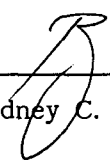


EFEITOS ABIÓTICOS E A PERIODICIDADE EM DINÂMICA POPULACIONAL

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pela Srta. RENATA ZOTIN e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 10 de dezembro de 1993.



Prof. Dr. Rodney C. Bassanezi

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em **Matemática Aplicada.**



**TESE APRESENTADA PARA O TÍTULO DE MESTRE
EM MATEMÁTICA APLICADA**

**TÍTULO : EFEITOS ABIÓTICOS E A PERIODICIDADE EM DINÂMICA
POPULACIONAL**

AUTORA: RENATA ZOTIN

ORIENTADOR: PROF. DR. RODNEY CARLOS BASSANEZI

IMECC - UNICAMP

1993

Aos meus pais Pedro e Angelina.

A G R A D E C I M E N T O S

- Ao Prof. Rodney C. Bassanezi pela orientação deste trabalho e pela amizade;

- Ao CAPES e ao FAEP pelo apoio financeiro prestado;

- Aos amigos da pós-graduação pelo companheirismo e pelos bons momentos que passamos juntos;

- Aos professores João Frederico (Joni) e Laércio pelo incentivo e pelas sugestões dadas;

- À secretaria da Pós-Graduação do IMECC e do Departamento de Matemática Aplicada;

- Aos meus pais e ao Maurício, em especial.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO.....	01
CAPÍTULO 1 - Resultados preliminares.....	04
CAPÍTULO 2 - O modelo logístico	
1 - Introdução.....	12
2 - O modelo logístico - pequenas oscilações.....	14
3 - O modelo logístico com coeficientes periódicos.....	21
4 - Existência, unicidade e estabilidade de soluções periódicas.....	28
5 - Aplicação.....	34
CAPÍTULO 3 - Modelos de competição para duas espécies	
1 - Introdução.....	40
2 - Modelo Lotka-Volterra sujeito à pequenas oscilações (caso simétrico).....	42
3 - Modelo de competição entre duas espécies com parâmetros periódicos.....	47
4 - Aplicação: O Problema da Resistência.....	63
CAPÍTULO 4 - O modelo presa-predador	
1 - Introdução.....	73
2 - O modelo presa-predador.....	74
3 - Aplicação: Modelo de Dengue Hemorrágica.....	78
BIBLIOGRAFIA.....	87

INTRODUÇÃO

A maioria das comunidades ecológicas compõe-se de muitos organismos vivos das mais variadas espécies. Cada indivíduo é um organismo complexo que varia continuamente; em qualquer momento seu comportamento depende de sua constituição genética, sua idade, as vicissitudes de sua vida até o momento e de condições que predominem no ambiente em que vive.

Apesar de toda mudança contínua pela qual passa uma população (nascimentos, mortes, imigração, entre outros), alguns experimentos comprovam que, na ausência de distúrbios externos, a maioria das comunidades ou permanecem em equilíbrio por longos períodos ou passam por estágios sucessivos até chegar ao equilíbrio.

As populações em geral variam em tamanho, e a investigação do crescimento e do declínio de populações é, historicamente, o ramo mais antigo da Ecologia Matemática. Tem-se demonstrado que uma maneira quase sempre bem sucedida de se proceder é postular um modelo simples para o cálculo das mudanças populacionais e então examinar as consequências das hipóteses utilizadas no modelo matemático.

Porém a grande maioria dos modelos matemáticos usados em ecologia teórica para estudar a dinâmica de crescimentos populacionais utiliza parâmetros constantes (taxas de natalidade, mortalidade, condições ambientais, etc), ou seja, são autônomos. Isto acontece, por exemplo, nos modelos presa-predador e competição entre espécies propostos por Lotka-Volterra. No entanto, tem-se observado que a maioria dos ecossistemas existem em ambientes que variam com o tempo, geralmente de modo periódico ou quase periódico. Dessa maneira, um modelo mais realista certamente utilizaria uma variação temporal destes parâmetros.

Variações periódicas em condições ambientais, por exemplo, podem ter um efeito significativo em taxas de natalidade e mortalidade, disponibilidade de recursos e outros fatores. Apesar disso, a influência dessas variações tem recebido pouca atenção, comparada à grande literatura que trata de sistemas em ambientes "constantes" e aos estudos de ecossistemas em ambientes que oscilam aleatoriamente.

Poderíamos considerar que, quando essas variações são de amplitude suficientemente pequena, elas podem ser negligenciadas e o ambiente é considerado constante. No entanto, como veremos posteriormente, oscilações ambientais sempre provocam um efeito qualitativo, que em determinadas aplicações podem ser muito importantes.

Mais significativamente, sempre existe um efeito quantitativo. Em geral, uma oscilação ambiental não pode suportar um equilíbrio fixo; encontramos em seu lugar equilíbrios oscilatórios de pequena amplitude em relação a um valor médio.

Periodicidade e comportamentos oscilatórios também têm sido bastante observados na incidência de doenças infecciosas como sarampo, rubéola, varicela e outras. Por exemplo, de 1929 a 1970 houve surtos anuais de varicela em Nova York (London e Yorke, 1973). Esse período de um ano aparece devido à sazonalidade de alguns fatores, como por exemplo a taxa de contato, que oscilava devido a mudanças ambientais e até mesmo a agregações periódicas das crianças nas escolas.

Frente à observação de periodicidade na incidência de diversas doenças infecciosas, é grande o interesse no conhecimento de como soluções periódicas podem surgir em modelos epidemiológicos. Sabe-se que a periodicidade pode surgir de causas relacionadas à própria estrutura do modelo epidemiológico (incluindo retardamentos ou periodicidades nos parâmetros) assim como em modelos que consideram o tamanho da população variável ou com estrutura de idade.

Matematicamente, o estudo de modelos populacionais onde os parâmetros envolvidos variam periodicamente nos leva ao estudo de sistemas de equações diferenciais ordinárias com coeficientes periódicos ou com termos forçantes periódicos. Embora as propriedades de tais sistemas sejam bem conhecidas, os resultados gerais disponíveis

não são tão completos quanto para sistemas autônomos, como por exemplo na análise de estabilidade de soluções. Apesar disso, quando as oscilações são relativamente pequenas, existem métodos de perturbação que permitem a obtenção de resultados bastante satisfatórios com relação a existência e estabilidade de soluções periódicas (capítulo 1).

Motivados pela utilização de um modelo logístico com coeficientes periódicos no estudo da dinâmica populacional da espécie *Donax gemmula* em [24] e por um modelo tipo presa-predador no estudo da Dengue Hemorrágica em [18], procuramos neste trabalho analisar os efeitos provocados pela utilização de parâmetros periódicos em alguns modelos clássicos de dinâmica populacional : o logístico (capítulo 2), a competição entre duas espécies (capítulo 3) e o presa-predador (capítulo 4).

Essa análise inclui um estudo da existência, da unicidade e da estabilidade de soluções periódicas positivas para tais modelos assim como algumas aplicações e simulações envolvendo os resultados obtidos, utilizando pacotes computacionais como **Mathematica** (em versão disponível no LABMA do IMECC/UNICAMP para ambiente UNIX) e **Solver** (para ambiente PC do LABMA).

Os resultados apresentados assim como algumas técnicas utilizadas no estudo da estabilidade de soluções periódicas visam facilitar a análise de outros modelos que utilizam coeficientes periódicos, principalmente na área de epidemiologia.

CAPÍTULO 1

RESULTADOS PRELIMINARES

Apresentamos neste capítulo alguns conceitos matemáticos assim como suas respectivas notações, que serão frequentemente utilizados no decorrer do texto e são indispensáveis para a compreensão.

1 - Soluções Fundamentais [19]

Consideremos o sistema homogêneo

$$dx/dt = A(t)x(t) \quad (1.1.1)$$

Se os elementos da matriz A são funções contínuas em t , o sistema (1.1.1) possui solução única correspondendo a cada valor inicial dado. Ao contrário do caso discreto, não temos uma expressão geral para a solução de (1.1.1). Mesmo assim, os conceitos de matriz transição de estado e conjunto fundamental de soluções são bastante úteis e determinam a base de toda teoria envolvida.

Definição 1:

Dizemos que um conjunto de funções vetoriais a valores reais $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_m(t)$ são linearmente independentes se não existe nenhuma combinação linear não-trivial das mesmas que seja identicamente nula. Não entrando no mérito de como obter tais soluções, suponhamos que $\{ x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t) \}$ seja um conjunto linearmente independente de soluções para o sistema (1.1.1). Estas soluções são chamadas conjunto fundamental de soluções e se as arrumarmos como colunas de uma

matriz $n \times n$, esta matriz resultante $X(t)$ é chamada matriz fundamental de soluções e satisfaz

$$dX/dt = A(t)X(t)$$

Definição 2:

Uma matriz transição de estado $\Phi(t, \tau)$ correspondente a (1.1.1) é uma matriz $n \times n$ satisfazendo

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \Phi(t, \tau) = A(t)\Phi(t, \tau) & , e \\ \Phi(\tau, \tau) = I . \end{cases}$$

Da definição acima podemos observar que cada coluna da matriz $\Phi(t, \tau)$ deve ser solução de (1.1.1) além de , em $t = \tau$, cada vetor solução ser igual a um dos vetores unitários da base canônica usual. Assim, encontrando n soluções linearmente independentes de (1.1.1), a matriz $\Phi(t, \tau)$ pode ser construída.

A matriz transição de estado definida acima possui a seguinte propriedade: para qualquer solução $x(t)$ de (1.1.1) e τ fixo, verifica-se que, para qualquer t ,

$$x(t) = \Phi(t, \tau)x(\tau) .$$

Proposição:

Se $X(t)$ é uma matriz fundamental de soluções correspondente ao sistema (1.1.1), então a matriz transição de estado é dada por

$$\Phi(t, \tau) = X(t)X(\tau)^{-1}$$

e conseqüentemente

$$x(t) = X(t)X(\tau)^{-1}x(\tau) .$$

Dem: ver Luenberger [19].

Para o caso não-homogêneo

$$dx/dt = A(t)x(t) + B(t)u(t),$$

verifica-se que em termos da condição inicial $x(t_0)$ a solução é dada por

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0) \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

Se $\mathbf{A}$ for uma matriz constante em (1.1.1) temos que se $\mathbf{X}(t)$ é uma matriz fundamental correspondente a este sistema, então

$$\mathbf{X}(t) = e^{t\mathbf{A}} \quad (|t| < \infty).$$

com

$$e^{t\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!} + \dots$$

Exemplo: [19]

Considere o sistema $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ descrito por:

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad \alpha > 0 \quad (1.1.2)$$

que é equivalente à equação de segunda ordem homogênea para o movimento harmônico.

A matriz fundamental para o sistema (1.1.2) é

$$\mathbf{Y}(t) = e^{\mathbf{A}t} \quad (1.1.3)$$

onde $\mathbf{A}$ é a matriz dos coeficientes em (1.1.2).

Calculando $\mathbf{A}^2$ temos:

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} -\alpha^2 & 0 \\ 0 & -\alpha^2 \end{bmatrix} = -\alpha^2 \mathbf{I},$$

e podemos concluir que, se k é par, então teremos

$$\mathbf{A}^k = (-1)^{k/2} \alpha^k \mathbf{I}, \text{ e}$$

$$\mathbf{A}^{k+1} = (-1)^{k/2} \alpha^k \mathbf{A}.$$

Isto torna possível a construção da matriz $\mathbf{Y}(t)$ que é dada por:

$$Y(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} \cos \alpha t & (\sin \alpha t)/\alpha \\ -\alpha \sin \alpha t & \cos \alpha t \end{bmatrix}$$

Consequentemente, qualquer solução de (1.1.2) será combinação de $\sin(\alpha t)$ e $\cos(\alpha t)$.

No entanto, se $A(t)$ for ω -periódica, ou seja, se $A(t+\omega) = A(t)$ para todo t , temos o seguinte teorema:

Teorema (Floquet):

Se $X(t)$ é uma matriz fundamental para $x' = A(t)x$ com

$$A(t) \text{ } \omega\text{-periódica} \quad (1.1.4)$$

então existe uma matriz P ω -periódica não-singular e uma matriz constante R tal que

$$X(t) = P(t)e^{tR}$$

Dem: ver Hale [16].

O conjunto de todas as matrizes fundamentais de (1.1.1) e (1.1.4) determina um conjunto único de raízes características para $C = e^{\omega R}$. Essas raízes são chamadas multiplicadores associados a matriz A . As raízes características de R são chamadas de expoentes característicos.

Portanto, se A for uma matriz constante, expoentes característicos são o mesmo que raízes características.

2 - O conceito de estabilidade

Seja $x(t)$ uma solução do sistema de equações

$$dx/dt = F(t, x) \quad (1.2.1)$$

definida para $t \geq t_0$. Esta solução é chamada estável, segundo Lyapunov,

sobre o intervalo $[0, \infty)$ se

a) para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon; t_0) > 0$ tal que qualquer solução $\bar{x}(t)$ de (1.2.1) que satisfaz a desigualdade $|\bar{x}(t_0) - x(t_0)| < \delta$

$$\Rightarrow |\bar{x}(t) - x(t)| < \epsilon, \quad \text{para } t \geq t_0.$$

É chamada **assintoticamente estável** se, além de ser estável, valer também

$$b) |\bar{x}(t) - x(t)| \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \text{ tende ao infinito.}$$

A solução que não é estável é dita **instável**.

A noção de estabilidade acima tem a desvantagem de depender do momento inicial t_0 . O valor δ não depende somente do desvio permitido para a solução, mas também do momento inicial. Se olharmos para o problema de perturbações como uma ação de curta duração, vemos que tais perturbações podem ocorrer em momentos diferentes do fenômeno, e estes momentos são aqueles considerados como momentos iniciais. Dessa forma, para que a noção de estabilidade introduzida tenha um caráter físico, deseja-se que as possíveis perturbações iniciais não tenham efeito prejudicial na dependência do momento inicial. Chegamos assim à noção de estabilidade uniforme.

A solução $x(t)$ é **uniformemente estável** se

c) para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que qualquer solução $\bar{x}(t)$ de (1.2.1) que satisfaz $|\bar{x}(t_1) - x(t_1)| < \delta$ para algum $t_1 \geq t_0$

$$\Rightarrow |\bar{x}(t) - x(t)| < \epsilon \quad \text{para } t \geq t_1.$$

É chamada **uniformemente assintoticamente estável** se também

d) existe $\delta_0 > 0$ tal que para todo $\epsilon > 0$ existe $T = T(\epsilon)$ de modo que se

$$|\bar{x}(t_1) - x(t_1)| < \delta_0 \quad \text{para algum } t_1 \geq t_0$$

$$\Rightarrow |\bar{x}(t) - x(t)| < \epsilon \quad \text{para todo } t \geq t_1 + T.$$

OBS: Estabilidade assintótica uniforme significa estabilidade uniforme e $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{x}(t) = x(t; t_0, x_0)$ uniformemente com respeito a t_0 e x_0 (para $t_0 \geq 0$, $|x_0| < \delta_0$).

3 - Perturbação de sistemas que possuem solução periódica [4]

Considere o sistema

$$x' = f(t, x, \mu) \quad (1.3.1)$$

para $|\mu|$ suficientemente pequeno, sendo que μ é um vetor real. O caso a ser estudado é quando (1.3.1) possui uma solução ω -periódica $x^*(t)$ para $\mu = 0$.

Vamos supor que f seja real, ω -periódica em t , contínua em (t, x, μ) quando (t, x) pertence a algum domínio V do espaço (t, x) contendo a curva $(t, x^*(t))$ e quando $|\mu|$ é pequeno. Supomos também que f tem derivadas parciais de primeira ordem com respeito às componentes x_i ($i = 1 \dots n$) de x que são contínuas em (t, x, μ) .

Teorema 1.3.1: (Função implícita)

Se a equação

$$F(\alpha, \mu) = 0, \quad \alpha, \mu \in \mathbb{R}^n \quad (1.3.2)$$

é satisfeita para $\alpha = \alpha_0$ e $\mu = \mu_0$ e se F tem derivadas parciais contínuas num domínio aberto de $\mathbb{R}^{2n}$ contendo o ponto $P_0 = (\alpha_0, \mu_0)$ com $F_\alpha \neq 0$ nesse ponto, então (1.3.2) determina α em função de μ ,

$$\alpha = g(\mu).$$

As derivadas parciais de g podem ser calculadas da identidade

$$F(g(\mu), \mu) = 0$$

válida numa vizinhança do ponto $Q_0 = \alpha_0 \in \mathbb{R}^n$, onde $F_\alpha \neq 0$.

Dem.: ver Ávila [1].

Teorema 1.3.2:

Se f satisfaz as condições citadas anteriormente e se a primeira variação de (1.3.1) para $\mu = 0$, com respeito à solução $x^*(t)$,

$$y' = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(t, x^*(t), 0) y_j = f_x(t, x^*(t), 0) y \quad (1.3.3)$$

não possui solução ω -periódica, então para $|\mu|$ suficientemente pequeno a equação (1.3.1) possui uma solução $q = q(t, \mu)$, ω -periódica, contínua em (t, μ) e com $q(t, 0) = x^*(t)$. Essa solução é única para cada μ .

Dem.:

Seja $\varphi(t, \alpha, \mu)$ a solução de (1.3.1) que em $t=0$ assume o valor $x^*(0) + \alpha$ para $|\alpha|$ pequeno.

Da unicidade de φ temos que ela será ω -periódica, se e somente se,

$$\varphi(\omega, \alpha, \mu) = \varphi(0, \alpha, \mu) \Rightarrow \varphi(\omega, \alpha, \mu) - x^*(0) - \alpha = 0 \quad (1.3.4)$$

Para $\mu = 0$ temos que $\alpha = 0$. No entanto, se o jacobiano de (1.3.4) com respeito às componentes de α é não-nulo em $\alpha = 0$ e $\mu = 0$, ou seja, se $\det [\varphi_\alpha(\omega, 0, 0) - I] \neq 0$, segue que o sistema (1.3.4) tem uma única solução $\alpha = \alpha(\mu)$ na vizinhança de $\mu = 0$, $\alpha = 0$, onde α é contínua em μ e $\alpha(0) = 0$ (cf. Teorema da função implícita).

Se o jacobiano não se anula, a existência de uma solução periódica de (1.1.1) é estabelecida para $|\mu|$ pequeno fazendo $\varphi(t, \alpha(\mu), \mu) = q(t, \mu)$. Ainda, na vizinhança de $x = x^*(t)$ esta solução é unicamente determinada pois $\alpha(\mu)$ é único.

Teorema 1.3.3:

Se as partes reais dos expoentes característicos de (1.3.3) são todas negativas, então (1.3.3) não possui solução periódica e portanto a conclusão do teorema 1.3.2 é válida. Neste caso, a solução periódica $q = q(t, \mu)$ de (1.3.1) é assintoticamente estável, desde que $|\mu|$ seja pequeno.

Dem: ver Coddington [4].

Suponhamos ainda que para cada t , a função f satisfaça a condição de ser analítica em (x, μ) para cada $(t, x) \in V$ e $|\mu|$ pequeno. Então, segue que uma solução $\varphi = \varphi(t, \alpha, \mu)$ é analítica em α e μ para $|\mu|$ e $|\alpha|$ pequenos em $0 \leq t \leq \omega$.

Por simplicidade, consideraremos agora que μ possui somente uma componente. Devido ao fato de f ser analítica, q também será analítica e portanto possuirá, para cada t , uma representação em série de potências em μ , com coeficientes que são contínuos em t desde que q seja contínua em (t, μ) :

$$q(t, \mu) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j x^{(j)}(t) = x^{(0)}(t) + \mu x^{(1)}(t) + \mu^2 x^{(2)}(t) + \dots, \quad (1.3.5)$$

onde $x^{(0)}(t) = x^*(t)$ e, $x^{(j)}$ é periódica para cada j devido à periodicidade de $q(t, \mu)$.

Substituindo (1.3.5) no sistema (1.3.1) e comparando os coeficientes das potências de μ obtemos um sistema de equações diferenciais para $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, ... de modo que $x^{(k)}$ é obtido em termos de $x^{(j)}$, $j < k$, resolvendo um sistema linear de equações diferenciais.

CAPÍTULO 2

O MODELO LOGÍSTICO

1. INTRODUÇÃO:

A idéia de que populações são sistemas auto-reguladores, ou seja, regulam a própria densidade de acordo com suas características e também as do meio ambiente, tem estado em muitos textos sobre Ecologia. Essa idéia foi impulsionada por Nicholson [22] , assim como Woodwoth, Clark e Huges [5]. Estes desenvolveram estudos de populações de insetos cuja densidade é regulada pela própria habilidade tanto na utilização de características particulares para o alcance de um limiar de favorabilidade quanto na manutenção de influências adversas (por exemplo, predadores) em um limite tolerável.

