

Imersões Pseudo-paralelas em Formas Espaciais

por

Guillermo Antonio Lobos Villagra

*Tese desenvolvida sob a orientação do Professor Dr. Antonio Carlos
Asperti (IME/USP), em co-orientação com o Professor Dr.
Francesco Mercuri (IMECC/UNICAMP)*

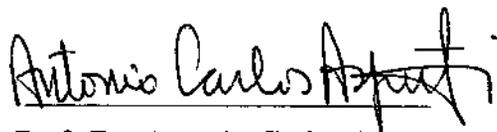
IMECC-UNICAMP

1999

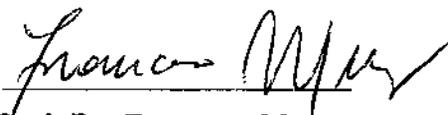
Imersões Pseudo-paralelas em Formas Espaciais

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. **Guillermo Antonio Lobos Villagra** e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 13 de Dezembro de 1999



Prof. Dr. Antonio Carlos Asperti
Orientador
IME/USP



Prof. Dr. Francesco Mercuri
Co-orientador
IME/UNICAMP

Banca Examinadora:

1. Prof. Dr. Antonio Carlos Asperti
2. Profa. Dra. Yuriko Yamamoto Baldin
3. Prof. Dr. Fabiano Gustavo Braga Brito
4. Prof. Dr. Ruy Tojeiro de Figueiredo Júnior
5. Prof. Dr. Renato Hyuda de Luna Pedrosa

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de DOUTOR em Matemática.

CIDADE	BC
CHAMADA:	
Ex	
EMBO BC/	40187
ROC.	278/00
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	29/01/00
N.º CPD	

CM-00135979-5

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Lobos Villagra, Guillermo Antonio

L786i Imersões pseudo-paralelas em formas espaciais / Guillermo Antonio Lobos Villagra -- Campinas, [S.P. :s.n.], 1999.

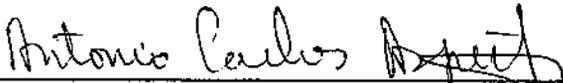
Orientadores : Antonio Carlos Asperti; Francesco Mercuri

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Hipersuperfícies. 2. Superfícies (Matemática). 3. Geometria diferencial. 4. Geometria riemanniana. I. Asperti, Antonio Carlos. II. Mercuri, Francesco. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Tese de Doutorado defendida e aprovada em 13 de dezembro de 1999

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof (a). Dr (a). ANTONIO CARLOS ASPERTI



Prof (a). Dr (a). YURIKO YAMAMOTO BALDIN



Prof (a). Dr (a). FABIANO GUSTAVO BRAGA BRITO



Prof (a). Dr (a). RUY TOJEIRO DE FIGUEIREDO JÚNIOR



Prof (a). Dr (a). RENATO HYUDA DE LUNA PEDROSA

*À minha família
"Viviana e Tomás".*

Agradecimentos

- A minha esposa e filho, pela compreensão, carinho e apoio que me deram durante todos estes anos que demorei para terminar meu doutorado.
- Ao CNPq, PICD-CAPES ao DM-UFSCar pelo apoio financeiro para realizar o doutorado.
- Aos Profs. Drs. Antonio Carlos Asperti e Francesco Mercuri, pela sua orientação e valiosas sugestões que tornaram esta tese possível.
- Aos meus colegas do DM-UFSCar, principalmente às Profas. Dras. Yuriko Baldin e Dirce Moshida, pela sua ajuda na correção do português e discussão de vários resultados deste trabalho.
- Aos meus colegas do Seminário USP-UNICAMP de Geometria Diferencial.

Resumo

O principal objetivo deste trabalho é introduzir e estudar uma nova classe de imersões isométricas, chamadas *immersões pseudo-paralelas*, como um análogo intrínseco das variedades pseudo-simétricas introduzidas por Ryszard Deszcz, e como uma generalização natural das imersões semi-paralelas introduzidas por Johan Deprez. Neste contexto apresentamos vários exemplos importantes de imersões pseudo-paralelas que não são semi-paralelas e de imersões pseudo-simétricas que não são pseudo-paralelas. Além disso, mostramos uma caracterização das hipersuperfícies pseudo-paralelas e uma série de resultados em nível de superfícies, imersões em codimensão dois e também com codimensão alta. Por último, neste trabalho mostramos que as imersões pseudo-paralelas estão intimamente relacionadas com os sistemas triplos de Jordan.

Abstract

The main objective of this work is to introduce and study a new class of isometric immersions, called *pseudo-parallel*, as an intrinsic analogue of the pseudo-symmetric manifolds introduced by Ryszard Deszcz, and as a natural generalization of the semi-parallel immersions introduced by Johan Deprez. Moreover we present several important examples of pseudo-parallel immersions that are not semi-parallel and of pseudo-symmetric immersions that are not pseudo-parallel. Besides, we showed a characterization of the pseudo-parallel hypersurfaces and some results for surfaces, immersions in codimension two and also with high codimension. At last, we show that the pseudo-parallel immersions are related with Jordan's triple systems.

Capítulo 1

Introdução

Uma variedade Riemanniana n -dimensional M^n é *localmente simétrica* quando seu tensor de curvatura Riemanniano R é paralelo, i.e., quando $\nabla R = 0$, onde ∇ denota a conexão de Levi-Civita de M , estendida de modo a agir sobre tensores como uma derivação. É bem conhecido que, nos anos vinte, Elie Cartan em [11] iniciou as investigações das variedades localmente simétricas e, durante o desenvolvimento da teoria das variedades localmente simétricas, o próprio Cartan chamou a atenção para a condição que caracteriza uma variedade *semi-simétrica*, i.e., para a condição $R(X, Y) \cdot R = 0$, onde o operador de curvatura $R(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}$ é estendido de modo a agir sobre tensores como uma derivação. Claramente a classe de variedades semi-simétricas generaliza a classe de variedades localmente simétricas. Este último fato e a observação de que sua recíproca não é verdadeira para $n = 2$ (pois, qualquer variedade Riemanniana 2-dimensional é semi-simétrica), tinham sido provados por Cartan em [12], p. 262-265. Mas, em geral, Cartan não tinha mostrado que essas classes não eram equivalentes para $n > 2$, onde a condição de semi-simetria é restritiva. Inclusive Nomizu em 1968 chegou a conjecturar que, na classe de variedades Riemannianas completas e irredutíveis, os conceitos de variedade localmente simétrica e semi-simétrica deveriam ser equivalentes (ver [42]). Quatro anos mais tarde, Takagi apresentou o primeiro exemplo que prova a não equivalência dos conceitos. (Ver [51]). A partir daí vários matemáticos passaram a estudar as

variedades semi-simétricas na tentativa de obter sua classificação. Mas somente no início da década de oitenta, obteve-se uma classificação das variedades semi-simétricas, devido ao trabalho de Szabó (ver [49],[50]). Paralelamente ao trabalho de Szabó, Ryszard Deszcz e outros começaram a pesquisar as subvariedades totalmente umbílicas das variedades semi-simétricas (ver [1]). Um dos principais frutos dessa pesquisa foi a origem de uma nova classe de variedades que é ainda maior que a classe de variedades semi-simétricas. As variedades dessa nova classe foram chamadas de variedades *pseudo-simétricas*. A condição que caracteriza cada variedade pseudo-simétrica, M , é a existência de uma função diferenciável ϕ da variedade M a valores reais, tal que o tensor de curvatura R satisfaz a seguinte condição de pseudo-simetria:

$$R(X, Y) \cdot R = \phi(p)X \wedge Y \cdot R, \quad (1.1)$$

para cada ponto p de M e a cada par X, Y de vetores tangentes a M em p , onde $X \wedge Y$ é uma aplicação linear de $T_p M$, definida por $X \wedge Y(Z) = \langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y$, e estendida de modo a agir sobre tensores como uma derivação. Atualmente as variedades pseudo-simétricas são chamadas de *pseudo-simétricas segundo Deszcz*, devido ao trabalho desenvolvido até agora por Deszcz em torno delas e para diferenciá-las das “variedades pseudo-simétricas” introduzidas por Chaki; estas últimas são claramente diferentes já na sua definição dada em [13]. A classe de variedades pseudo-simétricas segundo Deszcz é essencialmente grande, e apesar do grande número de publicações relacionadas surgidas na década de noventa, ainda não se conhece uma classificação dessas variedades. Para ver alguns exemplos de variedades pseudo-simétricas que não são semi-simétricas, citamos por exemplo [23] e as referências aí citadas.

Na teoria de imersões isométricas em formas espaciais, $f : M^n \rightarrow Q^N(c)$, noções análogas às de variedade localmente simétrica e semi-simétrica foram introduzidas e bastante estudadas nos últimos 25 anos. Primeiro, Ferus introduziu e iniciou o estudo da noção de imersão *localmente paralela* (subvariedade *extrinsecamente simétrica* na terminologia de Ferus), i.e., uma imersão isométrica cuja segunda forma fundamental α é paralela, i.e., $\bar{\nabla}\alpha = 0$, onde $\bar{\nabla} = \nabla \oplus \nabla^\perp$ é a conexão de van der

Waerden-Bortolotti do fibrado $TM \oplus \nu(f)$, estendida de modo a agir sobre tensores como uma derivação. A classificação completa das imersões localmente paralelas em formas espaciais foi por Ferus em 1980 para o caso $c = 0$, e logo em seguida Backes e Rieckziegel e, independentemente, Takeuchi para $c \neq 0$ (ver [30],[4],[52]). Após a classificação das imersões localmente paralelas, Deprez introduziu e iniciou o estudo da noção de imersão *semi-paralela*, i.e., uma imersão isométrica cuja segunda forma fundamental verifica a seguinte condição: $\bar{R}(X, Y) \cdot \alpha = 0$, para todo X, Y vetores tangentes a M , onde $\bar{R}(X, Y)$ é o operador de curvatura relativo à conexão $\bar{\nabla}$, o qual é estendido de modo a agir sobre tensores como uma derivação. É importante observar que a condição de integrabilidade do sistema de equações diferenciais $\bar{\nabla}\alpha = 0$ é exatamente a condição $\bar{R}(X, Y) \cdot \alpha = 0$. Isto também acontece entre as condições que caracterizam as variedades localmente simétricas e semi-simétricas. Uma classificação das imersões semi-paralelas ainda não está disponível pois, segundo os estudos feitos por Lumiste, é necessário investigar com maior profundidade os sistemas de equações de Pfaff correspondentes a essas imersões, (ver, por exemplo, [36]). Contudo, vários resultados parciais sobre as imersões semi-paralelas são conhecidos, onde destacamos uma caracterização das superfícies semi-paralelas, em codimensão qualquer, feita por Deprez para $c = 0$ e por Asperti e Mercuri para $c \neq 0$ (ver [18], [2]); uma classificação das hipersuperfícies semi-paralelas, feita por Deprez para $c = 0$, e por Dillen para $c \neq 0$ (ver [19], [26]) e uma classificação das imersões semi-paralelas com fibrado normal plano, feita por Lumiste para $c = 0$ e por Dillen e Nölker para $c \neq 0$, (ver [35], [27]).

Os objetivos principais deste trabalho são introduzir e estudar um novo conceito, o de imersão *pseudo-paralela*, como um análogo extrínseco das variedades pseudo-simétricas, e como uma generalização natural das imersões semi-paralelas. Assim, uma imersão isométrica é pseudo-paralela quando existe uma função diferenciável ϕ de M a valores reais, tal que a segunda forma fundamental α verifica a seguinte condição de pseudo-parallelismo

$$\bar{R}(X, Y) \cdot \alpha = \phi(p)X \wedge Y \cdot \alpha, \tag{1.2}$$

para todo $p \in M$, e $X, Y \in T_pM$, onde $X \wedge Y$ é estendida de modo a agir como uma derivação sobre a segunda forma fundamental. Observe que a condição de pseudo-parallelismo (1.2) é pontual.

Este trabalho está composto por quatro capítulos. O primeiro capítulo é o da presente introdução, o segundo capítulo é aquele onde fixaremos a nomenclatura básica sobre as variedades Riemannianas e imersões isométricas que serão utilizadas ao longo do trabalho e também mencionaremos alguns resultados sobre as imersões semi-paralelas que serão generalizados. No terceiro capítulo, uma vez introduzido o conceito de imersão pseudo-paralela, passaremos a descrever na seção 3.1 as propriedades básicas das imersões pseudo-paralelas. Em particular, provaremos o resultado abaixo de caráter pontual, que generaliza um teorema análogo para imersões semi-paralelas dado por Deprez em [19]:

Teorema 1.0.1 *Seja $f : M^n \rightarrow Q^N(c)$ uma imersão pseudo-paralela. Se f é mínima em p e $\phi(p) \geq c$, então p é um ponto geodésico, i.e., a segunda forma fundamental de f se anula em p .*

Apesar da condição de pseudo-simetria (1.1) ser verificada por qualquer superfície, a condição de pseudo-parallelismo (1.2) é restritiva para superfícies imersas em formas espaciais. Portanto na seção 3.2 estudaremos as superfícies pseudo-paralelas e, como resultado, obteremos que: *As superfícies pseudo-paralelas próprias (não semi-paralelas) com fibrado normal plano ($R^\perp = 0$) são aquelas que possuem curvatura Gaussiana K distinta de zero em algum ponto.* Por outro lado, mostraremos que dentro da classe das superfícies imersas com a propriedade que, cada um dos operadores de curvatura normal sejam não nulos, as superfícies que são pseudo-paralelas são caracterizadas como as superfícies cujas elipses de curvatura em cada ponto p são circunferências de centro na ponta do vetor curvatura média $H(p)$ e raio $\sqrt{K(p) - \phi(p)}$ (i.e., uma superfície λ -isotrópica, conceito introduzido por O'Neill, ver [45]). Uma consequência dessa caracterização é que em codimensão dois temos o seguinte resultado:

Corolário 1.0.2 *Seja $f : M^2 \rightarrow Q^4(c)$ uma imersão isométrica com $R^\perp \neq 0$. Então f é pseudo-paralela se, e somente se, f é supermínima. Além disso, se ϕ é constante, então $K = \frac{c}{3}$ e $f(M^2)$ é uma parte de uma superfície de Veronese.*

(O conceito de supermínima (i.e., mínima e isotrópica) foi introduzido por Bryant, ver [8]). Desse resultado segue-se que para $c > 0$ existem numerosos exemplos de superfícies pseudo-paralelas próprias com seus operadores de curvatura normal não nulos na esfera $S^4(c)$. Isto é possível devido a um teorema de Chern, ver [15], onde prova-se que toda imersão mínima (em particular, com $R^\perp(p) \neq 0$ em todo ponto p) de uma esfera topológica S^2 em $S^4(1)$ é supermínima. Como no caso de superfícies semi-paralelas em $Q^4(c)$, Lumiste (para $c = 0$) e Asperti e Mercuri (para $c \neq 0$), mostraram que qualquer superfície semi-paralela possui $R^\perp = 0$ ou é localmente paralela (ver [34],[2]). Portanto, o fato de existirem exemplos de superfícies pseudo-paralelas próprias com seus operadores de curvatura normal não nulos em $S^4(c)$ é um primeiro passo para obter uma classificação destas superfícies em codimensão dois. Para superfícies pseudo-paralelas em codimensão três mostraremos o seguinte resultado:

Teorema 1.0.3 *Seja $f : M^2 \rightarrow Q^5(c)$ uma imersão pseudo-paralela com ϕ constante e M^2 conexa e completa. Então temos uma das seguintes possibilidades:*

- i) f é uma imersão com fibrado normal plano e $\phi = K$;
- ii) $f(M^2)$ é uma superfície de Veronese em algum $S^4(\tilde{c})$ totalmente umbílica em $Q^5(c)$;
- iii) $f(M^2)$ é um toro em $S^5(c)$ descrito no exemplo 3.2.10.

Este teorema é uma generalização de um análogo para o caso semi-paralelo, que foi obtido em [2]. A diferença essencial está no item (iii), onde a superfície pseudo-paralela será própria para $\phi = \frac{c}{2}$ (ver exemplo 3.2.10).

Na seção 3.3 estudaremos as hipersuperfícies pseudo-paralelas $f : M^n \rightarrow Q^{n+1}(c)$ e provaremos que todas possuem no máximo duas curvaturas principais distintas.

Como uma conseqüência deste fato, veremos que qualquer hipersuperfície de Cartan 3-dimensional na esfera $S^4(c)$ não é pseudo-paralela, mas é *pseudo-simétrica própria*, i.e., não é semi-simétrica. Isto mostrará que os conceitos de pseudo-simetria e pseudo-parallelismo não são equivalentes. Também mostraremos que a classe de hipersuperfícies semi-simétricas não coincide com a classe de hipersuperfícies pseudo-paralelas em formas espaciais com $c > 0$. Além disso, de acordo com a classificação das hipersuperfícies semi-paralelas, diremos quais são as únicas hipersuperfícies de revolução que são pseudo-paralelas próprias. Ainda mais, provaremos o seguinte teorema de caracterização das hipersuperfícies pseudo-paralelas:

Teorema 1.0.4 *Seja $f : M^n \rightarrow Q^{n+1}(c)$ uma hipersuperfície. Então f é pseudo-paralela se, e somente se, f é ou quase-umbílica ou uma ciclode de Dupin.*

Na seção 3.4 estudaremos as imersões pseudo-paralelas de codimensão dois. Como produto deste estudo, obteremos uma forma matricial para os operadores de Weingarten de uma imersão pseudo-paralela $f : M^n \rightarrow Q^{n+2}(c)$ com $R^\perp = 0$. Uma conseqüência dessa forma matricial e do Teorema 1.0.1 é o seguinte resultado de caráter pontual:

Teorema 1.0.5 *Seja $f : M^n \rightarrow Q^{n+2}(c)$ uma imersão ϕ -pseudo-paralela. Se $\phi(p) \geq c$ ou $H(p) \neq 0$, então $R^\perp(p) = 0$. Em particular, se $c = 0$ $\phi(p) \geq 0$, então M possui curvatura seccional não-negativa em p .*

Por último, usando um resultado obtido por Baldin e Mercuri em [6], junto com o Teorema 1.0.5, obteremos uma caracterização intrínseca das variedades imersas pseudo-paralelamente em \mathbb{R}^{n+2} com $\phi \geq 0$. A saber:

Corolário 1.0.6 *Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ uma imersão ϕ -pseudo-paralela com $\phi \geq 0$. Se M é compacta e simplesmente conexa, então f é um produto de dois mergulhos convexos ou M é homeomorfo a uma n -esfera. Em particular, se $\phi > 0$ em algum ponto então, M é homeomorfo a uma n -esfera.*

Na seção 3.5 estudaremos as imersões pseudo-paralelas de variedades Riemannianas de dimensão $n \geq 3$ em codimensão alta e com uma das seguintes condições de regularidade sobre o primeiro espaço normal da imersão: A dimensão de N^1 será constante ao longo da variedade e igual a $\frac{n(n+1)}{2}$ ou $\frac{n(n+1)}{2} - 1$. Como conseqüência deste estudo, obteremos os seguintes resultados, os quais são os análogos aos obtidos no caso de superfícies pseudo-paralelas com $R^+(p) \neq 0, \forall p \in M$, e que foram inspirados no trabalho de Lumiste para semi-paralelas, ver [37].

Teorema 1.0.7 *Seja $f : M^n \rightarrow Q^N(c)$ uma imersão pseudo-paralela. Suponhamos que $\dim N_f^1(p) = \frac{n(n+1)}{2}$ em cada ponto p de M . Então vale o seguinte:*

- (i) M possui curvatura seccional constante $K > \phi$;
- (ii) $\lambda^2 = 4K - 3\phi - c$ é uma função positiva e f é uma imersão λ -isotrópica com

$$\|H\|^2 = \frac{2(n+1)}{n}K - \frac{(n+2)}{n}\phi - c > 0,$$

e f é também pseudo-umbílica;

- (iii) Para qualquer referencial local ortonormal tangente $\{e_1, \dots, e_n\}$, o conjunto $\beta = \left\{ \frac{H(p)}{\|H(p)\|}, \frac{\alpha_{11} - \alpha_{22}}{\|\alpha_{11} - \alpha_{22}\|}, \dots, \frac{\alpha_{(n-1)(n-1)} - \alpha_{nn}}{\|\alpha_{(n-1)(n-1)} - \alpha_{nn}\|}, \frac{\alpha_{12}}{\|\alpha_{12}\|}, \dots, \frac{\alpha_{(n-1)n}}{\|\alpha_{(n-1)n}\|} \right\}$ é um referencial local ortonormal de N_f^1 e o operador de curvatura normal R_{ij}^\perp é dado por

$$R_{ij}^\perp[\alpha_{ii}] = -R_{ij}^\perp[\alpha_{jj}] = 2(\phi - K)\alpha_{ij},$$

$$R_{ij}^\perp[\alpha_{ij}] = (\phi - K)(\alpha_{jj} - \alpha_{ii}), \quad R_{ij}^\perp[\alpha_{kl}] = 0,$$

onde i, j, k são distintos, l é qualquer e $i < j$.

Em particular, se M é compacta e $\phi \geq 0$, então $\|H\|^2 = \frac{2(n+1)}{n}K - c$ e $N - n = \frac{n(n+1)}{2}$. Além disso, f imerge M como uma variedade de Veronese em alguma hipersuperfície totalmente umbílica de $Q^{\frac{n(n+3)}{2}}(c)$.

Considerando as mesmas hipóteses dadas no Teorema 1.0.7 sem impor qualquer condição topológica global para o caso de $n = 3$ e usando o método do referencial

móvel poderemos concluir que ϕ é constante. Mas é importante ressaltar que para $n > 3$ o método do referencial móvel se torna computacionalmente inviável devido a que não existe um programa computacional que permita manipular sistemas literais de grande porte. Contudo, queremos *conjecturar* que ϕ é constante também para $n > 3$, sem hipóteses globais.

Agora com as hipóteses de minimalidade junto com a outra condição de regularidade sobre o primeiro espaço normal, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 1.0.8 *Seja $f : M^n \rightarrow S^N(c)$ uma imersão pseudo-paralela. Se f é mínima e $\dim N_f^1(p) = \frac{n(n+1)}{2} - 1$ em cada ponto p de M , então f imerge M como uma variedade de Veronese em $S^N(c)$, onde $N = \frac{n(n+3)}{2} - 1$.*

No quarto capítulo provaremos que os sistemas triplos de Jordan estão intimamente relacionados com as imersões pseudo-paralelas, assim como com as imersões paralelas e semi-paralelas, ver [30] e [20]. Como consequência desta relação, obtaremos dois fatos importantes. O primeiro fato é de caráter pontual e corresponde a uma segunda demonstração do Teorema 1.0.1 que difere da demonstração que apresentaremos na seção 3.1, onde usamos o operador Laplaciano. O segundo e último fato é de caráter global, a saber:

Teorema 1.0.9 *Seja $f : M^n \rightarrow Q^N(c)$ uma imersão pseudo-paralela com $\phi \geq 0$. Se M é compacta e simplesmente conexa, então M^n é uma variedade Riemanniana produto, sendo os fatores dos seguintes tipos:*

- 1) *Variedades homeomorfas a esferas;*
- 2) *Variedades biholomorfas a planos complexos projectivos;*
- 3) *Espaços simétricos de tipo compacto.*

Além disso, se ϕ não é identicamente zero, então M é do primeiro tipo.

Este teorema generaliza o corolário 1.0.6.

Capítulo 2

Preliminares

O principal objetivo deste capítulo é rapidamente fixar a nomenclatura que usaremos ao longo de todo o trabalho e também apresentar alguns resultados sobre as imersões semi-paralelas os quais serão citados nos capítulos seguintes.

2.1 Variedades pseudo-simétricas

Seja M^n uma variedade Riemanniana n -dimensional munida da métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$, com conexão de Levi-Civita denotada por ∇ e tensor de curvatura Riemanniano R definido por

$$R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]}Z,$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, onde $\mathfrak{X}(M)$ denota o conjunto dos campos diferenciáveis tangentes de M e, aqui, $[\cdot, \cdot]$ denota o colchete de campos. O número real

$$K(X, Y) := \langle R(X, Y)Y, X \rangle.$$

é chamado a curvatura seccional de M segundo o plano gerado pelos vetores tangentes ortonormais X, Y . Denotamos por $\mathcal{D}(M)$ o conjunto de todas as funções diferenciáveis de M a valores reais.

