to \phi(\sigma(\pi(p))^{-1} \cdot p)$ é linear quando restrita as fibras E_x, já que $g : E_x \to E_{gx}$ é isomorfismo linear para todo $g \in G$ e $x \in M$, e as trivializações de $\widetilde{\pi}$ são dadas por

$$\widetilde{\Psi}(\widetilde{p}) = (\pi_M(\pi(p)), \phi(\sigma(\pi(p))^{-1} \cdot p),$$

concluímos que

$$\mathrm{pr}_2 \circ \widetilde{\Psi} : \widetilde{E}_{\widetilde{\pi}(\widetilde{q})} \to \mathbb{R}^n$$

é isomorfismo quando restrito a fibra $\widetilde{E}_{\widetilde{\pi}(\widetilde{q})}$ para cada $\widetilde{q}$, mostrando que $\widetilde{\pi}$ é vetorial. Mais ainda, dado $0 \in E_{\pi(0)}$ o elemento nulo do espaço vetorial $E_{\pi(0)}$, temos que ele está no domínio de alguma carta Ψ e

$$\widetilde{\Psi}(\widetilde{0}) = (\widetilde{\pi}(\widetilde{0}), \mathrm{pr}_2 \circ \Psi(0)) = (\widetilde{\pi}(\widetilde{0}), 0),$$

concluindo que $\widetilde{0}$ é o zero da sua respectiva fibra. Reciprocamente, seja $p \in E$ tal que $\widetilde{p}$ é zero da sua fibra $\widetilde{E}_{\widetilde{\pi}(\widetilde{p})}$. Como

$$\widetilde{\Psi}(\widetilde{p}) = (\widetilde{\pi}(\widetilde{0}), 0),$$

temos que $\phi(\sigma(\pi(p))^{-1} \cdot p) = 0$, concluindo que p é zero de sua fibra $E_{\pi(p)}$.

□

A próxima proposição completa a demonstração de 4.4.1 e a seguinte definição se faz necessário: se $\pi_i : E_i \to M$ são dois fibrados nos quais G age projetavelmente então E_1 é **fortemente equivalente** a E_2 se existe um difeomorfismo ψ equivariante de E_1 para E_2 ($\psi(gp) = g\psi(p)$), que cobre a identidade de M, ou seja, $\pi_2 \circ \psi = \pi_1$.

Proposição 4.4.12. *Se G age transversalmente e regularmente no fibrado $\pi : E \to M$, então $\pi : E \to M$ é fortemente equivalente ao fibrado pulback $pr_1 : \pi_M^*(\widetilde{E}) \to M$ com a ação canônica de G.*

Demonstração. Lembremos que o conjunto

$$\pi_M^*(\widetilde{E}) = \{(x, \widetilde{p}) \in M \times E/G; \quad \pi_M(x) = \widetilde{\pi}(\widetilde{p})\}$$

(veja exemplo 3.1.5). Uma função natural de E para $M \times \widetilde{E}$ é dada por

$$\psi(p) = (\pi(p), \pi_E(p)),$$

veja o diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\pi"] & \pi_M^*(\widetilde{E}) \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\ M \arrow[r, "I_d"] & M \end{tikzcd}$$

O diagrama é bem definido, pois a imagem de ψ está contida em $\pi_M^*(\widetilde{E})$ já que $\pi_M(\pi(p)) = \widetilde{\pi}(\pi_E(p))$. Mais que isso, a restrição de $\psi : E \to \pi_M^*(\widetilde{E})$ é uma bijeção pois só existe um ponto que está numa mesma fibra e órbita dadas, em outras palavras, o lema 4.4.5 nos garante que dado x com $\pi_M(x) = \widetilde{\pi}(\widetilde{p})$ então existe único ponto p satisfazendo $\pi_E(p) = \widetilde{p}$ e $\pi(p) = x$, de modo que se

$$\psi(p) = (\pi(p), \pi_E(p)) = (x, \widetilde{p}) = (\pi(q), \pi_E(q)) = \psi(q),$$

então necessariamente $p = q$, pois ambos p, q satisfazem a condição do lema 4.4.5. Observe que essa função satisfaz

$$\psi(gp) = (\pi(gp), \pi_E(gp)) = (g\pi(p), \pi_E(p)) = g(\pi(p), \pi_E(p)) = g\psi(p)$$

pois aqui consideramos a ação canônica de G em $M \times \widetilde{E}$, dada por $g(x, y) = (gx, y)$, mostrando que a função ψ é **equivariante**. O diagrama acima comuta,

$$\mathrm{pr}_1 \circ \psi(p) = \pi(p),$$

mostrando que ψ **cobre a identidade** de M. Resta apenas verificar que ψ é um difeomorfismo. Para isso mostraremos que ψ_* é injetiva e usaremos o resultado 1.3.12 para concluir que ψ será um difeomorfismo. Dado $X \in T_pE$ se $\psi_*(X) = 0$, então ambos $\pi_*(X)$ e $(\pi_E)_*(X)$ se anulam, de modo que X é vertical e ao mesmo tempo pertence a $T_p\mathcal{O}(p) = \ker(\pi_E)_*$ e, consequentemente, a proposição 4.3.5, nos garante que $X = 0$. $\square$

Dados $(x, \widetilde{p}), (x, \widetilde{q}) \in \pi_M^*(\widetilde{E}) = X$ que estejam na mesma fibra, podemos, via o difeomorfismo ψ dado pela proposição anterior, definir uma soma e multiplicação por escalar em X_x pondo

$$(x, \widetilde{p}) + (x, \widetilde{q}) = \psi(\psi^{-1}(x, \widetilde{p}) + \psi^{-1}(x, \widetilde{q})) \text{ e}$$

$$a(x, \widetilde{p}) = \psi(a\psi^{-1}(x, \widetilde{p})).$$

É simples notar que as operações acima estão bem definidas, já que uma vez que $\psi^{-1}(x, \widetilde{p}), \psi^{-1}(x, \widetilde{q}) \in E_x$ então podemos soma-los, e definem um estrutura de espaço vetorial em X_x. Com isso podemos garantir que $\pi_M^*(\widetilde{E}) \to M$ é um fibrado vetorial.

No caso em que a ação de G em π se comporta bem com relação a estrutura de espaço vetorial de cada fibra, então garantimos que $\widetilde{\pi}$ é fibrado vetorial. Mas se a ação de G não se comportar bem com relação a essa estrutura, ainda podemos garantir que $\widetilde{\pi}$ é fibrado vetorial?

4.5 Soluções Invariantes de Equações Diferencias Definidas em Fibrados

Aplicaremos os resultados obtidos na seção anterior para demonstrar que dado um operador diferencial com relação a um fibrado $\pi : E \to M$, no qual G age suavemente e transversalmente, digamos $\Delta : J^k(\pi) \to \mathcal{D}$, com $\rho : \mathcal{D} \to J^k(\pi)$ fibrado vetorial, existe um único operador diferencial $\widetilde{\Delta} : \widetilde{I^k(\pi)} \to \mathcal{D}_I$, onde $\mathcal{D}_I \to I^k(\pi)$ é um subfibrado de ρ, de modo que todas as soluções invariantes de Δ são obtidas através das soluções de $\widetilde{\Delta}$ e reciprocamente.

Teorema 4.5.1. *Suponha que G age suavemente e transversalmente em $\pi : E \to M$. Então*

(a) *$I^k(\pi)$ é uma subvariedade invariante e mergulhada de $J^k(\pi)$;*

(b) *A ação de G em $I^k(\pi)$ é transversal e regular com relação a restrição da submersão $\pi_0^k : I^k(\pi) \to E$;*

(c) *$\widetilde{I^k(\pi)}$ é difeomorfo a $J^k(\widetilde{\pi})$;*

(d) *$\pi_k : I^k(\pi) \to M$ é um fibrado com mesma fibra de $J^k(\widetilde{\pi})$ no qual G age transversalmente, mais que isso, é equivalente ao fibrado pullback $\pi_M^*(J^k(\widetilde{\pi}))$.*

Demonstração. **(a)** Sabemos que $J^k(\pi) \subset J^kE$ é aberto. Uma vez que $I^k(\pi) = I^k \cap J^k(\pi)$ temos que $I^k(\pi)$ é aberto em I^k e, este por sua vez sendo uma subvariedade mergulhada de $J^k(E)$, permite concluir que $I^k(\pi)$ é uma subvariedade mergulhada de J^kE. Como está contida no aberto $J^k(\pi)$ é, portanto, uma subvariedade mergulhada de $J^k(\pi)$. Para finalizar o primeiro item, seja dado seção local invariante $s : U \to E$. Colocando $r(x) = gs(g^{-1}x)$, $r : g(U) \to E$, então r é seção local invariante, pois se $hx \in gU$, então $g^{-1}x \in U$ e $g^{-1}hg(g^{-1}x) \in U$ de modo que

$$hr(x) = hgs(g^{-1}x) = g(g^{-1}hg)s(g^{-1}x) = gs(g^{-1}hgg^{-1}x) = gs(g^{-1}hx) = r(hx),$$

onde usamos o fato de s ser invariante. Então $g \cdot j^k s(x) = j^k r(gx)$ concluindo que $I^k(\pi)$ é $G-$invariante (isso é válido mesmo para ações não projetivas e a demonstração é muito simples).

(b) A ação de G em $I^k(\pi)$ é a restrição da ação de G em I^k, que por sua vez é transversal de acordo com o exemplo 4.3.7. Logo a ação de G em $I^k(\pi)$ é transversal. O Teorema 4.4.7 garante, portanto, que a ação de G em $I^k(\pi)$ é regular, uma vez que a ação de G em E é regular.

(c) Para mostrar o terceiro item vamos concluir que a restrição de $\pi^{(k)} : I^k/G \to J^k(\widetilde{E})$ a $I^k(\pi)$ define o difeomorfismo

$$\rho = \pi^{(k)} : \widetilde{I^k(\pi)} \to J^k(\widetilde{\pi})$$

dado por $\rho(\widetilde{j^k s(x)}) = j^k \widetilde{s}(\pi_M(x)))$, onde $\widetilde{s}$ é dado pelo teorema 4.4.2. Para ver isso, seja $\Gamma = \mathrm{Im}\ s$. Então,

$$\rho(\widetilde{j^k s(x)}) = \rho(\widetilde{j^k_{s(x)}\Gamma)}) = j^k_{\widetilde{s(x)}}(\widetilde{\Gamma}) = j^k\widetilde{s}(\pi_M(\widetilde{x}));$$

a última igualdade segue pois, uma vez que

$$\widetilde{s}(\pi_M(x)) = \pi_E(s(x)),$$

temos que $\mathrm{Im}\ \widetilde{s} = \widetilde{\Gamma}$, concluindo.

