SISTEMAS DE CONTROLE EM ESPAÇOS DE BANACH

HERNÁN HENRÍQUEZ MIRANDA

Orientador:
Prof. Dr. Antonio V. W. Kumpera

Dissertação apresentada no Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Junho / 1983

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

A Aída, mi madre;

A Margarita, Teresa y M. Eugenia,
mis hermanas;

A la memória de Hernán, mi padre.

AGRADECIMENTOS

Temos uma enorme dívida de gratidão com numerosas pessoas e instituições, sem cuja decisiva colaboração não teríamos estudado matemática. São tantos que é impossível citá-los a todos, mas pelo menos quero expressar nossos agradecimentos para aqueles cuja ajuda foi fundamental na realização deste trabalho.

Quero agradecer à Universidade de Santiago do Chile, à Organização dos Estados Americanos e ao Conselho Nacional de Pesquisas, pelo apoio financeiro que me forneceram durante a minha estadia no Brasil.

Desejo agradecer ao grupo de Professores do Curso de Pós-Graduação do IMECC por sua sempre aberta disponibilidade e estimulantes conversações.

Cumpre-me também agradecer de modo especial ao ao meu orientador, Prof. Dr. Antonio Kumpera, por seu incentivo para estudar esta teoria, por seu constante estímulo e, fundamentalmente por sua amizade.

Quero agradecer especialmente ao meu amigo, Prof. Luiz A.B. San Martin, pelas muitas horas de paciência que me dedicou, no seminário dirigido pelo Prof. Kumpera e posteriormente, pela leitura e correção do manuscrito.

Agradeço à minha esposa por seu incansável apoio e dedicação.

Agradeço à Célia, por seu excelente trabalho de datilografia do manuscrito.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO..... i

1 - FUNDAMENTOS E NOTAÇÕES

§1. Sistemas de Controle em Espaços de Banach..... 1

§2. Estabilidade Assintótica de Sistemas de Controle..... 4

§3. Conceitos Métricos para Operadores Lineares..... 8

2 - CONTROLABILIDADE E ESTABILIDADE PARA SISTEMAS COM NÚCLEO COMPACTO

§1. Introdução..... 22

§2. Compacidade do Operador Integral..... 23

§3. Controlabilidade de Sistemas Lineares Autônomos..... 29

§4. Compacidade e Estabilidade Assintótica de Semigrupos. 44

3 - CONTROLABILIDADE DE SISTEMAS LINEARES PERTURBADOS

§1. Sistemas Continuamente Perturbados..... 49

§2. Redução a Sistemas Lineares Contínuos..... 73

4 - ESTABILIDADE ASSINTÓTICA DE SISTEMAS LINEARES PERTURBADOS

§1. Introdução..... 88

§2. Evolução de Subespaços..... 89

§3. Sistemas Perturbados Assintoticamente Estáveis..... 95

5 - SISTEMAS LINEARES AUTO-ACESSÍVEIS

§1. Introdução..... 112

§2. Estados Auto-Acessíveis..... 112

§3. Sistemas Auto-Acessíveis com Operadores Limitados.... 131

§4. Estados Estacionários e uma Propriedade Geométrica... 134

REFERÊNCIAS..... 145

INTRODUÇÃO

Uma constante preocupação do homem tem sido a de poder controlar a evolução no tempo de certos dispositivos ou mecanismos por ele manipulados, segundo regras pré-estabelecidas. Por este motivo, muitos sistemas de controle têm sido estudados por engenheiros desde épocas remotas. Assim, nos séculos XVII e XVIII, Huygens e Watt estudaram, pela primeira vez, o problema da estabilidade de um oscilador harmônico sujeito a pequenas vibrações, dando início a um importante trabalho de pesquisa que continua até os dias de hoje.

Apesar disto, durante muitos anos, as técnicas empregadas para o estudo dos sistemas de controle foram desenvolvidas para casos particulares e o desenho de sistemas automáticos era essencialmente uma arte. Foi somente na década de 1940, com a crescente necessidade de sistemas de automação cada vez mais sofisticados, que se iniciou o desenvolvimento de uma teoria sistemática dos sistemas de controle. Este desenvolvimento se valeu, numa primeira fase, da aplicação de métodos operacionais, conhecidos desde os princípios deste século, aos sistemas de controle relativamente simples regidos por sistemas de equações diferenciais lineares.

A utilização de métodos operacionais, do tipo transformadas de Laplace ou Fourier, está baseada numa descrição matemática de sistemas conhecida como de "entrada-saída" pois, conhecida

a relação existente entre a "entrada" ou exitação u(t) aplicada ao sistema e a resposta ou "saída" y(t) observada em cada instante de tempo t, é possível obter a relação existente entre as transformadas U(s) e Y(s), de u(.) e y(.) respectivamente, para cada valor da frequência s . Este procedimento permite transformar um problema no domínio do tempo, num problema no domínio da frequência.

Vários conceitos, resultados e técnicas importantes, foram estabelecidas por meio destes métodos, figurando em destaque os diagramas de Bode e Nyquist, a largura da faixa de frequências, etc. Porém, os métodos operacionais e a análise ao nível das frequências não bastaram para o estudo de sistemas mais complexos, tornando necessário que a abordagem dos sistemas de controle se fizesse diretamente no domínio do tempo. A formulação, por Evans em 1948, do método do lugar das Raízes foi um passo decisivo nesta direção, pois enlaçou magistralmente os métodos de análise tanto no domínio da frequência como no domínio do tempo.

Para o estudo de sistemas no domínio do tempo, é necessário dispor de informações que caracterizem a estrutura do sistema, dificilmente fornecidas por relações do tipo entrada-saída . Esta dificuldade conduziu à definição de "estado" de um sistema . O conceito de estado inicialmente utilizado proveio das ciências físicas, onde se entende por estado, as variáveis que no seu conjunto contém toda a informação, sobre o passado do sistema, relevante para a determinação de seu comportamento futuro. Posterior-

mente e devido à diversidade dos possíveis sistemas, tem-se formulado definições mais abstratas de estado.

O reconhecimento da importância do conceito de estado foi decisiva no avanço ulterior da teoria, pois permitiu utilizar teorias matemáticas que vinham sendo estabelecidas desde os trabalhos de H. Poincaré[1].

Para os objetivos deste trabalho, os sistemas de controle considerados serão sempre descritos por equações diferenciais:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \qquad (1)$$

onde $x(t)$ representa o estado do sistema e $u(t)$ o parâmetro de controle exercido sobre o sistema, ambos no tempo t. Deste modo, conhecida a função de controle $u(.)$, o estado do sistema evolui conforme a equação diferencial (1). Usualmente, a função $u(.)$ está sujeita a algumas restrições, chamando-se "controles admissíveis" aquelas que satisfazem a todas as restrições impostas.

De início, até aproximadamente 1965, o avanço da teoria esteve centrado nos sistemas autônomos com estados e controles a número finito de variáveis, especialmente sistemas lineares autônomos descritos por equações diferenciais do tipo:

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \ , \qquad (2)$$

---

1. POINCARÉ, H., "Sur les courbes definies par les equations differentielles", J. Math. Pures et Appl., part 3, 1 (1885), pp. 167-244. Part 4, 2 (1886), pp. 151-217.

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ e A e B são matrizes de n x n e n x m respectivamente.

Os conceitos fundamentais da teoria desenvolvida são a controlabilidade, estabilidade, observabilidade, identificação e controle ótimo. Neste trabalho estaremos apenas interessados nos dois primeiros, que são objeto de pesquisa relevante desde aproximadamente 1960.

Um sistema é dito controlável em $[t_o, t_1]$ se para qualquer par de estados x_o e x_1, existe um controle admissível $u(.)$ definido em $[t_o, t_1]$, tal que a solução correspondente de (1) verifica $x(t_o) = x_o$ e $x(t_1) = x_1$. Para sistemas lineares, o seguinte critério é fundamental: O sistema (2) é controlável em $[t_o, t_1]$, com $t_o < t_1$, se e somente se o posto da matriz $[B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B]$ é igual a n.

No que diz respeito à estabilidade, o sistema (2) chama-se assintoticamente estabilizável se existe uma matriz F e constantes $M \geq 0$ e $\mu > 0$ tais que $\|\exp (A + BF)t\| \leq M e^{-\mu t}$, para todo $t \geq 0$. Sabe-se também que um sistema (2) controlável, é estabilizável.

Entretanto, tais sistemas podem ser considerados simples no sentido de que os estados compõem-se apenas de um número finito de variáveis. Surgem porém, de maneira natural, muitos sistemas de grande interesse para os quais isto não ocorre, motivo pelo qual houve, durante os últimos vinte anos, um extenso traba-

lho de pesquisa sobre sistemas de controle com estados em algum espaço de Banach.

Seguindo as idéias de Fattorini ([13]), o principal instrumento matemático utilizado é a teoria de semigrupos fortemente contínuos. Por meio desta, é possível desenvolver uma teoria abstrata de controle em espaços de Banach arbitrários abrangendo um grande número de casos específicos.

Ademais, todos os conceitos da teoria de controle em dimensão finita podem ser formalmente estudados em dimensão infinita, necessitando-se, porém, de hipóteses adicionais para a generalização dos resultados.

Neste trabalho, abordamos alguns problemas da teoria abstrata de controle em espaços de Banach.

O capítulo I está dedicado a estabelecer as notações e revisar, bem como estender alguns resultados conhecidos que serão usados com frequência nos capítulos subsequentes.

No capítulo II demonstramos, mediante condições suficientemente gerais, que um sistema de controle com estados num espaço de Banach de dimensão infinita não pode ser controlável, o qual estende e unifica alguns resultados obtidos por Triggiani ([31], [32], [33]). A técnica utilizada permite também caracterizar aqueles sistemas de controle para os quais o operador linear definido, através da fórmula de variação das constantes, é compacto. Finalmente, obtemos alguns resultados que relacionam a compa

cidade deste operador com a estabilidade assintótica do sistema.

O capítulo III consta de dois parágrafos. No primeiro estudamos a estabilidade, da controlabilidade e da controlabilidade aproximada de um sistema diante de certas perturbações. No segundo, através do emprego de transformadas, reduzimos o estudo da controlabilidade aproximada de um sistema arbitrário à de um sistema definido por um operador linear limitado, generalizando assim um resultado de Fattorini ([14]).

No capítulo IV, com base em resultados de Triggiani ([31]), estudamos a estabilidade assintótica de sistemas de controle submetidos a certos tipos de perturbações contínuas.

O caítulo V está dedicado à definição e ao estudo de alguns conceitos de auto-acessibilidade. Estabelecemos alguns resultados que caracterizam sistemas auto-acessíveis e essencialmente auto-acessíveis e estudamos, em particular, os sistemas definidos por operadores lineares limitados. Utilizando os resultados do capítulo I, apresentamos várias classes de sistemas lineares que não são auto-acessíveis. No último parágrafo, estendemos, dentro do contexto deste trabalho, uma propriedade geométrica estabelecida por Kobayashi e Shimemura ([20]) para sistemas de controle do tipo (2).

CAPÍTULO I

FUNDAMENTOS E NOTAÇÕES

§1. SISTEMAS DE CONTROLE EM ESPAÇOS DE BANACH

Neste capítulo E denotará sempre um espaço de Banach real ou complexo com norma $\|.\|$ e $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo fortemente contínuo em E, (também chamado de classe C_o). Os resultados gerais da Teoria de Semigrupos de Classe C_o que serão utilizados podem ser encontrados em [10], [18] ou [28].

Um sistema de controle linear e autônomo sobre E será uma família de equações diferenciais da forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \geq 0 : \tag{1}$$

onde $x(t) \in E$ representa o estado do sistema no tempo t ; $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ é um operador linear, gerador infinitesimal do semigrupo $T(t)$; $B : U \longrightarrow E$ é um operador linear limitado e U é um espaço de Banach, que chamaremos de "espaço dos controles" . Diremos também que os controles admissíveis são p-integráveis , $1 \leq p \leq \infty$, se em (1), $u(.)$ é uma função p-integrável no sentido de Bochner. Indicaremos por $\mathcal{L}^p(0,\bar{t};U)$ o espaço das funções p-integráveis definidas sobre $[0,\bar{t}]$ e com valores em U e por $L^p(0,\bar{t};U)$ o espaço das classes de equivalência de funções iguais em quase toda parte. Maiores esclarecimentos podem ser encontrados em [7].

1.1 DEFINIÇÃO: O sistema (1) diz-se exatamente controlável em $[0,\bar{t}]$ por controles p-admissíveis se for possível atingir em tempo $t = \bar{t}$ e a partir de $x(0) = 0$, qualquer $\bar{x} \in E$, através das soluções de (1) e com controles $u(.) \in \mathcal{L}^p(0,\bar{t};U)$.

Como a solução fraca de (1), com condição inicial $x(0) = x_o$ é dada por:

$$(2) \qquad x(t) = T(t)x_o + \int_0^t T(t-s)\, B\, u(s)ds$$

é claro que a definição anterior é equivalente à sobrejetividade da aplicação linear limitada,

$$(3) \qquad G_{\bar{t}} : L^p(0,\bar{t};U) \longrightarrow E$$

$$u(.) \longrightarrow \int_0^{\bar{t}} T(\bar{t}-s)\, B\, u(s)ds \quad .$$

Chamaremos de "espaço de controlabilidade em tempo $\bar{t}$", ao conjunto $Z(\bar{t}) = Im(G_{\bar{t}})$ e "espaço de controlabilidade em tempo finito" a $Z = \cup\, Z(\bar{t})$, $\bar{t} > 0$.

1.2 DEFINIÇÃO: O sistema (1) diz-se exatamente controlável em tempo finito, com controles p-admissíveis, se $Z = \bar{t}$.

Do Teorema de Baire, segue facilmente que todo sistema exatamente controlável em tempo finito é exatamente controlável em $[0,\bar{t}]$, para algum $\bar{t}$, [22].

1.3 DEFINIÇÃO: O sistema (1) diz-se aproximadamente controlável em $[0,t]$, (resp. em tempo finito) se $\overline{Z(t)} = E$, (resp. $\overline{Z} = E$).

1.4 PROPOSIÇÃO [14]:

i. $x' \in Z(\bar{t})^{\perp} \Leftrightarrow B' T(t)' x' = 0, \quad \forall t \in [0,\bar{t}]$.

ii. O sistema (1) é aproximadamente controlável em $[0,\bar{t}]$, (resp. em tempo finito), se e somente se

(4) $\quad B' T(t)'x' = 0, \quad \forall t \in [0,\bar{t}]$ (resp. $\forall t \geq 0$) $\Rightarrow x' = 0$.

Consideraremos também sistemas com restrições. Um sistema de controle com restrições é um sistema do tipo (1) em que os controles pertencem a um subconjunto $\Omega \subseteq U$ previamente fixado. Denotaremos estes sistemas por

(5) $$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t), \quad u \in \Omega .$$

Chamaremos $\tilde{\Omega}(\bar{t})$ o conjunto dos controles admissíveis definidos em $[0,\bar{t}]$, isto é,

$$\tilde{\Omega}(\bar{t}) = \{u \in \mathcal{L}^p(0,\bar{t};U) : u(.) \in \Omega\}$$

e, à medida do possível, omitiremos $\bar{t}$ escrevendo simplesmente $\tilde{\Omega}$. Neste caso, definimos os conjuntos

$$Z(\bar{t}) = \mathrm{Im}(G_{\bar{t}})\Big|_{\tilde{\Omega}(\bar{t})} \quad \text{e} \quad Z$$

como anteriormente.

Para os sistemas com restrições, temos os seguintes conceitos de controlabilidade, onde $\mathcal{V}$ denota o sistema das vizinhanças de 0 em E.

1.5 DEFINIÇÃO: O sistema (5) diz-se

i. Localmente exatamente controlável em $[0,\bar{t}]$ se existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $V \subseteq Z(\bar{t})$.

ii. Localmente exatamente controlável em tempo finito se existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $V \subseteq Z$.

iii. Localmente aproximadamente controlável em $[0,\bar{t}]$ se existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $V \subseteq \overline{Z(\bar{t})}$.

iv. Localmente aproximadamente controlável em tempo finito se existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $V \subseteq \bar{Z}$.

§2. ESTABILIDADE ASSINTÓTICA DE SISTEMAS DE CONTROLE

Como no parágrafo anterior, $T(t)$ representa um semigrupo fortemente contínuo, com gerador infinitesimal A, operando no espaço de Banach E.

2.1 DEFINIÇÃO: $T(t)$ chama-se uniformemente assintoticamente estável se $\|T(t)\| \leq M e^{-\mu t}$, com $\mu > 0$.

Datko, [9] mostrou que esta definição é equivalente a $\lim_{t\to\infty} T(t) = 0$, na topologia uniforme de $\mathcal{B}(E)$, o espaço dos operadores lineares limitados em E.

2.2 DEFINIÇÃO: $T(t)$ chama-se fortemente assintoticamente estável, se para todo $x \in E$, $\lim_{t \to +\infty} T(t)x = 0$.

2.3 DEFINIÇÃO: $T(t)$ chama-se fracamente assintoticamente estável se para todo $x \in E$ e para todo $x' \in E'$,

$$\lim_{t \to +\infty} \langle T(t)x, x' \rangle = 0 .$$

Não é difícil ver ([6]) que, em consequência do Teorema de Banach-Steinhauss, todo semigrupo fracamente assintoticamente estável é uniformemente limitado, i.e., existe $M \geq 1$ tal que $\|T(t)\| \leq M$, $\forall t \geq 0$.

2.4 DEFINIÇÃO: O sistema (1) diz-se:

i. Uniformemente assintoticamente estável se o semigrupo $T(t)$ gerado por A é uniformemente assintoticamente estável.

ii. Uniformemente assintoticamente estabilizável se existe um operador linear limitado $F : E \to U$ tal que $A + BF$ é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_o e uniformemente assintoticamente estável.

2.5 OBSERVAÇÃO: Sabemos que se A gera um semigrupo $T(t)$ de classe C_o tal que $\|T(t)\| \leq M e^{\omega t}$ e $D \in \mathcal{B}(E)$, então $A + D$ também é gerador infinitesimal de um semigrupo $S(t)$ de classe C_o e

$$\|S(t)\| \leq M e^{(\omega + M\|D\|)t} , \quad ([10], [28]).$$

Analogamente, definem-se os sistemas fortemente (fracamente) assintoticamente estabilizáveis.

Neste trabalho, omitiremos habitualmente o qualitativo "assintoticamente" quando nos referirmos a estes tipos de estabilidade.

Seja $T(t)$ um semigrupo de classe C_o e

$$\omega_o(T) = \lim_{t \to +\infty} \frac{\ln \|T(t)\|}{t} ,$$

limite este chamado o "tipo" do semigrupo.

Com a terminologia de Triggiani [31], (também Curtain-Pritchard, [7]), diz-se que o gerador infinitesimal A de $T(t)$ satisfaz a Hipótese de Crescimento Espectral (S.G.A.: Spectral Growth Assumption) se

$$\sup \operatorname{Re} \sigma(A) = \omega_o(T)$$

onde $\sigma(A)$ denota o espectro de A. É sabido que esta condição nem sempre é realizada ([18], [39]) mas Triggiani mostrou que ela é verdadeira pelo menos no caso em que $T(t)$ é um semigrupo compacto ou diferenciável. Usando o teorema 2.19 de Davies, [10], é imediato estender a demonstração de Triggiani ao caso em que $T(t)$ é apenas uniformemente contínuo para $t \geq a$ e algum $a \geq 0$, caso este que inclui os semigrupos compactos e diferenciáveis. Note-se que se A satisfaz a condição S.G.A. e

sup Re $\sigma(A) < 0$ podemos concluir que $T(t)$ é uniformemente estável.

Diz-se também que A satisfaz a Hipótese de Decomposição Espectral (D.S.A.: Decomposition Spectrum Assumption) se existe uma curva de Jordan fechada e retificável Γ, que separa o espectro de A em dois conjuntos espectrais $\sigma_s(A)$ e $\sigma_u(A)$ tais que $\sigma_u(A)$ está contido no interior de Γ (e logo é um conjunto limitado) e existe $\delta > 0$ de tal forma que

$$\sigma_s(A) \subseteq \{\lambda: \text{Re } (\lambda) \leq -\delta\} \quad \text{e} \quad \sigma_u(A) \subseteq \{\lambda: \text{Re } (\lambda) > -\delta\} .$$

Seja $E = E_s \oplus E_u$ a decomposição, em espaços invariantes para A, induzida sobre E pela decomposição do espectro de A (Taylor, [30]); A_s e A_u as restrições de A a E_s e E_u, respectivamente, e P a projeção sobre E_u. Nestas condições o sistema (1) também se decompõe em dois sistemas:

$$(6) \qquad \dot{x}_s(t) = A_s x_s + (I-P) B u; \quad x_s(t) \in E_s \quad \text{e} \quad A_s : D(A) \cap E_s \to E_s$$

$$(7) \qquad \dot{x}_u(t) = A_u x_u + P B u; \quad x_u(t) \in E_u \quad \text{e} \quad A_u : E_u \to E_u .$$

$x_u(t) = P\,x(t)$, $x_s(t) = (I-P)\,x(t)$ e A_u é um operador linear limitado.

Triggiani ([31]) demonstrou o seguinte teorema, melhorado em [7] e que será fundamental no capítulo IV.

2.6 TEOREMA: Consideremos o sistema (1) e suponhamos que:

i. A satisfaz a condição D.S.A.

ii. A_S satisfaz a condição S.G.A.

iii. O sistema (7) é uniformemente estabilizável.

Então o sistema (1) é uniformemente estabilizável.

Naturalmente a condição ii. só tem a finalidade de garantir que o sistema (6) é uniformemente estável.

§3. CONCEITOS MÉTRICOS PARA OPERADORES LINEARES

Neste parágrafo vamos estudar certos conceitos de distância entre subespaços fechados e suas consequências que serão fundamentais no desenvolvimento do presente trabalho.

Sejam E, F espaços de Banach, $B(E,F)$ o espaço das aplicações lineares limitadas de E em F e $B(E) = B(E,E)$. Utilizaremos também as seguintes notações: $C(E,F)$ indica o conjunto dos operadores lineares fechados, definidos sobre subespaços de E e a valores em F, $C(E) = C(E,E)$, $S(E)$ indica o conjunto dos subespaços lineares fechados de E e S_E a esfera unitária de E, i.e.,

$$S_E = \{x \in E : \|x\| = 1\}$$

Se $A \in C(E)$ chamamos conjunto resolvente de A, denotado por $\rho(A)$, ao conjunto

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)^{-1} \in B(A)\}$$

e espectro de A, denotado por $\sigma(A)$, ao complementar de $\rho(A)$ em $\mathbb{C}$. Para $\lambda \in \rho(A)$, escrevemos

$$R(\lambda,A) = (\lambda I - A)^{-1}$$

este operador sendo chamado o operador resolvente de A. Quando não há possibilidade de confusão, utilizamos o termo "resolvente" tanto para o conjunto como para o operador resolvente.

Todas as definições, como também a maioria dos resultados que daremos neste parágrafo, podem ser encontrados no livro de Kato, [19].

3.1 DEFINIÇÃO: Sejam $M,N \in \mathcal{S}(E)$; $M,N \neq \{0\}$; definimos

$$\delta(M,N) = \sup \{d(u,N) : u \in S_M\}$$

e

$$\bar{\delta}(M,N) = \max \{\delta(M,N), \delta(N,M)\},$$

onde $d(u,N)$ denota a distância de u a N.

3.2 PROPOSIÇÃO: Nas condições da definição anterior,

i. $\bar{\delta}(M,N) = \bar{\delta}(N,M)$

ii. $\bar{\delta}(M,N) = 0 \Leftrightarrow M = N$

iii. $0 \leq \bar{\delta}(M,N) \leq 1$

iv. Se $\tilde{\delta} > \delta(M,N)$, então $\forall y \in M, \exists \bar{y} \in N$ tal que $\|y-\bar{y}\| \leq \tilde{\delta}\|y\|$

v. Se estendermos a definição de δ e $\bar{\delta}$ a todo $\mathcal{S}(E)$ pondo

$\delta(0,N) = 0$, $\forall N \in \mathcal{S}(E)$ e $\delta(M,0) = 1$ se $M \neq \{0\}$, então $\hat{\delta}$ se torna uma quase-métrica em $\mathcal{S}(E)$, i.e.,

$$\hat{\delta}(M,L) \leq 2(\hat{\delta}(M,N) + \hat{\delta}(N,L)), \quad \forall L,M,N \in \mathcal{S}(E) .$$

DEMONSTRAÇÃO: Ver Kato, [19].

A seguir sempre consideraremos $E \times F$ normado por

$$\|(x,y)\| = \|x\|_E + \|y\|_F, \quad \forall x \in E, \quad \forall y \in F .$$

Se $T \in \mathcal{C}(E,F)$ e $D(T)$ indica o domínio de T, então o gráfico de T, $G(T) = \{(x,T(x)) : x \in D(T)\}$, é, pela definição de operador linear fechado, um subespaço linear fechado de $E \times F$. Assim faz sentido a definição seguinte:

3.3 DEFINIÇÃO: Sejam $S,T \in \mathcal{C}(E,F)$, definimos

$$\delta(T,S) = \delta(G(T), G(S))$$

e

$$\hat{\delta}(T,S) = \hat{\delta}(G(T), G(S)) .$$

É claro que estas definições induzem propriedades métricas em $\mathcal{C}(E,F)$ similares àquelas da proposição 3.2 para $\mathcal{S}(E)$. Também temos a seguinte:

3.4 PROPOSIÇÃO: Sejam $T,S \in \mathcal{C}(E,F)$.

i. Se $\bar{\delta} > \delta(T,S)$ então para todo $x \in D(T)$, existe $y \in D(S)$

tal que $\|x-y\|_E + \|Tx - Sy\|_F \leq \bar{\delta}(\|x\|_E + \|Tx\|_F)$.

ii. Se $T : D(T) \subseteq E \longrightarrow F$ for limitado e $\bar{\delta} > \delta(T,S)$ então para todo $x \in D(T)$, existe $y \in D(S)$ tal que

$$\|x-y\|_E + \|Tx - Sy\|_F \leq \bar{\delta}(1 + \|T\|) \|x\| .$$

DEMONSTRAÇÃO: Ambas propriedades seguem imediatamente da proposição 3.2 iv. Note-se que em ii., $D(T)$ deve ser um subespaço fechado de E.

Sabemos que em $\mathcal{B}(E,F)$, o conjunto das aplicações sobrejetivas é aberto na topologia uniforme. Necessitaremos da generalização deste fato em termos da distância δ .

Se B_E e B_F indicam as bolas unitárias fechadas de E e F, respectivamente, e se $f : E \longrightarrow F$ é uma aplicação linear limitada e sobrejetiva, então existe $\gamma > 0$ tal que $\gamma B_F \subseteq f(B_E)$, ou seja, para todo $y \in F$, existe $x \in E$ tal que $y = f(x)$ e $\|x\| \leq \frac{1}{\gamma}\|y\|$. Seja

$$\bar{\gamma}(f) = \sup \{\gamma > 0 : \gamma B_F \subseteq f(B_E)\} \leq \|f\| .$$

A demonstração que segue é uma generalização natural da que aparece em [25], teorema viii.3.

3.5 **LEMA:** Sejam U, E espaços de Banach; $U_i \subseteq U$, $E_i \subseteq E$, $i = 1,2$, subespaços lineares fechados e

$$f_i : U_i \longrightarrow E_i, \quad i = 1,2 ,$$

aplicações lineares limitadas tais que:

i. f_1 é sobrejetiva,

ii. $\delta(f_1,f_2) < \alpha$,

iii. $\delta(E_2,E_1) \leq \beta$,

e $\dfrac{\alpha}{\bar{\gamma}(f_1)} (1 + \|f_1\|) (1 + \beta) + \beta < 1$.

Então f_2 é sobrejetiva e

$$\bar{\gamma}(f_2) \geq \frac{\bar{\gamma}(f_1)(1-\beta) - \alpha(1+\beta)(1+\|f_1\|)}{(1+\beta)(1+\alpha(1+\|f_1\|))} \quad . \tag{8}$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja γ , $0 < \gamma < \bar{\gamma}(f_1)$, tal que

$$\frac{\alpha}{\gamma} (1 + \|f_1\|) (1 + \beta) + \beta < 1$$

e ponhamos $\mu = \dfrac{\alpha}{\gamma} (1 + \|f_1\|)$.

Seja $y \in E_2$, $\|y\| \leq 1$ e $y_1 = y$.

(a) Existe $\overline{y_1} \in E_1$ tal que $\|y_1 - \overline{y_1}\| \leq \beta \|y_1\|$, (da proposição 3.2 iv). Logo $\|\overline{y_1}\| \leq 1 + \beta$.

Existe $x_1 \in U_1$ tal que $\overline{y_1} = f_1(x_1)$ e $\|x_1\| \leq \dfrac{1+\beta}{\gamma}$, (já que f_1 é sobrejetiva).

Existe $z_1 \in U_2$ tal que $\|x_1 - z_1\| + \|\overline{y_1} - f_2(z_1)\| \leq \mu(1+\beta)$, (de ii. e da proposição 3.4 ii).

Assim, se $y_2 = y_1 - f_2(z_1)$ então

$$\|y_2\| \leq \|y_1 - \overline{y_1}\| + \|\overline{y_1} - f_2(z_1)\| \leq \beta + \mu(1+\beta)$$

e

$$\|z_1\| \leq (1+\beta)\ (\mu + \frac{1}{\gamma}) \ .$$

(b) Baseados na mesma idéia que em (a), definimos indutivamente sequências $(y_k)_k \subseteq E_2$, $(\overline{y_k})_k \subseteq E_1$, $(x_k)_k \subseteq U_1$ e $(z_k)_k \subseteq U_2$ tais que:

$y_{k+1} = y_k - f_2(z_k)$,

$\|y_{k+1} - \overline{y_{k+1}}\| \leq \beta \|y_{k+1}\|$,

$f(x_{k+1}) = \overline{y_{k+1}}$ e $\|x_{k+1}\| \leq \frac{1}{\gamma} \|\overline{y_{k+1}}\|$, e

$\|x_{k+1} - z_{k+1}\| + \|\overline{y_{k+1}} - f_2(z_{k+1})\| \leq \alpha(1 + \|f_1\|)\ \|x_{k+1}\|$.

Logo,

$y_{k+1} = y_1 - f_2\ (z_1 + z_2 + \ldots z_k)$

$\|y_{k+1}\| \leq (\beta + \mu(1+\beta))^k \to 0, \quad k \to +\infty,$ e

$\|z_k\| \leq (1+\beta)\ (\frac{1}{\gamma} + \mu)\ (\beta + \mu(1+\beta))^{k-1}$.

Portanto, podemos definir $z = \sum_{k=1}^{\infty} z_k$, $z \in U_2$, e

$$\|z\| \leq \frac{(1+\beta)\ (\mu + \frac{1}{\gamma})}{1 - (\beta + \mu(1+\beta))}$$

e $f_2(z) = y$. Isto mostra que f_2 é sobrejetiva e da fórmula anterior, utilizando o fato que γ foi arbitrário, obtemos a fórmula (8).

3.6 COROLÁRIO: Sejam $S,T \in B(E,F)$, T sobrejetiva e

$\|T-S\| \leq \varepsilon < \bar{\gamma}(T)$.

Então S é sobrejetiva e $\bar{\gamma}(S) \geq \dfrac{\bar{\gamma}(T)-\varepsilon}{1+\varepsilon}$.

DEMONSTRAÇÃO: Observando que $\delta(T,S) \leq \|T-S\|$, o resultado segue imediatamente do lema 3.5 com $\beta = 0$.

Seja Λ um conjunto e consideremos as aplicações $f : \Lambda \longrightarrow B(U_1,E_1)$ e $g : \Lambda \longrightarrow B(U_2,E_2)$. É natural colocar

$$\delta(f,g) = \sup \{\delta(f(\lambda),g(\lambda)) : \lambda \in \Lambda\}$$

obtendo-se então o seguinte resultado:

3.7 COROLÁRIO: Sejam E_i e U_i, $i = 1,2$, subespaços lineares fechados de E e U, respectivamente, e

$$f : \Lambda \longrightarrow B(U_1,E_1); \quad g : \Lambda \longrightarrow B(U_2,E_2)$$

duas aplicações com domínio Λ compacto. Se f_1 é contínua e $f(\lambda)$ é sobrejetiva, para todo $\lambda \in \Lambda$, então existe $\delta > 0$ tal que as condições $\delta(E_2,E_1) < \delta$ e $\delta(f,g) < \delta$ implicam a sobrejetividade de $g(\lambda)$, $\forall \lambda \in \Lambda$.

DEMONSTRAÇÃO: Ponhamos

$$M = \sup \{\|f(\lambda)\| : \lambda \in \Lambda\} \quad \text{e} \quad \bar{\gamma} = \inf \{\bar{\gamma}(f(\lambda)) : \lambda \in \Lambda\}.$$

É claro que $M < +\infty$ e verificamos a seguir que $\bar{\gamma} > 0$. De fato, para cada $\lambda \in \Lambda$, sejam $\bar{\gamma}(\lambda) = \bar{\gamma}(f(\lambda))$, $\varepsilon(\lambda) = \frac{1}{2}\bar{\gamma}(\lambda)$ e

$$A(\lambda) = \{u \in \Lambda : \|f(u) - f(\lambda)\| < \varepsilon(\lambda)\} .$$

$A(\lambda)$ é um conjunto aberto em Λ e, para cada $\mu \in \Lambda(\lambda)$, segue do corolário anterior que

$$\bar{\gamma}(\mu) \geq \frac{\bar{\gamma}(\lambda) - \frac{1}{2}\bar{\gamma}(\lambda)}{1 + \frac{1}{2}\bar{\gamma}(\lambda)} = \frac{\bar{\gamma}(\lambda)}{2 + \bar{\gamma}(\lambda)} > 0 .$$

Como Λ é compacto, resulta que

$$\bar{\gamma} = \inf \{\bar{\gamma}(\mu) : \mu \in \Lambda\} > 0 .$$

Seja agora $\delta > 0$ tal que $\frac{\delta}{\bar{\gamma}} (1 + M) (1 + \delta) + \delta < 1$.

Se $\delta(E_2, E_1) < \delta$ e $\delta(f(\lambda), g(\lambda))$ então pelo lema 3.5, segue imediatamente que $g(\lambda)$ é sobrejetiva, $\forall \lambda \in \Lambda$.