Por uma forma espacial, denotada por $Q^N(c)$, entendemos uma variedade Riemanniana N -dimensional, simplesmente conexa, completa, de curvatura seccional

constante c . Os modelos de formas espaciais que adotamos são: O espaço Euclidiano \mathbb{R}^N com o produto interno usual, se $c = 0$; a esfera unitária $S^N(c) = \{x \in \mathbb{R}^{N+1} : \|x\|^2 = \frac{1}{c}\}$ com a métrica induzida por \mathbb{R}^{N+1} , se $c > 0$; e o espaço hiperbólico $H^N(c) = \{(x_0, x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{N+1} : -x_0^2 + \sum_{i=1}^N x_i^2 = \frac{1}{c}, x_0 > 0\}$ com a métrica Lorentziana, se $c < 0$.

Os seguintes conceitos que passamos a definir generalizam naturalmente as formas espaciais.

Definição 2.1.1 Seja M^n uma variedade Riemanniana.

- 1) Dizemos que M é *localmente simétrica* se $\nabla R = 0$, onde ∇ é estendida de modo a agir sobre R como uma derivação da seguinte forma:

$$\begin{aligned} (\nabla_X R)(Y, Z, W) &:= \nabla_X [R(Y, Z)W] - R(\nabla_X Y, Z)W \\ &\quad - R(Y, \nabla_X Z)W - R(Y, Z)\nabla_X W, \end{aligned} \quad (2.1)$$

para todo $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$.

- 2) Dizemos que M é *semi-simétrica* se

$$R(X, Y) \cdot R := \nabla_X (\nabla_Y R) - \nabla_Y (\nabla_X R) - \nabla_{[X, Y]} R = 0, \quad (2.2)$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Ou equivalentemente, se

$$[R(X, Y), R(U, V)]W = R(R(X, Y)U, V)W + R(U, R(X, Y)V)W, \quad (2.3)$$

para todo $X, Y, U, V, W \in \mathfrak{X}(M)$, onde $R(X, Y), R(U, V)$ são operadores de curvatura de $\mathfrak{X}(M)$ e, aqui, $[,]$ denota o comutador de operadores.

- 3) Dizemos que M é *pseudo-simétrica* se existe uma função $\phi \in \mathcal{D}(M)$, tal que o tensor de curvatura R verifica a seguinte condição pontual:

$$R(X, Y) \cdot R = \phi(p) X \wedge Y \cdot R, \quad (2.4)$$

para todo $p \in M$ e $X, Y \in T_p M$, onde $X \wedge Y$ é um operador linear de $T_p M$ definido por

$$X \wedge Y (Z) = \langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y, \quad (2.5)$$

e estendido de modo a agir como uma derivação sobre o tensor de curvatura Riemanniano R da seguinte forma:

$$\begin{aligned} [X \wedge Y \cdot R] (U, V, W) := & [X \wedge Y, R(U, V)] W - R(X \wedge Y(U), V) W \\ & - R(U, X \wedge Y(V)) W. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Claramente cada um dos conceitos definidos acima generaliza o anterior. Mas, em geral, os recíprocos não são verdadeiros, i.e., existem variedades semi-simétricas que não são localmente simétricas e existem variedades pseudo-simétricas que não são semi-simétricas. Takagi em [51] construiu o primeiro exemplo de uma variedade Riemanniana 3-dimensional completa, irredutível, não localmente simétrica, com $R(X, Y) \cdot R = 0$. Por outro lado, Deszcz foi quem apresentou a maioria dos exemplos de variedades pseudo-simétricas que não são semi-simétricas. Na seção 3.3 do capítulo 3 daremos um exemplo de uma variedade pseudo-simétrica que não é semi-simétrica; para outros exemplos ver [22].

2.2 Imersões semi-paralelas

Seja $f : M^n \rightarrow Q^N(c)$ uma imersão isométrica, i.e., uma imersão tal que

$$\langle X, Y \rangle := \langle df_p(X), df_p(Y) \rangle,$$

para todo $p \in M$ e $X, Y \in T_p M$. Aqui e ao longo deste trabalho usamos o mesmo símbolo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para representar as métricas de M^n e $Q^N(c)$. O número $N-n$ é chamado de *codimensão* de f . No caso da codimensão ser 1, a imersão isométrica será chamada de *hipersuperfície*. Para todas as considerações de caráter local de f identificamos

(localmente) M com $f(M)$ e T_pM com $df_p(T_pM)$. Com estas identificações, temos que o produto interno de $T_pQ(c)$ decompõe $T_pQ(c)$ na soma direta

$$T_pQ(c) = T_pM \oplus \nu_p(f),$$

onde $\nu_p(f)$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_pQ(c)$. Obtemos, desta forma, o fibrado vetorial normal $\nu(f) = \bigcup_{p \in M} \nu_p(f)$ de f . Daí, o “pull-back” do fibrado tangente de $Q(c)$ é a soma de Whitney dos fibrados TM e $\nu(f)$

$$f^*(TQ(c)) = TM \oplus \nu(f).$$

Esta soma ortogonal induz projeções canônicas

$$()^T : TM \oplus \nu(f) \rightarrow TM, \quad ()^\perp : TM \oplus \nu(f) \rightarrow \nu(f)$$

que são as componentes tangencial e normal, respectivamente.

Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e ξ um campo normal ao longo de f , i.e., uma seção diferenciável de $\nu(f)$. Então as projeções tangencial e normal determinam as seguintes decomposições ortogonais:

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y) \quad e \quad (2.7)$$

$$\tilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla_X^\perp \xi, \quad (2.8)$$

que são chamadas a *fórmulas de Gauss* e a *fórmula de Weingarten*, respectivamente, onde $\tilde{\nabla}$ é a conexão de Levi-Civita de $Q^N(c)$, $\alpha : TM \oplus TM \rightarrow \nu(f)$ é um tensor simétrico chamado *segunda forma fundamental* de f , $A_\xi : TM \rightarrow TM$ é também um tensor simétrico, chamado *operador de Weingarten na direção ξ* e ∇^\perp é uma conexão em $\nu(f)$ compatível com a métrica e chamada *conexão normal* de f . Os tensores α e A_ξ são relacionados por

$$\langle \alpha(X, Y), \xi \rangle = \langle A_\xi X, Y \rangle. \quad (2.9)$$

Pontualmente, a segunda forma fundamental, por ser um tensor, define para cada $p \in M$ uma aplicação bilinear simétrica que denotamos também por $\alpha : T_pM \times$

$T_p M \rightarrow \nu_p(f)$ da seguinte maneira: para cada par de vetores $v, w \in T_p M$ define-se $\alpha(v, w) = \alpha(X, Y)(p)$, onde $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $X(p) = v$ e $Y(p) = w$. Esta aplicação é chamada *segunda forma fundamental de f no ponto p* . O vetor curvatura média de f num ponto p de M é definido por

$$H(p) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha(e_i, e_i), \quad (2.10)$$

onde e_1, \dots, e_n formam uma base ortonormal de $T_p M$. Então dizemos que f é *pseudo-umbílica* se a segunda forma fundamental α e o vetor de curvatura H de f verificam

$$\langle \alpha(X, Y), H \rangle = \langle X, Y \rangle \|H\|^2, \quad (2.11)$$

para todo $X, Y \in T_p M$ e $p \in M$. Em particular, dizemos que f é *mínima* se $H = 0$; f é *totalmente umbílica* quando a segunda forma fundamental é dada por

$$\alpha(X, Y) = \langle X, Y \rangle H, \quad (2.12)$$

para todo $X, Y \in T_p M$ e $p \in M$; e f é *totalmente geodésica* se $\alpha = 0$. Por outro lado, dizemos que f é *λ -isotrópica* se existe $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$ função tal que

$$\|\alpha(X, X)\| = \lambda(p), \quad (2.13)$$

para qualquer vetor unitário $X \in T_p M$ e todo $p \in M$; em particular, dizemos que f é *λ -isotrópica constante* se λ é uma função constante.

A conexão normal ∇^\perp de f define um tensor R^\perp chamado tensor de *curvatura normal* e é dado por

$$R^\perp(X, Y)\xi := \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \xi - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \xi - \nabla_{[X, Y]}^\perp \xi.$$

Dizemos que f possui *fibrado normal plano* se $R^\perp = 0$.

As equações fundamentais que definem a geometria local de uma imersão isométrica $f : M^n \rightarrow Q^N(c)$ são as conhecidas *equações de Gauss, Codazzi e Ricci*

que no caso de curvatura constante são respectivamente:

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)Z, W \rangle &= c\langle X \wedge Y(Z), W \rangle + \langle \alpha(X, W), \alpha(Y, Z) \rangle \\ &\quad - \langle \alpha(X, Z), \alpha(Y, W) \rangle, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$(\bar{\nabla}\alpha)(X, Y, Z) = (\bar{\nabla}\alpha)(X, Z, Y), \quad (2.15)$$

$$R^\perp(X, Y)\xi = \alpha(X, A_\xi(Y)) - \alpha(A_\xi(X), Y), \quad (2.16)$$

onde $\bar{\nabla} = \nabla \oplus \nabla^\perp$ denota a conexão de var der Waerden-Bortolotti do fibrado $TM \oplus \nu(f)$ e $\bar{\nabla}\alpha : TM \oplus TM \oplus TM \rightarrow \nu(f)$ é a derivada covariante de α com respeito a $\bar{\nabla}$ e definida por

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}\alpha)(X, Y, Z) &:= (\bar{\nabla}_Z\alpha)(X, Y) \\ &= \nabla_Z^\perp[\alpha(Y, Z)] - \alpha(\nabla_Z Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_Z Z). \end{aligned} \quad (2.17)$$

A segunda derivada covariante $\bar{\nabla}^2\alpha : TM \oplus TM \oplus TM \oplus TM \rightarrow \nu(f)$ é uma aplicação definida por

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}^2\alpha)(X, Y, Z, W) &:= (\bar{\nabla}_W\bar{\nabla}_Z\alpha)(X, Y) \\ &= \nabla_W^\perp[(\bar{\nabla}_Z\alpha)(X, Y)] - (\bar{\nabla}_Z\alpha)(\nabla_W X, Y) \\ &\quad - (\bar{\nabla}_Z\alpha)(X, \nabla_W Y) - (\bar{\nabla}_{\nabla_W Z}\alpha)(X, Y). \end{aligned} \quad (2.18)$$

As definições dadas acima são relacionadas no seguinte resultado abaixo:

Lema 2.2.1 *A segunda forma fundamental α de qualquer imersão isométrica f verifica a seguinte identidade:*

$$\begin{aligned} &(\bar{\nabla}_X\bar{\nabla}_Y\alpha)(Z, W) - (\bar{\nabla}_Y\bar{\nabla}_X\alpha)(Z, W) \\ &= R^\perp(X, Y)[\alpha(Z, W)] - \alpha(R(X, Y)Z, W) - \alpha(Z, R(X, Y)W). \end{aligned} \quad (2.19)$$

para todo $X, Y, Z, W \in TM$.

Demonstração: Com efeito, calculemos primeiro $\bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y \alpha$

$$\begin{aligned}
(\bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y \alpha)(Z, W) &= \nabla_X^\perp [(\bar{\nabla}_Y \alpha)(Z, W)] - (\bar{\nabla}_Y \alpha)(\nabla_X Z, W) \\
&\quad - (\bar{\nabla}_Y \alpha)(Z, \nabla_X W) - (\bar{\nabla}_{\nabla_X Y} \alpha)(Z, W) \\
&= \nabla_X^\perp [\nabla_Y^\perp [\alpha(Z, W)] - \alpha(\nabla_Y Z, W) - \alpha(Z, \nabla_Y W)] \\
&\quad - \{ \nabla_Y^\perp [\alpha(\nabla_X Z, W)] - \alpha(\nabla_Y \nabla_X Z, W) - \alpha(\nabla_X Z, \nabla_Y W) \} \\
&\quad - \{ \nabla_Y^\perp [\alpha(Z, \nabla_X W)] - \alpha(\nabla_Y Z, \nabla_X W) - \alpha(Z, \nabla_Y \nabla_X W) \} \\
&\quad - \{ \nabla_{\nabla_X Y}^\perp [\alpha(Z, W)] - \alpha(\nabla_{\nabla_X Y} Z, W) - \alpha(Z, \nabla_{\nabla_X Y} W) \},
\end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned}
(\bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y \alpha)(Z, W) &= \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp [\alpha(Z, W)] - \nabla_X^\perp [\alpha(\nabla_Y Z, W)] \quad (2.20) \\
&\quad - \nabla_X^\perp [\alpha(Z, \nabla_Y W)] - \nabla_Y^\perp [\alpha(\nabla_X Z, W)] \\
&\quad + \alpha(\nabla_Y \nabla_X Z, W) + \alpha(\nabla_X Z, \nabla_Y W) \\
&\quad - \nabla_Y^\perp [\alpha(Z, \nabla_X W)] + \alpha(\nabla_Y Z, \nabla_X W) \\
&\quad + \alpha(Z, \nabla_Y \nabla_X W) - \nabla_{\nabla_X Y}^\perp [\alpha(Z, W)] \\
&\quad + \alpha(\nabla_{\nabla_X Y} Z, W) + \alpha(Z, \nabla_{\nabla_X Y} W).
\end{aligned}$$

Analogamente, calculamos $\bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X \alpha$:

$$\begin{aligned}
(\bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X \alpha)(Z, W) &= \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp [\alpha(Z, W)] - \nabla_Y^\perp [\alpha(\nabla_X Z, W)] \quad (2.21) \\
&\quad - \nabla_Y^\perp [\alpha(Z, \nabla_X W)] - \nabla_X^\perp [\alpha(\nabla_Y Z, W)] \\
&\quad + \alpha(\nabla_Y Z, \nabla_X W) + \alpha(\nabla_X \nabla_Y Z, W) \\
&\quad - \nabla_X^\perp [\alpha(Z, \nabla_Y W)] + \alpha(\nabla_X Z, \nabla_Y W) \\
&\quad + \alpha(Z, \nabla_X \nabla_Y W) - \nabla_{\nabla_Y X}^\perp [\alpha(Z, W)] \\
&\quad + \alpha(\nabla_{\nabla_Y X} Z, W) + \alpha(Z, \nabla_{\nabla_Y X} W).
\end{aligned}$$

Logo de (2.20) e (2.21), obtemos que

$$\begin{aligned}
& (\bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y \alpha)(Z, W) - (\bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X \alpha)(Z, W) \\
= & \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp [\alpha(Z, W)] - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp [\alpha(Z, W)] - \nabla_{[X, Y]}^\perp [\alpha(Z, W)] \\
& - \alpha(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - (\nabla_{\nabla_X Y} Z - \nabla_{\nabla_Y X} Z), W) \\
& - \alpha(Z, \nabla_X \nabla_Y W - \nabla_Y \nabla_X W - \nabla_{[X, Y]} W) \\
= & R^\perp(X, Y)[\alpha(Z, W)] - \alpha(R(X, Y)Z, W) - \alpha(Z, R(X, Y)W).
\end{aligned}$$

□

Os análogos extrínsecos das definições dadas em (2.1.1)(1)-(2) são os seguintes:

Definição 2.2.2 Seja $f : M^n \rightarrow Q^N(c)$ uma imersão isométrica.

- 1) Dizemos que f é *localmente paralela* (ou *extrinsicamente simétrica* na terminologia de Ferus) se $\bar{\nabla}\alpha = 0$. Ou, equivalentemente, se

$$\nabla_X^\perp [\alpha(Y, Z)] = \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z), \quad (2.22)$$

para todo $X, Y, Z \in TM$.

- 2) Dizemos que f é *semi-paralela* se

$$\bar{R}(X, Y) \cdot \alpha := \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y \alpha - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X \alpha = 0, \quad (2.23)$$

para todo $X, Y \in TM$. Ou equivalentemente, se

$$R^\perp(X, Y)[\alpha(Z, W)] = \alpha(R(X, Y)Z, W) - \alpha(Z, R(X, Y)W), \quad (2.24)$$

para todo $X, Y, Z, W \in TM$. Em (2.23) \bar{R} denota o tensor de curvatura da conexão $\bar{\nabla}$, estendido de modo a agir como uma derivação sobre o tensor α .

Observação 2.2.3 Ferus (Deprez) provou que se $f : M^n \rightarrow Q^N(c)$ é uma imersão localmente paralela (semi-paralela), então M é uma variedade localmente simétrica (semi-simétrica).

Claramente, cada um dos conceitos definidos em (2.2.2) generaliza o anterior. Mas, em geral, a recíproca não é verdadeira, i.e., existem imersões semi-simétricas que não são localmente paralelas. Com efeito, J. Deprez apresentou em [19] os primeiros exemplos de imersões semi-paralelas que não são paralelas e provou o seguinte teorema de classificação para hipersuperfícies semi-paralelas de espaços Euclidianos:

Teorema 2.2.4 *Seja M^n uma hipersuperfície semi-paralela de \mathbb{R}^{n+1} . Então, existem três possibilidades:*

- a) M^n é plana;
- b) M^n possui segunda forma fundamental paralela; daí é uma parte aberta de $S^k \times \mathbb{R}^{n-k}$;
- c) M^n é um cone circular, ou um produto de um cone circular e um subespaço linear.

No Teorema 2.2.4, as únicas hipersuperfícies semi-paralelas *próprias*, i.e., não paralelas, de espaços Euclidianos são as (hiper)superfícies de rotação, obtidas por rotação de uma linha reta de algum plano perfil em torno de um eixo deste plano.

No caso do espaço ambiente possuir curvatura $c \neq 0$, F. Dillen em [26] obteve o seguinte teorema de classificação das hipersuperfícies semi-paralelas:

Teorema 2.2.5 *Seja M^n uma hipersuperfície semi-paralela de uma forma espacial $Q^{n+1}(c)$ com $c \neq 0$. Então existem três possibilidades:*

- a) $n = 2$ e M^2 é plana;
- b) M^n possui segunda forma fundamental paralela, daí é uma parte aberta de um produto de no máximo duas esferas.
- c) M^n é uma hipersuperfície de rotação cuja curva perfil é uma hélice.

No Teorema 2.2.5, as únicas hipersuperfícies semi-paralelas próprias de uma forma espacial $Q^{n+1}(c)$ com $c \neq 0$ são as (hiper)superfícies de rotação, cuja curva perfil é uma helice.

Agora em nível de superfícies semi-paralelas, é conhecido o seguinte teorema de caracterização, obtido por Deprez para $c = 0$ e por Asperti-Mercuri para $c \neq 0$ (ver [18], [2]).

Teorema 2.2.6 *Seja $f : M^2 \rightarrow Q^N(c)$ uma imersão de uma superfície conexa. Então f é semi-paralela se, e somente se,*

- i) *f é uma imersão totalmente umbílica ou*
- ii) *Existe um subconjunto aberto e denso U de M tal que f restrito a cada componente conexa de U é*
 - (a) *uma imersão de uma superfície plana com $R^\perp = 0$, ou*
 - (b) *uma imersão isotrópica com codimensão não máximo 3 e $\|H\|^2 = 3K - c$.*

Imersões do tipo (ii)(a) foram estudadas por Chen (ver [14]), e exemplos são os produtos de curvas e superfícies regradas em \mathbb{R}^3 . As imersões de (ii)(b) são exemplos das chamadas superfície de Weingarten.

Capítulo 3

Imersões pseudo-paralelas

O primeiro objetivo deste capítulo é definir e introduzir as propriedades básicas de uma nova classe de imersões isométricas em formas espaciais, que chamaremos *imersões pseudo-paralelas*. O segundo é apresentar exemplos explícitos de tais imersões junto com os primeiros resultados interessantes de caráter local e global sobre as imersões pseudo-paralelas, em nível de superfícies, hipersuperfícies, imersões com codimensão dois e também com codimensão mais alta. Para obter esses resultados utilizaremos as técnicas usuais da teoria de imersões isométricas e o método do referencial móvel.

3.1 Definição e fatos básicos das imersões pseudo-paralelas

Definição 3.1.1 Uma imersão isométrica $f : M^n \rightarrow Q^N(c)$ é chamada *pseudo-paralela* se existe uma função $\phi \in \mathcal{D}(M)$, tal que

$$\bar{R}(X, Y) \cdot \alpha = \phi(p) X \wedge Y \cdot \alpha, \quad (3.1)$$

para todo $p \in M$ e $X, Y \in T_p M$, onde $\overline{R}(X, Y) \cdot \alpha$ e $X \wedge Y$ são estendidas de modo a agir sobre a segunda forma fundamental α de f da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} [\overline{R}(X, Y) \cdot \alpha](Z, W) &= (\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y \alpha)(Z, W) - (\overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X \alpha)(Z, W) \\ [X \wedge Y \cdot \alpha](Z, W) &= -\alpha(X \wedge Y(Z), W) - \alpha(Z, X \wedge Y(W)), \end{aligned} \quad (3.2)$$

para todo $Z, W \in T_p M$.

Observe que usando o Lema 2.2.1 a condição (3.1) é equivalente à condição

$$\begin{aligned} R^\perp(X, Y)[\alpha(Z, W)] &= \alpha(R(X, Y)Z, W) + \alpha(Z, R(X, Y)W) \\ &\quad - \phi(p)\langle Y, Z \rangle \alpha(X, W) + \phi(p)\langle X, Z \rangle \alpha(Y, W) \\ &\quad - \phi(p)\langle Y, W \rangle \alpha(Z, X) + \phi(p)\langle X, W \rangle \alpha(Z, Y), \end{aligned} \quad (3.3)$$

para todo ponto $p \in M$ e $X, Y, Z, W \in T_p M$.

Ao longo de todo este trabalho, a condição (3.1) será chamada uma *condição de pseudo-parallelismo* da segunda forma fundamental da imersão. Além disso, quando dizemos que uma imersão é pseudo-paralela, usaremos a letra grega ϕ para denotar a função que aparece na condição de pseudo-parallelismo, a menos que seja dito o contrário.

Observação 3.1.2 O conceito de pseudo-parallelismo dado na Definição 3.1.1 pode ser claramente estendida a qualquer espaço ambiente que tenha estrutura de variedade Riemanniana ou semi-Riemanniana. Mas, neste trabalho estudamos somente o caso em que o espaço ambiente é uma forma espacial.

Exemplo 3.1.3 Os primeiros exemplos de imersões pseudo-paralelas são obviamente todas as imersões semi-paralelas (em particular, as imersões paralelas), já que, para tal fim basta tomar $\phi = 0$. Agora é natural fazer a seguinte pergunta:

Existem imersões pseudo-paralelas que não são semi-paralelas?

Mas a resposta desta pergunta será dada somente nas seguintes seções 3.2, 3.3 e 3.4, onde serão apresentados vários exemplos de imersões pseudo-paralelas *próprias*, i.e., não semi-paralelas. Isto provará que a classe de imersões pseudo-paralelas contém propriamente a classe de imersões semi-paralelas.

Observação 3.1.4 Seja $f : M^n \rightarrow Q^N(c)$ uma imersão isométrica. Suponhamos que existe uma função $\phi \in \mathcal{D}(M)$ tal que f torna-se ϕ -pseudo-paralela. Então, em geral, não podemos garantir que ϕ seja a única função que torna f uma imersão pseudo-paralela, pois, podem existir outras funções $\psi \in \mathcal{D}(M)$ tal que f seja ψ -pseudo-paralela. Por exemplo, no caso de imersões totalmente umbílicas, ϕ pode ser qualquer função diferenciável, devido a que (3.2) é sempre zero.

Vejamos agora que a condição de pseudo-parallelismo é um análogo extrínseco natural da condição de pseudo-simetria no sentido de Deszcz.

