



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA
E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

LUIS ERNESTO PORTILLA PALADINES

ANÁLISE DE FREDHOLM E INSTANTONS EM DIMENSÃO 4

CAMPINAS

2016



LUIS ERNESTO PORTILLA PALADINES

ANÁLISE DE FREDHOLM E INSTANTONS EM DIMENSÃO 4

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em matemática.

Orientador: Henrique Nogueira de Sá Earp

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO LUIS ERNESTO PORTILLA PALADINES, E ORIENTADA PELO PROF. DR. HENRIQUE NOGUEIRA DE SÁ EARP.

Assinatura do Orientador

CAMPINAS
2016

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CAPES

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

P836a Portilla Paladines, Luis Ernesto, 1985-
Análise de Fredholm e instantons em dimensão 4 / Luis Ernesto Portilla Paladines. – Campinas, SP : [s.n.], 2016.

Orientador: Henrique Nogueira de Sá Earp.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Conexões (Matemática). 2. Curvatura. 3. Fibrado principal. 4. Fredholm, Operador de. 5. Geometria simplética. I. Sá Earp, Henrique Nogueira de, 1981-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Fredholm Analyse and instantons on four dimensions

Palavras-chave em inglês:

Connections (Mathematic)

Curvature

Principal bundle

Fredholm operator

Symplectic geometry

Área de concentração: Matemática

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora:

Henrique Nogueira de Sá Earp [Orientador]

Marcos Benevenuto Jardim

Umberto Leone Hryniewicz

Data de defesa: 29-02-2016

Programa de Pós-Graduação: Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 29 de fevereiro de 2016 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof.(a). Dr(a). HENRIQUE NOGUEIRA DE SÁ EARP

Prof.(a). Dr(a). UMBERTO LEONE HRYNIEWICZ

Prof.(a). Dr(a). MARCOS BENEVENUTO JARDIM

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

Para meus pais, irmãos, esposa e filha.

Agradecimentos

Agradeço ao Prof. Dr. Henrique Nogueira Sá Earp, pela orientação, aos membros da banca examinadora, Prof. Dr. Marcos Benevenuto Jardim (UNICAMP) e Prof. Dr. Umberto Hryniewicz (UFRJ) pelas observações que contribuíram no meu trabalho. Profundamente agradecido com o Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da UNICAMP pela contribuição na minha formação matemática. Um sincero agradecimento aos meus colegas Andres Moreno, Alcides de Carvalho, Carlos Bassani, Bruno Suzuki, Leithold Alvarez e Akemi Miyamoto, sempre presentes de maneira incondicional no dia a dia, à minha família, esposa e filha, dos quais recebo um imenso apoio e carinho apesar da distância. Por fim, agradeço a CAPES por ter financiado este projeto.

RESUMO

Este trabalho se divide em duas partes. Na primeira, estudamos a estrutura do espaço de conexões de fibrado sobre uma variedade M , apresentamos os requisitos teóricos necessários para concluir que o espaço de moduli de instantons tem estrutura de variedade suave de dimensão finita. O espaço de moduli de instantons é descrito como o conjunto de zeros de uma seção de Fredholm do fibrado de Banach de 2-formas de curvaturas antiautoduais, módulo o grupo de transformações de calibre sobre o espaço de orbitas de calibre. As referências principais são os textos S. K. Donaldson [6] e R. Freiman, J. W. Morgan [9]. Posteriormente fazemos uma introdução à teoria de Fredholm generalizada, baseados no trabalho feito por H. Hofer, K. Wysocki e E. Zehnder em [15, 14, 10]. Estes fornecem uma construção da teoria simpléctica de campos (SFT), que é um problema analítico abordado por meio da Teoria de poliedros e mostram que uma versão do Teorema da Aplicação Implícita aplica na categoria de poliedros. Apresentamos uma versão do Teorema da Aplicação Implícita no caso particular de um ponto interior na segunda parte deste trabalho.

Palavras-chave: Fibrado principal, fibrado vetorial, instantons, conexões, curvatura, teoria de Fredholm, poliedro, sc-suavidade, sc-estruturas.

ABSTRACT

This work is divided in two parts, in the first part we study the space of connections on a bundle over a Riemannian manifold M and a principal bundle on M , we study all the necessary background to conclude that the moduli space of instantons has a finite dimensional structure of smooth manifold, this is made showing that moduli space of instantons is a zero solution set of a Fredholm section on the Banach bundle of anti-self-dual 2-forms modulo gauge transformations, over the space of gauge orbits. Our principal references are S. K. Donaldson [6] and R. Freiman, J. W. Morgan [9].

Later we do an introduction to the general Fredholm theory, our reference is the paper of H. Hofer, K. Wysocki e E. Zehnder [15]. They provide a construction of Symplectic Field Theory (SFT), facing an analytical problem through the Polyfolds Theory, also, they show that a version of Implicit Function Theory is available in the Polyfold Theory. We present in the second part of this work a version of Implicit Function Theorem in a particular case of interior point.

Keywords: Principal bundle, Vector Bundle, Instantons, Connections, Curvature, Fredholm theory, Polyfolds, sc-smoothness, sc-structures.

Sumário

1	Preliminares.	15
1.1	Algumas noções básicas de grupos de Lie	15
1.2	Fibrados vetoriais	18
1.3	Fibrado principal	22
1.4	Fibrado associado e de bases	25
2	Conexões e curvatura	29
2.1	Conexões em fibrados vetoriais	29
2.2	Conexões em fibrados principais	34
2.3	Conexões no fibrado associado e de bases	40
2.4	Curvatura de uma conexão	43
2.4.1	Curvatura em fibrados vetoriais	43
2.4.2	Expressão local da curvatura	44
2.4.3	Curvatura em fibrados principais	45
2.4.4	Adjunto formal de D_ω	48
2.5	A holonomia de uma conexão	51
3	Espaço de moduli de instantons	53
3.1	Transformações de calibre	53
3.2	Ação do grupo de calibre sobre $\mathcal{A}(P)$	54
3.3	O funcional de Yang-Mills	58
3.4	Normas L_k^p e espaço quociente $\mathcal{B}_2(P)$	60
3.4.1	Normas L_k^p	60
3.4.2	Estrutura local do espaço quociente $\mathcal{B}_2(P)$	61
3.5	Estrutura local do espaço de moduli	63
3.6	O teorema das métricas genéricas	66
4	Novo modelo de suavidade e sc-cálculo	68
4.1	Sc-estruturas sobre espaços de Banach	69
4.1.1	Sc-operadores	70
4.1.2	Funções sc-suaves e modelo local	72

4.1.3	Propriedades da sc-diferenciabilidade	73
4.2	Geometria diferencial baseada em retratos	74
4.2.1	Sc-retrações	74
4.2.2	M-poliedades	78
4.2.3	Exemplo de Poliedade	83
4.2.4	Fibrados fortes	85
4.3	M-poliedade domada	88
4.4	Teoria de Fredholm	91
4.4.1	Seções sc-Fredholm	91
4.4.2	Teorema da aplicação implícita, caso ponto interior	94
Referências		96
A		98
A.1	A álgebra de Lie graduada de formas diferenciais	98
B Classes caraterísticas		101
B.1	O homomorfismo de Chern-Weil	101
B.2	Classes características em fibrados vetoriais complexos	104
C Análise em espaços de Banach		108
C.1	Teoremas da aplicação inversa e implícita em espaços de Banach	108
C.2	Operadores compactos	109
C.3	Operadores de Fredholm	109
C.4	Operadores Elípticos	113
C.5	Teoremas de Sobolev	114

Introdução

Este trabalho se divide em duas partes. Na primeira, estudamos a estrutura do espaço de conexões de fibrados principais de uma variedade 4-dimensional e na segunda fazemos uma introdução na teoria de Fredholm generalizada, chamada teoria de *poliedades*, com o objetivo de tentar, em futuros trabalhos de pesquisa, achar uma relação entre as duas teorias, como explicamos ao final da seção.

Primeira parte

Fazemos nesta parte uma introdução à teoria de calibre, podemos dizer que a teoria do calibre consiste no estudo de fibrados, conexões sobre eles e curvaturas destas conexões. Grande parte deste trabalho é dedicada ao estudo de conexões “(anti-)autoduais”, esses objetos foram introduzidos pelos físicos e se converteram numa ferramenta principal em física moderna. O nosso ponto de vista, neste trabalho, é ao nível da geometria diferencial e da topologia.

O primeiro capítulo é dedicado aos conceitos básicos usados ao longo do texto, para fixar notações e enunciar alguns resultados relevantes. Neste trabalho, serão considerados fibrados vetoriais e principais. Uma aplicação suave $s: M \rightarrow E$, tal que $\pi \circ s = \mathbb{1}_M$ é chamada *seção*, denotaremos o espaço de seções como $\Gamma(P)$, é interessante estudar a maneira de diferenciar seções, é aqui que aparece o conceito de *conexão* 2.1. Num fibrado vetorial E , uma *conexão linear* é uma aplicação $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ -linear

$$\nabla: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E) \otimes \Omega^1(M)$$

satisfazendo $\nabla(f\sigma) = f\nabla(\sigma) + \sigma \otimes df$, para toda $f \in C^\infty$, $\sigma \in \Gamma(E)$ em que d é a *diferencial exterior*.

Para fibrado principal, as conexões são definidas de maneira mais geométrica, em cada ponto $p \in P_x := \pi^{-1}(x)$, é naturalmente definido o *espaço vertical* como o tangente à fibra $T_p P_x$. Uma conexão é uma escolha suave de um complementar ao espaço vertical, (ver figura 1). Neste contexto, uma conexão é uma distribuição suave, da qual também exigimos que seja invariante com respeito à ação num sentido a ser definido depois (ver seção 2.2).

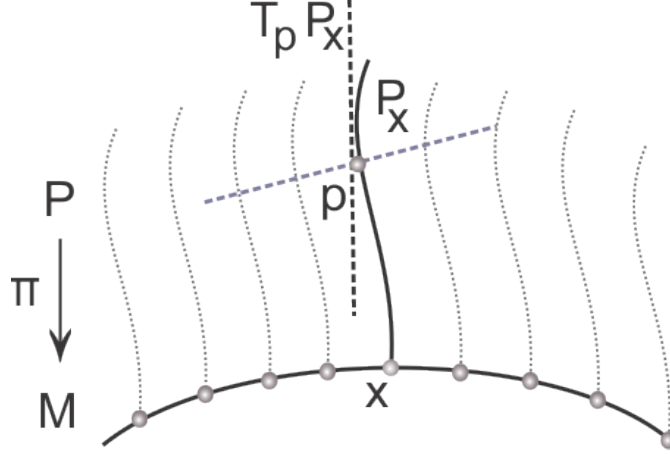


Figura 1: Uma distribuição é uma escolha suave e equivariante de um complementar do espaço tangente a fibra P_x no ponto x . Esta distribuição é chamada *distribuição horizontal*.

Associado à uma conexão ∇ , vem a *curvatura*, existe um operador $d_\nabla: \Omega^j(M, E) \rightarrow \Omega^{j+1}(M, E)$ que fornece a sequência

$$0 \longrightarrow \Omega^0(M, E) \xrightarrow{\nabla} \Omega^1(M, E) \xrightarrow{d_\nabla} \dots \xrightarrow{d_\nabla} \Omega^p(M, E) \xrightarrow{d_\nabla} \Omega^{p+1}(M, E) \xrightarrow{d_\nabla} \dots,$$

A composição $F_\nabla := d_\nabla \circ \nabla: \Omega^0(E) \rightarrow \Omega^2(E)$ é um mapa $\Omega^0(M)$ -linear. $F_\nabla \in \Omega^2(\text{Hom}(E, E))$ é chamada *forma de curvatura* de E associado a conexão ∇ . Por outro lado, lembremos que o operador *de Hodge* $*$: $\Omega^k(M, \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^{n-k}(M, \mathbb{R})$, permite ter a decomposição:

$$\Omega^2(M, \mathbb{R}) = \Omega_+^2(M, \mathbb{R}) \oplus \Omega_-^2(M, \mathbb{R}).$$

$\Omega_-^2(M, \mathbb{R})$ e $\Omega_+^2(M, \mathbb{R})$ são chamados *autoespaço* e *antiautoespaço*, associado a $\mp$ respectivamente (dependendo da convenção feita da orientação da variedade M). Na teoria de calibre, esta decomposição é interessante devido a 2-forma de curvatura, aplicando o operador de Hodge, obtêm-se uma decomposição da curvatura em curvaturas “*autoduais*” e “*antiautoduais*”. Os físicos em particular, descobriram que os campos de calibre autoduais, chamados também de *instantons* ou *anti-instantons*, são soluções da equação de Yang-Mills. De fato, em variedades compactas estas soluções são realmente mínimos absolutos da ação de Yang-Mills (ver seção 3.3).

Concluimos com o seguinte resultado sobre a estrutura topológica e suave do espaço de soluções da equação de Yang-Mills, que é o mais importante desta primeira parte: Sejam $\mathcal{A}_2^*(P)$ o espaço de conexões irreduzíveis (ver seção 2.5) e o quociente $\mathcal{M}(P) = \mathcal{A}^*(P)/\mathcal{G}(P)$, em que $\mathcal{G}(P)$ é o grupo de transformações de calibre de P . Se M é uma variedade riemanniana de dimensão 4, denote por $\pm\mathcal{M} = \pm\mathcal{A}^*(P)/\mathcal{G}(P)$ o espaço de conexões (anti) autoduais em P , modulo transformações de calibre. Então, em condições “adequadas” (ver Prop. 3.5.5), o *espaço de moduli de instantons* $\pm\mathcal{M}$, se for não vazio, é

uma variedade suave de dimensão finita. Isto foi mostrado pela primeira vez em 1978 por *Atiyah, Hitchin, e Singer* [2]. Na demonstração também é fornecida a dimensão desta variedade em termos de constantes (“*cargas topológicas*”) que dependem da topologia da variedade base M e da dimensão do grupo de estrutura G .

Segunda parte

Nesta segunda parte, começaremos a estudar teoria de Fredholm em um contexto mais amplo, estudaremos o modelo de suavidade proposto por *H. Hofer, K. Wysocki, E. Zehnder* em [10, 14, 15], chamado *sc-suavidade*. Com isto aparece uma nova categoria cujos objetos são chamados *poliedades*. Uma poliedade é uma generalização da noção de variedade, o modelo local é diferente aos abertos de espaços de Banach utilizados na geometria clássica (ver seção 4.2.2).

Algumas vantagens da teoria Fredholm em poliedades são: Muitos espaços que não possuem a clássica estrutura diferenciável podem ser munidos com uma versão mais fraca de “estrutura diferenciável” que pode ser pensada como uma “variedade” que localmente varia de dimensão. Há uma noção de fibrado (ver seção 4.2.4), com seções “sc-Fredholm” (ver 4.4), isto permite ter uma versão do Teorema da Aplicação Implícita, que sob certas restrições permite afirmar que o conjunto solução $s^{-1}\{0\}$, é uma subvariedade na nova categoria.

A nossa motivação para estudar esta segunda parte é a seguinte: observemos na figura 2 o espaço de moduli num caso particular, ([8] p. 45-46), em que não somente conexões irredutíveis são consideradas. Na teoria de Donaldson [6] se dá uma descrição deste espaço de moduli, permitindo conexões redutíveis, colando cones projetivos na parte suave do espaço de moduli. A teoria de Fredholm geral, proposta por Hofer, permite este tipo de singularidades em seu modelo de “suavidade”, desse modo é natural pensar que esta teoria fornece uma descrição na linguagem de poliedades do espaço de moduli de instantons, em que conexões redutíveis são permitidas e é natural, então, sondar a possibilidade de juntar esta teoria com a teoria apresentada na primeira parte.

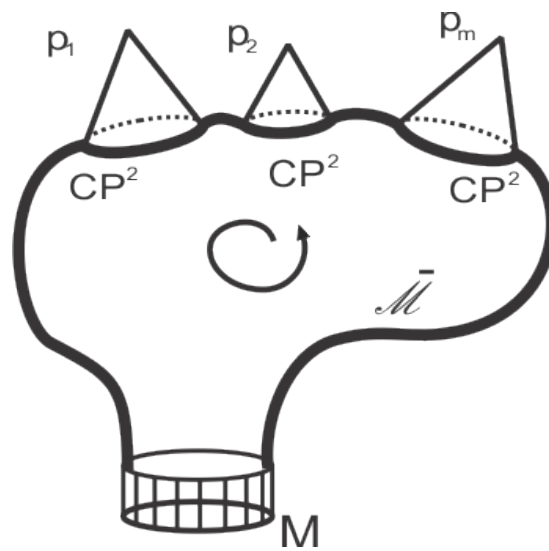


Figura 2: Representação pictórica do espaço de moduli, em que por cada conexão irredutível, aparece uma singularidade no espaço de moduli (figura tomada de [8]).

Capítulo 1

Preliminares.

O proposito deste capítulo é estabelecer definições e notações, também resultados que serão importantes em todo o resto deste trabalho. A partir de agora *um espaço vetorial*, será considerado de *dimensão finita* sobre o corpo de escalares, subentendido no contexto ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Adotaremos a convenção estandar de denotar por $\mathfrak{X}(M)$ o espaço vetorial de campos diferenciáveis sobre a variedade suave M , também se $f: M \rightarrow N$ é uma aplicação diferenciável, denotaremos a diferencial de f no ponto $p \in M$, como é usual por $(df)_p$ ou também por f_{*p} .

1.1 Algumas noções básicas de grupos de Lie

Definição 1.1.1. Um *grupo de Lie* é um grupo cujo conjunto subjacente G tem uma estrutura de variedade diferenciável, de tal forma que a aplicação produto $p: (g, h) \in G \times G \mapsto gh \in G$ e a inversão $i: g \in G \mapsto g^{-1} \in G$ são aplicações diferenciáveis. $G \times G$ é considerado como variedade produto.

Os seguintes são exemplos de grupos de Lie, o leitor é estimulado a ver sua construção em detalhes na bibliografia [19, 25].

Exemplos 1.1.2.

1. $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}), \mathrm{Gl}(n, \mathbb{C})$ matrizes invertíveis com entradas em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ respectivamente com o produto usual de matrizes.
2. $\mathrm{O}(n) := \{g \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}) \mid gg^t = g^t g = I\}$, aqui g^t denota a transposta da matriz g e I é a matriz identidade.
3. $\mathrm{SO}(n) := \{g \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}) \mid \det g = 1\}$
4. $\mathrm{SU}(n) := \{g \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{C}) \mid g\bar{g}^t = \bar{g}^t g = I, \det g = 1\}$, aqui $\bar{g}^t$ denota a matriz transposta conjugada de g .

5. $U(n) := \{g \in \text{Gl}(n, \mathbb{C}) \mid g\bar{g}^t = \bar{g}^t g = I\}$, note que $U(1) \simeq S^1$ a esfera unitária.
6. O grupo de Lie $\text{Gl}(V)$ para um espaço vetorial de dimensão finita V , onde seus elementos são transformações lineares invertíveis de V em se mesmo com a operação de composição, este é chamado *o grupo linear* de V .

Denotaremos $L_g: h \in G \mapsto gh \in G$ e $R_g: h \in G \mapsto hg \in G$ as translações no grupo de Lie G à esquerda e à direita respectivamente. Observe que L_g e R_g são difeomorfismos. Denotaremos a *álgebra de Lie* de G por $\mathfrak{g}$, e denotará a identidade do grupo G .

Definição 1.1.3. A aplicação $C_g: h \in G \mapsto L_g \circ R_{g^{-1}}(h) = ghg^{-1} \in G$ é chamada *conjugação*.

Denotaremos por $\text{Aut}(V)$ onde V é um espaço vetorial, o espaço vetorial de todas as transformações lineares invertíveis de V em V e dizemos que $\varphi: G \rightarrow H$ é um homomorfismo entre os grupos de Lie G e H , se φ é um homomorfismo de grupo diferenciável. Um caso particular de homomorfismo entre grupos de Lie é quando o contradomínio é um grupo linear $\text{Gl}(V)$. Nesse caso, o homomorfismo é chamado *representação* de G no espaço vetorial V de dimensão finita.

Em um grupo de Lie G , sempre temos uma representação linear natural em sua álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ induzida pela conjugação. Note que $C_g(e) = e$ daí que $d(C_g)_e$ é uma aplicação linear de $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, note também que para todos $g, h \in G$, vale que:

$$C_g \circ C_h(x) = g(heh^{-1})g^{-1} = C_{gh}(x)$$

logo, pela regra da cadeia, temos $d(C_g)_e d(C_h)_e = d(C_{gh})_e$, logo a aplicação

$$\text{Ad}: g \in G \mapsto d(C_g)_e \in \text{Aut}(\mathfrak{g}) \quad (1.1.1)$$

está bem definida. Com isto, faz sentido a seguinte definição.

Definição 1.1.4. Dado um grupo de Lie G , definimos a *representação adjunta* de G na sua álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ para ser o homomorfismo de grupos definido em (1.1.1).

A representação Ad é diferenciável e denotaremos por $\text{ad}_g := (\text{Ad})_{*e}$, então,

$$\text{ad}_g: \mathfrak{g} \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g}). \quad (1.1.2)$$

Todo grupo de Lie G tem associada uma 1-forma que toma valores em $\mathfrak{g}$ naturalmente definida, de grande importância em teoria de calibre chamada forma de *Maurer-Cartan*.

Definição 1.1.5. Seja G um grupo de Lie e $\mathfrak{g}$ a sua álgebra de Lie, a forma de *Maurer-Cartan* invariante a esquerda, $\Theta \in \Omega^1(G, \mathfrak{g})$ é uma 1-forma sobre G com valores em $\mathfrak{g}$ definida por

$$\Theta_g = (L_{g^{-1}})_* : T_g G \rightarrow \mathfrak{g}$$

Se V é um campo invariante a esquerda, então $\Theta(V) = V(e)$, portanto Θ_e é uma identificação natural entre $\mathfrak{g}$ e $T_e G$. Para um grupo de Lie de matrizes, a forma de Maurer-Cartan em um ponto g está dada por $\Theta_g = g^{-1}dg$.

Teorema 1.1.6. Seja G um grupo de Lie e Θ sua forma de Maurer-Cartan. Então

1. $L_g^* \Theta = \Theta$
2. $R_g^* \Theta = \text{ad}_{g^{-1}} \Theta$.

Demonstração. Para $X \in \mathfrak{X}(G)$ e $g, h \in G$, temos

$$\begin{aligned} L_g^* \Theta_h(X) &= \Theta_{L_g(h)}((L_g)_*(X)) = (L_{(gh)^{-1}})_* \circ (L_g)_*(X) \\ &= (L_{h^{-1}})_*(X) = \Theta_h(X). \end{aligned}$$

De onde segue o item 1 e para ver o item 2, observe que

$$\begin{aligned} R_g^* \Theta_h(X) &= \Theta_{R_g(h)}((R_g)_*(X)) = (L_{(hg)^{-1}})_* \circ (R_g)_*(X) \\ &= (L_{g^{-1}h^{-1}} \circ R_g)_*(X) = \text{Ad}_{g^{-1}}(h^{-1})_*(X) \\ &= (\text{Ad}_{g^{-1}})_* \circ (L_{h^{-1}})_*(X) = \text{ad}_{g^{-1}} \Theta_h(X). \end{aligned}$$

□

Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$ então $[\Theta, \Theta](X, Y) := [\Theta(X), \Theta(Y)]$, tem-se a seguinte equação estrutural.

Teorema 1.1.7. Seja G um grupo de Lie e Θ a sua forma de *Maurer-Cartan*, então

$$d\Theta + \frac{1}{2}[\Theta, \Theta] = 0.$$

Demonstração. Tome $\{e_i\}_{i=1}^n$ uma base para $\mathfrak{g}$ e $\{\theta^i\}_{i=1}^n$ a única base dual, i.e., $\theta^i(e_j) = \delta_j^i$ a delta de Kronecker, então $\Theta = \theta^i \otimes e_i$ somando em i . Pelo teorema acima temos que

$$\begin{aligned} d\Theta(e_j, e_k) &= (e_j(\theta^i(e_k)) - e_k(\theta^i(e_j)) - \theta^i[e_j, e_k])e_i \\ &= (e_j(\delta_k^i) - e_k(\delta_j^i) - \theta^i[e_j, e_k])e_i = -\theta^i[e_j, e_k]e_i \\ &= -[\theta^i e_j, \theta^i e_k]e_i = -[\Theta(e_j), \Theta(e_k)] \\ &= -\frac{1}{2}[\Theta, \Theta](e_j, e_k) \end{aligned}$$

de onde temos o resultado. □

Para variedades M e N quaisquer, denotamos o conjunto de difeomorfismos de M em N por $\text{Diff}(M, N)$, no caso $M = N$ escrevemos simplesmente por $\text{Diff}(M)$.

Definição 1.1.8. Uma *ação à direita* do grupo de Lie G sobre a variedade suave M é uma operação $R: M \times G \rightarrow M$, tal que os mapas $R_g: x \in M \mapsto R_g(x) := R(x, g) \in M$ são difeomorfismos e $R_g \circ R_h = R_{gh}$, i.e., a ação é um mapa $g \in G \mapsto R_g \in \text{Diff}(M)$, analogamente se define a *ação à esquerda*.

Denotaremos $R(x, g)$ simplesmente por xg .

Definição 1.1.9. Uma ação é dita *livre* se cada vez que temos $xg = x$, então $g = e$, em outras palavras, o conjunto $\text{Stab}_x = \{g \in G \mid xg = x\}$ que é um subgrupo de G chamado o *estabilizador* de $x \in M$, é trivial.

Uma ação de um grupo G , sobre uma variedade M , induz uma relação de equivalência como segue, para $x, y \in M$

$$x \sim y \quad \text{se, e somente se, existe } g \in G \text{ tal que, } x = yg.$$

Denotaremos por M/G o conjunto de classes de equivalência chamado o *espaço de órbitas*.

1.2 Fibrados vetoriais

Apresentaremos definições e alguns resultados gerais do que é o substrato de nosso trabalho, fibrados vetoriais e fibrados principais. Veremos na seção 1.4 a relação entre estes.

Definição 1.2.1. Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n , um *fibrado vetorial* real (ou complexo), é uma variedade diferenciável E , munida com uma aplicação suave e sobrejetora $\pi: E \rightarrow M$, que satisfaz:

1. Para cada $x \in M$, $E_x := \pi^{-1}(x)$ é um espaço vetorial complexo (ou real).
2. Para cada $x \in M$, existe uma vizinhança aberta U de x em M , e um difeomorfismo $\varphi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{C}^r$, que satisfaz:
 - $\varphi|_{E_x}: E_x \rightarrow \mathbb{C}^r$ é um isomorfismo de espaços vetoriais.
 - Se $\text{Pr}_1: U \times \mathbb{C}^r \rightarrow U$ é a projeção no primeiro fator, então $\text{Pr}_1 \circ \varphi|_U = \pi$.

Denotaremos um fibrado vetorial por $E \xrightarrow{\pi} M$, ou simplesmente por E , quando a projeção e variedade M esteja subentendida. E é chamado o *espaço total*, a dimensão da fibra $\pi^{-1}(x)$ é chamado o *posto do fibrado*, π é chamada a *projeção* e o aberto U é chamado uma trivialização local em $x \in M$.

Exemplos 1.2.2. Os próximos exemplos foram tomados de [19] onde sua construção é feita em detalhe.

1. O exemplo mais natural é o chamado fibrado *produto* ou *trivial*, que é $M \times \mathbb{C}^n \xrightarrow{\text{Pr}_1} M$, onde Pr_1 é a projeção sobre o primeiro fator.
2. (*A faixa de Möbius*) Defina uma relação de equivalência sobre $\mathbb{R}^2$ declarando que $(x, y) \sim (x', y')$ se e somente se $(x', y') = (x + n, (-1)^n y)$ para algum $n \in \mathbb{Z}$. Sejam $E := \mathbb{R}^2 / \sim$ o espaço quociente e $q: \mathbb{R}^2 \rightarrow E$ o mapa quociente que envia (x, y) na sua classe de equivalência. Definimos $\pi: E \rightarrow S^1$, o mapa sobre a esfera unitária que faz o seguinte diagrama comutar

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{q} & E \\ \text{Pr}_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\varepsilon} & S^1 \end{array}$$

onde $\text{Pr}_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é a projeção sobre o primeiro fator e $\varepsilon: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ é o mapa de recobrimento suave dado por $\varepsilon(x) = e^{2\pi i x}$, então $\pi: E \rightarrow S$ é um fibrado vetorial.

3. (*O fibrado tangente*) Seja M uma variedade n dimensional e $T_x M$ o espaço tangente em $x \in M$ que é um espaço vetorial de dimensão n . Definimos

$$TM = \{(x, v) \in M \times \mathbb{R}^n \mid v \in T_x M \cong \mathbb{R}^n\} = \bigsqcup_{x \in M} T_x M \quad (1.2.1)$$

e $\text{Pr}_1: TM \rightarrow M$ é a projeção sobre o primeiro fator. Então $TM \xrightarrow{\text{Pr}_1} M$ é um fibrado vetorial chamado o *fibrado tangente*.

Na figura 1.1, mostra-se uma representação pictórica dos exemplos 1. e 2. acima, onde $M = S^1$ com fibra $\mathbb{R}$, no lado esquerdo, temos um fibrado produto e no lado direito, a faixa de Möbius. Observe que os espaços totais são globalmente “diferentes” como variedades, pois, como sabemos, a faixa de Möbius é não orientável enquanto que o cilindro é orientável.

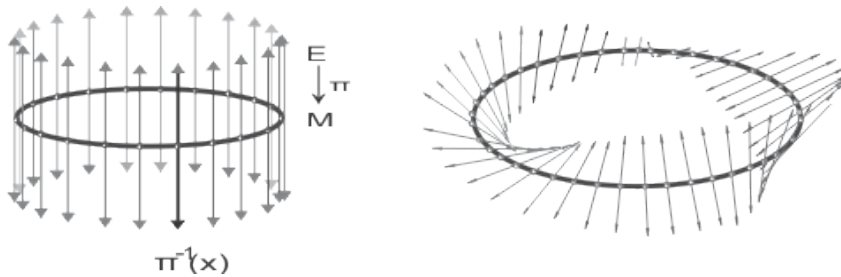


Figura 1.1: O cilindro e a faixa de Möbius do lado esquerdo e direito respectivamente, vistos como fibrados vetoriais.

Seja $\pi: E \rightarrow M$ um fibrado vetorial de posto r sobre M . Escolha uma cobertura $\{U_\alpha\}$ de M tal que $\varphi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}^r$ são os isomorfismos dados na definição 1.2.1. Denotemos o conjunto $U_\alpha \cap U_\beta$ por $U_{\alpha\beta}$, se $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$ e $x \in U_{\alpha\beta}$, então existe um mapa suave $T_{\alpha\beta}: U_{\alpha\beta} \rightarrow \text{Gl}(r, \mathbb{C})$, tal que a composição $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}: U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^r \rightarrow U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^r$ tem a forma

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(x, v) = (x, T_{\alpha\beta}(x)(v))$$

em que $T_{\alpha\beta}(x)v$ denota a ação de multiplicação de matrizes sobre os vetores $v \in \mathbb{C}^r$. De fato, pela definição 1.2.1 de fibrado vetorial temos que o seguinte diagrama é comutativo.

$$\begin{array}{ccccc} U_{\alpha,\beta} \times \mathbb{C}^n & \xleftarrow{\varphi_\beta} & \pi^{-1}(U_{\alpha,\beta}) & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & U_{\alpha,\beta} \times \mathbb{C}^n \\ & \searrow \text{Pr}_1 & \downarrow \pi & \swarrow \text{Pr}_1 & \\ & & U_{\alpha,\beta} & & \end{array}$$

Segue que $\text{Pr}_1 \circ (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) = \text{Pr}_1$, isto mostra que $(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})(x, v) = (x, \sigma(x, v))$, para alguma função $\sigma: U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^r \rightarrow \mathbb{C}^r$, também pela definição de fibrado vetorial, a aplicação $v \mapsto \sigma(x, v)$ é um isomorfismo linear de $\mathbb{C}^r$ em $\mathbb{C}^r$, assim, pode ser pensado como uma matriz $T_{\alpha\beta}(x)$ de $r \times r$, logo $T_{\alpha\beta}(x)v = \sigma(x, v)$.

A funções $T_{\alpha\beta}$ são chamadas funções de *transição* e satisfazem as chamadas *condições de cociclo*

1. $T_{\alpha\beta}^{-1} = T_{\beta\alpha}$ em $U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^n$.
2. $T_{\alpha\beta} \circ T_{\beta\gamma} \circ T_{\gamma\alpha} = 1$ em $U_{\alpha\beta\gamma} \times \mathbb{C}^n$.
3. $T_{\alpha\alpha} = 1$.

Dado $E \xrightarrow{\pi} M$ um fibrado vetorial e um aberto trivializante $U \subset M$, dizemos que $\{\sigma_k\}_{k=1}^r \subset \Gamma(E|_U)$ é um *referencial local* em U , se para cada $x \in U$, temos que $\{\sigma_k(x)\}_{k=1}^r$ é uma base da fibra E_x . O referencial é dito *global* se $U = M$. Os referenciais locais sempre existem em um fibrado vetorial, de fato, suponhamos que temos uma trivialização local $\varphi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^r$ e seja $\{e_i\}_{i=1}^r$ a base canônica de $\mathbb{R}^r$ (ou $\mathbb{C}^r$), então para cada $p \in U$ defina

$$s_i := \varphi^{-1}(p, e_i), \quad 1 \leq i \leq r. \quad (1.2.2)$$

Então, o conjunto $\{s_i\}_{i=1}^r$ é um referencial local em U . O exemplo acima mostra como construir um referencial, de fato, um fibrado vetorial é trivial se, e somente se, admite um referencial global. No caso da faixa de Möbius, dar um referencial global é dar em cada ponto de S^1 um número não nulo em sua fibra que varia suavemente, isto não é possível, o leitor pode se convencer disso olhando a figura 1.2.

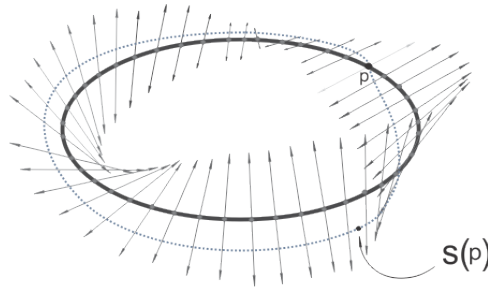


Figura 1.2: A atribuição contínua de um número diferente de zero em cada ponto de S^1 não é possível.

Definição 1.2.3. Sejam $f: M \rightarrow N$ uma aplicação entre variedades diferenciáveis, $E \xrightarrow{\pi_1} M$ e $F \xrightarrow{\pi_2} N$ fibrados vetoriais, dizemos que $\varphi: E \rightarrow F$ é um *morfismo de fibrado vetorial* se é contínua e preserva a estrutura de espaço vetorial nas fibras, i.e., $\varphi|_{E_x}: E_x \rightarrow F_{f(x)}$ é transformação linear de espaços vetoriais, o morfismo φ recobre a aplicação f , i.e., o seguinte diagrama é comutativo.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & F \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

Se $M = N$ e φ é um homeomorfismo, tal que $\varphi|_{E_x}$ é isomorfismo linear, dizemos que φ é um *isomorfismo de fibrados* vetoriais.

Com as notações do exemplo do fibrado tangente, o *fibrado cotangente* é um exemplo natural de fibrado vetorial associado a uma variedade suave, é comumente denotado por T^*M e é dado por

$$T^*M := \bigsqcup_{x \in M} T_x^*M$$

em que T_x^*M denota o dual do tangente T_xM em $x \in M$, com a projeção π que envia um elemento v de T_x^*M em $x \in M$. Então, $\pi: T^*M \rightarrow M$ é um fibrado vetorial sobre M . Para maiores detalhes e a construção explícita das funções de transição que caracterizam o fibrado recomendamos ver seção 3.4 de [27].

Sejam E, F fibrados sobre M de posto r e s respectivamente, com $\tau_{\alpha\beta}$ e $\zeta_{\alpha\beta}$ funções de transição de E e F respectivamente. Existem construções estandar que se podem realizar para formar novos fibrados sobre a variedade base M (detalhes da construção são referidos à [27])

1. A *soma direta* $E \oplus F$ é fibrado vetorial sobre M , dado pelas funções de transição.

$$\begin{bmatrix} \tau_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \zeta_{\alpha\beta} \end{bmatrix} \in GL(r + s, \mathbb{C})$$

2. O *produto tensorial* $E \otimes F$, é fibrado vetorial sobre M com funções de transição

$$\tau_{\alpha\beta} \otimes \zeta_{\alpha\beta} \in GL(rs, \mathbb{C}): \mathbb{C}^r \otimes \mathbb{C}^s \rightarrow \mathbb{C}^r \otimes \mathbb{C}^s.$$

1.3 Fibrado principal

Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n e G um grupo de Lie.

Definição 1.3.1. Um G -fibrado principal é uma tripla (P, M, π) , onde $P \xrightarrow{\pi} M$ é uma aplicação suave e sobrejetora entre variedades diferenciáveis e uma ação de G à direita livre e suave, π é invariante por esta ação e induz um isomorfismo entre M e o conjunto de órbitas P/G . Mais ainda, existe uma cobertura $\{U_\alpha\} \subset M$, tal que o seguinte diagrama é comutativo,

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & U_\alpha \times G \\ \pi \downarrow & \swarrow \text{Pr}_1 & \\ U_\alpha & & \end{array}$$

e φ_α é um isomorfismo equivariante pela ação de G , i.e., $\varphi_\alpha(p) = (\pi(p), g_\alpha(p))$, para algum mapa $g_\alpha: \pi^{-1}(U) \rightarrow G$ que satisfaz, $g_\alpha(pg) = g_\alpha(p)g$ para todo $g \in G$. Pr_1 é a projeção sobre o primeiro fator. G é chamado o *grupo estrutural* e denotaremos um fibrado principal por $G \rightarrow P \xrightarrow{\pi} M$.

Definição 1.3.2. Um *isomorfismo* entre $G \rightarrow P \xrightarrow{\pi_1} M$ e $G \rightarrow Q \xrightarrow{\pi_2} M$ é um difeomorfismo $f: P \rightarrow Q$ entre os espaços totais que é invariante pela ação de G e que recobre a identidade, i.e., o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f} & Q \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\ M & \xrightarrow{\mathbb{1}_M} & M \end{array}$$

Se $f: P \rightarrow P$ é isomorfismo de fibrado, f é dito *automorfismo de fibrados*, denotamos o conjunto de todos os automorfismo de fibrado de P por $\text{Aut}(P)$, que forma um grupo com a composição de funções. O grupo $\text{Aut}(P)$ é de grade importância em teoria dos calibres, o retomaremos mais na frente no capítulo 3.

Exemplo 1.3.3. Dada uma variedade M de dimensão n e um grupo de Lie G qualquer, podemos definir analogamente ao exemplo 1.2.2 um fibrado principal produto, com espaço total $G \times M$ e projeção $\text{Pr}_1: M \times G \rightarrow M$ no primeiro fator, aqui a ação

$$R: (M \times G) \times G \rightarrow M$$

é dada por $R((x, g), h) = (x, gh)$, esta ação é livre e suave, note ademais que a fibra em cada ponto é nada mais que o próprio grupo G . Um fibrado principal é dito *trivial* se é isomorfo a um fibrado produto.