Com este corolário podemos generalizar o teorema iv. 3.1 de [19]. Para isto necessitamos do seguinte conceito:

3.8 DEFINIÇÃO: Se $K, L \subseteq E$ são compactos, escrevemos

$$\rho(K,L) = \sup \{d(k,L) : k \in K\} .$$

3.9 LEMA: Seja E um espaço de Banach, $P,Q,S,T \in B(E)$, onde P e Q são projeções, $E_P = \mathrm{Im}(P)$ e $E_Q = \mathrm{Im}(Q)$. Se E_P (resp. E_Q) é invariante por S (resp. T) e se $S_P = S\big|_{E_P}$, $T_Q = T\big|_{E_Q}$, então $\forall \eta > 0$, $\exists \varepsilon > 0$ tal que

$$\|P-Q\| < \varepsilon \quad e \quad \|S-T\| < \varepsilon \Rightarrow \rho(\sigma(T_Q), \sigma(S_P)) < \eta .$$

DEMONSTRAÇÃO: (a) Seja $K \subseteq \rho(S_P)$ compacto. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que $K \subseteq \rho(T_Q)$ desde que $\|S-T\| < \varepsilon$ e $\|P-Q\| < \varepsilon$.

Para mostrar esta afirmação, observamos inicialmente que $(\lambda I - S_P)^{-1} \in B(E_P)$ e $\lambda I - T_Q : E_Q \to E_Q$, para todo $\lambda \in K$. Em seguida, consideramos

$$\alpha = \sup \{1 + \|R(\lambda, S_P)\| \ (1 + \|\lambda I - S\|) : \lambda \in K\}$$

e δ_1 tal que $0 < \delta_1 < \alpha^{-1}$.

Se $\|S-T\| < \delta_1$ e $\|P-Q\| < \delta_1$ então $\lambda I - T_Q$ deve ser injetor, para todo $\lambda \in K$. Com efeito, se não fosse assim, existiria $x \in E_Q$, $x \neq 0$, tal que

$$\begin{aligned} 0 = \lambda x - T_Q x &= \lambda Q x - \lambda P x + \lambda P x - S P x + S P x - T_Q x \\ &= (\lambda I - S)\ (Q-P)x + (\lambda I - S_P) P x + (S-T)x \ . \end{aligned}$$

Portanto, escrevendo $y = Px$, obteríamos

$$(\lambda I - S_P) y = -(\lambda I - S)(Q-P)x - (S-T)x \ ,$$

donde

$$\|y\| \leq \|R(\lambda, S_P)\| \ (1 + \|\lambda I - S\|) \ . \ \|x\| \ . \ \delta_1 \ ,$$

e finalmente,

$$\begin{aligned} \|x\| &\leq \|Q-P\| \ \|x\| + \|y\| \leq \delta_1 (1 + \|R(\lambda, S_P)\| \ (1 + \|\lambda I - S\|)) \ \|x\| \\ &\leq \delta_1 \ . \ \alpha \ . \ \|x\| \end{aligned}$$

o que implica $x = 0$.

Por outra parte, se chamamos $f(\lambda) = \lambda I - S_P \in B(E_P)$ e

$g(\lambda) = \lambda I - T_Q \in B(E_Q)$, obtemos aplicações

$$f : K \longrightarrow B(E_P) \quad \text{e} \quad g : K \longrightarrow B(E_Q) \ .$$

A aplicação f é claramente contínua, para a topologia uniforme de $B(E_P)$ e $f(\lambda)$ é sobrejetiva, $\forall \lambda \in K$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \delta(E_Q, E_P) &= \sup \{d(y, E_P) : y \in E_Q, \ \|y\| = 1\} \\ &\leq \sup \{\|y - P_y\| : y \in E_Q, \ \|y\| = 1\} \leq \|Q - P\| \ , \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \delta(f(\lambda), g(\lambda)) &= \delta(G(f(\lambda)), G(g(\lambda))) \\ &= \sup \{d(u, G(g(\lambda)) : u \in G(f(\lambda)), \ \|u\| = 1\} \\ &\leq \sup \{\|x - Qx\| + \|f(\lambda)x - g(\lambda)Qx\| : x \in E_P, \ \|x\| + \|f(\lambda)x\| = 1\} \\ &\leq \|P - Q\| \ (1 + |\lambda| + \|T\|) + \|S - T\| \end{aligned}$$

e portanto, pelo corolário 3.7, existe $\delta_2 > 0$ tal que se $\|P-Q\| < \delta_2$ e $\|S-T\| < \delta_2$, então $g(\lambda)$ é sobrejetiva para qualquer $\lambda \in K$.

Seja $\varepsilon = \min \{\delta_1, \delta_2\}$. Se $\|P-Q\| < \varepsilon$ e $\|S-T\| < \varepsilon$ então $\lambda I - T_Q$ deve ser bijetiva e, pelo teorema da inversa contínua de Banach, segue que $\lambda \in \rho(T_Q)$.

(b) A demonstração se completa como em [19], teorema iv.3.1. Desde que T_Q é limitada,

$$\sigma(T_Q) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|T\|\}$$

e, para $\eta > 0$, o conjunto

$$K = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|T\| \quad e \quad d(\lambda, \sigma(S_p)) \geq \eta\}$$

é um conjunto compacto contido em $\rho(S_p)$. Por (a), existe $\varepsilon > 0$ tal que se $\|P-Q\| < \varepsilon$ e $\|S-T\| < \varepsilon$, então $K \subseteq \rho(T_Q)$. Daqui, para todo $\mu \in \sigma(T_Q)$, $d(\mu, \sigma(S_p)) < \eta$, o que pela definição 3.8 significa dizer que

$$\rho(\sigma(T_Q), \sigma(S_p)) < \eta .$$

3.10 DEFINIÇÃO: Seja (X,τ) um espaço topológico, $\tilde{E} : X \to S(E)$ e $A : X \longrightarrow C(E,F)$ aplicações e $\xi_o \in X$.

i. Diz-se que $\tilde{E}$ é inferiormente δ-semicontínua em ξ_o se para qualquer $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança V de ξ_o tal que $\delta(\tilde{E}(\xi_o), \tilde{E}(\xi)) < \varepsilon$, $\forall \xi \in V$.

ii. Diz-se que $\tilde{E}$ é superiormente δ-semicontínua em ξ_o se para qualquer $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança V de ξ_o tal que $\delta(\tilde{E}(\xi), \tilde{E}(\xi_o)) < \varepsilon$, $\forall \xi \in V$.

iii. Diz-se que $\tilde{E}$ é δ-contínua em ξ_o se para qualquer $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança V de ξ_o tal que $\tilde{\delta}(\tilde{E}(\xi_o), \tilde{E}(\xi)) < \varepsilon$, $\forall \xi \in V$.

iv. Diz-se que A é inferiormente δ-semicontínua (resp. superiormente δ-semicontínua; δ-contínua) se a aplicação

$$X \longrightarrow S(E \times F), \qquad \xi \longrightarrow G(A(\xi))$$

é inferiormente δ-semicontínua (resp. superiormente δ-semicontínua; δ-contínua).

3.11 LEMA: Seja (X,τ) um espaço topológico e $A : X \longrightarrow C(E)$ uma aplicação.

i. Se A é uma aplicação δ-contínua, Λ é um conjunto compacto não vazio, $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$, e $\xi_o \in X$ tal que $\Lambda \subseteq \rho(A(\xi_o))$, então existe uma vizinhança V de ξ_o tal que

   (a) $\Lambda \subseteq \rho(A(\xi))$, $\forall \xi \in V$, e

   (b) $R(\lambda) : V \longrightarrow B(E)$, $\xi \longrightarrow R(\lambda, A(\xi))$ é contínua, na topologia uniforme de $B(E)$, para todo $\lambda \in \Lambda$, uniformemente em λ, $\lambda \in \Lambda$.

ii. Reciprocamente, se existe $\lambda \in \cap\, \rho(A(\xi))$, $\xi \in X$, tal que $R(\lambda)$ é contínua, então $A : X \longrightarrow C(E)$ é δ-contínua.

DEMONSTRAÇÃO: Vide [19], páginas 204-206.

Este lema mostra que a δ-continuidade de uma aplicação $A : X \longrightarrow C(E)$, é um conceito bastante restritivo; mesmo assim, dispomos de um exemplo importante.

3.12 LEMA: Suponha que $A : X \longrightarrow C(E)$ seja de tal forma que $D(A(\xi)) = D$ é independente de ξ e que existe $\lambda \in \cap\, \rho(A(\xi))$, $\xi \in X$. Se

i. $R(\lambda) : X \longrightarrow \mathcal{B}(E)$, $\xi \longrightarrow R(\lambda, A(\xi))$ é localmente limitada (em norma) e

ii. Para cada $\xi_o \in X$, $A\,R(\lambda)(\xi_o) : X \longrightarrow \mathcal{B}(E)$, $\xi \to A(\xi)\,R(\lambda)(\xi_o)$ é contínua (na topologia uniforme de $\mathcal{B}(E)$).

Então A é δ-contínua.

DEMONSTRAÇÃO: Ponhamos $R(\lambda,\xi) = R(\lambda, A(\xi))$. Pelo lema 3.11.ii., é suficiente mostrar que $R(\lambda)$ é contínua. Se $\xi_o \in X$,

$$\begin{aligned} \|R(\lambda,\xi) - R(\lambda,\xi_o)\| &= \|R(\lambda,\xi)(A(\xi_o) - A(\xi))\,R(\lambda,\xi_o)\| \\ &\leq \|R(\lambda,\xi)\|\ \|A(\xi_o)R(\lambda,\xi_o) - A(\xi)\,R(\lambda,\xi_o)\|, \end{aligned}$$

a tese sendo agora consequência das hipóteses i. e ii.

OBSERVAÇÃO: Segue, do Teorema de Banach-Steinhauss, que a condição i. do lema anterior é satisfeita desde que X verifique o 1º Axioma da Enumerabilidade e que $R(\lambda) : X \longrightarrow \mathcal{B}(E)$ seja τ-fortemente contínua.

Consideramos agora $A \in \mathcal{C}(E)$ tal que $\rho(A) \neq \Phi$, condição que sempre estará realizada quando A for gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_o. Sabemos neste caso (Taylor, [30]) que toda decomposição do espectro $\sigma(A)$ em conjuntos espectrais disjuntos $\sigma_1(A)$ e $\sigma_2(A)$, induz uma decomposição $E = E_1 \oplus E_2$ em subespaços invariantes por A; se ademais $\sigma_2(A)$ é limitado, então $A\big|_{E_2}$ é um operador linear limitado. Esta de

composição é contínua no seguinte sentido, (Kato, [19], teorema iv.3.16).

3.14 TEOREMA: Seja $A \in C(E)$ e suponhamos que $\sigma(A)$ esteja separado em dois conjuntos espectrais $\sigma_1(A)$ e $\sigma_2(A)$ por uma curva de Jordan retificável Γ.

Se $E = E_1(A) \oplus E_2(A)$ é a decomposição correspondente induzida sobre E, então existe $\delta > 0$ tal que:

i. Para qualquer $B \in C(E)$ com $\hat{\delta}(A,B) < \delta$, o espectro $\sigma(B)$ também está separado por Γ em dois conjuntos espectrais $\sigma_1(B)$ e $\sigma_2(B)$.

ii. Se $E = E_1(B) \oplus E_2(B)$ é a decomposição correspondente induzida sobre E e se P_A e P_B são as projeções sobre $E_1(A)$ e $E_1(B)$, respectivamente, então $P_B \longrightarrow P_A$, $\delta \to 0$ (na topologia uniforme de operadores).

CAPÍTULO II

CONTROLABILIDADE E ESTABILIDADE PARA SISTEMAS COM NÚCLEO COMPACTO

§1. INTRODUÇÃO

Seja

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)\,, \tag{1}$$

um sistema de controle e

$$G(u(.)) = \int_0^{\bar{t}} T(\bar{t}-s)\,B\,u(s)\,ds \tag{2}$$

o funcional correspondente, tais como foram definidos no capítulo I, §1.

Na série de artigos [32], [33] e [34], Triggiani mostrou que se $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo compacto para $t > 0$ ou se B é um operador compacto então G é um operador compacto. É claro que nestas condições, se E é de dimensão infinita então o sistema (1) não pode ser exatamente controlável.

No que segue, vamos generalizar estas idéias, a um contexto mais abstrato, o que nos permitirá obter alguns resultados no estudo da controlabilidade e estabilidade de sistemas lineares.

§2. COMPACIDADE DO OPERADOR INTEGRAL

Sejam E e U espaços de Banach, $B(U,E)$ o espaço das aplicações lineares limitadas de U em E, com a topologia uniforme de operadores e $K(U,E)$ o subespaço fechado das aplicações compactas.

Indicamos por I a um qualquer dos intervalos $[0,\bar{t}]$ ou $(0,\bar{t}]$, $\bar{t} \geq 0$ e escrevemos: $I_\delta = [\delta,\bar{t}]$, $0 \leq \delta < \bar{t}$.

A seguir tomaremos, para núcleos, funções $f : I \times U \to E$ e analisaremos as seguintes condições:

2.1 Para cada $s \in I$, a aplicação $f_s : U \to E$, $f_s(u) = f(s,u)$, é linear compacta, isto é, $f_s \in K(U,E)$.

2.2 Para cada $u \in U$, a função $f_u : I \to E$, $f_u(s) = f(s,u)$ é contínua e o conjunto $\{f_u|_J : u \in L\}$ é equicontínuo em $C(J;E)$, quando $J \subseteq I$ é compacto e $L \subseteq U$ é limitado.

2.3 Existe uma função não-negativa η, $\eta \in \mathcal{L}^q(I,\mathbb{R})$, algum q, $1 \leq q \leq \infty$, tal que $\|f_s\| \leq \eta(s)$, quase sempre.

2.4 OBSERVAÇÕES

1) No caso em que $I = [0,\bar{t}]$, a condição 2.2 se reduz à condição mais simples: $\{f_u : u \in L\}$ é equicontínuo em $C(I;E)$, quando $L \subseteq U$ é limitado.

2) Se definirmos $f_1 : I \to B(U,E)$ por $f_1(s) = f_s$, então a continuidade de f_1 implica a condição 2.2 para f. Isto segue

diretamente da definição da topologia uniforme em $B(U,E)$.

3) Se f satisfaz as condições 2.1 e 2.2 então, como consequência imediata do Teorema de Ascoli-Arzelá, o conjunto $\{f_u\big|_J : u \in L,\ L \subseteq U \text{ é limitado}\}$ é relativamente compacto em $C(J;E)$.

2.5 **LEMA:** Se f satisfaz as condições 2.1 e 2.2, se $J \subseteq I$ é compacto e se $L \subseteq U$ é limitado, então $f(J \times L)$ é relativamente compacto em E.

DEMONSTRAÇÃO: Como E é completo, basta mostrar que $f(J \times L)$ é precompacto. Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Por 2.1 e para qualquer $s \in J$, $f_s(L)$ é relativamente compacto em E, logo existem $n(s) \in \mathbb{N}$ e $x_1(s),\ldots,x_{n(s)}(s) \in E$ tais que $\|f_s(u) - x_i(s)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, para algum i, $i = 1,2,\ldots,n(s)$ e para todo $u \in L$. Também por 2.2, sabemos que $\{f_u\big|_J : u \in L\}$ é equicontínuo em $C(J;E)$, portanto, para todo $s \in J$, existe $\delta(s) > 0$ tal que $t \in J$ e $|s-t| < \delta(s)$ então

$$\|f_u(s) - f_u(t)\| = \|f_s(u) - f_t(u)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall u \in L.$$

Sejam $s_1,s_2,\ldots,s_m \in J$ tais que os intervalos $[s_j - \delta(s_j),\ s_j + \delta(s_j)]$, $j = 1,2,\ldots,m$ são uma cobertura de J e chamemos $x_{i,j} = x_i(s_j)$, $j = 1,2,\ldots,m$; $i = 1,2,\ldots,n(s_j)$.

Das afirmações anteriores segue agora imediatamente que

$$f(J \times L) \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} \bigcup_{i=1}^{n(s_j)} B_E(x_{i,j}, \varepsilon) ,$$

onde $B_E(x_{i,j}, \varepsilon)$ denota a bola fechada, com centro $x_{i,j}$ e raio ε, em E, o que completa a demonstração.

2.6 COROLÁRIO: Suponhamos que f satisfaça as condições 2.1, 2.2 e 2.3, e seja p o expoente conjugado de q então:

1) Se $u(.) \in \mathcal{L}^p(I;U)$ e $\tilde{f}(s) = f(s, u(s))$ então $\tilde{f}$ é m-mensurável, onde m denota a medida de Lebesgue em I.

2) Se $I = (0, \bar{t}]$ e se $\delta > 0$, existe um conjunto $K(\delta) \subseteq E$, $K(\delta)$ compacto e absolutamente convexo tal que
$\{f(s,u(s)) : s \in I_\delta, \ u \in \mathcal{L}^p(I;U) \text{ e } \|u(s)\| \leq 1\} \subseteq K(\delta)$.

3) Se $I = [0, \bar{t}]$, existe um conjunto $K \subseteq E$, compacto e absolutamente convexo tal que
$\{f(s,u(s)) : s \in I, \ u \in \mathcal{L}^p(I;U) \text{ e } \|u(s)\| \leq 1\} \subseteq K$.

4) Se $\sigma \subseteq I$ é m-mensurável, então a aplicação $G_\sigma : L^p(I;U) \to E$, $G_\sigma(u(.)) = \int_\sigma f(s,u(s))ds$ é linear e limitada.

DEMONSTRAÇÃO:

1) Para todo $u \in U$ fixado, $f_u : I \to E$ é contínua, logo m-mensurável, ([27]), e para todo $s \in I$, $f_s : U \to E$ é contínua, logo o resultado segue do Lema de Caratheodory, na forma dada por Delfour-Mitter, [11].

2) Como $\{f(s,u(s)) : s \in I_\delta, \ u \in \mathcal{L}^p(I;U), \|u(s)\| \leq 1\} \subseteq f(I_\delta \times U_1)$,

onde U_1 denota a bola unitária fechada de U, a afirmação é imediata pelo lema 2.5 e o Teorema de Mazur.

3) Igual demonstração que em 2).

4) A aplicação $s \to f(s,u(s))$ é m-mensurável por 1) e como $\|f(s,u(s))\| \leq \eta(s)\,\|u(s)\|$, com $\eta \in \mathcal{L}^q(I;\mathbb{R})$ e $u \in \mathcal{L}^p(I;U)$, segue que $f(s,u(s))$ é integrável, ([27]), e portanto G_σ está bem definida.

A linearidade de $G\sigma$ é consequência da linearidade de f_s e as desigualdades:

$$\|G_\sigma(u(.))\| = \left\|\int_\sigma f(s,u(s))ds\right\| \leq \int_\sigma \|f(s,u(s))\|ds$$

$$\leq \int_0^{\bar{t}} \eta(s)\,\|u(s)\|ds \leq \|\eta\|_q\,\|u\|_p\,,$$

acarretam que G_σ é limitada com $\|G_\sigma\| \leq \|\eta\|_q$.

No que segue, escreveremos G_δ quando $\sigma = I_\delta$ e G quando $\sigma = I$.

2.7 LEMA: Se f satisfaz as condições 2.1, 2.2 e 2.3, para algum $q < +\infty$ e se p é o expoente conjugado de q, então $G = \lim_{\delta \to 0^+} G_\delta$, na topologia uniforme de operadores.

DEMONSTRAÇÃO: Com efeito,

$$\|G(u) - G_\delta(u)\| = \|\int_0^{\bar{t}} f(s,u(s))ds - \int_\delta^{\bar{t}} f(s,u(s))ds\|$$

$$\leq \int_0^\delta \|f(s,u(s))\|ds \leq \int_0^\delta \eta(s)\ \|u(s)\|ds$$

$$\leq (\int_0^\delta \eta(s)^q ds)^{\frac{1}{q}} . (\int_0^\delta \|u(s)\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\int_0^\delta \eta(s)^q ds)^{\frac{1}{q}} \|u\|_{p'}$$

logo,

$$\|G - G_\delta\| \leq (\int_0^\delta \eta(s)^q ds)^{\frac{1}{q}} \longrightarrow 0 \quad , \quad \delta \longrightarrow 0$$

já que $q < +\infty$.

2.8 TEOREMA: Se f satisfaz as condições 2.1, 2.2 e 2.3, com

1) $I = (0,\bar{t}]$ e $1 \leq q < \infty$ ou

2) $I = [0,\bar{t}]$ e $1 \leq q \leq \infty$,

e se p é o expoente conjugado de q, então em ambos os casos o operador $G : L^p(0,\bar{t},U) \to E$, $G(u) = \int_0^{\bar{t}} f(s,u(s))ds$ é linear compacto.

DEMONSTRAÇÃO: É claro que pelo lema 2.7 que quando $1 \leq q < \infty$, é suficiente mostrar que G_δ é um operador compacto, para cada $\delta > 0$.

Consideremos primeiro $q = 1$, i.e., $p = \infty$ e seja U_1^∞ a bola unitária fechada de $L^\infty(I;U)$. Se $u(.) \in U_1^\infty$ é sempre possível alterá-la convenientemente, num conjunto de medida nula, de tal forma que $\|u(s)\| \leq 1$, $\forall s \in I$. Logo por 2.6.2,

$f(s,u(s)) \in K(\delta)$ se $s \in I_\delta$ e portanto,

$$G_\delta(u) = \int_\delta^{\bar{t}} f(s,u(s))ds \in (\bar{t}-\delta)\ K(\delta) ,$$

logo G_δ é um operador linear compacto.

Seja agora $1 < q < \infty$, logo $1 < p < \infty$. Seja φ uma função em escada, isto é, $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \psi_{\sigma_i} u_i$, onde $u_i \in U$ e ψ_{σ_i}, $i = 1,2,\ldots,n$ são as funções características dos conjuntos $\sigma_i \subseteq I$, Lebesgue mensuráveis e disjuntos. Assim,

$$\|\varphi\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} m(\sigma_i)\|u_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

e

$$G_\delta(\varphi) = \int_\delta^{\bar{t}} f(s,\varphi(s))ds = \int_\delta^{\bar{t}} f(s, \sum_{i=1}^{n} \psi_{\sigma_i}(s)u_i)ds$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_\delta^{\bar{t}} \psi_{\sigma_i}(s)\ f(s,u_i)ds = \sum_{i=1}^{n} \int_{\sigma_i \cap I_\delta} f(s,u_i)ds;$$

como $f(s,u) \in \|u\|\ K(\delta)$, para todo $s \in I_\delta$, então

$$G_\delta(\varphi) \in \left(\sum_{i=1}^{n} m(\sigma_i \cap I_\delta)\|u_i\|\right)\ K(\delta) .$$

Se $\|\varphi\|_p \leq 1$, então $\sum_{i=1}^{n} m(\sigma_i \cap I_\delta)\ \|u_i\| \leq 1 + \bar{t}$, logo

$$G_\delta(\varphi) \in (1 + \bar{t})\ K(\delta) .$$

Como o conjunto das funções em escada é denso em $\mathcal{L}^p(I,U)$ então $G_\delta(U_1^p) \subseteq (1+\bar{t})(K(\delta))$, onde U_1^p é a bola unitária fechada de $L^p(I,U)$, e portanto G_δ é um operador linear compacto.

Finalmente, uma simples adaptação da demonstração feita anteriormente, utilizando a parte 3) do lema 2.6 em lugar da parte 2), mostra que G é um operador linear compacto quando $q = \infty$, i.e., $p = 1$, e $I = [0,\bar{t}]$.

§3. CONTROLABILIDADE DE SISTEMAS LINEARES AUTÔNOMOS

Para uma primeira aplicação dos resultados do parágrafo anterior, consideraremos semigrupos mais gerais do que os fortemente contínuos.

Seja $T(t) \in B(E)$; diz-se que a família $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo de operadores se:

3.1 $T(t+s) = T(t)\,T(s)$, para todo $s,t \geq 0$, e

3.2 Para todo $x \in E$, a aplicação $(0,+\infty) \to E$, $t \to T(t)x$ é m-mensurável.

Nestas condições, é conhecido, ([18]), que $\|T(t)\|$ é limitada para $t \in [\alpha,\beta]$, $0 < \alpha \leq \beta$ e, para todo $x \in E$, a aplicação $(0,+\infty) \to E$, $t \to T(t)x$ é contínua.

3.3 PROPOSIÇÃO: Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo de operadores em E, $B \in B(U,E)$ e $1 < p \leq \infty$. Se as seguintes condições fo-

rem satisfeitas:

1) Existe $\eta \in \mathcal{L}^q_{loc}(0,\infty;\mathbb{R})$, com q o expoente conjudado de p, tal que $\|T(t)\| \leq \eta(t)$, quase sempre.

2) $T(t) \cdot B$ é um operador compacto, para todo $t > 0$, então $G : L^p(0,\bar{t};U) \to E$, $u(.) \to \int_0^{\bar{t}} T(s)B\,u(\bar{t}-s)ds$, é um operador compacto, para qualquer $\bar{t} \geq 0$.

DEMONSTRAÇÃO: Em virtude do teorema 2.8, é suficiente mostrar que a função

$$f : (0,\bar{t}] \times U \longrightarrow E, \qquad f(s,u) = T(s)\,B\,u$$

satisfaz as condições 2.1, 2.2 e 2.3.

Como $f_s = T(s)B$ é uma aplicação linear compacta e como $\|f_s\| \leq \eta(s)\|B\|$, é imediato que f satisfaz as condições 2.1 e 2.3.

Para mostrar que a condição 2.2 se verifica, utilizaremos a observação 2.4.2, isto é, mostraremos que $f_1 : (0,\bar{t}] \to B(U,E)$, $f_1(s) = f_s$, é contínua. Para isto consideraremos $\delta > 0$ e U_1 a bola unitária fechada de U.

Sabemos, pela hipótese 2), que $T(\frac{\delta}{2})\,B(U_1) \subseteq K$, $K \subseteq E$ é compacto. Definamos então

$$h_s : K \to E, \qquad h_s(x) = T(s+\tfrac{\delta}{2})x - T(\tfrac{\delta}{2})x, \qquad s \in [0,1].$$

Temos, pela continuidade, em $\frac{\delta}{2}$, da função $T(.)x$ que

$h_s(x) \to 0$, quando $s \to 0$, para todo $x \in K$. Além do mais, as aplicações h_s, $s \in [0,1]$ são equicontínuas, visto que

$$\begin{aligned} \|h_s(x) - h_s(y)\| &\leq \|T(s+\tfrac{\delta}{2})(x-y)\| + \|T(\tfrac{\delta}{2})(x-y)\| \\ &\leq (M + \|T(\tfrac{\delta}{2})\|)\ \|x-y\|\ , \end{aligned}$$

onde $M = \sup\{\|T(s+\frac{\delta}{2})\| : s \in [0,1]\}$.

Logo como K é compacto, $h_s(x) \to 0$, quando $s \to 0$ uniformemente com relação a $x \in K$, e portanto, se $s_1, s_2 \geq 2\delta$, $u \in U_1$ e $s_1 \geq s_2$, obtemos

$$\begin{aligned} \|f_1(s_1)(u) - f_1(s_2)(u)\| &= \|f_{s_1}(u) - f_{s_2}(u)\| = \|T(s_1)Bu - T(s_2)Bu\| \\ &= \|T(s_2-\delta)[T(s_1-s_2+\tfrac{\delta}{2})x - T(\tfrac{\delta}{2})x]\| \\ &\leq \|T(s_2-\delta)\|\ \|h_{s_1-s_2}(x)\| \\ &\leq N\|h_s(x)\|\ , \end{aligned}$$

onde $x = T(\frac{\delta}{2})Bu$, $s = s_1 - s_2$ e $N = \sup\{\|T(t)\| : \delta \leq t \leq s_1+1\}$.

Consequentemente, como $x \in K$, $\|f_1(s_1) - f_1(s_2)\| \to 0$ quando $s = s_1 - s_2 \to 0$, e portanto, f_1 é contínua em $s_1 > 2\delta$. Como $\delta > 0$ foi tomado arbitrário, concluimos que f_1 é contínua.

O teorema 2.8. 1), mostra então que a aplicação

$$\Lambda : L^p(0,\bar{t};U) \to E, \quad \Lambda(u) = \int_0^{\bar{t}} T(s)Bu(s)\,ds$$

é um operador linear compacto e como a aplicação

$$j : L^p(0,\bar{t},U) \longrightarrow L^p(0,\bar{t};U), \qquad j(u)(s) = u(\bar{t}-s)$$

é contínua, obtemos finalmente a compacidade de $G = \Lambda \circ j$.

Em particular, se $T(t)$ é um semigrupo fortemente contínuo então $\|T(t)\| \leq M e^{\omega t}$, para certas constantes $M \geq 1$ e $\omega \in \mathbb{R}$ e, para todo $x \in E$, a função $[0,+\infty) \to E$, $t \to T(t)x$ é contínua, logo se B for um operador linear limitado, temos estabelecido o seguinte teorema:

3.4 TEOREMA: Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo fortemente contínuo em $\mathcal{B}(E)$ e $B \in \mathcal{B}(U,E)$. Para $1 \leq p \leq \infty$ define-se

$$G : L^p(0,\bar{t};U) \longrightarrow E, \qquad G(u) = \int_0^{\bar{t}} T(s) B u(\bar{t}-s) ds \ .$$

Se

1) $T(s)B$ é compacto, para todo s, $0 < s \leq \bar{t}$ e $p > 1$, ou

2) B é compacto e $p \geq 1$,

então G é um operador linear compacto.

Nos corolários que seguem vamos considerar sistemas de controle lineares e autônomos.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

com "estados" $x(t) \in E$ e "controles" $u(t) \in U$, onde E e U são espaços de Banach, com E de dimensão infinita.

3.5 COROLÁRIO: Em qualquer uma das hipóteses:

1) Existe $\bar{t} > 0$ tal que $T(s)B$ é compacto para $0 < s \leq \bar{t}$ e $p > 1$,

2) B é compacto e $p \geq 1$,

o sistema de controle (1), com controles admissíveis em $\mathcal{L}^p_{loc}(\mathbb{R}^+;U)$ não é exatamente controlável em tempo finito.

DEMONSTRAÇÃO: Como foi observado no capítulo I, se o sistema $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ fosse exatamente controlável em tempo finito, então existiria $t_1 > 0$ tal que o sistema seria exatamente controlável em $[0,t_1]$.

No caso da hipótese 1) e supondo $t_1 > \bar{t}$ resulta, por ser $T(t)B = T(t-\bar{t})T(\bar{t})B$ compacto, para todo $t \geq \bar{t}$, que $T(s)B$ é compacto para $0 < s \leq t_1$.

Concluimos então pelo teorema 3.4, que a aplicação

$$G : L^p(0,t_1;U) \longrightarrow E, \quad G(u) = \int_0^{t_1} T(s)\, B\, u(t_1-s)ds$$

é compacta, para $p > 1$ no caso da hipótese 1), e para $p \geq 1$ no caso da hipótese 2).

Como E tem dimensão infinita, G não pode ser sobrejetora e logo o sistema não pode ser exatamente controlável (capítulo I.§1).

São de especial interesse na teoria de controle os sistemas ditos de "posto finito", ou seja aqueles sistemas para os

quais Im(B) tem posto finito, habitualmente por ser o espaço U de dimensão finita.

Sabemos pelo que precede que estes sistemas não podem ser exatamente controláveis, quando E tem dimensão infinita. Há no entanto muitos sistemas de posto finito que são aproximadamente controláveis em $[0,\bar{t}]$, isto é, $E \subseteq \overline{Im(G)}$. Neste caso, para todo $x \in E$, com $\|x\| \leq 1$, existe uma sequência $(u_n(x)(.))_n \subseteq \mathcal{L}^p(0,\bar{t};U)$, de controles admissíveis, tal que, $G(u_n(x)) \to x$, $n \to +\infty$, e conforme Rudin, ([29], lema 4.13), podemos afirmar que $\{\|u_n(x)\|_p : n \geq 1, \ x \in E, \ \|x\| \leq 1\}$ não é limitado.

No caso dos sistemas de controle com restrições, o corolário 3.5 pode ser reformulado como segue:

3.6 COROLÁRIO: Consideremos um sistema de controle com restrições:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad u(t) \subseteq \Omega \subseteq U, \tag{3}$$

definido sobre um espaço de Banach E, de dimensão infinita e ponhamos $V = \overline{S_p(\Omega)}$, $B_V = B\big|_V$. Então, para qualquer uma das hipóteses:

1) Existe $\bar{t} > 0$ tal que $T(s)B_V$ é compacto para $0 < s \leq \bar{t}$ e $p > 1$, ou

2) B_V é compacto e $p \geq 1$.

O sistema de controle (3) não é localmente exatamente controlável em tempo finito, por controles admissíveis em $\mathcal{L}^p_{loc}(\mathbb{R}^+;U)$.

DEMONSTRAÇÃO: Se (3) fosse localmente exatamente controlável em tempo finito, então o sistema de controle sem restrições

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B_v v(t) ,$$

com $v(.) \in \mathcal{L}^p_{loc}(\mathbb{R}^+;V)$ seria exatamente controlável, o qual não é possível em virtude das hipóteses e do corolário 3.5.

Assim temos que se E tem dimensão infinita e $T(t)B$ é compacto para $t \in (0,\bar{t}]$, o sistema de controle

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) ,$$

onde A é o gerador infinitesimal de $T(t)$, não é exatamente controlável. A seguir, abandonando as hipóteses de compacidade mostramos outro resultado de caráter geral de falta de controlabilidade exata para sistemas lineares.

3.7 TEOREMA: Se o sistema de controle (1) é exatamente controlável em $[0,\bar{t}]$ por controles admissíveis p-integráveis, para algum p, $1 < p \leq \infty$, e o semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ é diferenciável para $t > t_o \geq 0$, então A é um operador linear limitado.

DEMONSTRAÇÃO: Se (1) é exatamente controlável em $[0,\bar{t}]$, a aplicação

$$G : L^p(0,\bar{t};U) \longrightarrow E, \quad G(u) = \int_0^{\bar{t}} T(\bar{t}-s)\, B\, u(s)\, ds$$

é sobrejetora.

Se definirmos

$$G : L^p(0,\bar{t};U) \longrightarrow E, \quad G_\delta(u) = \int_0^{\bar{t}-\delta} T(\bar{t}-s)\, B\, u(s)\, ds$$

o lema 2.7 nos garante que $G = \lim_{\delta \to 0^+} G_\delta$, na topologia uniforme de operadores.

Portanto, (Lang, [25], teorema viii.3), existe $\delta > 0$ tal que G_δ é sobrejetora e como

$$G_\delta(u) = T(\delta) \int_0^{\bar{t}-\delta} T(\bar{t}-\delta-s)\, B\, u(s)\, ds \ ,$$

concluimos que $T(\delta)$ é sobrejetiva.

Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $t = n\delta > t_o$. Pelas propriedades dos semigrupos, $T(t) = T(n\delta) = T(\delta)^n$ é também sobrejetora, e como $T(t)$ é diferenciável, ([28]), $E = T(t)(E) \subseteq D(A) \subseteq E$, ou seja $D(A) = E$ e A é um operador linear limitado.

Como na maioria das aplicações os semigrupos são compactos ou analíticos, vemos através deste teorema que o conceito de controlabilidade exata não é conveniente na teoria do controle em espaços de dimensão infinita.

Nesta ordem de idéias, outras consequências imediatas para a teoria de semigrupos são as seguintes:

3.8 COROLÁRIO: Sejam A e B geradores infinitesimais, com domínios D(A) e D(B) respectivamente, dos semigrupos fortemen-

te contínuos $T(t)$ e $S(t)$ respectivamente. Se $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$ e $S(t)\,(R(\lambda,A) - R(\lambda,B))$ é compacto para $t \in (0,t_1]$, então $R(\lambda,B)(T(t_1) - S(t_1))R(\lambda,B)$ é um operador compacto.

DEMONSTRAÇÃO: Sabemos ([28], lema 3.4.1) que para todo $x \in E$,

$$R(\lambda,B)(T(t_1) - S(t_1))R(\lambda,A)x = \int_0^{t_1} S(s)(R(\lambda,A) - R(\lambda,B))T(t_1-s)x\,ds .$$

É claro que $u(s) = T(t_1-s)x \in \mathcal{L}^\infty(0,t_1;E)$ e que a aplicação $E \longrightarrow \mathcal{L}^\infty(0,t_1;E)$, $x \longrightarrow u(.)$ é linear e limitada. O resultado segue então do teorema 3.4.1, onde B é substituído por $R(\lambda,A) - R(\lambda,B)$.

É bem conhecido que se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ fortemente contínuo e se D é outro operador linear, com $Dom(A) \subseteq Dom(D)$, o operador $A + D$ não é em geral o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_o, nem mesmo quando D é relativamente limitado com relação a A, isto é, quando existem constantes $a,b \geq 0$ tais que

$$\|Dx\| \leq a\|Ax\| + b\|x\|, \quad \forall x \in Dom(A), \quad ([10]).$$

Porém há casos em que tal acontece como, por exemplo, quando D é um operador linear limitado ou, mais geralmente quando D pertence à classe de perturbações de A, segundo a terminologia de Davies, ([10]).

Nestes casos se chamamos $S(t)$ ao semigrupo gerado por $A + D$, obtemos:

$$(4) \qquad S(t)x = T(t)x + \int_0^t T(t-s)\, D\, S(s)x\, ds\,, \quad \forall x \in E\,.$$

É também conhecido, ([3]), que se E é um espaço de Hilbert, se D é limitado e se T(t) é compacto, para todo $t > 0$, então S(t) também é compacto, para todo $t > 0$.

É possível porém, afirmar um pouco mais. Suponhamos que D é um operador linear relativamente limitado em relação a A e que $0 \leq a < 1$. Neste caso A + D é um operador linear fechado, ([19]), e se for o gerador infinitesimal de um semigrupo S(t) de classe C_o, então a função $s \longrightarrow D\,S(s)x$ é contínua, para todo $x \in D(A)$. A última afirmação segue do fato que

$$D\,S(s)x = D\,R(\lambda, A+D)\; S(s)(\lambda I - A - D)x\,,$$

para $\lambda \in \rho(A+D)$ e que $D\,R(\lambda, A+D) \in B(E)$, ([19]). Nestas condições, demonstra-se também, na referência acima, que a fórmula (4) é válida para todo $x \in D(A)$. Podemos agora estabelecer o seguinte resultado:

3.9 TEOREMA: Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ fortemente contínuo e D um operador linear tal que $Dom(A) \subseteq Dom(D)$. Suponhamos ainda que:

1. D é relativamente limitado com relação a A e $a < 1$,
2. A + D é gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{S(t) : t \geq 0\}$,

3) Para cada $t > 0$, existe p, $1 < p \leq \infty$, tal que a aplicação $J_t : D(A) \longrightarrow \mathcal{L}^p(0,t;E)$, $x \longrightarrow DS(.)x$ é linear e limitada.

4) $T(t)$ é compacto para todo $t > 0$.

Nestas condições o semigrupo $S(t)$ é compacto para todo $t > 0$.

DEMONSTRAÇÃO: Pelas considerações anteriores,

$$S(t)x = T(t)x + \int_0^t T(t-s)\, DS(s)x\, ds, \quad \forall x \in D(A)$$

e a aplicação J_t está bem definida, já que $DS(.)x$ é contínua.

Como a integral na fórmula precedente define um operador linear limitado sobre $D(A)$ e como este último conjunto é denso em E, se chamarmos $\tilde{J}_t$ à extensão de J_t a E, então

$$S(t)x = T(t)x + \int_0^t T(t-s)\, \tilde{J}_t(x)(s)ds, \quad \forall x \in E.$$

Pelo teorema 3.4.1), $G(u) = \int_0^t T(t-s)\, u(s)\, ds$, define um operador linear compacto sobre $L^p(0,t;E)$, e portanto $S(t) = T(t) + G \circ \tilde{J}_t$ é também um operador compacto, para todo $t > 0$.

Por último, estudamos neste parágrafo a recíproca do teorema 3.4: Assumindo a compacidade do operador G examinaremos o que pode ser dito a respeito de $T(t)$ e B. Para efeito do próximo resultado será conveniente deixar explícito o intervalo $[0,t]$ de trabalho, assim denotaremos

$$G(t) : L^{\infty}(0,t;U) \longrightarrow E, \quad G(t)(u) = \int_0^t T(t-s)\, B\, u(s)ds \ .$$

3.10 TEOREMA: Se o semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$, com gerador infinitesimal A, é diferenciável e $G(t_1)$ é um operador compacto, para algum $t_1 > 0$, então $T(t)B$ é compacto, para todo $t > 0$.

DEMONSTRAÇÃO: Realizamos a demonstração em vários passos:

1) Para todo t, $0 \leq t \leq t_1$, $G(t)$ é um operador linear compacto.

De fato, isto é imediato se observamos que para cada $u(.) \in \mathcal{L}^{\infty}(0,t;U)$, a função $\tilde{u}$ definida por:

$$\tilde{u}(s) = \begin{array}{l} 0 \quad \text{se} \quad s \in [0, t_1-t] \\ u(s-t_1+t) \quad \text{se} \quad s \in (t_1-t, t_1] \end{array}$$

pertence a $\mathcal{L}^{\infty}(0,t_1;U)$, $\|u\|_{\infty} = \|\tilde{u}\|_{\infty}$ e $G(t)(u) = G(t_1)(\tilde{u})$.

No que segue, o espaço $L^{\infty}(0,t_1;U)$ será denotado de F, e quando $\varphi \in L^{\infty}(0,t_1;F)$, $\bar{\varphi}(\tau)$ denotará a restrição $\varphi(\tau)\big|_{[0,\tau]}$, para qualquer $\tau \in [0,t_1]$.

2) Se $P \in B(E)$ é tal que a aplicação $[0,\infty] \to B(E)$, $t \to PT(t)$, é contínua na topologia uniforme de operadores, então o operador linear:

$$W_1 : L^{\infty}(0,t_1;F) \longrightarrow E, \quad W_1(\varphi) = \int_0^{t_1} P\, G(\tau)(\bar{\varphi}(\tau))d\tau$$

é compacto. É claro que a afirmação ficará demonstrada se mostramos que a função $f : [0,t_1] \times F \to E$ definida por:

$$f(\tau,u(.)) = P\,G(\tau)\,(u(.)\Big|_{[o,\tau]}) = \int_0^\tau PT(\tau-s)\,B\,u(s)ds$$

satisfaz as condições 2.1, 2.2 e 2.3. Examinemos cada condição separadamente.

(a) Em primeiro lugar, f satisfaz a condição 2.1 pois $f_\tau : F \to E$, é linear e compacta por ser $G(\tau)$ compacto e P limitado.

(b) Quanto à condição 2.2, devemos mostrar que o conjunto $\{f_u : u \in L\}$ é equicontínuo, quando $L \subseteq F$ é limitado.

Seja $t_o \in [0,t_1]$ e $\varepsilon > 0$ arbitrário. Se $\tau \in [0,t_1]$, e sem perda de generalidade podemos supor que $t_o \leq \tau$, então são válidas as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \|f_u(t_o) - f_u(\tau)\| &= \|\int_0^{t_o} P\,T(t_o-s)\,B\,u(s)ds - \int_0^\tau P\,T(\tau-s)Bu(s)ds\| \\ &\leq \|\int_0^{t_o} (P\,T(t_o-s) - PT(\tau-s))\,B\,u(s)ds\| + \\ &\quad \|\int_{t_o}^{\tau} P\,T(\tau-s)\,B\,u(s)ds\| \quad . \end{aligned}$$

Como $L \subseteq F$ é limitado, existe $M > 0$ tal que $\|u\|_\infty \leq M$, para todo $u \in L$; e sendo $PT(t)$ contínua para $t \in [0,t_1]$, existe $r_1 > 0$ tal que $\|PT(t_o-s) - PT(\tau-s)\| \leq \dfrac{\varepsilon}{2M\|B\|t_1}$, quando $|\tau-t_o| \leq r_1$ e $s \in [0,t_o]$. Portanto,

$$\left\| \int_0^{t_o} (PT(t_o-s) - PT(\tau-s))\, B\, u(s) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} .$$

Por outra parte, existe $r_2 > 0$ tal que:

$$\left\| \int_{t_o}^{\tau} PT(\tau-s)\, B\, u(s) ds \right\| \leq M\|B\| \int_{t_o}^{\tau} \|PT(\tau-s)\| ds \leq \frac{\varepsilon}{2} ,$$

quando $|\tau-t_o| \leq r_2$.

Concluimos que se $|\tau-t_o| \leq \min \{r_1, r_2\}$, então

$$\|f_u(t_o) - f_u(\tau)\| \leq \varepsilon ,$$

para todo $u \in L$.

(c) Finalmente, como $T(t)$ é uniformemente limitado nos intervalos limitados, existe $N > 0$ tal que para cada $\tau \in [0,t_1]$, e $u \in F$,

$$\|f_\tau(u)\| = \left\| \int_0^{\tau} PT(\tau-s)\, B\, u(s) ds \right\| \leq N\tau \|u\|_\infty .$$

Logo $\|f_\tau\| \leq N\tau$, pelo qual f satisfaz a condição 2.3 com $q = 1$.

Portanto, do teorema 2.8.1), segue que o operador linear W_1 é compacto.

3) $T(t_o)B$ é um operador compacto, para todo $t_o > 0$.

Seja $F_o = C^1(0,t_1;U)$ e i a inclusão canônica de F_o em $L^\infty(0,t_1;F)$, i.e., para todo $u(.) \in F_o$, $i(u(.))(s) = u(.)$, para todo $s \in [0,t_1]$.

i é uma aplicação linear limitada, logo a aplicação $W = W_1 \circ i : F_o \longrightarrow E$ é compacta.

Se $u(.) \in F_o$, a função $x(t) = G(t)(u(.))$ é uma solução forte do problema de Cauchy, ([18]):

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t), \quad x(0) = 0 .$$

Por outra parte, se $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo diferenciável, $P = A\,T(t_o) \in B(E)$, para todo $t_o > 0$, e a aplicação $t \longrightarrow PT(t)$ é contínua na topologia uniforme de operadores, para $t \geq 0$, ([28]), logo

$$T(t_o)G(t_1)(u(.)) = \int_0^{t_1} T(t_o)AG(s)(u(.))ds + \int_0^{t_1} T(t_o)Bu(s)ds$$

$$= \int_0^{t_1} PG(s)(u(.))ds + T(t_o)B \int_0^{t_1} u(s)ds .$$

Se U_1 é a bola unitária fechada de U, $u_o \in U_1$ e $u(s) = u_o$, para todo $s \in [0,t_1]$, então $u(.) \in F_o$ e $\|u(.)\|_\infty \leq 1$. Da fórmula anterior,

$$T(t_o)\,B\,u_o = \frac{1}{t_1}\,(T(t_o)G(t_1)(u(.)) - W(u(.))) .$$

Como $G(t_1)$ e W são operadores lineares compactos, temos que $T(t_o)B(U_1)$ é relativamente compacto e portanto, $T(t_o)B$ é um operador linear compacto.

3.11 COROLÁRIO: Se A é um operador linear limitado em E e

$G(t_1)$ é compacto, para algum $t_1 > 0$, então B é um operador linear compacto.

DEMONSTRAÇÃO: É imediata já que se $A \in \mathcal{B}(E)$, então $T(t) = \exp(tA)$ define um grupo de classe C_o. Como $B = T(-t_1)T(t_1)B$, do teorema 3.10 segue que B é compacto.

§4. COMPACIDADE E ESTABILIDADE ASSINTÓTICA DE SEMIGRUPOS

Neste parágrafo fazemos duas aplicações dos conceitos anteriores à estabilidade assintótica de semigrupos, tal como fora definida no capítulo I.§2.

Quanto à possibilidade de estabilizar assintoticamente um semigrupo utilizando operadores lineares compactos, Gibson, ([16]), mostrou que se E é um espaço de Hilbert, D um operador linear compacto e A o gerador infinitesimal de um semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ de classe C_o, contrativo e fortemente assintoticamente estável, então o semigrupo gerado por $A + D$ não pode ser uniformemente estável, a menos que $T(t)$ também o seja. Sua demonstração baseia-se no fato de que D é um limite uniforme de operadores de posto finito, fato que sabemos não ser verdadeiro em espaços de Banach arbitrários. No entanto, os resultados de Gibson continuam válidos para espaços de Banach e serão demonstrados com hipóteses menos restritivas.

4.1 TEOREMA: Seja E um espaço de Banach. $D \in \mathcal{B}(E)$ um opera-

dor compacto e A o gerador infinitesimal de um semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ de classe C_o e fortemente assintoticamente estável. Se o semigrupo gerado por $A + D$ é uniformemente assintoticamente estável, então $T(t)$ também deve ser uniformemente assintoticamente estável.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\{S(t) : t \geq 0\}$ o semigrupo gerado por $A+D$. Sabemos que, para todo $x \in E$,

$$S(t)x = T(t)x + \int_0^t T(t-s)\, D\, S(s)x\, ds ,$$

e que, pelo teorema 3.4.2., o operador

$$G(t) : L^\infty(0,t;E) \longrightarrow E, \quad G(t)(u) = \int_0^t T(t-s)\, D\, u(s) ds$$

é compacto.

Temos também que a aplicação linear,

$$J(t) : E \longrightarrow L^\infty(0,t;E), \quad J(t)x = S(.)x ,$$

é limitada e se $\|S(t)\| \leq N e^{-\mu t}$, $\mu > 0$, então $\|J(t)\| \leq N$. Portanto, o operador $H(t) = G(t) \circ J(t)$ é compacto, isto é, $S(t) - T(t)$ é um operador linear compacto em E.

Enfim podemos escrever:

$$(5) \qquad S(t+t_o)-T(t+t_o) = (S(t)+T(t))(S(t_o)-T(t_o)) + S(t)T(t_o)-T(t)S(t_o) ,$$

$\forall t, t_o \geq 0$. Utilizaremos esta igualdade para mostrar que

$\|S(t)-T(t)\| \longrightarrow 0$, $t \to +\infty$, o que acarretará trivialmente que $\|T(t)\| \longrightarrow 0$, $t \to +\infty$.

Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário.

(a) Como $\{T(t) : t \geq 0\}$ é fortemente assintoticamente estável, as aplicações $T(t)$ devem ser uniformemente limitadas, isto é, $\|T(t)\| \leq M$, para algum $M \geq 1$ e para todo $t \geq 0$.

Logo, se $x \in E$ e $\|x\| \leq 1$, $\|T(t)S(t_o)x\| \leq MNe^{-\mu t_o}$, portanto existe $t_o > 0$ tal que $\|T(t)S(t_o)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$, $\forall t \geq 0$.

(b) Existe $t_1 > 0$ tal que $\|S(t)T(t_o)\| \leq MNe^{-\mu t} \leq \frac{\varepsilon}{3}$, $\forall t \geq t_1$.

(c) $(S(t)+T(t))(S(t_o)-T(t_o))x \to 0$, $t \to \infty$, para qualquer $x \in E$, pois $S(t)$ e $T(t)$ são fortemente estáveis. Mas se E_1 é a bola unitária fechada de E, então $(S(t_o)-T(t_o))(E_1)$ é relativamente compacto e como $\{S(t)+T(t) : t \geq 0\}$ é um conjunto equicontínuo de operadores lineares, segue que $(S(t)+T(t))(S(t_o)-T(t_o))x \to 0$, $t \to +\infty$, uniformemente para todo $x \in E_1$, ou seja, existe t_2 tal que

$$\|(S(t)+T(t))(S(t_o)-T(t_o))x\| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall t \geq t_2 \quad e \quad \forall x \in E_1.$$

De (a), (b) e (c) e de (5) resulta que $\|S(t)-T(t)\| \leq \varepsilon$, para todo $t \geq \max\{t_o+t_1, t_o+t_2\}$, isto é, $\|S(t)-T(t)\| \longrightarrow 0$, $t \to +\infty$.

4.2 OBSERVAÇÃO: Como, no teorema anterior, a hipótese de $T(t)$ ser fortemente estável é de difícil verificação, indicamos uma

condição equivalente que parece ser mais abordável:

O semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ é fortemente assintoticamente estável se e somente se:

1) $\lim_{t \to +\infty} T(t)x$ existe para todo $x \in E$, e

2) $\mathrm{Im}(A)$ é denso em E.

DEMONSTRAÇÃO: É imediato que a condição necessária em vista da relação bem conhecida,

$$T(t)x - x = A \int_0^t T(s)\, x\, ds ,$$

para todo $x \in E$.

Reciprocamente, suponhamos que 1) e 2) está verificado e seja $\bar{x} = \lim_{t \to +\infty} T(t)x$, para cada $x \in E$. É imediato que $\bar{x}$ é invariante por $T(s)$, $s \geq 0$, logo $\bar{x} \in D(A)$ e $A\bar{x} = 0$.

Em particular, se $y \in \mathrm{Im}(A)$, então $\bar{y} = 0$, pois $y = Ax$, para algum $x \in D(A)$,

$$\bar{y} = \lim_{t \to +\infty} T(t)y = \lim_{t \to +\infty} T(t)Ax = \lim_{t \to +\infty} AT(t)x ,$$

e como A é um operador linear fechado, resulta que

$$\bar{y} = A \lim_{t \to +\infty} T(t)x = A\bar{x} = 0 .$$

De 1) e do Teorema de Banach-Steinhauss obtemos a limitação uniforme de $T(t)$ e como $\mathrm{Im}(A)$ é denso em E, resulta finalmente que $\bar{x} = 0$, para todo $x \in E$.

4.3 TEOREMA: Seja E um espaço de Banach de dimensão infinita e A o gerador infinitesimal de um semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ de classe C_o em $B(E)$. Se $D \in B(E)$ é um operador linear compacto tal que o semigrupo gerado por $A + D$ é uniformemente assintoticamente estável, então para qualquer $t > 0$, $I-T(t)$ não é um operador compacto.

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos que existe $t_o > 0$ tal que $I-T(t_o)$ é um operador compacto e seja $\{S(t) : t \geq 0\}$ o semigrupo gerado por $A + D$.

Nestas condições, para todo $x \in E$,

$$(S(t_o)-I)x = (T(t_o)-I)x + \int_0^{t_o} T(t_o-s)\, D\, S(s)x\, ds \ .$$

Como $H(t_o)x = \int_0^{t_o} T(t_o-s)\, D\, S(s)x\, ds$ define um operador linear compacto em E, resulta que $S(t_o)-I$ é compacto.

Seja $C = \{t > 0 : S(t)-I$ é compacto$\}$. Como C é um semigrupo aditivo, (Cuthbert, [8]) então $n\, t_o \in C$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, como $S(t)$ é uniformemente estável, $S(n\, t_o)-I \to -I$, $n \to +\infty$, a convergência sendo uniforme, acarreta que I é compacto. Chegamos assim a um absurdo pois E tem dimensão infinita.

CAPÍTULO III

CONTROLABILIDADE DE SISTEMAS LINEARES PERTURBADOS

Este capítulo é dedicado ao estudo da controlabilidade de sistemas de controle lineares do tipo $\dot{x} = Ax + Bu$, tal como foram definidos no capítulo I.§1, quando A e B são submetidos a perturbações.

§1. SISTEMAS CONTINUAMENTE PERTURBADOS

De forma geral vamos supor que (X,τ) é um espaço topológico e que assim como nos capítulos anteriores, E e U representam espaços de Banach. Para cada $\xi \in X$, é dado um sistema

$$\dot{x}(t) = A(\xi)\, x(t) + B(\xi)\, u(t), \tag{1}$$

do tipo considerado no capítulo I.§1, onde $A(\xi)$ é gerador infinitesimal de um semigrupo $\{T(\xi)(t) : t \geq 0\}$ de classe C_o e $B(\xi) \in \mathcal{B}(U,E)$. Denotaremos por $T(t,\xi)$ à transformação $T(\xi)(t)$, para cada $\xi \in X$ e $t \geq 0$.

Nestas condições, definimos a aplicação

$$\tilde{G} : X \longrightarrow \mathcal{B}(L^p(0,t;U);E), \quad 1 \leq p \leq \infty, \tag{2}$$

por

$$\tilde{G}(\xi)(u(.)) = \int_0^t T(t-s,\xi)\, B(\xi)u(s)ds\ .$$

Utilizaremos o seguinte lema, cuja demonstração segue

imediatamente de Lang, ([25], teorema viii.3).

1.1 LEMA: Sejam (X,τ) um espaço topológico, E e F espaços de Banach e $P : X \longrightarrow B(E,F)$ uma aplicação contínua. Se $P(\xi_o)$, $\xi_o \in X$, é sobrejetora, então existe uma vizinhança V de ξ_o tal que $P(\xi)$ é sobrejetora, para todo $\xi \in V$.

1.2 PROPOSIÇÃO: Dado p, $1 \leq p \leq \infty$, se para todo $\xi_o \in X$ e $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança $V_\varepsilon(\xi_o) \subseteq X$ de ξ_o e uma função $f_\varepsilon(\xi_o) \in \mathcal{L}^q(0,t;\mathbb{R}^+)$, com q o expoente conjugado de p, tal que $\|f_\varepsilon(\xi_o)\|_q \leq \varepsilon$ e

$$\|T(s,\xi)B(\xi) - T(s,\xi_o)B(\xi_o)\| \leq f_\varepsilon(\xi_o)(s) , \tag{3}$$

quase sempre e para todo $\xi \in V_\varepsilon(\xi_o)$, então $\tilde{G}$ é contínua.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\xi_o \in X$ e $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \|\tilde{G}(\xi)(u) - \tilde{G}(\xi_o)(u)\| &= \left\| \int_0^t (T(t-s,\xi)B(\xi) - T(t-s,\xi_o)B(\xi_o))u(s)ds \right\| \\ &\leq \int_0^t f_\varepsilon(\xi_o)(s) \, \|u(s)\| ds , \quad \forall \xi \in V_\varepsilon(\xi_o), \\ &\leq \|f_\varepsilon(\xi_o)\|_q \, \|u\|_p . \end{aligned}$$

1.3 COROLÁRIO: Se (X,d) é um espaço métrico e se existe $f \in \mathcal{L}^q(0,t;\mathbb{R}^+)$ tal que $\|T(s,\xi)B(\xi) - T(s,\xi_o)B(\xi_o)\| \leq f(s)d(\xi,\xi_o)$, quase sempre, então $\tilde{G}$ é contínua.

DEMONSTRAÇÃO: Para todo $\varepsilon > 0$ e $\xi_o \in X$, ponhamos $V_\varepsilon(\xi_o) = \{\xi : d(\xi,\xi_o) < \frac{\varepsilon}{M}\}$ e $f_\varepsilon(\xi_o) = \frac{\varepsilon}{M} f$, onde a constante $M > 0$ é escolhida de modo que $\|f\|_q \leq M$. É imediato que com estes dados recaimos nas hipóteses da proposição 1.2.

1.4 COROLÁRIO: Se (X,τ) é um espaço topológico, se $T_s : X \to B(E)$, $T_s(\xi) = T(s,\xi)$, é equicontínua em $s \in [0,t]$ e se $B : X \to B(U,E)$ é contínua, então $\tilde{G}$ é contínua, para qualquer p, $1 \leq p \leq \infty$

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\xi_o \in X$ e $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned}
\|T(s,\xi)B(\xi) - T(s,\xi)B(\xi_o)\| &\leq \|T(s,\xi_o)(B(\xi)-B(\xi_o))\| + \|(T_s(\xi)-T_s(\xi_o))B(\xi)\| \\
&\leq \|T(s,\xi_o)\| \, \|B(\xi)-B(\xi_o)\| + \|T_s(\xi)-T_s(\xi_o)\| \, \|B(\xi)\| \\
&\leq M_1 \|B(\xi)-B(\xi_o)\| + M_2 \|T_s(\xi)-T_s(\xi_o)\| \\
&\leq \varepsilon, \quad \forall s \in [0,t], \quad \forall \xi \in V_\varepsilon(\xi_o),
\end{aligned}$$

onde $V_\varepsilon(\xi_o)$ é uma vizinhança de ξ_o, logo $\tilde{G}$ é contínua.

1.5 TEOREMA: Se o sistema (1) é exatamente controlável em $[0,t]$ para $\xi = \xi_o$ e se $A(.)$ e $B(.)$ satisfazem as condições de 1.2, 1.3 ou 1.4, então existe uma vizinhança $V(\xi_o)$ de ξ_o tal que o sistema (1) é exatamente controlável em $[0,t]$, para todo $\xi \in V(\xi_o)$.

DEMONSTRAÇÃO: Nas condições de 1.2, 1.3 ou 1.4, $\tilde{G}$ é contínua e $\tilde{G}(\xi_o)$ é sobrejetor, com o qual o resultado segue do lema 1.1.

Em continuação, daremos vários exemplos de sistemas para os quais se aplica o resultado anterior. Inicialmente exibimos um sistema que satisfaz as condições da proposição 1.2, sem satisfazer aquelas do corolário 1.4.

1.6 EXEMPLO: Neste exemplo utilizaremos os semigrupos de potências na terminologia de Hille-Phillips, ([18]).

1) Semigrupos de Potências:

Seja E o espaço das funções reais e contínuas definidas sobre $[0,1]$, com a topologia da convergência uniforme, e E_o o subespaço fechado das funções que se anulam em zero.

Seja $g \in E_o$, tal que $g(x) > 0$ para $x > 0$. Definimos

$$T(t) : E_o \longrightarrow E_o, \quad f \longrightarrow T(t)f = g^t . f, \quad t \geq 0 .$$

Não é difícil mostrar que $T(t)$ é um semigrupo fortemente contínuo (que não é uniformemente contínuo) sobre E_o.

2) Seja $X = [0,a]$, $a > 0$ e $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função que satisfaz as condições:

(a) h é contínua e $h(\xi) > 0$, para todo $\xi \in X$.

(b) Para cada $\eta \in X$, tem-se pelo menos uma das seguintes condições:

(b.1) $\{h^s : 0 \leq s \leq 1\}$ é equicontínuo em η,

(b.2) Existe $k \geq 0$, $0 < \theta \leq 1$ e $\delta > 0$ tal que

$$|\xi-\eta| \leq \delta \Rightarrow |h(\xi)^s - h(\eta)^s| \leq k|\xi-\eta|^{\theta \cdot s}, \quad \forall s \in [0,1].$$

(c) Existe pelo menos um ponto $\xi_o \in X$ com relação ao qual a condição (b.1) não é satisfeita (e portanto nesse ponto temos (b.2)).

É fácil ver que tais funções existem. Tomemos por exemplo $h : [0,\frac{1}{4}] \to \mathbb{R}$, definida por $h(\xi) = \frac{1}{2} + \sqrt{\xi}$. Vê-se imediatamente que esta h satisfaz as condições (a) e (b.1) quando $\xi > 0$. Para $\xi = 0$, não temos a condição (b.1) mas temos (b.2), pois

$$\left|h^s(\xi) - \frac{1}{2^s}\right| = \left|(\tfrac{1}{2} + \sqrt{\xi})^s - (\tfrac{1}{2})^s\right| \leq \xi^{\frac{1}{2}s}.$$

3) Com a função h do item 2), definimos

$$g(\xi) : [0,1] \to \mathbb{R} \quad \text{por} \quad g(\xi)(z) = h(\xi) \cdot z, \quad \forall \xi \in X.$$

É claro que $g(\xi)$ satisfaz as condições de 1), definindo assim um semigrupo de potências que denotaremos por $\{T(t,\xi) : t \geq 0\}$. Seja T_s como em 1.4. Temos

$$\begin{aligned}
\|T_s(\xi) - T_s(\eta)\| &= \sup_{\|f\| \leq 1} \|T(s,\xi)f - T(s,\eta)f\| \\
&= \sup_{\|f\| \leq 1} \sup_{z \in [0,1]} |(T(s,\xi)f)(z) - (T(s,\eta)f)(z)| \\
&= \sup_{\|f\| \leq 1} \sup_{z \in [0,1]} |h(\xi)^s . z^s . f(z) - h(\eta)^s z^s f(z)| \\
&= |h(\xi)^s - h(\eta)^s| .
\end{aligned}$$

Portanto a família $\{T_s : 0 \leq s \leq 1\}$ é equicontínua em $\xi \neq \xi_o$, sem sê-lo em ξ_o e o corolário 1.4 não se aplica neste caso.

Entretanto, como em ξ_o

$$\|T_s(\xi)-T_s(\xi_o)\| = |h(\xi)^s-h(\xi_o)^s| \leq k|\xi-\xi_o|^{\theta \cdot s}$$

em consequência de (b.2) e como

$$\int_0^1 k|\xi-\xi_o|^{\theta \cdot s} ds = \frac{-k}{\theta \ln |\xi-\xi_o|} (1 - |\xi-\xi_o|^{\theta}) \quad .$$

Concluimos que todas as condições da proposição 1.2 estão verifi cadas desde que a aplicação $B : X \longrightarrow B(U,E)$ seja contínua.

Vejamos agora vários exemplos para os quais as condições mais restritivas do corolário 1.4 estão satisfeitas.

1.7 **EXEMPLO:** Se $A : X \longrightarrow B(E)$ é contínua, então as aplicações $T_s : X \longrightarrow B(E)$ são equicontínuas, $\forall s \in [0,t]$.

DEMONSTRAÇÃO: Neste caso os semigrupos gerados por $A(\xi)$ são da forma $T(t,\xi) = \exp(t\,A(\xi))$ e é conhecido que

$$T_s(\xi)-I = \int_0^s A(\xi)\ T(r,\xi)dr \ ,$$

portanto o resultado é uma aplicação direta do Lema de Gronwall, ([17]).

Sabemos que todo semigrupo $T(t)$ de classe C_o com

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\xi_o \in X$ e $\varepsilon > 0$.

$$\|T(s,\xi)x - T(s,\xi_o)x\| = \lim_{n\to\infty} \|[F(\tfrac{s}{n},\xi)^n x - F(\tfrac{s}{n},\xi_o)^n x]\| .$$

Mas,

$$\|[F(\tfrac{s}{n},\xi)^n - F(\tfrac{s}{n},\xi_o)^n]x\| \leq \|F(\tfrac{s}{n},\xi)^n - F(\tfrac{s}{n},\xi_o)^n\| \|x\|$$

$$\leq n\|F(\tfrac{s}{n},\xi) - F(\tfrac{s}{n},\xi_o)\| \|x\| \leq n \cdot \tfrac{s}{n}\varepsilon\|x\| \leq t \cdot \varepsilon \|x\| ,$$

para todo $\xi \in V_\varepsilon(\xi_o)$, vizinhança de ξ_o. Portanto,

$$\|T_s(\xi) - T_s(\xi_o)\| \leq t\varepsilon, \quad \forall s \in [0,t], \quad \forall \xi \in V_\varepsilon(\xi_o) .$$

Finalmente um último exemplo surge na teoria de Tanabe-Sobolevsky para equações diferenciais lineares não autônomas, como se encontra em Ladas, ([24]), ou Friedman, ([15]). Embora nesta teoria o espaço X é apenas um intervalo $[0,t_o]$, as propriedades que usaremos são de imediata generalização a um espaço métrico X arbitrário.

1.10 EXEMPLO: Seja (X,d) um espaço métrico e $A(\xi)$, $\xi \in X$ o gerador infinitesimal do semigrupo fortemente contínuo $\{T(t,\xi) : t \geq 0\}$. Se as condições seguintes estiverem satisfeitas:

1) $D(A(\xi)) = D$, para todo $\xi \in X$;

2) $\|T(t,\xi)\|$ é uniformemente limitado tanto em ξ como em t, dentro de intervalos limitados;

gerador infinitesimal A é obtido como o limite

$$T(t)x = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{t} R\left(\frac{n}{t}, A\right)\right)^n x, \quad t > 0$$

este sendo um caso particular de um fato mais geral, a saber, se $F(\rho) \in B(E)$, $\rho > 0$ é uma família que satisfaz certas condições especiais, ([10], [28]), então $T(t)x = \lim_{n\to\infty} F\left(\frac{t}{n}\right)^n x$, $t > 0$, define um semigrupo fortemente contínuo. No exemplo que segue vamos supor que as aplicações $F(\rho,\xi) \in B(E)$, $\xi \in X$, satisfaz aquelas condições gerando, em consequência um semigrupo $T(t,\xi)$. Antes porém faremos uma pequena observação.

1.8 OBSERVAÇÃO: Sejam $T,S \in B(E)$ aplicações contrativas. Então, $\|T^n - S^n\| \leq n\|T-S\|$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

DEMONSTRAÇÃO: $T^{n+1} - S^{n+1} = T(T^n - S^n) + (T-S)S^n$ e o resultado segue por indução sobre n.

1.9 EXEMPLO: Seja $F(\rho,\xi) \in B(E)$, $\rho > 0$, $\xi \in X$, uma família de aplicações contrativas tal que

$$T(t,\xi)x = \lim_{n\to\infty} F\left(\frac{t}{n}, \xi\right)^n x, \quad t > 0, \quad \forall x \in E,$$

define um semigrupo fortemente contínuo $T(t,\xi)$. Se $\frac{1}{\rho} F(\rho,\xi)$ é contínua em ξ, uniformemente em ρ, para $\rho \in (0,\rho_o]$ e algum $\rho_o > 0$, então as aplicações $T_s : X \longrightarrow B(E)$ são equicontínuas em $s \in [0,t]$.