De uma população que seja fortemente auto-reguladora, no sentido de rapidamente atingir um equilíbrio se colocada num ambiente constante, não podemos esperar que ela apresente o mesmo comportamento num ambiente com variação temporal. Espera-se que, em cada instante t , não somente a taxa de variação mas também o nível atual de densidade seja determinado pela "história até o tempo t " das variáveis que descrevem as influências do meio ambiente e, pelo menos para uma população de uma certa idade (isto é, uma em que várias gerações se passaram desde a colonização inicial), a densidade limite não seja sensível à densidade inicial.

Denotando por $x(t)$ a densidade populacional no instante t e $z = (z_1, z_2, z_3, \dots)$ uma lista de variáveis que descrevem as influências externas ou do meio ambiente sobre a população, expressamos o fato acima descrito por

$$x(t) = F(z^{(t)}) \quad (2.1.1)$$

onde $z^{(t)} = z(t-s) = (z_1(t-s), z_2(t-s), \dots)$ para $0 \leq s < \infty$; (2.1.2)
e F é um funcional a valores reais definido no conjunto de funções, ou "histórias", $z^{(t)}$.

Embora a densidade populacional de muitos sistemas possa ser determinada através de (2.1.1), levando em consideração a história de z , isso não vale por exemplo para culturas de laboratório de *Lucilia cuprina*, realizadas por Nicholson [22]. Apesar de uma taxa constante de fornecimento de água e comida estas culturas apresentaram violentas mas regulares oscilações na densidade de adulto. Nicholson observou em seus experimentos que tais oscilações estavam relacionadas ao fato da fecundidade e mortalidade serem afetadas pela densidade populacional em diferentes etapas dos experimentos.

Exemplos elementares de casos em que a equação (2.1.1) é válida são fornecidos, por exemplo pela equação logística

$$x'(t) = r(t)x(t) \left[1 - \frac{x(t)}{k(t)} \right]. \quad (2.1.3)$$

Quando r e k são constantes, (2.1.3) se reduz à conhecida equação de Verhulst (1837), que modela a população de alguma espécie que tende a um limite máximo sustentável, chamado capacidade suporte do meio. Tal fato é expresso pela estabilidade assintótica da solução $x = k$.

Em (2.1.3) a taxa de crescimento intrínseco r e a capacidade suporte do meio k são consideradas como funções do tempo, resultando assim uma equação tipo Bernoulli.

Utilizando o modelo logístico (2.1.3) com parâmetros periódicos, encontramos em [24] um estudo populacional da espécie *Donax gemmula*, onde fatores abióticos são considerados responsáveis pela inibição da espécie (no caso desta espécie, tempestades sazonais).

Assim, devido à sua grande importância como modelo de crescimento populacional e com o objetivo de investigar existência, unicidade e estabilidade de soluções periódicas para o modelo do *Donax gemmula*, faremos primeiramente um estudo da equação logística (2.1.3) sujeita a pequenas oscilações periódicas no meio ambiente envolvido,

(relativamente a algum valor médio), analisando o nível médio populacional atingido. A seguir, trataremos a equação logística dentro de um contexto mais geral, apresentando o conceito de solução canônica e obtendo resultados importantes no caso da equação com coeficientes periódicos.

2. O MODELO LOGÍSTICO - PEQUENAS OSCILAÇÕES

Consideraremos, então, na equação logística (2.1.3), apenas a capacidade suporte do meio sujeita a pequenas oscilações periódicas ($k = k(t)$), enquanto a taxa de crescimento intrínseco (r) permanecerá constante.

Então, no lugar de (2.1.3), temos

$$x'(t) = [rx(t)/k(t)] [k(t) - x(t)] \quad (2.2.1)$$

onde

$$\begin{cases} k(t) = k [1 + \mu \phi(t)] & e \\ \phi(t) \text{ é uma função periódica em } t \text{ com período } \omega > 0. \end{cases} \quad (2.2.2)$$

Dessa forma, poderemos observar o comportamento de $x(t)$ ao longo do tempo além das modificações no nível médio populacional atingido.

Define-se a média de $\phi(t)$ por

$$med(\phi) = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} \phi(t) dt \quad (2.2.3)$$

e consideraremos aqui $med(\phi) = 0$

A magnitude de μ está ligada à condição $k(t) > 0$ para todo $t > 0$, para que o modelo seja coerente. Consideraremos também $|\mu|$ suficientemente pequeno para que métodos de perturbação possam ser utilizados.

Dos resultados apresentados no item 3 do capítulo 1, envolvendo sistemas de equações diferenciais que possuem uma solução periódica, sabemos que para $|\mu|$ suficientemente pequeno existe uma solução de (2.2.1) que é ω -periódica e que difere da solução $x = k$ (assintoticamente estável) por um valor que tende a zero com μ . Esta solução é única e, desde que os coeficientes sejam analíticos, pode ser obtida por meio de séries convergentes

$$x(t, \mu) = k + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n x_n(t) \quad (2.2.4)$$

Substituindo (2.2.2) e (2.2.4) na equação (2.2.1) e comparando os coeficientes das potências de μ , obtemos uma sequência de equações diferenciais para $x_1, x_2, \dots$. Usaremos apenas os termos até a ordem de μ^2 , pois estamos considerando $|\mu|$ suficientemente pequeno, ou seja, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu^n = 0$. São eles:

$$x_1' + r x_1 = r k \phi \quad (2.2.5)$$

$$x_2' + r x_2 = r(2\phi x_1 - k\phi^2 - x_1^2/k) \quad (2.2.6)$$

A equação (2.2.5) tem uma solução ω -periódica $x_1(t)$ que pode ser obtida através de cálculos elementares utilizando as técnicas de resolução de equações diferenciais ordinárias lineares; esta solução tem média nula pois

$$\int_0^{\omega} x_1'(t) dt = x_1(\omega) - x_1(0) = 0$$

onde x_1 é ω -periódica.

No entanto, para a solução de (2.2.6) obtemos, como expressão para a média (em geral não nula), o seguinte:

$$med(x_2) = med(2\phi x_1 - k \phi^2 - x_1^2 / k) = - \frac{1}{k} med[(k\phi - x_1)^2] \quad (2.2.7)$$

A expressão aproximada (com erro da ordem de μ^3) para $x(t)$ é dada por:

$$x(t) = k + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t)$$

e, conseqüentemente,

$$med [x(t)] = k \left\{ 1 - \frac{\mu^2}{k^2} med[(k\phi - x_1)^2] \right\} \quad (2.2.8)$$

Exemplo 1:

Se tomarmos, em (2.2.5) $\phi(t) = \cos(\alpha t)$, $\alpha = 2\pi/\omega$, teremos:

$$x_1(t) = \frac{rk}{r^2 + \alpha^2} [r \cos(\alpha t) + \alpha \sin(\alpha t)]$$

e de (2.2.8), que

$$med [x(t)] = k \left\{ 1 - \frac{\mu^2 \alpha^2}{2(r^2 + \alpha^2)} \right\}$$

Nas figuras a seguir podemos observar o comportamento de $x(t)$ para $k(t)$ constante ou periódica, onde $r = 0.3$, $\alpha = \pi$ e $x(0) = 500$.

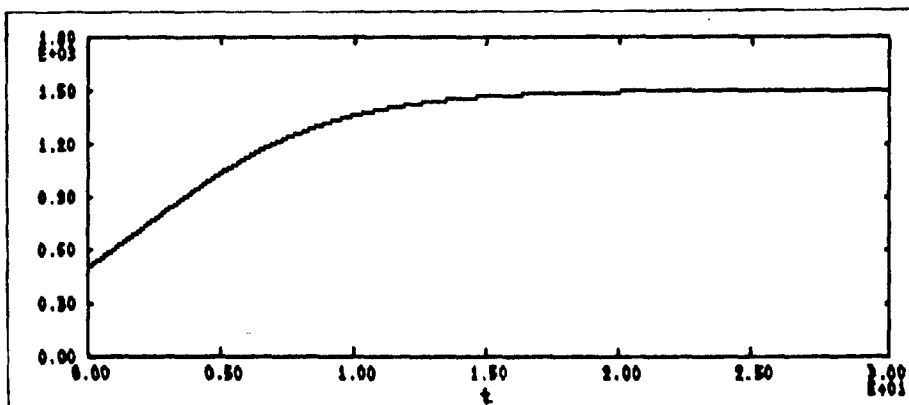


Figura 2.1 - $x(t)$ para $k(t) = 1500$

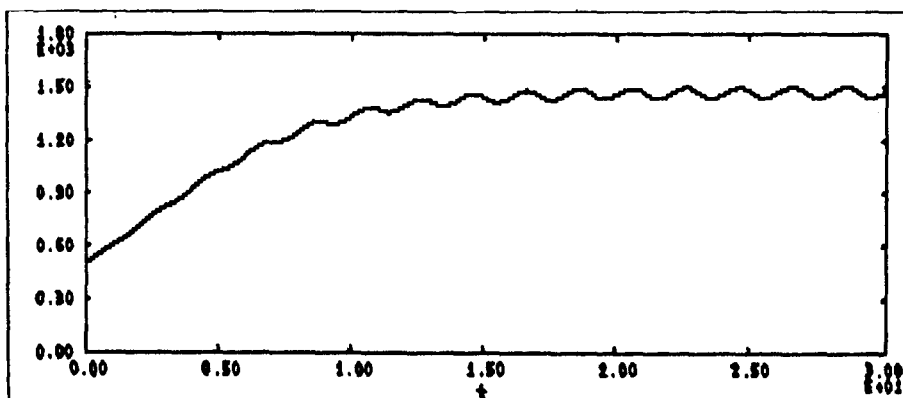


Figura 2.2 - $x(t)$ para $k(t) = 1500(1 + 0.2 \cos \pi t)$

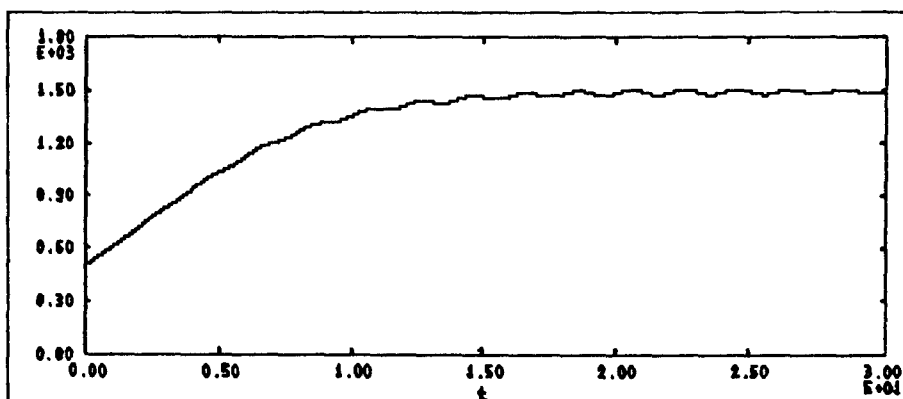


Figura 2.3 - $x(t)$ para $k(t) = 1500(1 + 0.1 \cos \pi t)$

OBS: De (2.2.8) podemos concluir que, no caso da equação logística, a presença de componentes oscilatórias do tipo (2.2.2), onde a média de $\phi(t)$ é nula, sempre reduz o valor médio da população abaixo da capacidade suporte alcançada em meio constante, pois a média de $x(t)$,

$$\text{med } [x(t)] = k - \frac{\mu^2}{k^2} \text{med}[(k\phi - x_1)^2]$$

é sempre menor que k .

Um outro exemplo para a análise da presença de pequenas componentes oscilatórias pode ser dado por uma forma generalizada da equação logística, onde os parâmetros envolvidos são constantes:

Exemplo 2:

Seja

$$x' = (r x/k) [k - x - F(x)] \quad (2.2.9)$$

e F é uma função de classe C^2 . Suponhamos que (2.2.9) admite um ponto de equilíbrio $x_0 > 0$, assintoticamente estável.

A condição de estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio $x_0 > 0$, para (2.2.9), é dada pelo sinal negativo do autovalor da equação linear associada, isto é:

$$\lambda = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_0} < 0 \quad \text{onde } f(x) = rx - rx^2/k - rxF(x)/k$$

Assim,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_0} &= \left(r - \frac{2rx}{k} - \frac{rF(x)}{k} - \frac{rxF'(x)}{k} \right) \bigg|_{x=x_0} \\ &= (r/k)(k - 2x_0 - F(x_0) - x_0 F'_x) \end{aligned}$$

Como $k - x_0 - F(x_0) = 0$ visto que x_0 é ponto de equilíbrio, temos

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_0} < 0 &\Leftrightarrow \frac{r}{k} (-x_0 - x_0 F_x^0) < 0 \\ &\Leftrightarrow (1 + F_x^0) > 0 \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

onde F_x^0 denota a derivada de F em relação a x no ponto x_0 .

Um caso particular da equação (2.2.1), análogo ao modelo do exemplo 2, consiste em se considerar somente a capacidade suporte como um parâmetro periódico, isto é,

$$dx/dt = [rx/k(t)] [k(t) - x - F(x)] \quad (2.2.11)$$

onde $k(t) = k [1 + \mu\phi(t)]$.

Para analisar as condições de estabilidade de (2.2.11) consideremos a solução $x(t, \mu)$ na forma de série de potências:

$$x(t, \mu) = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n x_n(t) \quad (2.2.12)$$

onde cada x_n é ω - periódica.

Quando $|\mu|$ é suficientemente pequeno, (2.2.12) pode ser considerada uma perturbação do ponto de equilíbrio de (2.2.9).

Substituindo (2.2.12) em (2.2.11), após a expansão de $F(x)$ em série de Taylor, obtemos as seguintes equações:

$$x_1' + mx = r x_0 \phi \quad (2.2.13)$$

$$x_2' + mx_2 = (r+m)\phi x_1 - rx_0\phi^2 - \frac{m}{x_0}x_1^2 - \frac{r}{2k}F_{xx}^0 x_0 x_1^2 \quad (2.2.14)$$

onde $m = r x_0 (1 + F_x^0)/k$ e F_{xx}^0 denota a segunda derivada de F no ponto x_0 .

A equação (2.2.13) tem uma solução que é ω -periódica $x_1(t)$, cuja média é zero. Queremos obter a média para $x_2(t)$.

Multiplicando a equação (2.2.13) por $x_1(t)$, e tomando a média de ambos os lados temos

$$m \text{ med}(x_1^2) = r x_0 \text{ med}(x_1 \phi)$$

A seguir, elevando ambos os lados de (2.2.13) ao quadrado e tomando a média, obtemos:

$$\text{med}(x_1^2) + m^2 \text{ med}(x_1^2) = r^2 x_0^2 \text{ med}(\phi^2)$$

Substituindo as duas equações anteriores em (2.2.14), temos a seguinte expressão para a média de $x_2(t)$:

$$\text{med}(x_2) = \frac{-1}{r m x_0} \text{med}(x_1^2) - \frac{r x_0 F_{xx}^0}{2 k m} \text{med}(x_1^2) \quad (2.2.15);$$

O valor médio de $x(t)$ (erro da ordem de μ^3) pode ser analisado através de (2.2.15), pois a expressão final para o valor de $\text{med}[x(t)]$ é dado por:

$$\text{med}[x(t)] = x_0 + \mu^2 \text{med}[x_2(t)] .$$

Se $F_{xx}^0 > 0$, como no caso em que

$$F(x) = \beta x^2 \quad \text{com } \beta > 0 ;$$

o nível populacional assintótico sofre um decréscimo, se o compararmos com o nível limite em ambiente constante.

Por outro lado, pode ocorrer um aumento do nível populacional assintótico na presença de oscilações periódicas quando $F_{xx}^0 < 0$, desde que no lado direito de (2.2.15) o segundo termo domine o primeiro.

Por exemplo, seja

$$F(x) = \beta (1 - e^{-\gamma x}) \quad \text{com } \beta > 0, \gamma > 0. \quad (2.2.16)$$

$$\text{Neste caso, } F_{xx}^0 = -\beta \gamma^2 e^{-\gamma x_0} < 0.$$

Utilizando $\phi(t)$ dada por $\phi(t) = \cos(\alpha t)$, $\alpha = 2\pi/\omega$, obtemos:

$$\text{med}(x_2) = \frac{r^2 x_0^2}{2(m^2 + \alpha^2)} \left\{ \frac{r x_0 \beta \gamma^2 e^{-\gamma x_0}}{2 k m} - \frac{\alpha^2}{r m x_0} \right\} \quad (2.2.17)$$

que será positiva ou negativa dependendo dos parâmetros.

Observamos ainda que se as soluções não-perturbadas forem assintoticamente estáveis então as soluções (2.2.4) e (2.2.12) também serão assintoticamente estáveis para $|\mu|$ suficientemente pequeno. Este resultado segue do Teorema 1.3.3 sobre perturbações de sistemas, apresentado no capítulo 1.

Portanto, tanto para a equação (2.2.1) como para (2.2.9) a presença de componentes com pequenas oscilações faz com que pontos de equilíbrio constantes sejam transformados em soluções de equilíbrio que oscilam periodicamente, cujo valor médio em geral não é o mesmo dado pelas equações não-perturbadas, podendo ser maior ou menor, dependendo do modelo e dos parâmetros.

3 - O MODELO LOGÍSTICO COM COEFICIENTES PERIÓDICOS

Nosso objetivo agora é mostrar que para cada escolha de r e k , funções mensuráveis em $\mathbb{R}$ com

$$\inf_{t \in \mathbb{R}} r(t) > 0, \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} r(t) < \infty, \quad (2.3.1)$$

$$\inf_{t \in \mathbb{R}} k(t) > 0, \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} k(t) < \infty,$$

a equação logística

$$\frac{dx}{dt} = r(t)x(t) \left[1 - \frac{x(t)}{k(t)} \right] \quad (2.3.2)$$

possui uma solução chamada *canônica*, que é um atrator global (para x positivo) e que é determinada pelas funções r e k através de uma relação da forma (2.1.1) com $z = (r, k)$. No caso em que r e k são periódicas, a solução canônica também o será.

SOLUÇÕES CANÔNICAS

Toda equação da forma (2.3.2), do tipo Bernoulli, pode ser resolvida fazendo $y = 1/x$ ($y_0 = 1/x_0$), com $x > 0$.

Obtemos dessa maneira uma equação diferencial linear de primeira ordem

$$\frac{dy}{dt} = -r(t)y + \frac{r(t)}{k(t)}$$

cujas soluções são dadas por

$$y(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^t r(\tau) d\tau\right) \left[y_0 + \int_{t_0}^t \exp\left(\int_{t_0}^s r(\tau) d\tau\right) \frac{r(s)}{k(s)} ds \right]$$

Fazendo $x = 1/y$ obtemos como única solução para (2.3.2) satisfazendo a condição inicial $x(t_0) = x_0 > 0$, a seguinte:

$$x(t) = \frac{x_0 \exp \left(\int_{t_0}^t r(\tau) d\tau \right)}{1 + x_0 \int_{t_0}^t \exp \left(\int_{t_0}^{\tau} r(\xi) d\xi \right) \beta(\tau) d\tau} \quad (2.3.3)$$

$$\text{onde } \beta(t) = \frac{r(t)}{k(t)}$$

A expressão (2.3.3), colocada na forma:

$$x(t) = \left[\frac{1}{x_0} \exp \left(- \int_{t_0}^t r(\tau) d\tau \right) + \exp \left(- \int_{t_0}^t r(\tau) d\tau \right) \int_{t_0}^t \exp \left(\int_{t_0}^{\tau} r(\xi) d\xi \right) \beta(\tau) d\tau \right]^{-1}$$

é transformada, através das mudanças de variáveis

$$\xi = t - \sigma \quad \Rightarrow \quad d\xi = - d\sigma \quad \text{e} \quad \tau = t - s \quad \Rightarrow \quad d\tau = - ds$$

em

$$x(t) = \left[\frac{1}{x_0} \exp \left(- \int_{t_0}^t r(\xi) d\xi \right) + \int_0^{\infty} \exp \left(- \int_0^s r(t-\sigma) d\sigma \right) \beta(t-s) ds + \right. \\ \left. - \int_{t-t_0}^{\infty} \exp \left(- \int_0^s r(t-\sigma) d\sigma \right) \beta(t-s) ds \right]^{-1} \quad (2.3.4)$$

Das propriedades de r e k , ou seja, existência de ínfimo e supremo de cada função segue:

- i) a existência das integrais impróprias;
- ii) o primeiro e o terceiro termos da expressão (2.3.4) se aproximam de zero quando $t \rightarrow \infty$, enquanto que o termo médio é limitado inferiormente, ou seja,

$$\int_0^{\infty} e^{-\int_0^s r(t-\sigma) d\sigma} \beta(t-s) ds \geq \frac{\inf r}{\sup k} \int_0^{\infty} e^{-(\sup r) s} ds$$

$$\rightarrow \int_0^{\infty} e^{-\int_0^s r(t-\sigma) d\sigma} \beta(t-s) ds \geq \frac{\inf r}{(\sup r) (\sup k)} > 0$$

Dessa forma,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - x^*(t)| = 0, \quad (2.3.5)$$

onde x é dada por (2.3.3) e

$$x^*(t) = \left[\int_0^{\infty} e^{-\int_0^s r(t-\sigma) d\sigma} \beta(t-s) ds \right]^{-1}, \quad 0 \leq s < \infty. \quad (2.3.6)$$

x^* é chamada *solução canônica* de (2.3.2) para o par de funções r e k e satisfaz (2.3.2) para todo t .