Proposição 3.1.5 *Seja $f : M^n \rightarrow Q^N(c)$ uma imersão ϕ -pseudo-paralela. Então M é uma variedade ϕ -pseudo-simétrica.*

Demonstração: Usando a equação de Gauss na definição de $R(X, Y) \cdot R$ dada em (2.3), temos que

$$\begin{aligned}
& \langle [R(U, V) \cdot R](X, Y, Z), W \rangle & (3.4) \\
= & -c\{ \langle (X \wedge Y)(Z), R(U, V)W \rangle + \langle (X \wedge Y)(R(U, V)Z), W \rangle \\
& + \langle ([R(U, V)X] \wedge Y)(Z), W \rangle + \langle (X \wedge [R(U, V)Y])(Z), W \rangle \} \\
& + \langle \alpha(X, Z), \alpha(R(U, V)W, Y) + \alpha(W, R(U, V)Y) \rangle \\
& - \langle \alpha(Y, Z), \alpha(R(U, V)X, W) + \alpha(X, R(U, V)W) \rangle \\
& + \langle \alpha(W, Y), \alpha(R(U, V)X, Z) + \alpha(X, R(U, V)Z) \rangle \\
& - \langle \alpha(X, W), \alpha(R(U, V)Y, Z) + \alpha(Y, R(U, V)Z) \rangle.
\end{aligned}$$

Agora usamos (3.3) no lado direito da igualdade (3.4) e aplicamos a equação de Gauss novamente, para obtermos que

$$\begin{aligned}
& \langle [R(U, V) \cdot R](X, Y, Z), W \rangle \\
&= \phi \{ \langle \alpha(X, Z), \alpha(Y, (U \wedge V)(W)) \rangle - \langle \alpha(X, (U \wedge V)(W)), \alpha(Y, Z) \rangle \\
&\quad + \langle \alpha((U \wedge V)(X), Z), \alpha(Y, W) \rangle - \langle \alpha((U \wedge V)(X), W), \alpha(Y, Z) \rangle \\
&\quad + \langle \alpha(X, Z), \alpha((U \wedge V)(Y), W) \rangle - \langle \alpha(X, W), \alpha((U \wedge V)(Y), Z) \rangle \\
&\quad + \langle \alpha(X, (U \wedge V)(Z)), \alpha(Y, W) \rangle - \langle \alpha(X, W), \alpha(Y, (U \wedge V)(Z)) \rangle \} \\
&= \phi [(U \wedge V) \cdot R](X, Y, Z).
\end{aligned}$$

□

A proposição 3.1.5 mostrou que a classe de imersões pseudo-paralelas está completamente contida na classe de imersões pseudo-simétricas. Nas seguintes seções 3.2 e 3.3 mostraremos que a inclusão é própria, i.e., existem imersões pseudo-simétricas que não são pseudo-paralelas.

Vejamos agora outras propriedades que verificam as imersões pseudo-paralelas.

Proposição 3.1.6 *Seja $f : M^n \rightarrow Q^N(c)$ uma imersão ϕ -pseudo-paralela. Se $g : Q^N(c) \rightarrow Q^{\tilde{N}}(\tilde{c})$ é uma imersão totalmente umbílica, então $g \circ f : M^n \rightarrow Q^{\tilde{N}}(\tilde{c})$ é uma imersão ϕ -pseudo-paralela.*

Demonstração: Sejam α^f e $\alpha^{g \circ f}$ a segunda forma fundamental de f, g e $g \circ f$, respetivamente. Sejam R_f^\perp e $R_{g \circ f}^\perp$ os operadores de curvatura normais de f e $g \circ f$, respetivamente. Sejam \bar{R}_f e $\bar{R}_{g \circ f}$ os tensores de curvaturas das conexões de var der Waerden-Bortolotti $\bar{\nabla}^f$ e $\bar{\nabla}^{g \circ f}$ dos respectivos fibrados $TM \oplus \nu(f)$ e $TM \oplus \nu(g \circ f)$. Se H^g é o vetor curvatura média da imersão g , então usando as seguintes igualdades de fácil verificação:

$$\begin{aligned}
\alpha^{g \circ f}(Z, W) &= g_* (\alpha^f(Z, W)) + \langle Z, W \rangle H^g, \\
R_{g \circ f}^\perp(X, Y) [g_* (\alpha^f(Z, W))] &= g_* (R_f^\perp(X, Y) [\alpha^f(Z, W)]), \\
R_{g \circ f}^\perp(X, Y) H^g &= 0,
\end{aligned}$$

para todo $X, Y, Z, W \in TM$, obtemos que a imersão $g \circ f$ verifica a condição de pseudo-parallelismo. De fato:

$$\begin{aligned}
\left[\bar{R}^{g \circ f}(X, Y) \cdot \alpha^{g \circ f} \right] (Z, W) &= R_{g \circ f}^\perp(X, Y) [\alpha^{g \circ f}(Z, W)] - \alpha^{g \circ f}(R(X, Y)Z, W) \\
&\quad - \alpha^{g \circ f}(Z, R(X, Y)W) \\
&= g_*(R_f^\perp(X, Y) [\alpha^f(Z, W)]) + \langle Z, W \rangle R_{g \circ f}^\perp(X, Y) H^g \\
&\quad - g_*(\alpha^f(R(X, Y)Z, W)) - \langle R(X, Y)Z, W \rangle H^g \\
&\quad - g_*(\alpha^f(Z, R(X, Y)W)) - \langle Z, R(X, Y)W \rangle H^g \\
&= g_*(\phi [X \wedge Y \cdot \alpha^f] (Z, W)) \\
&= \phi \{ -g_*(\alpha^f(X \wedge Y(Z), W) - \alpha^f(Z, X \wedge Y(W))) \\
&\quad - \langle X \wedge Y(Z), W \rangle H^g - \langle Z, X \wedge Y(W) \rangle H^g \} \\
&= \phi \{ -\alpha^{g \circ f}(X \wedge Y(Z), W) - \alpha^{g \circ f}(Z, X \wedge Y(W)) \} \\
&= \phi [X \wedge Y \cdot \alpha^{g \circ f}] (Z, W).
\end{aligned}$$

□

Na seção 3.4 mostraremos com um exemplo que a composição de imersões pseudo-parallelas não é em geral pseudo-parallelas.

Proposição 3.1.7 *Seja $f : M \rightarrow Q^N(c)$ uma imersão ϕ -pseudo-parallelas. Então o tensor de curvatura normal R^\perp de f verifica a seguinte condição*

$$\bar{R}(X, Y) \cdot R^\perp = \phi(p) X \wedge Y \cdot R^\perp, \quad (3.5)$$

para todo $p \in M$ e $X, Y \in T_p M$.

Demonstração: A derivada covariante de $\bar{\nabla} R^\perp$ é definida por

$$\begin{aligned}
(\bar{\nabla}_X R^\perp)(Y, Z, \xi) &:= \nabla_X^\perp [R^\perp(Y, Z) \xi] - R^\perp(\nabla_X Y, Z) \xi \\
&\quad - R^\perp(Y, \nabla_X Z) \xi - R^\perp(Y, Z) (\nabla_X \xi),
\end{aligned}$$

para todo $Y, Z \in T_p M$ e $\xi \in \nu_p(f)$. A segunda derivada covariante de $\bar{\nabla}^2 R^\perp$ é definida por

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y R^\perp)(Z, W, \xi) &:= \nabla_X^\perp [(\bar{\nabla}_Y R^\perp)(Z, W, \xi)] - (\bar{\nabla}_Y R^\perp)(\nabla_X Z, W, \xi) \\ &\quad - (\bar{\nabla}_Y R^\perp)(Z, \nabla_X W, \xi) - (\bar{\nabla}_Y R^\perp)(Z, W, \nabla_X^\perp \xi) \\ &\quad - (\bar{\nabla}_{\nabla_X Y} R^\perp)(Z, W, \xi). \end{aligned}$$

Daí, a definição de $\bar{R}(X, Y) \cdot R^\perp := \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y R^\perp - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X R^\perp$ é equivalente à seguinte igualdade

$$\begin{aligned} (\bar{R}(X, Y) \cdot R^\perp)(Z, W, \xi) &= R^\perp(X, Y)[R^\perp(Z, W)\xi] - R^\perp(R(X, Y)Z, W)\xi \\ &\quad - R^\perp(Z, R(X, Y)W)\xi - R^\perp(Z, W)[R^\perp(X, Y)\xi], \end{aligned}$$

que junto com a definição de $X \wedge Y \cdot R^\perp$, dada por:

$$(X \wedge Y \cdot R^\perp)(Z, W, \xi) := -R^\perp(X \wedge Y(Z), W)\xi - R^\perp(Z, X \wedge Y(W))\xi,$$

a equação de Ricci $\langle R(X, Y)\xi, \eta \rangle = \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y \rangle$ e o pseudo-parallelismo de f $\bar{R}(X, Y) \cdot \alpha = \phi(p) X \wedge Y \cdot \alpha$, implicam diretamente que

$$\langle (\bar{R}(X, Y) \cdot R^\perp)(Z, W, \xi), \eta \rangle = \langle \phi(p)(X \wedge Y \cdot R^\perp)(Z, W, \xi), \eta \rangle,$$

para todo $p \in M$ e $X, Y \in T_p M$ e $\xi, \eta \in \nu_p(f)$. □

Observação 3.1.8 Observe que a condição (3.5) é análoga à condição de pseudo-parallelismo da segunda forma fundamental. A recíproca da Proposição 3.1.7 é falsa em geral, pois toda hipersuperfície satisfaz a condição (3.5), mas existem muitas hipersuperfícies que não são pseudo-parallelas como será observado na seção 3.3 deste capítulo.

Lema 3.1.9 *Seja $f : M^n \rightarrow Q^N(c)$ uma imersão pseudo-parallelas. Se $R^\perp(p) = 0$, para algum $p \in M$, então existe uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $T_p M$ tal que*

$$(\phi(p) - c - \langle \alpha_{ii}, \alpha_{jj} \rangle)(\alpha_{ii} - \alpha_{jj}) = 0 \tag{3.6}$$

para todo $i \neq j$, onde $\alpha_{ii} := \alpha(e_i, e_i)$.

Demonstração: Como $R^\perp(p) = 0$, sabemos que existe $\{e_1, \dots, e_n\}$ base ortonormal de $T_p M$ que diagonaliza todos os operadores de Weingarten de f ; aplicando a definição de pseudo-parallelismo aos vetores desta base, obtemos a igualdade (3.6), já que, para cada $i \neq j$, temos que:

$$\begin{aligned} (c + \langle \alpha_{ii}, \alpha_{jj} \rangle) (\alpha_{jj} - \alpha_{ii}) &= (\bar{R}(e_i, e_j) \cdot \alpha)(e_i, e_j) \\ &= \phi(p)(e_i \wedge e_j \cdot \alpha)(e_i, e_j) \\ &= \phi(p)(\alpha_{jj} - \alpha_{ii}). \end{aligned}$$

□

Lema 3.1.10 *Seja $f : M \rightarrow Q^N(c)$ uma imersão pseudo-paralela. Então*

$$R^\perp(X, Y)H = 0,$$

para todo X, Y vetores tangentes a M .

Demonstração: Seja ξ um vetor normal unitário e seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal de $T_p M$ formada por auto-vetores de A_ξ . Então

$$\begin{aligned} \langle R^\perp(X, Y)H, \xi \rangle &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle R^\perp(X, Y)[\alpha(e_i, e_i)], \xi \rangle \\ &= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \langle \alpha(R(X, Y)e_i, e_i) - \phi\alpha(X \wedge Y(e_i), e_i), \xi \rangle \\ &= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n (\langle A_\xi e_i, R(X, Y)e_i \rangle - \phi \langle A_\xi e_i, X \wedge Y(e_i) \rangle) \\ &= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n (\langle \lambda_i e_i, R(X, Y)e_i \rangle - \phi \langle \lambda_i e_i, X \wedge Y(e_i) \rangle) = 0, \end{aligned}$$

onde $\lambda_i = \langle A_\xi e_i, e_i \rangle$ são as curvaturas principais de f em p na direção ξ , $i = 1, \dots, n$.

□

Agora provamos o Teorema 1.0.1 dado na introdução e que voltamos a enunciar, na demonstração seguiremos as mesmas técnicas utilizadas na prova da Lema 3.2 de Mirzoyan, ver [40].

Teorema 3.1.11 *Seja $f : M^n \rightarrow Q^N(c)$ uma imersão pseudo-paralela. Se $H(p)=0$ e $\phi(p) \geq c$ para algum $p \in M$, então p é um ponto geodésico, i.e., a segunda forma fundamental de f se anula em p .*

Demonstração: Seja $f : M^n \rightarrow Q^N(c)$ uma imersão isométrica. Escolhendo um referencial de campos ortonormais locais $\{e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_N\}$ adaptado a f , temos que as componentes da segunda forma fundamental α são definidas por

$$h_{ij}^\sigma := \langle \alpha(e_i, e_j), e_\sigma \rangle;$$

as componentes da derivada covariante de α são definidas por

$$h_{ijk}^\sigma := \langle (\bar{\nabla}_{e_k} \alpha)(e_i, e_j), e_\sigma \rangle = \bar{\nabla}_{e_k} h_{ij}^\sigma;$$

e as componentes da segunda derivada covariante de α são definidas por

$$h_{ijkl}^\sigma := \langle (\bar{\nabla}_{e_l} \bar{\nabla}_{e_k} \alpha)(e_i, e_j), e_\sigma \rangle = \bar{\nabla}_{e_l} h_{ijk}^\sigma = \bar{\nabla}_{e_l} \bar{\nabla}_{e_k} h_{ij}^\sigma.$$

Então, temos que f é pseudo-paralela se, e somente se,

$$h_{ijkl}^\sigma = h_{ijlk}^\sigma - \phi \{ \delta_{ki} h_{lj}^\sigma - \delta_{li} h_{kj}^\sigma + \delta_{kj} h_{il}^\sigma - \delta_{lj} h_{ik}^\sigma \}, \quad (3.7)$$

onde $i, j, k, l = 1, \dots, n$ e $\sigma = n+1, \dots, N$.

Lembramos que o operador Laplaciano Δh_{ij}^σ de h_{ij}^σ é definido por

$$\Delta h_{ij}^\sigma = \sum_{k=1}^n h_{ijkk}^\sigma,$$

ver [16]. Então

$$\frac{1}{2} \Delta (\|\alpha\|^2) = \sum_{i,j,k=1}^n \sum_{\sigma=n+1}^N h_{ij}^\sigma h_{ijkk}^\sigma + \|\bar{\nabla} \alpha\|^2, \quad (3.8)$$

onde $\|\alpha\|^2 = \sum_{i,j=1}^n \sum_{\sigma=n+1}^N (h_{ij}^\sigma)^2$ é o quadrado da norma da segunda forma fundamental e $\|\bar{\nabla}\alpha\|^2 = \sum_{i,j,k=1}^n \sum_{\sigma=n+1}^N (h_{ijk}^\sigma)^2$. Por outro lado, segundo [14] pp. 90-91, temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta (\|\alpha\|^2) &= \sum_{i,j=1}^n \sum_{\sigma=n+1}^N h_{ij}^\sigma (\bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_j} H^\sigma) + nc (\|\alpha\|^2 - n \|H\|^2) \quad (3.9) \\ &\quad - \sum_{\sigma,\tau=n+1}^N ((\text{traço}(A_\sigma \circ A_\tau))^2 + \|[A_\sigma, A_\tau]\|^2) \\ &\quad + \sum_{\sigma,\tau=n+1}^N H^\tau \text{traço}(A_\sigma \circ A_\tau \circ A_\sigma) + \|\bar{\nabla}\alpha\|^2, \end{aligned}$$

onde $H^\sigma = \sum_{k=1}^n h_{kk}^\sigma$, $\|H\|^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{\sigma=n+1}^N (H^\sigma)^2$ e $A_{e_\sigma} = A_\sigma$. Agora, usando (3.7) e a equação de Codazzi $h_{ijk}^\sigma = h_{ikj}^\sigma$ sobre o lado direito de (3.8), obtemos que

$$\frac{1}{2} \Delta (\|\alpha\|^2) = \sum_{i,j=1}^n \sum_{\sigma=n+1}^N h_{ij}^\sigma (\bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_j} H^\sigma) + n\phi (\|\alpha\|^2 - n \|H\|^2) + \|\bar{\nabla}\alpha\|^2. \quad (3.10)$$

Então de (3.9) e (3.10) segue-se que qualquer imersão pseudo-paralela verifica o seguinte:

$$\begin{aligned} n(\phi - c)(\|\alpha\|^2 - n \|H\|^2) + \sum_{\sigma,\tau=n+1}^N [(\text{traço}(A_\sigma \circ A_\tau))^2 \\ + \|[A_\sigma, A_\tau]\|^2 - H^\tau \text{traço}(A_\sigma \circ A_\tau \circ A_\sigma)] = 0. \end{aligned}$$

Agora, se $H(p) = 0$ para $p \in M$, então $H^\sigma = 0$ para todo σ e, no ponto p , temos que

$$n(\phi(p) - c) \|\alpha\|^2 + \sum_{\sigma,\tau=n+1}^N ((\text{traço}(A_\sigma \circ A_\tau))^2 + \|[A_\sigma, A_\tau]\|^2) = 0.$$

Se $\phi(p) \geq c$, segue-se que $\text{traço}(A_\sigma \circ A_\tau) = 0$, para todo $\sigma, \tau = n+1, \dots, N$. Em particular, temos $\|A_\sigma\|^2 = \text{traço}(A_\sigma \circ A_\sigma) = 0$ para todo $\sigma = n+1, \dots, N$; consequentemente $\alpha(p) = 0$. Isto prova, o Teorema 1.0.1. \square

Observação 3.1.12 A hipótese de minimalidade pontual no Teorema 1.0.1 não pode ser excluída do enunciado, já que as hipersuperfícies umbílicas $S^n(k) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ são exemplos de imersões ϕ -pseudo-paralelas não totalmente geodésicas com $H(p) \neq 0$ e $\phi(p) \geq 0$, para todo ponto p . Analogamente a hipótese $\phi(p) \geq c$ no Teorema 1.0.1 não pode ser excluída, pois existem imersões ϕ -pseudo-paralelas mínimas que não são totalmente geodésicas com $\phi < c$. Como exemplo, temos uma n -variedade de Veronese, i.e., uma imersão mínima de uma esfera n -dimensional de curvatura seccional constante $\frac{nc}{2(n+1)}$ em alguma esfera $S^N(c)$, onde $N = \left(\frac{n(n+3)}{2} - 1\right)$. Ferus em [29], provou que esses tipos de imersões são paralelas, mínimas e não totalmente umbílicas. Portanto, são pseudo-paralelas mínimas, não totalmente geodésicas, com $\phi = 0 < c$. Alguns outros exemplos serão dados na seção 3.2, onde consideramos superfícies pseudo-paralelas mínimas. Isto responderá afirmativamente à seguinte pergunta:

Existem imersões pseudo-paralelas próprias e mínimas em $Q^N(c)$ com $\phi < c$?

Fechamos esta seção com o seguinte resultado:

Lema 3.1.13 *Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ uma imersão pseudo-paralela de uma variedade M compacta. Se $\phi \geq 0$ e o vetor de curvatura média H verifica a condição $\bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y H = 0$ para quaisquer X, Y , vetores tangentes a M , então f é paralela.*

Demonstração: Como f é pseudo-paralela e verifica a condição $\bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y H = 0$ para quaisquer X, Y , vetores tangentes a M , então segue-se de (3.10) que $\frac{1}{2} \Delta (\|\alpha\|^2) = n\phi (\|\alpha\|^2 - n \|H\|^2) + \|\bar{\nabla}\alpha\|^2$, já que qualquer imersão isométrica verifica a condição $\|\alpha\|^2 \geq n \|H\|^2$ e por hipótese $\phi \geq 0$. Então, segue-se que $\Delta (\|\alpha\|^2) \geq 0$. Mas, por hipótese, M é compacta; portanto, pelo lema de Hopf (ver [14] pag.11) podemos concluir que $\Delta (\|\alpha\|^2) = 0$. Consequentemente, obtemos que $\bar{\nabla}\alpha = 0$, i.e., f é paralela. \square

Corolário 3.1.14 *Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ uma imersão pseudo-paralela de uma variedade M compacta. Se $\phi \geq 0$ e o vetor de curvatura média é paralelo, então f é paralela.*

3.2 Superfícies pseudo-paralelas

Qualquer superfície M^2 é semi-simétrica e, conseqüentemente, pseudo-simétrica com qualquer função $\phi \in \mathcal{D}(M^2)$. De fato, $R(X, Y) \cdot R = 0 = (X \wedge Y) \cdot R$, para todo $X, Y \in TM^2$. Portanto, apesar da condição de pseudo-parallelismo ser verificada por todas as superfícies, nesta seção veremos que a condição de pseudo-parallelismo é restritiva para superfícies imersas em formas espaciais N -dimensionais $Q^N(c)$.

Seja $f : M^2 \rightarrow Q^N(c)$ uma imersão de uma variedade 2-dimensional, M^2 , numa forma espacial $Q^N(c)$. Seja $\{e_1, e_2\}$ um referencial local ortonormal tangente e denotemos, como antes, $\alpha_{ij} := \alpha(e_i, e_j)$, onde α é a segunda forma fundamental de f . Também, K denotará a curvatura Gaussiana de M^2 e $R^\perp := R^\perp(e_1, e_2)$ o operador de curvatura normal de f . Então a condição de pseudo-parallelismo (3.3) pode ser reescrita como segue:

$$\left. \begin{aligned} R^\perp(\alpha_{11}) &= 2(\phi - K)\alpha_{12} = -R^\perp(\alpha_{22}) \\ R^\perp(\alpha_{12}) &= (K - \phi)(\alpha_{11} - \alpha_{22}). \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

Uma conseqüência de (3.11) é o seguinte resultado:

Lema 3.2.1 *Toda superfície M^2 imersa em $Q^N(c)$ com $R^\perp = 0$ é pseudo-paralela com $\phi = K$. Reciprocamente, toda superfície semi-paralela ou pseudo-paralela própria em $Q^N(c)$ com $\phi = K$ possui $R^\perp = 0$.*

Demonstração: Seja $f : M^2 \rightarrow Q^N(c)$ uma imersão com $R^\perp = 0$. Se f é umbílica, então claramente f é pseudo-paralela com qualquer função ϕ diferenciável; em particular, para $\phi = K$, ver Lema 3.1.9. Agora suponhamos que f não é umbílica, i.e., o conjunto $M \setminus U$, onde U representa o conjunto dos pontos umbílicos de f , é não-vazio. Por hipótese, para os pontos de $M \setminus U$ existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de vetores tangentes a M , tal que $\alpha_{12} = 0$ e $\alpha_{11} \neq \alpha_{22}$. Assim, pelo Lema 3.1.9 podemos definir $\phi = K$ sobre $M \setminus U$ e U . Como conseqüência disso, segue-se que f é ϕ -pseudo-paralela. A recíproca do Lema 3.2.1 é trivial, pois dos teoremas de

caracterização das superfícies semi-paralelas dados em [18] para $c = 0$ e em [2] para $c \neq 0$ e apresentados no final do Capítulo 2, sabemos que $R^\perp = 0$ e no caso da superfície ser pseudo-paralela própria com $\phi = K$, segue-se claramente de (3.11) que $R^\perp = 0$. \square

Observação 3.2.2 Uma consequência direta do Lema 3.2.1 é que: “*Toda imersão isométrica $f : M^2 \rightarrow Q^3(c)$ é uma imersão pseudo-paralela*”. Na seção 3.2 veremos que este fato não vale, em geral, para hipersuperfícies de dimensão $n \geq 3$. Isto devido ao fato que mostraremos, sobre uma restrição quanto à quantidade de curvaturas principais que uma hipersuperfícies pseudo-paralela deve possuir.

Como toda superfície com $R^\perp = 0$ é pseudo-paralela, passamos agora a estudar a classe de todas as superfícies imersas com a propriedade dos operadores de curvatura normal serem nunca nulos (i.e., $R^\perp(p) \neq 0$, em cada ponto p da superfície) e nos concentraremos naquelas superfícies que são pseudo-paralelas. A primeira consequência deste estudo é o seguinte resultado:

Lema 3.2.3 *Seja $f : M^2 \rightarrow Q^N(c)$ uma imersão isométrica com $R^\perp(p) \neq 0, \forall p \in M$. Se f é ϕ -pseudo-paralela, então f é uma imersão λ -isotrópica. Além disso, para uma tal imersão temos que:*

- (i) $K > \phi$;
- (ii) $\lambda^2 = 4K - 3\phi - c > 0$;
- (iii) $\|H\|^2 = 3K - 2\phi - c \geq 0$, onde H é o vetor curvatura média de f .