3) Para cada $\xi_o \in X$, existe uma vizinhança V de ξ_o e um elemento $\lambda \in \rho(A(\xi_o))$ tal que

(a) $\|A(\xi)T(t,\xi)\| \leq \dfrac{C_1(\xi_o)}{t}$, $\forall t \in (0,t_o]$, $\forall \xi \in V$,

(b) $\|(A(\xi)-A(\xi_o))R(\lambda,A(\xi_o))\| \leq C_2\, d(\xi,\xi_o)$, $\forall \xi \in V$,

então $\|T(s,\xi)-T(s,\xi_o)\| \leq k(\xi_o)d(\xi,\xi_o)$, $\forall s \in [0,t_o]$, $\forall \xi \in V$.

No estudo da controlabilidade de um sistema $\dot{x} = Ax + Bu$, com $B \in B(U,E)$, uma das questões que se apresenta é a de encontrar o menor número possível de controles que garanta sua controlabilidade. Isto justifica o estudo da estabilidade da controlabilidade de sistemas do tipo:

$$\dot{x}_\xi(t) = A(\xi)\, x_\xi(t) + B(\xi)\, u_\xi(t), \tag{4}$$

onde $x_\xi(t) \in E(\xi)$, $u_\xi(t) \in U(\xi)$ e $E(\xi)$, $U(\xi)$, $\xi \in X$, são famílias de subespaços vetoriais fechados dos espaços de Banach fixados E e U respectivamente; $B(\xi) \in B(U(\xi),E(\xi))$ e $A(\xi)$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo $\{T(t,\xi) : t \geq 0\}$ de classe C_o em $B(E(\xi))$, X será apenas um espaço topológico e denotaremos por A, B, $\tilde{U}$ e $\tilde{E}$ as seguintes aplicações:

$$A : X \to C(E), \quad \xi \to A(\xi); \qquad B : X \to C(U,E), \quad \xi \to B(\xi)$$

$$\tilde{U} : X \to S(U), \quad \xi \to U(\xi); \qquad \tilde{E} : X \to S(E), \quad \xi \to E(\xi).$$

Para as notações aqui usadas e as correspondentes defi

nições de continuidade, veja o capítulo I. §3.

1.11 TEOREMA: Sejam E, U espaços de Banach, (X,τ) um espaço topológico, $U(\xi) \in S(U)$, $E(\xi) \in S(E)$, $A(\xi) \in B(E(\xi))$ e $B(\xi) \in B(U(\xi),E(\xi))$, para todo $\xi \in X$, tais que:

1) A é δ-contínua,

2) B é inferiormente δ-semi-contínua e

3) $\tilde{E}$ é superiormente δ-semi-contínua.

Se o sistema de controle (4) é exatamente controlável em $[0,t]$ para $\xi = \xi_o$ então existe uma vizinhança $V \subseteq X$ de ξ_o tal que (4) é exatamente controlável em $[0,t]$, para todo $\xi \in V$.

DEMONSTRAÇÃO: Nas quatro primeiras etapas da demonstração estabelecemos algumas fórmulas úteis.

Sejam $U_i \subseteq U$, $E_i \subseteq E$, $i = 1,2$, subespaços vetoriais fechados.

(a) Se $B_i \in B(U_i,E_i)$ e $A_i \in B(E_i)$, $i = 1,2$, então

$$\delta(A_1B_1,A_2B_2) \leq (1 + \|B_1\|)\ (1 + \|A_2\|)\ (\delta(B_1,B_2) + \delta(A_1,A_2)).$$

Para mostrar esta fórmula, consideremos $(u, A_1B_1u) \in G(A_1B_1)$ com $\|u\| + \|A_1B_1u\| = 1$. Pela proposição I.3.4i, dado $\epsilon > 0$, existe $v \in U_2$ tal que $\|u-v\| + \|B_1u-B_2v\| \leq (\delta(B_1,B_2)+\epsilon)(\|u\|+\|B_1u\|)$ e $z \in E_2$ tal que $\|B_1u-z\| + \|A_1B_1u-A_2z\| \leq (\delta(A_1,A_2)+\epsilon)(\|B_1u\|+\|A_1B_1u\|)$.

Portanto,

$$\|u-v\| + \|A_1B_1u-A_2B_2v\| \leq \|u-v\| + \|A_1B_1u-A_2z\| + \|A_2z-A_2B_2v\|$$

$$\leq \|u-v\| + \|A_1B_1u-A_2z\| + \|A_2\| (\|z-B_1u\| + \|B_1u-B_2v\|)$$

$$\leq (1+\|A_2\|)[(\delta(B_1B_2)+\varepsilon)(\|u\|+\|B_1u\|)+(\delta(A_1,A_2)+\varepsilon)(\|B_1u\| + \|A_1B_1u\|)]$$

$$\leq (1+\|A_2\|)(\delta(B_1,B_2)+\delta(A_1,A_2)+2\varepsilon)(\|u\|+\|B_1u\|+\|A_1B_1u\|)$$

$$\leq (1+\|A_2\|)(1+\|B_1\|)(\delta(B_1,B_2)+\delta(A_1,A_2)+2\varepsilon) \ .$$

A fórmula segue agora da definição I.3.3 pois $\varepsilon > 0$ é arbitrário.

(b) $\delta(A_1^n,A_2^n) \leq n(1+\|A_2\|)^k(1+\|A_1\|)^{n-1}\delta(A_1,A_2)$, $n \geq 2$ e $k = \binom{n}{2}$.

Mostramos esta fórmula por indução sobre n. O caso $n = 2$ é consequência de (a) com $A_1 = B_1$ e $A_2 = B_2$. Obtemos também por (a) as desigualdades:

$$\delta(A_1^{n+1},A_2^{n+1}) = \delta(A_1^n \cdot A_1, \ A_2^n \cdot A_2)$$

$$\leq (1+\|A_2^n\|)(1+\|A_1\|)(\delta(A_1,A_2)+\delta(A_1^n,A_2^n))$$

$$\leq (1+\|A_2\|)^n(1+\|A_1\|)(n+1)(1+\|A_2\|)^{\binom{n}{2}}(1+\|A_1\|)^{n-1}\delta(A_1,A_2)$$

$$= (1+\|A_2\|)^{\binom{n+1}{2}}(1+\|A_1\|)^n(n+1)\delta(A_1,A_2) \ .$$

(c) Se $(1+\|B_1\|)\delta(B_2,B_1) < 1$, então

$$\|B_2\| \leq \frac{(1+\|B_1\|)\ \delta(B_2,B_1) + \|B_1\|}{1-(1+\|B_1\|)\,\delta(B_2,B_1)} .$$

Para a demonstração, tomemos $v \in U_2$, $\|v\| \leq 1$ e $\varepsilon > 0$ arbitrário. Pela proposição I.3.4.i, existe $u \in U_1$ tal que

$$\|v-u\| + \|B_2 v - B_1 u\| \leq (\delta(B_2,B_1)+\varepsilon)(\|v\| + \|B_2 v\|)$$

e portanto

$$\begin{aligned}\|B_2 v\| &\leq \|B_1 u\| + (\delta(B_2,B_1)+\varepsilon)(\|v\| + \|B_2 v\|) \\ &\leq \|B_1\|(1+\|u-v\|) + (\delta(B_2,B_1)+\varepsilon)(\|v\| + \|B_2 v\|) \\ &\leq \|B_1\| + (\delta(B_2,B_1)+\varepsilon)(\|v\| + \|B_2 v\|)(1+\|B_1\|) .\end{aligned}$$

Logo,

$$\|B_2\| \leq \frac{\|B_1\| + (1+\|B_1\|)\,\delta(B_2,B_1)}{1-(1+\|B_1\|)\delta(B_2,B_1)} ,$$

visto que $\varepsilon > 0$ é arbitrário e $\|v\| \leq 1$.

(d) Denotemos por V o espaço de Banach,

$$U^{n+1} = \{(u_o,u_1,\ldots,u_n) : u_i \in U\}, \quad n \in \mathbb{N} ,$$

com a norma $\|(u_o,u_1,\ldots,u_n)\| = \sum_{i=0}^{n} \|u_i\|$ e por V_i, $i = 1,2$, o espaço U_i^{n+1}, correspondente ao subespaço vetorial fechado

U_i de U.

Seja $C_i : V_i \to E_i$, $C_i(u_o,u_1,\ldots,u_n) = \sum_{j=0}^{n} A_i^j B_i u_j$, $i = 1,2$. Nestas condições,

$$\delta(C_1,C_2) \leq (1+\|B_1\|)(1+\|A_2\|)^n \delta(B_1,B_2) + \binom{n+1}{2} \|B_1\| (1+\|A_1\|)^{2n-1} (1+\|A_2\|)^{\binom{n+1}{2}},$$

$n \geq 1$. Para mostrar esta fórmula fazemos as seguintes considerações:

$$\delta(C_1,C_2) = \delta(G(C_1),G(C_2)), \quad G(C_1),G(C_2) \subseteq V \times E,$$

$$= \sup_{\tilde{u} \in S_1} d(\tilde{u},G(C_2)) = \sup_{\tilde{u} \in S_1} \inf_{\tilde{v} \in G(C_2)} \|\tilde{u}-\tilde{v}\|,$$

onde S_1 é a esfera unitária em $G(C_1)$. Logo se $\tilde{u} \in S_1$, então $\tilde{u} = (u,C_1(u))$, com $u \in U_1^{n+1}$, $u = (u_o,u_1,\ldots,u_n)$, e

$$(5) \qquad \|\tilde{u}\|_{V \times E} = \sum_{i=0}^{n} \|u_i\| + \Big\| \sum_{i=0}^{n} A_1^i B_1 u_i \Big\| = 1 .$$

Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário, novamente pela proposição I.3.4.i, deduzimos que existe $v \in V_2 = U_2^{n+1}$, $v = (v_o,v_1,\ldots,v_n)$, tal que

$$(6) \qquad \|u_i - v_i\| + \|B_1 u_i - B_2 v_i\| \leq (\delta(B_1,B_2)+\varepsilon)(\|u_i\| + \|B_1 u_i\|),$$

$i = 0,1,\ldots,n$. Sabemos além do mais que existem $z_i \in E_2$, $i = 1,2,\ldots,n$ tais que:

(7) $$\|B_1u_i-z_i\|+\|A_1^iB_1u_i-A_2^iz_i\| \leq (\delta(A_1^i,A_2^i)+\epsilon)(\|B_1u_i\|+\|A_1^iB_1u_i\|).$$

Portanto, se $\tilde{v} = (v,C_2v) \in G(C_2)$, podemos escrever em vista de (6) e (7):

$$\delta(C_1,C_2) \leq \sup_{\tilde{u}\in S_1} \|\tilde{u}-\tilde{v}\|$$

e

$$\|\tilde{u}-\tilde{v}\| = \sum_{i=0}^{n} \|u_i-v_i\| + \|\sum_{i=0}^{n}(A_1^iB_1u_i-A_2^iB_2v_i)\|$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n}\|u_i-v_i\| + \|B_1u_o-B_2v_o\| + \sum_{i=1}^{n}\|A_1^iB_1u_i-A_2^iz_i\| + \sum_{i=1}^{n}\|A_2^iz_i-A_2^iB_2v_i\|$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n}\|u_i-v_i\|+\|B_1u_o-B_2v_o\| + \sum_{i=1}^{n}\|A_2^i\|(\|z_i-B_1u_i\| + \|B_1u_i-B_2v_i\|) +$$

$$\sum_{i=1}^{n}\|A_1^iB_1u_i-A_2^iz_i\|$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n}(1+\|A_2\|^i)(\|u_i\| + \|B_1u_i\|)(\delta(B_1,B_2)+\epsilon) +$$

$$\sum_{i=1}^{n}(1+\|A_2\|^i)(\|B_1u_i\| + \|A_1^iB_1u_i\|)(\delta(A_1^i,A_2^i)+\epsilon),$$

e de (b),

$$\leq (1+\|A_2\|)^n(\delta(B_1,B_2)+\epsilon)\sum_{i=0}^{n}(\|u_i\|+\|B_1u_i\|) +$$

$$\sum_{i=1}^{n}(1+\|A_2\|)^i[i(1+\|A_2\|)^{\binom{i}{2}}(1+\|A_1\|)^{i-1}\delta(A_1,A_2)+\epsilon](\|B_1u_i\|+\|A_1^iB_1u_i\|)$$

e donde por (5),

$$\|\tilde{u}-\tilde{v}\| \leq (1+\|A_2\|)^n(1+\|B_1\|)(\delta(B_1,B_2)+\varepsilon) +$$

$$(1+\|A_2\|)^{\binom{n+1}{2}} (1+\|A_1\|)^{2n-1\binom{n+1}{2}} \|B_1\| \delta(A_1,A_2) +$$

$$\varepsilon \sum_{i=1}^{n} (1+\|A_2\|)^i (1+\|A_1^i\|) \|B_1\| \|u_i\| .$$

Como $\varepsilon > 0$ foi escolhido arbitrariamente, a fórmula $\delta(C_1,C_2)$ está demonstrada.

(e) Voltando ao nosso problema, definamos para cada $\xi \in X$, a aplicação $C(\xi) : U(\xi)^{n+1} \longrightarrow E(\xi)$ por

$$C(\xi)(u_o,u_1,\ldots,u_n) = \sum_{i=0}^{n} A(\xi)^i B(\xi) u_i ,$$

donde $n \in \mathbb{N}$ é escolhido conforme especificamos abaixo.

Se o sistema (4) é exatamente controlável em $[0,t]$ para $\xi = \xi_o$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $C(\xi_o)$ é sobrejetiva ([22]).

Como $A(.)$ é δ-contínua, obtemos por (c), fazendo $B_1 = A(\xi_o)$ e $B_2 = A(\xi)$, que $\|A(\xi)\|$ é localmente limitada numa vizinhança de ξ_o.

Por (d) e pelo fato que $A(.)$ e $B(.)$ são inferiormente δ-semi-contínuas, também obtemos que C é inferiormente δ-semi-contínua. Como $E(.)$ é superiormente δ-semi-contínua, de-

duzimos do lema I.3.5, que existe uma vizinhança $V \subseteq X$ de ξ_o tal que $C(\xi)$ é sobrejetiva, para todo $\xi \in V$, ou, de forma equivalente, ([22]), que o sistema (4) é exatamente controlável em $[0,t]$ para qualquer $\xi \in V$.

No capítulo II estabelecemos condições bastante gerais mediante as quais um sistema de controle, num espaço de dimensão infinita, não pode ser exatamente controlável (corolário II.3.5 e teorema II.3.7). Para tais sistemas, o conceito de controlabilidade exata é de pouca utilidade, sendo mais conveniente trabalhar com o conceito de controlabilidade aproximada, tal como fora definido no capítulo I. §1.

Portanto é natural estudar a estabilidade da controlabilidade aproximada para sistemas continuamente perturbados, do tipo (1).

Utilizaremos as seguintes notações. Sendo E um espaço de Banach, E' representa o seu espaço dual e as topologias fracas em E e E' induzidas pela dualidade (E,E') serão denotadas por $\sigma(E,E')$ e $\sigma(E',E)$, respectivamente.

Para um sistema de controle do tipo (1), isto é, do tipo $\dot{x}(t) = A(\xi)\,x(t) + B(\xi)\,u(t)$, com $\xi \in X$, definimos, para $t \geq 0$ fixado, a aplicação $J(t) : X \times E' \to U'$, $(\xi,x') \longrightarrow B'(\xi)T'(t,\xi)x'$.

Temos então o seguinte teorema:

1.12 TEOREMA: Se, para todo $t \in [0,t_o]$, as aplicações $J(t)$

são $(\tau \times \sigma(E',E),\sigma(U',U))$-contínuas e se o sistema (1) é aproximadamente controlável para $\xi = \xi_o$ no intervalo $[0,t_o]$, então existe uma vizinhança $V \subseteq X$ de ξ_o, tal que para todo $\xi \in V$, o sistema (1) é aproximadamente controlável em $[0,t_o]$.

DEMONSTRAÇÃO: (a) Pela hipótese de controlabilidade para $\xi = \xi_o$ e pela proposição I.1.4 existe, para todo $x' \in E'$, um elemento $t = t(x') \in [0,t_o]$ tal que $B'(\xi_o)T'(t(x'),\xi_o)\ x' \neq 0$.

Seja E_1' a bola unitária fechada de E'. Do Teorema de Alaoglu, sabemos que E_1' é $\sigma(E',E)$-compacto.

(b) Para todo $x' \in E_1'$, consideremos a aplicação:

$$E' \longrightarrow U', \quad y' \longrightarrow B'(\xi_o)T'(t(x'),\xi_o)y' .$$

Por serem as aplicações $J(t)$ contínuas, resulta que a aplicação acima é também contínua e portanto existe uma vizinhança aberta $W(x')$ de x' tal que $B'(\xi_o)T'(t(x'),\xi_o)\ y' \neq 0$, para todo $y' \in W(x')$.

Tomemos $x_i' \in E_1'$, $i = 1,2,\ldots,m$, de modo que $W_i = W(x_i')$ seja uma cobertura de E_1' e chamemos t_i o valor $t(x_i')$, $i = 1,2,\ldots,m$.

(c) Seja $\varphi_i = J(t)\big|_{X \times W_i}$, $i = 1,2,\ldots,m$. A aplicação φ_i é contínua, e para todo $y' \in W_i$, $\varphi_i(\xi_o,y') \neq 0$. Logo existem $V_i(\xi_o,y') \subseteq X$, vizinhança de ξ_o, e $\tilde{W}_i(y') \subseteq W_i$, vizinhança

aberta de y', tais que

$$\varphi_i(\xi,z') \neq 0, \quad \forall(\xi,z') \in V_i(\xi_o,y') \times \tilde{W}_i(y') \ .$$

É claro que a família de vizinhanças $\{\tilde{W}_i(y') : i = 1,2,\ldots,m;\ y' \in W_i\}$ é uma cobertura de E_1', com o qual deve existir uma sub-família finita $\{\tilde{W}_{k_j}(y_j') : 1 \leq j \leq n,\ y_j' \in W_{k_j}\}$ que continua sendo uma cobertura de E_1'.

Seja $V(\xi_o) = \bigcap_{j=1}^{n} V_{k_j}(\xi_o,y_j')$.

Se $\xi \in V(\xi_o)$ e $x' \in E_1'$, então $x' \in \tilde{W}_{k_j}(y_j')$, para algum $j = 1,2,\ldots,n$. Como $(\xi,x') \in V(\xi_o,y_j') \times \tilde{W}_{k_j}(y_j')$, segue que $B'(\xi)T'(t_i,\xi)x' \neq 0$ para um índice $i = 1,2,\ldots,m$ tal que $\tilde{W}_{k_j}(y_j') \subseteq W_i$.

Portanto, o sistema (1) é aproximadamente controlável em $[0,t_o]$, para todo $\xi \in V(\xi_o)$.

1.13 OBSERVAÇÕES: (a) Com o argumento da demonstração anterior, podemos de fato obter o mesmo resultado utilizando qualquer topologia localmente convexa separada em U' no lugar de $\sigma(U',U)$.

(b) A condição de que as aplicações $J(t)$ sejam contínuas é bastante restritiva. Em particular, se para um sistema $\dot{x} = Ax+Bu$, aproximadamente controlável em tempo finito as aplicações $E' \longrightarrow U'$, $x' \longrightarrow B'T(t)'x'$, forem $(\sigma(E',E),\sigma(U',U))$-contínuas para todo $t \geq 0$, então o sistema será aproximadamente controlá

vel em $[0,t_o]$, para algum $t_o > 0$. A demonstração deste fato é muito similar à do teorema anterior.

Um caso no qual é simples verificar que as aplicações $J(t)$ são fracamente contínuas acontece quando as aplicações $B(\xi)\ T(t,\xi)$ são localmente de posto finito com relação a ξ. Estudaremos este caso mais detalhadamente.

1.14 LEMA: Sejam U e E espaços de Banach e $T(\xi) : U \longrightarrow E$, $\xi \in X$ uma família de aplicações lineares.

Então as aplicações $T(\xi)' : E' \longrightarrow U'$, $\xi \in X$, são $(\sigma(E',E),\sigma(U',U))$ equicontínuas se e somente se para cada $u \in U$, existem $x_i \in E$ e $\nu_i(\xi) \in \mathbb{K}$, com $\sum_{i=1}^{n} |\nu_i(\xi)| \leq 1$, tais que $T(\xi)u = \sum_{i=1}^{n} \nu_i(\xi)x_i$, qualquer que seja $\xi \in X$.

DEMONSTRAÇÃO: Isto é uma consequência direta da definição das topologias fracas e do Teorema de Hahn-Banach.

1.15 COROLÁRIO: Sejam E e U espaços de Banach; (X,τ) um espaço topológico e $B : X \longrightarrow B(U,E)$ e $T(t,.) : X \longrightarrow B(E)$ aplicações τ-uniformemente contínuas.

Se para todo $\xi_o \in X$, existe uma vizinhança V de ξ_o e um subespaço vetorial $F \subseteq E$, de dimensão finita, tal que $Im(T(t,\xi)B(\xi)) \subseteq F$, para todo $\xi \in V$ então as aplicações $J(t) : X \times E' \longrightarrow U'$ são $(\tau \times \sigma(E',E);\ \sigma(U',U))$-contínuas.

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $\xi_o \in X$ e $x'_o \in E'$.

(a) É claro que as aplicações $T(t,\xi)B(\xi)$ são equicontínuas numa vizinhança $V(\xi_o)$ de ξ_o. Sem perda de generalidade, podemos supor que $Im(T(t,\xi)B(\xi)) \subseteq F$, $\forall \xi \in V(\xi_o)$ e portanto, em virtude do lema 1.14, as aplicações $B(\xi)'T(t,\xi)' : E' \longrightarrow U'$, $\xi \in V(\xi_o)$, são $(\sigma(E',E);\sigma(U',U))$-equicontínuas.

(b) $$J(t)(\xi_o,x'_o)-J(t)(\xi,x') = B(\xi_o)'T(t,\xi_o)'x'_o-B(\xi)'T(t,\xi)'x'$$

$$= B(\xi)'T(t,\xi)'(x'_o-x')+(B(\xi_o)'T(t,\xi_o)'-B(\xi)'T(t,\xi)')x'_o .$$

Sejam W e W_1 vizinhanças de 0 em U' para a topologia $\sigma(U',U)$ tais que $W_1+W_1 \subseteq W$.

Pela equicontinuidade das aplicações $B(\xi)'T(t,\xi)'$, $\xi \in V(\xi_o)$, existe uma vizinhança $V(x'_o)$ de x'_o em E' tal que $B(\xi)'T(t,\xi)'(x'_o-x') \in W_1$, para todo $x' \in V(x'_o)$.

Por outro lado, a aplicação $X \longrightarrow \mathcal{B}(U,E)$, $\xi \to T(t,\xi)B(\xi)$, é τ-uniformemente contínua, e portanto a aplicação $X \longrightarrow U'$, $\xi \longrightarrow B(\xi)'T(t,\xi)'x'_o$ é $(\tau;\sigma(U',U))$-contínua. Existe então uma vizinhança $V_1(\xi_o) \subseteq V(\xi_o)$ de ξ_o tal que

$$B(\xi_o)'T(t,\xi_o)'x'_o - B(\xi)'T(t,\xi)'x'_o \in W_1 ,$$

para todo $\xi \in V_1(\xi_o)$ e isto acarreta que

$$J(t)(\xi_o,x'_o) - J(t)(\xi,x') \in W_1 + W_1 \subseteq W ,$$

para todo $(\xi,x') \in V_1(\xi_o) \times V(x'_o)$, ou seja, obtemos a continui-

dade de $J(t)$.

O caso mais comum dos sistemas de posto finito, é aquele em que a dimensão de U é finita. É imediato neste caso, que para efeito das hipóteses do corolário anterior, a topologia uniforme em $B(U,E)$ pode ser substituída pela topologia forte.

1.16 EXEMPLO: Seja E um espaço de Hilbert e A um operador linear normal compacto injetivo ou normal com resolvente compacto em $B(E)$, gerador infinitesimal de um semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ de classe C_o em $B(E)$.

Sejam $(\lambda_j)_{j\geq 1}$ e $(\varphi_{jk})_{k=1,2,\ldots,r_j}$ as famílias de valores próprios e vetores próprios ortonormais correspondentes, ([30]).

Se $B : \mathbb{C}^m \longrightarrow E$ é a aplicação definida por $Bu = \sum_{i=1}^{m} u_i b_i$, $b_i \in E$ e $u = (u_1,\ldots,u_m)$, então Triggiani, ([36]), demonstrou que o sistema $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ é aproximadamente controlável em $[0,t]$, $t > 0$ se e somente se o posto da matriz $B_j = (\langle b_i, \varphi_{jk}\rangle)_{\substack{k=1,2,\ldots,r_j \\ i=1,2,\ldots,m}}$ é r_j, $j = 1,2,\ldots$.

Seja agora X um espaço topológico e $A(\xi)$, $\xi \in X$, uma família de operadores lineares que satisfazem as condições anteriores, com valores próprios $\lambda_j(\xi)$, $j = 1,2,\ldots$ e vetores próprios $\varphi_{jk}(\xi)$, $j = 1,2,\ldots$ e $k = 1,2,\ldots,r_j$.

Se o sistema $\dot{x}(t) = A(\xi)\, x(t) + B(\xi)\, u(t)$ é aproximada

mente controlável em $\xi = \xi_o$ e se $B_j(\xi) = (\langle b_i(\xi), \varphi_{jk}(\xi)\rangle)$, então a aplicação $B_j : X \to B(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{r_j})$ é tal que $B_j(\xi_o)$ é sobrejetiva para todo $j = 1,2,\ldots$. Portanto, ([29]), existe $\gamma_j > 0$ tal que $\|B_j(\xi_o)'y\| \geq \gamma_j \|y\|$, $\forall y \in \mathbb{R}^{r_j}$.

Se além disso as aplicações $X \to B(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{r_j})$, $\xi \to \frac{1}{\gamma_j} B_j(\xi)$, $j = 1,2,\ldots$, têm a seguinte condição de equicontinuidade: para todo $\varepsilon > 0$, existe $V \subseteq X$ vizinhança de ξ_o tal que $\frac{1}{\gamma_j} \|B_j(\xi) - B_j(\xi_o)\| \leq \varepsilon$, $\forall \xi \in V$, então existe uma vizinhança $V_o \subseteq X$ de ξ_o, tal que para todo $\xi \in V_o$, o sistema $\dot{x}(t) = A(\xi)x(t) + B(\xi)\,u(t)$ é aproximadamente controlável em $[0,t]$. Para isto consideramos

$$V_o = \{\xi \in X : \|B_j(\xi) - B_j(\xi_o)\| \leq \tfrac{1}{2}\gamma_j\},$$

então

$$\begin{aligned}\|B_j(\xi)'y\| &= \|(B_j(\xi) - B_j(\xi_o))'y + B_j(\xi_o)'y\| \\ &\geq \|B_j(\xi_o)'y\| - \|(B_j(\xi)' - B_j(\xi_o)')y\| \\ &\geq \gamma_j \|y\| - \|B_j(\xi) - B_j(\xi_o)\|\ \|y\| \geq \tfrac{1}{2}\gamma_j \|y\|,\end{aligned}$$

para todo $\xi \in V_o$. Logo, ([29]), $B_j(\xi)$ é sobrejetora, o que, pelos resultados de Triggiani, mostra a afirmação.

Finalmente, denotemos por $Z(\xi)$ o espaço de controlabilidade para o sistema $\dot{x}(t) = A(\xi)\,x(t) + B(\xi)\,u(t)$, $\xi \in X$, isto é, $Z(\xi) = \mathrm{Im}(\tilde{G}(\xi))$. Temos assim definida uma aplicação

$\xi \longrightarrow Z(\xi)$, a valores no conjunto dos subespaços lineares de E, sendo que o subespaço $Z(\xi)$ não é, em geral, fechado.

1.17 PROPOSIÇÃO: Se a aplicação $\tilde{G} : X \longrightarrow \mathcal{B}(L^p(0,t;U);E)$ é τ-uniformemente contínua e se $Z : X \longrightarrow \mathcal{S}(E)$, então Z é uma aplicação inferiormente δ-semi-contínua.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\xi_o \in X$. Por definição,

$$\delta(Z(\xi_o),Z(\xi)) = \text{Sup}\,\{d(x,Z(\xi)) : x \in Z(\xi_o),\ \|x\| = 1\},$$

e $\tilde{G}(\xi_o) : L^p(0,t;U) \longrightarrow Z(\xi_o)$ é linear sobrejetiva. Como $Z(\xi_o)$ é um espaço de Banach, segue que $\tilde{G}(\xi_o)$ é aberta e existe $\gamma > 0$ e $u \in L^p(0,t;U)$ tal que, para todo $x \in Z(\xi_o)$, $\tilde{G}(\xi_o)u = x$ e $\|u\| \leq \frac{1}{\gamma}\|x\|$. Logo,

$$x = \int_0^t T(t-s,\xi_o)\, B(\xi_o)\, u(s)\, ds .$$

Seja $\varepsilon > 0$ e $V(\xi_o) = \{\xi \in X : \|\tilde{G}(\xi) - \tilde{G}(\xi_o)\| \leq \varepsilon\gamma\}$. Se $y = \int_o^t T(t-s,\xi)B(\xi)u(s)ds$, $\xi \in V(\xi_o)$, então $y \in Z(\xi)$ e $d(x,Z(\xi)) \leq \|x-y\| = \|\tilde{G}(\xi_o)u-\tilde{G}(\xi)u\| \leq \varepsilon$.

Concluimos então que $\delta(Z(\xi_o),Z(\xi)) \leq \varepsilon$, para todo $\xi \in V(\xi_o)$ e isto completa a demonstração.

Em continuação, damos dois exemplos ilustrando o fato de que a proposição anterior não pode ser substancialmente melhorada.

1.18 EXEMPLO: Pode ocorrer que, dentro das hipóteses da proposição 1.17, a aplicação Z não seja superiormente δ-semi-contínua. Isto fica claro ao se considerar os sistemas perturbados $\dot{x}(t) = Ax(t) + \xi Bu(t)$ com $\xi \in X = \mathbb{R}$ e A e B tais que o sistema seja exatamente controlável em $[0,t]$, para $\xi \neq 0$. Então $Z(0) = \{0\}$ e $Z(\xi) = E$, para todo $\xi \neq 0$, logo $\delta(Z(\xi),Z(0)) = 1$, para todo $\xi \neq 0$.

1.19 EXEMPLO: A condição de que $\tilde{G}$ seja contínua na topologia uniforme em $\mathcal{B}(L^p(0,t;U);E)$ é essencial. Para construir um contra-exemplo, consideremos um sistema exatamente controlável $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, onde A é gerador infinitesimal de um semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ de classe C_o e B um operador linear limitado de imagem fechada e $Im(B) \subset\neq E$. É imediato que tais sistemas existem, pois basta considerar $U = \mathbb{R}^m$, $E = \mathbb{R}^n$, $m < n$, e matrizes A e B tais que o posto da matriz $[B, AB, \ldots, A^{n-1}B]$ seja igual a n, ([26]).

Seja agora $\xi \in \mathbb{R}$,

$$h(\xi) = \begin{cases} 0 & \xi < 0 \\ 1 & \xi \geq 0 \end{cases}$$

$A(\xi) = h(\xi)A$ e consideremos a família de sistemas $\dot{x}(t) = A(\xi)x(t) + Bu(t)$.

(a) Se $\xi < 0$, então $Z(\xi) = Im(B)$, já que

$$x \in Z(\xi) \iff x = \int_0^t T(t-s,\xi)\, B\, u(s)\, ds$$

$$= \int_0^t B\, u(s)\, ds = B \int_0^t u(s)\, ds$$

(b) Se $\xi \geq 0$ então $Z(\xi) = E$.

Concluimos portanto, como consequência do Teorema de Hahn-Banach ([12], lema II.3.12), que

$$\delta(Z(0),Z(\xi)) = \delta(E,\ Im(B))$$

$$= Sup\ \{d(x,Im(B)) : x \in E,\ \|x\| = 1\} = 1\ ,$$

quando $\xi < 0$.

§2. REDUÇÃO A SISTEMAS LINEARES CONTÍNUOS

Seja

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)\ ,\quad t \geq 0\ , \tag{8}$$

um sistema linear autônomo onde A é o gerador infinitesimal de um semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ de classe C_o em $B(E)$.

Sabemos que A é um operador linear fechado não necessariamente limitado e com domínio denso em E. Vamos agora tomar para controles admissíveis as funções essencialmente limitadas.

Se Z representa o espaço de controlabilidade em tempo finito, (definição I.1.1), e $\bar{Z}$ o espaço de controlabilidade

aproximada em tempo finito, por definição o sistema (8) é aproximadamente controlável em tempo finito se $\overline{Z} = E$.

Fattorini, ([14]), mostrou que

$$Z^{\perp} = \{x' \in E' : B'T(t)'x' = 0, \quad \forall t \geq 0\}.$$

Além do mais, se ω_o é o tipo do semigrupo $T(t)$, (capítulo I. §2), se $\rho_o(A)$ é a componente conexa de $\rho(A)$ que contém o conjunto $\{\lambda : \lambda \in \rho(A) \text{ e } Re(\lambda) > \omega_o\}$ e se $\overline{Z}(\lambda)$ é o espaço de controlabilidade aproximada em tempo finito do sistema

$$(9) \qquad \dot{x}(t) = R(\lambda,A)\, x(t) + B\, u(t), \quad \lambda \in \rho_o(A),$$

então $\overline{Z}(\lambda) = \overline{Z}$. Concluimos que os sistemas (8) e (9) são equivalentes ao que diz respeito à controlabilidade aproximada em tempo finito. O sistema (9) sendo no entanto definido em termos de um operador linear limitado, a saber, $R(\lambda,A)$.

Enfim, verifica-se facilmente que

$$x' \in Z(\lambda)^{\perp} \iff B' \exp(t\, R(\lambda,A))'\, x' = 0, \quad \forall t \geq 0$$
$$\iff B'\, R(\lambda,A')^n\, x' = 0, \quad \forall n \geq 0.$$

Neste parágrafo, vamos generalizar esta idéia de reduzir o estudo da controlabilidade aproximada do sistema geral (8) ao estudo da controlabilidade aproximada de um sistema definido por um operador linear limitado, utilizando para isto um cálculo operacional.