(d) A transversalidade no quarto item segue pois a ação de G em ambos $\pi^k_0 : I^k(\pi) \to E$ e $\pi : E \to M$ é transversal e $\pi_k = \pi \circ \pi^k_0$. Concluiremos que duas formas que $\pi_k : I^k(\pi) \to M$ é um fibrado. Primeiramente, seja $t = (t^i)$, $i = 1, ..., s$, definidos em $V = \pi(U)$, U aberto de E, de modo que $t|_{\mathcal{O}(\pi(p))} : V \cap \mathcal{O}(\pi(p)) \to t(V \cap \mathcal{O}(\pi(p)))$ defina uma carta para todo $p \in U$ (veja demonstração de 4.2.3). Defina

$$\delta_1 : (\pi_k)^{-1}(V) \subset I^k(\pi) \to t(V) \times J^k(\widetilde{\pi})$$

pondo $\delta_1(j^k s(x)) = (t(x)), j^k\widetilde{s}(\pi_M(x)))$ (onde consideramos aqui π_k como sendo a restrição de $\pi_k : J^k(\pi) \to M$ a $I^k(\pi)$). Observe que vale a igualdade $\delta_1 = t \times (\pi^{(k)} \circ \pi_{I^k(\pi)})$, onde $\pi_{I^k(\pi)}$ é a projeção natural e $\pi^{(k)}$ foi definido na demonstração do terceiro item. Não é difícil concluir que δ_1 é difeomorfismo em sua imagem, já que as órbitas de $I^k(\pi)$ são difeomorfas as órbitas de M via a projeção π_k. Seja agora

$$\delta_2 : (\widetilde{\pi}_k)^{-1}\pi_M(V) \subset J^k(\widetilde{\pi}) \to \pi_M(V) \times F$$

trivialização local. Tomando U suficientemente pequeno tal trivialização existe. Uma vez que a restrição $\pi : \mathcal{O}(p) \to \mathcal{O}(\pi(p))$ é um difeomorfismo, não é difícil concluir que a função

$$\delta_3 : V \to t(V) \times \pi_M(V)$$

dada por $\delta_3(x) = (t^i(\pi(x)), \pi_M(\pi(x)))$ é um difeomorfismo. Observando que vale a igualdade

$$\pi^{(k)} \circ \pi_{I^k(\pi)} \circ (\pi_k)^{-1}(V) = (\widetilde{\pi}_k)^{-1}(\pi_M(V)),$$

o diagrama abaixo está bem definido

$$\begin{tikzcd}
(\pi_k)^{-1}(V) \arrow[r, "\delta_1"] & t(V) \times (\widetilde{\pi}_k)^{-1}(\pi_M(V)) \arrow[d, "1\times\delta_2"] \\
& t(V) \times \pi_M(V) \times F \arrow[d, "(\delta_3)^{-1}\times 1"] \\
& V \times F
\end{tikzcd}$$

A função $\lambda = [(\delta_3)^{-1}\times 1]\circ(1\times\delta_2)\circ\delta_1$ é um difeomorfismo e é simples verificar que $\pi_k(j^k s(x)) = \mathrm{pr}_1 \circ \lambda(j^k s(x))$, concluindo que $I^k(\pi)$ é fibrado com mesma fibra de $\widetilde{\pi}_k$. Por fim, considere a função

$$H : I^k(\pi) \to J^k(\widetilde{\pi}) \times M$$

dada por $H(j^k s(x)) = (j^k\widetilde{s}(\pi_M(x)), x)$, ou seja, $H = (\pi^{(k)} \circ \pi_{I^k(\pi)}) \times \pi_k$. A função suave H é um difeomorfismo em sua imagem, imagem esta que é igual a $\pi_M^*(J^k(\widetilde{\pi}))$ (veja 3.1.5 para definição de fibrado *pullback*). Mais que isso, o digrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd}
I^k(\pi) \arrow[r, "H"] \arrow[d, "\pi_k"] & \pi_M^*(J^k(\widetilde{\pi})) \arrow[d, "\pi_k"] \\
M \arrow[r, "1"] & M
\end{tikzcd}$$

mostrando a equivalência de fibrados e, ao mesmo tempo, essa comutatividade pode ser usada para concluir que $\pi_k : I^k(\pi) \to M$ é fibrado, equivalente a $\pi_M^*\widetilde{\pi}_k$, caso não tivéssemos provado esse fato. Observe que essa equivalência que argumentamos por último segue imediatamente do item `(iv)` do Teorema 4.4.1.

$\square$

Se $\pi : E \to M$ fibrado e $\rho : \mathcal{D} \to J^k(\pi)$ fibrado vetorial no qual um grupo de Lie G age por automorfismos suavemente e transversalmente (veja 4.4.11), então a restrição

$$\rho : \mathcal{D}_I = \rho^{-1}(I^k(\pi)) \to I^k(\pi)$$

define um subfibrado equivalente ao fibrado *pullback* $\iota^*\rho$, onde $\iota : I^k(\pi) \to J^k(\pi)$ é a inclusão, veja o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\iota^*\mathcal{D} \arrow[r, "\iota^*\rho"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] & I^k(\pi) \arrow[d, "1"] \\
\rho^{-1}(I^k(\pi)) \arrow[r, "\rho"] & I^k(\pi)
\end{tikzcd}$$

Assim, um operador diferencial Δ definido em E, G-invariante, restringe-se a uma seção invariante $\Delta_I = \Delta|_{I^k(\pi)} : I^k(\pi) \to \mathcal{D}_I$. Suponha que a ação de G em $\rho : \mathcal{D}_I \to I^k(\pi)$ seja transversal. Então, como Δ_I é seção invariante o Teorema 4.4.2 garante que existe única seção

$$\widetilde{\Delta} : J^k(\widetilde{\pi}) \to \mathcal{D}_I/G$$

que satisfaz $\widetilde{\Delta} \circ \pi^{(k)} = \pi_{\mathcal{D}_I} \circ \Delta_I$, ou seja,

$$\widetilde{\Delta}(\pi^{(k)}(j^k s(x))) = \widetilde{\Delta}(j^k \widetilde{s}(\pi_M(x))) = \pi_{\mathcal{D}_I}(\Delta_I(j^k s(x))) \tag{4.5.1}$$

onde estamos usando a identificação $J^k(\widetilde{\pi}) = \widetilde{I^k(\pi)}$ via a função $\pi^{(k)}$ dada pelo item (c) proposição anterior, e isso significa dizer que $\pi^{(k)}$ faz papel da projeção natural $\pi_{I^k(\pi)} : I^k(\pi) \to \widetilde{I^k(\pi)}$. Devido ao corolário 4.4.11, tem-se que $\widetilde{\rho} : \widetilde{\mathcal{D}_I} \to J^k(\widetilde{\pi})$ é um fibrado vetorial e, mais ainda, podemos garantir que as soluções invariantes da equação $\Delta = 0$ (ou, o que é o mesmo, as soluções de Δ_I) é obtida a partir da soluções da equação $\widetilde{\Delta} = 0$. Por fim, se s for solução de Δ_I, então, usando (4.5.1) e o corolário 4.4.11, concluímos que $\widetilde{\Delta} \circ j^k \widetilde{s}(\pi_M(x)) = 0$ para cada x e, portanto, $\widetilde{s}$ é solução de $\widetilde{\Delta}$. Reciprocamente, se $\widetilde{s}$ for solução de $\widetilde{\Delta}$ então, para cada x, $\pi_{\mathcal{D}_I}(\Delta_I(j^k s(x))) = 0$, logo pelo corolário 4.4.11, tem-se que $\Delta_I(j^k s(x))$, mostrando que s é solução de Δ_I, logo solução invariante. O diagrama abaixo nos indica a funções envolvidas. Antes, para melhor leitura do diagrama, observaremos um simples fato: com relação a sequência de fibrados no qual G age regularmente e transversalmente,

$$P \xrightarrow{\rho} E \xrightarrow{\pi} M \ ,$$

com $\pi \circ \rho$ fibrado. Se s é seção de π e r seção de ρ, ambas invariantes, com respectivas seções $\widetilde{s}$ e $\widetilde{r}$ com relação a $\widetilde{\pi}$ e $\widetilde{\rho}$, respectivamente, garantidas por 4.4.2, então vale

$$\widetilde{r \circ s} = \widetilde{r} \circ \widetilde{s}.$$

De fato, a unicidade dada em 4.4.2 juntamente com a igualdade

$$\widetilde{r} \circ \widetilde{s}(\pi_M(x)) = \widetilde{r}(\pi_E(s(x))) = \pi_P(r(s(x))) = \pi_P((r \circ s)(x))$$

nos garante a acertativa.

$$
\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathcal{D}_I} \arrow[d, shift left, "\widetilde{\rho}"] & \mathcal{D}_I \arrow[l, "\pi_{\mathcal{D}_I}"'] \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, shift left, "\rho"] & \mathcal{D} \arrow[d, shift left, "\rho"] \\
J^k(\widetilde{\pi}) \arrow[u, bend left, "\widetilde{\Delta}"] \arrow[d, "\pi_0^{\widetilde{k}}"] & I^k(\pi) \arrow[l] \arrow[r, "\iota"] \arrow[u, bend left, "\Delta_I"] \arrow[d, "\pi_0^k"] & J^k(\pi) \arrow[u, bend left, "\Delta"] \arrow[d, "\pi_0^k"] \\
\widetilde{E} \arrow[d, shift left, "\widetilde{\pi}"] & E \arrow[l, "\pi_E"'] \arrow[d, shift left, "\pi"] & E \arrow[d, "\pi"] \\
\widetilde{M} \arrow[u, bend left, "\widetilde{s}"] \arrow[uu, bend left=40, "\widetilde{j^k s}=j^k\widetilde{s}"] \arrow[uuu, bend left=60, "\widetilde{\Delta}(j^k\widetilde{s}(\pi_M(x)))=0"] & M \arrow[l, "\pi_M"'] \arrow[u, bend left, "s"] \arrow[uu, bend right, "j^k s"'] \arrow[r, equal] & M \arrow[uuu, bend right=40, "\Delta(j^k s(x))=0"']
\end{tikzcd}
$$