O conjunto de automorfismos de fibrado $\text{Aut}(P)$, é central neste trabalho como será visto mais adiante, onde por meio de uma ação de $\text{Aut}(P)$, definimos o espaço de “moduli” (ver seção 3.2 e definição 3.5.1.) Também para fibrados principais temos as funções de transição que iremos descrever agora. Seja $P \rightarrow M$ um G -fibrado principal e uma cobertura de M por trivializações locais $\{U_\alpha\} \subset M$. Sobre $U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, temos duas maneiras de trivializar o fibrado, como mostra o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} U_{\alpha\beta} \times G & \xleftarrow{\varphi_\beta} & \pi^{-1}(U_{\alpha\beta}) & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & U_{\alpha\beta} \times G \\ & \searrow \text{Pr}_1 & \downarrow \pi & \swarrow \text{Pr}_1 & \\ & & U_{\alpha\beta} & & \end{array}$$

para $b \in M$ e $p \in \pi^{-1}(b)$, temos $\varphi_\alpha(p) = (b, g_\alpha(p))$ e $\varphi_\beta(p) = (b, g_\beta(p))$, em que $g_\alpha(p), g_\beta(p) \in G$, logo, como a ação é transitiva nas fibras, existe $\bar{g}_{\alpha\beta}(p) \in G$ tal que $g_\alpha(p) = \bar{g}_{\alpha\beta}(p)g_\beta(p)$, isto é

$$\bar{g}_{\alpha\beta}(p) = g_\alpha(p)g_\beta(p)^{-1} \quad (1.3.1)$$

de fato $\bar{g}_{\alpha\beta}(p)$ é constante nas fibras, pois

$$\begin{aligned} \bar{g}_{\alpha\beta}(pg) &= g_\alpha(pg)g_\beta(pg)^{-1} = g_\alpha(p)gg^{-1}g_\beta(p) \\ &= \bar{g}_{\alpha\beta}(p). \end{aligned}$$

Dito de outra forma $\bar{g}_{\alpha\beta}(p) = g_{\alpha\beta}(\pi(p))$ para alguma função $g_{\alpha\beta}: U_{\alpha\beta} \rightarrow G$. Segue da equação (1.3.1) as condições de cociclo

1. $g_{\alpha\beta}(b)g_{\beta\alpha}(b) = e$, para cada $b \in U_{\alpha\beta}$, em que $e \in G$ é a identidade do grupo.
2. $g_{\alpha\beta}(b)g_{\beta\gamma}(b)g_{\gamma\alpha}(b) = e$, para cada $b \in U_{\alpha\beta\gamma}$.

Com as notações da discussão prévia, as funções $g_{\alpha\beta}: U_{\alpha\beta} \rightarrow G$ são chamadas *funções de transição* do fibrado principal $G \rightarrow P \xrightarrow{\pi} M$.

Definição 1.3.4. Dado um fibrado (principal ou vetorial) $E \xrightarrow{\pi} M$, uma aplicação $s: M \rightarrow E$, é dita uma *seção* do fibrado, se é suave e para todo $x \in M$, temos $\pi \circ s(x) = x$.

Os campos vetoriais no fibrado tangente e as 1-formas no fibrado cotangente são exemplos de seções. Uma k -forma com valores em um fibrado vetorial $E \rightarrow M$ é uma seção do fibrado tensor $E \otimes \Lambda^k T^*M$, entre E e a k -ésima potência exterior do fibrado cotangente T^*M , i.e., o fibrado que em cada ponto tem como fibra o espaço dual à fibra

do fibrado tangente, adotamos a notação $\Omega^k(M, E) := \Gamma(E \otimes \Lambda^k T^*M)$.

No caso de um fibrado vetorial, sempre existe uma seção distinguida que é a seção que a cada ponto da variedade base faz corresponder o zero de sua fibra, (ver figura 1.3.)

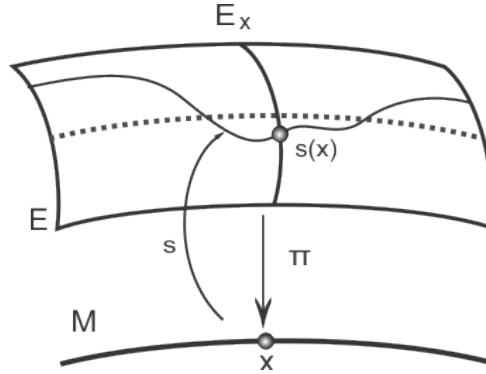


Figura 1.3: Na figura, representamos uma seção qualquer e a linha pontilhada representa a seção nula.

Observações 1.3.5.

1. As seções foram definidas acima como funções definidas em toda a variedade base, uma seção deste tipo é chamada *seção global*, mas também podemos ter seções definidas só em uma vizinhança da variedade base, estas seções serão chamadas de *seções locais*. Se $E \xrightarrow{\pi} M$ é um fibrado, então o espaço de todas as seções será denotado por $\Gamma(E)$ ou também como $\Omega^0(M, E)$.
2. Vale que (ver [20]),

$$\Gamma(E \otimes \Lambda^k T^*M) \cong \Gamma(E) \otimes_{\Omega^0(M)} \Gamma(\Lambda^k T^*M) \cong \Gamma(E) \otimes_{\Omega^0(M)} \Omega^k(M, \mathbb{R}),$$

usaremos estas notações indistintamente para as seções de $E \otimes \Lambda^k T^*M$.

Seja $G \rightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ um fibrado principal com ação à direita $R: M \times G \rightarrow M$, embora as fibras do fibrado principal são difeomorfas ao grupo G por meio do mapa

$$g \in G: \mapsto R_p(g) \in P_p = \pi^{-1}(\pi(p)),$$

as fibras de um fibrado principal não têm em geral um elemento privilegiado para definir seções globais como no caso dos fibrados vetoriais, por isso não é verdade em geral que exista uma seção global. Porém as seções locais sempre existem, de fato, um fibrado principal $G \rightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ admite uma seção global se, e somente se, $G \rightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ é um fibrado trivial, i.e., isomorfo a um fibrado produto, (ver exemplo 1.3.3).

Para ver isto observemos primeiro que as trivializações permitem definir seções locais. Supondo primeiramente que P é localmente trivial, seja $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ uma trivialização local

em um ponto $x \in M$, i.e.,

$$\varphi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times G$$

é um difeomorfismo como na definição 1.3.1. Defina uma seção $s_\alpha: U_\alpha \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$, pela fórmula

$$\varphi(s_\alpha(x)) = (x, e) \quad (1.3.2)$$

em que $e \in G$ é a identidade do grupo.

Inversamente uma seção local $s_\alpha: U_\alpha \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$, permite identificar a fibra sobre um ponto $x \in U_\alpha$ com G , de fato, dado $p \in \pi^{-1}(x)$, existe um único elemento do grupo $g_\alpha(p)$ tal que $p = s_\alpha(x)g_\alpha(p)$, o que dá um isomorfismo entre $\pi^{-1}(U_\alpha)$ e o produto $U_\alpha \times G$ que envia $p \mapsto (s_\alpha(x), g_\alpha(p))$. Consequentemente, se o fibrado for trivial, a mesma construção acima resulta em uma seção global e inversamente, se temos uma seção global, teríamos um difeomorfismo de nosso fibrado com um fibrado produto.

1.4 Fibrado associado e de bases

Temos apresentado até aqui, dois tipos de fibrado, a pergunta natural é como estão relacionados um com o outro, dado um fibrado vetorial é possível obter um $\text{Gl}(k, \mathbb{R})$ -fibrado principal, chamado *fibrado de bases* e viceversa, dado um fibrado principal, podemos obter um fibrado vetorial mediante a construção do *fibrado associado*, estas construções serão usados no resto do texto, damos a ideia da construção e para os detalhes o leitor pode consultar [9] seção 2.2, para o caso do fibrado de bases e [27] seção 10.9 para o caso do fibrado associado.

Fibrado de Bases

Seja $E \xrightarrow{\pi} M$ um fibrado vetorial de posto k , queremos associar um $\text{Gl}(k, \mathbb{R})$ -fibrado principal sobre M , que denotaremos por $F(E) \xrightarrow{\tilde{\pi}} M$. Para tanto, denotemos por F_x o conjunto de todas as bases do espaço vetorial E_x , então cada elemento de F_x pode ser pensado como um isomorfismo linear $\rho: \mathbb{R}^k \rightarrow E_x$. Defina o espaço total por

$$F(E) := \bigsqcup_{x \in M} F_x.$$

$\text{Gl}(k, \mathbb{R})$ age sobre $F(E)$ pela direita por composição e esta ação é livre e transitiva sobre F_x , pois se $\rho \in F_x$ e $g \in \text{Gl}(k, \mathbb{R})$, temos que $\rho * g := \rho \circ g: \mathbb{R}^k \rightarrow E_x$ é isomorfismo. Cada elemento de $F(E)$ é um par $(x, \rho) \in M \times F_x$ com projeção $\tilde{\pi}: F(E) \rightarrow M$ que manda $(x, \rho) \mapsto x$. As trivializações de $F(E)$ estão induzidas pelas trivializações de E da seguinte maneira: Se $\varphi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ é uma trivialização local de E , temos por

definição que a aplicação

$$\varphi_{\alpha,x} := (\varphi_\alpha)|_{E_x} : E_x \rightarrow \mathbb{R}^k$$

é um isomorfismo linear. Defina por fim

$$\begin{aligned} \psi_\alpha: \quad \tilde{\pi}^{-1}(U_\alpha) &\rightarrow U_\alpha \times \mathrm{Gl}(k, \mathbb{R}) \\ (x, \rho) &\mapsto (x, \varphi_{\alpha,x} \circ \rho) \end{aligned}$$

que são as trivializações desejadas que tornam $F(E)$ um $\mathrm{Gl}(k, \mathbb{R})$ -fibrado principal.

Fibrado associado

Seja $G \rightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ um G -fibrado principal, suponhamos que $\rho: G \rightarrow \mathrm{Gl}(V)$ é uma representação dada, em que V é um espaço vetorial. Observemos que uma representação de G em V induz uma ação de G sobre V , de fato, se ρ é uma representação, defina

$$\begin{aligned} *: \quad V \times G &\rightarrow V \\ (v, g) &\mapsto v * g := \rho(g^{-1})v. \end{aligned}$$

Queremos construir um fibrado vetorial $E \xrightarrow{\tilde{\pi}} M$ associado a P , para tanto defina

$$E := P \times_\rho V = P \times V / \sim \tag{1.4.1}$$

onde $\sim$ é a relação de equivalência dada por

$$(p, v) \sim (pg, \rho(g^{-1})v) \text{ para cada } g \in G \tag{1.4.2}$$

Podemos dizer que G age à direita sobre $P \times V$ pela ação $(p, v) * g = (pg, \rho(g^{-1})v)$, isto permite olhar $P \times_\rho V$ como um espaço de órbitas. Defina a projeção $\tilde{\pi}: [(p, v)] \in P \times_\rho V \mapsto \pi(p) \in M$, então temos que o seguinte diagrama é comutativo,

$$\begin{array}{ccc} P \times V & \xrightarrow{P} & P \times_\rho V \\ \mathrm{Pr}_1 \downarrow & & \downarrow \tilde{\pi} \\ P & \xrightarrow{\pi} & M \end{array}$$

onde P é a projeção canônica e Pr_1 é a primeira projeção. Vejamos que $P \times_\rho V \xrightarrow{\tilde{\pi}} M$ é localmente trivial, para tanto, seja $x \in M$ arbitrário e $\varphi_\alpha: \pi^{-1}(U) \rightarrow U_\alpha \times G$ uma trivialização local, denotemos por $\psi = \mathrm{Pr}_2 \circ \varphi_\alpha: \tilde{\pi}^{-1}(U) \rightarrow G$ e definamos,

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha^V: \quad \tilde{\pi}^{-1}(U) &\rightarrow U \times V \\ [(p, v)] &\mapsto (\pi(p), \rho(\psi(p))v) \end{aligned}$$

Como $Pr_1 \circ \varphi = \pi$, tem-se que

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha^V: [(\varphi^{-1}(x, e), v)] &= (x, \rho(\psi(\varphi^{-1}(x, e))), v) = (x, \rho(e)v) \\ &= (x, v).\end{aligned}$$

Daí que o mapa $(x, v) \mapsto [(\varphi^{-1}(x, e), v)]$ é o inverso de φ_α^V , que define desta forma uma trivialização local.

Exemplo 1.4.1. Com as notações acima, no caso particular em que $\rho: G \rightarrow \text{Gl}(\mathfrak{g})$ é a representação adjunta (ver definição 1.1.4) de um grupo de matrizes G na sua álgebra de Lie, dada por $(g, X) \mapsto gXg^{-1}$ o fibrado vetorial associado a $P \rightarrow M$ via esta representação é denotado tipicamente por $\text{ad}(P)$ ou $\mathfrak{g}_P$.

Exemplo 1.4.2. Apresentamos uma versão não linear de $\text{ad}(P)$. Sobre $P \times G$ considere G agindo sobre G mesmo por conjugação, em que $\rho: G \rightarrow \text{Diff}(G)$ manda $g \in G \mapsto \rho(g) = C_g$ a conjugação do grupo como na definição 1.1.3. Definindo uma relação de equivalência como aquela dada na equação (1.4.2), obtemos um fibrado $\text{Ad}(P) := P \times_G G$ com fibra G .

Suponha dada uma seção $s: M \rightarrow \text{Ad}(P)$, podemos definir a função $f: P \rightarrow G$ pela equação $s(\pi(p)) = [p, f(p)]$ e observamos que

$$\begin{aligned}[p, f(p)] &= s(\pi(p)) = s(\pi(pg)) = [pg, f(pg)] \\ &= [p, gf(pg)g^{-1}]\end{aligned}$$

Como a ação é transitiva nas fibras, temos que $f(pg) = g^{-1}f(p)g$, logo podemos observar que o espaço de seções de $\text{Ad}(P)$ está identificado com

$$C(P, G) := \{f \in C^\infty(P, G) \mid f(pg) = g^{-1}f(p)g\} \quad (1.4.3)$$

$C(P, V)$ é chamado o espaço de *funções equivariantes* com valores em G e forma um grupo com a multiplicação induzida: $(f_1 f_2)(p) = f_1(p) f_2(p)$.

Considere $E = P \times_\rho V$ o fibrado associado a um G -fibrado principal P , via uma representação ρ do grupo G no espaço vetorial V . Existe uma relação entre $\Omega^k(P, V)$ e $\Omega^k(M, E)$, vejamos isto. Suponhamos $\omega \in \Omega^k(P, V)$, definimos $\omega' \in \Omega^k(P, V)$ como segue, para $\{X_i\}_{i=1}^k$ campos em $T_x M$, tome levantamentos $\bar{X}_k \in T_p P$, i.e., $\pi_*(\bar{X}_j) = X_j$ para $1 \leq j \leq k$ e considere a expressão:

$$\omega'(\bar{X}_k) = [p, \omega_p(X_1, \dots, X_k)] \text{ para algum } p \in \pi^{-1}(x). \quad (1.4.4)$$

A fim de que ω' na equação acima esteja bem definida, ω tem que satisfazer as condições

da seguinte:

Definição 1.4.3. Seja $G \rightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ fibrado principal. O espaço de k -formas *básicas* sobre P com valores em V denotado por $\bar{\Omega}^k(P, V)$, se define por aquelas k -formas sobre P com valores em V , tais que:

1. $R_g^*(\omega) = \rho(g^{-1})\omega$, para cada $g \in G$.
2. ω é anula no espaço vertical, i.e., $\omega(X, \dots) = 0$ para qualquer campo vertical X .

Observação 1.4.4. Pelo observado antes, as k -formas básicas com valores em V estão em correspondência biunívoca com as k -formas sobre M com valores no fibrado associado $E = P \times_\rho V$ pela fórmula (1.4.4). No caso particular do exemplo 1.4.1, temos

$$\bar{\Omega}^k(P, \mathfrak{g}) \cong \Omega^k(M, \mathfrak{g}_P).$$

Capítulo 2

Conexões e curvatura

Começaremos a estudar as conexões em fibrados principais e vetoriais, o objetivo é estudar a estrutura do conjunto de todas as conexões sobre um fibrado, isto será feito na seção 3.1. A parte de conexões em fibrado vetorial, é pautado principalmente em [20], a parte de fibrados principais, em [9] e [17] e para os resultados no fibrado associado usamos como referência [22].

2.1 Conexões em fibrados vetoriais

M denotará uma variedade diferenciável de dimensão n , $E \xrightarrow{\pi} M$ um fibrado vetorial real (ou complexo) de posto r .

Definição 2.1.1. Uma *conexão linear* sobre o fibrado vetorial E , é um operador $\mathbb{R}$ -linear (ou $\mathbb{C}$ -linear) $\nabla: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E) \otimes \Omega^1(M)$, satisfazendo a *regra de Leibniz*, i.e., $\nabla(f\sigma) = f\nabla(\sigma) + \sigma \otimes df$, para toda $f \in C^\infty$, $\sigma \in \Gamma(E)$ e onde d é a *diferencial exterior*.

As seguintes propriedades são válidas, os cálculos que envolvem sua demonstração podem ser consultados em [20]. Para $X_p, Y_p \in T_p M$ e $a, b \in \mathbb{R}$.

1. $\nabla_{X_p}(fs) = X_p(f) \cdot s(p) + f(p)\nabla_{X_p}(s)$
2. $\nabla_{aX_p+bY_p}(s) = a\nabla_{X_p}(s) + b\nabla_{Y_p}(s)$.

Queremos definir uma conexão no fibrado trivial $E = M \times \mathbb{R}^r$, definido no exemplo 1.2.2. Por meio da identificação, entre $\Gamma(E)$ e $C^\infty(M, \mathbb{R}^r)$ (funções sobre M a valores em $\mathbb{R}^r$) e entre, $\Omega^1(M, E)$ e $\Omega^1(M, \mathbb{R}^r)$ (1-formas sobre M a valores em $\mathbb{R}^r$), define-se a *conexão linear natural*, como a derivada exterior usual de funções de valores vetoriais,

$$d: C^\infty(M, \mathbb{R}^r) \rightarrow \Omega^1(M, \mathbb{R}^r)$$

de modo que, se $\{e_i\}_{i=1}^r$ denota uma base para $\mathbb{R}^r$, então para toda $s \in \Gamma(E)$, existem funções s^i tais que, $s = s^i e_i$ e por tanto $ds = ds^i \otimes e_i$, onde se estende a soma para

$1 \leq i \leq r$. A partir deste exemplo e usando partições da unidade, se pode provar que um fibrado vetorial qualquer, sempre admite uma conexão linear.

Qual é a estrutura do conjunto de todas as conexões lineares em E ? Observe que, se ∇_1 e ∇_2 são duas conexões no fibrado E , $f \in C^\infty(M)$ e $\sigma \in \Gamma(E)$, temos que

$$\begin{aligned} (\nabla_1 - \nabla_2)(f\sigma) &= f\nabla_1\sigma + \sigma \otimes df - f\nabla_2\sigma - \sigma \otimes df \\ &= f(\nabla_1 - \nabla_2)\sigma \end{aligned}$$

se concluí que $\nabla_1 - \nabla_2$ é uma aplicação $C^\infty(M)$ -linear, denotaremos por $\mathcal{E}nd(E) := E^* \otimes E$ e por $End(E) := \Gamma(\mathcal{E}nd(E)) \simeq \Gamma^*(E) \otimes \Gamma(E) \simeq \Gamma(E) \otimes \Omega^1(M)$, então $(\nabla_1 - \nabla_2) \in End(E) \otimes \Omega^1(M)$. Reciprocamente, sendo a soma $\nabla + A$, de uma conexão linear ∇ e uma aplicação $C^\infty(M)$ linear A , uma conexão linear em E , temos o seguinte resultado

Proposição 2.1.2. O conjunto de todas as conexões em E , denotado por $\mathcal{A}(E)$, é um espaço afim modelado sobre $End(E) \otimes \Omega^1(M)$.

Suponhamos E um fibrado vetorial sobre M e $p, q \in M$ pontos próximos, escolhida uma conexão ∇ sobre E , é possível “comparar” as fibras E_p e E_q por meio de um transporte paralelo ao longo de curvas α , juntando p com q (ver figura 2.1), de fato, temos o seguinte resultado

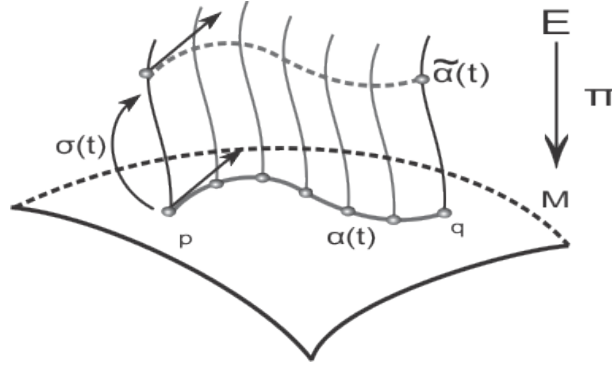


Figura 2.1: As conexões proveem uma maneira de “conectar” ou identificar fibras acima de pontos próximos.

Proposição 2.1.3. Com as notações do parágrafo anterior, seja α uma das tais curvas e $\sigma(t) \in \Omega^0(E_{\alpha(t)})$, i.e., $\sigma(t) = \sigma(\alpha(t))$ para alguma $\sigma \in \Omega^0(E)$. Então, existe um único operador $\frac{D}{dt}$ que satisfaz:

1. $\frac{D(\sigma_1 + \sigma_2)}{dt} = \frac{D\sigma_1}{dt} + \frac{D\sigma_2}{dt}$
2. $\frac{D(f\sigma)}{dt} = \frac{df}{dt}\sigma + f\frac{D\sigma}{dt}$
3. $\frac{D\sigma}{dt} = \nabla_{\alpha'(t)}\sigma$.

Demonstração. A existência deste operador se mostra exibindo como esse está dado em coordenadas, vejamos isto, suponha sem perder generalidade que, para todo t no domínio da curva α , $\alpha(t) \in U$ no qual (U, φ) é uma carta local de M , sejam ademais $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i} \in \Omega^0(TM|_U)$ e $\{e_i\}_{i=1}^r$ um referencial local de $\Omega^0(E|_U)$, onde r denota o posto do fibrado, podemos escrever $\alpha(t) = \varphi^{-1}(u_1(t), \dots, u_1(n))$, para algumas funções suaves $u_i(t)$ e $\sigma(t) = \sum \sigma_i(t)e_i(t)$, em que $e_i(t) = e_i(\alpha(t))$. Assuma a existência de um operador D satisfazendo as condições 1., 2. e 3. da proposição, então, calculando na expressão local de σ e usando as propriedades de D , temos

$$\frac{D\sigma}{dt} = \sum_i \left(\frac{d\sigma_i}{dt} e_i(t) + \sigma_i(t) \nabla_{\alpha'(t)}(e_i) \right),$$

e como $\alpha'(t) = \sum_\alpha \frac{du_i}{dt} \partial_i$, temos que, para algumas funções suaves Γ_{ij}^l sobre U , vale o seguinte:

$$\nabla_{\alpha'(t)}(e_i) = \sum_j \frac{du_j}{dt} \nabla_{\partial_j}(e_i) = \sum_{j,l} \frac{du_j}{dt} \Gamma_{ij}^l e_l,$$

se concluí que o operador D é dado por

$$\frac{D\sigma}{dt} = \sum_l \left(\frac{d\sigma_l}{dt} + \sum_{ij} \frac{du_j}{dt} \Gamma_{ij}^l \sigma_i \right) e_l. \quad (2.1.1)$$

Reciprocamente, a fórmula (2.1.1) define um operador $\frac{D}{dt}$ que satisfaz as propriedades 1., 2. e 3. Por último observemos que a imagem de α pode ser coberta por um número finito de cartas, logo, a hipótese de que está contida em uma carta não é relevante. $\square$

Uma seção $\sigma(t)$ do fibrado E é dita *paralela* ao longo de $\alpha(t)$, se $\frac{D\sigma}{dt} = 0$. Para um ponto $\sigma(0) \in E_{\alpha(0)}$ e uma curva suave, existe uma única seção paralela $\sigma(t)$, tal que, a correspondência $\sigma(0) \mapsto \sigma(1)$ é um isomorfismo entre $E_{\alpha(0)}$ e $E_{\alpha(1)}$. Esta observação será retomada mais na frente (ver 2.5).

Seja $\{\sigma_k\}_{k=1}^r \subset \Gamma(E|_U)$ um referencial local em U , por definição, para cada $x \in U$, $\{\sigma_k(x)\}_{k=1}^r$ é uma base de E_x , podemos descrever a conexão neste referencial, para todo $1 \leq k \leq r$ vale que:

$$\nabla \sigma_k = \sum_j \sigma_j \otimes A_k^j, \quad (2.1.2)$$

no qual $A_k^j \in \Omega^1(M)$ é uma matriz, cujas entradas são 1-formas sobre M com valores em

$\mathbb{R}$. Portanto, dada $\sigma = \sum_k f^k \sigma_k$, em que $f^k \in C^\infty(U)$, temos:

$$\begin{aligned}\nabla \sigma &= \sum_k \nabla(f^k \sigma_k) = \sum_k f^k (\nabla \sigma_k) + \sigma_k \otimes df^k = \sum_k f^k \left(\sum_j \sigma_j \otimes A_k^j \right) + \sigma_k \otimes df^k \\ &= \sum_j \sigma_j \otimes (df^j + \sum_k f^k A_k^j).\end{aligned}$$

Se olharmos σ como um vetor do tipo $(f^1, \dots, f^r)^t$ e $A = (A_k^j)$, uma matriz $r \times r$ de 1-formas, concluímos que na trivialização local U , a conexão tem a forma

$$\nabla = d + A. \quad (2.1.3)$$

Agora, para $X \in TM$ e usando a expressão da equação (2.1.2), temos

$$\begin{aligned}\nabla_X \sigma &= \sum_j \nabla_X (f^j \sigma_j) = \sum_j ((X \cdot f_j) \sigma_j + f_j \nabla_X \sigma_j) = \sum_j ((X \cdot f_j) \sigma_j) + \sum_j \sum_i (f_j A_j^i(X) \sigma_i) \\ &= \sum_i \left((X \cdot f_i) + \sum_j f_j A_j^i(X) \right) \sigma_i,\end{aligned}$$

observe que $\nabla_X \sigma$ é dada por a derivação usual mais um termo de correção. Dizemos que a conexão ∇ é suave se, para algum referencial local, as entradas da matriz (A_k^j) da equação (2.1.2) são suaves.

Sejam $\varphi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}^r$ e $\varphi_\beta: \pi^{-1}(U_\beta) \rightarrow U_\beta \times \mathbb{C}^r$ trivializações em $p \in M$, onde assumimos que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, por isso $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(p, v) = (p, g_{\alpha\beta}(p)v)$, no qual $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Gl}(\cdot, \mathbb{C}^r)$. Temos o seguinte resultado

Proposição 2.1.4. Seja $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Gl}(\cdot, \mathbb{C}^r)$ uma função de transição, então vale a fórmula

$$A^\beta = g_{\alpha\beta}^{-1} dg_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}^{-1} A^\alpha g_{\alpha\beta}. \quad (2.1.4)$$

A^α e A^β denotam a expressão da conexão na trivialização U_α e U_β respectivamente.

Demonstração. Sejam $\{s_i\}$ e $\{t_i\}$ referenciais em U_α e U_β respectivamente, como visto no exemplo 1.2.2, temos que $s_i(p) = \varphi_\alpha^{-1}(p, e_i)$ e $t_j(p) = \varphi_\beta^{-1}(p, e_j)$.

Por um lado $\varphi_\alpha(\varphi_\beta^{-1}(p, e_j)) = \varphi_\alpha(t_j(p))$ e pela definição $\varphi_\alpha(\varphi_\beta^{-1}(p, e_j)) = (p, g_{\alpha\beta}(p)e_j)$, então, escrevendo $g_{\alpha\beta}(p) = (g_j^i(p))_{ij}$, obtemos $\varphi_\alpha(t_j(p)) = (p, \sum g_j^i(p)e_i)$ e invertendo,

$$t_j(p) = \varphi_\alpha^{-1}(p, \sum_i g_j^i(p)e_i) = \sum_i g_j^i \varphi_\alpha^{-1}(p, e_i) = \sum_i g_j^i(p) s_i(p).$$

Agora

$$\begin{aligned}
\sum_i (A_\beta)_j^i(X) t_i(p) &=: \nabla_X t_j(p) = \nabla_X \left(\sum_i g_j^i(p) s_i(p) \right) \\
&= \sum_i X(g_j^i(p)) s_i(p) + \sum_i g_j^i(p) \nabla_X s_i(p) \\
&= \sum_i X(g_j^i(p)) s_i(p) + \sum_i \sum_k g_j^i(p) A_i^k(X) s_k(p) \\
&= \sum_k \left(X(g_j^k(p)) + \sum_i g_j^i(p) A_i^k(X) \right) s_k(p)
\end{aligned}$$

e por outro lado

$$\begin{aligned}
\sum_i (A_\beta)_j^i(X) t_j(p) &= \sum_i (A_\beta)_j^i(X) \sum_k g_i^k(p) s_k(p) = \sum_i \sum_k (A_\beta)_j^i(X) g_i^k(p) s_k(p) \\
&= \sum_k \left(\sum_i g_i^k(p) (A_\beta)_j^i(X) \right) s_k(p).
\end{aligned}$$

Consequentemente temos que, $\sum_i g_i^k(p) (A_\beta)_j^i(X) = X(g_j^k(p)) + \sum_i A_i^k(X) g_j^i(p)$, ou seja, $g_{\alpha\beta} A_\beta = dg_{\alpha\beta} + A_\alpha g_{\alpha\beta}$, e multiplicando pela matriz inversa de $g_{\alpha\beta}$ temos o desejado. $\square$

Olhemos agora o que acontece no produto tensorial $E^* \otimes E$. Podemos estender uma conexão dada em E , para uma conexão em $\mathcal{E}nd(E)$ mediante à fórmula:

$$\bar{\nabla} = \nabla^* \otimes \mathbb{1}_E + \mathbb{1}_{E^*} \otimes \nabla. \quad (2.1.5)$$

Consideramos para $1 \leq i, j \leq r$ o referencial local $\xi_i^j = \tau^j \otimes \sigma_i$, obtemos então

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla} \xi_i^j &= \nabla^* \tau^j \otimes \sigma_i + \tau^j \otimes \nabla \sigma_i = \left(- \sum_l \tau^l \otimes A_l^j \right) \otimes \sigma_i + \tau^j \otimes \left(\sum_k \sigma_k \otimes A_j^k \right) \\
&= \sum_{k,l} [A, S_l^k] \tau^l \otimes \sigma_k,
\end{aligned}$$

onde $[\cdot, \cdot]$ é o comutador graduado (ver teorema A.1.3) e cada S_l^k é uma matriz elementar, i.e., a entrada l, k é igual a 1 e as outras são zero. Agora, dada uma seção qualquer

$$\xi = \sum_{i,j} g_j^i \xi_i^j \quad \text{em que } g_j^i \in C^\infty(M)$$

tem-se que

$$\bar{\nabla} \xi = \sum_{i,j} dg_j^i \cdot \xi_i^j + g_j^i \left(\sum_{k,l} [A, S_l^k] \xi_k^l \right) = \sum_{k,l} \left(dg_l^k + [A, g]_l^k \right) \xi_k^l.$$

Assim, $\bar{\nabla} g = dg + [A, g]$ para qualquer seção local $g \in \mathcal{E}nd(E)$.

Para $\xi \in \text{End}(E) \otimes \Omega^q(M)$, vale

$$\bar{\nabla}\xi = d\xi + [A, \xi] \quad (2.1.6)$$

2.2 Conexões em fibrados principais

Seja $P \xrightarrow{\pi} M$ um fibrado principal ou vetorial, dado um ponto de P , existe um subespaço distinguido do tangente $T_p P$ que definiremos a seguir.

Definição 2.2.1. Dado um fibrado $P \xrightarrow{\pi} M$ (principal ou vetorial), para cada $p \in P$ o subespaço $\text{Ker}(\pi_*) =: \mathcal{V}_p \subset T_p P$, onde $\pi_{*p}: T_p P \rightarrow T_{\pi(p)} M$, formado pelos vetores tangentes a fibra $\pi^{-1}(\pi(p))$ em p , é chamado o *espaço vertical* em p . Um campo $v \in \mathfrak{X}(P)$ em P é dito *vertical* se $v(p) \in \mathcal{V}_p$ para todo p .

Note que o espaço vertical depende só da estrutura do fibrado P e como $\mathcal{V}_p = \text{Ker}(\pi_{*p})$, temos que $(\pi_*)|_{\mathcal{H}_p}: \mathcal{H}_p \rightarrow T_{\pi(p)} M$ é um isomorfismo restrito a um espaço $\mathcal{H}_p$ complementar de $\mathcal{V}_p$ sobre o espaço tangente da base M (ver figura 2.2).

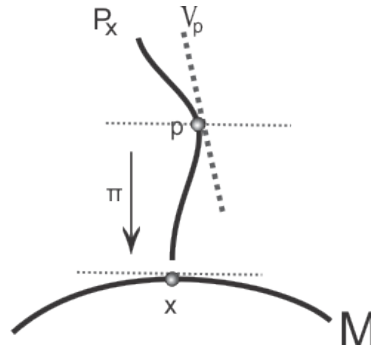


Figura 2.2: O espaço vertical fornece uma distribuição vertical em P , que depende só da estrutura suave do fibrado.

Definição 2.2.2. Dado $Z \in T_p M$, pelo observado acima, existe um único vetor $Z^* \in \mathcal{H}_p$, que chamaremos o *levantamento horizontal* de Z , tal que $\pi_*(Z^*) = Z \circ \pi_*$.

Embora o espaço vertical é naturalmente definido, não existe *a priori*, uma escolha canônica de um complementar para esse, o que motiva a seguinte

Definição 2.2.3. Uma *conexão principal* em P , é uma escolha suave de uma distribuição *horizontal* $\mathcal{H} \subset TP$, que satisfaz:

1. Para todo $p \in P$, $\mathcal{H}_p$ é complementar a $p \in \mathcal{V}_p$
2. $\mathcal{H}$ é G -invariante, i.e., $(R_g)_*(\mathcal{H}_p) = \mathcal{H}_{pg}$, para todo $p \in P$ e para todo $g \in G$.

Denotemos por $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie do grupo de estrutura, para $V \in \mathfrak{g}$, tome β_t^V o fluxo de V na identidade, então $p\beta_t^V$ é uma curva suave que passa por $p \in P$ e como a ação é transitiva na fibra, a imagem da curva fica na fibra de p , logo

$$V^* := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (p\beta_t^V) \quad (2.2.1)$$

é um campo vertical, chamado *campo fundamental* gerado por V . Como G age livre e transitivamente sobre as fibras, a aplicação $V \mapsto V_p^*$ é um isomorfismo entre $\mathcal{V}_p$ e $\mathfrak{g}$.

Lema 2.2.4. Sejam $V \in \mathfrak{g}$, V^* o campo fundamental definido na equação (2.2.1) e $Z \in \mathcal{H}$. Então,

1. $[Z, V^*] \in \mathcal{H}$,
2. Se Y^* é um levantamento de $Y \in \mathcal{T}M$, então $[Y^*, V^*] = 0$.

Demonstração.

1. Escreva V^* por meio do fluxo β_t^V de V , $\xi_t(p) = p\beta_t^V = R_{\beta_t^V}(p)$, temos

$$[V^*, Z](p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} ((\xi_{-t})_*(Z(\xi_t(p))) - Z(p)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \underbrace{((\xi_{-t})_*(\underbrace{Z \circ R_{\beta_t^V}(p)}_{\in \mathcal{H}_{\beta_t^V(p)}}) - \underbrace{Z(p)}_{\in \mathcal{H}_p})}_{\in \mathcal{H}_p}.$$

Como $Z \circ R_{\beta_t^V}(p) \in \mathcal{H}_{\beta_t^V(p)}$, implica que $(\xi_{-t})_*(Z \circ R_{\beta_t^V}(p)) \in H_p$, logo, o limite pertence a $\mathcal{H}_p$, pois H_p é fechado.

2. Suponhamos agora que Y^* é o levantamento de $Y \in \mathcal{T}M$,

$$\begin{aligned} [V^*, Y^*](p) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} ((\xi_{-t})_*(Y^*(\xi_t(p))) - Y^*(p)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} ((\xi_{-t})_*(Y^*(p) \circ R_{\beta_t^V}(p)) - Y^*(p)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} ((\xi_{-t})_* \circ (R_{\beta_t^V})_*(Y^*(p)) - Y^*(p)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} ((\xi_{-t} \circ \xi_t)_* Y^*(p) - Y^*(p)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Y^*(p) - Y^*(p)) = 0. \end{aligned}$$

□

Definição 2.2.5. Seja $G \rightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ um fibrado principal, uma 1-forma de conexão sobre P com valores na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$, satisfazendo as propriedades

1. $R_g^* \omega = \text{Ad}_{g^{-1}} \circ \omega$, para todo $g \in G$ (ω diz-se *ad*-invariante).

2. $\omega(V^*) = V$, para todo $V \in \mathfrak{g}$ e V^* campo fundamental (ver equação 2.2.1).

As definições 2.2.5 e 2.2.3 são equivalentes, de fato, suponhamos que temos ω como na definição 2.2.5, queremos definir uma distribuição satisfazendo as condições da definição 2.2.3, para fazer isso definamos

$$\mathcal{H}_p := \text{Ker}(\omega_p) = \{X \in T_p P \mid \omega_p(X) = 0\}.$$

A condição 2 da definição 2.2.5, garante que $\mathcal{H}_p \oplus \mathcal{V}_p = T_p P$ e da condição 1 temos

$$\omega((R_g)_*(X)) = \text{Ad}(g^{-1})\omega(X) = \text{Ad}(g^{-1})0 = 0.$$

Logo, $(R_g)_*(X) \in \text{Ker}(\omega_{pg})$. Reciprocamente, se temos uma distribuição $\mathcal{H}$, como na definição 2.2.3, então temos a decomposição $\mathcal{H}_p \oplus \mathcal{V}_p = T_p P$, para cada $p \in P$ que satisfaz $(R_g)_*\mathcal{H}_p = \mathcal{H}_{pg}$. Para todo $g \in G$, definamos

$$\omega_p(X) = \begin{cases} V & \text{if } X = V^* \\ 0 & \text{if } X \in \mathcal{H}_p. \end{cases}$$

Então, precisamos apenas mostrar que $\omega_{pg}((R_g)_*(Y)) = \text{Ad}(g^{-1})(\omega(Y))$ para todo $Y \in T_p P$, de fato, se $Y \in \mathcal{H}_p$, os dois lados da igualdade acima são zero, então analisamos o caso em que $Y = V^* \in \mathcal{V}_p$ é um campo fundamental,

$$\begin{aligned} \omega_{pg}((R_g)_*(V^*(p))) &= \omega_{pg}\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (pe^{tV}g)\right) = \omega_{pg}\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (pgg^{-1}e^{tV}g)\right) \\ &= \omega_{pg}\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (pge^{t\text{Ad}(g^{-1})V})\right) = \omega_{pg}((\text{Ad}(g^{-1})V)^*(pg)) \\ &= \text{Ad}(g^{-1})V = \text{Ad}(g^{-1})(\omega_p(V^*)), \end{aligned}$$

com o qual se verifica a afirmação.

Seja $\mathcal{H} \subset TP$ uma conexão principal no fibrado principal $G \rightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ e sejam $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$, uma curva suave com $p \in \pi^{-1}(\gamma(0))$, então, existe uma única curva suave

$$\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow P, \tag{2.2.2}$$

chamada o *levantamento horizontal* de γ , que satisfaz $\tilde{\gamma}(0) = p$, $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ e $\tilde{\gamma}'(t) \in \mathcal{H}_{\tilde{\gamma}(t)}$. A prova desta afirmação pode ser encontrada em [9] lema 2.7.1, vale a pena observar que o levantamento depende de maneira equivariante do ponto $p \in \pi^{-1}(\gamma(0))$, i.e., para $g \in G$ o levantamento em pg é $\tilde{\gamma}g$ (ver figura 2.3).