Suponhamos que a cada elemento f, numa álgebra de funções F, onde $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, está associado um operador linear limitado, indicado por $f(A)$, de tal maneira que a aplicação $\tau_A : F \to B(E)$, $f \to f(A)$, defina um cálculo operacional, isto é, τ_A é um homomorfismo de álgebras.

Podemos então definir o sistema,

$$\dot{x}(t) = f(A)\, x(t) + B u(t) , \tag{10}$$

através do qual relacionaremos as propriedades de controlabilidade aproximada dos sistemas (8) e (10).

Numa primeira etapa, estabeleceremos alguns resultados utilizando o cálculo operacional de Dunford-Taylor. Para as notações e os resultados pertinentes, vide Taylor, [30].

Seja $f \in U_\infty(A)$. A aplicação $f(A)$ é então definida por

$$f(A) = f(\infty) I + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z)\, R(z,A)\, dz , \tag{11}$$

onde Γ é uma tragetória fechada, fronteira de um domínio de Cauchy D tal que $\sigma_e(A) \subseteq D$ e $\bar{D} \subseteq \Delta(f)$. $\sigma_e(A)$ indica o espectro estendido de A, isto é,

$$\sigma_e(A) = \begin{cases} \sigma(A) & \text{se A é limitado,} \\ \sigma(A) \cup \{\infty\} & \text{se A não é limitado.} \end{cases}$$

Chamaremos $\bar{Z}(f)$ o espaço de controlabilidade aproximada em tem

po finito do sistema (10).

2.1 PROPOSIÇÃO: Se $\Gamma \subseteq \rho_o(A)$, então $\bar{Z}^{\perp} \subseteq \overline{Z(f)}^{\perp}$.

DEMONSTRAÇÃO: Se $x' \in \bar{Z}^{\perp}$ então $B'T(t)'x' = 0$, para todo $t \geq 0$ e portanto, $\langle x', T(t)Bu\rangle = 0$ para todo $u \in U$ e $t \geq 0$. Logo, $\langle x', Bu\rangle = 0$ e como $R(z,A)$ é a transformada de Laplace de $T(t)$ quando $Re(z) > \omega_o$, temos em consequência que $\langle x', R(z,A)Bu\rangle = 0$ se $z \in \rho_o(A)$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\langle x', \exp(tf(A))Bu\rangle &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \langle x', (f(A))^k Bu\rangle \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \langle x', f^k(A)Bu\rangle \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \langle x', \{f^k(\infty)I + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f^k(z)\, R(z,A)dz\}Bu\rangle \\
&= 0, \quad \forall t \geq 0.
\end{aligned}$$

Logo, $x' \in \overline{Z(f)}^{\perp}$.

2.2 COROLÁRIO: Se o sistema (10) é aproximadamente controlável em tempo finito, então o sistema (8) também o é.

DEMONSTRAÇÃO: Se $\overline{Z(f)} = E$ então $Z(f)^{\perp} = \{0\}$, $\bar{Z}^{\perp} = \{0\}$ e finalmente $\bar{Z} = E$.

A recíproca dos resultados anteriores é trivialmente

falsa, visto que podemos considerar um sistema (8) que seja aproximadamente controlável em tempo finito e para o qual $\overline{Im(B)} \neq E$. Se $f = 0$, naturalmente $f \in U_\infty(A)$, $f(A) = 0$ e $\overline{Z(f)} = \overline{Im(B)}$.

Podemos, não obstante, esperar que sob certas condições adequadas o corolário 2.2 admita uma recíproca. Por exemplo, se $\lambda \in \rho_o(A)$ e $f(z) = (\lambda - z)^{-1}$ então $f(A) = R(\lambda, A)$ e, como foi observado anteriormente, teremos neste caso $\bar{Z} = \overline{Z(f)}$. Para poder generalizar este fato, fazemos a seguinte hipótese.

2.3 HIPÓTESE: Sejam f e Γ tais como na proposição 2.1, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ um aberto contendo Γ e $H(\Omega)$ o conjunto das funções analíticas em Ω. Se $h \in H(\Omega)$ verifica a condição

$$\int_\Gamma e^{f(z)t} h(z)\, dz = 0, \quad \forall t \geq 0,$$

então $h = 0$.

2.4 TEOREMA: Suponhamos que f satisfaz a hipótese 2.3. Então o sistema (8) é aproximadamente controlável em tempo finito se e somente se o sistema (10) também o é.

DEMONSTRAÇÃO: Basta mostrar que $\overline{Z(f)}^\perp \subseteq \bar{Z}^\perp$. Para isto, seja $x' \in \overline{Z(f)}^\perp$, então

$$\langle x', \exp(t\, f(A))Bu \rangle = \langle x', \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} f(A)^k Bu \rangle$$

$$= \langle x', \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \{f^k(\infty) I + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f^k(z)\ R(z,A)dz\}\ B u \rangle$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \{f^k(\infty) \langle x', B u\rangle + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f^k(z) \langle x',\ R(z,A)Bu\rangle dz\}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{f(z)t} \langle x',\ R(z,A)\, B u\rangle dz = 0\ ,$$

para todo $u \in U$ e $t \geq 0$.

Como $h(z) = \langle x',\ R(z,A)\, B u\rangle$ é uma função analítica em $\rho_o(A)$ segue, pela hipótese 2.3, que $h = 0$ e, derivando em relação a z, também obtemos que

$$\langle x',\ R^n(z,A)^n B u \rangle = 0\ ,$$

para todo $z \in \rho_o(A)$, $u \in U$ e $n \geq 1$. Logo, $B'R^n(z,A')^n x' = 0$ e portanto, conforme Fattorini, ([14]), concluimos que $x' \in \bar{z}^{\perp}$.

No próximo exemplo exibimos algumas funções f para as quais a hipótese 2.3 é satisfeita. Isto ocorre, em particular, para as funções $f(z) = (\lambda - z)^{-1}$ com $\lambda \in \rho_o(A)$.

2.5 EXEMPLO: Se f tem um polo simples num ponto $\bar{z}$ interior a $-\Gamma$, então f satisfaz a hipótese 2.3.

DEMONSTRAÇÃO: Para simplificar as notações, suponhamos que $\bar{z} = 0$. Então $f(z) = \frac{a}{z} + f_1(z)$, com $f_1(z)$ analítico a $a \neq 0$. Seja

$$\omega = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{f(z)t}\,h(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\frac{at}{z}}\,e^{f_1(z)t}\,h(z)dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(at)^k}{k!}\,\frac{1}{z^k}\Big)\,e^{f_1(z)t}\,h(z)dz\ .$$

Pela convergência uniforme para $|z| \geq r \geq 0$ e notando que $0 \in \text{int}\,(-\Gamma)$, segue que

$$\omega = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k t^k}{k!}\int_\Gamma \frac{1}{z^k}\,e^{f_1(z)t}\,h(z)\,dz$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a^k t^k}{k!}\,\frac{2\pi i}{(k-1)!}\,(e^{f_1(z)t}\,h(z))^{(k-1)}(0),$$

ou seja

$$\omega = -at\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k t^k}{k!(k+1)!}\,(g_t^{(k)}(z))(0) = 0, \quad \forall t \geq 0$$

com $g_t(z) = e^{f_1(z)t}\,h(z)$, e portanto

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k t^k}{k!(k+1)!}\,(g_t^{(k)}(z))(0) = 0, \quad \forall t \geq 0. \tag{12}$$

Pode-se verificar que $(g_t^{(k)}(z))(0) = e^{f_1(0)t}\,P_k(t)$, onde $P_k(t)$ é um polinômio de grau k, com termo constante igual a $h^{(k)}(0)$, $k \geq 0$. Agora, utilizando a continuidade em $t = 0$ e avaliando a expressão (12) repetidamente em $t = 0$, obtemos que $h^k(0) = 0$, para todo $k \geq 0$. Como h é analítica, concluimos que $h = 0$.

Este exemplo generaliza-se a funções f que possuem um número finito de polos.

Completamos, a seguir, estas aplicações da transformada de Dunford-Taylor com uma proposição que será utilizada posteriormente.

2.6 PROPOSIÇÃO: Seja (X,τ) um espaço topológico e para todo $\xi \in X$, seja $A(\xi)$ um operador linear fechado em E.

Suponhamos que $f \in U_\infty(A(\xi))$ para todo $\xi \in X$ e que existe um domínio de Cauchy D tal que

$$\sigma_e(A(\xi)) \subseteq D \subseteq \bar{D} \subseteq \Delta(f) .$$

Nestas condições, se existe $\lambda_o \in \rho(A(\xi)$ tal que a aplicação $R(\lambda_o,.) : X \longrightarrow B(E)$, $\xi \longrightarrow R(\lambda_o,A(\xi))$ é contínua na topologia uniforme de $B(E)$, então a aplicação

$$f(A(.)) : X \longrightarrow B(E), \quad \xi \longrightarrow f(A(\xi))$$

é também contínua na topologia uniforme de $B(E)$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\xi_o \in X$. Pelo lema I.3.11.ii a aplicação $A : X \longrightarrow C(E)$ é δ-contínua. Se Γ é a fronteira de D, então Γ é compacto (já que D é um domínio de Cauchy) logo, pelo lema I.3.11.i, existe uma vizinhança V de ξ_o tal que as aplicações $R(\lambda,.) : V \longrightarrow B(E)$, $\xi \longrightarrow R(\lambda,A(\xi))$, são contínuas na topologia uniforme de $B(E)$ e uniformemente com relação a λ, quando

$\lambda \in \Gamma$.

A continuidade de $f(A(.))$ segue então da própria definição da transformada de Dunford-Taylor,

$$f(A(\xi)) = f(\infty)I + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(z)\ R(z,A(\xi))dz\ .$$

O cálculo operacional de Dunford-Taylor, acima considerado, tem o inconveniente de funcionar apenas para funções f analíticas no infinito. Com isto, ficam excluídas funções como z^{α}, o que nos impede de aplicar este cálculo para estudar sistemas definidos por potências fracionárias de um operador linear A . Estudaremos no entanto este tipo de sistemas utilizando resultados que podem ser encontrados em [23], (veja também [3] e [21]).

De modo geral, suponhamos que A é um operador linear fechado e densamente definido, verificando

$$\rho(-A) \supseteq \Sigma_{\omega} = \{\lambda : \omega < |Arg(\lambda)| \leq \pi\} \cup \{0\}$$

e

$$\|R(\lambda,-A)\| \leq \frac{1}{1+|\lambda|}, \quad \forall \lambda \in \Sigma_{\omega} \quad \text{e para algum} \quad \omega \in [0,\pi).$$

Por ser $\rho(-A)$ um conjunto aberto em $\mathbf{C}$, é claro que existe $r > 0$ tal que $\{\lambda : |\lambda| \leq r\} \subseteq \rho(-A)$. Da teoria dos semi-grupos analíticos, sabemos que as condições anteriores são verificadas para $\omega < \frac{\pi}{2}$ se e somente se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico e uniformemente limitado, (Davies, [10]).

Seja F a álgebra das funções analíticas definidas em $\mathbb{C}$, com eventual corte no eixo real negativo, e tais que existe $\nu > 0$ para o qual $\lambda^{\nu} f(\lambda) \longrightarrow 0$, quando $|\lambda| \longrightarrow +\infty$, uniformemente na região $-\pi+\varepsilon \leq \mathrm{Arg}(\lambda) \leq \pi-\varepsilon$, com $0 < \varepsilon < \pi$.

Para cada $f \in F$, define-se

$$f(-A) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)\, R(z,-A)\, dz \,, \tag{13}$$

onde Γ é uma trajetória como a indicada na Figura 1.

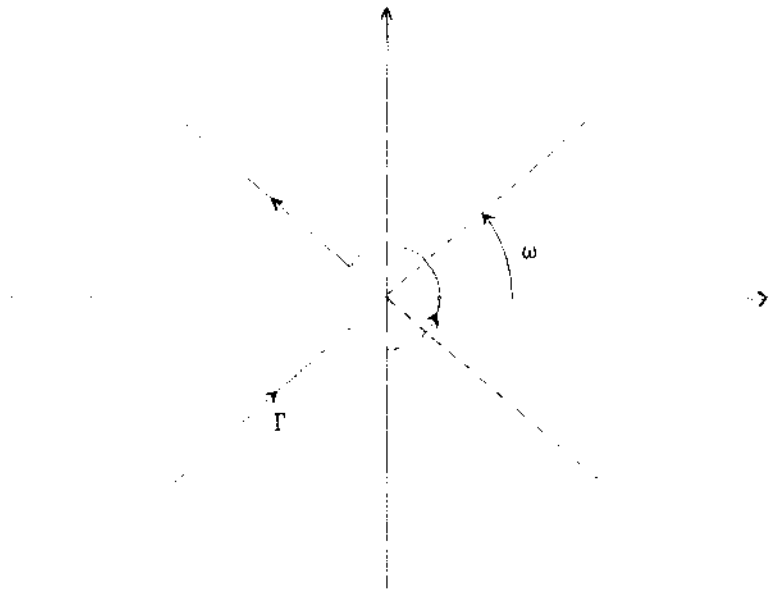

Figura 1

Pode-se mostrar que $f(-A)$ está bem definido e que a correspondência $F \longrightarrow B(E)$, $f \longrightarrow f(-A)$, define um cálculo operacional.

Suponhamos agora que A satisfaz as condições anterio-

res e é o gerador infinitesimal de um semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ de classe C_0. Nosso objetivo é relacionar a controlabilidade aproximada do sistema (8) com a do sistema.

$$\dot{x}(t) = -f(-A)\, x(t) + B\, u(t) . \tag{14}$$

Tomemos $\omega < \frac{\pi}{2}$ e Γ uma trajetória contida em $\rho_0(A)$, (o que é possível pois $\Sigma_\omega \cap \rho_0(A)$ contém uma região angular) e seja $\overline{Z(f)}$ o espaço de controlabilidade aproximada em tempo finito do sistema (14).

2.7 PROPOSIÇÃO: Nas condições anteriores, $\overline{Z}^{\perp} \subseteq \overline{Z(f)}^{\perp}$.

DEMONSTRAÇÃO: Análoga àquela da proposição 2.1.

2.8 COROLÁRIO: Retomemos as condições anteriores e seja $\alpha \geq 0$. Se o sistema

$$\dot{x}(t) = -(-A)^{-\alpha}\, x(t) + B\, u(t) \tag{15}$$

é aproximadamente controlável em tempo finito, então o sistema (8) goza da mesma propriedade.

DEMONSTRAÇÃO: Por definição, $(-A)^{-\alpha} = f(-A)$ com $f(z) = z^{-\alpha}$.

Sabemos que $S(\alpha) = (-A)^{-\alpha}$, $\alpha \geq 0$, define um semigrupo analítico, ([2]). Seja A o seu gerador infinitesimal, podemos então estudar a controlabilidade do sistema

(16) $$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t).$$

Na demonstração do nosso próximo teorema precisaremos do seguinte lema, ([40]).

2.9 LEMA: Seja Γ uma trajetória do tipo considerado anteriormente, (Figura 1), e h uma função analítica definida numa região angular Ω em torno do eixo real negativo, (Figura 2), e contendo a Γ.

Se $|h(z)| \leq \dfrac{c}{1+|z|^{\beta}}$, $\beta > 0$, $\forall z \in \Omega$, e se

$$\int_{\Gamma} z^{-t}\, h(z)dz = 0, \quad 1-\beta < t < 1,$$

então $h = 0$.

DEMONSTRAÇÃO:

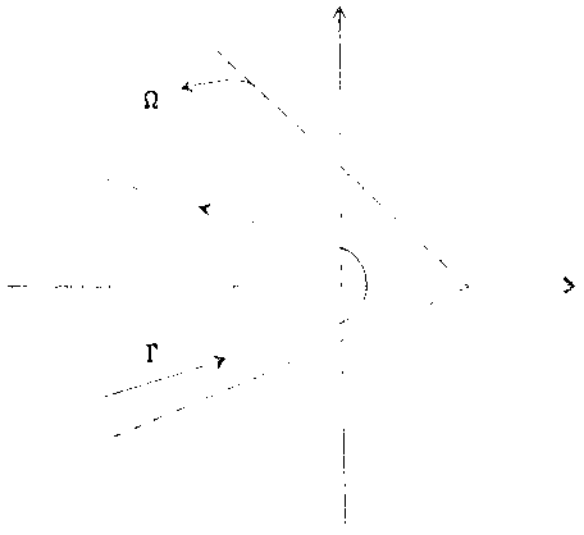

Figura 2

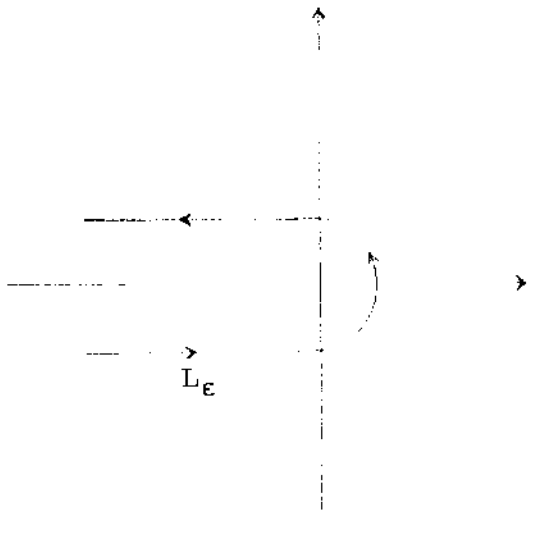

Figura 3

Da hipótese segue imediatamente que

$$I_\omega = \int_{L_\varepsilon} z^{-t} h(z)dz = 0, \quad 1-\beta < t < 1, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

onde L_ε é a trajetória indicada na Figura 3. Mas

$$I_\varepsilon = \int_0^\infty ((-r-i\varepsilon)^{-t} h(-r-i\varepsilon) - (-r+i\varepsilon)^{-t} h(-r+i\varepsilon))dr +$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} i\,\varepsilon^{1-t} e^{i\theta(1-t)} h(\varepsilon e^{i\theta})d\theta$$

$$= \int_0^\infty 2i\, r^{-t}(e^{it\,\phi_\varepsilon(r)} \operatorname{sen}(\pi t) - e^{i\pi t} \operatorname{sen}(t\,\phi_\varepsilon(r)))h(-r-i\varepsilon)dr +$$

$$\int_0^\infty r^{-t} e^{-it(\pi-\phi_\varepsilon(x))} (h(-r-i\varepsilon) - h(-r+i\varepsilon))dr +$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} i\,\varepsilon^{1-t} e^{i\theta(1-t)} h(\varepsilon e^{i\theta})d\theta = 0\ ,$$

onde $\phi_\varepsilon(r) = \text{Arc tg}\ (\frac{\varepsilon}{r})$. Logo,

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} I_\varepsilon = 0 \Rightarrow \int_0^\infty r^{-t} h(-r)dr = 0, \quad 1-\beta < t < 1,$$

e portanto, fazendo $r = e^s$, obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{s(1-t)} h(-e^s)ds = 0, \quad 0 < 1-t < \beta.$$

Da analiticidade e da unicidade da transformada de Laplace de h, ([37], teorema II.5a), obtemos finalmente que $h=0$.

2.10 TEOREMA: O sistema (8) é aproximadamente controlável em tempo finito se e somente se o sistema (16) também o é.

DEMONSTRAÇÃO: Se $\overline{Z}_A^{\perp}$ é o espaço de controlabilidade aproximada em tempo finito do sistema (16), basta mostrar que $\overline{Z}^{\perp} = \overline{Z}_A^{\perp}$.

(a) Vejamos inicialmente que $\overline{Z}^{\perp} \subseteq \overline{Z}_A^{\perp}$. Se $x' \in \overline{Z}^{\perp}$, então $\langle x', Bu\rangle = 0$ e $\langle x', R(z,A)Bu\rangle = 0$, quaisquer que sejam $u \in U$ e $z \in \rho_o(A)$. Portanto,

$$\begin{aligned}\langle x', S(\alpha)Bu\rangle &= \langle x', (-A)^{-\alpha}Bu\rangle \\ &= \langle x', -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda^{-\alpha} R(\lambda,-A)Bu\,d\lambda\rangle \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda^{-\alpha}\langle x', R(-\lambda,A)Bu\rangle d\lambda = 0,\end{aligned}$$

para todo $\alpha \geq 0$, e $x' \in \overline{Z}_A^{\perp}$.

(b) Reciprocamente, seja $x' \in \overline{Z}_A^{\perp}$ e $h(\lambda) = \langle x', R(-\lambda,A)Bu\rangle$ com $u \in U$ e $-\lambda \in \rho_o(A)$. A função h é analítica em $\Omega = \Sigma_\omega \cup D(0,r)$ para algum $r > 0$, onde $D(0,r) = \{z : |z| < r\}$. Como $x' \in \overline{Z}_A^{\perp}$, temos

$$\begin{aligned}0 &= \langle x', S(\alpha)Bu\rangle \\ &= \langle x', (-A)^{-\alpha}Bu\rangle \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda^{-\alpha}\langle x', R(-\lambda,A)Bu\rangle d\lambda, \quad \forall \alpha \geq 0,\end{aligned}$$

e como $|h(\lambda)| \leq \dfrac{c}{1+|\lambda|}$, segue do lema 2.9, com $\beta = 1$, que

$h(\lambda) = 0 = \langle x', R(-\lambda, A)Bu \rangle = 0.$

Derivando a última expressão com relação a λ, obtemos que $\langle x', R(-\lambda, A)^n Bu \rangle = 0$, $\forall n \geq 1$. Concluimos então, ([14]) que $x' \in \bar{Z}^{\perp}$.

Se $-A$ satistaz as condições gerais indicadas interiormente, então $(-A)^{\alpha}$, $\alpha > 0$, está bem definido como um operador linear fechado. Se ademais $\alpha < \frac{1}{2}$, então $-(-A)^{-\alpha}$ é gerador infinitesimal de um semigrupo analítico e podemos considerar a família de sistemas

$$\dot{x}(t) = -(-A)^{\alpha} x(t) + B u(t), \quad 0 \leq \alpha < \frac{1}{2}. \tag{17}$$

Como $f_t = e^{-\lambda^{\alpha} t} \in \mathcal{H}$, $t \geq 0$, então ([23]), o semigrupo $U_{\alpha}(t)$ gerado por $-(-A)^{\alpha}$ é dado por

$$U_{\alpha}(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{-\lambda^{\alpha} t} R(\lambda, -A) d\lambda, \quad t > 0, \quad 0 < \alpha < \frac{1}{2}. \tag{18}$$

2.11 PROPOSIÇÃO: Se o sistema (17) é aproximadamente controlável em tempo finito e $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ então o sistema (8) é também aproximadamente controlável em tempo finito.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $x' \in \bar{Z}^{\perp}$. Sabemos então que $\langle x', R(\lambda, -A)Bu \rangle = 0$, para todo $u \in U$, logo por (18), $\langle x', U_{\alpha}(t)Bu \rangle = 0$ e portanto $x' \in \bar{Z}^{\perp}$, onde $\bar{Z}_{\alpha}$ é o espaço de controlabilidade aproximada em tempo finito do sistema (17). Daí segue que $\bar{Z}^{\perp} \subset \bar{Z}_{\alpha}^{\perp}$.

CAPÍTULO IV

ESTABILIDADE ASSINTÓTICA DE SISTEMAS LINEARES PERTURBADOS

§1. INTRODUÇÃO

Dedicamos este capítulo ao estudo da estabilidade assintótica de sistemas de controle lineares continuamente perturbados. Como anteriormente, E e U indicam espaços de Banach arbitrários mas X estará agora restringido à classe dos espaços normados. Vamos considerar os sistemas

$$(1) \qquad \dot{x}(t) = A(\xi)\, x(t) + B(\xi)\, u(t), \quad \forall \xi \in X,$$

onde $A(\xi) \in \mathcal{C}(E)$ é gerador infinitesimal de um semigrupo $\{T(t,\xi) : t \geq 0\}$ de classe C_o em $\mathcal{B}(E)$ e $B(\xi) \in \mathcal{B}(U,E)$, para todo $\xi \in X$.

Nosso objetivo consiste em estabelecer condições mediante as quais possamos garantir que todo sistema (1) uniformemente estabilizável (definição I.2.4) para $\xi = \xi_o$, também verifica esta propriedade numa vizinhança $V \subseteq X$ de ξ_o.

O desenvolvimento que segue está baseado fundamentalmente nos teoremas I.2.6, I.3.14 assim como na existência de certos operadores lineares correspondentes à evolução de subespaços vetoriais.

§2. EVOLUÇÃO DE SUBESPAÇOS

Como nos capítulos anteriores, consideramos a aplicação $A : X \to \mathcal{C}(E)$, $\xi \to A(\xi)$. Se A é δ-contínua (definição I.3.10) e se, para $\xi_o \in X$, é dada uma decomposição do espectro $\sigma(A(\xi_o))$ em conjuntos espectrais disjuntos $\sigma_1(\xi_o)$ e $\sigma_2(\xi_o)$ tais que $\sigma_1(\xi_o)$ está contido no interior de uma curva de Jordan retificável fechada Γ e $\sigma_2(\xi_o)$ no seu exterior, então pelo teorema I. 3.14, existe uma vizinhança $V \subseteq X$ de ξ_o tal que, para todo $\xi \in V$, o espectro $\sigma(\xi) = \sigma(A(\xi))$ também se decompõe em conjuntos espectrais $\sigma_1(\xi)$ e $\sigma_2(\xi)$ com $\sigma_1(\xi) \subseteq \operatorname{int}\Gamma$ e $\sigma_2(\xi) \subseteq \operatorname{ext}\Gamma$.

Denotemos por $E = E_1(\xi) \oplus E_2(\xi)$ a decomposição correspondente de E em subespaços invariantes por $A(\xi)$. Como $\sigma_1(\xi) \subseteq \subseteq \operatorname{int}\Gamma$ é um conjunto limitado, concluímos ([30]) que $E_1(\xi) \subseteq \subseteq D(A(\xi))$ e, se escrevermos $A_i(\xi) = A(\xi)\big|_{E_i(\xi) \cap D(A(\xi))}$, $i = 1,2$, então $A_1(\xi) \in \mathcal{B}(E_1(\xi))$. Denotaremos por $P(\xi)$ a projeção de E sobre $E_1(\xi)$.

2.1 LEMA: Com as hipóteses e notações anteriores temos:

1) $A_i : V \to \mathcal{C}(E)$ é δ-contínua, $i = 1,2$,

2) $\|A_1\| : V \to \mathbb{R}^+$ é localmente limitada.

DEMONSTRAÇÃO: 1) Faremos a demonstração por A_1.

Sejam $\xi, \eta \in V$ e $\varepsilon > 0$. Temos que calcular $\delta(A_1(\xi), A_1(\eta))$ e para isto, pomos $u = (x, A_1(\xi)x) \in G(A_1(\xi))$ com

$\|u\| = \|x\| + \|A_1(\xi)x\| = 1$. Como A é δ-contínua, existe $W_1 \subseteq V$, vizinhança de η tal que $\delta(A(\xi),A(\eta)) < \varepsilon$, para todo $\xi \in W_1$. Portanto, existe $y \in D(A(\eta))$ tal que

$$\|x-y\| + \|A(\xi)x-A(\eta)y\| \leq \varepsilon(\|x\| + \|A(\xi)x\|).$$

Seja $z = P(\eta)y \in E_1(\eta) \cap D(A(\eta)) = D(A_1(\eta))$; então

$$\begin{aligned} d(u,G(A_1(\eta))) &\leq \|x-z\| + \|A_1(\xi)x-A_1(\eta)z\| \\ &\leq \|P(\xi)x-P(\eta)y\| + \|A_1(\xi)x-A_1(\eta)P(\eta)y\| \\ &\leq \|P(\xi)-P(\eta)\| \cdot \|x\| + \|P(\eta)\| \|x-y\| + \|P(\xi)A(\xi)x-P(\eta)A(\eta)y\| \\ &\leq \|P(\xi)-P(\eta)\| (\|x\| + \|A_1(\xi)x\|) + \|P(\eta)\| (\|x-y\| + \|A(\xi)x-A(\eta)y\|) \\ &\leq \|P(\xi)-P(\eta)\| + \varepsilon\|P(\eta)\|. \end{aligned}$$

Como $P : V \longrightarrow B(E)$ é contínua, na topologia uniforme de $B(E)$ (proposição III.2.6 e o fato de $P(\xi)$ ser a transformada de Dunford-Taylor da função f definida mais adiante), existe uma vizinhança W_2 de η tal que $\|P(\xi)-P(\eta)\| \leq \varepsilon$, para todo $\xi \in W_2$.

Logo, para todo $\xi \in W = W_1 \cap W_2$, $\delta(A_1(\xi),A_1(\eta)) \leq \varepsilon(1+\|P(\eta)\|)$. Repetindo o mesmo raciocínio com $\delta(A_1(\eta),A_1(\xi))$, concluímos a δ- continuidade de A_1.

2) Não é difícil mostrar que é possível escolher a curva Γ e domínios de Cauchy Ω_1 e Ω_2, com Ω_1 limitado de maneira que

$\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, $\sigma_1(\xi) \subseteq \text{int } \Gamma \subseteq \Omega_1$ e $\sigma_2(\xi) \subseteq \Omega_2$, para todo $\xi \in V$.

Definimos $f(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{se } \lambda \in \Omega_1 \\ 0 & \text{se } \lambda \in \Omega_2 \end{cases}$ e $g(\lambda) = \lambda \cdot f(\lambda)$.

Então, $f,g \in U_\infty(A(\xi))$, (notações de [30]) e $P(\xi) = f(A(\xi))$ bem como $g(A(\xi)) = A(\xi).P(\xi)$, ([30], lema 5.6-D) são as transformações de Dunford-Taylor de f e g respectivamente. Ponhamos $\tilde{A}_1(\xi) = g(A(\xi)) \in B(E)$. É imediato que $A_1(\xi) = \tilde{A}_1(\xi)\big|_{E_1(\xi)}$ e, pela proposição III.2.6, a aplicação $\tilde{A}_1 : V \longrightarrow B(E)$, $\xi \longrightarrow \tilde{A}_1(\xi)$ é contínua na topologia uniforme de $B(E)$; como $\|A_1(\xi)\| \leq \|\tilde{A}_1(\xi)\|$, segue que $\|A_1\|$ é localmente limitada.

O espaço X sendo normado, utilizaremos as seguintes notações. Para cada par $\xi,\eta \in X$, denotamos por $[\xi,\eta]$ o segmento ligando ξ a η, quer dizer,

$$[\xi,\eta] = \{(1-t)\xi + t\eta : t \in [0,1]\}$$

e, se $P : X \longrightarrow B(E)$ é uma aplicação, chamamos $V_{[\xi,\eta]}P$ à variação total da função $\bar{P} : [0,1] \longrightarrow B(E)$, $t \longrightarrow P((1-t)\xi + t\eta)$. Com estas notações estabelecemos a definição e o lema que seguem.

2.2 DEFINIÇÃO: Seja $P : X \longrightarrow B(E)$ uma aplicação. Diz-se que P é localmente de variação limitada se para todo $\xi_o \in X$, existe $M \geq 0$ e uma vizinhança V de ξ_o tal que $V_{[\xi,\eta]}P \leq M$, para qualquer $\xi,\eta \in V$.

2.3 LEMA: Seja $P : X \to B(E)$ uma aplicação localmente de variação limitada, localmente uniformemente contínua na topologia uniforme de $B(E)$ e tal que $P(\xi)$ é uma projeção para cada $\xi \in X$.

Então para todo $\xi_o \in X$, existe uma bola $B_\varepsilon(\xi_o)$ de centro ξ_o e rádio $\varepsilon > 0$, e um operador contínuo

$$Q : B_\varepsilon(\xi_o) \times B_\varepsilon(\xi_o) \to B(E)$$

que satisfaz as propriedades:

i) $P(\xi)\, Q(\xi,\eta) = Q(\xi,\eta)\, P(\eta) = Q(\xi,\eta), \quad \forall \xi,\eta \in B_\varepsilon(\xi_o),$

ii) $Q(\xi,\eta)\, (\mathrm{Im}(P(\eta))) \subseteq \mathrm{Im}(P(\xi)), \quad \forall \xi,\eta \in B_\varepsilon(\xi_o),$

iii) $Q(\xi,\eta)\, Q(\eta,\xi) = I, \quad \forall \xi,\eta \in B_\varepsilon(\xi_o),$

iv) $Q(\xi,\xi) = I, \quad \forall \xi \in B_\varepsilon(\xi_o).$

A demonstração deste lema será omitida uma vez que é completamente análoga à feita em [23], páginas 297-307, para um intervalo $[0,T]$ em lugar de X. No presente caso a compacidade de $[0,T]$ é substituída pela hipótese de continuidade uniforme local da projeção P, isto é, para todo $\xi_o \in X$, existe uma vizinhança V de ξ_o tal que $P : V \to B(E)$ é uniformemente contínua, na topologia uniforme de $B(E)$.

Voltando às notações iniciais, teremos sempre uma decomposição $E = E_1(\xi) \oplus E_2(\xi)$, para todo $\xi \in V \subseteq X$, e $P(\xi)$ será a projeção sobre $E_1(\xi)$. A seguir damos um exemplo no qual $P(.)$ é de variação limitada.

2.4 EXEMPLO: Suponhamos que $D(A(\xi)) = D$ é independente de ξ, e que existe $B \in C(E)$, $B : D \longrightarrow E$, tal que $B^{-1} \in B(E)$ e

1) $A(.)\ B^{-1} : V \longrightarrow B(E)$ é de variação limitada.

2) $B\ R(.,A(.)) : \Gamma \times V \longrightarrow B(E)$, $(\lambda,\xi) \longrightarrow B\,R(\lambda,A(\xi))$, é limitada, uniformemente em λ e ξ.

Nestas condições $P : V \longrightarrow B(E)$ é de variação limitada.

DEMONSTRAÇÃO: Como já foi dito na demonstração do lema 2.1.2, $P(\xi)$ é a transformada de Dunford-Taylor de f, isto é,

$$P(\xi) = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_{\Gamma} R(\lambda,A(\xi))\ d\lambda$$

Seja D o conjunto das partições $d = \{0,t_1,t_2,\ldots,t_{n-1},1\}$ de $[0,1]$ e ponhamos $|d| = n$; então

$$V_{[\xi,\eta]}P = \sup_{d\in D} \sum_{i=1}^{|d|} \| P[(1-t_i)\xi + t_i\eta] - P[(1-t_{i-1})\xi + t_{i-1}\eta] \|$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sup_{d\in D} \sum_{i=1}^{|d|} \left\| \int_{\Gamma} (R(\lambda,A[(1-t_i)\xi+t_i\eta]) - R(\lambda,A[(1-t_{i-1})\xi+t_{i-1}\eta]))d\lambda \right\| .$$

Logo, de

$$R(\lambda,A(\xi_i)) - R(\lambda,A(\xi_{i-1})) = R(\lambda,A(\xi_i))(A(\xi_{i-1}) - A(\xi_i))R(\lambda,A(\xi_{i-1}))$$

$$= [R(\lambda,A(\xi_i))(A(\xi_{i-1}) - A(\xi_i))B^{-1}] \cdot [B\,R(\lambda,A(\xi_{i-1}))]$$

e das hipóteses 1) e 2) segue a tese.