Considerando o fibrado trivial $\pi = \mathrm{pr}_1 : M \times N \to M$, com G agindo regularmente em E, dado um sistema de equações diferencias Δ, ou seja, uma subvariedade fechada mergulhada de J^kE, digamos $\Delta = \Delta^{-1}(0)$ com 0 valor regular de $\Delta : J^kE \to \mathbb{R}^l$, podemos considerar a restrição $\Delta : J^k(\pi) \to \mathbb{R}^l$ (abusando de notações) e enxergar Δ como uma seção

$$\Delta : J^k(\pi) \to \mathcal{D} = J^k(\pi) \times \mathbb{R}^l,$$

dada por $\Delta(j^ks(x)) = (j^ks(x)), \Delta(j^ks(x)))$, onde $\rho = \mathrm{pr}_1 : \mathcal{D} \to J^k(\pi)$ é um fibrado vetorial no qual G age suavemente e transversalmente por automorfismos, ao decretarmos a ação de G em $\mathcal{D}$ pela regra $g(a,b) = (ga,b)$. Já discutimos anteriormente que G ser grupo de simetria da equação diferencial Δ é equivalente a seção Δ ser $G-$invariante. Como antes, podemos obter um operador $\widetilde{\Delta}$, associado ao operador Δ_I, ou seja, seção de $\widetilde{\mathcal{D}_I} \to I^k(\pi)/G \subset J^k\widetilde{E}$. Se considerarmos a ação projetiva e regular em M, temos bem definida a função suave,

$$\widetilde{\pi} : \widetilde{E} \to \widetilde{M},$$

dada por $\widetilde{\pi}(\pi_E(p)) = \pi_M(\pi(p))$, que é uma submersão (veja 4.4.8). Se s é uma seção invariante de π então a função $\widetilde{s}(\pi_M(x)) = \pi_E(s(x))$ é uma seção da variedade de fibras determinada por $\widetilde{\pi}$. Sendo Γ é imagem de s é simples notar que $\widetilde{\Gamma}$ é imagem de $\widetilde{s}$ e, deste modo, sendo s solução de Δ_I temos, para cada x,

$$0 = \pi_{\mathcal{D}_I}(\Delta_I(j^ks(x))) = \widetilde{\Delta}(\pi_{I^k(\pi)}(j^ks(x))) = \widetilde{\Delta}(\pi_{I^k(\pi)}(j^k_{s(x)}\Gamma)) = \widetilde{\Delta}(j^k_{\widetilde{s(x)}}\widetilde{\Gamma}),$$

mostrando que $\widetilde{s}$ é solução de $\widetilde{\Delta}$, onde a primeira igualdade é garantida pelo corolário 4.4.11. Para mostrar a recíproca (que terá caráter local), precisamos supor que a ação de G em E é infinitesimalmente transversal. Nessas condições valem:

1 $\widetilde{\Gamma}$ é transversa a $(\pi_E)_*(\mathrm{Vert}_p(\pi))$ para cada p com $\pi_E(p) \in \widetilde{\Gamma}$. Claro, pois se $p = (x, y)$, como $\mathrm{Vert}_p(\pi) = \{x\} \times N$, então ocorrendo

$$(\pi_E)_*(0, X) = \widetilde{s}_*(\widetilde{Z}) \tag{4.5.2}$$

para algum certos $X \in T_yN$ e $Z \in T_{\pi_M(x)}\widetilde{M}$, aplicando $\widetilde{\pi}_*$ em ambos os lados de (4.5.2), obtemos

$$0 = (\pi_M)_* \circ \pi_*(0, X) = \widetilde{\pi}_* \circ (\pi_E)_*(0, X) = \widetilde{\pi}_* \circ \widetilde{s}_*(\widetilde{Z}) = \widetilde{Z},$$

concluindo a afirmação.

2 Dado $p \in \Gamma = (\pi_E)^{-1}(\widetilde{\Gamma})$ existe aberto U vizinhança de p tal que $U \cap \Gamma$ representa a imagem de alguma seção de π. Esse fato segue assim como em 4.3.2 juntamente com o item anterior, o qual garante que Γ é transversal ao espaço vertical $\mathrm{Vert}_p(\pi)$ para cada $p \in \Gamma$.

Suponha que a seção $\widetilde{s} : \widetilde{U} \subset \widetilde{M} \to \widetilde{s}(\widetilde{U}) \subset \widetilde{E}$ seja solução de $\widetilde{\Delta}$, ou seja, pondo $\widetilde{\Gamma} = \mathrm{Im}\ (\widetilde{s})$, tivermos $\widetilde{\Delta}(j^k_{\widetilde{s}(\widetilde{x})}(\widetilde{\Gamma}))$=0. Pelo que observamos, dado $p \in E$ tal que $\pi_E(p) \in \widetilde{\Gamma}$, existe aberto U contendo p tal que $U \cap \Gamma$ é imagem de uma seção s. Como $\pi_E(s(x)) = \widetilde{s}(\pi_M(y))$ para algum y, concluiremos, aplicando $\widetilde{\pi}$ em ambos os lados, que $\pi_M(y) = \pi_M(x)$. Ou seja, existe a relação

$$\widetilde{s}(\pi_M(x)) = \pi_E(s(x)),$$

permitindo concluir que

$$\pi_{\mathcal{D}_I}(\Delta_I(j^k s(x))) = \widetilde{\Delta}(\pi_{I^k(\pi)}(j^k s(x))) = \widetilde{\Delta}(\pi_{I^k(\pi)}(j^k_{s(x)}\Gamma)) = \widetilde{\Delta}(j^k_{\widetilde{s(x)}}\widetilde{\Gamma}) = 0,$$

já que $\widetilde{s}$ é solução e, consequentemente, usando novamente 4.4.8, tem-se $\Delta_I(j^k s(x)) = 0$, ou seja, s é solução de Δ_I. O que fizemos é mais geral, pode-se considerar $\pi : E \to M$ variedade de fibras no qual a ação de G é projetável e infinitesimalmente transversal, $\rho : \mathcal{D} \to J^k(\pi)$ fibrado vetorial no qual G age transversalmente por automorfismos e teremos os mesmos resultados. Considerando ações projetivas generalizamos o **Teorema 3.4.1** de Olver [24], aqui, porém, com caráter local, como mencionado anteriormente. Se pedíssemos que a apenas Δ_I fosse invariante por G, obteríamos soluções invariantes além das que o método que propomos pode proporcionar. Tal método, denominado *Nonclassical Method for Group-Invariant Solutions*, é geralmente usado quando a um dado sistema de equações diferenciais, o qual G é um grupo de simetria associado, precisamos acrescentar novas equações; para o leitor interessado nesse método sugerimos a leitura de [26].

4.6 Considerações Finais

Na condições de uma ação transversa de um grupo de Lie G em uma fibrado (ou variedade de fibras) $\pi : E \to M$, demonstramos que a ação de G em E herda algumas propriedades da ação de G em M, como a regularidade e a estrutura Hausdorff no espaço de órbitas $\widetilde{E}$ desde que $\widetilde{M}$ o seja. As recíprocas desses resultados, ou mesmo o enfraquecimento da hipótese de transversalidade para uma ação apenas infinitesimalmente transversal, não permitem que consigamos obter tais resultados. Vejamos alguns contra-exemplos.

Exemplo 4.6.1. Considere G um grupo de Lie agindo suavemente e **livremente** ($gp = p$ então $g = 1$) em uma variedade M com órbitas densas (por exemplo o ação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{T}^2$ que gera o fluxo irracional) e livremente em uma variedade N tal $\widetilde{N}$ seja Hausdorff (por exemplo $N = \mathbb{R}^2$ com ação de $\mathbb{R}$ dada por $t(x, u) = (x + t, u)$). Considere a ação produto nos fibrados $\mathrm{pr}_1 : M \times N \to M$ e $\mathrm{pr}_2 : E = M \times N \to N$, que são ambas transversais pois a ação em ambas M e N é livre. Com a ação é regular na base de pr_2, aplicando o resultado 4.4.7, concluímos que a ação em $M \times N$ é regular. Observe porém que a ação em M não é regular pois as órbitas são densas, ou seja, o espaço base de pr_1 não herda a regularidade do espaço total.

Exemplo 4.6.2. Seja $M = \mathbb{R}^2 - 0$, $E = M \times \mathbb{R}_{>0}$ e considere $G = \mathbb{R}$ agindo em

$$\mathrm{pr}_1 : E \to M$$

por $\theta(x, y, u) = (e^{c\theta}x, e^{-c\theta}y, e^{c\theta}u)$, $c > 0$. Podemos projetar a ação a de G em E a uma ação regular M dada por $\theta(x, y) = (e^{c\theta}x, e^{-c\theta}y)$ e teremos que $\widetilde{M}$ não é Hausdorff (veja 1.9.15). Uma vez que a ação na base é regular, sendo a ação transversal (pois é livre), podemos garantir que a ação em E é regular. Por outro lado, cada órbita atravessa o plano $u = 1$ exatamente uma vez de modo que podemos identificar $\widetilde{E}$ com $\mathbb{R}^2 - 0$, concluindo que $\widetilde{E}$ é Hausdorff. Esse exemplo mostra que pode ocorrer a situação onde as ações em E e M são regulares, na condições de uma ação transversal no fibrado pr_1, com $\widetilde{E}$ Hausdorff mas $\widetilde{M}$ não.