O próximo corolário motiva o nome *conexão*, pois pode-se pensar que a conexão fornece uma maneira de “conectar” ou identificar as fibras, desde que, os pontos na base

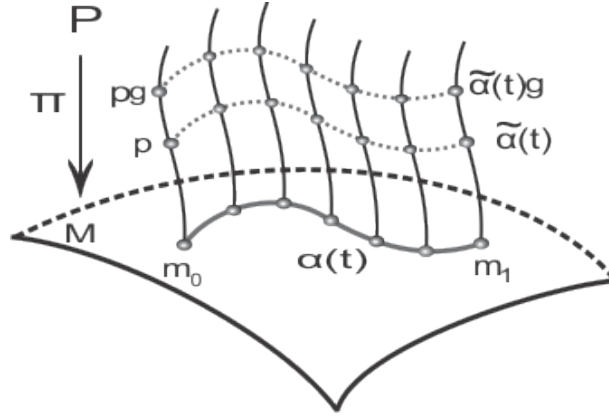


Figura 2.3: O levantamento horizontal em pg é $\tilde{\gamma}g$.

possam ser ligados por uma curva suave (ou suave por partes), compare com a proposição 2.1.3.

Corolário 2.2.6. Dado $G \rightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ um fibrado principal e uma curva suave $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$, tal que $\gamma(0) = m_0$ e $\gamma(1) = m_1$, uma conexão determina um difeomorfismo entre as fibras $\pi^{-1}(m_0)$ e $\pi^{-1}(m_1)$, que é equivariante pela ação de G sobre as fibras.

Demonstração. O isomorfismo consiste em enviar o ponto $p \in \pi^{-1}(m_0)$, no ponto $\tilde{\gamma}(1) \in \pi^{-1}(m_1)$, no qual $\tilde{\gamma}$ é o único levantamento horizontal de γ , este mapa está bem definido, pois, a ação de G nas fibras é suave e transitiva e o levantamento horizontal é equivariante. $\square$

Sejam $G \rightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ um fibrado principal, $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ uma forma de conexão sobre P e seja $\alpha \in \Omega^k(P, V)$ uma k -forma sobre P , com valores em algum espaço vetorial V . Pela definição 2.2.3, temos uma decomposição do tangente TP , como segue

$$TP = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H}, \quad (2.2.3)$$

daí que, se $X \in TP$, então $X = X^v + X^h \in \mathcal{V} \oplus \mathcal{H}$, onde X^v , X^h são a parte vertical e horizontal de X respectivamente.

Definição 2.2.7. Seja $G \rightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ fibrado principal com conexão ω . Define-se a *derivada covariante* com respeito à ω por $D_\omega(\alpha) = d(\alpha \circ \text{Pr}_2)$, no qual $\text{Pr}_2(X) = \text{Pr}_2(X^v + X^h) = X^h$, explicitamente temos:

$$\begin{aligned} D_\omega: \Omega^k(P, V) &\rightarrow \Omega^{k+1}(P, V) \\ \alpha &\mapsto D_\omega(\alpha): TP \times \cdots \times TP \rightarrow \Omega^0(P, V) \\ (X_1, \dots, X_{k+1}) &\mapsto d\alpha(X_1^h, \dots, X_{k+1}^h). \end{aligned}$$

Discutiremos agora a existência das conexões em um fibrado principal, para fazer isso, temos os seguintes lemas preliminares.

Lema 2.2.8. Para uma variedade suave M e um grupo de Lie G , o fibrado produto $M \times G$ admite uma conexão principal (exemplo 1.3.3).

Demonstração. Observe que a fibra em cada ponto $m \in M$ é o próprio G , então a estrutura diferenciável do produto $M \times G$, onde $T(M \times G) \simeq TM \oplus TG$, fornece uma distribuição horizontal $\mathcal{H}_{(p,g)}$ naturalmente definida, tomando em cada ponto $(p, g) \in M \times G$ o subespaço $\mathcal{H}_{(p,g)} = T_p M$ (ver figura 2.4). $\square$

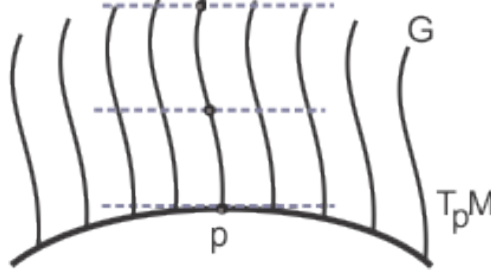


Figura 2.4: O tangente à fibra em $(p, g) \in M \times G$, é $T_g G$, então, $\mathcal{H}_{(p,g)} = T_p M$ é uma distribuição horizontal definida naturalmente.

Lema 2.2.9. Se P tem uma conexão principal, então $\mathcal{A}(P)$, o conjunto de todas as conexões sobre P é um subespaço afim de $\Omega^1(M, \mathfrak{g}_P)$.

Demonstração. Suponha que $\omega, \omega' \in \Omega(P, \mathfrak{g})$ são 1-formas de, então a condição 1 da definição 2.2.5, é satisfeita por $\omega - \omega'$ e a condição 2 garante que se V^* é um campo fundamental gerado por $V \in \mathfrak{g}$, então $(\omega - \omega')(V^*) = V - V = 0$, conseqüentemente, $\omega - \omega' \in \bar{\Omega}^1(P, \mathfrak{g})$ (ver definição 1.4.3). Daí que, o espaço de 1-formas de conexão sobre um fibrado principal é um espaço afim modelado sobre $\bar{\Omega}^1(P, \mathfrak{g})$, como foi visto na observação 1.4.4 é isomorfo a $\Omega^1(M, \mathfrak{g}_P)$, de onde segue o resultado. $\square$

Proposição 2.2.10. Qualquer fibrado principal $G \rightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ admite uma conexão.

Demonstração. Dado $G \rightarrow P \xrightarrow{\pi} M$, considere uma cobertura de M , por abertos trivializantes $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, i.e., para cada $\lambda \in \Lambda$, existe um isomorfismo de fibrados principais $\varphi_\lambda: \pi^{-1}(U_\lambda) \rightarrow U_\lambda \times G$ que tem a forma $\varphi_\lambda(p) = (\pi(p), g_\lambda(p))$, onde $g_\lambda: \pi^{-1}(U_\lambda) \rightarrow G$ satisfaz $g_\lambda(pg) = g_\lambda(p)g$, para todo $g \in G$. A forma de Maurer-Cartan Θ (ver definição 1.1.5) permite definir

$$\omega_\lambda := g_\lambda^* \Theta, \quad (2.2.4)$$

o seguinte diagrama ajuda a entender esta definição

$$\begin{array}{ccc}
 T\pi^-(U_\lambda) & \xrightarrow{\omega_\lambda := g_\lambda^* \Theta} & \mathfrak{g} \\
 & \searrow \Theta & \nearrow \\
 & TG & \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \pi^-(U_\lambda) & \xrightarrow{g_\lambda} & G
 \end{array}$$

e observamos que

1. Usando as propriedades citadas na proposição 1.1.6 da forma de Maurer-Cartan, segue que

$$\begin{aligned}
 (R_g)^*(\omega_\lambda) &:= (R_g)^*g_\lambda^*\Theta = (g_\lambda \circ R_g)^*\Theta = (R_g \circ g_\lambda)^*\Theta \\
 &= g_\lambda^*(R_g)^*\Theta = g_\lambda^*ad_{g^{-1}}\Theta = ad_{g^{-1}}g_\lambda^*\Theta \\
 &= ad_\lambda \circ \omega_\lambda
 \end{aligned}$$

então, ω_λ satisfaz a propriedade 1 da definição 2.2.5.

2. Para ver a segunda propriedade, sejam $P \in P|U_\lambda$ e $V \in \mathfrak{g}$, então $V^* = (R_p)_*(V)$ (ver equação 2.2.1), onde $R_p: g \in G \mapsto R_p(g) = pg \in P$, logo

$$\begin{aligned}
 (\omega_\lambda)_p(V^*) &:= (g_\lambda^*\Theta)_p(V^*) = (\Theta)_{g_\lambda(p)}((g_\lambda)_*(R_p)_*(V)) \\
 &:= (L_{g_\lambda(p)^{-1}})_*(g_\lambda)_*(R_p)_*(V) \\
 &= (L_{g_\lambda(p)^{-1}} \circ g_\lambda \circ R_p)_*(V) = V.
 \end{aligned}$$

Consequentemente, ω_λ é uma 1-forma de conexão sobre $P|U_\lambda$. Como a variedade base M é paracompacta, podemos tomar uma partição da unidade $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ localmente finita e subordinada à cobertura $\{U_\lambda\}$, com isso podemos definir a 1-forma de conexão ω sobre P por $\omega := \sum_\lambda f_\lambda \omega_\lambda$. $\square$

Estudaremos no próximo capítulo, o espaço de moduli de instantons (ver definição 3.5.1), para isso, nós escolhemos trabalhar com conexões sobre fibrados principais, precisamos ver então como estão relacionadas as conexões de um fibrado principal e aquela que pode-se definir no fibrado associado.

2.3 Conexões no fibrado associado e de bases

Seja E um fibrado vetorial de posto k , que vem com uma conexão ∇ , como é ∇ refletida no $\text{Gl}(k, \mathbb{R})$ -fibrado principal $F(E)$? (ver definição 1.4). Um elemento $u \in F(E)_x$, onde $F(E)_x$ é a fibra de x em $F(E)$, é um isomorfismo linear $u: \mathbb{R}^k \rightarrow E_x$ que podemos identificar com uma base de E_x (a imagem por u da base canônica de $\mathbb{R}^k$), temos os seguintes resultados preliminares.

Lema 2.3.1. Seja E um fibrado vetorial com conexão ∇ , $x \in M$ e $X \in T_x M$. Suponha que $\sigma, \sigma' \in \Gamma(E)$ são tais que $\sigma(x) = \sigma'(x)$, então $(d\sigma)_x(X) = (d\sigma')_x(X)$ se, e somente se, $\nabla_X \sigma = \nabla_X \sigma'$ em x .

Demonstração. Demonstrar este lema, é equivalente mostrar a seguinte afirmação: Se $\sigma(x) = 0$, então $(d\sigma)_x(X_x) = 0$ se, e somente se, $(\nabla_X \sigma)(x) = 0$. Como ∇ é um operador local, basta mostrar a afirmação em um referencial de E , considere uma trivialização $\varphi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$, e um referencial local $\{\sigma_i\}$, então $\sigma = \sum f_i \sigma_i$ onde f_i são funções reais sobre U e $\varphi \circ \sigma = (f_1, \dots, f_k)$. Por hipótese, $f_i(x) = 0$ para todo $1 \leq i \leq k$, daí que

$$\nabla_{X_x} \sigma = \sum f_i(x) \sigma(x) + \sum X_x(f_i) \sigma_i(x) = \sum X_x(f_i) \sigma_i(x)$$

logo, $\nabla_{X_x} \sigma = 0$ se, e somente se, $X_x(f_i) = 0$ para cada $1 \leq i \leq k$ se, e somente se, $(\varphi \circ \sigma)_*(X_x) = 0$, mas como φ é isomorfismo, isto acontece se, e somente se, $\sigma_*(X_x) = 0$. $\square$

Definição 2.3.2. Dado um elemento $X \in T_x M$, dizemos que $\sigma \in \Gamma(E)$ é *paralela* na direção X no ponto x , se $\nabla_X \sigma = 0$. Mais geralmente dizemos que σ é paralela ao longo de uma curva γ em M se $\nabla_{\dot{\gamma}(t)} \sigma = 0$, para todo t no domínio de γ .

A demonstração do próximo lema pode ser encontrada ([22], Lem. 5.3).

Lema 2.3.3. Para todo $X \in T_x M$ e $\sigma_0 \in E_x$, existe uma seção local σ de E , tal que $\sigma(x) = \sigma_0$ e que é paralela na direção de X .

Usando o lema prévio, podemos obter um mapa $h: T_{\pi(p)} M \rightarrow T_p E$ que manda X no *levantamento horizontal* $\widetilde{X} := \sigma_*(X)$ para cada $p \in P$, onde σ é uma seção local em E paralela em x na direção de X , tal que $\sigma(x) = p$, a imagem de h denotada por $T_p^v E$, é chamado *subespaço horizontal* de $T_p E$. Dado que π é uma submersão temos que h é um isomorfismo, se denotamos por $T_p^v E$ o tangente à fibra em p , segue que

$$T_p E = T_p^v E \oplus T_p^h E.$$

Agora, se $u \in F(E)_x$, u é um isomorfismo entre E_x e $\mathbb{R}^k$, u pode ser identificado com uma base ordenada $(v_1, \dots, v_k)$ de E_x . Definimos para cada $x \in M$ e cada $X \in T_x M$ um

levantamento horizontal em $u \equiv (v_1, \dots, v_k) \in F(E)_x$ da seguinte maneira. Tome $\{\sigma_i\}_{i=1}^k$ um referencial local de E , tal que

$$\sigma_i(x) = v_i \quad \text{e} \quad (\nabla_X \sigma_i) = 0 \quad 1 \leq i \leq k,$$

$\sigma := (\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ é uma seção local de $F(E)$ que satisfaz $\sigma(x) = u$ e tomamos o levantamento em u $\widetilde{X}(u) = \sigma_*(X) \in T_u F(E)$. O conjunto de todos os levantamentos horizontais em u , é um subespaço de $T_u F(E)$ de dimensão igual a dimensão da variedade base, chamado o subespaço horizontal e denotado por $T_u^h F(E)$, ou simplesmente por $\mathcal{H}_u$, a coleção de todos os subespaços horizontais é chamada a distribuição horizontal. Se denotamos por $\mathcal{V}$ a distribuição horizontal formada pelos espaços tangentes as fibras de $F(E)$, temos

$$T F(E) = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}. \quad (2.3.1)$$

Lema 2.3.4. A distribuição $\mathcal{H}$ é invariante pela ação de $\text{Gl}(k, \mathbb{R})$ sobre $F(E)$, i.e., $(R_a)_*(\widetilde{X}(u)) = \widetilde{X}(ua)$, para qualquer $a \in \text{Gl}(k, \mathbb{R})$.

Demonstração. Sejam $a = (a_{ij}) \in \text{Gl}(k, \mathbb{R})$, $X \in T_x M$, $u = (v_1, \dots, v_k) \in F(E)_x$ e σ uma seção que define a $\widetilde{X}$, i.e., $\sigma(x) = u$ e $(\nabla_X \sigma_i)(x) = 0$. Daí que σa é uma seção local de $F(E)$ que satisfaz $(\sigma a)(x) = ua$ e suas componentes $(\sigma a)_i = \sum_j a_{ji} \sigma_j$, satisfazem

$$\begin{aligned} \nabla_X (\sigma a)_i &= \nabla_X \left(\sum_j a_{ji} \sigma_j \right) = \sum_j \nabla_X (a_{ji} \sigma_j) \\ &= \sum_j a_{ji} \nabla_X \sigma_j = 0 \end{aligned}$$

consequentemente, temos

$$\begin{aligned} (R_a)_*(\widetilde{X}(u)) &= (R_a)_*(\sigma_*(X(x))) = (R_a \circ \sigma)_*(X(x)) \\ &= (\sigma a)_*(X) = \widetilde{X}(ua). \end{aligned}$$

□

Se agora começamos com um fibrado principal $G \rightarrow P \xrightarrow{\pi} M$, que vem munido com uma conexão como na definição 2.2.3. Como esta se reflete no fibrado vetorial associado?(ver 1.4), vejamos isto.

Definição 2.3.5. Dado um ponto $x \in M$, uma seção local σ do fibrado principal P é dita *horizontal* em x , se $(\sigma)_*(T_x M) \subset \mathcal{H}_{\sigma(x)}$.

A demonstração do próximo resultado é referida à ([22], Lema 5.7).

Lema 2.3.6. Para cada ponto $x \in M$ e todo $p \in P$, tal que $\pi(p) = x$, existem seções locais horizontais em x .

Dada uma seção local σ de P sobre um aberto $U \subset M$, qualquer $\Psi \in \Gamma(E)$ se pode escrever sobre U como $\Psi = [\sigma, \xi]$, onde ξ é alguma função definida em U com valores em $\mathbb{R}^k$. O objetivo é definir uma derivada covariante de seções do fibrado associado E , induzida pela conexão de P escolhendo uma σ “apropriada”. Fixado um ponto $x \in M$, pelo lema anterior, a seção Ψ pode ser escrita localmente como $\Psi = [\sigma, \xi]$, sendo σ horizontal em x . Então, para todo $X \in T_x M$, definimos

$$(\nabla_X \Psi)(x) := [\sigma(x), X(\xi)] \quad (2.3.2)$$

onde $X(\xi)$ denota a derivação da função vetorial ξ , na direção do vetor X . Queremos mostrar que ∇ satisfaz as condições da definição 2.1.1, como a derivação ξ na direção de X satisfaz a regra de Leibniz, precisamos somente mostrar que ∇ está bem definida, para tanto, se σ' é outra seção horizontal em x , como a ação de G é suave e transitiva nas fibras, devemos ter $\sigma' = \sigma f$, para alguma função suave $f: U \rightarrow G$, definida em uma vizinhança de x . Observamos primeiramente que

$$(\sigma')_*(X) := (\sigma \circ f)_*(X) = (R_{f(x)})_*(\sigma_*(X)) + (R_{\sigma(x)})_*(f_*(X)),$$

por hipótese, tanto $(\sigma')_*(X)$ quanto $(\sigma)_*(X)$, pertencem a $\mathcal{H}$ e como $\mathcal{H}$ é G -invariante, temos que $(R_{f(x)})_*(\sigma_*(X)) \in \mathcal{H}$, segue que $(R_{\sigma(x)})_*(f_*(X)) \in \mathcal{H}$, mas como $(R_{\sigma(x)})_*(f_*(X))$ é tangente à fibra em $\sigma(x)f(x)$, segue que $(R_{\sigma(x)})_*(f_*(X)) \in \mathcal{V}$, portanto $(R_{\sigma(x)})_*(f_*(X)) = 0$ e como $R_{\sigma(x)}$ é difeomorfismo temos que $f_*(X) = 0$. Com isto, se $\Psi = [\sigma', \rho(f^{-1})\xi]$, no qual f^{-1} denota o inverso de f no grupo G , temos

$$\begin{aligned} (\nabla_X \Psi)(x) &= [\sigma'(x), \rho(f^{-1})X(\xi)] - [\sigma', \rho_*(f_*(X))\xi] \\ &= [\sigma'(x), \rho(f^{-1})X(\xi)] = [\sigma(x), X(\xi)]. \end{aligned}$$

Logo, ∇ está bem definida. A discussão prévia mostra o seguinte resultado.

Teorema 2.3.7. Uma derivada covariante ∇ sobre um fibrado vetorial $E \xrightarrow{\pi} M$, induz uma conexão sobre o fibrado de bases $F(E)$. Reciprocamente, uma conexão no fibrado principal $G \rightarrow P \xrightarrow{\pi} M$, induz uma conexão sobre seu fibrado vetorial associado por uma representação $\rho: G \rightarrow \text{Gl}(k, \mathbb{R}^k)$, além do mais, se $G = \text{Gl}(k, \mathbb{R}^k)$ e ρ é a representação identidade, estas duas construções são recíprocas.

Neste ponto, fazemos uma convenção de notação que precisaremos no capítulo ???. Suponha que temos uma representação ρ de G sobre um espaço vetorial V , se denotamos por $W \rightarrow M$ o fibrado vetorial associado $P \times_G V \rightarrow M$, como vimos, uma conexão A sobre P , dá lugar a uma derivada covariante

$$\nabla_A: \Omega^0(M, W) \rightarrow \Omega^1(M, W)$$

que se estende unicamente para um operador

$$\nabla_A: \Omega^k(M, W) \rightarrow \Omega^{k+1}(M, W)$$

que satisfaz a regra de Leibniz, denotaremos por F_A a curvatura da conexão ∇_A induzida por A .

2.4 Curvatura de uma conexão

Começaremos primeiramente analisando o caso de fibrado vetorial, mas como anteriormente, daremos maior ênfase ao caso de fibrados principais.

2.4.1 Curvatura em fibrados vetoriais

Dado um fibrado vetorial $E \xrightarrow{\pi} M$ com conexão ∇ , a diferencial exterior pode ser estendida a um operador d_∇ , chamado *derivada exterior covariante*, que leva $\alpha \in \Omega^p(M, E)$ em $d_\nabla \alpha \in \Omega^{p+1}(M, E)$. Queremos estender o diferencial exterior da seguinte sequência

$$\Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^p(M) \xrightarrow{d} \Omega^{p+1}(M) \xrightarrow{d} \dots$$

a um operador

$$d_\nabla: \Omega^p(M, E) \rightarrow \Omega^{p+1}(M, E) \quad (2.4.1)$$

que satisfaça a regra de Leibniz, para isso, precisamos dos seguintes resultados cuja prova pode ser encontrada em [20] lema 17.5 e 17.6. Para E, F fibrados vetoriais sobre M , tem-se definido um produto

$$\wedge: \Omega^p(M, E) \otimes \Omega^q(M, F) \rightarrow \Omega^{p+q}(M, E \otimes F)$$

definido por $(\omega \otimes \theta) \wedge (\eta \otimes \mu) = (\omega \wedge \eta) \otimes (\theta \otimes \mu)$, onde $\omega \in \Omega^p(M)$, $\eta \in \Omega^q(M)$ e $\theta \in \Omega^0(E)$, $\mu \in \Omega^0(F)$, que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $(\omega \wedge \eta) \wedge \beta = \omega \wedge (\eta \wedge \beta)$
2. $1 \wedge \beta = \beta$

onde $\omega \in \Omega^i(M)$, $\eta \in \Omega^j(M)$, $\beta \in \Omega^k(M, E)$ e $1 \in \Omega^0(M)$ é a função constante igual a $1 \in \mathbb{R}$. O operador na equação (2.4.1), está unicamente determinado pelas propriedades do seguinte lema.

Lema 2.4.1. Existe um único operador $\mathbb{R}$ -linear $d_\nabla: \Omega^j(M, E) \rightarrow \Omega^{j+1}(M, E)$, que está determinado pelas propriedades:

1. $d_\nabla = \nabla$ sobre $\Omega^0(M, E)$,

2. $d_{\nabla}(\omega \wedge \eta) = (d_{\nabla}\omega) \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d_{\nabla}\eta$, para $\omega \in \Omega^p(M)$ e $\eta \in \Omega^q(M, E)$.

Com este resultado, temos uma sequência

$$0 \longrightarrow \Omega^0(M, E) \xrightarrow{\nabla=d_{\nabla}} \Omega^1(M, E) \xrightarrow{d_{\nabla}} \Omega^2(M, E) \xrightarrow{d_{\nabla}} \dots \quad (2.4.2)$$

A composição

$$F_{\nabla} := d_{\nabla} \circ \nabla : \Omega^0(M, E) \rightarrow \Omega^2(M, E), \quad (2.4.3)$$

é um mapa $\Omega^0(M)$ -linear, pois

$$\begin{aligned} F_{\nabla}(f\sigma) &= d_{\nabla} \circ \nabla(f\sigma) = d_{\nabla}(f \wedge \nabla(\sigma) + \sigma \wedge df) \\ &= f \wedge d_{\nabla}(\nabla(\sigma)) + \nabla(\sigma) \wedge df + \sigma \wedge d^2f - \nabla(\sigma) \wedge df \\ &= f(d_{\nabla} \circ \nabla(\sigma)) = fF_{\nabla}(\sigma). \end{aligned}$$

Ou seja, F_{∇} é $\Omega^0(M)$ -linear e portanto $F_{\nabla} \in \text{End}(E) \otimes \Omega^2(M)$. Valem os isomorfismos

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\Omega^0(M)}(\Omega^0(E), \Omega^2(E)) &\cong \text{Hom}_{\Omega^0(M)}(\Omega^0(E), \Omega^0(E)) \otimes_{\Omega^0(M)} \Omega^2(M) \\ &\cong \Omega^0(\text{Hom}(E, E)) \otimes_{\Omega^0(M)} \Omega^2(M) \\ &\cong \Omega^2(\text{Hom}(E, E)). \end{aligned}$$

com tudo isso fazemos a seguinte definição:

Definição 2.4.2. A 2-forma $F_{\nabla} \in \Omega^2(\text{Hom}(E, E))$ definida na equação (2.4.3), é chamada *forma de curvatura* de E associada à conexão ∇ . Diz-se que a conexão ∇ é *plana*, se a forma de curvatura F_{∇} é o mapa nulo.

2.4.2 Expressão local da curvatura

Queremos calcular a curvatura localmente, para tanto seja $\{e_k\}_{k=1}^r$ um referencial em $U \subset E$, então, $\nabla(e_i) = \sum e_j \otimes A_i^j$, logo, podemos calcular $F_{\nabla}(e_i)$ como segue:

$$\begin{aligned} F_{\nabla}(e_i) &= d_{\nabla}(\nabla(e_i)) = d_{\nabla}(\sum e_j \otimes A_i^j) = \sum \nabla(e_j) \wedge A_i^j + \sum e_j \otimes dA_i^j \\ &= \sum \left(\sum e_l \otimes A_j^l \right) \wedge A_i^j + \sum e_j \otimes dA_i^j \\ &= \sum \sum e_l \otimes (A_j^l \wedge A_i^j) + \sum e_j \otimes dA_i^j \\ &= \sum_l \left(e_l \otimes \left(\sum_j A_j^l \wedge A_i^j + dA_i^j \right) \right). \end{aligned}$$

Daí que, $F_{\nabla}(e_i) = \sum_l e_l \otimes (dA + A \wedge A)$, em notação matricial temos a expressão local da curvatura

$$F_{\nabla} = dA + A \wedge A. \quad (2.4.4)$$

A equação (2.4.4) é conhecida como a *equação de estrutura*. Vejamos como muda a curvatura quando mudamos de trivialização. Seja $E \xrightarrow{\pi} M$ fibrado vetorial com conexão ∇ e $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$ e (φ_β, U_β) trivializações locais, tais que, $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$.

Proposição 2.4.3. Se denotamos por $(F_\nabla)_\alpha$ e $(F_\nabla)_\beta$ a curvatura da conexão local em U_α e U_β respectivamente, tem-se que

$$(F_\nabla)_\beta = g_{\alpha\beta}^{-1}(F_\nabla)_\alpha g_{\alpha\beta} \quad (2.4.5)$$

no qual $g_{\alpha\beta}$ é a função de transição.

Demonstração. Suprimimos por simplicidade o subíndice $\alpha\beta$. Observe que $g^{-1}g = \delta_{ij}$, daí que $(dg^{-1})g = -g^{-1}dg$. Usando a equação de estrutura (2.4.4) e a proposição 2.1.4 temos:

$$\begin{aligned} (F_\nabla)_\beta &= d(g^{-1}A_\alpha g + g^{-1}dg) + (g^{-1}A_\alpha g + g^{-1}dg) \wedge (g^{-1}A_\alpha g + g^{-1}dg) \\ &= -g^{-1}dgg^{-1}A_\alpha g + g^{-1}dA_\alpha g - g^{-1}A_\alpha dg - g^{-1}dgg^{-1}dg + g^{-1}A_\alpha g \wedge g^{-1}A_\alpha g \\ &\quad + g^{-1}A_\alpha g \wedge g^{-1}dg + g^{-1}dg \wedge g^{-1}A_\alpha g + g^{-1}dg \wedge g^{-1}dg \\ &= g^{-1}(dA_\alpha + A_\alpha \wedge A_\alpha)g \\ &= g^{-1}(F_\nabla)_\alpha g. \end{aligned}$$

Do cálculo acima segue o resultado. $\square$

A seguinte identidade é conhecida como a *identidade de Bianchi*, para o caso de fibrado vetorial, uma prova pode ser achada em [27] seção 14.1. Nós vamos mostrar a prova desta identidade no caso de fibrados principais (ver proposição 2.4.7).

Proposição 2.4.4 (*Identidade de Bianchi*). Seja F_∇ a forma de curvatura de uma conexão ∇ sobre um fibrado vetorial E . Então

$$d_\nabla F_\nabla \equiv 0. \quad (2.4.6)$$

2.4.3 Curvatura em fibrados principais

Definimos na equação 2.2.7 a derivada covariante D , que age sobre sobre k -formas sobre P , então, se aplicamos este operador sobre $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$, obtemos a seguinte

Definição 2.4.5. A *curvatura* Ω_ω , associada à 1-forma de conexão ω no fibrado P , é a derivada covariante da conexão, i.e., $\Omega_\omega = D_\omega \omega \in \Omega^2(P, \mathfrak{g})$.

Ω_ω é um elemento de $\bar{\Omega}^2(P, \mathfrak{g})$ (ver definição 1.4.3) e pode ser pensada como 2-forma sobre M com valores no fibrado adjunto $\mathfrak{g}_P$ (ver exemplo 1.4.1), i.e., $\Omega_\omega \in \Omega^2(M, \mathfrak{g}_P) = \Gamma(\mathfrak{g}_P \otimes \Lambda^2 T^* M)$. Alguns resultados sobre a curvatura.

Proposição 2.4.6 (Equação de estrutura). Seja ω uma 1-forma de conexão em P , Ω a sua forma de curvatura, então

$$d\omega = \Omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]. \quad (2.4.7)$$

A equação acima significa que para todo $X, Y \in \mathcal{TP}$, $\Omega(X, Y) = d\omega(X, Y) - \frac{1}{2}[\omega(X), \omega(Y)]$.

Demonstração. Por linearidade das formas diferenciais, fazemos a prova em casos, usando o fato que $\mathcal{TP} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H}$. No caso em que $X, Y \in \mathcal{H}$, temos que $X, Y \in \text{Ker}(\omega)$, logo $[\omega(X), \omega(Y)] = 0$ e

$$\Omega(X, Y) := (d\omega)^h(X, Y) = d\omega(X^h, Y^h) = d\omega(X, Y),$$

assim, vale a equação (2.4.7). Precisamos mostrar que a propriedade se tem para um par onde os dois são verticais e um par de vetores, onde se tem um vertical e um horizontal. Observe que se V^* é um campo fundamental, então $\Omega(V^*, \cdot) = 0$, pois $(V^*)^h = 0$, logo basta mostrar que $d\omega(V^*, \cdot) + [\omega(V^*), \omega(\cdot)] = 0$. Novamente, mostramos isso por casos

1. Se Y^* é horizontal, então $Y^* \in \text{Ker}(\omega)$, logo $[\omega(V^*), \underbrace{\omega(Y^*)}_{=0}] = 0$ e por outro lado

$$d\omega(V^*, Y^*) = V^*(\underbrace{\omega(Y^*)}_{=0}) - Y^*(\underbrace{\omega(V^*)}_{\text{constante}=V}) - \omega[\underbrace{V^*, Y^*}_{\in \mathcal{H}}] = 0.$$

2. Por último, para um campo U^* fundamental (em particular vertical), temos

$$\begin{aligned} d\omega(V^*, U^*) + [\omega(V^*), \omega(U^*)] &= V^*(\underbrace{\omega(U^*)}_{\text{constante}=U}) - U^*(\underbrace{\omega(V^*)}_{\text{constante}=V}) - \omega([V^*, U^*]) + [V, U] \\ &= [V, U] - \omega([V, U]^*) = [V, U] - [V, U] = 0. \end{aligned}$$

E segue o resultado desejado. $\square$

Em toda álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensão r e com base fixada $\{e_i\}_{i=1}^r$, pode-se caracterizar o colchete fornecendo constantes $\{c_{jk}^i\}_{i,j,k=1}^r$ (ver equação A.1.2), tal que

$$[e_j, e_k] = \sum_i c_{jk}^i e_i, \quad j, k = 1, \dots, r.$$

Sejam $\omega = \sum_i \omega^i e_i$ e $\Omega = \sum_i \Omega^i e_i$, com isto, a equação de estrutura em uma base fixada toma a forma

$$d\omega^i = -\frac{1}{2} \sum_{j,k} c_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k + \Omega^i, \quad i = 1, \dots, r.$$

Teorema 2.4.7 (Identidade de Bianchi). Sejam $G \rightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ um fibrado principal, ω

uma conexão de P e Ω a forma de curvatura associada, então

$$D\Omega = 0. \quad (2.4.8)$$

Demonstração. Queremos calcular a derivada covariante de Ω , para tanto, derivamos a equação de estrutura (2.4.7) para obter,

$$D\Omega = Dd\omega + \frac{1}{2}D[\omega, \omega],$$

basta mostrar que $d\Omega \equiv 0$, quando avaliada em X, Y, Z campos horizontais, pois a derivada $D\Omega$ é só a derivada usual avaliada na parte horizontal dos vetores, temos então

$$dd\omega^i + \frac{1}{2} \left(\sum_{jk} c_{jk}^i d\omega^j \wedge \omega^k + \sum_{jk} c_{jk}^i \omega^j \wedge d\omega^k \right) = d\Omega^i$$

mas observe que ω^i é zero em vetores horizontais e $dd\omega$ é zero, então a equação acima dá que $d\Omega(X, Y, Z) = 0$ sempre que X, Y, Z sejam horizontais e concluímos que $D\Omega = 0$. $\square$

Queremos agora estudar como esta representação local muda quando mudarmos de uma trivialização para outra, da mesma maneira como foi feito no caso de fibrado vetorial (ver equação 2.1.4). Para isso, considere uma cobertura de M por abertos trivializantes $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, associada à cobertura, temos isomorfismos

$$\varphi_\lambda: \pi^{-1}(U_\lambda) \rightarrow U_\lambda \times G$$

da forma $\varphi_\lambda(p) = (\pi(p), g_\lambda(p))$, onde $g_\lambda: \pi^{-1}(U_\lambda) \rightarrow G$ satisfaz $g_\lambda(pg) = g_\lambda(p)g$, para todo $g \in G$ e seções locais $s_\alpha: U_\alpha \rightarrow \pi^{-1}(U)$ definidas como na equação (1.3.2). Então, sobre M definimos localmente

$$\omega_\alpha := s_\alpha^* \omega, \quad (2.4.9)$$

$$\Omega_\alpha := s_\alpha^* \Omega, \quad (2.4.10)$$

onde Ω denota a curvatura de ω . Com as notações da discussão prévia, sobre $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, temos o seguinte resultado, cuja prova é referida à [17] p. 65-66, que mostra como é dada a conexão e a curvatura nas mudanças de trivializações.

Lema 2.4.8. Tem-se as seguintes relações

$$\omega_\beta = \text{Ad}(g_{\alpha\beta}^{-1})\omega_\alpha + g_{\alpha\beta}^* \Theta, \quad (2.4.11)$$

onde Θ é a forma de Maurer-Cartan (ver 1.1.5) e $g_{\alpha\beta}$ são as funções de transição. Para a

curvatura temos

$$\Omega_\beta = \text{Ad}(g_{\alpha\beta}^{-1})\Omega_\alpha \quad (2.4.12)$$

Pela proposição 2.4.6, localmente, a curvatura em uma trivialização é dada por:

$$d\omega_\alpha = \Omega_\alpha + \frac{1}{2}[\omega_\alpha, \omega_\alpha] \quad (2.4.13)$$

2.4.4 Adjunto formal de D_ω

Nesta seção consideraremos a variedade (M, g) compacta, de dimensão n , orientada e munida com uma métrica riemanniana g . Em coordenadas locais $\{x_i\}_{i=1}^n$ e a correspondente base local do espaço tangente $\{\partial_i\}_{i=1}^n$ em um ponto qualquer $x \in M$, denotaremos por (g_{ij}) a matriz com entradas $g_{ij} := g(\partial_i, \partial_j)$ e sua inversa será denotada por (g^{ij}) . Dada uma conexão ω sobre um fibrado P , com valores em um espaço vetorial V , pelo isomorfismo $\bar{\Omega}^k(P, V) \cong \Omega^k(M, P \times_G V)$ (ver observação 1.4.4), a derivada covariante D_ω , pode ser pensada como um mapa

$$D_\omega: \Omega^k(M, P \times_G V) \rightarrow \Omega^{k+1}(M, P \times_G V).$$

A fim de definir um operador adjunto formal de D_ω (ver 2.2.7), precisamos exibir um produto interno. Para tanto, suponhamos G grupo de Lie compacto, pode-se demonstrar que existe um produto interno k sobre V , tal que uma representação $\rho: G \rightarrow GL(V)$ dada é ortogonal (ver [25] proposição 4.1), isto é,

$$\rho(G) \subset \mathcal{O}(V) := \{A \in GL(V) \mid k(Av_1, Av_2) = k(v_1, v_2), \text{ para todo } v_1, v_2 \in V\}$$

Para $s, t \in \Gamma(P \times_G V) \cong C(P, V)$, sejam $\sigma, \tau \in C(P, V)$ as imagens respectivas de s, t , definamos

$$\langle s, t \rangle := k(\sigma(p), \tau(p)).$$

Observe que $k(\sigma(pg), \tau(pg)) = k(\rho(g^{-1})\sigma(p), \rho(g^{-1})\tau(p)) = k(\sigma(p), \tau(p))$, daí que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ não depende do ponto da fibra escolhido, assim, temos um produto bem definido:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \Gamma(P \times_G V) \times \Gamma(P \times_G V) \rightarrow C^\infty(M).$$

Um produto pode ser definido em $\Omega^k(P \times_G V) \cong \Gamma(P \times_G V) \otimes \Omega^k(M, \mathbb{R})$ como segue, para $s \in \Gamma(P \times_G V)$ e $\beta \in \Omega^k(M, \mathbb{R})$, i.e., $s \otimes \beta \in \Omega^k(M, P \times_G V)$, definamos

$$(s \otimes \beta)_x(Y_1, \dots, Y_k) = \beta_x(Y_1, \dots, Y_k)s(x) \in P \times_G V.$$

Sejam $\{x_i\}_{i=1}^n$ coordenadas locais em M e a correspondente $\{\partial_i\}_{i=1}^n$ base local do espaço tangente, a métrica g induz um produto sobre $\Omega^k(M, \mathbb{R})$ dado localmente pela fórmula

$$\langle \beta, \gamma \rangle = \frac{1}{k!} \sum \beta^{i_1 \dots i_k} \gamma_{i_1 \dots i_k}$$

onde $\gamma_{i_1 \dots i_k} = \gamma(\partial_{i_1}, \dots, \partial_{i_k})$ e $\beta^{i_1 \dots i_k} = g^{i_1 j_1} \dots g^{i_k j_k} \beta_{j_1 \dots j_k}$, definimos o produto:

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle: \quad \Omega^k(M, P \times_G V) \times \Omega^k(M, P \times_G V) &\rightarrow C^\infty(U \subset M) \\ \langle s \otimes \beta, \tau \otimes \eta \rangle &\mapsto \langle s, \tau \rangle \langle \beta, \eta \rangle \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

Definimos por fim um produto interno sobre $\Omega^k(M, P \times_G V)$ dado por:

$$(\alpha, \beta) = \int_M \langle \alpha, \beta \rangle dV \in \mathbb{R} \quad (2.4.15)$$

onde pontualmente $dV = |\det(g_{ij})|^{\frac{1}{2}} dx_1 \dots dx_n$, é a forma de volume correspondente a métrica g . Denotaremos por $\|\alpha\|^2 = (\alpha, \alpha) \in \mathbb{R}$ e $|\alpha|^2 = \langle \alpha, \alpha \rangle \in C^\infty(M)$.