A seguir vamos sempre denotar por Q um operador que, definido localmente em torno a ξ_o, satisfaz as propriedades estabelecidas no lema 2.3.

Note-se que em consequência do lema 2.3ii tem sentido considerar $Q(\xi,\xi_o)\ A_1(\xi_o)\ Q(\xi_o\xi)$ como um operador linear em $B(E_1(\xi))$; se além do mais $\tilde{A}_1(\xi)$ é como na demonstração do lema 2.1.2, então $Q(\xi,\xi_o)\ \tilde{A}_1(\xi_o)\ Q(\xi_o,\xi) \in B(E)$ é uma extensão de $Q(\xi,\xi_o)\ A_1(\xi_o)\ Q(\xi_o,\xi)$, donde obtemos o seguinte resultado:

2.5 LEMA: Seja $\alpha : B_\varepsilon(\xi_o) \to \mathbb{R}^+$, $\alpha(\xi) = \| Q(\xi,\xi_o)\ A_1(\xi_o)\ Q(\xi_o,\xi) - A_1(\xi)\|$; então α é contínua em ξ_o.

DEMONSTRAÇÃO: Como $\alpha(\xi_o) = 0$, devemos mostrar que, para todo $\delta > 0$, existe uma vizinhança V de ξ_o tal que $\alpha(\xi) \leq \delta$, para todo $\xi \in V$; mas

$$\begin{aligned}
\alpha(\xi) &= \sup \{\| (Q(\xi,\xi_o)A_1(\xi_o)Q(\xi_o,\xi)-A_1(\xi))x\| : x \in E_1(\xi),\ \|x\| \leq 1\} \\
&= \sup \{\| (Q(\xi,\xi_o)\tilde{A}_1(\xi_o)Q(\xi_o,\xi)-\tilde{A}_1(\xi))x\| : x \in E_1(\xi),\ \|x\| \leq 1\} \\
&\leq \| Q(\xi,\xi_o)\tilde{A}_1(\xi_o)Q(\xi_o,\xi) - \tilde{A}_1(\xi)\| ,
\end{aligned}$$

a tese sendo agora consequência das propriedades de continuidade de $\tilde{A}_1(.)$ e $Q(.,.)$.

§3. SISTEMAS PERTURBADOS ASSINTOTICAMENTE ESTÁVEIS

Estamos agora em condições de estudar a estabilidade assintótica de sistemas perturbados. Para isto precisamos do seguinte lema:

3.1 LEMA: Consideremos o sistema de controle (1) onde $B : X \longrightarrow \mathcal{B}(U,E)$, $\xi \longrightarrow B(\xi)$, e $C : X \longrightarrow \mathcal{B}(E)$, $\xi \longrightarrow C(\xi)$, $C(\xi_o) = 0$, são aplicações contínuas nas topologias uniformes e $A : X \longrightarrow \mathcal{C}(E)$, está definido por $A(\xi) = A_o + C(\xi)$, onde A_o é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_o.

Se o sistema (1) é uniformemente estabilizável para $\xi = \xi_o$, então existe uma vizinhança V de ξ_o tal que, para todo $\xi \in V$, (1) é também uniformemente estabilizável.

DEMONSTRAÇÃO: Por hipótese (definição I.2.4), existe $F \in \mathcal{B}(U,E)$ tal que o semigrupo gerado por $D(\xi_o) = A(\xi_o) + B(\xi_o)F$ é uniformemente estável. Além disso, $D(\xi) = A(\xi) + B(\xi)F = A_o + C(\xi) + B(\xi)F = D(\xi_o) + C(\xi) + (B(\xi) - B(\xi_o))F$.

Se $T(t,\xi)$ é o semigrupo gerado por $D(\xi)$, então $\| T(t,\xi_o) \| \leq M e^{-\mu t}$, $M \geq 1$ e $\mu > 0$. Das propriedades de continuidade de $B(.)$ e $C(.)$, existe uma vizinhança V de ξ_o tal que

$$\| C(\xi) + (B(\xi) - B(\xi_o))F \| \leq \frac{\mu}{2M}, \quad \forall \xi \in V,$$

logo, pela observação I.2.5,

$$\|T(t,\xi)\| \leq M e^{-\frac{u}{2}t}, \quad \forall \xi \in V,$$

que completa a demonstração.

Como no parágrafo anterior, $A : X \to \mathcal{C}(E)$ será uma aplicação δ-contínua e suporemos agora que $A(\xi_o)$ verifica a condição D.S.A. (para a definição e as notações, vide I.§2). Logo, todos os conceitos e lemas anteriores sobre a decomposição do espectro de $A(\xi_o)$ assim como do espaço E continuam válidos.

Com as notações de I.§2, o espectro $\sigma(\xi_o)$ de $A(\xi_o)$ está decomposto em dois subconjuntos $\sigma_s(\xi_o)$ e $\sigma_u(\xi_o)$ separados por uma curva Γ tal que $\sigma_s(\xi_o) \subseteq \text{ext } \Gamma$ e $\sigma_u(\xi_o) \subseteq \text{int } \Gamma$. Além do mais, existe $\delta > 0$ tal que $\sigma_s(\xi_o) \subseteq \{\lambda : \text{Re}(\lambda) \leq -\delta\}$ e $\sigma_u(\xi_o) \subseteq \{\lambda : \text{Re}(\lambda) > -\delta\}$. Como foi visto anteriormente, existe uma vizinhança $V \subseteq X$ de ξ_o tal que, para todo $\xi \in V$, vale uma decomposição análoga para o espectro $\sigma(\xi)$ de $A(\xi)$, a correspondente decomposição de E sendo denotada por $E = E_s(\xi) \oplus E_u(\xi)$. Denotamos também por $P(\xi)$ a projeção sobre a componente $E_u(\xi)$ e por $A_u(\xi)$ e $A_s(\xi)$ as correspondentes restrições de $A(\xi)$ a $E_u(\xi)$ e $E_s(\xi)$ respectivamente.

Neste caso o sistema (1) também se decompõe em dois sistemas, a saber:

$$(2) \qquad \dot{x}_s(t) = A_s(\xi)x_s(t) + (I-P(\xi))B(\xi)u(t), \quad x_s(t) \in E_s(\xi),$$

$$A_s(\xi) : D(A(\xi)) \cap E_s(\xi) \longrightarrow E_s(\xi),$$

$$(3) \qquad \dot{x}_u(t) = A_u(\xi)x_u(t) + P(\xi)B(\xi)u(t), \quad x_u(t) \in E_u(\xi),$$

$$A_u(\xi) : E_u(\xi) \longrightarrow E_u(\xi) \ ,$$

onde $x_u(t) = P(\xi)x(t)$, $x_s(t) = (I-P(\xi))x(t)$ e onde omitimos ξ das notações de x_u e x_s.

O semigrupo de classe C_o gerado por $A(\xi)$ é denotado por $\{T(t,\xi) : t \geq 0\}$ e aqueles gerados por $A_s(\xi)$ e $A_u(\xi)$ são denotados respectivamente por $\{T_s(t,\xi) : t \geq 0\}$ e $\{T_u(t,\xi) : t \geq 0\}$. Note-se que, por ser $A_u(\xi)$ um operador linear limitado,

$$T_u(t,\xi) = \exp\,(t\,A_u(\xi)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A_u(\xi)^k \ .$$

Podemos agora estabelecer o seguinte resultado:

3.2 TEOREMA: Sejam $A : X \longrightarrow C(E)$ uma aplicação δ-contínua, $B : X \longrightarrow B(U,E)$ uma aplicação contínua e $\xi_o \in X$ tal que $A(\xi_o)$ verifica a condição D.S.A. Existe então uma vizinhança $V \subseteq X$ de ξ_o tal que, para todo $\xi \in V$, $A(\xi)$ também verifica a condição D.S.A. Se:

1) O sistema (3) é uniformemente estabilizável para $\xi = \xi_o$,

2) A aplicação $P : V \longrightarrow B(E)$, $\xi \longrightarrow P(\xi)$ é localmente de variação limitada e localmente uniformemente contínua,

então existe uma vizinhança $V_1 \subseteq X$ de ξ_o tal que, para qualquer $\xi \in V_1$, o sistema (3) é uniformemente estabilizável.

DEMONSTRAÇÃO: A existência de V segue, como já foi visto, da utilização do teorema I.3.14 na decomposição de $\sigma(\xi_o)$ em $\sigma_s(\xi_o)$ e $\sigma_u(\xi_o)$ por meio da curva Γ. Note-se que sendo $\sigma_u(\xi_o)$ compacto em $\mathbb{C}$, podemos sempre supor que $\Gamma \subseteq \{\lambda : Re(\lambda) > -\delta\}$.

Seja agora $V_1' \subseteq V$ uma vizinhança de ξ_o tal que $V_{[\xi,\eta]}P \leq M$ para algum $M \geq 0$ e para todo par $\xi, \eta \in V_1'$.

Pela hipótese 1) existe uma aplicação linear limitada $F : E_u(\xi_o) \longrightarrow U$ tal que $D_u(\xi_o) = A_u(\xi_o) + P(\xi_o)B(\xi_o)F : E_u(\xi_o) \longrightarrow E_u(\xi_o)$ gera um semigrupo uniformemente estável de classe C_o.

Como $A_u(\xi) : E_u(\xi) \longrightarrow E_u(\xi)$ e como existe uma aplicação $Q : V_1' \times V_1' \longrightarrow B(E)$ satisfazendo a todas as propriedades do lema 2.3 com relação a P, podemos definir o operador linear $D_u(\xi) = A_u(\xi) + P(\xi)B(\xi)F\ \bar{Q}(\xi_o,\xi)$ de $E_u(\xi)$, onde $\bar{Q}(\xi_o,\xi)$ é a restrição de $Q(\xi_o,\xi)$ a $E_u(\xi)$ (e portanto $\bar{Q}(\xi_o,\xi) \in B(E_u(\xi),E_u(\xi_o))$). Desenvolvendo agora $D_u(\xi)$, obtemos

$$
\begin{aligned}
D_u(\xi) &= A_u(\xi) - \bar{Q}(\xi,\xi_o)A_u(\xi_o)\ \bar{Q}(\xi_o,\xi) + \bar{Q}(\xi,\xi_o)A_u(\xi_o)\ \bar{Q}(\xi_o,\xi) + \\
&\quad \bar{Q}(\xi,\xi_o)P(\xi_o)B(\xi_o)F\ \bar{Q}(\xi_o,\xi) - \bar{Q}(\xi,\xi_o)P(\xi_o)\ B(\xi_o)F\ \bar{Q}(\xi_o,\xi) + \\
&\quad P(\xi)\ B(\xi)F\ \bar{Q}(\xi_o,\xi) \\
&= A_u(\xi) - \bar{Q}(\xi,\xi_o)A_u(\xi_o)\ \bar{Q}(\xi_o,\xi) + \bar{Q}(\xi,\xi_o)\ D_u(\xi_o)\ \bar{Q}(\xi_o,\xi) - \\
&\quad \bar{Q}(\xi,\xi_o)P(\xi_o)\ B(\xi_o)F\ \bar{Q}(\xi_o,\xi) + P(\xi)\ B(\xi)F\ \bar{Q}(\xi_o,\xi) \\
&= \bar{Q}(\xi,\xi_o)D_u(\xi_o)\bar{Q}(\xi_o,\xi) + A_u(\xi) - \bar{Q}(\xi,\xi_o)A_u(\xi_o)\ \bar{Q}(\xi_o,\xi) + \\
&\quad P(\xi)[B(\xi) - \bar{Q}(\xi,\xi_o)P(\xi_o)B(\xi_o)]F\ \bar{Q}(\xi_o,\xi).
\end{aligned}
$$

Mas, $\bar{Q}(\xi,\xi_o)D_u(\xi_o)\ \bar{Q}(\xi_o,\xi)$ é gerador infinitesimal do semigrupo $\exp\ (t\ \bar{Q}(\xi,\xi_o)D_u(\xi_o)\ \bar{Q}(\xi_o,\xi)) = \bar{Q}(\xi,\xi_o)\ \exp\ (t\ D_u(\xi_o))\ \bar{Q}(\xi_o,\xi)$ que é uniformemente estável por $\exp\ (t\ D_u(\xi_o))$ o ser.

Por outro lado, a norma do termo

$$R(\xi,\xi_o) = A_u(\xi) - \bar{Q}(\xi,\xi_o)A_u(\xi_o)\ \bar{Q}(\xi_o,\xi) + P(\xi)\ [B(\xi) - \bar{Q}(\xi,\xi_o)P(\xi_o)B(\xi_o)]F\ \bar{Q}(\xi_o,\xi)$$

é contínua em $\xi = \xi_o$. (lema 2.5 para o termo $A_u(\xi) - \bar{Q}(\xi,\xi_o)A_u(\xi_o)\bar{Q}(\xi_o,\xi)$ e das propriedades de $P(.)$, $B(.)$ e $Q(.,.)$ para o outro termo) e $R(\xi_o,\xi_o) = 0$. Logo, de modo análogo que na demonstração do lema 3.1, segue que o semigrupo gerado por $D_u(\xi)$ é uniformemente estável numa vizinhança V_1 de ξ_o com $V_1 \subseteq V_1' \subseteq V$ e portanto o sistema $\dot{x}_u(t) = A_u(\xi)x_u(t) + P(\xi)B(\xi)u(t)$ é uniformemente estabilizável para $\xi \in V_1$, por intermédio do operador linear $F\ \bar{Q}(\xi_o,\xi)$.

3.3 EXEMPLO: Seja A_o o gerador infinitesimal de um semigrupo contrativo de classe C_o e A um operador linear dissipativo verificando $D(A_o) \subseteq D(A)$, e relativamente limitado com relação a A_o. Seja $g : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma função contínua com $g(0) = 0$ e $B \in \mathcal{B}(U,E)$.

Definimos $A(\xi) = A_o + g(\xi)A$; então

1) Existe uma vizinhança V de $0 \in X$ tal que, para todo $\xi \in V$, $A(\xi)$ é gerador infinitesimal de um semigrupo contrativo.

2) A aplicação $A : V \longrightarrow C(E)$ é δ-contínua.

3) Se A_o verifica a propriedade D.S.A e se o sistema (3) é uniformemente estabilizável para $\xi = 0$, então existe uma vizinhança V_1 de 0 tal que (3) é uniformemente estabilizável para todo $\xi \in V_1$.

DEMONSTRAÇÃO: 1) Como A é relativamente limitado com relação a A_o, existem $a \geq 0$ e $b \geq 0$ tais que $\|Ax\| \leq a\|A_o x\| + b\|x\|$, para todo $x \in D(A_o)$. Logo, $\|g(\xi)Ax\| \leq ag(\xi)\|A_o x\| + bg(\xi)\|x\|$.

Seja $V = \{\xi : a\,g(\xi) < 1\}$; então para todo $\xi \in V$, $A_o + g(\xi)A$ gera um semigrupo contrativo ([28], teorema 3.3.1).

2) Seja $k = \max\{a,b\}$ e $\alpha, \beta \geq 0$ tal que $a\alpha < 1$ e $a\beta < 1$. É fácil ver que:

$$\tilde{\delta}(A_o+\alpha A,\ A_o+\beta A) \leq \max\left\{\frac{k\,|\alpha-\beta|}{1-a\alpha},\ \frac{k|\alpha-\beta|}{1-a\beta}\right\},$$

donde obtemos a δ-continuidade de $A(\xi)$.

3) Definimos $\tilde{A}(\alpha) = A_o+\alpha A$ com $\alpha \in [0,\frac{1}{a}]$. É claro que $\tilde{A}$ também verifica as propriedades estabelecidas em 1) e 2) e, pelo teorema 3.2, existe $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_1 < \frac{1}{a}$ tal que $\tilde{A}(\alpha)$ satisfaz a propriedade D.S.A. para $\alpha \in [0,\varepsilon_1]$. Podemos mostrar também que as correspondentes projeções são de variação limitada. Para isto utilizaremos os resultados do exemplo 2.4.

Seja $D = D(A_o)$ e $S : D \longrightarrow E$ uma aplicação tal que

BC/4968

$S^{-1} \in B(E)$, então $\tilde{A}(\alpha)S^{-1}$ é de variação limitada pois, para cada partição $\{\alpha_o, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ de $[0, \varepsilon_1]$, temos:

$$\sum_{i=1}^{n} \| (A_o + \alpha_i A)S^{-1} - (A_o + \alpha_{i-1} A)S^{-1} \| = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \alpha_{i-1}) \|AS^{-1}\| = \varepsilon_1 \|AS^{-1}\|.$$

Por outro lado, se $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ é um compacto contido em $\rho(\tilde{A}(\alpha))$, $\alpha \in [0, \varepsilon_1]$, então da continuidade de $R(\lambda, A_o)$ com relação a λ, e para todo $x \in E$

$$\begin{aligned} \|A\, R(\lambda, A_o)x\| &\leq a\|A_o R(\lambda, A_o)x\| + b\|R(\lambda, A_o)x\| \\ &= a\|\lambda R(\lambda, A_o)x - x\| + b\|R(\lambda, A_o)x\| \\ &\leq (a(1 + |\lambda|\, \|R(\lambda, A_o)\|) + b\|R(\lambda, A_o)\|)\, \|x\| \\ &\leq N\, \|x\|, \end{aligned}$$

para algum $N \geq 0$.

Podemos então escolher $\varepsilon_2 > 0$, $\varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$, tal que $\varepsilon_2 N < 1$, e portanto $\|\alpha A R(\lambda, A_o)\| < 1$ para todo $\alpha \in [0, \varepsilon_2]$ e $\lambda \in \Lambda$. Segue então, utilizando a série de Newmann, que a inversa de $I - \alpha A R(\lambda, A_o)$ existe e que $\|I - \alpha A R(\lambda, A_o)\| \leq 1/(1-\varepsilon_2 N)$, agora de,

$$\begin{aligned} SR(\lambda, A_o + \alpha A) &= S(\lambda I - A_o - \alpha A)^{-1} = S[(I - \alpha A R(\lambda, A_o))(\lambda I - A_o)]^{-1} \\ &= S R(\lambda, A_o)\, (I - \alpha A R(\lambda, A_o))^{-1}, \end{aligned}$$

segue que

$$\| S\, R(\lambda, A_o + \alpha A) \| \leq \frac{\| S\, R(\lambda, A_o) \|}{1 - \varepsilon_2\, N} ,$$

para todo $\lambda \in \Lambda$, $\alpha \in [0, \varepsilon_2]$. Se escolhemos $S = \lambda_o I - A_o$, para algum $\lambda_o \in \rho(A_o)$, então é claro que

$$\| S\, R(\lambda, A_o + \alpha A) \| \leq N_1, \quad \text{para algum } N_1 \geq 0.$$

Encontramos assim todas as hipóteses do exemplo 2.4 e podemos concluir que as projeções $P(\alpha)$ são de variação limitada, para $\alpha \in [0, \varepsilon_2]$. Como $[0, \varepsilon_2]$ é compacto, resulta então que a função $P(.)$ é uniformemente contínua. Portanto os sistemas $\dot{x}(t) = \tilde{A}(\alpha)\, x(t) + B\, u(t)$ satisfazem, em $\alpha = 0$, a todas as condições do teorema 3.2, pelo qual existe $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \leq \varepsilon_2$, tal que os sistemas $\dot{x}_u(t) = \tilde{A}_u(\alpha) x_u(t) + P(\alpha)\, Bu(t)$ são uniformemente estabilizáveis.

Agora basta definir $V_1 = \{\xi \in V : g(\xi) < \varepsilon\}$ para completar a demonstração.

Voltando ao problema inicial, queremos obter condições para que o sistema (1) seja uniformemente estabilizável. De acordo com o teorema I.2.6 de Triggiani, precisamos procurar condições de estabilidade em $A_s(\xi)$. No que segue $V(\xi_o)$ sempre denotará alguma vizinhança de ξ_o e $\delta > 0$ a constante de separação das componentes $\sigma_s(\xi)$ e $\sigma_u(\xi)$, quer dizer $\sigma_s(\xi) \subseteq \{\lambda : \mathrm{Re}(\lambda) \leq -\delta\}$ e $\sigma_u(\xi) \subseteq \{\lambda : \mathrm{Re}(\lambda) > -\delta\}$.

3.4 PROPOSIÇÃO: Se, além das hipóteses do teorema 3.2, também supomos que os semigrupos $T(t,\xi)$ são uniformemente contínuos para $t > a$ e ξ numa vizinhança de ξ_o, então existe $V(\xi_o)$ tal que, para todo $\xi \in V(\xi_o)$, os sistemas (1) são uniformemente estabilizáveis.

DEMONSTRAÇÃO: Como $T(t,\xi)$ é uniformemente contínuo para $t > a$, o mesmo acontece com os semigrupos $T_s(t,\xi) = T(t,\xi)\big|_{E_s(\xi)}$ e portanto conforme a observação I.2.5, $A_s(\xi)$ satisfaz a condição S.G.A. A tese segue agora diretamente dos teoremas 3.2 e I.2.6.

3.5 TEOREMA: Se, além das hipóteses do teorema 3.2, também supomos que existe $t > 0$ e $V(\xi_o)$ tal que

$$\rho(\sigma(T_s(t,\xi)),\ \exp(t\ \sigma(A_s(\xi))) \cup \{0\}) \leq \varepsilon$$

com $\ln(e^{-\delta.t} + \varepsilon) < 0$, então os sistemas (1) são uniformemente estabilizáveis para todo $\xi \in V_1(\xi_o)$, vizinhança de ξ_o.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $z \in \sigma(T_s(t,\xi))$. Existe então $w \in \exp(t\sigma(A_s(\xi))) \cup \{0\}$ tal que $|z-w| \leq \varepsilon$, portanto $|z| \leq |w| + \varepsilon$. Se $w \in \exp(t\sigma(A_s(\xi)))$, então $w = e^{t\mu}$ com $\mu \in \sigma(A_s(\xi))$. Logo $Re(\mu) \leq -\delta$ e $|w| \leq e^{-\delta.t}$. Portanto, em qualquer caso $|z| \leq \varepsilon + e^{-\delta.t}$ e isto acarreta que

$$\sup\{|z| : z \in \sigma(T_s(t,\xi))\} = e^{t\omega_o(T_s(.,\xi))} \qquad ([10])$$
$$\leq e^{-\delta t} + \varepsilon.$$

Logo, $t\ \omega_o(T_s(.,\xi)) \leq \ln(e^{-\delta t} + \varepsilon) < 0$ e portanto $\omega_o(T_s(.,\xi)) < 0$, onde $\omega_o(T_s(.,\xi))$ é o tipo do semigrupo $T_s(t,\xi)$, (observação I.2.5). Concluimos que o semigrupo $T_s(t,\xi)$ é uniformemente estável, a tese sendo agora consequência dos teoremas 3.2 e I.2.6.

3.6 TEOREMA: Se, além das hipóteses do teorema 3.2, também supomos que:

1) $A_s(\xi_o)$ satisfaz a condição S.G.A.

2) Existe $t > 0$ tal que a aplicação $T(t,.) : X \longrightarrow B(E)$,

$\xi \longrightarrow T(t,\xi)$, é contínua em $\xi = \xi_o$,

então existe uma vizinhança $V(\xi_o)$ tal que o sistema (1) é uniformemente estabilizável para todo $\xi \in V(\xi_o)$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\varepsilon > 0$ tal que $\ln(e^{-t\delta} + \varepsilon) \leq -t\,\frac{\delta}{2}$. Como $T(t,\xi)$ é contínua em $\xi = \xi_o$, podemos utilizar o lema I.3.9 para concluir que existe uma vizinhança $V(\xi_o)$ tal que

$$\rho(\sigma(T_s(t,\xi)),\ \sigma(T_s(t,\xi_o))) < \varepsilon\ ,$$

para todo $\xi \in V(\xi_o)$. Logo, qualquer que seja $z \in \sigma(T_s(t,\xi))$, existe $w \in \sigma(T_s(t,\xi_o))$ tal que $|z-w| < \varepsilon$, ou seja $|z| \leq |w| + |\varepsilon|$ e portanto podemos estabelecer a desigualdade

$$\begin{aligned} e^{t\ \omega_o(T_s(.,\xi))} &= \sup\{|z| : z \in \sigma(T_s(t,\xi))\} \\ &\leq \sup\{|w| : w \in \sigma(T_s(t,\xi_o))\} + \varepsilon \end{aligned}$$

$$= e^{t\,\omega_o(T_s(.,\xi_o))} + \varepsilon = e^{t \sup \operatorname{Re} \sigma_s(\xi_o)} + \varepsilon$$

$$\leq e^{-t\delta} + \varepsilon,$$

a demonstração segue agora o mesmo raciocínio que em 3.5.

Um caso particular deste teorema ocorre quando os semigrupos são diferenciáveis. Como todo semigrupo diferenciável é uniformemente contínuo, os resultados de estabilidade para estes semigrupos podem sem dúvida ser obtidos diretamente da proposição 3.4. Contudo, sendo os semigrupos diferenciáveis bastante comuns vamos mostrar que eles também satisfazem as condições do teorema 3.6, além de outras propriedades.

3.7 LEMA: Seja $A(\xi)$, $\xi \in X$, o gerador infinitesimal do semigrupo $\{T(t,\xi) : t \geq 0\}$ de classe C_o. Se (X,τ) é um espaço topológico que satisfaz o 1º axioma da enumerabilidade e se $\lim_{s \to 0^+} T(s,\xi)x = x$, localmente uniformemente em $\xi \in X$, então

1) Qualquer que seja $\xi_o \in X$, existe $V(\xi_o) \subseteq X$, vizinhança de ξ_o e constantes $a > 0$ e $k > 0$ tais que $\|T(s,\xi)\| \leq k$, para todo $s \in [0,a]$ e $\xi \in V(\xi_o)$.

2) Existem constantes $M \geq 1$ e $\omega \in \mathbb{R}$ tais que $\|T(t,\xi)\| \leq Me^{\omega t}$, para todo $t \geq 0$ e $\xi \in V(\xi_o)$.

3) Se a aplicação $A : X \to \mathcal{C}(E)$ é δ-contínua, então $T(t,.) : X \to \mathcal{B}(E)$ é τ-fortemente contínua, uniformemente para t em

intervalos compactos, e para todo $t_1 > 0$, a aplicação $T : [0,t_1] \times X \longrightarrow B(E)$ é $\mathbb{R} \times \tau$-fortemente contínua.

DEMONSTRAÇÃO: 1) Seja $\{V_n\}_{n\geq 1}$ um sistema fundamental decrescente de vizinhanças em ξ_o e suponhamos que a proposição 1) não esteja verificada. Existem então, para todo $n \in \mathbb{N}$, elementos $\xi_n \in V_n$ e $s_n > 0$, com $s_n \to 0$, tal que $\|T(s_n,\xi_n)\| \geq n$. Pelo Teorema de Banach-Steinhauss conluimos que $\{T(s_n,\xi_n)x : n \geq 1\}$ não é limitado para algum $x \in E$, $\|x\| = 1$, e isto contradiz a hipótese pois $\xi_n \to \xi_o$ e $s_n \to 0$, quando $n \to \infty$.

2) Esta propriedade segue de 1) da forma habitual, utilizando as propriedades dos semigrupos.

3) Seja $t \geq 0$, $x \in E$ e $T(t,.)x : X \longrightarrow E$, $\xi \longrightarrow T(t,\xi)x$. Fixemos $\xi_o \in X$. Por 1), 2) e pelo Teorema de Hille-Yosida, existem $V(\xi_o)$ e $\omega \in \mathbb{R}$ tais que se $\lambda \in \mathbb{C}$ e $Re(\lambda) > \omega$, então $\lambda \in \rho(A(\xi))$, para todo $\xi \in V(\xi_o)$. Aplicando o lema I.3.11.i para cada um destes λ, resulta que a aplicação $R(\lambda) : V(\xi_o) \longrightarrow B(E)$, $\xi \longrightarrow R(\lambda,A(\xi))$ é contínua na topologia uniforme de $B(E)$ e portanto contínua na topologia forte; do Teorema de Trotter-Kato segue que $T(t,\xi_n)x \longrightarrow T(t,\xi_o)x$, $n \to \infty$, para qualquer sequência $(\xi_n) \subseteq X$ com $\xi_n \to \xi_o$. Como X verifica o primeiro axioma da enumerabilidade, segue que $T(t,.)x$ é contínua em ξ_o. Se $t_1 > 0$, queremos mostrar que esta continuidade é uniforme em t, para $t \in [0,t_1]$, quer dizer, para todo $\varepsilon > 0$ existe $V(\xi_o)$, vizinhança de ξ_o, tal que

$$\|T(t,\xi)x - T(t,\xi_o)x\| \leq \varepsilon, \quad \forall \xi \in V(\xi_o), \quad \forall t \in [0,t_1].$$

Utilizando a compacidade de $[0,t_1]$ e a continuidade do limite, $\lim_{s \to 0^+} T(s,\xi)x = x$, o argumento é o habitual.

Pela continuidade uniforme em t, segue a continuidade da aplicação $T : [0,t_1] \times X \longrightarrow B(E)$ na topologia forte de $B(E)$.

O semigrupo $T(t,\xi)$ será chamado diferenciável localmente uniformemente em $\xi \in X$, se é diferenciável, isto é, para cada $x \in E$, a aplicação $t \longrightarrow T(t,\xi)x$ tem derivada e além disso, para cada $\xi_o \in X$, o limite $\lim_{h \to 0} \frac{T(t+h,\xi)x - T(t,\xi)x}{h}$ é uniforme em $\xi \in V(\xi_o)$, vizinhança de ξ_o.

3.8 PROPOSIÇÃO: Seja $A : X \longrightarrow C(E)$ uma aplicação δ-contínua e $A(\xi)$, $\xi \in X$, o gerador infinitesimal do semigrupo $\{T(t,\xi) : t \geq 0\}$ de classe C_o. Se (X,τ) satisfaz o 1º axioma da enumerabilidade e se:

1) $\lim_{s \to 0^+} T(s,\xi)x = x$, localmente uniformemente em $\xi \in X$,

2) $\{T(t,\xi) : t \geq 0\}$ é um semigrupo diferenciável para $t > t_o$, localmente uniformemente em $\xi \in X$,

então, para todo $\xi_o \in X$, existem uma vizinhança V de ξ_o e $t_1 > 0$ tal que a aplicação $T(t_1,.) : V \longrightarrow B(E)$ é contínua na topologia uniforme de $B(E)$.

DEMONSTRAÇÃO: (a) Como $\{T(t,\xi) : t \geq 0\}$ é diferenciável para

$t > t_o$, o conjunto resolvente $\rho(A(\xi))$ de $A(\xi)$ contém uma região $\Sigma_\xi = \{\lambda : Re(\lambda) \geq a(\xi) - b(\xi)\ \ln|Im(\lambda)|\}$ com

$$a(\xi) = \frac{\ln((1+\varepsilon)M_1(\xi))}{\bar{t}} \quad \text{e} \quad b(\xi) = \frac{1}{\bar{t}}$$

onde $\bar{t} > t_o$ e $\varepsilon > 0$ são arbitrários e $M_1(\xi) \geq \|A(\xi)\, T(\bar{t},\xi)\|$ ([28], teorema 4.7).

É imediato que $b(\xi)$ é independente de ξ. Mostraremos agora que para cada $\xi_o \in X$, existe uma vizinhança V de ξ_o tal que $a(\xi)$ pode ser escolhido independentemente de $\xi \in V$.

O argumento é o seguinte: Por ser $T(t,\xi)$ diferenciável, sabemos que $A(\xi)\, T(t,\xi) \in \mathcal{B}(E)$, $t > t_o$, e que

$$A(\xi)\, T(t,\xi)x = \frac{d}{dt}\, T(t,\xi)x, \quad \forall x \in E, \quad \forall t > t_o.$$

Mas a aplicação $T(t,\xi)x$ é, pelo lema 3.7.3, contínua em ξ assim como diferenciável em t, uniformemente numa vizinhança de ξ_o.

Portanto, $A(.)\, T(\bar{t},.)x : X \longrightarrow E$ é contínua em ξ_o, para todo $x \in E$. Da mesma forma como no lema 3.7.1 obtemos, pelo Teorema de Banach-Steinhauss que a aplicação $A(.)T(\bar{t},.): X \longrightarrow \mathcal{B}(E)$ é localmente limitada, quer dizer, existe uma vizinhança $V(\xi_o)$ de ξ_o e uma constante $M_1 \geq 0$ tal que $\|A(\xi)\ T(\bar{t},\xi)\| \leq M_1$, para todo $\xi \in V(\xi_o)$ e $\bar{t} > t_o$, ($\bar{t}$ fixado). Logo, temos a inclusão

$$\Sigma = \{\lambda : Re(\lambda) \geq a - b.\ln|Im(\lambda)|\} \subseteq \rho(A(\xi)), \quad \forall \xi \in V(\xi_o)$$

com $a = \dfrac{\ln((1+\varepsilon)M_1)}{\bar{t}}$ e $b = \dfrac{1}{\bar{t}}$.

(b) Pelo lema 3.7.2 podemos supor que

$$\|T(t,\xi)\| \leq M\, e^{\omega t}, \quad \forall \xi \in V(\xi_o).$$

De (a) e do Teorema de Hille-Yosida, segue que

$$\Sigma' = \Sigma \cup \{\lambda : Re(\lambda) > \omega\} \subseteq \rho(A(\xi)), \quad \forall \xi \in V(\xi_o)$$

e, para t_1 suficientemente grande ([28], teorema 4.7),

$$T(t_1,\xi)x = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t}\ R(\lambda,A(\xi))x\, d\lambda, \quad \forall x \in E \ \text{ e } \ \xi \in V(\xi_o)$$

onde Γ é uma trajetória como a indicada na figura 4 e a integral converge uniformemente em x, com $\|x\| \leq 1$, e $\xi \in V(\xi_o)$, (da demonstração do teorema 4.7 em [28]).