Assim, até agora podemos concluir que (2.3.6) nos fornece uma solução assintótica para (2.3.2) e que a expressão (2.3.3) é válida desde que dada uma condição inicial (na verdade $x_0 > 0$).

Assumiremos, sem perder a generalidade que a função k :

(i) é contínua em cada subintervalo finito de $\mathbb{R}$;

(ii) é sempre contínua à esquerda, isto é, $\lim_{\tau \rightarrow t^+} k(\tau) = k(t)$,
para todo $t \in \mathbb{R}$.

Analisaremos a partir de agora o caso em que r e k são funções ω -periódicas, com $\omega > 0$, isto é :

$$r(t+\omega) = r(t) \quad \text{e} \quad k(t+\omega) = k(t) \quad (2.3.7)$$

Com essa característica das funções r e k , obtemos que x^*

também é ω -periódica.

De fato,

$$\begin{aligned} x^*(t+\omega) &= \left[\int_0^\infty e^{-\int_0^s r(t+\omega-\sigma) d\sigma} \beta(t+\omega-s) ds \right]^{-1} = \\ &= \left[\int_0^\infty e^{-\int_0^s r(t-\sigma) d\sigma} \beta(t-s) ds \right]^{-1} = x^*(t) \end{aligned}$$

A fim de obter uma expressão mais simples para x^* indicamos o valor médio de r por

$$med[r] = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega r(t) dt \quad (2.3.8)$$

e

$$\begin{aligned} r_d^t(s) &= r(t-s) - med[r] = r^t(s) - med[r] \\ k^t(s) &= k(t-s) \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

Verifica-se facilmente que r_d^t tem média nula e a função

$$s \longmapsto \int_0^s r_d^t(\sigma) d\sigma \quad (2.3.10)$$

é periódica de período ω .

Utilizando a expressão (2.3.6) que define $x^*(t)$, as definições anteriores e a periodicidade das funções r e k temos

$$\begin{aligned} x^*(t)^{-1} &= \int_0^\infty e^{-med[r]s} e^{-\int_0^s r_d^t(\sigma) d\sigma} r^t(s) k^t(s)^{-1} ds \\ &= \sum_{n=0}^\infty \int_0^\omega \left(e^{-med[r](s+n\omega)} \right) \left(e^{-\int_0^s r_d^t(\sigma) d\sigma} \right) r^t(s) k^t(s)^{-1} ds \end{aligned}$$

Através de mudanças de variáveis obtemos

$$x^*(t)^{-1} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} e^{-med[r]\omega} \right] \int_0^{\omega} e^{-\int_0^s r(t-\sigma) d\sigma} r^t(s) k^t(s)^{-1} ds$$

$$x^*(t) = \left[1 - e^{-med[r]\omega} \right] \left[\int_0^{\omega} e^{-\int_0^s r(t-\sigma) d\sigma} r(t-s) k(t-s)^{-1} ds \right]^{-1} \quad (2.3.11)$$

Se $r = r_0 = \text{constante}$, então

$$x^*(t) = \left[1 - e^{-r_0\omega} \right] \left[\int_0^{\omega} e^{-r_0 s} r_0 k(t-s)^{-1} ds \right]^{-1} \quad (2.3.12)$$

Exemplo :

Sejam

$$\begin{cases} r = 1.5 \\ k(t) = 3 + 2 \sin(\pi t) \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Na figura a seguir, observa-se a rapidez de convergência de (2.3.5).

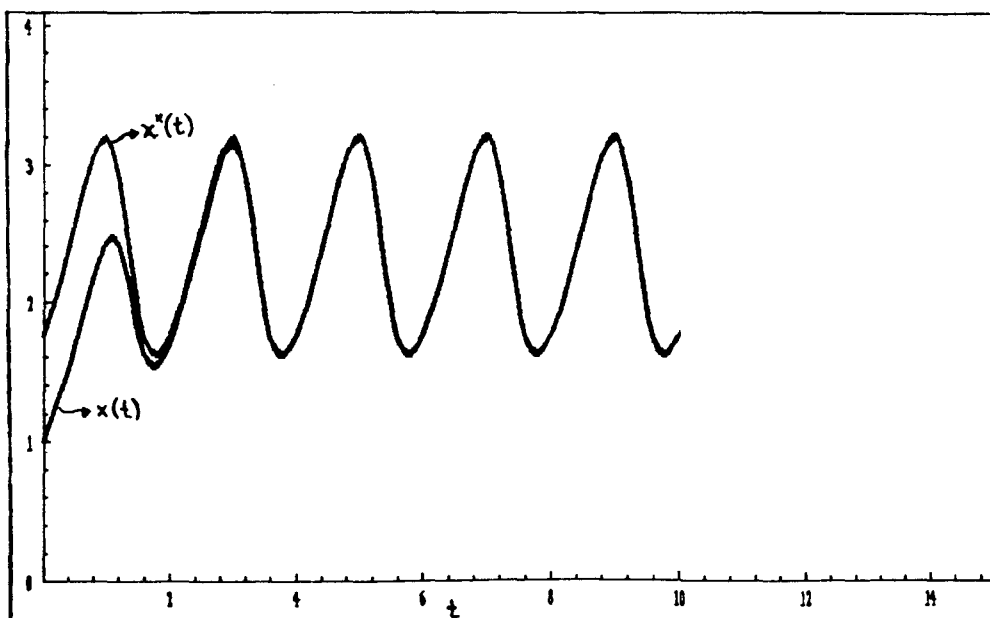


Figura 2.4- Solução canônica $x^*(t)$ e a solução $x(t)$ com $x(0) = 1$

Portanto, se os parâmetros envolvidos são funções ω -periódicas obtemos uma expressão "analítica" para a solução periódica do modelo logístico (2.3.2) e temos ainda que qualquer solução de (2.3.2) satisfazendo uma condição inicial $x(t_0) = x_0$ se aproxima da solução periódica $x^*(t)$.

4 - EXISTÊNCIA, UNICIDADE E ESTABILIDADE DE SOLUÇÕES PERIÓDICAS

Até aqui estivemos preocupados em obter uma solução periódica positiva para (2.3.2). Porém no texto precedente a solução procurada - e obtida - se caracterizava por ser periódica e positiva. Ficaram de lado, até aqui, as questões de unicidade e de estabilidade. Para que estas questões sejam discutidas são necessárias algumas considerações preliminares.

Por simples conveniência, passaremos a considerar a equação logística na forma

$$dx/dt = x [b(t) - c(t)x] \quad (2.4.1)$$

Seja B o espaço de Banach das funções contínuas ω -periódicas com a norma do máximo: $\|x\|_0 = \max_{0 \leq t < \infty} |x(t)|$. Esta notação será utilizada

no decorrer de todo o trabalho.

Por uma solução positiva em B de (2.4.1) entendemos uma solução $x(t) > 0$, $\forall t$, continuamente diferenciável. Uma função positiva $x \in B$ é necessariamente limitada inferiormente fora da origem, ou seja, $x(t) \geq \gamma > 0$ para todo t e uma constante γ positiva.

Para qualquer $f \in B$ utilizaremos a definição de valor médio de f dada em (2.2.3)

$$med[f(t)] = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} f(t) dt$$

EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÕES PERIÓDICAS

No item anterior mostramos a existência de uma solução periódica (canônica) para a equação logística (2.3.2), onde os

coeficientes são funções periódicas positivas. O teorema a seguir garante não só a existência mas a unicidade de solução periódica para (2.4.1) considerando quaisquer funções b e c em B .

Teorema 2.4.1 : [8]

Se $\text{med}[b(t)] > 0$, e $c(t) > 0$ para todo t , então existe uma única solução periódica de (2.4.1) para cada b e c em B .

Dem:

existência: segue de um teorema geral apresentado por Cushing [8] envolvendo a equação logística com influências hereditárias.

unicidade: Cushing [8]

Dividindo (2.4.1) por x e integrando os dois membros de 0 a ω temos

$$\frac{x'}{x} = b(t) - c(t) x$$

$$\int_0^\omega \frac{dx}{x} = \int_0^\omega (b(t) - c(t) x) dt$$

$$\ln x(\omega) - \ln x(0) = \int_0^\omega b(t) dt - \int_0^\omega c(t) x dt = \omega \text{ med } [b(t) - c(t) x] .$$

Portanto, se $\bar{x} \in B$ é solução de (2.4.1), temos

$$\omega \text{ med } [b(t) - c(t) \bar{x}] = 0 \iff \text{med } [b(t) - c(t) \bar{x}] = 0$$

Suponhamos que existam $x_1, x_2 \in B$ soluções distintas de (2.4.1). Assim

$$\text{med } [b(t) - c(t) x_1] = 0 \quad \text{e} \quad \text{med } [b(t) - c(t) x_2] = 0 \quad (2.4.2)$$

Fazendo $y = x_1 - x_2$ temos

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} = x_1 [b(t) - c(t)x_1] - x_2 b(t) + c(t)x_2^2 \\ &= b(t)(x_1 - x_2) - c(t)(x_1^2 - x_2^2) \\ &= b(t)y - c(t)y(x_1 + x_2)\end{aligned}$$

$$dy/dt = y[b(t) - c(t)x_1 - c(t)x_2] \quad (2.4.3)$$

Dividindo (2.4.3) por y e calculando a média de ambos os lados temos

$$0 = \text{med}[b(t)] - \text{med}[c(t)x_1] - \text{med}[c(t)x_2]$$

De (2.4.2) concluímos que $\text{med}[b(t)] = 0$, o que contraria as hipóteses do Teorema, garantindo assim a unicidade da solução.

ESTABILIDADE

O estudo da estabilidade da solução periódica positiva de (2.3.2) segue dos teoremas que apresentaremos a seguir.

Teorema 2.4.2 :

Seja $X(t)$ uma matriz solução fundamental para

$$dx/dt = A(t)x \quad (2.4.4)$$

O sistema acima é uniformemente assintoticamente estável para $t_0 \geq \beta$ ($\beta \in \mathbb{R}$) se e somente se é exponencialmente assintoticamente estável, isto é, se existem $k = k(\beta) > 0$, $\alpha = \alpha(\beta) > 0$ tais que

$$|X(t) X^{-1}(s)| \leq k e^{-\alpha(t-s)}, \quad \beta \leq s \leq t < \infty$$

Dem: ver Hale [16].

Teorema 2.4.3 :

Suponha que $\beta \in \mathbb{R}$ e que o sistema $dx/dt = A(t)x$ seja uniformemente assintoticamente estável para $t_0 \geq \beta$. Se $f(t,x)$ é contínua para $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e se para $\forall \varepsilon > 0$, existe $\sigma > 0$ tal que

$$|f(t,x)| < \varepsilon |x| \quad \text{para } |x| < \sigma \text{ e } t \in \mathbb{R},$$

então a solução $x = 0$ de

$$dx/dt = A(t)x + f(t,x) \quad (2.4.5)$$

é uniformemente assintoticamente estável para $t_0 \geq \beta$.

Dem :

A hipótese da estabilidade assintótica uniforme para $t_0 \geq \beta$ do sistema (2.4.4) implica na existência de constantes $k = k(\beta) > 0$, $\alpha = \alpha(\beta) > 0$ com as quais podemos utilizar o teorema anterior.

Como toda solução x do sistema (2.4.5) satisfaz

$$x(t) = X(t)X(t_0)^{-1}x(t_0) + \int_{t_0}^t X(t)X^{-1}(s)f(s,x(s)) ds,$$

escolhemos ε tal que $\varepsilon k < \alpha$ e que σ seja tal que $|f(t,x)| < \varepsilon |x|$ para $|x| < \sigma$. Assim, para $t \geq t_0$ tal que $|x(t)| < \sigma$, temos

$$|x(t)| \leq k e^{-\alpha(t-t_0)} |x(t_0)| + \int_{t_0}^t \varepsilon k e^{-\alpha(t-t_0)} |x(s)| ds$$

$$|x(t)| \leq k |x(t_0)| e^{-(\alpha - \varepsilon k)(t-t_0)}.$$

Como $\alpha - \varepsilon k > 0$, esta desigualdade implica que $|x(t)| < \sigma$ para $t \geq t_0$ desde que $|x(t_0)| < \sigma/k$, implicando assim na estabilidade assintótica uniforme de $x = 0$.

Teorema 2.4.4.:

Sejam $b(t)$ e $c(t) \in B$ em (2.4.1) e $c(t) > 0$, $\forall t$. Então qualquer solução positiva $\bar{z}$ que é limitada fora da origem é localmente

uniformemente assintoticamente estável. Ainda, para todo t_0 corresponde uma constante $\delta = \delta(t_0, b, c)$ tal que se $z(t; t_0, z_0)$ é solução de (2.4.1) onde $z(t_0) = z_0$ e se $z_0 > (\bar{z}(t_0) - \delta)$ então, $z(t; t_0, z_0)$ está definida para todo t e

$$z(t; t_0, z_0) - \bar{z}(t) \longrightarrow 0 \quad \text{para } t \longrightarrow \infty.$$

Dem:

Seja $\bar{z}$ uma solução de (2.4.1) satisfazendo $\bar{z}(t) \geq \gamma > 0, \forall t$ e $\gamma > 0$. Seja $z = z(t; t_0, z_0)$ solução de (2.4.1) com $z(t_0) = z_0$, e

$$x = z - \bar{z}.$$

Usando o fato de z ser solução de (2.4.1) verifica-se que x satisfaz

$$x' = (\bar{z}'/\bar{z} - c\bar{z})x - cx^2 \quad (2.4.6)$$

A equação linear associada é dada por

$$y' = (\bar{z}'/\bar{z} - c\bar{z}) y \quad (2.4.7)$$

cuja solução fundamental é dada por

$$y(t) = \bar{z}(t) \exp \left(- \int_0^t c\bar{z} \, du \right) \quad e$$

$$|y(t)y^{-1}(s)| = |\bar{N}(t)\bar{N}^{-1}(s)| \exp \left(\int_t^0 c\bar{N} \, du + \int_0^s c\bar{N} \, du \right)$$

$$|y(t)y^{-1}(s)| = |\bar{z}(t)\bar{z}^{-1}(s)| \exp \left(- \int_s^t c\bar{z} \, du \right) \leq |\bar{z}|_0 \frac{1}{\gamma} \exp(-c_0\gamma(t-s))$$

para $t_0 \geq s$ e c_0 limitante superior de $c(t)$.

Segue então do Teorema (2.4.2), tomando

$$\alpha = -c_0\gamma \quad k = |z|_0/\gamma$$

e do Teorema (2.4.3) com

$$f(t, x) = -c(t)x^2 \quad e \quad \sigma = \varepsilon/c_0,$$

que $x = 0$ (isto é, $z = \bar{z}$) é (localmente) uniformemente assintoticamente estável. Portanto,

$$|\bar{z}(t_0) - z_0| < \delta \rightarrow z(t; t_0, N_0) - \bar{z}(t) \rightarrow 0 \text{ para } t \rightarrow \infty .$$

A solução geral de (2.4.5) é dada por

$$x(t) = y(t)y^{-1}(t_0)x(t_0) - \int_{t_0}^t y(t)y^{-1}(s)c(s)x^2(s) ds \quad (2.4.8)$$

Suponhamos agora que $z_0 \geq \bar{z}(t_0)$ para que $x(t_0) \geq 0$. A unicidade de soluções para (2.4.6) implica que $x(t) \geq 0 \forall t$. De (2.4.8) obtemos

$$0 \leq x(t) \leq y(t)y^{-1}(t_0)x(t_0)$$

que, juntamente com (2.4.6) nos mostra que x está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ e vale:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 .$$

5 - APLICAÇÃO

Utilizaremos os resultados anteriores no estudo de um modelo proposto para a dinâmica populacional da espécie *Donax gemmula*.

O modelo⁽¹⁾ apresentado para o estudo populacional de *Donax gemmula* é determinístico e considera fatores abióticos (neste caso, tempestades sazonais) como responsáveis pelo fator de inibição ao crescimento populacional da espécie. Os parâmetros utilizados foram obtidos através de simulações numéricas usando dados experimentais colhidos por Paes no litoral do Rio Grande do Sul em 1989.

MODELO

Considerando $P = P(t)$ a densidade populacional do *Donax gemmula*, temos:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = R(t) \left[1 - \frac{P}{k} \right] P - [d(t) + \beta f(t)] P, & \text{com} \\ P(t_0) = P_0 > 0. \end{cases} \quad (2.5.1)$$

onde $R(t)$, $f(t)$, $d(t)$ são funções periódicas, de mesmo período $\omega > 0$;

$R(t)$ = taxa de recrutamento;

$f(t)$ = medida da intensidade da tempestade;

$d(t)$ = taxa de mortalidade fisiológica;

k = capacidade suporte do meio;

β = constante de proporcionalidade da mortalidade abiótica.

Uma simplificação de (2.5.1) pode ser obtida fazendo

$$\alpha(t) = R(t) - d(t) - \beta f(t) \quad \text{e} \quad \gamma(t) = \frac{R(t)}{k} \quad (2.5.2)$$

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = \alpha(t)P - \gamma(t)P^2, & \text{com} \\ P(t_0) = P_0 > 0. \end{cases} \quad (2.5.3)$$

(1) Maiores detalhes para o estudo dessa população podem ser encontrados na Revista Biomatemática II [24].

Para a solução canônica da equação (2.5.3) temos (ver item 3):

$$P^*(t) = \left[1 - e^{-med[\alpha]\omega} \right] \left[\int_0^\omega e^{-\int_0^\omega \alpha(t-\sigma) d\sigma} \gamma(t-s) ds \right]^{-1} \quad (2.5.4)$$

Dada a condição inicial $P(t_0) = P_0$, temos que a solução de (2.5.3) é dada por

$$P(t) = \frac{P_0 \exp \left(\int_{t_0}^t \alpha(s) ds \right)}{1 + P_0 \int_{t_0}^t \exp \left(\int_{t_0}^\tau \alpha(\xi) d\xi \right) \gamma(\tau) d\tau}$$

e $P(t) \rightarrow P^*(t)$ (independentemente de P_0), (cf. Teorema 2.4.4).

Devido à simplicidade das funções α e γ para a população de *Donax gemmula* a expressão da solução periódica pode ser obtida mais facilmente em [23] :

Fazendo a mudança de variável $u = 1/P$ em (2.5.3) obtemos

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \gamma(t) - \alpha(t)u \\ u(t_0) = u_0 > 0 \end{cases} \quad (2.5.5)$$

que é uma equação linear em u , cuja solução tem expressão analítica dada por:

$$u^*(t) = u_0^* e^{-\int_{t_0}^t \alpha(s) ds} + e^{-\int_{t_0}^t \alpha(s) ds} \left(\int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^s \alpha(\xi) d\xi} \gamma(s) ds \right)$$

Supondo que

$$i) \alpha(t) = \alpha_0 + \alpha_1(t), \quad \alpha_0 > 0$$

$$ii) \gamma(t) = \gamma_0 + \gamma_1(t)$$

com $\alpha_1(t)$ e $\gamma_1(t)$ ω -periódicas. Temos que

$$A(t) = \int_{t_0}^t \alpha(s) ds = \alpha_0(t - t_0) + [\alpha_1^*(t) - \alpha_1^*(t_0)],$$

onde $\alpha_1^*(t)$ é ω -periódica e portanto $\alpha_1^*(0) = \alpha_1^*(\omega) = 0$.

Consequentemente,

$$A(t_0) = 0 \text{ e } A(t_0 + \omega) = \alpha_0 \omega.$$

Para que (2.5.5) admita uma solução ω -periódica $u^*(t)$ devemos ter $u^*(t) = u^*(t+\omega)$ com $u_0^* = u^*(t_0) = u^*(t_0 + \omega)$. Portanto,

$$\begin{aligned} u^*(t_0 + \omega) &= u_0^* e^{-A(t_0 + \omega)} + e^{-A(t_0 + \omega)} \left(\int_{t_0}^{t_0 + \omega} e^{A(s)} \gamma(s) ds \right) = u_0^* \\ \Leftrightarrow u_0^* &= \frac{e^{-\alpha_0 \omega} \int_{t_0}^{t_0 + \omega} e^{A(s)} \gamma(s) ds}{1 - e^{-\alpha_0 \omega}}. \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

Assim, a solução periódica de (2.5.5) é dada por

$$u^*(t) = u_0^* e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \left(\int_{t_0}^t e^{A(s)} \gamma(s) ds \right),$$

com u_0^* dado por (2.5.6).