Pretendemos construir explicitamente o operador adjunto formal de D_ω , para tanto precisamos alguns resultados da teoria de Hodge. Para $m \leq n$, o operador *estrela de Hodge*

$$*: \Omega^m(M, \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^{n-m}(M, \mathbb{R}),$$

é definido como o operador linear que satisfaz $\alpha \wedge * \beta = \langle \alpha, \beta \rangle dV$, para $\alpha, \beta \in \Omega^m(M, \mathbb{R})$.

Vale a seguinte igualdade que pode-se consultar em [8], $*^2 \beta = (*\beta) = \text{sgn}(\det(g_{ij}))(-1)^{m(n-m)} \beta$.

Note em particular que, para $n = 4$ temos $*^2 = \text{Id}$, logo, se o operador estrela age sobre $\Omega^2(M, \mathbb{R})$, se tem a decomposição em auto-espacos associados a ± 1

$$\Omega^2(M, \mathbb{R}) = \Omega_+^2(M, \mathbb{R}) \oplus \Omega_-^2(M, \mathbb{R}), \quad (2.4.16)$$

chamamos $\Omega_+^2(M, \mathbb{R})$ e $\Omega_-^2(M, \mathbb{R})$ *autoespaço* e *antiautoespaço* respectivamente.

Sobre $\Omega^m(P \times_G V) \cong \Gamma(P \times_G V) \otimes \Omega^m(M, \mathbb{R})$ (ver observações 1.3.5 item 2), o operador estrela de Hodge se estende por definir $*(s \otimes \beta) = s \otimes * \beta$, então a decomposição dada na equação (2.4.16) estende, para uma decomposição análoga para o espaço de formas $\Omega^2(P \times_G V)$.

Para $\alpha \in \Omega^m(P \times_G V)$ e $\alpha' \in \Omega^{m+1}(P \times_G V)$, dizemos que δ_ω é o *adjunto formal* de D_ω se, $(D_\omega \alpha, \alpha') = (\alpha, \delta_\omega \alpha')$. Usamos o subíndice para enfatizar que a derivada depende da conexão ω e quando não houver lugar a confusão, o subíndice será omitido.

Proposição 2.4.9. O adjunto formal de $D_\omega: \Omega^m(P \times_G V) \rightarrow \Omega^{m+1}(P \times_G V)$, sobre uma

variedade riemanniana (M, g) orientada, compacta e de dimensão n , é dado por

$$\delta_\omega = (-1)^{n(m+1)} * D_\omega * \quad (2.4.17)$$

Demonstração. Sejam $\alpha = s \otimes \beta$ em $\alpha' = s' \otimes \beta'$ onde $s, s' \in \Gamma(P \times_G V)$, $\alpha \in \Omega^m(P \times_G V)$ e $\alpha' \in \Omega^{m+1}(P \times_G V)$. Por linearidade, basta mostrar a proposição para esse tipo de elementos. Definamos

$$\gamma = \langle s, s' \rangle (\beta \wedge * \beta') \in \Omega^{n-1}(P \times_G V)$$

Como $\int_M d\gamma = 0$ pelo teorema de Stokes, se mostrarmos que $d\gamma = (\langle D_\omega \alpha, \alpha' \rangle - \langle \alpha, \delta_\omega \alpha' \rangle) dV$ o resultado segue pelas definições nas equações (2.4.14) e (2.4.15), calculemos $d\gamma$

$$\begin{aligned} d\gamma &= d(\langle s, s' \rangle (\beta \wedge * \beta')) = d(\langle s, s' \rangle) \beta \wedge * \beta' + \langle s, s' \rangle (d\beta \wedge * \beta' + (-1)^m \beta \wedge d * \beta') \\ &= \langle D_\omega s, s' \rangle \beta \wedge * \beta' + \langle s, s' \rangle d\beta \wedge * \beta' + \langle s, D_\omega s' \rangle \beta \wedge * \beta' + (-1)^m \langle s, s' \rangle \beta \wedge d * \beta' \\ &= \underbrace{(\langle D_\omega s(\cdot), s \rangle \wedge \beta + \langle s, s' \rangle d\beta) \wedge * \beta'}_{(1)} + \underbrace{(\langle s, D_\omega s'(\cdot) \rangle \wedge \beta \wedge * \beta' + (-1)^m \langle s, s' \rangle \beta \wedge d * \beta')}_{(2)}, \end{aligned}$$

onde foi usada a regra Leibniz, a definição do operador estrela de Hodge e a compatibilidade da conexão com a métrica. Observamos as parcelas (1) e (2) em separado.

$$\begin{aligned} (\langle D_\omega(s \otimes \beta), s' \otimes \beta' \rangle) dV &= (\langle D_\omega s(\cdot) \wedge \beta + s \otimes d\beta, s' \otimes \beta' \rangle) dV \\ &= (\langle D_\omega s(\cdot) \wedge \beta + s' \otimes \beta' \rangle + \langle s \otimes d\beta, s' \otimes \beta' \rangle) dV \\ &= (\langle D_\omega s(\cdot), s' \rangle \langle \beta, \beta' \rangle + \langle s, s' \rangle \langle d\beta, \beta' \rangle) dV \\ &= \langle D_\omega s(\cdot), s' \rangle \wedge \beta \wedge * \beta' + \langle s, s' \rangle d\beta \wedge * \beta' \\ &= (1), \end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned} (2) &= (-1)^m \beta \wedge \langle s, D_\omega s'(\cdot) \rangle \wedge * \beta' + (-1)^{mn} \langle s, s' \rangle \beta \wedge *^2 d * \beta' \\ &= (-1)^{mn} (\beta \wedge * * (\langle s, D_\omega s'(\cdot) \rangle \wedge * \beta') + \langle s, s' \rangle \beta \wedge * * d * \beta') \\ &= (-1)^{mn} \langle \beta \otimes s, * (D_\omega s' \wedge * \beta' + s' \otimes d * \beta') \rangle dV \\ &= (-1)^{mn} \langle \beta \otimes s, * D_\omega (s' \otimes * \beta') \rangle v = (-1)^{mn} \langle \beta \otimes s, * D_\omega * (s' \otimes \beta') \rangle v \\ &= -\langle \beta \otimes s, \delta_\omega (s' \otimes \beta') \rangle v, \end{aligned}$$

logo segue o resultado. $\square$

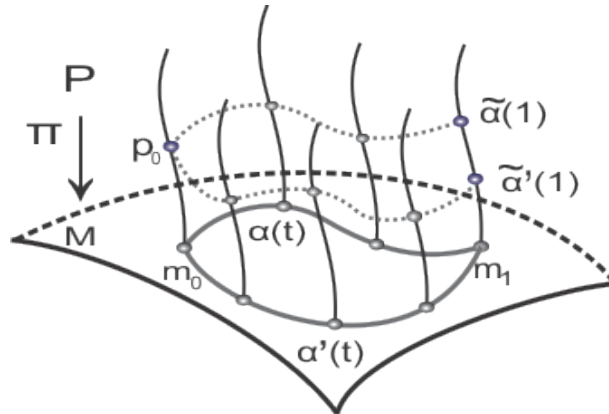


Figura 2.5: O transporte paralelo de p_0 , pela curva $\tilde{\alpha}(1)$, difere do transporte paralelo pela curva $\tilde{\alpha}'(1)$, de fato, dependem da curvatura da conexão.

2.5 A holonomia de uma conexão

Seja $G \rightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ um fibrado principal e $\mathcal{H}$ uma conexão de P . Dados dois pontos $m_0, m_1 \in M$ e uma curva suave por partes α , tal que $m_0 = \alpha(0)$ e $m_1 = \alpha(1)$, vimos no lema 2.2.2 que, para cada ponto $p_0 \in \pi^{-1}(m_0)$ fixado, existe uma único levantamento horizontal $\tilde{\alpha}$ começando em p_0 , o valor $\tilde{\alpha}(1)$ é chamado *transporte paralelo* de p_0 . Mas se tivermos uma outra curva α' ligando m_0 com m_1 , em geral, não é verdade que $\tilde{\alpha}'(1) = \tilde{\alpha}(1)$, (ver figura 2.5), esta dependência do transporte paralelo da curva na base é que dá lugar ao conceito de holonomia, que estudamos nesta seção.

Definição 2.5.1. A holonomia de $\mathcal{H}$ em p_0 é definida por

$$\text{Hol}(p_0)_{\mathcal{H}} := \left\{ g \in G \mid \begin{array}{l} \text{Existe uma curva horizontal suave por partes} \\ \tilde{\alpha}: [0, 1] \rightarrow P, \tilde{\alpha}(0) = p_0 \text{ e } \tilde{\alpha}(1) = p_0 g \end{array} \right\}. \quad (2.5.1)$$

O subíndice $\mathcal{H}$ indica a dependência da conexão, suprimimos o subíndice quando a conexão esteja subentendida.

Dadas duas curvas α e β , denotaremos como é usual $\gamma \cdot \beta$ o caminho suave por partes que percorre primeiro γ e depois β , se γ é um caminho ligando a com b , então $(-\gamma)$ denotará o caminho que percorre γ no sentido inverso ligando b com a .

Neste caso, em que consideramos curvas com valores em um fibrado principal P , no qual temos uma ação $R: P \times G \rightarrow P$ fazemos a seguinte convenção: se γ é uma curva em P , então γg denotará a curva $R(\gamma(t), g) = \gamma(t)g$. Feitas estas convenções apresentamos o seguinte resultado.

Lema 2.5.2.

1. $\text{Hol}(p)$ é um subgrupo de G .
2. Para todo $g \in G$ e para todo $p \in P$, $\text{Hol}(pg) = g^{-1} \text{Hol}(p)g$.

Demonstração.

1. Por definição de $\text{Hol}(p)$, $e \in G$ pertence a $\text{Hol}(p)$, e se $a, b \in \text{Hol}(p)$, logo, existem γ e γ' curvas horizontais ligando p com pa e p com pb respectivamente, considere a curva $\beta = \gamma' \cdot (\gamma b)$, então $\beta(0) = p$ e $\beta(1) = (pa)b = p(ab)$, logo $ab \in \text{Hol}(p)$. De maneira análoga, se $a \in \text{Hol}(p)$ e γ é uma curva horizontal ligando p com pa , então $\beta = (-\gamma)a^{-1}$ é uma curva horizontal, $\beta(0) = p$ e $\beta(1) = pa^{-1}$, logo $a^{-1} \in \text{Hol}(p)$.
2. Se $b \in \text{Hol}(p)$, existe γ horizontal, tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = pb$, considere a curva $\beta = \gamma a$, então $\beta(0) = pa$ e $\beta(1) = (pb)a = pa(a^{-1}ba)$, daí que $a^{-1}ba \in \text{Hol}(pa)$, i.e., $a^{-1}\text{Hol}(p)a \subset \text{Hol}(pa)$.

Por outro lado, se $b \in \text{Hol}(pa)$, então existe γ horizontal, tal que $\gamma(0) = pa$ e $\gamma(1) = (pa)b = p(ab)$, considere $\beta = \gamma a^{-1}$, então β é horizontal e satisfaz, $\beta(0) = (pa)a^{-1} = p(aa^{-1}) = p$ e $\beta(1) = (pa)ba^{-1} = p(aba^{-1})$, logo $aba^{-1} \in \text{Hol}(p)$, concluímos que $b \in a^{-1}\text{Hol}(p)a$ e assim, $\text{Hol}(pa) \subset a^{-1}\text{Hol}(p)a$.

□

Em variedades conexas, para dois pontos $p, q \in P$ quaisquer, existe uma curva γ em M ligando $\pi(p)$ com $\pi(q)$, pelo lema 2.2.2 existe um levantamento horizontal $\tilde{\gamma}$ que liga p com q , logo $\text{Hol}(p)$ é conjugado a $\text{Hol}(q)$.

Proposição 2.5.3 ([16] Proposição (2.3.4)). Para cada $p_0 \in P$, o grupo de holonomia $\text{Hol}(p_0)_{\mathcal{H}}$ é um subgrupo de Lie de G .

definamos o conjunto

$$P_0 := \left\{ p \in P \mid \begin{array}{l} \text{Existe uma curva horizontal suave por partes} \\ \tilde{\alpha}: [0, 1] \rightarrow P, \tilde{\alpha}(0) = p_0 \text{ e } \tilde{\alpha}(1) = p \end{array} \right\}. \quad (2.5.2)$$

Vale a seguinte proposição ([17] p. 83-85).

Proposição 2.5.4. P_0 é uma subvariedade mergulhada de P e $P_0 \rightarrow M$ é um subfibrado principal com grupo de estrutura $\text{Hol}(p_0)_{\mathcal{H}}$.

Em termos da 1-forma de conexão ω sobre o fibrado principal P , denotamos o grupo de holonomia em p_0 por h_{ω, p_0} . Concluimos este capítulo com a seguinte

Definição 2.5.5. Se $h_{\omega, p_0} \leq G$, então ω diz-se *redutível*, se $h_{\omega, p_0} = G$, ω diz-se *irredutível*.

Capítulo 3

Espaço de moduli de instantons

Como foi visto na proposição 2.2.9, $\mathcal{A}(P)$ possui uma estrutura de espaço afim e portanto tem uma topologia natural induzida. Estudamos o espaço quociente $\mathcal{A}(P)$, modulo uma ação que definiremos nesta seção, este quociente tem então uma topologia induzida, o objetivo é mostrar que, sob certas hipóteses, a topologia do quociente é de Hausdorff e mais, contém uma subvariedade suave de dimensão finita, chamada o *espaço de moduli de instantons*.

3.1 Transformações de calibre

Lembramos que, $\text{Aut}(P)$ denota o grupo de automorfismos de fibrado (ver Definição 1.3.2) e é chamado o grupo de *transformações de calibre*. É usual e muito útil olhar o grupo de transformações de calibre de formas alternativas, como foi observado no exemplo 1.4.2, as seções do fibrado $\text{Ad}(P)$ podem ser pensadas como funções que comutam com a conjugação do grupo, estas seções estão relacionadas com $\text{Aut}(P)$, de fato, vale o seguinte

Lema 3.1.1. Sendo $f \in \Gamma(\text{Ad}(P))$. Defina $\varphi(f): P \rightarrow P$ por $\varphi(f) = pf(p)$. Então $\varphi(f)$ é uma transformação de calibre e $\varphi: f \in \Gamma(\text{Ad}(P)) \mapsto \varphi(f) \in \text{Aut}(P)$ é um isomorfismo de grupo.

Demonstração. Se $f \in \Gamma(\text{Ad}(P))$, como visto no exemplo 1.4.2, temos $f(pg) = g^{-1}f(p)g$. Para mostrar que $\varphi(f) \in \text{Aut}(P)$, precisamos ver que preserva as fibras e que comuta com a ação de G em P .

$$\varphi(f)(pg) = (pg)f(pg) = (pg)g^{-1}f(p)g = pf(p)g = \varphi(f)(p)g.$$

Logo, $\varphi(f)$ comuta com a ação do grupo G e preserva as fibras por definição. Note que

se $f_1, f_2 \in \Gamma(\text{Ad}(P))$, temos:

$$\begin{aligned}\varphi(f_1 f_2)(p) &= p(f_1 f_2)(p) = p f_1(p) f_2(p) = \varphi(f_1)(p) f_2(p) \\ &= \varphi(f_1)(p f_2(p)) = \varphi(f_1)(\varphi(f_2)(p)) = \varphi(f_1) \circ \varphi(f_2)(p).\end{aligned}$$

A inversa de φ está dada explicitamente por $\varphi^{-1}(F)(p) = g$, onde $F \in \text{Aut}(P)$ e g é o único elemento de G tal que $F(p) = pg$. $\square$

O lema acima nos diz que um elemento de $\text{Aut}(P)$ está identificado com: Um automorfismo de fibrado principal $F: P \rightarrow P$, como seções do fibrado $\text{Ad}(P) = P \times_G G$ ou como mapas $f: P \rightarrow G$, tais que $f(pg) = g^{-1}f(p)g$, para todo $p \in P$ e $g \in G$.

3.2 Ação do grupo de calibre sobre $\mathcal{A}(P)$

Nesta seção, definimos a ação de $\text{Aut}(P)$ sobre $\mathcal{A}(P)$. Começaremos com o seguinte

Lema 3.2.1. Sendo $\varphi \in \text{Aut}(P)$ e $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ uma 1-forma de conexão, então $\varphi^*\omega$ é uma 1-forma de conexão sobre P .

Demonstração. Para ω vale: $\varphi \circ R_g = R_g \circ \varphi$ e $R_g^* \omega = \text{Ad}_{g^{-1}} \omega$ para todo $g \in G$, mostramos estas propriedades para $\varphi^*\omega$, de fato, para todo $g \in G$, $\varphi(pg) = \varphi(R_g(p)) = \varphi(p)g = R_g(\varphi(p))$, i.e., $R_g \circ \varphi = \varphi \circ R_g$, daí que:

$$\begin{aligned}R_g^*(\varphi^*\omega) &= (\varphi \circ R_g)^*\omega = (R_g \circ \varphi)^*\omega = \varphi^* \circ R_g^*\omega \\ &= \varphi^*(\text{Ad}_{g^{-1}} \omega) = \text{Ad}_{g^{-1}}(\varphi^*\omega).\end{aligned}$$

Agora, para $V \in \mathfrak{g}$, sendo V^* o campo fundamental correspondente (ver Equação 2.2.1), considerando e^{tV} o fluxo na identidade do campo V , temos:

$$\begin{aligned}(\varphi^*\omega)_p(V^*) &:= \omega_{\varphi(p)}(\varphi_{*p}(V^*)) = \omega_{\varphi(p)}\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi(pe^{tV})\right) = \omega_{\varphi(p)}\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi(p)e^{tV}\right) \\ &= \omega_{\varphi(p)}(V^*) = V.\end{aligned}$$

Se conclui que $\varphi^*\omega$ é uma 1-forma de conexão. $\square$

Denotaremos $\mathcal{H}_\omega$ para enfatizar que o espaço horizontal é induzido pela conexão ω . Vale que o espaço horizontal em $p \in P$, com respeito a $\varphi^*\omega$, é dado por $(\mathcal{H}_{\varphi^*\omega})_p = D\varphi_p^{-1}((\mathcal{H}_\omega)_{\varphi(p)})$, definamos um mapa:

$$R: (\omega, \varphi) \in \mathcal{A}(P) \times \text{Aut}(P) \mapsto R(\omega, \varphi) := \varphi^*\omega \in \mathcal{A}(P) \quad (3.2.1)$$

e observe que

$$\begin{aligned} R(R(\omega, \varphi), \psi) &= \psi^*(R(\varphi, \omega)) = \psi^*(\varphi^*(\omega)) = (\psi \circ \varphi)^*(\omega) \\ &= R(\omega, \varphi \circ \psi). \end{aligned}$$

Deste modo que o mapa em (3.2.2) é uma ação à direita sobre $\mathcal{A}(P)$. Vejamos como esta ação é dada em termos das funções G -invariantes do lema 3.1.1.

Proposição 3.2.2. Sendo $\omega \in \mathcal{A}(P)$ uma 1-forma de conexão e $f \in C(P, G) \subset C(P, \text{End}(\mathbb{C}^n))$, vale que $f \cdot \omega := \varphi(f)^*\omega = f^{-1}df + f^{-1}\omega f$, i.e., para $X \in T_p P$, $(f^{-1} \cdot \omega)(X) = f^{-1}(p)df_p(X) + f^{-1}(p)\omega(X)f(p)$.

Demonstração. Tomemos uma curva suave $\gamma: I \rightarrow P$, tal que $\gamma'(0) = X$ e derivando em $t = 0$, temos:

$$\begin{aligned} \varphi(f)_*(X) &= \frac{d}{dt}(\varphi(f)(\gamma(t))) = \frac{d}{dt}(\gamma(t)f(\gamma(t))) \\ &= \frac{d}{dt}(pf(\gamma(t))) + \frac{d}{dt}(\gamma(t)f(p)) \\ &= \frac{d}{dt}(pf(p)f(p)^{-1}f(\gamma(t))) + \frac{d}{dt}(R_{f(p)}(\gamma(t))) \\ &= (f(p)^{-1}df_p(X))_{pf(p)}^* + (R_{f(p)})_*(X) \end{aligned}$$

note que $f(p)^{-1}f(\gamma(t)) \in G$ é uma curva passando pela identidade, logo $f(p)^{-1}df_p(X) \in \mathfrak{g}$, logo $(f^{-1} \cdot \omega)(X) := \omega(\varphi(f)_*(X)) = f^{-1}(p)df_p(X) + f^{-1}(p)\omega(X)f(p)$ como queríamos provar. $\square$

Da mesma maneira que foi definido $C(P, G)$ (ver Equação (1.4.3)), define-se $C(P, \mathfrak{g})$, em que o grupo está sendo representado na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, via a representação adjunta. De fato, $C(P, \mathfrak{g})$, pode ser pensado como a “álgebra de Lie” do “grupo de Lie” de dimensão infinita $\text{Aut}(P)$, esta afirmação será revisitada mais na frente no lema 3.4.1. Existe um mapa

$$\begin{aligned} \text{Exp}: \quad C(P, \mathfrak{g}) &\rightarrow C(P, G) \\ s &\mapsto \text{Exp}(s): \quad P \rightarrow G \\ p &\mapsto \exp(s(p)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} s(p)^n \end{aligned}$$

observe que $s(p) \in \mathfrak{g} \subset \text{End}(\mathbb{C}^n)$. Consequentemente pelo lema 3.1.1, temos um mapa:

$$\varphi \circ \text{Exp}: C(P, \mathfrak{g}) \rightarrow \text{Aut}(P).$$

Note que se $s \in C(P, \mathfrak{g})$, então para todo $t \in \mathbb{R}$ temos $\varphi(\text{Exp}(ts))(p) = p \exp(ts(p))$ e

como $\text{Aut}(P)$ age sobre $\bar{\Omega}^k(P, V)$, então para $\alpha \in \bar{\Omega}^k(P, V)$, faz sentido tomar a derivada:

$$s \cdot \alpha := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\varphi(\text{Exp}(ts) \cdot \alpha)) \in \bar{\Omega}^k(P, V).$$

Mais detalhes da discussão acima, assim como a prova do próximo corolário, podem ser encontrados em [4] pág. 340-342.

Corolário 3.2.3. Sejam $s \in C(P, \mathfrak{g})$ e $\omega \in \mathcal{A}(P)$, derivando em $t = 0$, temos que $s \cdot \alpha := \frac{d}{dt}(\text{Exp}(ts) \cdot \omega) = ds + [\omega, s] = D_\omega s$

Denotaremos o estabilizador da conexão ω da ação dada na equação (3.2.1) por

$$\text{Stab}(\omega) := \{\varphi \in \text{Aut}(P) \mid \varphi^* \omega = \omega\}.$$

Lembremos que, para $p_0 \in P$ foi definido na seção 2.5 a holonomia h_{ω, p_0} da conexão ω no ponto p_0 e mostramos que é um subgrupo de G , denotamos o centralizador deste subgrupo por:

$$\mathcal{Z}(h_{\omega, p_0}) := \{g \in G \mid gg_0 = g_0g, \text{ para cada } g_0 \in h_{\omega, p_0}\}.$$

Vale o seguinte resultado, para o qual podemos supor M conexa por caminhos, pois caso contrário, é possível pensar nas suas componentes conexas por caminhos.

Proposição 3.2.4. Sejam $f \in C(P, G)$, $\varphi(f)$ como no lema 3.1.1 e P_0 , como na definição 2.5.2. Então o mapa que envia $\varphi(f) \in \text{Stab}(\omega)$ em $f(p_0) \in \mathcal{Z}(h_{\omega, p_0}) \subset G$ é um isomorfismo, i.e., $\psi: \text{Stab}(\omega) \xrightarrow{\sim} \mathcal{Z}(h_{\omega, p_0})$.

Demonstração. Vamos mostrar primeiramente que $\psi(\text{Sta}_\omega) \subset \mathcal{Z}(h_{\omega, p_0})$, para tanto, seja $\varphi(f)$ e $g_0 \in h_{\omega, p_0}$ fixo mas arbitrário, precisamos mostrar que $f(p_0)g_0 = g_0f(p_0)$. Como $g_0 \in h_{\omega, p_0}$ segue que $p_0g_0 \in P_0$ e daí que podemos tomar γ curva horizontal, tal que $\gamma(0) = p_0$ e $\gamma(1) = p_0g_0$, então $\gamma f(p_0)$ é uma curva horizontal que junta $p_0f(p_0)$ com $p_0g_0f(p_0)$. Como $\varphi(f) \in \text{Sta}_\omega$, tem-se que $\varphi(f) \circ \gamma$ é uma curva horizontal, que liga $p_0f(p_0)$ a

$$\varphi(f)(\gamma(1)) = \varphi(f)(p_0g_0) = \varphi(f)(p_0)g_0 := p_0f(p_0)g_0,$$

além do mais, temos que $\pi(\gamma f(p_0)) = \pi(\varphi(f) \circ \gamma)$, pois $\varphi(f)$ recobre a identidade. Observe que as curvas $\gamma f(p_0)$ e $\varphi(f) \circ \gamma$ projetam na mesma curva na base M e começam no mesmo ponto $p_0f(p_0)$, daí que pela unicidade do levantamento horizontal (ver Lema 2.2.2), temos:

$$p_0g_0f(p_0) = p_0f(p_0)g_0$$

e como a ação do grupo estrutural sobre P é livre nas fibras, segue que $g_0f(p_0) = f(p_0)g_0$ como queríamos.

Precisamos olhar agora a injetividade, para isso, observe que se $\varphi(f) \in \text{Sta}_\omega$, temos que

$D_\omega f = 0$ (no qual f é pensada como um elemento de $C(P, \text{End}(\mathbb{C}^r))$, ver a Proposição 3.2.2). Então f é constante igual a $f(p_0)$ sobre P_0 , como a base é conexa por hipótese, então P_0 intersecta cada fibra de P , deste modo como f é equivariante, fica determinada por seu valor em $f(p_0)$, logo ψ tem que ser injetora. Para ver a sobrejetividade, tome $g' \in \mathcal{Z}(h_{\omega, p_0})$ e defina

$$f: P_0 \rightarrow G \quad (3.2.2)$$

constante igual a g' sobre P_0 , note que, como cada fibra intersecta a P_0 em algum q_0 , então podemos estenda-la para uma função $\tilde{f} \in C(P, G)$ pela fórmula:

$$\tilde{f}(q_0 g) = g^{-1} f(p_0) g \quad (3.2.3)$$

e como $\tilde{f}$ é constante sobre P_0 , temos que $df|_{P_0} = 0$ e como $\mathcal{H}_\omega \subset TP_0$, temos $D_\omega f = 0$ e pela equivariância de D_ω , é nula em P , segue que $\varphi(f) \in \text{Sta}_\omega$ e segue o desejado. $\square$

P_0 é um subfibrado com grupo estrutural h_{ω, p_0} (ver Proposição 2.5.4). Na seção 3.5 estudaremos a estrutura do espaço de conexões sobre um fibrado principal, em que o grupo estrutural é $\text{SU}(2)$, por isso e pela proposição anterior, apresentamos o seguinte resultado.

Corolário 3.2.5. Se $G = \text{SU}(2)$, então existe um subgrupo $\{\pm 1\} \subset \text{Aut}(P)$ que consiste de todas as seções constantes através de $\pm 1 \in \text{SU}(2)$. Este subgrupo estabiliza toda conexão sobre P . Se uma conexão ω tem estabilizador contendo tal grupo, então ω é induzida de uma conexão sobre um S^1 -fibrado. Em tal caso, o estabilizador é isomorfo a S^1 , a menos que a conexão seja induzida por uma $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -conexão e em neste caso o estabilizador é isomorfo a $\text{SU}(2)$.

Demonstração. $\text{SU}(2) = \{g \in \text{Gl}(2, \mathbb{C}) \mid g\bar{g}^t = \bar{g}^t g = I, \det g = 1\}$, aqui $\bar{g}^t$ denota a matriz transposta conjugada de g , denotamos por

$$\mathfrak{su}(2) = \{g \in M(2, \mathbb{C}) \mid g = -\bar{g}^t, \text{ e } \text{tr } g = 0\}$$

a álgebra de Lie de $\text{SU}(2)$, esta álgebra tem dimensão três e não contém subálgebras de dimensão dois, portanto os subgrupos de $\text{SU}(2)$ são discretos, unidimensionais ou o próprio $\text{SU}(2)$, lembramos que dado um subconjunto S de um grupo G o centralizador de S é definido por

$$C_G(S) := \{g \in G \mid \text{para todo } s \in S, \quad ga = ag\}$$

daí que o centralizador do grupo G é o centro $\mathcal{Z}(G)$. O centro de $\text{SU}(2)$ é dado por matrizes da forma zI em que z é uma raiz da unidade, $\mathcal{Z}(\text{SU}(2))$ é então isomorfo ao grupo cíclico $\mathbb{Z}_2$, assim se um subgrupo H de $\text{SU}(2)$ tem centralizador maior que ± 1 , este

está contido em um círculo de $SU(2)$ e neste caso, o centralizador é exatamente o círculo que o contém, no caso em que H esteja contido no centro, então seu centralizador é todo $SU(2)$. $\square$

Para encerrar esta seção, damos uma definição que precisaremos mais adiante na seção 3.4.

Definição 3.2.6. Dizemos que M admite uma *fatia* pela ação de G em $x \in M$, se existe uma subvariedade aberta $N \subset M$ que contém x , tal que:

1. $T_y M := T_y N \oplus T_y(G \cdot y)$ onde $T_y(G \cdot y)$ é o espaço tangente à órbita de y .
2. O mapa de projeção natural no quociente $M \rightarrow M/G$ restrito a N é injetivo.

Pode-se mostrar (ver [8] p. 56) que se cada $x \in M$ admite uma fatia e a ação de G sobre M é livre, então o espaço de órbitas M/G é uma variedade de Hausdorff desde que

$$\Gamma = \{(x, xg) \mid x \in M \text{ e } g \in G\}$$

o gráfico da ação, seja fechado. De fato vale que Γ é fechado se, e somente se, M/G é um espaço de Hausdorff.

3.3 O funcional de Yang-Mills

Suponhamos (M, g) variedade Riemanniana de dimensão n , compacta, orientada e forma de volume dV . Um fibrado principal $G \rightarrow P \xrightarrow{\pi} M$, em que G é pensado como um grupo de matrizes com a sua representação adjunta (ver Definição 1.1.4), $\text{Ad}: G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$ onde $\text{Ad}(g)(A) = gAg^{-1}$, então $d(\text{Ad})_{*e}A = \text{ad}(A) = [A, \cdot]$. Denotemos por $k: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ a forma bilinear simétrica dada por:

$$k(A, C) = -\text{tr}(\text{ad}(A) \circ \text{ad}(C)).$$

Esta forma satisfaz $k(\text{Ad}_g(A), \text{Ad}_g(C)) = k(A, C)$, pois se $X \in \mathfrak{g}$, temos que

$$\begin{aligned} \text{ad}(\text{Ad}(g)(A))X &= [\text{Ad}(g)(A), X] = [d(C_g)_1 A, X] \\ &= d(C_g)_1 [A, d(C_{g^{-1}})_1 X] = \text{Ad}_g(\text{ad}(A)(\text{Ad}_{g^{-1}} X)) \\ &= \text{Ad}_g \circ \text{ad}(A) \circ \text{Ad}_{g^{-1}} X, \end{aligned}$$

segue que $\text{ad}(\text{Ad}(g)(A)) = \text{Ad}_g \circ \text{ad}(A) \circ \text{Ad}_{g^{-1}}$, analogamente para $\text{Ad}_g(C)$, logo usando a propriedade do traço ($\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$), segue que

$$-k(\text{Ad}_g(A), \text{Ad}_g(C)) = \text{tr}(\text{ad}(\text{Ad}_g(A)) \circ \text{ad}(\text{Ad}_g(C))) = \text{tr}(\text{ad}(A) \circ \text{ad}(C)) = k(A, C)$$

como afirmamos. $-k$ é chamada a *forma de Killing*, o fato de k ser não degenerada é equivalente a G ser semi-simples, pode-se mostrar que k é positiva definida, se G é compacto e semi-simples (ver [4] p. 360). Se define o *funcional de Yang-Mills*

$$\begin{aligned} \text{YM: } \mathcal{A}(P) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto \text{YM}(\omega) := \frac{1}{2} \|\Omega_\omega\|^2 = \frac{1}{2} \int_M |\Omega_\omega|^2 \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

em que $\Omega_\omega \in \Omega^2(M, P \times_G \mathfrak{g})$ é a curvatura associada a ω e $|\Omega_\omega|^2 = \langle \Omega_\omega, \Omega_\omega \rangle$, com o produto definido na equação (2.4.14), relativo a forma de Killing e a métrica g de M .

Agora, para $t \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathcal{A}(P)$ e $\tau \in \bar{\Omega}^1(P, \mathfrak{g})$, seja $\omega_t = \omega + t\tau$, pela estrutura de espaço afim de $\mathcal{A}(P)$, a aplicação $t \rightarrow \omega_t$ é uma curva em $\mathcal{A}(P)$. Derivando em $t = 0$ temos

$$\frac{d}{dt} \Omega_{\omega_t} = \frac{d}{dt} (d\omega_t + \frac{1}{2} [\omega_t, \omega_t]) = d\tau + [\omega, \tau] = D_\omega \tau.$$

Foi usado o corolário 3.2.3 e usando o adjunto formal de D_ω , como visto na proposição 2.4.9, temos

$$\frac{d}{dt} \text{YM}(\omega_t) = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} (\Omega_{\omega_t}, \Omega_{\omega_t}) = (D_\omega \tau, \Omega_\omega) = (\tau, \delta_\omega \Omega_\omega).$$

Como os produtos internos considerados são positivos definidos, segue que $\omega \in \mathcal{A}(P)$ é um ponto crítico do funcional de Yang-Mills se, e somente se,

$$\delta_\omega \Omega_\omega = 0 \quad (3.3.2)$$

a equação acima é conhecida como a *equação de Yang-Mills*. Como foi observado na equação (2.4.16), para variedades de dimensão 4, podemos pensar em conexões autoduais e antiautoduais, como aquelas cuja curvatura associada pertencem a auto-espço associado a $+1$ e -1 respectivamente. Observe que pela identidade de Bianchi (2.4.7), se uma certa conexão ω é autodual ou antiautodual, temos

$$\begin{aligned} \delta_\omega \Omega_\omega &= - * D_\omega * (\pm \Omega_\omega) = - * D_\omega (\pm \Omega_\omega) \\ &= \pm * (D_\omega (\Omega_\omega)) = 0 \end{aligned}$$

Logo estas conexões, se existem, são pontos críticos do funcional de Yang-Mills, de fato, pode ser mostrado que na verdade são pontos de mínimo (ou de máximo, dependendo da orientação fixada em M) de YM (ver [4] p. 361). Observe que se $\varphi \in \text{Aut}(P)$ e ω é uma 1-forma de conexão, a curvatura de $\varphi^* \omega$ é dada por

$$\Omega_{\varphi^* \omega} = d(\varphi^* \omega) + \frac{1}{2} [\varphi^* \omega, \varphi^* \omega] = \varphi^* (d\omega + \frac{1}{2} [\omega, \omega]) = \varphi^* \Omega_\omega$$

Portanto $YM(\varphi^*\omega) = \frac{1}{2}\|\varphi^*\Omega_\omega\|^2 = \frac{1}{2}\|\Omega_\omega\|^2 = YM(\omega)$, isto significa que o funcional de Yang-Mills é invariante pela ação do grupo de transformações de calibre (ver Equação 3.2.1), em particular o conjunto de pontos críticos de YM é preservado pela ação do grupo de calibre.

3.4 Normas L_k^p e espaço quociente $\mathcal{B}_2(P)$

A fim de estudar o espaço quociente $\mathcal{B}(P)$ pela ação de $\text{Aut}(P)$ em $\mathcal{A}(P)$, definida na equação (3.2.1) e deduzir que este tem propriedades “razoáveis”, é preciso mostrar que a ação admite uma fatia (ver Definição 3.2.6), para estabelecer este resultado precisamos fazer uma revisão de alguns resultados básicos sobre complementos Sobolev de seções de um fibrado vetorial $W \xrightarrow{\pi} M$, o qual vamos supor com produto interno, resultados clássicos que usaremos aqui são apresentados em C.5 .

3.4.1 Normas L_k^p

Vamos supor que (M, g) , variedade Riemanniana, compacta e orientada de dimensão n . Seja

$$D: \Gamma(W) \rightarrow \Omega^1(W)$$

uma derivada covariante com respeito a uma conexão sobre W e $\nabla^g: T^{p,q}(M) \rightarrow T^{p,q+1}(M)$ derivada covariante determinada pela conexão de Levi-Civita ∇^g . Estes operadores induzem uma derivada covariante $\nabla: \Omega^0(M, \otimes^r T^*M \otimes W) \rightarrow \Omega^0(M, \otimes^{r+1} T^*M \otimes W)$, dada por

$$\nabla = D \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \nabla^g.$$

Com isso, definimos as normas L_k^p sobre o espaço de seções C^∞ de W pela fórmula,

$$|s|_{L_k^p} := \int_M (|s(x)|^p + |\nabla(s(x))|^p + \cdots + |\nabla^k(s(x))|^p)^{\frac{1}{p}} dV$$

em que $\nabla^j s := \nabla \circ \cdots \circ \nabla s \in \Gamma(W \otimes T^{0,j}(M))$ e $|\nabla^j s|$ é calculada ponto a ponto, usando o produto interno em cada fibra de W e a métrica riemanniana sobre M . O completamento do espaço de seções C^∞ de W , com respeito à norma L_k^p dada acima, é denotado por $\Omega_{L_k^p}^0(M, W)$ e é chamado *espaço Sobolev de L_k^p -seções*.

Os teoremas de Sobolev (ver C.5), permitem neste ponto definir o que se entende por uma conexão L_k^p sobre um fibrado principal. Diremos que uma conexão ω de um fibrado principal $G \rightarrow P \xrightarrow{\pi} M$, é uma conexão L_k^p , se com respeito a uma trivialização (U_α, φ) de P , é dada por uma 1-forma ω_α , que é $L_k^p(U_\alpha)$ e que transforma de maneira usual quando muda a trivialização (ver Lema 2.4.8).

Observe que o teorema da multiplicação (ver C.5.1) garante que a propriedade de ser L_k^p é invariante por mudança de trivialização, pois se denotamos como ω_β a conexão ω em outra trivialização U_β , tal que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, vale que

$$\omega_\beta = \text{Ad}(g_{\alpha\beta}^{-1})\omega_\alpha + g_{\alpha\beta}^* \Theta$$

(ver Equação 2.4.11) logo, $\omega_\beta \in L_k^p$. Denotaremos por $\mathcal{A}_{L_k^p}(P)$ o espaço de conexões L_k^p . A curvatura Ω de uma conexão ω é dada localmente por (ver Equação 2.4.13)

$$\Omega_\alpha = d\omega_\alpha + \frac{1}{2}[\omega_\alpha, \omega_\alpha]$$

daí que pelo teorema de multiplicação tem-se que $\Omega_\alpha \in L_{k-1}^p$, desde que $k - \frac{n}{p} \geq 0$.