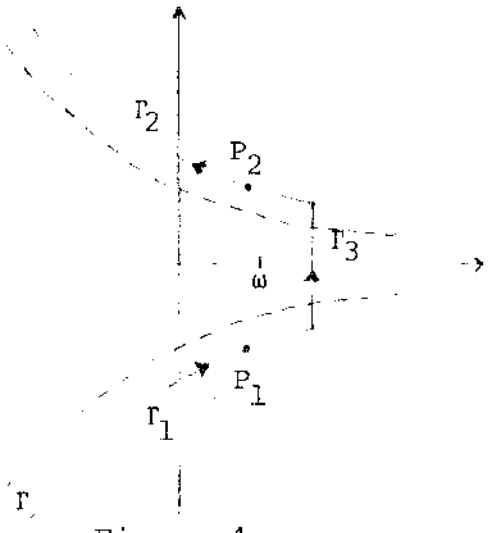

Figura 4

Seja $V = V(\xi_o)$, $\bar{\xi} \in V$ e $\varepsilon' > 0$.

Podemos decompor a trajetória Γ em 3 pedaços Γ_1, Γ_2 e Γ_3 (Γ_3 de P_1 a P_2) de tal modo que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_i} \| e^{\lambda t_1} R(\lambda, A(\xi)) d\lambda \| \leq \frac{\varepsilon'}{6}, \quad \forall \xi \in V, \quad i = 1,2.$$

Seja $k = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_3} |e^{\lambda t_1} d\lambda|$. Como Γ_3 é compacta, existe uma vizinhança $V(\bar{\xi}) \subseteq V$ de $\bar{\xi}$ tal que

$$\| R(\lambda, A(\xi)) - R(\lambda, A(\bar{\xi})) \| \leq \frac{\varepsilon'}{3k}, \quad \forall \lambda \in \Gamma_3, \quad \forall \xi \in V(\bar{\xi}) .$$

Portanto,

$$\| T(t_1, \xi)x - T(t_1, \bar{\xi})x \| = \frac{1}{2\pi} \| \int_{\Gamma} e^{\lambda t_1} (R(\lambda, A(\xi)) - R(\lambda, A(\bar{\xi})))x \, d\lambda \|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{2} \| \int_{\Gamma_i} e^{\lambda t_1} (R(\lambda, A(\xi) - R(\lambda, A(\bar{\xi})))x \, d\lambda \|$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_3} |e^{\lambda t} d\lambda| \; \|x\| . \frac{\varepsilon'}{3k} \leq \varepsilon' \; \|x\| ,$$

o que mostra a continuidade de $T(t_1, .)$.

Observemos finalmente que é possível obter resultados um pouco melhores quando os espaços $E_u(\xi)$ têm dimensão finita. Em particular, não precisamos supor, neste caso, que as projeções são de variação limitada.

3.9 TEOREMA: Seja $A : X \longrightarrow \mathcal{C}(E)$ uma aplicação δ-contínua, $B : X \longrightarrow \mathcal{B}(U,E)$ uma aplicação contínua na topologia uniforme de $\mathcal{B}(U,E)$ e $\xi_o \in X$ tal que $A(\xi_o)$ satisfaz a condição D.S.A. Se $E_u(\xi_o)$ é de dimensão finita e se o sistema (3), para $\xi = \xi_o$, é exatamente controlável, então existe uma vizinhança $V(\xi_o)$ de ξ_o tal que o sistema (3) é também uniformemente estabilizável para todo $\xi \in V(\xi_o)$.

DEMONSTRAÇÃO: Já sabemos que existe uma vizinhança V de ξ_o tal que $A(\xi)$ verifica a condição D.S.A. para todo $\xi \in V$.

Como $E_u(\xi) = \mathrm{Im}(P(\xi))$ e $P(\xi)$ é uma projeção contínua, então existe uma vizinhança $V_1 \subseteq V$ de ξ_o tal que $\dim E_u(\xi) = \dim E_u(\xi_o)$, para todo $\xi \subset V_1$, ([23]).

Por outro lado, sendo $A_u(\xi) = \tilde{A}(\xi)\big|_{E_u(\xi)}$, para todo $\xi \in V$, com $\tilde{A}(\xi)$ definido na demonstração do lema 2.1.2, é simples de verificar que os sistemas $\dot{x}_u(t) = A_u(\xi)\, x_u(t) + P(\xi)\, B(\xi)\, u(t)$, para $\xi \in V_1$, satisfazem todas as condições do teorema III.1.11, e portanto, existe uma vizinhança $V_2 \subseteq V_1$ de ξ_o, tal que o dito sistema é exatamente controlável para todo $\xi \in V_2$. A tese segue agora do fato bem conhecido, ([38]) que todo sistema de controle com espaço de estados de dimensão finita e controlável é estabilizável.

CAPÍTULO V

SISTEMAS LINEARES AUTO-ACESSÍVEIS

§1. INTRODUÇÃO

O conceito de estado auto-acessível foi definido por A. Baccioti ([1]) e mais tarde retomado por Barbanti ([5]). Um estado será dito auto-acessível se existir um controle admissível cuja trajetória associada se inicia e termina neste estado. Por exemplo, os estados de um sistema exatamente controlável são todos auto-acessíveis. Neste capítulo, estudaremos propriedades gerais dos estados e sistemas auto-acessíveis no caso dos sistemas lineares num espaço de Banach arbitrário E e generalizaremos a estes espaços um resultado de H. Kabayashi - E. Shimemura ([20]) formulado no contexto de espaços de dimensão finita.

§2. ESTADOS AUTO-ACESSÍVEIS

Como no capítulo I vamos considerar um sistema linear

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t), \quad t \geq 0, \tag{1}$$

onde E e U são espaços de Banach e $x(t) \in E$, $u(t) \in U$; $B \in \mathcal{B}(U,E)$ e $A : D(A) \subseteq E \longrightarrow E$ é o gerador infinitesimal do semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ de classe C_o.

Os controles admissíveis são as funções $u(.) \in \mathcal{L}^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}^{+},U)$ e neste caso, como já observamos anteriormente, a solução fraca

de (1) com condição inicial $x(0) = x_o$, é dada por

$$(2) \qquad \phi(t,x_o,u) = T(t)x_o + \int_0^t T(t-s)\,B\,u(s)\,ds \ .$$

A aplicação $t \longrightarrow \phi(t,x_o,u)$ é a trajetória com estado inicial x_o correspondente ao controle $u(.)$. Como no capítulo I, também denotamos por G_t a aplicação

$$(3) \qquad G_t : L^\infty(0,t;U) \longrightarrow E, \quad u \longrightarrow \phi(t,x_o,u) - T(t)x_o$$

2.1 DEFINIÇÃO: 1) Um estado $x_o \in E$ diz-se auto-acessível em $[0,\bar{t}]$ se $x_o - T(\bar{t})x_o \in Im(G_{\bar{t}})$ e denotamos por $E_a(\bar{t})$ o conjunto dos estados auto-acessíveis em $[0,\bar{t}]$.

2) O sistema (1) chama-se auto-acessível em $[0,\bar{t}]$ se $E \subseteq E_a(\bar{t})$.

2.2 OBSERVAÇÕES: i) É imediato que $E_a(\bar{t}) = (I-T(\bar{t}))^{-1}(Im(G_{\bar{t}}))$, este conjunto sendo um subespaço vetorial de E.

ii) Se o sistema (1) é exatamente controlável em $[0,\bar{t}]$, então $Im(G_{\bar{t}}) = E$ e portanto $E_a(\bar{t}) = E$, com o qual (1) é auto-acessível.

iii) Da definição anterior segue que um sistema é auto-acessível em $[0,\bar{t}]$ se e somente se $Im(I-T(\bar{t})) \subseteq Im(G_{\bar{t}})$.

2.3 TEOREMA: Se $T(t)B$ é compacto, para todo $t \in (0,\bar{t}]$, e se $Im(I-T(\bar{t}))$ contém um subespaço vetorial fechado de dimensão infi

nita, então o sistema (1) não pode ser auto-acessível em $[0,\bar{t}]$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $F \subseteq \mathrm{Im}(I-T(\bar{t}))$ um subespaço fechado de dimensão infinita. Então $G_{\bar{t}}^{-1}(F)$ é fechado em $L^{\infty}(0,\bar{t};U)$ e $G_{\bar{t}}\Big|_{G_{\bar{t}}^{-1}(F)}$ é uma aplicação linear compacta (teorema II.3.4). Portanto, esta aplicação não pode ser sobrejetiva, logo $\mathrm{Im}(I-T(\bar{t})) \supsetneq \mathrm{Im}(G_{\bar{t}})$.

2.4 COROLÁRIO: Se $T(t)B$, $t \in (0,\bar{t}]$, e $T(\bar{t})$ são operadores lineares compactos, então o sistema (1) não é auto- acessível quando E tem dimensão infinita.

DEMONSTRAÇÃO: Se $T(\bar{t})$ é compacto, então $I-T(\bar{t})$ é um operador linear de tipo Fredholm, portanto $\mathrm{Im}(I-T(\bar{t}))$ é um subespaço fechado e de codimensão finita.

2.5 COROLÁRIO: Se $T(t)$, $t > 0$, é compacto e se E tem dimensão infinita, então o sistema (1) não pode ser auto-acessível.

DEMONSTRAÇÃO: O resultado é consequência imediata de 2.4.

Note-se agora que, ao contrário do que ocorre com o conceito de controlabilidade exata, B pode ser compacto sem que o sistema deixe de ser auto-acessível. Outros resultados desta natureza decorrem imediatamente do capítulo I, utilizando a seguinte proposição:

2.6 PROPOSIÇÃO: Se $1 \in \rho(T(\bar{t}))$, então o sistema (1) é auto-

acessível em $[0,\bar{t}]$ se e somente se o sistema

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + (I-T(\bar{t}))^{-1} B\,u(t), \quad t \geq 0, \tag{4}$$

é exatamente controlável em $[0,\bar{t}]$.

DEMONSTRAÇÃO: Este resultado segue imediatamente do fato de que $(I-T(\bar{t}))^{-1} \in B(E)$, pois então,

$$\begin{aligned} x_o - T(\bar{t})x_o = G_{\bar{t}}(u) &\Leftrightarrow x_o = (I-T(\bar{t}))^{-1} G_{\bar{t}}(u) \\ &\Leftrightarrow x_o = (I-T(\bar{t}))^{-1} \int_0^t T(\bar{t}-s)\,B\,u(s)\,ds \\ &= \int_0^{\bar{t}} T(\bar{t}-s)\,(I-T(\bar{t}))^{-1} B\,u(s)\,ds \ . \end{aligned}$$

Sabemos que a condição $1 \in \rho(T(\bar{t}))$ ocorre, por exemplo, quando $\|T(\bar{t})\| < 1$.

2.7 LEMA: Sejam $t, t' \geq 0$, então

1) $E_a(t) \cap E_a(t') \subseteq E_a(t+t')$

2) $E_a(t) \subseteq E_a(nt)$, para todo $n = 1,2,\ldots$

DEMONSTRAÇÃO: A parte 2) é consequência imediata de 1). Para verificar 1), suponhamos que $x \in E_a(t) \cap E_a(t')$; então

$$x = T(t)x + \int_0^t T(t-s)\,B\,u_1(s)ds = T(t')x' + \int_0^{t'} T(t'-s)\,B\,u_2(s)ds \ .$$

Definamos a função $u(.)$ por:

$$u(s) = \begin{cases} u_1(s) & s \in [0,t] \\ u_2(s-t) & s \in (t,\ t+t']. \end{cases}$$

É claro que $u(.) \in \mathcal{L}^\infty(0,t+t';U)$, trata-se, portanto, de um controle admissível e

$$T(t+t')x + \int_0^{t+t'} T(t+t'-s)\,B\,u(s)ds =$$

$$= T(t')\ [T(t)x + \int_0^t T(t-s)\,B\,u_1(s)ds] + \int_t^{t+t'} T(t+t'-s)\,B\,u(s)\,ds$$

$$= T(t')x + \int_0^{t'} T(t'-s)\,B\,u_2(s)ds = x.$$

Portanto $x \in E_a(t+t')$.

2.8 COROLÁRIO: Se $T(t)$ é um semigrupo uniformemente estável, se $T(t)B$, $t > 0$, é compacto e se E tem dimensão infinita, então o sistema (1) não é auto-acessível em $[0,\bar{t}]$, qualquer que seja $\bar{t} > 0$.

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos que (1) seja auto-acessível em $[0,\bar{t}]$, algum $\bar{t} > 0$.

Como $E_a(\bar{t}) \subseteq E_a(n\bar{t})$, $n \geq 1$, o sistema (1) deve ser auto-acessível em $[0, n\bar{t}]$. Por outro lado, como existe n tal que $\|T(n\bar{t})\| < 1$, tomando $t_1 = n\bar{t}$, segue da proposição 2.6 que o sistema $\dot{x}(t) = A\,x(t) + (I-T(t_1))^{-1}\,B\,u(t)$ é exatamente controlável em $[0,t_1]$. Mas isto é impossível porque $T(t)(I-T(t_1))^{-1}B$

é compacto (corolário I.3.5).

Como existem sistemas com B compacto que são aproximadamente controláveis e uniformemente estáveis, deduzimos deste corolário que existem sistemas aproximadamente controláveis e que não são auto-acessíveis.

Outro resultado deste tipo é o seguinte:

2.9 COROLÁRIO: Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo diferenciável para $t > t_o \geq 0$ e uniformemente estável. Se o sistema (1) é auto-acessível em $[0,\bar{t}]$, para algum $\bar{t} > 0$, então A é um operador linear limitado.

DEMONSTRAÇÃO: Como no corolário 2.8, podemos supor que $||T(\bar{t})|| < 1$, logo o sistema $\dot{x}(t) = A\,x(t) + (I-T(\bar{t}))^{-1} B\,u(t)$ deve ser exatamente controlável em $[0,\bar{t}]$. Do teorema II.3.7 segue então que A é limitado.

2.10 DEFINIÇÃO: 1) Um estado $x_o \in E$ diz-se essencialmente auto-acessível em $[0,\bar{t}]$ se $(I-T(\bar{t}))x_o \in \overline{\text{Im } G_{\bar{t}}}$.
2) O sistema (1) denomina-se essencialmente auto-acessível em $[0,\bar{t}]$ se todo $x \in E$ é um estado essencialmente auto-acessível em $[0,\bar{t}]$.

2.11 OBSERVAÇÃO: Denotaremos por $\tilde{E}_a(\bar{t}) = (I-T(\bar{t}))^{-1}\ (\overline{\text{Im } G_{\bar{t}}})$ o espaço de estados essencialmente auto-acessíveis em $[0,\bar{t}]$. Como

$\tilde{E}_a(\bar{t})$ é um subespaço vetorial fechado de E, sempre vale a inclusão $\overline{E_a(\bar{t})} \subseteq \tilde{E}_a(\bar{t})$. Uma condição para que valha a igualdade é a seguinte:

2.12 PROPOSIÇÃO: Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo uniformemente contínuo para $t > a \geq 0$ e suponhamos que $\sigma(A)$ não contém pontos do eixo imaginário. Então $\overline{E_a(\bar{t})} = \tilde{E}_a(\bar{t})$, qualquer que seja $\bar{t} > 0$.

DEMONSTRAÇÃO: De Davies [10], teorema 2.19, temos que $\sigma(T(\bar{t})) \subseteq \subseteq \{0\} \cup \exp(\bar{t}\,\sigma(A))$, logo $1 \in \rho(T(\bar{t}))$ e $(I-T(\bar{t}))^{-1} \in \mathcal{B}(E)$, donde

$$(I-T(\bar{t}))^{-1}\ \overline{(\mathrm{Im}\ (G_{\bar{t}}))} \subseteq \overline{(I-T(\bar{t}))^{-1}\ (\mathrm{Im}\ (G_{\bar{t}}))}\ .$$

Em particular, se denotarmos por $\sigma_p(A)$ o espectro pontal de A, então:

2.13 PROPOSIÇÃO: Se $T(t_o)$ é compacto, para algum $t_o > 0$, e se $\sigma_p(A)$ não contém pontos do eixo imaginário, então $\overline{E_a(t)} = \tilde{E}_a(t)$, para todo $t > 0$.

Quanto à relação existente entre sistemas essencialmente auto-acessíveis e aproximadamente controláveis, é claro que todo sistema aproximadamente controlável é essencialmente auto-acessível. A proposição recíproca é falsa em geral, mas temos o seguinte resultado:

2.14 TEOREMA: Se o sistema de controle (1) é fracamente estabilizável e essencialmente auto-acessível em $[0,t_o]$, para algum $t_o > 0$, então ele é aproximadamente controlável em $[0,t_o]$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $F \in B(E,U)$ tal que o semigrupo $S(t)$, gerado por $A+BF$, é fracamente estável.

a) Indiquemos por $Z(t_o,S)$ e $E_a(t_o,S)$ os espaços de controlabilidade e auto-acessibilidade respectivamente no intervalo $[0,t_o]$, do sistema:

$$\dot{x}(t) = (A+BF)\,x(t) + B\,u(t), \tag{5}$$

então

i) $\overline{Z(t_o)} = \overline{Z(t_o,S)}$,

ii) $\tilde{E}_a(t_o) = \tilde{E}_a(t_o,S)$.

A afirmação i) é um resultado conhecido que segue de calcular $Z(t_o)^{\perp}$ e $Z(t_o,S)^{\perp}$, utilizando a proposição I.1.4.i e a fórmula

$$S(t_o)x = T(t_o)x + \int_0^{t_o} T(t_o-s)\,B\,F\,S(s)x\,ds\,,$$

para todo $x \in E$. Agora ii) segue facilmente pois:

$$\begin{aligned} x \in \tilde{E}_a(t_o,S) &\Leftrightarrow x-S(t_o)x \in \overline{Z(t_o,S)} \\ &\Leftrightarrow x-S(t_o)x \in \overline{Z(t_o)} \\ &\Leftrightarrow x-T(t_o)x-\int_0^{t_o} T(t_o-s)\,B\,F\,S(s)x\,ds \in \overline{Z(t_o)} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x - T(t_o)x \in \overline{Z(t_o)}$$

$$\Leftrightarrow x \in \tilde{E}_a(t_o) \ .$$

Usamos o fato de que a função $s \longrightarrow F\,S(s)$ é um controle admissível, e portanto $\int_0^{t_o} T(t_o-s)\,B\,F\,S(s)x\,ds \in Z(t_o)$.

b) O sistema (5) é aproximadamente controlável em $[0,t_o]$, i.e., $Z(t_o,S)^{\perp} = \{0\}$.

De fato, seja $x \in E$. Como $E = \tilde{E}_a(t_o) = \tilde{E}_a(t_o,S)$, temos por definição, $x - S(t_o)x \in \overline{Z(t_o,S)}$. Substituindo x por $S(t_o)x$, vem $S(t_o)x - S(2\,t_o)x \in \overline{Z(t_o,S)}$, donde $x - S(2\,t_o)x \in \overline{Z(t_o,S)}$ e, continuando este processo indutivamente, é possível concluir que se $x - S(n\,t_o)x \in \overline{Z(t_o,S)}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Seja $x' \in E'$, $x' \in Z(t_o,S)^{\perp}$. Pela definição I.2.3, $0 = \langle x - S(n\,t_o)x, x' \rangle = \langle x, x' \rangle - \langle S(n\,t_o)x, x' \rangle \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} \langle x, x' \rangle$, logo $\langle x, x' \rangle = 0$, portanto $Z(t_o,S)^{\perp} = \{0\}$.

c) Finalmente, como $\overline{Z(t_o)} = \overline{Z(t_o,S)} = E$, seque que o sistema (1) é aproximadamente controlável em $[0,t_o]$.

2.15 COROLÁRIO: Se E é um espaço de Hilbert, $T(t)$ é um semigrupo contrativo e (1) é um sistema essencialmente auto-acessível em $[0,t_1]$ e aproximadamente controlável em tempo finito, então (1) é aproximadamente controlável em $[0,t_1]$.

DEMONSTRAÇÃO: É imediato, em consequência de [6], teorema 3.4.1, que (1) é fracamente estabilizável. O resultado segue agora do teorema anterior.

Condições para que um sistema seja essencialmente auto-acessível, podem ser formuladas de maneira análoga àquelas que garantem a controlabilidade aproximada, tais como a condição da proposição I.1.4 e outras em [14], [35] e [36].

2.16 LEMA: Sejam E e F espaços de Banach, $T : E \to F$ um operador linear limitado, W um subespaço vetorial de F e $V = T^{-1}(W)$, então:

i) $T'(W^{\perp}) \subseteq V^{\perp}$,

ii) Se W é fechado, $V^{\perp} \subseteq \overline{T'(W^{\perp})}^{\sigma(E',E)}$.

2.17 PROPOSIÇÃO: Com as notações anteriores, temos:

$$(I-T(t))'(\mathrm{Im}(G_t))^{\perp} \subseteq \tilde{E}_a(t)^{\perp} \subseteq \overline{(I-T(t))'\ (\mathrm{Im}(G_t))^{\perp}}^{\sigma(E',E)} .$$

DEMONSTRAÇÃO: Por definição $\tilde{E}_a(t) = (I-T(t))^{-1}(\overline{\mathrm{Im}(G_t)})$, logo o resultado segue do lema anterior.

2.18 COROLÁRIO: O sistema (1) é essencialmente auto-acessível em $[0,\bar{t}]$ se e somente se:

$$B'T(t)'x' = 0, \quad 0 \leq t \leq \bar{t}, \quad x' \in E' \Rightarrow T(\bar{t})x' = x' .$$

DEMONSTRAÇÃO: Utilizemos as proposições I.1.4 e 2.17. Então,

i) Se $\tilde{E}_a(\bar{t}) = E$, segue que $\tilde{E}_a(\bar{t})^{\perp} = \{0\}$, ou seja

$$(I-T(\bar{t}))' \ (Im(G_{\bar{t}}))^{\perp} = \{0\}$$

e portanto, a condição $B'T(t)'x' = 0, \quad 0 \leq t \leq \bar{t} \Rightarrow x' \in (Im(G_{\bar{t}}))^{\perp}$, acarreta que $T(\bar{t})x' = x'$.

ii) Reciprocamente, supondo satisfeita a condição acima, vem $(I-T(\bar{t}))'(Im(G_{\bar{t}}))^{\perp} = \{0\}$ e portanto $\tilde{E}_a(\bar{t})^{\perp} = \{0\}$.

Com relação a um semigrupo $T(t)$, um vetor $x \in E$ chama-se de classe C^{∞} (resp. analítico) quando a função $t \longrightarrow T(t)x$ é de classe C^{∞} (resp. analítica) para $t > 0$. Utilizaremos as seguintes notações introduzidas por Triggiani, ([36]).

$$D_{\infty}(A) = \cap\{D(A^n) : n \geq 1\}$$

$$U_{\infty} = \{u \in U : Bu \in D_{\infty}(A)\}$$

$$\tilde{U}_{\infty} = \{u \in U : Bu \text{ é um vetor de classe } C^{\infty}\}$$

$$U_a = \{u \in U : Bu \text{ é um vetor analítico}\}.$$

2.19 TEOREMA: Nas condições anteriores,

1) Se para algum $\bar{t} > 0$, $Im(A) \subseteq \overline{Sp}\{A^n T(\bar{t}) B \ \tilde{U}_{\infty} : n \geq 0\}$, então o sistema (1) é essencialmente auto-acessível em $[0,t_o]$, qualquer que seja $t_o \geq \bar{t}$.

2) Se $T(t)$ é um semigrupo diferenciável e se, para algum $\bar{t} > 0$,

$\mathrm{Im}(A) \subseteq \overline{Sp}\ \{A^n\ T(\bar{t})BU : n \geq 0\}$, então o sistema (1) é essencialmente auto-acessível em $[0,t_o]$, qualquer que seja $t_o \geq \bar{t}$.

3) Se BU_a é denso em BU e se (1) é essencialmente auto-acessível em $[0,t_o]$, para todo $t_o > 0$, então

$$\mathrm{Im}(A) \subseteq \overline{Sp}\ \{A^n\ T(\bar{t})\ B\ U_a : n \geq 0\}, \quad \forall\ t > 0.$$

4) Se $T(t)$ é um semigrupo holomorfo e o sistema (1) é essencialmente auto-acessível em $[0,t_o]$, para todo $t_o > 0$, então

$$\mathrm{Im}(A) \subseteq \overline{Sp}\ \{A^n\ T(\bar{t})\ B\ U : n \geq 0\}, \quad \forall\ \bar{t} > 0.$$

DEMONSTRAÇÃO: 1) Seja $t_o \geq \bar{t}$ e $x' \in E'$ tal que $B'T(t)'x' = 0$, $0 \leq t \leq t_o$. Então $\langle x', T(t)Bu \rangle = 0$ para todo $u \in \tilde{U}_\infty$ e $0 \leq t \leq t_o$. Derivando em $t > 0$ e utilizando as propricdades de semigrupos, resulta que $\langle x', A^n T(t)\,Bu \rangle = 0$, $0 < t \leq t_o$, $n \in \mathbb{N}$, e fazendo $t = \bar{t}$, vem em particular que

$$x' \in Sp\ \{A^n\ T(\bar{t})\ B\ \tilde{U}_\infty : n \geq 0\}^{\perp}$$

ou seja, que $s' \in \mathrm{Im}(A)^{\perp}$.

Como $T(t)x - x = A \int_0^t T(s)x\,ds$, para todo $x \in E$ e $t \geq 0$, concluimos que $T(t_o)'x' = x'$ e a tese decorre então do corolário 2.18.

2) Se $T(t)$ é diferenciável, então todo vetor de E é diferenciável, logo $\tilde{U}_\infty = U$.

3) Basta mostrar que $Sp\ \{A^n T(\bar{t})\, B\, U_a : n \geq 0\}^{\perp} \subseteq Im(A)^{\perp}$.

Seja $x' \in Sp\ \{A^n T(\bar{t})\, B\, U_a : n \geq 0\}$ e $u \in U_a$. Como Bu é um vetor analítico, podemos utilizar o desenvolvimento em série de Taylor no ponto $t = \bar{t}$, obtendo assim

$$T(t)\, B\, u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-\bar{t})^k}{k!} A^k\, T(\bar{t})\, B\, u \ ,$$

para todo $t \in (\bar{t}-\varepsilon,\ \bar{t}+\varepsilon)$, algum $\varepsilon > 0$. Portanto, $\langle x', T(t)Bu\rangle = 0$, para todo $t \in (\bar{t}-\varepsilon,\ \bar{t}+\varepsilon)$ e consequentemente, por se tratar de uma função analítica, $\langle x',\ T(t)\, B\, u\rangle = 0$, para todo $t > 0$.

Se $u \in U$, então $B\, u \in \overline{B\, U_a}$ e, da análise anterior bem como da continuidade forte de $T(t)$, resulta que $\langle x', T(t)Bu\rangle = 0$, para todo $t > 0$ (e por continuidade, para todo $t \geq 0$). Logo $B'\, T(t)'x' = 0$, para todo $t \geq 0$ e como (1) é essencialmente auto-acessível em $[0,t_o]$, qualquer que seja $t_o > 0$, segue do corolário 2.18 que $T(t)'x' = x'$ para todo $t \geq 0$.

Seja $y \in Im(A)$ e $y = Ax$, $x \in D(A)$, então

$$\langle x', y\rangle = \langle x', Ax\rangle = \langle x',\ \lim_{t\to o^+} \frac{T(t)x-x}{t}\rangle$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \langle \frac{T(t)'x'-x'}{t}\ , x\rangle = 0 \ ,$$

ficando assim demonstrado que $x' \in Im(A)^{\perp}$.

4) Se $T(t)$ é holomorfo, então cada vetor de E é analítico, i. e., $U_a = U$ e o resultado segue de 3).

2.20 OBSERVAÇÕES: 1) Se substituimos no item 1) do teorema anterior, $\tilde{U}_\infty$ por U_∞, poderemos também incluir o valor $\bar{t} = 0$.

2) Se $T(t)$ é um semigrupo holomorfo e se para algum $\bar{t} > 0$, $Im(A) \subseteq \overline{Sp}\ \{A^n\ T(\bar{t})\ B\ U : n \geq 0\}$, então o sistema (1) é essencialmente auto-acessível em $[0,t_o]$, qualquer que seja $t_o > 0$.

Com efeito, isto segue do item 2 do teorema anterior, pois todo semigrupo holomorfo é diferenciável, e de observar que neste caso, o espaço $\overline{Sp}\ \{A^n\ T(t)\ B\ U : n \geq 0\}$, $t > 0$, é independente de t.

Lembramos que o sistema (1) se chama de posto finito quando a dimensão de U é finito. Neste caso o sistema pode ser escrito sob a forma

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + \sum_{i=1}^{m} b_i\,u_i(t), \qquad b_i \in E, \tag{6}$$

e temos o seguinte corolário.

2.21 COROLÁRIO: Suponhamos que $b_i \in D_\infty(A)$, $i = 1,2,\ldots,m$. Nestas condições:

1) Se $Im(A) \subseteq \overline{Sp}\ \{A^n\ b_i : i = 1,2,\ldots,m,\ n \geq 0\}$, então o sistema (6) é essencialmente auto-acessível em $[0,t_o]$, para todo $t_o > 0$.

2) Se os b_i, $i = 1,2,\ldots,m$, são vetores analíticos e se o sistema (6) é essencialmente auto-acessível em $[0,t_o]$, para todo $t_o > 0$, então $Im(A) \subseteq \overline{Sp}\ \{A^n\ T(\bar{t})\ b_i : i = 1,2,\ldots,m,\ n \geq 0\}$,

qualquer que seja $\bar{t} > 0$.

Voltando às relações existentes entre sistemas essencialmente auto-acessíveis e aproximadamente controláveis, os seguintes resultados podem ser estabelecidos.

2.22 PROPOSIÇÃO: Se o sistema (1) é essencialmente auto-acessível em $[0,\bar{t}]$, para todo $\bar{t} > 0$, e se $\overline{Im(A)} = E$, então (1) é aproximadamente controlável em $[0,\bar{t}]$.

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $\bar{t} > 0$ e $x' \in E'$ e suponhamos que $B'T(t)'x' = 0$, $0 \leq t \leq \bar{t}$. Pela proposição I.14, é suficiente mostrar que $x' = 0$.

Mas, a condição $B'T(t)'x' = 0$, $0 \leq t \leq s \leq t_o$, implica que $T(s)'x' = x'$, para todo $0 \leq s \leq t_o$, logo

$$< x', Ax > = < s', \lim_{s\to 0^+} \frac{T(s)x-x}{s} > = \lim_{s\to 0^+} < \frac{T(s)'x'-x'}{s}, x > = 0,$$

para todo $x \in D(A)$. Como $\overline{Im(A)} = E$, segue que $x' = 0$.

2.23 PROPOSIÇÃO: Se o sistema (1) é essencialmente auto-acessível em $[0,t_o]$, $t_o > 0$, e se $\sigma(A)$ não contém pontos do eixo imaginário, então (1) é aproximadamente controlável em $[0,t_o]$, desde que uma qualquer das seguintes condições esteja verificada:

1) O espaço E é reflexivo,

2) O semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ é uniformemente contínuo para $t \geq a \geq 0$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $x' \in E'$ com $B' T(t')x' = 0$, $0 \leq t \leq t_o$.

Então $T(t_o)'x' = x'$ e, se $x' \neq 0$, 1 é um valor próprio de $T(t_o)'$. Mostremos que isto não é possível.

Com efeito, na primeira alternativa, $T(t)'$ é também um semigrupo de classe C_o, com gerador infinitesimal A'. Logo $1 \in \{0\} \cup \exp(t_o \sigma_p(A'))$. Como $\sigma_p(A') \subseteq \sigma(A') = \sigma(A)$, e $\sigma(A)$ não contém pontos do eixo imaginário, a afirmação anterior é absurda.

Na segunda alternativa, $\sigma(T(t_o)) \subseteq \{0\} \cup \exp(t_o \sigma(A))$ e como $1 \in \sigma_p(T(t_o)') \subseteq \sigma(T(t_o)') = \sigma(T(t_o))$, também chegamos a um absurdo.

Portanto, $x' = 0$ e (1) é aproximadamente controlável em $[0,t_o]$.

Analogamente ao que acontece com a controlabilidade aproximada, ([7], [14]), é possível reduzir o estudo da auto-acessibilidade de um sistema linear arbitrário ao de um sistema definido por um operador linear limitado. Mais precisamente, seja $T(t)$ um semigrupo de tipo ω_o e $\tilde{\rho}(A) = \{\lambda : Re(\lambda) > \omega_o \text{ e } \lambda \neq 0\}$; já sabemos que $\tilde{\rho}(A) \subseteq \rho(A)$.

Se $\lambda \in \tilde{\rho}(A)$, podemos considerar o sistema

$$\dot{x}(t) = (R(\lambda,A) - \frac{1}{\lambda}I)x(t) + Bu(t), \quad t \geq 0, \tag{7}$$

e estabelecer o seguinte resultado.

2.24 TEOREMA: Nas condições anteriores:

1) Se o sistema (1) é essencialmente auto-acessível em $[0,\bar{t}]$, para todo $\bar{t} > 0$, então (7) é também essencialmente auto-acessível em $[0,\bar{t}]$, para todo $\bar{t} > 0$ e qualquer $\lambda \in \tilde{\rho}(A)$.

2) Se U_a é denso em U e o sistema (7), para algum $\lambda = \lambda_o \in \tilde{\rho}(A)$ é essencialmente auto-acessível em $[0,\bar{t}]$, para todo $\bar{t} > 0$, então (1) é também essencialmente auto-acessível em $[0,\bar{t}]$, para todo $\bar{t} > 0$.

DEMONSTRAÇÃO: 1) Sejam $\lambda_o \in \tilde{\rho}(A)$ e $\bar{t} > 0$. Para demonstrar que (7) correspondente a λ_o é essencialmente auto-acessível em $[0,t_o]$. Consideremos $x' \in E'$ tal que $B' \exp [t(R(\lambda_o,A) - \frac{1}{\lambda_o} I)]' x' = 0$, $0 \leq t \leq \bar{t}$. Derivando repetidamente com relação a t e calculando em $t = 0$, obtemos $B'(R(\lambda_o,A)')^n x' = 0$, para todo $n \geq 0$. Sendo a aplicação $R(.,A)$ analítica em $\rho(A)$, $\tilde{\rho}(A)$ conexo

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda,A) = (-1)^n \, n! \, R(\lambda,A)^{n+1} ,$$

segue $B' R(\lambda,A)'x' = 0$, para todo $\lambda \in \tilde{\rho}(A)$.