Da linearidade da equação (2.5.5) temos como solução geral

$$u(t) = u_0 e^{-A(t)} + u^*(t)$$

e, consequentemente, a solução para (2.5.3) é dada por

$$P(t) = \frac{1}{u_0 e^{-A(t)} + u^*(t)}, \quad \text{com } u_0 = \frac{1}{P_0}.$$

Como $u^*(t)$ é ω -periódica e $\exp(-A(t)) = \exp[-\alpha_0(t-t_0) - \alpha_1^*(t) + \alpha_1^*(t_0)]$

segue $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-A(t)} = 0$ pois $\alpha_0 > 0$,

e assim,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \frac{1}{u^*(t)}$$

Concluimos dessa maneira que $P_1^*(t) = 1/u^*(t)$ é solução ω -periódica assintoticamente estável de (2.5.3) independentemente da condição inicial $P_0 > 0$ e, usando o teorema da unicidade de soluções periódicas apresentado no item 4, obtemos que $P_1^*(t) = P^*(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

PARÂMETROS E SIMULAÇÕES:

$$R(t) = r_1 + r_2 \frac{\left(1 - \cos \frac{\pi t}{6}\right)}{2}, \quad \begin{cases} r_1 = 0.3 \\ r_2 = 0.2 \end{cases}$$

$$d(t) = \mu H(t) \quad \text{com} \quad \mu = 0.2;$$

$$H(t) = 0.3025 + 0.1225 \sin\left(\frac{\pi(t-3)}{6}\right);$$

$$f(t) = 1.308333 + 3.5279917 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{12}\right);$$

$$\beta = 0.03 \quad \text{obtido empiricamente}$$

$$k = 650 \quad \text{obtido do ajuste dos dados}$$

$$P_0 = 122 \quad \text{observado (Paes 1989).}$$

OBS: t é considerado em meses.

Assim, simplificando as expressões acima temos:

$$\alpha(t) = 0.261 - \left(0.0755 + 0.2116795 \cos \frac{\pi}{12} \right) \cos \frac{\pi t}{6} + 0.2116795 \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{\pi t}{6}$$

$$\gamma(t) = \left(0.4 - 0.1 \cos \frac{\pi t}{6} \right) / 650$$

Utilizando o pacote "Mathematica", podemos ver na figura 2.5 como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |P(t) - P^*(t)| = 0$$

conforme estabelece o Teorema 2.4.4 :

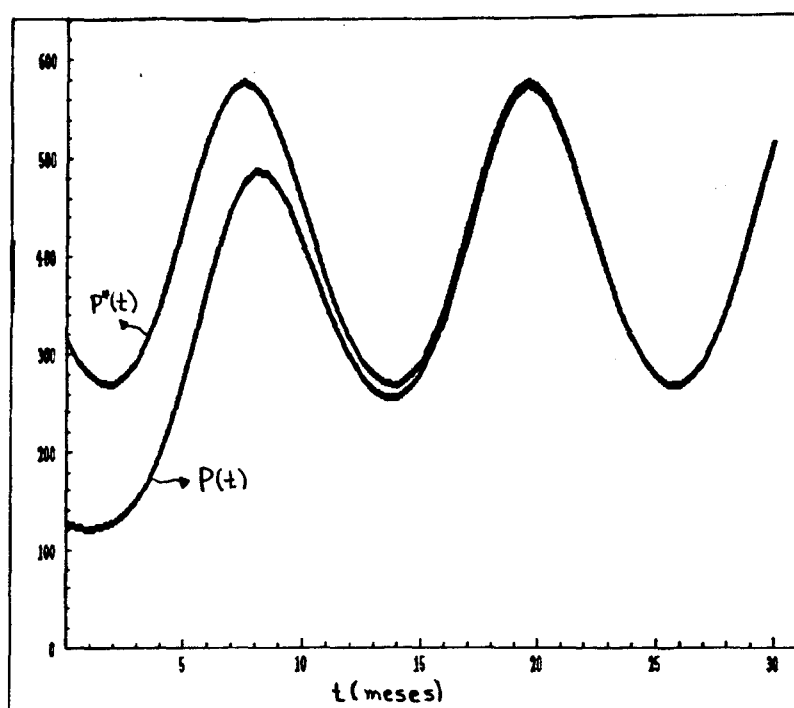


Figura 2.5 - Solução canônica $P^*(t)$ e a solução $P(t)$ com $P(0.6) = 122$

Finalmente, podemos comparar as expressões obtidas juntamente com os dados experimentais na figura 2.6.

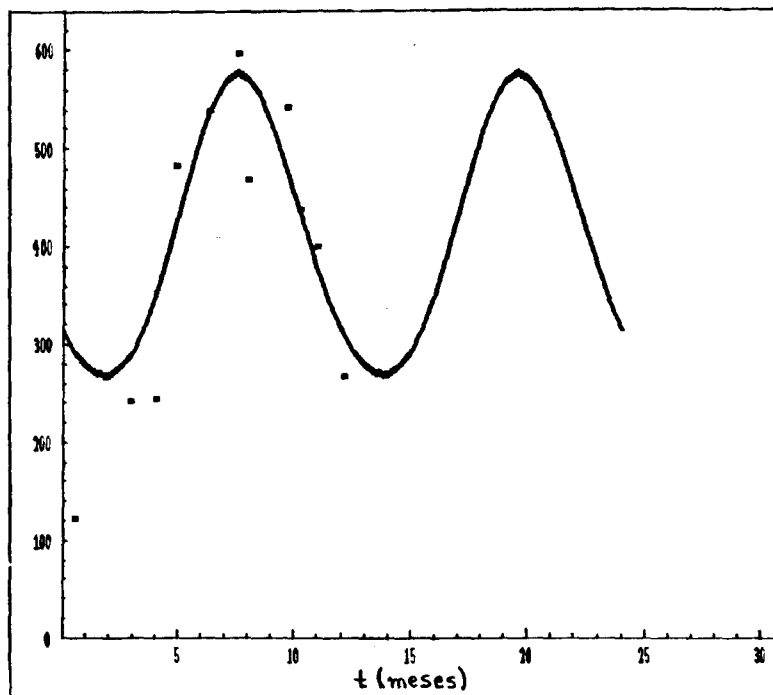


Figura 2.6 - Solução canônica $P^*(t)$ e dados experimentais

Observamos que a população de *Donax gemmula* deve estar próxima do equilíbrio periódico, na região estudada.

Estes modelos são ditos uniespecíficos, por motivo óbvio. No capítulo seguinte iremos abordar casos de mais de uma espécie.

CAPÍTULO 3

MODELOS DE COMPETIÇÃO PARA DUAS ESPÉCIES

1 - INTRODUÇÃO:

Em qualquer estudo de Ecologia evolutiva as interações entre os organismos aparecem sempre como um dos principais aspectos que determinam os diferentes padrões de diversidade existentes. Essa idéia tem provocado avanços em experimentos e teoria.

O estudo de interações entre populações visa conhecer o comportamento dessas populações de modo a ajudar a prever quais espécies irão predominar numa comunidade, quais serão extintas e ainda quais as condições para que as espécies coexistam.

Neste capítulo, ao invés de considerarmos o número de indivíduos de uma única população, como fizemos no capítulo anterior, tomaremos duas populações - N_1 e N_2 - que interagem entre si de maneira negativa, ou seja, competem entre si pelos mesmos recursos.

Uma representação geral para este fato pode ser dada por

$$\left[\begin{array}{l} \frac{dN_1}{dt} = N_1 f_1(N_1, N_2, t) \\ \frac{dN_2}{dt} = N_2 f_2(N_1, N_2, t) \end{array} \right. \quad (3.1.1)$$

onde $\partial f_1(N_1, N_2, t) / \partial N_1 < 0$, $\partial f_1(N_1, N_2, t) / \partial N_2 < 0$

$\partial f_2(N_1, N_2, t) / \partial N_1 < 0$, $\partial f_2(N_1, N_2, t) / \partial N_2 < 0$;

$f_i(N_1, N_2, t) = f_i(N_1, N_2, t + \omega)$, $i = 1, 2$, sendo ω o período.

As equações que deram origem aos modelos de competição entre duas espécies foram apresentadas inicialmente por A.J. Lotka (1925), V. Volterra (1926) e amplamente discutidas por G. F. Gause (1934).

O modelo de Lotka-Volterra consiste de modificações da equação logística com inclusões de termos que descrevem os efeitos inibidores de cada espécie sobre seus competidores, e é dado pelas equações autônomas:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = N_1 [b_1 - a_{11}N_1 - a_{12}N_2] \\ \frac{dN_2}{dt} = N_2 [b_2 - a_{21}N_1 - a_{22}N_2] \end{cases} \quad (3.1.2)$$

onde, b_i e a_{ij} ($i, j = 1, 2$) são constantes positivas.

O modelo (3.1.2) é bastante simples para descrever processos ecológicos de modo realista, por não considerar explicitamente o mecanismo de interação entre espécies. Uma síntese dessas interações estão embutidas nos parâmetros a_{ij} - os coeficientes de interação - que são bastante difíceis de serem calculados. As equações (3.1.2) assumem que a taxa de crescimento de cada população é inibida de maneira linear pelas duas populações [3].

Inúmeros modelos podem representar o processo de competição entre espécies, como pode ser visto em Gopalsamy [14], Cushing [11] e outros. Consideraremos equações do tipo (3.1.2) supondo que os parâmetros envolvidos no modelo são funções periódicas do tempo. Teremos no lugar de (3.1.2) o sistema:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = N_1 [b_1(t) - a_{11}(t)N_1 - a_{12}(t)N_2] \\ \frac{dN_2}{dt} = N_2 [b_2(t) - a_{21}(t)N_1 - a_{22}(t)N_2] \end{cases}, \text{ com} \quad (3.1.3)$$

$$\begin{aligned} b_i(t) &= b_i(t+\omega), \quad i = 1, 2; \\ a_{ij}(t) &= a_{ij}(t+\omega), \quad i, j = 1, 2; \end{aligned} \quad \text{e } \omega \text{ é o período.}$$

A análise desse modelo consiste em uma importante ferramenta heurística para o entendimento da natureza qualitativa da competição interespecífica.

Analisaremos primeiramente os efeitos provocados nas populações ao considerarmos pequenas oscilações na capacidade suporte do meio em que vivem as populações, utilizando resultados apresentados no item 3 do capítulo 1. A seguir, estudamos o comportamento assintótico assim como existência e unicidade de soluções periódicas positivas para o sistema geral (3.1.3).

2 - MODELO DE COMPETIÇÃO SUJEITO A PEQUENAS OSCILAÇÕES (CASO SIMÉTRICO) [26]

Alguns modelos que tratam de competição entre duas espécies onde alguns parâmetros são funções periódicas do tempo têm sido estudados por Cushing [11], Gopalsamy [14] e outros. Num primeiro momento consideraremos o modelo clássico de Lotka-Volterra (simétrico), embora seja um dos mais simples, com o objetivo de analisar seu comportamento quando pequenas oscilações são consideradas na capacidade suporte do meio envolvido.

Modelos mais complexos podem ser tratados de modo semelhante.

Consideremos inicialmente, o sistema de competição com parâmetros constantes:

$$\begin{cases} dx/dt = (rx/k)(k - x - \alpha y) \\ dy/dt = (ry/k)(k - y - \alpha x) \end{cases} \quad (3.2.1)$$

onde: r = taxa de crescimento intrínseco das populações x e y , $r > 0$;
 k = capacidade suporte do meio, $k > 0$;
 α = coeficiente de competição entre as espécies, $\alpha > 0$.

O sistema (3.2.1) tem como pontos de equilíbrio:

$$P_1 = (X_1, Y_1) = (0,0) , P_2 = (X_2, Y_2) = \left(\frac{k}{1+\alpha} , \frac{k}{1+\alpha} \right)$$

$$P_3 = (X_3, Y_3) = (k,0) , P_4 = (X_4, Y_4) = (0,k).$$

Analisando a estabilidade para cada um desses pontos, através do cálculo da matriz jacobiana do sistema (3.2.1)

$$J = \begin{bmatrix} r - \frac{2rx}{k} - \frac{r\alpha y}{k} & -\frac{r\alpha x}{k} \\ -\frac{r\alpha y}{k} & r - \frac{2ry}{k} - \frac{r\alpha x}{k} \end{bmatrix} \quad (3.2.2)$$

em cada ponto de equilíbrio, temos:

a) Se os autovalores λ de $J|P_i$, $i= 1,..4$, tiverem parte real negativa, o ponto P_i será assintoticamente estável;

b) Se um dos autovalores de $J|P_i$ tiver parte real positiva, então P_i será instável;

c) Se todos os autovalores de $J|P_i$ tiverem parte real positiva, P_i será um repulsor (cf. Teorema de Linearização de Liapunov-Poincaré).

Os autovalores de $J|P_i$ são dados por:

$$\begin{aligned} \text{i) } P_1 &\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = r > 0; \\ \text{ii) } P_2 &\Rightarrow \lambda_1 = -r \quad \text{e} \quad \lambda_2 = r(\alpha - 1)/(\alpha + 1); \\ \text{iii) } P_3 &\Rightarrow \lambda_1 = -r \quad \text{e} \quad \lambda_2 = r(1 - \alpha); \\ \text{iv) } P_4 &\Rightarrow \lambda_1 = -r \quad \text{e} \quad \lambda_2 = r(1 - \alpha); \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Consequentemente,

$P_1 = (0,0)$ é instável para todo $\alpha > 0$;

$P_2 = \left(\frac{k}{(1+\alpha)}, \frac{k}{(1+\alpha)} \right)$ é assintoticamente estável quando $\alpha < 1$ e instável se $\alpha > 1$;

$\begin{cases} P_3 = (k,0) \\ P_4 = (0,k) \end{cases}$ são instáveis se $\alpha < 1$ e assintoticamente estáveis se $\alpha > 1$.

A coexistência das duas populações (estabilidade do ponto P_2) depende da fraca competitividade entre elas, isto é, $0 < \alpha < 1$. Se $\alpha > 1$, uma das espécies vai para a extinção dependendo da condição inicial, ou seja, os pontos de equilíbrio $(0,k)$ e $(k,0)$ passam a ser estáveis enquanto que P_2 se torna instável.

Desta forma, para $\alpha = 1$ temos uma *bifurcação*.

Considerando agora a capacidade suporte do meio sujeita à pequenas oscilações periódicas, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} dx/dt = [rx/k(t)] [k(t) - x - \alpha y] \\ dy/dt = [ry/k(t)] [k(t) - y - \alpha x] \end{cases} \quad (3.2.4)$$

onde $k(t)$, $r > 0$ e $\alpha > 0$ têm os mesmos significados dados anteriormente e

$$k(t) = k[1 + \mu\phi(t)] > 0, \forall t;$$

$\phi(t)$ = função periódica em t de período $\omega > 0$, cujo valor médio é 0.

Utilizando o método de perturbação para sistemas que possuem solução periódica, apresentado no capítulo 1, consideraremos agora as soluções para este novo sistema analisando o efeito das oscilações sobre cada ponto de equilíbrio.

$$1) (X_3, Y_3) = (k, 0)$$

Vamos denotar por

$$\tilde{x}(t, \mu) = k + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n \tilde{x}_n(t), \quad \tilde{x}_n \text{ } \omega\text{-periódica} \quad (3.2.5)$$

a solução periódica existente para (3.2.4) que difere de $(k,0)$ por uma quantia que tende a zero com μ . (cf. Teorema 1.3.2).

A solução (3.2.5) já foi analisada no capítulo 2 onde obtivemos, com erro da ordem de μ^3 , a seguinte expressão para a média de $\tilde{x}(t, \mu)$:

$$med[\tilde{x}(t,\mu)] = k + \mu^2 med[\tilde{x}_2(t)] = x \left\{ 1 - \frac{\mu^2}{k^2} med[(k\phi - \tilde{x}_1)^2] \right\} \quad (3.2.6)$$

A expressão (3.2.6) nos mostra que a introdução de componentes oscilatórias provoca uma redução do valor médio da população abaixo da capacidade suporte alcançada em meio constante (conforme já mencionamos no capítulo 2).

A análise do efeito das oscilações sobre o ponto $(0,k)$ é análogo devido à simetria do modelo.

$$2) (X_2, Y_2) = (k/(1+\alpha), k/(1+\alpha))$$

Seja

$$(x^*(t,\mu), y^*(t,\mu)) = \left(X_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n x_n(t), Y_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n y_n(t) \right) \quad (3.2.7)$$

a solução periódica existente para (3.2.4) e que difere de (X_2, Y_2) por uma quantia que tende a zero com μ .

Substituindo (3.2.7) em (3.2.4) e comparando os coeficientes das potências de μ , obtemos as seguintes equações para $x_1(t)$ e $y_1(t)$:

$$\begin{cases} dx_1/dt + (rX_2/k) (x_1 + \alpha y_1) = rX_2 \phi \\ dy_1/dt + (rY_2/k) (\alpha x_1 + y_1) = rY_2 \phi \end{cases} \quad (3.2.8)$$

O sistema acima tem solução ω -periódica, encontrada explicitamente dada a função $\phi(t)$. Como $X_2 = Y_2$, para qualquer $\phi(t)$ temos

$$x_1(t) = y_1(t) \quad (3.2.9)$$

e levando em (3.2.8) chegamos a uma única equação

$$dx_1/dt + rx_1 = rX_2 \phi \quad (3.2.10)$$

Como consequência da simetria, verifica-se que $x_1(t) = y_1(t)$ para $i = 1, 2, \dots$ e portanto $x^*(t,\mu) = y^*(t,\mu)$.

As equações obtidas para $x_2(t)$ e $y_2(t)$ são:

$$\begin{cases} \frac{dx_2}{dt} + rx_2 = \frac{-r}{X_2} (X_2^2\phi^2 - 2x_1X_2\phi + x_1^2) = \frac{-r}{X_2} (X_2\phi - x_1)^2 \\ \frac{dy_2}{dt} + ry_2 = \frac{-r}{X_2} (x_1 - \phi X_2)^2 \end{cases}$$

sendo reduzidas a

$$\frac{dx_2}{dt} + rx_2 = \frac{-r}{X_2} (X_2\phi - x_1)^2 \quad (3.2.11)$$

$$\Rightarrow \text{med}[x_2] = \text{med}[y_2] = \frac{-1}{X_2} \text{med}[(X_2\phi - x_1)^2] \quad (3.2.12)$$

Das expressões gerais para as médias de $x^*(t, \mu)$ e $y^*(t, \mu)$

$$\text{med}[x^*(t, \mu)] = X_2 + \mu \text{med}[x_1] + \mu^2 \text{med}[x_2] \quad e$$

$$\text{med}[y^*(t, \mu)] = Y_2 + \mu \text{med}[y_1] + \mu^2 \text{med}[y_2]$$

observamos novamente que existe um decréscimo nos níveis populacionais para que ambas as espécies coexistam, comparando-se com os níveis atingidos em meio constante.

ESTABILIDADE

A estabilidade de $\tilde{x}(t, \mu)$ e $x^*(t, \mu)$ decorre do teorema 1.3.3 e depende dos autovalores da matriz jacobiana (3.2.2) quando aplicada em P_3 e P_2 respectivamente, para $\mu = 0$. Assim, dados estes autovalores por (3.2.3), temos as seguintes condições de estabilidade:

- $\tilde{x}(t, \mu)$ será assintoticamente estável se $\alpha > 1$ e instável se $\alpha < 1$;

- $x^*(t, \mu)$ será assintoticamente estável se $\alpha < 1$ e instável se $\alpha > 1$. (cf. Teorema 1.3.3).

Em resumo, mostramos até aqui que o equilíbrio constante é modificado em equilíbrio oscilando periodicamente quando pequenas oscilações são consideradas na capacidade suporte do meio. Ainda, pudemos constatar que o valor médio de cada componente não-nula em geral é menor que o de equilíbrio constante correspondente e o valor do parâmetro que determina a estabilidade ou não das soluções permanece inalterado pelas oscilações.

Um caso mais geral, onde a ausência de simetria do modelo faz com que alguns resultados obtidos neste capítulo percam a validade pode ser encontrado em Rosenblat [26].

3 - MODELO DE COMPETIÇÃO ENTRE DUAS ESPÉCIES COM PARÂMETROS PERIÓDICOS

Consideraremos aqui o modelo de competição entre duas espécies a fim de obter condições suficientes para a existência de uma única solução periódica, onde apenas as taxas de crescimento intrínseco de cada população são funções periódicas do tempo. Os coeficientes de interação interespecífica e intraespecífica serão considerados como constantes positivas, embora a análise que será feita possa ser adaptada no caso em que estes coeficientes sejam também funções contínuas periódicas. A periodicidade de certos parâmetros é indicada quando consideramos variações ambientais, ou seja, efeitos abióticos sazonais, hábitos alimentares, etc.