Definir o grupo de transformações de calibre L_{k+1}^p é mais simples de fazer, se temos que G é um subgrupo linear de matrizes, vamos supor isso. Para $G \subset GL(n, \mathbb{R}) \subset M_{n \times n}(\mathbb{R})$ um grupo linear, o fibrado $\text{Ad}(P) := P \times_G G$ está mergulhado em

$$\xi = P \times_G M_{n \times n}(\mathbb{R})$$

onde G age por conjugação sobre $M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Assim podemos considerar seções L_{k+1}^p de ξ que são também seções de $\text{Ad}(P)$, i.e., cada ponto neste espaço é representado por uma sequência de seções suaves do fibrado $\text{Ad}(P)$, que pelo mergulho forma uma sequência de Cauchy no fibrado vetorial ξ com respeito da norma L_{k+1}^p . Precisamos exigir que $k + 1 - \frac{n}{p} > 0$, em que n é a dimensão de M , por isso, quando $p = 2$ e $n = 4$ estaremos pensando em transformações de calibre em L_3^2 .

Denotaremos o grupo das transformações de calibre de classe L_3^2 por $\mathcal{G}_3(P)$ e o espaço de conexões L_2^2 por $\mathcal{A}_2(P)$. O seguinte lema é mostrado em ([9] p. 86) e da informação sobre a estrutura suave de $\mathcal{G}_k(P)$.

Lema 3.4.1. Com as notações feitas no parágrafo prévio e supondo que $k - \frac{n}{p} \geq 0$, tem-se que o espaço de transformações de calibre de classe L_k^p é um grupo de Lie de Banach (de dimensão infinita), que denotaremos por $\mathcal{G}_k(P)$, sendo sua álgebra de Lie as seções L_{k+1}^p do fibrado adjunto $\text{ad}(P)$ (ver Exemplo 1.4.1).

Pode-se mostrar que a ação $(\omega, \sigma) \in \mathcal{A}_{L_k^p}(P) \times \mathcal{G}(P) \mapsto \sigma^* \omega \in \mathcal{A}_{L_k^p}(P)$ é suave na categoria das variedades de Banach (ver [9] p. 87). Também L_k^2 é de fato um espaço de Hilbert e o lema acima vale na categoria das variedades de Hilbert.

3.4.2 Estrutura local do espaço quociente $\mathcal{B}_2(P)$

A partir de agora, assumiremos que $P \rightarrow M$ é um $\text{SU}(2)$ -fibrado principal, usaremos a identificação $\bar{\Omega}^k(P, \mathfrak{g}) \simeq \Omega^k(M, \text{ad}(P))$ (ver Observação 1.4.4) para assim

trabalhar com o fibrado vetorial associado $ad(P)$, também retomamos a convenção de notação feita ao final da seção 2.3. Uma prova da próxima proposição e lema pode ser achada em ([9] Proposição 4.4.5 e Lema 4.4.5).

Proposição 3.4.2. Existe uma fatia (ver Definição 3.2.6) para a ação,

$$\mathcal{A}_2(P) \times \mathcal{G}_3(P) \rightarrow \mathcal{A}_2(P),$$

i.e., para cada $A \in \mathcal{A}_2(P)$ existe um subespaço $U \subset \mathcal{A}_2(P)$, invariante pelo estabilizador $\text{Stab}(A)$ de A , tal que o mapa natural, $U \times_{\text{Stab}(A)} \mathcal{G}_3(P) \rightarrow \mathcal{A}_2(P)$ é um difeomorfismo sobre um subconjunto aberto de $\mathcal{A}_2(P)$.

O próximo lema fornece informação sobre a topologia do espaço quociente

$$\mathcal{B}_2(P) := \mathcal{A}_2(P)/\mathcal{G}_3(P). \quad (3.4.1)$$

Lema 3.4.3. Supondo que temos sequências $\{A_n\}_{n \geq 0}, \{B_n\}_{n \geq 0} \subset \mathcal{A}_2(P)$ que convergem para A e B respectivamente. Suponha que A_n é equivalente com B_n para cada $n \in \mathbb{N}$, i.e., $\sigma_n^* A_n = B_n$ para alguma sequência $\{\sigma_n\}_{n \geq 0} \subset \mathcal{G}_3(P)$. Então passando a subsequência, se for preciso, podemos supor que $\{\sigma_n\}_{n \geq 0}$ converge para $\sigma \in \mathcal{G}_3(P)$ e ademais este limite satisfaz $\sigma^* A = B$.

Denotemos por $[A]$ a classe de equivalência da conexão A no quociente $\mathcal{B}_2(P)$. Uma consequência do lema 3.4.3 é que $\mathcal{B}_2(P)$ é um espaço topológico de Hausdorff. De fato, suponha que existem $[A], [B] \in \mathcal{B}_2(P)$, tais que toda vizinhança de $[A]$ intersecta qualquer vizinhança de $[B]$, então existem subsequências $\{A_n\}_{n \geq 0} \subset \mathcal{A}(P)$ e $\{B_n\}_{n \geq 0} \subset \mathcal{A}(P)$, tais que $A_n \rightarrow A$ e $B_n \rightarrow B$ com $[A_n] = [B_n]$, i.e., existe $\{\sigma_n\}_{n \geq 0} \subset \mathcal{G}_3(P)$, tal que $\sigma_n^* A_n = B_n$, logo pelo lema 3.4.3, passando a subsequências possivelmente, existe o limite σ de σ_n , tal que $[A] = [B]$, de onde segue que $\mathcal{B}_2(P)$ é um espaço de Hausdorff.

Com os resultados prévios e conhecendo os possíveis estabilizadores de $\text{SU}(2)$, podemos descrever a estrutura local de $\mathcal{B}_2(P)$ para um $\text{SU}(2)$ -fibrado principal. Se $c_2(P) \neq 0$ é a segunda classe de Chern (ver Apêndice B), os únicos estabilizadores possíveis para os elementos de $\mathcal{A}_2(P)$ são $\{\pm 1\}$ ou S^1 . Aquelas conexões estabilizadas por $\{\pm 1\}$ são chamadas irredutíveis e denotaremos o espaço de conexões irredutíveis por $\mathcal{A}_2^*(P)$ e chamamos de redutíveis aquelas estabilizadas por S^1 (ver Definição 2.5.5). De fato, $\mathcal{A}_2^*(P)$ é um aberto de $\mathcal{A}_2(P)$ e portanto uma variedade de Hilbert.

Se consideramos a ação induzida de $\mathcal{G}_3(P)$ sobre $\mathcal{A}_2^*(P)$, temos que o único estabilizador é $\{\pm 1\}$, logo $\mathcal{G}_3(P)/\{\pm 1\}$ age livremente sobre $\mathcal{A}_2^*(P)$, daí que pela proposição 3.4.2 esta ação admite uma fatia. A fatia através de uma conexão $A \in \mathcal{A}_2^*(P)$ é modelada sobre o espaço linear $\text{Ker}(\nabla_A^*)$, onde ∇_A^* é o adjunto de ∇_A (ver Proposição 2.4.9), isto segue da

demonstração da proposição 3.4.2, (o leitor pode consultar [9] p. 89), daí que

$$\mathcal{B}_2^*(P) = \mathcal{A}_2^*(P)/\mathcal{G}_3(P)$$

é uma variedade de Hilbert e seu espaço tangente em um ponto $[A]$ é identificado com

$$\Omega^1(M, \text{ad}(P))/\text{Im}(\nabla_A) = \text{Ker}(\nabla_A^*). \quad (3.4.2)$$

3.5 Estrutura local do espaço de moduli

Seja $\text{SU}(2) \rightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ um fibrado principal e (M^4, g) uma 4-variedade riemanniana orientável, compacta com métrica g . Até agora, estudamos o espaço $\mathcal{B}_2(P)$ e vimos que $\mathcal{B}_2^*(P) \subset \mathcal{B}_2(P)$ é uma variedade de Hilbert.

Definição 3.5.1. Denote por $\widetilde{\mathcal{M}}(P) \subset \mathcal{A}_2(P)$ o conjunto de todas as conexões anti-autoduais, definimos o *espaço de moduli* de conexões antiautoduais ou instantons por

$$\mathcal{M}(P) := \widetilde{\mathcal{M}}(P)/\mathcal{G}_3(P). \quad (3.5.1)$$

E o espaço de moduli de conexões antiautoduais irredutíveis por

$$\mathcal{M}^*(P) := \mathcal{M}(P) \cap \mathcal{B}_2^*(P) \quad (3.5.2)$$

O objetivo desta seção é estudar a estrutura do espaço de moduli de instantons, para isso precisamos alguns resultados de análise e da teoria Fredholm (ver Apêndice C.3.2). Da decomposição dada na equação (2.4.16), podemos tomar o mapa projeção na parte autodual da curvatura e obtemos um mapa suave

$$p_+F: \mathcal{A}_2(P) \rightarrow \Omega_+^2(M, \text{ad}(P))_{L_1^2}, \quad (3.5.3)$$

dado por $\frac{1}{2}(1 + *)$, em que $*$ é o operador de Hodge. Observe que $\widetilde{\mathcal{M}}(P) = (p_+F)^{-1}\{0\}$, isto motiva pensar que uma versão infinito dimensional do teorema da função implícita aplica para o conjunto solução do mapa acima, então, este conjunto seria localmente uma variedade suave de dimensão finita (ver Observação C.3.11). A prova do Próximo lema pode ser achada em [1].

Lema 3.5.2. Seja $F: A \rightarrow B$ um mapa suave entre variedades de Hilbert, tal que a diferencial $DF_a: T_a A \rightarrow T_{F(a)} B$ é um operador de Fredholm em cada ponto $a \in A$. Então em uma vizinhança de cada ponto $a \in F^{-1}\{b\}$ existe um modelo local de dimensão finita que descreve $F^{-1}\{b\}$ localmente, i.e., existe uma vizinhança $U \subset A$ de a e $V \subset B$ de b , tais que, $U = U_1 \times U_2$, $V = V_1 \times V_2$ e se satisfazem as seguintes propriedades:

1. $b = (b_1, b_2)$.
2. U_2 e V_2 são variedades de dimensão finita.
3. $(u_1, u_2) = (F_1(u_1), F_2(u_1, u_2))$, em que $F_1: U_1 \rightarrow V_1$ é um difeomorfismo.

O lema acima diz que $F^{-1}(b)$ é localmente modelado como variedade de dimensão finita, pois segue que uma vizinhança de $a \in F^{-1}(b)$ é isomorfa a $\phi^{-1}(b_2)$, no qual $\phi: U_2 \rightarrow V_2$ é definido por $\phi(u_2) = F_2(F^{-1}(b_1), u_2)$.

Com as notações do lema acima, temos, se a diferencial de DF_a é sobrejetora, então uma vizinhança de $a \in F^{-1}(b)$ é um variedade suave de dimensão finita com dimensão igual ao índice de Fredholm de DF_a , isto é, a dimensão de $\text{Ker}(DF_a)$ e mais, se DF_a é sobrejetor para todo $a \in F^{-1}(b)$, então $F^{-1}(b)$ é uma variedade de dimensão igual a dimensão do $\text{Ker}(DF_a)$

Se queremos aplicar esta teoria e os resultados prévios à p_+F , precisamos mostrar que satisfaz as hipóteses do lema acima, mas como mostra o seguinte resultado, isto não é possível.

Lema 3.5.3. A diferencial de $p_+F: \mathcal{A}_2(P) \rightarrow \Omega_+^2(M, ad(P))_{L_1^2}$ em uma conexão antiautodual A_0 não é um mapa de Fredholm e é dada por

$$p_+ \nabla_{A_0}: \Omega_{L_2^2}^1(M, ad(P)) \rightarrow \Omega_+^2(M, ad(P))_{L_1^2}.$$

Demonstração. Lembramos antes, que é comum denotar o operador ∇_A por d_A (ver Lema 2.4.1). Dada uma conexão A , a curvatura associada é dada localmente por $F_A = d_A B + B \wedge B$ (ver Seção (2.4.2)). $\mathcal{A}(P)$ tem estrutura de subespaço afim sobre $\Omega^1(M, ad(P))$ (ver Lema 2.2.9), podemos calcular a curvatura associada a $B + \alpha$, onde $\alpha \in \Omega^1(M, ad(P))$,

$$\begin{aligned} F_{B+\alpha} &= d_A(B + \alpha) + (B \wedge \alpha) \wedge (B \wedge \alpha) \\ &= d_A B + B \wedge B + d_A \alpha + B \wedge \alpha + \alpha \wedge B + \alpha \wedge \alpha \\ &= F_A + d_A \alpha + \alpha \wedge \alpha. \end{aligned}$$

Obtemos assim, a curvatura $F_{B+t\alpha}$ na família a um parâmetro $B + t\alpha$, logo podemos calcular a diferencial como segue

$$\begin{aligned} d(p_+F)_A &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (p_+F(B + t\alpha)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (p_+(F_A + t d_A \alpha + t^2 \alpha \wedge \alpha)) \\ &= p_+(d_A \alpha) \end{aligned}$$

□

Observe que se A é uma conexão antiautodual, i.e., a curvatura tem parte positiva zero, o mapa $p_+ \nabla_A$ não é um mapa de Fredholm, de fato, para qualquer seção $s \in \Omega^0(M, ad(P))$, temos que

$$p_+ \nabla_A(\nabla_A(s)) = p_+(\nabla_A \circ \nabla_A(s)) = 0$$

então o espaço de dimensão infinita $\text{Im}(\nabla_A)$ está contido em $\text{Ker}(p_+ \nabla_A)$, portanto o mapa $p_+ \nabla_A$ não é de Fredholm (ver Lema C.3.4).

Porém se restringimos o mapa $p_+ \nabla_A: \Omega_{L_2^1}^1(M, ad(P)) \rightarrow \Omega_{L_1^2}^2(M, ad(P))$, temos o seguinte resultado, não o provamos (a prova pode-se encontrar em [9], Lema 5.2.5) mas, sim comentamos as ideias principais da demonstração.

Lema 3.5.4. Sendo A um instanton, a restrição de $p_+ \nabla_A: \Omega_{L_2^1}^1(M, ad(P)) \rightarrow \Omega_{L_1^2}^2(M, ad(P))$ à fatia $\text{Ker}(\nabla_\omega^*)$ é um operador linear de Fredholm.

A sequência

$$\varepsilon(A): 0 \longrightarrow \Omega_{L_3^0}^0(M, ad(P)) \xrightarrow{\nabla_A} \Omega_{L_2^1}^1(M, ad(P)) \xrightarrow{p_+ \nabla_A} \Omega_{L_1^2}^2(M, ad(P)) \longrightarrow 0$$

é um complexo de deformação, pois $p_+ \nabla_A \circ \nabla_A$ é zero se A é um instanton, de $\varepsilon(A)$ se pode mostrar que é elíptico [9]¹. Por teoria elíptica, a imagem dos operadores do complexo $\varepsilon(A)$ são subespaços fechados e os grupos de cohomologia obtidos $H_A^0(\varepsilon(A))$, $H_A^1(\varepsilon(A))$, $H_A^2(\varepsilon(A))$ são de dimensão finita (ver Apêndice III de [6]). Em particular, a imagem de $p_+ \nabla_A$ é um subespaço fechado e o conúcleo deste mapa tem dimensão finita, assim, $p_+ \nabla_A|_{\text{Ker}(\nabla^*)}$ é um mapa de Fredholm (ver Lema C.3.4). Temos também a decomposição

$$\Omega_{L_2^1}^1(M, ad(P)) = \nabla_A(\Omega_{L_3^0}^0(M, ad(P))) \oplus \text{Ker}(\nabla_A^*).$$

concluimos que $\text{Ker}(p_+ \nabla_A|_{\text{Ker}(\nabla_A^*)})$, pode-se identificar com $H_A^1(\varepsilon(A))$, o primeiro grupo de cohomologia de $\varepsilon(A)$, este é o tangente de $\mathcal{M}(P)$ em $[A]$, que é de dimensão finita.

Observe que os espaços envolvidos neste complexo são, a álgebra de Lie de $\mathcal{G}_3(P)$ (ver Lema 3.4.1), a saber $\Omega_{L_3^0}^0(M, ad(P))$ que é identificado com $H_A^0(\varepsilon(A))$, o espaço tangente ao espaço de conexões em A e o espaço de 2-formas autoduais.

Uma prova do próximo resultado pode ser achada em ([9] p. 98) e detalhes sobre as constantes topológicas que aparecem, como os números de Betti, podem ser encontrados, por exemplo, em [23].

¹Isto segue do fato que o símbolo associado é exato.

Proposição 3.5.5. Se A é um instanton, irredutível e se o mapa

$$p_+ \nabla_A : \Omega_{L_2^2}^1(M, \text{ad}(P)) \rightarrow \Omega_+^2(M, \text{ad}(P))_{L_1^2}$$

é sobrejetivo, então $[A] \in \mathcal{M}^*(P)$ é um ponto suave. Em uma vizinhança deste ponto, $\mathcal{M}^*(P)$ é uma subvariedade de $\mathcal{B}_2^*(P)$ de dimensão $8c_2(P) - 3(b_0 - b_1(M) + b_2^+(M))$ em que os b_i são os números de Betti de M e $b_2^+(M)$ é a dimensão de um certo subespaço da cohomologia $H^2(B, \mathbb{R})$. A curvatura antiautodual fornece uma seção suave de Fredholm do fibrado vetorial

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}^*(P) \times_{\mathcal{G}_3(P)} \Omega_+^2(M, \text{ad}(P))_{L_1^2} & & \\ & \begin{array}{c} \nearrow F^+ \\ \downarrow p \end{array} & \\ \mathcal{B}(P) := \mathcal{A}(P)/\mathcal{G}(P) & & \end{array}$$

e o conjunto de zeros desta seção é justamente $\mathcal{M}^*(P)$, a seção é transversal à seção nula em uma vizinhança de $[A]$.

De acordo com o Teorema da Aplicação Implícita 3.5.2, a existência desta seção de Fredholm garante as boas propriedades da estrutura do espaço de moduli, isto nos motiva a estudar seções de Fredholm em contextos mais gerais, como será feito no próximo capítulo, no qual uma versão deste teorema será apresentado para uma definição de seção de Fredholm oportuna, em uma categoria mais ampla que as variedades de Banach.

3.6 O teorema das métricas genéricas

Até agora consideramos (M, g) , em que a métrica sobre M estava fixada, com dita métrica definimos o que se entende por uma conexão (e assim, uma curvatura) antiautodual. Toda a teoria desenvolvida até agora para mostrar que $\mathcal{M}^*(P)$ tem uma estrutura local de variedade e o cálculo da dimensão desse espaço, depende do operador $*$ de Hodge que, por sua vez, depende da métrica fixada sobre M . Assim, poderíamos ter métricas, tais que $\mathcal{M}^*(P)$ não tem propriedades topológicas desejáveis, como visto na seção anterior. A pergunta então, é se é possível fazer pequenas perturbações na métrica para obter boas propriedades de $\mathcal{M}^*(P)$. Nesta seção, consideramos métricas de classe C^r e denotamos o espaço destas métricas por $\mathcal{C}$.

Uma prova do próximo resultado pode ser encontrados em ([8] Teorema 3.20).

Teorema 3.6.1. Para toda 4-variedade orientada e fechada M e qualquer $\text{SU}(2)$ -fibrado principal P sobre M , cuja classe de Chern é não nula, existe um conjunto denso G_δ no espaço das métricas $\mathcal{C}$ dado por

$$G_\delta = \{g \in \mathcal{C} \mid p_+ \nabla_A \text{ é sobrejetor, para toda } \mathcal{M}_g\}$$

com a seguinte propriedade. Se $g \in G_\delta$, então para cada conexão A , antiautodual com respeito a g , o operador

$$p_+ \nabla_A: \Omega_{L^2}^1(M, \text{ad}(P)) \rightarrow \Omega_+^2(M, \text{ad}(P))_{L^2}$$

é sobrejetor. Consequentemente, denotando por $\mathcal{M}^*(P, g)$ o espaço de moduli com respeito à métrica g , vale que $\mathcal{M}^*(P, g)$ é uma subvariedade de $\mathcal{B}^*(P)$.

Nós restringimos nosso estudo ao caso de conexões irreduzíveis, mas quando aparecem conexões redutíveis no espaço de moduli? um critério para responder a esta pergunta é dado pelo próximo resultado, cuja prova pode ser consultada em ([9] Lema 5.4.1).

Lema 3.6.2. Para uma métrica fixada g em M , o fibrado P admite uma conexão redutível antiautodual cujo S^1 -fibrado principal associado (ver Proposição 2.5.4 e Corolário 3.2.5) tem primeira classe de Chern igual a $x \in H^2(M, \mathbb{Z})$ se, e somente se, o representante harmônico da classe x com respeito a métrica g é uma 2-forma antiautodual.

Concluiremos este capítulo com os resultados que garantem que, em certas condições, pode-se supor que não existem conexões redutíveis.

Teorema 3.6.3. O subconjunto do espaço de métricas $g \in \mathcal{C}$, para as quais existem conexões redutíveis antiautoduais com respeito de g , é a união contável de subvariedades suaves localmente fechadas de codimensão $b_2^+(M)$.

Os anteriores resultados implicam no próximo teorema.

Teorema 3.6.4. Seja M variedade 4-dimensional, fechada, orientada e tal que $b_2^+(M) > 0$. Existe um conjunto denso G_δ no espaço das métricas riemannianas $\mathcal{C}$ sobre M , tal que se $g \in G_\delta$, então $\mathcal{M}^*(P, g) = \mathcal{M}(P, g)$ é uma subvariedade suave de dimensão como dada na proposição 3.5.5.

Capítulo 4

Novo modelo de suavidade e sc-cálculo

Neste capítulo, será apresentada uma generalização da geometria diferencial e da teoria não linear *Fredholm* para espaços com uma estrutura mais geral que as variedades usuais. Começaremos com a teoria linear “*sc-teoria*”, descrevendo o espaço linear em que é modelada uma “poliedade”. Definições e notações básicas são introduzidas nas seções 4.1 e 4.2. Um exemplo é apresentado em 4.2.3 e por último, na seção 4.4 se apresenta a teoria Fredholm em poliedades para concluir com o resultado mais importante da segunda parte, que é uma versão do *Teorema da Aplicação Implícita* no contexto de poliedades.

Por que estudamos estas duas teorias neste trabalho? Lembremos que a proposição 3.5.5 mostra que, sob certas condições, o espaço de moduli de instantons de conexões irreduzíveis tem uma estrutura de variedade diferenciável de dimensão finita (no sentido usual) e fornece a dimensão desta variedade. Isto é feito mostrando que uma versão do Teorema da Aplicação Implícita em dimensão infinita, aplica-se na seção de Fredholm (no sentido clássico) F^+ do fibrado vetorial

$$\begin{array}{c} \mathcal{A}^*(P) \times_{\mathcal{G}_3(P)} \Omega_+^2(M, \text{ad}(P))_{L_1^2} \\ \quad \quad \quad \begin{array}{c} \nearrow \\ F^+ \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow p \end{array} \\ \mathcal{B}(P) := \mathcal{A}(P)/\mathcal{G}(P) \end{array} \quad (4.0.1)$$

LemaE o conjunto de zeros desta seção é justamente $\mathcal{M}^*(P)$ (ver 3.5.2). Tentaremos, em futuras pesquisas, mostrar a seguinte

Conjectura 4.0.1. É possível dar uma estrutura de fibrado forte (ver Seção 4.2.4) no fibrado descrito em (4.0.1) de tal maneira que torna a seção F^+ em uma seção *sc-fredholm* (ver Seção 4.4.1), conseguindo deste modo, uma descrição do espaço de moduli de instan-

tons na linguagem de poliedades.

4.1 Sc-estruturas sobre espaços de Banach

Os espaços vetoriais considerados neste capítulo são espaços de Banach, cuja dimensão não é necessariamente finita.

Definição 4.1.1. Uma *sc-estrutura* sobre um espaço de Banach E consiste de uma sequência decrescente de espaços de Banach $E = E_0 \supset E_1 \supset E_2 \dots$, satisfazendo as seguintes propriedades:

1. As inclusões $E_{m+1} \hookrightarrow E_m$ são operadores compactos para todo $m \in \mathbb{N}$. $\mathbb{N}$ denota os números naturais incluindo o zero.
2. $E_\infty = \bigcap_{i \geq 0} E_i$ é um conjunto denso em cada E_m considerado com a topologia relativa.

Observações 4.1.2.

1. “sc” vem da expressão em inglês “scalar structure”, estas aparecem em outros contextos como em teoria da interpolação, ver [28]. Se E é um espaço Banach munido com uma sc-estrutura, diremos que E é um espaço *sc-Banach* ou também que E é um *sc-espaço* de Banach.
2. Os elementos de E_∞ são chamados *pontos suaves* e os elementos de E_m são ditos pontos de nível m ou também *pontos de regularidade m* . O item 2. da definição 4.1.1 diz que em cada nível de regularidade todo ponto pode ser aproximado por uma sequência de pontos suaves.

Se E tem dimensão finita, podemos definir uma sc-estrutura, declarando $E_m = E$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Observe que se E tem dimensão infinita, esta construção não fornece uma sc-estrutura sobre E , pois o operador inclusão não é compacto. Outro exemplo de sc-espaço de Banach é o seguinte: Dados E e F espaços sc-Banach, definimos no produto direto usual $E \oplus F$ a sc-estrutura $(E_m \times F_m)_{m \geq 0}$. Note que:

$$(E \oplus F)_\infty = E_\infty \oplus F_\infty. \quad (4.1.1)$$

Adotamos as seguinte notação: Seja $A \subset E$ um subconjunto do espaço de sc-Banach E , então podemos definir uma sequência de subconjuntos $(A_m)_{m \geq 0}$, onde $A_m := A \cap E_m$. Denotaremos por A^k ao conjunto A_k com a *filtração* $(A_m^k)_{m \geq 0} = (A_{m+k})_{m \geq 0}$.

$$A = A_0 \supseteq A_1 \supseteq \dots \supseteq \underbrace{A_k \supseteq \dots A_{k+1} \supseteq \dots}_{A^k}$$

4.1.1 Sc-operadores

Uma vez que introduzimos uma nova categoria de objetos, é natural definir o que se entende por um morfismo entre esses objetos.

Definição 4.1.3. Um operador linear $T: E \rightarrow F$ entre espaços sc-Banach é chamado um *sc-operador*, se $T(E_m) \subset F_m$ e o operador induzido $T|_{E_m}: E_m \rightarrow F_m$ é contínuo para cada $m \in \mathbb{N}$. Se T possui um operador inverso, que também é um sc-operador, dizemos que T é um *sc-isomorfismo*.

Observemos que, se T é um sc-isomorfismo, então $E_m \subset T^{-1}(F_m) \subset E_m$. Logo para cada $m \in \mathbb{N}$, $T: E_m \rightarrow F_m$ é um isomorfismo de cada *nível de regularidade*. Para ressaltar uma classe especial de sc-operadores, fazemos a seguinte

Definição 4.1.4. Um sc-operador $S: E \rightarrow F$ é chamado um *sc⁺-operador* se $S(E_m) \subset F_{m+1}$ e $S|_{E_0}: E \rightarrow F^1$ é um sc-operador.

Para um sc⁺-operador $S: E \rightarrow F$, temos o seguinte: Se $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em E_1 , como a inclusão $E_1 \hookrightarrow E_0$ é compacta, existe uma subsequência convergente $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ em E_0 . Neste caso $(S(a_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}} \subset F_1$ e converge por continuidade, logo S é um operador compacto restrito ao nível E_1 . Indutivamente, temos que um sc⁺-operador é compacto, no sentido que sobre cada nível de suavidade, $S: E_m \rightarrow F_m$ é compacto para cada m .

Definição 4.1.5. Um subespaço F de um espaço de sc-Banach E é chamado um *sc-subespaço*, se F é fechado e $F_m := F \cap E_m$ define uma sc-estrutura sobre F .

Dizemos que um subespaço F de um espaço sc-Banach E tem um sc-complemento G , se $E = F \oplus G$ e a filtração $G_m := G \cap E_m$ define uma sc-estrutura sobre G , tal que para todo $m \in \mathbb{N}$, $E_m = F_m \oplus G_m$. Nestas condições $E = F \oplus G$ é chamada uma *sc-decomposição*.

Proposição 4.1.6 ([15] Proposição 1.6). Seja E um espaço sc-Banach. Um subespaço de dimensão finita F de E é um sc-subespaço se, e somente se, $F \subset E_\infty$. Ademais, um sc-subespaço de dimensão finita sempre tem um sc-complemento.

Passamos agora a descrever o quociente de um espaço sc-Banach por um sc-subespaço.

Proposição 4.1.7 ([15] Proposição 1.7). Seja E um espaço sc-Banach e $A \subset E$ um sc-subespaço. Então E/A munido com a filtração E_m/A_m é um espaço sc-Banach. Tem-se que

$$E_m/A_m = \{(x + a) \cap E_m \mid x \in E_m\}$$

Definimos agora uma classe importante de sc-operadores, (ver Apêndice C.3.2, para detalhes sobre operadores de Fredholm.)

Definição 4.1.8. Um sc-operador $T: E \rightarrow F$ entre espaços sc-Banach, é dito *sc-Fredholm*, se existem sc-decomposições $E = K \oplus X$ e $F = C \oplus Y$, tais que:

1. K é o núcleo de T e é de dimensão finita
2. C tem dimensão finita e Y é a imagem de T
3. $T: X \rightarrow Y$ é um sc-isomorfismo.

Como K é um sc-subespaço de dimensão finita, então K consta de pontos suaves, além disso, $T(X_m) = Y_m$ para cada $m \geq 0$. Em particular, os níveis de regularidade E_m podem ser decompostos em soma direta

$$E_m = K \oplus X_m \text{ e } F_m = C \oplus T_m.$$

O índice de um operador sc-Fredholm T se define como em C.3.8. Os operadores sc-Fredholm tem uma *propriedade regularizante* dada pela seguinte proposição

Proposição 4.1.9. Cada operador sc-Fredholm $T: E \rightarrow F$ é regularizante, isto é, dado $e \in E$ satisfazendo $T(e) \in F_m$, então $e \in E_m$.

Demonstração. Como $T(e) \in F_m = C \oplus F_m$, então $T(e) = c + T(x)$, para algum $x \in X_m$ e $c \in C$. Isto implica que, $T(e - x) = c \in C \cap T(E_0)$ e portanto $c = 0$ e $x - e \in K \subset E_\infty$, logo x e e pertencem ao mesmo nível de suavidade. $\square$

No capítulo anterior, vimos que um operador de Fredholm T fornecia boas propriedades no conjunto de zeros $T^{-1}\{0\}$, a próxima proposição da informação do tipo de perturbações que podem ser feitas nestes operadores conservando dita propriedade. A prova é apresentada em [15].

Proposição 4.1.10 (*Perturbação Compacta*). Sejam E e F espaços sc-Banach. Se $T: E \rightarrow F$ é um operador sc-Fredholm e $S: E \rightarrow F$ é um operador sc^+ , então $T + S$ é um operador sc-Fredholm.

Informalmente, a nova categoria de espaços aceita como “suaves” conjuntos com bordos e quinas, a próxima definição é importante no modelo local desses objetos.

Definição 4.1.11. Um subconjunto fechado C de um espaço sc-Banach E é chamado um *quadrante parcial*, se existir um espaço sc-Banach W , $k \in \mathbb{N}$ e um sc-isomorfismo $T: E \rightarrow \mathbb{R}^k \oplus W$, tal que $T(C) = [0, \infty)^k \oplus W$. Estabelecemos a notação (U, C, E) para indicar que U é aberto relativo do quadrante parcial C no espaço sc-Banach E .

Dado um quadrante parcial C em E , escolha um sc-isomorfismo $T: E \rightarrow \mathbb{R}^k \oplus W$ satisfazendo $T(C) = [0, \infty)^k \oplus W$, definimos um mapa $d_C: C \rightarrow \mathbb{N}$ da seguinte maneira, para $x \in C$

$$T(x) = (r_1, \dots, r_k, w) \quad x \in C$$

onde $(r_1, \dots, r_k) \in [0, \infty)^k$ e $w \in W$. Se define $d_C(x) := \#\{i \in \{1, \dots, k\} | r_i = 0\} \in \mathbb{Z}$

Definição 4.1.12. Com as notações acima, $d_C: C \rightarrow \mathbb{N}$ é chamado o *índice de degeneração*.

A definição anterior não depende da escolha do isomorfismo T . Uma prova desta afirmação pode ser encontrada na seção 1.4.3 de [15]. No gráfico 4.1, observamos pontos de índice um e dois.

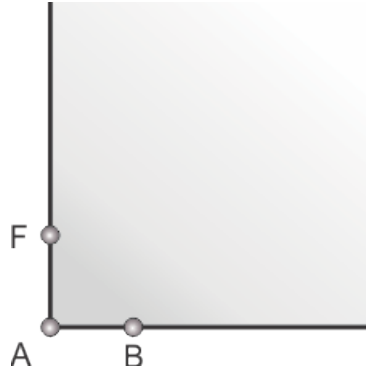


Figura 4.1: A tem índice dois, B e F são pontos de índice dois.

Definição 4.1.13 (*sc-continuidade*). Sejam (U, C, E) e (V, D, F) as ternas estabelecidas na definição 4.1.11. Uma função $f: U \rightarrow V$ é dita sc^0 ou *sc-contínua*, se $f(U_m) \subset V_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$ e as restrições $f: U_m \rightarrow V_m$ são funções contínuas para todo $m \in \mathbb{N}$.

Definição 4.1.14. Seja (U, C, E) uma terna, como na definição 4.1.11. Se define o espaço *tangente* $T(U, C, E)$ da tripla (U, C, E) por $T(U, C, E) := (TU, TC, TE)$, onde $TU = U^1 \oplus E$, $TC = C^1 \oplus E$ e $TE = E^1 \oplus E$.

TE é um espaço sc-Banach, como foi observado na equação (4.1.1) e TU é um aberto relativo do quadrante parcial TC em TE , i.e., o tangente de uma terna é também uma terna como definido em 4.1.11.

4.1.2 Funções sc-suaves e modelo local

Uma vez definida a noção de continuidade, passaremos a estudar a noção de “sc-diferenciabilidade”. Começamos por definir funções de classe sc^1 .

Definição 4.1.15 (*sc-suavidade*). Sejam (U, C, E) e (U', C', E') triplas como na definição 4.1.11. Uma sc^0 -função $f: U \rightarrow U'$ é de classe sc^1 se, para cada $x \in U$, existe um operador linear $Df(x): E_0 \rightarrow E'_0$ satisfazendo as condições:

1. Se $h \in E_1$ e $x + h \in U_1$, então $\lim_{|h|_1 \rightarrow 0} \frac{1}{|h|_1} |f(x+h) - f(x) - Df(x)h|_0 = 0$
2. O mapa $Tf: TU \rightarrow TU'$, chamado *o mapa tangente* de f , definido por

$$Tf(x, h) = (f(x), Df(x)h), \quad x \in U_1 \text{ e } h \in E, \quad (4.1.2)$$

é de classe sc^0 .

Se os espaços de Banach envolvidos são de dimensão finita, então um mapa de classe sc^1 é simplesmente o já conhecido mapa de classe C^1 com a derivada de Fréchet. Procedendo indutivamente, podemos definir o que entenderemos por uma função de classe sc^k ou, mais geralmente, de classe sc^∞ . Um mapa sc^0 f é dito um mapa de classe sc^2 se é um mapa de classe sc^1 e seu mapa tangente $TF: TU \rightarrow TV$ é um mapa de classe sc^1 . Temos pela definição, que o mapa tangente de Tf ,

$$T^2f = T(Tf): T^2(U) = T(TU) \rightarrow T^2(V) = T(TV),$$

é um mapa de classe sc^0 . Se o mapa tangente T^2f é de classe sc^1 , então f é dita de classe sc^3 e indutivamente, f é dito de classe sc^∞ se é de classe sc^k para todo $k \in \mathbb{N}$.

4.1.3 Propriedades da sc-diferenciabilidade

A sc-suavidade está relacionada com a suavidade clássica. A relação está dada pelas seguintes proposições, cujas provas podem ser encontradas em [13].

Proposição 4.1.16. Sejam E e F espaços sc-Banach e seja U um aberto relativo de um quadrante parcial C em E . Suponha que o mapa $f: U \rightarrow F$ é de classe sc^k , então para todo $m \in \mathbb{N}$, o mapa induzido $f: U_{m+k} \rightarrow F_m$ é de classe C^k . Ademais, $f: U_{m+l} \rightarrow V_m$ é de classe C^l para todo $0 \leq l \leq k$.

Proposição 4.1.17. Sejam E e F espaços sc-Banach, U um aberto relativo de um quadrante parcial C em E . Suponha que, para todo $m \in \mathbb{N}$ e $0 \leq l \leq k$, o mapa $f: U \rightarrow F$ induz mapas $f: U_{m+l} \rightarrow F_m$ de classe C^{l+1} , então f é de classe sc^{k+1} .

Se para algum $N \in \mathbb{N}$ temos que $F = \mathbb{R}^N$, vale o seguinte resultado:

Corolário 4.1.18. Seja U aberto relativo do quadrante parcial C no espaço sc-Banach E e F um outro espaço sc-Banach. Se, para algum $k \in \mathbb{N}$ e para todo $0 \leq l \leq k$, o mapa $f: U_l \rightarrow \mathbb{R}^N$ é de classe C^{l+1} . Então, f é de classe sc^{k+1} .

Um resultado importante que torna consistente esta teoria é uma regra da cadeia([15] Apêndice 1.4.2.)

Proposição 4.1.19 (*Regra da Cadeia*). Suponha que U , V e W são abertos relativos de quadrantes parciais em espaços sc-Banach e que $f: U \rightarrow V$ e $g: V \rightarrow W$ são funções de classe sc^1 . Então, a composta $g \circ f: U \rightarrow W$ é de classe sc^1 e ademais $T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$.

4.2 Geometria diferencial baseada em retratos

4.2.1 Sc-retrações

Para começar com a generalização da geometria diferencial, na seguinte seção introduzimos a noção de retrato sc-suave que será o modelo local de uma “poliedade” (ver Definição 4.2.14).

Definição 4.2.1. Seja (U, C, E) , onde U é aberto relativo do quadrante parcial C do espaço sc-Banach E . Um mapa sc-suave $r: U \rightarrow U$ é chamado uma sc^∞ -retração se $r \circ r = r$.

Pode-se provar que, se $U \subset E$ é um subconjunto aberto de um espaço de Banach e $r: U \rightarrow U$ é suave, no sentido usual, satisfazendo $r \circ r = r$, então $r(U)$ é uma subvariedade suave de E , a demonstração é devida a Henri Cartan e pode ser achada em [5]. A conclusão deste resultado não vale em geral para a sc-diferenciabilidade, pois há retrações sc-suaves que têm, por exemplo, variação local de dimensões, como será visto mais adiante.

Definição 4.2.2. Uma terna (O, C, E) é dito um sc^∞ -retrato (relativo ao quadrante parcial C), se existe um aberto relativo $U \subset C$ e uma retração sc-suave $r: U \rightarrow U$, tal que $O = r(U)$.

Observações 4.2.3.

1. Se $r: U \rightarrow U$ é uma sc^∞ -retração, pela regra da cadeia temos que

$$(Tr) \circ (Tr) = T(r \circ r) = Tr,$$

então, o mapa tangente $Tr: TU \rightarrow TU$ é também uma sc^∞ -retração.

2. Se $x \in U^1$, pela regra da cadeia temos que $Dr(r(x)) \circ Dr(x) = Dr(x)$. Logo, se $x \in O^1$, existe um $y \in U$, tal que $r(y) = x$ segue que

$$r(x) = r(r(y)) = r(y) = x.$$

Se conclui que $Dr(x) \circ Dr(x) = Dr(x)$, isto é $Dr(x): E \rightarrow E$ é uma *projeção linear*.

Em 4.1.14, definimos TU o tangente a um aberto relativo de um quadrante parcial. Queremos agora, definir o tangente a um retrato sc-suave.