Sabemos também que $T(t)x = \lim_{n\to\infty} (\frac{n}{t} R(\frac{n}{t}, A))^n x$, para todo $t \neq 0$ e $x \in E$. Portanto, para todo $u \in U$,

$$< T(t)Bu,x' > = \lim_{n\to\infty} < (\frac{n}{t} R(\frac{n}{t}, A))^n Bu,x' > = 0, \quad t > 0,$$

ou seja, $< T(t)Bu,x' > = 0$, $t \geq 0$, em virtude da continuidade

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

forte em $t = 0$. Fica assim demonstrado que $B'T(t)'x' = 0$, $t \geq 0$, e, como o sistema (1) é essencialmente auto-acessível em $[0,\bar{t}]$, para todo $\bar{t} > 0$, segue do corolário 2.18, que $T(t)'x' = x'$, para todo $t \geq 0$, ou de forma equivalente, $\langle (T(t)-I)y, x' \rangle = 0$, para todo $y \in E$. Multiplicando esta última relação por $\frac{1}{n!} t^n e^{-\lambda_o t}$ e integrando com relação a t, obtemos

$$0 = \left\langle \frac{1}{n!} \int_0^\infty t^n e^{-\lambda_o t} T(t)y\,dt - \frac{1}{n!} \int_0^\infty t^n e^{-\lambda_o t} y\,dt,\ x' \right\rangle$$

$$= \left\langle R(\lambda_o,A)^{n+1} y - \frac{1}{\lambda_o^{n+1}} y,\ x' \right\rangle , \quad \forall\ n \geq 0 .$$

Concluimos então que

$$\left\langle \exp\ (\bar{t}\ R(\lambda_o,A))y - e^{\frac{1}{\lambda_o}\bar{t}}\ y,\ x' \right\rangle = 0 ,$$

e portanto

$$\exp\ (\bar{t}\ R(\lambda_o,A))'\ x' = e^{\frac{1}{\lambda_o}\bar{t}}\ x' ,$$

ou seja

$$\exp\ [\bar{t}(R(\lambda_o,A) - \frac{1}{\lambda_o} I)]'\ x' = x' ,$$

e esta última relação mostra, em virtude do corolário 2.18, que o sistema (7) é essencialmente auto-acessível em $[0,\bar{t}]$.

2) Seja $\bar{t} > 0$ e $x' \in E'$ tal que $B'T(t)'x' = 0$, $0 \leq t \leq \bar{t}$.

Para todo $u \in U_a$, $\langle T(t)Bu, x' \rangle = 0$, $0 \leq t \leq \bar{t}$, e portanto, como $T(t)Bu$ é uma função analítica, $\langle T(t)Bu, x' \rangle = 0$, $t \geq 0$. Segue então que

$$\langle R(\lambda_o, A)^{n+1} Bu, x' \rangle = \frac{1}{n!} \int_0^\infty t^n e^{-\lambda_o t} \langle T(t)Bu, x' \rangle dt = 0,$$

$$\langle u, B'(R(\lambda_o, A)')^n x' \rangle = 0, \quad \forall\, u \in U_a, \quad \forall\, n \geq 0,$$

e como U_a é denso em U,

$$\langle u, B'(R(\lambda_o, A)' - \frac{1}{\lambda_o} I)^n x' \rangle = 0, \quad \forall\, u \in U, \quad \forall\, n \geq 0.$$

Concluimos que $B' \exp [t(R(\lambda_o, A) - \frac{1}{\lambda_o} I)]' x' = 0$, $t \geq 0$, e como o sistema (7) é essencialmente auto-acessível em $[0, \bar{t}]$, para todo $\bar{t} > 0$, segue que

$$\exp [t(R(\lambda_o, A) - \frac{1}{\lambda_o} I)]' x' = x' .$$

Derivando repetidamente a última expressão, calculando o seu valor em $t = 0$ e utilizando novamente o fato que $R(.,A)$ é analítica, obtemos a fórmula

$$(R(\lambda, A)')^n x' = \frac{1}{\lambda^n} x', \quad \forall\, n \geq 0, \quad \forall\, \lambda \in \tilde{\sigma}(A),$$

donde, por passagem ao limite quando $n \to \infty$, para $\lambda = \frac{n}{\bar{t}}$, obtemos a relação desejada, $T(\bar{t})x' = x'$, o que termina a demonstração.

2.25 COROLÁRIO: Se o semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ é holomorfo, então as seguintes condições são equivalentes:

1) O sistema (1) é essencialmente auto-acessível em $[0,\bar{t}]$, para todo $\bar{t} > 0$.

2) Para todo $\lambda \in \tilde{\rho}(A)$, o sistema (7) é essencialmente auto-acessível em $[0,\bar{t}]$, para todo $\bar{t} > 0$.

3) Existe $\lambda_o \in \tilde{\rho}(A)$, tal que o sistema (7), para $\lambda = \lambda_o$, é essencialmente auto-acessível em $[0,\bar{t}]$, para todo $\bar{t} > 0$.

DEMONSTRAÇÃO: É uma consequência direta do teorema anterior, visto que $U_a = U$, já que $T(t)$ é um semigrupo holomorfo.

§3. SISTEMAS AUTO-ACESSÍVEIS COM OPERADORES LIMITADOS

Neste parágrafo, estudaremos as propriedades de auto-acessibilidade para sistemas do tipo (1), quando A é um operador linear limitado.

3.1 TEOREMA: Seja A um operador linear limitado. Então existe $t_o > 0$ tal que o sistema (1) é auto-acessível em $[0,\bar{t}]$, $0 < t \leq t_o$, se e somente se $Im(A) \subseteq Im(G_{\bar{t}})$.

DEMONSTRAÇÃO: Sabemos que para todo $x \in E$, $x - T(\bar{t})x = -A\int_0^{\bar{t}} T(s)x\,ds$ logo, se $Im(A) \subseteq Im(G_{\bar{t}})$, é imediato que (1) é auto-acessível em $[0,\bar{t}]$.

Reciprocamente, indiquemos por Q_t o operador definido

pela relação $Q_t^x = -\int_0^t T(s)s\,ds$. Então $Q_t \in B(E)$ e existe $t_o > 0$ tal que $Q_t^{-1} \in B(E)$ quando $0 < t \leq t_o$, como pode ser verificado utilizando o fato que $T(s) = \exp(sA)$. Logo $(I-T(\bar{t}))x = A\,Q_{\bar{t}}\,x = Q_{\bar{t}}\,Ax$ e

$$Ax = Q_{\bar{t}}^{-1}\,(I-T(\bar{t}))x = (I-T(\bar{t}))Q_{\bar{t}}^{-1}\,x\ ,$$

para todo $x \in E$ e todo $\bar{t}$ com $0 < \bar{t} \leq t_o$. Portanto, se (1) é auto-acessível em $[0,\bar{t}]$, $0 < \bar{t} \leq t_o$, segue que $Im(A) \subseteq Im(G_{\bar{t}})$.

A seguir, continuaremos indicando por Q_t a aplicação definida anteriormente.

3.2 LEMA: Se A é limitado, então $\overline{Im(G_t)} = \overline{Sp}\,[BU, ABU, A^2BU,\ldots]$.

DEMONSTRAÇÃO: Este é um resultado bem conhecido que se obtém calculando $Im(G_t)^{\perp}$ e $Sp[BU,ABU,\ldots]^{\perp}$.

3.3 PROPOSIÇÃO: Se A é limitado, então

$$Q_{\bar{t}}'A'\,(\overline{Sp}\,[BU,ABU,\ldots])^{\perp} \subseteq \tilde{E}_a(\bar{t}) \subseteq \overline{Q_{\bar{t}}'A'\,(\overline{Sp}[BU,ABU,\ldots])^{\perp}}^{\,\sigma(E',E)}\ .$$

DEMONSTRAÇÃO: Sabemos que $\tilde{E}_a(\bar{t}) = (I-T(\bar{t}))^{-1}\,(\overline{Im(G_{\bar{t}})})$. Como $I-T(\bar{t}) = A\,Q_{\bar{t}}$, o resultado segue dos lemas 3.2 e 2.16.

3.4 COROLÁRIO: O sistema (1), com A um operador limitado, é essencialmente auto-acessível em $[0,\bar{t}]$, se e somente se a condi-

ção $B'(A')^i x' = 0$, $i \geq 0$, $x' \in E'$ acarreta $Q_{\bar{t}}' A'x' = 0$.

DEMONSTRAÇÃO: Segue imediatamente da proposição 3.3.

3.5 PROPOSIÇÃO: Se A é limitado, o sistema (1) é essencialmente auto-acessível em $[0,\bar{t}]$, para todo $\bar{t} > 0$, se e somente se $Im(A) \subseteq \overline{Sp}\ [BU,ABU,A^2BU,\ldots]$.

DEMONSTRAÇÃO: Se, para todo $\bar{t} > 0$

$$Im(A) \subseteq \overline{Sp}\ [BU,ABU,\ldots] = \overline{Im(G_{\bar{t}})}\ ,$$

então $Im(I-T(\bar{t})) \subseteq Im(A) \subseteq \overline{Im(G_{\bar{t}})}$ e o sistema (1) é essencialmente auto-acessível em $[0,\bar{t}]$.

Reciprocamente, se (1) for essencialmente auto-acessível em $[0,\bar{t}]$, para todo $\bar{t} > 0$, então

$$(I-T(\bar{t}))x \in \overline{Im(G_{\bar{t}})} = \overline{Sp}\ [BU,ABU,A^2BU,\ldots]\ ,$$

qualquer que seja $x \in E$, e como este último espaço é fechado, segue também que

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x-x}{t} \in \overline{Sp}\ [BU,ABU,\ldots]\ ,$$

para cada $x \in D(A)$, quer dizer $Im(A) \subseteq \overline{Sp}\ [BU,ABU,\ldots]$.

3.6 COROLÁRIO: Se A é limitado, o sistema (1) é essencialmente

auto-acessível em $[0,\bar{t}]$, para todo $\bar{t} > 0$, se e somente se:

$$B'(A')^i x' = 0, \quad i \geq 0, \quad x' \in E' \Rightarrow A' x' = 0 .$$

3.7 COROLÁRIO: Se a dimensão de E é n, então o sistema (1) é auto-acessível em $[0,\bar{t}]$, para todo $\bar{t} > 0$, se e somente se $Im(A) \subseteq Sp\,[BU,ABU,\ldots,A^{n-1}BU]$.

DEMONSTRAÇÃO: Como E tem dimensão finita o conceito de auto-acessibilidade essencial se reduz ao de auto-acessibilidade. O resultado segue agora da proposição 3.5 e o Teorema de Cayley-Hamilton.

§4. ESTADOS ESTACIONÁRIOS E UMA PROPRIEDADE GEOMÉTRICA

Conforme mencionado na introdução, pretendemos neste parágrafo, generalizar a sistemas arbitrários uma propriedade geométrica estabelecida por H. Kobayashi e E. Shimemura ([20]), para sistemas lineares em espaços de dimensão finita.

Com relação ao sistema de controle (1) estabelecemos a seguinte definição:

4.1 DEFINIÇÃO: Um estado $x \in E$ chama-se estacionário se existe $\bar{t} > 0$ e $u \in \mathcal{L}^\infty(0,\bar{t};U)$ tal que

$$x = T(t)x + \int_0^t T(t-s)\,B\,u(s)\,ds, \quad 0 \leq t \leq \bar{t} .$$

4.2 PROPOSIÇÃO: Valem, para o sistema (1), as seguintes propriedades:

1) Se $x \in D(A)$ é estacionário e se existe o limite $Bu(0^+) = \lim_{s \to 0^+} Bu(s)$, então $Ax \in \overline{Im(B)}$.

2) Se $Ax \in Im(B)$, então x é estacionário.

3) Se $Ax \in \overline{Im(B)}$, então existe uma sequência $\phi_n(t)$ de trajetórias continuamente diferenciáveis, tais que $\phi_n(0) = x$ e $\lim_{n \to \infty} (x - \phi_n(t)) = 0$, uniformemente para $t \in [0, \bar{t}]$ e $\bar{t} > 0$.

DEMONSTRAÇÃO: 1) Como $x = T(t)x + \int_0^t T(t-s) B u(s)\, ds$, $0 \leq t \leq \bar{t}$, então

$$\frac{x - T(t)x}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t T(t-s) B u(s) ds \to Bu(0^+) \in \overline{Im(B)} \quad t \to 0^+$$

e portanto $Ax = -Bu(0^+) \in \overline{Im(B)}$

2) Escrevendo $Ax = -Bu$, com $u \in U$, segue que

$$\int_0^t T(t-s) B u\, ds = -\int_0^t T(t-s) Ax\, ds = x - T(t)x,$$

e portanto, x é estacionário com $u(s) = u$, $s \geq 0$.

3) Se $Ax = -\lim_{n \to \infty} Bu_n$, com $u_n \in U$, definimos

$$\phi_n(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s) B u_n(s)\, ds,$$

então, para todo $\bar{t} > 0$, $\phi_n(t) \to x$, $n \to \infty$, uniformemente em $t \in [0,\bar{t}]$, e cada $\phi_n(t)$ é continuamente diferenciável pois $x \in D(A)$ e Bu_n, por ser constante, é uma função de classe C^1, ([18], [28]).

4.3 OBSERVAÇÃO: É claro que se um estado x é estacionário, então $x \in \bigcap_{0 < t \leq \bar{t}} E_a(t)$, para algum $\bar{t} > 0$. Entretanto, a recíproca é geralmente falsa, mesmo no caso de dimensão finita. Como exemplo, consideremos um sistema em $\mathbb{R}^n$ que seja exatamente controlável (logo $E_a(t) = \mathbb{R}^n$) e para o qual $Im(A) \not\subseteq Im(B)$.

Se um ponto x fosse estacionário, existiria $\bar{t} > 0$ e $u \in \mathcal{L}^\infty(0,\bar{t};U)$ tal que

$$x = e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-s)} B u(s)\, ds, \quad 0 \leq t \leq \bar{t},$$

e portanto,

$$\frac{e^{-At}x - x}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t e^{-As} B u(s)\, ds \in \overline{c\{e^{-As} B u(s) : s \in [0,t]\}}.$$

Como $u \in \mathcal{L}^\infty(0,\bar{t};U)$, podemos supor que $\|u(s)\| \leq N$, $s \in [0,\bar{t}]$. Logo

$$x(t) = \frac{e^{-At}x - x}{t} \in \overline{c\{e^{-As}y : y \in Im(B) \text{ e } \|y\| \leq N\,\|B\|,\ s \in [0,t]\}},$$

utilizando o fato que e^{-As} é uniformemente contínuo, podemos

mostrar que

$$-Ax = \lim_{t \to 0^+} x(t) \in \overline{Im(B)} = Im(B) ,$$

e isto acarreta a existência de pontos não estacionários.

4.4 DEFINIÇÃO: Os espaços

$$E_q = \{x \in D(A) : Ax \in Im(B)\} \quad e \quad \tilde{E}_q = \{x \in D(A) : Ax \in \overline{Im(B)}\}$$

serão chamados de equalizadores.

Utilizaremos também as seguintes notações:

$N(B') = D(A') \cap Ker\ B'$ e para $x' \in N(B')$,

$P(x') = \{x \in E : \langle x, A'x' \rangle = 0\}$.

Suporemos, em geral, que $N(B') \neq \{0\}$, o que sempre estará verificado mediante as hipóteses do teorema 4.9 abaixo.

Kobayashi e Shimemura, ([20]), mostraram, para sistemas de dimensão finita, que se um estado x é auto-acessível e não estacionário, então em qualquer trajetória fechada, com início e extremidade em x, existe um ponto cuja distância a x é suficientemente grande. A seguir, vamos generalizar este resultado para sistemas de dimensão infinita e para suas soluções (trajetórias) fracas.

4.5 TEOREMA: Seja $x_o \in E_a(\bar{t})$, $x' \in N(B')$ e $\phi(t,x_o,u) = T(t)x_o + G_t(u)$ uma trajetória tal que $x_o = \phi(\bar{t},x_o,u)$. Então,

$\mathrm{Im}(\phi) \cap P(x') \neq \Phi$.

DEMONSTRAÇÃO: Denotemos por $\phi(t)$ a trajetória $\phi(t,x_0,u)$; então $x_o = \phi(0) = \phi(\bar{t})$ e portanto, ([4]), a função $f(t) = \langle \phi(t), x' \rangle$, $x' \in D(A')$, é absolutamente contínua em $[0,\bar{t}]$ e, quase sempre,

$$f'(t) = \langle \phi(t), A'x' \rangle + \langle Bu(t), x' \rangle .$$

Se $x' \in N(B')$, então $g(t) = \langle \phi(t), A'x' \rangle$ é contínua em $[0,\bar{t}]$. Logo, $g(t) = f'(t)$, $t \in [0,\bar{t}]$. Ademais, como $f(0) = \langle x_o, x' \rangle$ e $f(\bar{t}) = \langle x_o, x' \rangle$, deve existir $t_o \in (0,\bar{t})$ tal que $g(t_o) = \langle \phi(t_o), A'x' \rangle = 0$, ou seja $\phi(t_o) \in P(x') \cap \mathrm{Im}(\phi)$.

4.6 TEOREMA: Sejam $x_o \in \tilde{E}_a(\bar{t})$ e $x' \in N(B')$. Então:

a) Existe uma sequência de trajetórias $\phi_n(t) = T(t)x_o + G_t(u_n)$ tais que $\lim_{n\to\infty} \phi_n(\bar{t}) = x_o$.

b) Para qualquer sequência de trajetórias $\phi_n(t)$ com $\phi_n(0) = x_o$ e $\lim_{n\to\infty} \phi_n(\bar{t}) = x_o$, tem-se $\lim_{n\to\infty} d(\mathrm{Im}(\phi_n), P(x')) = 0$.

DEMONSTRAÇÃO: a) Como $x_o \in \tilde{E}_a(\bar{t})$ então $(I-T(\bar{t}))x_o \in \overline{\mathrm{Im}(G_{\bar{t}})}$, e portanto existe uma sequência $u_n \in \mathcal{L}^\infty(0,\bar{t};U)$ tal que

$$(I-T(\bar{t}))x_o = \lim_{n\to\infty} G_{\bar{t}}(u_n) .$$

Definimos

$$\phi_n(t) = T(t)x_o + G_t(u_n) = T(t)x_o + \int_0^t T(t-s)\,B\,u_n(s)\,ds .$$

b) Seja $\phi_n(t) = T(t)x_o + G_t(u_n)$ uma sequência arbitrária verificando a condição $\lim_{n\to\infty} \phi_n(\bar{t}) = x_o$ e, utilizando a mesma idéia que no teorema anterior, ponhamos

$$f_n(t) = \langle \phi_n(t), x' \rangle \quad \text{e} \quad g_n(t) = f_n'(t) = \langle \phi_n(t), A'x' \rangle, \quad t \in [0,\bar{t}] ,$$

então $f_n(0) = \langle x_o, x' \rangle$ e $f_n(\bar{t}) = \langle \phi_n(\bar{t}), x' \rangle \longrightarrow \langle x_o, x' \rangle$, $n \to \infty$, donde resulta que dado $\varepsilon > 0$, existe $n_o \in \mathbb{N}$ e uma sequência $t_n \in [0,\bar{t}]$ tal que $|g_n(t_n)| = |\langle \phi_n(t_n), A'x' \rangle| < \varepsilon$, para $n \geq n_o$.

Se $A'x' \neq 0$, então, como $P(x')$ é um hiperplano,

$$d(\phi_n(t_n), P(x')) = \frac{1}{\|A'x'\|} |\langle \phi_n(t_n), A'x' \rangle|, \quad n \geq n_o ,$$

e claramente $d(\mathrm{Im}(\phi_n), P(x')) \longrightarrow 0$, quando $n \to \infty$.

Se $A'x' = 0$, então $P(x') = E$ e o resultado é trivialmente verificado.

4.7 TEOREMA: Com as notações anteriores,

1) $\tilde{E}_q \subseteq \cap \{P(x') : x' \in N(B')\}$

2) Se $N(B')$ é $\sigma(E',E)$-denso em $\mathrm{Ker}\, B'$, então

$D(A) \cap (\cap \{P(x') : x' \quad N(B')\}) \subseteq \tilde{E}_q$.

DEMONSTRAÇÃO: 1) Seja $x_o \in \tilde{E}_q$. Então $A x_o \in \overline{\mathrm{Im}(B)}$, $A x_o = \lim_{n\to\infty} B u_n$, $u_n \in U$, e para todo $x' \in N(B')$,

$$\langle x_o, A'x' \rangle = \langle Ax_o, x' \rangle = \langle \lim_{n\to\infty} B u_n, x' \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle B u_n, x' \rangle = 0 .$$

Isto prova que $x_o \in P(x')$.

2) Suponhamos que $x \in D(A) \cap P(x')$, para todo $x' \in N(B')$. Então $0 = \langle x, A'x' \rangle = \langle Ax, x' \rangle$, qualquer que seja $x' \in N(B')$ e portanto, $\langle Ax, x' \rangle = 0$, para todo $x' \in \text{Ker } B'$. Isto quer dizer que $Ax \in {}^{\perp}(\text{Ker } B')$, donde $Ax \in \overline{\text{Im}(B)}$ e $x \in \tilde{E}_q$.

4.8 OBSERVAÇÕES: 1) Como $E_q \subseteq \tilde{E}_q$ então $E_q \subseteq \bar{E}_q \subseteq \cap\{P(x') : x' \in N(B')\}$.
2) Se A é um operador linear limitado, então $D(A) = E$ e $\tilde{E}_q = \cap\{P(x') : x' \in N(B')\}$.

4.9 TEOREMA: Suponhamos que o sistema (1) verifica as seguintes hipóteses:

1) O subespaço $\text{Im}(A)$ é fechado, admite um suplementar topológico S em E e $\text{Im}(B) \subseteq \text{Im}(A) \cap \text{Im}(B) \oplus S$.

2) H é um hiperplano fechado tal que $E_q \subseteq H$.

Nestas condições $H = P(x')$, para algum $x' \in N(B')$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\varphi \in E'$ tal que $H = \{x \in E : \langle x, \varphi \rangle = 0\}$. As inclusões $\text{Ker } A \subseteq E_q \subseteq H$ acarretam que $\varphi \in (\text{Ker } A)^{\perp} = \text{Im}(A)$, logo $\varphi = A'x'$ para algum $x' \in D(A')$. Como $E = \text{Im}(A) \oplus S$, então $E' = (\text{Im}(A))^{\perp} \oplus S^{\perp} = \text{Ker } (A') \oplus S^{\perp}$ e portanto $x' = x'_1 + x'_2$ com $x'_1 \in \text{Ker } (A')$ e $x'_2 \in S^{\perp}$. Ademais $x'_2 = x' - x'_1 \in D(A')$ e $\varphi = A'x' = A'x'_2$.

Por outro lado, $x'_2 \in (\text{Im}(B))^{\perp}$, pois

$$< Im(B), x_2' > \subseteq < Im(A) \cap Im(B), x_2' > + < S, x_2' >$$

$$\subseteq < A E_q, x_2' > = < E_q, A' x_2' >$$

$$= < E_q, \varphi > \subseteq < H, \varphi > = \{0\},$$

uma vez que $Im(A) \cap Im(B) \subseteq A\, E_q$.

Logo, $x_2' \in (Im(B))^{\perp} \cap D(A') = N(B')$ e $H = P(x_2')$.

Demonstra-se de maneira completamente análoga o seguinte resultado:

4.10 TEOREMA: Se o sistema (1) verifica as seguintes hipóteses :

1) O subespaço $Im(A)$ é fechado, admite suplementar topológico S em E e $Im(B) \subseteq Im(A) \cap \overline{Im(B)} \oplus S$,

2) H é um hiperplano fechado e $\tilde{E}_q \subseteq H$,

então $H = P(x')$, para algum $x' \in N(B')$.

4.11 COROLÁRIO: Se a hipótese 4.9.1 (resp. 4.10.1) está verificada e se E_q (resp. $\tilde{E}_q$) é um hiperplano fechado, então qualquer trajetória de auto-acessibilidade deve interceptar E_q (resp. $\tilde{E}_q$).

DEMONSTRAÇÃO: Substituindo, no teorema 4.9 H por E_q (resp. $\tilde{E}_q$, no teorema 4.10) obtemos $E_q = P(x')$ (resp. $\tilde{E}_q = P(x')$, para algum $x' \in N(B')$, e o resultado segue utilizando o teorema 4.5.

4.12 TEOREMA: Suponhamos que a condição 4.9.1 esteja satisfeita

e que $x_o \in E_a(\bar{t})$, $\bar{t} > 0$, e $d(x_o,E_q) > 0$. Se $\phi(t) = T(t)x_o + G_t(u)$ é uma trajetória verificando $x_o = \phi(\bar{t})$, então

$$\max_{0 \leq t \leq \bar{t}} \|x_o - \phi(t)\| \geq d(x_o,E_q) .$$

DEMONSTRAÇÃO: Como $d(x_o,\bar{E}_q) = d(x_o,E_q) = r > 0$, existe um hiperplano fechado H tal que $\bar{E}_q \subseteq H$ e $d(x_o,H) = r$. Logo $H = P(x')$ com $x' \in N(B')$. Outrossim, pelo teorema 4.5, $H \cap Im(\phi) \neq \phi$ e portanto

$$d(x_o,H) = d(x_o,E_q) \leq \max_{0 \leq t \leq \bar{t}} \|x_o - \phi(t)\| .$$

4.13 COROLÁRIO: Suponhamos que a condição 4.9.1 esteja satisfeita e que $x_o \in \cap \{E_a(\bar{t}) : \bar{t} > 0\}$ e $d(x_o,E_q) > 0$. Se $\phi_{\bar{t}}$ é uma trajetória, $\phi_{\bar{t}}(t) = T(t)x_o + \int_0^t T(t-s) B u_{\bar{t}}(s)\, ds$, $t \in [0,\bar{t}]$ tal que $\phi_{\bar{t}}(\bar{t}) = x_o$, então, qualquer que seja $t_o > 0$, o conjunto $\{\|u_{\bar{t}}\|_\infty : \bar{t} \in (0,t_o]\}$ não é limitado.

DEMONSTRAÇÃO: Com efeito

$$\|x_o - \phi_{\bar{t}}\| \leq \|T(t)x_o - x_o\| + N \cdot t \cdot \|u_{\bar{t}}\|_\infty ,$$

onde $0 \leq t \leq \bar{t}$ e N é uma constante independente de $u_{\bar{t}}$, $\bar{t} \in (0,t_o]$.

Se $\{\|u_{\bar{t}}\|_\infty : \bar{t} \in (0,t_o]\}$ fosse limitado, chegaríamos à seguinte contradição:

$$0 < d(x_o, E_q) \leq \max_{0 \leq t \leq \bar{t}} \|x_o - \phi_{\bar{t}}(t)\|$$

$$\leq \max_{0 \leq t \leq \bar{t}} \|T(t)x_o - x_o\| + N \cdot \bar{t} \cdot \|u_{\bar{t}}\|_\infty \to 0, \quad \bar{t} \to 0^+ .$$

Com um argumento inteiramente semelhante podemos estabe
becer os seguintes resultados:

4.14 TEOREMA: Suponhamos que a condição 4.10.1 esteja verifica-
da, que $x_o \in \tilde{E}_a(\bar{t})$ e que $d(x_o, \tilde{E}_q) > 0$. Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma trajetória $\phi_\varepsilon(t) = T(t)x_o + G_t(u_\varepsilon)$, tal que

1) $\|x_o - \phi_\varepsilon(\bar{t})\| \leq \varepsilon$

2) $\max_{0 \leq t \leq \bar{t}} \|x_o - \phi_\varepsilon(t)\| \geq d(x_o, \tilde{E}_q) - \varepsilon$.

4.15 COROLÁRIO: Suponhamos que a condição 4.10.1 esteja verifica
da e que $x_o \in \cap \{\tilde{E}_a(\bar{t}) : \bar{t} > 0\}$ e $d(x_o, \tilde{E}_q) > 0$. Dado um ε fixado, $0 < \varepsilon < d(x_o, \tilde{E}_q)$, seja $\phi_{\bar{t}}(t)$ uma família de trajetó-
rias satisfazendo as condições 1) e 2) de 4.14. Então, para todo $t_o > 0$, o conjunto $\{\|u_{\bar{t}}\|_\infty : \bar{t} \in (0, t_o]\}$ não é limitado.

Os conceitos e resultados deste capítulo podem ser es-
tendidos em várias direções.

Em primeiro lugar, podemos estudar sistemas $\dot{x}(t) = Ax(t) + B\,u(t)$, com "saída" $y(t) = C\,x(t)$, onde C é um opera-
dor linear limitado de E em F. Neste caso, um vetor $y_o \in F$ diz
-se auto-acessível em $[0, \bar{t}]$ se existe $u \in \mathcal{L}^\infty(0, \bar{t}; U)$ tal que

$y_o = y(0) = y(\bar{t})$.

Se $x_o \in E$ é tal que $y(0) = C\,x(0) = C\,x_o$, então, para que y_o seja auto-acessível devemos ter $C(x_o - x(\bar{t})) = 0$. As outras definições se generalizam de maneira semelhante.

Podemos finalmente considerar sistemas com restrições $\Omega \subseteq U$, quer dizer, sistemas cujos controles admissíveis $u(.)$ estão restritos pela condição $u(t) \in \Omega$.

Para estas duas extensões, ao menos, todos os resultados anteriores podem ser generalizados sem maiores dificuldades.

REFERÊNCIAS

[1] BACCIOTI, A.: "Auto-acessibilité par familles symetriques de champs de vecteurs", Ricerche di Automatica, 7, 189-197, (1976).

[2] BALAKRISHNAN, A.V.: "Applied functional analysis", Springer-Verlag, 1976.

[3] BALAKRISHNAN, A.V.: "Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them", Pac. J. Math. 10, 419-437, (1960).

[4] BALL, J.M.: "Strongly continuous semigroups, weak solutions and the variations of constants formula", Proc. Amer. Math. Soc. 63, 370-373, (1977).

[5] BARBANTI, L.: "Linear Volterra-Stieltjes integral equations and control", Equadiff 82, Wurtzburg, (1982).

[6] BENCHIMOL, C.D.: "Feedback stabilizability in Hilbert spaces", SIAM J. Contr. & Opt. 16 (3), 373-379, (1978).

[7] CURTAIN, R.; PRITCHARD, A.J.: "Infinite dimensional linear systems theory", Lect. Notes in Control and Inf. Sciences, Nº 8, Springer-Verlag, 1978.

[8] CUTHBERT, J.R.: "On semi-groups such that $T(t)-I$ is compact for some $t > 0$", Z. Wahrs. 18, 9-16, (1971).

[9] DATKO, R.: "Uniform asymptotic stability of evolutionary processes in a Banach spaces", SIAM J. Math. Anal. 3 (3), 428-445, (1972).

[10] DAVIES, E.B.: "One-parameter semigroups", Academic Press , 1980.

[11] DELFOUR, M.C.; MITTER, S.K.: "Hereditary differential systems with constant delays, I. General case", J. Diff. Eqs. 12 , 213-235, (1972).

[12] DUNFORD, N.; SCHWARTZ, J.T.: "Linear operators", vol. II, Interscience, 1963.

[13] FATTORINI, H.O.: "Time optimal control of solutions of operational differential equations", SIAM J. Contr. 21, 54 - 59, (1964).

[14] FATTORINI, H.O.: "On complete controlability of linear systems", J. Diff. Eqs. 3, 391-402, (1967).

[15] FRIEDMANN, A.: "Partial differential equations", Holt, Rinehart & Winston, Inc., 1969.

[16] GIBSON, J.S.: "A note on stabilization of infinite dimensional linear oscillators by compact linear feedback", SIAM J. Contr. & Opt. 18 (3), 311-316, (1980).

[17] HILLE, E.: "Lectures on ordinary differential equations" ,

Addison-Wesley, 1969.

[18] HILLE, E.; PHILLIPS, R.S.: "Functional analysis and semi-groups", Amer. Math. Soc. Coll. Pub. 31, 1957.

[19] KATO, T.: "Perturbation theory of linear operators", Springer-Verlag, 1966.

[20] KOBAYASHI, H.; SHIMEMURA, E.: "Note on property of linear control systems", Inter. J. Contr. 33 (6), 1171-1176, (1981).

[21] KOMATSU, H.: "Fractional powers of operators", Pac. J. Math. 19, 285-346, (1966).

[22] KOROBOV, V.I.; RABAKH, R.: "Exact controllability in Banach space", Differential Equations, 15 (12), 1531-1537, (1979).

[23] KREIN, S.G.: "Linear differential equations in Banach spaces", Amer. Math. Soc. 29, 1971.

[24] LADAS, G.E.; LAKSMIKANTHAM, V.: "Differential equations in abstract spaces", Academic Press, 1972.

[25] LANG, S.: "Real analysis", Addison-Wesley, 1969.

[26] LEE, E.B.; MARKUS, L.: "Foundations of optimal control theory", John Wilcy & Sons, 1967.

[27] MARLE, C.M.: "Mesure et Probabilités", Hermann, 1974.

[28] PAZY, A.: "Semi-groups of linear operators and applications

to partial differential equations", Lecture Notes #10, University of Maryland, 1974.

[29] RUDIN, R.: "Functional Analysis", McGraw-Hill, 1973.

[30] TAYLOR, A.E.: "Introduction to functional analysis", John Wiley & Sons, 1958.

[31] TRIGGIANI, R.: "On the stabilizability problem in Banach space", J. Math. An. Appl. 52, 383-403, (1975).

[32] TRIGGIANI, R.: "On the lack of exact controllability for mild solutions in Banach spaces", J. Math. An. Appl. 50, 438-446, (1975).

[33] TRIGGIANI, R.: "A note on the lack of exact controllability for mild solutions in Banach spaces", SIAM J. Contr. Opt. 15 (3), 407-411, (1977).

[34] TRIGGIANI, R.: "Addendum: A note on the lack of exact controllability for mild solutions in Banach spaces", SIAM J. Contr. Opt. 18 (1), 98-99, (1980).

[35] TRIGGIANI, R.: "Controllability and observability in Banach spaces with bounded operators", SIAM J. Contr. 13 (2), 462-491, (1975).

[36] TRIGGIANI, R.: "Extensions of rank conditions for controllability and observability to Banach spaces and unbounded op-

erators", SIAM J. Contr. Opt. 14 (2), 313-339, (1976).

[37] WIDDER, D.V.: "The Laplace transform", Princeton Univ. Press, 1941.

[38] WONHAM, W.M.: "On pole assignment in multi-input controllable linear systems", IEEE Trans. on Aut. Contr., Vol. AC-12, 6, 660-665, (1967).

[39] ZABCZYK, J.: "A note on C_o-semigroups", Bull. Acad. Pol. Sci. XXIII, 895-898, (1975).

[40] ZEINSTRA, R.: Comunicação pessoal.