O modelo autônomo de competição entre espécies por recursos comuns, proposto por Lotka-Volterra, é descrito pelo sistema:

$$\begin{cases} dx/dt = x(b_1 - a_{11}x - a_{12}y) \\ dy/dt = y(b_2 - a_{21}x - a_{22}y) \end{cases} \quad (3.3.1)$$

onde x e y são as duas espécies que estão interagindo e b_i, a_{ij} ($i, j = 1, 2$) são constantes positivas.

Os pontos de equilíbrio do sistema (3.3.1) são dados por:

$$P_1 = (0, 0), \quad P_2 = (0, b_2/a_{22}), \quad P_3 = (b_1/a_{11}, 0) \quad \text{e} \quad P_4 = (x_0, y_0)$$

onde

$$x_0 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad \text{e} \quad y_0 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

A estabilidade de P_4 quando $x_0, y_0 > 0$ (caso em que ambas as espécies coexistem), é obtida se

$$a_{11}/a_{21} > b_1/b_2 > a_{12}/a_{22}. \quad (3.3.2)$$

E, neste caso, temos que se $x(0) > 0$ e $y(0) > 0$, então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (x_0, y_0)$$

Consideremos agora as taxas de crescimento intrínseco em (3.3.1) como funções periódicas de mesmo período $\omega > 0$, ou seja,

$$b_1(t+\omega) = b_1(t) \quad \text{e} \quad b_2(t+\omega) = b_2(t), \quad -\infty < t < \infty \quad \text{e} \quad \omega > 0; \quad (3.3.3)$$

e os coeficientes de interação a_{ij} ($j = 1, 2$) constantes positivas.

Então,

$$\begin{cases} dx/dt = x[b_1(t) - a_{11}x - a_{12}y] \\ dy/dt = y[b_2(t) - a_{21}x - a_{22}y] \end{cases} \quad (3.3.4)$$

Devido à periodicidade de b_1 e b_2 definimos:

$$\max_{-\infty < t < \infty} b_1(t) = b_1^M > 0, \quad \min_{-\infty < t < \infty} b_1(t) = b_{1m} > 0; \quad (3.3.5)$$

$$\max_{-\infty < t < \infty} b_2(t) = b_2^M > 0, \quad \min_{-\infty < t < \infty} b_2(t) = b_{2m} > 0.$$

A solução de equilíbrio (em que ambas as espécies coexistem) para (3.3.4) é dada por:

$$x^*(t) = \frac{b_1(t)a_{22} - b_2(t)a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad e \quad y^*(t) = \frac{a_{11}b_2(t) - a_{21}b_1(t)}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Tal solução será sempre positiva se

$$i) \frac{a_{11}}{a_{21}} > \frac{a_{12}}{a_{22}}; \quad ii) \frac{b_1(t)}{b_2(t)} > \frac{a_{12}}{a_{22}} \quad e \quad iii) \frac{a_{11}}{a_{21}} > \frac{b_1(t)}{b_2(t)} \quad \forall t > 0;$$

e consequentemente,

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} > \frac{b_1^M}{b_{2m}} \quad e \quad \frac{b_{1m}}{b_{2m}} > \frac{a_{12}}{a_{22}} \quad (3.3.6)$$

Assim, observando que o sistema (3.3.4) deixa o quadrante $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$ invariante, temos:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} > 0 &\Leftrightarrow b_1(t) - a_{11}x(t) - a_{12}y(t) > 0 \\ &\Leftrightarrow x(t) < \frac{b_1(t) - a_{12}y(t)}{a_{11}} < \frac{b_1^M - a_{12}y(t)}{a_{11}} \quad (3.3.7) \\ &\Leftrightarrow \boxed{x(t) < b_1^M / a_{11} = x_{\max}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} > 0 &\Leftrightarrow b_2(t) - a_{21}x(t) - a_{22}y(t) > 0 \\
&\Leftrightarrow y(t) < \frac{b_2(t) - a_{21}x(t)}{a_{22}} < \frac{b_2^M - a_{21}x(t)}{a_{22}} \quad (3.3.8) \\
&\Leftrightarrow \boxed{y(t) < b_2^M / a_{22} = y_{\max}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} < 0 &\Leftrightarrow b_1(t) - a_{11}x(t) - a_{12}y(t) < 0 \\
&\Leftrightarrow x(t) > \frac{b_1(t) - a_{12}y(t)}{a_{11}} > \frac{b_{1m} - a_{12}y(t)}{a_{11}} \quad (3.3.9) \\
&\Leftrightarrow \boxed{x(t) > \frac{b_{1m}a_{22} - a_{12}b_2^M}{a_{11}a_{22}} = x_{\min}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} < 0 &\Leftrightarrow b_2(t) - a_{21}x(t) - a_{22}y(t) < 0 \\
&\Leftrightarrow y(t) > \frac{b_2(t) - a_{21}x(t)}{a_{22}} > \frac{b_{2m} - a_{21}x(t)}{a_{22}} \quad (3.3.10) \\
&\Leftrightarrow \boxed{y(t) > \frac{b_{2m}a_{11} - a_{21}b_1^M}{a_{11}a_{22}} = y_{\min}}
\end{aligned}$$

Logo, $x(t)$ pode crescer até $x_{\max}$ e decrescer até $x_{\min}$, o mesmo ocorrendo para $y(t)$ com $y_{\max}$ e $y_{\min}$ respectivamente.

Portanto, se $x(0) > x_{\min}$ e $y(0) > y_{\min}$ concluímos que o retângulo delimitado pelos pontos:

$$A = (x_{\min}, y_{\min}); \quad B = (x_{\max}, y_{\min}); \quad C = (x_{\max}, y_{\max}) \text{ e } D = (x_{\min}, y_{\max}).$$

é invariante pelo sistema (3.3.4), ou seja, dada uma condição inicial pertencente ao interior do retângulo ABCD, a solução $(x(t), y(t))$ permanece no seu interior para qualquer t .

Mais precisamente, com o passar do tempo a solução $(x(t), y(t))$ estará contida inteiramente na região delimitada pelos pontos de intersecção das quatro retas descritas em (3.3.7), (3.3.8), (3.3.9) e (3.3.10). São elas:

$$r_1 : x = \frac{b_1^M - a_{12}y}{a_{11}}$$

$$r_2 : y = \frac{b_2^M - a_{21}x}{a_{22}}$$

$$r_3 : x = \frac{b_{1m} - a_{12}y}{a_{11}}$$

$$r_4 : y = \frac{b_{2m} - a_{21}x}{a_{22}}$$

Exemplo 1:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x[3 + \cos(\pi t) - 3x - 2y] \\ \frac{dy}{dt} = y[4 + 1.5\sin(\pi t) - 1.5x - 6y] \end{cases} \quad (3.3.11)$$

$$b_1(t) = 3 + \cos(\pi t) \Rightarrow b_{1m} = 2 ; b_1^M = 4 ; a_{11} = 3 ; a_{12} = 2.$$

$$b_2(t) = 4 + 1.5\sin(\pi t) \Rightarrow b_{2m} = 2.5 ; b_2^M = 5.5 ; a_{21} = 1.5 ; a_{22} = 6.$$

$$r_1 : x = \frac{4 - 2y}{3}$$

$$r_3 : x = \frac{2 - 2y}{3}$$

$$r_2 : y = \frac{5.5 - 1.5x}{6}$$

$$r_4 : y = \frac{2.5 - 1.5x}{6}$$

$$A = (1/18, 0.5/6); \quad B = (4/3, 0.5/6); \quad C = (4/3, 5.5/6) \text{ e } D = (1/18, 5.5/6)$$

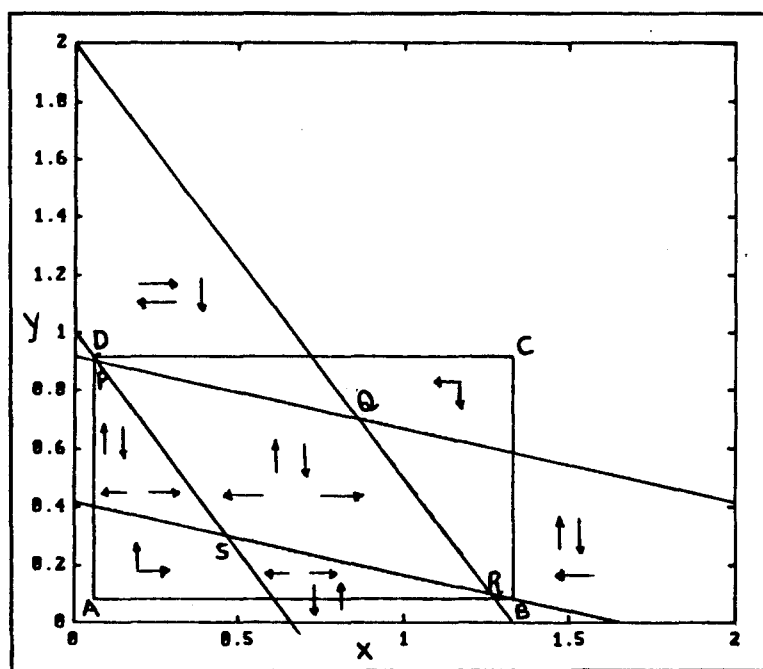


Figura 3.1 - Retas r_1 , r_2 , r_3 e r_4 , o retângulo de vértices ABCD e os sinais de dx/dt e dy/dt em cada região delimitada por r_1 , r_2 , r_3 e r_4 .

Observamos ainda na figura 3.1, que em algumas regiões dx/dt pode ser positiva ou negativa, o mesmo ocorrendo para dy/dt . Isso ocorre devido às possíveis oscilações de uma solução $(x(t), y(t))$ antes de entrar na região de convergência da solução periódica (ver figura 3.2).

Assim, na figura a seguir, podemos observar que a solução de equilíbrio estará na região delimitada pelos pontos de intersecção entre as retas r_1 , r_2 , r_3 e r_4 - PQRS - independentemente da condição inicial.

Exemplos:

- 1) $x(0) = 1.5$ $y(0) = 0.9$;
- 2) $x(0) = 0.3$ $y(0) = 0.3$;
- 3) $x(0) = 0.3$ $y(0) = 0.5$;
- 4) $x(0) = 0.5$ $y(0) = 1.2$;
- 5) $x(0) = 1.5$ $y(0) = 0.4$.

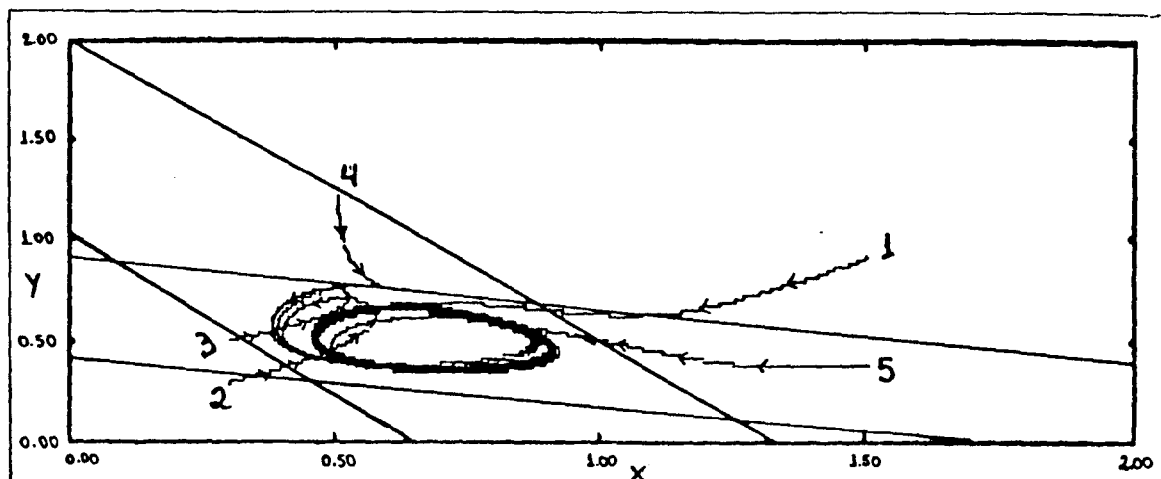


Figura 3.2 - Plano de Fase para as soluções dadas as condições iniciais 1, 2, 3, 4 e 5.

Nas simulações que se seguem podemos observar o comportamento de x e y em função do tempo, dadas as condições iniciais 1), 2), 3), 4) e 5).

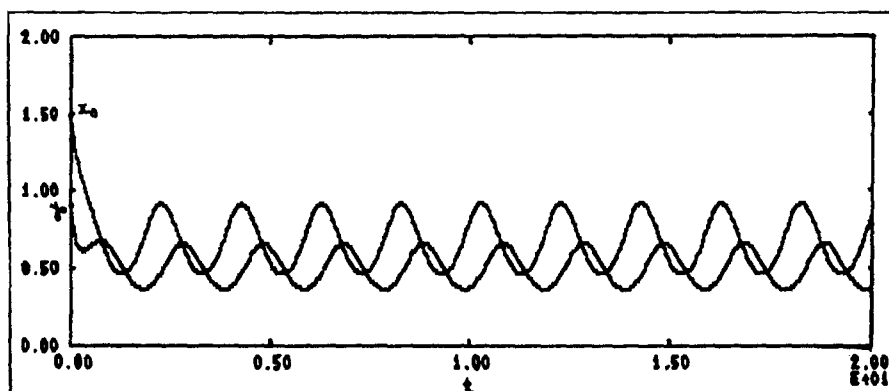


Figura 3.3 - Solução do sistema (3.3.11) dada a condição inicial $x(0) = 1.5$ e $y(0) = 0.9$

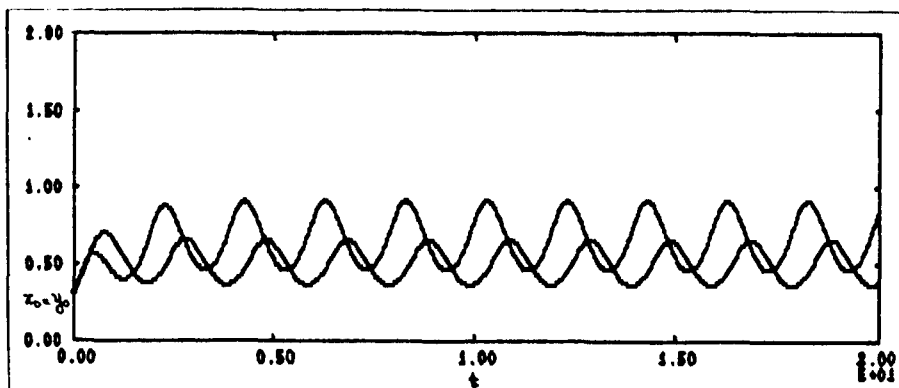


Figura 3.4 - Solução do sistema (3.3.11) dada a condição inicial $x(0) = 0.3$ e $y(0) = 0.3$

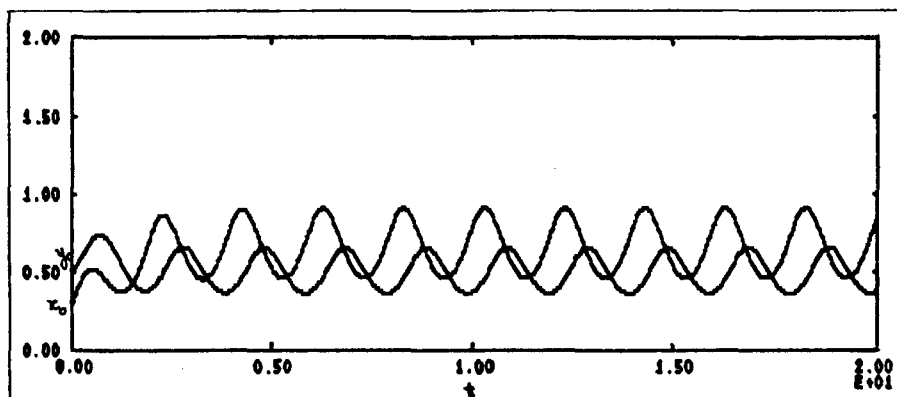


Figura 3.5 - Solução do sistema (3.3.11) dada a condição inicial $x(0) = 0.3$ e $y(0) = 0.5$

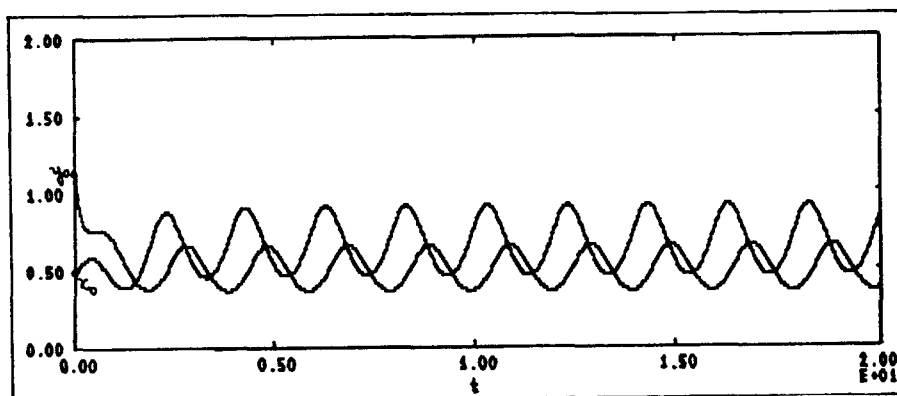


Figura 3.6 - Solução do sistema (3.3.11) dada a condição inicial $x(0) = 0.5$ e $y(0) = 1.2$

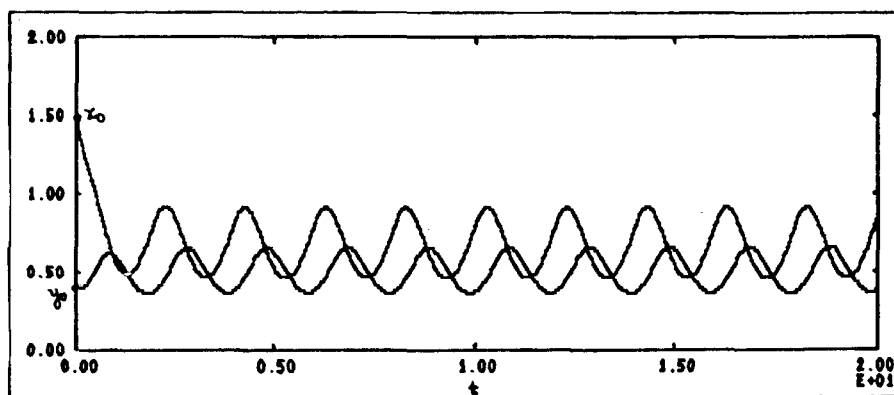


Figura 3.7 - Solução do sistema (3.3.11) dada a condição inicial
 $x(0) = 1.5$ e $y(0) = 0.4$

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO PERIÓDICA

Dado o sistema de equações diferenciais

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (3.3.12)$$

onde $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ e $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$,

suponhamos que f está definida para $-\infty < t, \xi_1, \dots, \xi_m < \infty$ e que é contínua em relação a todas as variáveis. Além disso, cada condição inicial na forma $x(t_0) = x_0$ determina uma única solução $x(t; t_0, x_0)$, $t \in (-\infty, \infty)$.

Um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^m$ se movendo ao longo das trajetórias do sistema durante o intervalo de tempo de t_0 até t chega a um novo ponto

x_1 . O operador $U(t, t_0)$ definido pela passagem de x_0 a x_1 é chamado de operador de translação ao longo das trajetórias do sistema ou simplesmente operador de translação do sistema, definido por

$$U(t, t_0)x_0 = x(t; t_0, x_0)$$

Se $f(t, x)$ é ω -periódica em t , a existência de soluções periódicas para (3.3.12) está ligada às características do operador translação deste sistema.

Definindo

$$Ux = U(\omega, 0)x \quad (3.3.13)$$

temos que uma condição necessária e suficiente para que uma solução de (3.3.12) seja ω -periódica é que $x(0) = x_0$ seja um ponto fixo de (3.3.13), ou seja, que $Ux_0 = x_0$.

Consideraremos agora o sistema (3.3.4) com a norma em $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$||(x, y)|| = \max(|x|, |y|), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Sabemos que se as desigualdades (3.3.6)

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} > \frac{b_1^M}{b_{2m}} \quad e \quad \frac{b_{1m}}{b_2^M} > \frac{a_{12}}{a_{22}}$$

são satisfeitas, existe uma única solução para cada valor inicial $X_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Denotamos esta solução por

$$X(t, X_0) = \{ x(t, x_0, y_0), y(t, x_0, y_0) \} \quad \text{onde } X(t_0, X_0) = X_0$$

Sendo $A(t, t_0)$ o operador translação do sistema (3.3.4), definimos um operador, conhecido como *aplicação periódica de Poincaré*, por:

$$\begin{aligned} A : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ AX_0 &= A(\omega, 0)X_0 = X(\omega, X_0) \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

onde ω é o período das funções b_1 e b_2 em (3.3.4).