Proposição 4.2.4. Seja (O, C, E) um retrato sc-suave e suponha que $r: U \rightarrow U$ e $r': U' \rightarrow U'$ são retrações definidas em abertos relativos U e U' do quadrante parcial C , tais que $r(U) = r(U') = O$, então $\text{Tr}(TU) = \text{Tr}'(TU')$.

Demonstração. Para cada $y \in U$, existe $y' \in U'$, tal que $r'(y') = r(y)$. Segue que

$$r' \circ r(y) = r' \circ r'(y') = r'(y') = r(y),$$

logo $r' \circ r = r$. Analogamente, obtém-se que $r \circ r' = r'$. Se $(x, h) \in \text{Tr}(TU)$ então, pela definição, existe $(y, k) \in TU$, tal que $\text{Tr}(y, k) = (x, h)$ e como $x \in O_1 \subset U'$, temos que $(x, h) \in TU'$. Usando a regra da cadeia,

$$\text{Tr}'(x, h) = \text{Tr}' \circ \text{Tr}(y, k) = \text{T}(r' \circ r)(y, k) = \text{Tr}(y, k) = (x, h),$$

assim, $\text{Tr}(TU) \subset \text{Tr}'(TU')$, usando a identidade $r \circ r' = r'$, obtemos a outra inclusão. $\square$

A anterior proposição garante que fica bem definido o seguinte,

Definição 4.2.5. O tangente de um sc-retrato (O, C, E) , denotado por $\text{T}(O, C, E)$, é definido como a tripla $(\text{TO}, \text{TC}, \text{TE})$, onde $\text{TC} = C^1 \oplus E$ é o tangente do quadrante parcial C , $\text{TE} = E^1 \oplus E$ e como antes definido, $\text{TO} = \text{Tr}(TU)$, sendo $r: U \rightarrow U$ uma qualquer retração, tal que $r(U) = O$.

Explicitamente, temos que

$$\text{TO} = \text{Tr}(TU) = \text{Tr}(U^1 \oplus E) = \{(r(x), Dr(x)h) | x \in U^1, h \in E\}.$$

Dado (U, C, E) , o tangente TC de C é um quadrante parcial em TE e TU é um aberto relativo a TC , i.e., a terna $(TU, \text{TC}, \text{TE})$ é uma terna, no mesmo sentido que na definição 4.1.11. Como já foi observado, para uma retração $r: U \rightarrow U$ o mapa $\text{Tr}: TU \rightarrow TU$ é uma sc-retração, portanto $\text{Tr}(TU) =: \text{TO}$ é um sc-retrato. Assim, temos que o tangente $\text{T}(O, C, E) = (\text{TO}, \text{TC}, \text{TE})$ é um sc-retrato. A próxima proposição é crucial para a boa definição de sc-suavidade.

Proposição 4.2.6. Sejam (O, C, E) e (O', C', E') retratos sc-suaves e $f: O \rightarrow O'$ um mapa. Se $r: U \rightarrow U$ e $s: V \rightarrow V$ são sc-retrações suaves sobre O para (O, C, E) tem-se que

1. $f \circ r: U \rightarrow E'$ é sc-suave se, e somente se, $f \circ s: V \rightarrow E'$ é sc-suave.
2. Se $f \circ r$ é sc-suave, então $\text{T}(f \circ r)|_{\text{TO}} = \text{T}(f \circ s)|_{\text{TO}}$.
3. O mapa tangente $\text{T}(f \circ r)|_{\text{TO}}$ leva TO em TO'

Demonstração.

1. Se U e V são abertos relativos de C , tais que $r(U) = s(V) = O$, então $O \subset U \cap V$. Assumamos que $f \circ r: U \rightarrow E'$ seja sc-suave e considere $s: V \rightarrow U \cap V$ um mapa sc-suave. Observe que, se $x \in V$, temos que existe $y \in U$, tal que $r(y) = s(x)$. Segue que $r(s(x)) = r(r(y)) = r(y) = s(x)$, logo $r \circ s = s$. Pela regra da cadeia, temos $f \circ r \circ s = f \circ s$ é sc-suave. basta trocar s por r para obter a recíproca.
2. Suponha que $(x, h) \in TO$, i.e., $(x, h) = Ts(x, h)$. Como $f \circ r \circ s = f \circ s$ temos, novamente pela regra da cadeia,

$$T(f \circ r)(x, h) = T(f \circ r)Ts(x, h)(x, h) = T(f \circ r \circ s)(x, h) = T(f \circ s)(x, h).$$

3. Para concluir, tomemos $\rho: U' \rightarrow U'$ uma retração sc-suave com $\rho(U') = O'$. Consideremos $\rho \circ f$ e seja $x \in O$, então existe $u' \in U'$, tal que $\rho(u') = f(x)$. Aplicando ρ temos $\rho(\rho(u')) = \rho(u') = f(x) = \rho(f(x))$, concluímos que $\rho \circ f = f$ e usando a regra da cadeia, temos

$$T(f \circ r)(x, h) = T(\rho \circ f \circ r)(x, h) = T\rho \circ T(f \circ r)(x, h) \in TO'$$

para todo $(x, h) \in Tr(TU)$, i.e., $T(f \circ r)|_{TO}: TO \rightarrow TO'$, o que conclui a demonstração.

□

Observe que, a proposição acima nos diz que os mapas $f \circ r$ e $T(f \circ r)|_{TO}: TO \rightarrow TO'$ não dependem da escolha da sc-retração. Assim, podemos definir o seguinte:

Definição 4.2.7. Sejam $f: (O, C, E) \rightarrow (O', C', E')$ entre retratos e $r: U \rightarrow U$ uma qualquer sc-retração, tal que $r(U) = O$. Dizemos que f é *sc-suave*, se $f \circ r$ é sc-suave. Se f é sc-suave definimos o mapa $Tf := T(f \circ r)|_{Tr(TU)}$. Indutivamente se define as funções sc^∞ .

Para funções definidas entre retratos sc-suaves, o teorema da regra da cadeia pode agora ser enunciado como segue;

Teorema 4.2.8. Sejam (O, C, E) , (O', C', E') e (O'', C'', E'') sc-retratos e, $f: O \rightarrow O'$ e $g: O' \rightarrow O''$ mapas sc-suaves. Então, a composta $g \circ f: O \rightarrow O''$ é sc-suave e $T(g \circ f) = Tg \circ Tf$.

A notação para a linearização de um mapa sc-suave $f: O \rightarrow O'$, no sentido da definição 4.2.7, no ponto $o \in O^1 = r(U^1)$ sobre o nível um é $Tf(o) = T(f \circ r)(o)|_{T_o O}$. Segue que

$$Tf(o): T_o O \rightarrow T_{f(o)} O'$$

é um mapa linear contínuo de $T_o O = Dr(o)E$ em $T_{f(o)} O' = Dr'(f(o))E'$.

Observação 4.2.9. Com a teoria discutida até agora, obtemos uma nova categoria $\mathcal{R}$, cujos objetos são retratos sc-suaves do tipo (O, C, E) , sendo O um retrato sc-suave no quadrante parcial C no espaço sc-Banach E e cujos morfismos são mapas sc-suaves $f: (O, C, E) \rightarrow (O', C', E')$ no sentido da definição 4.2.7 e mais, temos um *funtor covariante*, que denotamos por $T: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ e chamaremos funtor tangente. Representamos esta categoria e funtor no diagrama abaixo,

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{R} & \xrightarrow{\quad T \quad} & \mathcal{R} \\
 \\
 \begin{array}{ccccc}
 (O, C, E) & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & T(O, C, E) \\
 \downarrow g \circ f & \searrow f & & \swarrow Tf & \downarrow T(g \circ f) \\
 & (O', C', E') & \longrightarrow & T(O', C', E') & \\
 & \swarrow g & & \searrow Tg & \\
 (O'', C'', E'') & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & T(O'', C'', E'')
 \end{array}
 \end{array}$$

no qual $Tf: T(O, C, E) \rightarrow T(O', C', E')$ é dado por $Tf(x, h) = (f(x), Df(x)h)$ para todo $(x, h) \in TO$. A regra da cadeia garante que o funtor é covariante, i.e., $T(g \circ f) = (Tg) \circ (Tf)$, com isto podemos construir uma geometria diferencial cujo modelo local são retratos sc-suaves.

Concluimos com uma importante propriedade que retomaremos na seguinte seção .

Proposição 4.2.10. Seja (O, C, E) um retrato sc-suave, então:

1. Se O' é um subconjunto aberto de O , então (O', C, E) é também um sc-retrato suave.
2. Sejam V um aberto de O e $s: V \rightarrow V$ um mapa sc-suave, tal que $s \circ s = s$. Se $O' = s(V)$, então (O', C, E) é um sc-retrato.

Demonstração.

1. Seja (O, C, E) um retrato sc-suave, então escolhemos $r: U \rightarrow U$ de modo que $O = r(U)$ e $r \circ r = r$. Por continuidade, definimos o aberto $U' := r^{-1}(O')$ de U e assim, U' é um aberto relativo de C . Se $x \in O' \subset O = r(U)$, existe um $y \in U$, tal que $r(y) = x$. Aplicando r , temos que $O' \ni r(y) = r(x)$, daí que $O' \subset U'$ e que a restrição $r' = r|_{U'}$ define uma retração sc-suave $r': U' \rightarrow U'$ sobre $r'(U') = O'$. Logo, (O', C, E) é um retrato sc-suave, como queríamos demonstrar.

2. Pela hipótese e pelo resultado anterior, temos que (V, C, E) é um retrato sc-suave. Tomando $r: U \rightarrow U$ uma retração sc-suave, tal que $r(U) = V$ e $U \subset C \subset E$, definamos o mapa suave

$$\rho = s \circ r: U \rightarrow U.$$

Afirmamos que $\rho \circ \rho = \rho$. Observe primeiro que, $s \circ \rho = \rho$ pois, $s \circ s = s$, também note que, se $x \in U$, temos que $r(x) \in V$. Daí que $z := s(r(x)) \in V$ e portanto, existe $u \in U$, tal que $r(u) = z$. Aplicando r temos que $r(u) = r(z) = r(s(r(x)))$, mas como $r(u) = s(r(x))$, conclui-se que $r \circ s \circ r = s \circ r$, onde $r \circ \rho = \rho$. Novamente aplicando r , obtemos que $\rho \circ \rho = s \circ \rho = \rho$. Portanto ρ é uma retração sobre o conjunto $\rho(U) = s \circ r(U) = s(V) = O'$, concluindo desta maneira que (O', C, E) é um retrato sc-suave, como queríamos demonstrar.

□

4.2.2 M-poliedades

Nesta seção, definiremos uma M-poliedade e o que entenderemos por funções suaves entre estes objetos. Da mesma maneira que na geometria clássica, vamos a supor daqui em diante que os espaços topológicos envolvidos são de Hausdorff e paracompactos, a menos que seja dito o contrário.

Definição 4.2.11. Seja X um espaço topológico. Uma *carta em torno de* $x \in X$ é uma upla $(V, \phi, (O, C, E))$, onde $V \subset X$ é uma vizinhança de x em X , (O, C, E) é um sc-retrato suave e $\phi: V \rightarrow O$ é um homeomorfismo.

Definição 4.2.12. Dizemos que duas cartas $(V, \phi, (O, C, E))$ e $(V', \psi, (O', C', E'))$ são *equivalentes* se os mapas de transição $\psi \circ \phi^{-1}: \phi(V \cap V') \rightarrow \psi(V \cap V')$ e $\phi \circ \psi^{-1}: \psi(V \cap V') \rightarrow \phi(V \cap V')$ são mapas sc-suaves (no sentido da definição 4.2.7).

Observe que $\phi(V \cap V')$ é um aberto de O , daí que pela parte 1 da proposição 4.2.10, temos que a terna $(\phi(V \cap V'), C, E)$ é um sc-retrato suave., por isso, os mapas de transição estão definidos sobre retratos sc-suaves.

Definição 4.2.13. Um *atlas sc-suave* sobre um espaço topológico X , é uma coleção de cartas locais $(V, \phi, (O, C, E))$ que são compatíveis dois a dois, de modo que, os conjuntos V recobrem X . Dois sc-atlas são equivalentes, se a união destes é também um sc-atlas.

Definição 4.2.14. Uma *M-poliedade* X é um espaço topológico munido com uma classe de equivalência de sc-atlas suaves.

Análogo à geometria diferencial, definimos um mapa suave entre M-poliedades.

Definição 4.2.15. Uma função $f: X \rightarrow Y$ entre M -poliedades X e Y é dita *sc-suave*, se sua representação em coordenadas é suave no sentido da definição 4.2.7, i.e., se $f(x) = y$, $(V, \phi, (O, C, E))$ e $(V', \psi, (O', C', E'))$ são cartas em torno de $x \in X$ e $y \in Y$ respectivamente, tais que $f(V) \subset V'$, então o mapa $\psi \circ f \circ \phi^{-1}: O \rightarrow O'$ é *sc-suave*.

Passamos agora a definir o tangente TX à uma M -poliedade. Diremos que $x \in X$ é um ponto de nível m , se existe uma carta $(V, \phi, (O, C, E))$, tal que $\phi(x) \in O_m$. Denotaremos o conjunto de pontos de nível m em X por X_m . Denote por $\mathcal{B}$ a coleção de todos os conjuntos $\phi^{-1}(W)$, onde W é aberto em $O_m := O \cap E$ e $(V, \phi, (O, C, E))$ é carta em x , $\mathcal{B}$ é uma base para uma topologia em X_m . Com esta topologia os conjuntos $V_m = V \cap X_m$ são abertos em X_m e em cada nível m , temos que $\phi: V_m \rightarrow O_m$ é um homeomorfismo. Segue que, $(V_m, \phi, (O_m, C_m, E_m))$ é uma carta em X_m . Obtemos pela compatibilidade das cartas em X um atlas para X_m . Consequentemente, cada M -poliedade admite uma filtração induzida pelas cartas como segue

$$X = X_0 \supseteq X_1 \supseteq \cdots \supseteq X_\infty = \bigcap_{i \geq 0} X_i \quad (4.2.1)$$

Vale o seguinte resultado cuja prova pode ser consultada em [15] Apêndice 2.6.2.

Teorema 4.2.16. Seja X uma M -poliedade, então para cada $m \in \mathbb{N}$ o espaço X_m é metrizável, ademais, X_∞ é metrizável.

Seja (O, C, E) um retrato e $T(O, C, E) = (TO, TC, TE)$ o tangente, como definido em 4.2.5, veremos que $T(O, C, E)$ tem mais estrutura que o próprio (O, C, E) , no sentido que $TO \rightarrow O^1$ tem estrutura de fibrado a ser definido mais adiante.

Definição 4.2.17. Sejam (U, C, E) como na definição 4.1.11 e F um espaço *sc*-Banach, considere $p: U \oplus F \rightarrow U$ a projeção sobre U , pensado como um fibrado trivial que chamaremos *sc-fibrado*. Seja também um mapa da forma

$$R: (u, v) \in U \oplus F \mapsto (r(u), \rho(u, v)) \in U \oplus F$$

satisfazendo $R \circ R = R$ e $\rho(u, v)$ é linear em v . Chamamos R uma *retração de fibrado sc-suave*, que recobre a retração r e chamamos a $B = R(U \oplus F)$ o retrato fibrado *sc-suave* associado. Denotamos por $p: B \rightarrow O$ a projeção induzida sobre $O = r(U)$, observe a gráfica embaixo

$$\begin{array}{ccc} U \oplus F & \xrightarrow{R} & B \subset U \oplus F \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ U & \xrightarrow{r} & O \subset U \end{array}$$

Consideremos $\mathcal{BR}$ a categoria cujos objetos são retratos de fibrado *sc-suaves* e cujos morfismos são mapas *sc-suaves* descritos como segue: Suponha $p: O \rightarrow B$ e

$p': O' \rightarrow B'$ duas retrações de fibrado sc-suaves. Um mapa é chamado um mapa de fibrado (local) sc-suave se tem a forma

$$F: (u, v) \in B \mapsto F(u, v) = (a(U), f(u, v)) \in B',$$

onde, $f(u, v)$ é linear em v e o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{F} & B' \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ O & \xrightarrow{a} & O \end{array}$$

é comutativo. Foi introduzido em 4.2.9 a categoria $\mathcal{R}$, então existe naturalmente um funtor (forgetful functor) $\mathcal{BR} \rightarrow \mathcal{R}$ que simplesmente esquece a estrutura adicional de um elemento em $\mathcal{BR}$, isto é, o objeto $B \xrightarrow{p} O$ é correspondido com B e o mapa F é pensado como um mapa sc-suave.

Exemplo 4.2.18. Se $r: U \rightarrow U$ é retração sc-suave, o mapa tangente $\text{Tr}: TU \rightarrow TU$ é uma retração sc-suave, como já foi observado antes. Pensando $TU := U^1 \oplus E$ como um fibrado trivial sc-suave, temos que Tr é um mapa sc-suave de fibrados como acima. Consequentemente, o funtor tangente pode ser pensado neste ponto de vista como um funtor

$$T: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{BR},$$

tal que T envia a tripla (O, C, E) na tripla (TO, TC, TE) , onde também $TE := E^1 \oplus E$ é visto como o fibrado $E^1 \oplus E \xrightarrow{p_1} E^1$ analogamente com os fibrados $TC := C^1 \oplus E$ e $TO := O^1 \oplus E$ e a cada mapa $f: (O, C, E) \rightarrow (O', C', E')$, o funtor T associa Tf , como visto na observação 4.2.9.

Definição 4.2.19. Seja (O, C, E) um retrato e $T(O, C, E) = (TO, TC, TE)$ seu tangente. O *espaço tangente* $T_x O$ no ponto $x \in O^1$ é definido como o espaço de Banach $p^{-1}(\{x\})$, onde $p: TO \rightarrow O^1$.

Caso $x \in O^1$, o tangente $T_x O$ é a imagem da projeção linear $Dr(x): E \rightarrow E$ (ver Observação 4.2.3). Aqui $r: U \rightarrow U$ é uma qualquer retração associada a (O, C, E) , tal que $r(U) = O$. Depois de ter considerado esta descrição local do tangente, consideramos uplas $(x, V, \varphi, (O, C, E), h)$, onde $x \in X_1$ é um ponto da M -poliedade X de nível 1 e $(V, \varphi, (O, C, E))$ uma carta entorno de x e $h \in T_{\varphi(x)} O$. Consideramos a seguinte relação de equivalência

$$(x, V, \varphi, (O, C, E), h) \sim (x', V', \psi, (O', C', E'), h')$$

se, e somente se, $x = x'$ e $T(\varphi \circ \psi^{-1})(\psi(x))h' = h$.

Definição 4.2.20. O *espaço tangente* TX de X visto como conjunto, é a coleção de todas as classes de equivalência $[(x, V, \varphi, (O, C, E), h)]$.

Fixemos $x \in X_1$, o espaço tangente $T_x X$ da M -poliedade X no ponto x é

$$T_x X = \{[(x, V, \varphi, (O, C, E), h)] \mid h \in T_{\varphi(x)} O\} \quad (4.2.2)$$

a estrutura de espaço vetorial, se define com as operações

$$\lambda \cdot [(x, V, \varphi, (O, C, E), h_1)] + \mu \cdot [(x, V, \varphi, (O, C, E), h_2)] = [(x, V, \varphi, (O, C, E), \lambda \cdot h_1 + \mu \cdot h_2)]$$

para cada $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $h_1, h_2 \in T_{\varphi(x)} O$, segue que,

$$TX = \bigcup_{x \in X_1} \{x\} \times T_x X \quad (4.2.3)$$

precisamos declarar a topologia de TX , para isso, fixamos uma carta $(V, \varphi, (O, C, E))$ em X e definimos

$$TV := \{[(x, V, \varphi, (O, C, E), h)] \mid x \in V \text{ e } h \in T_{\varphi(x)} O\}.$$

Introduzimos um mapa $T\varphi: TV \rightarrow TO$ por $T\varphi([(x, V, \varphi, (O, C, E), h)]) = (\varphi(x), h)$, onde $h \in T_{\varphi(x)} O$, fixado $x \in X_1$ temos que o mapa φ restringe para um isomorfismo linear

$$T\varphi: T_x V \rightarrow T_{\varphi(x)} O$$

logo, $T_x X$, o espaço tangente em $x \in X_1$, herda a estrutura de espaço de Banach de $T_{\varphi(x)} O \subset E_0 := E$. Por fim, se W é um subconjunto aberto de TO , definimos $\widetilde{W} \subset TV$ por $\widetilde{W} := (T\varphi)^{-1}(W)$ e denotamos por $\mathcal{B}$, a reunião de todos los conjuntos obtidos por percorrer todas as cartas $(V, \varphi, (O, C, E))$ do atlas e todos os abertos W dos correspondentes TO . Vale a seguinte proposição (a prova pode ser encontrada no Apêndice (2.6.3) de [15]).

Proposição 4.2.21. Com as notações da discussão acima, vale que

1. $\mathcal{B}$ é uma base de uma topologia de Hausdorff sobre TX .
2. A projeção no primeiro fator $p: TX \rightarrow X^1$ é contínua e aberta com esta topologia.
3. O tangente TX de uma M -poliedade X é metrizável com a topologia gerada por $\mathcal{B}$.

Seja $(\varphi, V, (O, C, E))$ uma carta no ponto $x \in X$ com a topologia dada acima para TX . O mapa $T\varphi: TV \rightarrow TO$ associado à carta φ é um homeomorfismo e ademais, dados dois mapas $T\varphi: TV \rightarrow TO$ e $T\varphi': TV' \rightarrow TO'$ temos que a composta

$$T\varphi' \circ (T\varphi)^{-1}: T\varphi(TV \cap TV') \rightarrow T\varphi'(TV \cap TV')$$

é dada por

$$T\varphi' \circ (T\varphi)^{-1}(a, h) = (\varphi' \circ \varphi^{-1}(a), D(\varphi' \circ \varphi^{-1})(a)h) = T(\varphi' \circ \varphi^{-1})(a, h).$$

Como o mapa de transição $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ entre sc-retratos é sc-suave, temos que $T\varphi' \circ (T\varphi)^{-1}$ é sc-suave. Além do mais, como (TO, TC, TE) é um retrato sc-suave, as uplas $(TV, T\varphi, (TO, TC, TE))$ definem um atlas sobre TX . Consequentemente, o tangente TX de uma M -poliedade X é também uma M -poliedade.

Definição 4.2.22 (*Índice de degeneração*). Sejam X uma M -poliedade e $(V, \phi, (O, C, E))$ uma carta entorno ao ponto $x \in X$ e considere a aplicação $d(x, V, \phi, (O, C, E)) = d_C(\phi(x))$, onde d_C foi definido em 4.1.12. Se define o mapa $d_X: X \rightarrow \mathbb{N}$ por $d_X(x) = \inf\{d(x, V, \phi, (O, C, E))\}$, onde o ínfimo se calcula sobre todas as cartas $(x, V, \phi, (O, C, E))$ de x . d_X é chamado o *índice de degeneração* da M -poliedade.

Definição 4.2.23. O subconjunto da M -poliedade X definido por $\partial X = \{x \in X \mid d_X(x) \geq 1\}$ é chamado *o bordo de X* . Uma M -poliedade X , tal que $d_X \equiv 0$ é dito uma *M -poliedade sem bordo*.

Como em qualquer categoria de objetos, é natural definir os subconjuntos que herdam as propriedades dos espaços que os contém.

Definição 4.2.24. Sejam X uma M -poliedade e $A \subset X$ um subconjunto. A é chamada *sub- M -poliedade* de X , se para cada $a \in A$ existe uma vizinhança aberta V e uma sc-retração $r: V \rightarrow V$, tal que $r(V) = A \cap V$.

Vale o próximo resultado, cuja prova pode ser consultada em [15].

Proposição 4.2.25. Uma sub- M -poliedade A de uma M -poliedade X , tem naturalmente uma estrutura de M -poliedade com as seguintes propriedades:

1. A inclusão $i: A \rightarrow X$ é sc-suave e homeomorfismo sobre a sua imagem.
2. Para cada $a \in A$ e toda retração sc-suave $r: V \rightarrow V$ satisfazendo $r(V) = A \cap V$ com $a \in V$, o mapa $i^{-1} \circ r: V \rightarrow V$ é sc-suave.
3. O tangente $T_a A$ tem um sc-complemento em $T_a X$.
4. Se a é um ponto suave e $s: W \rightarrow W$ é uma retração sc-suave, que satisfaz $s(W) = W \cap A$ e $a \in W$, então o mapa induzido $W \rightarrow A$ é sc-suave e $Ts(a)T_a X = T_a X$.

Uma M -poliedade pode ser pensada como uma “variedade suave” em um sentido mas geral, se X é uma M -poliedade que consta de pontos suaves, então seu espaço tangente está definido em todo ponto de X . Em dimensão finita, por exemplo como na figura 4.2, temos uma estrutura de M -poliedade, tal que $X_\infty = X$. Isto mostra em

particular, que as M-poliedades nos permitem descrever objetos geométricos que variam localmente sua dimensão.

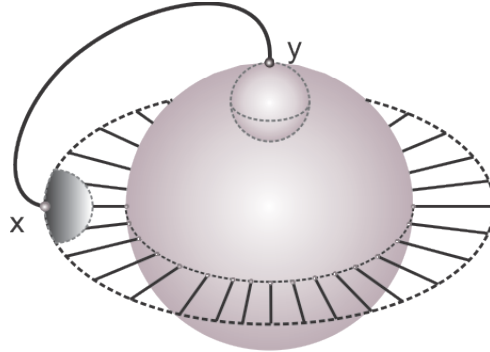


Figura 4.2: Na figura acima, vemos um conjunto que não é suave no sentido usual, no entanto neste contexto, este conjunto é sc-suave, no ponto x por exemplo, uma carta é dada no próximo exemplo.

4.2.3 Exemplo de Poliedade

Esta seção é dedicada à um exemplo, este fornece uma carta para x no conjunto ilustrado em 4.2, este exemplo é tomado de [13]. Construímos um conjunto conexo de um espaço de Hilbert que é também um sc-retrato suave, com uma parte um dimensional e outra dois-dimensional.

Consideremos a sequência crescente de números reais: $0 = \delta_0 < \delta_1 < \dots$ e o espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R}) =: E$, munido com a sc-estrutura $E_m = H^{m, \delta_m}(\mathbb{R})$ para todo $m \in \mathbb{N}$, onde

$$H^{m, \delta_m}(\mathbb{R}) := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \mid e^{\delta_m} D^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}), \quad \forall \alpha, |\alpha| \leq m \right\},$$

isto é, $H^{m, \delta_m}(\mathbb{R})$ consta dos elementos de E com derivadas parciais fracas até ordem m , as quais, ponderadas com e^{δ_m} são ainda elementos de E . Seja $\beta: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ com suporte compacto, tal que sua norma $L^2(\mathbb{R})$ é igual a 1, definamos a família uniparamétrica de operadores $\pi_t: E \rightarrow E$, para cada $t \in \mathbb{R}$ como segue: Para $f \in E$

$$\pi_t(f) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \langle f, \beta(\cdot + e^{\frac{1}{t}}) \rangle_{L^2} \beta(\cdot + e^{\frac{1}{t}}) & t > 0 \end{cases}$$

observe que, para $t > 0$ o operador π_t é a projeção ortogonal no espaço unidimensional gerado por β , com argumento transladado em $e^{\frac{1}{t}}$. Definamos agora

$$r: (t, f) \in \mathbb{R} \oplus E \mapsto (t, \pi_t(f)) \in \mathbb{R} \oplus E.$$

Note que, para $t \leq 0$, $r \circ r = r$ trivialmente, pois $\pi_t(f) = 0$. E para $t > 0$ temos

$$r \circ r(t, f)(s) = r(r(t, f)) = r((t, \pi_t(f)(s))) = (t, \pi_t(\pi_t(f)(s))).$$

Observe que

$$\begin{aligned} \pi_t(\pi_t(f)(s)) &= \pi_t(\langle \pi_t(f)(s), \beta(s + e^{\frac{1}{t}}) \rangle \beta(s + e^{\frac{1}{t}})) \\ &= \langle \langle \pi_t(f)(s), \beta(s + e^{\frac{1}{t}}) \rangle \beta(s + e^{\frac{1}{t}}), \beta(s + e^{\frac{1}{t}}) \rangle \beta(s + e^{\frac{1}{t}}) \\ &= \langle \pi_t(f)(s), \beta(s + e^{\frac{1}{t}}) \rangle \langle \beta(s + e^{\frac{1}{t}}), \beta(s + e^{\frac{1}{t}}) \rangle \beta(s + e^{\frac{1}{t}}) \\ &= \langle \pi_t(f)(s), \beta(s + e^{\frac{1}{t}}) \rangle \beta(s + e^{\frac{1}{t}}) = \pi_t(f)(s). \end{aligned}$$

Logo, $r \circ r = r$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Prova-se no lema 1.23 de [15] que r é sc-suave, portanto, uma sc-retração. Além do mais,

$$r(\mathbb{R} \oplus E) = \{(t, 0) \mid t \leq 0\} \cup \{(t, s\beta(s + e^{\frac{1}{t}})) \mid t > 0, s \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R} \times E,$$

observe que o sc-retrato definido acima é conexo e consiste de uma parte de dimensão 1 e uma de dimensão 2 (Ver Figura 4.3).



Figura 4.3: Retrato com parte unidimensional e bidimensional, do lado direito temos uma carta para o ponto x na figura 4.2.

Este retrato é homeomorfo a $(\mathbb{R}^- \times \{0\}) \cup (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ e fornece uma carta no ponto x do conjunto na figura 4.2. De maneira análoga, é possível definir mais retrações que tem partes de qualquer dimensão (incluindo dimensões infinitas). Construindo famílias de operadores sc-projeções

$$\rho_t: E \rightarrow E$$

onde $t \in \mathbb{R}$ e E é o espaço sc-Banach definido anteriormente, tal que $\rho_t = 0$ se $t \leq 0$ e ρ_t tem imagem de alguma dimensão (incluindo infinita) para $t > 0$ tal que o mapa $(t, f) \rightarrow (t, \rho_t(f))$ é sc-suave, (detalhes destas construções podem ser encontrados em [13]).

Lema 4.2.26 ([13] Lema 1.23). Sejam $(\delta_m)_{m \geq 0}$ uma sequência crescente, $E = L^2(\mathbb{R})$ e como no exemplo anterior define-se $E_m := H^{m, \delta_m}(\mathbb{R})$, seja também $\beta: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ com

suporte em $[-A, A]$ e com norma L^2 igual a 1, então o mapa abaixo é sc^∞

$$\Phi(t, u) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \langle u, \beta(\cdot + e^{\frac{1}{t}}) \rangle_{L^2} \beta(\cdot + e^{\frac{1}{t}}) & t > 0. \end{cases}$$

4.2.4 Fibrados fortes

O propósito desta seção é definir o que se entenderemos por um “fibrado” na categoria de poliedros, que chamaremos de *fibrados fortes*. Com a noção de M-poliedro (ver Definição 4.2.14) e seguindo a ideia da construção dos fibrados vetoriais sobre variedades, vamos descrever, primeiramente, estes objetos localmente. Considere (U, C, E) e F um outro espaço sc -Banach, se define o produto não simétrico

$$U \triangleleft F := U \times F$$

com a filtração dupla (m, k) para $m \geq 0$ e $0 \leq k \leq m + 1$, definida por $(U \triangleleft F)_{m,k} := U_m \oplus F_k$. Esta filtração dupla é aquela sublinhada no seguinte arranjo

$$\begin{array}{cccccccc} \underline{U_0 \times F_0} & \underline{U_0 \times F_1} & \underline{U_0 \times F_2} & \underline{U_0 \times F_3} & \underline{U_0 \times F_4} & \dots & \underline{U_m \times F_m} & \underline{U_0 \times F_{m+1}} \\ \underline{U_1 \times F_0} & \underline{U_1 \times F_1} & \underline{U_1 \times F_2} & \underline{U_1 \times F_3} & \underline{U_1 \times F_4} & \dots & \underline{U_m \times F_m} & \underline{U_1 \times F_{m+1}} \\ \underline{U_2 \times F_0} & \underline{U_2 \times F_1} & \underline{U_2 \times F_2} & \underline{U_2 \times F_3} & \underline{U_2 \times F_4} & \dots & \underline{U_m \times F_m} & \underline{U_2 \times F_{m+1}} \\ \underline{U_3 \times F_0} & \underline{U_3 \times F_1} & \underline{U_3 \times F_2} & \underline{U_3 \times F_3} & \underline{U_3 \times F_4} & \dots & \underline{U_m \times F_m} & \underline{U_3 \times F_{m+1}} \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ \underline{U_m \times F_0} & \underline{U_m \times F_1} & \underline{U_0 \times F_2} & \underline{U_m \times F_3} & \underline{U_m \times F_4} & \dots & \underline{U_m \times F_m} & \underline{U_m \times F_{m+1}} \\ \vdots & & & & & & & \vdots \end{array}$$

Onde $U \triangleleft F \xrightarrow{\text{Pr}_1} U$ é visto como um fibrado trivial (projeção no primeiro fator). Em $U \triangleleft F$ temos, esquecendo parte da estrutura, a subjacente soma direta $U \oplus F$ e que é definida como o produto direto com a filtração $(U \oplus F)_{m \geq 0} = (U_m \oplus F_m)_{m \geq 0}$ que aparece na diagonal do arranjo acima. A dupla filtração, deve ser pensada como uma forma de dizer que, acima do ponto $x \in U$ de regularidade $m \in \mathbb{N}$ temos pontos $(x, h) \in U \triangleleft F$ de regularidade até k , desde que $0 \leq k \leq m + 1$. Para $i = 0, 1$ definimos as sc -variedades

$$((U \triangleleft F)[i])_m := U_m \oplus F_{m+i}, \quad m \geq 0.$$

Explicitamente, temos que $((U \triangleleft F)[0])_{m \geq 0}$ é dada pela sequência

$$U_0 \oplus F_0 \supseteq U_1 \oplus F_1 \supseteq U_2 \oplus F_2 \supseteq \dots \supseteq U_m \oplus F_m \supseteq \dots$$

que nada mais é que a soma direta de U e F , que aparece na diagonal da dupla filtração acima. E analogamente, $((U \triangleleft F)[1])_{m \geq 0}$

$$U_0 \oplus F_1 \supseteq U_1 \oplus F_2 \supseteq U_2 \oplus F_3 \supseteq \cdots \supseteq U_m \oplus F_{m+1} \supseteq \cdots$$

Definição 4.2.27. O tangente a $U \triangleleft F$ denotado por $T_{\triangleleft}(U \triangleleft F)$ é definido por $T_{\triangleleft}(U \triangleleft F) := (TU) \triangleleft (TF)$, onde TU e TF foram definidos em 4.1.14.

Consideremos mapas entre estes fibrados triviais,

Definição 4.2.28 (*Mapa de fibrado forte*). Um mapa $f: U \triangleleft F \rightarrow V \triangleleft G$ entre produtos não simétricos diz-se sc^0 -suave, se para todo $m \in \mathbb{N}$ e para todo $0 \leq k \leq m + 1$,

$$f(U_m \oplus F_k) \subset V_m \oplus G_k$$

(i.e., f preserva a filtração) e a restrição $f: U_m \oplus F_k \rightarrow V_m \oplus G_k$ é um mapa sc -contínuo (ver 4.1.13). Ademais, exigimos que f seja da forma $f(x, h) = (f_0(x), \phi(x, h))$, onde $\phi(x, h)$ é linear em h e f_0 torna o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} U \triangleleft F & \xrightarrow{f} & U \triangleleft F \\ \text{Pr}_1 \downarrow & & \downarrow \text{Pr}_1 \\ U & \xrightarrow{f_0} & U \end{array}$$

aqui, Pr_1 é a projeção no primeiro fator.

Definição 4.2.29. Uma *retração de fibrado forte* $R: U \triangleleft F \rightarrow U \triangleleft F$ é um mapa de fibrado forte, tal que $R \circ R = R$.

Das definições de R e de mapa de fibrado forte, segue que R tem a forma $R(u, h) = (r(u), \phi(u, h))$. Note que,

$$\begin{aligned} R(R(x, h)) &= R(r(x), \phi(x, h)) = (r(r(x)), \phi(r(x), \phi(x, h))) \\ &= (r(u), \phi(x, h)) = R(x, h), \end{aligned}$$

onde $r: U \rightarrow U$ é uma retração sc -suave e ϕ é linear em h . Segue que $r: U \rightarrow U$ satisfaz $r \circ r = r$ e se $r(x) = x$, então $\phi(x, \phi(x, h)) = \phi(x, h)$. O operador linear limitado $h \mapsto \phi(x, h): F \rightarrow F$ é uma projeção linear. Se além do mais, $r(x) = x$ é um ponto suave, então este é um operador sc -suave.

Definição 4.2.30. Sejam (U, C, E) como na definição 4.1.11. Um *retrato local de fibrado forte*, denotado por $(K, C \triangleleft F, E \triangleleft F)$, consiste do subconjunto $R(U \triangleleft F) := K \subset C \triangleleft F$, imagem pela retração de fibrado forte $R: U \triangleleft F \rightarrow U \triangleleft F$ da forma $R(x, h) = (r(x), \phi(x, h))$, onde $r: U \rightarrow U$ é uma retração sc -suave sobre $O = r(U)$.

Um retrato local de fibrado forte induz um mapa $p: K \rightarrow O$ como no seguinte diagrama.

$$\begin{array}{ccc} U \triangleleft F & \xrightarrow{R} & U \triangleleft F \supset K \\ p \downarrow & & \downarrow p \quad \searrow p|_K \\ U & \xrightarrow{r} & U \supset O \end{array}$$

A dupla filtração induz sobre K uma filtração, para $m \geq 0$ e $0 \leq k \leq m+1$, tem-se

$$\begin{aligned} K_{m,k} &:= K \cap (U_m \oplus F_k) = \{(u, h) \in U_m \oplus F_k \mid R(u, h) = (u, h)\} \\ &= \{(u, h) \in U_m \oplus F_k \mid (r(u), \phi(u, h)) = (u, h)\} \\ &= \{(u, h) \in O_m \oplus F_k \mid \phi(u, h) = h\} \end{aligned}$$

Para $i = 0, 1$, definimos $K[i]_m = K_{m,m+i}$, para $m \geq 0$ e consideramos as projeções induzidas $p: K[i] \rightarrow O$, que são sc-suaves para $i = 0, 1$. Agora, se temos $(K, C \triangleleft F, E \triangleleft F)$ e $(K', C' \triangleleft F', E' \triangleleft F')$ dois retratos locais de fibrado forte, um mapa $\Phi: K \rightarrow K'$ que preserve a dupla filtração e que para $i = 0, 1$, os mapas $\Phi[i]: K[i] \rightarrow K'[i]$ são sc-suaves, é dito um mapa sc-suave entre retratos locais de fibrado forte.

Definição 4.2.31. Uma *seção* em um retrato local de fibrado forte $p: K \rightarrow O$ é um mapa $f: O \rightarrow K$, que satisfaz $p \circ f = \mathbb{1}_O$. As seções de $p: K[0] \rightarrow O$ são chamadas sc-suaves e as seções de $p: K[1] \rightarrow O$ são chamadas sc^+ -suaves.

Observação 4.2.32. Da filtração $K_{m,k}$ induzida em K segue que, uma seção $f: O \rightarrow K$ é da forma $f(x) = (x, \tilde{f}(x)) \in O \times F$. O mapa $\tilde{f}: O \rightarrow F$ é chamado a *parte principal da seção*. Com abuso de notação, denotamos $\tilde{f}$ simplesmente por f .