Exemplo 4.6.3. Seja $M = \mathbb{R}^2 - 0$ e $E = M \times \mathbb{R}$ e considere a ação de gerada pelo campo

$$X = x\partial_y - y\partial_x + (1 + \cos u)\partial_u = \widetilde{X} + (1 + \cos u)\partial_u.$$

Se $u_0 = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, então $X(x, y, u_0) = x_0\partial_y - y_0\partial_x$ de modo que a órbita do do ponto (x_0, y_0, u_0) é um círculo contido no cilindro $x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2$. Para $(k-1)\pi < u_0 < k\pi$ a órbita do ponto em questão é uma espiral contida no cilindro mencionado mas entre os círculos de altura $(k-1)\pi$ e $k\pi$ deste cilindro. Para u_0 múltiplo de π temos a curva integral dada por

$$\theta(x_0, y_0, u_0) = (A_\theta(x_0, y_0), u_0),$$

com $A_\theta \in \mathbb{SO}^2$ agindo de maneira usual. Se $(k-1)\pi < u_0 < k\pi$ então a curva integral será dada por

$$\alpha(\theta) = \theta(x_0, y_0, u_0) = (A_\theta(x_0, y_0), 2\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}(u_0/2) + \theta));$$

com efeito, verificaremos que $\partial_\theta|_\theta \alpha(\theta) = X(\alpha(\theta))$. Observe que vale $\alpha(0) = (x_0, y_0, u_0)$ e

$$\partial_\theta|_\theta \alpha(\theta) = \widetilde{X}(\alpha(\theta)) + \partial_\theta|_\theta(2\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}(u_0/2) + \theta)) = \widetilde{X}(\alpha(\theta)) + 2\frac{1}{1 + (\mathrm{tg}(u_0/2) + \theta)^2}\partial_u.$$

Como $1 + \cos(u(\alpha(\theta)) = 1 + \cos(2\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}(u_0/2) + \theta)))$, escrevendo $w = \mathrm{arctg}(\mathrm{tg}(u_0/2) + \theta)$ então

$$1 + \cos(2w) = 1 + \cos^2 w - \mathrm{sen}^2 w = 2\cos^2 w = 2/(\mathrm{tg}^2 w + 1) =$$

$$1/(1 + (\mathrm{tg}(u_0/2) + \theta)^2),$$

concluindo, por fim, que vale $\partial_\theta|_\theta \alpha(\theta) = X(\alpha(\theta))$. Uma vez que $1 =$ Posto $(x, -y) =$ Posto $(x, -y, 1-$ sen $u)$ para todos $(x, y, u) \in E$ e $(x, y) \in M$ concluímos que a ação é infinitesimalmente transversal (veja o comentário após a proposição 4.3.2) e observe que ação de G em M é regular com $\widetilde{M}$ Hausdorff. Geometricamente é fácil perceber que essa ação não é regular em E, pois a quando θ tende para um dos infinitos a espiral tende a tangenciar um dos círculos no qual está contida.

Um exemplo onde temos uma ação apenas infinitesimalmente transversal regular em ambos E e M, com $\widetilde{M}$ Hausdorff mas $\widetilde{E}$ não, poderá ser encontrado em [1] exemplo 4.4, intricado, diga-se de passagem.

Nas condições de uma ação não transversal de um grupo de Lie G em um fibrado (ou variedade de fibras) $\pi : E \to M$, podemos considerar em E o maior conjunto onde a ação é transversal,

$$k(E) = \{p \in E;\;\; \text{para todo } g \in G \text{ tal que } \pi(gp) = \pi(p) \text{ tem-se } gp = p\},$$

a fim de aplicar os resultados principais do capítulo, desde que a restrição $\pi : k(E) \to M$ seja um subfibrado de π (ou apenas uma submersão no caso de variedade de fibras). Há um descrição alternativa desse conjunto. Se $p \in k(E)$ então, sempre que $g \in G_{\pi(p)}$ teremos $\pi(gp) = g\pi(p) = \pi(p)$, forçando então que $gp = p$. Reciprocamente, se $gp = p$ sempre que $g \in G_{\pi(p)}$, necessariamente teremos $p \in k(E)$. Desta forma obtemos a caracterização

$$k(E) = \bigcup_{x \in M} \{p \in E_x;\;\; gp = p \text{ para todo } g \in G_x\}.$$

Esse conjunto é invariante pela ação de G, pois dado $h \in G$ e $g \in k(E)$ temos que para cada $g \in G_{\pi(hp)}$ ocorre

$$g\pi(hp) = \pi(hp) \text{ implicando em } h^{-1}gh\pi(p) = \pi(p) \text{ e logo } h^{-1}ghp = p.$$

Em diversas aplicações como estudo da *Equações de Navier-Stokes*, estudo de *operadores harmônicos*, estudo das *Equações de Einstein*, o problema em questão poderá ser descrito em termos de um operador diferencial definido em um fibrado onde algum subgrupo do grupo (total) de simetria da equação estudada age projetavelmente. Quando a ação não é transversal mas a restrição $\pi : k(E) \to M$ é um fibrado (*kinematic bundle*), é possível aplicar os resultados apresentados neste capítulo. O leitor interessado nestas aplicações poderá consultar o artigo [2], onde diversos exemplos são apresentados.

Diversos problemas de geometria diferencial e física estão relacionados com a determinação de objetos invariantes pela ação de um grupo de Lie em uma variedade M; dentre esses objetos, podemos mencionar campos vetoriais, formas diferenciais, *frames*, operadores diferenciais, conexões, métricas, etc., todos podendo ser interpretados como seções de um fibrado vetorial conveniente. Se G age suavemente em uma variedade M esta ação induz uma ação projetiva nos fibrados vetoriais

$$TM \to M,\;\; \wedge^k T^*M \to M,\;\; J^kM \times \mathbb{R}^l \to J^kM,\;\; T^*M \odot T^*M \to M$$

dadas, respectivamente, por

$$gX_p = (dg)_p(X_p),\; (g\omega)_p(v^1, ..., v^k) = \omega_{gp}((dg)_p(v^1), ..., (dg)_p(v^k)),$$

$$g(j_p^k\Gamma, v) = (gj_p^k\Gamma, v) \text{ e } g(\sum_{i<j} g_{ij}(p)dx^i|_p \odot dx^j|_p) = \sum_{i<j} g_{ij}(g^{-1}p)d(x^i \circ g)|_{g^{-1}p} \odot d(x^j \circ g)|_{g^{-1}p}.$$

Obter seções invariantes destes fibrados corresponde a obter campos invariantes, formas invariantes, operadores diferenciais invariantes e métricas invariantes, caso que $(g_{ij}(p)))$ é simétrica positiva definida para cada $p \in M$.

Ao considerarmos uma ação regular ou semi-regular de um grupo de Lie G em uma variedade M podemos construir um conjunto de dim $M - s$ invariantes pela ação de G (invariantes absolutos), onde s é a dimensão das órbitas de G, sendo esse invariantes globais ou locais, respectivamente. Quando consideramos G agindo projetivamente por automorfismos em um fibrado vetorial $\pi : E \to M$ e s uma seção invariante, então em coordenadas vale

$$g \cdot s(x) = (gx, \mu(g, x) \cdot u(x)) = s(gx) = (gx, u(gx)),$$

onde, para cada x e g onde houver sentido, $\mu(g, x)$ será um operador linear inversível definido na fibra típica. Isso faz com que consideremos uma noção relativa de invariante, uma vez que neste caso temos

$$u(gx) = \mu(g, x) \cdot u(x).$$

Esta noção está associada ao conceito de *multiplier representation*, definido da seguinte forma: Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial , G um grupo de Lie e M uma variedade suave todos de dimensão finita. Um *multiplier representation* é uma função suave

$$\mu : G \times M \to \mathrm{GL}(\mathbb{V})$$

que satisfaz

$$\mu(gh, x) = \mu(g, hx) \cdot \mu(h, x) \text{ e } \mu(1, x) = 1 \text{ para todos g,h} \in G \text{ e } x \in M.$$

Um invariante relativo de peso μ é uma função $R : M \to \mathbb{V}$ que satisfaz

$$R(gx) = \mu(g, x)R(x) \text{ para todos } x \in M \text{ e } g \in G.$$

Com um *multiplier representation* definido em M podemos enxergar G agindo por automorfismo no fibrado vetorial $M \times \mathbb{V}$ e um invariante relativo torna-se-á uma seção invariante deste fibrado. Em Olver [10] é estudada a existência de invariantes relativos ou, de acordo com a abordagem geométrica descrita acima, de seções invariantes. Portanto, o teorema 5.4 do referido artigo é uma caso particular de teorema 4.4.2 no caso em que a restrição $\pi : k(E) \to M$ é um fibrado vetorial no qual G age por automorfismos.

Quando um grupo de Lie G age projetivamente em um fibrado $\pi : E \to M$ (ou variedade de fibras) e a ação na base é **transitiva** ($G \cdot x = M$ para qualquer $x \in M$), então o espaço das seções invariantes de π é parametrizado pelo conjunto de pontos fixos da ação de subgrupo de **isotropia** em uma única fibra. De fato, dados $x_0 \in M$ e $K = G_{x_0}$ grupo de isotropia de x_0, temos bem definida uma ação de K em E_{x_0}. Denote em geral o conjunto de pontos fixo de uma ação de um grupo G em um conjunto X por X^G. Seja $q_0 \in E_{x_0}$ um ponto fixo desta ação, ou seja, $kq_0 = q_0$ para todo $k \in K$. Então a restrição

$$\pi : G \cdot q_0 \to G \cdot x_0 = M$$

é um difeomorfismo. É injetiva já que se $gx_0 = \pi(gq_0) = \pi(hq_0) = hx_0$ então $h^{-1}g \in K$ e logo $h^{-1}gq_0 = q_0$. Como é claramente sobrejetiva, então é um difeomorfismo. Assim, obtemos a seção $s = (\pi|_{G\cdot q_0})^{-1} : M \to E$ que é $G-$invariante (se $y = hx_0$ então $s(gy) = s(ghx_0) = g(hq_0) = gs(hx_0) = gs(y)$). Portanto, um ponto fixo nos dá uma seção invariante. Reciprocamente, se s é seção invariante, é simples concluir que $q_0 = s(x_0)$ é um ponto fixo da ação de K em E_{x_0}. Observe que uma seção invariante é tal que sua imagem está contida em $k(E)$ (ela se **fatora** através de $k(E)$), pois se $\pi(gs(x)) = \pi(s(x))$, deve ocorrer $gx = x$ e, logo, $gs(x) = s(gx) = s(x)$. Desta forma sempre podemos considerar uma seção invariante com imagem em $k(E)$ (essa conclusão é geral nas condições de uma ação projetiva). Quando ocorrer da restrição $\pi : k(E) \to M$ ser um fibrado (ou apenas $k(E)$ for subvariedade com a restrição $\pi|_{k(E)}$ submersão), uma vez que $\widetilde{M}$ é um ponto nas condições de uma ação transitiva, uma seção $\widetilde{s} : \widetilde{M} \to \widetilde{k(E)}$ corresponde a escolha de uma ponto $\widetilde{p} \in \widetilde{k(E)}$ e, desta forma, teremos uma associação biunívoca entre seções invariantes de π e os elementos do espaço $\widetilde{k(E)}$ obtendo assim, naturalmente, uma estrutura de variedade suave nos espaço das seções invariantes de E e logo estruturando o espaço dos pontos fixos da ação de K em $N = E_{x_0}$.