Mostraremos que o operador A tem um ponto fixo $X_0^* = (x_0^*, y_0^*)$, ou seja, existe uma solução de $X^*(t)$ de (3.3.4) definida para $t \in [0, \omega]$ tal que

$$X^*(\omega) = X^*(0) = X_0^*$$

ou ainda

$$x^*(\omega, x_0^*, y_0^*) = x_0^* \quad , \quad y^*(\omega, x_0^*, y_0^*) = y_0^*$$

Como o lado direito de (3.3.4) é periódico em t , $X^*(t)$ poderá ser estendida para $t > \omega$ por periodicidade, no sentido que

$$X^*(n\omega + t) = X^*(t) \quad \text{para } n = 0, 1, 3, \dots$$

e como extensão, será solução de (3.3.4).

Portanto, como já mencionamos, a existência de soluções periódicas para o sistema (3.3.4) depende da existência de pontos fixos do operador A definido anteriormente. Geralmente, o domínio de definição desse operador é restrito ao subconjunto:

$$K_0 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0 \}$$

pois somente as soluções positivas são de nosso interesse.

Diante da análise feita anteriormente consideraremos nos teoremas e definições que se seguem, ao invés de K_0 , o seguinte subconjunto de K_0

$$K = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) = \lambda (u, v), (u, v) \in \text{retângulo } ABCD, \lambda \geq 0 \}$$

De nossos resultados anteriores observamos que o operador A é positivo em relação a este conjunto K , ou seja, $AK \subset K$.

Teorema 3.3.1: (Ponto Fixo)

Suponha que T seja um operador contínuo que leva um conjunto limitado convexo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nele próprio. Então, Ω contém pelo menos um ponto fixo de T , ou seja, existe pelo menos um $u \in \Omega$ tal que $Tu = u$.

Dem: ver Hale [16].

Teorema 3.3.2: (EXISTÊNCIA)

Suponha que as condições (3.3.6)

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} > \frac{b_1^M}{b_{2m}} \quad e \quad \frac{b_{1m}}{b_2^M} > \frac{a_{12}}{a_{22}}$$

sejam válidas para o sistema (3.3.4). Então, existe pelo menos uma solução periódica positiva para (3.3.4).

Dem:

Seja $\Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; (x,y) \in \text{retângulo ABCD} \}$. Ω é um conjunto convexo e limitado em $\mathbb{R}^2$ e o operador A definido em (3.3.14) leva Ω nele próprio desde que Ω seja invariante em relação a (3.3.4), ou seja,

$$(x_0, y_0) \in \Omega \longrightarrow \{(x(t, x_0, y_0), y(t, x_0, y_0)) \in \Omega \quad t \geq 0$$

$$\text{Assim, } \left(x(\omega, x_0, y_0), y(\omega, x_0, y_0) \right) \in \Omega \quad \Rightarrow \quad A\Omega \subset \Omega$$

Da continuidade da solução de (3.3.4) para todo t, dada uma condição inicial, segue a continuidade do operador A e, usando o teorema 1, garantimos a existência de pelo menos um ponto fixo em Ω .

Como este ponto fixo tem coordenadas positivas, a solução periódica correspondente é estritamente positiva por invariância de Ω .

UNICIDADE E ESTABILIDADE DA SOLUÇÃO PERIÓDICA

Antes de tratarmos deste tema, apresentaremos algumas definições básicas e consideraremos K o seguinte conjunto:

$K = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) = \lambda(u,v), (u,v) \in \text{retângulo ABCD}, \lambda \geq 0 \}$, embora os resultados que se seguem valham para um cone [17] em geral.

Definição 1:

Um operador $T : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é dito monotônico se $X_1 = (x_1, y_1) \in D$, $X_2 = (x_2, y_2) \in D$ e $X_1 < X_2$ no sentido que $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2 \Rightarrow TX_1 < TX_2$.

Definição 2:

Um operador $T: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é dito positivo em relação a $K \subset \mathbb{R}^2$ se $TK \subseteq K$; é dito estritamente positivo se $TK \subset K$.

Definição 3:

Um operador T definido em $K \subset \mathbb{R}^2$ é dito fortemente côncavo se para cada elemento $X \in K$ e qualquer número $\tau \in (0,1)$ existe um número positivo η tal que

$$T(\tau X) \geq (1 + \eta)\tau TX$$

Verificaremos agora que o operador A definido em (3.3.14) é monotônico, estritamente positivo e fortemente côncavo com respeito ao cone K .

Como o cone K é mais restrito que K_0 , positividade de A e positividade estrita de A são equivalentes em K . Se $X_0 \in K$, $X_0 \neq (0,0)$, as componentes de X_0 são positivas e portanto $X(\omega, X_0) = AX_0$ pertence ao interior de K .

Se reescrevermos o sistema (3.3.4) na forma

$$\frac{dx}{dt} = f_1(t, x, y) \quad \frac{dy}{dt} = f_2(t, x, y) \quad (3.3.15)$$

uma condição suficiente para monotonicidade e concavidade estrita de A é que as funções F_1 e F_2 definidas por

$$\begin{aligned}
F_1(t, \eta_1, \eta_2) &= f_1(t, \eta_1, \eta_2) - \left[\eta_1 \frac{\partial f_1(t, \eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_1} + \eta_2 \frac{\partial f_1(t, \eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_2} \right] \\
F_2(t, \eta_1, \eta_2) &= f_2(t, \eta_1, \eta_2) - \left[\eta_1 \frac{\partial f_2(t, \eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_1} + \eta_2 \frac{\partial f_2(t, \eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_2} \right]
\end{aligned}
\tag{3.3.16}$$

sejam estritamente positivas, ou seja

$$\begin{aligned}
F_1(t, \eta_1, \eta_2) &> 0 \\
F_2(t, \eta_1, \eta_2) &> 0
\end{aligned}
\quad \text{para } \eta_1 > 0 \text{ e } \eta_2 > 0 \quad \text{com } t \geq 0
\tag{3.3.17}$$

Tais condições são encontradas em Krasnoselski [17].

OBS: Para o sistema (3.3.4) temos

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(t)[b_1(t) - a_{11}x(t) - a_{12}y(t)] = f_1(t, x, y) \\ \frac{dy}{dt} = y(t)[b_2(t) - a_{21}x(t) - a_{22}y(t)] = f_2(t, x, y) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
F_1(t, \eta_1, \eta_2) &= f_1(t, \eta_1, \eta_2) - \eta_1[b_1(t) - 2a_{11}\eta_1 - a_{12}\eta_2] - \eta_2[-a_{12}\eta_1] \\
F_2(t, \eta_1, \eta_2) &= f_2(t, \eta_1, \eta_2) - \eta_1[-a_{21}\eta_2] - \eta_2[b_2(t) - a_{21}\eta_1 - 2a_{22}\eta_2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_1(t, \eta_1, \eta_2) &= a_{11}\eta_1^2 + a_{12}\eta_1\eta_2 > 0 \\
F_2(t, \eta_1, \eta_2) &= a_{22}\eta_2^2 + a_{21}\eta_1\eta_2 > 0
\end{aligned}
\quad \text{para } 0 < \eta_1, \eta_2 < \infty, \quad t \geq 0.$$

Portanto, o operador A é monotônico, estritamente positivo e fortemente côncavo.

Teorema 3.3.3: (UNICIDADE)

Um operador T monotônico, estritamente positivo e fortemente côncavo definido num cone K não pode ter mais que um ponto fixo em K .

OBS: Este resultado é equivalente à existência de uma única solução periódica para $Au = u$ e, conforme resultado anterior (Teorema 3.3.2), o sistema (3.3.4) admite uma única solução periódica.

Dem:

Suponha que

$$Ux_0 = x_0 \quad \text{e} \quad Uy_0 = y_0$$

onde x_0 e y_0 são elementos não-nulos do cone. A positividade forte do operador U implica que x_0 e y_0 pertencem ao interior do cone. Se $x_0 \neq y_0$ então $x_0 > y_0$ ou $x_0 < y_0$. Suponhamos $x_0 > y_0$. Para pequenos valores positivos de τ temos $x_0 \geq \tau y_0$ desde que x_0 pertença ao interior do cone.

Seja $\tau_0 > 0$ o maior número positivo tal que $x_0 > \tau_0 y_0$. Como $x_0 > y_0$ segue que $\tau_0 < 1$.

Suponha $\eta > 0$ e

$$U(\tau_0 y_0) \geq (1 + \eta_0) \tau_0 y_0.$$

Então

$$x_0 = Ux_0 \geq U(\tau_0 y_0) \geq (1 + \eta_0) \tau_0 y_0 \Rightarrow x_0 \geq (1 + \eta_0) \tau_0 y_0$$

Como $(1 + \eta_0) \tau_0 > \tau_0$ temos uma contradição com relação à maximalidade de τ_0 . Portanto, temos que $x_0 = y_0$ (o caso $x_0 < y_0$ é análogo).

Teorema 3.3.4: (ESTABILIDADE)

Se o operador translação $A(\omega)$ do sistema (3.3.4) definido em (3.3.14) é fortemente positivo, monotônico e fortemente côncavo num cone K , então a solução ω -periódica não-nula $x^(t)$ para o sistema (3.3.4) com domínio em K é uniformemente assintoticamente estável.*

Dem: Krasnoselski [17].

Estabelecemos portanto, condições suficientes para existência de uma única solução periódica para o modelo de competição entre duas espécies (3.3.4) com coeficientes periódicos, assim como um estudo da estabilidade dessa solução periódica.

Os resultados obtidos podem ser estendidos para um sistema Lotka-Volterra generalizado

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i \left\{ b_i(t) - \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) x_j(t) \right\}; \quad t > 0, \quad n \geq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

onde a_{ij} , b_i ($i, j = 1, 2, \dots, n$) são funções contínuas periódicas e positivas com período comum (Gopalsamy [13]).

A demonstração da existência de solução periódica para o sistema acima é análoga ao caso $n=2$ e a estabilidade assintótica dessa solução é demonstrada supondo que os coeficientes do sistema em questão satisfaçam:

$$b_{im} > 0 \quad \text{e} \quad a_{il,m} > 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\min_{t \in [0, \omega]} a_{jj}(t) > \left\{ \sum_{i=1}^n \max a_{ij} \right\} + \alpha \quad j = 1, 2, \dots, n$$

para algum número positivo α .

4 - APLICAÇÃO: O PROBLEMA DA RESISTÊNCIA

Um modelo matemático determinístico, sujeito a impulsos a tempo fixo, é apresentado em [30] para a verificação do efeito de subdosagens na dinâmica de fungos resistentes. Estudos deste tipo são de grande importância na determinação de estratégias para o controle da resistência, com o objetivo de minimizar perdas tanto para agricultores quanto para a indústria química em geral.

Um modelo matemático geral proposto para o estudo da resistência de fungos em [29], sem a utilização de fungicidas, é dado por:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = S [r_s - k_s S - \gamma_s R] - \alpha S [r_s - k_s S - \gamma_s R] \\ \frac{dR}{dt} = R [r_R - k_R R - \gamma_R S] + \alpha S [r_s - k_s S - \gamma_s R] \\ R(0) = R_0 \quad S(0) = S_0 \end{array} \right. \quad (3.4.1)$$

onde:

S = tamanho da população de fungos sensíveis no instante t ;

R = tamanho da população de fungos resistentes no instante t ;

α = taxa de mutação da população sensível para resistente;

r_s = taxa de crescimento da população de sensíveis;

r_R = taxa de crescimento da população de resistentes;

γ_s e γ_R = taxa de competição entre as populações sensíveis e resistentes;

k_s = fator de inibição para a população sensível;

k_R = fator de inibição para a população resistente;

N = população total, $N = S + R$.

Um caso particular do modelo (3.4.1) não considera a competição entre as populações no início do crescimento do fungo, ou seja,

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = r_s S - \alpha r_s S \\ \frac{dR}{dt} = r_R R + \alpha r_s S \end{cases} \quad (3.4.2)$$

Utilizando $N = S + R$ e $r_R = r_s = r$, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = rN \\ \frac{dR}{dt} = (1-\alpha)rR + \alpha rN \end{cases}$$

donde

$$R = N \left[1 - \frac{1}{N^\alpha} \right] = N - N^{1-\alpha}, \text{ ou seja, } S = N^{1-\alpha},$$

tomando $N(0) = 1$ e $R(0) = 0$.

No início do crescimento ($N = 1$), podemos tomar

$$1 - \frac{1}{N^\alpha} \cong \alpha \ln N$$

pois os termos coincidem para $N = 1$ e também em sua derivada para $N = 1$. Obtemos assim, a relação

$$R \cong \alpha N \ln N$$

que determina aproximadamente o tamanho da população resistente no início do crescimento da população de fungos, sabendo-se o tamanho da população total (N) e a taxa de mutação da população sensível para a resistente (α). Esse resultado propicia a adoção de medidas corretas num programa de controle.

Um caso importante, particular do sistema (3.4.1), a ser estudado é quando consideramos

$$r_S = r_R = r \quad \text{e} \quad \gamma_S = \gamma_R = k_S = k_R . \quad (3.4.4)$$

Obtemos assim o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = N [r - kN] \\ \frac{dS}{dt} = (1-\alpha)S [r - kN] \end{cases} \quad (3.4.5)$$

Até agora, os parâmetros presentes no modelo (3.4.5) têm sido considerados constantes, o que é bastante razoável em termos de laboratório, pois existe um controle da temperatura ambiente. Porém, na prática, o crescimento de fungos varia com a temperatura, sendo que para cada tipo de fungo existe um intervalo onde esse crescimento é máximo [31].

Diante disso, temos por objetivo observar o comportamento do sistema (3.4.5) assim como da população de resistentes ($R = N - S$), considerando a taxa de crescimento intrínseco das populações sensíveis e resistente - r - uma função periódica do tempo. A análise do comportamento dessas populações terá influência na escolha de um programa adequado de aplicação de fungicidas.

No lugar de (3.4.5), teremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = N [r(t) - kN] \\ \frac{dS}{dt} = (1-\alpha)S [r(t) - kN] \end{cases} \quad (3.4.6)$$

onde α , k são constantes positivas e $r(t)$ é ω -periódica, ou seja, $r(t) = r(t+\omega) \forall t$.

Tanto para o sistema (3.4.5) quanto para (3.4.6), obtemos a mesma relação

$$R \cong \alpha N \ln N ,$$

considerando as hipóteses (3.4.4) e as restrições necessárias. Esta relação será utilizada no cálculo de R inicial na realização das simulações.

Parâmetros e Simulações:

Para observar o comportamento qualitativo do sistema (3.4.6), e na ausência de dados experimentais, iremos considerar uma função da temperatura do tipo

$$r(\text{temp}) = a \exp [-b (\text{temp} - 17)^2]$$

onde aos 17°C a taxa de crescimento é máxima, ou seja, a e b serão obtidos considerando que:

(i) $\text{temp} = 17 \Rightarrow r = 0.04$ (taxa equivalente à duplicação da população em 18 dias no modelo (3.4.2));

(ii) $\text{temp} = 25 \Rightarrow r = 0.002$, ou seja, para temperaturas superiores a 25°C, r é muito pequeno. Obtemos assim:

$$\Rightarrow \quad r(\text{temp}) = 0.04 \exp[-0.04681(\text{temp} - 17)^2] \quad (3.4.7)$$

Iremos supor também que a temperatura oscila de 8°C durante o dia e periodicamente durante o ano, de modo que a temperatura máxima atingida durante o ano seja de 39°C, a mínima de 3°C e a temperatura média anual de 20°C, ou seja,

$$\text{temp}(t) = 20 + 15 \cos(\pi t/180) + 4 \cos(2\pi t)$$

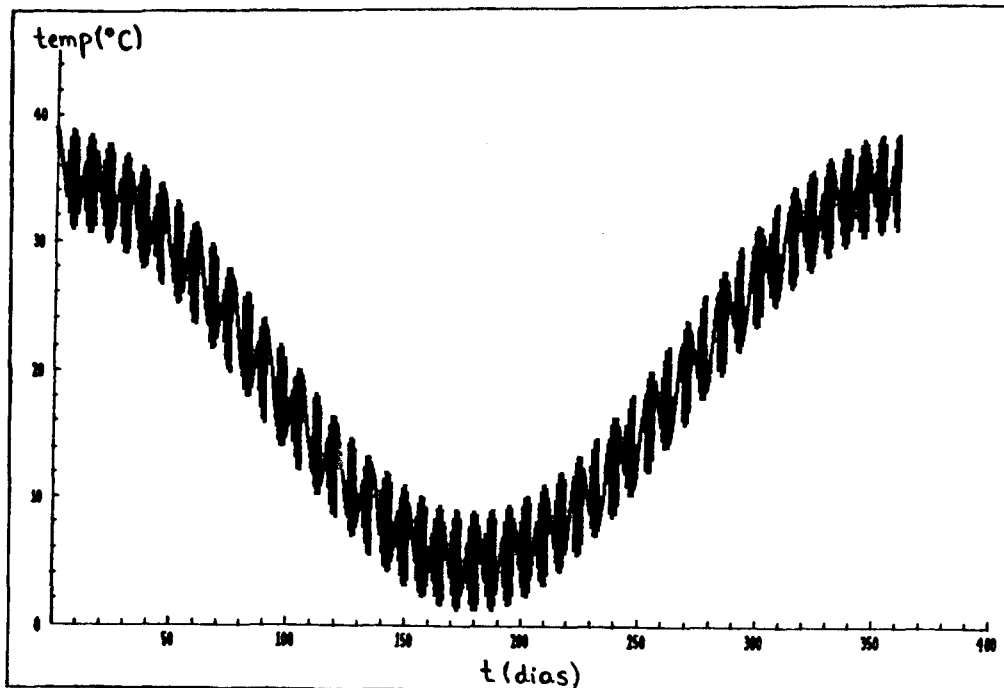


Figura 3.8 - Variação da temperatura durante o ano

$$temp(t) = 20 + 15 \cos(\pi t/180) + 4 \cos(2\pi t)$$

Fazendo uma composição das funções (3.4.7) e (3.4.8) obtemos r em função de t :

$$r(t) = 0.04 \exp [-0.04681(3 + 15 \cos(\pi t/180) + 4 \cos(2\pi t))^2]$$

Os demais parâmetros são dados por:

$$k = 10^{-13} ;$$

$$\alpha = 10^{-5} \text{ (na literatura } 10^{-4} < \alpha < 10^{-9} \text{)} ;$$

$$N(0) = 10^{10} ;$$

$$S(0) = 9.9977 \cdot 10^9 ;$$

$$R(0) = 2.3 \cdot 10^6 \text{ (} R(0) \cong \alpha N(0) \ln N(0) \text{)} .$$

Nas simulações que se seguem podemos observar o comportamento de N , R e também S ao considerarmos r uma função periódica do tempo.