Estudaremos agora, as cartas que permitem fazer sentido de um fibrado forte global, sobre uma M-poliedade. Considere um mapa sobrejetivo $p: Y \rightarrow X$ de um espaço paracompacto de Hausdorff, sobre uma M-poliedade X , tal que para todo $x \in X$ o conjunto $p^{-1}(x) := Y_x$, tem estrutura de espaço de Banach.

Definição 4.2.33. Uma *carta de fibrado forte* para $p: Y \rightarrow X$ é uma upla da forma

$$(\Phi, p^{-1}(V), K, U \triangleleft F),$$

onde (U, C, E) foi definido em 4.1.11, F é um espaço sc-Banach e $K = R(U \triangleleft F)$ é a imagem por alguma retração de fibrado forte sc-suave $R: U \triangleleft F \rightarrow U \triangleleft F$ da forma $R(u, h) = (r(u), \phi(u, h))$, onde $r: U \rightarrow U$ é uma retração sc-suave sobre o retrato $O = r(U)$ e ϕ é linear na segunda entrada. $V \subset X$ e O são homeomorfos por $\varphi: V \rightarrow O$. De fato, $\Phi: p^{-1}(V) \rightarrow K$ é um homeomorfismo de $p^{-1}(V) \subset Y$ sobre K recobrindo φ .

Representamos toda esta informação no seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 U \triangleleft F & \xrightarrow{R} & U \triangleleft F \supset K & \xrightarrow{\Phi} & Y \supset p^{-1}(V) \\
 p_1 \downarrow & & \downarrow p_1 \searrow p|_K & & \downarrow p \searrow p|_{p^{-1}(V)} \\
 U & \xrightarrow{r} & U \supset O & \xrightarrow{\varphi} & X \supset V
 \end{array}$$

Duas cartas de um fibrado forte $\Phi: p^{-1}(V) \rightarrow K$ e $\Phi': p^{-1}(V') \rightarrow K'$ com $V' \cap V \neq \emptyset$, são ditas *compatíveis*, se para $i = 0, 1$ o mapa $\Phi' \circ \Phi^{-1}[i]: \Phi(p^{-1}(V \cap V'))[i] \rightarrow \Phi'(p^{-1}(V \cap V'))[i]$ são difeomorfismos sc-suaves.

Definição 4.2.34 (*Fibrado forte*). O mapa sobrejetor $p: Y \rightarrow X$ do espaço de Hausdorff paracompacto Y na M-poliedade X , munido com uma classe de equivalência de atlas de fibrado forte é chamado um *fibrado forte* sobre a M-poliedade X .

As cartas de fibrado forte induzem em Y , uma dupla filtração $Y_{m,k}$ via o homomorfismo Φ , para $m \geq 0$ e $0 \leq k \leq m+1$. Em particular, para $i = 0, 1$ temos filtrações

$$Y[i]_m = Y_{m,m+i} \quad \text{para } m \geq 0 \quad (4.2.4)$$

com projeções $p[i]: Y[i] \rightarrow Y$, que são sc-suaves entre M-poliedades. Por isso, distingui-mos dois tipos de seções do fibrado forte $P: Y \rightarrow X$,

Definição 4.2.35. Seja $p: Y \rightarrow X$ um fibrado forte. Dizemos que um mapa $f: X \rightarrow Y$ é uma seção, se $p \circ f = \mathbb{1}_X$. Uma seção de $p[0]: Y[0] \rightarrow X$ é dita uma *seção sc-suave* e uma seção de $p[1]: Y[1] \rightarrow X$ é dita uma *seção sc^+ -suave*.

4.3 M-poliedade domada

Esta seção é introducida aqui, pois precisamos fixar notações e definições referentes à poliedades com bordo, faremos uma abordagem curta, mas suficiente para o nosso proposito, maiores detalhes podem ser encontrados nas seções 2.4 e 3.1 de [15]. Todos os conceitos definidos na seção 4.2.4 podem ser adaptados para uma *M-poliedade domada*, que definiremos nesta seção.

Consideremos $C \subset E$ um quadrante parcial em um espaço sc-Banach E e suponhamos por enquanto que $E = \mathbb{R}^k \oplus W$ e $C = [0, \infty)^k \oplus W$. Denotemos por E_i o subespaço de codimensão 1 dado por

$$E_i := \{(a_i, \dots, a_k, w) \in \mathbb{R}^k \oplus W \mid a_i = 0\} \quad (4.3.1)$$

Associado com E_i temos o H_i -espaço fechado

$$H_i := \{(a_i, \dots, a_k, w) \in \mathbb{R}^k \oplus W \mid a_i \geq 0\} \quad (4.3.2)$$

Seja $I \subset \{1, \dots, k\}$ então associamos o subespaço $E_I = \bigcap_{i \in I} E_i$, em particular, $E_\emptyset = E$, $E_{\{i\}} = E_i$ e $E_{\{1, \dots, k\}} = \{0\} \oplus W \cong W$. Para $x \in C$ denotamos por $I(x)$ o conjunto dos índices $i \in \{1, \dots, k\}$, tais que $x \in E_i$ e escrevemos $E_{I(x)} =: E_x$. No caso geral, lembramos que dado $C \subset E$ quadrante parcial, escolhemos $T: E \rightarrow \mathbb{R}^k \oplus W$ um sc-isomorfismo, tal que $T(C) = [0, \infty)^k$.

Considere o conjunto $\{c \in C \mid d_C(c) = 1\}$ de pontos de bordo, este conjunto tem k componentes conexas que denotamos por $A_1, \dots, A_k$. Seja f_i o menor subespaço de E contendo A_i , f_i é chamado *face estendida* do quadrante parcial. Denotaremos por $\mathcal{F}$ o conjunto de todas as faces estendidas e para $f \in \mathcal{F}$ denotamos por H_f o subespaço definido como na equação (4.3.2) que contém C (ver Figura 4.4).

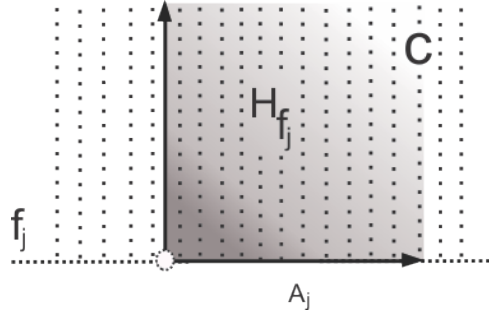


Figura 4.4: No caso especial $C = [0, \infty)^k \oplus W \subset \mathbb{R}^k \oplus W$, as faces estendidas f_i são os E_i para $1 \leq i \leq k$.

Para cada $e \in C$, definimos $\mathcal{F}(e) = \{f \in \mathcal{F} \mid e \in f\}$, por definição temos que $d_C(e) = \#\mathcal{F}(e)$ é o número de elementos em $\mathcal{F}(e)$.

Definição 4.3.1. Seja $e \in C$ o *quadrante parcial associado à e*, que denotamos por C_e , está definido por $C_e = \bigcap_{f \in \mathcal{F}(e)} H_f$. E o menor subespaço linear associado à e , é definido por $E_e = \bigcap_{f \in \mathcal{F}(e)} f$.

Por definição, temos as inclusões $E_e \subset C_e \subset E$, se $x \in C$ é um ponto interior, i.e., $d_C(x) = 0$ escrevemos $E_e = C_e = E$. Em geral um subconjunto C de um espaço de Banach (ou espaço sc-Banach) é chamado um *cone parcial* se é fechado, convexo e satisfaz $\mathbb{R}^+ \cdot C = C$. Um *cone* é um cone parcial se satisfaz $C \cap (-C) = \{0\}$.

Definição 4.3.2. Seja (O, C, E) um retrato sc-suave. O *cone parcial* $C_x O$ em $x \in O_\infty$ é definido por $C_x O := TO \cap E_x$, onde $C_x = \bigcap_{i \in I(x)} H_i$. O *espaço tangente reduzido* $T_x^R O$ é definido como o seguinte subconjunto do tangente em x , $T_x^R O = T_x O \cap E_x$.

Definição 4.3.3 (*Retração sc-suave domada*). Consideremos (U, C, E) e $r: U \rightarrow U$ uma retração sc-suave, r é chamada *retração sc-suave domada* se satisfaz as seguintes duas condições:

1. $d_C(r(x)) = d_C(x)$ para todo $x \in U$.
2. Para todo ponto $x \in O_\infty$ onde $O = r(U)$, existe um sc-subespaço $A \subset E$, tal que $E = T_x O \oplus A$ e $A \subset E_x$. Neste caso, dizemos que (O, C, E) é chamado um *retrato sc-suave domado*.

Proposição 4.3.4. Seja (U, C, E) e $r: U \rightarrow U$ é uma retração sc-suave domada. Então, para todo $x \in O_\infty$ o subespaço imagem $(\mathbb{1} - Dr(x)) \cdot E$, é um subespaço de E_x , em particular, na condição 2 da definição 4.3.3 podemos escolher $A = (\mathbb{1} - Dr(x)) \cdot E$

Demonstração. Seja (O, C, E) o retrato sc-suave domado induzido pela retração sc-suave domada $r: U \rightarrow U$ e seja $A \subset E_x$ garantido pelo item 2. da definição 4.3.3. Logo,

$$T_x O \oplus A = E. \quad (4.3.3)$$

Por definição, $T_x O = Dr(x) \cdot E$, daí que

$$E = Dr(x) \cdot E + (\mathbb{1} - Dr(x)) \cdot E = T_x O + (\mathbb{1} - Dr(x)) \cdot E.$$

Lembramos da observação 4.2.3 que $(\mathbb{1} - Dr(x))$ é uma projeção. Aplicando esta projeção na equação (4.3.3) e usando o fato que $(\mathbb{1} - Dr(x)) \cdot T_x O = \{0\}$ temos

$$(\mathbb{1} - Dr(x)) \cdot E = (\mathbb{1} - Dr(x)) \cdot T_x O \oplus A = (\mathbb{1} - Dr(x)) \cdot A. \quad (4.3.4)$$

Logo, precisamos mostrar que $(\mathbb{1} - Dr(x)) \cdot A \subset E_x$. Como $A \subset E_x$, é suficiente mostrar que

$$Dr(x) \cdot E_x \subset E_x$$

A menos de isomorfismo $T: E \rightarrow \mathbb{R}^k \oplus W$, com $T(C) = [0, \infty)^k \oplus W$, podemos supor, para facilitar a notação, que $E = \mathbb{R}^k \oplus W$, que $C = [0, \infty)^k \oplus W$ e que x pertence a d espaços E_i , i.e., $x = (0, \dots, 0, x_{d+1}, \dots, x_k, w)$, onde $x_{d+1}, \dots, x_k > 0$. Seja $y \in E_x$, então $y = (0, \dots, 0, x_{d+1}, \dots, x_k, v)$. Para τ suficientemente pequeno, temos que $x + \tau y \in C$ e as primeiras d coordenadas são nulas, pelo item 1. da definição 4.3.3, sabemos que $d_C(r(x + \tau y)) = d_C(x + \tau y)$, i.e., $r(x + \tau y)$ tem as primeiras d coordenadas nulas. E como

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} r(x + \tau y) = Dr(x)y$$

segue que, as primeiras d coordenadas de $Dr(x)y$ são nulas também. Como y foi escolhido arbitrariamente, temos que $Dr(x) \cdot E_x \subset E_x$. Da equação (4.3.4) e do fato de $(\mathbb{1} - Dr(x))$

é uma retração, segue a segunda parte da afirmação. $\square$

Definição 4.3.5 (M-poliedade domada). Uma M-poliedade X é chamada uma M-poliedade domada, se possui um sc-atlas de cartas que são modeladas sobre retratos sc-suaves domados.

Observação 4.3.6. As definições de retração de fibrado forte e de retrato de fibrado forte local (ver 4.2.29, 4.2.30), podem ser feitas considerando as retrações envolvidas como retrações sc-suaves domadas, então, chamamos respectivamente *retração de fibrado forte domada* e *retrato de fibrado forte local domado*. No caso de fibrado forte (ver Definição 4.2.34), dizemos que é um fibrado forte domado, se as cartas que o definem são cartas envolvendo retrações domadas.

4.4 Teoria de Fredholm

4.4.1 Seções sc-Fredholm

Neste capítulo, faremos uma introdução à teoria Fredholm no contexto de sc-suavidade. Como motivação, suponha que temos uma M-poliedade de dimensão finita como na figura 4.2. Uma seção genérica nesta M-poliedade, produz um conjunto solução como o representado na figura 4.5. O objetivo desta seção é definir e estudar o que

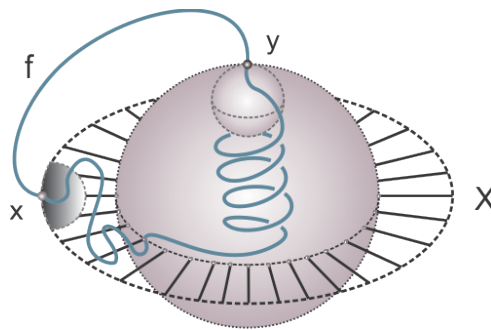


Figura 4.5: Conjunto solução de uma seção genérica na M-poliedade X .

entende-se por uma seção de Fredholm no mundo dos fibrados fortes, onde a base de dito fibrado é uma M-poliedade, dando a linguagem adequada para enunciar, na próxima seção, uma versão do *Teorema da Aplicação Implícita* nesta categoria.

Definição 4.4.1. Seja $C \subset E$ um quadrante parcial no espaço sc-Banach E , *um sc-germe de vizinhanças* de $0 \in C$, que denotaremos por $\mathcal{O}(C, 0)$, é uma sequência decrescente

$$U_0 \supset U_1 \supset U_2 \supset \cdots,$$

onde U_m é um aberto relativo em $C \cap E_m$ contendo à 0. O tangente de $\mathcal{O}(C, 0)$ será denotado por $T\mathcal{O}(C, 0)$ e é dado pela sequência $U_1 \oplus E_0 \supset U_2 \oplus E_1 \supset U_3 \oplus E_2 \supset \cdots$.

Exemplos de sc-germe são

1. O tangente TU de um aberto relativo $U \ni 0$ de um espaço sc-Banach E é um sc-germe de vizinhanças do zero.
2. Para cada $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, denote por $B_{1/m}^m(0) \subset E_m$ a bola aberta em E_m com raio $1/m$, então a sequência decrescente $U_m := U \cap B_{1/m}^m(0) \cap E_m$, é um sc-germe de vizinhanças limitadas do zero.

Definição 4.4.2. Seja F um espaço sc-Banach. Um sc^0 -germe $f: \mathcal{O}(C, 0) \rightarrow F$ é um mapa contínuo $f: U_0 \rightarrow F$ de classe sc^0 . Um sc^1 -germe $f: \mathcal{O}(C, 0) \rightarrow F$ é um sc^0 -germe que é sc^1 e o mapa tangente $Tf: T\mathcal{O}(C, 0) \rightarrow TF$ é um sc^0 -germe. Dizemos que f é um sc^2 -germe, se Tf é um sc^1 -germe e indutivamente, definimos um sc^∞ -germe. Neste caso, dizemos que f é um *sc-germe suave* (Ver Definições 4.1.13 e 4.1.15 para definição de sc^0 e sc^1).

Definição 4.4.3. Um *germe de seção sc-suave* (f, x_0) do fibrado forte $P: Y \rightarrow X$ é uma seção contínua $f: V \rightarrow P^{-1}(V)$, sobre um aberto $V \subset X$ contendo x_0 , para o qual, existe uma carta de fibrado forte $(\Phi, P^{-1}(V), K, U \triangleleft F)$, satisfazendo $\varphi(x_0) = 0 \in O \subset U$, onde a parte principal $\hat{f}$ da seção local $\hat{f} = \Phi^{-1} \circ f \circ \varphi: O \rightarrow K \subset U \triangleleft F$, satisfaz que $\hat{f} \circ r: \mathcal{O}(C, 0) \rightarrow F$ é um sc-germe suave (Ver 4.2.32 para definição de parte principal). O seguinte diagrama ajuda a entender melhor a definição acima (ver também a Definição 4.2.33 de carta de fibrado forte.)

$$\begin{array}{ccccccc}
 U \triangleleft F & \xrightarrow{R} & K \subset U \triangleleft F & \xrightarrow{\Phi} & p^{-1}(V) \subset Y \\
 p_1 \downarrow & & \hat{f} \nearrow \downarrow p_1 & & f \nearrow \downarrow p \\
 U & \xrightarrow{r} & O \subset U & \xrightarrow{\varphi} & V \subset X
 \end{array}$$

Definição 4.4.4 (*Germe básico*). Seja W um espaço sc-Banach e $C = [0, \infty)^k \oplus \mathbb{R}^{n-k} \oplus W$ um quadrante parcial. Um *germe básico* é um sc-germe $f: \mathcal{O}(C, 0) \rightarrow \mathbb{R}^N \oplus W$, tal que $f(0) = 0$ e satisfaz a seguinte propriedade: Se $P: \mathbb{R}^N \oplus W \rightarrow W$ é a projeção canônica, então o germe $P \circ f: \mathcal{O}(C, 0) \rightarrow (W, 0)$ tem a forma

$$P \circ f(a, w) = w - B(a, w)$$

para $(a, w) \in ([0, \infty)^k \oplus \mathbb{R}^{n-k}) \oplus W$, onde $B(0, 0) = 0$. E mais, para todo $\varepsilon > 0$ e todo inteiro $m \geq 0$, vale a desigualdade

$$\|B(a, w) - B(a, w')\|_m \leq \varepsilon \|w - w'\|_m$$

desde que, (a, w) e (a, w') estejam em uma vizinhança de $(0, 0)$ suficientemente pequena sobre o nível m .

No contexto dos retratos, existe uma noção que chamaremos, *preenchimento* de um germe de seção sc-suave (f, x_0) , sobre um fibrado forte local domado $K \rightarrow O$, tal que $0 \in O$.

Definição 4.4.5 (*Preenchimento*). Seja $K \rightarrow O$ com as notações da definição 4.2.30, tal que $0 \in U$ e $R(u, h) = (r(u), \rho(u)(h))$ e $\rho(u): F \rightarrow F$ é um operador linear limitado. Assumimos agora que $r(0) = 0$. Um germe de seção (f, x_0) de $K \rightarrow O$ possui um *preenchimento*, se existe um germe de seção sc-suave $(g, 0)$ do fibrado $U \triangleleft F \rightarrow U$ que estende f e tem as seguintes propriedades:

1. $f(x) = g(x)$ para $x \in O$ em uma vizinhança suficientemente pequena de zero.
2. Se $g(y) = \rho(r(y))g(y)$ em um ponto $y \in U$ próximo do 0, então $y \in O$.
3. A linearização do mapa $y \mapsto (\mathbb{1} - \rho(r(y)))(g(y))$ no ponto 0 e restrita à $\text{Ker}(\text{Dr}(0))$, define um isomorfismo linear $\text{Ker}(\text{Dr}(0)) \rightarrow \text{Ker}(\rho(0))$.

$$\begin{array}{ccccc} U \triangleleft F & \xrightarrow{R} & K & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ U & \xrightarrow{r} & O & & \end{array} \begin{array}{l} \nearrow (g, 0) \\ \searrow (f, x_0) \end{array}$$

Definição 4.4.6 (*Versão preenchimento*). Se f é uma seção sc-suave do fibrado forte domado $P: Y \rightarrow X$ e $x_0 \in X_\infty$, dizemos que um germe de seções (f, x_0) tem um *preenchimento*, se existe uma carta de fibrado forte (ver 4.2.33) $\Phi: \Phi^{-1}(V) \rightarrow K$ que recobre $\varphi: (V, x_0) \rightarrow (O, 0)$, onde $K \rightarrow O$ é um retrato domado de fibrado forte local, tal que $0 \in O \subset U$ e o germe de seção $\Phi \circ f \circ \varphi^{-1}: O \rightarrow K \subset U \triangleleft F$ possui um *preenchimento* $g: U \rightarrow U \triangleleft F$ em uma vizinhança de $0 \in O$.

Exemplos de preenchimentos podem ser achados em [11, 12]. O próximo resultado é referido à ([15] Proposição 3.10)

Proposição 4.4.7. Seja $f: [0, \infty)^k \oplus \mathbb{R}^{n-k} \oplus W = E \rightarrow \mathbb{R}^N \oplus W$ um germe sc-suave em torno de $f(0) = 0$ da forma $f = h + s$, onde h é um germe básico e s é uma germe do tipo sc^+ . Então $\text{D}f(0): \mathbb{R}^n \oplus W \rightarrow \mathbb{R}^N \oplus W$ é sc-Fredholm e seu índice é dado por $\text{ind}(\text{D}f(0)) = n - N$. Mais ainda, para todo $m \geq 0$ natural, $\text{D}f(a, w): \mathbb{R}^n \oplus W_m \rightarrow \mathbb{R}^N \oplus W_m$ é Fredholm, com índice $n - N$, sempre que $(a, w) \in E_{m+1}$ seja suficientemente pequeno com a norma de E_m .

Definição 4.4.8 (*Germe sc-Fredholm*). Seja f uma seção sc-suave de um fibrado forte $P: Y \rightarrow X$ com $x_0 \in X_\infty$. (f, x_0) é dito um *germe sc-Fredholm*, se possui uma versão de *preenchimento* $(g, 0): U \rightarrow U \triangleleft F$ (ver Definição 4.4.6) com a seguinte propriedade: Existe uma seção sc^+ -suave $s: U \rightarrow U \triangleleft F$ que satisfaz $s(0) = g(0)$, tal que $(g - s, 0): U \rightarrow U \triangleleft F$ é conjugado à um nível básico, i.e., existe um isomorfismo $\Psi: U \triangleleft F \rightarrow U' \triangleleft F'$ de fibrados

fortes locais, que recobre $\varphi: U \rightarrow U'$ e seção, $\Psi \circ (g - s) \circ \varphi^{-1}: U' \rightarrow U' \triangleleft F$ chamada push-forward, é um germe básico. O seguinte diagrama ajuda a entender a definição

$$\begin{array}{ccc}
 U' \triangleleft F' & \xleftarrow{\Psi} & U \triangleleft F \supset K \\
 \downarrow & \searrow^{s, g, g-s} & \downarrow \\
 U' & \xrightarrow{\varphi^{-1}} & U
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 Y \\
 \nearrow f \\
 \downarrow p \\
 X
 \end{array}$$

Da proposição 4.4.7, deduzimos que $D(g - s)(0)$ é um operador de Fredholm. Pela proposição 4.1.10 $D(g)(0)$ é Fredholm. Logo o mapa tangente $Tf(x_0): T_{x_0}X \rightarrow T_{f(x_0)}Y$ é um mapa Fredholm linear com o mesmo índice de $D(g)(0)$, seja $\text{ind } Tf(x_0) = (n - N)$ dito número.

Definição 4.4.9 (*Seções sc-Fredholm*). Uma seção f do fibrado forte domado $p: Y \rightarrow X$, é chamada sc-Fredholm, se satisfaz as seguintes propriedades,

1. f é sc-suave.
2. f é regularizante, no sentido que, se $x \in X_m$ é $f(x) \in Y_{m,m+1}$, então $x \in X_{m+1}$.
3. O germe (f, x) é um germe sc-Fredholm em todo ponto suave $x \in X_\infty$.

4.4.2 Teorema da aplicação implícita, caso ponto interior

No caso de fibrados de Banach (suavidade usual) temos o Teorema da Aplicação Implícita, que fornece condições nas quais, o conjunto de zeros de uma seção de Fredholm é uma subvariedade da variedade ambiente. O próximo teorema e uma versão mais refinada deste, são importantes na teoria de perturbação e transversalidade. Formulamos ao seguir o *Teorema da Aplicação Implícita*, no caso de um *ponto interior*, estimulando ao leitor a consultar o caso mais geral de poliedade com bordo em [10, 14, 15]. A prova é uma consequência do caso mais geral, que pode ser achada em [15] teorema 3.54 seção 3.6.

Teorema 4.4.10 (Teorema da aplicação implícita; caso ponto interior). Seja $P: Y \rightarrow X$ um fibrado forte sobre a M-poliedade sem bordo X (ver Definição 4.2.23) e f uma seção sc-Fredholm. Suponha que $x_0 \in X_\infty$ e que $f(x_0) = 0$. Então a linearização $f'(x_0): T_{x_0}X \rightarrow Y_{f(x_0)}$ é um operador sc-Fredholm. Se $f'(x_0)$ é sobrejetora, então existe um aberto U contendo x_0 , tal que o conjunto solução em U

$$S(f, U) := \{x \in U \mid f(x) = 0\} \quad (4.4.1)$$

tem uma estrutura natural de variedade suave de dimensão finita com dimensão igual ao índice Fredholm de $f'(x_0)$. Ademais, U pode ser escolhido de tal maneira que, se

$y \in S(f, U)$, então $f'(y): T_y X \rightarrow Y_{f(y)}$ é sobrejetivo e $\text{Ker}(f'(y)) = T_y S(f, U)$ é o seu espaço tangente.

Conclusão 4.4.11. A vantagem de poliedades é que a teoria Fredholm é sempre transversal, i.e., genérica, pequenas perturbações deixam boas propriedades no conjunto solução como no caso do teorema 3.6.4. Assim, seria esperado, caso este formalismo funcione, que resultados como este seriam “triviais”.

Referências

- [1] Jinpeng An e Karl-Hermann Neeb. “An implicit function theorem for Banach spaces and some applications”. Em: *Mathematische Zeitschrift* 262.3 (2009), pp. 627–643.
- [2] Michael F Atiyah, Nigel J Hitchin e Isadore M Singer. “Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry”. Em: *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. Vol. 362. 1711. The Royal Society. 1978, pp. 425–461.
- [3] Thierry Aubin. *Nonlinear analysis on manifolds. Monge-Ampere equations*. Vol. 252. Springer Science & Business Media, 2012.
- [4] B Boss-DD Bleecker e B Booss-Bavnbek. *Topology and Analysis*.
- [5] Henri Cartan. “Sur les rétractions d’une variété”. Em: *CR Acad. Sci. Paris Sér. I Math* 303 (1986), pp. 715–716.
- [6] S. Donaldson e B. Kronheimer. *The geometry of four-manifolds*. Oxford University Press, 1990.
- [7] Johan L Dupont. *Curvature and characteristic classes*. Springer, 1978.
- [8] Daniel S Freed e Karen K Uhlenbeck. *Instantons and four-manifolds*. Springer, 1984.
- [9] Robert Friedman e John W Morgan. *Gauge theory and the topology of four-manifolds*. American Mathematical Soc., 1998.
- [10] Helmut Hofer, Kris Wysocki e Eduard Zehnder. “A general Fredholm theory III: Fredholm functors and polyfolds”. Em: *Geometry & Topology* 13.4 (2009), pp. 2279–2387.
- [11] Helmut Hofer, Kris Wysocki e Eduard Zehnder. “Applications of polyfold theory I: The polyfolds of Gromov–Witten theory”. Em: *arXiv preprint arXiv:1107.2097* (2011), pp. 1–205.
- [12] Helmut Hofer, Kris Wysocki e Eduard Zehnder. *Applications of polyfold theory II: The polyfolds of symplectic field theory*.
- [13] Helmut Hofer, Kris Wysocki e Eduard Zehnder. “SC-smoothness, retractions and new models for smooth spaces”. Em: *arXiv preprint arXiv:1002.3381* (2010).

- [14] Helmut Hofer, Krzysztof Wysocki e Eduard Zehnder. “A general Fredholm theory II: Implicit function theorems”. Em: *Geometric and Functional Analysis* 19.1 (2009), pp. 206–293.
- [15] Helmut H Hofer, Kris Wysocki e Eduard Zehnder. “Polyfold and Fredholm theory I: basic theory in M-polyfolds”. Em: *arXiv preprint arXiv:1407.3185* (2014).
- [16] Dominic D Joyce. *Compact manifolds with special holonomy*. Vol. 1. Oxford university press Oxford, 2000.
- [17] Shoshichi Kobayashi e Katsumi Nomizu. *Foundations of differential geometry*. Vol. 1. 2. New York, 1963.
- [18] Serge Lang. *Analysis II*. Vol. 2. Addison-Wesley Reading, 1969.
- [19] John M Lee. *Smooth manifolds*. Springer, 2003.
- [20] Ib H Madsen e Jorgen Tornehave. *From calculus to cohomology: de Rham cohomology and characteristic classes*. Cambridge University Press, 1997.
- [21] John Willard Milnor e James D Stasheff. *Characteristic classes*. 76. Princeton university press, 1974.
- [22] Andrei Moroianu. *Lectures on Kähler geometry*. Vol. 69. Cambridge University Press, 2007.
- [23] James R Munkres. *Elements of algebraic topology*. Vol. 2. Addison-Wesley Reading, 1984.
- [24] Henrique N. Sá Earp. “Instantons on G2-manifolds”. Tese de doutorado. Imperial College London, 2009.
- [25] Luiz AB San Martin. “Grupos de Lie”. Em: *Editora da Unicamp* (2006).
- [26] Clifford Taubes. *Differential geometry: bundles, connections, metrics and curvature*. Vol. 23. Oxford University Press, 2011.
- [27] Clifford Henry Taubes. *Differential geometry: bundles, connections, metrics and curvature*. Vol. 23. Oxford University Press, 2011.
- [28] Hans Triebel. *Interpolation theory, function spaces, differential operators*. North Holland, 1978.

Apêndice A

A.1 A álgebra de Lie graduada de formas diferenciais

Os resultados deste apêndice são usados principalmente no capítulo 2 e 3, onde usamos as propriedades da estrutura algébrica da álgebra que apresentamos aqui.

Definição A.1.1. Uma álgebra de Lie consiste de um espaço vetorial $\mathfrak{g}$ sobre um campo de escalares ($\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$), munido de um produto (colchete) $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ que satisfaz as propriedades:

1. $[\cdot, \cdot]$ é bilinear, isto é, linear em cada uma das variáveis.
2. Anti-simetria, isto é, $[X, Y] = -[Y, X]$ para cada $X, Y \in \mathfrak{g}$.
3. Identidade de Jacobi: para $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ vale a igualdade

$$[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]]. \quad (\text{A.1.1})$$

Seja $\{E_\alpha\}_{\alpha=1}^f$ uma base fixada de $\mathfrak{g}$, como para todo $A \in \mathfrak{g}$ podemos escrever $A = \sum_\alpha A_\alpha E_\alpha$, então tem que existir números reais $C_{\alpha\beta}^\gamma$, chamados *constantes de estrutura*, que dependem da base fixada, tais que

$$[E_\alpha, E_\beta] = \sum_\gamma C_{\alpha\beta}^\gamma E_\gamma. \quad (\text{A.1.2})$$

Segue das propriedades do colchete, que estas constantes satisfazem $C_{\alpha\beta}^\gamma + C_{\beta\alpha}^\gamma = 0$ e $\sum_\lambda (C_{\alpha\beta}^\lambda C_{\delta\lambda}^\eta + C_{\beta\delta}^\lambda C_{\alpha\lambda}^\eta + C_{\delta\alpha}^\lambda C_{\beta\lambda}^\eta) = 0$, reciprocamente, se existem f^3 constantes satisfazendo as condições acima, então, podemos definir um colchete sobre $\mathfrak{g}$ pela fórmula $[E_\alpha, E_\beta] = \sum_\gamma C_{\alpha\beta}^\gamma E_\gamma$. Seja N uma variedade diferenciável, $\mathfrak{g}$ denotará uma álgebra de Lie qualquer e denotaremos por $\Omega^k(N, \mathfrak{g})$, o conjunto de k -formas sobre N com valores na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Definição A.1.2. sejam $\varphi \in \Omega^i(N, \mathfrak{g})$ e $\psi \in \Omega^j(N, \mathfrak{g})$ para alguns inteiros não negativos i e j , então para $X_1, \dots, X_{i+j} \in \mathfrak{X}(N)$, definimos $[\varphi, \psi] \in \Omega^{i+j}(N, \mathfrak{g})$ pela fórmula

$$[\varphi, \psi](X_1, \dots, X_{i+j}) := \frac{1}{i!j!} \sum_{\sigma} ((-1)^{\text{sgn}(\sigma)} [\varphi(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(i)}), \psi(X_{\sigma(i+1)}, \dots, X_{\sigma(i+j)})])$$

onde σ percorre todas as permutações de $\{1, \dots, i+j\}$, $\text{sgn}(\sigma)$ é o sinal da permutação σ , e $[\cdot, \cdot]$ é o colchete da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Considere $A \in \mathfrak{g}$ e $\bar{\varphi} \in \Omega^i(N)$ uma i -forma com valores em $\mathbb{R}$, definimos $\bar{\varphi} \otimes A \in \Omega^i(N, \mathfrak{g})$ pela fórmula, $\bar{\varphi} \otimes A(X_1, \dots, X_i) := \bar{\varphi}(X_1, \dots, X_i)A$, onde $X_1, \dots, X_i \in \mathfrak{X}(N)$. Se $B \in \mathfrak{g}$ e $\bar{\psi} \in \Omega^j(N)$, vale que $[\bar{\varphi} \otimes A, \bar{\psi} \otimes B] = (\bar{\varphi} \wedge \bar{\psi}) \otimes [A, B]$, de fato para $X_1, \dots, X_{i+j} \in \mathfrak{X}(N)$, temos

$$\begin{aligned} [\bar{\varphi} \otimes A, \bar{\psi} \otimes B](X_1, \dots, X_{i+j}) &= \frac{1}{i!j!} \sum_{\sigma} ((-1)^{\text{sgn}(\sigma)} [\bar{\varphi} \otimes A(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(i)}), \bar{\psi} \otimes B(X_{\sigma(i+1)}, \dots, X_{\sigma(i+j)})]) \\ &= \frac{1}{i!j!} \sum_{\sigma} ((-1)^{\text{sgn}(\sigma)} [\bar{\varphi}(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(i)})A, \bar{\psi}(X_{\sigma(i+1)}, \dots, X_{\sigma(i+j)})B]) \\ &= \frac{1}{i!j!} \sum_{\sigma} ((-1)^{\text{sgn}(\sigma)} \bar{\varphi}(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(i)}) \bar{\psi}(X_{\sigma(i+1)}, \dots, X_{\sigma(i+j)})) [A, B] \\ &= (\bar{\varphi} \wedge \bar{\psi}) \otimes [A, B](X_1, \dots, X_{i+j}) \end{aligned}$$

Seja $\{E_{\alpha}\}_{\alpha=1}^f$ uma base fixada de $\mathfrak{g}$, com constantes de estrutura $C_{\alpha\beta}^{\gamma}$, tais que $[E_{\alpha}, E_{\beta}] = \sum_{\gamma} C_{\alpha\beta}^{\gamma} E_{\gamma}$, então para $\varphi \in \Omega^i(N, \mathfrak{g})$ e $\psi \in \Omega^j(N, \mathfrak{g})$ existem únicas $\varphi^{\alpha} \in \Omega^i(N)$ e $\psi^{\beta} \in \Omega^j(N)$ formas com valores em $\mathbb{R}$, onde $\alpha, \beta \in \{1, \dots, f\}$, tais que $\varphi = \sum \varphi^{\alpha} \otimes E_{\alpha}$ e $\psi = \sum \psi^{\beta} \otimes E_{\beta}$, com isto podemos obter uma expressão para o colchete de formas com valores na álgebra de Lie na base fixada, pela fórmula:

$$[\varphi, \psi] = \sum_{\alpha\beta} (\varphi^{\alpha} \wedge \psi^{\beta}) \otimes [E_{\alpha}, E_{\beta}] = \sum_{\alpha\beta\gamma} C_{\alpha\beta}^{\gamma} (\varphi^{\alpha} \wedge \psi^{\beta}) \otimes E_{\gamma} \quad (\text{A.1.3})$$

Teorema A.1.3. Para $\varphi \in \Omega^i(N, \mathfrak{g})$, $\psi \in \Omega^j(N, \mathfrak{g})$ e $\rho \in \Omega^k(N, \mathfrak{g})$, temos

1. $[\varphi, \psi] = (-1)^{ij} [\psi, \varphi]$
2. $(-1)^{ik} [[\varphi, \psi], \rho] + (-1)^{kj} [[\rho, \varphi], \psi] + (-1)^{ji} [[\psi, \rho], \varphi] = 0$

isto é, à álgebra de formas $\mathfrak{g}$ -valoradas sobre N é uma álgebra de Lie graduada, o colchete no item 1 do teorema acima é chamado o *colchete graduado*.

Demonstração. O item 1 segue do fato que, para formas com valores em $\mathbb{R}$, temos que $\varphi^{\alpha} \wedge \psi^{\beta} = (-1)^{\alpha\beta} \psi^{\beta} \wedge \varphi^{\alpha}$ e $[E_{\alpha}, E_{\beta}] = -[E_{\beta}, E_{\alpha}]$ junto com a expressão dada na equação (A.1.3).

Para mostrar o item 2 usamos a igualdade de Jacobi da definição A.1.1 e notamos que a

parte esquerda da equação no item 2 do teorema acima é:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\alpha\beta\gamma} \{(-1)^{ik} \varphi^\alpha \wedge \psi^\beta \wedge \rho^\gamma [[E_\alpha, E_\beta], E_\gamma] + (-1)^{kj} \rho^\gamma \wedge \varphi^\alpha \wedge \psi^\beta [[E_\beta, E_\gamma], E_\alpha] \\
& \quad + (-1)^{ji} \psi^\beta \wedge \rho^\gamma \wedge \varphi^\alpha [[E_\gamma, E_\alpha], E_\beta]\} \\
& = \sum_{\alpha\beta\gamma} (-1)^{ik} \varphi^\alpha \wedge \psi^\beta \wedge \rho^\gamma \{ [[E_\alpha, E_\beta], E_\gamma] + [[E_\beta, E_\gamma], E_\alpha] \\
& \quad + [[E_\gamma, E_\alpha], E_\beta] \} = 0
\end{aligned}$$

□

Teorema A.1.4. Para $\varphi \in \Omega^i(N, \mathfrak{g})$ e $\psi \in \Omega^j(N, \mathfrak{g})$, temos que $d[\varphi, \psi] = [d\varphi, \psi] + (-1)^i [\varphi, d\psi]$.

Demonstração. Para formas com valores em $\mathbb{R}$ vale que $d(\varphi^\alpha \wedge \psi^\beta) = d\varphi^\alpha \wedge \psi^\beta + (-1)^i \varphi^\alpha \wedge d\psi^\beta$, então o resultado segue aplicando este fato na expressão (A.1.3). □

Apêndice B

Classes caraterísticas

Em geral, uma classe característica é um invariante topológico que toma valores na cohomologia de uma variedade. Ao nível da topologia das variedades diferenciáveis, todo fibrado tem associado uma classe de cohomologia na variedade base, que pode ser definida através da curvatura de uma conexão (ver 2.2.3), dita classe de cohomologia independente da escolha da conexão, dependendo apenas da classe de isomorfismo do fibrado, esta importante propriedade é a que permite estudar invariantes da topologia do fibrado através das classes caraterísticas.

B.1 O homomorfismo de Chern-Weil

Ao longo desta seção, $G \rightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ denotará um G -fibrado principal sobre a variedade n -dimensional M , (ver 1.3.1). Fixamos algumas notações para começar.

Definição B.1.1. Seja V um espaço vetorial finito dimensional e V^* o seu dual. Para $k \geq 1$ denotaremos por $S^k(V^*)$ o espaço vetorial de funções f simétricas e k -lineares de valor real, existe um produto $\cdot: S^k(V^*) \otimes S^L(V^*) \mapsto S^{k+L}(V^*)$, tal que, se $f \in S^k(V^*)$ e $g \in S^L(V^*)$ então para $V_1, \dots, V_{k+L}$

$$f \cdot g(V_1, \dots, V_{k+L}) = \frac{1}{(k+L)!} \sum_{\sigma} f(V_{\sigma(1)}, \dots, V_{\sigma(k)}) g(V_{\sigma(k+1)}, \dots, V_{\sigma(k+L)})$$

onde σ percorre todas as permutações de $\{1, \dots, k+L\}$.