Em geral não podemos garantir que $k(E)$ é uma variedade suave, mas em algumas situações poderemos garantir que esse conjunto tem boa estrutura. Por exemplo, se N é uma variedade Riemanniana na qual K age por **isometrias** (quando a ação for **própria** será possível obter uma métrica em N invariante por K, veja [19] corolário 1.27, e logo essa métrica é $K-$invariante), podemos mostrar que cada componente conexa do conjunto de pontos fixos pela pela ação de K é uma subvariedade mergulhada. Com efeito, seja p um ponto fixo desta ação. Então fica bem definida uma ação

$$K \times T_pN \to T_pN$$

dada por $gX = (dg)_pX$. Dado $\epsilon > 0$ tal que a exponencial Riemanniana

$$\exp_p : B_\epsilon(0) \subset T_pN \to \exp_p(B_\epsilon(0)) \subset N$$

é difeomorfismo, pelo fato de $g \cdot \exp_p(tX)$ ser uma geodésica com início em gp e velocidade $(dg)_p(X)$ (pois $gp = p$) deverá ser igual a $\exp_p((dg)_p(tX))$ para $t < \epsilon$ (veja [8] proposições 2.7 e 2.9), concluindo que

$$\exp_p(g \cdot X) = g \cdot \exp_p(X),$$

ou seja, o mapa $\exp_p$ é equivariante. Observe que conjunto de pontos fixos pela ação de G em T_pN,

$$(T_pN)^K = \cap_{g\in K} \ker(dg_p - 1_{T_pN}),$$

é um subespaço fechado. Notando que os abertos $B_\epsilon(0)$ e $U = \exp_p(B_\epsilon(0))$ são $K-$invariantes (o primeiro pois vale $||g \cdot X|| = ||(dg)_p(X)|| = ||X||$ para todo X e o segundo pois qualquer ponto em U é da forma $\exp_p(X)$ para algum X, de modo que $\exp_p(g \cdot X) = g \cdot \exp_p(X) \in U$) e vale

$$\exp_p((T_pN)^K \cap B_\epsilon(0)) = \exp_p((B_\epsilon(0))^G) = U^K = N^K \cap U$$

poderemos concluir o resultado. A última igualdade permite concluir que $N^K \cap U$ é uma variedade mergulhada (imagem por difeomorfismo da interseção de um aberto com uma subvariedade regular). É simples notar que N^K é fechado e, consequentemente, cada uma de suas componentes conexas deverá ser fechada. Dado $q \in$ na fronteira de U^K, se tivéssemos $\dim(T_qN)^K \neq \dim(T_pN)^K$, digamos maior, então haveria mais direções em T_qN fixadas por K. Isso levaria a mais direções fixadas em $V = \exp_q(B_\delta(0))$. Isso porém não pode ocorrer pois $V \cap U \neq \varnothing$. Concluindo portanto que cada componente conexa de N^K é uma subvariedade mergulhada fechada de N. Podemos mostrar mais:

Proposição 4.6.4. *Suponha que G age suavemente, regularmente e projetavelmente em uma variedade de fibras $\pi : E \to M$, e que a ação em M seja transitiva. Se a ação de G em E for própria, então cada componente conexa de $k(E)$ é uma variedade mergulhada.*

Demonstração. Sejam $x_0 \in M$, $N = E_{x_0}$ e $K = G_{x_0}$. A ação de G sendo própria permite concluir que a restrição $K \times N \to N$ é própria e, logo, pelo que argumentamos acima, cada componente conexa de N^K é uma subvariedade mergulhada de N e, necessariamente, de E. O ponto aqui é observar que

$$k(E) = \bigcup_{g \in K} gN^K. \tag{4.6.1}$$

É simples notar que se $y = hx_0$ então $G_y = gG_{x_0}h^{-1}$ de modo que se $gp \in gN^K$, para todo $h \in G_{gx_0} = gG_{x_0}g^{-1}$, $h = gkg^{-1}$ com $k \in G_{x_0}$, teremos

$$h(gp) = gkg^{-1}(gp) = gkp = gp,$$

mostrando $gN^K \subset k(E)$ para todo $g \in G$. Se $q \in k(E)$, $\pi(q) = gx_0$ para algum $g \in G$; como para qualquer $h \in G_{gx_0} = gG_{x_0}G^{-1}$ tem-se $hq = q$, sendo $h = gkg^{-1}$ com $k \in G_{x_0}$ então $hq = gkg^{-1}q = q$ e, variando k concluímos que $g^{-1}q \in N^K$, ou seja, $q \in gN^K$. Considere a restrição

$$\pi_E|_{N^K} : N^K \to \widetilde{k(E)} \subset \widetilde{E}.$$

Ela está bem definida e é sobrejetiva em virtude da igualdade (4.6.1). É injetiva, pois dados $p, q \in N^K$ que estão na mesma órbita, $gp = q$ para algum g, então da igualdade $\pi(gp) = x_0 = \pi(q)$, conclue-se que $g \in G_{x_0} = K$, donde $q = gp = p$. Concluímos então destas considerações que se $\mathcal{C}$ é uma componente conexa de N^K, então $\pi_E|_{N^K}(\mathcal{C}) = \pi_E(\mathcal{C})$ é uma componente conexa de $\widetilde{k(E)}$ e também uma subvariedade mergulhada de $\widetilde{E}$, pois $\mathcal{C}$ é uma subvariedade mergulhada de E, em virtude do que concluímos na discussão acima (aqui estamos usando o fato da ação de G em E ser regular e, por conseguinte, $\widetilde{E}$ ser variedade eventualmente não Hausdorff, veja 2.3.8). Segue que $\pi_E^{-1}(\widetilde{\mathcal{C}})$ é uma subvariedade mergulhada de E, novamente em virtude de 2.3.8, mostrando que cada componente conexa de $k(E)$ é subvariedade mergulhada (claro que não podemos garantir a conexidade de $\pi_E^{-1}(\widetilde{\mathcal{C}})$, de modo que as componentes conexas de $k(E)$ serão dadas pelas componentes conexas dos conjuntos $\pi_E^{-1}(\widetilde{\mathcal{C}})$ quando variamos $\mathcal{C}$.) $\square$

Em virtude da exposição de diversas situações onde procuramos obter seções invariantes de um fibrado (ou variedade de fibras) conclue-se que é importante assegurar a existência do *kinematic bundle* (ou apenas mostrar que $k(E)$ é uma subvariedade de E com a restrição de π submersão). Nas condições onde um grupo compacto G age isometria em um fibrado vetorial hermitiano é possível assegurar tal existência (veja [6] lema 1.2). Vale ressaltar, porém, que obter uma caracterização deste fibrado não é uma tarefa simples, como o leitor poderá apreciar nos exemplos de [2]. A última proposição indica a possibilidade do conjunto $k(E)$ não ser uma variedade e, pelo que entendemos da leitura dos artigos principais [1], [2] e [3], a caracterização deste espaço não é conhecida em geral, ocorrendo apenas em exemplos particulares.

Apêndice A

Uma Caracterização de Funções Suaves em Subvariedades

Este apêndice é um suplemento ao Capítulo I e tem por objetivo mostrar que, se N é uma subvariedade mergulhada de uma variedade M, então uma função $f : N \to P$ é suave se, e somente se, admite uma extensão suave $F : V \subset M \to P$, para algum aberto V contendo N. Além disso a diferencial de f é a restrição da diferencial de F ao espaço tangente de N.

Proposição A.0.5. *Seja N uma variedade contida em $\mathbb{R}^n$ e $f : N \to P$ função arbitrária. Se f admite uma extensão suave definida em algum aberto de $\mathbb{R}^n$, então f é suave e $(f_*)_p = (F_*)_p|_{T_pM}$.*

Demonstração. Observe que não estamos considerando N subvariedade mergulhada, apenas uma variedade contida em $\mathbb{R}^n$; caso fosse mergulhada então a conclusão da proposição seria imediatamente imediatamente válida, uma vez que a restrição é dada por

$$F|_N = F \circ \iota,$$

onde ι é a inclusão de N em $\mathbb{R}^n$. Seja (ϕ, U) carta em $p \in N$. Considere a função diferenciável $G(x, y) = \phi^{-1}(x) + (0, y)$, onde $(x, y) \in \phi(U) \times \mathbb{R}^{n-m}$. Temos que

$$f(p) = F \circ G \circ i \circ \phi(p),$$

onde $i(x) = (x, 0)$, e logo f é diferenciável como composta de funções diferenciáveis. Mais ainda, se α é curva em N, então

$$f_*(\alpha^{'}(0)) = F_*(\partial_t|_0 G \circ i \circ \phi(\alpha(t))) = F_*(\alpha^{'}(0)),$$

seguindo que f_* é a restrição de F_*. $\square$

Proposição A.0.6. *Seja N subvariedade mergulhada de $\mathbb{R}^n$ e $f : N \to P$ suave. Então, dado $p \in N$ existe aberto W de $\mathbb{R}^n$ contendo p e função suave F definida em W tal que $F|_{N\cap W} = f|_{N\cap W}$.*