Demonstração: Suponhamos que $f : M^2 \rightarrow Q^N(c)$ é uma imersão pseudo-paralela. Usando a equação de Ricci nas igualdades de (3.11), obtemos que

$$\left. \begin{aligned} \langle \alpha_{12}, \alpha_{ii} \rangle (\alpha_{11} - \alpha_{22}) + \left[\langle \alpha_{22} - \alpha_{11}, \alpha_{ii} \rangle + (-1)^i 2(\phi - K) \right] \alpha_{12} &= 0, \\ i &= 1, 2, \\ (\|\alpha_{12}\|^2 + (\phi - K)) (\alpha_{11} - \alpha_{22}) + \langle \alpha_{22} - \alpha_{11}, \alpha_{12} \rangle \alpha_{12} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

Como $R^\perp(p) \neq 0$, $\forall p \in M^2$, então α_{12} e $\alpha_{11} - \alpha_{22}$ são sempre linearmente independentes para qualquer $\{e_1, e_2\}$ base ortonormal de um espaço vetorial tangente. Aplicando este último fato em (3.12), obtemos que

$$\left. \begin{aligned} \langle \alpha_{12}, \alpha_{ii} \rangle &= 0, \\ \langle \alpha_{22} - \alpha_{11}, \alpha_{ii} \rangle &= (-1)^{i+1} 2(\phi - K), \quad i = 1, 2, \\ \|\alpha_{12}\|^2 &= K - \phi > 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

Agora usando a equação de Gauss $K = c + \langle \alpha_{11}, \alpha_{22} \rangle - \|\alpha_{12}\|^2$, obtemos que

$$\left. \begin{aligned} \|\alpha_{11}\|^2 &= \|\alpha_{22}\|^2 = 4K - 3\phi - c > 0, \\ \langle \alpha_{11}, \alpha_{22} \rangle &= 2K - \phi - c, \\ \|\alpha_{11} - \alpha_{22}\|^2 &= 4(K - \phi) > 0, \\ \|H\|^2 &= 3K - 2\phi - c \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

Fazendo $X = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2$, segue-se que $\alpha(X, X) = H(p) + \cos 2\theta u + \sin 2\theta v$, onde $u = (\alpha_{11} - \alpha_{22})/2$ e $v = \alpha_{12}$, o que mostra que o conjunto

$$\epsilon_p = \{\alpha(Z, Z) \in \nu_p(f) : Z \in T_p M, \|Z\| = 1\},$$

para cada $p \in M^2$, é uma elipse com centro na ponta do vetor $H(p)$, chamada *elipse de curvatura da imersão em p*. Mais ainda, de (3.13) e de (3.14), segue-se que ϵ_p é uma circunferência não degenerada de centro na ponta do vetor $H(p)$ e raio $r = \sqrt{K(p) - \phi(p)}$. (Pois, $r = \|\alpha(X, X) - H(p)\| = \frac{1}{2}\|\alpha_{11} - \alpha_{22}\| = \sqrt{K(p) - \phi(p)}$). Isto prova que f é λ -isotrópica, onde $\lambda^2 = \|\alpha(X, X)\|^2 = 4K - 3\phi - c$. \square

Na última seção deste capítulo apresentaremos uma generalização do Lema 3.2.3 para $n \geq 3$. Vejamos agora os seguintes resultados de caráter pontual para o caso de superfícies pseudo-paralelas em codimensão dois com $R^\perp \neq 0$, i.e., $R^\perp(p) \neq 0$ para algum ponto $p \in M^2$:

Proposição 3.2.4 *Seja $f : M^2 \rightarrow Q^4(c)$ uma imersão pseudo-paralela tal que $R^\perp(p) \neq 0$ para algum $p \in M^2$. Então, p é um ponto supermínimo (i.e., $H(p) = 0$ e f é λ -isotrópica em p).*

Demonstração: Suponhamos que $f : M^2 \rightarrow Q^4(c)$ é uma imersão pseudo-paralela e seja $p \in M^2$ um ponto tal que $R^\perp(p) \neq 0$. Então a demonstração do Lema 3.2.3 permite concluir que f é λ -isotrópica em p . Além disso, para qualquer base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de T_pM , segue-se de (3.13) e (3.14) que o conjunto $\beta = \left\{ \frac{\alpha_{11} - \alpha_{22}}{\|\alpha_{11} - \alpha_{22}\|}, \frac{\alpha_{12}}{\|\alpha_{12}\|} \right\}$ será uma base ortonormal do espaço normal $\nu_p(f)$ e que $\langle H(p), \alpha_{11} - \alpha_{22} \rangle = 0$ e $\langle H(p), \alpha_{12} \rangle = 0$, donde concluímos que $H(p) = 0$. Logo, p é um ponto supermínimo. \square

Corolário 3.2.5 *Seja $f : M^2 \rightarrow Q^4(c)$ uma imersão pseudo-paralela de uma superfície conexa com $R^\perp(p) \neq 0, \forall p \in M$. Se ϕ é constante, então $K = \frac{c}{3}$, $c > 0$ e $f(M^2)$ é uma parte de uma superfície de Veronese em $S^4(c)$.*

Demonstração: Aplicando a Proposição 3.2.4 a uma imersão pseudo-paralela f que possui todos os operadores de curvatura normal não nulos, obtemos que $H(p) = 0, \forall p \in M$, i.e., f é mínima. Daí, pelo Lema 3.2.3 item (iii), temos que a curvatura Gaussiana $K = \frac{2\phi+c}{3}$. Como por hipótese ϕ é constante segue-se que K é constante em M . Finalmente usando a conexidade de M estamos nas condições de um resultado conhecido de classificação das superfícies mínimas com curvatura Gaussiana constante em formas espaciais 4-dimensionais, obtido por Kenmotsu (ver Teorema 1 de [33]). Portanto, o resultado de Kenmotsu permite concluir que $K = \frac{c}{3}$, $c > 0$ e $f(M^2)$ é uma parte de uma superfície de Veronese em $Q^4(c)$. Pois, os outros casos obtidos no resultado de classificação de Kenmotsu possuem $R^\perp = 0$, a saber, os casos totalmente geodésico e do toro de Clifford totalmente geodésico em $Q^4(c)$. \square

De acordo com os resultados anteriores é pertinente fazer a seguinte pergunta:

Existem imersões pseudo-paralelas próprias com $R^\perp \neq 0$?

A resposta da pergunta acima é afirmativa. A seguir apresentamos um resultado que nos ajudará a determinar exemplos de imersões pseudo-paralelas próprias com $R^\perp \neq 0$.

Lema 3.2.6 *Seja $f: M^2 \rightarrow Q^N(c)$ uma imersão isométrica com $R^\perp(p) \neq 0, \forall p \in M$. Se f é λ -isotrópica, então f é pseudo-paralela para a seguinte função diferenciável*

$$\phi = \frac{4K - c - \lambda^2}{3},$$

e ϕ é distinta de K em todo ponto de M^2 .

Demonstração: Seja $\{e_1, e_2\}$ uma base (qualquer) ortonormal de vetores tangentes a M^2 em algum ponto arbitrário. Fazendo $X = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2$ e usando a hipótese da imersão f ser λ -isotrópica, temos que

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= \|\alpha(X, X)\|^2 \\ &= (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \lambda^2 + 4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \|\alpha_{12}\|^2 + 4 \cos^3 \theta \sin \theta \langle \alpha_{11}, \alpha_{12} \rangle \\ &\quad + 4 \cos \theta \sin^3 \theta \langle \alpha_{22}, \alpha_{12} \rangle + 4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \langle \alpha_{11}, \alpha_{22} \rangle. \end{aligned}$$

Derivando com relação a θ , temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\theta} (\|\alpha(X, X)\|^2)_{\theta=0} = 4 \langle \alpha_{11}, \alpha_{12} \rangle, \\ 0 &= \frac{d}{d\theta} (\|\alpha(X, X)\|^2)_{\theta=\frac{\pi}{4}} = -2 \langle \alpha_{11}, \alpha_{12} \rangle + 2 \langle \alpha_{22}, \alpha_{12} \rangle, \end{aligned}$$

consequentemente, obtemos que

$$\langle \alpha_{ii}, \alpha_{12} \rangle = 0, \quad i = 1, 2. \quad (3.15)$$

Fazendo $Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$ e usando novamente o fato de f ser λ -isotrópica, temos que

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= \|\alpha(Y, Y)\|^2 \\ &= \frac{1}{4} \|\alpha_{11} + 2\alpha_{12} + \alpha_{22}\|^2 \\ &= \frac{1}{4} (\|\alpha_{11}\|^2 + 4\|\alpha_{12}\|^2 + \|\alpha_{22}\|^2 + 4\langle \alpha_{11}, \alpha_{12} \rangle + 4\langle \alpha_{22}, \alpha_{12} \rangle + 2\langle \alpha_{11}, \alpha_{22} \rangle) \\ &= \frac{1}{2} (\lambda^2 + 2\|\alpha_{12}\|^2 + \langle \alpha_{11}, \alpha_{22} \rangle), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\langle \alpha_{11}, \alpha_{22} \rangle + 2\|\alpha_{12}\|^2 = \lambda^2, \quad (3.16)$$

logo, pela equação de Gauss $K = c + \langle \alpha_{11}, \alpha_{22} \rangle - \|\alpha_{12}\|^2$, obtemos que

$$\|\alpha_{12}\|^2 = \frac{\lambda^2 - K + c}{3}. \quad (3.17)$$

Daí, aplicando a equação de Ricci, temos que

$$\begin{aligned} R^\perp[\alpha_{ii}] &= \alpha(e_1, A_{\alpha_{ii}}e_2) - \alpha(A_{\alpha_{ii}}e_1, e_2) \\ &= \sum_{j=1}^2 [\langle \alpha_{ii}, \alpha_{2j} \rangle \alpha_{1j} - \langle \alpha_{ii}, \alpha_{1j} \rangle \alpha_{j2}] \\ &= (\langle \alpha_{ii}, \alpha_{11} \rangle - \langle \alpha_{ii}, \alpha_{22} \rangle) \alpha_{12} \\ &= (-1)^{i+1} 2\|\alpha_{12}\|^2 \alpha_{12} \\ &= (-1)^{i+1} 2 \left(\frac{K-c-\lambda^2}{3} \right) \alpha_{12}, \end{aligned}$$

para $i = 1, 2$. Analogamente pode-se provar que

$$R^\perp[\alpha_{12}] = \left(\frac{-K+c+\lambda^2}{3} \right) (\alpha_{11} - \alpha_{22}).$$

Portanto, tomando ϕ igual à função diferenciável $\frac{4K-c-\lambda^2}{3}$ em M , podemos concluir que f é ϕ -pseudo-paralela de acordo com (3.11). Por último, como f não possui pontos umbílicos, pois, $R^\perp(p) \neq 0, \forall p \in M$. Então, segue-se que $\phi \neq K$ em todo ponto de M . \square

O lema acima mostra que a recíproca do Lema 3.2.3 é verdadeira. Assim, dentro da classe de superfícies imersas com a propriedade que os operadores de curvatura normais sejam nunca nulos, obtemos que: *uma superfície é ϕ -pseudo-paralela se, e somente se, a superfície é λ -isotrópica*. Consequentemente temos o seguinte resultado de caracterização em codimensão dois:

Corolário 3.2.7 *Seja $f: M^2 \rightarrow Q^4(c)$ uma imersão isométrica com $R^\perp(p) \neq 0, \forall p \in M$. Então f é pseudo-paralela se, e somente se, f é supermínima.*

Exemplo 3.2.8 Por um bem conhecido resultado de S.S. Chern, ver [15], sabemos que: “Toda imersão mínima de uma 2-esfera topológica S^2 em $S^4(1)$ é uma imersão supermínima”. Portanto, temos que qualquer imersão mínima de uma 2-esfera topológica S^2 em $S^4(1)$ com $R^\perp \neq 0$ é pseudo-paralela para $\phi = \frac{4K-c-\lambda^2}{3}$. Daí, podemos afirmar que:

“Qualquer imersão mínima de uma 2-esfera topológica S^2 em $S^4(c)$ com curvatura Gaussiana não constante é uma imersão ϕ -pseudo-paralela própria”.

De fato, esta afirmação segue-se da classificação das imersões semi-paralelas de M^2 em $Q^4(c)$ que diz ou $R^\perp = 0$ ou $f(M^2)$ é uma parte de uma superfície de Veronese (ver [34], [2]). Daí segue-se que, no caso da imersão semi-paralela ser mínima, a curvatura Gaussiana tem que ser constante. Mas, no caso da afirmação feita acima, a curvatura Gaussiana é não constante. Portanto, temos que se existem imersões satisfazendo as hipóteses da afirmação elas terão que ser pseudo-paralelas e não semi-paralelas.

Vejamos agora que existem imersões mínimas de S^2 em $S^4(1)$ com curvatura Gaussiana não constante. De fato, a existência é garantida por uma construção geral de superfícies mínimas de esferas topológicas S^2 em $S^4(1)$ apresentada por Chern em [15], onde a construção é feita a partir de uma curva chamada “*curva diretriz*”. Esta curva é “essencialmente” uma curva holomorfa racional da variedade 1-dimensional complexa S^2 no espaço projetivo complexo 4-dimensional $\mathcal{C}P^4$, uma vez que a construção feita por Chern permite determinar explicitamente a curvatura Gaussiana de cada imersão mínima com $R^\perp \neq 0$ em $S^4(1)$, a saber:

$$K = 1 + \frac{(\gamma \wedge \gamma', \bar{\gamma} \wedge \bar{\gamma}')^3}{(\gamma, \bar{\gamma}')^3 (\gamma \wedge \gamma' \wedge \gamma'', \bar{\gamma} \wedge \bar{\gamma}' \wedge \bar{\gamma}'')},$$

onde K é a curvatura Gaussiana para uma imersão mínima obtida a partir de uma curva diretriz $\gamma : S^2 \rightarrow \mathcal{C}P^4$ dada, onde as “ ’ ” denotam as derivadas respetivas, “ $\bar{}$ ” denota o conjugado complexo e “ $(,)$ ” denota um produto interno complexo. De acordo com isso, temos que a curvatura Gaussiana somente depende da curva di-

retriz dada. Então é possível determinar numerosos exemplos de esferas topológicas S^2 mínimas de curvatura Gaussiana não constante em $S^4(1)$. Para mais detalhes ver [15]. Reciprocamente, Chern também mostrou em [15] que dada uma imersão mínima de uma esfera topológica em $S^4(1)$ é possível determinar uma curva diretriz para a imersão.

Em 1982, R. L. Bryant publicou um importante trabalho, onde introduziu o conceito de *superfície supermínima* em $S^4(1)$, que no nosso contexto quer dizer mínima + isotrópica. Nesse trabalho ele apresentou outra técnica, diferente da de Chern, para construir superfícies mínimas em $S^4(1)$, onde agora o domínio pode ser qualquer superfície de Riemann compacta. A forma de construir essas superfícies é como composição de uma curva complexa holomorfa horizontal de M^2 no espaço projetivo complexo $\mathbb{C}P^3$ e a conhecida fibração *twistor de Penrose* de $\mathbb{C}P^3$ sobre $S^4(1)$, (ver [8]). Como as imersões supermínimas são λ -isotrópicas, temos que estas imersões também são pseudo-paralelas.

Observação 3.2.9 Do exemplo 3.2.8 acima podemos concluir que a hipótese da função ϕ ser constante no corolário 3.2.5 não pode ser omitida.

Exemplo 3.2.10 Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^5(c)$ uma imersão isométrica definida por

$$T(x, y) = \frac{2}{\sqrt{6c}} \left(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2u, \sin u \cos v, \sin u \sin v, \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2u \right)$$

onde $u = \sqrt{\frac{c}{2}}x$, $v = \frac{\sqrt{6c}}{2}y$. Então, fazendo cálculos diretos, pode-se provar que T é um mergulho mínimo de um toro plano em $S^5(c)$ com $R^\perp \neq 0$, e que também é $\sqrt{\frac{c}{2}}$ -isotrópico. Ou seja, T é uma superfície supermínima. Assim, pelo Lema 3.2.5, podemos concluir que T é ϕ -pseudo-paralela para $\phi = -\frac{c}{2} < 0$.

A seguir enunciamos duas proposições obtidas por Sakamoto em [48] as quais são essenciais para provar o Teorema 1.0.3.

Proposição 3.2.11 *Seja $f : M^2 \rightarrow Q^5(c)$ uma imersão $\lambda(\neq 0)$ -isotrópica constante e mínima de uma superfície M^2 conexa e completa. Se $c \leq 0$ então tal imersão não*

existe. Se $c > 0$, então $f(M^2)$ é uma superfície de Veronese em $S^4(c)$ totalmente geodésica em $S^5(c)$ ou é um toro em $S^5(c)$ descrito no exemplo 3.2.10.

Proposição 3.2.12 *Seja $f : M^2 \rightarrow Q^5(c)$ uma imersão $\lambda(\neq 0)$ -isotrópica constante de uma superfície M^2 conexa e completa. Se o conjunto $\{x \in M^2 : \dim N_f^1(x) = 3\}$ for não vazio, então $f(M^2)$ é uma superfícies de Veronese em alguma $S^4(\tilde{c})$ totalmente umbílica em $Q^5(c)$.*

Agora estamos em condições de provar o Teorema 1.0.3 apresentado na introdução deste trabalho e que voltamos a enunciar:

Teorema 3.2.13 *Seja $f : M^2 \rightarrow Q^5(c)$ uma imersão pseudo-paralela com ϕ constante e M^2 conexa e completa. Então temos uma das seguintes possibilidades:*

- i) f é uma imersão com fibrado normal plano e $\phi = K$;
- ii) $f(M^2)$ é uma superfície de Veronese em alguma $S^4(\tilde{c})$ totalmente umbílica em $Q^5(c)$;
- iii) $f(M^2)$ é um toro em $S^5(c)$ dado no exemplo 3.2.10.

Demonstração: Se a curvatura normal for zero em todo M^2 , temos a primeira possibilidade do teorema. Suponhamos agora que existe um ponto $p \in M^2$ tal que $R^\perp(p) \neq 0$. Consideremos o conjunto aberto $\mathcal{T} = \{x \in M^2 : R^\perp(x) \neq 0\}$ e seja \mathcal{C} uma componente conexa de \mathcal{T} tal que $p \in \mathcal{C}$. Então, como ϕ é constante por hipótese, essencialmente usando os mesmos cálculos usados por Asperti-Mercuri em [2] pag. 889 (cálculos análogos aos feitos em [2], serão efetuados na seção 3.5) temos que a curvatura Gaussiana K de M^2 é constante em \mathcal{C} (o qual é evidente se $H = 0$). Assim, pelo Lema 3.2.3 temos que f é uma imersão $\lambda(\neq 0)$ -isotrópica constante em \mathcal{C} . Suponhamos que existe um ponto q no bordo de \mathcal{C} tal que $R^\perp(q) = 0$. Então pelo pseudo-parallelismo de f , temos que q é um ponto umbílico. Podemos considerar uma curva γ ligando os pontos $\gamma(t_0) = p$ e $\gamma(t_1) = q$ de tal forma que a imagem de γ esteja em \mathcal{C} a menos de q . Seja $\{e_1, e_2\}$ uma base ortonormal de

$T_q M$ tal que $\alpha(e_1, e_2) = 0$. Fazendo o transporte paralelo P dos vetores desta base ao longo de γ , temos que $\|R^\perp(\gamma(t))[\alpha(Pe_1, Pe_1)]\| = \|R^\perp(\gamma(t))[\alpha(Pe_2, Pe_2)]\| = \|R^\perp(\gamma(t))[\alpha(Pe_1, Pe_2)]\| = 2(K - \phi)^{\frac{3}{2}}$ é constante e não-nula para todo $t \in [t_0, t_1[$. Logo, por continuidade, temos uma contradição com $R^\perp(\gamma(t_1)) = R^\perp(q) = 0$. Isto prova que \mathcal{C} é fechado, daí por conexidade, temos que $M = \mathcal{C}$. Portanto, f é uma imersão λ -isotrópica constante com R^\perp nunca nulo na variedade completa e conexa M . Se o conjunto $\{x \in M^2 : \dim N_f^1(x) = 3\}$ for vazio, então para todo $x \in M$, temos que $\dim N_f^1(x) = 2$ e conseqüentemente $\{\alpha_{11} - \alpha_{22}, \alpha_{12}\}$ é linearmente independente para qualquer base ortonormal. Logo, de (3.13) podemos concluir que f é mínima e, aplicando a Proposição 3.2.11, temos a segunda possibilidade do teorema ou que $f(M^2)$ é uma superfície de Veronese em $S^4(c)$ totalmente geodésica em $S^5(c)$ (isto é a terceira possibilidade do teorema onde $\tilde{c} = c > 0$). Por último, se o conjunto $\{x \in M^2 : \dim N_f^1(x) = 3\}$ for não vazio, então pela Proposição 3.2.11, temos a terceira parte do teorema. Isto prova o teorema. \square

3.3 Hipersuperfícies pseudo-paralelas

Seja $f : M^n \rightarrow Q^{n+1}(c)$ uma hipersuperfície de uma forma espacial, escolhamos um vetor normal unitário ξ e uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ do espaço tangente de M que diagonalize o operador de Weingarten A_ξ . Para cada $i = 1, \dots, n$ seja $\lambda_i := \langle A_\xi e_i, e_i \rangle$ uma curvatura principal de f na direção ξ . Então, da equação de Gauss:

$$R(e_i, e_j) = (c + \lambda_i \lambda_j) e_i \wedge e_j,$$

obtemos que, para $i \neq j \neq k \neq i$:

$$[R(e_i, e_j) \cdot R](e_i, e_k, e_k) = (c + \lambda_i \lambda_j)(\lambda_j - \lambda_i) \lambda_k e_j,$$

$$[e_i \wedge e_j \cdot R](e_i, e_k, e_k) = (\lambda_j - \lambda_i) \lambda_k e_j,$$

$$[\bar{R}(e_i, e_j) \cdot \alpha](e_i, e_j) = (c + \lambda_i \lambda_j)(\lambda_j - \lambda_i) \xi,$$

$$[e_i \wedge e_j \cdot \alpha](e_i, e_j) = (\lambda_j - \lambda_i) \xi.$$

Então vale o seguinte resultado:

Proposição 3.3.1 *Seja $f : M^n \rightarrow Q^{n+1}(c)$ uma imersão isométrica.*

1) *Se M é pseudo-simétrica, então*

$$(\lambda_i \lambda_j + c - \phi)(\lambda_i - \lambda_j) \lambda_k = 0. \quad (3.18)$$

Em particular, f possui no máximo três curvaturas principais e, se possui exatamente três, uma delas tem que ser zero e $\phi = c$.

2) *Se f é pseudo-paralela, então*

$$(\lambda_i \lambda_j + c - \phi)(\lambda_i - \lambda_j) = 0. \quad (3.19)$$

Em particular, f possui no máximo duas curvaturas principais e, se possui exatamente duas, seu produto é $(\phi - c)$.

3) *Se M é pseudo-simétrica e $\phi \neq c$, então f é pseudo-paralela.*

As condições (3.18) e (3.19) da Proposição 3.3.1 acima são também suficientes, para pseudo-simetria e pseudo-paralelismo respectivamente, a menos de diferenciabilidade da função ϕ . Por exemplo, suponhamos que A_ξ possui, em cada ponto $x \in M$, no máximo dois auto-valores distintos $\lambda(x)$ e $\mu(x)$. Definamos $\phi(x) = c + \lambda(x)\mu(x)$. Então ϕ é uma função contínua que é diferenciável fora da fronteira do conjunto $U = \{p \in M : \lambda(p) = \mu(p)\}$ de pontos umbilícos. Se ϕ é diferenciável em M , então a imersão f é pseudo-paralela.

Observe que para $n = 2$, a função ϕ é a curvatura Gaussiana, a qual é diferenciável. Portanto, toda superfície em $Q^3(c)$ é pseudo-paralela como tínhamos observado na seção anterior.

Exemplo 3.3.2 Consideremos \mathbb{R}^5 como o espaço das matrizes de ordem 3×3 com entradas reais e de traço zero. Então as órbitas regulares da ação de $SO(3)$ sobre \mathbb{R}^5 por conjugação, são as hipersuperfícies isoparamétricas de $S^4(c)$ com três

curvaturas principais distintas, portanto chamadas *hipersuperfícies de Cartan*, ver [31]. Nesta família existe uma hipersuperfície $f : M^3 \rightarrow S^4(c)$ que é mínima e possui uma curvatura principal zero. Segue-se do item (1) da Proposição 3.3.1 que M^3 é uma variedade pseudo-simétrica *própria* (não semi-simétrica) com $\phi = c$. Consequentemente do item (2) da Proposição 3.3.1, podemos concluir que esta hipersuperfície de Cartan $f : M^3 \rightarrow S^4(c)$ não pode ser uma imersão pseudo-paralela.

O exemplo acima mostra que o conceito de pseudo-simetria não implica pseudo-parallelismo, em geral. Mas, no caso Euclidiano, temos o seguinte resultado:

Corolário 3.3.3 *Se $n \geq 3$ e $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é uma imersão isométrica, então M é uma variedade pseudo-simétrica própria se e somente se f possui exatamente duas curvaturas principais distintas de zero, ou ainda se e somente se f é uma imersão pseudo-paralela própria.*

Seja $f : M^n \rightarrow Q^{n+1}(c)$ uma hipersuperfície e seja $U \subseteq M$ o conjunto dos pontos umbílicos de f . Lembramos que f é *quase-umbílica* se f possui uma curvatura principal de multiplicidade no mínimo $(n-1)$. Hipersuperfícies quase-umbílicas são *conformemente planas* e se $n \geq 4$, conformemente plana é equivalente a quase-umbílica. As hipersuperfícies quase-umbílicas compactas são completamente descritas em [10], para $n \geq 3$. Também lembramos que f é uma *ciclode de Dupin* se f possui exatamente duas curvaturas principais, cada uma constante na direção do correspondente auto-espaço. Tais hipersuperfícies têm sido bastante estudadas, por exemplo ver [46] e as referências que aí aparecem. Em termos destas classes de hipersuperfícies, obtemos a seguinte caracterização das hipersuperfícies pseudo-paralelas.