Com este produto $S^\bullet(V^*) = \bigoplus_{k \geq 0} S^k(V^*)$ é uma *álgebra graduada*. Seja $\mathfrak{g}$ à álgebra de Lie de G . A representação adjunta, induz uma ação de G sobre $S^k(\mathfrak{g}^k)$ para cada $k \geq 1$, da seguinte maneira: Para cada $g \in G$ e $V_1, \dots, V_k \in \mathfrak{g}$ $(gf)(V_1, \dots, V_k) = f(Ad(g^{-1})V_1, \dots, Ad(g^{-1})V_k)$

Definição B.1.2. Os elementos $f \in S^k(\mathfrak{g}^*)$ que são G invariantes, i.e., $f((Ad(g^{-1})V_1, \dots, Ad(g^{-1})V_k)) = f(V_1, \dots, V_k)$ e denotados por $I^k(G)$, com produto induzido $I^k(G) \otimes I^L(G) \mapsto I^{k+L}(G)$,

conformam a álgebra $I^\bullet(G) = \bigoplus_{k \geq 0} I^k(G)$ chamada a álgebra de *polinômios invariantes* sobre $\mathfrak{g}$.

O nome de polinômios invariantes é justificado pelo seguinte: fixamos uma base $\{e_i\}_{i=1}^n$ de V e denotemos por $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]^k$ o espaço de polinômios homogêneos de grau k nas variáveis $x_1, \dots, x_n$, então o mapa $\sim: f \in S^k(V^*) \mapsto \tilde{f} \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]^k$ agindo pela fórmula $\tilde{f}(x_1, \dots, x_n) = f(v, \dots, v)$ onde $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, é um homeomorfismo, de fato, o mapa induzido $\sim: S^\bullet(V^*) \rightarrow \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ é um isomorfismo de álgebras e a inversa de $\sim$ é chamada *polarização*. Uma prova destas afirmações pode se ver em [7].

Observação B.1.3. Considere um fibrado principal P com 1-forma de conexão $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$, (ver 2.2.5) sobre P e $\Omega \in \Omega^2(P, \mathfrak{g})$ a curvatura de ω , então

$$\Omega^k := \underbrace{\Omega \wedge \dots \wedge \Omega}_{k\text{-vezes}} \in \Omega^{2k}(P, \otimes^k \mathfrak{g}),$$

logo, se $f \in I^k(G)$, temos que $f(\Omega^k) \in \Omega^{2k}(P)$, daí que para $X_1, \dots, X_k \in TP$.

$$f(\Omega^k)(X_1, \dots, X_k) := \frac{1}{(2k)!} \sum_{\sigma} \text{Sig}(\sigma) f(\Omega(X_{\sigma(1)}, \Omega_{\sigma(2)}), \dots, \Omega(X_{\sigma(2k-1)}, \Omega_{\sigma(2k)}))$$

onde σ percorre todas as permutações de $\{1, \dots, 2k\}$ e dado que f e Ω são multilineares, então $f(\Omega^k)$ é multilinear e antissimétrica, denotaremos $f(\Omega^k)$ simplesmente por $f(\Omega)$.

Seja $G \rightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ um fibrado principal. Uma k -forma sobre P com valores na álgebra de Lie, $\sigma \in \Omega^k(P, \mathfrak{g})$ é dita *de tipo* Ad_G , se para todo $g \in G$, tem-se que $R_g^* \sigma = \text{Ad}_{g^{-1}} \circ \sigma$, onde $R_g: p \in P \mapsto pg \in P$ é o difeomorfismo induzido pela ação R de G sobre P . Em particular, a 1-forma de conexão de fibrado principal é um exemplo de forma de tipo Ad_G .

Definição B.1.4. Considere $G \rightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ um fibrado principal, $\sigma \in \Omega^k(P, \mathfrak{g})$ é dita *horizontal* se anula-se em vetores verticais (ver definição 2.2.1).

Dada uma forma σ em P , quando ela é o pullback de uma forma sobre M ? temos o seguinte resultado

Lema B.1.5. Seja $G \rightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ um fibrado principal e $\sigma \in \Omega^k(P, \mathfrak{g})$ horizontal, que é G -invariante, i.e., $R_g^* \sigma = \sigma$ para todo $g \in G$. Então ela se projeta na base, i.e., existe $\bar{\sigma} \in \Omega^k(M)$, tal que $\sigma = \pi^* \bar{\sigma}$.

Demonstração. Definimos $\bar{\sigma}$ como segue, para $X_1, \dots, X_k \in T_x M$ campos em M ,

$$\bar{\sigma}(X_1, \dots, X_k) := \sigma(X_1^*, \dots, X_k^*)(p)$$

aqui $p \in P$ é tal que $\pi(p) = x$ e X_i^* é o levantamento horizontal de X_i para cada $i = 1, \dots, k$, precisamos ver que a definição independe da escolha do ponto p na fibra de x , temos que:

$$\begin{aligned}\sigma(X_1^*, \dots, X_k^*)(pg) &= \sigma_{pg}(X_1^*(pg), \dots, X_k^*(pg)) \\ &= \sigma_{pg}((R_g)_{*p}X_1^*(p), \dots, (R_g)_{*p}X_k^*(p)) \\ &= (R_g^*\sigma_p)(X_1, \dots, X_k) = \sigma_p(X_1^*, \dots, X_k^*).\end{aligned}$$

Onde foi levado em conta que os levantamentos horizontais e a k -forma σ são G -invariantes. Então σ se projeta como queríamos demonstrar. $\square$

Voltando com as notações da observação B.1.3 notemos que, como Ω é horizontal e Ad_G -invariante, tem-se que $f(\Omega)$ é também horizontal e G -invariante, pelo lema prévio, $f(\Omega)$ é o levantamento de uma forma $\overline{f(\Omega)} \in \Omega^k(M)$, vale o seguinte resultado cuja prova pode ser encontrada em [7].

Teorema B.1.6. Com as notações anteriores,

1. $f(\Omega) \in \Omega^{2k}(M)$ é uma forma fechada. Se denotamos por $\omega_P(f) \in H^{2k}(\Omega^\bullet(M))$ a correspondente classe de cohomologia vale que:
2. $\omega_P(f)$ **não** depende da escolha da conexão ω , dependendo apenas da classe de isomorfismo do fibrado P .
3. $\omega_P: I^\bullet(G) \mapsto H(\Omega^\bullet)$ é um homomorfismo de álgebras chamado *o homomorfismo de Chern-Weil*.
4. Para $f: N \mapsto M$ um difeomorfismo de variedades, $\omega_{f^*(P)} = f^* \cdot \omega_P$.

Para $f \in I^\bullet(G)$, $\omega_P(f)$ é chamada a classe característica de P correspondente a f .

Exemplos B.1.7.

1. Seja $G = \text{Gl}(n, \mathbb{R})$ o grupo de matrizes $n \times n$ invertíveis, então a álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ com o comutador de matrizes como sendo o colchete de Lie. Para $g \in G$ e $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, $\text{Ad}(g)A = gAg^{-1}$ e para um inteiro positivo k , denote por $P_{k/2}$ o polinômio homogêneo de grau k , que é o coeficiente de λ^{n-k} do polinômio na variável λ

$$\det(\lambda I - \frac{1}{2\pi}A) = \sum_k P_{k/2}(A, \dots, A)\lambda^{n-k}$$

$P_{k/2} \in I^k(\text{Gl}(n, \mathbb{R}))$ é chamado o $k/2$ -ésimo *polinômio de Pontrjagin*, e a sua imagem pelo homomorfismo de Chern-Weil é chamada a *classe de Pontrjagin*.

2. Para $G = \mathcal{O}(n) \subset \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ o grupo de matrizes ortogonais, i.e., os elementos $g \in G$, tais que $g^t g = g g^t = I$, onde g^t denota a matriz transposta, denotamos $\mathfrak{V}(n)$ a sua álgebra de Lie que consta das matrizes antissimétricas. Se $A \in \mathfrak{V}(n)$ vale que

$$\det(\lambda I - \frac{1}{2\pi} A) = \det(\lambda I + \frac{1}{2\pi} A)$$

logo, para k ímpar $P_{k/2}$ restrito a $\mathcal{O}(n)$ é zero, por tanto pode-se considerar somente $P_L \in I^{2L}(\mathcal{O}(n))$ para $L = 0, 1, \dots, \lceil n/2 \rceil$, onde $\lceil n/2 \rceil$ denota a parte inteira. Note ainda que como todo $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ -fibrado possui uma redução para um $\mathcal{O}(n)$, a imagem pelo homomorfismo de Chern-Weil dos $P_{k/2}$ são zero para k ímpar, mesmo que os polinômios não sejam zero.

3. $G = \mathrm{Gl}(n, \mathbb{C})$ tem álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) = \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$. Onde consideramos polinômios C_k com valor complexo, estes são os coeficientes de λ^{n-k} do seguinte polinômio:

$$\det(\lambda I - \frac{1}{2\pi i} A) = \sum_k C_k(A, \dots, A) \lambda^{n-k} \quad (\text{B.1.1})$$

Aqui A é uma matriz quadrada $i^2 = -1$, a imagem pelo homomorfismo de Chern-Weil desses polinômios fornecem classes características com coeficientes complexos que são chamados *Classes de Chern*. Observe que C_k restrito a $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ satisfaz $i^k C_k(A, \dots, A) = P_{k/2}(A, \dots, A)$. Se concluí que a L -ésima classe de Pontrjagin de um $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ -fibrado é $(-1)^L$ vezes a $2L$ -ésima classe de Chern da complexificação do fibrado.

4. Seja $G = U(n)$, matrizes $g \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{C})$, tais que $g \bar{g}^t = \bar{g}^t g = I$, aqui $\bar{g}^t$ denota a matriz transposta conjugada, e seja $\mathfrak{U}(n) \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ a sua álgebra de Lie, que a subálgebra de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ que consta de matrizes hermitianas antissimétricas, i.e., $A = -\bar{A}^t$, vale o seguinte:

$$\det(\lambda I - \frac{1}{2\pi i} A) = \det(\lambda I + \frac{1}{2\pi i} \bar{A}^t) = \overline{\det(\lambda I - \frac{1}{2\pi i} A)} \quad (\text{B.1.2})$$

segue da equação (B.1.2) que os polinômios C_k definidos na equação (B.1.1), são de valor real quando se restringem a $\mathfrak{U}(n)$ e a imagem pelo homomorfismo de Chern-Weil fica na cohomologia real.

B.2 Classes características em fibrados vetoriais complexos

Dado um fibrado vetorial $E \xrightarrow{\pi} M$ com conexão afim ∇ , no aberto trivializante $U_\alpha \subset M$ a 2-forma de curvatura $(F_\nabla)_\alpha$ muda por conjugação quando mudar-

mos de trivialização (ver seção 2.4). Seja V um $\mathbb{C}$ -espaço vetorial de dimensão r e seja $f: \text{End}(V) \mapsto \mathbb{C}$, neste caso os polinômios invariantes da definição B.1.2, são tais que, $f(g^{-1}mg) = f(m)$ para quaisquer $m \in \text{End}(V)$ e $g \in \text{Gl}(V)$, estas funções são também chamadas *ad-invariantes*.

Exemplo B.2.1. Fixemos $p \in \mathbb{N}$, então $f(m) = \det(m^p)$ e $h(m) = \text{tr}(m^p)$ são funções ad-invariantes, de fato, para todo $g \in \text{Gl}(V)$ tem-se que $(g^{-1}mg)^p = g^{-1}m^p g$, segue então que $f(m) = f(g^{-1}mg)$ e $h(m) = h(g^{-1}mg)$.

Fixando $t \geq 0$ e escrevendo $f(tm)$ como expansão em série de Taylor

$$f(tm) = f_0(m) + f_1(m)t + f_2(m)t^2 + \dots$$

Onde $f_k: \text{End}(V) \rightarrow \mathbb{C}$ é um polinômio homogêneo de grau k nas entradas de m .

Exemplo B.2.2. Tome $f(m) = \det(1+m)$ onde 1 denota a identidade em $\text{End}(V)$, assim para $r = 2$

$$\begin{aligned} f(tm) &= \det(1+tm) = \det \begin{pmatrix} 1+tm_{11} & tm_{12} \\ tm_{21} & 1+tm_{22} \end{pmatrix} \\ &= 1 + (m_{11} + m_{22})t + (m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21})t^2 \end{aligned}$$

Assim $f_0(m) = 1$, $f_1(m) = \text{tr}(m) = m_{11} + m_{22}$ e $f_2(m) = \det(m) = m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}$.

A prova do seguinte resultado pode ser consultada em [27]

Teorema B.2.3. O espaço vetorial real das funções $f: \text{End}(V) \mapsto \mathbb{C}$ ad-invariantes e homogêneas de grau k é gerado pelo conjunto $\{\text{tr}(m^{k_1}), \dots, \text{tr}(m^{k_q}); k_1 + \dots + k_q = k\}$.

Sejam $E \xrightarrow{\pi} M$ um fibrado vetorial complexo de posto r , $\nabla: \Gamma(E) \mapsto \Gamma(E) \otimes \Omega^1(M)$ uma conexão e $F_\nabla: \Gamma(E) \mapsto \Gamma(E) \otimes \Omega^2(M)$ a curvatura de ∇ . Para $k \in \mathbb{N}$, $f_k(F_\nabla) \in \Omega^{2k}(E)$ obtida de $\otimes^k F_\nabla \in \Gamma((\otimes^k \text{End}(E)) \otimes (\otimes^k \Lambda^2 T^*M))$ e aplicando o homomorfismo anti-simetrização como na observação B.1.3 obtemos uma seção de $(\otimes^k \text{End}(E)) \otimes \Lambda^{2k} T^*M$.

$$\begin{array}{ccc} \otimes^k (\text{End}(E) \times \Omega^2(M)) & \xrightarrow{f_k(F_\nabla)} & \Omega^{2k}(M) \times \mathbb{C} \\ \downarrow & \nearrow & \\ \otimes^k \text{End}(E) \times \Omega^{2k}(M) & & \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ (f_k \otimes 1)(\otimes^k F_\nabla) \end{array}$$

Proposição B.2.4. Com as notações acima, temos que, $f_k(F_\nabla)$ é uma $2k$ - forma fechada.

Demonstração. Pelo teorema B.2.3 é suficiente olhar para funções $f_k(m) = \text{tr}(m^k)$. Se $\omega \in \text{End}(E) \otimes \Omega^p(M)$ usando a fórmula 2.1.6, $\text{tr}(\nabla\omega) = \text{tr}(d\omega + [A, \omega]) = d(\text{tr}(\omega))$, assim,

$$df_k(F_\nabla) = \text{tr}(\nabla(F_\nabla \wedge \dots \wedge F_\nabla)) = \text{tr}(\nabla F_\nabla \wedge \dots \wedge F_\nabla) + \dots + \text{tr}(F_\nabla \wedge \dots \wedge \nabla F_\nabla)$$

Como $\nabla F_\nabla = 0$ pela identidade de Bianchi, temos $df_k(F_\nabla) = 0$. Assim, $f_k(F_\nabla)$ define uma classe de cohomologia, $[f_k(F_\nabla)] \in H_{DR}^{2k}(M, \mathbb{C})$. $\square$

A independência da conexão vem do teorema B.1.6 neste caso particular vale o seguinte resultado

Proposição B.2.5. Sejam ∇ e ∇' conexões em E . Então $f_k(F_\nabla) - f_k(F_{\nabla'}) = d\alpha$, onde $\alpha \in \Omega_M^{2k-1} \otimes \mathbb{C}$, i.e, $[f_k(F_\nabla)] \in H_{dR}^{2k}(M, \mathbb{C})$ depende apenas da classe de isomorfismo de fibrado de E .

Demonstração. Denotemos $\nabla' - \nabla = a \in \text{End}(E) \otimes \Omega^1(M)$ e consideremos a projeção sobre o primeiro fator $\pi : M \times [0, 1] \rightarrow M$, o pull-back induz uma conexão $\widetilde{\nabla} := \pi^*\nabla + t\pi^*a$ no fibrado $\pi^*(E)$, para cada $(x, t) \in M \times [0, 1]$, temos que $\pi^*(E)_{(x,t)} = E_x$, logo $\widetilde{\nabla}|_{t=0} = \nabla$ e $\widetilde{\nabla}|_{t=1} = \nabla' = \nabla + a$. Observemos que

$$df_k(F_{\widetilde{\nabla}}) = -dt \wedge d\beta_{2k-1} + dt \wedge \frac{\partial \beta_{2k}}{\partial t} + d\beta_{2k} \quad (\text{B.2.1})$$

Assim, $f_k(F_{\widetilde{\nabla}}) = dt \wedge \beta_{2k-1} + \beta_{2k} \in \Omega^{2k}(M \times [0, 1])$, $\beta_{2k-1} \in \Omega^{2k-1}(M)$ e $\beta_{2k} \in \Omega^{2k}(M \times [0, 1])$ dependendo de $t \in [0, 1]$. E como $f_k(F_{\widetilde{\nabla}})$ é fechada, segue da equação (B.2.1) que $d\beta_{2k} = 0$ e $\frac{\partial \beta_{2k}}{\partial t} = d\beta_{2k-1}$

$$\int_0^1 d\beta_{2k-1} dt = \int_0^1 \frac{\partial \beta_{2k}}{\partial t} dt = \beta_{2k}|_{t=1} - \beta_{2k}|_{t=0} = f_k(F_{\nabla'}) - f_k(F_\nabla)$$

denote por $\alpha := \int_0^1 \beta_{2k-1} dt$, e como $\int_0^1 d\beta_{2k-1} dt = d(\int_0^1 \beta_{2k-1} dt)$, segue a proposição. $\square$

Classes de Chern em fibrados vetoriais

Como foi visto na equação (B.1.1), se $f_k(m)$ é a k -ésima componente homogênea de $f(m) = \det(1 + \frac{i}{2\pi}m)$, quando m é a curvatura de uma conexão ∇ em E , então $f(m) = C(E)$ é chamada *classe de Chern total* e $f_k(m) = C_k(E) \in H_{DR}^{2k}(M, \mathbb{C})$ é a chamada k -ésima classe de Chern.

Exemplos B.2.6.

1. $C_1(E) = [\frac{i}{2\pi} \text{tr}(F_\nabla)]$.
2. $C_2(E) = [\frac{1}{8\pi^2} ((\text{tr}(F_\nabla) \wedge (\text{tr}(F_\nabla))) - \text{tr}(F_\nabla \wedge F_\nabla))]$.

$C_k(E) = 0$ para $k > \frac{\dim M}{2}$ e $k > \text{Rank}(E)$. Já que $m \mapsto \det(1 + \frac{i}{2\pi}m)$ é um polinômio com coeficientes m de grau igual a dimensão da fibra. Enunciamos algumas propriedades das classes características, a prova destes resultados podem-se encontrar em [27]. Nas seguintes proposições, E e F são fibrados vetoriais complexos com base M e posto m e n respectivamente.

Proposição B.2.7.

1. Sejam E e F fibrados vetoriais sobre uma variedade suave M . Então $C(E \oplus F) = C(E) \cdot C(F)$.
2. Seja $\phi: N \mapsto M$ função suave entre variedades, ϕ^*E o fibrado pull-back e o homomorfismo induzido $\phi^*: H_{DR}^{2k}(M, \mathbb{C}) \mapsto H_{DR}^{2k}(N, \mathbb{C})$. Então, $C_k(\phi^*E) = \phi^*C_k(E)$.

Proposição B.2.8. Para soma e tensor de fibrados, temos:

1. $ch(E \oplus F) = ch(E) \oplus ch(F)$.
2. $ch(E \otimes F) = ch(E) \cdot ch(F)$.

Se o fibrado vetorial admite conexão plana, i.e., $F_\nabla = 0$, então $C_k(E) = 0$ para todo k . Daí que se $C_k(E) \neq 0$ para algum $k \in \mathbb{N}$ então E não admite conexão plana, logo, não é um fibrado trivial. Também se para algum $k \in \mathbb{N}$, temos que $C_k(E) \neq C_k(F)$, os fibrados vetoriais E e F não são isomorfos.

Apêndice C

Análise em espaços de Banach

C.1 Teoremas da aplicação inversa e implícita em espaços de Banach

Definição C.1.1. Uma função $f: U \subset E \rightarrow F$ entre um aberto U de um espaço de Banach E em um espaço de Banach F , é dita diferenciável no ponto $x_0 \in U$, se existe um operador limitado $(Df)_x: E \rightarrow F$, tal que

$$\lim_{|h|_E \rightarrow 0} \frac{1}{|h|_1} |f(x+h) - f(x) - Df(x)h|_F = 0. \quad (\text{C.1.1})$$

Se $(Df)_x$ é contínua dizemos que f é de classe C^1 . Se f é diferenciável em cada $x \in E$ então $(Df) \in \text{Hom}(E, F)$, com a norma operador. Isto permite definir indutivamente a noção de função C^∞ , como aquelas funções que são de classe C^r para cada $r \in \mathbb{N}$.

Teorema C.1.2. (*Teorema da aplicação inversa em espaços de Banach*) Seja $f: U \rightarrow F$ uma função diferenciável e seja $x_0 \in U$, tal que $(Df)_{x_0}: U \rightarrow F$ é um isomorfismo. Então existe uma vizinhança U' de x_0 , tal que a restrição de f em U' tem uma inversa,

$$f^{-1}: f(U') \rightarrow U'.$$

Mais ainda, se f é diferenciável então f^{-1} é também diferenciável.

Teorema C.1.3. (*Teorema da aplicação implícita em espaços de Banach*) Seja E é o produto direto de dois espaços de Banach E_1, E_2 e escreva D_1f, D_2f para indicar as derivadas parciais de a função suave f de E_1, E_2 respectivamente. Se a derivada D_2f em um ponto (ξ_1, ξ_2) é um isomorfismo de E_2 para F , existe um mapa suave h de uma vizinhança de ξ_1 em E_1 em uma vizinhança de ξ_2 em E_2 , tal que

$$f(\eta, h(\eta)) = f(\xi_2, \xi_2).$$

Mais ainda, para todo (η_1, η_2) perto de (ξ_1, ξ_2) , com $f(\eta_1, \eta_2) = f(\xi_1, \xi_2)$, temos que $\eta_2 = h(\eta_1)$. Se f é diferenciável então h é também diferenciável.

C.2 Operadores compactos

Os resultados de esta seção, quanto suas demonstrações, podem-se encontrar em ([18]). Um subespaço topológico é dito *relativamente compacto*, se seu fecho é compacto, existe um critério útil a saber.

Proposição C.2.1. Seja X um subconjunto de um espaço normado completo. Se para cada $r > 0$ existe uma cobertura finita de X por bolas abertas de raio r . Então X é relativamente compacto.

Estabelecemos agora algumas notações, $L(E, F)$ denotará o espaço de transformações lineares contínuas do espaço linear E em F . Se $E = F$ denotaremos $L(E)$, ou algumas vezes $End(E)$, para denotar as transformações de E em E .

Definição C.2.2. Um mapa linear $T: E \rightarrow F$ entre espaços normados, é dito *compacto* ou *absolutamente contínuo*, se mapeia conjuntos limitados de E em conjuntos relativamente compactos de F .

Equivalentemente, podemos dizer que T é compacto, se mapeia a bola unitária em um conjunto cujo fecho é compacto. Denotaremos por $K(E, F)$ o conjunto de mapas lineares compactos de E em F . Enunciamos algumas propriedades destes operadores.

Teorema C.2.3. $K(E, F)$ é um espaço vetorial, e mais, se F é completo, então $K(E, F)$ é um subespaço fechado do espaço de mapas lineares de E em F , denotado por $L(E, F)$.

Teorema C.2.4. suponha que E, F, G, H são espaços vetoriais normados e

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{u} G \xrightarrow{g} H,$$

onde f, u, g são mapas lineares. Se u é compacto, então $u \circ f$ e $g \circ u$ são operadores compactos, em particular, $K(E, F)$ é ideal a esquerda e a direita de $L(E, F)$.

Teorema C.2.5. Suponha que E, F são espaços de Banach e $u \in K(E, F)$, então o operador dual $u^* \in L(F^*, E^*)$ é um operador compacto.

C.3 Operadores de Fredholm

Agora, assumimos que os espaços envolvidos são separáveis e de dimensão não necessariamente finita. Denotaremos por $Iso(E, F)$ o subconjunto de $L(E, F)$ de mapas

lineares invertíveis de E em F . Fazemos as convenções estandar de notação $\text{Ker}(T)$ e $\text{Im}(T)$, para o núcleo e a imagem do operador T . Lembramos que, para um mapa linear contínuo $\text{Ker}(T)$ é sempre fechado, mas $\text{Im}(T)$ não necessariamente.

Sejam $T, S \in L(E, F)$, dizemos que T é *congruente modulo operadores compactos* a S e o denotamos por $T \equiv S \text{ mod } K(E, F)$, se $T - S$ é operador compacto, esta congruência é uma relação de equivalência e se $T \equiv S$ e $T_1 \equiv S_1$, então $TT_1 \equiv SS_1$, (sempre que as composições façam sentido) o qual é verificável pelo teorema C.2.4. Se a composta faz sentido também as congruências podem-se somar.

Definição C.3.1. Dizemos que $T: E \rightarrow F$ é invertível *modulo operadores compactos*, se existe um mapa linear $T_1: F \rightarrow E$, tais que

$$TT_1 \equiv I_F \text{ mod } K(F, F) \quad \text{e} \quad T_1T \equiv I_E \text{ mod } K(E, E)$$

Diremos que T_1 é um *inverso* de T modulo operadores compactos.

Definição C.3.2. Os operadores *Fredholm*, denotados por $\text{Fred}(E, F)$, é o subconjunto de $L(E, F)$ que são invertíveis módulo operadores compactos.

Observação C.3.3. A definição acima diz que $T \in L(E, F)$ é de Fredholm se, e somente se, existem $s_1 \in L(F, E)$ e $s_2 \in L(E, F)$, tais que

$$S_1T - \mathbb{1}_E \in K(E) \quad \text{e} \quad TS_1 - \mathbb{1}_F \in K(F) \quad (\text{C.3.1})$$

Modulo operadores compactos, pode-se supor que $S_1 = S_2$ e tomando adjunto vemos que T^* é de Fredholm se, e somente se, T é de Fredholm.

Lema C.3.4. Seja $T \in L(E, F)$. As seguintes condições são equivalentes

1. T é operador de Fredholm.
2. Os espaços $\text{Ker}(T)$, $\text{Ker}(T^*)$ são de dimensão finita e $\text{Im}(T)$ e $\text{Im}(T^*)$ são fechados.
3. Os espaços $\text{Ker}(T)$, $\text{Ker}(T^*)$ são de dimensão finita e $\text{Im}(T)$ é fechado.

Demonstração. Se $T \in \text{Fred}(E, F)$ temos:

$$\text{Ker}(T^*)^\perp = \text{Im}(T) \quad \text{e} \quad \text{Im}(T^*) = \text{Ker}(T)^\perp$$

1. $\rightarrow$ 2. Suponhamos $T \in \text{Fred}(E, F)$, vejamos primeiro que o núcleo tem dimensão finita. Suponha que $(x_n) \subset \text{Ker}(T)$ com $\|x_n\| \leq 1$. Então

$$x_n = (I - S_1T)x_n = Cx_n$$

onde C é um operador compacto e portanto podemos extrair uma subsequência convergente, onde segue que, a esfera é compacta em $\text{Ker}(T)$, logo, $\text{Ker}(T)$ tem dimensão finita. Mostraremos agora que $\text{Im}(T)$ é fechado. Seja $(y_n) = (Tx_n) \subset \text{Im}(T)$ e suponha que $y_n \rightarrow y$, queremos mostrar que $y \in \text{Im}(T)$. Passando possivelmente a subsequências, podemos supor que $(x_n) \subset \text{Ker}(T)^\perp$. Suponha primeiramente que $\|x_n\| \leq c$ e note que

$$x_n = S_1 y_n + (I - S_1 T)x_n \quad (\text{C.3.2})$$

como $(I - S_1 T)$ é compacto, podemos assumir passando a subsequências se necessário, que $(I - S_1 T)x_n$ é de Cauchy. Como y_n converge, segue que $(S_1 y_n)$ é de Cauchy, o que implica que (x_n) é de Cauchy, portanto, $x_n \rightarrow x$ e $Tx = y$. Podemos então supor que $\|x_n\| \rightarrow \infty$, defina então

$$\tilde{x}_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$$

segue que $T\tilde{x}_n = \frac{y_n}{\|x_n\|} \rightarrow 0$. Argumentando como antes, podemos supor que $\tilde{x}_n \rightarrow \tilde{x}$, passando a subsequência se necessário e que $T(\tilde{x}) = 0$. Mas $\text{Ker}(T)^\perp$ é fechado, daí que $\tilde{x} \in \text{Ker}(T)^\perp$ o qual é absurdo pois $\|\tilde{x}\| = 1$. Analogamente prova-se que $\text{Im}(T^*)$ é fechado.

2. $\rightarrow$ 3. É só a definição.

3. $\rightarrow$ 1. Suponha que $\text{Ker}(T)$ e $\text{Ker}(T^*)$ são de dimensão finita e $\text{Im}(T)$ fechado, daí que podemos decompor

$$E = \text{Ker}(T) \oplus (\text{Ker}(T)^\perp) \quad \text{e} \quad F = \text{Ker}(T^*) \oplus \text{Im}(T) \quad (\text{C.3.3})$$

então $T|_{\text{Ker}(T)^\perp}: \text{Ker}(T)^\perp \rightarrow \text{Im}(T)$ é uma bijeção, como estes espaços são fechados, portanto de Banach, usando o teorema da inversa contínua, existe um operador linear limitado S , tal que $ST = I$ em $\text{Ker}(T)^\perp$ e $TS = I$ em $\text{Im}(T)$, estendendo por zero sobre $\text{Ker}(T^*)$ e denotando por $\pi|_{\text{Ker}(T)}$ e $\pi|_{\text{Ker}(T^*)}$ as projeções ortogonais sobre $\text{Ker}(T)$ e $\text{Ker}(T^*)$ respectivamente, tem-se que

$$ST - I_E = \pi|_{\text{Ker}(T)} \quad \text{e} \quad TS - I_F = \pi|_{\text{Ker}(T^*)} \quad (\text{C.3.4})$$

Segue que T é invertível módulo operadores compactos. $\square$

Observação C.3.5. Temos uma decomposição para um operador $T \in \text{Fred}(E, F)$

$$E = E_0 \oplus E_1 \quad F = F_0 \oplus F_1 \quad (\text{C.3.5})$$

em que E_1, F_1 tem dimensão finita e $T|_{E_0} \rightarrow F_0$ é um isomorfismo linear.

Teorema C.3.6. Sejam E espaço de Banach e $T: E \rightarrow E$ um operador compacto, então $1_E - T$ é Fredholm

Proposição C.3.7. A composição de operadores Fredholm é um operador Fredholm. Se T é operador Fredholm e u é um operador compacto, então $T+u$ é um operador Fredholm.

Demonstração. Suponha que $T_1 \in \text{Fred}(E, F)$ e $T_2 \in \text{Fred}(F, G)$, queremos mostrar que $T_2 T_1$ é de Fredholm. Temos então que $S_1 T_1 - I_E \in K(E)$ e que $S_2 T_2 - I_F \in K(F)$, observe que

$$S_1 S_2 T_2 T_1 - I_E = S_1 (S_2 T_2 - I_F) T_1 + (S_1 T_1 - I_E) \in K(E).$$

Similarmente se mostra que $T_2 T_1 S_1 S_2 - I_G \in K(G)$ de onde segue o resultado. $\square$

Definição C.3.8. Se $T \in \text{Fred}(E, F)$, se define o *índice de* T , denotado por $\text{ind}(T)$, como

$$\text{ind}(T) = \dim(\text{Ker}(T)) - \dim(F/T(E))$$

Teorema C.3.9. Sejam E, F espaços de Banach, então $\text{Fred}(E, F)$ é aberto em $L(E, F)$ e à aplicação $T \mapsto \text{ind}(T)$ é contínua sobre $\text{Fred}(E, F)$, assim é constante nas componentes conexas.

A seguinte observação motiva porque é importante para este trabalho estudar os operadores de Fredholm. Seja N uma vizinhança aberta conexa do zero em um espaço de Banach U .

Definição C.3.10. Um mapa suave $\Phi: N \rightarrow V$, entre variedades de Banach N e V é chamado um mapa de Fredholm se para cada $x \in N$ a derivada

$$(D\Phi)_x: U \rightarrow V$$

é um operador de Fredholm. Dizemos que $\text{ind}((D\Phi)_x)$ é o $\text{ind}(\Phi)$, este índice é independente da escolha de $x \in N$

Observação C.3.11. Suponha que Φ é um mapa de Fredholm de índice r e sem perda de generalidade que $\Phi(0) = 0$, suponha além do mais que $(D\Phi)_0$ é sobrejetor, então $\text{ind}(\Phi)$ é precisamente $\dim(\text{Ker}((D\Phi)_0))$, existe então um difeomorfismo f definido em uma vizinhança de 0 (ver [6] seção 4.2.4), tal que

$$\Phi \circ f = (D\Phi)_0$$

dizemos que Φ é equivalente pela direita com $(D\Phi)_0$ e que f lineariza a Φ . No caso geral, em que $(D\Phi)_0$ não é sobrejetora, consideramos uma decomposição como em C.3.5,

$$N \subset U = U_0 \oplus F \quad \text{e} \quad V = V_0 \oplus G$$

onde $(D\Phi)_0$ é isomorfismo de U_0 sobre F_0 e tanto V quanto G são de dimensão finita, consideramos então

$$\Phi' = \Phi \circ \text{Pr}_1$$

onde Pr_1 projeta V sobre V_0 , então, podemos aplicar a linearização discutida acima à função Φ' .

Ver [6] proposição 4.2.19 para a prova do próximo resultado.

Proposição C.3.12. Com as notações da observação acima, um mapa de Fredholm Φ de uma vizinhança conexa de 0, é localmente equivalente pela direita com um mapa da forma

$$\tilde{\Phi}: U_0 \times F \rightarrow V_0 \times G, \quad \text{onde} \quad \tilde{\Phi}(\xi, \eta) = (L(\xi), \alpha(\xi, \eta)) \quad (\text{C.3.6})$$

aqui L é um isomorfismo linear de U_0 em V_0 , F e G são de dimensão finita, $\text{ind}(\Phi) = \dim(F) - \dim(G)$ e a derivada de α anula-se em 0.

Consequência do teorema acima é que existe um modelo local de dimensão finita para uma vizinhança de 0 no conjunto de zeros de Φ , por meio de um difeomorfismo de U , este pode ser pensado como o conjunto de zeros do mapa $f: F \rightarrow G$, onde $f(y) = \alpha(0, y)$.

C.4 Operadores Elípticos

Sejam E, F fibrados vetoriais sobre uma variedade compacta N de posto k e k' respectivamente. Um operador diferencial D é um mapa linear

$$D: \Gamma(N, E) \rightarrow \Gamma(N, F).$$

Em uma carta $U \subset N$ com coordenadas $\{x^\mu\}$, tal que E e F são triviais e usando a notação multi-índice,

1. $M = (\mu_i, \dots, \mu_m)$, tal que $\mu_j \in \mathbb{N}_0$.
2. $|M| = \sum_i \mu_i$.
3. $D_M = \frac{\partial^{|M|}}{\partial x^M} = \frac{\partial^{\mu_1 + \dots + \mu_m}}{\partial (x^1)^{\mu_1} \dots \partial (x^m)^{\mu_m}}$

para uma seção s de E , podemos escrever

$$[Ds(x)]^\alpha = \sum_{|M| \leq p, 1 \leq a \leq k'} A_a^{M\alpha}(x) D_M s^a(x) \quad 1 \leq \alpha \leq k'$$

$(A^M)_a^\alpha$ é uma matriz $k \times k'$ e p é chamado o ordem de D . O simbolo de D é a matriz $k \times k'$

$$\sigma(D, \xi) = \sum_{|M|=p} A_a^{M\alpha}(x) \xi_M,$$

onde, $\xi \in \mathbb{R}^m$. Se a matriz $\sigma(D, \xi)$ é invertível para todo $\xi \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, D é dito um *operador elíptico*. Os resultados deste seção são usados em 3.5, as provas destes resultados podem ser encontrados em [24], apêndice A.3.2.

Lema C.4.1. Sejam $A \xrightarrow{S} B \xrightarrow{T} C$ uma sequência de operadores lineares limitados sobre espaços de Hilbert, então $\text{Ker}(T) = \text{Im}(S)$ se, e somente se, $\text{Ker}(S^*) = \text{Im}(T)^*$

Este lema implica no seguinte

Corolário C.4.2. Seja $F \xrightarrow{L_1} G \xrightarrow{L_2} H$ um complexo de operadores diferenciais entre fibrados vetoriais sobre uma variedade compacta M , com produtos internos respectivos sobre as fibras, se o simbolo associado satisfaz: $\sigma(L_i^*) = (\sigma(L_i))^*$ para $i = 1, 2$, então, $F \xrightarrow{L_1} G \xrightarrow{L_2} H$ é elíptico se, e somente se, $H \xrightarrow{L_2^*} G \xrightarrow{L_1^*} F$ é elíptico.

C.5 Teoremas de Sobolev

O conteúdo deste apêndice é usado na seção 3.4 para conseguir mostrar propriedades boas na topologia de $\mathcal{B}(P)$, veja a equação (3.4.1). Se definem as normas L_k^p sobre o espaço de seções C^∞ do fibrado vetorial $W \rightarrow M$ pela fórmula,

$$|s|_{L_k^p} := \int_M (|s(x)|^p + |\nabla(s(x))|^p + \cdots + |\nabla^k(s(x))|^p)^{\frac{1}{p}} dV \quad (\text{C.5.1})$$

onde $\nabla^j s := \nabla \circ \cdots \circ \nabla s \in \Gamma(W \otimes T^{0,j}(M))$ e $|\nabla^j s|$ é calculada ponto a ponto usando o produto interno em cada fibra de W e a métrica riemanniana sobre M . O completamento do espaço de seções C^∞ de W com respeito a norma L_p^k dada acima é denotado por $\Omega_{L_k^p}^0(M, W)$ e é chamado *espaço Sobolev de L_k^p -seções*.

Valem os seguintes resultados cujas provas podem ser achadas em ([3], capítulo 2).

Teorema C.5.1. (*Teorema da multiplicação de Sobolev*) Sejam W e W' fibrados vetoriais sobre M com $\dim(M) = n$. Então existe um mapa linear contínuo de multiplicação,

$$\Omega_{L_k^p}^0(M, W) \otimes \Omega_{L_{k'}^{p'}}^0(M, W') \rightarrow \Omega_{L_r^q}^0(M, W \otimes W')$$

desde que $r \leq \min\{k, k'\}$ e $r - \frac{n}{q} < k - \frac{n}{p} + k' - \frac{n}{p'}$

Teorema C.5.2. (*Teorema do mergulho compacto de Sobolev*) Nas hipóteses do teorema prévio vale que

1. Existe um mergulho contínuo de $\Omega_{L_k^p}^0(W, M)$ nas C^r -seções de W , desde que $0 \leq r < k - \frac{n}{p}$.
2. Se $k - \frac{n}{p} > k' - \frac{n}{p'}$ e $k \geq k'$, existe uma inclusão contínua $\Omega_{L_k^p}^0(W, M) \subset \Omega_{L_{k'}^{p'}}^0(W, M)$ a qual é compacta se $k' < k$.