Demonstração. Seja (ϕ, U) carta centrada em $p \in N$ e V aberto em $\mathbb{R}^n$ tal que $U = V \cap N$. A função

$$G(x, y) = \phi^{-1}(x) + (0, y),$$

como definida na proposição anterior, é tal que G_* é sempre não singular, como pode ser verificado, e portanto um difeomorfismo local. Observando que $G(0,0) = p$, podemos usar o Teorema da Função Inversa e obter aberto W de R^n que é mapeado difeomorficamente em $G(W) \subset V$, com $p \in G(W)$. Um vez que $G^{-1}(q) = G(\phi^{-1} \circ \phi(q) + (0,0)) = G^{-1}(G(\phi(q), 0)) = (\phi(q), 0)$, a extensão é dada por

$$F = f \circ \phi^{-1} \circ \pi_1 \circ G^{-1},$$

definida em $G(W)$. $\square$

A extensão global é bem mais delicada. Como exemplo, a função identidade $I : \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{B}^1 \to \mathbb{S}^1$ não pode ser estendida devido a uma restrição topológica; em particular, a extensão seria contínua e, intuitivamente, seria o mesmo que dizer que o disco pode ser "rasgado"continuamente para se transformar no círculo (podemos argumentar formalmente esse fato usando teoria de grupo fundamental). No próximo teorema, usaremos o fato que toda cobertura por abertos de uma variedade suave M admite partição da unidade (veja [17]), por isso segue a definição abaixo:

Definição A.0.7. *Dada $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ cobertura arbitrária de uma variedade suave M, a partição da unidade subordinada à cobertura $\mathcal{U}$ é uma coleção de funções suaves, $\{\alpha_\lambda : M \to \mathbb{R}\}$, com as seguintes propriedades:*

(i) $0 \leq \alpha_\lambda(p) \leq 1$, *para todos $\lambda \in \Lambda$ e $p \in M$;*

(ii) supp $\alpha_\lambda \subset U_\lambda$;

(iii) *o conjunto de suportes $\{supp\ \alpha_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ é localmente finito, ou seja, dado $p \in M$ existe vizinhança de p que intersepta no máximo um número finito de conjuntos supp α_λ; e*

(iv) $\sum_{\lambda\in\Lambda} \alpha_\lambda(p) = 1$ *para todo $x \in M$.*

A próxima proposição exemplifica uma aplicação da existência de partição da unidade

Proposição A.0.8. *Sejam U aberto em M e $p \in U$. Existe aberto $V \subset U$ contendo p e função suave $f : M \to \mathbb{R}$, $f(q) \geq 0$ para todo $q \in M$, tal que $q \in V$ se, e somente se, $f(q) > 0$.*

Demonstração. Tome W aberto contento p cujo fecho está contido em U. Considere a cobertura $\{U, M - \overline{W}\}$ de M e partição da unidade $\{\alpha, \beta\}$ subordinada a essa cobertura. O conjunto aberto $V = \{q \in M;\ \ \alpha(q) > 0\}$ juntamente com a função $\alpha : M \to \mathbb{R}$ satisfazem o requerido; de fato $\alpha(p) = 1$ já que $\{\text{supp } \beta\} \subset M - \overline{W},\ \ p \notin M - \overline{W}$ e $\alpha(q) + \beta(q) = 1$ para todo $q \in M$. $\square$

Teorema A.0.9. *Com as notações da proposição anterior , com $P = \mathbb{R}^k$, f admite uma extensão em um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ que contém N.*

Demonstração. Acima construímos para cada $p \in N$ uma função F^p que estende f, mas cujo o domínio não contém inteiramente a subvariedade N. Diminuindo U_p, podemos considerar os abertos V_p como sendo iguais a $F^p(W_p)$. Desde que $N = \cup_{p\in M} U_p$, existe uma cobertura enumerável $\{U_i\}$ que cobre N. Considere o conjunto aberto S de $\mathbb{R}^n$ dado por $S = \cup_i V_i$ (claro que $N \subset S$, pois cada $U_i \subset V_i$). Tome $\{\alpha_i : N \to \mathbb{R}\}_i$, partição da unidade subordinada a cobertura $\Lambda = \{V_i\}$ de S . Queremos definir a extensão como

$$F(p) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(p) F^i(p),$$

$F : S \to \mathbb{R}^n$. O problema é que as funções F^i não estão definidas em todo S, apenas em subconjuntos abertos de S; desse modo precisamos redefini-las de modo conveniente. Observe que soma acima nos importa a ação de F^i dentro de suppα_i apenas (supp $\alpha_i = \{x \in S;\ \ \alpha_i(x) \neq 0\}$). Cobrindo S com os abertos $\{V_i, S - \text{supp } \alpha_i\}$, sejam β_1, β_2 partição da unidade subordinada a essa cobertura. A função definida em S por

$$\begin{cases} \beta_1 \cdot F^i(q), \text{ se } q \in V_i \\ \quad 0, \text{ se } q \notin V_i \end{cases}$$

é suave e quando $q \in$ supp α_i ela coincide com $F^i(q)$. Portanto, passamos a considerar na soma essas funções que acabamos de redefinir. Tal soma é finita, uma vez que α_i é diferente de zero apenas em uma quantidade finita de abertos V_i, permitindo concluir que F é diferenciável e, se $q \in N$,

$$F(q) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(q) F^i(q) = \sum_{i;\quad q \in \text{supp } \alpha_i} \alpha_i(q) F^i(q) = (\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(q)) f(q) = f(q).$$

□

Proposição A.0.10. *Se N subvariedade mergulhada de M e $f : N \to \mathbb{R}^k$ suave, então f admite uma extensão F em algum aberto de M contendo N e f_* é a restrição de F_*.*

Demonstração. Pelo Teorema de Whitiney, existe mergulho $H : M \to H(M) \subset \mathbb{R}^N$ para algum N. Podemos afirmar que $H(N)$ é subvariedade mergulhada de $\mathbb{R}^N$ (pois é igual a $H \circ i(N)$). A função $f \circ H^{-1}|_{H(N)}$ é diferenciável e, pela proposição anterior, existe uma extensão suave $G : W \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^k$. A função $G \circ H|_{G^{-1}(W)}$ é a extensão suave de f. O fato que f_* é a restrição de F_* segue de uma simples manipulação da fórmula da extensão junto com a primeira proposição desta seção. □

Observação A.0.11. *Prova-se analogamente com auxilio do Teorema de Withiney que se $f : N \to P$ admite uma extensão suave em $V \subset M$ aberto, onde M é a variedade ambiente de N, então f é suave.*

Exemplo A.0.12. Seja $N = \mathbb{R} - 0$ subvariedade mergulhada de $M = \mathbb{R}$ e $f : N \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/x$. Essa função é suave mas não admite extensão global em todo M. Esse exemplo lúdico mostra que extensões mais gerais só podem ser tomadas em abertos da variedade ambiente, mesmo quando ambos espaços tem topologia simples.

O último resultado pode ser mais geral, no sentido em que podemos substituir o contradomínio na proposição anterior, por uma variedade arbitrária. Considere inicialmente P mergulhada em $\mathbb{R}^k$, então existe uma **retração** suave $r : U \subset \mathbb{R}^k \to P$ onde U é a **vizinhança tubular** de P (em particular a vizinhança tubular contém a variedade P. Uma retração r é uma função que satisfaz $r|_P = I$; veja [17] para tais resultados e definição de vizinhança tubular). Como foi mostrado acima, existe uma extensão F de f em um aberto V de M, mas com contradomínio sendo $\mathbb{R}^k$. Considerando $W = V \cap F^{-1}(U)$, defina $G = r \circ F : W \to P$. Essa é uma extensão suave de f, pois, quando $q \in N$, tem-se $G(q) = r \circ F(q) = r \circ f(q) = f(q)$, uma vez que $f(N) \subset P$ e r é retração. Novamente com o auxílio do teorema de Whitiney podemos mostrar o resultado mesmo para uma variedade arbitraria P, não necessariamente mergulhada em algum espaço euclidiano. Resumindo:

Teorema A.0.13. *Seja N subvariedade mergulhada em alguma variedade M e $f : N \to P$ função. Então f é suave se, e somente se, admite uma extensão suave F definida em algum aberto de M contendo N. Além disso, f_* é a restrição de F_*.*

O próximo exemplo mostra que podemos estender, em geral, apenas funções definidas em subvariedades mergulhadas. Dessa forma o teorema acima é o mais geral possível.

Exemplo A.0.14. Considere $M = \mathbb{R}^2$ e N a subvariedade imersa dada por $f : I = (-3\pi/2, 3\pi/2) \to M$, onde

$$f(t) = \begin{cases} (-\cos(t+\pi), \sin(t+\pi) - 2), & \text{se} \quad -3\pi/2 < t \leq -\pi/2 \\ (\cos t, \sin t), & \text{se} \quad -\pi/2 < t < 3\pi/2 \end{cases}$$

Geometricamente é possível perceber que essa subvariedade não é mergulhada (o problema ocorre em $(0, -1)$; essa figura é um círculo unido com um semi-círculo). Considere a função suave $g : N \to (\pi/2 + I)$ dada por

$$g(q) = \pi/2 + f^{-1}(q).$$

A função g não admite extensão contínua em qualquer aberto de M. Isso ocorre pois se G é tal extensão, aproximando $(0, -1)$ por valores $f(t_n) \in N$ tais que $t_n \to -3\pi/2$ teremos que $G(f(t_n)) = g(f(t_n)) = \pi/2 + t_n \to -\pi$; mas por outro lado temos que $G(0, -1) = g(0, 1) = 0$. Logo G não pode ser contínua e tal extensão não existe.

Apêndice B

Suavidade da Ação Estendida

Quando um grupo de Lie G age suavemente em uma variedade $E = M \times N$ (aqui podíamos considerar E como sendo um aberto de $M \times N$ e tudo ocorreria igualmente; esta escolha está de acordo com a intenção de estudar equações diferencias em fibrados e, podemos dizer, que é meramente estética) permite que prolonguemos (estendamos) a uma ação em $J^k(E)$, veja seção 2.6. Este apêndice tem o propósito de demonstrar que de fato temos uma ação, porém local, e suave. O seguinte lema aparece, essencialmente, no livro de Saunders [31].