Teorema 3.3.4 *Seja $f : M^n \rightarrow Q^{n+1}(c)$ uma hipersuperfície. Então f é pseudo-paralela se, e somente se, f é ou quase-umbílica ou uma ciclode de Dupin.*

Demonstração: Consideremos as componentes conexas de $M \setminus U$. Estas componentes são abertas e pela Proposição 2.2 de [47] as curvaturas principais têm multiplicidade constante em cada uma das componentes. Daí, pelo pseudo-paralelismo de f segue-se que cada componente conexa possui uma curvatura principal de multiplicidade constante $n - 1$ ou duas curvaturas principais de multiplicidades constantes não simples. Se a componente conexa verifica a primeira possibilidade, temos que é quase-umbílica e se verifica a segunda, sabemos pela Proposição 2.3 de [47] que cada curvatura principal é constante na direção do correspondente auto-espaço, portanto, a componente conexa nesta possibilidade é uma ciclidade de Dupin. Se supomos que todas as componentes conexas de $M \setminus U$ são quase-umbílicas teremos que f é quase-umbílica em M . Agora se supomos que existe uma componente conexa \mathcal{C} , que não é quase-umbílica. Então \mathcal{C} é uma ciclidade de Dupin. Suponhamos que $\mathcal{C} \neq M$ e seja p_0 um ponto do bordo de \mathcal{C} . Então $p_0 \in U$. Por um resultado de Pinkall (ver Teorema 3 de [46]) sabemos que existe uma transformação conforme A do espaço ambiente que leva \mathcal{C} sobre a parte aberta de uma ciclidade de Dupin compacta \overline{M} . Como existe uma seqüência $(p_k)_k$ em $f(\mathcal{C})$ convergindo para p_0 por continuidade, temos que a seqüência $(A(f(p_k)))_k$ de pontos de \overline{M} converge para $A(f(p_0))$. Consequentemente pela compacidade de \overline{M} , obtemos que $A(f(p_0)) \in \overline{M}$. Por outro lado, a ciclidade de Dupin \overline{M} pode ter singularidades mas nunca $A(f(p_0))$ pode ser uma delas pois um tal ponto é um ponto regular de $A(f(M))$. Portanto, como as transformações conformes preservam pontos umbílicos, temos que $A(f(p_0))$ é um ponto umbílico de \overline{M} , o qual é um absurdo. Portanto, $\mathcal{C} = M$.

A recíproca segue da proposição 3.3.1. □

Exemplo 3.3.5 Consideremos o cone sobre o toro de Clifford $T^2 \subset S^3(1)$. Esta é uma hipersuperfície $f : \mathbb{R}_+ \times T^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$, que é mínima e possui três curvaturas principais constantes e distintas, uma delas é 0 e as outras são $\pm\lambda \neq 0$. Portanto, f é uma hipersuperfície semi-simétrica que não é semi-paralela, em particular não é pseudo-paralela. Além disso, f é uma hipersuperfície conformemente plana que não é pseudo-umbílica, um fenômeno que ocorre somente em dimensão 3. Por este

motivo a condição (1) da proposição 3.3.1 em geral não implica pseudo-parallelismo quando $n = 3$.

Lembremos a definição de produto torcido: Sejam $(M_1^m, \langle, \rangle_1)$ e $(M_2^{n-m}, \langle, \rangle_2)$ duas variedades Riemannianas de dimensões m e $n - m$, respectivamente, e $h : M_1 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $h(x) > 0$, para todo $x \in M_1$. O *produto torcido* $M_1 \times_h M_2$ é a variedade Riemanniana produto $M_1 \times M_2$ munida da métrica \langle, \rangle definida por

$$\langle X, Y \rangle = \langle (d_{(p,q)}\pi_1) X, (d_{(p,q)}\pi_1) Y \rangle_1 + \langle (d_{(p,q)}\pi_2) X, (d_{(p,q)}\pi_2) Y \rangle_2$$

para todo $X, Y \in T_{(p,q)}M_1 \times M_2$, onde $\pi_i : M_1 \times M_2 \rightarrow M_i$ é a projeção natural para $i = 1, 2$.

Com esta definição temos o seguinte corolário:

Corolário 3.3.6 *Seja $M^n = B^1 \times_h F^{n-1}(\tilde{c})$, $n \geq 4$, um produto torcido de uma variedade 1-dimensional B^1 e uma variedade $(n - 1)$ -dimensional $F^{n-1}(\tilde{c})$ com curvatura seccional constante \tilde{c} . Se $f : M^n \rightarrow Q^{n+1}(c)$ é qualquer imersão isométrica, então f é pseudo-paralela.*

Demonstração: Segue-se facilmente do fato que uma métrica produto do tipo $B^1 \times_h F^{n-1}(\tilde{c})$, $n \geq 4$, é um produto torcido conformemente plano. \square

Exemplo 3.3.7 Segundo M. do Carmo e Dajczer, toda hipersuperfície de rotação de $Q^{n+1}(c)$ é localmente um produto torcido $I \times_h M^{n-1}(\delta)$ de um intervalo aberto I por um espaço de curvatura constante $M^{n-1}(\delta)$ e com função de torção h , onde δ pode ser 1, 0 ou -1 dependendo do sinal de c (ver [9] pag. 693). Além disso, pela Proposição 3.2 de [9], as curvaturas principais de uma hipersuperfície de rotação $f : I \times_h M^{n-1}(\delta) \rightarrow Q^{n+1}(c)$ são

$$\lambda = -\frac{\sqrt{\delta - ch^2 - \dot{h}^2}}{h} \quad \text{e} \quad \mu = \frac{\ddot{h} + ch}{\sqrt{\delta - ch^2 - \dot{h}^2}}, \quad (3.20)$$

onde λ possui multiplicidade pelo menos igual a $n - 1$. Portanto, da Proposição 3.3.1 segue-se que toda hipersuperfície de rotação é pseudo-paralela. Além disso, claramente de (3.20), temos o seguinte resultado:

Proposição 3.3.8 *As hipersuperfícies de rotação $f : I \times_h M^{n-1}(\delta) \rightarrow Q^{n+1}(c)$ que são pseudo-paralelas próprias, são aquelas cuja função de torção possui segunda derivada $\ddot{h} \neq 0$. Neste caso, uma função que verifica a condição de pseudo-paralelismo é $\phi = -\frac{\dot{h}}{h}$.*

Pergunta 3.3.9 *Existem hipersuperfícies conformemente planas e pseudo-paralela próprias que não sejam hipersuperfícies de rotação?*

A resposta da pergunta acima é afirmativa, pois do Carmo-Dajzer-Mercuri em [10] construíram exemplos explícitos de hipersuperfícies compactas conformemente Euclidianas mergulhadas no \mathbb{R}^{n+1} que não são hipersuperfícies de rotação.

3.4 Imersões pseudo-paralelas em codimensão dois

Ülo Lumiste em [35], obteve uma classificação das imersões semi-paralela em espaços Euclidianos com $R^\perp = 0$. Em particular, Lumiste obteve uma classificação para as imersões semi-paralelas em codimensão dois, pois, em codimensão dois, todas as imersões semi-paralelas em espaços Euclidianos possuem $R^\perp = 0$. Portanto, nesta seção é natural estudar as imersões pseudo-paralelas com $n \geq 3$ (pois, na seção 3.2 estudamos o caso de superfícies) e fibrado normal plano. O primeiro resultado que apresentamos a seguir exhibe explicitamente a forma dos operadores de Weingarten de uma imersão pseudo-paralela em codimensão dois com $R^\perp = 0$:

Proposição 3.4.1 *Seja $f : M^n \rightarrow Q^{n+2}(c)$ uma imersão ϕ -pseudo-paralela com $R^\perp = 0$. Então para cada $p \in M$ e cada base ortonormal $\{e_{n+1}, e_{n+2}\}$ de $\nu_p(f)$, existe uma base ortonormal β de T_pM , tal que os operadores de Weingarten $A_{e_{n+1}}$ e $A_{e_{n+2}}$, na base β , são representados pelas seguintes matrizes diagonais:*

(i) $A_{n+1} = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_3]$ e $A_{n+2} = \text{diag}[\mu_1, \dots, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_3]$, onde λ_i e μ_i tem as mesmas multiplicidades para $i = 1, 2, 3$. Além disso, $\lambda_3 = \frac{(\mu_2 - \mu_1)(\phi(p) - c)}{\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1}$ e $\mu_3 = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\phi(p) - c)}{\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1}$, com $\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 \neq 0$, e $\phi(p) = \lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + c$; ou

(ii) $A_{n+1} = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_2]$ e $A_{n+2} = \text{diag}[\mu_1, \dots, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_2]$, onde λ_i e μ_i tem as mesmas multiplicidades para $i = 1, 2$, e $(\lambda_1, \mu_1) \neq (\lambda_2, \mu_2)$, e $\phi(p) = \lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + c$; ou

(iii) $A_{n+1} = \text{diag}[\lambda, \dots, \lambda]$ e $A_{n+2} = \text{diag}[\mu, \dots, \mu]$. Neste caso, p é um ponto totalmente umbílico de f e $\phi(p)$ é qualquer.

Demonstração: Sejam $p \in M$ e $\{e_{n+1}, e_{n+2}\}$ uma base ortonormal de $\nu_p(f)$. Como $R^\perp(p) = 0$, existe uma base ortonormal $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$ de T_pM , tal que os operadores de Weingarten $A_{e_{n+1}}, A_{e_{n+2}}$, são diagonalizados simultaneamente pela base β . Assim, temos as seguintes matrizes diagonais $A_{n+1} = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ e $A_{n+2} = \text{diag}[\mu_1, \dots, \mu_n]$, respectivamente, onde $\lambda_i := \langle \alpha_i, e_{n+1} \rangle$ e $\mu_i := \langle \alpha_i, e_{n+2} \rangle$,

com $\alpha_i := \alpha(e_i, e_i)$. Por outro lado, como f é pseudo-paralela e $R^\perp(p) = 0$, então segue-se do Lema 3.1.9 que

$$(\phi(p) - c - \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle)(\alpha_i - \alpha_j) = 0. \quad (3.21)$$

Suponhamos que existam quatro índices $i_1, i_2, i_3, i_4 \in \{1, \dots, n\}$, tais que $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \alpha_{i_3}, \alpha_{i_4}$ sejam dois a dois distintos. Então sempre é possível escolhermos, a menos de reordenamento, $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \alpha_{i_3}$ não nulos em $\nu_p(f)$. Se $\phi(p) = c$, segue-se de (3.21) que $\alpha_{i_3} = 0$, o qual é um absurdo. Se $\phi(p) \neq c$, segue-se de (3.21) que α_{i_4} também é não nulo, pois, se $\alpha_{i_4} = 0$, então de (3.21) segue-se que $\phi = c$ o qual é um absurdo. Também de (3.21), segue-se que $\text{proj}_{\alpha_{i_1}}^\perp(\alpha_{i_2}) = \text{proj}_{\alpha_{i_1}}^\perp(\alpha_{i_3}) = \text{proj}_{\alpha_{i_1}}^\perp(\alpha_{i_4})$ e $\text{proj}_{\alpha_{i_2}}^\perp(\alpha_{i_1}) = \text{proj}_{\alpha_{i_2}}^\perp(\alpha_{i_3}) = \text{proj}_{\alpha_{i_2}}^\perp(\alpha_{i_4})$. Daí, obtemos que α_{i_3} e α_{i_4} pertencem à intersecção das retas $r_1 = \{t\alpha_{i_2} + (1-t)\text{proj}_{\alpha_{i_1}}^\perp(\alpha_{i_2})\}_{t \in \mathbb{R}}$ e $r_2 = \{t\alpha_{i_1} + (1-t)\text{proj}_{\alpha_{i_2}}^\perp(\alpha_{i_1})\}_{t \in \mathbb{R}}$. Como $\alpha_{i_3} \neq \alpha_{i_4}$, então $r_1 = r_2$, o qual é um absurdo também. Portanto, concluímos que existem no máximo três α_i 's distintos a menos de multiplicidade, tais que verificam (3.21). Sejam agora três vetores normais distintos a menos de multiplicidades, a saber: $\alpha_{i_1} := (\lambda_{i_1}, \mu_{i_1}), \alpha_{i_2} := (\lambda_{i_2}, \mu_{i_2})$ e $\alpha_{i_3} := (\lambda_{i_3}, \mu_{i_3})$. Então segue-se de (3.21) que podemos tomar a menos de reordenamento α_{i_1} e α_{i_2} linearmente independentes e neste caso:

$$\alpha_{i_3} = \left(\frac{(\mu_{i_2} - \mu_{i_1})(\phi(p) - c)}{\lambda_{i_1}\mu_{i_2} - \lambda_{i_2}\mu_{i_1}}, \frac{(\lambda_{i_1} - \lambda_{i_2})(\phi(p) - c)}{\lambda_{i_1}\mu_{i_2} - \lambda_{i_2}\mu_{i_1}} \right),$$

ou seja, α_{i_3} é o ortocentro do triângulo formado pelos vértices $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}$ e a origem de $\nu_p(f)$. Neste caso $\phi(p) = \lambda_{i_1}\lambda_{i_2} + \mu_{i_1}\mu_{i_2} + c$. Segue-se claramente que a multiplicidades de λ_{i_a} é igual à de μ_{i_a} , para $a = 1, 2, 3$. Finalmente fazendo um reordenamento da base β se for necessário, temos provado a parte (i) do teorema. Vejamos agora o caso de se existirem exatamente dois α_i 's distintos a menos de multiplicidade, digamos $\alpha_{i_1} := (\lambda_{i_1}, \mu_{i_1})$ e $\alpha_{i_2} := (\lambda_{i_2}, \mu_{i_2})$. Então segue-se de (3.21) que $\phi(p) = \lambda_{i_1}\lambda_{i_2} + \mu_{i_1}\mu_{i_2} + c$, e a menos de reordenamento da base β se for necessário os operadores de Weingarten de f tem a forma dada em (ii). Agora no caso que exista somente um α_i , claramente obteremos (i), ou seja, o ponto p é um ponto totalmente umbílico de f . \square

Agora provaremos o Teorema 1.0.5 dado na introdução o qual voltamos a enunciar:

Teorema 3.4.2 *Seja $f : M^n \rightarrow Q^{n+2}(c)$ uma imersão pseudo-paralela. Se $\phi(p) \geq c$ ou $H(p) \neq 0$, então $R^\perp(p) = 0$. Em particular, se $c = 0$ e $\phi(p) \geq 0$, então M possui curvatura seccional não-negativa em p .*

Demonstração:

Se $H(p) = 0$ e $\phi(p) \geq c$, então pelo Teorema 1.0.1, temos que p é um ponto totalmente geodésico e conseqüentemente $R^\perp(p) = 0$. Agora se $H(p) \neq 0$, então pela Lema 3.1.10, temos que o nucleo do operador antisimétrico $R^\perp(X, Y) : \nu_p(f) \rightarrow \nu_p(f)$ é não trivial para cada par $X, Y \in T_pM$. Como a dimensão de $\nu_p(f)$ é dois, segue-se que $R^\perp(X, Y) = 0$, para todo $X, Y \in T_pM$, ou seja $R^\perp(p) = 0$.

Agora usando a forma dos operadores de Weingarten obtida no Teorema 3.4.1 para um ponto p , onde $R^\perp(p) = 0$, segue-se facilmente $K \geq 0$ no ponto p , quando $\phi(p) \geq 0$. □

Observação 3.4.3 O Teorema 3.4.2 também vale para $n = 2$ e neste caso, a hipótese que $\phi \geq c$ quando f é mínima, não pode ser tirada do teorema, pois toda superfície de Veronese $f : M^2 \rightarrow S^4(c)$ é mínima, pseudo-paralela com $\phi = 0 < c$ e possui $R^\perp \neq 0$, ver [2].

O Teorema 3.2 de [6] diz o seguinte: *Se $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ é uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana compacta e simplesmente conexa com curvatura seccional não negativa, então ou f é um produto de dois mergulhos convexos ou M é homeomorfo a uma esfera.* Juntando este resultado com o Teorema 3.4.2, fica fácil provar o:

Corolário 3.4.4 *Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ uma imersão pseudo-paralela com $\phi \geq 0$ e $n \geq 4$. Se M é simplesmente conexo e compacto, então ou f é um producto de dois mergulhos convexos ou M é homeomorfo a uma n -esfera. Em particular, se $\phi > 0$ em algum ponto, então M é homeomorfo a uma n -esfera.*

Observação 3.4.5 Toda hipersuperfície pseudo-paralela de uma variedade de dimensão n numa esfera $S^{n+1}(c)$ pode ser considerada como uma imersão pseudo-paralela de codimensão dois em \mathbb{R}^{n+2} . Mas em geral, a composição de imersões pseudo-paralelas não é pseudo-paralela! Para ver este fato, basta por exemplo considerar qualquer imersão isométrica $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ que seja composição de duas imersões cilíndricas $f_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ e $f_2 : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ tal que $f := f_2 \circ f_1$ tenha $R^\perp \neq 0$ e $H(p) \neq 0$. Então uma tal imersão não pode ser pseudo-paralela apesar de cada imersão f_i ser pseudo-paralela, pois, entraria em contradição com 3.4.2.

3.5 Imersões pseudo-paralelas em codimensão alta

Nesta seção estudaremos as imersões pseudo-paralelas de variedades Riemannianas de dimensão $n \geq 3$ em codimensão alta e com certas condições de regularidade sobre o primeiro espaço normal. Seja $f : M^n \rightarrow Q^N(c)$ pseudo-paralela. Lembremos que o primeiro espaço normal de f em $p \in M$ é

$$N_p^1(f) = \text{ger} \{ \alpha(X, Y) : X, Y \in T_p M \}.$$

A dimensão máxima de $N_p^1(f)$ é $\frac{n(n+1)}{2}$. Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial local ortonormal tangente. Então a condição de pseudo-parallelismo (3.3), pode ser reescrita

$$R_{ij}^\perp(\alpha_{kl}) = \sum_{m=1}^n (R_{ijkm}\alpha_{ml} + R_{ijlm}\alpha_{km}) + \phi(p) (\delta_{ik}\alpha_{jl} + \delta_{il}\alpha_{jk} - \delta_{jk}\alpha_{il} - \delta_{jl}\alpha_{ik}), \quad (3.22)$$

$\forall i, j, k, l = 1, \dots, n$, onde

$$R_{ij}^\perp = R^\perp(e_i, e_j), \alpha_{ij} = \alpha(e_i, e_j) \text{ e } R_{ijkl} = \langle R(e_i, e_j)e_k, e_l \rangle.$$

Ao longo desta seção vamos supor que o primeiro espaço normal N_f^1 de f verifica uma das seguintes condições de regularidade:

1. $\dim N_f^1(p) = \frac{n(n+1)}{2}, \forall p \in M$ ou

$$2. \dim N_f^1(p) = \frac{n(n+1)}{2} - 1, \forall p \in M.$$

Então $N_f^1 = \cup_{p \in M} N_f^1(p)$ é um subfibrado do fibrado normal de f e a codimensão $N - n \geq \frac{n(n+3)}{2} - 1$.

Começamos estudando a classe de imersões pseudo-paralelas que verificam a primeira condição, dada acima, sobre o primeiro espaço normal. Um primeiro resultado obtido é aquele que foi enunciado como Teorema 1.0.7 na introdução deste trabalho:

Teorema 3.5.1 *Seja $f : M^n \rightarrow Q^N(c)$ uma imersão pseudo-paralela. Suponhamos que $\dim N_f^1(p) = \frac{n(n+1)}{2}$ em cada ponto p de M . Então vale o seguinte:*

(i) M possui curvatura seccional constante $K > \phi$;

(ii) $\lambda^2 = 4K - 3\phi - c$ é uma função positiva e f é uma imersão λ -isotrópica com

$$\|H\|^2 = \frac{2(n+1)}{n}K - \frac{(n+2)}{n}\phi - c > 0.$$

e f é também pseudo-umbílica;

(iii) Para qualquer referencial local ortonormal tangente $\{e_1, \dots, e_n\}$, o conjunto $\beta = \left\{ \frac{H(p)}{\|H(p)\|}, \frac{\alpha_{11} - \alpha_{22}}{\|\alpha_{11} - \alpha_{22}\|}, \dots, \frac{\alpha_{(n-1)(n-1)} - \alpha_{nn}}{\|\alpha_{(n-1)(n-1)} - \alpha_{nn}\|}, \frac{\alpha_{12}}{\|\alpha_{12}\|}, \dots, \frac{\alpha_{(n-1)n}}{\|\alpha_{(n-1)n}\|} \right\}$ é um referencial local ortonormal de N_f^1 e o operador de curvatura normal R_{ij}^\perp é dado por

$$R_{ij}^\perp[\alpha_{ii}] = -R_{ij}^\perp[\alpha_{jj}] = 2(\phi - K)\alpha_{ij},$$

$$R_{ij}^\perp[\alpha_{ij}] = (\phi - K)(\alpha_{jj} - \alpha_{ii}), \quad R_{ij}^\perp[\alpha_{kl}] = 0,$$

onde i, j, k são distintos, l é qualquer e $i < j$.

Em particular, se M é compacta e $\phi \geq 0$, então $\|H\|^2 = \frac{2(n+1)}{n}K - c$ e $N - n = \frac{n(n+1)}{2}$. Além disso, f imerge M como uma variedade de Veronese em alguma hipersuperfície totalmente umbílica de $Q^{\frac{n(n+3)}{2}}(c)$.