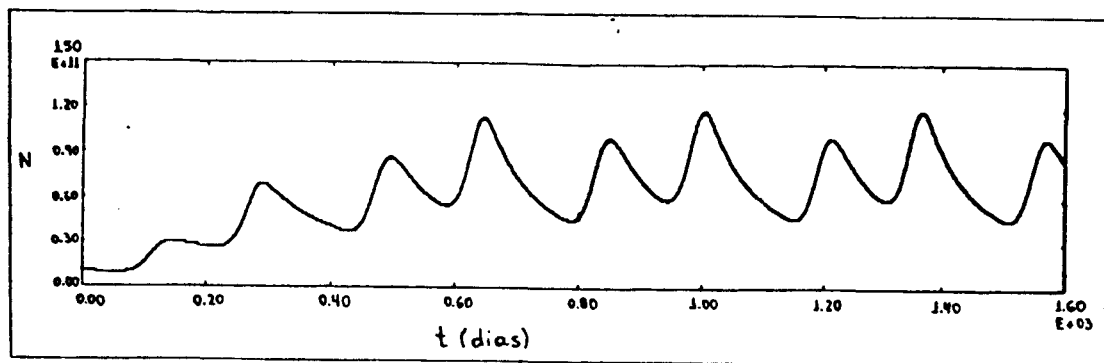


Figura 3.9.a - População total de fungos com taxa de crescimento periódica

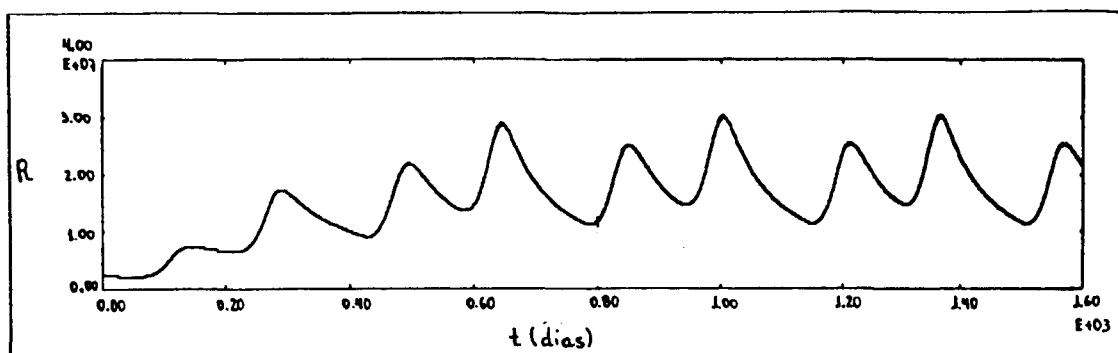


Figura 3.9.b - População de fungos resistentes (r periódica)

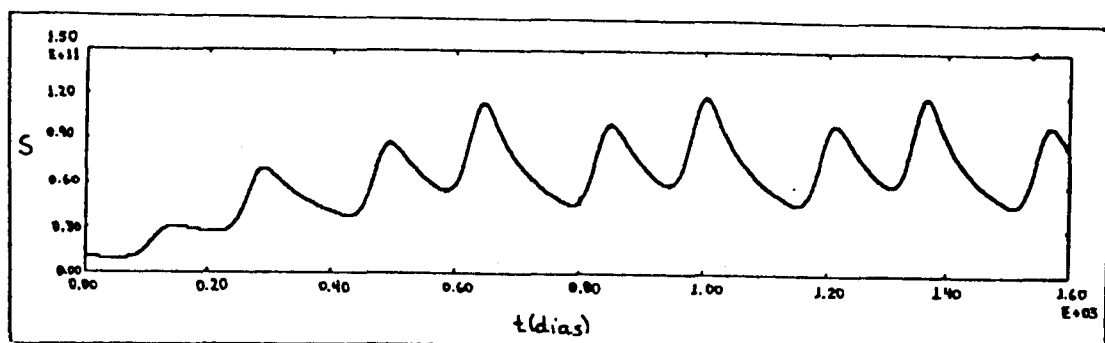


Figura 3.9.c - População de fungos sensíveis (r periódica)

Notamos que o crescimento de sensíveis, resistentes e consequentemente da população total é maior nos meses em que a temperatura atingida pertence ao intervalo onde a taxa de crescimento atinge seu máximo, decrescendo nos meses onde a temperatura está abaixo ou acima desse intervalo máximo de crescimento. Inicialmente ocorrem oscilações que, com o passar do tempo, tendem a uma **solução periódica**; a rapidez dessa convergência para a solução periódica depende também da condição inicial considerada.

Tomando agora $r = 0.026248$ (cf. (3.4.7)) - valor atingido quando temos a temperatura média igual a 20° - e os mesmos parâmetros citados anteriormente, observamos que o crescimento de R é aproximadamente 2.3 vezes maior quando comparado com r periódica.

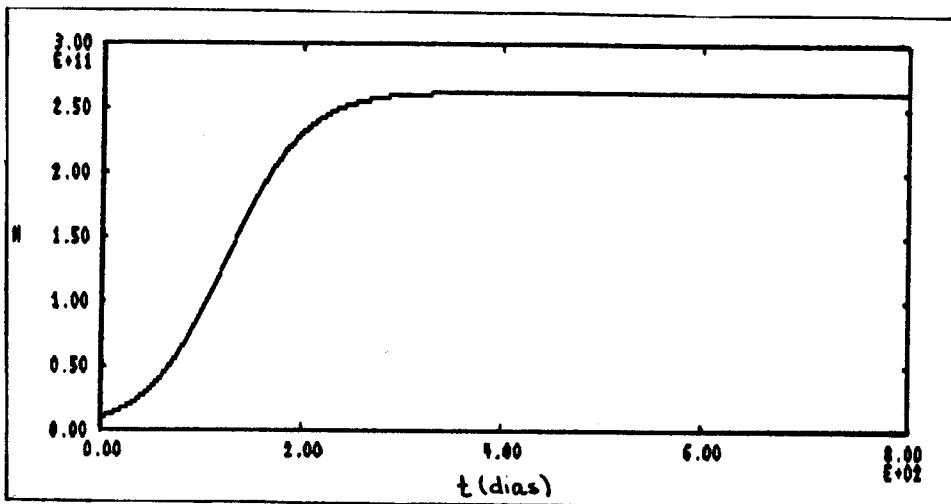


Figura 3.10.a - População total de fungos com taxa de crescimento constante

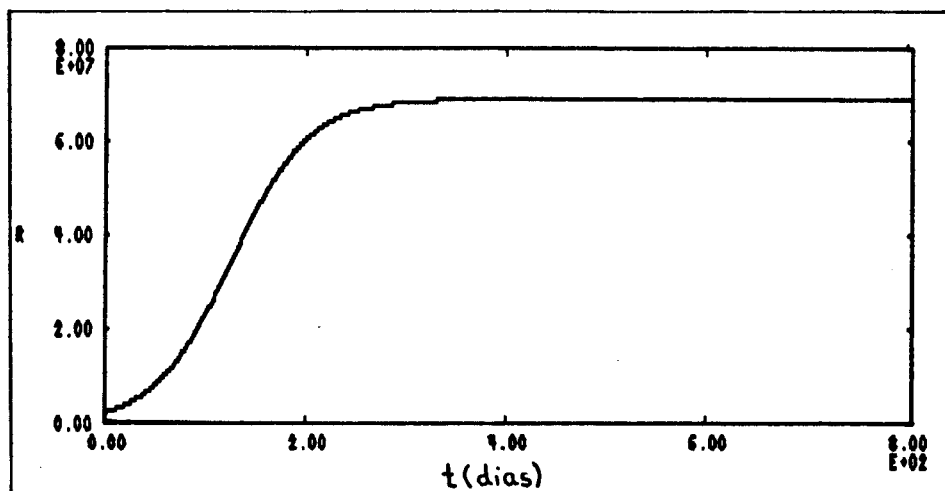


Figura 3.10.b - População de fungos resistentes (r constante)

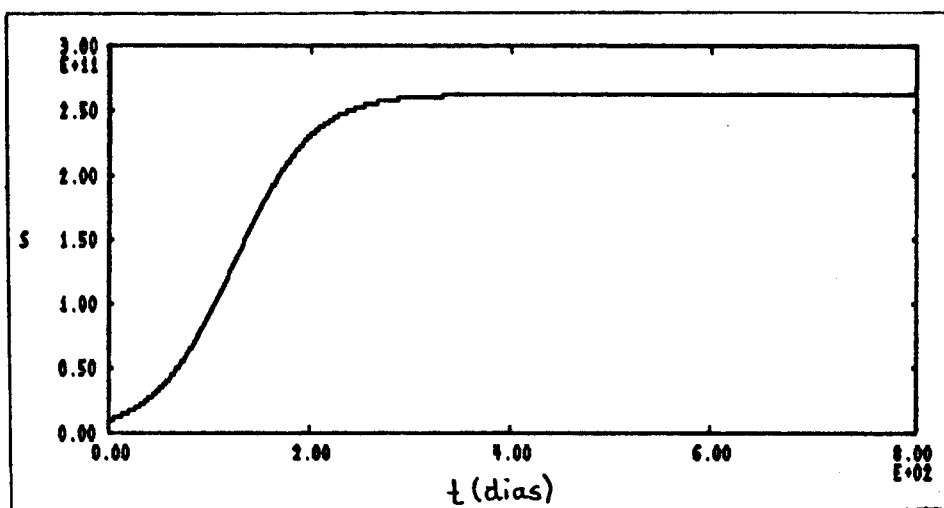


Figura 3.10.c - População de fungos sensíveis (r constante)

Outros ajustes podem ser utilizados para $r = f(\text{temp})$ - a melhor escolha depende de dados experimentais. Entretanto, se r for periódica a mesma análise qualitativa pode ser empregada.

Existência, Unicidade e Estabilidade de Soluções Periódicas

Os resultados sobre existência, unicidade e estabilidade de soluções periódicas para o sistema (3.4.6) decorrem dos teoremas utilizados no estudo do sistema de competição entre duas espécies com parâmetros periódicos.

Denotando por $A(t, t_0)$ o operador translação do sistema (3.4.6), a existência de solução periódica positiva para (3.4.6) depende da existência de pontos fixos do operador

$$\begin{aligned} A : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ AX_0 &= A(\omega, 0)X_0 = X(\omega, X_0) \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

Consideraremos o domínio de definição do operador A o conjunto limitado $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, r^M/k > x \geq 0 \text{ e } r^M/k > y \geq 0\}$, onde r^M é o valor máximo atingido por $r(t)$.

Observamos que o sistema (3.4.6) é invariante sobre Ω , ou seja, se $(N_0, S_0) \in \Omega \Rightarrow (N(t; t_0, N_0), S(t; t_0, S_0)) \subset \Omega$. Portanto, basta utilizarmos o Teorema do Ponto Fixo para demonstrarmos a existência de solução periódica positiva para o sistema em questão.

A unicidade e a estabilidade da solução periódica requerem que o operador translação associado a (3.4.6) seja monotônico, estritamente positivo e fortemente côncavo em Ω . Colocando o sistema (3.4.6) na forma

$$\frac{dN}{dt} = f_1(t, N, S) \quad \text{e} \quad \frac{dS}{dt} = f_2(t, N, S),$$

temos que uma condição suficiente para que o operador translação tenha as características citadas acima é que as funções

$$F_1(t, \eta_1, \eta_2) = f_1(t, \eta_1, \eta_2) - \left[\eta_1 \frac{\partial f_1(t, \eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_1} + \eta_2 \frac{\partial f_1(t, \eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_2} \right]$$

$$F_2(t, \eta_1, \eta_2) = f_2(t, \eta_1, \eta_2) - \left[\eta_1 \frac{\partial f_2(t, \eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_1} + \eta_2 \frac{\partial f_2(t, \eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_2} \right]$$

sejam estritamente positivas para $0 < \eta_1, \eta_2$ e $t \geq 0$.

Para o sistema (3.4.6) temos

$$F_1(t, \eta_1, \eta_2) = k\eta_1^2 > 0;$$

$$F_2(t, \eta_1, \eta_2) = (1 - \alpha)\eta_1\eta_2k > 0 \text{ pois } \alpha < 1.$$

Portanto, o operador A definido em (3.4.9), é monotônico, estritamente positivo e fortemente côncavo em Ω e, utilizando o Teorema 3.3.4 (Ítem 3 desse capítulo), temos que a única solução periódica existente para (3.4.6) é uniformemente assintoticamente estável.

CAPÍTULO 4

O MODELO PRESA - PREDADOR

1 - INTRODUÇÃO:

No capítulo anterior tratamos de um tipo de interação entre populações - a competição entre espécies - que ocorre de maneira negativa para ambas as populações. Nos preocuparemos aqui com um outro tipo de interação entre populações - a predação. Diremos que uma população é predadora quando utiliza a outra população, a presa, como fonte de alimentação. Dessa forma este tipo de relação é vista tradicionalmente como benéfica para o predador e prejudicial para a presa.

O modelo clássico e certamente o mais simples de ser tratado analiticamente, proposto por Lotka-Volterra (1926) para a interação presa-predador, é dado por

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y) & ; \alpha, \beta > 0 \\ \frac{dy}{dt} = y(-\gamma + \delta x) & ; \gamma, \delta > 0 \end{cases} \quad (4.1.1)$$

onde x e y são as populações de presa e predador, respectivamente, consideradas em alguma unidade adequada (número de indivíduos, biomassa, densidade etc) e os coeficientes são constantes.

O modelo (4.1.1) assume que na ausência de predadores as presas crescem exponencialmente e que a taxa de crescimento dessa população diminui proporcionalmente à densidade de predadores. Estes últimos tendem à extinção na ausência das presas mas crescem proporcionalmente à densidade das mesmas.

Analogamente ao modelo de competição entre espécies, o modelo (4.1.1), assim como sua generalização (considerando também competição intraespecífica), já foram bastante estudados, embora muito criticados

em Ecologia devido à grande dificuldade no cálculo dos coeficientes de interação envolvidos e à simplificação exagerada da interação.

Dessa maneira, na tentativa de construir modelos mais adequados para a modelagem de certas comunidades, inúmeros estudos têm sido realizados considerando-se os coeficientes de interação da dinâmica presa-predador como funções do tempo, incorporando às vezes efeitos hereditários ou mesmo efeitos abióticos (temperatura, clima, tempestade etc).

Trataremos a seguir do modelo clássico de Lotka-Volterra com competição intraespecífica onde os parâmetros envolvidos são funções periódicas do tempo. Os resultados relativos a existência, unicidade e estabilidade de soluções periódicas positivas para este modelo são fundamentais para o estudo de sistemas envolvendo dois predadores e uma presa, como por exemplo o apresentado por Cushing [10] :

$$\left[\begin{array}{l} S' = rS \left(1 - \frac{S}{k} \right) - \frac{m_1}{y_1} \frac{x_1 S}{a_1 + S} - \frac{m_2}{y_2} \frac{x_2 S}{a_2 + S} \\ x_1' = \frac{m_1 x_1 S}{a_1 + S} - d_1 x_1 \\ x_2' = \frac{m_2 x_2 S}{a_2 + S} - d_2 x_2 \end{array} \right.$$

onde S é a população de presas e x_1 e x_2 são os predadores.

Em nosso trabalho trataremos apenas do modelo presa-predador simples com parâmetros periódicos.

2 - O MODELO PRESA-PREDADOR

O modelo presa-predador com competição intraespecífica onde os parâmetros envolvidos são funções periódicas do tempo é dado por:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x [b_1(t) - c_{11}(t)x - c_{12}(t)y] \\ \frac{dy}{dt} = y [-b_2(t) + c_{21}(t)x - c_{22}(t)y] \end{cases} \quad (4.2.1)$$

onde c_{ij} e b_i são funções positivas periódicas de mesmo período ω ($c_{ij}, b_i \in B$) e $c_{11} > 0$.

Quando $y = 0$ em (4.2.1) obtemos a equação logística

$$\frac{dx}{dt} = x [b_1 - c_{11}x] \quad (4.2.2)$$

estudada no capítulo 1 e cuja existência de solução periódica é garantida pelo teorema (2.2.1). Denotemos por x^* a solução periódica da equação logística (4.2.2), e se $a \in B$, definimos

$$med[a] = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega a(t)dt$$

Teorema 4.2.1: (Existência)

Suponha que $b_1, c_{1j} \in B$, tais que $med[b_1] > 0$, $c_{1j}(t) \geq 0$ para todo t e ainda que $c_{11}(t), c_{12}(t) > 0$ e $c_{21}(t) \neq 0$ para todo t . Então, existe uma constante b_0 , $0 \leq b_0 \leq med[c_{21}x^*]$, tal que para cada $b_2 \in B$ satisfazendo $b_0 \leq med[b_2] < med[c_{21}x^*]$ existe uma solução $(x, y) \in B \times B$ de (4.2.1) satisfazendo $0 < x^* < x$ e $y > 0$ para todo t .

Dem: a demonstração deste resultado utiliza conceitos pertencentes à teoria da bifurcação e pode ser encontrada em Cushing [9].

Para o estudo da estabilidade, suponhamos que $(\bar{x}, \bar{y}) \in B \times B$ seja a solução periódica descrita no Teorema 4.2.1. Através da mudança de variáveis:

$$x(t) = \bar{x}(t) + x_1(t) \quad ; \quad y(t) = \bar{y}(t) + y_1(t) \quad (4.2.3)$$

e da substituição das mesmas em (4.2.1), obtemos como sistema linearizado em torno da solução $(\bar{x}, \bar{y})$ o seguinte:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = [b_1 - 2c_{11}\bar{x} - c_{12}\bar{y}] x_1 + [-c_{12}\bar{x}] y_1 \\ \frac{dy_1}{dt} = [c_{21}\bar{y}] x_1 + [-b_2 + c_{21}\bar{x} - 2c_{22}\bar{y}] y_1 \end{cases} \quad (4.2.4)$$

Se fizermos $x_2 = x_1 / \bar{x}$ e $y_2 = y_1 / \bar{y}$, temos no lugar de (4.2.4) o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx_2}{dt} = [-c_{11}\bar{x}] x_2 + [-c_{12}\bar{y}] y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = [c_{21}\bar{x}] x_2 + [-c_{22}\bar{y}] y_2 \end{cases} \quad (4.2.5)$$

Se o sistema (4.2.5) é uniformemente assintoticamente estável então o mesmo é verdade (localmente) para $(\bar{x}, \bar{y})$ em (4.2.1).

Determinar a estabilidade de um sistema não-autônomo como (4.2.5) não é tarefa fácil, mesmo quando os coeficientes envolvidos são funções periódicas. Uma técnica conhecida apresentada por Coppel [7] nos fornece alguns critérios de estabilidade para (4.2.5) utilizando uma certa medida $\mu(A(t))$ dos coeficientes da matriz $A(t) = (a_{ij}(t))$ do sistema:

$$\mu(A(t)) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|I - hA| - 1}{h}$$

Essa "medida" depende da norma que é utilizada e satisfaz algumas propriedades:

- a) $\mu(\alpha A) = \alpha \mu(A)$ se $\alpha \geq 0$;
- b) $|\mu(A)| \leq |A|$;
- c) $\mu(A + B) \leq \mu(A) + \mu(B)$;
- d) cada autovalor de A tem parte real menor ou igual a $\mu(A)$.

Se a norma vetorial utilizada é $|(v_1, v_2)| = |v_1| + |v_2|$, então

$$\mu(A(t)) = \max \{ a_{11} + |a_{21}|, a_{22} + |a_{12}| \} = \\ \max \{ (c_{21} - c_{11})\bar{x}, (c_{12} - c_{22})\bar{y} \}$$

e se $Y(t)$ é uma matriz fundamental para (4.2.5) temos:

$$|Y(t)Y^{-1}(s)| \leq \exp \left(\int_s^t \mu(A(u)) du \right) \quad (4.2.6)$$

(cf. Teor. 3, pag. 58, Coppel [7]).

Portanto, (4.2.5) será uniformemente assintoticamente estável se a expressão (4.2.6) decai exponencialmente a zero, ou seja,

$$\boxed{c_{21} - c_{11} < 0 \quad \text{e} \quad c_{12} - c_{22} < 0, \quad \forall t} \quad (4.2.7)$$

Se utilizarmos a norma vetorial $|(v_1, v_2)| = \max |v_i|$

$$\mu(A(t)) = \max \{ a_{11} + |a_{12}|, a_{22} + |a_{21}| \}$$

obtemos o seguinte critério para estabilidade assintótica:

$$\boxed{c_{12}\bar{x} - c_{11}\bar{y} < 0 \quad \text{e} \quad c_{21}\bar{x} - c_{22}\bar{y} < 0 \quad \forall t} \quad (4.2.8)$$

Desta forma, se a existência de solução periódica estiver garantida, ou seja, se as hipóteses do teorema 4.2.1 são satisfeitas, temos que esta solução será uniformemente assintoticamente estável se (4.2.7) ou (4.2.8) forem satisfeitas. No entanto, veremos no exemplo a seguir que embora este seja um critério para determinar a estabilidade de um sistema não autônomo, nem sempre é possível de ser verificado. Consequentemente, nem sempre a estabilidade pode ser demonstrada usando tal critério.

3 - APLICAÇÃO : MODELO DA DENGUE HEMORRÁGICA [18]

Um modelo do tipo presa-predador com coeficientes periódicos foi proposto em [18] na tentativa de obter previsões para uma possível epidemia da dengue hemorrágica, doença transmitida por vetores - mosquitos do gênero *Aedes* - que pode ser causada por 4 tipos de vírus.

Definindo

$S(\tau)$: indivíduos suscetíveis à dengue hemorrágica (recuperados da dengue clássica) no instante τ ;

$I(\tau)$: indivíduos infectados no instante τ ;

$R(\tau)$: indivíduos recuperados no instante τ ;

β_0 : taxa de infecção (representando a dinâmica de infecção entre mosquitos e humanos);

γ_0 : taxa de remoção (por cura ou morte);

o modelo proposto em [18] é dado por:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{dS}{d\tau} = rS \left(1 - \frac{S}{k} \right) - \beta_0 SI \\ \frac{dI}{d\tau} = \beta_0 SI - \gamma_0 I \\ \frac{dR}{d\tau} = \gamma_0 I \\ S(\tau_0) = S_0 ; \quad I(\tau_0) = I_0 \quad e \quad R(\tau_0) = R_0 \end{array} \right. \quad (4.3.1)$$

Considerando β_0 uma função ω -periódica (depende da intensidade de mosquitos infectados e da época do ano) o sistema (4.3.1), através de uma adimensionalização⁽²⁾, pode ser escrito por:

$$\begin{array}{lll} (2) & \tau = t/r & , \quad z = S/k & , \quad \gamma = \gamma_0/r . \\ & \beta = \beta_0 k/r & , \quad y = I/k \end{array}$$

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = z(1 - z) - \beta zy \\ \frac{dy}{dt} = \beta zy - \gamma y \end{cases}, \quad (4.3.2)$$

onde $\beta(t) = a(1 - \varepsilon \cos(\alpha t))$, $\alpha > 0$, $0 < \varepsilon < 1$ e $\alpha = 2\pi/\omega$ é uma perturbação por uma função de média nula $-\cos(\alpha t)$ - do parâmetro a .