Lema B.0.15. *Sejam $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \to W \subset \mathbb{R}^m$, $F : V \subset \mathbb{R}^n \to U$ e $G : W \to G(W)$ funções suaves, U, V e W abertos. Assuma que $\partial_J f(y_0) = \partial_J g(y_0)$, para todas uplas $I = (i_1, ..., i_s)$, com $s = 0, 1, 2, ..., k$. Então vale*

$$\partial_I(f \circ F)(x_0) = \partial_I(g \circ F)(x_0) \quad e \quad \partial_I(G \circ f)(x_0) = \partial_I(G \circ g)(x_0),$$

para cada I como acima, onde $F(x_0) = y_0$. Além disso, se f e g são difeomorfismos próximo de y_0, será válido

$$\partial_I f^{-1}(z_0) = \partial_I g^{-1}(z_0),$$

onde $z_0 = f(y_0) = g(y_0)$.

Demonstração. Suponha por simplicidade que $W = \mathbb{R}$. Quando $\#I = 1$, podemos aplicar a Regra da Cadeia obtendo

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(f \circ F)(y) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^j}(F(y)) \cdot \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(y) = H(y, f(y), \frac{\partial f}{\partial x^j}(y)),$$

onde $y = F(x)$, $H : J^1(E) \to \mathbb{R}$, $H = H(y, u, u_J)$ com $J = (j)$ onde $1 \leq j \leq n$ (observe que H é suave), permitindo concluir o resultado para esse caso, uma vez que por hipótese as derivadas de f e g coincidem em $y_0 = F(x_0)$ e a fórmula depende apenas dos valores dessas funções em y_0 e de suas derivadas nesse ponto. Partindo por indução, suponhamos que para $\#I \leq s$, $\partial_I(f \circ F)$ dependa apenas de y e $\partial_J f(y)$ onde J varia entre 0 e $\#I$, ou seja, tenhamos

$$\partial_I(f \circ F)(y) = H(y, \partial_J f(y)), \quad 0 \leq \#I \leq s,$$

para alguma função suave $H : J^s(E) \to \mathbb{R}$, $y = F(x)$. Dessa forma, usando a notação $(I, i) = (i_1, ..., i_s, i)$, aplicamos novamente a Regra da Cadeia obtemos

$$\partial_{(I,i)}(f \circ F)(y) = \frac{\partial}{\partial x^i} H(y, \partial_I f(y)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial y^k} \cdot \frac{\partial F^k}{\partial x^i} + \sum_J \frac{\partial H}{\partial u_J} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}[\partial_J f(F(x))] =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial y^k} \cdot \frac{\partial F^k}{\partial x^i} + \sum_J \frac{\partial H}{\partial u_J} \cdot \{\sum_{k=1}^{n} \partial_{(J,i)} f(F(x)) \cdot \frac{\partial F^k}{\partial x^i}\};$$

lembrem que representamos as coordenadas de $J^k(E)$ por (x, u, u_J), $J = (j^1, \cdots j^s)$ com $j^1 \leq \cdots \leq j^s$, de modo que $\dfrac{\partial}{\partial u_J}$ corresponde a derivada na direção da entrada u_J.

Segue, por indução, que $\partial_{(I,i)}(f \circ F)$ depende apenas de y e das derivadas de f até ordem $\#I + 1$. Isso permite concluir o resultado. O caso $\partial_I(G \circ f)$ segue de modo análogo. Para finalizar, usaremos esses dois resultado para demonstrar a última afirmação.

Pelo que demonstramos acima as derivadas de $f^{-1} \circ f \circ g^{-1} = g^{-1}$ coincidem com as de $f^{-1} \circ g \circ g^{-1} = f^{-1}$ ate ordem k em $g^{-1}(z_0)$, onde $g^{-1}(z_0) = y_0$, ou seja, em $z_0 = g(y_0)$, concluindo a última afirmação. $\square$

Dado seção $s : M \to E$ que represente um elemento ${u_0}^{(k)} \in J^k(E)$, próximo de $1 \in G$, $(gs)(\overline{x})$ está definida e é uma seção local ao redor de $gx_0 = \overline{x_0}$. Calculando as derivadas de gs em $\overline{x_0}$ obtemos a ação de G em ${u_0}^{(k)}$, a qual denotaremos por Ψ_k, ou seja,

$$\Psi_k(g, u_0^{(k)}) = g \cdot u_0^{(k)} = j^k(gs)(\overline{x_0}). \tag{B.0.1}$$

Teorema B.0.16. *A regra $\Psi_k : \mathcal{D} \subset G \times J^k(E) \to J^k(E)$ dada pela equação acima define uma ação suave local de G em $J^k(E)$.*

Demonstração. (a) Essa associação é independente da escolha da função s. Se s_1, s_2 são duas seções que tem derivadas de ordem ate k iguais em x_0, uma vez que as funções gs_i são dadas por

$$(gs_i)(\overline{x}) = \Omega_g \circ s_i \circ (\Phi_g \circ s_i)^{-1}(\overline{x}),$$

(veja seção 2.4), aplicamos o lema anterior concluindo o resultado.

(b) Ψ_k satisfaz as regras de uma ação. Uma vez que $1s = s$ para uma seção arbitrária, temos que $\Psi_k(1, u^{(k)}) = 1{u_0}^{(k)} = {u_0}^{(k)}$. As funções $g(hs)$ e $(gh)s$, onde $s = 1 \times f$ é uma seção local, são iguais, pois em alguma vizinhança W_1 de $1 \in G$ temos que ghs é seção e vale

$$(ghs)(\overline{\overline{x}}) = (gh)(x, u) = g(h(x, u)) = gh(x, u),$$

onde $u = f(x)$. Por outro lado, em alguma vizinhança V_1, hs é uma seção e vale

$$(hs)(\overline{x}) = h(x, u).$$

Aplicando g na igualdade acima obtemos que em uma vizinhança U_1 vale

$$(g(hs))(\overline{\overline{x}}) = g(hs(\overline{x})) = g(h(x, u)) = gh(x, u).$$

Então para $g, h \in W_1 \cap V_1 \cap U_1$ podemos garantir que $(gh)s = g(hs)$ na interseção de seus domínios, permitindo concluir que as derivadas de $(gh)s$ são iguais as de $g(hs)$ nessa interseção e, portanto, $(gh){u_0}^{(k)} = g(h{u_0}^{(k)})$ uma vez que ambos são completamente determinados pelas derivadas de $(gh)s$ e $g(hs)$ respectivamente.

(c) Para demonstrarmos que ação é suave suporemos a ação de G em E projetiva e depois iremos para o caso geral. Neste caso, dado uma seção local qualquer s, sabemos que gs é uma seção para cada $g \in G$ definida em $g^{-1}(\text{Dom } s)$. Observe que a não validade disso é justamente o que impede de termos a ação definida em todo $G \times J^k E$, pois podemos garantir que gs é seção para g próximo da identidade apenas e a definição dessa ação necessita que gs seja uma seção quando s representa um ponto $u^{(k)}$; portanto, para o caso de ação projetiva, Ψ_k esta definida em todo $G \times J^k E$. Segue nos sub-itens abaixo a demonstração que Ψ_k é suave:

(c1) Se $f : M \to \mathbb{R}$ é suave, (ϕ, U) uma carta em M então a função definida em U por

$$q \to \partial_J|_q f$$

dada por

$$q \in U \to \partial_J|_{\phi^{-1}(q)}(f \circ \phi^{-1})$$

é suave, como pode ser verificado facilmente pelo leitor.

(c2) Sendo $s = 1 \times f$, podemos escrever a função transformada gs por

$$(gs)(x) = \Omega_g \circ s \circ g^{-1}(x),$$

permitindo concluir que a associação

$$(g, x) \in G \times M \to (gs)(x) \in E$$

é suave como composta de funções suaves.

(c3) Considerem $H^\alpha = (gs)^\alpha$ as funções coordenadas de gs. Fixe uma carta $\psi \times 1$ em $G \times (g^{-1}\text{Dom } s)$; a associação

$$(g, x) \to \partial_J|_{(g,x)} H^\alpha,$$

como foi definido em (c1) é suave e, portanto, também será suave a composição

$$g \to (g, gx_0) \to \partial_J|_{(g,gx_0)} H^\alpha.$$

Vamos concluir que a restrição $\Psi_k|_{G \times \{u_0^{(k)}\}}$, para cada $u_0^{(k)}$ fixado em $J^k E$, é suave, onde s representará o ponto $u_0^{(k)}$, ou seja, tal que $j^k s(x_0) = u_0^{(k)}$. Observando que as coordenadas dessa restrição são dadas por

$$\partial_J|_{gx_0} H^\alpha$$

e que a associação

$$g \to \partial_J|_{(g,gx_0)} H^\alpha = \partial_J|_{(\psi(g),gx_0)}[H^\alpha \circ (\psi^{-1} \times 1)] = \partial_J|_{gx_0} H^\alpha$$

é suave, concluímos o resultado (a última igualdade segue uma vez que estamos tomando derivadas somente com respeito a segunda coordenada).