Demonstração: Suponhamos que $f : M^n \rightarrow Q^N(c)$ é uma imersão pseudo-paralela com o primeiro espaço normal de dimensão máxima em qualquer ponto. Seja

$\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial local ortonormal tangente qualquer. Aplicando a equação de Ricci

$$R_{ij}^\perp(\alpha_{kl}) = \sum_{m=1}^n (\langle \alpha_{mj}, \alpha_{kl} \rangle \alpha_{im} - \langle \alpha_{im}, \alpha_{kl} \rangle \alpha_{mj})$$

em (3.22), obtemos

$$0 = \sum_{m=1}^n (\langle \alpha_{im}, \alpha_{kl} \rangle \alpha_{mj} - \langle \alpha_{mj}, \alpha_{kl} \rangle \alpha_{im} + R_{ijkm} \alpha_{ml} + R_{ijlm} \alpha_{km}) \quad (3.23) \\ + \phi(p) (\delta_{ik} \alpha_{jl} + \delta_{il} \alpha_{jk} - \delta_{jk} \alpha_{il} - \delta_{jl} \alpha_{ik}).$$

para todo i, j, k, l . (3.23) pode ser reescrita de cinco formas distintas dependendo dos sub-índices i, j, k, l , a saber:

1. Se i, j, k, l são distintos, então temos que:

$$0 = \langle \alpha_{kl}, \alpha_{ij} \rangle (\alpha_{ii} - \alpha_{jj}) + \langle \alpha_{kl}, \alpha_{jj} - \alpha_{ii} \rangle \alpha_{ij} \\ + (\langle \alpha_{kl}, \alpha_{jl} \rangle - R_{ijki}) \alpha_{il} + (\langle \alpha_{kl}, \alpha_{jk} \rangle - R_{ijli}) \alpha_{ik} \\ - (\langle \alpha_{kl}, \alpha_{il} \rangle - R_{ijjk}) \alpha_{jl} - (\langle \alpha_{kl}, \alpha_{ik} \rangle - R_{ijjl}) \alpha_{jk} + R_{ijkl} (\alpha_{kk} - \alpha_{ll}) \\ - \sum_{m \neq i, j, l, k} R_{ijkm} \alpha_{ml} - \sum_{m \neq i, j, l, k} R_{ijlm} \alpha_{km} \\ + \sum_{m \neq i, j, l, k} \langle \alpha_{kl}, \alpha_{mj} \rangle \alpha_{im} - \sum_{m \neq i, j, l, k} \langle \alpha_{kl}, \alpha_{im} \rangle \alpha_{mj}.$$

2. Se $i \neq j \neq k = l \neq i$, então temos que:

$$0 = \langle \alpha_{kk}, \alpha_{ij} \rangle (\alpha_{ii} - \alpha_{jj}) + \langle \alpha_{kk}, \alpha_{jj} - \alpha_{ii} \rangle \alpha_{ij} \\ + (\langle \alpha_{kk}, \alpha_{jk} \rangle - 2R_{ijki}) \alpha_{ik} - (\langle \alpha_{kk}, \alpha_{ik} \rangle - 2R_{ijjk}) \alpha_{jk} \\ - 2 \sum_{m \neq i, j, k} R_{ijkm} \alpha_{km} + \sum_{m \neq i, j, k} \langle \alpha_{kk}, \alpha_{mj} \rangle \alpha_{im} - \sum_{m \neq i, j, k} \langle \alpha_{kk}, \alpha_{im} \rangle \alpha_{mj}.$$

3. Se $i \neq j = k \neq l \neq i$, então temos que:

$$0 = \langle \alpha_{jl}, \alpha_{ij} \rangle (\alpha_{ii} - \alpha_{jj}) + R_{ijjl} (\alpha_{jj} - \alpha_{ll}) \\ + [\langle \alpha_{jl}, \alpha_{jj} - \alpha_{ii} \rangle - R_{ijli}] \alpha_{ij} + (\|\alpha_{jl}\|^2 - K_{ij} + \phi) \alpha_{il} - \langle \alpha_{jl}, \alpha_{il} \rangle \alpha_{jl} \\ - \sum_{m \neq i, j, l} R_{ijjm} \alpha_{ml} - \sum_{m \neq i, j, l} [\langle \alpha_{jl}, \alpha_{im} \rangle + R_{ijlm}] \alpha_{jm} + \sum_{m \neq i, j, l} \langle \alpha_{jl}, \alpha_{mj} \rangle \alpha_{im}.$$

4. Se $i = k \neq j = l$, então temos que:

$$0 = (\|\alpha_{ij}\|^2 - K_{ij} + \phi) (\alpha_{ii} - \alpha_{jj}) + \langle \alpha_{ij}, \alpha_{jj} - \alpha_{ii} \rangle \alpha_{ij} \\ - \sum_{m \neq i, j} (\langle \alpha_{ij}, \alpha_{im} \rangle + R_{ijim}) \alpha_{mj} + \sum_{m \neq i, j} (\langle \alpha_{ij}, \alpha_{mj} \rangle - R_{ijlm}) \alpha_{im}.$$

5. Se $i \neq j = k = l$, então temos que:

$$0 = \langle \alpha_{jj}, \alpha_{ij} \rangle (\alpha_{ii} - \alpha_{jj}) + [\langle \alpha_{jj}, \alpha_{jj} - \alpha_{ii} \rangle - 2K_{ij} + 2\phi] \alpha_{ij} \\ - \sum_{m \neq i, j} (\langle \alpha_{jj}, \alpha_{im} \rangle + 2R_{ijjm}) \alpha_{jm} + \sum_{m \neq i, j} \langle \alpha_{jj}, \alpha_{mj} \rangle \alpha_{im}.$$

Aqui $K_{ij} = R_{ijji}$. Agora em cada uma das cinco combinações lineares obtidas acima, usamos a equação de Gauss e o fato que o conjunto

$$\gamma = \{\alpha_{11} - \alpha_{22}, \dots, \alpha_{(n-1)(n-1)} - \alpha_{nn}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{(n-1)n}\} \quad (3.24)$$

é linearmente independente, para obter as seguintes igualdades:

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad R_{ijkl} = R_{ijjk} = 0, \quad K_{ij} = K_{12}, \\ (2) \quad \|\alpha_{ii}\|^2 = 4K_{12} - 3\phi - c, \quad \langle \alpha_{ii}, \alpha_{jj} \rangle = 2K_{12} - \phi - c, \\ (3) \quad \|H\|^2 = \frac{2(n+1)}{n}K_{12} - \frac{(n+2)}{n}\phi - c, \\ (4) \quad \langle H, \alpha_{ij} \rangle = 0, \quad \langle H, \alpha_{ii} - \alpha_{jj} \rangle = 0, \\ (5) \quad \langle \alpha_{ij}, \alpha_{kk} \rangle = \langle \alpha_{ij}, \alpha_{ik} \rangle = \langle \alpha_{ij}, \alpha_{ii} \rangle = \langle \alpha_{ij}, \alpha_{kl} \rangle = 0, \\ (6) \quad \|\alpha_{ij}\|^2 = K_{12} - \phi, \\ (7) \quad \|\alpha_{ii} - \alpha_{jj}\|^2 = 4(K_{12} - \phi), \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

para todo i, j, k distintos e l qualquer. De (3.25)(1), segue-se que $\langle R(X, Y)Z, X \rangle = 0$, para todo X, Y, Z ortonormais de T_pM . Então pelo Lema 1.9 de [17], temos que todas as curvaturas seccionais de M em p são as mesmas. Daí, o Lema de Schur

implica que a curvatura seccional de M é a constante K . Além disso, $\phi < K$ por (3.25)(6), portanto (i) esta provado. De (3.25)(2) e (5) segue-se que

$$\|\alpha(X, X)\|^2 = 4K - 3\phi - c = \lambda^2 > 0,$$

para cada vetor unitário X em T_pM , e portanto f é λ -isotrópica. A segunda parte de (ii) é exatamente a equação (3.25)(3) e, além disso, segue-se de (3.25)(4) e (2) que f é pseudo-umbílica, pois

$$\langle \alpha(X, Y), H \rangle = \langle X, Y \rangle \langle \alpha_{11}, H \rangle = \langle X, Y \rangle \|H\|^2$$

para todo X, Y em T_pM . Por outro lado, como $H(p) \neq 0$, para todo $p \in M$ segue-se de (3.25) que $\{H\} \cup \gamma$ é um referencial local ortogonal de N_f^1 que é um subfibrado de $T^\perp M$, e portanto, normalizando este referencial, obtemos que β é um referencial local ortonormal do primeiro espaço normal de f . Para concluir a prova de (iii), basta usarmos (3.25)(1) em (3.22), pois desta forma obtemos a expressão dos operadores de curvatura normais R_{ij}^\perp .

Agora completamos o conjunto ordenado $\{e_1, \dots, e_n\} \cup \beta$ a um referencial local ortonormal $\{e_1, \dots, e_N\}$ adaptado a f , onde $e_{n+1} = \frac{H(p)}{\|H(p)\|}, \dots, e_{\frac{n(n+3)}{2}} = \frac{\alpha_{(n-1)n}}{\|\alpha_{(n-1)n}\|}$, e consideramos a função $g := \|\alpha\|^2 - n\|H\|^2 = (n-1)(n+2)(K - \phi)$. Então, usando as mesmas notações dadas na demonstração do Teorema 3.1.11 junto com o fato que f é pseudo-umbílica, temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta(g) &= \frac{1}{2} \Delta(\|\alpha\|^2) - \frac{n}{2} \Delta(\|H\|^2) \\ &= n\|H\| \Delta(\|H\|) + nc(\|\alpha\|^2 - n\|H\|^2) \\ &\quad - \sum_{\sigma, \tau} (\text{traço}(A_\sigma \circ A_\tau))^2 - \sum_{\sigma, \tau} \|[A_\sigma, A_\tau]\|^2 \\ &\quad + \sum_{\sigma, \tau} H^\tau \text{traço}(A_\sigma \circ A_\tau \circ A_\sigma) + \|\nabla \alpha\|^2 \\ &\quad - n\|H\| \Delta(\|H\|) - n\|d\|H\|^2, \end{aligned} \tag{3.26}$$

além disso,

$$\begin{aligned}
\|\nabla\alpha\|^2 &= \sum_{i,j,k} \sum_{\sigma>n+1} (h_{ijk}^\sigma)^2 + \sum_{\substack{i,j,k \\ i\neq j}} (h_{ijk}^{n+1})^2 + \sum_{i,k} (h_{iik}^{n+1})^2 \\
&= \sum_{\substack{i,j,k \\ i\neq j}} \sum_{\sigma>n+1} (h_{ijk}^\sigma)^2 + \sum_{\substack{i,j,k \\ i\neq j}} (h_{ijk}^{n+1})^2 + n \|d\|H\|^2. \quad (3.27)
\end{aligned}$$

Usando o referencial escolhido junto com as igualdades obtidas em (3.25), podemos facilmente calcular os operadores de Weingarten de f , os quais são dados por:

$$\begin{aligned}
A_{(1,1)} &= \|H\|I_{n\times n}; \\
A_{(i,i)} &= (K - \phi)^{\frac{1}{2}} (E_{11} - E_{ii}), \quad i = 2, \dots, n; \\
A_{(i,j)} &= (K - \phi)^{\frac{1}{2}} (E_{ij} + E_{ji}), \quad 1 \leq i < j \leq n; \\
A_\sigma &= 0, \quad \frac{(n+2)(n+1)}{2} \leq \sigma \leq N,
\end{aligned}$$

onde $(i, j) = \min\{i, j\} + \frac{1}{2}|i - j|(2n + 1 - |i - j|) + n$ e $E_{ij} = (a_{kl})$ com $a_{kl} = \delta_{ki}\delta_{jl}$. Daí, seguem as seguintes igualdades:

$$\sum_{\sigma,\tau} (\text{traço}(A_\sigma \circ A_\tau))^2 = n^2 \|H\|^4 + 2(n-1)(n+2)(K - \phi)^2, \quad (3.28)$$

$$\sum_{\sigma,\tau} \|[A_\sigma, A_\tau]\|^2 = 2n(n+2)(n-1)(K - \phi)^2, \quad (3.29)$$

$$\sum_{\sigma,\tau} H^T \text{traço}(A_\sigma \circ A_\tau \circ A_\sigma) = n^2 \|H\|^4 + n(n-1)(n+2)(K - \phi) \|H\|^2. \quad (3.30)$$

Substituindo (3.27)-(3.30) em (3.26), obtemos que

$$\frac{1}{2}\Delta(g) = n(n-1)(n+2)(K - \phi)\phi + \sum_{i,j,k} \sum_{\sigma>n+1} (h_{ijk}^\sigma)^2 + \sum_{\substack{i,j,k \\ i\neq j}} (h_{ijk}^{n+1})^2. \quad (3.31)$$

Agora se $\phi \geq 0$ em M , então de (3.31), temos que $\Delta(g) \geq 0$, (pois, $K > \phi$). Mas, se M é uma variedade compacta, segue-se do lema de Hopf que $\Delta(g) = 0$. Portanto, nesta situação, obtemos de (3.31) que

$$\phi = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{\substack{i,j,k \\ i\neq j}} \sum_{\sigma>n+1} (h_{ijk}^\sigma)^2 = \sum_{\substack{i,j,k \\ i\neq j}} (h_{ijk}^{n+1})^2 = 0,$$

logo $\|H\|^2 = \frac{2(n+1)}{n}K - c$ é constante o que implica que $\|d\|H\|^2 = 0$. Daí, segue-se que $\bar{\nabla}\alpha = 0$, ou seja, f é paralela. Consequentemente o primeiro espaço normal é um subfibrado paralelo, e portanto, podemos reduzir codimensão para $\frac{n(n+1)}{2}$. Finalmente, segue-se do paralelismo da segunda forma fundamental e das igualdades obtidas em (3.25) que o vetor curvatura média é paralelo. Com efeito, para provar que $\nabla_X^\perp H = 0$, para todo X vetor tangente, basta provar que $\nabla_{e_j}^\perp \alpha_{ii} = 0$, para todo i, j . Assim, pelo paralelismo, temos que

$$\nabla_{e_j}^\perp \alpha_{ii} = 2\alpha(\nabla_{e_j} e_i, e_k) = 2 \sum_{k=1}^n \sum_{\sigma=n+1}^{\frac{n(n+3)}{2}} \langle \nabla_{e_j} e_i, e_k \rangle \langle \alpha_{jk}, e_\sigma \rangle e_\sigma,$$

daí, $\nabla_{e_j}^\perp \alpha_{ii} = 0$, se e somente se, $\langle \nabla_{e_j} e_i, e_k \rangle \langle \alpha_{jk}, e_\sigma \rangle = 0$, para todo k e σ . Esta última condição segue diretamente de (3.25). Assim, o paralelismo do vetor curvatura média combinado com o fato de f ser pseudo-umbílica, implica que M é imersa por f em alguma hipersuperfície totalmente umbílica de $Q^{\frac{n(n+3)}{2}}(c)$ como uma variedade de Veronese. \square

Não é claro que, se tirarmos as condições de compacidade e de não negatividade da função de pseudo-paralelismo do Teorema 3.5.1 tenhamos obrigatoriamente uma resposta positiva para a seguinte questão:

Toda imersão pseudo-paralela com primeiro normal de dimensão máxima em todo ponto, tem sempre sua função de pseudo-paralelismo constante?

O seguinte resultado abaixo proporciona uma resposta positiva para a questão feita acima no caso de $n = 3$, pois não possui qualquer condição topológica global sobre as variedades envolvidas e sobre a função de pseudo-paralelismo.

Teorema 3.5.2 *Seja $f : M^3 \rightarrow Q^9(C)$ uma imersão ϕ -pseudo-paralela. Se o primeiro espaço normal de f for de dimensão 6 em cada ponto de M^3 , então ϕ é constante.*

Demonstração: Para provar que ϕ é constante utilizaremos o método do referencial móvel. Seja $\{e_1, e_2, e_3\}$ um referencial ortonormal tangente localmente diferenciável.

Queremos provar que a função $\varphi := 3K - 2\phi - C$ é constante. De fato, se provamos que φ é constante, teremos que ϕ será constante, pois, pelo Teorema 3.5.1 sabemos que a curvatura seccional K é constante. Assim, começamos a mostrar o querido, usando o fato que $\varphi > 0$ e que $k := (K - \phi)^{1/2} \neq 0$, para definir os seguintes campos normais:

$$\left. \begin{aligned} e_4 &= \frac{1}{2\sqrt{\varphi}} (\alpha_{11} + \alpha_{22}), & e_5 &= \frac{1}{2k} (\alpha_{11} - \alpha_{22}), \\ e_6 &= \frac{1}{k} \alpha_{12}, & e_7 &= \frac{1}{k} \alpha_{13}, & e_8 &= \frac{1}{k} \alpha_{23}, \\ e_9 &= \frac{k\sqrt{3\varphi - k^2}}{\sqrt{\varphi}} \left(\alpha_{33} - \left(\frac{\varphi - k^2}{2\varphi} \right) (\alpha_{11} + \alpha_{22}) \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

Conseqüentemente $\{e_1, e_2, e_3, e_4, \dots, e_9\}$ será um referencial móvel ortonormal local adaptado a f . Sejam $\{\omega_A\}, \{\omega_{A,B}\}$, $A, B = 1, \dots, 9$, respectivamente o referencial dual e as formas de conexão de $\{e_A\}$. Como é usual faremos a seguinte convenção sobre os índices

$$1 \leq i, j \leq 3, \quad 4 \leq \sigma, \tau \leq 5, \quad 1 \leq A, B \leq 9.$$

Como $\omega_\sigma = 0$ ao longo de M , temos que $\omega_{i\sigma} = \sum_{j=1}^3 \langle \alpha_{ij}, e_\sigma \rangle \omega_j$, e portanto, pela escolha dos e_A 's e as igualdades de (3.25), temos que:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{1,4} &= \sqrt{\varphi} \omega_1, & \omega_{2,4} &= \sqrt{\varphi} \omega_2, & \omega_{3,4} &= \left(\frac{\varphi - k^2}{\sqrt{\varphi}} \right) \omega_3, \\ \omega_{1,5} &= k \omega_1, & \omega_{2,5} &= -k \omega_2, & \omega_{3,5} &= 0, \\ \omega_{1,6} &= k \omega_2, & \omega_{2,6} &= k \omega_1, & \omega_{3,6} &= 0, \\ \omega_{1,7} &= k \omega_3, & \omega_{2,7} &= 0, & \omega_{3,7} &= k \omega_1, \\ \omega_{1,8} &= 0, & \omega_{2,8} &= k \omega_3, & \omega_{3,8} &= k \omega_2, \\ \omega_{1,9} &= 0, & \omega_{2,9} &= 0, & \omega_{3,9} &= \frac{k\sqrt{3\varphi - k^2}}{\sqrt{\varphi}} \omega_3. \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

As equações de estrutura são dadas por:

$$\left. \begin{aligned} d\omega_A &= \sum_B \omega_{A,B} \wedge \omega_B, \\ d\omega_{1,2} &= -K \omega_1 \wedge \omega_2, \\ d\omega_{1,3} &= -K \omega_1 \wedge \omega_3, \\ d\omega_{2,3} &= -K \omega_2 \wedge \omega_3, \\ d\omega_{A,\sigma} &= \sum_B \omega_{A,\sigma} \wedge \omega_{B,\sigma}. \end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

Agora fazemos:

$$d\varphi = a\omega_1 + b\omega_2 + c\omega_3, \quad \omega_{A,B} = a_{A,B}\omega_1 + b_{A,B}\omega_2 + c_{A,B}\omega_3. \quad (3.35)$$

Queremos provar que $a = b = c = 0$. Para isto calculamos $d\omega_{i,\sigma}$ usando (3.33) e (3.35). Para $(i, \sigma) = (1, 4)$ temos que:

$$\begin{aligned} d\omega_{1,4} &= d(\sqrt{\varphi}\omega_1) = \left(\sqrt{\varphi}a_{1,2} - \frac{b}{2\sqrt{\varphi}}\right)\omega_1 \wedge \omega_2 \\ &\quad + \left(\sqrt{\varphi}a_{1,3} - \frac{c}{2\sqrt{\varphi}}\right)\omega_1 \wedge \omega_3 + \sqrt{\varphi}(b_{1,3} - c_{1,2})\omega_2 \wedge \omega_3 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} d\omega_{1,4} &= \sum_{B=1}^9 \omega_{1,B} \wedge \omega_{B,4} = (\sqrt{\varphi}a_{1,2} - kb_{4,5} + ka_{4,6})\omega_1 \wedge \omega_2 \\ &\quad + \left(\left(\frac{\varphi - k^2}{\sqrt{\varphi}}\right)a_{1,3} - kc_{4,5} + ka_{4,7}\right)\omega_1 \wedge \omega_3 \\ &\quad + \left(\left(\frac{\varphi - k^2}{\sqrt{\varphi}}\right)b_{1,3} - \sqrt{\varphi}c_{1,2} - kc_{4,6} + kb_{4,7}\right)\omega_2 \wedge \omega_3. \end{aligned}$$

Destas duas igualdades junto com cálculos análogos para os outros pares de índices, obtemos um sistema linear não homogêneo de 54 equações:

$$a_{4,6} - b_{4,5} = -\frac{b}{2\sqrt{\varphi}k}, \quad (3.36)$$

$$-\frac{k}{\sqrt{\varphi}}a_{1,3} + a_{4,7} - c_{4,5} = -\frac{c}{2\sqrt{\varphi}k}, \quad (3.37)$$

$$-\frac{k}{\sqrt{\varphi}}b_{1,3} + b_{4,7} - c_{4,6} = 0, \quad (3.38)$$

$$-a_{4,5} - b_{4,6} = \frac{a}{2\sqrt{\varphi}k}, \quad (3.39)$$

$$-\frac{k}{\sqrt{\varphi}}a_{2,3} + a_{4,8} - c_{4,6} = 0, \quad (3.40)$$

$$-\frac{k}{\sqrt{\varphi}}b_{2,3} + b_{4,8} + c_{4,5} = -\frac{c}{2\sqrt{\varphi}k}, \quad (3.41)$$

$$-\frac{k}{\sqrt{\varphi}}a_{2,3} + a_{4,8} + \frac{k}{\sqrt{\varphi}}b_{1,3} - b_{4,7} = 0, \quad (3.42)$$

$$\frac{\sqrt{3\varphi - k^2}}{\sqrt{\varphi}}a_{4,9} + \frac{k}{\sqrt{\varphi}}c_{1,3} - c_{4,7} = \frac{k}{2\sqrt{\varphi}\varphi}a, \quad (3.43)$$

$$\frac{\sqrt{3\varphi - k^2}}{\sqrt{\varphi}}b_{4,9} + \frac{k}{\sqrt{\varphi}}c_{2,3} - c_{4,8} = \frac{k}{2\sqrt{\varphi}\varphi}b, \quad (3.44)$$

$$-2a_{1,2} + a_{5,6} + \frac{\sqrt{\varphi}}{k}b_{4,5} = -\frac{b}{4k^2}, \quad (3.45)$$

$$-a_{1,3} + \frac{\sqrt{\varphi}}{k}c_{4,5} + a_{5,7} = -\frac{c}{4k^2}, \quad (3.46)$$

$$-b_{1,3} + b_{5,7} + 2c_{1,2} - c_{5,6} = 0, \quad (3.47)$$

$$-2b_{1,2} + \frac{\sqrt{\varphi}}{k}b_{4,6} + b_{5,6} = \frac{a}{4k^2}, \quad (3.48)$$

$$-a_{2,3} + a_{6,7} - 2c_{1,2} + \frac{\sqrt{\varphi}}{k}c_{4,6} + c_{5,6} = 0, \quad (3.49)$$

$$-b_{2,3} + b_{6,7} = -\frac{c}{4k^2}, \quad (3.50)$$

$$a_{2,3} - a_{6,7} - 2b_{1,3} + \frac{\sqrt{\varphi}}{k}b_{4,7} + b_{5,7} = 0, \quad (3.51)$$

$$-2c_{1,3} + \frac{\sqrt{\varphi}}{k}c_{4,7} + c_{5,7} = \frac{a}{4k^2}, \quad (3.52)$$

$$-c_{2,3} + c_{6,7} = \frac{b}{4k^2}, \quad (3.53)$$

$$a_{1,3} - a_{6,8} + \frac{\sqrt{\varphi}}{k}b_{4,8} + b_{5,8} = 0, \quad (3.54)$$

$$a_{1,2} - a_{7,8} + \frac{\sqrt{\varphi}}{k}c_{4,8} + c_{5,8} = 0, \quad (3.55)$$

$$b_{1,2} - b_{7,8} - c_{1,3} + c_{6,8} = 0, \quad (3.56)$$

$$-a_{6,9} + \frac{\sqrt{\varphi}}{k}b_{4,9} + b_{5,9} = 0, \quad (3.57)$$

$$\frac{\sqrt{3\varphi-k^2}}{\sqrt{\varphi}}a_{1,3} - a_{7,9} + \frac{\sqrt{\varphi}}{k}c_{4,9} + c_{5,9} = 0, \quad (3.58)$$

$$\frac{\sqrt{3\varphi-k^2}}{\sqrt{\varphi}}b_{1,3} - b_{7,9} + c_{6,9} = 0, \quad (3.59)$$

$$-\frac{\sqrt{\varphi}}{k}a_{4,5} + 2b_{1,2} - b_{5,6} = -\frac{a}{4k^2}, \quad (3.60)$$

$$a_{2,3} + a_{5,8} + 2c_{1,2} - c_{5,6} = 0, \quad (3.61)$$

$$b_{2,3} + b_{5,8} + \frac{\sqrt{\varphi}}{k}c_{4,5} = \frac{c}{4k^2} \quad (3.62)$$

$$-2a_{1,2} - \frac{\sqrt{\varphi}}{k}a_{4,6} + a_{5,6} = -\frac{b}{4k^2}, \quad (3.63)$$

$$-a_{1,3} + a_{6,8} = -\frac{c}{4k^2}, \quad (3.64)$$

$$-b_{1,3} + b_{6,8} + 2c_{1,2} + \frac{\sqrt{\varphi}}{k}c_{4,6} - c_{5,6} = 0, \quad (3.65)$$

$$-\frac{\sqrt{\varphi}}{k}a_{4,7} + a_{5,7} - b_{2,3} + b_{6,7} = 0, \quad (3.66)$$

$$-a_{1,2} + a_{7,8} - c_{2,3} + c_{6,7} = 0, \quad (3.67)$$

$$-b_{1,2} + b_{7,8} + \frac{\sqrt{\varphi}}{k}c_{4,7} - c_{5,7} = 0, \quad (3.68)$$

$$2a_{2,3} - \frac{\sqrt{\varphi}}{k}a_{4,8} + a_{5,8} - b_{1,3} + b_{6,8} = 0, \quad (3.69)$$

$$-c_{1,3} + c_{6,8} = \frac{a}{4k^2}, \quad (3.70)$$

$$-2c_{2,3} + \frac{\sqrt{\varphi}}{k}c_{4,8} - c_{5,8} = \frac{b}{4k^2}, \quad (3.71)$$

$$-\frac{\sqrt{\varphi}}{k}a_{4,9} + a_{5,9} + b_{6,9} = 0, \quad (3.72)$$

$$\frac{\sqrt{3\varphi-k^2}}{\sqrt{\varphi}}a_{2,3} - a_{8,9} + c_{6,9} = 0, \quad (3.73)$$