Dessa maneira, as hipóteses do teorema 2.2.1 - que garantem a existência de solução periódica para a equação logística (4.2.2) - e as hipóteses do teorema 4.2.1 são satisfeitas pelo sistema (4.3.2) pois:

$$\begin{aligned} med[b_1(t)] &= 1 > 0, \\ c_{11}(t) &= 1 > 0 \text{ para todo } t \text{ e} \\ c_{12} = c_{21} &= \beta(t) > 0 \text{ para todo } t. \end{aligned}$$

Temos também:

$$med[\beta] = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega a(1 - \varepsilon \cos(\alpha t)) dt = a$$

Como $z_1^* = 1$ é a solução estável da equação logística (4.2.2) associada ao sistema (4.3.2), a existência de uma solução periódica para (4.3.2) depende somente da condição

$$med[c_{21} z_1^*] > med[\gamma] \Leftrightarrow a > \gamma. \quad (4.3.3)$$

Supondo então que a condição (4.3.3) seja satisfeita denotamos por (z^*, y^*) a solução periódica existente para o sistema (4.3.2).

Analogamente aos resultados obtidos para o sistema geral (4.2.1), o sistema linearizado em torno da solução (z^*, y^*) é dado por:

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = [1 - 2z^* - \beta y^*] z_1 + [-\beta z^*] y_1 \\ \frac{dy_1}{dt} = [\beta y^*] z_1 + [-\gamma + \beta z^*] y_1 \end{cases}, \quad (4.3.4)$$

$$\text{onde } z(t) = z^*(t) + z_1(t) \quad \text{e} \quad y(t) = y^*(t) + y_1(t)$$

Efetuada novamente uma mudança de variáveis

$$z_2 = z_1/z^* \quad \text{e} \quad y_2 = y_1/y^*,$$

o sistema (4.3.4) torna-se mais simples:

$$\begin{cases} \frac{dz_2}{dt} = [-z^*] z_2 - a[1 - \varepsilon\phi(t)] z^* y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = [a(1 - \varepsilon\phi(t))z^*] z_2 \end{cases} \quad (4.3.5)$$

com $\phi(t) = \cos(\alpha t)$.

Se o sistema (4.3.5) for uniformemente assintoticamente estável, então o mesmo é verdade (localmente) para (z^*, y^*) .

No entanto, nenhum dos critérios (4.2.7) ou (4.2.8) são satisfeitos para o sistema (4.3.2):

$$c_{12} - c_{22} = \beta(t) > 0 \quad \forall t \quad (\text{falha (4.2.7)})$$

$$c_{21}\bar{x} - c_{22}\bar{y} = c_{21}\bar{x} > 0 \quad \forall t \quad (\text{falha (4.2.8)})$$

Entretanto, a estabilidade da solução periódica (z^*, y^*) foi verificada através de simulações, tomando como parâmetros $\varepsilon = 0.99$, $\omega = 2.1$, $\gamma = 1$, com $\underline{a}$ variável e satisfazendo $a > \gamma^{(3)}$. Este fato nos levou à procura de outros critérios para justificar tal estabilidade (cf. cor. 1 e cor. 2 a seguir).

(3) Os parâmetros utilizados são baseados em dados referentes à epidemia de dengue clássica no Rio de Janeiro em 1986 e no aparecimento de casos de dengue hemorrágica a partir de 1990.

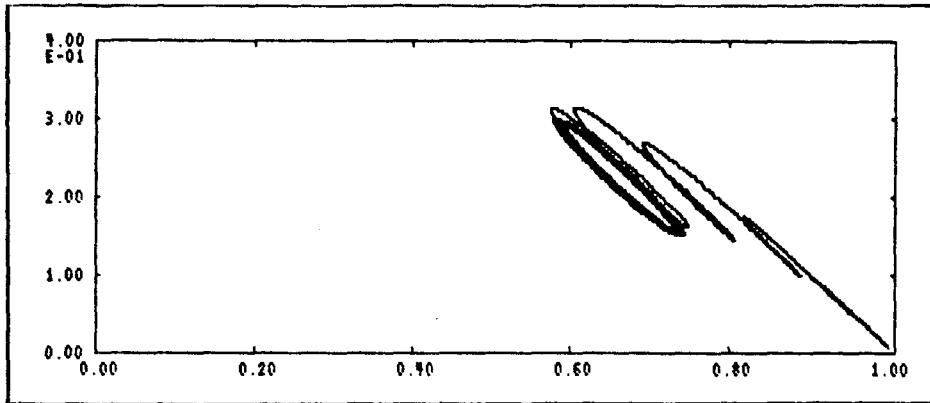


Figura 4.1 - Plano de fase para o sistema (4.3.5) quando
 $a = 1.5$ $z(0) = 0.99$, $y(0) = 0.01$

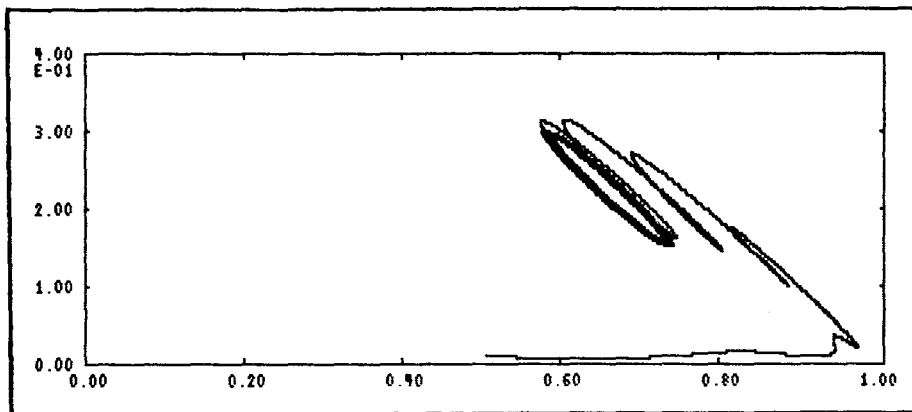


Figura 4.2 - Plano de fase para o sistema (4.3.5) quando
 $a = 1.5$ $z(0) = 0.5$, $y(0) = 0.01$

A demonstração da estabilidade da solução periódica existente para $a > \gamma$ será feita utilizando técnicas de perturbação para o sistema (4.3.2).

OBS: o modelo (4.3.1) assim como alguns cálculos envolvidos e simulações são encontrados em [18].

Como os coeficientes do sistema (4.3.2) pertencem a B (são funções contínuas e ω -periódicas) mas estão próximos de valores constantes, faremos uso de técnicas de perturbação para demonstrar a existência, unicidade e estabilidade de solução periódica para este sistema.

O sistema não-perturbado (com coeficientes constantes) associado a (4.3.2) é dado por

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = z[1 - z - ay] \\ \frac{dy}{dt} = y[-\gamma + az] \end{cases} \quad (4.3.6)$$

Então

$$\begin{aligned} A_1 &= (z_0, y_0) = (1, 0) \text{ e} \\ A_2 &= (z_1, y_1) = (\gamma/a, (a-\gamma)/a^2) \end{aligned}$$

são os pontos de equilíbrio do sistema (4.3.6), considerando $a > \gamma$ para que A_2 tenha coordenadas positivas; são também soluções para o mesmo sistema.

Estabilidade de (z_0, y_0)

A matriz jacobiana associada ao sistema (4.3.6) é dada por:

$$J = \begin{bmatrix} 1 - 2z - ay & -az \\ ay & -\gamma + az \end{bmatrix} \quad (4.3.7)$$

Aplicando J no ponto $A_1 = (1, 0)$ obtemos:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -a \\ 0 & a - \gamma \end{bmatrix}$$

cujos autovalores são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = a - \gamma$.

Portanto, $A_1 = (1,0)$ será assintoticamente estável se $a < \gamma$, pois $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 < 0$, e será instável se $a > \gamma$.

Estabilidade de $A_2 = (z_1, y_1) = (\gamma/a, (a-\gamma)/a^2)$

A matriz jacobiana (4.3.7) aplicada no ponto A_2 é dada por:

$$B = \begin{bmatrix} 1 - \frac{2\gamma}{a} - \frac{(a-\gamma)}{a} & -\gamma \\ \frac{a-\gamma}{a} & 0 \end{bmatrix}$$

e os autovalores de B são:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\frac{-\gamma}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{a}\right)^2 + \frac{4\gamma^2}{a} - 4\gamma}}{2} \quad (4.3.8)$$

Como $a > \gamma$, temos que $4\gamma^2/a - 4\gamma < 0$ e dessa maneira temos duas possibilidades:

- a) $\lambda_{1,2} < 0$ ou
- b) $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$ e tem parte real negativa.

Em ambos os casos A_2 será assintoticamente estável para $a > \gamma$.

Considerando agora o sistema (4.3.2) com coeficientes periódicos onde $\beta(t) = a(1 - \epsilon \cos(\alpha t))$ é uma perturbação do valor a por uma função de média nula $-\cos(\alpha t)$ - passaremos representá-lo na forma

$$u' = f(t, u, \epsilon) \quad (4.3.9)$$

$$\text{onde } u' = \begin{bmatrix} z' \\ y' \end{bmatrix} \quad \text{e } f = \begin{bmatrix} z - z^2 - a(1 - \epsilon \cos(\alpha t))zy \\ a(1 - \epsilon \cos(\alpha t))zy - \gamma y \end{bmatrix}$$

Denotando por

$$v(t) = \begin{bmatrix} z_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma/a \\ (a-\gamma)/a^2 \end{bmatrix}$$

a solução periódica do sistema não-perturbado (4.3.6) se $a > \gamma$, utilizaremos a técnica de perturbação de um sistema que possui solução periódica (cap. 1). O teorema que garante a existência de solução periódica pode ser obtido como um corolário do teorema 1.3.3.

OBS: o caso $a < \gamma$ já foi considerado ao mostrarmos a estabilidade do ponto $A_1 = (1,0)$, que é solução da equação logística

$$dz/dt = z(1 - z)$$

Corolário 1:

Se a primeira variação de (4.3.2) para $\epsilon = 0$ com respeito à solução $v(t)$,

$$x' = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial f(t, v(t), 0)}{\partial x_j} x_j = f(t, v(t), 0)x \quad (4.3.10)$$

não possui solução periódica para $|\epsilon|$ suficientemente pequeno, o sistema (4.3.2) possui uma solução $z = z^*(t, \epsilon)$ e $y = y^*(t, \epsilon)$, de período ω , contínua em (t, ϵ) e com $z^*(t, 0) = z_1$ e $y^*(t, 0) = y_1$. Essa solução é única para ϵ dado.

Como a solução periódica obtida para o sistema não-perturbado (4.3.6) é constante, a matriz da primeira variação (4.3.9) para $\epsilon = 0$ com respeito à esta solução também é constante.

$$x' = \begin{bmatrix} 1 - \frac{2\gamma}{a} - \frac{(a-\gamma)}{a} & -\gamma \\ \frac{a-\gamma}{a} & 0 \end{bmatrix} x \quad (4.3.11)$$

A matriz acima nada mais é do que a matriz jacobiana aplicada no ponto A_2 , cujos autovalores (4.3.8) são todos negativos ou possuem parte real negativa. Logo, o sistema (4.3.11) não possui solução periódica e consequentemente fica estabelecida a existência de solução periódica (z^*, y^*) para o sistema (4.3.9).

Finalmente, a estabilidade assintótica da solução (z^*, y^*) decorre do seguinte resultado:

Corolário 2:

Se as partes reais dos autovalores associados a (4.3.11) são todas negativas, então (4.3.11) não possui solução periódica e portanto satisfaz as hipóteses do corolário 1. Neste caso, a solução periódica $z = z^(t, \epsilon)$ e $y = y^*(t, \epsilon)$ é assintoticamente estável para $|\epsilon|$ pequeno.*

Nas figuras que se seguem podemos observar os dois casos possíveis para o modelo da dengue hemorrágica:

- i) se $a < \gamma$, a solução $z = 1$ e $y = 0$ para o sistema (4.3.2) é assintoticamente estável;
- ii) se $a > \gamma$, existe uma solução periódica para (4.3.2) que é assintoticamente estável.

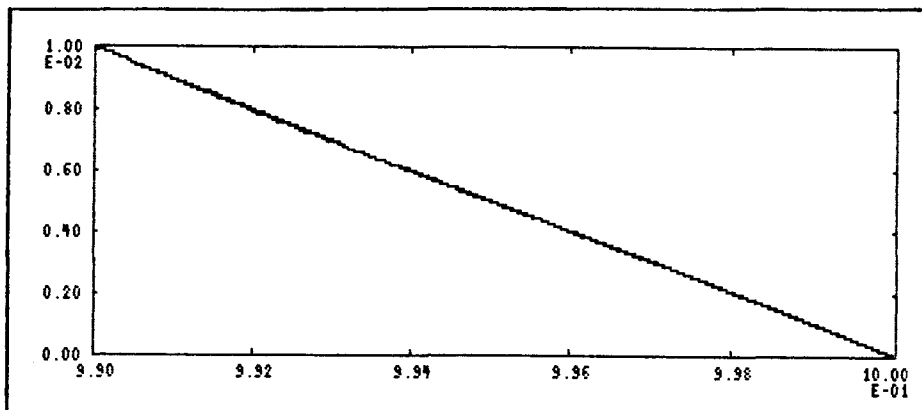


Figura 4.3 - Plano de fase para o sistema (4.3.5) quando $a < \gamma$
 $a = 0.8 \quad z(0) = 0.99 \quad y(0) = 0.01$

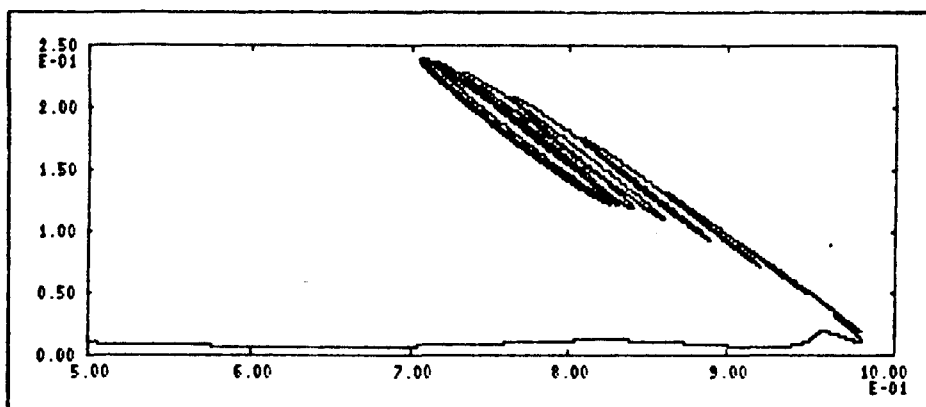


Figura 4.4 - Plano de fase para o sistema (4.3.5) quando $a > \gamma$
 $a = 1.3$ $z(0) = 0.5$ $y(0) = 0.01$

Neste caso em particular, a verificação de existência e estabilidade da solução periódica para o sistema (4.3.2) se torna bastante simplificada devido ao fato de apenas um coeficiente ser função periódica do tempo e os demais constantes, além da solução periódica existente para o sistema não-perturbado ser constante.

Quando isso não acontece, é necessário o cálculo dos expoentes característicos para a primeira variação do sistema calculada em $\varepsilon = 0$ e com respeito à solução periódica existente para o sistema (4.3.6). Porém na prática é quase sempre muito difícil de efetuarmos estes cálculos.

BIBLIOGRAFIA

- [1] ÁVILA, G. - *Funções de várias variáveis* - vol. 3, 4^a edição, Livros Técnicos e Científicos Edit. S.A., 1987.
- [2] BARTLE, R. G. - *Elementos de Análise Real* - Editora Campus Ltda, 1983.
- [3] BASSANEZI, R. C. ; FERREIRA JR., W. C. - *Equações Diferenciais e Aplicações* - Editora Harbra Ltda, 1987.
- [4] CODDINGTON, E. A.; LEVINSON, N. - *Theory of Ordinary Differential Equations* - McGraw-Hill, 1955.
- [5] COLEMAN, B.D. - *Nonautonomous Logistic Equations as Models of the Adjustment of Populations to Environmental Change* - Mathematical Biosciences, 45, 1979.
- [6] COLEMAN, B.D.; YING-HEN, H.; KNOWLES, G.P - *On the Optimal Choice of r for a Population in a Periodic Environment* - Mathematical Biosciences, 46, 1979.
- [7] COPPEL, W.A - *Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations* - Heath, Boston, Mass., 1965.
- [8] CUSHING, J.M - *Stable Positive Periodic Solutions of the Time-Dependent Logistic Equation under Possible Hereditary Influences* - Journal of Mathematical Analysis and Applications, 60, 1977.
- [9] CUSHING, J.M - *Periodic Time-Dependent predator-prey systems* - SIAM - J. Appl. Math., 32, 1977

- [10] CUSHING, J.M - *Periodic two-predator, one-prey interactions and the time sharing of a resource niche* - SIAM - J. Appl. Math., 44, 2, 1984.
- [11] CUSHING, J.M. - *Two Species Competition in a Periodic Environment* - J. Math. Biology, 10, 1985.
- [12] EDELSTEIN-KESHET, L. - *Mathematical models in Biology* - Random House, N.Y., 1988.
- [13] GOPALSAMY, K. - *Global asymptotic stability in a periodic Lotka-Volterra system* - J. Austral. Math. Soc. Series B, 27, 1985.
- [14] GOPALSAMY, K. - *Exchange of equilibria in two species Lotka-Volterra competition models* - J. Austral. Math. Soc. Series B, 24, 1982.
- [15] HALANAY, A. - *Differential Equations - Stability, oscillations, time lags* - Academic Press, 1966.
- [16] HALE, J.K - *Ordinary Differential Equations* - Robert Kinge Pub.Co, 2nd edition, 1980.
- [17] KRASNOSEL'SKII, M.A. - *The operator of translation along trajectories of Differential Equations* - American Mathematical Society, 1968.
- [18] LEITE, M.B.F; BASSANEZI, R. C. - *Dengue: Modelos e Simulações* - Revista Biomatemática II - XV CNMAC - São Carlos - SP - 1992.
- [19] LUENBERGER, DAVID G. - *Introduction to Dynamic Systems - Theory, Models and Applications* - Johns Wiley & Sons, 1979.

- [20] MAY, ROBERT M. - *Stability and Complexity in Model Ecosystems* - Princeton University Press, 1974.
- [21] MURRAY, J. D. - *Mathematical Biology* - Springer Verlag, 1989.
- [22] NICHOLSON, A.J. - *The Self-adjustment of Populations to Change* - Cold Spring Harbor Symposia on Quantitative Biology - vol XXII, 1957
- [23] NISBET, R.M. ; GURNEY, W.S.C. - *Population Dynamics in a Periodically Varying Environment* - J. Theor. Biology, 56, 1976.
- [24] PAES, E.T.; BLINDER, P.B.; BASSANEZI, R.C. - *O meio Ambiente como fator de predação: um estudo populacional de Donax Gemmula* - in Revista Biomatemática II - XV CNMAC -São Carlos - SP , (134 - 142), 1992.
- [25] PIELOU, E. C. - *Mathematical Ecology* - John Wiley & Sons, 1977.
- [26] ROSENBLAT, S. - *Population Models in a Periodically Fluctuating Environment* - J. Math. Biology, 9, 1980.
- [27] TILMAN, D. - *Resource Competition and Community Structure* - Princeton University Press, 1982.
- [28] VANDERMEER, J. - *Elementary Mathematical Ecology* - John Wiley & Sons, 1981.
- [29] VENDITE, L.L. - *Modelagem para o surgimento de resistência a aplicações de fungicidas em doenças de plantas - O estudo de um programa com o uso de um único fungicida* - XIV CNMAC, Nova Friburgo - RJ, (106), 1991.

- [30] VENDITE, L.L; GHINI, R.; PETRUCCI, A.A. - *Subdosagens: avaliação de seus efeitos na resistência de fungos a fungicidas através de um modelo matemático* - In Revista Biomatemática III - XVI CNMAC, Uberlândia - MG, (152 - 169), 1993.
- [31] MANUAL DE FITOPATOLOGIA - Vol 1 - *Princípios e conceitos* - coord. Ferdinando Galli - Edit. Agron. Ceres Ltda - 1978 (SP).