(c4) Mostrando que, para cada g a restrição $\Psi_k|_{\{g\}\times J^k E}$ é suave, concluiremos, juntando (c3) e (c4), que a ação estendida é suave. Para simplificar a demonstração suporemos há uma única variável dependente u. Cada ponto de $u_0^{(k)} \in J^k(E) = E \times \mathbb{R}^{n\cdot m_1} \times ... \times \mathbb{R}^{n\cdot m_k} = E \times \mathbb{R}^N$ pode ser identificado com um polinômio

$$P_{u^{(k)}}(x) = u_0 + \sum_{|J|\neq 0} \frac{u_J}{\widehat{J}!}(x - x_0)^J$$

definido em $W \subset X \to U$, para algum aberto W que **depende** de $u^{(k)}$, que por sua vez pode ser identificado com uma seção local $1_X \times P_{u^{(k)}} : W \subset X \to U$ (no caso de n variáveis dependentes poderíamos associar $u^{(k)}$ com uma seção do tipo $1_X \times ({P_{u^{(k)}}}^1, ..., {P_{u^{(k)}}}^n)$, onde ${P_{u^{(k)}}}^\alpha$ representa todas as coordenadas dadas pelas "derivadas de ordem até k de u^α", ou seja, representa a upla (u^α, u_J^α) com $0 < |J| \leq k$). Para trabalhar sem ser afetado por essa dependência, observe que a função

$$(x, P_{u^{(k)}}) \in X \times J^k(E) \to P_{u^{(k)}}(x) \in \mathbb{R}$$

é suave (estamos usando a identificação $u^{(k)} = P_{u^{(k)}}$), permitindo concluir que em uma vizinhança $W \times W_k \subset X \times J^k(E)$ de $(x_0, u_0^{(k)})$

$$1 \times P_{u^{(k)}} : W \to U$$

é seção para todo $u^{(k)} \in W_k$. Com isso em mãos, fixado g está bem definida e é suave a associação (que é composta de funções suaves).

$$(x, P_{u^{(k)}}) \in W \times W_k \to \Omega_g \circ (1 \times P_{u^{(k)}}) \circ g^{-1}(x) \in U.$$

Denotando por $H = H(x, P_{u(k)})$ essa associação, por π_1 a projeção de $J^k(E)$ em X, ou seja, $\pi_1(P_{u_0^{(k)}}) = x_0$ e escrevendo $x = \pi_1(P_{u^{(k)}})$, observamos que a associação

$$P_{u^{(k)}} \to (g \circ \pi_1(P_{u^{(k)}}), P_{u^{(k)}}) = (gx, P_{u^{(k)}}) \to \partial_J|_{(gx, P_{u^{(k)}})} H =$$

$$= \partial_J|_{gx} H_{P_{u^{(k)}}},$$

onde $H_{P_{u^{(k)}}}(x) = H(x, P_{u^{(k)}})$, é suave. Observe que essa associação corresponde a "$J-$ésima"entrada da associação $(g, u^{(k)}) \to \Psi_k(g, u^{(k)})$. Concluímos então que $\Psi_k|_{\{g\}\times J^k(E)}$ é suave. Juntando ambos resultados de (c3) e (c4) concluímos que Ψ_k é suave.

(d) Comparando o caso geral e o de ações projetivas, mostrado acima, surge inicialmente o problema de saber se a associação

$$(g, x) \to (gs)(x)$$

é suave. No caso geral temos que

$$(gs)(x) = \Omega_g \circ s \circ (\phi_g \circ s)^{-1}(x) = [\pi_2 \circ \Psi \circ (1_G \times s)](g, (\Phi_g \circ s)^{-1}(x))$$

é definido próximo de $1 \in G$ e o domínio de s é possivelmente diminuído. O que não permite concluir imediatamente se essa associação é suave é que não sabemos se

$$(g, x) \to (\Phi_g \circ s)^{-1}(x)$$

é suave. Mas de fato isso vale; o Teorema da Funções Implícita nos garante uma demonstração do problema particular abaixo e nele está contida a ideia para escrevermos a demonstração para nosso caso.

(d1) Seja $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ suave tal que F_x seja difeomorfismo para cada x. Então a função $H(x, y) = (F_x)^{-1}(y)$ é suave. Claramente é suave quando fixamos x e para y_0 fixado temos que

$$F(x, H(x, y_0)) = F_x \circ H(x, y_0) = y_0.$$

Por outro lado

$$\frac{\partial F}{\partial y}|_{(x_0, H(x_0, y_0))} = \frac{\partial F_{x_0}}{\partial y}|_{y_0}$$

é não singular. Pelo Teorema da Função Implícita, existe aberto $B \subset \mathbb{R}^n$ contendo x_0 e única função suave $g : B \to \mathbb{R}^m$ tal que $g(x_0) = H(x_0, y_0)$ e

$$F(x, g(x)) = y_0$$

para $x \in B$. Necessariamente em B deve-se ter $g(x) = H(x, y_0) = F_x(y_0)$, concluindo o problema pois x_0 é arbitrário.

(d2) O último detalhe que necessita ser esclarecido ao aplicar a demostração dada em (c), mais especificamente o argumento dado em (c4), é que não temos certeza de que se mudarmos de uma seção $1 \times P_{u^{(k)}} \in J^k E$ para outra próxima $1 \times P_{v^{(k)}}$ teremos ainda que $g(1 \times P_{v^{(k)}})$ é uma seção local; ou seja, isso é o mesmo que a questão sobre o domínio de Ψ_k ser ou não aberto. Para resolver esse problema basta observar que a associação

$$(x, g, P_{u^{(k)}}) \to \det[(\Phi_g \circ P_{u^{(k)}})_*]_x$$

é continua. Consequentemente, em um aberto de $M \times G \times J^k E$ está bem definida a seção $g(1 \times P_{u^{(k)}})$. Lembrem-se que precisávamos inverter a função $\Phi_g \circ P_{u^{(k)}}$ para definir a seção transformada. O leitor deverá convencer-se que essa demonstração é facilmente adaptada para o caso em que há mais que uma variável dependente.

$\square$

Anexo I

Licença

I.1 Sobre a licença dessa obra

A licença Creative Commons Atribuição 3.0 Não Adaptada utilizada nessa obra diz que:

1. Você tem a liberdade de:
    - Compartilhar — copiar, distribuir e transmitir a obra;
    - Remixar — criar obras derivadas;
    - fazer uso comercial da obra.
2. Sob as seguintes condições:
    - Atribuição — Você deve creditar a obra da forma especificada pelo autor ou licenciante (mas não de maneira que sugira que estes concedem qualquer aval a você ou ao seu uso da obra).

Anexo II

Licença

II.1 Sobre a licença dessa obra

A licença Creative Commons Atribuição-CompartilhaIgual 3.0 Não Adaptada utilizada nessa obra diz que:

1. Você tem a liberdade de:
   - Compartilhar — copiar, distribuir e transmitir a obra;
   - Remixar — criar obras derivadas;
   - fazer uso comercial da obra.
2. Sob as seguintes condições:
   - Atribuição — Você deve creditar a obra da forma especificada pelo autor ou licenciante (mas não de maneira que sugira que estes concedem qualquer aval a você ou ao seu uso da obra).
   - Compartilhamento pela mesma licença — Se você alterar, transformar ou criar em cima desta obra, você poderá distribuir a obra resultante apenas sob a mesma licença, ou sob uma licença similar à presente.

Referências Bibliográficas

[1] I. M. Anderson and M. E. Fels. Transverse group actions on bundles. *Topology and its Applications*, 123(3):443–459, 2002.

[2] I. M. Anderson, M. E. Fels, and C. G. Torre. Group invariant solutions without transversality. *Communications in Mathematical Physics*, 212(3):653–686, 2000.

[3] I. M. Anderson, M. E. Fels, and C. G. Torre. Group invariant solutions in mathematical physics and differential geometry. *arXiv preprint math-ph/0101012*, 2001.

[4] R. L. Bishop and R. J. Crittenden. *Geometry of manifolds*, volume 15. Academic press, 2011.

[5] G. W. Bluman and S. Kumei. *Symmetries and differential equations*. Springer, 1989.

[6] J. Brüning and E. Heintze. Representations of compact lie groups and elliptic operators. *Inventiones mathematicae*, 50(2):169–203, 1978.

[7] J. Dieudonné. Treatise on analysis, vol. iii, translated by jg macdonald, 1972.

[8] M. P. do Carmo. *Geometria riemanniana*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1988.

[9] R. S. Falaie. *A global formulation of the Lie theory of transformation groups*. PhD thesis, Harvard University Cambridge, Massachusetts, 1957.

[10] M. Fels and P. J. Olver. On relative invariants. *Mathematische Annalen*, 308(4):701–732, 1997.

[11] V. Guillemin and A. Pollack. *Differential topology*, volume 370. American Mathematical Soc., 2010.

[12] M. W. Hirsch. *Differential topology*, volume 33. Springer-verlag New York, 1976.

[13] K. H. Hofmann and J. D. Lawson. On sophus lie's fundamental theorems. i. In *Indagationes Mathematicae (Proceedings)*, volume 86, pages 453–466. Elsevier, 1983.

[14] N. H. Ibragimov and N. K. Ibragimov. *A Practical Course in Differential Equations and Mathematical Modelling: Classical and new methods, nonlinear mathematical models, symmetry and invariance principles*.

[15] D. W. Kahn. *Introduction to global analysis*, volume 91. Academic Press, 1980.

[16] C. LACERDA. *Grupos de Lie Compactos*. PhD thesis, Dissertaçao de Mestrado, UNICAMP, 2011.

[17] J. M. Lee. Introduction to smooth manifolds, volume 218 of graduate texts in mathematics. *SpringerVerlag, New York*, 2003.

[18] J. Marsden, T. Ratiu, and R. Abraham. Manifolds, tensor analysis, and applications. 2001.

[19] E. Meinrenken. Group actions on manifolds. *Lecture Notes, University of Toronto*, 2003.

[20] J. W. Milnor. *Topology from the differentiable viewpoint*. Princeton University Press, 1997.

[21] J. R. Munkres. *Analysis on manifolds*. Addison-Wesley Reading, MA, 1991.

[22] F. Oliveri. Lie symmetries of differential equations: classical results and recent contributions. *Symmetry*, 2(2):658–706, 2010.

[23] P. J. Olver. *Equivalence, invariants and symmetry*. Cambridge University Press, 1995.

[24] P. J. Olver. *Applications of Lie groups to differential equations*, volume 107. Springer, 2000.

[25] P. J. Olver et al. Symmetry groups and group invariant solutions of partial differential equations. *J. Diff. Geom*, 14:497–542, 1979.

[26] P. J. Olver and P. Rosenau. Group-invariant solutions of differential equations. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 47(2):263–278, 1987.

[27] L. Ovsiannikov. Group analysis of differential equations, 1982. *Academic Press, San Diego, CA, Chen L.-Y., Goldenfeld N., Oono Y., Phys. Rev. E*, 54:376, 1996.

[28] J. Riordan. *Introduction to combinatorial analysis*. Courier Dover Publications, 2002.

[29] L. A. San Martin. Algebras de lie, 2a ediçao. *Editora da UNICAMP*, 2009.

[30] L. A. B. San Martin. *Grupos de Lie*. IMECC, notas de aula, 2013. http://www.ime.unicamp.br/ smartin/cursos/grupolie-2013/gruplie100913.pdf.

[31] D. J. Saunders. *The geometry of jet bundles*, volume 142. Cambridge University Press, 1989.

[32] J. C. A. Soares, I. L. Freire, and E. e. C. C. d. P.-G. e. M. A. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática. Simetrias de lie da equação de burgers generalizada, 2011.