$$\frac{\sqrt{3\varphi-k^2}}{\sqrt{\varphi}}b_{2,3} - b_{8,9} + \frac{\sqrt{\varphi}}{k}c_{4,9} - c_{5,9} = 0, \quad (3.74)$$

$$a_{2,3} + a_{5,8} + b_{1,3} - b_{5,7} = 0, \quad (3.75)$$

$$-\left(\frac{\varphi-k^2}{k\sqrt{\varphi}}\right)a_{4,5} + \frac{\sqrt{3\varphi-k^2}}{\sqrt{\varphi}}a_{5,9} + c_{1,3} - c_{5,7} = 0, \quad (3.76)$$

$$-\left(\frac{\varphi-k^2}{k\sqrt{\varphi}}\right)b_{4,5} + \frac{\sqrt{3\varphi-k^2}}{\sqrt{\varphi}}b_{5,9} - c_{2,3} - c_{5,8} = 0, \quad (3.77)$$

$$-a_{1,3} + a_{6,8} + b_{2,3} - b_{6,7} = 0, \quad (3.78)$$

$$-\left(\frac{\varphi-k^2}{k\sqrt{\varphi}}\right)a_{4,6} + \frac{\sqrt{3\varphi-k^2}}{\sqrt{\varphi}}a_{6,9} + c_{2,3} - c_{6,7} = 0, \quad (3.79)$$

$$-\left(\frac{\varphi-k^2}{k\sqrt{\varphi}}\right)b_{4,6} + \frac{\sqrt{3\varphi-k^2}}{\sqrt{\varphi}}b_{6,9} + c_{1,3} - c_{6,8} = 0, \quad (3.80)$$

$$-a_{1,2} + a_{7,8} = -\frac{b}{4k^2}, \quad (3.81)$$

$$-2a_{1,3} - \left(\frac{\varphi-k^2}{k\sqrt{\varphi}}\right)a_{4,7} + \frac{\sqrt{3\varphi-k^2}}{\sqrt{\varphi}}a_{7,9} = -\frac{c}{4k^2}, \quad (3.82)$$

$$-2b_{1,3} - \left(\frac{\varphi-k^2}{k\sqrt{\varphi}}\right)b_{4,7} + \frac{\sqrt{3\varphi-k^2}}{\sqrt{\varphi}}b_{7,9} + c_{1,2} - c_{7,8} = 0, \quad (3.83)$$

$$-b_{1,2} + b_{7,8} = \frac{a}{4k^2}, \quad (3.84)$$

$$-2a_{2,3} - \left(\frac{\varphi-k^2}{k\sqrt{\varphi}}\right)a_{4,8} + \frac{\sqrt{3\varphi-k^2}}{\sqrt{\varphi}}a_{8,9} - c_{1,2} + c_{7,8} = 0, \quad (3.85)$$

$$-2b_{2,3} - \left(\frac{\varphi-k^2}{k\sqrt{\varphi}}\right)b_{4,8} + \frac{\sqrt{3\varphi-k^2}}{\sqrt{\varphi}}b_{8,9} = -\frac{c}{4k^2}, \quad (3.86)$$

$$\frac{\sqrt{3\varphi-k^2}}{\sqrt{\varphi}} a_{2,3} - a_{8,9} - \frac{\sqrt{3\varphi-k^2}}{\sqrt{\varphi}} b_{1,3} + b_{7,9} = 0, \quad (3.87)$$

$$- \left(\frac{\varphi-k^2}{k\sqrt{\varphi}} \right) a_{4,9} - \frac{\sqrt{3\varphi-k^2}}{\sqrt{\varphi}} c_{1,3} + c_{7,9} = \left(\frac{5\varphi^2+(K-C)^2}{8k^2\varphi\sqrt{\varphi}\sqrt{3\varphi-k^2}} \right) a, \quad (3.88)$$

$$- \left(\frac{\varphi-k^2}{k\sqrt{\varphi}} \right) b_{4,9} - \frac{\sqrt{3\varphi-k^2}}{\sqrt{\varphi}} c_{2,3} + c_{8,9} = \left(\frac{5\varphi^2+(K-C)^2}{8k^2\varphi\sqrt{\varphi}\sqrt{3\varphi-k^2}} \right) b. \quad (3.89)$$

Fazendo manipulações algébricas das equações acima, obtemos as formas normais de conexão $\omega_{\sigma\tau}$:

$$\omega_{4,5} = \left(\frac{1}{8\varphi(\varphi-K+C)} \right)^{\frac{1}{2}} (-a\omega_1 + b\omega_2), \quad (3.90)$$

$$\omega_{4,6} = \left(\frac{1}{8\varphi(\varphi-K+C)} \right)^{\frac{1}{2}} (-b\omega_1 - a\omega_2), \quad (3.91)$$

$$\omega_{4,7} = \left(\frac{\varphi-K+C}{2\varphi} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\omega_{1,3} - \left(\frac{1}{\varphi-K+C} \right) c\omega_1 \right), \quad (3.92)$$

$$\omega_{4,8} = \left(\frac{\varphi-K+C}{2\varphi} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\omega_{2,3} - \left(\frac{1}{\varphi-K+C} \right) c\omega_2 \right), \quad (3.93)$$

$$\omega_{4,9} = \frac{1}{2\varphi} \left(\frac{\varphi-K+C}{5\varphi+K-C} \right)^{\frac{1}{2}} \left(d\varphi - \left(\frac{3\varphi}{\varphi-K+C} \right) c\omega_3 \right), \quad (3.94)$$

$$\omega_{5,6} = 2\omega_{1,2} + \left(\frac{1}{\varphi-K+C} \right) (-b\omega_1 + a\omega_2), \quad (3.95)$$

$$\omega_{5,7} = \omega_{1,3} + \frac{1}{2(\varphi-K+C)} (-c\omega_1 + a\omega_3), \quad (3.96)$$

$$\omega_{5,8} = -\omega_{2,3} + \frac{1}{2(\varphi-K+C)} (c\omega_2 - b\omega_3), \quad (3.97)$$

$$\omega_{5,9} = \left(\frac{1}{8\varphi(5\varphi+K-C)} \right)^{\frac{1}{2}} (a\omega_1 - b\omega_2), \quad (3.98)$$

$$\omega_{6,7} = \omega_{2,3} + \frac{1}{2(\varphi-K+C)} (-c\omega_2 + b\omega_3), \quad (3.99)$$

$$\omega_{6,8} = \omega_{1,3} + \frac{1}{2(\varphi-K+C)} (-c\omega_1 + a\omega_3), \quad (3.100)$$

$$\omega_{6,9} = \left(\frac{1}{8\varphi(5\varphi+K-C)} \right)^{\frac{1}{2}} (b\omega_1 + a\omega_2), \quad (3.101)$$

$$\omega_{7,8} = \omega_{1,2} + \frac{1}{2(\varphi-K+C)} (-b\omega_1 + a\omega_2), \quad (3.102)$$

$$\begin{aligned} \omega_{7,9} = \left(\frac{5\varphi+K-C}{2\varphi} \right)^{\frac{1}{2}} & \left[\omega_{1,3} - \left(\frac{2\varphi+K-C}{(\varphi-K+C)(5\varphi+K-C)} \right) c\omega_1 \right. \\ & \left. + \left(\frac{3\varphi}{(\varphi-K+C)(5\varphi+K-C)} \right) a\omega_3 \right], \end{aligned} \quad (3.103)$$

$$\begin{aligned} \omega_{8,9} = \left(\frac{5\varphi+K-C}{2\varphi} \right)^{\frac{1}{2}} & \left[\omega_{2,3} - \left(\frac{2\varphi+K-C}{(\varphi-K+C)(5\varphi+K-C)} \right) c\omega_2 \right. \\ & \left. + \left(\frac{3\varphi}{(\varphi-K+C)(5\varphi+K-C)} \right) b\omega_3 \right]. \end{aligned} \quad (3.104)$$

Derivamos $\omega_{4,5}$ usando as expressões (3.90)-(3.104), assim, temos que:

$$\begin{aligned} d\omega_{4,5} &= \mathbf{d} \left(\left(\frac{1}{8\varphi(\varphi-K+C)} \right)^{\frac{1}{2}} (-a\omega_1 + b\omega_2) \right) \\ &= \left[-\left(\frac{2\varphi-K+C}{\varphi(\varphi-K+C)} \right) ab\omega_1 \wedge \omega_2 - \left(\frac{2\varphi-K+C}{2\varphi(\varphi-K+C)} \right) ac\omega_1 \wedge \omega_3 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{2\varphi-K+C}{2\varphi(\varphi-K+C)} \right) bc\omega_2 \wedge \omega_3 - b\omega_{1,2} \wedge \omega_1 - a\omega_{1,2} \wedge \omega_2 \right. \\ &\quad \left. - a\omega_{1,3} \wedge \omega_3 + b\omega_{2,3} \wedge \omega_3 + \omega_1 \wedge \mathbf{d}a + \mathbf{d}b \wedge \omega_2 \right] \left(\frac{1}{8\varphi(\varphi-K+C)} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.105)$$

Por outro lado, usamos as equações de estrutura, junto com (3.33) e (3.90)-(3.104),

para obter que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}\omega_{4,5} &= -\omega_{4,6} \wedge \omega_{5,6} - \omega_{4,7} \wedge \omega_{5,7} - \omega_{4,8} \wedge \omega_{5,8} - \omega_{4,9} \wedge \omega_{5,9} \\
&= \left[\left(\frac{11\varphi^2 + (K-C)^2}{\varphi(\varphi-K+C)(5\varphi+K-C)} \right) ab\omega_1 \wedge \omega_2 \right. \\
&\quad + \left(\frac{8\varphi^2 + 3\varphi(K-C) + (K-C)^2}{2\varphi(\varphi-K+C)(5\varphi+K-C)} \right) ac\omega_1 \wedge \omega_3 \\
&\quad - \left(\frac{8\varphi^2 + 3\varphi(K-C) + (K-C)^2}{2\varphi(\varphi-K+C)(5\varphi+K-C)} \right) bc\omega_2 \wedge \omega_3 \\
&\quad + 2b\omega_1 \wedge \omega_{1,2} + 2a\omega_2 \wedge \omega_{1,2} \\
&\quad - a\omega_{1,3} \wedge \omega_3 + c\omega_1 \wedge \omega_{1,3} \\
&\quad \left. + b\omega_{2,3} \wedge \omega_3 - c\omega_2 \wedge \omega_{2,3} \right] \left(\frac{1}{8\varphi(\varphi-K+C)} \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{3.106}$$

Comparando as espresões obtidas em (3.105) e (3.106), obtemos que:

$$\begin{aligned}
\omega_1 \wedge \mathbf{d}a + \mathbf{d}b \wedge \omega_2 &= \left(\frac{3(7\varphi-K+C)}{(\varphi-K+C)(5\varphi+K-C)} \right) ab\omega_1 \wedge \omega_2 \\
&\quad + \left(\frac{9\varphi}{(\varphi-K+C)(5\varphi+K-C)} \right) ac\omega_1 \wedge \omega_3 \\
&\quad - \left(\frac{9\varphi}{(\varphi-K+C)(5\varphi+K-C)} \right) bc\omega_2 \wedge \omega_3 \\
&\quad + b\omega_1 \wedge \omega_{1,2} + a\omega_2 \wedge \omega_{1,2} \\
&\quad + c\omega_1 \wedge \omega_{1,3} - c\omega_2 \wedge \omega_{2,3}.
\end{aligned} \tag{3.107}$$

Os mesmos cálculos podem ser feitos para $\omega_{4,6}, \omega_{5,6}, \omega_{5,7}, \omega_{5,9}, \omega_{6,8}, \omega_{6,9}, \omega_{7,8}$, obtendo:

$$\begin{aligned}
\omega_2 \wedge \mathbf{d}a - \mathbf{d}b \wedge \omega_1 &= \left(\frac{3(7\varphi-K+C)}{2(\varphi-K+C)(5\varphi+K-C)} \right) (b^2 - a^2) \omega_1 \wedge \omega_2 \\
&\quad + \left(\frac{9\varphi}{(\varphi-K+C)(5\varphi+K-C)} \right) bc\omega_1 \wedge \omega_3 \\
&\quad + \left(\frac{9\varphi}{(\varphi-K+C)(5\varphi+K-C)} \right) ac\omega_2 \wedge \omega_3 \\
&\quad - a\omega_1 \wedge \omega_{1,2} + b\omega_2 \wedge \omega_{1,2} \\
&\quad + c\omega_2 \wedge \omega_{1,3} + c\omega_1 \wedge \omega_{2,3},
\end{aligned} \tag{3.108}$$

$$\begin{aligned}
\omega_1 \wedge \mathbf{d}b + \mathbf{d}a \wedge \omega_2 &= -(\varphi - K + C)(\varphi - 3K + C) \\
&+ \left(\frac{17\varphi + 7K - 7C}{4(\varphi - K + C)(5\varphi + K - C)} \right) (a^2 + b^2) \\
&- \left(\frac{1}{2(\varphi - K + C)} \right) c^2 \omega_1 \wedge \omega_2 \tag{3.109} \\
&+ \left(\frac{3}{2(\varphi - K + C)} \right) bc\omega_1 \wedge \omega_3 - \left(\frac{3}{2(\varphi - K + C)} \right) ac\omega_2 \wedge \omega_3 \\
&- 2(\varphi - K + C)\omega_{1,3} \wedge \omega_{2,3} \\
&+ a\omega_{1,2} \wedge \omega_1 + b\omega_{1,2} \wedge \omega_2 + c\omega_{1,3} \wedge \omega_2 + c\omega_1 \wedge \omega_{2,3},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_1 \wedge \mathbf{d}c + \mathbf{d}a \wedge \omega_3 &= \left(\frac{4\varphi - K + C}{(\varphi - K + C)(5\varphi + K - C)} \right) bc\omega_1 \wedge \omega_2 \\
&+ (-\varphi - K + C)(\varphi - 3K + C) \\
&+ \left(\frac{7\varphi + 5K - 5C}{2(\varphi - K + C)(5\varphi + K - C)} \right) a^2 \\
&- \left(\frac{1}{2(\varphi - K + C)} \right) b^2 + \left(\frac{1}{\varphi - K + C} \right) c^2 \omega_1 \wedge \omega_3 \tag{3.110} \\
&+ \left(\frac{9\varphi}{(\varphi - K + C)(5\varphi + K - C)} \right) ab\omega_2 \wedge \omega_3 \\
&+ 2(\varphi - K + C)\omega_{1,2} \wedge \omega_{2,3} + b\omega_{1,2} \wedge \omega_3 \\
&- b\omega_1 \wedge \omega_{2,3} + a\omega_{1,3} \wedge \omega_1 + c\omega_{1,3} \wedge \omega_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_2 \wedge \mathbf{d}b + \mathbf{d}a \wedge \omega_1 &= -\left(\frac{3(5\varphi - K + C)}{(\varphi - K + C)(5\varphi + K - C)} \right) ab\omega_1 \wedge \omega_2 \\
&- \left(\frac{15\varphi}{(\varphi - K + C)(5\varphi + K - C)} \right) ac\omega_1 \wedge \omega_3 \tag{3.111} \\
&+ \left(\frac{15\varphi}{(\varphi - K + C)(5\varphi + K - C)} \right) bc\omega_2 \wedge \omega_3 \\
&+ b\omega_{1,2} \wedge \omega_1 + a\omega_{1,2} \wedge \omega_2 - c\omega_1 \wedge \omega_{1,3} - c\omega_{2,3} \wedge \omega_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_1 \wedge \mathbf{d}c + \mathbf{d}a \wedge \omega_3 &= -\left(\frac{4\varphi - K + C}{(\varphi - K + C)(5\varphi + K - C)} \right) bc\omega_1 \wedge \omega_2 \\
&- \left((\varphi - K + C)(\varphi - 3K + C) - \left(\frac{1}{\varphi - K + C} \right) (a^2 + c^2) \right) \\
&+ \left(\frac{4\varphi - K + C}{(5\varphi + K - C)(\varphi - K + C)} \right) b^2 \omega_1 \wedge \omega_3 \tag{3.112} \\
&+ \left(\frac{3(2\varphi + K - C)}{(\varphi - K + C)(5\varphi + K - C)} \right) ab\omega_2 \wedge \omega_3 \\
&+ 2(\varphi - K + C)\omega_{1,2} \wedge \omega_{2,3} \\
&+ b\omega_{1,2} \wedge \omega_3 + a\omega_{1,3} \wedge \omega_1 + c\omega_{1,3} \wedge \omega_3 - b\omega_1 \wedge \omega_{2,3},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_1 \wedge \mathbf{d}b - \mathbf{d}a \wedge \omega_2 &= \left(\frac{3(5\varphi - K + C)}{2(\varphi - K + C)(5\varphi + K - C)} \right) (b^2 - a^2) \omega_1 \wedge \omega_2 \\
&\quad + \left(\frac{15\varphi}{(\varphi - K + C)(5\varphi + K - C)} \right) bc\omega_1 \wedge \omega_3 \\
&\quad + \left(\frac{15\varphi}{(\varphi - K + C)(5\varphi + K - C)} \right) ac\omega_2 \wedge \omega_3 \\
&\quad + a\omega_{1,2} \wedge \omega_1 - b\omega_{1,2} \wedge \omega_2 - c\omega_{1,3} \wedge \omega_2 - c\omega_{2,3} \wedge \omega_1,
\end{aligned} \tag{3.113}$$

$$\begin{aligned}
\omega_1 \wedge \mathbf{d}b + \mathbf{d}a \wedge \omega_2 &= -(\varphi - K + C)(\varphi - 3K + C) \\
&\quad + \left(\frac{1}{\varphi - K + C} \right) (a^2 + b^2) \\
&\quad - \left(\frac{4\varphi - K + C}{(\varphi - K + C)(5\varphi + K - C)} \right) c^2 \omega_1 \wedge \omega_2 \\
&\quad + \left(\frac{4\varphi - K + C}{(\varphi - K + C)(5\varphi + K - C)} \right) bc\omega_1 \wedge \omega_3 \\
&\quad - \left(\frac{\varphi + 2K - 2C}{(\varphi - K + C)(5\varphi + K - C)} \right) ac\omega_2 \wedge \omega_3 \\
&\quad - 2(\varphi - K + C)\omega_{1,3} \wedge \omega_{2,3} \\
&\quad + a\omega_{1,2} \wedge \omega_1 + b\omega_{1,2} \wedge \omega_2 + c\omega_{1,3} \wedge \omega_2 + c\omega_1 \wedge \omega_{2,3},
\end{aligned} \tag{3.114}$$

Combinando (3.107) e (3.111), obtemos que

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\frac{6\varphi}{(\varphi - K + C)(5\varphi + K - C)} \right) ab\omega_1 \wedge \omega_2 - \left(\frac{6\varphi}{(\varphi - K + C)(5\varphi + K - C)} \right) ac\omega_1 \wedge \omega_3 \\
&\quad + \left(\frac{6\varphi}{(\varphi - K + C)(5\varphi + K - C)} \right) bc\omega_2 \wedge \omega_3,
\end{aligned}$$

daí, como $\varphi \neq 0$, obtemos que:

$$ab = 0, \quad ac = 0, \quad bc = 0. \tag{3.115}$$

Combinando (3.108) e (3.113), obtemos que

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\frac{3\varphi}{(\varphi - K + C)(5\varphi + K - C)} \right) (b^2 - a^2) \omega_1 \wedge \omega_2 - \left(\frac{6\varphi}{(\varphi - K + C)(5\varphi + K - C)} \right) bc\omega_1 \wedge \omega_3 \\
&\quad - \left(\frac{6\varphi}{(\varphi - K + C)(5\varphi + K - C)} \right) ac\omega_2 \wedge \omega_3,
\end{aligned}$$

daí, como $\varphi \neq 0$, obtemos:

$$(b - a)(a + b) = 0, \quad bc = 0, \quad ac = 0. \tag{3.116}$$

Combinando (3.110) e (3.112), obtemos que

$$0 = \left(\frac{2(4\varphi - K + C)}{(\varphi - K + C)(5\varphi + K - C)} \right) bc\omega_1 \wedge \omega_2 + \left(\frac{3}{2(5\varphi + K - C)} \right) (b^2 - a^2) \omega_1 \wedge \omega_3 \\ + \left(\frac{3}{5\varphi + K - C} \right) ab\omega_2 \wedge \omega_3,$$

daí, como $4\varphi - K + C \neq 0$, obtemos que:

$$bc = 0, \quad b^2 - a^2 = 0, \quad ab = 0. \quad (3.117)$$

Por último, combinamos (3.109) e (3.114), obtemos que

$$0 = \left(\left(\frac{3}{4(5\varphi + K - C)} \right) (a^2 + b^2) - \left(\frac{3}{2(5\varphi + K - C)} \right) c^2 \right) \omega_1 \wedge \omega_2 \\ - \left(\frac{7\varphi + 5K - 5C}{2(\varphi - K + C)(5\varphi + K - C)} \right) bc\omega_1 \wedge \omega_3 + \left(\frac{13\varphi - K + C}{2(\varphi - K + C)(5\varphi + K - C)} \right) ac\omega_2 \wedge \omega_3,$$

daí como $7\varphi + 5K - 5C \neq 0$ e $13\varphi - K + C \neq 0$, obtemos que:

$$a^2 + b^2 - 2c^2 = 0, \quad bc = 0, \quad ac = 0 \quad (3.118)$$

Portanto, concluímos de (3.115), (3.116), (3.117), (3.118) que $a = b = c = 0$. Ou seja φ é constante. \square

Observação 3.5.3 O método do referencial móvel utilizado na prova da proposição acima permitiu dar uma pequena resposta afirmativa para essa questão no caso de $n = 3$ e codimensão 6. Mas é importante ressaltar que para $n > 3$ o método do referencial móvel se torna computacionalmente inviável devido a que não existe um programa computacional que permita manipular sistemas literais de grande porte. Contudo, queremos *conjecturar* que ϕ é constante também para o caso de $n > 3$. Vale lembrar aqui que no caso compacto e com a condição de não negatividade da função de pseudo-paralelismo provamos que a resposta é positiva em qualquer codimensão.

Agora com as hipóteses de minimalidade junto com a segunda condição de regularidade sobre o primeiro espaço normal, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 3.5.4 *Seja $f : M^n \rightarrow Q^N(c)$ uma imersão pseudo-paralela com $\phi \geq 0$. Se f é mínima e $\dim N_f^1(p) = \frac{n(n+1)}{2} - 1$, em cada ponto p de M , então f imerge M como uma variedade de Veronese em $Q^N(c)$, onde $N = \frac{n(n+3)}{2} - 1$.*

Demonstração: Usando a mesma técnica dada na demonstração do Teorema 3.5.1 obtemos que valem todas as igualdades obtidas em (3.25) e que a curvatura seccional K de M é constante. Consequentemente temos que f é uma imersão λ -isotrópica constante. Logo usando a hipótese de que $\phi \geq 0$ podemos provar analogamente como no Teorema 3.5.1 que $\|\nabla\alpha\|^2 = 0$. Daí, por um resultado clássico de Erbacher (ver [28]) podemos reduzir a codimensão de f para $\frac{n(n+1)}{2} - 1$. Assim, o resultado desejado segue diretamente do Teorema 1 de [32]. \square

Capítulo 4

Sistemas triplos de Jordan

4.1 Relação com as imersões pseudo-paralelas

Nesta seção introduzimos os sistemas triplos de Jordan e mostramos que estes sistemas estão intimamente relacionados com a classe de imersões pseudo-paralelas.

Sejam \mathbb{V} um espaço vetorial com produto interno, $c \in \mathbb{R}$, \mathbb{E} um subespaço de \mathbb{V} e $\alpha : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}^\perp$ uma aplicação bilinear simétrica. Um *sistema triplo de* (\mathbb{V}, c) com *dado inicial* (\mathbb{E}, α) , é uma aplicação bilinear induzida $\mathcal{L} = \mathcal{S} + \mathcal{R} : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \text{End}(\mathbb{V})$ cujas partes simétrica \mathcal{S} e antisimétrica \mathcal{R} são dadas por:

$$\left. \begin{aligned} \langle \mathcal{S}(U, V)X, Y \rangle &= c \langle U, V \rangle \langle X, Y \rangle + \langle \alpha(U, V), \alpha(X, Y) \rangle, \\ \langle \mathcal{R}(U, V)X, Y \rangle &= \langle \mathcal{S}(V, X)U, Y \rangle - \langle \mathcal{S}(U, X)V, Y \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Lembremos que um Sistema triplo $\mathcal{L} = \mathcal{S} + \mathcal{R}$ como acima, é dito um *sistema triplo de Jordan* (S.T.J.) se verifica-se as seguintes condições:

$$\left. \begin{aligned} \text{(i)} \quad [\mathcal{S}(U, V), \mathcal{S}(X, Y)] &= \mathcal{R}(\mathcal{S}(U, V)X, Y) - \mathcal{R}(X, \mathcal{S}(V, U)Y), \\ \text{(ii)} \quad [\mathcal{S}(U, V), \mathcal{R}(X, Y)] &= \mathcal{S}(\mathcal{S}(U, V)X, Y) - \mathcal{S}(X, \mathcal{S}(V, U)Y), \\ \text{(iii)} \quad [\mathcal{R}(U, V), \mathcal{S}(X, Y)] &= \mathcal{S}(\mathcal{R}(U, V)X, Y) - \mathcal{S}(X, \mathcal{R}(V, U)Y), \\ \text{(iv)} \quad [\mathcal{R}(U, V), \mathcal{R}(X, Y)] &= \mathcal{R}(\mathcal{R}(U, V)X, Y) - \mathcal{R}(X, \mathcal{R}(V, U)Y), \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

para todo $X, Y, U, V, Z \in \mathbb{V}$, onde $[,]$ denota o comutador de endomorfismos.

Exemplo 4.1.1 Seja $f : M^n \rightarrow Q^N(c)$ uma imersão isométrica e seja $\phi : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ qualquer função diferenciável. Para cada $p \in M$, definimos $\mathcal{L} = \mathcal{S} + \mathcal{R} : T_p M \times$

$T_p M \rightarrow \text{End}(T_p M)$ por $\mathcal{L}(U, V) = \mathcal{S}(U, V) + \mathcal{R}(U, V)$, onde

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{S}(U, V) &= (c - \phi(p)) \langle U, V \rangle \text{id}_{T_p M} + A_{\alpha(U, V)}, \\ \mathcal{R}(U, V) &= R(U, V) - \phi(p)(U \wedge V), \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

para todo $U, V \in T_p M$. Então claramente temos que \mathcal{S} , \mathcal{R} e α satisfazem (4.1), portanto $\mathcal{L} = \mathcal{S} + \mathcal{R}$ é um sistema triplo.

Um fato básico provado por Deprez em [20] é quando $\phi = 0$, então a imersão f é semi-paralela se e somente se o sistema triplo dado por (4.3) é um S.T.J.. Em geral, temos o seguinte resultado:

Proposição 4.1.2 *Seja $f : M^n \rightarrow Q^N(c)$ uma imersão isométrica. Então f é pseudo-paralela se e somente se o sistema triplo \mathcal{L} definido por (4.3) é um S.T.J..*

Demonstração: Primeiramente suponhamos que f é pseudo-paralela. Então usando as equações de Gauss e Ricci e a Proposição (2.2)(i), não é difícil de provar que as seguintes condições valem

$$\left. \begin{aligned} \text{(i)} \quad & (R^\perp(U, V) \cdot \alpha)(X, Y) = \alpha(\mathcal{R}(U, V)X, Y) + \alpha(X, \mathcal{R}(V, U)Y), \\ \text{(ii)} \quad & [A_\eta, A_{\alpha(U, V)}] = \mathcal{R}(A_\eta(U), V) - \mathcal{R}(U, A_\eta(V)), \\ \text{(iii)} \quad & [\mathcal{R}(U, V), A_\eta] = A_{R^\perp(U, V)\eta}, \\ \text{(iv)} \quad & [\mathcal{R}(U, V), \mathcal{R}(X, Y)] = \mathcal{R}(\mathcal{R}(U, V)X, Y) - \mathcal{R}(X, \mathcal{R}(V, U)Y), \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

para todo $p \in M$, $U, V, X, Y \in T_p M$ e $\eta \in \nu_p(f)$. De fato, verifiquemos somente que (4.4)(iii):

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(U, V) \circ A_\eta &= R(U, V) \circ A_\eta - \phi(p)(U \wedge V) \circ A_\eta \\ &= A_{R^\perp(U, V)\eta} + A_\eta \circ R(U, V) \\ &\quad + \phi(p)[(U \wedge V) \circ A_\eta - A_\eta \circ (U \wedge V)] - \phi(p)(U \wedge V) \circ A_\eta \\ &= A_{R^\perp(U, V)\eta} + A_\eta \circ R(U, V) - \phi(p)A_\eta \circ (U \wedge V) \\ &= A_{R^\perp(U, V)\eta} + A_\eta \circ \mathcal{R}(U, V). \end{aligned}$$

Agora temos que: A equação (4.2)(i) segue de (4.4)(ii) com $\eta = \alpha(X, Y)$; A equação (4.2)(iii) segue de (4.4)(iii) com $\eta = \alpha(X, Y)$ e (4.4)(i); A equação (4.2)(iv) é exatamente (4.4)(iv). Finalmente observamos que (4.2)(ii) é equivalente a

$$[A_{\alpha(U,V)}, \mathcal{R}(X, Y)] = \mathcal{S}(A_{\alpha(U,V)}(X), Y) - \mathcal{S}(X, A_{\alpha(U,V)}(Y))$$

que é equivalente a

$$[A_{\alpha(U,V)}, \mathcal{R}(X, Y)] = A_{\alpha(\tilde{X}, Y)} - A_{\alpha(X, \tilde{Y})},$$

onde $\tilde{X} = A_{\alpha(U,V)}(X)$, $\tilde{Y} = A_{\alpha(U,V)}(Y)$. Mas, para qualquer $Z, W \in T_p M$, temos que

$$\begin{aligned} \left\langle \left(A_{\alpha(\tilde{X}, Y)} - A_{\alpha(X, \tilde{Y})} \right) Z, W \right\rangle &= \langle R^\perp(X, Y)[\alpha(Z, W)], \alpha(U, V) \rangle \\ &= -\langle A_{R^\perp(X, Y)[\alpha(U, V)]}(Z), W \rangle \\ &= \langle [A_{\alpha(U, V)}, \mathcal{R}(X, Y)] Z, W \rangle, \end{aligned}$$

por (4.4)(iii). Por tanto \mathcal{L} é um S.T.J.. Reciprocamente, se \mathcal{L} dado por (4.1) é um S.T.J., então (4.2)(i) é equivalente a

$$[A_{\alpha(U,V)}, A_{\alpha(X,Y)}] = \mathcal{R}(A_{\alpha(U,V)}(X), Y) - \mathcal{R}(X, A_{\alpha(U,V)}(Y)).$$

Esto significa que

$$[A_\eta, A_{\alpha(X,Y)}] = \mathcal{R}(A_\eta(X), Y) - \mathcal{R}(X, A_\eta(Y)),$$

para qualquer $X, Y \in T_p M$ e $\eta \in \nu_p(f)$. Agora usando a equação de Ricci, segue-se facilmente que

$$R^\perp(U, V)[\alpha(X, Y)] = \alpha(\mathcal{R}(U, V)X, Y) + \alpha(X, \mathcal{R}(V, U)Y)$$

isto implica que f é pseudo-paralela. □

A proposição 4.1.2 possui interessantes conseqüências e a seguir provamos duas delas. A primeira é um corolário de natureza pontual e é um resultado análogo

ao obtido em [5] para imersões semi-paralelas e pseudo-umbílicas; a segunda, é um teorema de natureza global, o qual ainda não foi observado para o caso de imersões semi-paralelas.

Corolário 4.1.3 *Seja $f : M^n \rightarrow Q^N(c)$ uma imersão pseudo-paralela. Se f é pseudo-umbílica, então para cada p de M e $X, Y \in T_p M$, temos*

$$(i) \quad (c - \phi(p) + \|H\|^2) ((c - \phi(p)) \langle X, Y \rangle^2 + \|\alpha(X, Y)\|^2) \geq 0,$$

$$(ii) \quad (c - \phi(p) + \|H\|^2) \langle R(X, Y)X - \phi(p)(X \wedge Y)X, Y \rangle \leq 0,$$

e valem as igualdades na primeira (segunda) desigualdade se e somente se $A_{\alpha(X, Y)} = (c - \phi(p)) \langle X, Y \rangle id_{T_p M}$ (respectivamente $R(X, Y) = \phi(p)X \wedge Y$).

(iii) *Se $c - \phi(p) + \|H\|^2 \leq 0$, então f é umbílica em p . Em particular, se f é mínima e $c \leq \phi$, então f é totalmente geodésica.*

Demonstração: Como $\mathcal{L} = \mathcal{S} + \mathcal{R}$ dado em (4.3) é um S.T.J., segue-se do Teorema 1 de [5] que

$$\text{traço}(\mathcal{S}(\mathcal{S}(X, Y)X, Y)) \geq 0 \quad \text{e} \quad \text{traço}(\mathcal{S}(\mathcal{R}(X, Y)X, Y)) \leq 0 \quad (4.5)$$

para cada $p \in M$ e $X, Y \in T_p M$ e valem as igualdades se e somente se $\mathcal{S}(X, Y) = 0$, e $\mathcal{R}(X, Y) = 0$, respectivamente. Assim se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base ortonormal de $T_p M$ temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \text{traço}(\mathcal{S}(\mathcal{S}(X, Y)X, Y)) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle \mathcal{S}(\mathcal{S}(X, Y)X, Y) e_i, e_i \rangle \\ &= (c - \phi(p)) \langle \mathcal{S}(X, Y)X, Y \rangle + \langle \alpha(\mathcal{S}(X, Y)X, Y), H \rangle \\ &= (c - \phi(p)) \langle X, Y \rangle^2 + (c - \phi(p)) \|\alpha(X, Y)\|^2 \\ &+ (c - \phi(p)) \langle X, Y \rangle \langle \alpha(X, Y), H \rangle + \langle A_{\alpha(X, Y)}(X), A_H(Y) \rangle \\ &= (c - \phi(p) + \|H\|^2) ((c - \phi(p)) \langle X, Y \rangle^2 + \|\alpha(X, Y)\|^2), \end{aligned}$$

donde obtemos a primeira desigualdade de (i). Para (ii) calculamos exatamente o traço de $\mathcal{S}(\mathcal{R}(X, Y)X, Y)$ como acima. Para (iii), se $(c - \phi(p)) + \|H\|^2 \leq 0$, então

$$\|\alpha(X, Y)\|^2 \leq (c - \phi(p)) \langle X, Y \rangle^2, \quad (4.6)$$

para todo $X, Y \in T_p M$. Então $\alpha(X, Y) = 0$ para qualquer par ortogonal X, Y em $T_p M$. Portanto, por um Lema dado em [43] p. 168, a imersão é *umbilical* em p , i.e.,

$$\alpha(X, Y) = \langle X, Y \rangle H, \quad \text{para todo } X, Y \in T_p M.$$

□

Teorema 4.1.4 *Seja $f : M^n \rightarrow Q^N(c)$ uma imersão pseudo-paralela com $\phi \geq 0$, e suponhamos que M é compacta e simplesmente conexa. Então M^n é uma variedade Riemanniana produto dos seguintes tipos:*

- 1) *Variedades homeomorfas a esferas.*
- 2) *Variedades biholomorfas a planos complexos projectivos.*
- 3) *Espaços simétricos de tipo compacto.*

Além disso, se ϕ não é identicamente nula, então M é do primeiro tipo.

Para provar o teorema acima necessitamos fazer as seguintes identificações:

Seja M^n uma variedade Riemanniana. Dados $p \in M$ e $X, Y \in T_p M$ podemos considerar o operador linear anti-simétrico dado por $X \wedge Y$ como uma 2-forma ω definida por $\omega(Z) = X \wedge Y(Z)$, para todo $Z \in T_p M$, e identificar o tensor de curvatura Riemanniano R de M com o operador linear simétrico sobre as 2-formas, chamado o *operador de curvatura*, denotado por $\rho : \wedge^2(TM) \rightarrow \wedge^2(TM)$, e caracterizado por:

$$\langle \rho(X \wedge Y), Z \wedge W \rangle = \langle R(X, Y)W, Z \rangle, \quad (4.7)$$

onde o produto interno do lado esquerdo é o produto interno induzido no espaço das 2-formas pela métrica Riemanniana de M . Assim, podemos definir uma ação

de uma 2-forma ω sobre o tensor de curvatura Riemanniano R de M e a segunda forma fundamental α de f como segue:

$$(\omega \cdot R)(X, Y) = [\omega, \rho(X \wedge Y)] - \rho(\omega(X) \wedge Y) - \rho(X \wedge \omega(Y)), \quad (4.8)$$

$$(\omega \cdot \alpha)(X, Y) = -\alpha(\omega(X), Y) - \alpha(X, \omega(Y)), \quad (4.9)$$

onde $[\cdot, \cdot]$ denota o colchete de formas. Com estas identificações podemos apresentar o seguinte lema que caracteriza a condição de pseudo-parallelismo dada em (3.1).

Lema 4.1.5 *Seja $f : M \rightarrow Q^N(c)$ uma imersão isométrica. Então são equivalentes as seguintes afirmações*

a) f é pseudo-paralela;

b) Existe $\phi \in \mathcal{D}(M)$ tal que

$$[\rho(X \wedge Y) \cdot \alpha](Z, W) = R^\perp(X, Y)[\alpha(Z, W)] - \phi(p)[X \wedge Y \cdot \alpha](Z, W), \quad (4.10)$$

para todo $p \in M$ e $X, Y, Z, W \in T_p M$;

c) Existe $\phi \in \mathcal{D}(M)$ tal que

$$A_{R^\perp(X, Y)\xi} = [R(X, Y), A_\xi] - \phi(p)[X \wedge Y, A_\xi], \quad (4.11)$$

a todo $p \in M$ e $X, Y \in T_p M$, $\xi \in \nu_p(f)$;

Demonstração: (a) \Leftrightarrow (b): Segue do fato que vale a seguinte igualdade

$$\langle \alpha(\rho(X \wedge Y)Z, W), \xi \rangle = -\langle \alpha(R(X, Y)Z, W), \xi \rangle,$$

para todo $p \in M$ e $X, Y, Z, W \in T_p M$ e $\xi \in \nu_p(f)$

(a) \Leftrightarrow (c): Segue diretamente da relação entre a segunda forma fundamental e o operador de Weingarten dado em (2.9) junto com a equação de Ricci de f . \square

Com as identificações acima e o seguinte teorema obtido em [39] que diz: *Se M^n é uma variedade Riemanniana simplesmente conexa e compacta com operador de curvatura não negativo, então M^n é produto Riemanniano de variedades dos seguintes tipos:*

- i) *Variedades homeomorfas a esferas;*
- ii) *Variedades biholomorfas a planos complexos projectivos;*
- iii) *Espaços simétricos de tipo compacto.*

Além disso, se o operador de curvatura não é identicamente zero, então M é do primeiro tipo. Portanto, estamos em condições de apresentar a

Demonstração: (do Teorema 4.1.4) Pela proposição 4.1.2 e as identificações feitas anteriormente, temos que para cada ponto $p \in M$,

$$\mathcal{L}(X, Y) = (c - \phi(p))\langle X, Y \rangle id_{T_p M} + A_{\alpha(X, Y)} + \rho(X \wedge Y) - \phi(p)(X \wedge Y),$$

define um S.T.J. associado a f no ponto p . Por outro lado, é bem conhecido que dado qualquer S.T.J., Ferus provou que sempre existe uma imersão localmente paralela $\bar{f} : \bar{M}^n \rightarrow Q^N(c)$ e um ponto $\bar{p} \in \bar{M}$ tal que o S.T.J. associado a \bar{f} em este ponto é o S.T.J. dado (ver [30]). Daí, podemos concluir que \bar{p} definido por

$$\bar{p}(X \wedge Y) := \rho(X \wedge Y) - \phi(X \wedge Y)$$

é um tensor de curvatura de um espaço simétrico de tipo compacto, consequentemente é um operador não negativo em nível das 2-formas. Como por hipótese ϕ é não negativo (além disso, se ϕ não é identicamente nula), segue-se que o operador de curvatura ρ de M é não negativo (não é identicamente nulo). Finalmente, como M por hipótese é simplesmente conexo e compacto a conclusão do teorema segue da classificação de tais variedades citada acima. \square

Bibliografia

- [1] Adamów, A. and Deszcz, R., *On totally umbilical submanifolds of some class of Riemannian manifolds*, *Demonstration Math.*, 16 (1983), 39-59 .
- [2] Asperti, A. C. and Mercuri, F., *Semi-parallel immersions into space forms*, *Bolletino U. M. I.*, (7) 8-B (1994), 883-895.
- [3] Asperti, A. Mercuri, F. and Lobos, G., *Isometric immersions with symmetry condition on the second fundamental form*, Preprint.
- [4] Backes, E. and Rieckziegel, H., *On symmetric submanifolds of spaces of constant curvature*, *Math. Ann.*, 263 (1983), 419-433.
- [5] Backes, E., *Geometric applications of Euclidean Jordan triple systems*, *Manuscript Math.*, 42 (1983), 265-272.
- [6] Baldin, Y. and Mercuri, F., *Isometric immersions in codimension two with non negative curvature*, *Math. Z.*, 173 (1980), 111-117.
- [7] Barbosa, J. L., *On minimal immersions of S^2 into $S^{2m}(1)$* , *Trans Ame. Math. Soc.*, 210(1975), 75-106.
- [8] Bryant, R. L., *Conformal on minimal immersions of compact surfaces into the 4-sphere*, *J. Diff. Geom.*, 17(1982), 455-473.
- [9] do Carmo, M. and Dajczer, M., *Rotation hypersurfaces in spaces of constant curvature*, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 277 (1983), 685-709.

- [10] do Carmo, M., Dajczer, M. and Mercuri, F., *Compact conformally flat hypersurfaces*, Trans. Amer. Math. Soc., 288 (1985), 189-203.
- [11] Cartan, É., *Sur une class remarquable d'espaces de Riemannian*, Bull. Soc. Math. France, 54 (1926), 214-264; 55 (1927), 114-134.
- [12] Cartan, É., *Gometrie des espaces de Riemann*, Paris, 1951.
- [13] Chaki, M. C., *On pseudo symmetric manifolds*, An. Stiint. Univ. "Al. I. Cuza" din Iasi, s. Ia, Math., 33 (1987), 53-58.
- [14] Chen, B.Y., *Geometry of Submanifolds*, Marcel Dekker, New York, 1973.
- [15] Chern, S.S., *On minimal spheres in the four-sphere*, Studies and Essays, Math. Res. Center, Nat. Taiwan Univ., Taipei, (1970) 137-150.
- [16] Chern, S.S., do Carmo, M. and Kobayashi, S., *Minimal submanifolds of a sphere with second fundament form of constant length*, Functional Analysis and Related Fields, Springer, (1970), 59-75.
- [17] Dajczer, M., *Submanifolds and isometric immersion*, Mathematics Lecture Series, 13. Houston, Texas: Publish or Perish, Inc., 1990.
- [18] Deprez, J., *Semi-parallel surfaces in Euclidean space*, J. Geom., 25 (1985), 192-200.
- [19] Deprez, J., *Semi-parallel hypersurfaces*, Rend. Sem. Univ. Politec. Torino, 44 (1986), 303-316.
- [20] Deprez, J., *Semi-parallel immersions*, Geometry and topology of submanifolds, Proc. Meet., Marseille/Fr. 1987, (1989), 73-88.
- [21] Deprez, J., Deszcz, R., Verstraelen, L., *Pseudo-symmetry curvature conditions on hypersurfaces of Euclidean spaces and on Kaehlerian manifolds*, Ann. Fac. Sci. Toulouse, Vol. IX, No.2 (1988), 183-192.

- [22] Deprez, J., Deszcz, R. and Verstraelen, L., *Examples of pseudo-symmetric conformally flat warped products*, Chin. J. Math., 17, No.1 (1989), 51-65.
- [23] Deszcz, R., *On pseudosymmetric space*, Bulletin of the Belgian Mathematical Society, 44, Ser. A (1992), 1-34.
- [24] Deszcz, R. and Yaprak, S., *Curvature properties of Cartan hypersurfaces*, Colloq. Math., 67 (1994), 91-98.
- [25] Deszcz, R., Verstraelen, L. and Yaprak, S., *Pseudosymmetric hypersurface in 4-dimensional spaces of constant curvature*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, 22 (1994), 167-179.
- [26] Dillen, F., *Semi-parallel hypersurfaces of a real space form*, Israel J. Math., 75 (1991), 193-202.
- [27] Dillen, F. and Nölker, S., *Semi-parallelity, multi-rotation surfaces and the helix-property*, J. renie angew. Math., 435 (1993), 33-63.
- [28] Erbacher, J. A., *Reduction of codimension of an isometric immersion*, J. Differential Geometry 5 (1971), 333-340.
- [29] Ferus, D., *Immersionen mit paralleler zweiter Fundamentalform: Beispiele und Nicht-Beispiele*. Manuscripta Math., 12, (1974), 153-162.
- [30] Ferus, D., *Symmetric submanifolds of Euclidean Space*, Math Ann., 247 (1980), 81-93.
- [31] Ferus, D., *Notes on isoparametric hypersurfaces*, Escola de Geometria Diferencial, Unicamp, 1980.
- [32] Itoh, T. and Ogiue K., *Isotropic Immersions*, J. Differential Geometry 8 (1973), 305-316.

- [33] Kenmotsu, K., *Minimal surfaces with constant curvature in 4-dimensional space forms*, Proc. Amer. Math. Soc., 89, n1, (1983) 133-138.
- [34] Lumiste, Ü., *Classification of two-codimensional semi-symmetric submanifolds*, TRÜ toimetised, 803 (1988), 79-94.
- [35] Lumiste, Ü., *Normally flat semi-symmetric submanifolds*, Differ. Geom. and Appl., Proc. Conf. Dubrovnik, June 26-July 3, 1988, (1989), 159-171.
- [36] Lumiste, Ü., *Symmetric orbits of orthogonal Veronese actions and their second order envelopes*, Result. Math., 27, No.3-4 (1995), 284-301.
- [37] Lumiste, Ü., *Semi-symmetric submanifold with maximal first normal space*, Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math., 38, No.4 (1989), 453-457.
- [38] Meada, S., *Isotropic immersions with parallel second fundamental form*, Canad. Math. Bull. 26 (3), (1983), 291-296.
- [39] Mercuri, F. and Noronha, M., *On the topology of complete Riemannian manifolds with nonnegative curvature operator*, Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari, 63, No.2 (1993), 149-171 .
- [40] Mirzoyan, V. A., *Semi-symmetric submanifolds and their decomposition into a product*, Sov. Math., 35, No.9 (1991) 29-38.
- [41] Moore, J.D. and Morvan, J., *Sou-Variétés Conformément Plates de Cocimention Quatre*, C.R. Acad. Sc. Paris, 1978.
- [42] Nomizu, K., *On hypersurfaces satisfying a certain condition on the curvature tensor*, Tôhoku Math. J., 20 (1968), 46-59.
- [43] Nomizu, K. and Yano, K., *On circles and spheres in Riemannian geometry*, Math. Ann., 210 (1974), 163-170 .

- [44] Noronha, M., *Conformally flat immersions and flatness of the normal connection*, Pac. J. Math., 138, No. 1, (1989), 145-150.
- [45] O'Neill, B., *Isotropic and Kaehler immersions*, Can. J. Math., 17 (1965), 907-915.
- [46] Pinkall, U., *Dupin hypersurfaces*, Math. Ann., 270 (1985), no. 3, 427-440.
- [47] Ryan, P., *Homogeneity and some curvature conditions for hypersurfaces*, Tohoko Math. J., 21 (1969), 363-388.
- [48] Sakamoto, K., *Constant isotropic surfaces in 5-dimensional space forms*, Geom. Dedicata, 29(1989), 293-306.
- [49] Szabó, Z. I., *Structure theorems on Riemannian spaces satisfying $R(X, Y) \cdot R = 0$. I. The local version*, J. Diff. Geom., 17 (1982), 531-582.
- [50] Szabó, Z. I., *Structure theorems on Riemannian spaces satisfying $R(X, Y) \cdot R = 0$. II. Global version*, Geom. Dedicata, 19 (1985), 65-108.
- [51] Takagi, H., *An exemple of Rieman manifold satisfying $R(X, Y) \cdot R = 0$ but not $\Delta R = 0$* , Tôhoku Math. J., 24 (1972) 105-108.
- [52] Takeuchi, M., *Parrallel submanifolds of space forms*, *Manifolds and Lie groups*, Paper in honor of Y. Matsushima, Birkhauser, Basel, (1980), p. 429-447.
- [53] Venzi, P., *On geodesic mappings in Riemannian or pseudo-Riemannian manifolds*, Tensor, N. S., 32 (1978), 193-198.